МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙ
Кафедра РРМ

ЗАТВЕРДЖУЮ
Зав. кафедрою РРМ

________В.А. Дружинин
«_20__» _вересня________ 2013

Методичні рекомендації для самостійної роботи студентів

З навчальної дисципліни: Сигнали та процеси в радіотехніці
Напряму підготовки: Радіотехніка
Освітньо-кваліфікаційного рівня: бакалавр

Матеріали лекції розглянуті
на засіданні кафедри РРМ
Протокол № 2 від 20.09.2013
Завідуючий кафедрою

______________В.А. Дружинин
«_20_»_вересня_________ 2013

Київ 2013

I. ПРЕДМЕТ, МЕТА ТА ЗАВДАННЯ ДИСЦИПЛІНИ

1.Предметом навчальної дисципліни є:

- основи сучасної теорії електрозв'язку з акцентом на фізичне тлумачення процесів, які відбуваються під час передавання повідомлень та сигналів у системах зв'язку;
- математичний опис основних фізичних процесів передавання сигналів і завад та методи забезпечення граничних характеристик систем зв’язку як за достовірністю, так і за швидкістю передачі інформації;
- процеси передавання сигналів каналами зв’язку при наявності завад з математичної точки зору.

Метою вивчення навчальної дисципліни є:

- з’ясування фундаментальних понять інформаційної інфраструктури для спеціалістів з телекомунікацій;
- опанування основними термінами, категоріями, базовими знаннями із сучасної теорії електричного зв'язку, використання і оцінювання у своїй практичній діяльності математичних моделей процесів (у тому числі сигналів, каналів зв’язку) для розв'язання виробничих, проектних та наукових задач з телекомунікацій;
- здатність застосовувати правила, методи, принципи, закони у конкретних ситуаціях, своєчасно адаптуватися до зростаючого потоку інформації, проблем розвитку галузі зв’язку та новітніх науково-технічних досягнень в галузі телекомунікацій;
- сформувати у випускників активну позицію (за вимогами до сучасних спеціалістів), спрямовану на практичну реалізацію важливих завдань - інформатизації держави та входження до глобальної інфраструктури.

2. Основні поняття

ЗМІСТ

МОДУЛЬ 1

Тема 1. ЗАГАЛЬНІ ПОНЯТТЯ ПРО СИСТЕМИ ЕЛЕКТРОЗВ’ЯЗКУ ТА СИГНАЛИ

Вступ. Загальні поняття про системи електрозв`язку. Досягнення сучасної теорії та техніки зв`язку. Мета та задачі курсу ТЕЗ. Класифікація, узагальнені структурні схеми. Поняття сигналу, основні характеристики первинних сигналів.

Випадкові процеси. Класифікація, узагальнені структурні схеми. Поняття сигналу, основні характеристики первинних сигналів.

Спектральна щільність потужності та її зв’язок із функцією кореляції. Низькочастотний та смуговий гаусовський шум, випадковий телеграфний сигнал.

Тема 2. ОСНОВНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИГНАЛІВ

Математичний опис сигналів та завад. Класифікація, енергетичні та кореляційні характеристики сигналів. Лінійні двійкові блочні коди.

Подання сигналів в ортогональному базисі. Приклади ортогональних базисів. Циклічний код.

Спектральний аналіз сигналів. Амплітудний, фазовий, комплексний та енергетичний спектри сигналів. Геометричне зображення сигналів. Теорема відліків.

Тема 3. ЗАГАЛЬНІ ПРИНЦИПИ МОДУЛЯЦІЇ. ТЕОРЕМА КОТЕЛЬНІКОВА

Модульовані сигнали. Амплітудна модуляція гармонічного переносника. Часове та спектральне зображення АМ сигналу. Модуляція гармонічним та складним сигналами. БМ та односмугова модуляції.

Принципи формування АМ, БМ, та ОМ сигналів. Синхронне детектування. Детектор обвідної.

Кутова модуляція гармонічного переносника. Часове та спектральне зображення сигналів кутових модуляцій.

Принципи формування та детектування сигналів кутових модуляцій.

Методи цифрової модуляції. Теорема Котельникова. Часове та спектральне зображення, формування та демодуляція дискретних сигналів.

Перетворення аналогових сигналів у дискретну та цифрову форму. Відновлення сигналів. ІКМ. Похибки квантування. Перетворення випадкових сигналів у типових лінійних та нелінійних ланках каналів. Методи розрахунків характеристик випадкових сигналів на виході каналів.

МОДУЛЬ 2

Тема 4. ХАРАКТЕРИСТИКИ КАНАЛІВ ЕЛЕКТРОЗВ’ЯЗКУ

Канали електрозв’язку. Класифікація та характеристики. Математичні моделі дискретних та неперервних каналів.

Тема 5. ТЕОРІЯ ПЕРЕДАЧІ ІНФОРМАЦІЇ КАНАЛАМИ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙНИХ МЕРЕЖ

Перетворення випадкових сигналів у типових лінійних та нелінійних ланках каналів. Методи розрахунків характеристик випадкових сигналів на виході кіл.

Інформаційні характеристики джерел дискретних повідомлень. Ентропія та її властивості. Передача повідомлень каналами з шумами. Взаємна інформація та її властивості.

Швидкість передачі інформації і пропускна здатність дискретного каналу. Методи ефективного кодування. Теорема Шенона для каналу с завадами.

Інформаційні характеристики джерел неперервних повідомлень. Епсілон-ентропія, продуктивність, надмірність.

3. Основні положення навчальної дисципліни

Навчальні питання до модуля 1

Математичні моделі детермінованих сигналів

1.1. Детерміновані сигнали

З точки зору вирішення задач електричного зв’язку математичні моделі, що відображають основні властивості повідомлень і завад, є фундаментом теорії електрозв’язку. Оскільки сигнали і завади перш за все представляються електричними комбінаціями, що змінюються в часі, то їх базовою математичною моделлю являється деяка функція часу $S(t)$. За своїми фізичними та математичними властивостями процеси $x(t)$ діляться на детерміновані та випадкові. Нижче в даному розділі розглядаються детерміновані сигнали.

Детермінованими чи регулярними називають такі процеси $S(t)$, протікання яких в часі можна повністю визначити наперед ($S(t) = at, \quad S(t) = at^2, \quad S(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$). Інакше кажучи, для будь якого наперед заданого моменту часу t може бути однозначно визначене значення функції $S(t)$. Розрізняють наступні види детермінованих сигналів: прості; складні; еталонні чи пробні, періодичні і неперіодичні.

Простим сигналом називають сигнал, що відповідає одній елементарній посилці. Наприклад, при передачі дискретної інформації простому сигналу відповідає сигнал кодового символу в комбінації (рис.1.1,а).

Сигнал, що представляє собою сукупність елементарних посилок, називають складеним чи складним (рис.1.1, б).

В теорії зв'язку вводиться поняття бази сигналу ν:

$$\nu = 2TF,$$

де T - тривалість сигналу, F - смуга частот, що займається сигналом.

Для простих сигналів $\nu \approx 1$, а для складних $\nu >> 1$. Враховуючи цю обставину, прості сигнали називають вузькосмуговими, а складні – широкосмуговими.

Еталонні або пробні сигнали:

1. Гармонічний сигнал (рис.1.2, а):

$$S(t) = A\sin(\omega t + \varphi), \ (-\infty < t < \infty),$$

де A, ω, φ - амплітуда, частота і фаза сигналу відповідно.

2. Одинична функція (функція вмикання (рис.1.2, б)):

$$1(t) = \begin{cases} 0, \ при \ t < 0; \\ f, \ при \ t > 0. \end{cases}$$

3. Одиничний імпульс (дельта функція (рис.1.2, в)):

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, \ при \ t < 0; \\ \infty, \ при \ t = 0; \\ 0, \ при \ t > 0. \end{cases}$$

До основних типів детермінованих сигналів відносяться періодичні та неперіодичні.

1.1.1. **Періодичні сигнали**

Періодичним сигналом називається сигнал, який повторюється через визначені проміжки часу:

$$S(t) = S(t + nT), \quad (-\infty < t < \infty),$$

де T - період повтору, n - будь-яке число.

Будь-яка періодична функція, що задовольняє умовам Дирихлє, може бути представлена у вигляді ряду Фур'є. Умови визначаються наступним чином. Функція $S(t)$ повинна бути скрізь однозначною, кінцевою, кусково-неперервною (тобто інтервал, на якому функція визначена, може бути розбитий на кінцеве число інтервалів, в кожному із яких $S(t)$ неперервна і монотонна), повинна мати обмежене число максимумів і мінімумів, у будь-якій точці розриву існує $S(t-0)$ і $S(t+0)$; значення $S(t)$ в точці розриву рівне $\frac{S(t-0)+S(t+0)}{2}$. При цьому ряд Фур'є записується наступним чином:

$$S(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}A_k\cos(k\omega_1 t-\varphi_k)$$

або

$$S(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos k\omega_1 t+b_k\sin k\omega_1 t$$

де

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}S(t)dt,\quad a_k=A_k\cos\varphi_k,\quad b_k=A_k\sin\varphi_k,$$

$$A_k=\sqrt{a_k^2+b_k^2},\quad \varphi_k=arctg\,{b_k}/{a_k}.$$

Комплексна форма запису ряду Фур'є:

$$S(t)=\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dot{A}_k e^{jk\omega_1 t},$$

де

$$\dot{A}_k=A_k e^{-j\varphi_k}=a_k+jb_k,\quad A_k=\left|\dot{A}_k\right|,$$

$$\dot{A}_k=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}S(t)e^{-jk\omega_1 t}dt.$$

Якщо $S(t)=S(-t)$ (функція парна), то

$$b_k=0,\quad A_k=a_k,$$

якщо $S(t)=-S(t)$ (функція непарна), то

$$a_k=0,\quad A_k=b_k.$$

Спектр періодичного сигналу зображається графічно у вигляді спектральних ліній, довжини яких пропорційні амплітудам (фазам) відповідних частотних складових. Спектр періодичного сигналу – дискретний (лінійчатий). При цьому відстань між сусідніми лініями постійне і рівне частоті першої гармоніки (рис.1.5).

Неперервна крива, що з'єднує кінці ліній спектру, називається огинаючою спектра.

$$S(j\omega)=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}S(t)e^{-j\omega t}dt=S(t)e^{i\varphi(\omega)},$$

де $S(\omega),\varphi(\omega)$ - огинаючі спектрів амплітуд і фаз відповідно.

Середня потужність сигналу, що виділяється на навантаженні з опором 1 Ом, рівна:

$$P_{cp} = \overline{S^2(t)} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} S^2(t)dt = \frac{a_0^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} A_k^2.$$

Отримана формула для P_{cp} називається рівністю Парсеваля, згідно якій середня потужність періодичного сигналу рівна сумі середніх потужностей всіх частотних складових його спектра.

Реальні канали зв'язку, через які проходить сигнал, мають обмежену смугу перепуску, тому сигнал $S(t)$ можна представити у вигляді:

$$S(t) \approx \sum_{k=l_2}^{l_2} (a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t). \qquad (1.1)$$

Число членів ряду (1.1) рівне n, де $n = 2TF$, $F = {(e_2 - e_2)}/{\tau}$ - смуга частот, що займається каналом. Апроксимація сигналу $S(t)$ рядом (1.1) дає найменше середньоквадратичне відхилення від точного значення $S(t)$, якщо a_k і b_k являються коефіцієнтами ряду Фур'є.

1.1.2. **Неперіодичні сигнали**

Неперіодичними називають сигнали, які задовольняють умові $S(t) \neq S(t+nT)$ на інтервалі $(-\infty < t < \infty)$. Такий сигнал представляється функцією на кінцевому чи напівбезкінечному інтервалах:

$t_1 < t < t_2, \quad t_1 < t < \infty.$

Для неперіодичного сигналу існує пряме та зворотне перетворення Фур'є:

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t)e^{-j\omega t}$$

$$S(t) = \frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)e^{j\omega t}d\omega.$$

Величина $S(j\omega)$ виражає спектральну щільність сигналу і називається спектральною характеристикою або комплексним спектром, а модуль $S(j\omega)$ - спектром сигналу.

$S(j\omega) = \pi\dfrac{d\dot{A}}{d\omega}$; $\quad |S(j\omega)| = S(\omega)$ - спектр сигналу. Спектральну характеристику як комплексну величину можна представити у вигляді:

$$S(j\omega) = A(\omega) + jB(\omega) = S(\omega)e^{-j\varphi(\omega)},$$

де

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t)\cos\omega t dt, \qquad B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t)$$

$$S(\omega) = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}, \quad \varphi(\omega) = arctg \, {B(\omega)}\big/_{A(\omega)}.$$

Енергія неперіодичного сигналу рівна:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)S(-j\omega)d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[S(\omega)]^2 d\omega.$$

Якщо спектр обмежений смугою частот $F = f_2 - f_1$, можна наближено записати:

$$\frac{1}{\pi}\int_{f_1}^{f_2}[S(\omega)]^2 d\omega \approx \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[S(\omega)]^2 d\omega. \qquad (1.2)$$

Практично ширину спектра сигналу необхідно вибирати так, щоб забезпечити виконання цієї рівності з заданою точністю. Це однак не являється єдиним критерієм вибору ширини спектру. Другим критерієм є допустимий ступінь спотворення форми сигналу.

Практично під шириною спектра розуміється область частот, у межах якої зосереджено 90% або 99% енергії сигналу.

Добуток ширини спектра імпульсного сигналу і тривалості імпульсу є величина постійна:

$$F\tau = const.$$

$F\tau = 1$ - для прямокутного імпульсу,

$F\tau = 1{,}5$ - для косинусоїдального імпульсу,

$F\tau = 2$ - для трикутного імпульсу.

На рис.1.10 приведені спектри деяких неперіодичних сигналів.

1.2. Часове представлення сигналів. Дискретизація інформації

Під дискретизацією розуміється перетворення неперервних повідомлень в дискретні. При цьому використовується дискретизація за часом та за рівнем. Перехід від аналогового представлення до дискретного у багатьох випадках дає значні переваги при передачі, обробці та зберіганні інформації.

Заміна неперервної функції дискретною дає можливість всі результати, отримані для дискретних повідомлень, застосувати до неперервних повідомлень.

Дискретизація за часом. Суть дискретизації за часом полягає в тому, що деякій неперервній функції ставиться у відповідність друга функція, створена шляхом переривання вихідної функції (рис.1.6.). Природно, що така заміна допустима лиш в тих випадках, коли дискретизована функція повністю представляє вихідну функцію. Інтуїція підказує, що заміна неперервної функції дискретною можлива лише при певних допущеннях. Яким повинен бути інтервал Δt між окремими відліками? При малому інтервалі між відліками їх кількість буде більшою і точність наступного відновлення функції також буде високою. Якщо ж інтервал між відліками взяти великим, то кількість відліків зменшиться, однак похибка відновлення неперервного повідомлення може виявитися більшою від допустимої. Оптимальним слід вважати такий інтервал між відліками, при якому вихідна функція із заданою точністю представляється мінімальним числом відлікових значень. У цьому випадку всі відліки будуть істотними для відновлення вихідної функції. При більшому числі відліків буде мати місце надлишковість інформації

Спосіб дискретизації, згідно до якого вибираються відліки або коефіцієнти розкладу, доцільно оцінювати за величиною похибки відновлення вихідної функції. Розрізняють три види критеріїв відліків [1]:

1. Частотний критерій Котельникова, згідно до якого інтервали між відліками вибираються виходячи із ширини спектра повідомлення, що дискретизується [8].
2. Кореляційний критерій відліків Жєлєзнова, згідно до якого інтервал дискретизації вибирається рівним часу кореляції повідомлення, що передається [9].
3. Квантовий критерій відліків Темникові, запропонований для детермінованих функцій, який встановлює залежність інтервалів між відліками від величини ступеня квантування за рівнем і крутизною функції [10].

Оцінку точності відновлення неперервного повідомлення можна проводити за величиною найбільшого, середньоквадратичного або інтегрального відхилення.

Теорема В.А.Котельникова. Реальні сигнали завжди мають кінцеву тривалість і обмежену смугу частот. Граничні частоти спектра визначаються головним чином властивостями системи передачі і самим отримувачем. Так, наприклад, при передачі дискретних повідомлень смуга частот визначається швидкістю передачі, при передачі телевізійного зображення – прийнятим стандартом чіткості (числом строчок і т.п.).

Для функцій з обмеженим спектром В.А. Котельников довів чудову теорему, що лежить в основі дискретизації неперервних сигналів.

Згідно до цієї теореми функція $S(t)$, яка не містить частот вищих від F, повністю визначається послідовністю своїх значень в моменти, які відстають один від одного на $\Delta t = {}^{1}\!/_{2F} = {}^{\pi}\!/_{\omega}$.

Фізичним підтвердженням цього є відомий факт про те, що сигнал $S(t)$ не може істотно змінитися за час, менший, ніж половина періоду його найвищої частоти, тобто ${}^{1}\!/_{2F}$.

Якщо неперервний сигнал обмежений за спектром, не обов'язково передавати всі миттєві значення цієї функції, а тільки окремі її значення.

Доведення теореми В.А.Котельникова. Нехай функція $S(t)$ має обмежений спектр. Тоді

$$S(j\omega)=\begin{cases}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S(t)e^{-j\omega t}dt \quad при \quad |\omega|\le 2\pi F;\\ 0 \quad при \quad |\omega|>2\pi F.\end{cases}$$

На кінцевому інтервалі $(-2\pi F, 2\pi F)$ функцію $S(j\omega)$ можна представити у вигляді ряду Фур'є за аргументом ω:

$$S(j\omega)=\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dot{A}_k e^{jk\frac{\omega}{2F}}.$$

Коефіцієнти Фур'є у цьому випадку запишуться у вигляді:

$$A_k=\frac{2}{4\pi F}\int\limits_{-2\pi F}^{2\pi F} S(j\omega)e^{-j\frac{k\omega}{2F}}d\omega.$$

Так як $S(j\omega)$ є перетворенням Фур'є для $S(t)$, то $S(t)$ також є перетворенням Фур'є для $S(j\omega)$:

$$S(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-2\pi F}^{2\pi F} S(j\omega)e^{j\omega t}d\omega.$$

Вважаючи $t=k/2F$, отримуємо:

$$S\left(\frac{k}{2F}\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-2\pi F}^{2\pi F} S(j\omega)e^{j\frac{k\omega}{2F}}d\omega.$$

Порівнюючи отриманий вираз із виразом для A_k бачимо, що

$$A_k=\frac{1}{F}S\left(-\frac{k}{2F}\right)=2\Delta t f(-k\Delta t).$$

Отже

$$S(j\omega)=\Delta t\sum_{k=-\infty}^{\infty} S(k\Delta t)^{-j\frac{k\omega}{2F}}.$$

Так як $S(t)$ однозначно визначається своїм спектром $S(j\omega)$, то із отриманого співвідношення випливає, що $S(t)$, як $S(j\omega)$, однозначно визначаються відліками $S(k\Delta t)$. Це і доводить теорему В.А.Котельникова.

Виражаючи функцію $S(t)$ через її спектр $S(j\omega)$ отримаємо:

$$S(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-2\pi F}^{2\pi F} S(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{\Delta t}{2\pi}\int\limits_{2\pi F}^{2\pi F} e^{j\omega t}d\omega\sum_{-\infty}^{\infty} S(k\Delta t)e^{j\omega\Delta t}$$

або, змінюючи порядок дії й інтегруючи, отримаємо:

$$S(t)=\frac{\Delta t}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}S(k\Delta t)\int_{-2\pi F}^{2\pi F}e^{ij\omega(t-k\Delta t)}dt=\sum_{k=-\infty}^{\infty}S(k\Delta t)\frac{\sin 2\pi F(t-k\Delta t)}{2\pi F(t-k\Delta t)}. \qquad (1.3)$$

Вираз (1.3) представляє собою розклад неперервної функції $S(t)$ в ряд за ортогональними функціями виду $\frac{\sin x}{x}$. Величини $S(k\Delta t)$ називаються відліками функції $S(t)$. Вони визначають значення $S(k\Delta t)$ у дискретні моменти часу $k\Delta t$. Множник $\frac{\sin 2\pi F(t-k\Delta t)}{2\pi F(t-k\Delta t}$ називається функцією відліків.

Позначивши $\tau=t-k\Delta t$, отримаємо:

$$\psi(\tau)=\frac{\sin 2\pi F\tau}{2\pi F\tau},\quad \lim_{\tau\to 0}\psi(\tau)=1.$$

Графік функції $\psi(\tau)$ зображений на рис.1.5, а. Функція відліків приймає найбільше значення, рівне одиниці в моменти $t=k\Delta t\ (\tau=0)$, і перетворюється в нуль у моменти часу $t=(k\pm m)\Delta t$, де $m=1,2,\ldots$. Ширина головної пелюстки функції відліків на нульовому рівні рівна $1/F$. Спектр функції відліків є рівномірним у смузі $(-F,F)$ і рівний нулю поза цією смугою. Модуль спектра $S(\omega)=1/(2F)$.Енергія сигналу через відлікові значення визначається наступним чином:

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}S^2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}S^2(k\Delta t).$$

Якщо смуга частот сигналу $S(t)$ необмежено розширюється, то Δt буде необмежено зменшуватися, і в межах при $F\to\infty$ функція відліків прямує до дельта-функції $\delta(t-t_k)$, а ряд Котельникова перетворюється в інтеграл:

$$S(t)=\int_{-\infty}^{\infty}S(t)\delta(t-t_k)dt. \qquad (1.4)$$

Згортка дельта-функції з будь-якою функцією $S(t)$ дає нерівність:

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t-t_k)dt=f(t_k)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_k)dt=f(t_k). \qquad (1.5)$$

Із порівняння виразів (1.4) і (1.5) випливає, що інтеграл, який визначається виразом (1.4) не зміниться при заміні $S(t)$ на $S(t_k)$. Тоді інтеграл (1.4) можна записати у вигляді інтегралу Дюамеля:

$$S(t)=\int_{0}^{T}S(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

На рис.1.5, б показаний неперервний сигнал, що дискретизується за часом, а на рис.1.5, в – функції відліків для деяких сусідніх відліків.

Характеристики виглядом $\frac{\sin x}{x}$ має ідеальний фільтр нижніх частот (рис.1.6, а) при передачі на вхід одиничного імпульсу. Реальні характеристики $k(\omega)$ і $\varphi(\omega)$ відрізняються від ідеальних, що приводить до відхилення форми реальної функції від ідеальної, і, як наслідок, до появи додаткових похибок відновлення функції $S(t)$.

Теорема Котельникова дозволяє єдиним чином розглядати передачу любого сигналу (дискретного чи неперервного) як передачу чисел. Ця теорема лежить в основі всіх видів імпульсної модуляції. Згідно до цієї теореми необхідна частота слідування імпульсів F_i, яку називають тактовою частотою, повинна визначатися із умови $F_i \geq 2F_m$, де F_m - верхня гранична частота спектру повідомлення, яке передається.

Використовуючи теорему Котельникова можна здійснювати часове ущільнення каналів, тобто передавати декілька каналів одночасно. На рис.1.5, б зображено два сигнали: $S_1(t)$ і $S_2(t)$, які передаються одночасно.

Теорема Котельникова може бути узагальнена і на випадок функцій, спектр яких не починається з нульової частоти. У формулюванні автора ця теорема проголошує: будь-яку функцію $S(t)$, що складається із частот від f_1 до f_2 можна передавати з любою точністю за допомогою чисел, які передаються один за одним через інтервали $\Delta t = 1/F$, де $F = f_2 - f_1$. При цьому в кожній точці відраховуються дві величини: амплітуда і фаза.

Коли тривалість сигналу рівна T, то кількість відліків на осі часу рівна $T/\Delta t = TF$, а загальна кількість відліків (амплітуд і фаз) рівна $N = 2TF$.

Функцію $S(t)$, обмежену частотами f_1, f_2, можна представити наступним рядом:

$$S(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S\left(\frac{k}{F}\right) \frac{\sin \pi F\left(t - \frac{k}{F}\right)}{\pi F\left(t - \frac{k}{F}\right)} \cos\left[\omega_0\left(t - \frac{k}{F}\right) + \varphi\left(\frac{k}{F}\right)\right],$$

Де $S(\frac{k}{F})$ і $\varphi(\frac{k}{F})$ - відлікові значення відповідно амплітуди і фази: $\omega_0 = 2\pi \frac{f_1 + f_2}{2}$ - середнє значення кругової частоти спектру сигналу.

Функція відліків в цьому випадку представляє собою модульоване коливання із несучою, рівною ω_0 і огинаючою, яка визначається функцією виду $\frac{\sin x}{x}$ (рис.1.7).

До цих пір розглядалися функції з обмеженим спектром, і питання про їх тривалість не ставилося. Однак відомо, що реальні повідомлення мають кінцеву тривалість. Із теорії перетворення Фур'є відомо, що часове представлення функції з обмеженим спектром розтягується на безкінечно великий інтервал часу. В той же час кінцева тривалість повідомлення визначає безкінечно протяжний спектр. Це свідчить про неможливість існування функції кінцевої тривалості із обмеженим спектром. Таким чином, принципіально теорема Котельникова несправедлива для реальних повідомлень. Однак, враховуючи відмічені раніше особливості реальних повідомлень (зосередженість майже всієї енергії в кінцевих інтервалах часу і смуги частот (рис.1.3.)), можна з достатнім ступенем точності використати її для представлення реальних повідомлень. В цьому випадку при тривалості повідомлення T_C число відліків m буде кінцевим:

$$m = \frac{T_C}{\Delta t} = 2F_B T_C, \qquad (1.6)$$

а (1.3) прийме вигляд:

$$S(t) \approx \sum_{k=-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}} S(k\Delta t) \frac{\sin \omega_B (t - k\Delta t)}{\omega_B (t - k\Delta t)} \qquad (1.7)$$

При кінцевому числі відліків сума (1.7) буде співпадати з миттєвими значеннями $S(t)$ не на всьому інтервалі існування повідомлення T_C, а тільки у відлікових точках. В проміжках між цими значеннями $S(t)$ відрізняється від суми кінцевого числа членів ряду, в результаті чого виникає похибка. Ця похибка мінімальна в середині інтервалу T_C і буде зростати до його країв (рис.1.8).

Визначити середньоквадратичну похибку відновлення повідомлення кінцевої тривалості рядом Котельникова із кінцевим числом членів важко. Однак в роботі [1] визначені границі похибки, що виникає при відновленні реального повідомлення із необмеженим спектром рядом Котельникова (1.3). Позначаючи відновлене повідомлення $S'(t)$, запишемо вираз для середньоквадратичної похибки δ [1]:

$$\sqrt{\frac{\Delta E}{E}} \le \delta = \frac{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} [S'(t) - S(t)]^2 dt}}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} S^2(t) dt}} \le \sqrt{\frac{\Delta E}{E}(3+Q)}, \qquad (1.8)$$

де E - повна енергія повідомлення, рівна $\int\limits_{-\infty}^{\infty} S^2(t)dt$;

ΔE - енергія повідомлення, заключна в смузі частот вище, ніж $F_B = \dfrac{1}{2\Delta t}$;

Q - коефіцієнт, що враховує швидкість зменшення модуля спектральної щільності на частотах, більших, ніж F_B.

Згідно до [1]:

$$Q = 4\sum_{r=1}^{\infty}\left[\frac{\int\limits_{(2r+1)\omega_B}^{\infty}[S(\omega)]^2 d\omega}{\int\limits_{\omega_B}^{\infty}[S(\omega)]^2 d\omega}\right]^{1/2}, \qquad (1.9)$$

де $r = 1, 2, \ldots$ і т. д.

Якщо спадання модуля спектральної щільності відбувається достатньо швидко, користуються більш простою оцінкою:

$$\sqrt{\frac{\Delta E}{E}} \le \delta \le \sqrt{\frac{3\Delta E}{E}}, \qquad (1.10)$$

за допомогою якої можна визначити F_B таким чином, щоб похибка відновлення неперервного повідомлення не перевищувала заданої величини.

В практичних розрахунках для визначення відносної похибки відтворення повідомлень може бути використане наступний вираз:

$$\delta^2 \approx \frac{\int\limits_{\omega_B}^{\infty}[S(\omega)]^2 d\omega}{\int\limits_{0}^{\infty}[S(\omega)]^2 d\omega}, \qquad (1.11)$$

який дозволяє за заданою величиною δ при відомих спектральних характеристиках повідомлення знайти верхню граничну частоту спектра ω_0 і інтервал дискретизації:

$$\Delta t = \frac{\pi}{\omega_B}. \qquad (1.12)$$

Принцип дискретизації Жєлєзнова. Н.А. Жєлєзновим вирішена задача визначення максимального інтервалу між відліками випадкового повідомлення. У літературі, що використовується, моделі повідомлення характеризуються: кінцевою тривалістю T_c;

суцільним спектром, що відрізняється від нуля по всій частотній осі, тобто $S(\omega) \neq 0$ при $-\infty \leq \omega \leq \infty$.

Вводиться допущення обмеженості інтервалу кореляції (тобто вважається, що функція кореляції рівна нулю поза інтегралом τ_0) і малому розміру інтервалу кореляції в порівнянні з тривалістю повідомлення ($T_c >> \tau_0$). Розглядаються повідомлення, що є стаціонарними й нестаціонарними функціями часу. Введені допущення не вступають у протиріччя з природою реальних повідомлень, так як внаслідок кінцевої тривалості їх значення в будь-який момент залежить тільки від деякого відрізку минулого з обмеженою тривалістю. Тому інтервал кореляції реальних повідомлень являється обмеженою величиною. Це обмеження, що записується у вигляді

$$B_S(\tau) = \begin{cases} B_S(\tau) \ \ при \ \ \tau \leq \tau_0; \\ 0 \ \ при \ \ \tau > \tau_0, \end{cases} \qquad (1.13)$$

представлено на рис.1.9, а.

Н.А. Жєлєзновим доведено, що такі повідомлення можуть бути передвіщені системою лінійного прогнозування із середньоквадратичною похибкою, що як завгодно мало відрізняється від нуля, тільки на проміжку часу, рівному інтервалу кореляції τ_0. Таким чином, згідно [9] дискретизацію слід проводити з інтервалом, який не перевищує τ_0, оскільки лише в цьому випадку можливе безпомилкове відновлення вихідного повідомлення. Число некорельованих відліків N при цьому визначиться:

$$N = \frac{T_c}{\tau_0} \qquad (1.14)$$

Визначення інтервалу кореляції τ_0 проводиться з використанням поняття ефективної смуги частот повідомлення:

$$\Delta\omega_{ефф} = 2\pi\Delta f_{ефф},$$

$$\tau_0 = \frac{1}{2\Delta f_{ефф}}, \qquad (1.15)$$

де $\Delta\omega_{ефф}$ визначається як основа прямокутника з висотою, яка рівна максимальному значенню спектральної щільності $S_X(\omega)$ і площею, рівною площі під кривою спектральної щільності повідомлення (рис.1.9, б):

$$\Delta\omega_{ефф} = \frac{1}{S_S(\omega)_{\max}} \int_0^{\infty} S_S(\omega) d\omega. \qquad (1.16)$$

Для нестаціонарних функцій використовується поняття поточного інтервалу кореляції, який являється функцією часу $\tau_0 = \tau_0(t)$. У цьому випадку відлікові значення неперервного повідомлення будуть розташовуватись на осі часу нерівномірно. Метод дискретизації Н.А Жєлєзнова менш розроблений, ніж метод В.А. Котельникова, і тому не отримав ще широкого поширення.

Модульовані сигнали.

4.1 Загальні положення о модуляції.

Модуляція – це процес зміни одного чи декількох параметрів переносника у відповідності зі зміною параметру, який діє на нього. Сигнал, який діє на керуємий параметр переносника, називається модулюючим.

Параметри переносника, який змінюється в часі під впливом модулюючого сигналу, називається інформаційним, так як в їх змінні вміщується інформація, яка передається. Фізичний процес зміни параметрів переносника і являється модуляцією. Таким чином, будь-який модулятор (рис.4.1) має два входу: один для переносника, другий – для моделюючого сигналу. В якості переносника в теперішній час широко використовуються гармонічні коливання, періодична послідовність імпульсів і вузькосмуговий випадковий процес. Параметри, які залишаються незмінними, являються постійними ознаками сигналу. Вони можуть бути використанні на прийомі для розрізнювання сингала від завад. В багатьох випадках модулювання сигнал можна представити як добуток двох функцій:

$$\dot{S}(t) = \dot{f}(t)\dot{M}[u(t)] \tag{4.1}$$

де $\dot{f}(t)$ - функція, яка представляє несучу коливання (переносника);

$\dot{M}(t)$ - модуляційна функція, яка виражає дію передаваємого повідомлення u(t) на несучу f(t).

Коли для представлення несучої вибирається аналітичний сигнал (2.98), тоді для кожної модуляційної функції M(t) існує комплексний модульований сигнал s(t). При аналітичному представленні сигналу його дійсна і уявна частини відповідають реально існуючому модульованому сигналу, а його модуль визначає огинаючу. У випадку, коли несучою являється гармонійне коливання $A_0 e^{I\omega_0 t}$, модуляційна функція виражає діяння відеосигналу *u(t)* на амплітуду (частоту або фазу) несучої.

Спектр модульованого коливання (4.1) згідно з теоремою о спектрі добутку визначається згорткою.

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{\infty} S_f(v) S_M(\omega - v)\ dv \qquad (4.2)$$

Звідси випливає, що процес модуляції призводить до складного перетворення спектру сигналу. Якщо несуча представляє собою вузькосмугове коливання, тоді модуляція призводить до розширення спектру і переносу його в область біля несучою частоти (рис.4.1,б). Якщо несуча – чиста синусоїда, то має місце просте зміщення спектра (рис. 4.1,в). Якщо несуча записуєьтся в формі аналітичного сигнала, спектр якого існує тільки для позитивних частот, тоді частотне перетворення відноситься тільки до позитивних частот, як вказано на рис. 4.1,б,в.

4.2 Основні види аналогової амплітудної модуляції

До одних з видів аналогової модуляції відноситься амплітудна модуляція (АМ). Різновидами АМ являються балансная (БМ) і односмугова (ОМ) модуляції.

Безпосередня передача. Найбільш простим сигналом для передачі безперервного повідомлення *u(t)* являється сигнал пропорційний *u(t):*

$$S(t)=Au(t) \qquad (4.3)$$

де А – якась постійна. Такий сигнал відповідає формі (3.1), якщо в неї вложити f(t)=A и M[u(t)]=u(t). Прикладом такої безпосередньої передачі повідомлень є звичайний телефонний зв'язок по проводам.

Амплітудна модуляція. Для цього виду модуляції:

$$F(t)= A_0 e^{I\omega_0 t},\ M[u(t)]=1+mu(t), \qquad (4.4)$$

де *m*- коефіцієнт модуляції.

Модульований сигнал запишеться:

$$\dot{s}(t) = A_0[1+mu(t)]e^{I\omega_0 t} = A_0[1+mu(t)](\cos\omega_0 t + i\sin\omega_0 t) \qquad (4.5)$$

Цей вираз дає представлення реального АМ сигналу

$$s(t)=Re\,\dot{s}(t)=A_0[1+mu(t)]\cos\ \omega_0 t \qquad (4.6)$$

Спектр сигнала в загальному випадку визначається як перетворення Фур'є від *s(t):*

$$S(i\,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-i\omega t}dt = A_0\int_{-\infty}^{\infty}\cos\omega_0 t e^{-i\omega t}dt + mA_0\int_{-\infty}^{\infty}u(t)\cos\omega_0 t e^{-i\omega t}dt$$

Враховуючи, що $cos\,\omega t = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$ $\quad u \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}dt = 2\pi\delta(\omega),$

Отримаємо

$$S(\omega) = \pi A_0\delta(\omega - \omega_0) + \frac{mA_0}{2}S_u(w_0 + w\ ) + \frac{mA_0}{2}S_u(\omega_0 - \omega), \qquad (4.7)$$

де $S_u(\omega)$ - спектр повідомлення, яке передається. Звідси бачимо, що при АМ відбувається перенос спектра повідомлення на частоту ω_0 (рис. 4.1в). Ширина спектра сигналу F при АМ в два рази ширше спектру повідомлень F_m :

$F=2F_m$

При модуляції одним тоном, коли u(t)=cos Ωt,

$$s(t)=A_0(1+m\cos\Omega t)\cos\omega_0 t = A_0\cos\omega_0 t + \frac{mA_0}{2}\cos(\omega_0+\Omega)+\frac{mA_0}{2}\cos(\omega_0-\Omega)$$

При амплітудній модуляції гармонійного переносника приросту амплітуди переносника пропорційний миттєвим значенням моделюючого сигналу $U_м(t)$, тобто приросту $\Delta A(t) = QU_м(t)$ і амплітуда модульованого сигналу

$$A(t) = A_0 + \Delta A(t) = A_0 + aU_m(t) \qquad (4.9)$$

де а – коефіцієнт пропорційності; частота і фаза гармонійного переносника залишаються сталими.

Часову діаграму АМ сигналу наведено на рис.4.2, з якого видно, що згідно з миттєвими значеннями $u_м$ (t) амплітуда A(t) то підвищується до значення A_{max}, одержуючи при цьому приріст $\Delta A_+ = A_{\max} - A_0 = au_{м\max}$, то зменшується до A_{min}, одержуючи приріст $\Delta A_- = A_0 - au_{м\min}$. Звертає на себе увагу те, що амплітуда повторює форму моделюючого сигналу *$u_м$ (t)*. В АМ сигналі амплітуда *A(t) є обвідною* високочастотного заповнення *cos* $(\omega_0 + \psi_0)$ (на рис. 4.2, б вона зображена штриховою лінією).

Коефіцієнт модуляції. Для математичного опису АМ сигналу у формулу (4.9) замість коефіцієнт *а*, що залежить від конкретної схеми модулятора, вводять *коефіцієнт модуляції* $m_{AM}=\Delta A_{сер} / A_0$, *який надає відносне значення приросту амплітуди.* Тут $\Delta A_{сер} = (\Delta A_+ + \Delta A_-)/2$ - середнє арифметичне значення приросту амплітуди АМ сигналу. Оскільки середнє значення амплітуди АМ сигналу за час модуляції $A_0=(A_{max}+A_{min})/2$, то коефіцієнт модуляції

$$m_{AM} = \Delta A_{сее} / A_0 = (A_{\max} + A_{\min})/(A_{\max} + A_{\min}) \qquad (4.10)$$

Таким чином, *коефіцієнт модуляції – це відношення різниці між максимальним і мінімальним значеннями амплітуд АМ сигналу до суми цих значень.* Досить часто коефіцієнт модуляції визначається у відсотках *$M=m_{AM}$ 100%.* Але при всіх розрахунках АМ сигналів користуються коефіцієнтом модуляції m_{AM} не у відсотках, а у відносних одиницях.

Для симетричного моделюючого сигналу $u_m(t)$ АМ сигнал також симетричний: $\Delta A_+ = \Delta A_- = \Delta A$ і

$m_{AM} = \Delta A / A_0$ (4.11)

тобто коефіцієнт модуляції дорівнює відношенню максимального приросту амплітуди до амплітуди переносника. Фізично характеризує глибину амплітудної модуляції і може змінюватись у межах $0 \le m_{AM} \le 1$.

Приклад 4.1. Визначити коефіцієнт модуляції АМ сигналу, числову діаграму якого зображено на рис.4.2. Амплітуду сигналу відкладено на рис. 4.2 в лінійному масштабі.

Для визначення коефіцієнта модуляції скористуємося формулою (3.5). При розрахунках знати абсолютне значення амплітуд не обов'язково. Обчислення можна зробити в умовних одиницях (ум. од.). За 1 ум. од. візьмемо 1 мм на вертикальній осі амплітуд. Тоді A_{min} =4 ум. од., A_{max} =12 ум. од. і m_{AM} =(A_{max} - A_{min})/(A_{max} + A_{min})=(12-4)/(12+4)=0,5·100 =50%

Амплітудна модуляція гармонічним коливанням. У найпростішому випадку модулюючий сигнал $u_м(t)$ є гармонічним коливанням із частотою $\Omega << \omega_0$ і початковою фазою Ψ. При цьому

$$s_{AM}(u_{m,}t) = A_0[1 + m_{AM}\cos(\Omega t + \psi)\cos(\omega_0 t + \psi_0) \quad (4.12)$$

є аналітичним виразом (математичною моделлю) однотонального АМ сигналу, тобто модульованого одним гармонічним коливанням тональної частоти. На рис. 4.3, а, в зображено часові діаграми однотонального АМ сигналу при різних значеннях m_{AM} .На ньому дуже добре видно симетричність модуляції та характерні спотворення при *перемодуляції* (рис.4.3, в), коли форма обвідної вже не повторює форму модулюючого гармонічного коливання.

Однотональний АМ сигнал можна подати також у вигляді суми гармонічних складових. Якщо використати тригонометричну формулу добутку косинусів $\cos\alpha\cos\beta = 0{,}5[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$, із формули (4.12) дістаємо

$$s_{AM}(u_м, t) = A_0\cos(\omega_0 t + \psi_0) + 0{,}5A_0 m_{AM}\cos[(\omega_0 + \Omega)t + \psi_0 + \Psi)] + \\ + 0{,}5A_0 m_{AM}\cos[(\omega_0 - \Omega)t + \psi_0 - \Psi)]$$

Із формули (3.9) випливає, що однотональний АМ сигнал має три гармонічні спектральні складові з частотами: f_0 – переносника; f_0 +F- верхньою боковою; f_0 -F-нижньою боковою.

Спектральна діаграма –однотонального АМ сигналу, яку побудовано згідно з формулою (3.9), є симетричною відносно частоти переносника f_0 (рис. 4.3,г). Амплітуди бокових коливань однакові і навіть для m_{AM} *=1* не перевищують половини амплітуди переносника A_0.

Амплітудна модуляція при складному модулюючому сигналі. Гармонічні модулюючи сигнали і відповідно однотональний АМ сигнал практично зустрічаються рідко. У більшості випадків модулюючи первинні сигнали (див. 2.8) є складними функціями часу. Аналітичний вираз АМ сигналу і для цього випадку можна подати у вигляді формули

$$s_{AM}(u_м, t) = A_0[1 + m_{AM} u_м(t)]\cos(\omega_0 + \psi_0) \qquad (4.14)$$

Спектр АМ сигналу при складному модулюючому сигналі якісно визначається з таких міркувань. Будь-який складний сигнал $u_м(t)$ можна подати у вигляді скінченної (чи нескінченної) суми гармонічних складових, якщо скористуватись для цього рядом чи інтегральним перетворенням Фур'є. Кожна гармонічна складова сигналу $u_м(t)$ із частотою Ω_i викликає в спектрі АМ сигналу дві бокові складові з частотами $f_0 \pm F_i$, а множина гармонічних складових модулюючого сигналу $\sum F_i$ - множину бокових складових із частотами $\sum(f_0 \pm F_i)$. Для наочності такі перетворення спектра для АМ наведено на рис. 4.4.

З рис.4.4 видно, що в спектрі складного АМ сигналу, крім складової з частиною переносника f_0 , містяться групи *верхніх та нижніх бокових коливань*, що утворюють відповідно верхню та нижню бокові смуги частот АМ сигналу. При цьому верхня бокова смуга частот є масштабною копією як дискретного, так і неперервного спектру модулюючого сигналу, як зсунуто за частотою на величину f_0 . Нижня бокова смуга частот також повторює спектральну діаграму (спектральну густину) сигналу $u_м(t)$, але частоти в неї розташовані дзеркально (у зворотному порядку) відносно частоти переносника f_0.

Із зазначеного випливає важливий висновок: *ширина спектра АМ сигналу F_{AM} дорівнює подвоєному значенню максимальної частоти F_{max} спектра модулюючого сигналу, тобто*

$$F_{AM} = 2F_{max} \qquad (4.15)$$

З цього виразу випливає, що амплітуда модульованого сигналу змінюється від $A_{min}=A(1-m)$ до $A_{max}=A_0(1+m)$, а потужність сигналу відповідно від $P_{min}=P_н(1-m)^2$ до $P_{max}=P_н(1+m)^2$, де $P_н = \frac{A^2{}_0}{2}$ - потужність несучого коливання. Середня потужність АМ сигнала дорівнює:

$$P_{ср.} = \frac{A^2{}_0}{2T}\int_0^T (1 + m\cos\Omega t)^2\,dt = P_н\left(1 + \frac{m^2}{2}\right)$$

(4.16)

При $m=1 P_{max}=4\,P_н$ і $P_{ср}=1,5P_н$; відношення середньої потужності до максимальної дорівнює 0,375. Ці відношення вказують на суттєвий недолік амплітудної модуляції – погане використання потужності передатчика.

Балансна модуляція (БМ). Крім звичайної АМ застосовується передача АМ без несучої – балансна модуляція. Для цього вида модуляція:

$$f(t) = A_0 e^{i\omega_0 t}, \qquad M[u(t)] = u(t) \tag{4.17}$$

тоді

$$\dot{s}(t) = A_0 e^{i\omega_0 t} u(t) = A_0 u(t)\cos\omega_0 t + i\,A_0 u(t)\sin\omega_0 t \tag{4.18}$$

$$s(t) = \operatorname{Re}\dot{s}(t) = A_0 u(t)\cos\omega_0 t$$

Спектр сигналу при БМ

$$S(\omega) = \frac{1}{2} A_0 [S_u(\omega_0 + \omega) + S_u(\omega_0 - \omega)]. \tag{4.19}$$

Тут знаходяться тільки дві бокові смуги - несуча відсутня.

При односмуговій модуляції (ОМ) передається тільки одна бокова смуга. Для цього виду модуляції при передачі верхньої бокової смуги:

$$f(t) = A_0 e^{i\omega_0 t}, \qquad M[u(t)] = u(t) + i\hat{u}(t), \tag{4.20}$$

$$s(t) = A_0[u(t)\cos\omega_0 t - \hat{u}(t)\sin\omega_0 t] + iA_0[u(t)\sin\omega_0 t + \hat{u}(t)\cos\omega_0 t]. \tag{4.21}$$

$$s(t) = \operatorname{Re}\dot{s}(t) = A_0[u(t)\cos\omega_0 t - \hat{u}(t)\sin\omega_0 t].$$

Спектр сигналу ОМ

$$S(\omega) = \frac{A_0 m}{2} S_u(\omega_0 + \omega) \tag{4.22}$$

Дійсно, якщо розкласти функції *u(t)* і $\hat{u}(t)$ в ряд Фур'е:

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cos(\Omega_k t + \varphi_k); \qquad \hat{u}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \sin(\Omega_k t + \varphi_k)$$

і врахувати, що *cos x* і *sin x* являються парою перетворення Гільберта, то отримаємо

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cos[(\omega_0 + \Omega_k)t + \varphi_k] + i\sum_{k=0}^{\infty} C_k \sin[(\omega_0 + \Omega_k)t + \varphi_k]$$

Таке представлення являється аналітичним для усіх $\omega_0 > 0$. Заміна модуляційної функції M[u(t)] на спряжену їй $M^*[u(t)] = u(t) - i\hat{u}(t)$ дає форму сигналу *s(t)*, яка відповідає нижній боковій смузі.

Спектри БМ і ОМ сигналів можна дістати зі спектра АМ сигналу, якщо з нього вилучити складову на частоті переносника для БМ сигналу чи складову на частоті переносника та одну з бокових смуг (верхню чи нижню) для ОМ. Такі перетворення спектра АМ сигналу надані на рис. 3.6.

Важливою перевагою БМ і ОМ сигналів є підвищення швидкості ефективності використання потужності передавача, що підвищує відповідно якість приймання таких сигналів. Крім того, при ОМ у два рази зменшується ширина спектра модульованого сигналу, що дозволяє вдвічі збільшити кількість сигналів у заданій смузі частот. Тому ОМ широко застосовується в багатоканальному зв'язку з частотним розділенням

4. Питання для самоперевірки, типові задачі, тести

Завдання 1

Обчислити енергію та норму $\|U\|$ експотенційного сигналу

U(t)=A $e^{-\alpha t}$*1(t)

Розв'язування:

Енергія експоненціального сигналу:

$$E=\int_0^\infty U^2(t)dt=\int_0^\infty A^2e^{-2\alpha t}dt=A^2\left(-\frac{1}{2\alpha}e^{-2\alpha t}\right)\Big|_0^\infty=-A^2\frac{1}{2\alpha}(0-1)=\frac{A^2}{2\alpha}$$

Норма експоненціального сигналу:

$$\|U\|=\sqrt{E}=\sqrt{\frac{A^2}{2\alpha}}=|A|\sqrt{\frac{1}{2\alpha}}$$

Завдання 2

Зобразити часові функції АМ, ЧМ, ФМ, ВФМ сигналів, що відповідають кодової комбінації в двійковому вигляді, яка отримана таким чином:

K=N*F*I,

де N=№ варіанту вашого завдання;

F= кількість літер в вашому прізвищі;

I= кількість літер в вашому повному імені.

Розв'язання:

Визначимо кодову комбінацію К.

К= N*F*I = 2*8*5 = 80

$$\frac{80}{2}=40+\frac{0}{2};\frac{40}{2}=20+\frac{0}{2};\frac{20}{2}=10+\frac{0}{2};\frac{10}{2}=5+\frac{0}{2};\frac{5}{2}=2+\frac{1}{2};\frac{2}{2}=1+\frac{0}{2};\frac{1}{2}=0+\frac{1}{2}$$

1010000

$80_{(10)}$ = 1010000

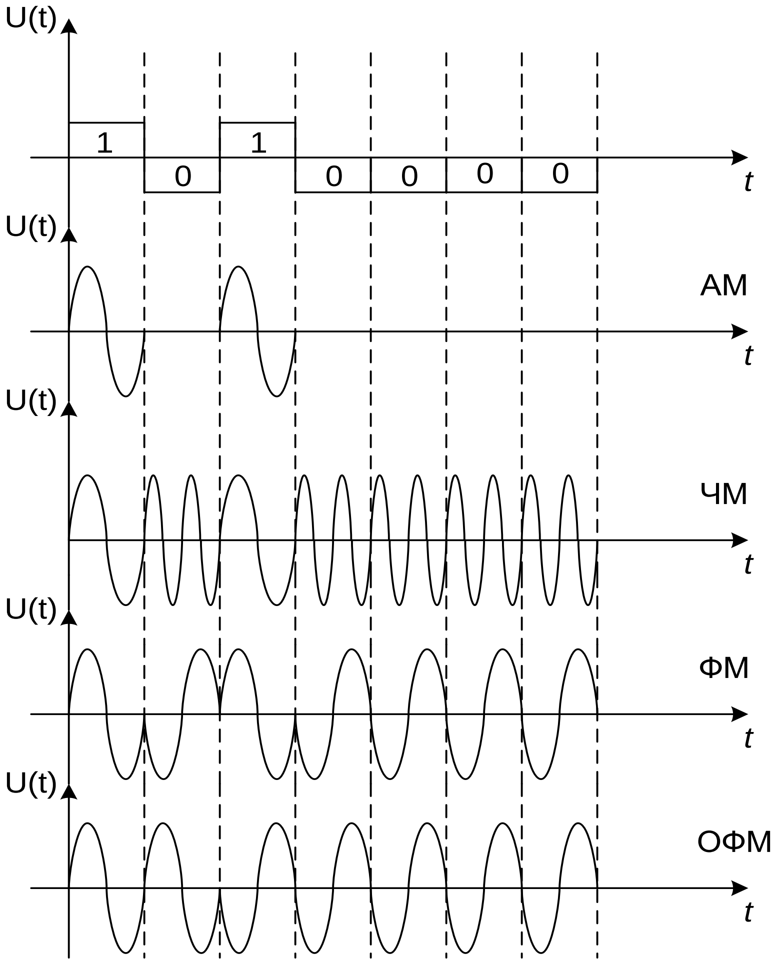


Рис.1. Графіки амплітудної, частотної, фазової та відносно фазової модуляції заданого сигналу

Завдання 3

Побудувати амплітудний спектр сигналу періодичної послідовності прямокутних імпульсів за даними таблиці.

Дано:

№ варіанта	2
U_0 (В)	2
$\tau_и$(мс)	0,2
Т(мс)	1

Розв'язування:

Розрахуємо частоту заданого сигналу:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{10^{-3}} = 1\, кГц$$

Розрахуємо скважність:

$$q = \frac{T}{\tau_и} = \frac{10^{-3}}{0{,}2 * 10^{-3}} = 5$$

Розрахуємо амплітуди сигналів за формулою:

$$A_л = \frac{2*\tau_и}{T} * U_0 \frac{|\sin k\, f\, \pi\, \tau_и|}{k\, f\, \pi\, \tau_и}$$

Так як скважність $q = 5$, то в нас будуть відсутні 5, 10, 15 і т.д. гармоніки.

$$A_0 = \frac{U_0}{q} = \frac{2}{5} = 0.4$$

$$A_1 = \frac{2*0{,}2*10^{-3}}{10^{-3}} * 2 * \frac{|\sin 1*1*10^3*3{,}14*0{,}2*10^{-3}|}{1*10^3*3{,}14*0{,}2*10^{-3}} = \frac{0{,}8*|\sin 0.628|}{0{,}628} = \frac{0{,}8*0{,}588}{0{,}628} = 0{,}749$$

$$A_2 = \frac{2*0{,}2*10^{-3}}{10^{-3}} * 2 * \frac{|\sin 2*1*10^3*3{,}14*0{,}2*10^{-3}|}{2*1*10^3*3{,}14*0{,}2*10^{-3}} = \frac{0{,}8*|\sin 1.256|}{1{,}256} = \frac{0{,}8*{,}951}{1{,}256} = 0{,}605$$

$$A_3 = \frac{2*0{,}2*10^{-3}}{10^{-3}} * 2 * \frac{|\sin 3*1*10^3*3{,}14*0{,}2*10^{-3}|}{3*1*10^3*3{,}14*0{,}2*10^{-3}} = \frac{0{,}8*|\sin 1.884|}{1{,}884} = \frac{0{,}8*0{,}951}{1{,}884} = 0{,}404$$

$$A_4 = \frac{2*0{,}2*10^{-3}}{10^{-3}} * 2 * \frac{|\sin 4*1*10^3*3{,}14*0{,}2*10^{-3}|}{4*1*10^3*3{,}14*0{,}2*10^{-3}} = \frac{0{,}8*|\sin 2.512|}{2{,}512} = \frac{0{,}8*0{,}588}{2{,}512} = 0{,}187$$

$$A_6 = \frac{2*0{,}2*10^{-3}}{10^{-3}} * 2 * \frac{|\sin 6*1*10^3*3{,}14*0{,}2*10^{-3}|}{6*1*10^3*3{,}14*0{,}2*10^{-3}} = \frac{0{,}8*|\sin 3.768|}{3{,}768} = \frac{0{,}8*|-0{,}586|}{3{,}768} = 0{,}124$$

$$A_7 = \frac{2*0,2*10^{-3}}{10^{-3}}*2*\frac{\left|\sin 7*1*10^3*3,14*0,2*10^{-3}\right|}{7*1*10^3*3,14*0,2*10^{-3}} = \frac{0,8*\left|\sin 4.396\right|}{4,396} = \frac{0,8*\left|-0,95\right|}{4,396} = 0,173$$

$$A_8 = \frac{2*0,2*10^{-3}}{10^{-3}}*2*\frac{\left|\sin 8*1*10^3*3,14*0,2*10^{-3}\right|}{8*1*10^3*3,14*0,2*10^{-3}} = \frac{0,8*\left|\sin 5,024\right|}{5,024} = \frac{0,8*\left|-0,951\right|}{5,024} = 0,151$$

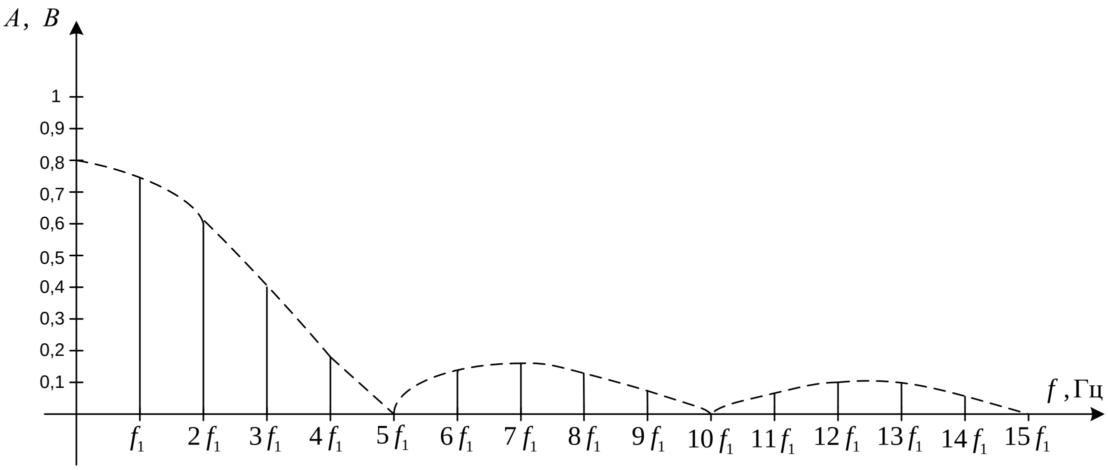
$$A_9 = \frac{2*0,2*10^{-3}}{10^{-3}}*2*\frac{\left|\sin 9*1*10^3*3,14*0,2*10^{-3}\right|}{9*1*10^3*3,14*0,2*10^{-3}} = \frac{0,8*\left|\sin 5,652\right|}{5,652} = \frac{0,8*\left|-0,59\right|}{5,652} = 0,084$$

$$A_{11} = \frac{2*0,2*10^{-3}}{10^{-3}}*2*\frac{\left|\sin 11*1*10^3*3,14*0,2*10^{-3}\right|}{11*1*10^3*3,14*0,2*10^{-3}} = \frac{0,8*\left|\sin 6,908\right|}{6,908} = \frac{0,8*\left|0,584\right|}{6,908} = 0,067$$

$$A_{12} = \frac{2*0,2*10^{-3}}{10^{-3}}*2*\frac{\left|\sin 12*1*10^3*3,14*0,2*10^{-3}\right|}{12*1*10^3*3,14*0,2*10^{-3}} = \frac{0,8*\left|\sin 7,536\right|}{7,536} = \frac{0,8*\left|0,949\right|}{7,536} = 0,101$$

$$A_{13} = \frac{2*0,2*10^{-3}}{10^{-3}}*2*\frac{\left|\sin 13*1*10^3*3,14*0,2*10^{-3}\right|}{13*1*10^3*3,14*0,2*10^{-3}} = \frac{0,8*\left|\sin 8,164\right|}{8,164} = \frac{0,8*\left|0,952\right|}{8,164} = 0,093$$

$$A_{14} = \frac{2*0,2*10^{-3}}{10^{-3}}*2*\frac{\left|\sin 14*1*10^3*3,14*0,2*10^{-3}\right|}{14*1*10^3*3,14*0,2*10^{-3}} = \frac{0,8*\left|\sin 8,792\right|}{8,792} = \frac{0,8*\left|0,59\right|}{8,792} = 0,054$$



Завдання №4

Надано два сигнали: прямокутний імпульс U(t)=U_0 [1(t)-1(t-$\tau_и$)] і експотенційний V(t)= U_0 $e^{-\alpha t}$*1(t) Визначити відстань між сигналами.

Розв'язування:

$$d=\sqrt{(U-V)^2dt}=\sqrt{\int_0^{\tau_и}(\mathrm{U_0}-\mathrm{U_0}\mathrm{e}^{-\alpha t})^2dt+\int_{\tau_и}^{\infty}U_0{}^2e^{-2\alpha t}dt}=$$

$$1)\Rightarrow\int_0^{\tau_и}(\mathrm{U_0}{}^2-2U_0{}^2e^{-\alpha t}+U_0e^{-2\alpha t})dt=\int_0^{\tau_и}\mathrm{U_0}dt-2U_0{}^2\int_0^{\tau_и}e^{-\alpha t}dt+U_0{}^2\int_0^{\tau_и}e^{-2\alpha t}dt=$$

$$=\mathrm{U_0}{}^2t\Big|_0^{\tau_и}-2U_0{}^2\frac{1}{-\alpha}e^{-\alpha t}\Big|_0^{\tau_и}+U_0{}^2\frac{1}{-2\alpha}e^{-2\alpha t}\Big|_0^{\tau_и}=\mathrm{U_0}{}^2\tau_и+2U_0{}^2\frac{1}{\alpha}\left(e^{-\alpha\tau_и}-1\right)+U_0{}^2\frac{1}{-2\alpha}\left(e^{-2\alpha\tau_и}-1\right)=$$

$$=\mathrm{U_0}{}^2\left(\tau_и+2\frac{1}{\alpha}\left(e^{-\alpha\tau_и}-1\right)+\frac{1}{-2\alpha}\left(e^{-2\alpha\tau_и}-1\right)\right)$$

$$2)\Rightarrow\int_{\tau_и}^{\infty}\mathrm{U_0}{}^2e^{-2\alpha t}dt=\mathrm{U_0}{}^2\frac{1}{2\alpha}e^{-2\alpha t}\Big|_{\tau_и}^{\infty}=-\mathrm{U_0}{}^2\frac{1}{2\alpha}e^{-2\alpha\tau_и}$$

$$\Rightarrow\sqrt{\mathrm{U_0}{}^2\left(\tau_и+2\frac{1}{\alpha}\left(e^{-\alpha\tau_и}-1\right)+\frac{1}{-2\alpha}\left(e^{-2\alpha\tau_и}-1\right)\right)}-\sqrt{-\mathrm{U_0}{}^2\frac{1}{2\alpha}e^{-2\alpha\tau_и}}=$$

$$=\mathrm{U_0}{}^2\left(\sqrt{\tau_и+2\frac{1}{\alpha}\left(e^{-\alpha\tau_и}-1\right)+\frac{1}{-2\alpha}\left(e^{-2\alpha\tau_и}-1\right)}+\sqrt{\frac{1}{2\alpha}e^{-2\alpha\tau_и}}\right)$$

Завдання №5

Побудувати амплітудний спектр прямокутного імпульсу U(t).

Дано: U_0, $\tau_и$ і аналітичний вираз імпульсу U(t).

№ варіанта	2
U(t)=	U_0 [1(t)-1(t-$\tau_и$)]
U_0(B)	2
$\tau_и$(мс)	0,2

Для побудування спектральної діаграми вибрати довільно 3 значення частоти у кожній пелюстці амплітудного спектра та обчислити для них значення спектральної щільності амплітуд. Спектр обмежити 3-м нулем обвідної.

Розв'язання:

Обчислимо значення частот на яких спектральна щільність має значення 0:

$$f_{10}=\frac{n}{\tau_и}=\frac{1}{0.2*10^{-3}}=5000\text{Гц}$$

$$\mathrm{f}_{20}=\frac{n}{\tau_и}=\frac{2}{0{,}2*10^{-3}}=10000\text{Гц}$$

$$\mathrm{f}_{30}=\frac{n}{\tau_и}=\frac{3}{0{,}2*10^{-3}}=15000\text{Гц}$$

Вибираємо проміжні значення частот, для яких обчислимо значення спектральної щільності амплітуд.

Для першої арки:

$f_{11} = 1000Гц$

$f_{12} = 2500Гц$

$f_{13} = 4000Гц$

Для другої арки:

$f_{21} = 6000Гц$

$f_{22} = 7500$ Гц

$f_{23} = 9000Гц$

Для третьої арки:

$f_{31} = 11000Гц$

$f_{32} = 12500Гц$

$f_{33} = 14000Гц$

Початкове значення:

$$S(f_0) = A\tau = 2*0,2*10^{-3} = 0,4*10^{-3}$$

$$S(f_{11}) = A\tau\frac{\sin\pi\ f\ \tau}{\pi\ f\ \tau} = 2*0.2*10^{-3}\frac{\left|\sin 3.14*1000*0.2*10^{-3}\right|}{3.14*1000*0.2*10^{-3}} = 0,37*10^{-3}$$

$$S(f_{12}) = A\tau\frac{\sin\pi\ f\ \tau}{\pi\ f\ \tau} = 2*0.2*10^{-3}\frac{\left|\sin 3.14*2500*0.2*10^{-3}\right|}{3.14*2500*0.2*10^{-3}} = 0,25*10^{-3}$$

$$S(f_{13}) = A\tau\frac{\sin\pi\ f\ \tau}{\pi\ f\ \tau} = 2*0.2*10^{-3}\frac{\left|\sin 3.14*4000*0.2*10^{-3}\right|}{3.14*4000*0.2*10^{-3}} = 0,094*10^{-3}$$

$$S(f_{21}) = A\tau\frac{\sin\pi\ f\ \tau}{\pi\ f\ \tau} = 2*0,2*10^{-3}\frac{\left|\sin 3.14*6000*0.2*10^{-3}\right|}{3.14*6000*0.2*10^{-3}} = 0,062*10^{-3}$$

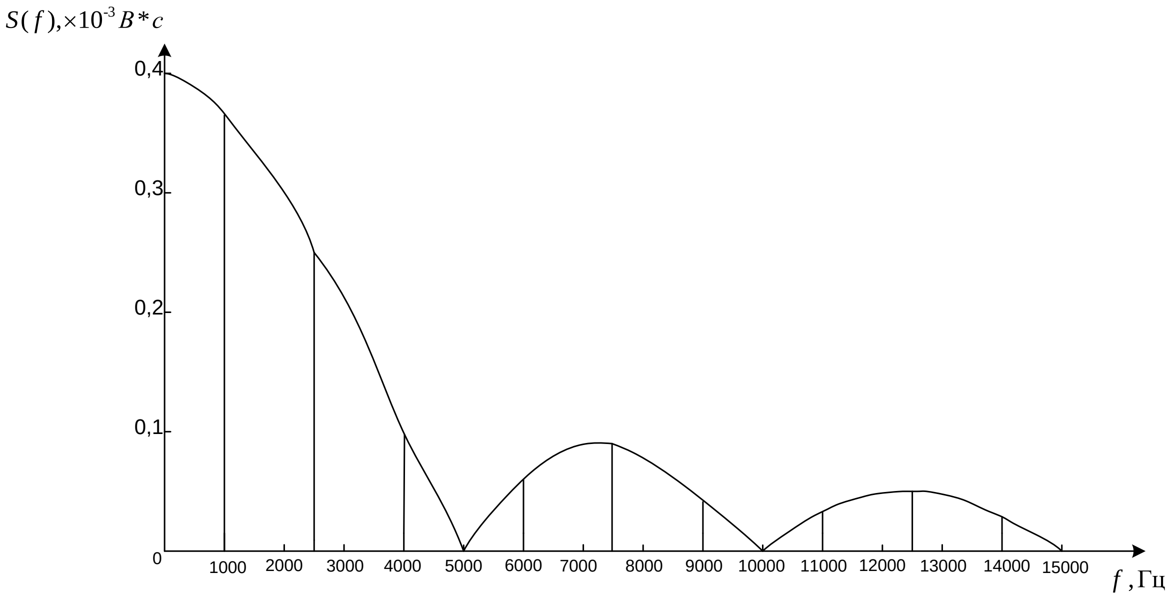
$$S(f_{22}) = A\tau\frac{\sin\pi\ f\ \tau}{\pi\ f\ \tau} = 2*0,2*10^{-3}\frac{\left|\sin 3.14*7500*0.2*10^{-3}\right|}{3.14*7500*0.2*10^{-3}} = 0,084*10^{-3}$$

$$S(f_{23}) = A\tau\frac{\sin\pi\ f\ \tau}{\pi\ f\ \tau} = 2*0,2*10^{-3}\frac{\left|\sin 3.14*9000*0.2*10^{-3}\right|}{3.14*9000*0.2*10^{-3}} = 0,042*10^{-3}$$

$$S(f_{31}) = A\tau\frac{\sin\pi\ f\ \tau}{\pi\ f\ \tau} = 2*0,2*10^{-3}\frac{\left|\sin 3.14*11000*0.2*10^{-3}\right|}{3.14*11000*0.2*10^{-3}} = 0,034*10^{-3}$$

$$S(f_{32}) = A\tau\frac{\sin\pi\ f\ \tau}{\pi\ f\ \tau} = 2*0,2*10^{-3}\frac{\left|\sin 3.14*12500*0.2*10^{-3}\right|}{3.14*12500*0.2*10^{-3}} = 0,051*10^{-3}$$

$$S(f_{33}) = A\tau\frac{\sin\pi\ f\ \tau}{\pi\ f\ \tau} = 2*0,2*10^{-3}\frac{\left|\sin 3.14*14000*0.2*10^{-3}\right|}{3.14*14000*0.2*10^{-3}} = 0,027*10^{-3}$$



Завдання №6

Обчислити енергію та норму $\|S\|$ сигналу s(t), який уявляє собою прямокутний імпульс напруги амплітудою U_0 і тривалістю $\tau_и$.

№ варіанта	2
U_0(В)	2
$\tau_и$(мс)	5,8

Розв'язання:

$$S(t) = U_0(1(t) - 1(t - \tau_0))$$

$$S(t) = 2*(1(t) - 1(t - 5{,}8*10^{-3}))$$

$$E = \int_{t_1}^{t_2} S^2(t)dt = \int_0^{\tau_и} 4*(1(t) - 1(\mathrm{t} - 5.8*10^{-3}))^2 dt = 4*\left(\int_0^{\tau_и}(1^2(t)dt - \int_0^{\tau_и} 1^2(\mathrm{t} - 5.8*10^{-3})dt\right) =$$

$$\left[\int_0^{\tau_и} 2*1(t)*1(t - 5.8*10^{-3}) = 0\right] = 2*\left(\frac{t^3}{3}\int_0^{\tau_и} - \frac{(t - 5.8*10^{-3})^3}{3}\int_0^{\tau_и}\right) = \frac{\tau_и{}^3}{3} -$$

$$-\left(\frac{(\tau_и - 5{,}8*10^{-3})^3}{3} - \frac{(-5{,}8*10^{-3})^3}{3}\right) = \frac{(5{,}8*10^{-3})^3}{3} -$$

$$-\left(\frac{(5{,}8*10^{-3} - 5{,}8*10^{-3})^3}{3} - \frac{(-5{,}8*10^{-3})^3}{3}\right) = 65{,}037*10^{-9} + 65{,}037*10^{-9} = 130{,}074*10^{-9}\ \text{\textit{Дж}}$$

$$\|S(t)\| = \sqrt{E} = \sqrt{13{,}0074*10^{-8}} = 3{,}6*10^{-4}$$

Завдання №7

Визначити потужність несучого коливання за період для АМ сигналу.

№ варіанта	2
U_0(В)	2

Розв’язання:

Середня потужність сигнала буде визначатися:

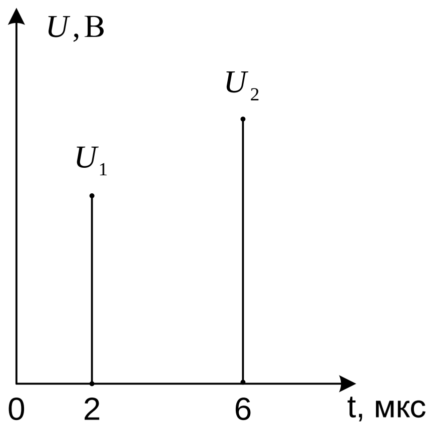
$$P(t) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2(t)dt = \frac{a_0^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} A_k^{\ 2}$$

Так як ми визначаємо потужність за період, то можемо записати:

$$\mathrm{P} = \frac{\mathrm{U_0}^2}{2} = \frac{2^2}{2} = 2\,\text{Вт}$$

Завдання №8

Сигнал з обмеженим спектром надано двома відліками. Знайти верхню частоту в спектрі цього сигналу. Знайти миттєве значення сигналу у момент часу t_0.



№ варіанта	2
t_0(мкс)	4
U_1 (мВ)	12
U_2(мВ)	34

Розв’язування:

$\Delta t = 4$мкс

$\kappa(U_1) = 1$
$\kappa(U_2) = 2$

$$F_в = \frac{1}{2\Delta t} = \frac{1}{2*4*10^{-3}} = 0.125\text{мГц}$$

$$S(t) = \Sigma S(k\Delta t)\frac{\sin 2\pi f(t_0 - k\Delta t)}{2\pi f(t_0 - k\Delta t)} = 12*10^{-3}*\frac{\sin 2*3.14*0.125*10^6(4*10^{-6}-1*4*10^{-6})}{2*3.14*0.125*10^6(4*10^{-6}-1*4*10^{-6})} +$$

$$+34*10^{-3}*\frac{\sin 2*3.14*0.125*10^6(4*10^{-6}-2*4*10^{-6})}{2*3.14*0.125*10^6(4*10^{-6}-2*4*10^{-6})} = 0.017*10^{-3} = 0{,}017\ м\text{В}$$

Завдання №9

Миттєва частота коливання з кутовою модуляцією змінюється за законом:

$$\omega(t)=2\pi f_0(1+0{,}01\cos 2\pi f_1 t),\ \text{Рад/с}$$

Знайти аналітичний вираз цього коливання, якщо його амплітуда дорівнює U.

№ варіанта	2
U(В)	4
f_0(Гц)	10^5
f_1(Гц)	10^3

Розв'язування:

1 спосіб:

$U(t) = U_0\cos(\omega_0 t + \varphi_0 + m\sin(\Omega + \varphi_0))$

якщо $\varphi_0 = 0$

$U(t) = U_0\cos(\omega_0 t + m\sin\Omega t)$

$\omega(t) = \omega_0 + m\Omega\cos\Omega t$

$\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi*10^5$ рад

$\Omega = 2\pi f_1 = 2\pi*10^3$

$$m = \frac{\omega_0}{\Omega} = \frac{2\pi*10^5*0.01}{2\pi*10^3} = 1$$

$U(t) = 4\cos\left(2\pi*10^5 + \sin(2\pi*10^3 t)\right)$

2 спосіб

$$\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d(\omega_0 t + m\sin\Omega t)}{dt} = \omega_0 + m\Omega\cos\Omega t$$

$$m = \frac{2\pi\ f*0.01}{n};\ \Omega = 2\pi\ f$$

$$U(t) = U_0\cos\left(2\pi\ f_0 t + \frac{f_0*0.01}{f_1}*\sin 2\pi\ f_1 t\right) = 4\cos\left(2\pi*10^5 t + \frac{10^5*0.01}{10^3}*\sin 2\pi*10^3 t\right) =$$

$$= 4\cos\left(2\pi*10^5 t + \sin(2\pi*10^3 t)\right)$$

Завдання №10

Визначити миттєве значення частоти коливання:

$U(t)= U_0 \cos (10^6t+2\sin10^5t+ \sin3*10^5t)$ в момент часу t_0

№ варіанта	2
t_0(мкс)	12,7
U_0 (мВ)	12

Розв'язання:

Миттєве значення частоти коливання в заданий момент часу буде дорівнювати:

$$w(t_0)=\frac{dU(t)}{dt}=\frac{d(U_0\cos(10^6t+2\sin10^5t+\sin3*10^5t)t}{dt}=$$

$$=U_0\sin(10^6t+2\sin10^5t+\sin3*10^5t)*(10^6+2*10^5\cos10^5t+3*10^5\cos3*10^5t)=$$

$$=12*10^{-3}*\sin(10^6*12.7*10^{-6}+2\sin10^5*12.7*10^{-6}+\sin3*10^5*12.7*10^{-6})*$$

$$*(10^6+2*10^5\cos10^5*12.7*10^{-6}+3*10^5\cos3*10^5*12.7*10^{-6})=12*10^{-3}\sin(12.7+$$

$$+2\sin1.27+\sin3.81)*(10^6+2*10^5\cos1.27+3*10^5\cos3.81)=12*10^{-3}\sin13.9*$$

$$*(10+0.59-2.35)*10^5=9.61\,кГц$$

Завдання №11

АМ сигнал описується виразом:

$U(t)= U_0 [1+M_1\cos(\Omega_1t+\Phi_1)+ M_2\cos(\Omega_2t+\Phi_2)]\cos(\omega_0t+\varphi_0)$

Побудувати спектральну та векторну діаграми.

№ варіанта	2
U_0(В)	12
M_1	0,2
Ω_1	$2*10^5$
Φ_1	30°
M_2	0,5
Ω_2	$4*10^3$
Φ_2	0°
ω_0	$9*10^6$
φ_0	45°

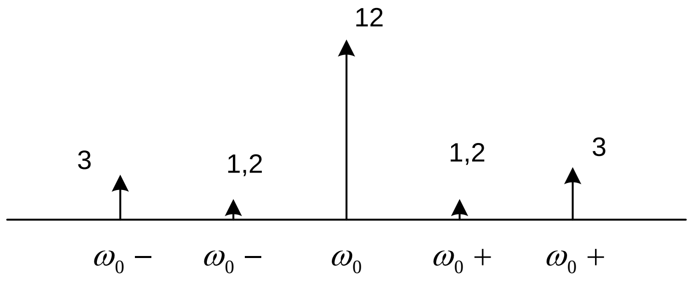
Розв'язування:

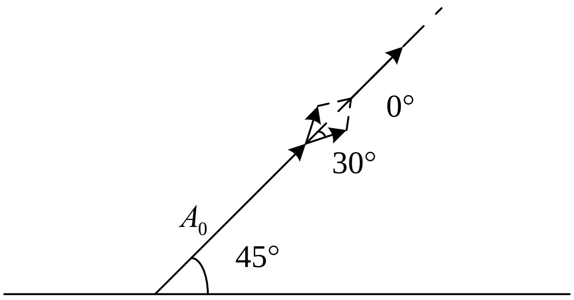
Запишемо рівняння АМ коливання:

$$U(t) = 12\left[1 + 0.2\cos\left(2*10^5 t + 30°\right) + 0.5\cos\left(4*10^3 t + 0°\right)\cos\left(9*10^6 t + 45°\right)\right]$$

$$U(t) = 12\cos(9*10^6 t + 45°) + \frac{12}{5*2}\left(\cos\left(2*10^5 + 9*10^6\right)t + \left(30° + 45°\right)\right) +$$

$$+ \frac{12}{2*2}\left(\cos\left(4*10^3 + 9*10^6\right)t + \left(0° + 45°\right)\right)$$





Навчальні питання до модуля 2

Канали звязку

Ранее канал связи определялся как совокупность технических средств, предназначенных для передачи сообщений. Рассмотрим вопрос шире.

Канал можно представить как последовательное соединение устройств, выполняющих различные функции в общей системе связи.

Классификация каналов возможна с использованием различных признаков. В зависимости от назначения:

-телефонные; звукового вещания;

-телевидение; телеметрические;

-ТГ; смешанные; фототелеграфные.

В зависимости от среды : волноводы СВЧ(волоконно-оптические); каналы проводной связи; радиоканалы.

В зависимости от использованного диапазона частот:

-воздушные до 150 кГц;

-симметричные кабели до тысяч кГц;

-коаксиальные до десятков МГц;

-радиосвязи от $3*10^3$—$3*10^{11}$Гц;

-волноводные –оптический диапазон(нано мм)

Имеется тенденция к переходу на все более высокие частоты т.к. при этом повышается скорость передачи и т.д.

Классификация по характеру сигналов на входе и выходе канала:

-дискретные;

–непрерывные (вых модулятор, вход демодулятор);

-дискретные со стороны входа и непрерывные со стороны выхода или наоборот, иначе называются дискретно-непрерывными или полунепрерывными.

Всякий дискретный канала содержит внутри себя непрерывный канал. Помнить! Что дискретностьили непрерывность канала не связаны с характером передаваемых сообщений. Можно передавать дисрктеные сообщения по непрерывному каналу и непрерывные по дискретному.

Прохождение сигналов через каналы с детерминированными характеристиками (т.е. определенными в каждый момент времени)

Передача сигналов по различным каналам связи всегда сопровождается изменением-преобразованием этих сигналов , в результате чего принятые сигналы отличаются от передающих. Отличия эти обусловлены прежде всего линейными и нелинейными преобразованиями вх.. Сигнала, а также аддитивным шумом в канале.

С точки зрения передачи інформации по каналу сигналы делят на обратимые и необратимые. Обратимые – это те которые при преобразованиях не теряют информацию. Необратимые – те, что теряют и они становятся помехами (аддитивными). Пример простейшего детерминированного обратимого преобразования вх. сигнала X(t), которій не меняет его форму.

$Y(t)=kX(t-\tau)$

В этом случае вх сигнал отличается коэффициентом масштаба, который компенсирует усиление или ослабление сигнала и простой задержкой во времени τ. Задержка сигнала во времени приводит к задержке приема информации. Но не к потери её.

В реальных каналах связи, когда можно пренебречь аддитивным шумом преобразование сигналов имеет сложный характер и обычно приводит к отличию формы вых сигнал от входного.

Прохождение случайных сигналов через каналы с детерминированные линейные цепи с постоянными параметрами.

Рассмотрим подход к построению математической модели канала, для которой соотношения между вх. и вых. сигналом задается интегральным преобразованием Дюамеля. При этом для нахождения вых.сигнала требуется знать помимо хакатеристик цеци (канала) характеристику вх сигнала, действующего на цепь во всех промежутках его существования до текущего момента.

Линейная цепь характеризуется импульсной реакцией g(t) или её преобразованиями Фурье – передаточной функцией k(jω)

$Y(t)={}_{\infty}{}^{\infty}\int g(t)X(t-\tau)d\ \tau$

В физически реализуемой цепи g(t)=0 при t<0. Поэтому нижний предел интеграла можно заменить 0. Произведя математические преобразования делаем вывод. Что функция корреляции(ФК) и спектр процесса на выходе цепи полностью определяется ФК или спектром на входе и АЧХ цепи, т.е. не зависит от распределения вероятностей вх. процесса , ни от фазо-частотных хар-к цепи.

Вывод: достаточно знать ФК входного сигнала для нахождения ФК на выходе системы. Этот вывод верен и для линейной цепи с переменными параметрами.

Прохождение случайных сигналов через нелинейные цепи

Рассмотрим безинерционную нелинейную систему с распределенными параметрами.

Y(t)= φ[X(t)

Вх вых. сигнал

В силу неприменимости суперпозиции к нелинейным системам рассмотрение сложного воздействия нельзя свети к рассмотрению прохождения каждого из компонентов в отдельности. При нелинейных преобразованиях возникает трансформация (изменение) спектра входного воздействия . А именно, если на вход нелинейной системы воздействует смесь регулярного сигнала и аддитивный шум X(t)=u(t)N(t) , в узкой полосе частот Fc, группирующейся около средней частоты f_0 , то в общем случае на выходе будут соответствовать составляющие комбинационных частот трех видов, группирующихся около частот nf_0(n-0,1,2);продукты биения составляющих вх. сигналов между собой (схс); продукты биения сост. вх шума(шхш); продукты биения сигнал –шум (схш). Разделить их на выходе системы обычно невозможно. Математический аппарата для нахождения вых сигнала достаточно грамоздкий и сложный.

Математическая модель каналов связи.

Рассмотрим наиболее простые и широко используемые мат.м модели каналов.

Идеальный канал без помех представляет собой линейную цепь с постоянной передаточной функцией, обычно сосредоточенной в ограниченном спектре частот. Выодной сигнал при заданом входном оказывается детерминированным.Модель годится для кабельных каналов.

Канал с аддитивным гауссовским шумом, в котором сигнал на выходе

Z(t)=-kU(t-τ)+N(t), где U(t) – вх сигнал; k,τ – постоянные; N(t)- гаус. аддит. Шум с нулевым мат ожиданием и заданной корреляционной функцыей. Обычно запаздывание τ не учитывают , что соответствует изменению начала отсчета времени на выходе канала.

Этому описанию удолетворяет радиоканал в пределах прямой видимости, а также радиоканалы с медленными общими замираниями, при которых можно надежно предсказать значение k,τ.

Канал с неопределенной фазой сигнала отличается от предыдущего тем, что в нем запаздывание является случайной величиной.

Модели дискретного канала. В состав канала входит непрерывный канал и модем. Модель содержит задание множества возможных сигналов на его входе и распределение условных вероятностей выходного сигнала при заданном входном.

$B'^{[n]}=B^{[n]}+E^{[n]}$

Случайная последовательность из n символов, где B’ сигнал на выходе; $B^{[n]}$ сигнал на входе канала, $E^{[n]}$ -случайный вектор ошибки.

Модем осуществляет переход от непрерівного канала к дискретному, преобразует помехи и искажения непрерывного канала в поток ошибок.

Перечислим наиболее важные простые модели дискретных каналов.

Симметричный канал без памяти – это дискретный канал , в котором каждый переданный кодовый символ м б принят ошибочно с фиксированной веротностью p, причем вместо переданного симовала „в” с равной вероятностью принят любой другой символ

P(bj/bi)= {p/(m-1) i≠

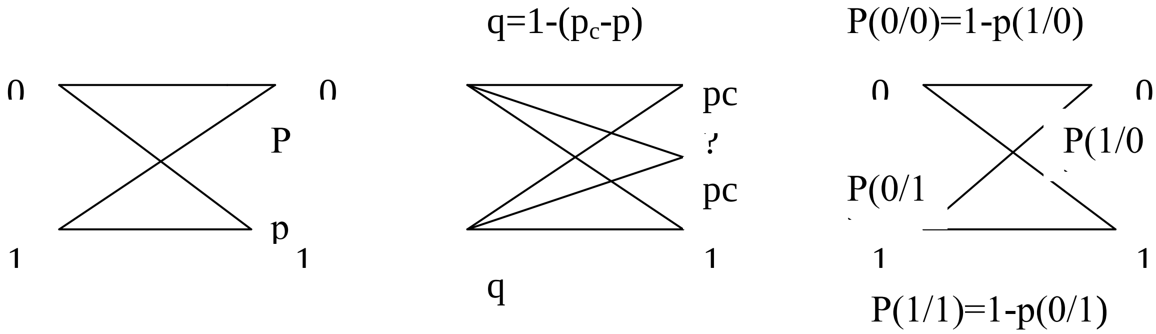
{1-p i=j

Термин без памяти означает,что вероятность ошибочного приема символа не зависит от предистории.

Симметричный канал без памяти состиранием- отличается от предыдущего тем, что алфавит на выходе канала содержит дополнительный (m+1)символ, обозначаемый „?*”*.Этот символ появляется, когда демодулятор не может надежно опознать переданный символ. Вероятность такого отказа от решения или стирания символа p_c в данной модели постоянна и не зависит от передаваемого символа.

Несимметричный канал без памяти – в этой модели вероятность вектора ошибки зависит от того, какая последовательность символов передается.

Марковский канал – простейшая модель дискретного канала с памятью. В ней вероятность ошибки образует простую цепь Марков, т.е. зависит от того правильно или ошибочно принят предыдущий символ, но не зависит от того , какой символ передаётся.



Симметричный канал переход вероятности

Симметричный канал со стиранием

Несимметричный канал

Відомості про канали.

Канал називається дискретним, якщо вхідні і вихідні простори (повідомлення) дискретні і неперервні, якщо ці простори неперервні. Якщо один із просторів дискретний, а другий неперервний, то канал називається відповідно дискретно-неперервним чи неперервно-дискретним. Властивості дискретного каналу визначені, якщо задані:

1. алфавіти вхідних кодових символів $a_i (i = 1,2,\ldots,m)$ та вихідних $a'_j \ (j = 1,2,...,m')$;
2. швидкість передачі символів;
3. ймовірність переходів $p_{ji} = p(a'_j / a_j)$, тобто ймовірності того, що прийнятий символ a'_j, коли був переданий символ a_i. У загальному випадку $m \neq m'$, і символи a_i можуть відрізнятися за своєю природою від символів a'_j. Наприклад, звуки мови, які складають вхідний алфавіт при телефонній передачі, можуть відтворюватися на прийомному кінці не тільки у вигляді звуку, а й у вигляді тексту, записаного на плівку.

Якщо ймовірність переходів $p = p(a'_j / a_i)$ для кожної пари i, j не залежать від часу і від того. Які символи передавалися раніше, то канал називається однорідним каналом без пам’яті. Якщо ці ймовірності залежать від часу, то канал неоднорідний. Математичним описом каналу з пам’яттю є дискретний ланцюг Маркова.

Якщо в однорідному каналі алфавіти кодових символів на вході та виході однакові, тобто $m = m'$, то для будь-якої пари $i \neq j$ ймовірності переходів постійні

$p = p(a'_j / a_i) = p_0 = const$, такий канал називається симетричним (рис. 4.3). В симетричному каналі

$$p_{11} = p_{22},$$

$$p_{12} = p_{21}.$$

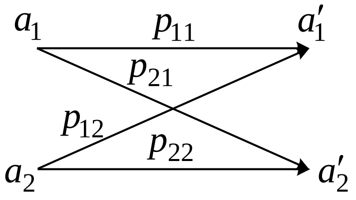
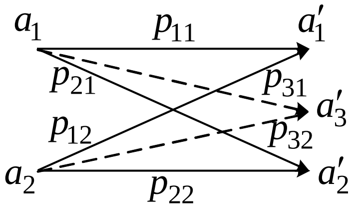


Рис.4.3.

Серед каналів, в яких алфавіти на вході і виході неоднакові, представляє інтерес так званий витираючий канал (рис. 4.4), в якому $m' = m + 1$.



$$p_{31} = p_{32}$$
$$p_{21} = p_{12}$$

Рис.4.4.

В такому каналі вихідний алфавіт містить додатковий символ a'_{m+1}, що позначає «стирання». Поява цього символу на виході означає, що переданий символ спотворений завадами і не може бути впізнаним. Як буде показано надалі, введення такого витираючого символу полегшує можливість правильного декодування прийнятої кодової комбінації.

В каналі без завад кожному вхідному символу a_k однозначно відповідає символ a'_k на виході (ймовірності неправильних переходів рівні нулю).

Загальні поняття про інформацію та ентропію.

Інформація (від лат. Informatio - роз'яснення, виклад) спочатку - відомості, передавані одними людьми іншим людям усним, письмовим або яким-небудь іншим способом (наприклад, за допомогою умовних сигналів, з використанням технічних засобів зв'язку і т.д.) (БСЕ - III изд., Т. 10, з. 353). Із збільшенням потоку інформації (відомостей) виникли проблеми опису передачі інформації між людьми, між людиною і автоматом, між автоматами. З'явилися деякі теорії кількісної оцінки окремих видів інформації (наприклад, в техніці зв'язку, кібернетиці). Проте повного і всеохватывающего визначення інформації на сьогодні не існує.

Класична теорія інформації не розглядає ні питання про зміст передаваних повідомлень, ні ефекту дії цих повідомлень на одержувача. Тому термін "інформація" трактує як приріст відомостей про джерело інформації, що утворюється у одержувача при отриманні інформації. Якась частка інформації була у нас апріорно (або повна її відсутність), решта відомостей про стан джерела нам не відома (є апріорна невизначеність джерела інформації). Отримання в результаті відповіді інформації про джерело збільшує у нас кількість інформації і знімає невизначеність у джерела.

Розглянемо зміну об'єму інформації в конкретних випадках. Хай у нас досвід має лише один результат і не містить ніякої невизначеності, тоді ми наперед знаємо результат цього досвіду. В результаті здійснення досвіду ми не отримаємо ніякої інформації (При передачі повідомлення "Волга впадає в Каспійське море" ми не одержуємо ніякого нового повідомлення, оскільки нам це було відоме наперед).

Хай досвід має два рівноімовірні результати (наприклад, прийом однієї посилки бінарного сигналу). Сигнал, що приймається, несе певну інформацію (вірогідність кожного сигналу P = 1/2).

Хай третій досвід пов'язаний з можливістю отримати один з 10 рівноімовірних результатів. В цьому випадку буде велика попередня невизначеність щодо джерела, а прийняте повідомлення дасть більш уточнену характеристику стану джерела. Вірогідність кожного результату $P(x_i)= 1/10$ - менше ніж в другому досвіді.

Висновок: чим менше апріорна вірогідність події, тим більше інформації несе про джерело повідомлення (тобто тим більше несподіваний результат).

В третьому випадку невизначеність вище. Може показатися, що ступінь невизначеності визначається числом можливих станів системи. Проте, в загальному випадку це не так. Розглянемо РЕС, технічний стан якого може бути в двох станах: справно і несправно. Припустимо, що до отримання відомостей (апріорі) вірогідність справної системи 0,99, а відмова - 0,01. Така система має малий степінь невизначеності: майже напевно можна припустити, що РЕС справно. При киданні монети також два стани, але ступінь невизначеності набагато вище.

Висновок: ступінь невизначеності системи визначається не тільки числом можливих станів, але і вірогідністю станів.

Тому природно припустити, що кількісною мірою невизначеності окремого повідомлення, а також непередаваної їм інформації може бути величина, зворотна його апріорній вірогідності $1/P(x_i)$ (що і запропонував Р.Хартлі в 1928 р.). Проте, така міра незручна (при $P(x_i)= 1$ достовірна подія, кількість інформації виявляється не 0, а 1; крім того, немає властивості адитивності, оскільки вірогідність двох і більш подій перемножуються). Клод Шеннон в 1948 р. ввів логарифмічну міру кількості інформації.

$$I(x_i) = \log_a \frac{1}{P(x_i)} = -\log_a P(x_i) \qquad (2.1)$$

При цьому кількість інформації, що міститься в складному повідомленні, що представляє сукупність подій xi і xj буде

$$I(x_i, x_j) = \log \frac{1}{P(x_i)P(x_j)} = \log \frac{1}{P(x_i)} + \log \frac{1}{P(x_j)} = I(x_i) + I(x_j). \qquad (2.2)$$

Властивості міри Шеннона:

1. Логарифмічна міра володіє властивостями адитивності.
2. У разі події з одним результатом, детерміновані, тобто певні повідомлення I(x)= 0.
3. Величина інформації росте із зростанням несподіванки результату (оскільки обернено пропорційна вірогідності події).
4. Значення інформації ≥0 (позитивна).

Дані властивості відносяться до дискретної системи. Оскільки інформація випадкова, то потрібна середня міра оцінки інформації (середнє на одне повідомлення).

I(x)= M[1][2][-loga(P(xi)]= $-\sum_{i=1}^{n} P(ix_i) \log_a P(ix_i) = H(X)$. (2.3)

В основі кількості інформації лежить апріорна невизначеність повідомлення, тому отриманий вираз називають ще "ентропією" (термін запозичений з термодинаміки, де аналогічний вираз характеризує середню невизначеність стану системи молекул речовини).

Не дивлячись на збіг виразів для I(x) і H(x) ентропія і кількість інформації принципово різна. Інформація розглядається у зв'язку з своєю протилежністю – ентропією.

Ентропія визначає середню невизначеність джерела (можливий об'єм інформації у джерела), інформація зв'язується у нас з отриманням повідомлення.

Одиниця вимірювання інформації залежить від вибору підстави loga

log2 – binary digit = битий (двійкова одиниця). В основному використовується біт.

log10 – decimal digit = дит.

loge – natural digit = нат.

Властивості ентропії:

1. H – речовинна, позитивна >0, обмежена оскільки P()<1.

---

[1] Понятие усреднения (определение среднего значения), процедура которого обозначается символом M[ ] (см в лекции 4)

[2] Понятие усреднения (определение среднего значения), процедура которого обозначается символом M[ ] (см в лекции 4)

2. H = 0 для детермінованих повідомлень (з визначення).

3. H – max, якщо всі події рівноімовірні.

Для доказу скористаємося методом невизначеного множника Лагранжа (λ).

Складемо допоміжну функцію:

$$F = -\sum_{i=1}^{n} P(x_i)\log_2 P(x_i) - \lambda .$$

Оскільки $\sum_{i=1}^{n} P(x_i) = 1$, то на таку величину можна помножити ?:

$$F = -\sum_{i=1}^{n} P(x_i)\log_2 P(x_i) - \sum_{i=1}^{n} P(x_i)\lambda = -\sum_{i=1}^{n}\left[P(x_i)\log_2 P(x_i) + P(x_i)\lambda\right] = \sum_{i=1}^{n} F_i .$$

Необхідно знайти <u>max значення Fi</u> по змінній $P(x)_i$, для цього продиференціюємо і прирівняємо = 0:

$$\frac{\partial F_i}{\partial P(x_i)} = -P(x_i)\frac{\partial}{\partial P(x_i)}[\log_2 P(x_i)] - 1\cdot\log_2 P(x_i) - 1\cdot\lambda =$$

$$= -P(x_i)\frac{\log_2 \ell}{P(x_i)} - \log_2 P(x_i) - \lambda = -\log_2 \ell - \log_2 P(x_i) - \lambda = 0.$$

Для знаходження максимального значення знайдемо екстремум функції:

∂Fi/∂ P(xi)= 0

log2 P(xi)= -log2? - ? = const (i =1, 2, 3 ., n)

звідки

P(xi)= const = 1/n

Що і вимагалося довести (не залежать від номера i), що тільки тоді, коли все P(xi) однакові 1/n.

Максимальне значення ентропії

$$H(X)_{max} = -\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\log_2\frac{1}{n} = \log_2 n . \qquad (2.4)$$

4. Ентропія бінарної системи (2-х альтернативної) змінюється від 0 до 1.

P(x1)+ P(x2)= 1.

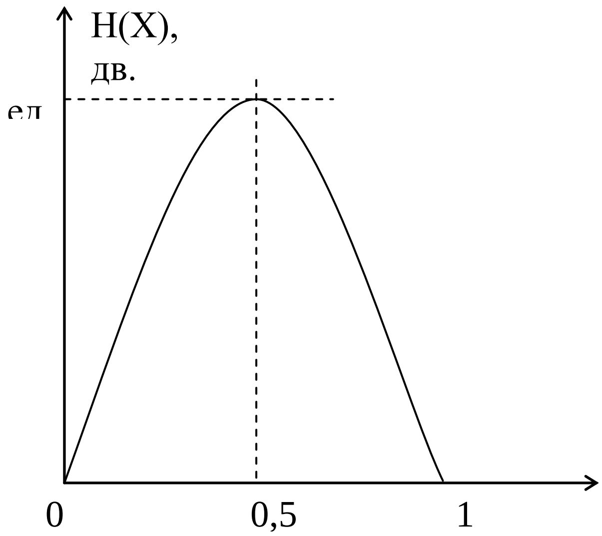
H(x)= -P(x1)log2P(x1) - P(x2)log2P(x2)= -P(x1)log2P(x1) - [1-P(x1)]log2[1-P(x1)].

Якщо P(x1)= 0, P(x2)= 1 H(x)= 0

P(x1)= 1, P(x2)= 0   H(x)= 0.

Максимум буде, якщо P(x1)= P(x2)= 0,5.

H(x)= -log2(1/2)= 1 дв. ед.



Мал. 2.1

2.2. Ентропія складних повідомлень

Розглянемо ентропію з'єднаної системи.

Під об'єднанням двох систем з можливими станами $x1$, $x2$., xn, $y1$, $y2$., yn розуміється складна система (X, У), стан якої (xi, yi) є всіма можливими комбінаціями станів

xi, yi систем X і У. Очевидно, число можливих станів системи (X, У) рівно $m \cdot n$.

Позначимо через P(yy/xi) умовну вірогідність того, що система У приймає стан yj за умови, що система X знаходиться в стані xi.

Визначимо тепер ентропію системи У за умови, що система X знаходиться в стані xi (приватна умовна ентропія).

H(Y/xi)= MY[-logP(yj/xi)]= $-\sum_{j=1}^{m} P(y_j / x_i) \log P(y_j / x_i)$.

Середня по безлічі всіх можливих станів системи X умовна ентропія (повна умовна ентропія)

H(Y/X)= MX[H(Y/xi)]= $-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P(y_j / x_i) \log P(y_j / x_i)$ (2.5)

Умовна ентропія H(Y/X) характеризує ступінь невизначеності системи У за умови, що стан системи X повністю визначено.

Неважко переконатися, що

H(Y/X)= H(Y) (2.6)

при незалежності вірогідності систем X і У, а також

H(Y/X)= 0 (2.7)

при однозначній (функціонального зв'язку) між системами.

З (2.6) і (2.7) очевидно, що умовна ентропія досягає максимуму при незалежності вірогідності систем. Це твердження можна строго довести методами варіаційного числення, але і так представляється достатньо очевидним, що невизначеність однієї системи не може збільшитися від того, що невизначеність якоїсь іншої системи зменшилася.

Доведемо наступну теорему.

Якщо дві системи X і У об'єднуються в одну, то ентропія з'єднаної системи рівна ентропії однієї з складових частин плюс умовна ентропія другої частини щодо першої.

H(X,Y)= M[-logP(X,Y)]= M[-log(P(X)·P(Y/X))] =

= M[-logP(X)]+ M[-logP(Y/X)]= H(X)+ H(Y/X). (2.8)

В окремому випадку, коли системи X і У незалежні

H(Y/X)= H(Y) і H(X,Y)= H(X)+ H(Y).

Оскільки H(Y/X)? H(Y), то H(X,Y)? H(X)+ H(Y), тобто ентропія складної системи досягає максимуму у разі, коли її складові частини незалежні.

Теорему про ентропію складної системи легко розповсюдити на будь-яке число об'єднуваних систем.

Виходячи з висловленого, можна пояснити, чому кількісне представлення інформації через ентропію виявилося так широко застосовним. Таке уявлення володіє наступними достоїнствами:

1. Задовольняє вимозі, що пред'являється до будь-якої міри – аддитивності, по якому загальна від декількох джерел інформація знаходиться підсумовуванням.

2. Добре відображає значення поняття "інформація" - середня кількість інформації про систему, яке може бути отриманий, тобто ентропія досягає максимуму у разі, коли апріорні дані про систему відсутні (всі стани системи рівноімовірні) і рівно 0, якщо невизначеність системи відсутня.

Досить поширеним є випадок, коли що цікавить нас система подій (випадкова величина) вивчається не безпосередньо, а шляхом вивчення іншої системи, пов'язаної з першою вірогідність. Оцінимо взаємну інформацію систем.

Хай нас цікавить система X. Возможные її стану визначаються апріорною вірогідністю P(x1), P(x2) ., P(xn). Хай також є система У, вірогідність пов'язана з системою X (відома умовна вірогідність P(xi/yk). При отриманні повідомлення, що система У знаходиться в к-м стані, змінився розподіл вірогідності системи X, тобто ми отримали певну інформацію про систему X. Приращение інформації про і-том стан системи X

$$I_{y_k \to x_i} = \log \frac{P(x_i / y_k)}{P(x_i)}.$$

Ця інформація називається інформацією "від події до події".

В середньому по всіх можливих станах системи X приріст інформації

$$I_{y_k \to X} = M_x[I_{y_k \to X}] = \sum_{i=1}^{n} P(x_i / y_k) \log_2 \frac{P(x_i / y_k)}{P(x_i)}.$$

Ця величина називається середньою приватною інформацією.

Середня по всіх можливих станах системи У інформація про систему X

$$I_{Y \to X} = M_y[I_{y_k \to X}] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} P(y_k) P(x_i / y_k) \log_2 \frac{P(x_i / y_k)}{P(x_i)} = \\ = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} P(x_i, y_k) \log_2 \frac{P(x_i, y_k)}{P(x_i) P(y_k)}. \qquad (2.9)$$

Симетричність запису виразу (2.9) щодо X і У означає, що

IY>X = IX>Y = YX-Y = I(X,Y)= H(X) – H(X/Y)= H(Y) – H(Y/X). (2.10)

Середня кількість інформації, одержувана при неповній достовірності повідомлень рівно різниці безумовної апріорної інформації H(X) і умовної апріорної інформації H(X/Y), H(X/Y) потрактує як втрата інформації (ненадійність зв'язку).

З виразу (2.8) виходить:

H(X/Y)= H(X,Y) - H(Y)

і підстановка в рівняння (2.10) дасть

YX-Y = H(X) – H(X,Y)+ H(Y)= H(X)+ H(Y) – H(X,Y)

де H(X,Y) – втрата інформації.

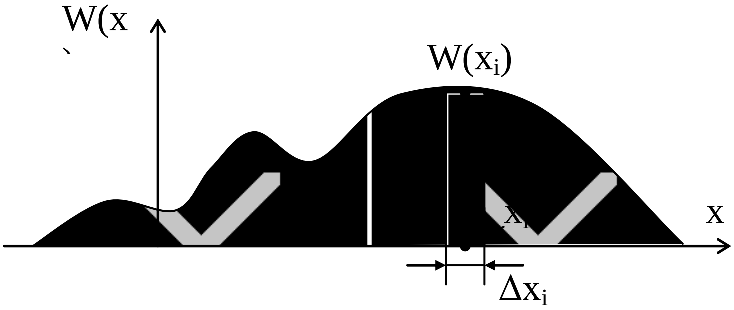
Підсумуємо властивості взаємної інформації.

1. I(X,Y)? 0; I(X,Y)= 0, коли X і У – незалежні.
2. I(X,Y)= I(Y,X).
3. I(X,Y)? H(X); I(X,Y)= H(X), коли H(X/Y)= 0 при однозначному зв'язку.
4. I(X,X)= H(X) – власна інформація про себе.

Ентропія безперервної випадкової величини

В каналах передачі інформації часто використовуються сигнали, миттєві значення яких можуть приймати будь-які значення на деякому інтервалі (мовні, музичні, телевізійні сигнали і т.д.)

Розповсюдимо поняття ентропії на випадок безперервної випадкової величини (див. мал. 2.2)



Мал. 2.2

Вірогідність попадання сигналу в проміжок x.x+dx рівна

$$dp = \lim_{\Delta x \to 0} W(x)dx$$

Таким чином:

$$H(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\left\{-\sum_i W(x_i)\Delta x \log[W(x_i)\Delta x]\right\} =$$
$$= -\int_{-\infty}^{\infty} W(x)\log W(x)dx - \lim_{\Delta x \to 0}\left[\log \Delta x \sum_i W(x_i)\Delta x\right] = \qquad (2.11)$$
$$= -\int_{-\infty}^{\infty} W(x)\log W(x)dx - \lim_{\Delta x \to 0} \log \Delta x.$$

Друга складова (2.11) при переході до межі перетворюється в ?. Таким чином, ентропія безперервної випадкової величини рівна ?. У зв'язку з цим може виникнути сумнів в доцільності энтропийного принципу вимірювання інформації стосовно безперервно розподілених сигналів. Проте, з теоретичної точки зору ця трудність не є принциповою. Річ у тому, що другий доданок виразу (2.11) не залежить від характеристик вірогідності випадкової величини, іншими словами, другий доданок з точністю до нескінченно малої величини однаково для всіх випадкових величин. Оскільки в реальних каналах завжди мають місце шуми і обчислення інформаційних характеристик каналів зводиться до визначення різниці ентропії сигналу і шуму, в результаті віднімання складові ентропії вигляду $\lim_{\Delta x \to 0} \log \Delta x$ і $\lim_{\Delta y \to 0} \log \Delta y$ взаємно знищуються.

При розгляді експериментальних даних справа спрощується ще і тим, що елементи ?x залишаються кінцевими, оскільки ці величини визначаються роздільною здатністю вимірювальних приладів, яка не може бути нескінченною.

Оскільки при обчисленні різниці ентропій другий доданок виразу (2.11) не представляє інтересу, використовують тільки першу складову виразу (2.11).

$$H^*(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} W(x)\log W(x)dx \qquad (2.12)$$

яке називається приведеною або відносною ентропією.

Оскільки вирази для приведеної ентропії безперервної випадкової величини і ентропії дискретної випадкової величини аналогічні, очевидно, що приведена ентропія досягає максимуму при рівноімовірному розподілі станів.

Відомо, що при фіксованій дисперсії ентропія максимальна при нормальному законі розподілу, тобто безперервна випадкова величина з фіксованою дисперсією і нормальним розподілом володіє максимальною інформативністю.

Приведена ентропія нормально розподіленої випадкової величини

$$H^*(x) = -\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\log_2\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right]dx =$$
$$= \frac{\log_2(\sigma\sqrt{2\pi})}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx + \frac{\log e}{2\sigma^3\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx = \log_2(\sigma\sqrt{2\pi e}). \qquad (2.13)$$

Приватна і середня взаємні ентропії безперервного сигналу

Виконавши перетворення, аналогічні тим, які були виконані для дискретного сигналу, можна отримати наступні вирази для взаємної інформації безперервного сигналу:

1. інформація від події до події

$$I(y,x) = \log_2[W(x/y)/W(x)],$$

2. приватна інформація

$$I(y,X) = -\int_{-\infty}^{\infty} W(x,y)\log_2\frac{W(x/y)}{W(x)}dx,$$

3. повна (середня) інформація

$$I(X,Y) = \iint_{-\infty}^{\infty} W(x,y)\log_2[W(x,y)/W(x)W(y)]dxdy =$$
$$= H^*(X) - H^*(X/Y) = H^*(Y) - H^*(Y/X).$$

Джерела інформації

Джерелами повідомлень можуть бути об'єкти, стан яких визначається деяким фізичним процесом, що відбувається в часі або в просторі. До джерел повідомлень з просторовим розподілом носія інформації відносяться книги, картини, грамплатівки і д.т. При передачі інформації відбувається, як правило, перетворення просторового розподілу в тимчасовий.

Джерела інформації можуть бути дискретними і безперервними.

По характеру роботи джерела діляться на дві групи: з регульованою і з нерегульованою продуктивністю (швидкістю вироблення інформації). До першої групи відносяться джерела з пам'яттю, видаючі інформацію залежно від режиму роботи кодопреобразователя або за запитом. До другої групи відносяться джерела без пам'яті.

Хай дискретне джерело повідомлень виробляє деяку послідовність символів, причому порядок проходження цих символів випадковий і характеризується деякою сукупністю вірогідності.

В найпростішому випадку для опису процесів достатньо тільки безумовної вірогідності символів. В більш загальному випадку, коли вірогідність появи символу залежить від того, яким були попередні, необхідно знати умовну вірогідність.

Дискретна послідовність, в якій вірогідність появи символу залежить тільки від того, яким був попередній, називається простим ланцюгом Маркова. Якщо корелятивні зв'язки тягнуться на більше (але кінцеве) число символів, процес називається складним ланцюгом Маркова.

Для простого ланцюга Маркова

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} P(x_{\ell,k}, x_{\ell-1,i}) \log P(x_{\ell,k} / x_{\ell-1,i}) .$$

Для послідовності не зв'язаних між собою вірогідністю символів

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} P(x_i) \log P(x_i) .$$

Оскільки безумовна ентропія при заданій безумовній вірогідності більше любимої умовної, кількість інформації повідомлення, що доводиться на один символ, досягає максимуму у разі відсутності кореляційних зв'язків в повідомленні.

Безумовна ентропія має максимальне значення при равновероятности всіх символів. Отже, максимальне значення ентропії на символ має місце у тому випадку, коли, по-перше, між символами відсутні зв'язки вірогідності, а, по-друге, коли всі символи алфавіту рівноімовірні. Певне таким чином максимальне значення ентропії джерела називається інформаційною місткістю джерела. Інформаційна місткість джерела, що використовує алфавіт з підставою L

$$C = H_{max} = -L\frac{1}{L}\log\frac{1}{L} = \log L.$$

Для характеристики використовування символів в повідомленні введений параметр, званий надмірністю.

$$R = \frac{H_{max} - H(x)}{H_{max}} = 1 - \frac{H(x)}{H_{max}} = 1 - M. \qquad (2.14)$$

Величину $\frac{H(X)}{H_{max}}$ називають коефіцієнтом стиснення = М, Н(х) – ентропія на один символ повідомлення.

Надмірність приводить до збільшення часу передачі інформації, зайвому завантаженню каналу зв'язку. Є і певна надмірність в російській мові і в європейських мовах. Приведемо таблиці відносної частоти появи букв (вірогідність) в російській і англійській мовах.

Вірогідність появи букв в російському тексті

Буква	- (пропуск)	про	е, е	а, і	т, н	з	р	в	л
Вірогідність	0,175	0,090	0,072	0,062	0,053	0,045	0,040	0,038	0,035
Буква	до	м	д	п	у	я	ы, з	ь, ъ	би
Вірогідність	0,028	0,026	0,025	0,023	0,021	0,018	0,016	0,014	0,014
Буква	г	ч	й	х	же	ю, ш	ц	щ, э	ф
Вірогідність	0,013	0,012	0,010	0,009	0,007	0,006	0,004	0,003	0,002

Вірогідність появи букв в англійському тексті

Буква	- (пропуск)	e	t	про	a	n	i	r	s
Вірогідність	0,200	0,105	0,072	0,065	0,063	0,059	0,055	0,054	0,052
Буква	h	d	l	з	f, u	m	p	у, w	g
Вірогідність	0,047	0,035	0,029	0,023	0,022	0,021	0,018	0,012	0,011
Буква	b	v	до	x	j	q	z		
Вірогідність	0,010	0,008	0,003	0,002	0,001	0,001	0,001		

Російська мова містить 31 букву (е і е, ь і ъ – не розрізняємо). З урахуванням пропуску (-) між буквами – 32 символи.

За умови равновероятности і незалежності символів середня ентропія на символ буде максимальною

$H(x)_{max} = \log 232 = 5 \ \frac{\text{дв.ед.}}{\text{симв.}}$ (в англійській мові Hmax = 4,75 $\frac{\text{дв.ед.}}{\text{симв.}}$).

Якщо врахувати різну вірогідність символів, то

$H1(x) = 4{,}39 \ \frac{\text{дв.ед.}}{\text{симв.}}$ (в англійській мові H1 = 4,03 $\frac{\text{дв.ед.}}{\text{симв.}}$).

З урахуванням кореляції між двома символами ентропія зменшується

$H2(x) = 3{,}52 \ \frac{\text{дв.ед.}}{\text{симв.}}$ (в англійській мові H2 = 3,52 $\frac{\text{дв.ед.}}{\text{симв.}}$),

між трьома символами:

$H3(x) = 3{,}00 \ \frac{\text{дв.ед.}}{\text{симв.}}$ (в англійській мові H3 = 3,10 $\frac{\text{дв.ед.}}{\text{симв.}}$),

між вісьма символами:

$H8(x) = 2{,}00 \ \frac{\text{дв.ед.}}{\text{симв.}}$ (в англійській мові H8 = 1,86 $\frac{\text{дв.ед.}}{\text{симв.}}$)

і далі залишається незмінною, отже, надмірність російської мови:

$$R = 1 - \frac{H_8(x)}{H_{max}} = 1 - \frac{2}{5} = 0{,}6,$$

в англійській мові:

$$R = 1 - \frac{1{,}86}{4{,}75} = 0{,}61.$$

У всіх європейських мовах надмірність приблизно однакова.

Надмірність розмовних мов сформувалася в результаті дуже тривалої суспільної практики і дозволяє відновлювати цілі слова і фрази при їх спотвореннях під впливом різних чинників, що заважають.

Ще джерела інформації оцінюються по кількості інформації, що виробляється в одиницю часу:

$$\overline{H} = \frac{H(X)}{\overline{\tau}_c} \qquad (2.15)$$

де $\overline{\tau}_c$ - середня довжина символу.

Наприклад, для простого марківського джерела

$$\bar{\tau}_c = \sum_{i=1}^{L}\sum_{k=1}^{L} P(x_i)P(x_k / x_i)\tau_k ,$$

де ?$_k$ - тривалість к-го символу;

P(xk/xi) – вірогідність вироблення к-го символу за умови, що попереднім був і-тый символ.

Величину $\overline{H}(X)$ називають швидкістю створення повідомлень, продуктивністю джерела, а також потоком повідомлень.

Для отримання можливо більшій швидкості створення повідомлень, необхідно, по-перше, забезпечити можливо велику ентропію на символ, а, по-друге, зменшити до можливих меж середню тривалість символів.

Типовы задачі до модуля

Задача1.

Определить энтропию источника сообщений и коэффициент избыточности, если статистика распределения вероятностей появлення символов на выходе сообщения представлена следующей схемой

A	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10
	0,35	0,035	0,07	0,15	0,07	0,07	0,07	0,035	0,08	0,07

$$H(A) = -\sum_{i=1}^{10} p(a_i)\log p(a_i) = 0.35 \log 0.35 + 2*0{,}035 \log 0.035+4*0.07 \log0.07+0.15*\log 0.15$$

Коэффициент избыточности:

$$x = \frac{H(A)\max - H(A)}{H(A)\max}$$

Hmax=log 10=3,32

K=1 – 2,3 /3,32=1-0,7 =0,3

Задача 2

Найти максимальное количество информации, которое содержится в квантованном ТВ сигнале, соответствующему ТВ кадру с 625 строками развертки при условии, что строка состоит из 833 статистически независимых импульсов, каждый из которых принимает одно из 16 значений. Найти избыточность ТВ сигнала, если фактический кадр содержит $9{,}37 *10^5$ бит информации.

Дано:

N строк=625

Nэлем=833

Мэл=16

$I(A)=9{,}37 \cdot 10^5$

Imax?, K?

1.Max количество энтропии, содержащееся в одном импульсе сигнала

H(A)max=log m=log 16=4 бит/сим.

2.Число элементов в одном кадре

$833 \cdot 625=5{,}2 \cdot 10^5$кол.элем

3.Фактическая энтропия сигнала

H фак = Iфак / n = 9,37 *10 5 / 5,2 *10 5 =1,8 бит/им.

4. Коэффициент избыточности

K= (Hmax-Hfak)/Hmax= 0,55

5.Максимальное количество.

$I_{max}=N \cdot H_{max}=5{,}2 \cdot 10^5 \cdot 4 =2{,}083 \cdot 10^6$ бит

Задача

По информационному каналу передается шесть различнiх сообщений. Энтропия источника 1,88 дв./сооб.

В канале используется простой двоичный код. Определить избыточность в передаваемом сигнале.

Чтобы передать 6 сообщений простым двоичным кодом должно быть 3 разряда

Hmax=log 8=3

K=1- 1,888/3= 0,368

Задача

Колода состоит из 32 карт(без шестерок). Игрок 1 вытаскивает любую карту. Игрок 2 должны угадать, какая карта вытащена, задая вопросы, на которые игрок 1 может ответить да или нет. Определить минимальное число вопросов, гарантирующих отгадывание карты.

H=log 32=5 вопросов

Задача

Взаимная зависимость сообщений задается матрицей условных вероятностей

$p(ai/bj) = \begin{vmatrix}0.98\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0.7\end{vmatrix}$ … $p(ai/bj) = \left|\begin{matrix}0.98 \\ 0.02\end{matrix}\right|\left|\begin{matrix}0.7 \\ 0.3\end{matrix}\right|$ найти H(A/b2) ?

Ответ

A1/b1 A1/b2

A2/b1 A2/b2

H(A/b2)=0,7 log0,7+0,3log 0.3=

Задача

Вероятности появлення сообщений x1 x2 x3 x4 равна p(x1)=1/2, p(x2)=1/4, p(x3)=p(x4)=1/8. Между сообщениями имеется корреляционная связь. Найти энтропию сообщений H(x).

(xi ,xj)	P(xi,xj)	P(xj/xi)	(xi ,xj)	P(xi,xj)	P(xj/xi)
X1 x1	13/32	13/16	X3 x1	0	0
X1 x2	3/32	3/16	X3 x2	0	0
X1 x3	0	0	X3 x3	0	0
X1 x4	0	0	X3 x4	1/8	1
X2 x1	1/32	1/8	X4 x1	1/16	½
X2 x2	1/8	½	X4 x2	1/32	¼
X2 x3	3/32	3/8	X4 x3	1/32	¼
X2 x4	0	0	X4 x4	0	0

H(x)=- $\sum_{i=1}^{n} p(xi)\sum_{i=1}^{n} p(xj/xi)\log p(xj/xi) = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} p(xi,xj)\log p(xi/xj)$

= -13/32 log 13/16-3/32 log 3/16-1/32 log 1/8 – 1/8 log ½ -3/32 log 3/8-0-1/16 log ½- 2*1/32 log ¼ = 0.886 дв.ед/ сообщ.

Навчальні питання до модуля 3

Помехоустойчивое кодирование в дискретном канале связи

Ключевые положения

Код с проверкой на четность является простейшим систематическим кодом $(n,\, n-1)$. Он образуется путем добавления к комбинации из $n-1$ информационных символов одного проверочного символа, равного сумме $n-1$ информационных символов по модулю 2. После добавления проверочного символа образуются кодовые комбинации, содержащие только четное число единиц.

Применение этого кода позволяет при декодировании обнаруживать все ошибки нечетной кратности, так как при наличии таких ошибок принимаемая комбинация содержит нечетное число единиц и является запрещенной.

При построении циклического кода (n,k) комбинацию из информационных символов удобно отображать полиномом $a(x)$. Так, комбинации 10110 соответствует полином $a_1 = x^4 + x^2 + x$, а комбинации 10100 – полином $a_2(x) = x^4 + x^2$. Комбинация циклического кода отображается полиномом $b(x) = x^r \cdot a(x) + r(x)$. Здесь $r = n-k$ – число проверочных символов, умножение $a(x)$ на x^2 эквивалентно дописыванию к комбинации информационных символов r нулей, $r(x)$ – полином степени не выше $r-1$, соответствующий проверочным символам. Добавление его эквивалентно значению r нулей проверочными символами. Полином $r(x)$ – остаток от деления $x^r \cdot a(x)$ на порождающий полином $g(x)$. Степень полинома $g(x)$ равна r, поэтому степень полинома $r(x)$ не превышает $r-1$. Ясно, что все полиномы $b(x)$, соответствующие разрешенным комбинациям циклического кода, делятся без остатка на порождающий полином $g(x)$.

Допустим, что используется код (10.5) с порождающим полиномом $g(x) = x^5 + x^4 + x^2 + 1$. Тогда $x^5 \cdot a_1(x) = x^5 \cdot (x^4 + x^2 + x) = x^9 + x^7 + x^5$. В результате деления последнего полинома на $g(x)$ получим $r_1(x) = x^3 + x^2 + 1$, т.е. кодер комбинацию 10110 преобразует в комбинацию 1011001101. Аналогично комбинация 10100 преобразуется в комбинацию 1010010010.

Пусть принятой комбинации соответствует полином $\hat{b}(x)$. При декодировании полином $\hat{b}(x)$ необходимо поделить на порождающий полином $g(x)$. Если деление не дает остатка, это указывает, что в принятой комбинации либо отсутствуют ошибки, либо содержатся необнаруженные ошибки − принята разрешенная комбинация. Если в результате деления получается ненулевой остаток, то это указывает, что принятая комбинация содержит ошибки, является запрещенной.

Полином $\hat{b}(x)$ можно записать: $\hat{b}(x) = b(x) + e(x)$, где $e(x)$ − полином ошибок (например, при ошибке в третьем символе справа $e(x) = x^2$, в первом и седьмом − $e(x) = x^5 + 1$ и т.д.). Тогда $\frac{\hat{b}(x)}{g(x)} = \frac{b(x)}{g(x)} + \frac{e(x)}{g(x)}$. Так как $b(x)$ делится на $g(x)$ без остатка, то остаток деления определяется частным $\frac{e(x)}{g(x)}$. Если кратность ошибки не превышает кратность исправляемой данным кодом ошибки, то каждому полиному ошибок $e(x)$ соответствует свой остаток от деления $\frac{e(x)}{g(x)}$ − синдром $c(x)$. Всякому ненулевому синдрому соответствует определенная конфигурация ошибок, которая и исправляется.

Код (10.5) с порождающим полиномом $g(x) = x^5 + x^4 + x^2 + 1$ имеет $d = 4$.

Циклические коды отличаются простотой реализации кодирующих и декодирующих устройств.

Для самоподготовки –краткие сведения.

Коды получили своё названия из-за свойства: каждая кодовая комбинация м.б. получена циклической престановкой символов.

Двоичное число 1010101 можно представить в виде полинома.

$A(x)=1*x^6+0*x^5+1*x^4+0*x^3+1*x^2+0*x^1+1*x^0=x^6+x^4+x^2+1$

И затем все действия над ним свести к действиям над многочленом.

Циклический сдвиг образуется умножением полинома на x. $(x^6+x^4+x^2+1)*x= x^7+x^5+x^3+x$, заменив x^7 на 1 , получим x^5+x^3+x+1, что соответствует кодовой комбинации 0101011.

Циклическим сдвигом можно получить n -1 различных комбинаций, из которых любые могут быть взяты в качестве исходных. Остальные кодовые комбинации можно получить используя свойства циклического кода.

Свойства циклического кода

1.Разрешенная кодовая комбинация при делении её на образующий полином имеет остаток равый 0. Если в результате деления обнаружен остаток, то значит кодовая комбинация трансформировалась в запрещенную. Из всех возможных полиномов степени n----(2^n) только 2^k имеют нулевой вычет по модулю 2. n – это высшая степень полинома, k= n-r

2. Кодовая комбинация циклического кода (n, k) может быть получена 2 способами:

-путем умножения простой кодовой комбинации степени (k-1) на одночлен $x^{(n-k)}$ и ***добавления к этому произведению остатка,*** полученного от деления произведения на образующий полином степени (n- k)

- путем умножения простой кодовой комбинации степени (k-1) на образующий полином степени (n- k).

При первом способе кодирования первые k символов полученной кодовой комбинации совпадают с соответствующими символами исходной комбинации

При этом способе усложняется процесс декодирования, т.к. в кодовой комбинации информационные символы содержатся неявном виде.

$2^{n-k}-1>=n;$ $\quad 2^k <= \frac{2^n}{n+1}$ ***, отсюда степень образующего полинома***

$2^{\rho}-1>=n,$

$$\rho = n - k \geq \log(n+1)$$

Пример:

Закодировать простую кодовую комбинацию 1011циклическим кодом, обнаруживающим однократные и двукратные ошибки или устраняющим однократные ошибки.

Решение:

1.По заданному кол-ву информационных символов к=4 определяем значность кода, используя соотношение $2^k <= \frac{2^n}{n+1}$

2. Для построения циклического кода надо выбрать образующий полином. Известно, что степень его равна р. Находим р и по таблицам находим и выбираем образующий полином $P(x)=x^3+x^2+1$.

3. Используем первый способ кодирования.

-исходную комбинацию умножаем на $x^{n-k}=x^3$ и получаем

$x^3(x^3+x+1)=x^6+x^4+x^3$

-делим полученное произведение на образующий полином

$(x^6+x^4+x^3) / (x^3+x+1)$ получим остаток x^2

- прибавляем остаток к произведению и получаем закодированную комбинацию

$x^6+x^4+x^3 + x^2$ --------1011100

Матричное представление циклического кода.

В теории кодирования широко используются матричное представление кодов.

Основой для построения кода служит производящая матрица P_n, k, представляющая собой две подматрицы:

Информационную –U_k и дополнительную H_p

$$Pn = \left| U_k,\ H_p \right|$$

U_k – представляет собой квадратную единичную матрицу с количеством строк и столбцов равным k.

H_p- содержит **ρ =n-k** столбцов и **k** –строк и образована остатками **R(x).**

ρ - это число проверочных разрядов в коде; k – число информационных разрядов в коде; n – число разрядов в коде.

Например, необходимо построить циклический код $P_{(7,4)}$, т.е. n =7, k=4. Для построения производящей матрицы строим сначала информационную матрицу, которая имеет вид :

$$U_k = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Для построения производящей матрицы нужно выбрать образующий полином (по таблицам, исходя из степени полинома, которая в свою очередь, определяется числом проверочных разрядов **ρ**), например, $P(x)=x^3+x^2+1$ или (1101) и использовать один из двух способов построения дополнительной матрицы H_p.

Первый способ

Для получения первой строки дополнительной подматрицы надо первую строку информационной подматрицы умножит на одночлен x^{n-k} т.е. в нашем случае на x^3 и разделить на образующий полином. Это соответствует выполнению операции

$$\frac{0001*1000}{1101}$$

В результате получим остаток 101, что и составит первую строку дополнительной подматрицы H_p. Аналогично определяются все последующие строки дополнительной подматрицы. Окончательный производящая матрица имеет вид :

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{U_k} \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{H_p}$$

$$P_{7,4}= \left| \begin{array}{cccc ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right|$$

Второй способ

Производящая матрица P n,k формируется путем умножения образующего полинома P(x) степени **ρ = n – k на** одночлен **x^{k-1}** и последующих к-1 сдвигов полученной комбинации. При этом информационные символы идут вперемешку с проверочными, что создает трудности при декодировании.

Итак, имеется производящая матрица, с помощью которой можно получить разрешенные кодовые комбинации, путем суммирования строк по модулю 2 в любом сочетании, т.е из всех 2^7 кодовых комбинаций можно использовать в качестве информационных только 2^4, которые и находятся с помощью производящей матрицы.

Принадлежность кодовой комбинации к группе разрешенных можно легко проверить делением ее полинома на образующий полином. Если остаток от деления равен нулю, то комбинация является разрешенной.

Выводы

Для построения циклического кода , исправляющего однократные или обнаруживающего двукратные ошибки, необходимо, чтобы каждой ошибке соответствовал свой опознаватель – остаток от деления многочлена принятой кодовой комбинации на образующий полином. Т.к. количество возможных однократных ошибок равно n, то отсюда получаем необходимое условие исправления любой одиночной ошибки.

$2^{n-k}-1 >= n$ *или*

$2^{\rho}-1 >= n$

Каждый образующий полином, использующийся для построения циклического кода должен удолетворять 2 условиям:

-Быть неприводимым, т.е. не делится не на какой другой полином;

-двучлен вида x^{n+1} должен делиться на образующий полином без остатка, см [2].

Задача. Построить производящую матрицу и сформировать разрешенные кодовые комбинации циклического кода, если образующий полином $P(x)=x^3+x+1$

Первая разрешенная комбинация

A1(0,1)--------0001011

Выполняем циклический сдвиг, т.е. умножаем на x, x^2, x^3. В результате имеем

x^4+x^2+x ----0010110 ; x^5+x^2 ----- -0101100; $x^6+x^4+x^3$ ----0111000

$$G(7,4)=\begin{vmatrix} 0001011 \\ 0010110 \\ 0101100 \\ 1001000 \end{vmatrix}$$

Для формирования кодовых комбинаций, а их будет 2^4, надо просуммировать в разных сочетаниях по модулю 2 строчки производящей матрицы.

Задача. Определить декодированием наличие ошибки в принятом сообщении $A(x)=x^6+x^4+x^3+x^2$, если образующий полином $P(x)= x^3+x^2+1$.

Задача. Принятая комбинация $\Phi(x)=x^6+x^4+x^2+1$ закодирована циклическим кодом. Образующий полином $A(x)= x^3+x^2+1$. Определить есть ли ошибки

Синдром

Определяется суммой по модулю 2, принятых проверочных элементов и элементов проверочной группы, сформированных из принятых элементов информационной группы. В циклическом коде для нахождения синдрома надо разделить принятую кодовую комбинацию на производящий полином. Если остаток равен нулю, то кодовая комбинация принята без ошибки.

Пример Определить декодированием наличие ошибки в принятом сообщении $F(x)=x^6+x^4+x^3+x^2$, если образующий полином $P(x)=x^3+x^2+1$

Решение:

$$\begin{array}{l|l} X^6+x^4+x^3+x^2 & x3+2+1 \\ \cline{2-2} X^6+x^5+x^3 & x^3+x^2 \\ \hline \quad X^5+x^4+x^2 & \\ \quad x^5+x^4+x^2 & \end{array}$$

Ответ: ошибки нет.

Пример .Принята комбинация $F(x)=x^6+x^4+x^2+1$, закодированная циклическим кодом. Образующий полином $P(x)=x^3+x^2+1$. Определить есть ли ошибка. Делим и получаем остаток x^3+1 Ответ: ошибка на приеме есть.

Для определение места ошибки используется метод весов, который заключается в следующим:

Принятая комбинация делится на образующий полином;

Подсчитывается вес остатка w (количество единиц в остатке);

Если w<=t (t –количество допустимых ошибок, которое исправляется кодом), то исправление сводится к сложению принятой комбинации с остатком;

Если w>=t ,то производится циклический сдвиг влево, а затем деление на образующий полином и определение веса остатка. Если w<= t, то делимое суммируют с остатком, а затем производят сдвиг на один элемент вправо. Это и будет исправленная кодовая комбинация.

Пример Передана закодированная комбинация 1001110. Образующий полином A(x)= x^3+x^2+1. Принято 1000110, d=3, t=1.

1- Находим R(x)-остаток $\longrightarrow$ 1000110/ 1011 $\longrightarrow$ остаток R(x)=011

2.Сдвигаем 1000110 влево на один разряд $\longrightarrow$ получим 0001101 и делим на 1011, получаем R(x)= 110, т.е. w=2 , а это >t=1, поэтому делаем следующий сдвиг влево еше на один разряд

3. получаем 0011010 Делим на 1011, получаем остаток R(x)=111, т.е. w=3 , а это >t=1.

4.Повторяем сдвиг ---0110100 и получаем

R(x)=101, w=2

5. Сдвигаем влево еше раз ----11010000 , получаем R(x)=001, w=t=1,

6. Складываем полученную кодовую комбинацию с остатком 11010000+001=1101001

7.Сдвигаем полученную кодовую комбинацию вправо 4 раза и получаем последовательность

1101001---1110100----0111010---00111101---1001110, а принято была комбинация 1000110, т.е. ошибка произошла в 4- ой позиции..

Если надо исправить двух-трехкратные ошибки , то синдром находится с помощью программирования на ПК.

Навчальні питання до модуля 4

Ознакомление со структурной схемой оптимального когерентного демодулятора сигналов с АМ, ЧМ и ОФМ. Изучение преобразований сигналов функциональными узлами этой схемы.

Ключевые положения

Задача приемника сигнала заключается

- в повышении отношения энергии полезного сигнала к энергии помехи;

- выделение из принимаемого сигнала модулирующей функции, т.е. демодуляции.

Методы выделения модулирующей функции делятся на :

- Когерентные и некогерентные приемники.

При когерентном детектировании используются опорные сигналы, представляющие собой точные копии передаваемых (с точностью до начальной фазы).

При некогерентном детектировании априорные сведения о начальной фазе не учитываются.

Обобщенная структурная схема приемника.

Вх.блок – осуществляет фильтрацию для улучшения соотношения сигнал/помеха.

Детектор –выделяет модулирующее колебание.

РУ-решающее устройство представляет собой пороговую схему или схему сравнения.

Рассмотрим когерентный приемник, в котором обнаружение сигнала осуществляется на основании критерия правдоподобия.

Для двоичной системы правило решения о том, что передавался сигнал $S_1(t)$, может быть записано в виде

$$\int_0^T z(t)S_1(t)dt - 0{,}5E_1 > \int_0^T z(t)S_2(t)dt - 0{,}5E_2 . \qquad (2.1)$$

где $S_1(t)$ и $S_2(t)$ – реализация передаваемых сигналов на входе демодулятора, $z(t) = S_L(t) + n(t)$ – реализация аддитивной смеси полезного сигнала с флуктуационным шумом на входе демодулятора. E_1 и E_2 – энергии сигналов, T – длительность сигналов.

Если сигналы равновероятны, то алгоритм (2.1) обеспечивает максимум вероятности правильного приема сигнала. Для сигналов с АМ, ЧМ и ФМ алгоритм (2.1) можно упростить.

При АМ один из сигналов равен нулю (системе с пассивной паузой), $S_1(t) = a\cos\omega_0 t$, $S_2(t) = 0$, правило (2.1) запишется так:

$$\int_0^T Z(t)S_1(t)dt - 0{,}5E_1 > 0 . \qquad (2.1а)$$

При ЧМ сигналы имеют одинаковые энергии (система с активной паузой) $S_1(t) = a\cos\omega_1 t$, $S_2(t) = a\cos\omega_2 t$, $E_1 = E_2 = E$. Для таких сигналов правило решения (2.1) будет

$$\int_0^T z(t)S_1(t)dt > \int_0^T z(t)S_2(t)dt. \qquad (2.1б)$$

При ФМ сигналы противоположные, $S_1(t) = a\cos\omega_0 t$, $S_2(t) = a\cos(\omega_0 t + \pi) = -S_1(t)$, $E_1 = E_2 = E$. В этом случае правило (2.1) сводится к неравенству

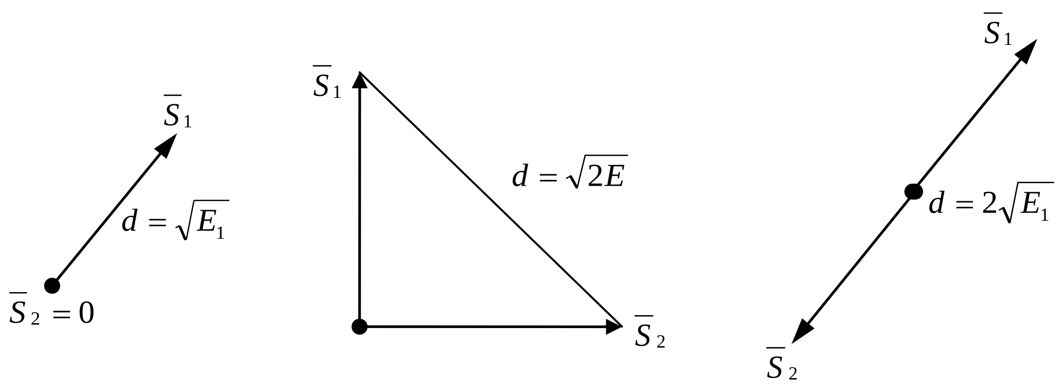
$$\int_0^T z(t)S_1(t)dt > 0. \qquad (2.1в)$$

Алгоритм (2.1) могут быть реализованы как на основе корреляторов, так и на основе согласованных фильтров.

Вероятность ошибки при когерентном приеме источник равновероятных сигналов определяется следующим выражением

$$p = 0{,}5[1 - \varPhi(kh)], \qquad (2.2)$$

где $h^2 = \dfrac{E_1}{N_0}$ – отношение сигнал/шум; N_0 – спектральная плотность мощности помехи; k – коэффициент, зависящий от вида модуляции и равный $\sqrt{2}$ – для ФМ, 1 – для ЧМ и $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ – для АМ; $\varPhi(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^T e^{-} dt$ – табулированная функция Крампе. При фиксированной величине h наиболее высокой помехоустойчивостью обладает система с ФМ, а наиболее низкой – система с АМ. Объясняется это тем, что расстояния между сигналами S_1 и S_2 при различных видах модуляции различны (рис. 2.1, где геометрически представлены сигналы: а – при АМ, б – при ЧМ (ортогональные сигналы), в – при ФМ).



а б в

Рис. 2.1

На практике ФМ применяется в сочетании с относительным методом передачи. При относительной фазовой модуляции (ОФМ) информация содержится не в абсолютном значении фазы сигнала, а в разности фаз соседних сигналов. Реализуется этот метод путем включения на входе модулятора сигналов ФМ относительно кодера, а на входе – демодулятора сигналов ФМ относительно декодера. Правило работы кодера

$$b_i = b_{i+1} \oplus a_i ,$$

а кодера

$$\hat{a}_i = \hat{b}_i \oplus \hat{b}_{i-1} ,$$

где a_i – i -й информационный символ на входе кодера, b_i – i -й символ на входе кодера. $\hat{b}_i$ – i -й символ на входе кодера, $\hat{a}_i$ – i -й информационный символ на выходе декодера.

При когерентном приеме сигналов с ОФМ выражение для вероятности ошибки можно записать в виде

$$p_{ОФМ} \approx 2p_{ЧМ} = 1 - \Phi(\sqrt{2}h) \qquad (2.3)$$

Выражение (2.3) справедливо при $p_{ФМ} << 1$.

Изучение свойств согласованных фильтров.

2. Ключевые положения

Помехоустойчивость – это степень соответствия принятого сообщения переданному при заданном уровне помех. При сравнении нескольких систем та из них будет более помехоустойчивой, которая при одинаковой помехи обеспечит меньшее различие между принятым и переданным сигналом. На вход приемника поступает сумма полезного сигнала с помехой и вероятность правильного приема определяется отношением полезного сигнала к помехе. Таким образом **приемник** должен содержать 2 элемента :

-**фильтр** для улучшения соотношения сигнал/помеха;

-**РУ-решающее устройство**, выполняющее главные функции приема :

- **Обнаружение сигнала; восстановление сигнала**

Известны следующие методы фильтрации, обеспечивающие улучшение соотношение сигнал/помеха:

- ***Частотная фильтрация***
- ***Метод накопления***
- ***Корреляционный метод***
- ***Согласованная фильтрация.***

1. *Частотная фильтрация*

Идея частотной фильтрации основана на отличие спектров полезного сигнала и помехи. Рассмотрим случай, когда полезный сигнал является гармоническим, а помеха типа белого шума. Для выделения полезного сигнала в этом случае должен быть использован узкополосный фильтр, настроенный на частоту сигнала. Отношение мощности сигнала к мощности помехи на выходе этого фильтра

$$\frac{Px}{P\xi}вых = \frac{Pхвх}{Po\Delta\varpi ф} = \frac{Pхвх}{2\pi\Delta fф * Po}, \textbf{(1)}$$ где

Ро - средняя мощность помехи, приходящаяся на единицу полосы;

$\Delta\varpi$ф-полоса пропускания фильтра.

Из выражения (1) видно, что отношение на выходе фильтра можно сделать как угодно большим за счет уменьшения полосы пропускания Δf ф.

В реальных условиях полезный сигнал поступает лишь в течение определенного времени Тх. Известно, что практическая ширина такого спектра связана с его длительностью

Δf ф*Тх=М, где М – постоянная, зависищая от формы сигнала и равнв 1.

Длительность сигнала Тх должна быть такой, чтобы его спектр был не шире полосы пропускания фильтра

Δf х<Δf ф.

Таким образом улучшение отношения сигнал/помеха окупается ценой увеличения времени передачи.

2.Корреляционный метод .

Сущность метода заключается в использовании различия между корреляционными функциями сигнала и помехи. Он эффективен только при приеме периодических сигналов.

Рассмотрим полезный сигнал и белый

В приемном устройстве определяем корреляционную функцию сигнала и помехи.

В результате преобразований получим

$Ky(\tau) = Kxx(\tau) + Kx\xi(\tau) + K\xi x(\tau) + K\xi\xi(\tau)$***, где***

$Kx\xi, K\xi x$ ***- есть взаимные корреляционные функции сигнала и помехи, а***

$Kxx(\tau), K\xi\xi(\tau)$ ***- автокорреляционные функции сигнала и помехи соответственно.***

Поскольку сигнал и помеха статистически независимы, то $Kx\xi(\tau) = K\xi x(\tau) = 0$ ***и***

$K y(\tau) = K x x(\tau) + K\xi\xi(\tau)$, ***т.е. корреляционная функция смеси сигнала и помехи равняется сумме автокорреляционных функций сигнала и помехи. Функция $K\xi\xi(\tau)$ с увеличением τ стремится к 0 и при τ>>τ_0 практически равна нулю.***

Следовательно, выбирая время τ, при котором значением $K\xi\xi(\tau)$ можно пренебречь, получаем полезный сигнал , выделенный из смеси полезного сигнала и помехи. Практически время интегрирования (T) должно быть значительно больше 10τ_0.

.

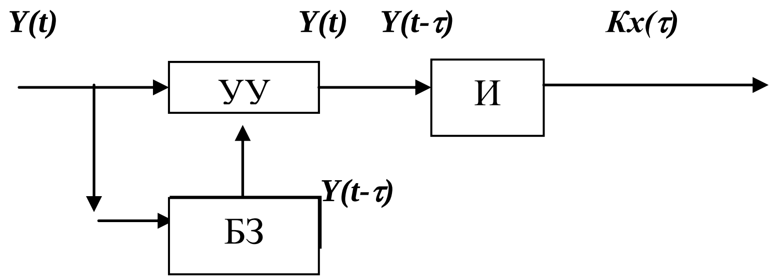


Схема корреляционного приемника .

БЗ- блок задержки;

УУ- устройство умножения;

И-интегратор.

3.Согласованная фильтрация.

Согласованный фильтр (СФ) является устройством, оптимальным по критерию максимума отношения мгновенной мощности сигнала в некоторый момент времени к средней мощности шума на его выходе $\rho_{\max} = \dfrac{|y_c(t_0)|^2}{P_ш}$ при подаче на вход суммы детерминированного сигнала $s(t)$ и шума $n(t)$.

Синтез СФ может быть выполнен как временным, так и спектральным методами. Для этого достаточно знать сигнал $s(t)$ либо его спектральную плотность $s(j\omega)$.

Комплексный коэффициент передачи СФ определяется

$$k(j\omega) = a s^{\varphi}(j\omega) e^{-j\omega t_0}, \qquad (2.1)$$

где a, t_0 – постоянный ($t_0 \geq T$, где T – длительность сигнала); $s^{\varphi}(j\omega)$ – функция, комплексно-сопряженная со спектральной плотностью сигнала.

Формулу (2.1) можно переписать в виде двух равенств: для амплитудно-частотной характеристики СФ

$$k(\omega) = a s(\omega),$$

где $s(\omega)$ – амплитудный спектр сигнала, и фазочастотной характеристики СФ

$\psi(\omega) = -\varphi(\omega) - \omega t_0$,

где $\varphi(\omega)$ – фазовый спектр сигнала.

Например, комплексный коэффициент передачи СФ для сигнала вида П-импульса определяется

$$k(j\omega) = \frac{1}{j\omega}(1 - e^{-j\omega T}). \qquad (2.2)$$

Соотношение (2.2) легко получить, определив предварительно спектральную плотность П-импульса. Из соотношения (2.2) следует, что схема фильтров, согласованного с П-импульсом, состоит из интегратора (с коэффициентом передачи $\frac{1}{j\omega}$). Устройства задержки на время T (с коэффициентом передачи $e^{-j\omega T}$) и вычитателя.

Импульсная реакция СФ является зеркальным отображение сигнала, с которым фильтр согласован:

$g(t) = as(t - t_0)$.

Соотношение (2.1) и (2.3) является исходным для синтеза фильтра методами теории линейных электрических цепей.

Отношение сигнал/шум на выходе СФ зависит от энергии сигнала E и спектральной плотности мощности помехи N_0 и определяется выражением

$$\left(\frac{Pc}{Pш}\right)вых = \frac{2E}{N_0} = 2h^2 = 2\frac{PcNc}{Gш} = \frac{2PcTcFc}{GшшF} = \left(\frac{Pc}{Pш}\right)вх * 2TcFk ,$$

где Тс-длительность сигнала;

Fk-полоса входного избирательного блока, практически раная полосе, занимаемой сигналом.

Таким образом, видно, что при оптимальном приеме выиграш в отношении Рс/Рш происходит за счет эффективного использования полосы пропускания.

В общем случае форма сигнала на выходе СФ определяется функцией взаимной корреляции входного сигнала и сигнала, с которым фильтр согласован. Если же на вход СФ подается сигнал, с которым фильтр согласован, то форма сигнала на выходе определяется функцией автокорреляции входного сигнала, а его длительность – интервалом корреляции τ_k.

СФ применяются, в основном, для построения оптимальных демодуляторов дискретных сигналов. Для сигналов, у которых произведение ширины спектра на длительность $F * T >> 1$ («сложные» сигналы). Длительность сигнала на входе СФ $\tau_k << T$.

СФ отличается от других тем, что в других фильтрах переходный процесс теоретически продолжается бесконечно долго, а в СФ т.к. сигнал существует лишь в интервале 0-Т, то напряжение вх. существует лишь в интервале $0 \le t \le 2T$.

Техническая реализация оптимального приемника на базе СФ очень сложна из-за требования к согласованию фазы.

Типові питання до модулю

Какие фильтры называются согласованными (оптимальными)?

Какие параметры сигнала должны быть известны для синтеза СФ?

Напишите выражения для амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристики СФ. Объясните их физический смысл.

Как определяется импульсная реакция СФ?

Каковы условия физической реализуемости СФ?

Какова форма отклика на выходе СФ при передаче на его вход сигнала. С которым он согласован?

Чем определяется отношение сигнал/шум на выходе СФ?

Синтезируйте СФ для прямоугольного импульса.

Сушность частотной фильтрации

Сущность корреляционного метода.

Сущность метода согласованная фильтраци

Дайте геометрическую интерпретацию задачи оптимального приема.

Перечислите критерии оптимальности при приеме дискретных сигналов, поясните связь между ними.

Каковы форма, аналитическое выражение и векторная диаграмма сигналов при АМ, ЧМ и ФМ?

Что называется когерентным и некогерентным приемом?

Как определяется помехоустойчивость когерентного приема при различных видах модуляции?

Запишите алгоритм работы оптимального когерентного демодулятора по критерию максимального правдоподобия.

Запишите алгоритм работы оптимального когерентного демодулятора для двоичной системы АМ и нарисуйте его функциональную схему.

Запишите алгоритм работы оптимального когерентного демодулятора для двоичной системы ЧМ и нарисуйте его функциональную схему.

Запишите алгоритм работы оптимального когерентного демодулятора для систем передачи двоичных ФМ сигналов и нарисуйте его функциональную схему.

Поясните принцип передачи и приема сигналов ОФМ.

Рассчитайте вероятность ошибки на выходе демодулятора для разных видов демодуляции, постройте график зависимости Рош от вида модуляции с учетом функции Крампа.