МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙ
Кафедра РРМ

ЗАТВЕРДЖУЮ
Зав. кафедрою РРМ

_________В.А. Дружинин
«_20__» _вересня________ 2013

Практичні заняття №1-14

З навчальної дисципліни: Сигнали та процеси в радіотехніці
Напряму підготовки: Радіотехніка
Освітньо-кваліфікаційного рівня: бакалавр

Матеріали розглянуті
на засіданні кафедри РРМ
Протокол № 2 від 20.09.2013
Завідуючий кафедрою

_____________В.А. Дружинин
«_20_»_вересня_________ 2013

Київ 2013

Практичне заняття №1

ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІОНУВАННЯ СИСТЕМИ ПЕРЕДАЧІ ДИСКРЕТНИХ СИГНАЛІВ

1 Мета роботи:

Вивчення:
- структурної схеми системи передачі дискретних повідомлень;
- передачі дискретних сигналів на базі новітніх технологій за допомогою ЕОМ.

2 Теоретичні положення.

Призначення будь-якоі системи зв`язку – передача інформації від джерела до споживача. Інфомація у системі зв`язку надходить у вигляді повідомлень, які перетворюються у електричні сигнали.

Найпростіша структурна схема системи зв`язку зображена на рис. 1

1-джерело повідомлень;
2-перетворювач повідомлення у сигнал;
3-передавач;
4-канал зв`язку;
5-приймач;
6-перетворювач сигналу в повідомлення
7-споживач повідомлення
8-джерело завад

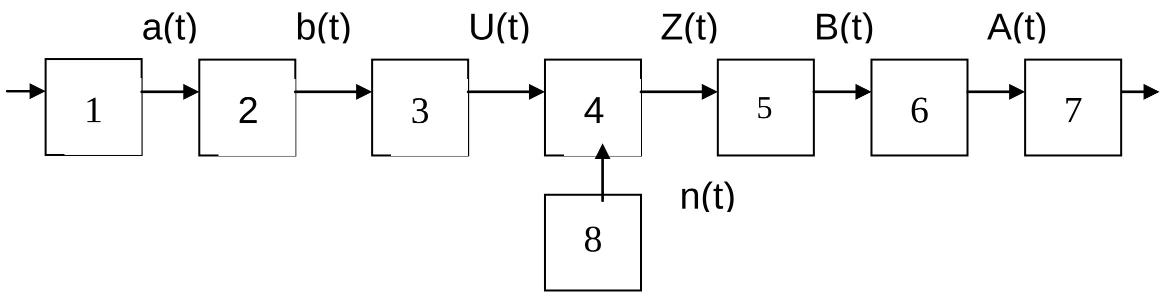


Рисунок 1. - структурна схема системи зв`язку

Результат перетворення повідомлення в електричний сигнал називається первинним сигналом b(t), який частіше всього пропорційний повідомленню b(t)=ka(t) (k-коефіціент пропорційності), і є неперервним, оскільки приймає нескінченну множину значень.

Формування первинного сигналу b(t) у випадку дискретних повідомлень полягає в присвоєнні знаками певних імпульсних сигналів.

Для передачі сигналу від передавача до приймача використовується фізичне коло або середовище – лінія зв`язку. Частіше всього лінія зв`язку є лінійно смуговою системою, тобто лінія зв`язку добре пропускає частоти від fmin до fmax. Для узгодження сигналу з такою лінією первинний сигнал перетворюють у вторинний, спектр якого зосереджений у смузі частот (fmin …fmax), або займає частину цієї смуги. Для цього двійкові імпульси перетворюють у радіоімпульси. На рис. 2 зображен радіоімпульс

S(t)=Asinω0t, 0<t<Tc, де Tc-тривалість сигналу, та його спектр. Смуга частот цього сигналу повинна попадати в смугу пропускання лінії зв`язку - в цьому полягає узгодження сигналу з смугопропускаючою лінією зв`язку.

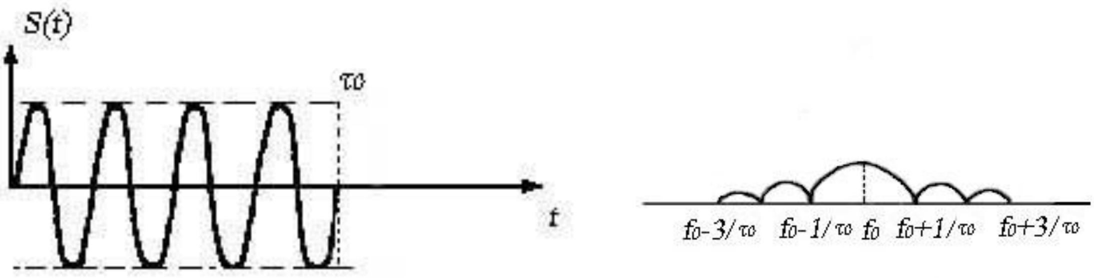


Рисунок 2. - Радіоімпульс

Перетворення первинного сигналу у вторинний виконується за допомогою *модуляції переносника.* При передачі двійкових дискретних сигналів гармонійним переносником можливі такі види дискретної модуляції: амплітудна, частотна, фазова. Дискретно-модульовані сигнали - це послідовності радіоімпульсів, які відрізняються за амплітудою, частотою або фазою. Таким чином, функцією передавача у випадку смугопропускаючої лінії зв`язку є модуляція переносника і обмеження спектру сигналу.

При передачі по лінії зв`язку на сигнал накладається завада n(t) і сигнал на виході каналу зв`язку можна записати: z(t)=KU(t-tз)+n(t), де коефіцієнт передачі лінії зв`язку, який виражає ослаблення сигналу; tз-затримка сигналу, яку можна не враховувати. В приймачі за допомогою *демодуляції* модульованого сигналу з завадою z(t) відновлюється первинний сигнал b(t). При цьому в демодуляторі враховуються параметри переданого сигналу і характеристика завади. Демодулятор дискретного сигналу виконує функцію вирішучої схеми, яка визначає, який сигнал був переданий із скінченого числа можливих сигналів (у випадку двійкових сигналів, якій з двох можливих сигналів був переданий).

Відновлений первинний сигнал поступає до споживача повідомлень, де перетворюється у повідомлення відповідної фізичної природи. У випадку дискретних повідомлень виконується декодування - перехід від кодових комбінацій до знаків повідомлення. Декодування виконується згідно з первинним кодом, який застосовувався при кодуванні.

Основними параметрами сигналу, що визначають його властивості, як переносника інформації в системах зв'язку, є тривалість сигналу T_c, смуга частот, займана спектром сигналу F_c, і перевищення сигналу над завадами D_c. Перевищення сигналу над завадами D_c є енергетичною мірою сигналу і визначається як логарифм відношення середньої потужності сигналу до середньої потужності завад на вході лінії зв'язку, тобто:

$$D_c = \log \frac{P_c}{P_n}$$

Добуток основних параметрів сигналу

$$V_c = T_c F_c D_c$$

прийнято називати обсягом сигналу. Обсяг сигналу є узагальненою характеристикою сигналу як носія інформації. На практиці іноді використовується геометричне представлення обсягу сигналу у вигляді прямокутного паралелепіпеда в тривимірному просторі з координатами T, F і D (рис.3).

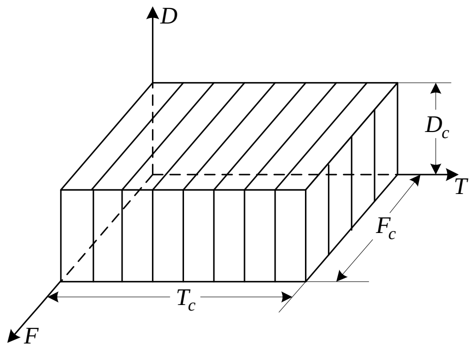


Рисунок 3. - Геометричне представлення обсягу сигналу

За аналогією із сигналами канал зв'язку, застосовуваний для передачі сигналів, прийнято характеризувати наступними основними параметрами: часом роботи каналу зв'язку T_k, смугою частот перепуску каналу зв'язку F_k і перевищенням середньої потужності сигналу над середньою потужністю завад на виході каналу зв'язку:

$$D_k = \log \frac{P_c}{P_n}$$

Добуток основних параметрів каналу зв'язку

$$V_k = T_k F_k D_k$$

прийнято називати обсягом, чи ємністю каналу зв'язку.

Основною умовою узгодження каналу зв'язку із сигналом, при виконанні якого забезпечується можливість неспотвореної передачі сигналу, є умова:

$$T_k \geq T_c; \quad F_k \geq F_c \quad i \quad D_k \geq D_c.$$

При кодуванні відбувається процес перетворення елементів повідомлення у відповідні їм числа (кодові символи). Кожному елементу повідомлення привласнюється визначена сукупність кодових символів, яка називається кодовою комбінацією. Сукупність кодових комбінацій, що відображають дискретні повідомлення, утворює код. Правило кодування може бути виражено кодовою таблицею, в якій приводяться алфавіт повідомлень, що кодуються, і відповідні їм кодові комбінації. Множина можливих кодових символів називається кодовим алфавітом, а їх кількість *Т* — основою коду. У загальному випадку при основі коду *Т* правила кодування *К* елементів повідомлення зводяться до правил запису *К* різних чисел у *Т*-ій системі числення. Число розрядів *n*, що утворюють кодову комбінацію, називається розрядністю коду чи довжиною кодової комбінації. У залежності від системи числення, використовуваної при кодуванні, розрізняють двійкові і *Т*-ві (недвійкові) коди.

Коди, в яких усі комбінації мають однакову довжину, називають рівномірними. Для рівномірного коду число можливих комбінацій дорівнює T^n. Прикладом такого коду є п'ятизначний код Бодо, що містить п'ять двійкових елементів (т = 2, п = 5). Число можливих кодових комбінацій дорівнює $2^5 = 32$, що вистачить для кодування всіх букв російського алфавіту. Однак цього недостатньо для передачі повідомлення, яке містить букви, цифри, різні умовні знаки (точка, кома, додавання, множення і т.п.). Тому на даний час використовується "Міжнародний код №2" (МТК-2). У коді МТК-2 використовується реєстровий принцип, відповідно до якого та сама пятиелементна кодова комбінація може використовуватися до трьох разів у залежності від положення регістра: російський, латинський, цифровий. Загальне число різних знаків при цьому дорівнює 84, що досить для кодування телеграми. Для передачі даних рекомендований семиелементний код МТК-5. Коди МТК-2 і МТК-5 є первинними (простими). Основними параметрами кодів є: основа коду *T*, довжина кодової комбінації *n*, відстань між кодовими комбінаціями d_{ij} і вага кодової комбінації ω. Відстань d_{ij} характеризує розходження між двома кодовими комбінаціями і визначається по Лемінгу числом незбіжних у них розрядів, тобто числом одиниць у сумі двох комбінацій за модулем 2. Число ненульових елементів у кодовій комбінації визначає її вага ω. Застосування рівномірних кодів спрощує побудову автоматичних літеродрукувальних пристроїв, і не вимагає передачі розділових символів між кодовими комбінаціями.

Декодування полягає у відновленні повідомлення за прийнятими кодовими символами. Пристрої, що здійснюють кодування і декодування, називають відповідно кодером і декодером. Як правило, це логічні пристрої. На рис.4 зображена структурна схема системи передачі дискретних повідомлень, а на рис.5 пояснюється процес перетворення дискретного повідомлення в сигнал. Передане повідомлення позначене буквою a_k, кодоване повідомлення (чи первинний цифровий сигнал) - $d_ц(t)$, його компоненти $d_l^{(i)}$ (l — номер послідовно переданого символу, і - номер позиції коду, $i = \overline{0, m-1}$). Сигнал, що надходить у лінію зв'язку позначений u(t), прийняте коливання — z(t), відновлена послідовність кодових символів — $\hat{d}_ц(t)$ (її компоненти $\hat{d}_i^{(i)}$) і декодоване (відновлене) повідомлення — $\hat{a}_v$. Позначення прийнятих сигналів, кодових символів і відновленого повідомлення обрані іншими, ніж переданих. Цим підкреслюється та обставина, що через дію завад прийнятий сигнал відрізняється від переданого, а відновлене повідомлення може не збігатися з вихідним.

У сучасних системах передачі дискретних повідомлень прийнято розрізняти дві груп щодо самостійних пристроїв: кодеки і модеми. Кодеком називаються пристрої, що перетворюють повідомлення в код (кодер) і код у повідомлення (декодер), а модемом — пристрій, що перетворюють код у сигнал (модулятор) і сигнал у код (демодулятор). Канальні пристрої (смугові підсилювачі передавача і приймача, коректори і т.п.) разом з лінією зв'язку утворюють неперервний канал, а останній разом з модемом - дискретний канал.

При передачі неперервного повідомлення a_k його спочатку перетворять у неперервний первинний електричний сигнал b(t), а потім, як правило, за допомогою модулятора формують канальний сигнал u(t), який і посилають у лінію зв'язку. Прийняте коливання z(t) піддається зворотним перетворенням, у результаті яких виділяється первинний сигнал $\hat{b}$. По ньому потім відновлюється з тією чи іншою точністю повідомлення $\hat{a}$.

Загальний принцип модуляції полягає в зміні одного чи декількох параметрів несучого коливання (переносника) $f(t, \alpha, \beta,...)$ відповідно до переданого повідомлення. Так якщо в якості переносника обране гармонійне коливання $f(t) = U\cos(\omega_0 t + \varphi)$, то можна створити три види модуляції: амплітудну (АМ), частотну (ЧМ) і фазову (ФМ).

Якщо переносником є періодична послідовність імпульсів $f(t) = U_0 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \nu(t - lT - t_0)$, то при заданій формі імпульсів $\nu(t)$ можна утворити чотири основних види імпульсної модуляції: амплітудноімпульсну (АІМ), широтно-імпульсну (ШІМ), часово-імпульсну (ЧІМ, ФІМ) і частотно-імпульсну (ЧІМ). Застосування радіоімпульсів дозволяє одержати ще два види модуляції: за частотою і за фазою високочастотного заповнення.

При дискретній (цифровий) модуляції закодоване повідомлення а, яке представляє собою послідовність кодових символів b_l, перетвориться в послідовність елементів (посилок) сигналу $u_l(t)$ шляхом впливу кодових символів на переносник $f(t)$ За допомогою модуляції один з параметрів переносника змінюється за законом, що визначається кодом. При безпосередній передачі переносником може бути постійний струм, параметрами, що змінюються, якого є величина і напрямок струму. Зазвичай в якості переносника як і в неперервній модуляції, використовують змінний струм (гармонійне коливання). У цьому випадку можна одержати АМ, ЧМ і ФМ.

На рис.6 приведені форми сигналу при двійковому коді для різних видів дискретної чи цифрової модуляції (маніпуляції). При АМ символу 1 відповідає передача несучого коливання протягом часу Т (посилка), символу 0 — відсутність коливання (пауза). При ЧМ передача несучого коливання з частотою f_1 відповідає символу 1, а передача коливання з частотою f_0 відповідає 0. При двійковій ФМ змінюється фаза несучої на π при кожному переході від 1 до 0 і від 0 до 1.

Нарешті, на практиці застосовують систему відносної фазової модуляції (ВФМ), На відміну від ФМ, при ВФМ фазу сигналів відраховують не від деякого еталона, а від фази попереднього елемента сигналу. Наприклад, символ 0 передається відрізком синусоїди з початковою фазою попереднього елемента сигналу, а символ 1 — таким же відрізком з початковою фазою, що відрізняється від початкової фази попереднього елемента сигналу на π. При ВФМ передача починається з посилки однієї не несучого інформації елемента, який служить опорним сигналом для порівняння фази наступного елемента.

У більш загальному випадку дискретну модуляцію варто розглядати як перетворення кодових символів 0, 1, ..., m - 1 у визначені відрізки сигналу $u_i(t)$, де і = 0, 1, ..., т - 1 — переданий символ. При цьому вид сигналу $u_i(t)$, у принципі, може бути довільний. У дійсності його вибирають так, щоб задовольнити вимоги, висунуті до системи зв'язку (зокрема, за швидкістю передачі і за займаною смугою частот), і щоб сигнали добре розрізнялися з урахуванням діянь завад.

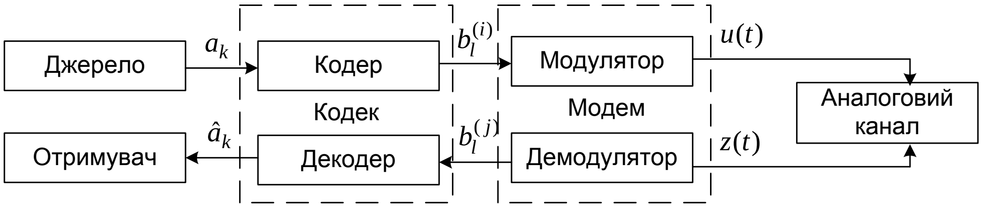


Рисунок 4. - Структурна схема системи передачі дискретних повідомлень

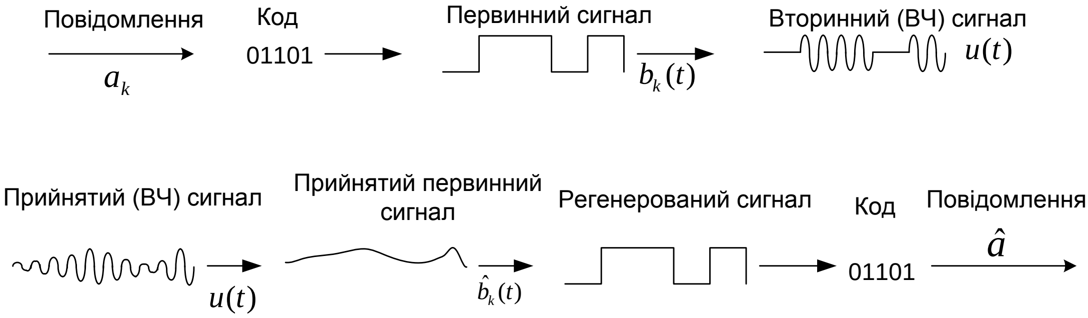


Рисунок 5. – Процес перетворення дискретного повідомлення в сигнал та зворотне перетворення

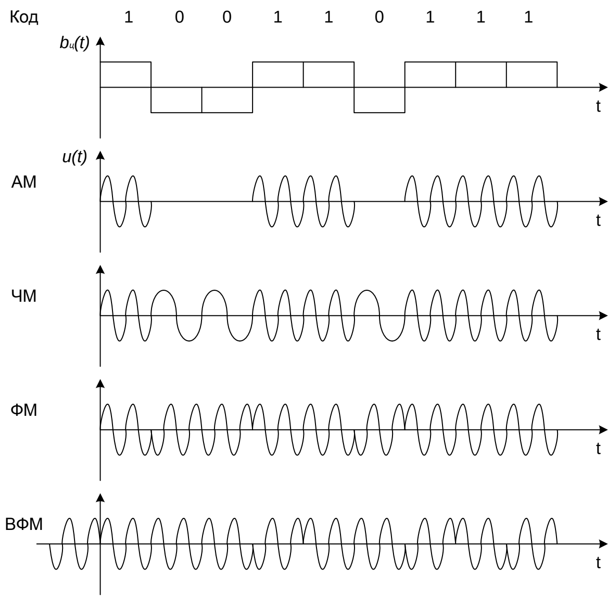


Рисунок 6. - Форми сигналів при двійковому коді для різних видів дискретної модуляції

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №2

Дослідження спектрів періодичних сигналів та неперіодичних сигналів

Теоретичні положення

2.1. Для періодичних сигналів з періодом T взаємозв´язок між часовим і спектральним уявлення виражається рядом Фур´є

$$f(t) = \frac{Ao}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} An\cos(n\Omega_1 t - \varphi_n)$$

де $\frac{Ao}{2}$ -стала складова, An –амплітуда n –ої гармоніки;

Ω_n =n Ω_1-кутова частота n –ої гармоніки;

φ_n -початкова фаза n –ої гармоніки.

T=2π/Ω;

f=1/T= Ω/2π

Залежність амплітуд An від частоти називається ***амплітудним спектром сигналу.***

Залежність фаз φ_n від частоти - ***фазовим спектром.***

Для періодичних сигналів амплітуди An відмінні від нуля тільки на частотах кратних f_1 . Їх зображують у вигляді вертикальних ліній на цих частота. Причому висота кожної лінії пропорційна амплітуді відповідної частотної складової. Таки спектри називають ***дискретними або лінійчатими .***

Співвідношення T/τ –називають щілинністю.

Практичне завдання

За допомогою нижченаведених формул встановити різні значення щілинності періодичної послідовності прямокутни х імпульсів (від 2 до 10) та зарисуйте графіки амплітудних спектрів з приблизним визначення амплітуди гармонік.

Побудувати амплітудний спектр сигналу періодичної послідовності прямокутних імпульсів за даними таблиці.

Дано:

№ варіанта	2
U_0 (B)	2
$\tau_и$(мс)	0,2
T(мс)	1

Розв'язування:

Розрахуємо частоту заданого сигналу:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{10^{-3}} = 1\ кГц$$

Розрахуємо скважність:

$$q = \frac{T}{\tau_н} = \frac{10^{-3}}{0{,}2*10^{-3}} = 5$$

Розрахуємо амплітуди сигналів за формулою:

$$A_л = \frac{2*\tau_и}{T}*U_0\frac{|\sin k\,f\,\pi\,\tau_и|}{k\,f\,\pi\,\tau_и}$$

Так як скважність $q = 5$, то в нас будуть відсутні 5, 10, 15 і т.д. гармоніки.

$$A_0 = \frac{U_0}{q} = \frac{2}{5} = 0.4$$

$$A_1 = \frac{2*0{,}2*10^{-3}}{10^{-3}}*2*\frac{|\sin 1*1*10^3*3{,}14*0{,}2*10^{-3}|}{1*10^3*3{,}14*0{,}2*10^{-3}} = \frac{0{,}8*|\sin 0.628|}{0{,}628} = \frac{0{,}8*0{,}588}{0{,}628} = 0{,}749$$

$$A_2 = \frac{2*0{,}2*10^{-3}}{10^{-3}}*2*\frac{|\sin 2*1*10^3*3{,}14*0{,}2*10^{-3}|}{2*1*10^3*3{,}14*0{,}2*10^{-3}} = \frac{0{,}8*|\sin 1.256|}{1{,}256} = \frac{0{,}8*{,}951}{1{,}256} = 0{,}605$$

$$A_3 = \frac{2*0{,}2*10^{-3}}{10^{-3}}*2*\frac{|\sin 3*1*10^3*3{,}14*0{,}2*10^{-3}|}{3*1*10^3*3{,}14*0{,}2*10^{-3}} = \frac{0{,}8*|\sin 1.884|}{1{,}884} = \frac{0{,}8*0{,}951}{1{,}884} = 0{,}404$$

$$A_4 = \frac{2*0{,}2*10^{-3}}{10^{-3}}*2*\frac{|\sin 4*1*10^3*3{,}14*0{,}2*10^{-3}|}{4*1*10^3*3{,}14*0{,}2*10^{-3}} = \frac{0{,}8*|\sin 2.512|}{2{,}512} = \frac{0{,}8*0{,}588}{2{,}512} = 0{,}187$$

$$A_6 = \frac{2*0{,}2*10^{-3}}{10^{-3}}*2*\frac{|\sin 6*1*10^3*3{,}14*0{,}2*10^{-3}|}{6*1*10^3*3{,}14*0{,}2*10^{-3}} = \frac{0{,}8*|\sin 3.768|}{3{,}768} = \frac{0{,}8*|-0{,}586|}{3{,}768} = 0{,}124$$

$$A_7 = \frac{2*0,2*10^{-3}}{10^{-3}} * 2 * \frac{\left|\sin 7*1*10^3*3,14*0,2*10^{-3}\right|}{7*1*10^3*3,14*0,2*10^{-3}} = \frac{0,8*\left|\sin 4.396\right|}{4,396} = \frac{0,8*\left|-0,95\right|}{4,396} = 0,173$$

$$A_8 = \frac{2*0,2*10^{-3}}{10^{-3}} * 2 * \frac{\left|\sin 8*1*10^3*3,14*0,2*10^{-3}\right|}{8*1*10^3*3,14*0,2*10^{-3}} = \frac{0,8*\left|\sin 5,024\right|}{5,024} = \frac{0,8*\left|-0,951\right|}{5,024} = 0,151$$

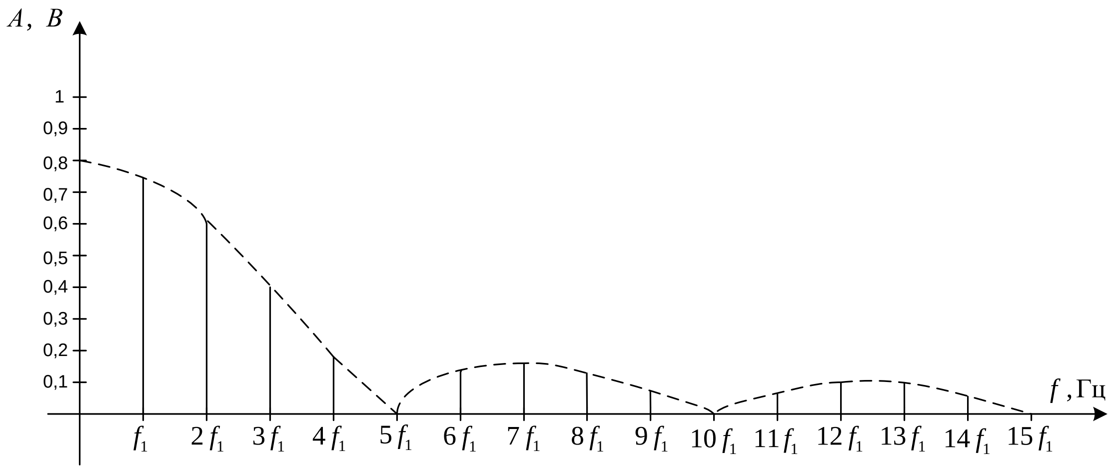
$$A_9 = \frac{2*0,2*10^{-3}}{10^{-3}} * 2 * \frac{\left|\sin 9*1*10^3*3,14*0,2*10^{-3}\right|}{9*1*10^3*3,14*0,2*10^{-3}} = \frac{0,8*\left|\sin 5,652\right|}{5,652} = \frac{0,8*\left|-0,59\right|}{5,652} = 0,084$$

$$A_{11} = \frac{2*0,2*10^{-3}}{10^{-3}} * 2 * \frac{\left|\sin 11*1*10^3*3,14*0,2*10^{-3}\right|}{11*1*10^3*3,14*0,2*10^{-3}} = \frac{0,8*\left|\sin 6,908\right|}{6,908} = \frac{0,8*\left|0,584\right|}{6,908} = 0,067$$

$$A_{12} = \frac{2*0,2*10^{-3}}{10^{-3}} * 2 * \frac{\left|\sin 12*1*10^3*3,14*0,2*10^{-3}\right|}{12*1*10^3*3,14*0,2*10^{-3}} = \frac{0,8*\left|\sin 7,536\right|}{7,536} = \frac{0,8*\left|0,949\right|}{7,536} = 0,101$$

$$A_{13} = \frac{2*0,2*10^{-3}}{10^{-3}} * 2 * \frac{\left|\sin 13*1*10^3*3,14*0,2*10^{-3}\right|}{13*1*10^3*3,14*0,2*10^{-3}} = \frac{0,8*\left|\sin 8,164\right|}{8,164} = \frac{0,8*\left|0,952\right|}{8,164} = 0,093$$

$$A_{14} = \frac{2*0,2*10^{-3}}{10^{-3}} * 2 * \frac{\left|\sin 14*1*10^3*3,14*0,2*10^{-3}\right|}{14*1*10^3*3,14*0,2*10^{-3}} = \frac{0,8*\left|\sin 8,792\right|}{8,792} = \frac{0,8*\left|0,59\right|}{8,792} = 0,054$$



Спектральне представлення неперіодичних сигналів

Інтегральне перетворення Фур'є. Періодичні сигнали є джерелами обмеженої, що не міняється згодом інформації. Дійсно, інформація, закладена в одному періоді такого коливання, періодично повторюється. Якщо ми хочемо за допомогою деякого електромагнітного процесу передавати мінливу в часі інформацію, необхідно відповідно змінювати форму сигналу. Але тоді сигнал стає неперіодичним. Серед різних неперіодичних сигналів найбільший інтерес представляють одиночні імпульси.

Одиночний імпульс S(t) можна розглядати як граничний випадок періодичної послідовності імпульсів Sp(t) при необмеженому збільшенні її періоду.

$$S(t) = \lim_{T \to \infty} Sp(t)$$

Простежимо зміни спектра сигналу в міру росту періоду.

При T=>∞ :

1) Інтервал між сусідніми гармоніками в спектрі зменшується $\Omega=2\pi/T$ =>dw, дискретна частота гармонік спектра перетворюється в безупинну; лінійчатий, дискретний спектр перетвориться в суцільний;

2)комплексні амплітуди гармонік спектра зменшуються пропорційно інтервалу між гармоніками $\Omega=2\pi/T$

$$S(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t)\cdot e^{-j\cdot w\cdot t}dt$$

$$S(t) = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} S(jw)\cdot e^{j\cdot w\cdot t}dw$$

Ці формули називають прямими і зворотними інтегральними перетвореннями Фур'є

Побудувати амплітудний спектр прямокутного імпульсу U(t).

Дано: U_0, $\tau_и$ і аналітичний вираз імпульсу U(t).

№ варіанта	2
U(t)=	U_0 [1(t)-1(t-$\tau_и$)]
U_0(В)	2
$\tau_и$(мс)	0,2

Для побудування спектральної діаграми вибрати довільно 3 значення частоти у кожній пелюстці амплітудного спектра та обчислити для них значення спектральної щільності амплітуд. Спектр обмежити 3-м нулем обвідної.

Розв'язання:

Обчислимо значення частот на яких спектральна щільність має значення 0:

$$f_{10} = \frac{n}{\tau_и} = \frac{1}{0.2*10^{-3}} = 5000Гц$$

$$f_{20} = \frac{n}{\tau_и} = \frac{2}{0,2*10^{-3}} = 10000Гц$$

$$f_{30} = \frac{n}{\tau_и} = \frac{3}{0,2*10^{-3}} = 15000Гц$$

Вибираємо проміжні значення частот, для яких обчислимо значення спектральної щільності амплітуд.

Для першої арки:

$f_{11} = 1000 Гц$

$f_{12} = 2500 Гц$

$f_{13} = 4000 Гц$

Для другої арки:

$f_{21} = 6000 Гц$

$f_{22} = 7500 Гц$

$f_{23} = 9000 Гц$

Для третьої арки:

$f_{31} = 11000 Гц$

$f_{32} = 12500 Гц$

$f_{33} = 14000 Гц$

Початкове значення:

$S(f_0) = A\tau = 2*0{,}2*10^{-3} = 0{,}4*10^{-3}$

$$S(f_{11}) = A\tau \frac{\sin\pi\ f\ \tau}{\pi\ f\ \tau} = 2*0.2*10^{-3}\frac{\left|\sin 3.14*1000*0.2*10^{-3}\right|}{3.14*1000*0.2*10^{-3}} = 0{,}37*10^{-3}$$

$$S(f_{12}) = A\tau \frac{\sin\pi\ f\ \tau}{\pi\ f\ \tau} = 2*0.2*10^{-3}\frac{\left|\sin 3.14*2500*0.2*10^{-3}\right|}{3.14*2500*0.2*10^{-3}} = 0{,}25*10^{-3}$$

$$S(f_{13}) = A\tau \frac{\sin\pi\ f\ \tau}{\pi\ f\ \tau} = 2*0.2*10^{-3}\frac{\left|\sin 3.14*4000*0.2*10^{-3}\right|}{3.14*4000*0.2*10^{-3}} = 0{,}094*10^{-3}$$

$$S(f_{21}) = A\tau \frac{\sin\pi\ f\ \tau}{\pi\ f\ \tau} = 2*0{,}2*10^{-3}\frac{\left|\sin 3.14*6000*0.2*10^{-3}\right|}{3.14*6000*0.2*10^{-3}} = 0{,}062*10^{-3}$$

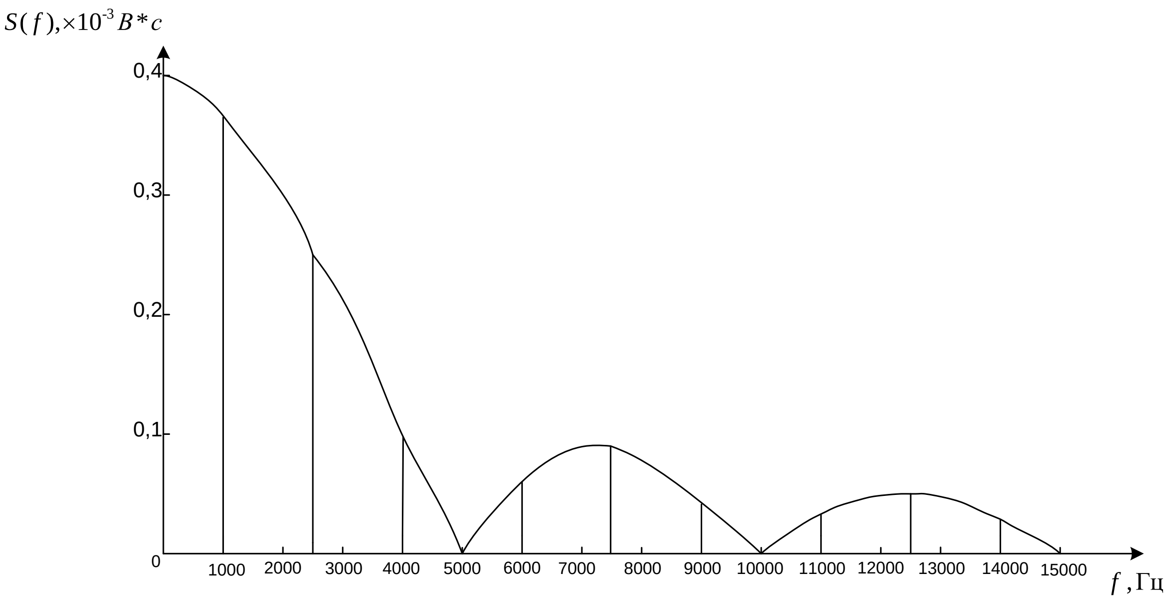
$$S(f_{22}) = A\tau \frac{\sin\pi\ f\ \tau}{\pi\ f\ \tau} = 2*0{,}2*10^{-3}\frac{\left|\sin 3.14*7500*0.2*10^{-3}\right|}{3.14*7500*0.2*10^{-3}} = 0{,}084*10^{-3}$$

$$S(f_{23}) = A\tau \frac{\sin\pi\ f\ \tau}{\pi\ f\ \tau} = 2*0{,}2*10^{-3}\frac{\left|\sin 3.14*9000*0.2*10^{-3}\right|}{3.14*9000*0.2*10^{-3}} = 0{,}042*10^{-3}$$

$$S(f_{31}) = A\tau \frac{\sin\pi\ f\ \tau}{\pi\ f\ \tau} = 2*0{,}2*10^{-3}\frac{\left|\sin 3.14*11000*0.2*10^{-3}\right|}{3.14*11000*0.2*10^{-3}} = 0{,}034*10^{-3}$$

$$S(f_{32}) = A\tau \frac{\sin\pi\ f\ \tau}{\pi\ f\ \tau} = 2*0{,}2*10^{-3}\frac{\left|\sin 3.14*12500*0.2*10^{-3}\right|}{3.14*12500*0.2*10^{-3}} = 0{,}051*10^{-3}$$

$$S(f_{33}) = A\tau \frac{\sin\pi\ f\ \tau}{\pi\ f\ \tau} = 2*0{,}2*10^{-3}\frac{\left|\sin 3.14*14000*0.2*10^{-3}\right|}{3.14*14000*0.2*10^{-3}} = 0{,}027*10^{-3}$$



Перетворення енергії в спектрі неперіодичного сигналу

$$Э=\int_{-\infty}^{\infty} \left(|S(t)|\right)^2 dt$$

представленого Фур'є перетворенням

$$S(t) = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} S(jw)\cdot e^{j\cdot w\cdot t} dw$$

$$Э=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} S(jw)\cdot S(-jw)\, dw$$

Добуток комплексно-сполучених величин дає квадрат модуля спектральної щільності

$$S(jw)\cdot S(-jw)=\left(|S(w)|\right)^2$$

Остаточно одержуємо формулу Релея

$$Э=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} \left(|S(w)|\right)^2 dw$$

Енергетичний спектр неперіодичного сигналу визначається квадратом модуля його спектральної щільності

Енергетичне визначення ширини спектра сигналу і його тривалості. Шириною спектра сигналу називають діапазон частот, у межах якого зосереджена гнітюча частина енергії коливання, т.е
.

$$\int_{\Delta w_c} \left(|S(w)|\right)^2 dw = \eta\cdot\int_{0}^{\infty} \left(|S(w)|\right)^2 dw$$

де η - звичайно - 0.9
Δw_c - ширина спектра

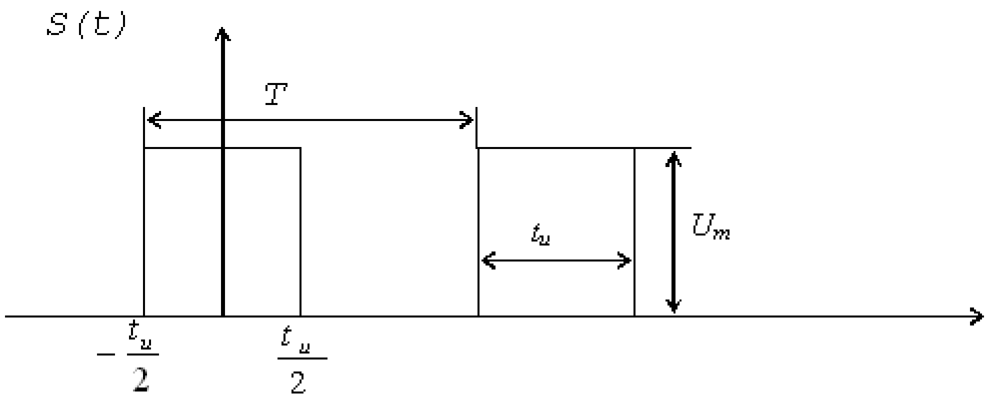
Аналогічне визначення дають тривалості імпульсу як проміжку часу, у якому зосереджена гнітюча частина енергії сигналу:

$$\int_{t_и} \left(|f(t)|\right)^2 dt = \eta\cdot\int_{0}^{\infty} \left(|f(t)|\right)^2 dt$$

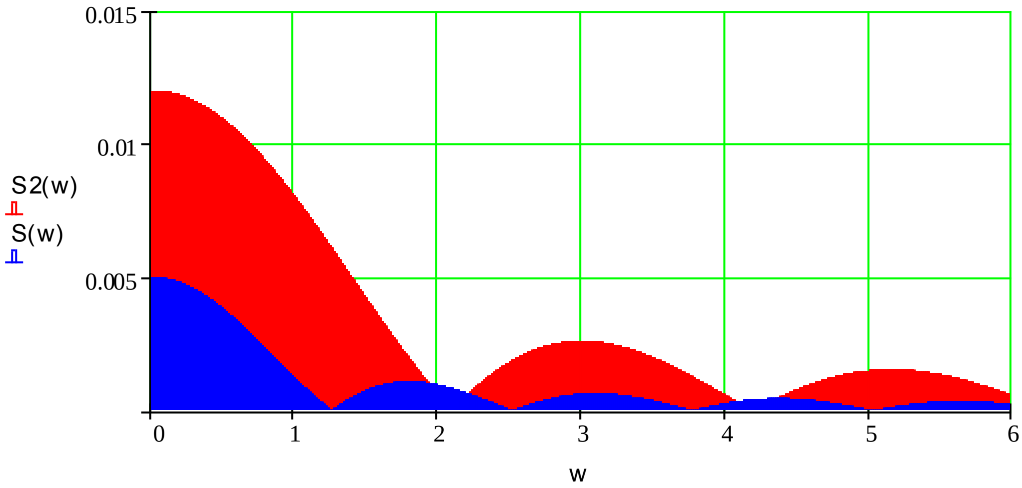
де $t_и$ - тривалість імпульсу

СПЕКТР ОДИНОЧНОГО ПРЯМОКУТНОГО ВІДЕОІМПУЛЬСУ.

Спектральну щільність відеоімпульсу одержуємо за допомогою перетворення Фур'є.



$$S(jw) = \int_{\frac{-t_и}{2}}^{\frac{t_и}{2}} Um \cdot e^{-j \cdot w \cdot t}\, dt = 2 \cdot \int_{0}^{\frac{t_и}{2}} Um \cdot \cos(wt)\, dt = \frac{2 \cdot Em}{w} \cdot \sin\left(w \cdot \frac{t_и}{2}\right)$$

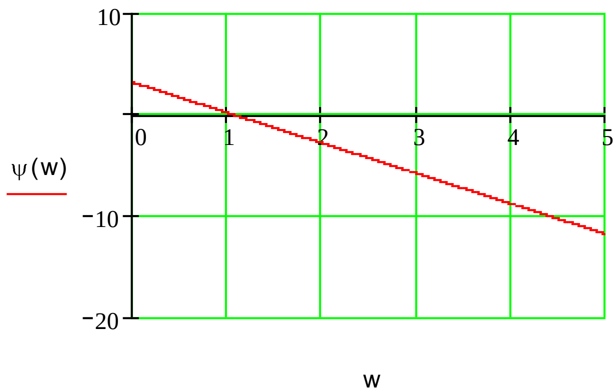


k := 2

t0 := 3

Визначемо ФЧС відеоимпульсу

$\psi(w) := (k - 1)\pi - w \cdot t0$



ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №3

Теорема Котельникова

Теорема В.А.Котельникова. Реальні сигнали завжди мають кінцеву тривалість і обмежену смугу частот. Граничні частоти спектра визначаються головним чином властивостями системи передачі і самим отримувачем. Так, наприклад, при передачі дискретних повідомлень смуга частот визначається швидкістю передачі, при передачі телевізійного зображення – прийнятим стандартом чіткості (числом строчок і т.п.).

Для функцій з обмеженим спектром В.А. Котельников довів чудову теорему, що лежить в основі дискретизації неперервних сигналів.

Згідно до цієї теореми функція $S(t)$, яка не містить частот вищих від F, повністю визначається послідовністю своїх значень в моменти, які відстають один від одного на $\Delta t = 1/2F = \pi/\omega$.

Фізичним підтвердженням цього є відомий факт про те, що сигнал $S(t)$ не може істотно змінитися за час, менший, ніж половина періоду його найвищої частоти, тобто $1/2F$.

Якщо неперервний сигнал обмежений за спектром, не обов’язково передавати всі миттєві значення цієї функції, а тільки окремі її значення.
) прийме вигляд:

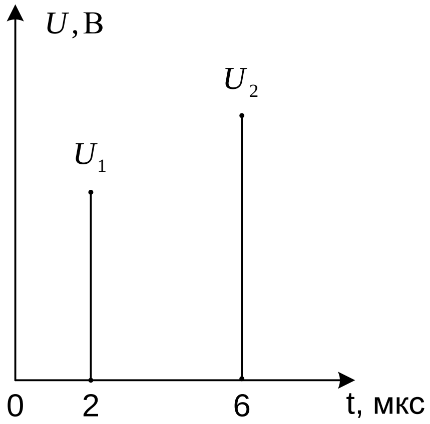
$$S(t) \approx \sum_{k=-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}} S(k\Delta t)\frac{\sin\omega_B(t-k\Delta t)}{\omega_B(t-k\Delta t)} \qquad (1.7)$$

При кінцевому числі відліків сума (1.7) буде співпадати з миттєвими значеннями $S(t)$ не на всьому інтервалі існування повідомлення T_C, а тільки у відлікових точках. В проміжках між цими значеннями $S(t)$ відрізняється від суми кінцевого числа членів ряду, в результаті чого виникає похибка. Ця похибка мінімальна в середині інтервалу T_C і буде зростати до його країв (рис.1.8).

Визначити середньоквадратичну похибку відновлення повідомлення кінцевої тривалості рядом Котельникова із кінцевим числом членів важко. Однак в роботі [1] визначені границі похибки, що виникає при відновленні реального повідомлення із необмеженим спектром рядом Котельникова (1.3). Позначаючи відновлене повідомлення $S'(t)$, запишемо вираз для середньоквадратичної похибки δ

Завдання

Сигнал з обмеженим спектром надано двома відліками. Знайти верхню частоту в спектрі цього сигналу. Знайти миттєве значення сигналу у момент часу t_0.



№ варіанта	2
t_0(мкс)	4
U_1 (мВ)	12
U_2(мВ)	34

Розв'язування:

$\Delta t = 4$мкс

$\kappa(U_1) = 1$

$\kappa(U_2) = 2$

$$F_в = \frac{1}{2\Delta t} = \frac{1}{2*4*10^{-3}} = 0.125мГц$$

$$S(t) = \Sigma S(k\Delta t)\frac{\sin 2\pi f(t_0 - k\Delta t)}{2\pi f(t_0 - k\Delta t)} = 12*10^{-3}*\frac{\sin 2*3.14*0.125*10^6(4*10^{-6} - 1*4*10^{-6})}{2*3.14*0.125*10^6(4*10^{-6} - 1*4*10^{-6})} +$$

$$+34*10^{-3}*\frac{\sin 2*3.14*0.125*10^6(4*10^{-6} - 2*4*10^{-6})}{2*3.14*0.125*10^6(4*10^{-6} - 2*4*10^{-6})} = 0.017*10^{-3} = 0{,}017\ мВ$$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №4

Дослідження АМ та кутової модуляції

Модуляция - это изменение одного из параметров колебания, называемого переносчиком модуляции, под воздействием первичного сигнала. В качестве переносчика обычно используют гармоническое колебание или периодическую последовательность импульсов.

Временное предстапвление АМ-сигнала

$U_{AM}(t)=\underbrace{U_0[1+MS(t)]}_{U(t)\text{-огибающая}}\cos(\omega_0 t+\varphi_0)$

U_0- постоянный к-т, равный амплитуде несущего колебания в отсутствие модуляции

M - к-т амплитудной модуляции $M=\Delta U_0/ U_0$

Для модуляции без искажений M<=1

При АМ огибающая амплитуд несущего колебания изменяется по закону передаваемого сообщения, частота и фаза-неизменны.

Ширина спектра АМ-сигнала равна удвоенному значению наивысшей частоты в спектре модулирующего низкочастотного сигнала

АМ-сигналы с подавленным несущим колебанием называются сигналами **с балансной модуляцией.**

<u>Задача 1</u> Найти число вещательных радиоканалов, использующих АМ, которые можно разместить в диапозоне частот от 0,5 до 1,5 мГц (это примерные границы средневолновогодиапозона.

Для удовлетворительного воспроизведения сигнала необходимо воспроизводить частоты от 100 Гц до 12кГц. Чтобы избежать перекрестных помех между каналами следует предусмотреть защитный интервал в 1 кГц.

<u>решение</u>

Полоса частот отводимая на 1 радиовещательный АМ канал

$F=2*12=24$ кГц

Допустимое число каналов

$N=(1,5-0,5)*10^6/(24+1)*10^3=40$ каналов

<u>Задача 2</u> Однотональный АМ сигнал описывается выражением

$U(t)=500[1+0,8\cos(10^4t+45^o)]\cos(10^7t+90^o)$

Построить спектральную и векторную диаграмы данного сигнала, отвечающие моменту времени t=0

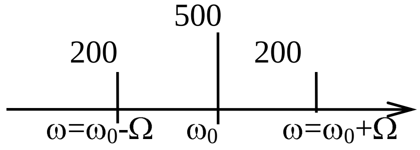
<u>решение</u>

$u(t)=500\cos(10^7t+90^o)+500*0,8\cos(10^7t+90^o)\cos(10^4+45^o)$

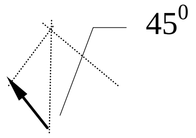
Для решения используем формулу

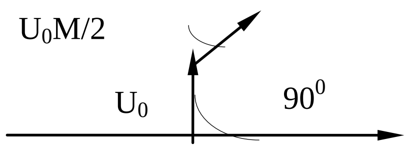
cosAcosB=1/2[cos(A+B)+cos(A-B)]

$u(t)=500\cos(10^7t+90^0)+500*0,8/2(\cos10^7+10^4)t+90^0+45^0)+$
$500*0,8/2(\cos10^7-10^4)t+90^0-45^0)$



'это спектральная диаграмма





векторная диаграмма

<u>Задача3</u>

<u>АМ</u> колебание описывается формулой

$u(t)=130[1+0{,}25\cos(10^2t+30^0)+0{,}75\cos(3*10^2t+45^0)]\cos(10^5t+60^0)$

1.Изобразить спектральные диаграммы этого сигнала, вычислить амплитуды и начальные фазы всех спектральных составляющих

2.Построить векторную диаграмму для момента времени t=0

<u>решение</u>

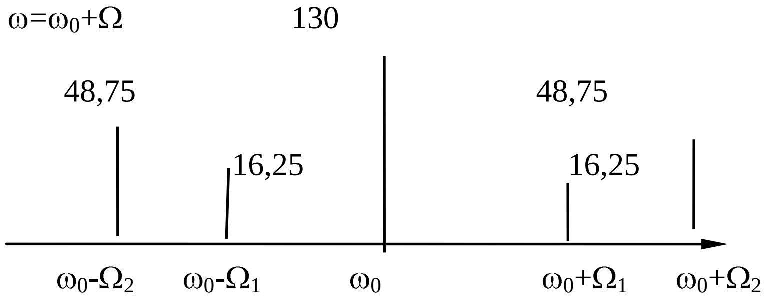
$u(t)=130\cos(10^5t+60)+130*0{,}25\cos(10^2t+30^0)\cos(10^5t+60^0)+130*0{,}75\cos(3*10^2t+45^0)\cos(10^5t+60^0)=130\cos(10^5t+60)+130*0{,}25/2[\cos(10^5+10^2)t+60+30)+130*0{,}25/2[\cos(10^5-10^2)t+60-30)]+130*0{,}75/2[\cos(10^5+3*10^2)t+60+45)+130*0{,}75/2[\cos(10^5-3*10^2)t+60-45)]$

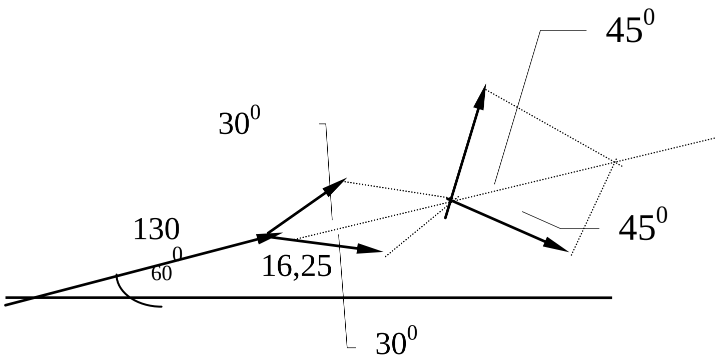
$\omega_0=10^5$-несущая частота

$\Omega_1=10^2$

$\Omega_2=3*10^2$

$\omega=\omega_0+\Omega$





<u>Задача4</u>

Написать уравнение АМ колебания, если амплитуда несущего колебания равна 10В, частота несущего колебания $5*10^5$ Гц, к-т модуляции 0,6, частота модулирующего колебания 1000Гц

$\omega=2\pi f$ рад/с

$U_0=10$В

M=0,6

$f_{нес}=5*10^5$ Гц$=2\pi 5*10^5=10^6\pi$ рад/с (нам нужна круговая или угловая частота)

$\Omega=10^3$Гц$=2\pi10^3$рад/с

$\mathbf{U_{AM}(t)=U_0[1+MS(t)]\cos(\omega_0t+\varphi_0)}$

$U_{AM}(t)=10[1+0{,}6\cos2\pi10^3t]\cos10^6\pi t$

1.Что такое фазовая и частотная модуляция

При угловой модуляции модулированный сигнал получается за счет того, что в несущем гармоническом колебании

$$U_{нне}(t) = Uo\cos(\varpi t + \varphi)$$

Предполагаемое сообщение S(t) изменяет либо частоту ω либо фазу φ, амплитуда Uo остается неизменной.

2. Почему фазовая и частотная модуляции получили общее название –«угловая модуляция»

Т.к. аргумент гармонического колебания $U_{нне}(t) = Uo\cos\psi(t)$ равен

$$\Psi(t)=\omega t+ \varphi,$$

Назваемый полной фазой, определяет значение фазового угла, потому модуляция угловая.

3.Чему равны мгновенная частота и полная фаза

В общем случае

$$\omega(t)=\frac{d\,\Psi(t)}{dt}$$

мгновенная частота определяется как производная по времени от полной фазы ***Ψ(t).*** Мгновенной частоте ω(t) соответствует полная фаза

При изменении частоты по закону мгновенной частоты фаза фаза колебания будет изменяться по интегральному закону.

$$\Psi(t)=\int \omega(t)\, dt+ \varphi o,$$

φо – начальная фаза при t=0. Изменится частота – изменится и фаза., и наоборот.

4.Чему равна мгновенная частот при частотной модуляции и что такое девиация частоты.

$$\varpi(t) = \varpi o + \Delta\varpi g S(t)$$

где ω(t)=ωo+ΔωgS(t)

где Δωg-девиация частоты (максимальный сдвиг мгновенной частоты относительно несущей частоты.

5.Чему равна полная фаза ЧМ. Написать выражение (вывести).
Написать выражение –вывести.

$$\Psi(t)=\int[\omega o+ \Delta\omega gS(t)]dt+ \varphi o=\omega ot+\underline{\Delta\omega g\int S(t)]dt+ \varphi o}$$

Отсюда видно, что при ЧМ имеет место изменение фазы.

6.Вывести аналитическое выражение для однотональной частотной модуляции подставив полную фазу в формулу несущей тодулирующий S(t)=cos(Ωt+j)

Uaм(t)=Uocos[***ωot+ Δωg ∫ cos(***Ωt+j)dt+ ***φo]***=Uocos[ωot +Δωg/Ω*sin(Ωt+j)+ φo]

Выражение m= Δωg/Ω называются индексом модуляции.

7.Чему равна начальная фаза фазомодулированного колебания
φфм(t)=φo+ΔφmS(t)

где Δφм –девиация фазы ,т.е. максимальный сдвиг фазы при модуляции (отклонение от начальной фазы)

8.Вывести аналитическое выражение для однотональной фазовой модуляции, подставив в выражение несущей начальную фазу ФМ.

При однотональномой ФМ

S(t)=cos(Ωt+j)

Uфм(t)=Uocos[ωot + *φo*+ **ΔφmS(t)] =Uo cos(ωot+mcos**(Ωt+j)+ **φo]**

mфм= Δφm

9.Чему равны индексы ЧМ и ФМ

mчм= Δωg/Ω ; **mфм=** Δφm

10. Написать формулу устанавливающую спектральнiй состав с угловой модуляцией, при m<<1, **φo=0.**

Uчм(t)=Uocos[t+msin Ωt]
Воспользуемся формулой
Cos(α+β)=cos α cos β -sin α sin β)

U(t)=Uocos(msin **Ωt)cos ωot-Uosin(msin)*sin ωot**

Cos(msinΩt)≈ 1 т.к. m –очень мал **,** можно воспользоваться равенствами

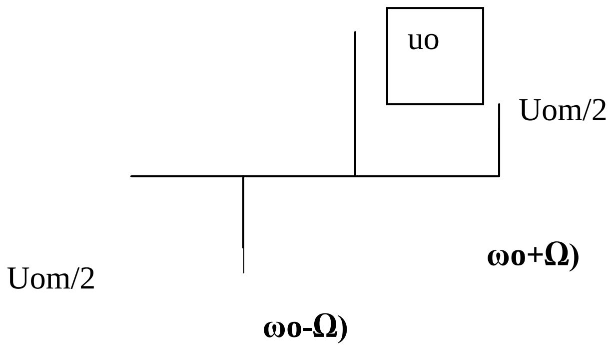
sin(msin**Ωt) ≈m sinΩt**

U(t) **≈ Uocos ωot –Uo m sin Ωt sin ωot**

Sin a Sinb=1/2[cos(a-b)-cos(a+b)]

U(t) ≈Uocos ωot +mUo/2 cos(ωo+Ω)t –mUo/2 cos(ωo-Ω)t

В спектре сигнала содержатся несущее колебание и 2 –е боковые составляющие на частотах **ωo+Ω и ωo-Ω, как и при АМ. Но есть отличие –** нижнее боковое колебание имеет дополнительный сдвиг на 180 градусов



11. Каков спектр сигнала с угловой модуляцией при любом индексе.
Из теории Бесселевых функций известны следующие соотношении:

Sin(msin**Ω***t)=2∑I* $_{2k-1(m)}$*sin(2k-1)* **Ω***t*

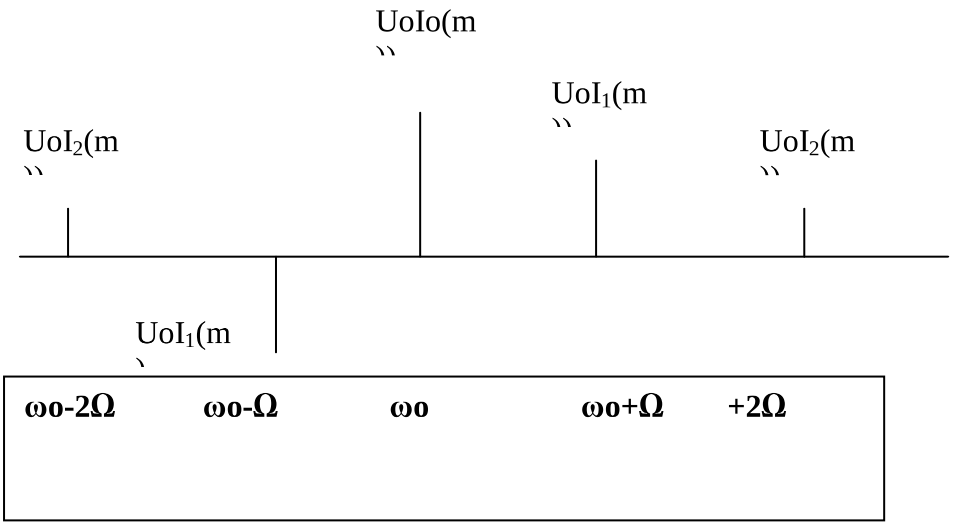
*Cos(*msin**Ω***t)= I* $_{o(m)}$ *+2∑I* $_{2k(m)}$*cos2k* **Ω***t, где*

$I_{k(m)}$ – Бесселева функции первого рода к-атого порядка от аргумента m.
В теории Бессел.функций доказывается, что функции с положительным и отрицательным индексом связаны между собой.

$I-_{k(m)}=(-1)^k I_{k(m)}$

$U(t)=UoIo(m)\cos \boldsymbol{\omega o t}+\sum UoI_{k(m)}\cos(\boldsymbol{\omega o} + \boldsymbol{k\Omega})t+ +\sum(-1)^k UoI_{k(m)}\cos(\mathbf{o}\ \mathbf{-k})t$

Это выражение представляет собой разложение колебания U(t) с угловой модуляцией на гармонические составляющие.



Спектр состоит из бесконечного числа боковых составляющих расположенных попарно симметрично относительно несущей частоты **ωо ±k**
Амплитуды боковых составляющих Uk=Ik(m)Uo
Где Uo –амплитуда немодулированного колебания
M –индекс модуляции
Амплитуды боковых составляющих становится очень малым, при k> m+1 и ими можно пренебречь
Практическая ширина спектра при угольной модуляции

ΔF =2(m+1)Fm . Fm=**Ω/2π -частота модулирующего молебания**

При ЧМ m=Δωg/2 π F при m>>1
ΔF =2mFm= **Δωg/π , т.е. ширина спектра практически не зависит от частоты частоты модулирующего колебания.**

При Фм m= при m>>1 ΔF =2m=2 Δ **φ Fm и зависит от** Fm

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №5

Витрати інформації в каналах з шумами
Ключеві питання

I. Шен нон ввел понятие количественной меры измерения информации в сообщении, которое определяется, как:

$$I(a) = \log\frac{1}{p(a)} = -\log p(a)$$

где $p(a)$- вероятность сообщения

Количество информации - это характеристика апостериорная и становится известной только после поступлення сообщения

Свойства I(a)

а)При p(a) =1 I(a)=0

I(a) тем більше, чем менее вероятно событие

б) I(a) >0 см. формулу

в) I(a) – есть аддитивная величина. т.е.

$$I(a_1,a_2,\ldots a_n)=\sum_{i=1}^{n} I(a_i)= -\sum_{i=1}^{n} \log p(a_i)$$

1.Основание log =2 и определяет единицу измерения информации—бит. В двоичном коде для элементов «0» и «1» применем

p(0)=p(1)=1/2,

тогда I(a)= -log (1/2)=1 дв.ед/символ –эту ед.информации назвали битом.

2.Для ограниченного числа сообщений, образующих группу. т.е. ансамбль:

$$\sum_{i=1}^{m} \mathbf{p(a_i)=1}$$

При равновероятных событиях

$p(a_1) = p(a_2) = p(a_3) =\ldots= p(a_n) = 1/m$

I(a)=-log $p(a_i)$=-log (1/m)= log m

3. Для алфавита из m букв (ансамбль m), в слове состоящем из n букв

$$I(a)= -\sum_{i=1}^{n}\log p(a) = -\sum_{i=1}^{n} \log(1/m) = n \log m$$

В двоичном коде m =2, тогда

I(a)= n log 2=n

<u>Среднее количество информации -</u>

$$I(X) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i)\log\frac{1}{p(x_i)} = -\sum_{i=1}^{n} p(x_i)\log p(x_i)$$

II. ***Энтропия***

определяет среднее количество информации, приходящееся на одно сообщение источника и является мерой неопределенности сообщения перед его передачей, т.е объективной характеристикой источника сообщения и может быть вычисленна априорно, т.е. до получения сообщения.

$$H(A)=\overline{I(a_i)}=-\sum_{i=1}^{m}p(a_i)\log p(a_i)=-\sum_{i=1}^{m}p(a_i)\log p(a_i)$$

1)Для равновероятного сообщения

$$H(A)_{\max}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\log\frac{1}{n}=\log_2 n$$

при равновероятных событиях энтропия возрастает с увеличением количества событий от 1 до бесконечности ?????

Свойства энтропии:

Энтропия детерминированных сообщений равно нулю.

Энтропия максимальна при равновероятных сообщениях

Энтропия двух независимых сообщений

$$H(A)=-p(x_1)\log p(x_i)-p(x_2)\log p(x_2)$$

Энтропия сложных сообщений (т.е. совокупность сообщений вырабатываемых несколькими источниками)

Совместная энтропия двух источников:

$$H(X,Y)=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p(x_i\ ,y_j\ )\log p(x_i\ ,y_j)=H(X)+\sum_{i=1}^{n}p(x_i)H(Y/x_i)$$ ***, где***

$p(x_i,y_j)$ - вероятность совместного появления сообщений y, x;

$p(x_i,y_j)=p(x_i)p(y_j/x_i)$ где $p(y_j/x_i)$ условная вероятность сообщения yj при условии , что поступило сообщений x i.

$H(Y/x_i)=\sum_{j=1}^{m}p(y_j/x_i)\log p(y_j/x_i)$ - ***это частная условная энтропия***, выражающая энтропию сообщения Y при условии, что имело место сообщение X.

$H(Y/X)=-\sum_{i=1}^{n}p(x_i)H(Y/x_i)=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p(x_iy_j)\log p(y_j/x_i)$ ***- средняя*** или просто условная энтропия показывает, какую энтропию дают сообщения X, когда уже известна энтропия сообщения У.

Совместная энтропия

$H(X/Y)=H(Y)+H(X/Y)$ ***т.е. равна*** сумме безусловной энтропии одного сообщения и условной энтропии второго сообщения

Свойства энтропии сложных сообщений при статистически независимых сообщениях X,Y

1. С***овместная энтропия*** равна сумме энтропий сообщений

$$H(X,Y)=H(X)+H(Y)$$

2.Условная энтропия равна безусловной

$$H(Y/X) = H(Y)$$

Свойства энтропии сложных сообщений при полной статистической зависимости сообщениях X,Y

Совместная энт ропия равна безусловной энтропии одного сообщения

$$H(X,Y) = H(X) = H(Y)$$

Это выплывает из того, что при полной статистической зависимости условные вероятности равны 0 или 1 и следовательно условные энтропии равны 0 т.е H(X/Y)=H(Y/X)=0 тогда

H(X,Y)=H(X)=H(Y)

3.Условная энтропия может меняться в пределах
$0 <= H(Y/X) <= H(Y)$ т.е..условная энтропия положительна, равна 0 при полной статистической зависимости событий, максимальна при полной статистической независимости событий и равна безусловной энтропии , то отсюда и вытекает это неравенство.
4.Для совместной энтропии всегда справедливо соотношение

$$H(X,Y) <= H(X) + H(Y)$$

При корреляционной связи между элементами энтропия сообщения , а следовательно и количество передаваемой информации уменьшается , причем уменьшение будет тем интенсивнее, чем сильнее корреляционная связь и чем большее число элементов будет охвачено этими связями .

Ш Дискретне сообщения

Рассмотрим систему передаваемых сообщений X и принимаемых –Y.
Наличие помех имеют случайный характер и невозможно точно установить при приеме, какое сообщение было передано, поэтому говорят об условной вероятности P(xi/yj), определяющей вероятность передачи сообщения xi при условии, что будет прийнято сообщение yi.

Условная энтропия $H(x_i/y_j) = -\log p(x_i/y_j)$ говорит о том, что имеется неопределенность в сообщении y_j относительно x_i

Частным количеством информации $I(y_j,x_i)=\log p(x_i/y_j)/p(x_i)$ –это количество информации, которое содержится в принятом сообщении **yj** относительно переданного **xi**

Среднее количество информации о всех **xi**, содержащееся в одном принятом сообщении **yi**

$$I(y_j, X) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i / y_j) I(y_j, x_i) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i / y_j) \log \frac{p(x_i/y_j)}{p(x_i)}$$

Среднее количество информации содержащееся в У относительноX

$$I(Y, X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p(x_i / y_j) \log \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i) p(y_j)} = H(X)-H(X/Y)= H(X)+H(Y)-H(X,Y)$$

Т.е H(X)- характеризует начальную априорную неопределенность сообщения , а Условная H(X/Y) єнтропия характеризует остаточную (апостериорную) неопределенность сообщения.

H(X)-энтропия передаваемого X
H(Y)- энтропия принимаемого У
H(X,Y)- совместная энтропия

Полная взаимная информация I(Y,X)=I(X,Y)

Два предельных случая передачи

1. Полная статистическая зависимость передаваемых X и принимаемых У имеет место при незначительных уровнях поме хили при полном отсутствии.
Тогда условная энтропия равна нулю

H(X/У)=0; Количество информации содержащееся в У относительно X , равно энтропии передаваемых сообщений.

2.Полная статистическая независимость сообщений имеет место при высоком уровне помех, корда помела подавляет полезный сигнал.
Тога условная энтропия равна начальной

I(Y,X)=0 т.е сообщение У не содержит ни какой информации о сообщении X.

Избыточность сообщения измеряется формулой

$$K = \frac{H\max - H(X)}{H\max}$$

Если элементы источника сообщения принимают состояния a1,a2, ….,an с вероятностями p (a1), p(a2)......p(an) , а элементы адресата – состояния b1, b2, b3…..bn с вероятностями p(b1), p(b2),….p(bn), то **условная энтропия $H(b_j/a_i)$** выражает неуверенность, что отправив ai мы получим bj
Понятие H(A/bj) -неуверенность, которая остается после получения bj, в том что было отправлено именно ai. Если помехи отсутствуют, то посланному символу a1 соответствует прийнятый b 1 и т.д. При этом H(A)=H(B).

Но помехи уничтожают или искажают часть передаваемой информации.
Информационныеп отери описываются частной и общей условной энтропией.
Вычисление этих энтропий удобно призводить при помощи канальних матриц.

Если ***канал*** описывается ***со стороны источника (т.е. известен посланный сигнал)*** , то вероятность того, что при передачи сигнала ai по каналу связи мы получим bj обозначается как условная вероятность p(bj/ai) и канальная матрица имеет вид

	B			
	B1	B2	Bj	Bn
A1	P(b1/a1)	P(b2/a1)	P(bj/a1)	P(bn/a1)
A2	P(b1/a2)	P(b2/a2)	P(bj/a2)	P(bn/a2)

Ai	P(b1/ai)	P(b2/ai)	P(bj/ai)	P(bn/ai)
An	P(b1/an)	P(b2/an)	P(bj/an)	P(bn/an)

Вероятности , расположенные по диагонали определяют вероятность правильного приема, остальные –ложного . ∑ вероятностей по строкам равна 1.

Потери информации, приходящиеся на долю сигнала ai описываются ***частной условной энтропиеей***

Например для сигнала А1

$$H(B/a1)=-\sum^{n} p(bj/a1) \log p(bj/a1)$$

Потери при передачи всех сигналов описывается общей условной энтропией, которая является суммой всех возможных частный энтропий.

$$H(B/A)=-\sum p(ai) \sum_{J=1}^{n} p(bj/ai)\log p(bj/ai)\; p(bj/ai)= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p(ai)p(bj/ai)\log p(bj/ai)=$$

$$=. \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n} p(ai,bj)\log p(bj/ai)-$$ ---Общее выражение неравновероятных и взаимозависимых каналов.

<u>Если исследовать канал со стороны приемника (известен прийнятый сигнал)</u>

Канальная матрица имеет вид

$$H(A/B)=-\sum \sum p(bj)\, p(ai/bj) \log p(ai/bj)$$

$$H(A/bj)=-\sum_{I=1}^{n} p(ai/bj) \log p(ai/bj)$$

	B			
	B1	B2	Bj	Bn
A1	P(a1/b1)	P(a1/b2)	P(a1/bj)	P(a1/bn)
A2	P(a2b1)	P(a2/b2)	P(a2/bj)	P(a2/bn)
Ai	P(ai/b1)	P(a2/b2)	P(ai/bj)	P(a3/bn)
An	P(an/b1)	P(an/b2)	P(an/bj)	P(an/bn)

Сумма вероятностей по столбцам равна 1.

$$H(A,B)=-\sum_{I=1}^{N}\sum_{j=1}^{n} p(ai,bj) \log p(ai,bj)$$ бит.дв.сим.

H(A,B)= H(A)+H(B/A)= H(B)+H(A/B)

Энтропия объединения м.б. определена с помощью матрицы вида

P(ai,bj)=	P(a1, b1)	P(a1, b2)	P(a1,bn)
	P(a2, b1)	P(a2, b2)	P(a2, bn)
	P(ai, b1)	P(a2, b2)	P(a3, bn)
	P(an, b1)	P(an, b2)	P(an, bn)

Сумма вероятностей по столбцам и по строкам равна 1 .

Такая матрица обладает свойствами:

$\sum\limits_{i} p(ai,bj) = p\ (bj),$

$\sum\limits_{j} p(ai,bj) = p\ (ai),$

$\sum p(ai) = \sum p\ (bj) = 1$

p(ai,bj)=p(ai)*p(bj/ai)=p(bj)*o(ai/bj)

Задача

Задана матрица вероятности системы объединения из двух систем А и Б.

$$p(A,B)=\begin{bmatrix}0,3\\0,2\\0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}0\\0,3\\0,1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0.1\\0\end{pmatrix}$$

Определить 1.безусловную энтропию системы А .
2. Безусловную энтропию системы В.
3. Полную условную энтропию H(B/A), H(A/B)
4. Взаимную энтропию H(A, B)
5.Количество полученной информации
6.Частную энтропию H(A/b1), H(B/a3)

$$\begin{array}{ll} & p(ai) \\ p(A,B)=\begin{bmatrix}0,3\\0,2\\0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}0\\0,3\\0,1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0.1\\0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}0.3\\0.6\\0.1\end{bmatrix} & \begin{matrix}0.3\\0.6\\0.1\end{matrix}\end{array}$$

$p(j)$ 0.5   0.4   0.1

$H(A) = -\sum\limits_{I=1}^{m} p(ai)\log p(ai) = -[0.3\log 0.3+0.6\log 0.6+0.1\log 0.1]=1,295$ бит/сост.

$H(B) = -[0.5\log 0.5+0.4\log 0.4+0.1\log 0.1] = 1.36$ бит/сост.

2. Построим матрицу условных вероятностей, но сначало надо эти вероятности определить.

P(ai/bj)=p(ai,bj)/p(bj);

P(a1/b1)=0.3/0.5=0.6
P(a1/b2)=0/0.4=0
P(a1/b3)=0/0.1=0
P(a2/b1)=0.2/0.5=0.4
P(a2/b2=0.3/0.4=0.7
P(a2/b3)=0.1/0.1=1
P(a3/b1)=0./0.5=0
P(a3/b2)=0.1/0.4=0.25
P(a3/b3)=0

$$P(ai/bj)= \begin{matrix} 0.6 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.75 & 1 \\ 0 & 0.25 & 0 \end{matrix}$$

H(A/B)=- ∑ ∑ p(bj) p(ai/bj) log p(ai/bj)=-0.5(0.6 log 0.6 +0.4 log 0.4+0 log0)+0.4(0 log0 0.75 log 0.75+0.25 log 0.25] +0.1[0 log0+1 log1+0 log0]=0.324+0.485=0.809 бит/сост

или

H(A/B)=- ∑ ∑ p(ai) p(ai/bj) log p(ai/bj)=-[0.3(0.6 *log0.6+0 log0+ 0 log 0)+0.6(0.4 log 0.4+0.75 log 0.75+1 log 1)+0.1(0 log0+ 0.25 log 0.25+0 log 0)]=0,809 бит/сост.

Аналогично для H(B/A)

P(bj/ai)=p(ai, bj)/ p(ai);

P(b1/a1)=0.3/0.3=1
P(b1/a2)=0.2/0.6=0.33
P(b1/a3)=0/0.1=0
P(b2/a1)=0/0.3=0
P(b2/a2)=0.3/0.6=0.5
P(b2/a3)=0.1/0.1=1
P(b3/a1)=0/0.3=0
P(b3/a2)=0.1/0.6=0.167
P(b3/a3)=0/0.1=0

$$P(bj/ai)= \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.33 & 0.5 & 0.167 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

H(B/A)=- $\sum\limits_{I=1}$ $\sum\limits_{J=1}$ p(ai) p(bj/ai) log p(bj/ai)=-[0.3(1 log1+0 log0+0log0)+0.6(0.33 log0.33+0.5 log0.5+0.167 log 0.167)+0.1(0 log.+1 log 1+ 0 log 0)]=0.875 бит/сим.

Или

H(B/A)=- $\sum\limits_{I=1}$ $\sum\limits_{j=1}$ p(ai,bj) log p(bj/ai)= - (0.2 log0.33+0.3 log 0.5+0.1 log0.167)=0.87 бит/сост.

Взаимная энтропия

$H(A,B)= - \sum\sum p(ai,bj) \log p(ai,bj)= - (2*0.3 \log 0.3+2*0.1 \log 0.1+0.2 \log 0.2)=2.17$ бит/сост.

Проверка:
$H(A,B)=H(A)+H(B/A)=1.285+0.875=2.169$

$H(A,B)=H(B)+H(A/B)=1.36+0.809=2.169$

КОл=во полученной информации

$I(A,B)=H(A)-H(A/B)=H(B) – H(B/A)=1.285-0.809=0.486$бит/симв.
Или $=1.36-0.875=0.49$ бит/симв.
-
Частотная условная энтропия

$H(A/b1)= - \sum p(a1/b1) \log p(ai/b1)= -[p(a1/b1) \log p(a1/b1)+p(a2/b1) \log p(a2/b1)+p(a3/b1) \log p(a3/b1)]=0.6 \log 0.6+0.4 \log 0.4+0 \log 0=0.971$ бит/сообщ

$H(B/a3)= \sum p(bj/a3) \log p(bj/a3)= - [p(b1/a3) \log p(b1/a3)+p(b2/a3) \log p(b2/a3)+p(b3/a3) \log p(b3/a3)=0 \log 0+ 1 \log 1+0 \log 0=$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №6

ЕФЕКТИВНЕ КОДУВАННЯ ДИСКРЕТНИХ ПОВІДОМЛЕНЬ

Производительность источника сообщений определяется формулой

$H^1(A)=H(A)/T$, где H(A)-энтропия источника; T-средняя длительность одного сообщения.

Выдаваемая источником информация в виде отдельных сообщений поступает в канал, где осуществляется ряд преобразований, в результате которых информация переносится уже сигналами имеющими другую природу.
Скорость передачи информации по каналу, это среднее количество информации, которое можно передать по каналу в единицу времени
$I^1=H(U)/T$
Максимально возможная скорость передачи информации по каналу связи при заданных ограничениях называется пропускной способностью канала
$C=\max I^1 =\text{мах } H(U)/T$ бит/с
В реальных каналах число передаваемых сообщений конечно, и энтропия величина ограниченная (т.е. нельзя бесконечно увеличивать число передаваемых символов, чтобы

увеличить скорость передачи, а уменьшение скорости передачи приводит к расширению их спектра, что ограничено полосой пропускания канала).

Теорема Шеннона овечат на вопрос:
Как увеличить скорость передачи, приблизив её к пропускной способности канала.
И гласит:
Если производительность источника равна или менше пропускной способности канала на величину ς, где ς-сколь угодна малая величина, то всегда существует способ кодирования, позволяющий передать по каналу все сообщения источника.
$H^1(A)<=C-\varsigma$
Если $H^1(A)>C$ то передача всех сообщений невозможна
Кодирование при котором осуществляется наилучшее использование пропускной способности канала называется эффективным или оптимальным.
Очевидно для этого надо сделать так, чтобы наиболее часто встречающиеся символы имели мин Т.
Таким образом задача эффективного кодирования предполагает

1. при заданной статистике источника сообщений формировать кодовые комбинации при которых достигается приближение скорости передачи информации к пропускной способности канала.
2. Возможность однозначного декодирования на приемной стороне.

Код Морзе не является оптимальным, т.к. каждая кодовая посылка имеет разделительный знак.
Рассмотрим пример построения оптимального кода
Известно, что скорость передачи будет мах при условии равной вероятности передачи символов 1,0. В соответствии с этим, код Шеннона-Фано строится методом дихотомии (последовательного деления пополам).
Все подлежащие кодированию символы разбиваются на две группы, так, чтобы суммы вероятностей одной группы по возможности были равны другой. Всем символам первой группы приписывается 0, а всем символа 2 группы -1 . Далее процесс повторяется.
Задача.

P(a1)=0,5	0			a1=0
P(a2)=0,25		0		a2=10
P(a3)=0,125	1	1	0	a3=110
P(a40=0,125			1	a4= 111

Полученный код -- неравномерный. Оценим его. Определим сколько потребуется символов для передачи 1000 сообщений, если в каждом сообщении 2 символа.

Для равномерного кода --2000символов.
А для кода Фано:
P(a1)=1/2, значит a1 появится 500 раз и т.д. т.е.
A1=500*1
A2=250*2=500
A3=A4=2*125*3=750
Итого: 1750 символов, т.е. виграш состави 1/8.
Недостаток неравномерного кода:
Отсутствует избыточность(т.е. можно применять там, где помехи незначительны.

Задача2
Задан алфавит источника с вероятностями
P(a1)=04, P(a 2)=0,3; P(a3)=0,1; P(a4)=0,08; P(a5)=0,07; P(a6)=0,05. Закодировать кодом Шеннона -Фано.

Ответ:
A1=0
A2=10
A3=1110
A4=1101
A5=1110
A6=1111.
Задача 3
Закодировать двоичным кодом множество сообщений.
P(a1)=0,2 a1=00
P(a2)=0,15 a2=010
P(a3)=0,15 a3=011
P(a4)=0,12 a4=100
P(a5)=0,1 a5=101
P(a6)=0,1 a6=110
P(a7)=0,08 a7=1110
P(a8)=0,06 a8=11110
P(a9)=0,04 a9=11111

Оценить эффективность полученного кода по сравнению с равномерным двоичным
Определим среднюю длительность кодового слова.
Для равномерного кода, чтобы передать 9 сообщений надо иметь 4 разряда. $2^3=8$
Для неравномерного

$$\bar{L}=\sum_{I=1}^{A} p(a_i)*n_i$$

, где n_i -длина кодового слова.

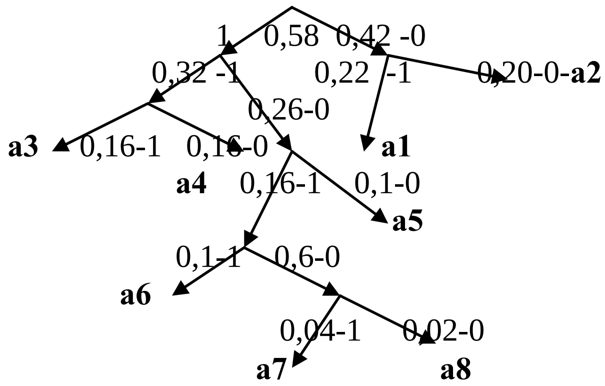
I=0.2*2+2*0.15*3+0.12*3+0.08*4+0.06*5+0.04*5=3,08

Код Фано относится к префиксным, т.е к таким, где не ставится разделительный знак, как в Морзе. Если написано 011 100, то понятно, что передано А3 и а6.
Задача Закодировать двоичным кодом
P(a1)=0,22 a1=00
P(a2)=0,2 a2=010
P(a3)=0,16 a3=011
P(a4)=0,16 a4=10
P(a5)=0,1 a5=110
P(a6)=0,1 a6=1110
P(a7)=0,04 a7=11110
P(a8)=0,02 a8=11111
При разбиении на подгруппы можно сделать перекос.
Исходя из того, что наиболее часто употребляемые символы должны состоять из меньшего числа символов используют методику Хафменна для построения оптимального кода кодирования.
Для этого располагают все буквы в порядке уменьшения их вероятностей.
Затем объединяют в группу две последние буквы и записывают их суммарную вероятность в порядке убывания и т.д.

A1	0,22	0,22	0,22	0,26	0,32	0,42	0,58
A2	0,2	0,2	0,2	0,22	0,26	0,32	0,42
A3	0,16	0,16	0,16	0,2	0,22	0,26	
A4	0,16	0,16	0,16	0,16	0,2		
A5	0,1	0,1	0,16	0,16			
A6	0,1	0,1	0,1				

A7	0,04 →	0,06					
A8	0,02						

Для составления кодовой комбинации соответствующей данному знаку необходимо проследить путь перехода знака по столбцам и строкам таблицы.
Для наглядности строим кодовое дерево и по нему определяем значение каждой буквы.



В результате получим :
A1=01
A2=00
A3=111
A4=110
A5=100
A6=1011
A7=10101
A8=10100
Задание
Закодировать по методике Хафменна.
A1=0,4 A2=0,3 A3=0,1 A4=0,08 A5=0,07 A6=0,05

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №7

<u>Помехоустойчивое кодирование в дискретних каналах святи</u>

<u>Цель работы</u>

Выучить общие принципы помехоустойчивого кодирования на примере использования кода Хэмминга

<u>Теоретические основи</u>

Помехоустойчивость достигается за счет введения избыточности в кодовой комбинации. Это значит, что из n символов кодовой комбинации для передачи информации используется k<n символов, т.е. из общего числа $N=2^n$ возможных код.ком. для передачи используется $N=2^K$ комбин. В соответствии, с этим все множество $N=2^n$ делится на 2 группы: - В первую входят разрешенные ком. $N=2^K$ во вторую –запрещенные
Если на приемном конце принята код. ком. неотносящаяся к разрешенным, то делается вывод, что код.комб. искажена . Для использования данного в качестве исправляющего всё множество запрещенных код.ком. разбивается на N непересекающихся подмножеств. Каждое из подмножеств Mk ставится в соответсвие одной из разрешенных комбинаций. Если принятая запрещенная комбинация принадлежит подмножеству Mk, то считается , что передана разрешенная комбинация , т.е. ошибка исправляется в случаях равных кол-ву запрещенных комбинаций. Таким образом, помехоустойчивость корректирующего кода

определяется его избыточностью. Чем избыточность больше, тем выше его помехоустойчивость.
Минимальное число элементов, которыми должны отличаться кодовые комбинации друг от друга называется кодовым расстоянием d. Например

1001101
+ 1110100

0111001 Сколько единиц, такое и ***d***, т.е. в єтом случае равно 4.
Если ***d*** =1, то можно от личить одну ком. от другой, но нельзя обнаружить ошибку. Избыточность какого кода 0. При ***d***=2 можно обнаружить одиночную ошибку, при ***d*** =3- исправить одиночную и обнаружить двойную. Таким образом, корректирующая способность кода тем больше, чем больше кодовое расстояние.
Способ разбиения на подмножества зависит от того, какие ошибки должны исправляться данным кодом

Пример Построить код, обнаруживающий все ошибки кратности **t** и ниже.. Это значит, из множества N возможных выбрать Mk разрешенных комбинаций, но так, чтобы любая из них в сумме по модулю 2 с любым вектором ошибок с весом кодовой комбинации меньше или равно кратности не дала бы в результате никакой другой разрешенной комбинации.
А это возможно , если
Dmin>= t+1
W количество единиц в кодовой комбинации называют весом кодовой комбинации
Do-кодовое растояние –степень отличия любих код. Ком. И определяется как вес суммы по модулю 2 этих двух кодових комбинаций.
E – вектор ошибки указывает место в кодовой комбинации, где имеется искажения, например E=01100, то это значит, что имеет место ошибки в 3ьем и 4 разряде. Если вектор ошибки сложить по модулю 2 с искаженной код. ком. то получим исходную неискаженную комб.

100101100
110110101

010011001 W=4; D =W=4
Рассмотрим код n=3. Все возможные комбинации этого кода.

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8
	000	001	010	011	100	101	110	111
A1	0	1	1	2	1	2	2	3
A2	1	0	2	1	2	1	3	2
A3	1	2	0	1	2	3	1	2
A4	2	1	1	0	3	2	2	1
A5	1	2	2	3	0	1	1	2
A6	2	1	3	2	1	0	2	1
A7	2	3	1	2	1	2	0	1
A8	3	2	2	1	2	1	1	0

Матрица расстояний между код.комб.
Чтобы код обнаруживал однократные ошибки (t=1) надо чтобы d=2.Тогда из 8 возможных код.ком. выбираем те, у которых d=2. Это A1,A4, A6, A7.
Для обнаружения двухкратных ошибок D=2+1=3, тогда A1, A8 .
Строим код обеспечивающий устранение однократных ошибок. При наличии однократной ошибки A1 может перейти в одну из следующих запрещенных комбинаций A2=001, A3=010 и A5=100, таким образом в качестве подмножества запрещенных комбинаций A2,A3,A5. А это значит, что если на приеме будет прийнята одна из них, то выносится решение, что была передана комбинация A1.

Рассмотрим вторую комбинацию А4. Ей соответствует подмножество запрещенных А2,А3, А8. Однако получилось пересечение подмножества. При приеме запрешенных сигналов А2, А3 нельзя одназначно определить какой был сигнал А1 или А4.

Если выбрать в качестве второй разрешенной кодовой комбинации отстоящую на D=3 – А8, то ей соответствует подмножество запрещенных комбинаций А4,А6,А7. – в этом случае подмножество запрещенных комбинаций не пересекаются , т.е. **Dmin>=2t+1**

КОД ХЕМИНГА

Обеспечивает исправление всех однократных ошибок при Dmin=3. Длина кода выбирается из условия

$$\mathbf{2^{к}<=2^{n}/(1+n)}$$

В этом коде проверочные символы должны находится на номерах позиций, которые выражаются степенью двойки 2^0, 2^1, 2^3,2^4......т.е.контрольные символы должны находится (слева направо) на первой, второй, четвертой, восьмой и.т.д. позициях.

n –длина кода,

к-количество проверочных символов,

р- двоичное число (Синдром), указывающее номер искаженной позиции кодовой комбинации, чтобы его получить, надо выполнить п-р проверок.

Для определения его используется правило:

При первой проверке рассматриваются символы, которые в самом младшем разряде имеют единицы. См таб. Это А1, А3, А5,А7,А9 и т.д.

S1= a1+a3+a5+a7+a9

При второй проверке это a2, a3, a6, a7, a10 и т.д.

S2=a2+a3+a6+a7+a10

При третьей – это a4, a5, a6, a7,a12 и т.д.

S3= a4+ a5+ a6+ a7+a12

При четвертой это a8,a9,a10,a11,a12, a13, a14,a15 и т.д.

S4= a8+a9+a10+a11+a12+ a13

В результате получим двоичное число S4 S3 S2 S1 (например- 0101), которое и укажет место искаженного импульса. ***Если сигнал принят без ошибки, то синдром рамен нулю***

A1	001
A2	010
A3	011
A4	100
A5	101
A6	110
A7	111
A8	1000
A9	1001
A10	1010
A11	1011
A12	1000
A13	1101
A14	1110

A15	1111

ПРИМЕР

Пусть дана кодовая комбинация 10011. Закодировать ее в код Хэмминга.

Кодирование

A11	a10	a9	a8	a7	a6	a5	a4	a3	a2	a1
11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
		1		1	0	0		1		

Из условия четности получим значения проверочных символов при безошибочном приеме.

a1= 1+0+1+1=1; S1=0

a2=1+0+1=0 ; S2=0

a4=0+0+1=1; S3=0

a8=1=1 S4=0

11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
		1	1	1	0	0	1	1	0	1

Таким образом код. комбинации 10011 соответствует девятиэлементный код Хэмминга 101100111.

Декодирование

Пусть теперь произошло искажение пятого символа, т. е код принял вид 101110111.

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
	1	1	1	0	1	1	1	0	1

Тогда находим элементы синдрома

S1= a1+a3+a5+a7+a9=1+1+1+1+1=1

S2=a2+a3+a6+a7+a10=0+1+0+1=0

S3= a4+ a5+ a6+ a7+a12=1+1+0+1=1

S4= a8+a9=1+1=0

В результате проверки получен синдром 0101, т. е цифра 5 в двоичном коде

Т.е. искажен пятый символ. Осталось его инвертировать.

Использование синдрома возможно только для исправления однократных ошибок. Для высшей кратности – используются программы на ЭВМ.

Задание: закодировать кодовую комбинацию девятиэлементным кодом Хэмминга Рассчитать синдром, если известна позиция искаженного символа.

Вариант	Кодовая комин .	Искаженная позиция	синдром	Код Хэмминга
1	11011	2		
2	10001	3		
3	11101	4		
4	10111	3		
5	10101	2		
6	10110	5		
7	10100	6		

8	11010	2		
9	10100	3		

Контрольные вопросы

Как вычислить проверочные символы

Какая максимально возможная длина кода Хэмминга, если надо закодировать пятиэлементную комбинацию.

Чему равно минимальное кодовое расстояние кода Хэмминга, обеспечивающее исправление всех однократных ошибок.

Как формируется синдром при использовании кода Хэмминга

Таблица для себя

Вариант	Кодовая комин . а3а5а6а7а9	Искаженная позиция	синдром	а1а2а4а8		Код Хэмминга правильно
1	11011	2	0+1+1+1+1=0 1+1+0+1=1 0+1+0+1=0 0==0010==2	0 1 0 0	011010101	101010100
2	10001	3		0111	111000011	110000111
3	11101	4		0101	011011011	110110110
4	10111	3		0001	001101111	111101100
5	10101	2		1011	101101011	110101101
6	10110	5		1101	111001110	011100111
7	10100	6		0111	011101010	010101110
8	11010	2		0101	011010110	011010110
9	10100	3		0011	001001010	010100100

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №8

ДОСЛІДЖЕННЯ ЦИКЛІЧНОГО КОДУ

Ключевые положения

Код с проверкой на четность является простейшим систематическим кодом $(n,\ n-1)$. Он образуется путем добавления к комбинации из $n-1$ информационных символов одного проверочного символа, равного сумме $n-1$ информационных символов по модулю 2. После добавления проверочного символа образуются кодовые комбинации, содержащие только четное число единиц.

Применение этого кода позволяет при декодировании обнаруживать все ошибки нечетной кратности, так как при наличии таких ошибок принимаемая комбинация содержит нечетное число единиц и является запрещенной.

При построении циклического кода (n, k) комбинацию из информационных символов удобно отображать полиномом $a(x)$. Так, комбинации 10110 соответствует полином $a_1 = x^4 + x^2 + x$, а комбинации 10100 – полином $a_2(x) = x^4 + x^2$. Комбинация циклического кода отображается полиномом $b(x) = x^r \cdot a(x) + r(x)$. Здесь $r = n - k$ – число проверочных символов, умножение $a(x)$ на x^2 эквивалентно дописыванию к комбинации информационных символов r нулей, $r(x)$ – полином степени не выше $r-1$, соответствующий проверочным символам. Добавление его эквивалентно значению r нулей проверочными символами. Полином $r(x)$ – остаток от деления $x^r \cdot a(x)$ на порождающий полином $g(x)$. Степень полинома $g(x)$ равна r, поэтому степень полинома $r(x)$ не превышает $r-1$. Ясно, что все полиномы $b(x)$, соответствующие разрешенным комбинациям циклического кода, делятся без остатка на порождающий полином $g(x)$.

Допустим, что используется код (10.5) с порождающим полиномом $g(x) = x^5 + x^4 + x^2 + 1$. Тогда $x^5 \cdot a_1(x) = x^5 \cdot (x^4 + x^2 + x) = x^9 + x^7 + x^5$. В результате деления последнего полинома на $g(x)$ получим $r_1(x) = x^3 + x^2 + 1$, т.е. кодер комбинацию 10110 преобразует в комбинацию 1011001101. Аналогично комбинация 10100 преобразуется в комбинацию 1010010010.

Пусть принятой комбинации соответствует полином $\hat{b}(x)$. При декодировании полином $\hat{b}(x)$ необходимо поделить на порождающий полином $g(x)$. Если деление не дает остатка, это указывает, что в принятой комбинации либо отсутствуют ошибки, либо содержатся необнаруженные ошибки – принята разрешенная комбинация. Если в результате деления получается ненулевой остаток, то это указывает, что принятая комбинация содержит ошибки, является запрещенной.

Полином $\hat{b}(x)$ можно записать: $\hat{b}(x) = b(x) + e(x)$, где $e(x)$ – полином ошибок (например, при ошибке в третьем символе справа $e(x) = x^2$, в первом и седьмом – $e(x) = x^5 + 1$ и т.д.). Тогда $\dfrac{\hat{b}(x)}{g(x)} = \dfrac{b(x)}{g(x)} + \dfrac{e(x)}{g(x)}$. Так как $b(x)$ делится на $g(x)$ без остатка, то остаток деления определяется частным $\dfrac{e(x)}{g(x)}$. Если кратность ошибки не превышает кратность исправляемой данным кодом ошибки, то каждому полиному ошибок $e(x)$ соответствует свой остаток от деления $\dfrac{e(x)}{g(x)}$ – синдром $c(x)$. Всякому ненулевому синдрому соответствует определенная конфигурация ошибок, которая и исправляется.

Код (10.5) с порождающим полиномом $g(x) = x^5 + x^4 + x^2 + 1$ имеет $d \ = 4$.

Циклические коды отличаются простотой реализации кодирующих и декодирующих устройств.

Для самоподготовки –краткие сведения.

Коды получили своё названия из-за свойства: каждая кодовая комбинация м.б. получена циклической престановкой символов.

Двоичное число 1010101 можно представить в виде полинома.

$A(x)=1*x^6+0*x^5+1*x^4+0*x^3+1*x^2+0*x^1+1*x^0=x^6+x^4+x^2+1$

И затем все действия над ним свести к действиям над многочленом.

Циклический сдвиг образуется умножением полинома на x. $(x^6+x^4+x^2+1)*x= x^7+x^5+x^3+x$, заменив x^7 на 1 , получим x^5+x^3+x+1, что соответствует кодовой комбинации 0101011.

Циклическим сдвигом можно получить n -1 различных комбинаций, из которых любые могут быть взяты в качестве исходных. Остальные кодовые комбинации можно получить используя свойства циклического кода.

Свойства циклического кода

1.Разрешенная кодовая комбинация при делении её на образующий полином имеет остаток равый 0. Если в результате деления обнаружен остаток, то значит кодовая комбинация трансформировалась в запрещенную. Из всех возможных полиномов степени n----(2^n) только 2^k имеют нулевой вычет по модулю 2. n – это высшая степень полинома, k= n-r

2. Кодовая комбинация циклического кода (n, k) может быть получена 2 способами:

-путем умножения простой кодовой комбинации степени (k-1) на одночлен $x^{(n-k)}$ и ***добавления к этому произведению остатка,*** полученного от деления произведения на образующий полином степени (n- k)

- путем умножения простой кодовой комбинации степени (k-1) на образующий полином степени (n- k).

При первом способе кодирования первые k символов полученной кодовой комбинации совпадают с соответствующими символами исходной комбинации

При этом способе усложняется процесс декодирования, т.к. в кодовой комбинации информационные символы содержатся неявном виде.

$2^{n-k}-1>=n$; ***$2^k <= \frac{2^n}{n+1}$, отсюда степень образующего полинома***

2^{ρ} -1>=n,

$\rho = n - k \geq \log(n+1)$

Пример:

Закодировать простую кодовую комбинацию 1011циклическим кодом, обнаруживающим однократные и двукратные ошибки или устраняющим однократные ошибки.

Решение:

1.По заданному кол-ву информационных символов к=4 определяем значность кода, используя соотношение $2^{k} <= \frac{2^n}{n+1}$

2. Для построения циклического кода надо выбрать образующий полином. Известно, что степень его равна р. Находим р и по таблицам находим и выбираем образующий полином $P(x)=x^3+x^2+1$.

3. Используем первый способ кодирования.

-исходную комбинацию умножаем на $x^{n-k}=x^3$ и получаем

$x^3(x^3+x+1)=x^6+x^4+x^3$

-делим полученное произведение на образующий полином

$(x^6+x^4+x^3) / (x^3+x+1)$ получим остаток x^2

- прибавляем остаток к произведению и получаем закодированную комбинацию

$x^6+x^4+x^3 + x^2$ --------1011100

Матричное представление циклического кода.

В теории кодирования широко используются матричное представление кодов.

Основой для построения кода служит производящая матрица P_n, k, представляющая собой две подматрицы:

Информационную $-U_k$ и дополнительную H_p

Pn = $|U_k, H_p|$

U_k – представляет собой квадратную единичную матрицу с количеством строк и столбцов равным k.

H_p- содержит **ρ =n-k** столбцов и **k** –строк и образована остатками **R(x).**

ρ - это число проверочных разрядов в коде; k – число информационных разрядов в коде; n – число разрядов в коде.

Например, необходимо построить циклический код $P_{(7,4)}$, т.е. n =7, k=4. Для построения производящей матрицы строим сначала информационную матрицу, которая имеет вид :

$$U_k = \left|\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

Для построения производящей матрицы нужно выбрать образующий полином (по таблицам, исходя из степени полинома, которая в свою очередь, определяется числом проверочных разрядов ρ), например, $P(x)=x^3+x^2+1$ или (1101) и использовать один из двух способов построения дополнительной матрицы H_p.

Первый способ

Для получения первой строки дополнительной подматрицы надо первую строку информационной подматрицы умножит на одночлен x^{n-k} т.е. в нашем случае на x^3 и разделить на образующий полином. Это соответствует выполнению операции

$$\frac{0001*1000}{1101}$$

В результате получим остаток 101, что и составит первую строку дополнительной подматрицы H_p. Аналогично определяются все последующие строки дополнительной подматрицы. Окончательный производящая матрица имеет вид :

$$P_{7,4} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{}^{U_k} & \overbrace{}^{H_p} \end{array} \\ \left|\begin{array}{cccc ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right| \end{array}$$

Второй способ

Производящая матрица $P_{n,k}$ формируется путем умножения образующего полинома $P(x)$ степени $\boldsymbol{\rho = n - k}$ **на** одночлен $\mathbf{x}^{\mathbf{k-1}}$ и последующих к-1 сдвигов полученной комбинации. При этом информационные символы идут вперемешку с проверочными, что создает трудности при декодировании.

Итак, имеется производящая матрица, с помощью которой можно получить разрешенные кодовые комбинации, путем суммирования строк по модулю 2 в любом сочетании, т.е из всех 2^7 кодовых комбинаций можно использовать в качестве информационных только 2^4 , которые и находятся с помощью производящей матрицы.

Принадлежность кодовой комбинации к группе разрешенных можно легко проверить делением ее полинома на образующий полином. Если остаток от деления равен нулю, то комбинация является разрешенной.

Выводы

Для построения циклического кода , исправляющего однократные или обнаруживающего двукратные ошибки, необходимо, чтобы каждой ошибке соответствовал свой опознаватель – остаток от деления многочлена принятой кодовой комбинации на образующий полином. Т.к. количество возможных однократных ошибок равно n, то отсюда получаем необходимое условие исправления любой одиночной ошибки.

$$2^{n-k} - 1 >= n \quad \text{или}$$

$$2^{\rho} - 1 >= n$$

Каждый образующий полином, использующийся для построения циклического кода должен удолетворять 2 условиям:

-Быть неприводимым, т.е. не делится не на какой другой полином;

-двучлен вида x^{n+1} должен делиться на образующий полином без остатка, см [2].

Задача. Построить производящую матрицу и сформировать разрешенные кодовые комбинации циклического кода, если образующий полином $P(x)=x^3+x+1$

Первая разрешенная комбинация

A1(0,1)--------0001011

Выполняем циклический сдвиг, т.е. умножаем на x, x^2, x^3 . В результате имеем

x^4+x^2+x ----0010110 ; x^5+x^2 ----- -0101100; $x^6+x^4+x^3$ ----0111000

$$G(7,4)=\begin{vmatrix} 0001011 \\ 0010110 \\ 0101100 \\ 1001000 \end{vmatrix}$$

Для формирования кодовых комбинаций, а их будет 2^4 , надо просуммировать в разных сочетаниях по модулю 2 строчки производящей матрицы.

Задача. Определить декодированием наличие ошибки в принятом сообщении $A(x)=x^6+x^4+x^3+x^2$, если образующий полином $P(x)= x^3+x^2+1$.

Задача. Принятая комбинация $\Phi(x)=x^6+x^4+x^2+1$ закодирована циклическим кодом. Образующий полином $A(x)= x^3+x^2+1$. Определить есть ли ошибки

Синдром

Определяется суммой по модулю 2, принятых проверочных элементов и элементов проверочной группы, сформированных из принятых элементов информационной группы. В циклическом коде для нахождения синдрома надо разделить принятую кодовую комбинацию на производящий полином. Если остаток равен нулю, то кодовая комбинация принята без ошибки.

Пример Определить декодированием наличие ошибки в принятом сообщении $F(x)=x^6+x^4+x^3+x^2$, если образующий полином $P(x)=x^3+x^2+1$

Решение:

$X^6+x^4+x^3+x^2$ | x3+2+1

$X^6+x^5+x^3$

$X^5+x^4+x^2$ x^3+x^2

$x^5+x^4+x^2$ Ответ: ошибки нет.

Пример .Принята комбинация $F(x)=x^6+x^4+x^2+1$, закодированная циклическим кодом. Образующий полином $P(x)=x^3+x^2+1$. Определить есть ли ошибка. Делим и получаем остаток x^3+1 Ответ: ошибка на приеме есть.

Для определение места ошибки используется метод весов, который заключается в следующим:

Принятая комбинация делится на образующий полином;

Подсчитывается вес остатка w (количество единиц в остатке);

Если w<=t (t –количество допустимых ошибок, которое исправляется кодом), то исправление сводится к сложению принятой комбинации с остатком;

Если w>=t ,то производится циклический сдвиг влево, а затем деление на образующий полином и определение веса остатка. Если w<= t, то делимое суммируют с остатком, а затем производят сдвиг на один элемент вправо. Это и будет исправленная кодовая комбинация.

Пример Передана закодированная комбинация 1001110. Образующий полином $A(x)= x^3+x^2+1$. Принято 1000110, d=3, t=1.

1- Находим R(x)-остаток → 1000110/ 1011 → остаток R(x)=011

2.Сдвигаем 1000110 влево на один разряд ⟶ получим 0001101 и делим на 1011, получаем R(x)= 110, т.е. w=2 , а это >t=1, поэтому делаем следующий сдвиг влево еше на один разряд

3. получаем 0011010 Делим на 1011, получаем остаток R(x)=111, т.е. w=3 , а это >t=1.

4.Повторяем сдвиг ---0110100 и получаем

R(x)=101, w=2

5. Сдвигаем влево еше раз ----11010000 , получаем R(x)=001, w=t=1,

6. Складываем полученную кодовую комбинацию с остатком 11010000+001=1101001

7.Сдвигаем полученную кодовую комбинацию вправо 4 раза и получаем последовательность

1101001---1110100----0111010---00111101---1001110, а принято была комбинация 1000110, т.е. ошибка произошла в 4- ой позиции..

Если надо исправить двух-трехкратные ошибки , то синдром находится с помощью программирования на ПК.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №9

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПТИМАЛЬНИХ ПРИЙОМНИКІВ

Ознакомление со структурной схемой оптимального когерентного демодулятора сигналов с АМ, ЧМ и ОФМ. Изучение преобразований сигналов функциональными

Рассмотрим когерентный приемник, в котором обнаружение сигнала осуществляется на основании критерия правдоподобия.

Для двоичной системы правило решения о том, что передавался сигнал $S_1(t)$, может быть записано в виде

$$\int_0^T z(t)S_1(t)dt - 0{,}5E_1 > \int_0^T z(t)S_2(t)dt - 0{,}5E_2 . \qquad (2.1)$$

где $S_1(t)$ и $S_2(t)$ – реализация передаваемых сигналов на входе демодулятора, $z(t) = S_L(t) + n(t)$ – реализация аддитивной смеси полезного сигнала с флуктуационным шумом на входе демодулятора. E_1 и E_2 – энергии сигналов, T – длительность сигналов.

Если сигналы равновероятны, то алгоритм (2.1) обеспечивает максимум вероятности правильного приема сигнала. Для сигналов с АМ, ЧМ и ФМ алгоритм (2.1) можно упростить.

При АМ один из сигналов равен нулю (системе с пассивной паузой), $S_1(t) = a\cos\omega_0 t$, $S_2(t) = 0$, правило (2.1) запишется так:

$$\int_0^T Z(t)S_1(t)dt - 0{,}5E_1 > 0. \qquad (2.1\text{а})$$

При ЧМ сигналы имеют одинаковые энергии (система с активной паузой) $S_1(t) = a\cos\omega_1 t$, $S_2(t) = a\cos\omega_2 t$, $E_1 = E_2 = E$. Для таких сигналов правило решения (2.1) будет

$$\int_0^T z(t)S_1(t)dt > \int_0^T z(t)S_2(t)dt. \qquad (2.1\text{б})$$

При ФМ сигналы противоположные, $S_1(t) = a\cos\omega_0 t$, $S_2(t) = a\cos(\omega_0 t + \pi) = -S_1(t)$, $E_1 = E_2 = E$. В этом случае правило (2.1) сводится к неравенству

$$\int_0^T z(t)S_1(t)dt > 0. \qquad (2.1\text{в})$$

Алгоритм (2.1) могут быть реализованы как на основе корреляторов, так и на основе согласованных фильтров.

Вероятность ошибки при когерентном приеме источник равновероятных сигналов определяется следующим выражением

$$p = 0{,}5[1 - \Phi(kh)], \qquad (2.2)$$

где $h^2 = \dfrac{E_1}{N_0}$ – отношение сигнал/шум; N_0 – спектральная плотность мощности помехи; k – коэффициент, зависящий от вида модуляции и равный $\sqrt{2}$ – для ФМ, 1 – для ЧМ и $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ – для АМ; $\Phi(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^T e^{-} dt$ – табулированная функция Крампе. При фиксированной величине h наиболее высокой помехоустойчивостью обладает система с ФМ, а наиболее низкой – система с АМ. Объясняется это тем, что расстояния между сигналами S_1 и S_2 при различных видах модуляции различны (рис. 2.1, где геометрически представлены сигналы: а – при АМ, б – при ЧМ (ортогональные сигналы), в – при ФМ).

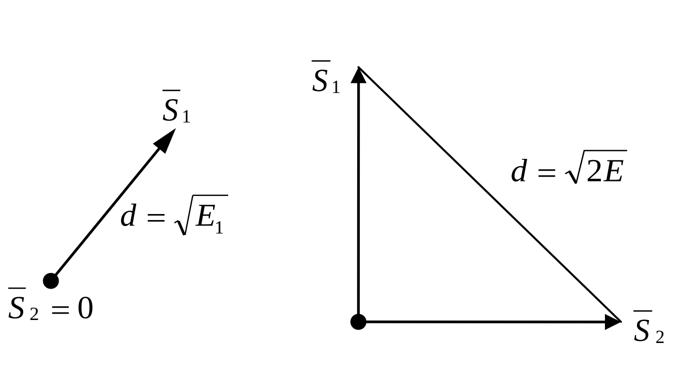


Рис. 2.1

На практике ФМ применяется в сочетании с относительным методом передачи. При относительной фазовой модуляции (ОФМ) информация содержится не в абсолютном значении фазы сигнала, а в разности фаз соседних сигналов. Реализуется этот метод путем включения на входе модулятора сигналов ФМ относительно кодера, а на входе – демодулятора сигналов ФМ относительно декодера. Правило работы кодера

$b_i = b_{i+1} \oplus a_i$,

а кодера

$\hat{a}_i = \hat{b}_i \oplus \hat{b}_{i-1}$,

где a_i – i-й информационный символ на входе кодера, b_i – i-й символ на входе кодера. $\hat{b}_i$ – i-й символ на входе кодера, $\hat{a}_i$ – i-й информационный символ на выходе декодера.

При когерентном приеме сигналов с ОФМ выражение для вероятности ошибки можно записать в виде

$$p_{ОФМ} \approx 2p_{ЧМ} = 1 - \Phi(\sqrt{2}h) \qquad (2.3)$$

Выражение (2.3) справедливо при $p_{ФМ} << 1$.

Критерії оптимального прийому

Для того, щоб визначити, яка із вирішуючи схем являється оптимальною, необхідно перш за все встановити, як розуміється оптимальність. Вибір критерію оптимальності не являється універсальним, він залежить: 1) від поставленої задачі і 2) умов роботи системи. Як вказувалось раніше, приймач обчислює апостеріорний розподіл

$$p(s_i/x),$$

який містить всі відомості, які можна витягти із прийнятої реалізації $x(t)$. Тепер необхідно встановити критерій, за яким приймач буде видавати на основі апостеріорного розподілу $p(s_i/x)$ розв'язок відносно переданого сигналу s_k.

При передачі дискретних повідомлень широко використовується критерій В.А.Котельникова (критерій ідеального спостерігача). Згідно до цього критерію приймається рішення, що переданий сигнал s_i, для якого апостеріорна ймовірність $p(s_i/x)$ має найбільше значення, тобто регіструється сигнал s_i, якщо виконуються нерівності:

$$\begin{aligned} &p(s_i/x) > p(s_j/x),\ j \neq i; \\ &p(s_1/x) > p(s_2/x). \end{aligned} \tag{4.1}$$

При використанні цього критерію повна ймовірність помилкового рішення буде мінімальною. Дійсно, якщо за сигналом x приймається рішення про те, щоб був переданий сигнал s_i, то, очевидно, ймовірність правильного прийому буде рівна $p(s_i/x)$, а ймовірність помилки $1 - p(s_i/x)$. Звідки випливає, що апостеріорній ймовірності $p(s_i/x)$ відповідає мінімум повної ймовірності помилки.

На основі формули Байеса:

$$p(s_i/x) = \frac{p(s_i)\,p(x/s_i)}{p(x)}.$$

Тоді нерівність (4.1) можна записати у вигляді:

$$p(s_i)\,p(x/s_i) > p(s_j)\,p(x/s_j),$$

або

$$\frac{p(x/s_i)}{p(x/s_j)} > \frac{p(s_j)}{p(s_i)}. \tag{4.2}$$

Функцію $p(x/s)$ часто називають функцією правдоподібності. Чим більше значення цієї функції при даній реалізації сигналу x, тим правдоподібніше, що передавався сигнал s. Відношення, яке входить в нерівність

$$\lambda = \frac{p(x/s_i)}{p(x/s_j)}$$

називається співвідношенням правдоподібності. З врахуванням цього вираз (4.2) записується у вигляді

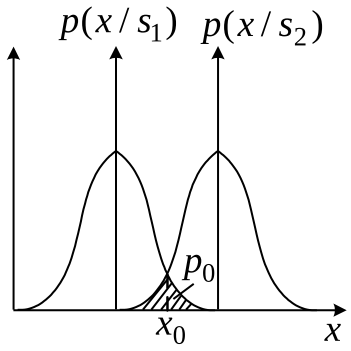
$$\lambda > \frac{p(s_j)}{p(s_i)}.$$

Якщо сигнали, які передаються, рівно ймовірні $p(s_i) = p(s_j) = \frac{1}{m}$, то це правило рішення приймає більш простий вигляд:

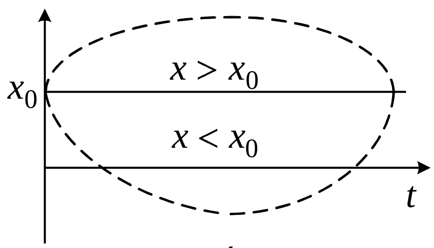
$$\lambda > 1.$$

Таким чином, критерій ідеального спостерігача зводиться до порівняння співвідношень правдоподібності. Цей критерій є більш загальним і називається критерієм максимальної правдоподібності.

Розглянемо бінарну систему, в якій передача повідомлень здійснюється за допомогою двох сигналів $s_1(t)$ та $s_2(t)$, які відповідають двом кодовим символам a_1 та a_2. Рішення приймається за результатом обробки прийнятого коливання $x(t)$ пороговим методом: регіструється s_1, якщо $x < x_0$, і s_2, якщо $x \geq x_0$ (рис. 4.5,б), де x_0 - деякий порогів рівень x. Тут можуть бути помилки двох видів: відтворюється s_1, коли передавався s_2, і s_2, коли передавався s_1.



à



á

Рис.4.5.

Умовні ймовірності цих помилок (ймовірності переходів) будуть рівні (рис. 4.5,*а*):

$$p_{12} = p(s_1/s_2) = \int_{-\infty}^{x_0} p(x/s_2)dx,$$

$$p_{21} = p(s_2/s_1) = \int_{x_0}^{\infty} p(x/s_1)dx.$$

Значення цих інтегралів можуть бути обчислені як відповідні площі, обмежені графіком щільностей умовного розподілу ймовірностей. Ймовірності помилок першого і другого виду відповідно:

$$p_I = p(s_2)p(s_1/s_2) = p_1 p_{12},$$

$$p_{II} = p(s_1)p(s_2/s_1) = p_1 p_{21}.$$

Повна щільність помилки при цьому:

$$p_0 = p_I + p_{II} = p_1 p_{12} + p_1 p_{21}.$$

Нехай $p_1 = p_2$, тоді

$$p_0 = \frac{1}{2}(p_{12} + p_{21}).$$

Неважко впевнитись, що мінімум p_0 має місце при $p_{12} = p_{21}$, тобто при виборі порогу в відповідності з рис. 4.5,*а*. Для такого порогу:

$$p_0 = p_{12} = p_{21}.$$

Значення p_0 визначається заштрихованою площею. При будь-якому іншому значенні порога величина p_0 буде більшою.

Не дивлячись на природність і простоту, критерій Котельникова має недоліки: перший заключається в тому, що для побудови вирішуючої схеми необхідно знати апріорні ймовірності різних символів коду; другим недоліком цього критерію є те, що всі помилки вважаються однаково небажаними (мають однакову вагу).

В деяких випадках таке припущення не є правильним. Наприклад, при передачі чисел помилка в перших значущих цифрах більш небезпечна, ніж помилки в останніх цифрах Пропуск команди чи хибна тривога в різних системах трансляції можуть мати різноманітні наслідки.

Отже, в загальному випадку при виборі критерію оптимального прийому необхідно врахувати ті втрати. Які несе одержувач повідомлення при різних видах помилок. Ці втрати можна виразити деякими ваговими коефіцієнтами, які приписуються кожному із помилкових рішень. Позначимо втрати помилкових рішень першого і другого видів відповідно L_{12} і L_{21}. Тоді можна визначити середні очікувані втрати чи середній ризик:

$$r = L_{12} p_I + L_{21} p_{II} = L_{12} p_2 p_{12} + L_{21} p_1 p_{21.}$$

Оптимальною вирішуючою схемою буде така, яка забезпечує мінімум середнього ризику.

Критерій мінімального ризику відноситься до класу так званих байесових критеріїв.

РЛС широко використовується критерій Неймана-Пірсона. При виборі цього критерію враховується, по-перше, що хибна тривога і пропуск цілі не являються рівноцінними за своїми наслідками, і, по-друге, що невідома апріорна ймовірність сигналу, який передається. Якщо пропуск цілі є більш небажаним, то можна задати деяку величину β допустимої ймовірності хибної тривоги і вимагати, щоб вирішуюча схема максимізувала ймовірність правильного виявлення $P_{обн}$ (або, що те ж саме, мінімізувати ймовірність пропуску $P_{пр}$).

Згідно критерію Неймана-Пірсона приймач являється оптимальним у тому випадку, якщо при заданій ймовірності хибної тривоги:

$$P_{лт} = \int_{x_0}^{\infty} p(x/0) = \beta,$$

він забезпечує найбільшу ймовірність правильного виявлення :

$$P_{обн} = 1 - P_{пр} = 1 - \int_{-\infty}^{x_0} p(x/s)dx.$$

<u>Оптимальний прийом дискретних сигналів.</u>

При заваді $W(t)$ з рівномірним спектром $\frac{1}{2}N_0$ в сигналах $s_i(t)$, $x(t)$, заданих на кінечному інтервалі $(0 < t < T)$, умова оптимального прийому за В.А. Котельниковим може бути представлена у вигляді:

$$\int_0^T [x(t) - s_i(t)]^2 dt - \int_0^T [x(t) - s_j(t)]^2 dt < N_0 \ln \frac{p(s_i)}{p(s_j)}, \quad i \neq j.$$

Цей вираз визначає умови правильного прийому сигналу $s_i(t)$.

У випадку, коли апріорні ймовірності сигналів однакові $p(s_1) = p(s_2) = \ldots = p(s_m) = \frac{1}{m}$ критерій Котельникова приймає більш простий вигляд:

$$\int_0^T [x(t) - s_i(t)]^2 dt < \int_0^T [x(t) - s_j(t)]^2 dt. \qquad (4.3)$$

Звідси випливає, що при рівноймовірних сигналах оптимальний приймач відтворює повідомлення, яке відповідає тому переданому сигналу, який має найменше середньоквадратичне відхилення від прийнятого сигналу.

Записану вище нерівність (4.3) можна записати в іншому вигляді:

$$\int_0^T x^2(t)dt + \int_0^T s_i^2(t)dt - 2\int_0^T x(t)s_i(t)dt < \int_0^T x^2(t)dt + \int_0^T s_j^2(t)dt - 2\int_0^T x(t)s_j(t)dt.$$

Для сигналів, енергії яких однакові, ця нерівність для всіх $j \neq i$ приймає більш просту форму:

$$\int_0^T x(t)s_i(t)dt > \int_0^T x(t)s_j(t)dt. \tag{4.4}$$

В цьому випадку умова оптимального прийому (4.4) можна сформувати наступним чином. Якщо всі можливі сигнали рівно ймовірні і мають однакову енергію, оптимальний приймач відтворить повідомлення, відповідне тому переданому сигналу, взаємна кореляція якого з прийнятим сигналом максимальна.

Для двійкової системи отриманим результатам можна дати наглядне геометричне трактування (рис. 4.6).

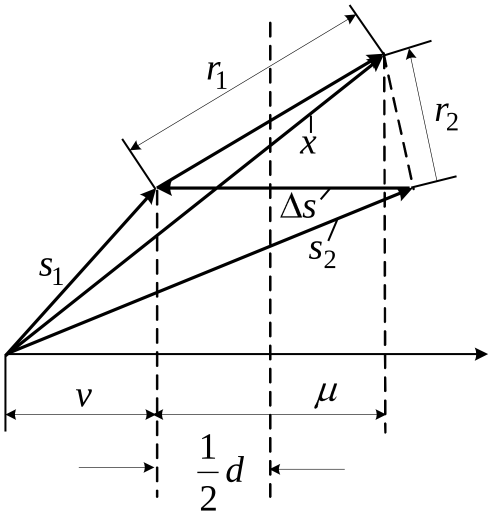


Рис4.6.

Нехай передаються два рівноймовірних повідомлення U_1 і U_2 за допомогою сигналів s_1 і s_2. Простір можливих значень сигналу можна розбити на дві області, так, щоб при попаданні кінця вектора $\overline{X}$ в першу область відтворювався сигнал s_1 (область s_1), а при попаданні в другу область – відтворився сигнал s_2 (область сигналу s_2). Ймовірність помилки, очевидно, залежить від конфігурації областей сигналу. В оптимальному приймачі Котельникова простір сигналів розбивається на область сигналу s_1 і s_2 так, щоб повна ймовірність помилки була мінімальною.

У випадку рівноймовірності сигналів і завади з рівномірним розподілом оптимальне розбиття простору буде таким, при якому люба точка x відноситься до області того сигналу s, кінець вектора якого найближчий до точки x. В двовимірній моделі для двійкової системи границя областей сигналів s_1 і s_2 є геометричне місце точок, рівновіддалених від s_1 і s_2, тобто гіперплощина, перпендикулярна до вектора різниця $\Delta s = s_1 - s_2$ і яка поділяє його навпіл (рис. 4.6).

Якщо, наприклад, передавався сигнал s_1, то помилка відбудеться в тому випадку, коли виконується нерівність:

$$r_2 < r_1$$

чи

$$\mu = \frac{1}{2} d ,$$

де $r_1 = \left\| \overline{X} - \overline{s}_1 \right\|$, $r_2 = \left\| \overline{X} - \overline{s}_2 \right\|$ і μ - проекція $\overline{w}$ на вектор, колінеарний до Δs, тобто:

$$\mu = \frac{w \Delta s}{\left\| \Delta s \right\|} .$$

Очевидно, що можна записати:

$$\left\| \overline{X} - \overline{s}_2 \right\| < \left\| \overline{X} - \overline{s}_1 \right\|$$

або в евклідовій метриці:

$$\int_0^T \left[x(t) - s_2(t) \right]^2 dt < \int_0^T \left[x(t) - s_1(t) \right]^2 dt.$$

Ця умова повністю співпадає з записаною раніше умовою (3) для рівноймовірних сигналів.

Структурна схема оптимального приймача В.А. Котельникова для рівноймовірних сигналів

Структурна схема оптимального приймача зображена АН рис. 4. 7. Умова прийому для двох сигналів визначиться виразом:

$$\int_0^T \left[x(t) - s(t) \right]^2 dt < \int_0^T \left[x(t) - s_2(t) \right]^2 dt. \qquad (4.5)$$

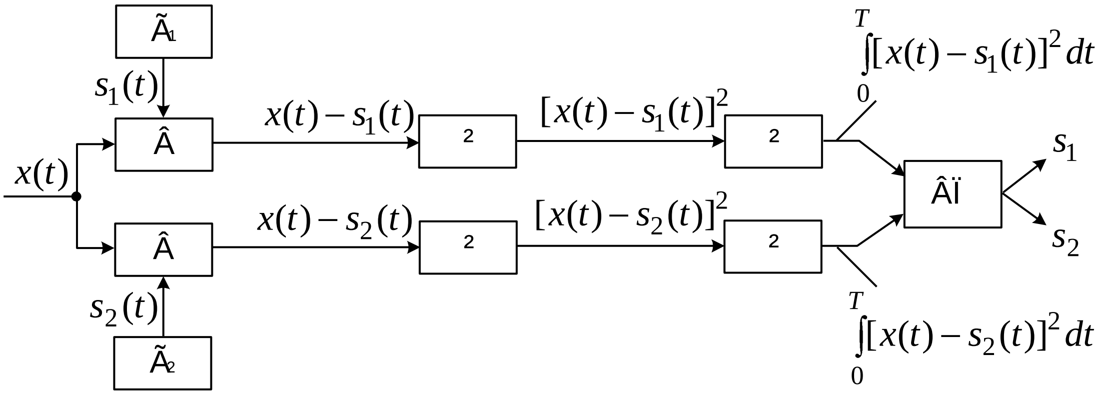


Рис.4.7.

Генератори опорних сигналів *Г₁* і *Г₂* – формують точні копії переданих сигналів s_1 і s_2. *В* – вираховуючий пристрій, *КВ* – квадратуючий пристрій. *І* – інтегратор, *ВП* – вирішуючий пристрій.

Нерівність (4.5) можна записати в іншому вигляді:

$$-2\int_0^T x(t)s_2(t)dt + \int_0^T s_2^2(t)dt < 2\int_0^T x(t)s_1(t)dt + \int_0^T s_1^2(t)dt$$

або

$$\int_0^T x(t)\left[s_1(t)-s_2(t)\right]dt > \frac{1}{2}\left(E_2 - E_1\right).$$

Ця нерівність еквівалентна нерівності (4.5), але веде до іншої схемної реалізації приймача (рис. 4.8).

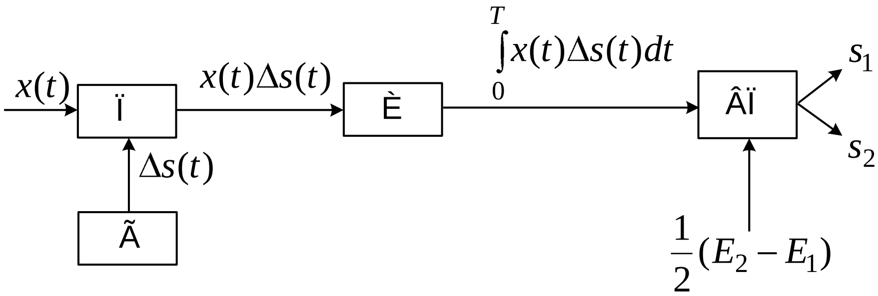


Рис.4.8.

В схемній реалізації після операції перемноження (П), інтегрування (І) проводиться порівняння отриманого результату з постійним порогом, рівним різниці енергій та сигналів $\frac{1}{2}\left(E_2 - E_1\right)$. Ця схема простіша від запропонованої раніше, однак вона володіє тим недоліком, що при зміні рівня сигналу поріг потрібно автоматично регулювати. Цей недолік усувається для сигналів рівних енергій $(E_1 = E_2)$; тоді поріг дорівнює нулю, і вирішуючи схема визначає тільки знак сигналу на виході.

Структурна схема оптимального приймача В.А. Котельникова для рівноймовірних сигналів рівних енергій

При $E_1 = E_2$ спрощується схема приймача (рис. 4.7), а сам приймач перетворюється в кореляційний (когерентний). Структурна схема приймача, представлена на рис.4.9.

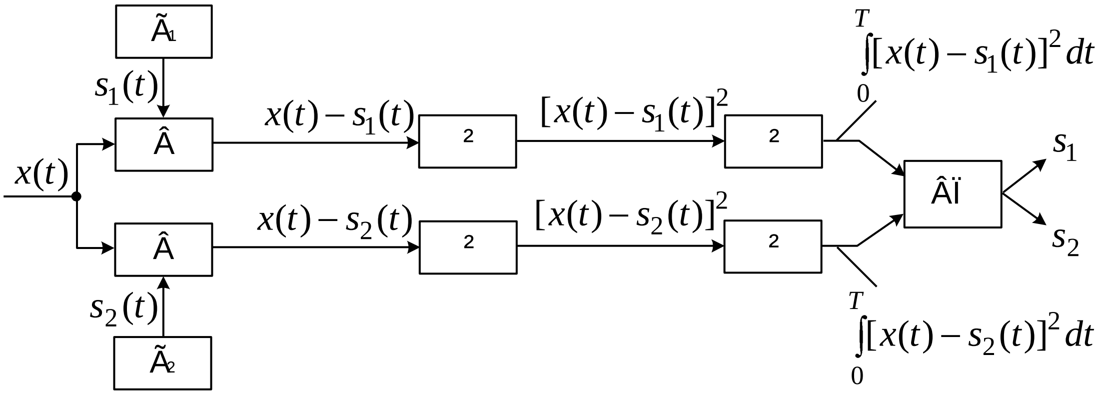


Рис.4.9.

Оптимальний прийом може бути реалізованим на узгоджуючому фільтрі.

Структурна схема приймача В.А. Котельникова на узгоджуючих фільтрах.

Можливість побудови приймача на узгоджуючих фільтрах пояснюється тим, що на виході узгоджуючого фільтра, який має коефіцієнт передачі

$$K(\omega) = cS(\omega),$$

де c - довільна постійна, $S(\omega)$ - амплітудний спектр сигналу, та фазову характеристику

$$\psi(\omega) = -[\varphi(\omega) + \omega t_0],$$

має місце кореляційна функція (з точністю до постійного співмножника) сигналу, який приймається, та сигналу, узгодженого з фільтром. Назва узгодженого фільтра походить від того, що частотна характеристика фільтра повністю визначається спектром сигналу, узгоджена з ним.

Структурна схема приймача. Який реалізує умову (4.6) зображена на рис. 4.10.

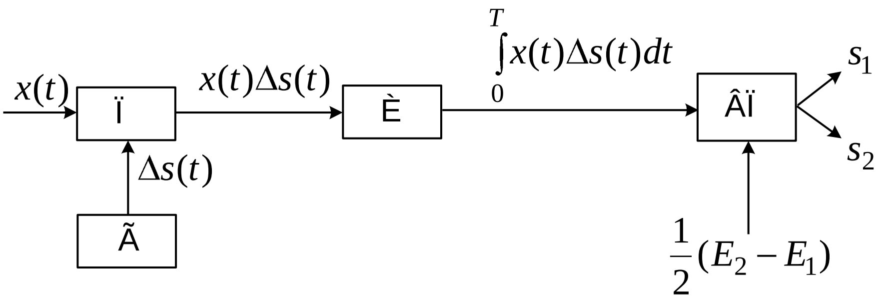


Рис.4.10.

Розглянуті схеми оптимальних приймачів відносяться до типу когерентних, в них враховується не тільки амплітуда, але і фаза високочастотного сигналу.

В схемах оптимальних приймачів відсутні фільтри на вході, які в реальних приймачах завжди існують. Це означає, що оптимальний приймач при флуктуаційних завадах не вимагає фільтрації на вході. Його завадостійкість не залежить від ширини смуги перепуску приймача.

Ймовірність помилки при когерентному прийомі двійкових сигналів

Визначимо ймовірність помилки в системі передачі двійкових сигналів при прийомі на оптимальний приймач. Ця ймовірність буде, очевидно, мінімально можливою і буде характеризувати потенціальну завадостійкість при даному способі передачі. При прийомі на реальний приймач завадостійкість може бути потенціальною, але не може бути більшою від неї.

Нехай сигнал приймає значення $s_1(t)$ з ймовірністю p_1 і значення $s_2(t)$ з ймовірністю p_2. В цьому випадку повна ймовірність помилки рівна:

$$p_0 = \frac{1}{2} p_1 \left[1 - \Phi(\alpha_{21})\right] + \frac{1}{2} p_2 \left[1 - \Phi(\alpha_{12})\right], \tag{4.7}$$

де

$$\alpha_{12} = \alpha + \frac{1}{2\alpha} \ln \frac{p_2}{p_1}, \quad \alpha_{21} = \alpha + \frac{1}{2\alpha} \ln \frac{p_1}{p_2},$$

$$\alpha^2 = \frac{1}{2N_0} \int_0^T \left[s_1(t) - s_2(t)\right]^2 dt. \tag{4.8}$$

Із формули (4.8) випливає, що ймовірність помилки, яка визначає потенціальну завадостійкість, залежить від двох величин: α і p_2/p_1. Перша величина визначається співвідношенням питомої енергії різниці сигналів до інтенсивності завади N_0. Чим більше це співвідношення, тим більша потенціальна завадостійкість. Відношення апріорних ймовірностей визначається статистичними властивостями повідомлень, які передаються.

Якщо сигнали, що передаються, рівно ймовірні $p_1 = p_2 = 0.5$, то

$$p_0 = \frac{1}{2} \left[1 - \Phi(\alpha)\right].$$

При малій інтенсивності завада $(\alpha >> 1)$ ймовірність помилки практично не залежить від p_1 і p_2. При великому рівні завад, коли α мале, залежність ймовірності помилки від відношення p_1/p_2 стає помітною.

Таким чином, при рівноймовірних сигналах імовірність помилки повністю визначається α . Значення цієї величини (α) залежить від спектральної щільності завад N_0 і сигналів $s_1(t)$ та $s_2(t)$, що передаються.

Для систем з активною паузою, в яких сигнали мають однакову енергію $T\overline{S_1(t)} = T\overline{S_2(t)} = E$, вираз для α^2 можна представити в наступному вигляді:

$$\alpha^2 = \frac{E(1-\rho_{12})}{N_0} = q_0(1-\rho_{12}),$$

де $\rho_1 = \frac{1}{E}\int_0^T s_1(t)s_2(t)dt$ - коефіцієнт взаємної кореляції між сигналами, $q_0 = E/N_0$ - відношення енергії сигналу до питомої потужності завади. Ймовірність помилки для таких систем визначається за формулою:

$$p_0 = \frac{1}{2}\left[1-\Phi\sqrt{q_0(1-\rho_{12})}\right].$$

Звідси випливає, що при $\rho = -1$, тобто $s_1(t) = -s_2(t)$, система забезпечує найбільшу потенціальну завадостійкість. Це система з протилежними сигналами. Для неї $\alpha_{\max}^2 = 2q_0$. Практичною реалізацією системи з протилежними сигналами є система з фазовою маніпуляцією.

Порівняння різних систем передачі дискретних повідомлень зручно проводити за параметром α^2, який представляє собою приведене співвідношення сигналу до завади на виході оптимального приймача при заданому способі передачі $\alpha^2 = q_{вих} = q_0(1-\rho_{12}) \approx TF(1-\rho_{12})q_{вх}$, або за величиною виграшу:

$$\gamma = \frac{q_{вих}}{q_{вх}} = TF(1-\rho_{12}),$$

де $q_0 = TFq_{вх}$.

Множник TF визначає виграш за рахунок оптимальної обробки сигналу на прийомі, а $1-\rho_{12}$ - за рахунок способу передачі.

В загальному вигляді радіотелеграфний сигнал можна записати у вигляді:

$$s_i(t) = A_i(t)\cos(\omega_i t + \varphi_i), \quad 0 < t < \tau_0, \quad i = 1,2,$$

де параметри A_i, ω_i, φ_i приймають певні значення в залежності від виду маніпуляції.

При АМ: $A_1(t) = A_0, \quad A_2(t) = 0, \quad \omega_i = \omega_2 = \omega_0,$

$$\alpha_{AM}^2 = A_0^2 \tau_0 / (4N_0) = q_0/2;$$

При ЧМ: $\alpha_{ЧМ}^2 = q_0;$

При ФМ: $\alpha_{ФМ}^2 = 2q_0.$

Порівняння α для різних видів маніпуляції показує, що із всіх систем бінарних сигналів найбільш потенціальну завадостійкість забезпечує система з фазовою модуляцією. В порівнянні з ЧМ вона дозволяє отримати двократний, а в порівнянні з АМ – чотирикратний виграш за потужністю.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №10

МЕТОДИ ПОКРАШЕННЯ ЗАВАДОСТІЙКОСТІ СИСТЕМ

Ключевые положения

Помехоустойчивость – это степень соответствия принятого сообщения переданному при заданном уровне помех. При сравнении нескольких систем та из них будет более помехоустойчивой, которая при одинаковой помехи обеспечит меньшее различие между принятым и переданным сигналом. На вход приемника поступает сумма полезного сигнала с помехой и вероятность правильного приема определяется отношением полезного сигнала к помехе. Таким образом **приемник** должен содержать 2 элемента :

-**фильтр** для улучшения соотношения сигнал/помеха;

-**РУ-решающее устройство**, выполняющее главные функции приема :

Известны следующие методы фильтрации, обеспечивающие улучшение соотношение сигнал/помеха:

- ***Частотная фильтрация***
- ***Метод накопления***
- ***Корреляционный метод***

- ***Согласованная фильтрация.***

1. ***Частотная фильтрация***

Идея частотной фильтрации основана на отличие спектров полезного сигнала и помехи. Рассмотрим случай, когда полезный сигнал является гармоническим, а помеха типа белого шума. Для выделения полезного сигнала в этом случае должен быть использован узкополосный фильтр, настроенный на частоту сигнала. Отношение мощности сигнала к мощности помехи на выходе этого фильтра

$$\frac{Px}{P\xi}вых = \frac{Pxвх}{Po\Delta\varpi ф} = \frac{Pxвх}{2\pi\Delta fф * Po}, \ \textbf{(1)} \quad \text{где}$$

Ро - средняя мощность помехи, приходящаяся на единицу полосы;

$\Delta\varpi$ф-полоса пропускания фильтра.

Из выражения (1) видно, что отношение на выходе фильтра можно сделать как угодно большим за счет уменьшения полосы пропускания Δf ф.

В реальных условиях полезный сигнал поступает лишь в течение определенного времени Тх. Известно, что практическая ширина такого спектра связана с его длительностью

Δf ф*Тх=М, где М – постоянная, зависищая от формы сигнала и равнв 1.

Длительность сигнала Тх должна быть такой, чтобы его спектр был не шире полосы пропускания фильтра

Δf х<Δf ф.

Таким образом улучшение отношения сигнал/помеха окупается ценой увеличения времени передачи.

2.Корреляционный метод .

Сущность метода заключается в использовании различия между корреляционными функциями сигнала и помехи. Он эффективен только при приеме периодических сигналов.

Рассмотрим полезный сигнал и белый

В приемном устройстве определяем корреляционную функцию сигнала и помехи.

В результате преобразований получим

$K y(\tau) = K x x(\tau) + K x \xi(\tau) + K \xi x(\tau) + K \xi \xi(\tau)$***, где***

$K x \xi, K \xi x$ ***- есть взаимные корреляционные функции сигнала и помехи, а***

$K x x(\tau), K \xi \xi(\tau)$ ***- автокорреляционные функции сигнала и помехи соответственно.***

Поскольку сигнал и помеха статистически независимы, то $K x \xi(\tau) = K \xi x(\tau) = 0$ ***и***

$K y(\tau) = K x x(\tau) + K \xi \xi(\tau)$***, т.е. корреляционная функция смеси сигнала и помехи***

равняется сумме автокорреляционных функций сигнала и помехи. Функция $K \xi \xi(\tau)$ ***с увеличением*** τ ***стремится к 0 и при*** $\tau >> \tau_0$ ***практически равна нулю.***

Следовательно, выбирая время τ***, при котором значением*** $K \xi \xi(\tau)$ ***можно пренебречь, получаем полезный сигнал , выделенный из смеси полезного сигнала и помехи. Практически время интегрирования (Т) должно быть значительно больше*** $10\tau_0$***.***

.

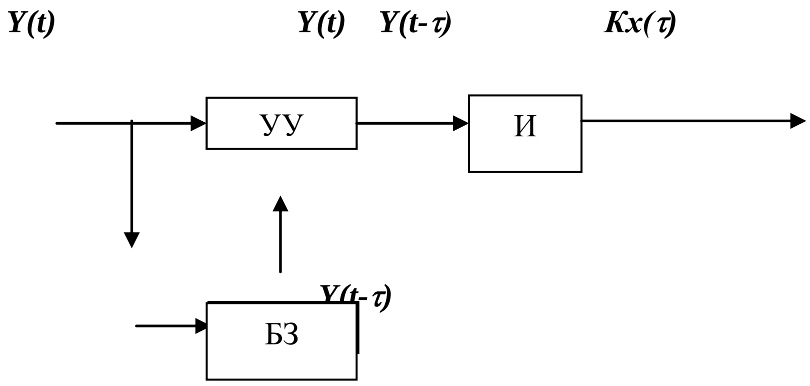


Схема корреляционного приемника .

БЗ- блок задержки;

УУ- устройство умножения;

И-интегратор.

3.Согласованная фильтрация.

Согласованный фильтр (СФ) является устройством, оптимальным по критерию максимума отношения мгновенной мощности сигнала в некоторый момент времени к средней мощности шума на его выходе $\rho_{\max} = \frac{|y_c(t_0)|^2}{P_ш}$ при подаче на вход суммы детерминированного сигнала $s(t)$ и шума $n(t)$.

Синтез СФ может быть выполнен как временным, так и спектральным методами. Для этого достаточно знать сигнал $s(t)$ либо его спектральную плотность $s(j\omega)$.

Комплексный коэффициент передачи СФ определяется

$$k(j\omega) = as^{\varphi}(j\omega)e^{-j\omega t_0}, \tag{2.1}$$

где a, t_0 – постоянный ($t_0 \geq T$, где T – длительность сигнала); $s^{\varphi}(j\omega)$ – функция, комплексно-сопряженная со спектральной плотностью сигнала.

Формулу (2.1) можно переписать в виде двух равенств: для амплитудно-частотной характеристики СФ

$$k(\omega) = as(\omega),$$

где $s(\omega)$ – амплитудный спектр сигнала, и фазочастотной характеристики СФ

$$\psi(\omega) = -\varphi(\omega) - \omega t_0,$$

где $\varphi(\omega)$ – фазовый спектр сигнала.

Например, комплексный коэффициент передачи СФ для сигнала вида П-импульса определяется

$$k(j\omega) = \frac{1}{j\omega}(1 - e^{-j\omega T}). \tag{2.2}$$

Соотношение (2.2) легко получить, определив предварительно спектральную плотность П-импульса. Из соотношения (2.2) следует, что схема фильтров, согласованного с П-импульсом, состоит из интегратора (с коэффициентом передачи $\frac{1}{j\omega}$). Устройства задержки на время T (с коэффициентом передачи $e^{-j\omega T}$) и вычитателя.

Импульсная реакция СФ является зеркальным отображение сигнала, с которым фильтр согласован:

$g(t) = as(t - t_0)$.

Соотношение (2.1) и (2.3) является исходным для синтеза фильтра методами теории линейных электрических цепей.

Отношение сигнал/шум на выходе СФ зависит от энергии сигнала E и спектральной плотности мощности помехи N_0 и определяется выражением

$$\left(\frac{Pc}{Pш}\right)вых = \frac{2E}{N_0} = 2h^2 = 2\frac{PcNc}{Gш} = \frac{2PcTcFc}{GшшF} = \left(\frac{Pc}{Pш}\right)вх * 2TcFk ,$$

где Тс-длительность сигнала;

Fk-полоса входного избирательного блока, практически раная полосе, занимаемой сигналом.

Таким образом, видно, что при оптимальном приеме выиграш в отношении Рс/Рш происходит за счет эффективного использования полосы пропускания.

В общем случае форма сигнала на выходе СФ определяется функцией взаимной корреляции входного сигнала и сигнала, с которым фильтр согласован. Если же на вход СФ подается сигнал, с которым фильтр согласован, то форма сигнала на выходе определяется функцией автокорреляции входного сигнала, а его длительность – интервалом корреляции τ_k .

СФ применяются, в основном, для построения оптимальных демодуляторов дискретных сигналов. Для сигналов, у которых произведение ширины спектра на длительность $F * T >> 1$ («сложные» сигналы). Длительность сигнала на входе СФ $\tau_k << T$.

СФ отличается от других тем, что в других фильтрах переходный процесс теоретически продолжается бесконечно долго, а в СФ т.к. сигнал существует лишь в интервале 0-Т, то напряжение вх. существует лишь в интервале $0 \le t \le 2T$.

Техническая реализация оптимального приемника на базе СФ очень сложна из-за требования к согласованию фазы.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №11

СПОСОБИ ПРОСТОГО ДВІЙКОВОГО КОДУВАННЯ

1. Кодирование

Для передачи сообщения его необходимо преобразовать в сигнал, для чего необходимо осуществить 2 операции: кодирование и модуляцию. **Кодирование** определяет закон построения сигнала, а **модуляция** – вид формируемого сигнала для передачи по каналу. Рассмотрим пример передачи текста. Любой текст состоит из конечного числа элементов: буквы, цифры, знаки препинания. Их совокупность называется **алфавитом.** Т.к. число элементов в алфавите конечно, то их можно перенумеровать с помощью любой системы счисления, т.е. свести передачу сообщения к передаче последовательных чисел.

Для передачи русского алфавита необходимо передать числа от 1 до 32 (объяснить почему и привести пример. Предположим букве В соответствует цифра 3 и т.д).

Например, любое число в десятичной системе может быть представлено как:

$$N=\ldots+a_2 10^2+a_1 10^1+a_0 10^0 \text{ , где}$$

a_i имеет значение от 0 до 9.

Для любой системы счисления будет верно:

$$N=\ldots+a_2 m^2+a_1 m^1+a_0 m^0 \text{ , где}$$

a_i имеет значение от 0 до m-1.

Для двоичной системы:

$N=\ldots+ a_2 2^2+ a_1 2^1+ a_0 2^0$, где a_i принимает значение 0 или 1.

Число 13 можно записать в двоичной системе как 1101, что соответствует выражению

$1*2^3+1*2^2+0*2^1+1*2^0$

Рассмотрим перевод десятичного числа в двоичное

1.Метод вычитания

Этот метод заключается в проведении последовательности операций вычитания из заданного числа чисел, соответствующих наибольшей возможной степени числа 2 и при этом не превосходящих заданное число. Если такое число 2^n существует, то коэффициент $a_i = 1$, в противном случае $a_i = 0$.

Например, 53

	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
_53	1	1	0	1	0	1

32------- - >2^5-------
_21
16------- - > 2^4——
_5
4-------- -> 2^2——
_1
1-------- -> 2^0——
0

$(53)_{10}$` = $(110101)_2$

Задача 1

Закодировать двоичным кодом методом вычитания следующие числа
15, 17, 34, 91, 127, 128, 129

2.Метод деления

Для перевода десятичного числа в двоичный эквивалент используем деление на 2. Разделим десятичное число на 2, если есть остаток, запишем 1 в младший разряд, если остатка нет, если остатка нет, в младший двоичный разряд запишем 0, делим частичный остаток на 2 и т.д.

Например, для перевода числа 53 в двоичную систему:

$$\frac{53}{2} = 26 + \frac{1}{2}; \quad \frac{25}{2} = 13 + \frac{0}{2}; \quad \frac{13}{2} = 6 + \frac{1}{2}; \quad \frac{6}{2} = 3 + \frac{0}{2}; \quad \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2};$$

Остаток от деления представляет собой коэффициент при переходе от младших разрядов к старшим, т.е.

$$5*10^1 + 3*10^0 = 1*2^5 + 1*2^4 + 0*2^3 + 1*2^2 + 0*2^1 + 1*2^0 = 110101$$

Например, число 125 в двоичной системе:

$$\frac{125}{2} = 62 + \frac{1}{2}; \frac{62}{2} = 31 + \frac{0}{2}; \quad \frac{31}{2} = 15 + \frac{1}{2}; \quad \frac{15}{2} = 7 + \frac{1}{2}; \quad \frac{7}{2} = 3 + \frac{1}{2}; \quad \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2};$$

$$1*10^2 + 2*10^1 + 5*10^0 = 1*2^6 + 1*2^5 + 1*2^5 + 1*2^4 + 1*2^3 + 1*2^2 + 0*2^1 + 1*2^0 = 1111101$$

Задача 2

Закодировать двоичным кодом методом деления следующие числа
14, 88, 125
14=1110, 88=1011000, 125=1111101

Задача 3. Запишите кодовые комбинации, соответствующие числу 45, при основании кода m=2, 3, 4, 8, 10. Как изменяется число разрядов и число используемых цифр в слове с изменением основания кода ?

При m=2 $\frac{45}{2}=22+\frac{1}{2};\ \frac{22}{2}=11+\frac{0}{2};\ \frac{11}{2}=5+\frac{1}{2};\ \frac{5}{2}=2+\frac{1}{2};\ \frac{2}{2}=1+\frac{0}{2};\ \frac{1}{2}=0+\frac{1}{2};$

45=101101

При m=3 $\frac{45}{3}=15+\frac{0}{3};\ \frac{15}{3}=5+\frac{0}{3};\ \frac{5}{3}=1+\frac{2}{3};\ \frac{1}{3}=0+\frac{1}{3};\ 45_{10}=1200_3$

При m=8 $\frac{45}{8}=5+\frac{5}{8};\ \frac{5}{8}=0+\frac{5}{8};\ 45_{10}=55_8$

В цифровых устройствах чрезвычайно широко используется простейший раздел математической логики – булева алгебра. Базовым понятием булевой алгебры является понятие ***высказывания***, под которым понимается любое утверждение, рассматриваемое только с точки зрения его истинности или ложности.

Высказывание можно рассматривать как логическую переменную, которая может принимать различные значения, например, высказывание "сегодня понедельник" будет истинным в понедельник и ложным во все остальные дни недели. Исчисление высказываний как раз и основано на том, что их можно рассматривать как двоичные переменные, которые могут принимать одно из двух своих значений. Примерами двоичных логических переменных являются разряды чисел, представленных в двоичной системе счисления; замкнутый или разомкнутый контакт; наличие или отсутствие тока в цепи; высокий или низкий потенциал в какой-либо точке схемы и т.п.

Арифметические действия в двоичной системе просты:

0+0=0; 0+1=1; 1+0=1; 1+1=10;

Часто в теории кодирования используют поразрядное сложение без переноса в старший разряд, так называемое сложение по модулю 2

$1 \oplus 0=1 \quad 0 \oplus 1=1 \quad 0 \oplus 0=0 \quad 1 \oplus 1=0$

Задача 4

Сложить арифметически в двоичной системе

$$\begin{array}{r} 1101101 \\ + \\ \underline{1101101} \\ 11011010 \end{array}$$

(Дать несколько примеров)

Сложить те же двоичные последовательности по модулю 2

$$\begin{array}{r} 1101101 \\ \oplus \\ \underline{1101101} \\ 0000000 \end{array}$$

(Дать несколько примеров)

Для передачи последовательности двоичных символов достаточно передавать 2 кодовых символа. При **кодировании** элементы сообщений преобразуются в соответствующие им числа. Каждому элементу сообщения присваивается определенная совокупность кодовых символов, называемых **кодовой комбинацией**. Совокупность кодовых комбинаций, обозначающих дискретные сообщения, называется **кодом**. Правила кодирования задаются таблицей, в которой приводится алфавит кодированных сообщений и соответствующие им кодовые комбинации. Различают коды равномерные и неравномерные. К **равномерным** относятся коды, у которых все кодовые комбинации имеют одинаковую длину (например, код Бодо), неравномерный – код Морзе.

По помехоустойчивости коды делятся на обыкновенные и корректирующие. Коды, все возможные комбинации которых используются для передачи информации, называются **обыкновенными** или кодами без избыточности. В обыкновенных кодах превращение одного символа комбинации в другой приводит новой возможной комбинации, т.е. к ошибке. Корректирующими свойствами обладают только коды с избыточностью.

Декодирование заключается в восстановлении сообщения по принятым кодовым символам. Устройства, осуществляющие кодирование и декодирование наз. кодером и декодером.

Если число разрядов в кодовых комбинациях постоянно, то код наз. равномерным.

Если m – основание кода (число возможных комбинаций одного элемента кода), n- число разрядов в кодовой комбинации, то число кодовых комбинаций (объем кода) N определяется как:

$$N= m^n$$

А при заданном числе кодовых комбинаций и основании кода разрядность кода будет соответственно:

$$n=\log_m N= \log_2 N/ \log_2 m$$ и для двоичного кода $n=\log_2 N$

Задача 5. Какое наименьшее число разрядов должны иметь кодовые комбинации двоичного и восьмеричного кодов предназначенных для кодирования алфавита, имеющего объем N=16, 128, 57, 10, 432

При m=2

$n=\log_2 N$ $n_1=\log_2 16=4$ $n_2=\log_2 128=7$ $n_3=\log_2 10=3,32$ $n_4=\log_2 432=8,75$

При m=8

$n=\log_2 N /\log_2 m$ $\log_2 m= \log_2 8=3$

$n_1=\log_2 16/3=4/3\approx2$ $n_2=\log_2 128/3=7/3\approx3$ $n_3=\log_2 10/3=3,32/3\approx2$

$n_4=\log_2 432/3=8,75/3\approx3$

<u>**Задача 6**</u>

Источник сообщения выдает символы из ансамбля, имеющего объем N=8, Записать кодовые комбинации примитивного равномерного двоичного кода, соответствующие символам данного источника.

Число кодовых комбинаций должно удовлетворять условию $8=2^n$

$n=\log_2 8=3$

символ	число	разложение числа по основанию 2	кодовая комб.
a_1	0	$0*2^2+0*2^1+0*2^0$	000
a_2	1	$0*2^2+0*2^1+1*2^0$	001
a_3	2	$0*2^2+1*2^1+0*2^0$	010
a_4	3	$0*2^2+1*2^1+1*2^0$	011
a_5	4	$1*2^2+0*2^1+0*2^0$	100
a_6	5	$1*2^2+0*2^1+1*2^0$	101
a_7	6	$1*2^2+1*2^1+0*2^0$	110
a_8	7	$1*2^2+1*2^1+1*2^0$	111

<u>**Задача 7**</u>

Дискретный источник выдает символы из ансамбля $\{a_i\}$ объемом N=10. Какое минимальное число разрядов должны иметь кодовые комбинации равномерного двоичного кода, предназначенного для кодирования символов данного ансамбля. Записать кодовые комбинации.

Число разрядов $n=\log_2 10=3,32$, т.к. число разрядов не может быть дробным, эту величину следует округлить до 4, округление до 3 недопустимо, т.к. число кодовых комбинаций $N=2^3=8$ недостаточно для кодирования всех 10 символов источника.

ситмвол	число	разложение числа по основанию 2	кодовая комб.
a_1	0	$0*2^3+0*2^2+0*2^1+0*2^0$	0000
a_2	1	$0*2^3+0*2^2+0*2^1+1*2^0$	0001
a_3	2	$0*2^3+0*2^2+1*2^1+0*2^0$	0010
a_4	3	$0*2^3+0*2^2+1*2^1+1*2^0$	0011
a_5	4	$0*2^3+1*2^2+0*2^1+0*2^0$	0100
a_6	5	$0*2^3+1*2^2+0*2^1+1*2^0$	0101
a_7	6	$0*2^3+1*2^2+1*2^1+0*2^0$	0110
a_8	7	$0*2^3+1*2^2+1*2^1+1*2^0$	0111
a_9	8	$1*2^3+0*2^2+0*2^1+0*2^0$	1000
a_{10}	9	$1*2^3+0*2^2+0*2^1+1*2^0$	1001

Задача 8. Буквам русского алфавита А, В, Е, К, О, М, С соответствуют следующие кодовые комбинации 00000, 00011, 00101, 01001, 01011, 01100, 01111. Расшивровать кодовые последовательности:

1) 011000101101111010010001100000 (МОСКВА)
2) 0111100101010010000001100 (СЕКАМ)
3)0110000000011110100100000 (МАСКА)

Задача 9. Задана таблица из трех кодов

№ кода \ сообщение	а	б	в	г	д	е	ж	з
1	000	001	010	011	100	101	110	111
2	0	1	00	01	10	11	110	111
3	00	01	100	101	1100	1101	1110	1111

Необходимо 1) определить вид кода; 2) определить какие из этих кодов не требуют разделительных знаков 3)закодировать слова: звезда, вега, база; 4) расшифровать последовательности кодовых комбинаций а) кода 1: 111000001000010000; 001101100000; б) кода 3: 0100101001110; 01110110100; 10000111100.

Задача 10. Текст из 180 букв передается по телефонному каналу за 30 с. Тот же текст за то же время передается передается по телеграфному каналу кодом МТК-2.
Сравните объемы тлф и тлг сигналов (при одинаковом дин. диапазоне).

$V=T_C\Delta F_C D$ Для тлг сигн. $\Delta F_C=3/\tau_0$; Для тлф сигн. ΔF_C = 3400-300=3100 (Гц)
τ_0 =30/(180*5)=0,0375 Для тлг сигн. ΔF_C =3/0,0375 = 80 (Гц)
Соотношение объемов тлф и тлг сигналов при равных D сводится к соотношению ΔF_C
$\Delta F_{тлф}/\Delta F_{тлг}$=3100/80=3,875

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №12

ІМПУЛЬСНО-КОДОВА МОДУЛЯЦІЯ

1.1. Квантування за рівнем

Відліки неперервних повідомлень, взяті в дискретні моменти, характеризуються тим, що рівні повідомлень можуть приймати безкінечну множину значень, якщо точність їх визначення не обмежена. Оскільки любе повідомлення приходить до споживача сумісно з завадою (помилку вимірювання також можна трактувати як заваду), то безглуздо передавати повідомлення точніше, ніж це дозволяє рівень завад. Таким чином, доцільно в залежності від рівня супроводжуючих завад і необхідної точності представлення повідомлення обмежити число рівнів повідомлення. Заміна неперервної шкали рівнів повідомлення дискретною шкалою рівнів називається квантуванням за рівнем. Якщо миттєве значення рівня повідомлення знаходиться всередині інтервалу, розташованого між двома дозволеними дискретними рівнями, то замість нього передається значення, що відповідає ближчому дозволеному рівню. При кількості рівнів квантування, рівній m, будь-яке повідомлення буде містити не більш, ніж m значень, які можна розрізнити.

Квантування за рівнем може здійснюватись з рівномірним чи нерівномірним кроком. При рівномірному квантуванні динамічний діапазон зміни повідомлення ділиться на $m-1$ рівних частин (тобто інтервали між всіма рівнями квантування однакові). При нерівномірному квантуванні ділення проводиться на $m-1$ нерівних частин. Таким чином отримуємо шкалу рівнів квантування.

Щоб мати можливість чітко визначити належність істинних миттєвих значень повідомлення певному рівню, динамічний діапазон повідомлення $S(t)$ ділиться на інтервали, які називають кроками квантування. Рівні квантування при цьому розташовуються всередині кроків квантування. Крок квантування зазвичай позначають ΔS, і для i-го рівня крок квантування буде ΔS_i. Якщо значення повідомлення в деякий момент часу (зазвичай цей момент співпадає з моментом взяття відліку за часом $S(t_k)$) знаходиться всередині i-го кроку квантування ΔS_i, то значення повідомлення замінюється значенням i-го рівня $S_i(t_k)$. Оптимальним стосовно точності відтворення квантованого сигналу є розташування рівня квантування в середині кроку квантування. Процедура квантування за рівнем представлена на рис.1.11, а.

Квантова не повідомлення $S_i(t_k)$ представляє собою суму істинного повідомлення $S(t_k)$ і помилки δ_{S_i}. Таким чином, квантування можна розглядати як проходження повідомлення через систему, що підлягає дії завади δ_{S_i}. Зазвичай цю заваду називають шумом квантування. Так як саме повідомлення являється випадковим процесом, шум квантування також буде випадковою функцією часу. Оцінимо статистичні характеристики шуму квантування. Виникаюча в момент t_k помилка визначається виразом:

$$\delta_{S_i} = S(t_k) - S_i(t_k). \tag{1.25}$$

Повідомлення $S(t)$ в момент часу t_k може приймати одне із можливих значень в інтервалі від $S_{\min}$ до $S_{\max}$ із деякою імовірністю, що визначається законом розподілу випадкової величини $S(t)$. Імовірність появи рівня S_i визначиться як імовірність попадання випадкової величини $S(t)$ в інтервал від S_a до S_B в окрузі рівня S_i. При цьому похибка δ_{S_i} може змінюватися в межах від $S_i - S_a$ до $S_B - S_i$ змінюючи знак (рис.1.11, б). Імовірність появи похибки δ_{S_i} визначається імовірністю появи відповідного значення повідомлення $S(t)$ в момент t_k.

Математичне очікування помилки:

$$M(\delta_{S_i}) = \int_{S_a}^{S_B} (S - S_i)\, p(S)\, dS, \tag{1.26}$$

а середньоквадратичне значення:

$$M(\delta_{S_i^2}) = \int_{S_a}^{S_B} (S - S_i)^2\, p(S)\, dS, \tag{1.27}$$

Вважаючи динамічний діапазон зміни повідомлення набагато більшим від величини кроку квантування, приймемо функцію щільності імовірності $p(S)$ на інтервалі інтегрування постійною і рівною своєму значенню для деякого середнього рівня $p(S_c)$. Тоді:

$$M(\delta_{S_i}) = p(S_c) \int_{S_a}^{S_B} (S - S_i)\, dS = \frac{1}{2} p(S_c) \left[(S_B - S_i)^2 - (S_a - S_i)^2\right], \tag{1.28}$$

а

$$M(\delta_{S_i^2}) = p(S_c) \int_{S_a}^{S_B} (S - S_i)^2\, dS = \frac{1}{3} p(S_c) \left[(S_B - S_i)^3 - (S_a - S_i)^3\right], \tag{1.29}$$

де $S_c = \dfrac{S_B - S_a}{2}$.

Визначимо оптимальне положення рівня S_i відносно S_a і S_B, при якому середньоквадратична помилка буде мінімальною. Прирівнюючи до нуля похідну $\dfrac{\partial \left[M(\delta_{S_i^2})\right]}{\partial S_i}$, отримаємо:

$$\left(S_B - S_i\right)^2 = \left(S_a - S_i\right)^2$$

і визначимо положення рівня S_i, яке відповідає мінімуму помилки:

$$S_i = \frac{S_B + S_a}{2} = S_c. \qquad (1.30)$$

Неважко помітити, що при цьому (1.28) перетворюється в нуль, тобто $M(S_i) = 0$.

Отриманий результат свідчить про те, що для забезпечення мінімальної дисперсії рівень квантування S_i слід розташовувати посередині кроку квантування. В цьому випадку $S_a = S_i - \frac{\Delta S_i}{2}$, $S_B = S_1 + \frac{\Delta S_i}{2}$, а дисперсія знаходиться із (1.29) і дорівнює:

$$M(\delta_{S_i^2}) = \frac{1}{12} p(S_i)\Delta S_i^3. \qquad (1.31)$$

Дисперсію шуму квантування D отримаємо шляхом сумування значень $M(\delta_{S_i 2})$ за всіма рівнями:

$$D = \sum_{i=1}^{m} M(\delta_{S_i^2}) = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{m} p(S_i)\Delta S_i^3. \qquad (1.32)$$

У випадку рівномірного квантування, коли $\Delta S_1 = \Delta S_2 = \dots = \Delta S_m = \Delta S$, отримуємо:

$$D = \frac{\Delta S^2}{12}\sum_{i=1}^{m} p(S_i)\Delta S. \qquad (1.33)$$

Вважаючи, що значення повідомлення обмежуються динамічним діапазоном, можна записати: $\sum_{i=1}^{m} p(S_i)\Delta S = 1$. Остаточно для рівномірного квантування:

$$D = \frac{\Delta S^2}{12}. \qquad (1.34)$$

При виборі рівня, згідно до (1.30), максимальна різниця (при рівномірному квантування) між істинним значенням повідомлення і квантованим значенням не перевищує $\frac{\Delta S}{2}$. Середньоквадратична помилка квантування при цьому складе $\sigma_c = \sqrt{D} = \frac{\Delta S}{2\sqrt{3}}$, тобто буде меншою від максимальної помилки в $\sqrt{3}$ раз.

Із (1.31), (1.33) випливає, що значення дисперсії шуму квантування і середньоквадратичної помилки залежить як від виду функції розподілу щільності імовірності, так і від характеру зміни шуму квантування в межах динамічного діапазону повідомлення (1.32). Із аналізу (1.32) випливає, що для зменшення середньоквадратичної похибки доцільно для менш імовірних значень вибирати більший крок квантування, зменшуючи його до більш імовірних значень. Квантування за рівнем, яке забезпечує мінімум дисперсії шуму квантування, називають оптимальним квантуванням за рівнем. Умовою оптимальності квантування являється постійність добутку $\Delta S_i \sqrt[3]{p(S_i)}$ в межах динамічного діапазону. Функціональний зв'язок між функцією повідомлення y і змінною S, що утворює в інтервалі від 0 до $S_{\max}$ оптимальну шкалу квантування, визначається наступним чином [13]:

$$S(y) = \frac{S_{\max}}{S_1}\int_0^y \frac{dy}{\sqrt[3]{p(y)}}, \qquad (1.35)$$

де $S_1 = \int_0^{S_{\max}} \frac{dy}{\sqrt[3]{p(y)}}$; $p(y)$ - функція щільності ймовірності повідомлення $y(t)$.

Розрахунки, проведені з використанням (1.35), показали, що при використанні оптимального квантування неперервних функцій з нормальним законом розподілу є можливість зменшити дисперсію шуму квантування в порівнянні з рівномірним законом в окремих випадках більш, ніж в 3 – 4 рази. Аналогічно показана можливість зменшення дисперсії шуму квантування і для других законів розподілу. Можливі два способи оптимального квантування повідомлень: безпосередній і з попереднім перетворенням динамічного діапазону. При безпосередньому способі пристрій квантування на основі апріорно відомої функції розподілу $p(S)$ вибирає величину кроку квантування ΔS_i у відповідності із значеннями повідомлення, яке квантується. Такий пристрій є достатньо складним за своєю структурою і операціями, які він виконує. При квантуванні з перетворенням динамічного діапазону повідомлення подається на нелінійний амплітудний перетворювач, що забезпечує перетворення закону розподілу в рівноймовірний (або близький до нього). Пристрій квантування оперує з однаковою величиною кроку квантування для всіх рівнів. Амплітудна характеристика перетворювача визначається виглядом функції $p(y)$. Часто на практиці використовується логарифмічна характеристика нелінійного перетворення. Як показано в роботі [12], використання такого перетворення дозволяє зменшити шум квантування без збільшення числа рівнів. Відмітимо, що при стискуванні динамічного діапазону повідомлення виявляються спотвореними. Для усунення спотворення повідомлення піддають зворотному нелінійному перетворенню у відповідності з прийнятим раніше законом стискування діапазону.

1-й шаг. Дискретизация по времени – представление первичного сигнала временными отсчетами, взятыми через определенные интервалы времени

уровень квант.	6	8	7	4
Кодовая комбинация $b_{икм}(t)$	0110	1000	0111	0100

2 шаг ИКМ - квантование аналогового сигнала

При этом непрерывный интервал значений передаваемого сигнала заменяется конечным множеством разрешенных для передачи значений.РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ СОСЕДНИМИ ДИСКРЕТНЫМИ УРОВНЯМИ НАЗЫВАЮТ ИНТЕРВАЛОМ ИЛИ ШАГОМ КВАНТОВАНИЯ Δ.

При равномерном квантовании весь диапозон $b_{max}(t)-b_{min}(t)$ разбивают на $L=2^n$ уровней, отстающих друг от друга на шаг квантования Δ, так что

$$b_{max}(t)-b_{min}(t) \le N\Delta,$$

т.к. мгновенное значение ф-ции заменяется дискретным значением, появляются погрешности квантования по уровню или ШУМ квантования, кот. имеет случайный характер

Абсолютное ее значение в каждый момент времени определяется разностью между квантованным значением и действительным мгновенным значением ф-ции

$$\delta_{кв} = b_{кв}(t)-b(t)$$

3-й шаг ИКМ - кодирование квантованных значений двоичным кодом. При ИКМ непрерывное сообщение сначала подвергается дискретизации по времени и по уровню, а затем полученная последовательность **L** уровней кодируется (двоичным кодом). При этом каждому уровню присваивается кодовая комбинация из **n** символов “1” и “0”. Число символов в комбинации должно удовлетворять условию **$2^n \ge L$ или $n \ge \log L$**.

Полученные кодовые комбинации могут передаваться по каналу связи любым методом дискретной модуляции. Обычно используется частотная ИКМ-ЧМ или фазовая манипуляция ИКМ-ФМ.

Задача 1

Число уровней квантования равно L=256. Определить длительность элементарной посылки в кодовой комбинации, если интервал дискредитации $\Delta t_д$=160мс

Решение: $\tau_0 = \Delta t_д / n$

n-*значность кода* $n = \log_2 L = 8$; $\tau_0 = 20$*мс*

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ №13-14

РОЗРАХУНКИ ДО КУРСОВОЇ РОБОТИ