МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙ

Кафедра вищої математики, математичного моделювання та фізики

ВИЩА МАТЕМАТИКА
ІІ СЕМЕСТР

Навчально-методичний посібник
для самостійної роботи
здобувачів вищої освіти
за спеціальністю:
121 – Інженерія програмного забезпечення

Київ - 2022

Вища математика. II семестр. Навчально-методичний посібник для самостійної роботи здобувачів вищої освіти за спеціальністю: 121 – Інженерія програмного забезпечення / Упор.: Замрій І.В., Шкапа В.В., Власик Г.М.– К.: ДУТ, 2022. – 52 с.

Упорядники: І.В. Замрій, канд. фіз.-мат. наук, доц.
В.В. Шкапа, канд. фіз.-мат. наук.
Г.М. Власик, канд. фіз.-мат. наук.

Навчально-методичний посібник обговорено і затверджено на засіданні кафедри вищої математики, математичного моделювання та фізики ДУТ. Протокол №7 від 19.01.2022 р.

Навчально-методичний посібник містить: стислі теоретичні відомості, які підкріплені відповідними прикладами, та підсумкову контрольну роботу за II семестр. Дані методичні вказівки складені для допомоги студентам в освоєнні курсу вищої математики за II семестр, самостійній роботі над модульними індивідуальними домашніми завданнями.

Диференціальне числення функції однієї змінної

Нехай x_1 і x_2 – два значення аргументу, а $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ – відповідні значення функції $y = f(x)$.

Тоді різниця $\Delta x = x_2 - x_1$ називається приростом аргументу, а різниця $\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$ – приростом функції на відрізку $[x_1, x_2]$.

Похідною функції $y = f(x)$ в точці x називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу в цій точці, якщо приріст аргументу прямує до нуля

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ або } y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Похідна позначається y' або $\frac{dy}{dx}$.

Геометрично похідна в точці x – це кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці x.

Похідна функції в точці x - це швидкість зміни функції в точці x.

Відшукання похідної називається диференціюванням функції.

Таблиця похідних елементарних функцій

1. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}.$

1^a. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$

$1^б$. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$

2. $(\sin x)' = \cos x.$

3. $(\cos x)' = -\sin x.$

4. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$

7. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$

7^a $(\ln x)' = \frac{1}{x}.$

8. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}.$

9. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}.$

10. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

11. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

5. $\left(ctgx\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}.$

6. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a.$

6[a] $\left(e^x\right)' = e^x.$

12. $\left(shx\right)' = chx.$

13. $\left(chx\right)' = shx.$

14. $\left(thx\right)' = \dfrac{1}{ch^2 x}.$

15. $\left(cthx\right)' = -\dfrac{1}{sh^2 x}.$

Основні правила диференціювання функцій

I. $\left(u \pm v\right)' = u' \pm v'.$

II. $\left(c \cdot u\right)' = cu', \quad c = const.$

III. $\left(u \cdot v\right)' = u'v + v'u.$

IV. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}.$

Похідна складеної функції

$$\left(f\left(g\left(x\right)\right)\right)' = f'\left(g\left(x\right)\right) \cdot g'\left(x\right).$$

<u>Приклади.</u>

1. $\left(x^{100}\right)' = 100x^{99}.$

2. $\left(\sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{x^5}\right)' = \left(\sqrt[3]{x}\right)' + \left(\dfrac{1}{x^5}\right)' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' + \left(x^{-5}\right)' = \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - 5x^{-6} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{5}{x^6}.$

3. $\left(x^2 - 3x + 2\right)' = \left(x^2\right)' - \left(3x\right)' + \left(2\right)' = 2x - 3.$

4. $\left(\dfrac{x^2 - 1}{x^3 + x}\right)' = \dfrac{\left(x^2 - 1\right)'\left(x^3 + x\right) - \left(x^3 + x\right)'\left(x^2 - 1\right)}{\left(x^3 + x\right)^2} = \dfrac{2x\left(x^3 + x\right) - \left(3x^2 + 1\right)\left(x^2 - 1\right)}{\left(x^3 + x\right)^2}.$

5. $\left(x^2 \cdot 7^x\right)' = \left(x^2\right)' \cdot 7^x + \left(7^x\right)' \cdot x^2 = 2x \cdot 7^x + 7^x \ln 7 \cdot x^2.$

6. $\left(\ln tgx\right)' = \dfrac{1}{tgx} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x}.$

7. $\left(5^{\cos x}\right)' = 5^{\cos x}\ln 5\cdot(-\sin x)$.

8. $\left(ctg^7 x\right)' = 7ctg^6 x\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$.

9. $\left(\frac{x}{5}+\frac{5}{x}-\frac{x^2}{5}+\frac{5}{x^2}\right)' = \frac{1}{5}-\frac{5}{x^2}-\frac{2}{5}x-\frac{10}{x^3}$.

10. $\left(7^{x^7}\right)' = 7^{x^7}\cdot\ln 7\cdot 7x^6$. ї

Похідна параметрично заданої функції.

Якщо функція задана параметрично

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\varphi(t), \quad \alpha\le t\le\beta, \end{cases}$$

то її похідна знаходиться за формулою

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\varphi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Приклад. Знайти y'_x, якщо $x=2\cos t,\ y=3\sin t$.

$$y'_x=\frac{(3\sin t)'}{(2\cos t)'}=\frac{3\cos t}{-2\sin t}=-\frac{3}{2}ctgt.$$

Диференціювання неявно заданої функції

Нехай функція задана рівнянням

$$F(x,y)=0,$$

яке не можна розв'язати ні відносно x, ні відносно y. В цьому випадку кажуть, що функція задано неявно.

Щоб продиференціювати неявно задану функцію, потрібно взяти похідну по x від обох частин рівності, вважаючи y функцією від x, і розв'язати одержане рівняння відносно y'.

Приклад. Знайти похідну y', якщо $x^2+y^3-2yx+3x=1$.

Маємо

$$\left(x^2+y^3-2xy+3x\right)'=(1)',$$
$$2x+3y\cdot y'-2\left(y'\cdot x+yx'\right)+3=0,$$
$$2x+\underline{3y^2\cdot y'}-\underline{2y'x}-2y+3=0,$$
$$y'\left(3y^2-2x\right)=2y-2x-3,$$
$$y'=\frac{2y-2x-3}{3y^2-2x}.$$

<u>Похідні вищих порядків</u>

Нехай на інтервалі (a,b) задана диференційована функція $y=f(x)$, тоді її похідна $f'(x)$, яку називатимемо **похідною першого порядку**, також є функцією від x. Якщо $f'(x)$ також має похідну на інтервалі (a,b) або в деякій точці $x\in(a,b)$. Тоді цю похідну називають **похідного другого порядку** і позначають із символів

$$y'',\quad f''(x),\quad \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Аналогічно вводиться поняття похідної будь-якого порядку.

<u>Приклад</u>. Знайти y''', якщо $y=2+x+x^2-x^5+\cos x.$

Маємо

$$y'=1+2x-5x^4-\sin x,$$
$$y''=2-20x^3-\cos x,$$
$$y'''=-60x^2+\sin x.$$

<u>Правила Лопіталя</u>

<u>Теорема 1.</u> Нехай функції $f(x),\quad \varphi(x)$ визначені і диференційовані в околі точки x_0, за винятком, можливо самої точки x_0, причому

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=0,$$

і у вказаному околі $\varphi'(x)\neq 0$. Тоді якщо існує границя відношення похідних $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то існує і границя відношення функцій $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ і ці границі рівні між собою: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Теорема 2. Нехай функції $f(x)$, $\varphi(x)$ визначені і диференційовані в околі точки x_0 і в цьому околі

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty,\quad \varphi'(x)=0.$$

Тоді якщо існує границя $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то існує границя $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ і

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Зауваження. Якщо умовам теорем задовольняють функції $f(x)$, $\varphi(x)$, то правила Лопіталя можна застосовувати ще раз.

Приклад. Обчислити границі 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-e^{-3x}}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+6x^2+12x+8}{x+2}$.

Маємо

1) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-e^{-3x}}{x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{5x}-e^{-3x}\right)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{5e^{5x}+3e^{-3x}}{1}=8.$$

2) $$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+6x^2+12x+8}{x+2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to -2}\frac{\left(x^3+6x^2+12x+8\right)'}{(x+2)'}=\lim_{x\to -2}\frac{3x^2+12x+12}{1}=0.$$

Застосування диференціального числення для дослідження функцій

Щоб знайти інтервали монотонності функції $f(x)$, треба:

1) знайти область визначення функції;
2) знайти похідну даної функції;
3) знайти критичні точки I роду з рівняння $f'(x)=0$ та з умови, що $f'(x)$ не існує;

4) розділити критичним точками область визначення на інтервали і у кожному з них визначити знак похідної. На інтервалах, де похідна задана функція - зростає, а де від'ємна – спадає.

Точка x_0 називається **точкою локального максимуму** (або **мінімуму**) функції $f(x)$, якщо існує такий окіл $0<|x-x_0|<\delta$ точки x_0, який належить області визначення функції, і для всіх x з цього околу виконується нерівність $f(x)< f(x_0)$ (або $f(x)> f(x_0)$).

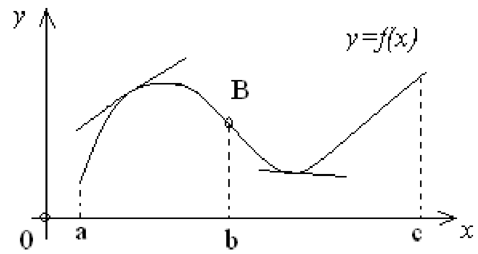
Точки локального мінімуму та максимуму називаються **точками локального екстремуму.**

Правило дослідження функції $f(x)$ на екстремум:

1) знайти критичні точки I роду (ті, де $f'(x)=0$ або $f'(x)$ не існує). Вибрати серед них ті, що належать області визначення.

2) якщо похідна при переході через точку x_0 змінює знак із "+" на "-" (із "-" на "+"), то x_0 - точка локального максимуму (мінімуму).

3) знайти значення функції в точках локального екстремуму.



Крива $y=f(x)$ називається **опуклою (вгнутою)** на інтервалі, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать нижче довільної її дотичної на цьому інтервалі.

Точкою перегину називається така точка кривої, яка відділяє її опуклу частину від вигнутої.

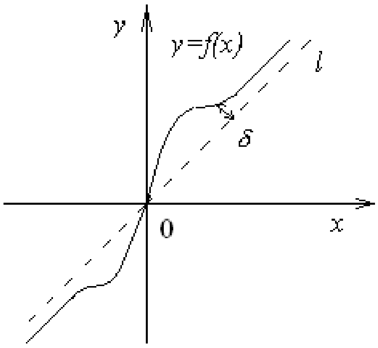
На малюнку: на (a,b) крива опукла, на (b,c) - вгнута, B- точка перегину.

Щоб дослідити криву $y=f(x)$ на опуклість, вгнутість та знайти її точки перегину, треба

1) знайти критичні точки II роду (точки, в яких $f''(x)=0$ або не існує).

2) розділити критичними точками область визначення на інтервалі і у кожному з них визначити знак $f''(x)$. Якщо $f''(x) > 0$, то $f(x)$ вгнута на цьому інтервалі, якщо $f''(x) < 0$, то опукла.
3) якщо при переході через критичну точку II роду $f''(x)$ змінює знак, і ця точка належить області визначення, то дана точка – точка перегину функції.

Асимптоти кривої



Пряма ℓ називається асимптотою кривої, якщо відстань δ від змінної точки М кривої до цієї прямої прямує до нуля, коли точка М, рухаючись по кривій, віддаляється на нескінченність.

Для існування вертикальної асимптоти $x = x_0$ необхідно і достатньо, щоб

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \infty, \text{або} \lim_{x\to x_0+0} f(x) = \infty, \text{ або } \lim_{x\to x_0} f(x) = \infty.$$

Крива $y = f(x)$ буде мати похилу асимптоту $y = kx + b$, якщо існують скінченні границі

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}; \quad b = \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - kx \right).$$

Схема дослідження функції та побудова її графіка:

1) знайти область визначення функції;
2) знайти точки перегину графіка з координатними осями;
3) дослідити функцію на періодичність, парність і непарність;
4) знайти точки розриву та дослідити їх;

5) знайти інтервали монотонності, точки локальних екстремумів та значення функції в цих точках;
6) знайти інтервали вгнутості, опуклості та точки перегину;
7) знайти асимптоти кривої;
8) побудувати графік функції, враховуючи результати пунктів 1)-7).

Приклад. Провести повне дослідження функції $y = \dfrac{x^2 - 2}{x+1}$ та побудувати її графік.

1) Область визначення функції $x \in (-\infty;-1) \cup (-1;+\infty)$.
2) Точки перегину з віссю Ox: $y = 0 : x^2 = 2, x = \pm\sqrt{2}$. Маємо $A\left(-\sqrt{2};0\right)$ та $B\left(\sqrt{2};0\right)$.

З віссю Oy: $x = 0 : y = -2$. Маємо $C(0;-2)$.

3) Функція періодична. Перевіримо парність та непарність:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 2}{(-x)+1} = \frac{x^2 - 2}{-x+1}.$$

$f(-x) \neq f(x), \quad f(-x) \neq -f(x)$, тому функція ні парна, ні непарна.

4) $x = -1$ - точка розриву II роду та вертикальна асимптота.

$$\lim_{x \to -1-0} \frac{x^2 - 2}{x+1} = \left\{ \frac{-1}{-0} \right\} = +\infty;$$

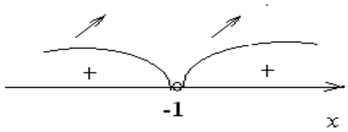
$$\lim_{x \to -1+0} \frac{x^2 - 2}{x+1} = \left\{ \frac{-1}{+0} \right\} = -\infty.$$

5) Інтервали монотонності. Точки локального екстремуму.

$$y' = \frac{2x(x+1) - \left(x^2 - 2\right)}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 2}{(x+1)^2}.$$

$$y' = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 2 = 0 \Rightarrow x \in \varnothing.$$

$$y' \quad \textit{не існує} \quad \Rightarrow (x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1.$$



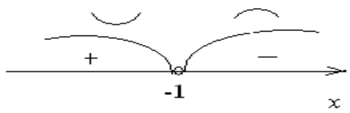
$y'(-2) > 0,$
$y'(0) > 0.$

Функція зростає на всій області визначення. Точок локального екстремуму немає.

6) Інтервали вгнутості, опуклості. Точки перегину.

$$y'' = \frac{(2x+2)(x+1)^2 - 2(x+1)\left(x^2+2x+2\right)}{(x+1)^4} = \frac{2(x+1)\left(x^2+2x+1-x^2-2x-2\right)}{(x+1)^4} = \frac{-2}{(x+1)^3}.$$

$y'' = 0 \Rightarrow x \in \varnothing.$



y' *не існує* $\Rightarrow (x+1)^3 = 0 \Rightarrow x = -1.$

$y'(-2) > 0,$
$y'(0) > 0.$

На інтервалі $(-\infty;-1)$ функція вгнута, на інтервалі $(-1;+\infty)$- опукла. Точок перегину немає.

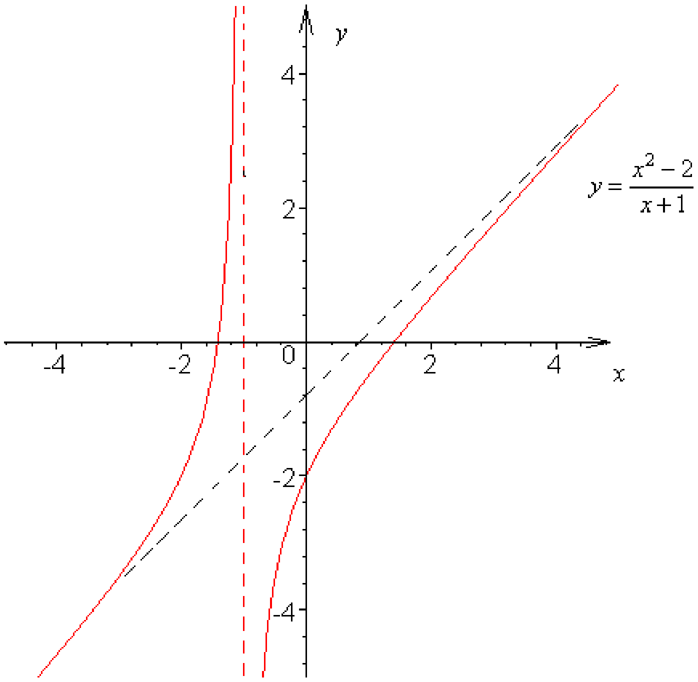
7) $x = -1$- вертикальна асимптота:

Дослідимо функцію на існування похилих асимптот

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2-2}{x+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2}{x+x} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{2}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = 1.$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2}{x+1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2-x^2-x}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x-2}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-1-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}} = -1.$$

$y = x - 1$- похила асимптота.



<u>**Найбільше та найменше значення функції на відрізку**</u>

Неперервна на відрізку $[a,b]$ функція $y = f(x)$ досягає на цьому відрізку найменшого та найбільшого значення. Щоб знайти їх треба:

1) знайти критичні точки I роду, які належать інтервалу (a,b);
2) обчислити значення функції $f(x)$ у знайдених критичних точках і точках a,b і серед цих значень вибрати найбільше (найменше).

<u>Приклад</u>. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = 4x^3 - 3x^2 + 8$ на відрізку $[-2;1]$.

1) Знайдемо критичні точки I роду.

$y' = 12x^2 - 6x = 6x(2x-1).$

$y' = 0 \Rightarrow x = 0$ та $x = \frac{1}{2}.$

y' *не існує* $\Rightarrow x \in \varnothing.$

2) $f(0)=8,$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=7\frac{3}{4},$

$f(-2)=-36,$

$f(1)=9.$

Отже, $y_{найб}=9$ при $x=1,$ $y_{найм}=-36$ при $x=-2.$

Інтегральне числення

Невизначений інтеграл

В диференціальному численні розв'язується така задача: для заданої функції знайти її похідну. В інтегральному численні розв'язується обернена задача: за даною похідною відновити первісну функцію.

Первісною функцією F(x) для заданої функції *f(x)* називається функція, яка задовольняє умовам $F'(x)=f(x)$, $dF(x)=f(x)dx$.

Наприклад. Перевірити першу умову для функцій:

1) $\left(x^4+3\right)'=4x^3;$ 2) $\left(x^4-2\right)'=4x^3;$

3) $\left(x^4+7\right)'=4x^3;$ 4) $\left(x^4\right)'=4x^3.$

Висновок: для функції $f(x)=4x^3$ існують відмінні первісні функції.

Первісні функції для функції *f(x)* різняться між собою на сталу величину, тобто *F(x)=Ф(x)+C.*

Невизначеним інтегралом для неперервної функції *f(x)* називається множина всіх первісних *F(x)* і позначається

$$\int f(x)dx=F(x)=C\ .$$

Основними властивостями невизначеного інтеграла є такі:

1) $\int Kf(x)dx=K\int f(x)dx;$ 2) $\int\left(f(x)\pm\varphi(x)\right)dx=\int f(x)dx\pm\int\varphi(x)dx.$

Таблиця основних інтегралів

1. $\int dx = x + C$;

2. $\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$; $(\alpha \neq -1)$

3. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$;

4. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$;

5. $\int e^u du = e^u + C$;

6. $\int \sin u du = -\cos u + C$;

7. $\int \cos u du = \sin u + C$;

8. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + C$;

9. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + C$;

10. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|tg\frac{u}{2}\right| + C$;

11. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|tg\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$;

12. $\int tgudu = -\ln|\cos u| + C$;

13. $\int ctgudu = \ln|\sin u| + C$;

14. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{u}{a} + C$;

15. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$;

16. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$;

17. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$;

18. $\int chudu = shu + C$;

19. $\int shudu = chu + C$;

20. $\int \frac{du}{ch^2 u} = thu + C$;

21. $\int \frac{du}{sh^2 u} = -cthu + C$;

22. $\int tgudu = -\ln|\cos u| + C$;

23. $\int ctgudu = \ln|\sin u| + C$;

24. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{u}{a} + C$;

25. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$;

26. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$;

27. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$;

28. $\int chudu = shu + C$;

29. $\int shudu = chu + C$;

30. $\int \frac{du}{ch^2 u} = thu + C$;

31. $\int \frac{du}{sh^2 u} = -cthu + C$;

Наприклад. Знайти інтеграли:

$$1)\int\frac{x^2-6}{x^2+5}dx;\quad 2)\int\frac{7x+4}{\sqrt{3-x^2}};\quad 3)\int\frac{dx}{x^2+3x-4};\quad 4)\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+9}}.$$

Розв'язання. Часто, за допомогою деяких простих перетворень, підінтегральну функцію можна звести до табличних інтегралів. Зупинимося на деяких із них:

1) Виділимо цілу частину дробової функції за допомогою приписування (+5) і (-5) у чисельнику дробу. Одержимо вираз, який уже можна інтегрувати

$$\frac{x^2-6}{x^2+5}=\frac{x^2+5-5-6}{x^2+5}=\frac{x^2+5}{x^2+5}-\frac{11}{x^2+5}=1-\frac{11}{x^2+5};$$

$$\int\frac{x^2-6}{x^2+5}dx=\int\left(1-\frac{11}{x^2+5}\right)dx=\int dx-11\int\frac{dx}{x^2+5}=1-\frac{11}{\sqrt{5}}arctg\frac{x}{\sqrt{5}}+C.$$

2) В силу другої основної властивості підінтегральну функцію запишемо у вигляді алгебраїчної суми інтегралів і до кожного із них знайдемо відповідне табличне значення.

$$\int\frac{7x+4}{\sqrt{3-x^2}}dx=7\int\frac{xdx}{\sqrt{3-x^2}}+4\int\frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}=I$$

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{3-x^2}}=\left|\begin{matrix}u=3-x^2\\ du=-2xdx\end{matrix}\right|=-\frac{1}{2}\int\frac{-2xdx}{\sqrt{3-x^2}}=-\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{u}}=-\frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du=-\frac{1}{2}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}=-\sqrt{u}=-\sqrt{3-x^2}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}=\left|\begin{matrix}u=x, a=\sqrt{3}\\ du=dx,\end{matrix}\right|=\int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\arcsin\frac{u}{a}=\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}};$$

$$I=7\left(-\sqrt{3-x^2}\right)+4\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}+C=4\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}-7\sqrt{3-x^2}+C.$$

3) Після виділення повного квадрата у знаменнику дробової функції одержимо табличний інтеграл.

$$\int\frac{dx}{x^2+3x-4}=\left|x^2+3x-4=\left(x+\frac{3}{2}\right)-4-\frac{9}{4}=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2\right|=$$

$$=\int\frac{dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\left|\begin{matrix}u=x+\frac{3}{2}, a=\frac{5}{2}\\ du=dx,\end{matrix}\right|=\int\frac{du}{u^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+C=\ln\left|\frac{x+\frac{3}{2}-\frac{5}{2}}{x+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}}\right|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{x-1}{x+4}\right|+C.$$

4) Виділимо повний квадрат під знаком квадратного кореня і одержимо табличний інтеграл.

$$\int=\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+9}}=\left|\begin{matrix}x^2+4x+9=(x+2)^2+9-4=\\ =(x+2)^2+5=(x+2)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2\end{matrix}\right|=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+5}}=\left|\begin{matrix}u=x+2,\\ du=dx, a^2=5\end{matrix}\right|=$$

$$=\int\frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}}=\ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right|=\ln\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2+5}\right|+C=\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+9}\right|+C.$$

Методи інтегрування

Основними методами, які дають можливість звести задані інтеграли до табличних, є метод заміни змінної та метод інтегрування частинами.

Метод заміни змінної

Метод заміни змінної або метод підстановки базується на заміні змінної x на нову змінну t. Ці змінні зв'язані між собою співвідношенням $x=\varphi(t),$ де $\varphi(t)$ - неперервна монотонна функція, яка має неперервну похідну $\varphi'(t),$ а відповідні інтеграли мають вигляд $\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$

Якщо інтеграл за змінною t знайдений і відома обернена функція $t=\omega(x)$, тоді

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=\Phi(\omega(x))+C.$$

Приклад. Знайти інтеграли:

1) $\int\frac{\sqrt{x+2}}{x}dx;$ 2) $\int\frac{dx}{\sqrt{x-1}+3}.$

Розв'язання.

1) Замінимо $\sqrt{x+2}$ на t, тобто $\sqrt{x+2}=t.$ Одержимо

$$\int\frac{\sqrt{x+2}}{x}dx=\left|\begin{matrix}\sqrt{x+2}=t, x=t^2-2,\\ x+2=t^2, dx=2tdt\end{matrix}\right|=\int\frac{t\cdot 2tdt}{t^2-2}=2\int\frac{t^2dt}{t^2-2}=2\int\frac{t^2-2+2}{t^2-2}dt=2\int\frac{t^2-2}{t^2-2}dt+4\int\frac{dt}{t^2-2}=$$

$$=2\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}\right|+C.$$

Замінимо $\sqrt{x-1}$ на t. Одержимо

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x-1}+3}=\left|\begin{matrix}\sqrt{x-1}=t, x=t^2+1,\\ x-1=t^2, dx=2tdt\end{matrix}\right|=\int\frac{2tdt}{t+3}=2\int\frac{t+3-3}{t+3}dt=2\int\frac{t+3}{t+t}dt-6\int\frac{dt}{t+3}=2\int dt-6\int\frac{dt}{t+3}=$$

$$=2t-6\ln|t+3|+C=2\sqrt{x-1}-6\ln\left|\sqrt{x-1}+3\right|+C.$$

<u>Метод інтегрування частинами</u>

При інтегруванні добутку двох функцій часто застосовується метод інтегрування частинами, який записується у вигляді

$$\int udv=u\cdot v-\int vdu,$$

де $u=u(x), v=v(x)$ функції, які мають неперервні похідні. При необхідності цей метод застосовують один або декілька раз.

<u>Приклад.</u> Знайти інтеграли:

1) $\int x^2e^xdx,$ 2) $\int(4x+1)\ln xdx,$ 3) $\int e^x\sin 2xdx$.

<u>Розв'язання.</u> При застосуванні цього методу важливим є вибір функції $u=u(x)$.

1) У даному прикладі за функцію $u(x)$ приймемо функцію $u=x^2$. Одержимо

$$\int x^2e^xdx=\left|\begin{matrix}u=x^2, du=2xdx,\\ dv=e^xdx, \int dv=\int e^xdx, v=e^x\end{matrix}\right|=x^2e^x-\int e^x2xdx=x^2e^x-2\int xe^xdx=\left|\begin{matrix}u=x, du=dx\\ dv=e^xdx, v=e^x\end{matrix}\right|=$$

$$=x^2e^x-2\left(xe^x-\int e^xdx\right)=x^2e^x-2xe^x+2e^x+C=\left(x^2-2x+2\right)e^x+C.$$

2) За функцію $u(x)$ необхідно приймати ту функцію, від якої невідомий інтеграл (відсутній у таблиці інтегралів), тобто $u=\ln x.$ Тоді

$$\int(4x+1)\ln x dx = \left| \begin{array}{c} u=\ln x, du=\frac{1}{x}dx, \\ dv=(4x+1)dx, v=\int(4x+1)dx = 4\cdot\frac{x^2}{2}+x=2x^2+x \end{array} \right| = \left(2x^2+x\right)\ln x -$$

$$-\int\left(2x^2+x\right)\cdot\frac{dx}{x} = \left(2x^2+2\right)\ln x - \int(2x+1)dx = \left(2x^2+2\right)\ln x - x^2 - x + C.$$

3) У даному випадку вибір функції $u(x)$ є вільним, але після повторного застосування методу інтегрування частинами одержимо початковий інтеграл. Доведеться розв'язати рівняння з одним невідомим, тобто рівняння відносно шуканого інтеграла.

$$I=\int e^x\sin 2x dx = \left| \begin{array}{c} u=\sin 2x, du=2\cos 2x dx, \\ dv=e^x dx, v=\int e^x dx = e^x \end{array} \right| = e^x\sin 2x - \int e^x 2\cos 2x dx = e^x \sin 2x - 2\int e^x\cos 2x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{c} u=\cos x, du=-2\sin 2x dx, \\ dv=e^x dx, v=e^x \end{array} \right| = e^x\sin 2x - \left(e^x\cos 2x + 2\int e^x \sin 2x dx\right) = e^x \sin 2x - 2e^x\cos 2x - 2\int e^x\sin 2x dx =$$

$$= e^x(\sin 2x - 2\cos 2x) - 2I.$$

Одержали рівняння

$$3I = e^x(\sin 2x - 2\cos 2x), I = \frac{1}{3}e^x(\sin 2x - 2\cos 2x) + C.$$

<u>Відповідь</u>: $I=\int e^x\sin 2x dx = \frac{1}{3}e^x(\sin 2x - 2\cos 2x) + C.$

<u>Інтегрування дробово – раціональних функцій</u>

Розглянемо правильний раціональний дріб $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ $(m<n)$, знаменник якого розкладається на лінійні та квадратні множники. Зауважимо, що у випадку $(m>n)$необхідно виділити цілу частину.

Правильний раціональний дріб, де $Q_n(x)=(x-a)(x-b)^k(x^2+c^2)$, можна розкласти на суму найпростіших дробів:

$$\frac{P_m(x)}{(x-a)(x-b)^k(x^2+c^2)} = \frac{A}{x-a}+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_k}{(x-b)^k}+\frac{Cx+D}{x^2+c^2}, \qquad (*)$$

де a,b,c - довільні числа, а $A, B_1, ..., B_k, C, D$- невідомі коефіцієнти, які необхідно визначити. Для цього праву частину формули (*) необхідно привести до спільного знаменника, знаменники відкинути, а чисельники тотожності прирівняти при однакових степенях x, або підставити туди відповідні значення x. Одержимо систему лінійних рівнянь, із якої визначимо невідомі коефіцієнти. Суть методу невизначених коефіцієнтів розглянемо на прикладах.

Приклад. Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{4x^2+7}{(x+2)(x^2+5)}dx$; 2) $\int \frac{36dx}{(x-2)(x+4)^2}$.

Розв'язання. Дробові раціональні функції правильні. Знаменники розкладені на лінійні та квадратні множники. Кожну підінтегральну дробову функцію можна записати у вигляді суми найпростіших дробів за формулою (*).

$$1)\ \int \frac{4x^2+7}{(x+2)(x^2+5)}dx = I, \qquad \frac{4x^2+7}{(x+2)(x^2+5)} = \frac{A^{(x^2+5}}{x+2} + \frac{(Bx+C)^{(x+2}}{x^2+5};$$

$$4x^2+7 = A(x^2+5)+(Bx+C)(x+2) = Ax^2+5A+Bx^2+2Bx+Cx+2C =$$
$$= x^2(A+B)+x(2B+C)+(5A+2C)$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 & 4 = A+B, \qquad\qquad B = 4-A \\ x & 0 = 2B+C, 0 = 2(4-A)+\frac{1}{2}(7-5A), \\ x^0 & 7 = 5A+2C, 2C = 7-5F, C = \frac{1}{2}(7-5A), \end{array}$$

$$8-2A+\frac{7}{2}-\frac{5}{2}A = 0, \frac{9}{2}A = \frac{23}{2}, A = \frac{23}{9,} B = 4-\frac{23}{9} = \frac{36-23}{9} = \frac{13}{9}, B = \frac{13}{9}, C = \frac{1}{2}\left(7-5\cdot\frac{23}{9}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{63-115}{9} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{52}{9}, C = -\frac{26}{9}.$$

$$\frac{4x^2+7}{(x+2)(x^2+5)} = \frac{\frac{23}{9}}{x+2} + \frac{\frac{13}{9}x-\frac{26}{9}}{x^2+5};$$

$$I = \frac{23}{9}\int\frac{dx}{x+2} + \frac{13}{9}\int\frac{xdx}{x^2+5} - \frac{26}{9}\int\frac{dx}{x^2+5} = \frac{23}{9}\ln|x+2| + \frac{13}{9\cdot 2}\ln(x^2+5) - \frac{26}{9\sqrt{5}}arctg\frac{x}{\sqrt{5}} + C.$$

$$2)\ \int\frac{36dx}{(x-2)(x+4)^2} = I; \quad \frac{36}{(x-2)(x+4)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+4} + \frac{C}{(x+4)^2};$$

$$36 = A(x+4)^2 + B(x-2)(x+4) + C(x-2);$$

$$\begin{array}{r|c|c} x=-4 & 36=-6C, C=-6 & 36=16\cdot 1-8B+2\cdot 6, \\ x=2 & 36=36A, A=1, & 8B=16+12-36=-8, \\ x=0 & 36=16A-8B-2C, & B=-1; \end{array}$$

$$\frac{36}{(x-2)(x+4)^2} = \frac{1}{x-2} + \frac{-1}{x+4} + \frac{-6}{(x+4)^2} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+4} - \frac{6}{(x+4)^2};$$

$$I = \int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{dx}{x+4} - 6\int \frac{dx}{(x+4)^2} = \ln|x-2| - \ln|x+4| - 6\frac{(x+4)^{-1}}{-1} + C = \ln\left|\frac{x-2}{x+4}\right| + \frac{6}{x+4} + C.$$

Інтегрування тригонометричних виразів

При зведенні підінтегральної функції до табличних інтегралів часто використовують різні тригонометричні формули. Розглянемо деякі із них:

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}\left(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right);$$

$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right);$$

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}\left(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right);$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x), \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x), \qquad \sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Приклад. Знайти інтеграли:

1) $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx,$

2) $\int \sin 3x \cos 2x dx;$

3) $\int \cos 2x \cos 4x dx.$ Розв’язання. Для обчислення інтегралів застосовуємо відповідні формули і одержимо:

1) $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx = \left|\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos x)\right| = \frac{1}{2}\int (1+\cos x)dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos x dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x + C;$

$$2)\int \sin 3x\cos 2x dx=\left|\sin 3x\cos 2x=\frac{1}{2}(\sin 5x+\sin x)\right|=\frac{1}{2}\int(\sin 5x+\sin x)dx=\frac{1}{2}\int \sin 5x dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int \sin x dx=-\frac{1}{10}\cos 5x-\frac{1}{2}\cos x+C;$$

$$3)\int \cos 2x\cos 4x dx=\left|\cos 2x\cos 4x=\frac{1}{2}(\cos 6x+\cos 2x)\right|=\frac{1}{2}\int \cos 6x dx+\frac{1}{2}\int \cos 2x dx=\frac{1}{12}\sin 6x+$$

$$+\frac{1}{4}\sin 2x+C.$$

Функції, які раціонально залежать від $\sin x, \cos x$, зводяться за допомогою *універсальної підстановки* $tg\frac{x}{2}=t$ до дробово- раціональних функцій. Якщо $tg\frac{x}{2}=t$,

$$\text{то } \sin x=\frac{2t}{t^2+1}, \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, dx=\frac{2dt}{1+t^2},$$

а якщо $tgx=t,$ то $\sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2}, \cos^2 x=\frac{1}{1+t^2}, dx=\frac{dt}{1+t^2}.$

<u>Приклад</u>. Знайти інтеграл:

1) $\int\frac{dx}{3+2\sin x}$; 2) $\int tg^3 x dx$; 3) $\int\frac{dx}{\cos^2 x-\sin 2x+5}$.

<u>Розв'язання</u>. Для знаходження даних інтегралів застосуємо універсальну підстановку.

$$1)\int\frac{dx}{3+2\sin x}=\left|tg=\frac{x}{2}=t,\sin x=\frac{2t}{1+t^2},dx=\frac{2dt}{1+t^2}\right|=\int\frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left(3+\frac{2\cdot 2t}{1+t^2}\right)}=$$

$$=\int\frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\frac{3+3t^2+4t}{1+t^2}}=2\int\frac{dt}{3t^2+4t+3}=\frac{2}{3}\int\frac{dt}{t^2+\frac{4}{3}t+1}=\frac{2}{3}\int\frac{dt}{\left(t+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{9}+1}=$$

$$=\frac{2}{3}\int\frac{dt}{\left(t+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{5}{9}}=\left|\begin{array}{c}u=t+\frac{2}{3},a=\frac{\sqrt{5}}{3}\\ du=dt,\end{array}\right|=\frac{2}{3}\int\frac{du}{u^2+a^2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{a}arctg\frac{u}{a}+C=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{5}}arctg\frac{\left(t+\frac{2}{3}\right)\cdot 3}{\sqrt{5}}+C=\frac{2}{\sqrt{5}}arctg\frac{3t+2}{\sqrt{5}}+C=\frac{2}{\sqrt{5}}arctg\frac{3tg\frac{x}{2}+2}{\sqrt{5}}+C.$$

$$2)\int tg^3xdx=\left|tgx=t,dx=\frac{dt}{1+t^2}\right|=\int\frac{t^3dt}{t^2+1}=\int\left(t-\frac{t}{t^2+1}\right)dt\overset{(*)}{=}$$

$$=\int tdt-\frac{1}{2}\int\frac{2tdt}{t^2+1}=\frac{t^2}{2}-\frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right)+C=$$

$$=\frac{1}{2}tg^2x-\frac{1}{2}\ln\left(tg^2x+1\right)+C==\frac{1}{2}tg^2x-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{\cos^2x}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{2}tg^2x-\frac{1}{2}\ln\cos^{-2}x+C=\frac{1}{2}tg^2x+\ln\left|\cos x\right|+C$$

(*) $$\begin{array}{r|l} -t^3 & t^2+1 \\ t^3+t & \overline{t-\frac{t}{t^2+1}} \\ \hline -t & \end{array}$$

$$3)\int\frac{dx}{\cos^2x-\sin 2x+5}=\left|\begin{array}{c}tgx=t,\sin 2x=\frac{2t}{1+t^2},\\ \cos x=\frac{1}{1+t^2},dx=\frac{dt}{1+t^2}\end{array}\right|=\int\frac{dt}{\left(1+t^2\right)\left(\frac{1}{1+t^2}-\frac{2t}{1+t^2}+5\right)}=$$

$$=\int\frac{dt}{\left(1+t^2\right)\cdot\frac{1-2t+5+5t^2}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{5t^2-2t+6}=\frac{1}{5}\int\frac{dt}{t^2-\frac{2}{5}t+\frac{6}{5}}=\frac{1}{5}\int\frac{dt}{\left(t-\frac{1}{5}\right)^2-\frac{1}{25}+\frac{6}{5}}=$$

$$=\frac{1}{5}\int\frac{dt}{\left(t-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{29}{25}}=\left|\begin{array}{c}u=t-\frac{1}{5},\\ du=dt,a=\frac{\sqrt{29}}{5}\end{array}\right|=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{a}arctg\frac{u}{a}+C=\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{\sqrt{29}}arctg\frac{\left(t-\frac{1}{5}\right)\cdot 5}{\sqrt{5}}+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{29}}arctg\frac{5t-1}{\sqrt{29}}+C=\frac{1}{\sqrt{29}}arctg\frac{5tgx-1}{\sqrt{29}}+C.$$

Інтеграли вигляду $\int\sin^n x\cos^m xdx$, де m,n - ціле додатне непарне число, можна проінтегрувати за допомогою методу заміни змінної. Зупинимося на таких прикладах.

Приклад. Знайти інтеграли:

$$1)\ \int \sin^5 x dx;\quad 2)\ \int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[4]{\sin x}}dx;\quad 3)\ \int \sqrt[3]{\cos^2 x}\sin^3 x dx.$$

Розв'язання. В кожному із запропонованих інтегралів є цілий додатній непарний показник степеня.

$$1)\int \sin^5 x dx = \int \sin^4 x \sin x dx = \int \left(\sin^2 x\right)^2 \sin x dx = \int \left(1-\cos^2 x\right)^2 \sin x dx =$$

$$= \left|\begin{matrix}\cos x = t, dt = -\sin x dx, \\ \sin x dx = -dt\end{matrix}\right| = -\int \left(1-t^2\right)^2 dt = -\int \left(1-2t^2+t^4\right)dt = -\int dt +$$

$$+2\int t^2 dt - \int t^4 dt = -t + 2\cdot\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C.$$

$$2)\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[4]{\sin x}}dx = \int \frac{\cos^2 x \cos x dx}{\sqrt[4]{\sin x}} = \int \frac{\left(1-\sin^2 x\right)\cos x dx}{\sqrt[4]{\sin x}} = \left|\begin{matrix}\sin x = t, \\ dt = \cos x dx\end{matrix}\right| =$$

$$= \int \frac{\left(1-t^2\right)dt}{\sqrt[4]{t}} = \int \left(1-t^2\right)t^{-\frac{1}{4}}dt = \int t^{-\frac{1}{4}}dt - \int t^2\cdot t^{-\frac{1}{4}}dt = \int t^{-\frac{1}{4}}dt - \int t^{\frac{7}{4}}dt =$$

$$= \frac{4\cdot t^{\frac{3}{4}}}{3} - \frac{4\cdot t^{\frac{11}{4}}}{11} + C = \frac{4}{3}\sqrt[4]{t^3} - \frac{4}{11}\sqrt[4]{t^{11}} + C = \frac{4}{3}\sqrt[4]{\sin^3 x} - \frac{4}{11}\sqrt[4]{\sin^{11} x} + C.$$

$$3)\int \sqrt[3]{\cos^2 x}\sin^3 x dx = \int \sqrt[3]{\cos^2 x}\sin^2 x \sin x dx = \int \sqrt[3]{\cos^2 x}\left(1-\cos^2 x\right)\sin x dx =$$

$$= \left|\begin{matrix}\cos x = t, dt = -\sin x dx, \\ \sin x dx = -dt\end{matrix}\right| = -\int \sqrt[3]{t^2}\left(1-t^2\right)dt = -\int t^{\frac{2}{3}}\left(1-t^2\right)dt = -\int t^{\frac{2}{3}}dt + \int t^{\frac{2}{3}}\cdot t^2 dt =$$

$$= -\int t^{\frac{2}{3}}dt + \int t^{\frac{8}{3}}dt = -\frac{3\cdot t^{\frac{5}{3}}}{5} + \frac{3\cdot t^{\frac{11}{3}}}{11} + C = -\frac{3}{5}\sqrt[3]{t^5} + \frac{3}{11}\sqrt[3]{t^{11}} + C =$$

$$= -\frac{3}{5}\sqrt[3]{\cos^5 x} + \frac{3}{11}\sqrt[3]{\cos^{11} x} + C.$$

Визначений інтеграл

Розглянемо неперервну на сегменті функцію $y = f(x)$. Розіб'ємо цей сегмент точками $x_1 < x_2 < ... < x_{n-1}$ на n довільних частин. Складемо інтегральну суму із добутків значень функції $f(x_i)$ на прирости (кроки) $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, де $i = \overline{1,n}$, та знайдемо границю цієї суми, коли найбільший із кроків прямує до нуля.

Визначеним інтегралом називається число, до якого прямує інтегральна сума, коли кроки розбиття прямують до нуля, тобто

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx ,$$

де $c_i \in [x_i ; x_{i+1}]$, а числа a і b називаються відповідно *нижньою* і *верхньою межами* інтегрування.

Формула Ньютона – Лейбніца дає можливість обчислити визначений інтеграл за допомогою первісної функції, тобто

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \qquad (1)$$

Приклад. Обчислити інтеграли:

1) $\int_0^1 e^{3x}dx$; 2) $\int_2^7 \frac{dx}{\sqrt{x+2}-1}$.

Розв'язання. 1) Первісною функцією для функції $y = e^{3x}$ буде $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$.

Тоді згідно формули (1) одержимо

$$\int_0^1 e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\left(e^3 - e^0\right) = \frac{1}{3}\left(e^3 - 1\right).$$

2) Первісну функцію у цьому випадку знайдемо за допомогою заміни змінної $\sqrt{x+2} = t$. Одночасно необхідно знайти межі для змінної t. Отже,

$$\int_2^7 \frac{dx}{\sqrt{x+2}-1} = \left| \begin{array}{c} \sqrt{x+2} = t, dx = 2tdt, \\ x+2 = t^2, t_1 = \sqrt{2+2} = 2, \\ x = t^2 - 2, t_2 = \sqrt{7+2} = 3 \end{array} \right| = \int_2^3 \frac{2tdt}{t-1} = 2\int_2^3 \frac{t-1+1}{t-1}dt = 2\int_2^3 \frac{t-1}{t-1}dt + 2\int_2^3 \frac{dt}{t-1} =$$

$$= 2\int_2^3 dt + 2\int_2^3 \frac{dt}{t-1} = 2\left(t + \ln|t-1|\right)\Big|_2^3 = 2(3 + \ln(3-1)) - 2(2 + \ln(2-1)) = 2(3 + \ln 2) -$$

$$- 2(2 + \ln 1) = 2(3 - 2 + \ln 2) = 2(1 + \ln 2).$$

<u>Невласні інтеграли</u>

Невласними інтегралами з нескінченими межами називають інтеграли вигляду

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx,\ \int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx,\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx.$$

Збіжними називаються невласні інтеграли, всі границі яких існують і скінченні, і *розбіжними,* якщо ці границі не існують чи нескінченні.

<u>Приклад</u>. Дослідити збіжність інтегралів:

1) $\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{x^2+5}$; 2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+5}$.

<u>Розв'язання</u>. 1) Можемо записати

$$\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{x^2+5} = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{xdx}{x^2+5} = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\ln\left(x^2+5\right)\Big|_0^b\right) = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\ln\left(b^2+5\right)-\frac{1}{2}\ln 5\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\ln\left(\frac{b^2+5}{5}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\infty+5}{5}\right) = \frac{1}{2}\ln(\infty) = \frac{1}{2}\cdot\infty = \infty.$$

Інтеграл розбіжний.

2) На проміжку $(-\infty;+\infty)$ вибираємо довільну точку c. Зручно взяти $c=0$. Будемо досліджувати на збіжність цей інтеграл на проміжках $(-\infty;0)$ і $(0;+\infty)$. Одержимо:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+5} = \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+5} + \int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+5} = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{x^2+5} + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{x^2+5} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{\sqrt5}arctg\frac{x}{\sqrt5}\Big|_a^0\right) + \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt5}arctg\frac{x}{\sqrt5}\Big|_0^b\right) = \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{\sqrt5}\left(arctg0 - arctg\frac{a}{\sqrt5}\right)\right) +$$

$$+ \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt5}\left(arctg\frac{b}{\sqrt5} - arctg0\right)\right) = \frac{1}{\sqrt5}\left(0 - arctg(-\infty)\right) + \frac{1}{\sqrt5}\left(arctg(\infty) - 0\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt5}\left(arctg\infty + arctg\infty\right) = \frac{2}{\sqrt5}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt5}.$$

Інтеграл збіжний.

<u>Невласні інтеграли від розривних функцій.</u>

Якщо функція $y=f(x)$ неперервна на $[a;b)$, а в точці b має розрив, то невласний інтеграл має вигляд

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

А у випадку, коли точка a є точкою розриву, то невласний інтеграл має такий вигляд

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

Якщо точкою розриву є точка c, яка задовольняє умову $a<c<b$, то невласний інтеграл дорівнює сумі невласних інтегралів вигляду

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

Невласні інтеграли від розривних функцій будуть *збіжними,* якщо всі границі існують і скінченні. В протилежних випадках вони розбіжні.

<u>Приклад</u>. Дослідити збіжність інтеграла $\int_0^2 \frac{dx}{x-1}$.

<u>Розв'язання</u>. Точкою розриву функції $y=\frac{1}{x-1}$ є точка $x=1$, яка знаходиться у середині сегмента $[0;2]$. Тоді

$$\int_0^2 \frac{dx}{x-1}=\int_0^1 \frac{dx}{x-1}+\int_1^2 \frac{dx}{x-1}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x-1}+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^{2} \frac{dx}{x-1}.$$

Дослідимо збіжність одержаних невласних інтегралів.

1) $$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x-1}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln|x-1|\Big\|_0^{1-\varepsilon}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln|1-\varepsilon-1|-\ln|0-1|\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln|-\varepsilon|-\ln|-1|\right)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\left|\frac{-\varepsilon}{-1}\right|=\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\varepsilon=\ln 0=-\infty.$$

Невласний інтеграл розбіжний.

$$2)\ \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^{2}\frac{dx}{x-1}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln|x-1|\Big|_{1+\varepsilon}^{2}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln|2-1|-\ln|1+\varepsilon-1|\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln 1-\ln\varepsilon\right)=0-\ln 0=-(-\infty)=+\infty.$$

Невласний інтеграл розбіжний.

<u>Відповідь</u>: Згідно означення збіжності невласних інтегралів інтеграл $\int_{0}^{2}\frac{dx}{x-1}$ буде розбіжним.

<u>Застосування визначених інтегралів до задач геометрії</u>

Згідно геометричного змісту визначеного інтеграла площу криволінійної трапеції для неперервної на сегменті $[a;b]$ функції $y=f(x)$ обчислюють за формулою

$S=\int_{a}^{b}|f(x)|dx$ або $S=\int_{a}^{b}f(x)dx$, коли $f(x>0)$.

Площу криволінійного сектора в полярній системі координат знаходять за формулою

$S=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2(\varphi)d\varphi$ (2), де $\rho=\rho(\varphi)$ неперервна функція $\forall\varphi\in[\varphi_1;\phi_2]$.

Для неперервної разом із своєю похідною на сегменті $[a,b]$ функції довжину її дуги на цьому сегменті знаходять за формулою

$l=\int_{a}^{b}\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx,$ або за формулою $l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt,$ якщо функція задана параметрично $x=x(t), y=y(t), t\in[t_1,t_2]$.

У випадку полярних координат, коли $\rho=\rho(\varphi)$, а $\varphi\in[\varphi_1;\phi_2]$, довжину дуги лінії знаходять за формулою $l=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\varphi.$

Якщо криволінійна трапеція з основою $[a;b]$ обмежена неперервною функцією $y = f(x)$ обертається навколо осі Ox , то об'єм тіла обертання дорівнює

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

У випадку обертання навколо осі Oy криволінійної трапеції з основою $[c,d]$обмеженої неперервною функцією $x = \varphi(y)$ об'єм тіла обертання дорівнює

$$V = \pi \int_c^d (f(y))^2 dy = \pi \int_c^d x^2 dy.$$

<u>Задача</u>. Обчислити площу фігури обмеженої лініями: 1) $y = 5 - x^2, y = 3 - x$; 2) $\rho = 2 + \sin\varphi$.

<u>Розв'язання</u>. 1) Зобразимо фігуру (рис.1). Знайдемо точки перетину ліній. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y = 5 - x^2, \\ y = 3 - x, \end{cases} \Rightarrow 3 - x = 5 - x^2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0, x_1 = -1, x_2 = 2.$$

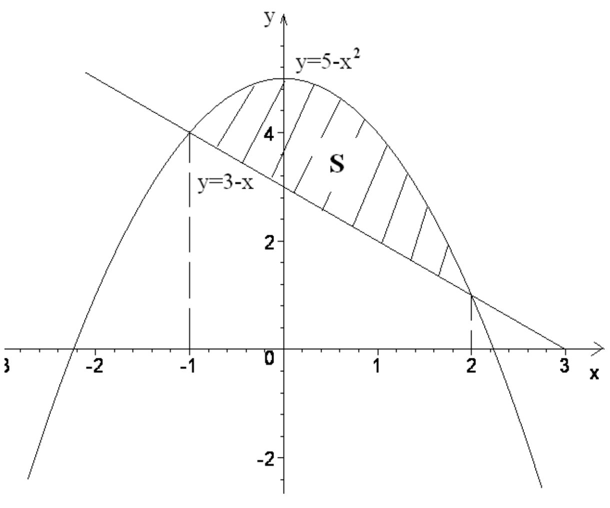


Рис.1

Площа фігури дорівнює різниці площ двох криволінійних трапецій із спільною основою $[-1;2]$, обмежених параболою $y = 5 - x^2$ і прямою лінією $y = 3 - x$.Тоді

$$S = S_1 - S_2 = \int_{-1}^{2} (5 - x^2) dx - \int_{-1}^{2} (3 - x) dx =$$

$$= \int_{-1}^{2} (5 - x^2 - 3 + x) dx = \int_{-1}^{2} (2 + x - x^2) dx =$$

$$= \left(2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{-1}^{2} = 4 + \frac{4}{2} - \frac{8}{3} - \left(-2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) =$$

$$= 4 + 2 - \frac{8}{3} + 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 8 - \frac{1}{2} - \frac{9}{3} = 5 - \frac{1}{2} = 4{,}5 (кв.од).$$

Відповідь: *S=4,5* (кв. од).

2) Для зображення фігури, площу якої необхідно обчислити, побудуємо по точках в полярній системі координат лінію $\rho = 2 + \sin\varphi$.

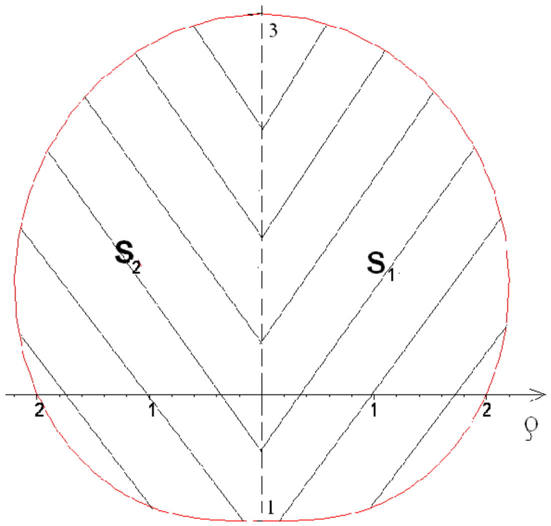


Рис.2

φ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
ρ	2	3	2	1	2

В силу симетрії фігури (Рис. 2) площу можна обчислити як $S = 2S_1$ або безпосередньо за формулою (2). Одержимо

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(2+\sin\varphi)^2\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(4+4\sin\varphi+\sin^2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(4+4\sin\varphi+\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{9}{2}+4\sin\varphi-\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}\varphi-4\cos\varphi-\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}\cdot 2\pi-4\cos 2\pi-\frac{1}{4}\sin 4\pi+4\cos 0+\frac{1}{4}\sin 0\right) = \frac{1}{2}(9\pi-4+4) = \frac{9}{2}\pi = 4{,}5\pi(\textit{кв.од}).$$

Відповідь: *S=4,5π (кв. од).*

Задача. Обчислити довжину однієї арки циклоїди $x = a(t-\sin t),\ y = a(1-\cos t),\ t\in[0;2\pi]$.

Розв’язання. Знайдемо похідні:

$$x'_t = a(1-\cos t),\ y'_t = a\sin t;\ (x'_t)^2+(y_t)^2 = a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t = a^2\left(1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t\right)=$$

$$= a^2(2-2\cos t) = 2a^2(1-\cos t) = 2a^2\cdot 2\sin^2\frac{t}{2} = 4a^2\sin^2\frac{t}{2};$$

$$\sqrt{(x'_t)^2+(y_t)^2} = \sqrt{4a^2\sin^2\frac{t}{2}} = 2a\sin\frac{t}{2}.$$

Тоді

$$l=\int_0^{2\pi}2a\sin\frac{t}{2}dt=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=-2a\cdot 2\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=-4a(\cos\pi-\cos 0)=-4a(-1-1)=8a(\textit{лін.од})$$

Відповідь: Довжина однієї арки циклоїди дорівнює $l=8a$ лінійних одиниць

<u>Задача</u>. Обчислити об'єми тіл обертання фігури, обмеженої лініями $3y=x^2, y=x$ навколо осей координат Ox, Oy.

<u>Розв'язання</u>. Знайдемо точки перетину ліній та зобразимо ці тіла схематично (Рис. 3,4):

$$\begin{cases}3y=x^2,\\ \ y=x,\end{cases}\Rightarrow 3x=x^2,\ x^2-3x=0,\ x(x-3)=0,\ \begin{matrix}x_1=0, x_2=3,\\ y_1=0, y_2=3.\end{matrix}$$

Одержали дві точки з координатами $A(0;0), B(3;3)$.

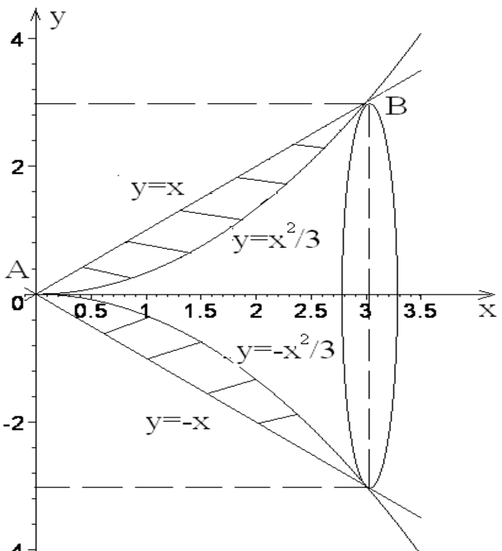


Рис.3

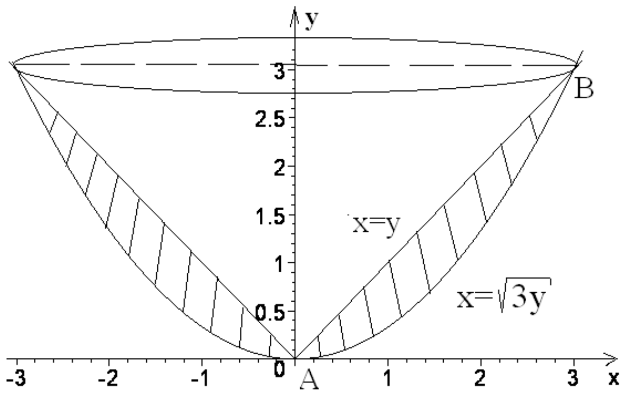


Рис.4

Об'єм тіла обертання навколо осі Ox дорівнює різниці об'ємів тіл обмежених відповідно прямою $y=x$ і параболою $y=\frac{1}{3}x^2$. Одержимо

$$V=V_1-V_2=\pi\int_0^3 x^2dx-\pi\int_0^3\left(\frac{x^2}{3}\right)^2dx=\pi\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5\cdot 9}\right)\Bigg|_0^3=\pi\left(\frac{3^3}{3}-\frac{3^5}{5\cdot 9}\right)=\pi\left(9-\frac{27}{5}\right)=$$

$$=\frac{45-27}{5}\pi=\frac{18}{5}\pi=3{,}6\pi(\textit{куб.од})$$

Навколо осі Oy об'єм тіла обертання також дорівнює різниці об'ємів тіл обмежених відповідно параболою $x=\sqrt{3y}$ та прямою $x=y$.

$$V=V_1-V_2=\pi\int_0^3 3ydy-\pi\int_0^3 y^2dy=\pi\left(\frac{3y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^3=\pi\left(\frac{3\cdot 3^2}{2}-\frac{3^3}{3}\right)=\pi\left(\frac{27}{2}-9\right)=\frac{27-18}{2}\pi=4{,}5\pi(\text{куб.од})$$

Диференціальні рівняння

Звичайним диференціальним рівнянням називається рівняння, яке зв'язує незалежну змінну, функцію та її похідну. Найвища похідна функції визначає порядок диференціального рівняння.

Розв'язком диференціального рівняння називається всяка функція $y=f(x)$, яка при підстановці її у рівняння перетворює його у тотожність.

<u>Диференціальні рівняння першого порядку</u>

Диференціальні рівняння першого порядку мають вигляд $F=(x,y,y')=0$ або $y'=f(x,y)$. Функція $y=\varphi(x,c)$ буде загальним розв'язком таких рівнянь, якщо при любих значеннях сталої c вона є розв'язком даних рівнянь і при єдиному значенні $c=c_0$ задовольняє початковим умовам вигляду $y(x_0)=y_0$ або такого вигляду $y|_{x=x_0}=y_0$

Геометрично функція $y=\varphi(x,c)$ описує множину інтегральних кривих. Розв'язк $y=\varphi(x,c_0)$ називається частинним розв'язком і виражає одну інтегральну криву.

Проінтегрувати або знайти загальний розвиток диференціальних рівнянь першого порядку можна певними методами, які годяться для відповідних класів рівнянь.

Диференціальними рівняннями *з відокремлюваними змінними* називаються рівняння вигляду $y'=f_1(x)\cdot f_2(y)$. (3)

Записавши похідну у вигляді $y=\frac{dy}{dx}$, одержимо рівняння $\frac{dy}{dx}=f_1(x)\cdot f_2(y)$. або

$dy=f_1(x)\cdot f_2(y)dx$, або $\frac{dy}{f_2(y)}=f_1(x)dx$. Тут змінні відокремились і це

рівняння можемо проінтегрувати: $\int\frac{dy}{f_2(y)}=\int f_1(x)dx+C$. (4)

Вираз (4) називається загальним інтегралом диференціального рівняння (3).

Приклад. Знайти загальний розв’язок рівняння $xy' - 2y = 0$.

Розв’язання. Розв'яжемо рівняння відносно похідної. Одержимо

$$y' = \frac{2y}{x},\, y' = \frac{2}{x}\cdot y,\, \frac{dy}{dx} = \frac{2}{x}\cdot y \;\Big|\cdot dx,\; dy = \frac{2}{x}\cdot y\cdot dx \,\Big|\div y,$$

$$\frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x},\, \int\frac{dy}{y} = 2\int\frac{dx}{x},\, \ln|y| + \ln|C_1| = 2\ln|x| + \ln|C_2|,$$

$$\ln|y| - \ln x^2 = \ln|C_2| - \ln|C_1|, \ln\frac{|y|}{x^2} = \ln\left|\frac{C_2}{C_1}\right|, \frac{C_2}{C_1} = C_3,$$

$$\ln\frac{|y|}{x^2} = \ln|C_3|, \frac{y}{x^2} = \pm C_3,\, y = \pm C_3 x^2,\, y = C_4 x^2, C = \pm C_3.$$

Відповідь: $y = Cx^2$ - загальний розв’язок диференціального рівняння.

Однорідним рівнянням першого порядку називають рівняння вигляду

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

За допомогою заміни змінної $y = xt,\; y' = t + xt''$ дане рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними: $t + xt' = \varphi(t),\; xt' = \varphi(t) - t,\; t' = \frac{1}{x}(\varphi(t) - t),$ яке можна проінтегрувати.

Приклад. Знайти загальний розв’язок рівняння $2xyy' = x^2 + y^2$.

Розв’язання. Розв’яжемо дане рівняння відносно y' і одержимо однорідне рівняння:

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy} = \frac{\dfrac{x^2}{x^2} + \dfrac{y^2}{x^2}}{\dfrac{2xy}{x^2}} = \frac{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{2\left(\dfrac{y}{x}\right)}.$$

Заміна змінної $\frac{y}{x}=t, y=xt, y'=t+xt'$ приведе до рівняння з відокремлюваними змінними:

$$t+xt'=\frac{1+t^2}{2t}, xt'=\frac{1+t^2}{2t}-t=\frac{1+t^2-2t^2}{2t}=\frac{1-t^2}{2t}, t'=\frac{1}{x}\left(\frac{1-t^2}{2t}\right).$$

Позначимо $t'=\frac{dt}{dx}$. Одержимо

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1-t^2}{2t}\bigg|\cdot dx, dt=\frac{1-t^2}{2t}\cdot\frac{dx}{x}\bigg|\div\frac{1-t^2}{2t}, \qquad \frac{2tdt}{1-t^2}=\frac{dx}{x}.$$

Змінні відокремились і рівняння можна проінтегрувати:

$$\int\frac{2tdt}{1-t^2}=\int\frac{dx}{x}, \quad -\ln\left|1-t^2\right|+\ln\left|C_1\right|=\ln|x|+\ln\left|C_2\right|,$$

$$\ln\left|\frac{C_1}{1-t^2}\right|=\ln\left|C_2x\right|, \quad \frac{\pm C_1}{1-t^2}=C_2x, \quad \frac{\pm C_1}{C_2x}=1-t^2=1-\left(\frac{y}{x}\right)^2, \frac{\pm C_1}{C_2}=C,$$

$$\frac{C}{x}=1-\frac{y^2}{x^2}, \quad \frac{C}{x}=\frac{x^2-y^2}{x^2}, \quad Cx=x^2-y^2, \quad y^2=x^2-Cx, y=\pm\sqrt{x^2-Cx}.$$

Відповідь: Функція $y=\pm\sqrt{x^2-Cx}$ є загальним розв’язком однорідного рівняння.

Лінійними рівняннями першого порядку називаються рівняння вигляду

$$y'+P(x)y=Q(x),$$

де $P(x), \quad Q(x)$ - задані функції.

Будемо шукати загальний розв’язок даного рівняння у вигляді добутку двох функцій $u=u(x)$ і $v=v(x)$, тобто $y=u(x)\cdot v(x)=uv$, а $y'=u'v+v'u$.

Тоді лінійне рівняння перепишеться у вигляді

$$u'v + v'u + P(x)uv = Q(x), \quad u'v + u(v' + P(x)v) = Q(x).$$

На функцію $v(x)$ накладено таку умову, щоб вираз $v' + P(x)v$ дорівнював нулю. Одержимо $v' + P(x)v = 0,$ а $u'v = Q(x).$

Ці рівняння є рівняннями з відокремлюваними змінними. Після знаходження функції $v(x)$ і підстановки її у друге рівняння одержимо функцію $u(x, C)$. Їх добуток дасть загальний розв'язок лінійного рівняння. Існують інші методи розв’язування лінійних рівнянь.

Зауваження. Розглянутим методом можна розв’язувати рівняння вигляду

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha},$$

де α - довільне число, а рівняння називається рівнянням Бернуллі.

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння $y' - \frac{2y}{x} = 3x^4$.

Розв’язання. Це лінійне рівняння першого порядку, де $P(x) = -\frac{2}{3}$, а $Q(x) = 3x^4$. Будемо шукати загальний розв'язок цього рівняння у вигляді $y = uv$, а $y' = u'v + v'u$. Одержимо:

$$u'v + v'u - \frac{2}{x}uv = 3x^4, \quad u'v + u\left(v' - \frac{2v}{x}\right) = 3x^4.$$ Якщо $v' - \frac{2v}{x} = 0,$ то $u'v = 3x^4$.

Розв’язуємо послідовні ці рівняння.

$$v' = \frac{2v}{x}, \quad \frac{dv}{dx} = \frac{2v}{x}\Big| \cdot dx, \quad dv = \frac{2v}{x}dx\Big| \div v, \quad \frac{dv}{v} = 2\frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{dv}{v} = 2\int \frac{dx}{x}, \quad \ln|v| = 2\ln|x|, \quad v = x^2;$$

$$u' \cdot x^2 = 3x^4, \quad v' = 3x^2, \quad \frac{du}{dx} = 3x^2 \Big| \cdot dx, \quad du = 3x^2 dx,$$

$$\int du = 3\int x^2 dx, \quad u = 3\frac{x^3}{3} + C, \quad u = x^3 + C.$$

Загальний розв'язок лінійного рівняння має вигляд: $y = v(x) \cdot u(x, C) = x^2 \left(x^3 + C\right).$

Відповідь: функція $y = x^2\left(x^3 + C\right)$ є загальним розв’язком лінійного рівняння.

Диференціальні рівняння другого порядку

Рівняння другого порядку мають вигляд $F(x, y, y', y'') = 0$ або $y'' = f(x, y, y')$, а початкові умови записуються так: $y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0$.

До рівнянь другого порядку, які допускають *зниження порядку* належать рівняння: $y'' = f(x), \quad y'' = f(x, y'), \quad y'' = f(y, y')$.

Розглянемо послідовно, як здійснюється зниження порядку і як інтегрувати кожне із них. Ці рівняння необхідно інтегрувати двічі.

Рівняння $y'' = f(x)$ можна записати у вигляді $\frac{dy'}{dx} = f(x)$, або $dy' = f(x)dx$ і проінтегрувати: $\int dy' = \int f(x)dx, \quad y' = \int f(x)dx + C_1$. Одержане рівняння першого порядку необхідно ще раз проінтегрувати.

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' = \sin x + 2x$.

Розв’язання. Другу похідну y'' перепишемо у вигляді $\frac{dy'}{dx}$, тобто $y'' = \frac{dy'}{dx}$.

Одержимо:

$$\frac{dy'}{dx} = \sin x + 2x \Big| \cdot dx, \quad dy' = (\sin x + 2x)dx; \quad \int dy' = \int (\sin x + 2x)dx =$$

$$= \int (\sin x + 2x) + 2\int x dx; \quad y' = -\cos x + \frac{2x^2}{2} + C_1, \quad y' = -\cos x + x^2 + C_1.$$

Одержали рівняння першого порядку, яке можна проінтегрувати:

$$\frac{dy}{dx} = -\cos x + x^2 + C_1 \Big| \cdot dx, \quad dy = \left(-\cos x + x^2 + C_1\right)dx;$$

$$\int dy = \int \left(-\cos x + x^2 + C_1\right)dx, \quad y = -\int \cos x dx + \int x^2 dx + C_1 \int dx + C_2,$$

$$y = -\sin x + \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2.$$

Відповідь: функція $y = -\sin x + \frac{1}{3}x^3 + C_1 x + C_2$ є загальним розв’язком рівняння другого порядку.

<u>Рівняння</u> $y'' = f(x, y')$ за допомогою заміни $y' = t(x), y'' = t'(x)$ зводяться до рівняння першого порядку вигляду $t' = f(x, t)$, яке уміємо розв’язувати. Якщо, наприклад, $t = \varphi(x_1, C_1)$, то $y' = \varphi(x_1, C_1)$, а $y = \int \varphi(x_1, C_1) + C_2$.

<u>Приклад</u>. Знайти загальний розв'язок рівняння $\left(1 + x^2\right)y'' - 2xy' = 0.$

<u>Розв’язання</u>. Позначимо $y' = t, \quad y'' = t'$. Одержимо рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними $\left(1 + x^2\right)t' = 2xt,$

$$t' = \frac{2xt}{1 + x^2} = \frac{2x}{1 + x^2} \cdot t; \quad \frac{dt}{dx} = \frac{2x}{1 + x^2} \cdot t \Big| \cdot dx, \quad dt = t \cdot \frac{2xdx}{1 + x^2}, \quad \frac{dt}{t} = \frac{2xdx}{1 + x^2}; \quad \int \frac{dt}{t} = \int \frac{2xdx}{1 + x^2};$$

$$\ln|t| = \ln\left|1 + x^2\right| + \ln|C_1|, \quad \frac{dy}{dx} = C_1\left(1 + x^2\right), \quad dy = C_1\left(1 + x^2\right)dx; \quad \int dy = \int C_1\left(1 + x^2\right)dx + C_2,$$

$y = C_1\left(x + \frac{x^3}{3}\right) + C_2$ - загальний розв'язок рівняння.

Рівняння $y'' = f(y, y')$ за допомогою заміни змінної $y' = p(y)$, $y'' = P'_y \cdot y'_x = P'_y \cdot p$ зводиться до рівняння $P'_y \cdot p = f(y, p)$ першого порядку, яке уміємо інтегрувати.

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння $2yy'' = 1 + (y')^2$.

Розв’язання. У рівнянні відсутня змінна x , тому введемо заміну вигляду $y' = p(y)$, а $y'' = P'_y \cdot p$. Після підстановки одержимо рівняння першого порядку, у якому змінні відокремляться і його можна проінтегрувати.

$$2yP'_y p = 1 + p^2, \quad P'_y = \frac{1+p^2}{2yp}, \quad P'_y = \frac{1}{y}\cdot\frac{1+p^2}{2p}, \quad \left.\frac{dp}{dy} = \frac{1}{y}\cdot\frac{1+p^2}{2p}\right| \cdot dy,$$

$$dp = \left.\frac{1+p^2}{2yp}\cdot\frac{dy}{y}\right| \div \frac{1+p^2}{2p}, \quad \frac{2pdp}{1+p^2} = \frac{dy}{y}; \quad \int\frac{2pdp}{1+p^2} = \int\frac{dy}{y},$$

$$\ln\left(1+p^2\right) = \ln|y| + \ln|C_1|, \quad 1+p^2 = C_1 y, \quad p^2 = C_1 y - 1, p = \pm\sqrt{C_1 y - 1}, \quad y' = \pm\sqrt{C_1 y - 1},$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{C_1 y - 1}, \quad \frac{dy}{\pm\sqrt{C_1 y - 1}} = dx, \quad \int dx = \pm\int\frac{dy}{(C_1 y - 1)^{\frac{1}{2}}},$$

$$x = \pm\frac{1}{C_1}\cdot 2\sqrt{C_1 y - 1} + C_2, \quad (x - C_2)^2 = \left(\pm\frac{2}{C_1}\sqrt{C_1 y - 1}\right)^2,$$

$$(x - C_2)^2 = \frac{4}{C_1^{\,2}}(C_1 y - 1), \quad \frac{C_1^{\,2}(x - C_2)^2}{4} = C_1 y - 1,$$

$$C_1 y = 1 + \frac{C_1^{\,2}(x - C_2)^2}{4} = \frac{4 + C_1^{\,2}(x - C_2)^2}{4}, \quad y = \frac{C_1^{\,2}(x - C_2)^2 + 4}{4C_1}.$$

Відповідь: функція $y = \frac{1}{4C_1}\left(C_1^{\,2}(x - C_2)^2 + 4\right)$ є загальним розв’язком диференціального рівняння.

Лінійні диференціальні рівняння другого порядку

Лінійні рівняння другого порядку мають вигляд

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y + a_2(x)y = b(x), \tag{5}$$

де $a_0(x), a_1(x), a_2(x), b(x)$ - деякі неперервні функції, а $a_0(x) \neq 0$. Якщо $b(x) = 0$, то лінійне рівняння

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y + a_2(x)y = 0 \tag{6}$$

називається *лінійним однорідним.*

Структура загального розв'язку для лінійних однорідних рівнянь (6) має вигляд

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \tag{7}$$

де $C_{1,} C_2$ - сталі величини, а $y_1(x)$ та $y_2(x)$ - функції, які складають фундаментальну систему розв'язків для даного рівняння.

Для лінійних неоднорідних рівнянь (5) структура загального розв'язку є такою:

$$y = \bar{y}(x) + \tilde{y}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \tilde{y}(x), \tag{8}$$

де $\bar{y}(x)$ є загальним розв'язком однорідного рівняння, а $\tilde{y}(x)$ - частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

<u>Лінійні однорідні рівняння із сталими коефіцієнтами</u>

Частинний розв'язок лінійного однорідного рівняння із сталими коефіцієнтами

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{9}$$

де p, q - сталі величини, шукають у вигляді функції $y = e^{kx}$, де k - довільне число. Після підстановки цієї функції у лінійне однорідне рівняння (9) для визначення коефіцієнтів k одержують алгебраїчне рівняння

$$k^2 + pk + q = 0, \tag{10}$$

яке називається *характеристичним* рівнянням даного диференціального рівняння (9).

Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння (9) в залежності від коренів характеристичного рівняння (10) має відповідний вигляд:

1) якщо корені дійсні різні $k_1 \neq k_2$, то

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}, \tag{11}$$

2) якщо корені дійсні рівні $k_1 = k_2 = k$, то

$$y = e^{kx}\left(C_1 + C_2 x\right), \tag{12}$$

3) якщо корені комплексно спряжені $k_{1,2} = \alpha + \beta i$, то

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right). \tag{13}$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівнянь: 1) $y'' + y' - 2y = 0$; 2) $y'' - 8y' + 16y = 0$; 3) $y'' + 2y' + 17y = 0$.

Розв’язання. Складемо відповідні характеристики рівняння для кожного рівняння.

1) $k^2 + k - 2 = 0, \quad k_1 = 1, \quad k_2 = -2$’

Загальний розв'язок має вигляд $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}$.

2) $k^2 - 8k + 16 = 0, \quad k_1 = k_2 = 4$. Корені дійсні рівні, то в силу (11) $y = e^{4x}\left(C_1 + C_2 x\right)$.

3) $$k^2 + 2k + 17 = 0, \quad k_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-17} = -1 \pm \sqrt{-16} = -1 \pm \sqrt{16\cdot(-1)} = -1 \pm 4i;$$
$$k_{1,2} = -1 \pm 4i; \quad \alpha = -1, \quad \beta = 4.$$

Тоді $y = e^{-x}\left(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x\right)$.

Лінійне неоднорідне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами

Лінійне неоднорідне диференціальне рівняння із сталими коефіцієнтами має вигляд

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{14}$$

де $f(x)$ - невідома функція.

Для деяких функцій $f(x)$ окрім методу варіації сталих можна застосувати *метод підбору частинного розв'язку*.

1) Якщо права частина рівняння (14) має вигляд $f(x) = P_n(x)$ многочлен n-го порядку, то частинний розв'язок шукають у вигляді

$$\tilde{y}(x) = Q_n(x) \cdot x^r,$$

де $Q_n(x)$- многочлен того самого порядку, що і многочлен $P_n(x)$, але з невідомими коефіцієнтами, а число r - число коренів характеристичного рівняння рівних нулю.

2) Якщо функція $f(x) = e^{ax} P_n(x)$, де a - довільне число, то частинний розв'язок має вигляд

$$\tilde{y}(x) = Q_n(x) e^{ax} \cdot x^r,$$

де $Q_n(x)$ - многочлен із невідомими коефіцієнтами, а число r - число коренів характеристичного рівняння, які співпадають із коефіцієнтом a в показнику степені.

3) Якщо $f(x) = M\cos bx + N\sin bx$, де M, N, b- задані числа, то частинний розв'язок записують у вигляді

$$\tilde{y} = (A\cos bx + B\sin bx)x^r,$$

де A, B- невідомі коефіцієнти, а r дорівнює числу коренів характеристичного рівняння, які співпадають із bi.

Приклад. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y''+4y=2\sin x$, який задовольняє початковим умовам $y(0)=1, \quad y'(0)=2$.

Розв'язання. Для знаходження загального розв'язку цього рівняння необхідно знайти загальний розв'язок однорідного рівняння $\bar{y}(x)$ і частинний розв'язок неоднорідного рівняння $\tilde{y}(x)$, тобто $y=\bar{y}(x)+\tilde{y}(x)$.

1) $y''+4y=0, \quad k^2+4=0, \quad k^2=-4, \quad k_{1,2}=\pm 2i,$
$\alpha=0, \quad \beta=2, \quad \bar{y}(x)=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$

2) $f(x)=2\sin x, \quad \tilde{y}(x)=(A\cos x+B\sin x)x^r$, де $r=0$, бо із характеристичного рівняння $\beta=2$, а $b=1$ і вони не співпадають, то $\tilde{y}(x)=A\cos x+B\sin x$.

Знайдемо невідомі коефіцієнти A, B: $\tilde{y}'=-A\sin x+B\cos x, \quad y''=-A\cos x-B\sin x$.

Підставимо $\tilde{y}, \quad \tilde{y}', \quad \tilde{y}''$ у рівняння і одержимо тотожність із якої методом невизначених коефіцієнтів знайдемо A, B.

$-A\cos x-B\sin x+4A\cos x+4B\sin x=2\sin x, \quad 3A\cos x+3B\sin x=2\sin x$

$$\begin{array}{l|l} \sin x & 3B=2, \quad B=\dfrac{2}{3}, \\ \cos x & 3A=0, \quad A=0. \end{array}$$

Тоді $\tilde{y}(x)=\dfrac{2}{3}\sin x$. Загальний розв'язок має вигляд

$$y=\bar{y}(x)+\tilde{y}(x)=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{2}{3}\sin x, \quad y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{2}{3}\sin x.$$

Враховуючи початкові умови можемо визначити значення коефіцієнтів C_1 і C_2. Знайдемо y': $\quad y'=-2C_1\sin 2x+2C_2\cos 2x+\dfrac{2}{3}\cos x.$

Із початкових умов слідує, що $x=0, \quad y=1, \quad y'=2$, то після підстановки даних значень у загальний розв'язок та його похідну одержимо систему:

$$\begin{cases} 1 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 + \frac{2}{3}\sin 0, \\ 2 = -2C_1 \sin 0 + 2C_2 \cos 0 + \frac{2}{3}\cos 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = C_1, \\ 2 = 2C_2 + \frac{2}{3}, \end{cases} \begin{cases} C_1 = 1, \\ 2C_2 = 2 - \frac{2}{3}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3} = \frac{2}{3}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Одержані значення коефіцієнтів $C_1 = 1, C_2 = \frac{2}{3}$ підставимо у загальний розв'язок рівняння і матимемо частинний розв'язок:

$$y_ч = \cos 2x + \frac{2}{3}\sin 2x + \frac{2}{3}\sin x.$$

<u>**Системи диференціальних рівнянь**</u>

Системою диференціальних рівнянь називається сукупність диференціальних рівнянь.

Систему диференціального рівняння першого порядку вигляду

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n), \quad i = \overline{1,n} \qquad (15)$$

називають *нормальною системою.*

Розв'язком системи (15) називають сукупність функцій $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$, які задовольняють кожному рівнянню системи.

Системи рівнянь вищих порядків можна звести до нормальної системи за допомогою введення додаткових функцій.

Методом виключення змінних систему (15) можна звести до одного рівняння n-го порядку відносно однієї невідомої функції.

<u>Приклад</u>. Знайти загальний розв'язок системи рівнянь методом виключення змінних:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 6y, \\ \dfrac{dx}{dt} = -2x + 9y. \end{cases}$$

<u>Розв'язання</u>. Виключимо, наприклад, функцію $x(t)$ із системи рівнянь. Для цього продиференціюємо друге рівняння системи по t:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -2\frac{dx}{dt} + 9\frac{dy}{dt}.$$

В одержане рівняння підставимо із першого рівняння значення $\dfrac{dx}{dt}$:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -2(x+6y) + 9\frac{dy}{dt} = -2x - 12y + 9\frac{dy}{dt}. \qquad (16)$$

Із другого рівняння знайдемо функцію $x(t)$ і підставимо її у рівняння (16). Одержимо: $-2x = \dfrac{dy}{dt} - 9y$;

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dy}{dt} - 9y - 12y + 9\frac{dy}{dt} = 10\frac{dy}{dt} - 21y;$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 10\frac{dy}{dt} + 21y = 0 \quad \text{або} \quad y'' - 10y' + 21y = 0.$$

Одержали лінійне однорідне рівняння із сталими коефіцієнтами другого порядку відносно функції $y(t)$. Знайдемо його загальний розв'язок

$$k^2 - 10k + 21 = 0, \quad k_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25-21} = 5 \pm 2, \quad k_1 = 7, k_2 = 3.$$

Корені дійсні різні. В силу формули (11) загальний розв'язок має вигляд

$$y(t) = C_1 e^{7t} + C_2 e^{3t}.$$

Продиференціюємо функцію $y(t)$: $$\frac{dy}{dt} = 7C_1e^{7t} + 3C_2e^{3t}.$$

Одержаний вираз підставимо у рівняння $x = -\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dt} - 9y\right)$. Одержимо функцію $x(t)$:

$$x(t) = -\frac{1}{2}\left(7C_1e^{7t} + 3C_2e^{3t} - 9C_1e^{7t} - 9C_2e^{3t}\right) = -\frac{1}{2}\left(-2C_1e^{7t} - 6C_2e^{3t}\right) = C_1e^{7t} + 3C_2e^{3t}.$$

Відповідь: функції $x(t) = C_1e^{7t} + 3C_2e^{3t}$ *і* $y(x) = C_1e^{7t} + C_2e^{3t}$ є розв'язком системи.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Завдання 1. Знайти похідні заданих функцій.

1.а) $y = \sqrt{x}arctgx^3 - \frac{4}{x} + \frac{x^2}{7}$; б) $y = \cos^4 \ln x$; в) $x^3 + 2x^2y^2 + 5x + y - 5 = 0$; г) $\begin{cases} x = ctgt; \\ y = \dfrac{1}{\cos 2t}. \end{cases}$

2.а) $y = x\ln^5 x - \frac{7}{x^2} + \frac{x^3}{7}$; б) $y = tge^{\arcsin x}$; в) $x^2 - 2x\ y^2 + 3x - 1 = 0$; г) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sin t}; \\ y = \cos t. \end{cases}$

3.а) $y = \frac{x^2 - 1}{arctgx} - \sin 5x + \frac{4}{x^3}$; б) $y = \sin ctg^{5x}$; в) $x^4 - 7x^2y\ + 5y - 7 = 0$; г) $\begin{cases} x = e^{7t}; \\ y = e^{-5t\cos t}. \end{cases}$

4.а) $y = \sqrt[5]{x^2} - \frac{2}{x} + \arcsin^2 x$; б) $y = tg^8 5x$; в) $x^2 - 3x\ y^4 + 3y - x + 1 = 0$; г) $\begin{cases} x = \dfrac{7}{\sin 2t}; \\ y = \cos^2 t. \end{cases}$

5.а) $y = ctg\frac{x^2 - 1}{x + 5} - \frac{4}{\sqrt[5]{x}} + \frac{x}{8}$; б) $y = \log_8^{\sin x^2}$; в) $x^7 - 7x^2y\ + 4y^3 - 5x + 1 = 0$; г) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{1 - e^t}; \\ y = e^{2t}. \end{cases}$

6. а) $y = x\cos 3x - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{x^5}{2} + 3$; б) $y = 4^x$; в) $x^2 - xy\ + y^3 + 3y = 0$; г) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sin t}; \\ y = e^{5t}. \end{cases}$

7. а) $y = x\arccos^3 x - \frac{\sqrt[3]{x}}{2} + \frac{4}{x^5} + 3$; б) $y = ctg^2 \log_7 x$; в) $xy - 5x^2 + 3y^4 - 5x = 9$; г) $\begin{cases} x = \cos 7t; \\ y = \sin 5t. \end{cases}$

8. а) $y = \frac{7 - 2x + x^2}{\ln x} + 7^{x^2} - \frac{7}{x^2} + \frac{x^2}{7}$; б) $y = \sqrt{ctg 4^x}$; в) $x^2 - x^2 y + y^4 - 5x = 7$; г) $\begin{cases} x = 3\cos 2t; \\ y = 2\sin 5t. \end{cases}$

9. а) $y = \frac{arctg^2 x}{x^2 + x} - 7^x - \frac{x}{7} + \frac{7}{x}$; б) $y = \arcsin\sqrt{\ln x}$; в) $x^2 - x\ y^5 - 5x^3 - 2y + 7 = 0$; г) $\begin{cases} x = \frac{3}{\sin t}; \\ y = e^{5t}. \end{cases}$

10. а) $y = \sqrt[7]{x^3} - \frac{x^2}{4} + \frac{5}{x} - \sin^2 x + 1$; б) $y = \ln\arcsin x^7$; в) $x^2 - x^2 y^3 + 5y - x + 7 = 0$; г) $\begin{cases} x = \frac{1}{\cos t}; \\ y = \frac{1}{\sin t}. \end{cases}$

Завдання 2. Знайти границі за правилом Лопіталя.

1. а) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^{-x^3}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos 10x}{\sin^2 x}$. 2. а) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 e^x$; б) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x}$.

3. а) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^{7x}}$; б) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x}$. 4.а) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^{-5x}}{x^4}$; б) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 3}$.

5. а) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^{-5x}}{x^2 + 7}$; б) $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x^2 + 3x}{x^2 + 8x + 15}$. 6. а) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 5}{e^{2x}}$; б) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 2x - 8}$.

7. а) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{x^2 - 5}$; б) $\lim\limits_{x \to 5} \frac{x^2 - 5x}{x^2 - 4x - 4}$. 8. а) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5 - x^2}{e^{3x}}$; б) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x - 3}$.

9. а) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^{-3x}}{x^2 - x}$; б) $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x^2 - x - 1}{x^2 - 9}$. 10. а) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x - x^2}{e^{2x}}$; б) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 + x - 6}$.

Завдання 3. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік.

1. $y = \frac{x^2 - 5}{x - 3}$. 2. $y = \frac{x^2 + 1}{x + 3}$. 3. $y = \frac{x^2 - 16}{x + 1}$. 4. $y = \frac{4 - x^2}{x + 5}$. 5. $y = \frac{x^2 - 9}{x + 2}$.

6. $y = \frac{x^2 - 8}{x + 3}$. 7. $y = \frac{x^2 + x}{x - 5}$. 8. $y = \frac{x^2 - x}{x + 2}$. 9. $y = \frac{x^2 - 1}{x - 7}$. 10. $y = \frac{7 - x^2}{x + 4}$.

Завдання 4. Знайти найменше та найбільше значення функції $y = f(x)$ на відрізку $[a, b]$.

1. $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 2; \quad a = -3; b = 1.$ 2. $f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 6x + 1; \quad a = -4; b = 0.$

3. $f(x) = 6x^4 - 12x^3 + 3; \quad a = -1; b = 2.$ 4. $f(x) = 2x^3 + 15x^2 + 36x + 2; \quad a = -4; b = -1.$

5. $f(x) = 5 + 16x^3 - 3x^4 + 2; \quad a = -5; b = 2.$ 6. $f(x) = 4 + 12x^3 - 6x^4 + 2; \quad a = -2; b = 3.$

7. $f(x) = 5 + \frac{16}{3}x^3 - x^4; \quad a = -5; b = 1.$ 8. $f(x) = 20x^4 - 40x^3 - 1; \quad a = -1; b = 2.$

9. $f(x) = 4 + 10x^3 - 5x^4; \quad a = -2; b = 3.$ 10. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x; \quad a = -2; b = 3.$

Завдання 5. Знайти невизначені інтеграли.

1. *а*) $\int \frac{x^2+5}{x^2+1}dx;$ *б*) $\int \frac{dx}{x^2+2x+11};$ *в*) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+3};$

г) $\int \frac{4x^2-7}{(x+2)(x^2+5)}dx;$ *д*) $\int (x+2)e^{3x}dx;$ *е*) $\int \frac{dx}{2+\cos x+3\sin x}.$

2. *а*) $\int \frac{x^2-3}{x^2+2}dx;$ *б*) $\int \frac{dx}{x^2+3x+4};$ *в*) $\int \frac{xdx}{1+\sqrt{x-1}};$

г) $\int (x+3)e^{-2x}dx;$ *д*) $\int \frac{11-8x}{(x-4)(x^2+5)}dx;$ *е*) $\int \frac{dx}{3+2\sin x}.$

3. *а*) $\int \frac{x^2-1}{x^2+7}dx;$ *б*) $\int \frac{dx}{x^2-2x+9};$ *в*) $\int (x+3)e^{2x}dx;$

г) $\int \frac{xdx}{2+\sqrt{x+1}};$ *д*) $\int \frac{9x+5}{(x-1)(x^2+6)}dx;$ *е*) $\int \frac{dx}{3-2\sin x+\cos x};$

4. *а*) $\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+3}}dx;$ *б*) $\int \frac{dx}{x^2-3x+5};$ *в*) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+3}};$

г) $\int (x-3)\cos 2x dx;$ *д*) $\frac{2x+3}{(x-2)(x^2+3)}dx;$ *е*) $\int \frac{dx}{2+3\cos x}.$

5. *а*) $\int \frac{2-x}{\sqrt{x^2-3}}dx;$ *б*) $\int \frac{dx}{x^2+6x+10};$ *в*) $\int \frac{xdx}{1+\sqrt{x+4}};$

г) $\int x\ln(x+6)dx$; *д)* $\int \frac{4x+3}{(x+2)(x^2+1)}dx$; *е)* $\int \frac{dx}{5-3\sin x}$.

6. $a)\int \frac{1+2x}{\sqrt{x^2-4}}dx$; *б)* $\int \frac{dx}{x^2-6x+5}$; *в)* $\int \frac{xdx}{1+\sqrt{x+5}}$;

г) $\int x\sin 5xdx$; *д)* $\int \frac{5x^2+5x}{(x-4)(x^2+2)}dx$; *е)* $\int \frac{dx}{3+\sin x-2\cos x}$.

7. $a)\int \frac{2-x}{\sqrt{x^2-5}}dx$; *б)* $\int \frac{dx}{x^2-5x+9}$; *в)* $\int \frac{xdx}{2+\sqrt{x+3}}$;

г) $\int arctg2xdx$; *д)* $\int \frac{4x+7}{(x-3)(x^2+10)}dx$; *е)* $\int \frac{dx}{2+\cos x-\sin x}$.

8. $a)\int \frac{4-x}{\sqrt{x^2+5}}dx$; *б)* $\int \frac{dx}{x^2+5x-9}$; *в)* $\int \frac{xdx}{1+\sqrt{x-5}}$;

г) $\int arctg3xdx$; *д)* $\int \frac{15-x}{(x+4)(x^2+3)}dx$; *е)* $\int \frac{dx}{2+5\sin x}$.

9. $a)\int \frac{x+4}{\sqrt{x^2-5}}dx$; *б)* $\int \frac{dx}{x^2+4x-5}$; *в)* $\int \frac{xdx}{3+\sqrt{x+2}}$;

г) $\int \ln(x+9)dx$; *д)* $\int \frac{4x^2-3x}{(x-2)(x^2+4)}dx$; *е)* $\int \frac{dx}{2+3\cos 2x}$.

10. $a)\int \frac{x-7}{\sqrt{x^2+6}}dx$; *б)* $\int \frac{dx}{x^2-8x+15}$; *в)* $\int \frac{xdx}{4+\sqrt{x+2}}$;

г) $\int x10^x dx$; *д)* $\int \frac{4x^2+9x+12}{(x+4)(x^2+4)}dx$; *е)* $\int \frac{dx}{4+\cos x-\sin x}$.

Завдання 6. Обчислити визначені інтеграли.

1. $a)\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{x^2+3}}$; б) $\int_0^4 \frac{\sqrt{x}dx}{2+x}$. 2. $a)\int_0^1 e^{-2x}dx$; б) $\int_{-7}^1 \frac{dx}{3+\sqrt{2-x}}$.

3. $a)\int_0^2 \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$; б) $\int_4^9 \frac{x+3}{\sqrt{x}+1}dx$. 4. $a)\int_0^{\frac{\pi}{2}} tg\frac{x}{2}dx$; б) $\int_0^9 \frac{dx}{2+\sqrt{x}}$.

5. $a)\int_0^2 \frac{dx}{2x+5}$; б) $\int_{-2}^{1} \frac{dx}{8+\sqrt{x+3}}$. 6. $a)\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} ctg\frac{x}{2}dx$; б) $\int_0^4 \frac{dx}{4+\sqrt{x}}$.

7. $a)\int_0^2 \frac{xdx}{x^2+4}$; б) $\int_{-4}^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{x+5}}$. 8. $a)\int_0^{\pi} \cos 2x dx$; б) $\int_0^4 \frac{dx}{5+\sqrt{x}}$.

9. $a)\int_0^1 5^x dx$; б) $\int_0^9 \frac{dx}{8+\sqrt{x}}$. 10. $a)\int_0^{\pi} \sin 3x dx$; б) $\int_0^9 \frac{dx}{6+\sqrt{x}}$.

Завдання 7. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжністю.

1. $a)\int_0^{\infty} \frac{dx}{3x+2}$; б) $\int_1^2 \frac{dx}{(1-x)^2}$. 2. $a)\int_0^{\infty} \frac{dx}{2x+3}$; б) $\int_{-3}^{2} \frac{dx}{(x+3)^2}$.

3. $a)\int_0^{\infty} \frac{xdx}{x^2+2}$; б) $\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^3}}$. 4. $a)\int_0^{\infty} \frac{xdx}{x^2+3}$; б) $\int_0^2 \frac{dx}{(x-2)^3}$.

5. $a)\int_e^{\infty} \frac{dx}{x^3\sqrt{\ln x}}$; б) $\int_0^3 \frac{dx}{(x-3)^2}$. 6. $a)\int_e^{\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x}$; б) $\int_0^1 \frac{x^4dx}{1-x^5}$.

7. $a)\int_e^{\infty} \frac{dx}{x\ln^4 x}$; б) $\int_2^3 \frac{xdx}{x^2-4}$; 8. $a)\int_0^{\infty} \frac{xdx}{x^2+4}$; б) $\int_0^2 \frac{xdx}{4-x^2}$;

9. $a)\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+5}$; б) $\int_0^5 \frac{dx}{x-5}$; 10. $a)\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+6}$; б) $\int_0^4 \frac{dx}{x-4}$;

Завдання 8. Обчислити площу фігур обмежених лініями.

1. $a)\ y=3x^2-1, y=3x+5$; $б)\ \rho=2(1-\cos\varphi)$.

2. $a)\ y=2x^2+3, y=2x+7$; $б)\ \rho=3(1+\cos\varphi)$.

3. $a)\ y=3x^2+1, y=3x+7$; $б)\ \rho=2(1+\sin\varphi)$.

4. $a)\ y=2-x^2, y=x^2$; $б)\ \rho=2-\sin\varphi$.

5. $a)\ y^2=3x, x^2=3y$; $б)\ \rho=3(1-\sin\varphi)$.

6. $a)\ xy=6, x+y-7=0$; $б)\ \rho=3+\sin\varphi$.

7. $a)\ xy=4, 2x+y-6=0$; $б)\ \rho=2+\cos\varphi$.

8. $a)\ xy=2, x+2y-3=0$; $б)\ \rho=3-\cos\varphi$.

9. $a)\ y = e^{x}, y = e^{-x}, x = 4;$ $\quad$ $б)\ \rho = 4 + \sin\varphi.$

10. $a)\ y = 3x^{2}, y = 4 - x^{2};$ $\quad$ $б)\ \rho = 2 + \sin\varphi.$

Завдання 9.

1. Обчислити довжину дуги полукубічної параболи $y = \sqrt{(x-2)^{3}}$ від точки $A(2;0)$ до точки $B(6;8)$.

2. Обчислити об'єм тіла обертання навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y = x^{3}, y = 0, x = 2.$

3. Обчислити довжину дуги полукубічної параболи $y = \sqrt{x^{3}}$ від точки $O(0;0)$ до точки $A\left(5;5\sqrt{5}\right)$.

4. Обчислити об'єм тіла, яке утворюється при обертанні навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y = \sin x, 0 \le x \le \pi.$

5. Обчислити довжину дуги кривої $x = 8\sin t + 6\cos t$, $y = 6\sin t - 8\cos t, 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}.$

6. Обчислити об'єм тіла, яке утворюється при обертанні навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y^{2} = 8x, y = 0, x = 2.$

7. Обчислити довжину дуги кривої $x = 2\sin t + 3\cos t$, $y = 3\sin t - 2\cos t, 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}.$

8. Обчислити об'єм тіла, яке утворюється при обертанні навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y = x^{2}, y = x + 6.$

9. Обчислити довжину дуги кривої $x = 4\sin t + 3\cos t$, $y = 3\sin t - 4\cos t, 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}.$

10. Обчислити об'єм тіла, яке утворюється при обертанні навколо осі Oy фігури, обмеженої лініями $y = 2x^{2}, y = 4.$

Завдання 10. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь.

1. *а*) $\left(x^2+2\right)y'=-2xy^2$; *б*) $xy'+y=x+3$; *в*) $\left(x^2-y^2\right)y'=2xy$.

2. *а*) $\left(x^2+3\right)y'=x+2xy$; *б*) $y'-y=e^x$; *в*) $xy'=y\ln\frac{y}{x}$.

3. *а*) $\left(x^2-4\right)y'=3x+3xy$; *б*) $xy'-y=3$; *в*) $xy'=\sqrt{x^2+y^2}$.

4. *а*) $x^2y^2y'=y+2$; *б*) $xy'-y=x+1$; *в*) $\left(xy+x^2\right)y'=y^2$.

5. *а*) $\left(3x+xy^2\right)y'=2$; *б*) $xy'+y=x-2$; *в*) $x^2y'+y^2=2xy$.

6. *а*) $\left(2x+xy^2\right)y'=4$; *б*) $xy'+4y=x^4$; *в*) $x^2y'=xy-y^2$.

7. *а*) $\left(x^2+5\right)y'=2x-xy^2$; *б*) $xy'+2y=x^2$; *в*) $xy^2y'=x^3+y^2$.

8. *а*) $\left(x^2y-2y\right)y'=y^2+4$; *б*) $xy'+y=\sin x$; *в*) $\left(2x^2+xy\right)y'=xy+y^2$.

9. *а*) $\left(x^2+6\right)y'=3x-3xy^2$; *б*) $xy'+y=\cos x$; *в*) $xy'=y\left(1+\ln\frac{y}{x}\right)$.

10. *а*) $\left(4x-xy^2\right)=\left(x^2-3\right)y'$; *б*) $\left(1-x^2\right)y'+xy=1$; *в*) $(x+y)y'=y-2x$.

Завдання 11. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння другого порядку.

1. $y''tgx=y'+1$. 2. $2yy''-(y')^2=0$. 3. $y''-2y(y')^3=0$.

4. $y''\ln x-y'=0$. 5. $2(y')^2=(y-1)y''$. 6. $\left(1-x^2\right)y''=xy'$.

7. $3yy''+(y')^2=0$. 8. $yy''+(y')^2+1=0$. 9. $y''(1+y)=3(y')^2$.

10. $y''+y'tgx=0$.

Завдання 12. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початковим умовам.

1. $y''-6y'+9y=e^{3x}$; $y(0)=1,\ y'(0)=0$.

2. $y''-y'=9xe^{2x}$; $y(0)=0,\ y'(0)=-5$.

3. $y''-y'=x+1$; $y(0)=0,\ y'(0)=2$.

4. $y''-3y'-4y=17\sin x$; $y(0)=4,\ y'(0)=0$.

5. $y'' + 4y' - 12y = 8\sin 2x; \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

6. $y'' - 4y' = 6x^2 + 1; \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 3.$

7. $y'' + 6y' + 9y = 10e^{-3x}; \quad y(0) = 3,\ y'(0) = 2.$

8. $y'' + 5y' + 6y = 12\cos 2x; \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 3.$

9. $y'' - 4y' + 13y = 26x + 5; \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

10. $y'' + 4y' + 8y = 8x^2 + 16x + 6; \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 0.$

Завдання 13. Знайти загальний розв'язок системи рівнянь.

1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 11y. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - y. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 6y. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x + 9y. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$

ЛІТЕРАТУРА

1. Барабаш О.В., Власик Г.М., Дахно Н.Б., Замрій І.В., Свинчук О.В., Шкапа В.В. Вища математика. Ч.2. Інтегральне числення функцій однієї і багатьох змінних. Навчальний посібник. – К.: ДУТ, 2019. – 232 с.
2. Кривуца В.Г., Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика. Практикум. – К.: ЦУЛ, 2003. – 536 с.
3. Клепко В.Ю., Голець В.Л. Вища математика у прикладах і задачах. Навчальний посібник. – К.: ЦУЛ, 2019. – 594 с.
4. Литвин І.І., Конопчук О.М., Желізняк Г.О. Вища математика. – К.: ЦУЛ, 2019. – 368 с.
5. Репета В.К. Вища математика: підручник: у 2 ч. – Ч.1, 2-е вид., виправ. – К.: НАУ, 2017. – 504 с.