

ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙ
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙ ТА ІНФОРМАТИЗАЦІЇ
ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ
КАФЕДРА ІНФОКОМУНІКАЦІЙ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК
ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ З ДИСЦИПЛІНИ
“ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНОГО ЗВ’ЯЗКУ”

Жураковський Б.Ю., Варфоломеєва О.Г., Твердохліб М.Г.
ОСНОВИ ТЕОРІЇ ПОТЕНЦІЙНОЇ ЗАВАДОСТІЙКОСТІ

Київ – 2015

ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙ
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙ ТА ІНФОРМАТИЗАЦІЇ
ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ
КАФЕДРА ІНФОКОМУНІКАЦІЙ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК
ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ З ДИСЦИПЛІНИ
“ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНОГО ЗВ’ЯЗКУ”

Жураковський Б.Ю., Варфоломєєва О.Г., Твердохліб М.Г.
ОСНОВИ ТЕОРІЇ ПОТЕНЦІЙНОЇ ЗАВАДОСТІЙКОСТІ

Затверджено вченою радою
факультету Інформаційних технологій
навчально-наукового інституту
Телекомунікацій та інформатизації
Державного університету телекомунікацій
як навчальний посібник для студентів вищих
навчальних закладів за напрямом
05903 «Телекомунікації»
(Протокол №5 від 26 січня 2015 р.)

Київ – 2015

УДК 621.391.13
В 685
ББК 32.811

Рецензенти: проф., д.т.н. Ю.Г. Савченко
проф., д.т.н. В.В. Поповський

Навчальний посібник призначений для самостійної роботи студентів вищих навчальних закладів з навчальної дисципліни “Теорія електричного зв’язку” (ТЕЗ) - циклу дисциплін професійної та практичної підготовки за напрямом 05903 “ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЇ”.

Навчальна дисципліна “Теорія електричного зв’язку” вивчається протягом двох семестрів. Матеріал відповідає програмі дисципліни, сформовано відповідно чотири складових навчального посібника:

Беркман Л.Н., Комарова Л.О., Чумак Н.С. Системи електрозв’язку та сигнали.

Беркман Л.Н., Варфоломеєва О.Г., Грушевська В.П. Типові сигнали та завади в електрозв’язку.

Беркман Л.Н., Комарова Л.О., Чумак О.І. Основні поняття та теореми теорії інформації.

Жураковський Б.Ю., Варфоломеєва О.Г., Твердохліб М.Г. Основи теорії потенційної завадостійкості.

Жураковський Б.Ю., Варфоломеєва О.Г., Твердохліб М.Г. Основи теорії потенційної завадостійкості. Навчальний посібник підготовлено для самостійної роботи студентів вищих навчальних закладів. – Київ: ДУТ ННІТІ, 2015. – 120 с.

У посібнику розглянуто загальні питання про завадостійкість, критерії оптимального приймання сигналів, дано означення ідеального спостерігача В.О. Котельникова. Викладено методи обробки дискретних сигналів, неоптимальні методи приймання дискретних сигналів та їх порівняння з оптимальними методами, представлено схеми оптимальних приймачів.

Наведено критерії завадостійкості прийому неперервних повідомлень та проведено аналіз завадостійкості систем електрозв’язку з різними видами модуляції. Наведено приклади синтезу оптимальних пристроїв (систем) зв’язку, синтез оптимальних фільтрів Калмана методом простору станів та особливості цього методу. Подано задачі оптимальної фільтрації Колмогорова-Вінера. Оптимальна лінійна фільтрація неперервних повідомлень.

Висвітлено питання потенційної завадостійкості систем передавання неперервних повідомлень, аналогові, імпульсні способи передавання інформації. Розглянуто цифрове передавання неперервних повідомлень та переваги цифрових методів.

Контрольні запитання і задачі допоможуть студенту в підготовці до перевірки знань. **В додатку А** даються методичні вказівки для виконання курсової роботи

Навчальний посібник призначений для студентів, які навчаються за спеціальностями з напрямку “Телекомунікації”, а також може бути корисний для аспірантів, викладачів навчальних закладів відповідних спеціальностей, фахівців, які обслуговують телекомунікаційні мережі зв’язку.

ЗМІСТ

	С.
ПЕРЕДМОВА	6
Розділ 1 . ОПТИМАЛЬНЕ ПРИЙМАННЯ ДИСКРЕТНИХ СИГНАЛІВ. ОСНОВИ ТЕОРІЇ ЗАВАДОСТІЙКОСТІ	10
1.1. Загальні відомості про завадостійкість.....	10
1.2. Критерії оптимального приймання сигналів.....	11
1.3. Оптимальне приймання дискретних сигналів	14
1.4. Імовірність помилки при когерентному прийманні двійкових сигналів	19
1.5. Імовірність помилки при когерентному прийманні багатопозиційних сигналів	24
1.6. Некогерентне приймання дискретних сигналів.....	27
1.7. Передавання дискретних сигналів по каналах із змінними параметрами	29
Контрольні запитання для самооцінки рівня знань.....	33
Післямова до розділу 1	33
Розділ 2.ОПТИМАЛЬНЕ ПРИЙМАННЯ НЕПЕРЕРВНИХ ПОВІДОМЛЕНЬ. ОПТИМАЛЬНА ФІЛЬТРАЦІЯ	35
2.1. Оптимальне приймання неперервних повідомлень.....	35
2.2. Синтез пристроїв (систем) зв'язку за заданою структурною схемою	38
2.3. Фізичний зміст оптимальної смуги пропускання.....	39
2.4. Синтез оптимальних пристроїв (систем) зв'язку	41
2.5. Синтез оптимальних фільтрів Калмана методом простору станів	46
2.6. Приклади синтезу оптимальних фільтрів.....	54
2.7. Оптимальний фільтр для повідомлення, описуваного степеневим поліномом	61
2.8. Поняття про оптимальну нелінійну фільтрацію	65
Контрольні запитання для самооцінки рівня знань.....	69
Післямова до розділу 2	69
Розділ 3.ПЕРЕДАВАННЯ НЕПЕРЕРВНИХ ПОВІДОМЛЕНЬ	71
3.1. Потенційна завадостійкість систем передавання неперервних повідомлень	71
3.2. Аналогові способи передавання інформації	75
3.3. Поріг завадостійкості широкосмугових систем модуляції.....	79
3.4. Системи з піднесучими.....	83
3.5. Імпульсні способи передавання	84
3.6. Цифрове передавання неперервних повідомлень.....	87
3.7. Завадостійкість імпульсно-кодової модуляції	89
3.8. Кодування з завбаченням.....	94
Контрольні запитання для самооцінки рівня знань.....	97
Післямова до розділу 3	98
Задачі для перевірки знань	98
Додаток А Розрахунок та оптимізація характеристик системи електрозв'язку	107
Завдання	107

1. Структурна схема цифрової системи передачі (ЦСП)	107
2. Розрахунок характеристик аналого-цифрового перетворення та інформаційних характеристик повідомлень на виході АЦП.....	107
3. Розрахунок характеристик завадостійкості прийому сигналів у дискретному каналі.....	107
4. Вибір коригуючого коду та розрахунок характеристик завадостійкого декодування	108
5. Розрахунок пропускної спроможності каналу зв'язку	108
6. Розробка структурної схеми демодулятора.....	108
7. Розрахунок ефективності системи передачі.....	108
8. Висновок	109
Приклад розрахунку.....	109
1. Структурна схема цифрової системи передачі (ЦСП)	109
2. Розрахунок характеристик аналого-цифрового перетворення та інформаційних характеристик повідомлень на виході АЦП.....	111
2.1. Розрахунок мінімально допустимої кількості рівнів квантування L	111
2.2. Визначення значності кодових комбінацій та тривалості символу на виході АЦП.....	111
2.3. Визначення ентропії незалежних дискретних повідомлень на виході АЦП та продуктивність джерела повідомлень.	112
3. Розрахунок характеристик завадостійкості прийому сигналів в дискретному каналі.	112
4. Вибір коригувального коду та розрахунок характеристик завадостійкого кодування.	113
5. Розрахунок пропускної спроможності каналу зв'язку	115
5.1. Визначення пропускної спроможності дискретного каналу	115
5.2. Визначення пропускної спроможності неперервного каналу	116
6. Розробка структурної схеми демодулятора.....	116
7. Розрахунок ефективності системи передачі.....	117
8. Висновок	118
Порядок захисту курсової роботи	118
Список літератури, рекомендованої для поглибленого вивчення дисципліни.....	119

ПЕРЕДМОВА

Навчальні посібники призначено для вивчення дисципліни “Теорія електричного зв’язку” (ТЕЗ) – циклу дисциплін професійної та практичної підготовки для студентів вищих навчальних закладів усіх форм навчання за напрямом 05903 “ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЇ”.

Навчальні посібники відповідають програмі дисципліни ТЕЗ.

Посібники призначено для студентів, які вперше знайомляться з процесами передавання сигналів в інформаційних системах. Творчий колектив авторів намагалися максимально використовувати термінологію доступну і зрозумілу студентам 2 курсу. Робота з навчальними посібниками не виключає використання інших підручників та посібників, список яких подано в кожному наприкінці.

Предметом навчальної дисципліни є:

- основи сучасної теорії електрозв'язку з акцентом на фізичне тлумачення процесів, які відбуваються під час передавання повідомлень та сигналів у системах зв'язку; математичний опис основних фізичних процесів передавання сигналів та методи забезпечення граничних характеристик систем зв'язку як за достовірністю, так і за швидкістю передачі інформації; загальні принципи модуляції; методи цифрової модуляції; теорема Котельникова;
- процеси передавання сигналів каналами зв'язку при наявності завад з математичної точки зору. Методи ефективного кодування. Теорема Шеннона для каналу з завадами;
- оптимальний прийом сигналів. Принципи побудови багатоканальних модемів, багатопозиційні сигнали і їх застосування у високошвидкісних модемах;
- принципи побудови телекомунікаційних мереж; цифрові методи передачі неперервних повідомлень. Основи теорії лінійного розділу сигналів. Пропускна здатність багатоканальних систем. Архітектура сучасних телекомунікаційних мереж.

Метою вивчення навчальної дисципліни є:

- з'ясування фундаментальних понять інформаційної інфраструктури для спеціалістів з телекомунікацій;
- опанування основними термінами, категоріями, базовими знаннями із сучасної теорії електричного зв'язку, використання і оцінювання у своїй практичній діяльності математичних моделей процесів (у тому числі сигналів, каналів зв'язку) для розв'язання виробничих, проектних та наукових задач з телекомунікацій;
- здатність свідомого застосування правил, методів, принципів, законів у конкретних ситуаціях, можливість своєчасно адаптуватися до зростаючого потоку інформації, проблем розвитку галузі зв'язку та новітніх науково-технічних досягнень в галузі телекомунікацій;
- сформувати у випускників активну позицію (за вимогами до сучасних спеціалістів), спрямовану на практичну реалізацію важливих завдань - інформатизації держави та входження до глобальної інфраструктури.

Завданнями навчальної дисципліни є формування наступних умінь:

- уміти характеризувати системи електрозв'язку, типові сигнали та завади, характеризувати та оцінювати основні характеристики сигналів, аналізувати переваги і недоліки конкретних видів модуляції, проводити розрахунки характеристик випадкових сигналів на виході каналів, чітко характеризувати процес дискретизації сигналів за теоремою Котельникова;
- уміти розуміти сутність та оцінювати значення, здійснювати класифікацію каналів електрозв'язку, характеризувати математичні моделі дискретних та неперервних каналів, диференціювати, інтегрувати, уніфікувати, оцінювати зміст теорії передачі інформації каналами телекомунікаційних мереж, проводити аналітичні експерименти із використанням математичних моделей, методик визначення параметрів окремих частин та системи передавання інформації в цілому;

- уміти узгоджувати параметри джерела та каналу зв'язку, застосовувати завадостійкі коди та методи оптимальної демодуляції, реалізувати алгоритми оптимального прийому багатопозиційних сигналів багатоканальних модемів;

- уміти аналізувати процес завадостійкості систем електрозв'язку з різними видами модуляції та методами приймання, застосовувати теорію лінійного розподілу сигналів, проводити аналіз архітектури сучасних телекомунікаційних мереж, окремих технічних рішень на мережах зв'язку і прогнозувати очікувані результати.

Теми за робочою програмою в навчальних посібниках

**Беркман Л.Н., Комарова Л.О., Чумак Н.С.
СИСТЕМИ ЕЛЕКТРОЗВ'ЯЗКУ ТА СИГНАЛИ**

Тема 1. Загальні поняття про системи електрозв'язку та сигнали

Вступ. Мета та задачі курсу ТЕЗ. Загальні поняття про системи електрозв'язку. Досягнення сучасної теорії та техніки зв'язку.

Класифікація, узагальнені структурні схеми. Поняття сигналу, основні характеристики первинних сигналів. Елементи простого кодування. Випадкові процеси. Числові характеристики випадкових величин. Закони розподілу випадкових величин.

Спектральна щільність потужності та її зв'язок із функцією кореляції. Низькочастотний та смуговий Гауссівський шум.

Тема 2. Характеристики каналів електрозв'язку

Канали електрозв'язку, їх класифікація та характеристики. Математичні моделі дискретних та неперервних каналів.

Ідеальний канал без завад. Канал з адитивним гауссовим шумом. Канал з невизначеною фазою сигналу. Однопроменевий гауссів канал із загальними замираннями. Канал з міжсимвольною інтерференцією (МСІ) і адитивним шумом.

Задачі для перевірки знань

**Беркман Л.Н., Варфоломєєва О.Г., Грушевська В.П.
ТИПОВІ СИГНАЛИ ТА ЗАВАДИ В ЕЛЕКТРОЗВ'ЯЗКУ**

Тема 3. Основні характеристики сигналів Теорема Котельникова

Математичний опис сигналів та завад. Класифікація, енергетичні та кореляційні характеристики сигналів.

Подання сигналів в ортогональному базисі. Приклади ортогональних базисів. Спектральний аналіз сигналів. Амплітудний, фазовий, комплексний та енергетичний спектри сигналів. Геометричне зображення сигналів.

Теорема відліків. Динамічне уявлення сигналів.

Методи цифрової модуляції. Теорема Котельникова.

Перетворення аналогових сигналів у дискретну та цифрову форму. Відновлення сигналів. ІКМ. Похибки квантування.

Тема 4. Загальні принципи модуляції.

Модульовані сигнали. Амплітудна модуляція (АМ) гармонічного переносника. Часове та спектральне зображення АМ сигналу. Модуляція гармонічним та складним сигналами. БМ та односмугова модуляції. Принципи формування АМ, БМ, та ОМ сигналів. Синхронне детектування. Детектор обвідної.

Кутова модуляція гармонічного переносника. Часове та спектральне зображення сигналів кутових модуляцій. Принципи формування та детектування сигналів кутових модуляцій.

Шумоподібні сигнали та їхні спектри. Основні типи широкосмугових систем зв'язку (ШПС), їх основні структурні схеми.

Задачі для перевірки знань

**Беркман Л.Н., Комарова Л.О., Чумак О.І.
ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ ІНФОРМАЦІЇ**

Тема 5. ТЕОРІЯ ПЕРЕДАЧІ ІНФОРМАЦІЇ КАНАЛАМИ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙНИХ МЕРЕЖ

Кількісна міра інформації, її властивості. Ентропія джерела дискретних повідомлень та її властивості. Інформаційні характеристики джерел дискретних повідомлень. Передача повідомлень каналами з шумами. Взаємна інформація та її властивості.

Швидкість передачі інформації і пропускна здатність дискретного каналу. Методи ефективного кодування. Теорема Шеннона для каналу з завадами.

Інформаційні характеристики джерел неперервних повідомлень. Пропускна здатність неперервного каналу. Епсілон-ентропія, продуктивність, надмірність.

Тема 6. ТЕОРІЯ КОДУВАННЯ

Призначення і класифікація кодів. Лінійні двійкові блочні коди. Основні параметри кодів, їх коригуюча здатність. Принципи завадостійкого кодування.

Декодування з виявленням та виправленням помилок. Систематичні коректувальні коди. Породжуюча та первірна матриці. Синдромне декодування. Коди Хемінга.

Тема 7. ЦИКЛІЧНІ КОДИ

Циклічні коди. Кодування та декодування циклічними кодами. Застосування твірних матриць, твірних поліномів. Приклади реалізації коректуючих та декодуючих пристроїв.

Задачі для перевірки знань

**Жураковський Б.Ю., Варфоломєєва О.Г., Твердохліб М.Г.
ОСНОВИ ТЕОРІЇ ПОТЕНЦІЙНОЇ ЗАВАДОСТІЙКОСТІ**

Тема 8. Аналіз завадостійкості систем електрозв'язку з різними видами модуляції та методами приймання

Оптимальний прийом сигналів. Критерії якості і правила прийому дискретних повідомлень. Методи обробки дискретних сигналів: накопичення, інтегрування, фільтрація, кореляційний та автокореляційний прийом. Алгоритми оптимального прийому, їх реалізація.

Принципи побудови багатоканальних модемів. Багатопозиційні сигнали і їх застосування у високошвидкісних модемах. Алгоритми прийому багатопозиційних сигналів.

Тема 9. ЦИФРОВІ МЕТОДИ ПРИЙОМУ НЕПЕРЕРВНИХ ПОВІДОМЛЕНЬ

Критерії завадостійкості прийому неперервних повідомлень.

Неоптимальні методи приймання дискретних сигналів та їх порівняння з оптимальними методами. Аналіз завадостійкості систем електрозв'язку з різними видами модуляції та методами приймання. Критерії оптимальної демодуляції аналогових сигналів. Оптимальна лінійна фільтрація неперервних сигналів. Фільтр Колмогорова-Вінера. Оптимальна лінійна фільтрація неперервних повідомлень. Фільтр Калмана.

Тема 10. ЦИФРОВІ МЕТОДИ ПЕРЕДАЧІ НЕПЕРЕРВНИХ ПОВІДОМЛЕНЬ

Сучасні системи багатоканального зв'язку. Принципи побудови телекомунікаційних мереж. Цифрові методи передачі неперервних повідомлень. Пропускна здатність багатоканальних систем.

Системи зі зворотним зв'язком.

Архітектура сучасних телекомунікаційних мереж.

Задачі для перевірки знань

В додатку А даються методичні вказівки для виконання курсової роботи.

У кожному навчальному посібнику після розділу запропоновано студентам контрольні запитання для самооцінки засвоєного рівня знань. Наведені типові задачі і приклади побудовані так, щоб студенти, які навчаються за вказаними спеціальностями, здобули чіткі уявлення і знання про загальні системи електрозв'язку, типові сигнали та завади, могли проводити розрахунки характеристик випадкових сигналів на виході каналів, аналізувати архітектури сучасних телекомунікаційних мереж, окремих технічних рішень на мережах зв'язку і прогнозувати очікувані результати. Якщо при самооцінці засвоєння рівня знань відповіді Вас не задовольняють, то необхідно повторити опрацювання матеріалу або прийти на консультацію до викладача.

Послідовність розділів відповідає послідовності вивчення матеріалів за навчальною програмою дисципліни.

Розділ 1

ОПТИМАЛЬНЕ ПРИЙМАННЯ ДИСКРЕТНИХ СИГНАЛІВ. ОСНОВИ ТЕОРІЇ ЗАВАДОСТІЙКОСТІ

1.1. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО ЗАВАДОСТІЙКІСТЬ

Завадостійкістю системи зв'язку називається здатність системи розрізняти (відновлювати) сигнали з заданою вірогідністю.

Звичайно спосіб передавання (спосіб кодування і модуляції) заданий, і потрібно визначити завадостійкість, яку забезпечують різні способи приймання сигналів. Який з можливих способів приймання є оптимальним? Це питання є предметом розгляду теорії завадостійкості, основи якої розроблені академіком В. О. Котельниковим.

Задача визначення завадостійкості всієї системи в цілому дуже складна. Тому часто визначають завадостійкість окремих ланок системи: приймача при заданому способі передавання, системи кодування або системи модуляції при заданому способі приймання тощо.

Гранично досяжна завадостійкість називається, за Котельниковим, *потенційною завадостійкістю*. Порівняння потенційної та реальної завадостійкості пристрою дозволяє дати оцінку якості реального пристрою і знайти ще невикористані резерви. Знаючи, наприклад, потенційну завадостійкість приймача, можна судити, наскільки близька до неї реальна завадостійкість існуючих способів приймання і наскільки доцільне подальше удосконалення їх при заданому способі передавання. Відомості про потенційну завадостійкість приймача при різних способах передавання дозволяють порівняти їх між собою і визначити найбільш досконалі.

У разі відсутності завад кожному прийнятому сигналу x відповідає цілком визначений сигнал s . За наявності завад ця однозначна відповідність порушується. Завада, впливаючи на переданий сигнал, вносить невизначеність щодо того, яке з можливих повідомлень було передано; за прийнятим сигналом x тільки з деякою ймовірністю можна судити про те, що був переданий той чи інший сигнал s . Ця невизначеність описується апостеріорним розподілом імовірностей $P(s/x)$.

Якщо статистичні властивості сигналу s і завади ω відомі, то можна створити приймач, який на підставі аналізу сигналу x знаходитиме апостеріорний розподіл $P(s/x)$. Потім за видом цього розподілу оператором чи самим приймачем за правилом, що визначається заданим критерієм, приймається рішення про те, яке з можливих повідомлень було передано.

Завдання полягає в тому, щоб відтворити за заданим критерієм передане повідомлення щонайкраще. Такий приймач називається *оптимальним*; його завадостійкість буде максимальною при заданому способі передавання.

Незважаючи на випадковий характер сигналів x , у більшості випадків існує можливість виділити множину найбільш імовірних сигналів $\{x_i\}$, що відповідають передаванню деякого сигналу s_i . Геометричне зображення дозволяє множину сигналів замінити областю багатовимірного простору.

Нехай область X сигналів, що приймаються, розбита на неперекривні області X_j ($j=1, 2, \dots, m$), причому кожному сигналу s_i відповідає область X_i . Якщо прийнятий сигнал попав саме в цю область, то приймач вирішує, що передавався сигнал s_i . З деякою ймовірністю сигнал x_i може попасти в будь-яку іншу область X_j ($j \neq i$), і тоді приймається помилкове рішення: замість сигналу s_i відтворюється сигнал s_j . Імовірність того, що переданий сигнал прийнятий правильно, дорівнює $P(x_i/s_i)$, а ймовірність того, що він прийнятий помилково, дорівнює

$$1 - P(x_i/s_i) = \sum_{j \neq i} P(x_j/s_i). \quad (1.1)$$

Умовна ймовірність $P(x_j / s_i)$ залежить від способу формування сигналу, від завад в каналі і від вибраної розв'язувальної схеми приймача.

Повна ймовірність помилкового приймання елемента сигналу, очевидно, дорівнюватиме

$$P_{\Pi} = \sum_{i=1}^m P(s_i) [1 - P(x_i / s_i)], \quad (1.2)$$

де $P(s_i)$ – апіорні ймовірності сигналів, що передаються.

У випадку двійкового каналу область сигналів, які приймаються, розбивається на дві області: X_1 та X_2 . Якщо сигнал x попадає в область X_1 , то відтворюється сигнал s_1 , а якщо в область X_2 , то s_2 .

1.2. КРИТЕРІЇ ОПТИМАЛЬНОГО ПРИЙМАННЯ СИГНАЛІВ

Для того щоб визначити, яка з розв'язувальних схем є оптимальною, необхідно насамперед установити, в якому сенсі розуміється оптимальність. Вибір критерію оптимальності не є універсальним, він залежить від поставленої задачі та умов роботи системи.

Нехай на вхід приймача надходить сума сигналу і завади $x(t) = s_k(t) + \omega(t)$, де $s_k(t)$ – сигнал, якому відповідає кодовий символ a_k ; $\omega(t)$ – адитивна завада з відомим законом розподілу. Сигнал s_k у місці приймання є випадковим з апіорним розподілом $P(s_k)$. На підставі аналізу коливання $x(t)$ приймач відтворює сигнал s_i . У разі наявності завад це відтворення не може бути абсолютно точним. За прийнятою реалізацією сигналу приймач обчислює апостеріорний розподіл $P(s_i / x)$, що містить усі відомості, які можна здобути з прийнятої реалізації сигналу $x(t)$. Тепер треба установити критерій, за яким приймач видаватиме на підставі апостеріорного розподілу $P(s_i / x)$ рішення щодо переданого сигналу s_k .

Для передавання дискретних повідомлень широко використовується **критерій В. О. Котельникова (критерій ідеального спостерігача)**. Відповідно до цього критерію приймається рішення, що передано сигнал s_i , для якого апостеріорна ймовірність $P(s_i / x)$ має найбільше значення, тобто реєструється сигнал s_i , якщо виконуються нерівності

$$P(s_i / x) > P(s_j / x), \quad j \neq i. \quad (1.3)$$

При використанні такого критерію повна ймовірність помилкового рішення буде мінімальною. Дійсно, якщо за сигналом x приймається рішення про те, що був переданий сигнал s_i , то ймовірність правильного рішення дорівнюватиме $P(s_i / x)$, а ймовірність помилки $1 - P(s_i / x)$. Звідси випливає, що максимуму апостеріорної ймовірності $P(s_i / x)$ відповідає мінімум повної ймовірності помилки (1.2).

На підставі формули Бейеса

$$P(s_i / x) = \frac{P(s_i)P(x / s_i)}{P(x)}. \quad (1.4)$$

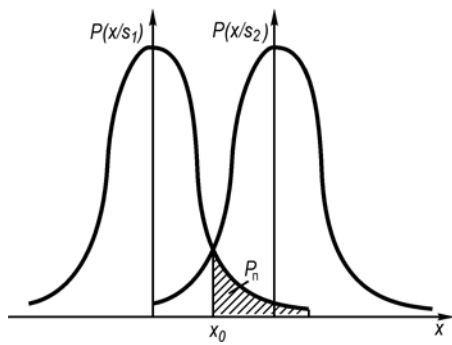


Рис. 1.1. Графік щільності умовного розподілу ймовірностей при передаванні сигналів s_1 і s_2

Тоді нерівність (1.3) можна записати в іншому вигляді:

$$P(s_i)P(x/s_i) > P(s_j)P(x/s_j)$$

Або

$$\frac{P(x/s_i)}{P(x/s_j)} > \frac{P(s_j)}{P(s_i)}$$

Функцію $P(x/s)$ часто називають *функцією правдоподібності*. Чим більше значення цієї функції при даній реалізації сигналу x , тим правдоподібніше, що передавався сигнал s . Відношення, що входить у нерівність (1.5),

$$\Lambda = \frac{P(x/s_i)}{P(x/s_j)} \quad (1.7)$$

називається *відношенням правдоподібності*. Користуючись цим поняттям, правило розв'язання (1.6), що відповідає критерію Котельникова, можна записати так:

$$\Lambda > \frac{P(s_j)}{P(s_i)} \quad (1.8)$$

Якщо передані сигнали рівноймовірні, тобто $P(s_i) = P(s_j) = \frac{1}{m}$, то це правило розв'язання набуває простішого вигляду:

$$\Lambda > 1 \quad (1.9)$$

Отже, критерій ідеального спостерігача зводиться до порівняння відношень правдоподібності (1.8). Цей критерій є більш загальним і називається *критерієм максимальної правдоподібності*.

Розглянемо бінарну систему, в якій передавання повідомлень здійснюється за допомогою сигналів $s_1(t)$ і $s_2(t)$, що відповідають кодовим символам a_1 і a_2 . Рішення приймається за результатом обробки прийнятого коливання $x(t)$ пороговим методом: реєструється s_1 , якщо $x < x_0$, і s_2 , якщо $x \geq x_0$, де x_0 – деякий пороговий рівень x . Тут можуть бути помилки двох видів: відтворюється сигнал s_1 , коли передавався сигнал s_2 , і сигнал s_2 , коли передавався сигнал s_1 . Умовні ймовірності цих помилок (ймовірності переходів) відповідно дорівнюють

$$P_{12} = P(s_1/s_2) = \int_{-\infty}^{x_0} P(x/s_2) dx, \quad (1.10)$$

$$P_{21} = P(s_2/s_1) = \int_{x_0}^{\infty} P(x/s_1) dx. \quad (1.11)$$

Значення інтегралів, які входять у (1.10) та (1.11), можуть бути обчислені як відповідні площі, обмежені графіком щільності умовного розподілу ймовірностей (рис. 1.1). Імовірності помилок першого і другого виду відповідно

$$P_I = P(s_2)P(s_1/s_2) = P_2P_{12}, \quad (1.12)$$

$$P_{II} = P(s_1)P(s_2/s_1) = P_1P_{21}. \quad (1.13)$$

Повна ймовірність помилки при цьому

$$P_{II} = P_I + P_{II} = P_2P_{12} + P_1P_{21}. \quad (1.14)$$

Нехай $P_1 = P_2$, тоді

$$P_{II} = \frac{1}{2}(P_{12} + P_{21}).$$

Неважко переконатися, що в цьому випадку мінімум P_{II} має місце при $P_{12} = P_{21}$, тобто при виборі порога відповідно до рис. 7.1. Для такого порога $P_{II} = P_{12} = P_{21}$. На рис. 1.1 значення P_{II} визначається заштрихованою площею. При будь-якому іншому значенні порога величина P_{II} буде більшою.

Незважаючи на природність і простоту, критерій Котельникова має недоліки. Перший полягає в тому, що для побудови розв'язувальної схеми, як впливає зі співвідношення (1.5), необхідно знати апіорні ймовірності передавання різних символів коду. Другим недоліком цього критерію є те, що всі помилки вважаються однаково небажаними (мають однакову вагу). Проте в деяких випадках таке припущення не є правильним. Наприклад, при передаванні чисел помилка в перших значущих цифрах більш небезпечна, ніж помилка в останніх цифрах. Пропуск команди чи помилкова тривога в різних системах оповіщення можуть мати різні наслідки.

Отже, у загальному випадку, вибираючи критерій оптимального приймання, необхідно враховувати ті втрати, які несе одержувач повідомлення при різних видах помилок. Ці втрати можна виразити деякими *ваговими коефіцієнтами*, приписуваними кожному з помилкових рішень. Позначимо втрати помилкових рішень першого і другого видів відповідно L_{12} і L_{21} . Тоді можна визначити середні очікувані втрати, чи *середній ризик*

$$r = L_{12}P_I + L_{21}P_{II} = L_{12}P_2P_{12} + L_{21}P_1P_{21}. \quad (1.15)$$

Оптимальною розв'язувальною схемою буде та, що забезпечує *мінімум середнього ризику*. Критерій мінімального ризику належить до класу *бейєсових критеріїв*.

У радіолокації широко використовується *критерій Неймана–Пірсона*. При виборі цього критерію враховується, по-перше, що помилкова тривога і пропуск цілі не є рівноцінними за своїми наслідками, і, по-друге, що апіорна ймовірність сигналу, який передається, є невідомою. Якщо пропуск цілі є більш небажаним, то можна задати деяку величину β допустимої ймовірності помилкової тривоги і поставити вимогу, щоб розв'язувальна схема максимізувала ймовірність правильного виявлення $P_{\text{вияв}}$ (або, що те ж саме, мінімізувала ймовірність пропуску $P_{\text{пр}}$).

Відповідно до критерію Неймана–Пірсона приймач є оптимальним у тому випадку, якщо при заданій ймовірності помилкової тривоги

$$P_{\text{п.т}} = \int_{x_0}^{\infty} P(x/0) dx = \beta \quad (1.16)$$

він забезпечує найбільшу ймовірність правильного виявлення:

$$P_{\text{вияв}} = 1 - P_{\text{пр}} = 1 - \int_{-\infty}^{x_0} P(x/s) dx. \quad (1.17)$$

Можна показати, що критерій Неймана–Пірсона приводить до наступного правила розв'язку: ціль вважається виявленою, якщо

$$\Lambda = \frac{P(x/s)}{P(x/0)} > \lambda, \quad (1.18)$$

де λ – деяке число, зумовлене допустимою ймовірністю помилкової тривоги β .

1.3. ОПТИМАЛЬНЕ ПРИЙМАННЯ ДИСКРЕТНИХ СИГНАЛІВ

Джерело дискретних повідомлень характеризується сукупністю можливих елементів повідомлення u_1, u_2, \dots, u_m та ймовірностями появи цих елементів на виході джерела $P(u_1), P(u_2), \dots, P(u_m)$. У передавальному пристрої повідомлення перетворюється в сигнал так, що кожному елементу повідомлення відповідає певний сигнал. Позначимо ці сигнали через s_1, s_2, \dots, s_m , а ймовірності появи їх на виході передавачів (апріорні ймовірності) відповідно через $P(s_1), P(s_2), \dots, P(s_m)$. Очевидно, апріорні ймовірності сигналів $P(s_i)$ дорівнюють апріорним ймовірностям $P(u_i)$ відповідних повідомлень: $P(s_i) = P(u_i)$. У процесі передавання на сигнал накладається завада. Нехай ця завада має рівномірний спектр потужності з інтенсивністю $\frac{1}{2}N_0$. Тоді сигнал на вході можна подати як суму переданого сигналу $s_i(t)$ і завади $\omega(t)$:

$$x(t) = s_i(t) + \omega(t) \quad (i = \overline{1, m}). \quad (1.19)$$

Оскільки сигнали $s_i(t)$, $x(t)$ і завада $\omega(t)$ задані на скінченному інтервалі ($0 < t < T$), то їх можна зобразити у вигляді розкладань по ортогональних функціях:

$$s_i(t) = \sum_l s_{il} \varphi_l(t), \quad \omega(t) = \sum_l \omega_l \varphi_l(t), \quad x(t) = \sum_l x_l \varphi_l(t), \quad (1.20)$$

Де

$$x_l = s_{il} + \omega_l, \quad s_{il} = \int_0^T s_i(t) \varphi_l(t) dt, \quad \omega_l = \int_0^T \omega(t) \varphi_l(t) dt. \quad (1.21)$$

Оскільки ми припускаємо, що завада має нормальний розподіл, то і коефіцієнти Фур'є в останньому виразі (1.21) матимуть нормальний розподіл з дисперсією $\sigma_l^2 = \bar{\omega}_l^2 = \frac{1}{2}N_0$ і середнім значенням, рівним нулю:

$$P(\omega_l) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{\bar{\omega}_l^2}{N_0}\right). \quad (1.22)$$

Коефіцієнти x_l також мають нормальний розподіл з тією ж дисперсією $\frac{1}{2}N_0$ і середнім значенням s_{il} :

$$P(x_l / s_{il}) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left[-\frac{(x_l - s_{il})^2}{N_0}\right]. \quad (1.23)$$

На підставі незалежності коефіцієнтів ω_l багатовимірний розподіл коефіцієнтів x_l , тобто умовний розподіл $P(x/s_i)$, дорівнюватиме добутку одновимірних розподілів [див. третє рівняння (1.21)]:

$$P(x/s_i) = \prod_{l=l_1}^{l_2} P(x_l / s_{il}) = (\pi N_0)^{-n/2} \exp\left[-\frac{1}{N_0} \sum_{l=l_1}^{l_2} (x_l - s_{il})^2\right]. \quad 17.24$$

Підставляючи цей вираз у (1.6), одержимо нерівність, яка визначає умову оптимального приймання за Котельниковим:

$$\frac{\prod P(x/s_i)}{\prod P(x/s_j)} = \frac{\exp\left[-\frac{1}{N_0} \sum_{l=l_1}^{l_2} (x_l - s_{il})^2\right]}{\exp\left[-\frac{1}{N_0} \sum_{l=l_1}^{l_2} (x_l - s_{jl})^2\right]} > \frac{P(s_j)}{P(s_i)}. \quad (1.25)$$

Логарифмуючи обидві частини нерівності, дістаємо еквівалентний вираз

$$\sum_{l=l_1}^{l_2} (x_l - s_{il})^2 - \sum_{l=l_1}^{l_2} (x_l - s_{jl})^2 < N_0 \ln \frac{P(s_i)}{P(s_j)}. \quad (1.26)$$

Відповідно до (1.22) і (1.20) маємо

$$x(t) - s_i(t) = \sum_{l=l_1}^{l_2} (x_l - s_{il}) \phi_l(t). \quad (1.27)$$

Після піднесення в квадрат і усереднення за часом виразу (1.27) з урахуванням властивостей ортогональних функцій $\phi_i(t)$ одержуємо

$$\int_0^{T_0} [x(t) - s_i(t)]^2 dt = \sum_{l=l_i}^{l_2} (x_l - s_{il})^2. \quad (1.28)$$

Тоді умову оптимального приймання (1.26) можна записати в іншому вигляді:

$$\int_0^T [x(t) - s_i(t)]^2 dt - \int_0^T [x(t) - s_j(t)]^2 dt < N_0 \ln \frac{P(s_i)}{P(s_j)}. \quad (1.29)$$

Нерівності (1.25) або еквівалентні їм нерівності (1.26) і (1.29) визначають умови правильного приймання сигналу $s_i(t)$.

У випадку, коли апіорні ймовірності сигналів однакові, тобто $P(s_1) = P(s_2) = \dots = P(s_m) = \frac{1}{m}$, критерій Котельникова набирає простішого вигляду:

$$\int_0^T [x(t) - s_i(t)]^2 dt < \int_0^T [x(t) - s_j(t)]^2 dt, \quad j \neq i. \quad (1.30)$$

Звідси випливає, що при рівноймовірних сигналах оптимальний приймач відтворює повідомлення, яке відповідає переданому сигналу з найменшим середньоквадратичним відхиленням від прийнятого сигналу.

Розкривши дужки в (1.30), матимемо

$$\int_0^T x^2(t) dt + \int_0^T s_i^2(t) dt - 2 \int_0^T x(t) s_i(t) dt < \int_0^T x^2(t) dt + \int_0^T s_j^2(t) dt - 2 \int_0^T x(t) s_j(t) dt.$$

Для сигналів, енергії яких однакові, ця нерівність для всіх $j \neq i$ набирає простішої форми:

$$\int_0^T x(t) s_i(t) dt > \int_0^T x(t) s_j(t) dt. \quad (1.31)$$

У цьому випадку умову оптимального приймання можна сформулювати так: *якщо всі можливі сигнали рівноймовірні і мають однакову енергію, оптимальний приймач відтворює повідомлення, що відповідає тому переданому сигналу, взаємна кореляція якого з прийнятим сигналом максимальна.*

Для двійкової системи отриманим результатам можна дати дуже наочне геометричне трактування. Нехай передаються сигнали s_1 та s_2 . Першому сигналу відповідає вектор s_1 у n -вимірному просторі, а другому – вектор s_2 . Прийнятому сигналу відповідає вектор x , рівний сумі векторів сигналу s і завади ω . Простір можливих значень сигналу можна розбити на дві області так, щоб при попаданні кінця вектора x в одну область відтворювався сигнал s_1 (область сигналу s_1), а при попаданні в іншу область – сигнал s_2 (область сигналу s_2). Якщо вектор x , який відповідає даному сигналу, попадає в область іншого сигналу, то має місце помилка (замість s_1 відтворюється s_2 , чи навпаки, s_2 замість s_1). Імовірність помилки, очевидно, залежить від конфігурації областей

сигналу. В оптимальному приймачі Котельникова простір сигналів розбивається на області сигналу s_1 і сигналу s_2 так, щоб повна ймовірність помилки (1.14) була мінімальною.

Якщо сигнали рівноймовірні, а завади мають рівномірний розподіл, то оптимальним розбиттям простору буде таке, при котрому будь-яка точка x належить області того сигналу s , кінець вектора якого знаходиться найближче до точки x . У двовимірній моделі (рис. 1.2, а) для двійкової системи границею областей сигналів s_1 і s_2 є геометричне місце точок, рівновіддалених від s_1 і s_2 , тобто гіперплощина, яка перпендикулярна до вектора різниці $\Delta s = s_1 - s_2$ і розділяє його навпіл.

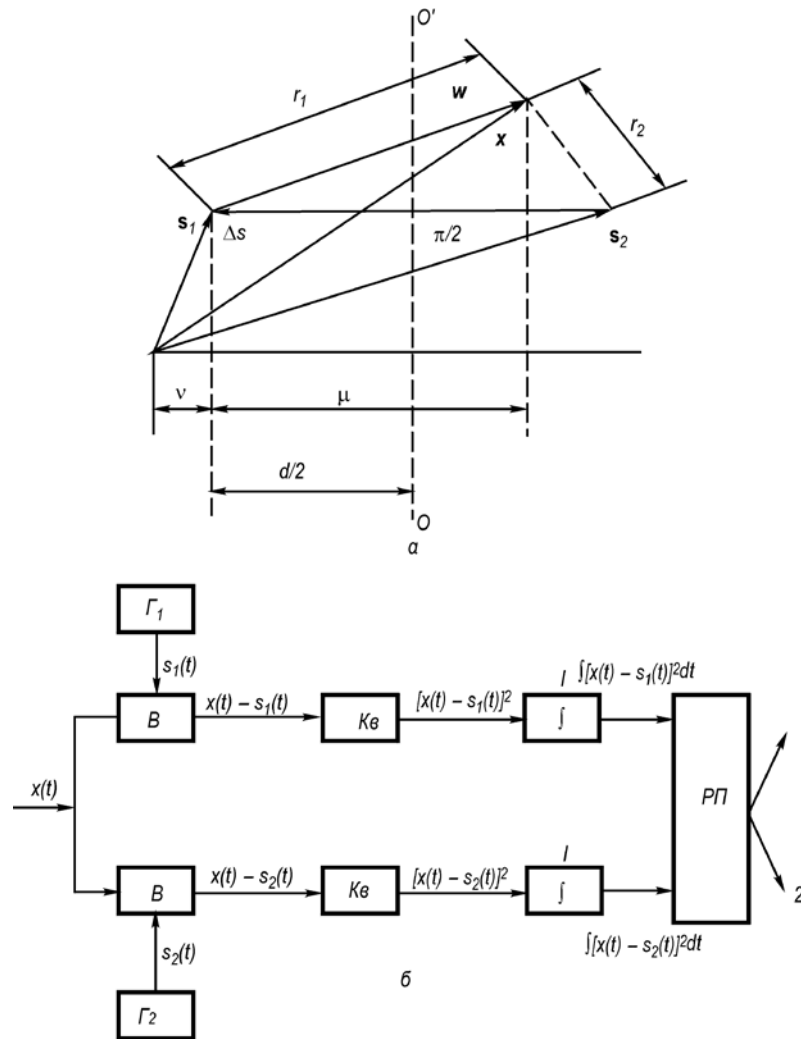


Рис. 1.2. Геометричне зображення роботи оптимального приймача (а) і функціональна схема оптимального приймача В. О. Котельникова (б)

Якщо, наприклад, передавався сигнал s_1 , то помилка станеться в тому випадку, коли виконується нерівність

$$r_2 < r_1 \text{ або } \mu > \frac{1}{2}d,$$

де $r_1 = \|x - s_1\|$; $r_2 = \|x - s_2\|$; μ – проекція ω на вектор, колінеарний Δs , тобто $\mu = \frac{\omega \Delta s}{\|\Delta s\|}$.

Замість нерівності (1.30) можна записати $\|x - s_2\|^2 < \|x - s_1\|^2$, або в евклідовій метриці

$$\int_0^T [x(t) - s_2(t)]^2 dt < \int_0^T [x(t) - s_1(t)]^2 dt. \quad (1.32)$$

Умова (1.32) цілком збігається з умовою (1.30).

Структурна схема приймача, що реалізує операції (1.32), наведена на рис. 1.2, б. Тут Γ_1 і Γ_2 – генератори опорних сигналів, що формують точні копії переданих сигналів s_1 і s_2 , B – віднімальний пристрій, $Kв$ – квадратуєчий пристрій, I – інтегратор, $ПП$ – схема порівняння і вибору (розв’язувальний пристрій).

Нерівність (1.32) можна записати в іншому вигляді, розкривши дужки під інтегралами:

$$-2 \int_0^T x(t)s_2(t)dt + \int_0^T s_2^2(t)dt < -2 \int_0^T x(t)s_1(t)dt + \int_0^T s_1^2(t)dt$$

Або

$$\int_0^T x(t)[s_1(t) - s_2(t)]dt > \frac{1}{2}(E_2 - E_1). \quad (1.33)$$

Ця нерівність повністю еквівалентна нерівності (1.32), але вимагає іншої схемної реалізації оптимального приймача.

На рис. 1.3, а наведена структурна схема приймача, що реалізує умови роботи (1.33). За цією схемою після операцій перемноження (Π) та інтегрування (I) виконується порівняння отриманого результату з постійним порогом, рівним різниці енергій сигналів $\frac{1}{2}(E_2 - E_1)$.

Ця схема простіша за схему на рис.1.2, б, проте вона потребує в разі зміни рівня сигналів автоматичного регулювання порога. Цей недолік усувається, якщо сигнали мають однакову енергію ($E_2 = E_1$); тоді поріг дорівнює нулю і розв’язувальна схема визначає тільки знак сигналу на виході.

При $E_2 = E_1$ спрощується і схема приймача на рис. 1.2, б. Розкривши дужки в (1.32), одержуємо умови оптимального приймання у вигляді

$$\int_0^T x(t)s_1(t)dt < \int_0^T x(t)s_2(t)dt, \quad (1.34)$$

що збігається з умовою (1.29). Отже, при $E_2 = E_1$ приймач Котельникова перетворюється в кореляційний (когерентний) (рис. 1.3, б).

Оптимальне приймання можна також реалізувати за схемою з погодженими лінійними фільтрами (рис. 1.3, в), імпульсні реакції яких мають бути $g_i(t) = cs_i(T - t)$, де c – сталий коефіцієнт.

Розглянуті схеми оптимальних приймачів належать до типу когерентних, вони враховують не тільки амплітуду, але й фазу високочастотного сигналу.

Зазначимо, що в схемах оптимальних приймачів фільтри на вході відсутні, а в реальних приймачах вони завжди є. Це означає, що оптимальний приймач при флуктуаційних завадах не потребує фільтрації на вході. Його завадостійкість, як ми побачимо далі, не залежить від ширини смуги пропускання приймача.

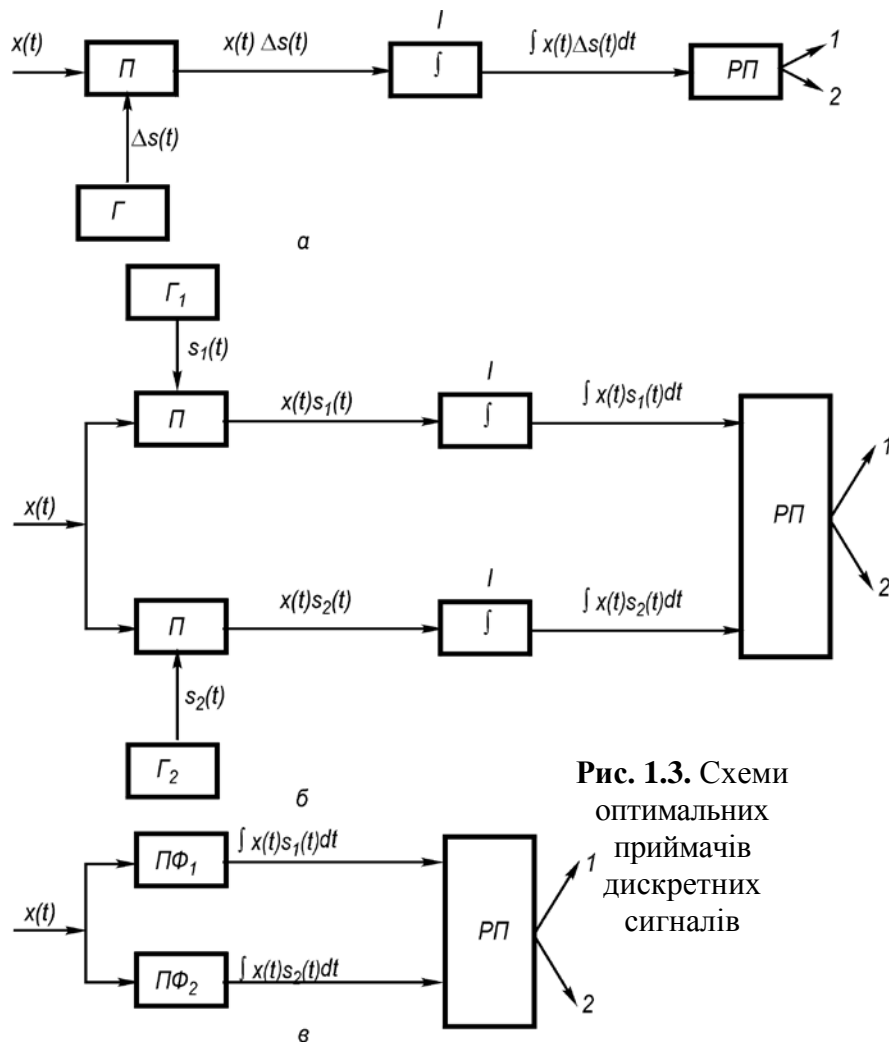


Рис. 1.3. Схеми оптимальних приймачів дискретних сигналів

1.4. ІМОВІРНІСТЬ ПОМИЛКИ ПРИ КОГЕРЕНТНОМУ ПРИЙМАННІ ДВІЙКОВИХ СИГНАЛІВ

Визначимо ймовірність помилки в системі передавання двійкових сигналів на *оптимальний приймач*. Ця ймовірність, очевидно, буде мінімально можливою і характеризуватиме потенційну завадостійкість при даному способі передавання. У разі приймання сигналів на реальний приймач завадостійкість може дорівнювати потенційній, але не може бути більшою за неї.

Нехай сигнал набуває значень $s_1(t)$ з імовірністю P_1 і значень $s_2(t)$ з імовірністю P_2 . Якщо передавався сигнал s_1 , то відповідно до умови (1.29) помилка станеться в тому випадку, коли

$$\int_0^T [x(t) - s_1(t)]^2 dt - \int_0^T [x(t) - s_2(t)]^2 dt > N_0 \ln \frac{P_1}{P_2}. \quad (1.35)$$

Оскільки $x(t) = s_1(t) + \omega(t)$, то нерівність (1.35) можна звести до вигляду

$$\int_0^T \omega^2(t) dt - \int_0^T [s_1(t) - s_2(t) + \omega(t)]^2 dt > N_0 \ln \frac{P_1}{P_2}$$

Або

$$\int_0^T \omega(t)[s_1(t) - s_2(t)] dt < \frac{1}{2} N_0 \ln \frac{P_2}{P_1} - \frac{1}{2} \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2 dt. \quad (1.36)$$

Відповідно до першого і другого виразів (1.20) ліву частину нерівності (1.36) можна записати так:

$$\xi = \int_0^T \omega(t)[s_1(t) - s_2(t)] dt = \sum_l \omega_l (s_{1l} - s_{2l}). \quad (1.37)$$

Кожен коефіцієнт ω_l має нормальний розподіл із середнім значенням, рівним нулю, тому сума (1.37) також являтиме нормальну випадкову величину ξ з нульовим середнім значенням і дисперсією

$$D\xi = \overline{\xi^2} = \sum_l \overline{\omega_l^2} (s_{1l} - s_{2l})^2 = \frac{1}{2} N_0 \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2 dt = \sigma_\xi^2. \quad (1.38)$$

Щільність імовірності випадкової величини ξ

$$p(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\xi^2}} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma_\xi^2}}.$$

Згідно з (1.36) помилка станеться при передаванні сигналу s_1 , якщо

$$\xi < A = \frac{1}{2} N_0 \ln \frac{P_2}{P_1} - \frac{1}{2} \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2 dt,$$

а її ймовірність дорівнюватиме

$$P_{21} = P(\xi < A) = \int_{-\infty}^A p(\xi) d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\xi^2}} \int_{-\infty}^A e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma_\xi^2}} d\xi. \quad (1.39)$$

Ввівши нову змінну $u = \xi/\sigma_\xi$, на підставі співвідношення, наведеного в [42], маємо

$$P_{21} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{A}{\sigma_\xi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{1}{2} \left[1 + \Phi \left(\frac{A}{\sigma_\xi} \right) \right],$$

де

$$\frac{A}{\sigma_{\xi}} = \frac{\frac{N_0}{2} \ln \frac{P_2}{P_1} - \frac{1}{2} \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2 dt}{\sqrt{\frac{N_0}{2} \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2 dt}}.$$

Після нескладних перетворень остаточно дістаємо [41]:

$$P_{\text{п}1} = \frac{1}{2} [1 - \Phi(\lambda_1)], \quad (1.40)$$

де

$$a_{21} = a + \frac{1}{2a} \ln \frac{P_1}{P_2}; \quad (1.41)$$

$$a^2 = \frac{1}{2N_0} \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2 dt. \quad (1.42)$$

Аналогічно визначається ймовірність помилки передавання сигналу $s_2(t)$:

$$P_{\text{п}2} = \frac{1}{2} [1 - \Phi(\lambda_2)], \quad (1.43)$$

Де

$$a_{12} = a + \frac{1}{2a} \ln \frac{P_2}{P_1}. \quad (1.44)$$

Повна ймовірність помилки при оптимальному прийманні бінарних сигналів $s_1(t)$ і $s_2(t)$

$$P_{\text{п}} = P_1 P_{\text{п}1} + P_2 P_{\text{п}2}, \quad (1.45)$$

або, згідно з (1.40) і (1.43),

$$P_{\text{п}} \approx \frac{1}{2} P_1 [1 - \Phi(\lambda_1)] + \frac{1}{2} P_2 [1 - \Phi(\lambda_2)]. \quad (1.46)$$

З отриманих формул випливає, що ймовірність помилки, яка визначає потенційну завадостійкість, залежить від двох величин: a^2 і P_2/P_1 . Перша величина визначається відношенням питомої енергії різниці сигналів до інтенсивності завади N_0 . Чим більше це відношення, тим більша потенційна завадостійкість. Відношення апріорних імовірностей P_2/P_1 залежить від статистичних властивостей переданих повідомлень.

Якщо сигнали, які передаються, рівноймовірні, тобто $P_1 = P_2 = 0,5$, то (1.46) спрощується і набуває вигляду

$$P_{\text{п}} = \frac{1}{2} [1 - \Phi(\mu)] \quad (1.47)$$

Формулу (1.47) легко одержати з геометричних зображень. Як видно з рис. 1.2, при передаванні сигналу s_1 помилка станеться у разі виконання нерівностей $r_1 > r_2$ чи $\mu > \frac{1}{2}d$. Отже, ймовірність помилки можна визначити як імовірність виконання однієї з цих нерівностей, тобто

$$P_{\text{п}} = P(r_1 > r_2) = P\left(\mu > \frac{1}{2}d\right).$$

Помноживши обидві частини нерівності на d , одержуємо

$$P_{\text{п}} = P\left(\xi > \frac{1}{2}d^2\right),$$

де $\xi = \mu d \omega \Delta s$ – випадкова величина (1.37), що має нормальний розподіл з дисперсією $D_{\xi} = \frac{1}{2}N_0 d^2$ (1.38). Тоді маємо [45]

$$P_{\text{п}} = P\left(\xi > \frac{1}{2}d^2\right) = \frac{1}{2} [1 - \Phi(\dots)],$$

Де

$$a^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{d^2}{\sqrt{D_{\xi}}} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{d^2}{N_0} = \frac{1}{2N_0} \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2 dt,$$

що збігається з (1.47) і (1.42).

У разі малої інтенсивності завад, коли $a \gg 1$, другим членом формул (1.41) та (1.44) можна знехтувати. У цьому випадку формула (1.46) також зводиться до формули (1.47), причому ймовірність помилки практично не залежить від P_1 і P_2 . При великому рівні завад, коли a мале, залежність імовірності помилки від відношення апріорних імовірностей P_1/P_2 стає помітною. Зі збільшенням цього відношення ймовірність помилки збільшується [41].

Отже, для рівноймовірних сигналів імовірність помилки цілком визначається величиною a . Значення цієї величини залежить від спектральної щільності завад N_0 і сигналів $s_1(t)$ і $s_2(t)$, які передаються.

Для систем з активною паузою, в яких сигнали мають однакову енергію $\overline{Ts_1^2(t)} = \overline{Ts_2^2(t)} = E$, величину a^2 можна подати в наступному вигляді:

$$a^2 = \frac{E(1 - P_{12})}{N_0} = q_0(1 - P_{12}), \quad (1.48)$$

де $P_{12} = \frac{1}{E} \int_0^T s_1(t)s_2(t)dt$ – коефіцієнт взаємної кореляції між сигналами; $q_0 = E/N_0$ – відношення енергії сигналу до питомої потужності завади.

Імовірність помилки для таких систем визначається формулою

$$P_n = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \Phi \left[\sqrt{q_0} (1 - P_{12}) \right] \right\}. \quad (1.49)$$

Звідси випливає, що при $P_{12} = -1$, тобто $s_1(t) = -s_2(t)$, система забезпечує найбільшу потенційну завадостійкість. Це система з протилежними сигналами. Для неї $a_{\max}^2 = 2q_0$. Практичною реалізацією системи з протилежними сигналами є система з фазовою маніпуляцією.

Порівнювати різні системи передавання дискретних повідомлень зручно за параметром a^2 , який є зведеним відношенням сигнал–завада на виході оптимального приймача при заданому способі передавання:

$$a^2 = q_{\text{вих}} = q_0(1 - P_{12}) \approx TF(1 - P_{12})q_{\text{вх}}, \quad (1.50)$$

де $q_{0\text{вх}} = TFq$, або за величиною виграшу

$$\gamma = \frac{q_{\text{вих}}}{q_{\text{вх}}} = TF(1 - P_{12}).$$

Множник TF визначає виграш за рахунок оптимальної обробки сигналу на прийомі, а множник $(1 - P_{12})$ – за рахунок способу передавання.

У загальному вигляді радіотелеграфний сигнал можна записати так:

$$s_i(t) = A_i(t) \cos(\omega_i t + \varphi_i), \quad 0 < t < \tau_0, \quad i = 1, 2, \quad (1.51)$$

де параметри коливання A_i , ω_i , φ_i набувають певних значень в залежності від виду маніпуляції. Згідно з (1.42) для сигналів (1.51) маємо:

$$a^2 = \left\{ \frac{\tau_0}{4N_0} \overline{A_1^2(t) + A_2^2(t)} - \frac{2\overline{A_1(t)A_2(t)}}{\tau_0(\omega_1 - \omega_2)} \left[\sin[(\omega_1 - \omega_2)\tau_0 + \varphi_1 - \varphi_2] - \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \right] \right\}. \quad (1.52)$$

Для амплітудної маніпуляції $A_1(t) = A_0$, $A_2(t) = 0$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$; тоді

$$a_{\text{AM}}^2 = \frac{A_0^2 \tau_0}{4N_0} = \frac{1}{2} q_0.$$

Для частотної маніпуляції $A_1(t) = A_2(t) = A_0$, $\omega_1 \neq \omega_2$. При оптимальному виборі розносу частот $(\omega_1 - \omega_2) \cdot 2\pi = k / \tau_0$, де k – ціле число; $\varphi_1 = \varphi_2$. Тоді на підставі (1.50) одержуємо

$$a_{\text{ЧМ}}^2 = q_0 \cdot$$

Для фазової маніпуляції $A_1(t) = A_2(t) = A_0$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$, $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$; тоді

$$a_{\text{ФМ}}^2 = 2q_0 \cdot$$

Порівняння отриманих формул показує, що з усіх систем передавання бінарних сигналів найбільшу потенційну завадостійкість забезпечує система з фазовою маніпуляцією. У порівнянні з системою ЧМ вона дозволяє одержати дворазовий, а в порівнянні з системою АМ – чотириразовий виграв за потужністю.

У системах зв'язку сигнал звичайно складається з послідовності простих сигналів. Так, у телеграфії кожній букві відповідає кодова комбінація з п'яти елементарних посилок. Можливі й складніші комбінації. Якщо елементарні сигнали, що складають кодову комбінацію, незалежні, то ймовірність помилкового приймання кодової комбінації визначається наступною формулою:

$$P_{\text{п.к}} = 1 - (1 - P_{\text{п}})^n, \quad (1.53)$$

де $P_{\text{п}}$ – ймовірність помилки елементарного сигналу; n – число елементарних сигналів у кодовій комбінації (значність коду).

Слід звернути увагу, що ймовірність помилки в розглянутих вище випадках цілком визначається відношенням енергії сигналу до спектральної щільності завади і не залежить від форми сигналу. В загальному випадку, коли спектр завади відрізняється від рівномірного, ймовірність помилки можна зменшити, змінивши спектр сигналу, тобто його форму.

1.5. ЙМОВІРНІСТЬ ПОМИЛКИ ПРИ КОГЕРЕНТНОМУ ПРИЙМАННІ БАГАТОПОЗИЦІЙНИХ СИГНАЛІВ

Робота приймача в багатопозиційних системах зводиться до розрізнення m сигналів, що відповідають m позиціям коду. Схему приймача можна уявити собі як таку, що складається з m каналів (гілок), кожний з яких розрахований на приймання одного визначеного сигналу. Одним із прикладів багатопозиційної системи є система з частотною маніпуляцією, сигналами якої є гармонічні коливання різних частот. Приймач у цій системі містить m фільтрів, настроєних на частоти сигналів, що передаються. За допомогою цих фільтрів і здійснюється поділ (розрізнення) сигналів.

Нехай $s_1(t)$, $s_2(t)$, ..., $s_m(t)$ – сигнали, використовувані для передачі; $\omega(t)$ – адитивна завада, що впливає на приймач; x_1 , x_2 , ..., x_m – прийняті сигнали. Якщо передавався сигнал $s_1(t)$, то на перший фільтр надійдуть сигнал і завада, тобто $x_1 = s_1 + \omega$, а на інші фільтри – тільки завада. Приймач порівнює прийняті сигнали і відтворює найбільший з них, тобто виносить рішення про те, що передано k -тий сигнал, якщо $x_k = \max(x_1, x_2, \dots, x_m)$. Оскільки ми припустили, що передавався сигнал s_1 , то ймовірність правильного рішення дорівнюватиме

$$P_{\text{прав}} = P(x_1 > x_2, x_3, \dots, x_m),$$

а ймовірність помилки

$$P_{\text{п}} = 1 - P_{\text{прав}}.$$

Оптимальний когерентний приймач у m -позиційній системі являє собою багатоканальний корелятор чи систему з m погоджених фільтрів. Структурна схема такого приймача аналогічна схемам на рис. 1.3, б або рис. 1.3, в для двійкових сигналів (різниця лише в числі каналів). У цьому

разі приймач відповідно до умов (1.31) обчислює функцію взаємної кореляції прийнятого сигналу $x(t)$ з усіма m опорними сигналами:

$$y_k = \int_0^T s_k(t)x(t)dt = \int_0^T s_k(t)[s_1(t) + \omega(t)]dt, \quad k = \overline{1, m}, \quad (1.54)$$

і видає рішення про те, що був переданий той сигнал, кореляція якого найбільша. Ймовірність правильного рішення (якщо передається сигнал s_1) дорівнюватиме

$$P_{\text{прав}} = P(y_1 > y_2, y_3, \dots, y_m). \quad (1.55)$$

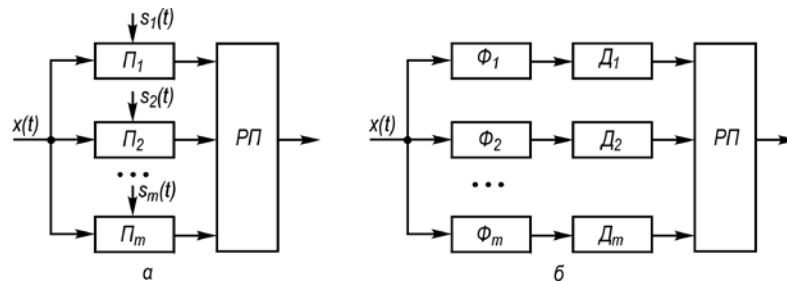


Рис. 1.4. Функціональні схеми приймачів багатопозиційних сигналів

На рис. 1.4, *a* наведена структурна схема когерентного приймача багатопозиційних сигналів, побудована на базі кореляційної техніки. У кожному каналі цієї схеми виконується синхронне детектування сигналів. Отримані відліки надходять на схему порівняння (розв'язувальний пристрій *РП*), після чого видається рішення про те, який з m сигналів був переданий.

Визначимо ймовірність помилки при оптимальному когерентному прийманні ортогональних m -позиційних сигналів. Вважатимемо, що всі можливі сигнали рівноймовірні і мають однакову енергію E . Для цього випадку умови правильного приймання сигналу s_1 згідно з (1.31)

$$\int_0^T x(t)s_1(t)dt > \int_0^T x(t)s_j(t)dt, \quad j = \overline{2, m}.$$

Оскільки $x(t) = s_1(t) + \omega(t)$, $\int_0^T s_1(t)s_j(t)dt = 0$ і $\int_0^T s_1^2(t)dt = E$, то ця нерівність набирає вигляду

$$\int_0^T \omega(t)[s_1(t) - s_j(t)]dt > -E \quad \text{або} \quad \int_0^T s_j(t)\omega(t)dt < \int_0^T s_1(t)\omega(t)dt + E.$$

Розглянемо функцію $\xi_j = \int_0^T s_j(t)\omega(t)dt$, що є нормальною випадковою величиною (завадою на виході j -го каналу) з дисперсією

$$D\xi_j = \sigma_\xi^2 = \overline{\xi_j^2} = \frac{1}{2}N_0E.$$

Щільність імовірності величини ξ_j

$$p(\xi_j) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0 E}} \exp\left(-\frac{\xi_j^2}{N_0 E}\right).$$

Ймовірність того, що завада в j -му каналі не перевищить сумарного значення сигналу і завади в першому каналі, тобто ймовірність того, що $\xi_j < \xi_1 + E$, дорівнюватиме

$$\int_{-\infty}^{\xi_1 + E} \frac{\exp\left[-\frac{\xi_j^2}{N_0 E}\right]}{\sqrt{\pi N_0 E}} d\xi_j = \frac{1}{2} \left[1 + \Phi\left(t + \sqrt{2q_0}\right) \right],$$

де $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, $t = \frac{\xi_1}{\sqrt{\frac{N_0 E}{2}}} = \frac{\xi_1}{\sigma_\xi}$, $q_0 = \frac{E}{N_0}$.

Ймовірність того, що завада ξ_j у всіх $m-1$ каналах без сигналу не перевищить сумарного значення сигналу і завади в першому каналі,

$$P(\xi_j) = \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} \left[1 + \Phi\left(t + \sqrt{2q_0}\right) \right]^{m-1}.$$

Інтегрування цього виразу за всіма можливими значеннями завади ξ_j дає ймовірність правильного приймання

$$P_{\text{прав}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \left\{ \frac{1}{2} \left[1 + \Phi\left(t + \sqrt{2q_0}\right) \right] \right\}^{m-1} dt. \quad (1.56)$$

Ймовірність помилки

$$P_{\text{п.кг}} = 1 - P_{\text{прав}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(t + \sqrt{q_0} \right) \right]^{m-1} dt. \quad (1.57)$$

В окремому випадку при $m=2$ вираз (1.57) перетворюється у формулу, аналогічну (1.47) для двійкових систем:

$$P_{\text{п}} = \frac{1}{2} \left[1 + \Phi\left(\sqrt{q_0}\right) \right].$$

При $m > 2$ інтеграл у правій частині (1.57) може бути обчислений наближеними методами. Якщо відношення сигнал-завада відносно велике ($q_0 > 1$), то має місце асимптотичний вираз

$$P_{\text{п.кг}} \approx \frac{m-1}{2} \left[1 + \Phi\left(\sqrt{q_0}\right) \right]. \quad (1.58)$$

При неоптимальному когерентному прийманні дискретних сигналів у схемі інтегратор відсутній. У цьому випадку після синхронного детектора ставиться фільтр нижніх частот і береться

відлік (стробування) на виході фільтра в середині посилки. Можна показати, що ймовірність помилки у разі неоптимального когерентного приймання визначається отриманими вище виразами (1.57) і (1.58), якщо в останні замість q_0 підставити $q = q_0 \frac{1}{3}(TF) = P_c / P$.

1.6. НЕКОГЕРЕНТНЕ ПРИЙМАННЯ ДИСКРЕТНИХ СИГНАЛІВ

При некогерентному прийманні інформація про фазу прийнятих сигналів не використовується. Такий спосіб застосовується в каналах зі змінними параметрами, коли фаза сигналу випадково змінюється і її визначення викликає значні труднощі, а також у каналах зі сталими параметрами з метою спрощення схеми приймача.

Оптимальний некогерентний приймач обчислює модуль (обвідну) функції взаємної кореляції $z_k = \left| \int_0^T \dot{x}(t) \dot{s}_k^*(t) dt \right|$ і вирішує, що був переданий той сигнал, для якого значення z у деякий момент часу $t = t_0$ найбільше. Нехай передавався сигнал $s_1(t)$; тоді умову правильного приймання цього сигналу можна записати в наступному вигляді:

$$z_k < z_1 \text{ або } \left| \int_0^T \dot{x}(t) \dot{s}_k^*(t) dt \right| < \left| \int_0^T \dot{x}(t) \dot{s}_1^*(t) dt \right| \quad (k=2,3,\dots,m) \quad (1.59)$$

Схема приймача, що реалізує умову (1.59), наведена на рис. 1.4, б. Ця схема містить m погоджених фільтрів Φ , що відповідають m окремим сигналам. На виході кожного фільтра напруга пропорційна функції взаємної кореляції $y_k = \int_0^T \dot{x}(t) \dot{s}_k(t) dt$. Амплітудний детектор \mathcal{D} виділяє обвідну (модуль) цієї функції. Потім робиться відлік сигналу і приймається рішення.

Припустимо, що сигнали рівноймовірні, мають однакову енергію і є ортогональними. За цих умов маємо

$$z_k^2 = \left[2 \int_0^T \omega(t) s_k(t) dt \right]^2 + \left[2 \int_0^T \omega(t) \xi_k(t) dt \right]^2 = \xi_k^2 + \eta_k^2, \quad z_1^2 = (2E + \xi_1)^2 + \eta_1^2, \quad (1.60)$$

де $\xi_k = 2 \int_0^T \omega(t) s_k(t) dt$; $\eta_k = 2 \int_0^T \omega(t) \xi_k(t) dt$.

Випадкові величини ξ і η мають нормальний розподіл з нульовим середнім значенням і дисперсією $\sigma^2 = \sigma_\xi^2 = \sigma_\eta^2 = 2N_0E$. У цьому легко переконатися так само, як це було зроблено при виведенні формули (1.38).

Випадкова величина z_k^2 є сумою квадратів двох незалежних випадкових величин ξ_k і η_k з нормальним розподілом, нульовим середнім значенням і однаковими дисперсіями, рівними $2N_0E$. Така величина, як відомо, має розподіл Релея [42]. У нашому випадку

$$p(z_k) = \frac{z_k}{2N_0E} e^{-\frac{z_k^2}{4N_0E}} \quad (1.61)$$

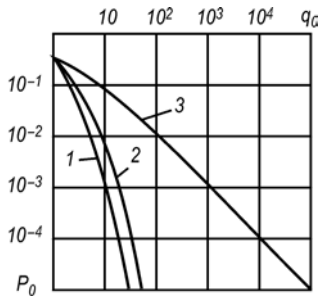


Рис. 1.5. Залежність імовірності помилки в біполярній системі з активною паузою від відношення сигнал-завада.

Випадкову величину z_1^2 можна розглядати як квадрат векторної суми постійного вектора, довжина якого $L=2E$, і випадкового вектора з нормально розподіленими незалежними складовими, що мають дисперсію $\sigma_1^2=2N_0E$. Тому величина z_1 підпорядковується узагальненому розподілу Релея з щільністю ймовірностей

$$p(z_1) = \frac{z_1}{2N_0E} \exp\left(-\frac{z_1^2 + L^2}{4N_0E}\right) I_0\left(\frac{z_1L}{2N_0E}\right). \quad (1.62)$$

Випадкові величини z_k є не що інше, як обвідні напруги в каналах без сигналу, тобто обвідні завад. Оскільки завади ми вважаємо гауссовими, то цим і пояснюється, що z_k має релєївський розподіл. Випадкова величина z_1 – це обвідна сумарного коливання сигналу і завади в каналі з сигналом.

Тепер можна визначити ймовірність помилки при некогерентному прийманні. У загальному випадку вона дорівнюватиме

$$P_{\text{п.нкг}} = 1 - P(z_1 > z_2, z_3, \dots, z_m). \quad (1.63)$$

При бінарному передаванні ($m=2$)

$$P_{\text{п.нкг}} = 1 - P(z_1 > z_2) = P(z_2 > z_1).$$

Для обчислення ймовірності помилки спочатку треба знайти при деякому фіксованому значенні z_1 імовірність того, що $z_2 > z_1$. Ця ймовірність виражається інтегралом

$$I(z_1) = \int_{z_1}^{\infty} P(z_2) dz_2,$$

який має різні значення при різних z_1 . Щоб знайти повну ймовірність того, що $z_2 > z_1$, необхідно $I(z_1)$ усереднити по всіх можливих значеннях z_1 відповідно до розподілу $P(z_1)$. Таким чином,

$$\begin{aligned} P_{\text{п.нкг}} &= P(z_2 > z_1) = \int_0^{\infty} I(z_1) P(z_1) dz_1 = \\ &= \int_0^{\infty} P(z_1) dz_1 \int_{z_1}^{\infty} P(z_2) dz_2 \end{aligned} \quad (1.64)$$

Після підстановки в (1.64) виразів $P(z_2)$ і $P(z_1)$ відповідно до (1.61) і (1.62) та інтегрування одержуємо наступний вираз для ймовірності помилки при оптимальному некогерентному прийманні двійкових сигналів:

$$P_{\text{п2}} = \frac{1}{2} e^{-\frac{q_0}{2}}, \quad (1.65)$$

де $q_0 = E/N_0$.

Для m -позиційних систем слушним є наближене співвідношення [45]

$$P_{\text{п.нкг}} \approx \frac{m-1}{2} e^{-\frac{q_0}{2}}. \quad (1.66)$$

Із порівняння (1.58) і (1.66) випливає, що ймовірність помилки в багатопозиційних системах $P_{\text{пм}}$ приблизно визначається через ймовірність помилки у відповідній двійковій системі $P_{\text{п2}}$. Їхнє співвідношення виглядає так:

$$P_{\text{пм}} \approx (m-1)P_{\text{п2}}. \quad (1.67)$$

На рис. 1.5 наведені графіки залежності ймовірності помилки в двійковій системі з активною паузою від відношення сигнал–завада при когерентному і некогерентному прийманні. Порівняння кривих показує, що оптимальне когерентне приймання несуттєво відрізняється за завадостійкістю від оптимального некогерентного приймання, а при неоптимальному прийманні і великому рівні завад ($q < 1$) розбіжності можуть бути значними [45].

1.7. ПЕРЕДАВАННЯ ДИСКРЕТНИХ СИГНАЛІВ ПО КАНАЛАХ ІЗ ЗМІННИМИ ПАРАМЕТРАМИ

У системах передавання інформації, параметри каналу яких незмінні, ймовірність помилки обумовлена лише наявністю адитивних завад. Оптимальний приймач таких систем використовує всі параметри сигналу і забезпечує максимально можливу завадостійкість. За реальних умов параметри каналу і відповідно параметри сигналу можуть випадково змінюватися, тому ефективне використання їх на прийомі ускладнюється, а завадостійкість неминуче погіршується.

У реальних каналах сигнали на вхід приймача можуть надходити різними шляхами з різними загасаннями μ_k і різними запізнюваннями τ_k . Прийнятий сигнал $x(t)$ у цьому випадку можна подати у вигляді суми:

$$x(t) = \sum_{k=1}^n \mu_k s(t - \tau_k) + \omega(t), \quad (1.68)$$

де μ_k і τ_k – випадкові процеси, що в загальному випадку залежать від часу; $\omega(t)$ – адитивна завада.

Канали, описувані виразом (1.68), називаються *багатопроменевими*.

У багатьох випадках має місце тільки один шлях поширення сигналу; в такому разі канали зв'язку описуються виразом

$$x(t) = \mu s(t - \tau) + \omega(t) \quad (1.69)$$

і називаються *однопроменевими*. Якщо величини μ і τ фіксовані в часі, то маємо канали зі сталими параметрами. Це, наприклад, канали проводового зв'язку та ультракороткохвильові канали при передаванні в межах прямої видимості.

Майже усі види радіоканалів є каналами з випадково змінними параметрами. До цього класу каналів належать короткохвильові лінії зв'язку, в яких завдяки зміні стану іоносфери відбуваються неперервні коливання амплітуди сигналу в точці приймання. Випадкові зміни умов поширення радіохвиль мають місце на ультракоротких хвилях, а також на середніх і навіть довгих хвилях.

Будь-які зміни коефіцієнта передачі і часу поширення сигналів спричинюють флуктуації сигналів на виході каналів і можуть розглядатися як завади. Зміни коефіцієнта μ проявляються у вигляді флуктуацій амплітуди сигналу і називаються *мультиплікативною завадою*. Випадкові затримки променів спричинюють фазові і тимчасові флуктуації сигналів.

Вплив мультиплікативної завади на переданий сигнал s можна розглядати як модуляцію цього сигналу випадковим процесом μ . Таку заваду можна звести до адитивної:

$$x = \mu s = \mu_0 s + \omega_e, \quad (1.70)$$

де $\omega_e = s(\mu - \mu_0) = s\xi$ – еквівалентна адитивна завада.

Еквівалентна завада ω_e є добутком випадкового процесу $\xi = \mu - \mu_0$ на детерміновану функцію часу s . Теоретично це означає, що ω_e – нестационарний процес і що всі його розподіли та їх моменти залежать від часу, а практично – що при аналізі потрібно після усереднення за множиною виконувати усереднення за часом. Зазначимо також, що μ є випадковим процесом з ненульовим середнім: $\bar{\mu} = \mu_0 \neq 0$, і що $\mu > 0$. Процес $\xi = \mu - \mu_0$ має вже нульове середнє і відповідно зміщений розподіл. Величини μ і ξ безрозмірні, ω_e має розмірність сигналу.

Еквівалентна потужність мультиплікативної завади, очевидно, дорівнюватиме її дисперсії:

$$P_{z,e} = \overline{D\omega_e} = \overline{Ds\xi} = s^2 \overline{D\xi} = s^2 D\mu.$$

Відношення сигнал–еквівалентна завада при цьому

$$q_e = \frac{\overline{\mu_0^2 s^2}}{\overline{D\omega_e}} = \frac{\mu_0^2}{D\xi} = \frac{\mu_0^2}{D\mu}, \quad (1.71)$$

тобто визначається тільки середнім значенням і дисперсією процесу $\mu(t)$, що характеризує мультиплікативну заваду.

Розповсюдженням явищем, що призводить до випадкових коливань параметрів сигналу в точці приймання, є багатопроменеве поширення радіохвиль. Багатопроменевість – основна причина завмирання сигналу. Внаслідок різниці ходу променів, що приходять від передавача до приймача, сигнал у приймальній антені являє собою суму окремих коливань з різними фазами й амплітудами. Інтерференція цих коливань в умовах, коли різниці ходу променів не лишаються постійними, і є основною причиною флуктуацій як амплітуд, так і фаз складових сигналу. В залежності від ширини спектра сигналу F і властивостей каналу розрізняють загальні (чи гладкі) і селективні завмирання, які, в свою чергу, можуть бути швидкими і повільними.

Загальні завмирання мають місце, коли час запізнювання променів $\tau \ll 1/F$. При цьому коефіцієнт передачі каналу μ (чи амплітуда сигналу) і фаза сигналу φ для всіх частотних складових змінюються однаково. Коли число променів велике, то можна вважати, що випадкова величина φ має рівномірну щільність імовірності на інтервалі від 0 до 2π , а μ – розподіл Релея:

$$p(\mu) = \frac{2\mu}{\mu_0^2} e^{-\frac{\mu^2}{\mu_0^2}}, \quad (1.72)$$

де $\mu_0 = \sqrt{\overline{\mu^2}}$ – середньоквадратичне значення коефіцієнта передачі μ .

У ряді випадків сигнал у точці приймання має дві складові: регулярну з повільнозмінними параметрами і розсіяну швидкофлюктууючу. В такому разі коефіцієнт передачі μ описується узагальненим розподілом Релея

$$p(\mu) = \frac{2\mu}{\overline{\mu_\phi^2}} \exp\left(-\frac{\mu^2 + \mu_p^2}{\overline{\mu_\phi^2}}\right) I_0\left(\frac{2\mu\mu_p}{\overline{\mu_\phi^2}}\right), \quad (1.73)$$

де μ_p – регулярна складова коефіцієнта передачі; $\overline{\mu_\phi^2} = \mu_0^2 - \mu_p^2$ – середнє значення квадрата флюктууючої складової; $\mu_0 = \sqrt{\overline{\mu^2}}$ – середньоквадратичне значення μ . Фаза сигналу ϕ в цьому випадку розподілена нерівномірно.

У разі сильних завмирань, коли $\overline{\mu_\phi^2} \gg \mu_p^2$, розподіл (1.73) наближається до розподілу Релея (1.72). Тому такі завмирання іноді називають *релеївськими*, а завмирання, що підпорядковуються узагальненому закону Релея, – *квазірелеївськими*.

Для слабких завмирань, коли $\overline{\mu_\phi^2} \ll \mu_p^2$, на підставі (1.73) одержуємо розподіл, близький до нормального:

$$p(\mu) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\overline{\mu_\phi^2}}} \sqrt{\frac{\mu}{\mu_p}} e^{-\frac{(\mu-\mu_p)^2}{2\overline{\mu_\phi^2}}}.$$

Слабкі завмирання називають *гауссовими*.

Згідно з експериментальними даними в діапазонах середніх і коротких хвиль релеївські та квазірелеївські завмирання зустрічаються приблизно однаково часто. В ультракороткохвильовому діапазоні при далекому іоносферному чи тропосферному поширенні переважають релеївські завмирання, при ближньому поширенні – квазірелеївські.

Селективні завмирання спостерігаються тоді, коли час запізнювання променів порівняний з величиною $1/F$. У цьому випадку амплітуди і фази частотних складових сигналу змінюються незалежно один від одного. При швидких завмираннях амплітуди і фази суміжних елементів сигналу некорельовані між собою, а при повільних завмираннях вони змінюються однаково.

У випадку повільних завмирань, що ми і розглянемо, коефіцієнт передачі каналу μ і фаза сигналу ϕ практично не змінюються протягом тривалості декількох елементів сигналу. Аналіз раніше прийнятих елементів сигналу дозволяє з достатнім ступенем точності передбачити очікувані параметри наступного елемента. За цих умов приймання може бути здійснено так само, як і у разі відсутності завмирань, і оптимальними будуть схеми, розглянуті в попередніх параграфах, з тією лише різницею, що в схемах мають вироблятися неперервні регулювання μ (регулювання посилення) і ϕ (регулювання фази) відповідно до очікуваних значень μ і ϕ . У зв'язку з труднощами підстроювання фази більш широке застосування знаходять некогерентні методи приймання, в яких відомості про фазу сигналу не використовуються. У каналах, де випадково змінюється тільки фаза сигналу, некогерентне приймання є оптимальним.

Формули, що визначають імовірність помилки елемента сигналу при повільних завмираннях для даного значення q_0 , залишаються тими ж, що й у каналі без завмирань. Але в процесі завмирань величина q_0 змінюється пропорційно μ^2 . Тому для визначення повної ймовірності помилки необхідно усереднити ймовірність $P_n(q_0)$ відповідно до розподілу $p(\mu)$, тобто

$$\overline{P_{\text{п}}} = \int_0^{\infty} p(\mu) P_{\text{п}}(q_0) d\mu = \int_0^{\infty} p(\mu) P_{\text{п}} \left(\frac{\mu \sqrt{q_0}}{\mu_0} \right) d\mu, \quad (1.74)$$

де враховано, що $q_0 = (\mu^2 / \mu_0^2) \overline{q_0}$.

Імовірність помилки при когерентному прийманні бінарних сигналів в умовах повільних релієвських завмирань [17]

$$\overline{P_{\text{п}}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{\frac{\overline{q_0}}{2} + q_0}}{\sqrt{1 - P_{12}} + q_0} \right), \quad (1.75)$$

де P_{12} визначається за формулою (1.10).

Якщо $q_0 \gg 1$, маємо наближену формулу

$$\overline{P_{\text{п}}} \approx \frac{1}{2q_0(1 - P_{12})}. \quad (1.76)$$

При некогерентному прийманні для систем з активною паузою ймовірність помилки у разі повільних релієвських завмирань визначається усередненням (1.72) за μ відповідно до формули

$$\overline{P_{\text{п}}} = \int_0^{\infty} \frac{2\mu}{\mu_0^2} e^{-\frac{\mu^2}{\mu_0^2}} \frac{1}{2} e^{-\frac{\mu^2}{\mu_0^2} q_0} d\mu = \frac{1}{2 + q_0}. \quad (1.77)$$

Графік залежності (1.77) наведений на рис. 1.5. З порівняння кривих видно, що наявність завмирань сигналу значно знижує завадостійкість системи зв'язку.

У випадку квазірелієвських завмирань щільність імовірності $p(\mu)$ визначається узагальненим розподілом Релея (1.73). Для цього випадку повна ймовірність помилки при некогерентному прийманні бінарних сигналів визначається виразом [16]

$$\overline{P_{\text{п}}} = \frac{c^2 + 1}{q_0 + 2c^2 + 2} \exp \left(-\frac{c^2 \overline{q_0}}{q_0 + 2c^2 + 2} \right), \quad (1.78)$$

де $c^2 = \mu_{\text{рф}}^2 / \mu^2$.

Якщо $c = 0$, то цей вираз переходить у формулу (1.77) для релієвських завмирань.

Канал із квазірелієвськими завмираннями є проміжним випадком між каналом без завмирань і каналом з релієвськими завмираннями. Графіки ймовірності помилки для цього випадку на рис. 1.5 будуть лежати між кривими 2 і 3. При малих значеннях c графіки наблизяться до кривої 3, а при великих – до кривої 2.

Природним методом усунення мультиплікативної завади, в тому числі й завмирання, є застосування *автоматичного регулювання посилення (АРП)*. За відсутності адитивної завади ідеальна система АРП дозволяє цілком усунути мультиплікативну заваду. Дія такої системи

зводиться до множення сигналу x на $1/\mu$, тобто $z = (1/\mu)x = (1/\mu)\mu s = s$. За наявності адитивної завади $z = (1/\mu)x = (1/\mu)(\mu s + \omega) = s + \omega/\mu$. У цьому разі ми хоча і отримуємо сигнал постійної інтенсивності, але з флуктуючою за інтенсивністю адитивною завадою.

Ефективним заходом боротьби з завмираннями є *рознесення приймання сигналів*. Суть його полягає в тому, що передане повідомлення відтворюється не за одним прийнятим сигналом, а за двома чи більше сигналами, що несуть те саме повідомлення. Цими сигналами можуть бути сигнали кількох передавачів, які працюють на різних частотах (рознесення за частотою), або сигнали того самого передавача, прийняті на різні антени, рознесені за простором чи поляризацією. Можливо також і рознесення за часом (наприклад, повторення передачі).

Обробка кількох сигналів на прийомі зводиться до підсумовування за вагою. В окремих випадках це може бути просте додавання прийнятих сигналів чи вибір найбільшого з них.

Контрольні запитання для самооцінки рівня знань

1. Дайте означення завадостійкості системи зв'язку.
2. Яка завадостійкість називається потенційною?
3. Який приймач називається оптимальним?
4. Які критерії оптимального приймання сигналів Ви знаєте?
5. Дайте означення критерію ідеального спостерігача В. О. Котельникова.
6. Що таке функція правдоподібності і відношення правдоподібності?
7. Дайте означення критерію мінімального ризику.
8. Дайте означення критерію Неймана–Пірсона.
9. Запишіть умову оптимального приймача, що працює на порівняння середньоквадратичних похибок, і нарисуйте його схему.
10. Нарисуйте схему оптимального кореляційного приймача.
11. Зобразіть схему оптимального приймача на погоджених фільтрах.
12. За яких умов схема оптимального приймача В. О. Котельникова переходить у схему кореляційного приймача?
13. Що називається мультиплікативною завадою? Як таку заваду можна звести до еквівалентної адитивної завади?
14. Які види завмирань сигналу Вам відомі? Поясніть причини появи завмирань.
15. У чому різниця між релеївськими і квазірелеївськими завмираннями?
16. Поясніть метод обчислення ймовірності помилки при повільних загальних завмираннях.

ПІСЛЯМОВА ДО РОЗДІЛУ 1

Ви завершили вивчення розділу «Оптимальне приймання дискретних сигналів. Основи теорії завадостійкості».

Тепер Ви знаєте:

- що однією з найважливіших властивостей системи зв'язку є завадостійкість, тобто, здатність системи розрізняти (відновлювати) сигнали з заданою вірогідністю;
- що основи теорії завадостійкості розроблено академіком В. О. Котельниковим;
- що для передавання дискретних повідомлень широко використовується **критерій В. О. Котельникова (критерій ідеального спостерігача)**. Відповідно до цього критерію приймається рішення, що передано сигнал s_i , для якого апостеріорна ймовірність $P(s_i/x)$ має найбільше значення, тобто реєструється сигнал s_i , якщо виконуються нерівності

$$P(s_i/x) > P(s_j/x), \quad j \neq i;$$

- що вибір критерію оптимальності не є універсальним, він залежить від поставленої задачі та умов роботи системи;

- що критерій ідеального спостерігача зводиться до порівняння відношень правдоподібності

$$\Lambda > \frac{P(s_j)}{P(s_i)}, \text{ називається критерієм максимальної правдоподібності і є більш загальним;}$$

- при виборі критерію **Неймана–Пірсона** враховується, по-перше, що помилкова тривога і пропуск цілі не є рівноцінними за своїми наслідками, і, по-друге, що апіорна ймовірність сигналу, який передається, є невідомою. Якщо пропуск цілі є більш небажаним, то можна задати деяку величину β допустимої ймовірності помилкової тривоги і поставити вимогу, щоб розв'язувальна схема максимізувала ймовірність правильного виявлення $P_{\text{вияв}}$ (або, що те ж саме, мінімізувала ймовірність пропуску $P_{\text{пр}}$).

- умову оптимального приймання: якщо всі можливі сигнали рівноймовірні і мають однакову енергію, оптимальний приймач відтворює повідомлення, що відповідає тому переданому сигналу, взаємна кореляція якого з прийнятим сигналом максимальна;

- що оптимальний когерентний приймач у m -позиційній системі являє собою багатоканальний корелятор чи систему з m погоджених фільтрів;

- що при некогерентному прийманні інформація про фазу прийнятих сигналів не використовується. Такий спосіб застосовується в каналах зі змінними параметрами, коли фаза сигналу випадково змінюється і її визначення викликає значні труднощі, а також у каналах зі сталими параметрами з метою спрощення схеми приймача.

- що оптимальний некогерентний приймач обчислює модуль (обвідну) функції взаємної кореляції $z_k = \left| \int_0^T \dot{x}(t) \dot{s}_k^*(t) dt \right|$ і вирішує, що був переданий той сигнал, для якого значення z у деякий момент часу $t = t_0$ найбільше;

- що канали зв'язку бувають *багатопроменевими* і *однопроменевими*;

- що *загальні завмирання* мають місце, коли час запізнювання променів $\tau \ll 1/F$. При цьому коефіцієнт передачі каналу μ (чи амплітуда сигналу) і фаза сигналу ϕ для всіх частотних складових змінюються однаково;

- що будь-які зміни коефіцієнта передачі і часу поширення сигналів спричинюють флуктуації сигналів на виході каналів і можуть розглядатися як завади. Зміни коефіцієнта передачі μ проявляються у вигляді флуктуацій амплітуди сигналу і називається *мультиплікативною завадою*;

- що у ряді випадків сигнал у точці приймання має дві складові: регулярну з повільнозмінними параметрами і розсіяну швидкофлуктуючу. В такому разі коефіцієнт передачі μ описується узагальненим розподілом Релея

$$p(\mu) = \frac{2\mu}{\mu_\phi^2} \exp\left(-\frac{\mu^2 + \mu_p^2}{\mu_\phi^2}\right) I_0\left(\frac{2\mu\mu_p}{\mu_\phi^2}\right),$$

У разі сильних завмирань, коли $\mu_\phi^2 \gg \mu_p^2$, розподіл наближається до розподілу Релея. Тому такі завмирання іноді називають *релеївськими*, а завмирання, що підпорядковуються узагальненому закону Релея, – *квазірелеївськими*;

- що *селективні завмирання* спостерігаються тоді, коли час запізнювання променів порівняний з величиною $1/F$. У цьому випадку амплітуди і фази частотних складових сигналу змінюються незалежно один від одного.

Цей комплекс питань необхідно знати для опрацювання матеріалу наступного розділу 2 «Оптимальне приймання неперервних повідомлень. Оптимальна фільтрація».

Розділ 2

ОПТИМАЛЬНЕ ПРИЙМАННЯ НЕПЕРЕРВНИХ ПОВІДОМЛЕНЬ

ОПТИМАЛЬНА ФІЛЬТРАЦІЯ

2.1. ОПТИМАЛЬНЕ ПРИЙМАННЯ НЕПЕРЕРВНИХ ПОВІДОМЛЕНЬ

Нехай повідомлення перетворюються в деяке коливання $u(t)$, що може неперервно змінюватися в часі й набувати будь-якої форми. З такими повідомленнями ми зустрічаємося, наприклад, у телефонії, телеметрії, телебаченні. Визначимо умови оптимального приймання неперервних повідомлень.

Для простоти аналізу вважатимемо, що: 1) функція $u(t)$ набуває значень в межах від +1 до -1; 2) передане коливання є періодичним з періодом T (це завжди можна допустити, взявши значення T досить великим); 3) спектр коливання обмежений частотами від i_1/T до i_2/T . За цих умов функцію $u(t)$ можна подати у вигляді

$$u(t) = \sum_{i=i_1}^{i_2} \left(\lambda_{2i-1} \sqrt{2} \sin \frac{2\pi i}{T} t + \lambda_{2i} \sqrt{2} \cos \frac{2\pi i}{T} t \right) = \sum_{e=e_1}^{e_2} \lambda_e \varphi_e(t), \quad (2.1)$$

де λ_e – деякі параметри, що визначають передане коливання $u(t)$; $\varphi_e(t)$ – одиничні ортогональні функції; $e_1 = 2i_1 - 1$, $e_2 = 2i_2$.

Для передавання по каналу коливання $u(t)$ перетворюється в сигнал $s(u, t)$. Оскільки коливання (2.1) визначається $e_2 - e_1 + 1$ параметрами λ_e , то сигнал залежатиме від цих параметрів: $s(u, t) = s(\lambda_{e_1}, \dots, \lambda_{e_2}, t)$. Прийнятий сигнал (коливання) внаслідок накладання завади $\omega(t)$ дорівнює $x(t) = s(u, t) + \omega(t)$.

Задача полягає в тому, щоб за коливанням $x(t)$ відновити передане повідомлення $u(t)$ з якомога більшою точністю. Як ми вже встановили, найбільше, що може зробити приймач на підставі аналізу прийнятого сигналу $x(t)$, – це обчислити розподіл імовірностей $P(s/x)$ для всіх можливих реалізацій $u(t)$. При передаванні неперервних коливань функція $P(s/x)$ є щільністю розподілу ймовірності:

$$P(s_i/x) > P(s_j/x), \quad j \neq i.$$

Згідно з цим виразом оптимальний приймач обчислює апостеріорний розподіл імовірностей $P(s/x)$ в очевидному вигляді або видає на виході результат, еквівалентний до цієї функції, і реалізує на виході те повідомлення $u(t)$, при якому функція $P(s/x)$ є максимальною.

Відповідно до формули Бейєса вираз $P(s/x)$ для розглянутого випадку можна записати в наступному вигляді:

$$P(s/x) = kP(s)P(x/s), \quad (2.2)$$

де k – деяка стала, яка може бути обчислена з умови нормування $\int_s P(s/x) dx = 1$.

Припускаємо, що всі можливі повідомлення $u(t)$ та відповідні їм сигнали $s(u, t)$ рівноймовірні, тобто $P(s) = \text{const}$ для всіх реалізацій $u(t)$, що лежать в інтервалі $(-1, +1)$. При цьому відповідно до [9]

$$P(x/s_i) = \prod_{i=l_1}^{l_2} P(x_i/s_{il}) = (\pi N_0)^{-\frac{n}{2}} \exp \left[-\frac{1}{N_0} \sum_{i=l_1}^{l_2} (x_i - s_{il})^2 \right].$$

Із виразу (2.2) маємо:

$$P(s/x) = k_1 P(s) \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [x(t) - s(u, t)]^2 dt \right\}, \quad (2.3)$$

де k_1 – параметр, який може бути обчислений для однієї реалізації випадкового процесу, що є моделлю повідомлення.

Звідси максимуму апостеріорної ймовірності $P(s/x)$ відповідає мінімальна за $u(t)$ величина

$$\Delta^2 = \int_0^T [x(t) - s(u, t)]^2 dt. \quad (2.4)$$

Отже, оптимальний приймач відтворює повідомлення $u(t)$, при якому середньоквадратичне відхилення Δ^2 має мінімальне значення. За відсутності завад такий приймач відтворює повідомлення без спотворень (без помилок): $x(t) = s(u, t)$, $v(t) = u(t)$ і $\Delta^2 = 0$, а за наявності завад помилка буде мінімальною.

З виразу (2.4) випливає, що операції оптимальної фільтрації та детектування дозволяють отримати максимальну інформацію з прийнятого сигналу $x(t)$ щодо переданого повідомлення $u(t)$. Структурна схема оптимального приймача наведена на рис. 2.1, а.

Запишемо вираз (2.3) в іншому вигляді:

$$P(s/x) = k_1 P(s) \exp \left[-\frac{1}{N_0} \int_0^T x^2(t) dt \right] \exp \left[-\frac{1}{N_0} \int_0^T s^2(t) dt \right] \exp \left[\frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) s(u, t) dt \right]. \quad (2.5)$$

Перший експоненціальний множник, що не залежить від u , може бути включений у сталу k_1 . Другий множник взагалі не зображує операцію над $x(t)$; він може бути винесений у вигляді окремого множника, подібного до апіорної ймовірності. В багатьох випадках цей множник, рівний $\exp(-E/N_0)$, де E – енергія сигналу, також можна включити в сталу k_1 . Тоді вираз (2.5) можна записати так:

$$P(s/x) = k_1 P(s) \exp[h(u)], \quad (2.6)$$

де

$$h(u) = \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t) s(u, t) dt. \quad (2.7)$$

Отже, в разі відомої апіорної ймовірності визначення апостеріорної ймовірності зводиться до обчислення функції $h(u)$, тобто взаємної кореляції між прийнятим сигналом $x(t)$ і переданим (очікуваним) сигналом $s(u, t)$. Іншими словами, *кореляційна обробка сигналу є оптимальною*, тобто вона забезпечує мінімальну ймовірність помилки.

Функція $h(u)$ легко обчислюється, коли всі параметри сигналу відомі. Досягається це за допомогою корелятора або погодженого фільтра, що звичайно має місце при передаванні *дискретних* повідомлень.

У разі передавання *неперервних* повідомлень ми маємо лише деяку апіорну інформацію про сигнал $s(u, t)$. Відомі, наприклад, несуча частота, вид модуляції, ширина спектра сигналу і т. ін. Відсутню частину інформації можна одержати внаслідок спостереження за попередньо прийнятою реалізацією сигналу $x(t)$. Тому в результаті існує можливість на прийомі визначити оцінку сигналу $s(v, t)$ й обчислити функцію $h(v)$ для цієї оцінки:

$$h(v) = \frac{2}{N_0} \int_0^T x(t)s(v, t)dt. \quad (2.8)$$

Функцію $h(v)$ можна обчислити за допомогою *слідкувального фільтра СФ* зі змінними параметрами (рис. 2.1, б) чи *слідкувального корелятора* (рис. 2.1, в). Кожна з цих схем має основний інформаційний канал, на вихід якого надходить оціночне значення $v(t)$ переданого

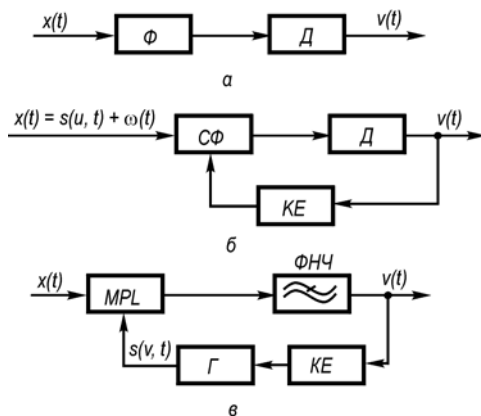


Рис. 2.1. Структурні схеми:

- a* – оптимального приймача неперервних сигналів; *б* – приймача зі слідкувальним фільтром;
- в* – слідкувального кореляційного приймача

повідомлення $u(t)$, і канал зворотного зв'язку, за допомогою якого в схемі на рис. 2.1, в формується опорний сигнал $s(v, t)$, а в схемі на рис. 2.1, б проводиться зміна параметрів фільтра. В схемі на рис. 2.1, б за допомогою керуючого елемента *КЕ* змінюють параметри фільтра так, щоб він був погоджений з неперервно змінюваним очікуваним сигналом $s(u, t)$. У схемі на рис. 2.1, в за допомогою керуючого елемента *КЕ* змінюється модульований параметр несучого коливання, формованого генератором *Г*. При частотній модуляції, наприклад, цим параметром є частота, при часово-імпульсній модуляції – часовий зсув імпульсів. Фільтр нижніх частот *ФНЧ* у цій схемі виконує роль інтегратора на інтервалі спостереження T , який пов'язаний з максимальною частотою F_m в спектрі переданого повідомлення співвідношенням $T = 1/(2F_m)$.

Принцип слідкувального приймання не залежить від видів модуляції. Вид модуляції визначає параметр, за яким має здійснюватися слідкування. Схеми слідкувального приймання дозволяють практично реалізувати завадостійкість, близьку до потенційної, і тим самим знизити поріг завадостійкості до граничного.

До цих пір ми припускали, що амплітуда і фаза несучого коливання сигналу незмінні в часі, а завада має сталу спектральну щільність N_0 . В каналах зі змінними параметрами амплітуда й фаза сигналу змінюються в часі. Тому схеми на рис. 2.1, б і рис. 2.1, в потрібно доповнити пристроєм автоматичного регулювання рівня сигналу й системного фазового автопідстроювання. Якщо значення N_0 невідоме або змінюється в часі, для здійснення оптимального приймання необхідний спеціальний пристрій вимірювання й вирівнювання інтенсивності. Зокрема, для зосереджених за спектром чи за часом з різко вираженою інтенсивністю завад досить близькою до оптимальної є

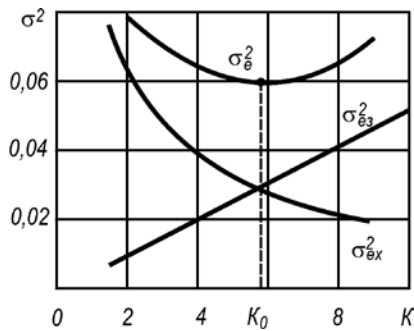


Рис. 2.2. До визначення оптимального коефіцієнта підсилення пристрою (системи) зв'язку

схема зі стиранням ділянок спектра чи тривалості сигналу, вражених завадою. Отже, в загальному випадку при оптимальному прийманні слід спостерігати і за формою сигналу, і за формою завади. Чим більше число параметрів при цьому врахується, тим вища завадостійкість. При цьому схема приймача має бути адаптивною.

Оптимальний приймач – це пристрій, який відтворює передане повідомлення $u(t)$ з найменшою помилкою. Оскільки корисний сигнал $s(u, t)$ залежить від $u(t)$ нелінійно, то оптимальний приймач також має бути нелінійним пристроєм (нелінійним фільтром). Прикладом такого пристрою (фільтра) є розглянутий вище слідкувальний приймач. Таким чином, теорію оптимального приймання

можна розглядати як теорію оптимальної нелінійної фільтрації.

Загальна теорія нелінійної фільтрації охоплює різноманітні й дуже складні задачі. В даний час ця теорія розроблена лише для випадків, коли передане повідомлення $u(t)$ являє собою марковський чи нормальний випадковий процес.

2.2. СИНТЕЗ ПРИСТРОЇВ (СИСТЕМ) ЗВ'ЯЗКУ ЗА ЗАДАНОЮ СТРУКТУРНОЮ СХЕМОЮ

Задача синтезу пристрою зв'язку за заданою його структурною схемою полягає в тому, щоб за відомими характеристиками сигналу й завади визначити оптимальні значення параметрів пристрою зв'язку, при яких сумарна середня квадратична похибка мінімальна. Оскільки структурна схема пристрою відома, то сумарна середня квадратична похибка є функцією параметрів β_i пристрою:

$$\sigma_e^2 = f(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n). \quad (2.9)$$

Для розрахунку оптимальних значень параметрів необхідно дослідити на мінімум функцію (2.9), розв'язавши наступну систему рівнянь:

$$\frac{\partial}{\partial \beta_i} \sigma_e^2 = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.10)$$

В процесі синтезу пристрою зв'язку, як правило, треба обчислити оптимальне значення тільки настроюваних параметрів (коефіцієнт підсилення та одна чи дві сталі часу коректувального пристрою), кількість яких в пристроях невелика, що полегшує задачу оптимізації.

Приклад 2.1. Знайти оптимальне значення коефіцієнта підсилення пристрою зв'язку, передавальна функція якого в розімкненому стані

$$W_p(s) = \frac{K}{(Ts + 1)s}. \quad (2.11)$$

Розв'язання. На пристрій діють сигнал і завада, спектральні щільності яких $S_x(\omega) = N_x / \omega^2$; $S_z(\omega) = N_z$. Сумарна середня квадратична похибка системи

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[|W_e(j\omega)W_\Phi(j\omega)|^2 N_x + |W_3(j\omega)|^2 N_3 \right] d\omega = N_x \frac{1+KT}{2K} + N_3 \frac{K}{2},$$

де $W_e(j\omega) = \frac{j\omega(1+j\omega T)}{(j\omega)^2 T + j\omega + K}$ – частотна характеристика похибки системи; $W_\Phi(j\omega) = 1/(j\omega)$ – частотна характеристика формувального фільтра сигналу; $W_3(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^2 T + j\omega + K}$ – частотна характеристика замкненої системи.

Оптимальне значення коефіцієнта підсилення визначимо з умови (2.10), яка для даної задачі має вигляд

$$\frac{\partial}{\partial K} \sigma_e^2 = -\frac{N_x}{2K^2} + \frac{N_3}{2} = 0.$$

Тоді оптимальний коефіцієнт підсилення $K_{\text{опт}} = \sqrt{N_x / N_3}$.

На рис. 2.2 показані криві зміни складових середньої квадратичної похибки пристрою зв'язку в залежності від коефіцієнта підсилення для $N_x = 0,76 \cdot 10^{-4}$ рад²·с; $N_3 = 0,305 \cdot 10^{-4}$ рад²·с; $T = 0,1$ с.

2.3. ФІЗИЧНИЙ ЗМІСТ ОПТИМАЛЬНОЇ СМУГИ ПРОПУСКАННЯ

Розглянемо пристрій зв'язку з частотною характеристикою (рис. 2.3, а)

$$W(j\omega) = \begin{cases} e^{j\omega} & \text{при } \omega \leq \omega_3; \\ 0 & \text{при } \omega > \omega_3 \end{cases} \quad (2.12)$$

де ω_3 – ширина смуги пропускання пристрою зв'язку.

Якщо сигнал і завада некорельовані, то дисперсія похибки системи з частотною характеристикою (2.12)

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_3}^{\infty} S_x(\omega) d\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_3} S_3(\omega) d\omega = \sigma_{ex}^2 + \sigma_{e3}^2, \quad (2.13)$$

де σ_e – середня квадратична похибка; $S_x(\omega)$ – спектральна щільність сигналу; $S_3(\omega)$ – спектральна щільність завади; σ_{ex} – середня квадратична похибка відносно сигналу; σ_{e3} – середня квадратична похибка через дію завади.

Із виразу (2.13) випливає, що середня квадратична похибка пристрою зв'язку залежить від ширини смуги пропускання. Смуго пропускання пристрою зв'язку, при якій середня квадратична похибка набуває мінімального значення, називають *оптимальною*.

На рис. 2.3, б наведені графіки спектральних щільностей сигналу й завади. Оскільки вони не перекриваються, то оптимальна смуга пропускання системи дорівнює граничній частоті спектра сигналу. В цьому випадку середня квадратична похибка пристрою зв'язку дорівнює нулю, бо всі складові спектра сигналу відтворюються системою і жодна складова спектра завади не проходить на її вихід.

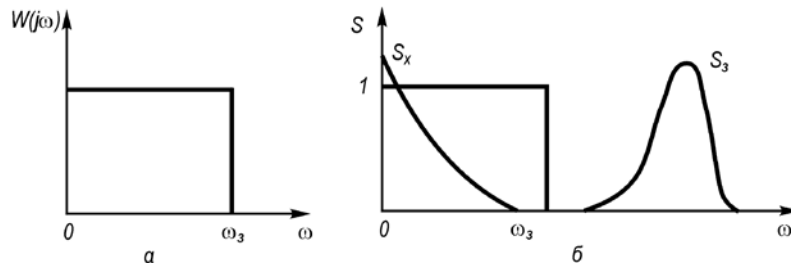


Рис. 2.3. До визначення оптимальної смуги пропускання для спектрів сигналу і завади, які не перекриваються (*а*), та ідеальна ЛЧХ (*б*)

Якщо графіки спектральних щільностей сигналу й завади перекриваються, то обидві складові середньої квадратичної похибки системи в (2.13) не дорівнюють нулю. Із рис. 2.4, *а* видно, що перша складова (середня квадратична похибка відтворення сигналу) визначається тією частиною спектральної щільності сигналу, яка розташована за смугою пропускання системи (площа 1 під графіком спектральної щільності сигналу). З розширенням смуги пропускання ця складова похибки зменшується (рис. 2.4, *б*). Друга складова середньої квадратичної похибки системи, зумовлена завадою, залежить від тієї частини спектральної щільності завади, яка збігається зі смугою пропускання системи (на рис. 2.4, *а* площа 2). З розширенням смуги пропускання середньоквадратична похибка через дію завади зростає (рис. 2.4, *б*). Оптимальна смуга пропускання системи відповідає мінімальній середньоквадратичній похибці. Для її обчислення здиференціюємо (2.13) за смугою пропускання ω_3 і отриманий результат прирівнюємо до нуля. В результаті отримаємо

$$-\frac{1}{\pi} S_x(\omega_{3_0}) + \frac{1}{\pi} S_n(\omega_{3_0}) = 0. \quad (2.14)$$

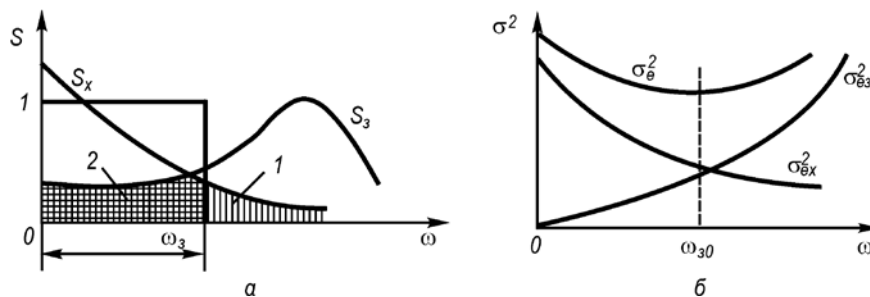


Рис. 2.4. До пояснення оптимальної смуги пропускання пристрою (системи) зв'язку (*а*) та залежність середньої квадратичної похибки пристрою зв'язку від частоти (*б*)

Із цього виразу випливає, що оптимальна смуга пропускання системи – це частота, на якій виконується рівність

$$S_x(\omega_{3_0}) = S_n(\omega_{3_0}). \quad (2.15)$$

Оскільки частотні характеристики систем зв'язку відрізняються від ідеальної характеристики (2.12), то оптимальна смуга пропускання, знайдена за (2.15), є наближеною. Як показує практика, похибки при цьому не перевищують 10–20 %.

Мінімум сумарної середньої квадратичної похибки системи визначається не тільки смугою пропускання, але й виглядом її частотної характеристики. Тому в загальному випадку синтез системи полягає в пошуку її оптимальних частотних характеристик з умови мінімуму середніх квадратичних похибок при заданих статистичних характеристиках сигналу і завади.

2.4. СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНИХ ПРИСТРОЇВ (СИСТЕМ) ЗВ'ЯЗКУ

Сформулюємо постановку задачі синтезу оптимальних пристроїв (систем) зв'язку. На вхід пристрою, який проектується, діють стаціонарні сигнал і завада, автокореляційні функції яких відомі. Математичні сподівання сигналу й завади дорівнюють нулю. Бажаний вихідний сигнал пристрою зв'язку, що синтезується, визначається заданою частотною характеристикою. Необхідно знайти передавальну функцію пристрою, при якій сумарна середня квадратична похибка системи, що наведена на рис. 2.1, *a*, мінімальна:

$$\sigma_e = \sqrt{e^2(t)} = \min, \quad (2.16)$$

де $e(t) = y_6(t) - y(t)$ – похибка системи; $y_6(t)$ – бажаний вихідний сигнал системи; $y(t)$ – вихідний сигнал системи.

Розглянемо задачу оптимальної фільтрації. В цьому випадку

$$W_6(j\omega) = 1, \text{ тобто } y_6(t) = x(t). \quad (2.17)$$

Згідно з (2.16) дисперсія похибки

$$\sigma^2 = \overline{[x(t) - y(t)]^2} = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\sigma_{xy}^2. \quad (2.18)$$

Дисперсію вихідного сигналу пристрою зв'язку, що синтезується, знайдемо аналогічно дисперсії похибки системи [9]:

$$\sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\eta) R_f(\lambda - \eta) d\eta d\lambda, \quad (2.19)$$

де $\omega(\lambda)$ – імпульсна перехідна функція системи; $R_f(\lambda - n)$ – автокореляційна функція сумарного вхідного сигналу $f(t) = x(t) + n(t)$; $n(t)$ – завада.

Таким чином,

$$\sigma_{xy}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\lambda) R_{yf}(\lambda) d\lambda, \quad (2.20)$$

де $R_{yf}(\lambda)$ – взаємна кореляційна функція сигналу з сумарною дією.

Підставивши вирази (2.19) і (2.20) в (2.18), визначимо

$$\sigma_e^2 = \sigma_x^2 + \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\eta) R_f(\lambda - \eta) d\eta d\lambda - 2 \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\eta) R_{yf}(\lambda) d\lambda. \quad (2.21)$$

Синтез оптимальної системи зводиться до пошуку імпульсної перехідної функції з (2.21). Для розв'язання цієї задачі дамо варіацію імпульсної перехідної функції:

$$\omega(t) = \omega_0(t) + \delta\omega(t), \quad (2.22)$$

де $\omega_0(t)$ – шукана оптимальна імпульсна перехідна функція пристрою зв'язку, що проектується; δ – варіація імпульсної перехідної функції.

Імпульсну перехідну функцію, мінімізувавши дисперсію похибки (2.21), визначимо з умови

$$\left. \frac{R}{\partial \delta} \sigma^2 \right|_{\delta=0} = 0. \quad (2.23)$$

Підставимо формулу (2.22) в (2.21). Тоді оптимальна імпульсна перехідна функція системи з урахуванням (2.23) має задовольняти рівнянню

$$2 \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\lambda) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \omega_0(\eta) R_f(\lambda - \eta) d\eta - R_{xf}(\lambda) \right] d\lambda = 0. \quad (2.24)$$

Оскільки неоптимальна імпульсна перехідна функція $\omega(t)$ – функція довільна, то рівняння (2.24) виконується тільки в тому випадку, коли

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega_0(\eta) R_f(t - \eta) d\eta - R_{xf}(t) = 0, \quad (2.25)$$

де змінна λ замінена на t .

Вираз (2.25) називають *рівнянням Вінера–Хопфа*.

Середня квадратична похибка виділення сигналу в усталеному режимі – стала величина, що визначається з виразу (2.21), в якому замість $\omega(\lambda)$ і $\omega(\eta)$ слід підставити початкові значення частот. Тоді з урахуванням (2.25)

$$\sigma_{e \min}^2 = \sigma_x^2 - \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} \omega_0(\eta) R_f(\lambda - \eta) d\eta d\lambda. \quad (2.26)$$

Розв'язання рівняння Вінера–Хопфа в часовій області є складним. Значно простіше розв'язати цю задачу в частотній області, тобто знайти оптимальну частотну характеристику пристрою зв'язку. З цією метою застосуємо до рівняння (2.25) перетворення Фур'є. В результаті отримаємо

$$W_0(j\omega) S(j\omega) = S_{xf}(\omega). \quad (2.27)$$

З цього рівняння знайдемо оптимальну частотну характеристику:

$$W_0(j\omega) = \frac{S_{xf}(\omega)}{S_f(\omega)} = \frac{S_{xf}(\omega)}{\psi(j\omega)\psi(-j\omega)}, \quad (2.28)$$

де $S_f(\omega)$ – спектральна щільність сумарного сигналу на вході проективної системи; $S_{xf}(\omega)$ – взаємна спектральна щільність сигналу з сумарним сигналом; $\psi(j\omega)$ – функція, всі полюси якої на площині комплексної змінної $p = j\omega$ розташовані в лівій півплощині; $\psi(-j\omega)$ – функція, всі полюси якої розташовані в правій півплощині.

У загальному випадку

$$\begin{aligned} S_{yf}(\omega) &= S_x(\omega) + S_{x3}(\omega); \\ S_f(\omega) &= S_x(\omega) + S_{x3}(\omega) + S_3(\omega) + S_{3x}(\omega). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Якщо сигнал і завада некорельовані, то

$$S_{yf}(\omega) = S_x(\omega); \quad S_f(\omega) = S_x(\omega) + S_3(\omega). \quad (2.30)$$

Із виразів (2.28)–(2.30) випливає, що оптимальна частотна характеристика виділяє складові сигналу на частотах з достатньо великою спектральною щільністю сигналу і послаблює складові сигналу на частотах з максимальною спектральною щільністю завади.

З урахуванням оптимальної частотної характеристики мінімальна дисперсія похибки для некорельованих сигналу й завади

$$\sigma_{e\min}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_x(\omega)S_3(\omega)}{S_x(\omega) + S_3(\omega)} d\omega. \quad (2.31)$$

Таким чином, якщо спектри сигналу й завади не перекриваються, то середня квадратична похибка може дорівнювати нулю.

Спектральна щільність є парною функцією відносно частоти ω , тому полюси характеристики (2.28) розташовані на площині $p = j\omega$ як зліва, так і справа від уявної осі. Тому знайдена оптимальна частотна характеристика (2.28) відповідає фізично нереалізованій нестійкій системі. Надалі синтез оптимальної системи зводиться до визначення *реалізовної оптимальної частотної характеристики*, найбільш близької до отриманої нереалізовної.

Реалізовна оптимальна частотна характеристика визначається так:

$$W_0(j\omega) = \frac{1}{\psi(j\omega)} \left[\frac{S_{yf}(\omega)}{\psi(-j\omega)} \right]^+, \quad (2.32)$$

де операція $[\dots]^+$ означає виділення доданків, полюси яких на площині комплексної змінної $p = j\omega$ розташовані зліва від уявної осі.

У випадку, що часто зустрічається в інженерній практиці, коли функція

$$\frac{S_{yf}(\omega)}{\psi(-j\omega)} \quad (2.33)$$

є дробово-раціональною функцією відносно частоти, виділення доданків з полюсами, розташованими зліва від уявної осі, здійснюється розкладанням (2.33) на прості дроби:

$$\frac{S_{yf}(\omega)}{\psi(-j\omega)} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\omega - \omega_i}, \quad (2.34)$$

Де

$$\alpha_i = \left(\omega - \frac{1}{\lambda_i} \right) \frac{S_{xf}(\omega)}{\psi(-j\omega)}; \quad (2.35)$$

λ_i – полюси виразу (2.33).

Дисперсія похибки в системі з частотною характеристикою (2.32) буде більшою від значення, знайденого за виразом (2.31), і значення, знайденого без урахування фізичної реалізації оптимальної системи. Однак серед реалізованих пристроїв зв'язку система з характеристикою (2.32) забезпечує найменшу середньоквадратичну похибку виділення сигналу з його поєднання з завадою.

Згідно з (2.32) передавальна функція проективної оптимальної системи

$$W_0(s) = W_0(j\omega)|_{j\omega=s}. \quad (2.36)$$

Тоді передавальна функція послідовного коректувального пристрою, що вмикається в ланку сигналу похибки,

$$W_k(s) = W_{p.o}(s) / W_p(s), \quad (2.37)$$

де $W_{p.o}(s)$ – передавальна функція розімкненої оптимальної системи; $W_p(s)$ – передавальна функція вихідної частини, складена з функціонально необхідних елементів пристрою (системи).

Приклад 2.2. Знайти передавальну функцію послідовного коректувального пристрою в оптимальній системі автопідстроювання частоти для випадку, коли спектральні щільності сигналу й завади визначаються виразами

$$S_x(\omega) = \frac{N_x}{T_x^2 \omega^2 + 1}; \quad S_z(\omega) = N_z. \quad (2.38)$$

Розв'язання. Інерційністю підсилювача і частотного дискримінатора системи знехтуємо. Тоді передавальна функція вихідної системи автопідстроювання частоти визначається виразом

$$W_{p.b}(s) = \frac{K_{p.b}}{T_r s + 1}, \quad (2.39)$$

де T_r – стала часу гетеродина; $K_{p.b}$ – коефіцієнт підсилення сигналу на початковій (вихідній) системі автопідстроювання частоти.

Спектральна щільність поєднання сигналу з завадою

$$S_f(\omega) = S_x(\omega) + S_z(\omega) = B \frac{1 + j\omega T_0}{1 + j\omega T_x} \cdot \frac{1 - j\omega T_0}{1 - j\omega T_x}, \quad (2.40)$$

де $B = N_x + N_z$; $T_0^2 = T_x^2 \frac{N_x}{N_x + N_z}$.

Отже,

$$\psi(j\omega) = \sqrt{B} \frac{1 + j\omega T_0}{1 + j\omega T_x}; \quad \psi(-j\omega) = \sqrt{B} \frac{1 - j\omega T_0}{1 - j\omega T_x}. \quad (2.41)$$

Відповідно до (2.32)

$$W_0(j\omega) = \frac{1}{\psi(j\omega)} \left[\frac{\alpha_1}{1 + j\omega T_x} + \frac{\alpha_2}{1 - j\omega T_0} \right]^+ \frac{N_x}{\sqrt{B}} = \frac{1}{\psi(j\omega)} \cdot \frac{\alpha_1}{1 + j\omega T_x} \cdot \frac{N_x}{\sqrt{B}}. \quad (2.42)$$

За методом невизначених коефіцієнтів

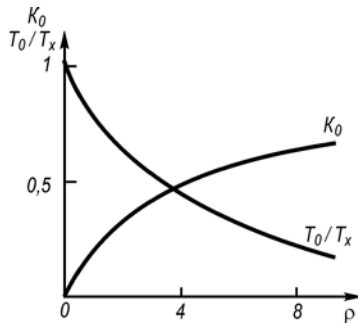
$$\alpha_1 = T_x / (T_x + T_0). \quad (2.43)$$

Згідно з (2.42) і (2.43) оптимальна частотна характеристика проеквної системи автопідстроювання частоти

$$W_0(j\omega) = \frac{K_0}{Tj\omega + 1}, \quad (2.44)$$

де $K_0 = \alpha_1 \frac{N_x}{B}$.

Для очевидності виразимо параметри оптимальної частотної характеристики через коефіцієнт, рівний відношенню рівнів спектральної щільності сигналу й завади. В результаті отримаємо



$$K_0 = 1 - 1/\sqrt{1+\rho}, \quad T_0 = T/\sqrt{1+\rho}, \quad (2.45)$$

де $\rho = N_x / N_s$.

На рис. 2.5 показані залежності коефіцієнта підсилення K_0 і сталої змінної T_0/T_x від коефіцієнта ρ , з яких видно, що зі зростанням ρ стала часу оптимальної системи зменшується (її граничне значення дорівнює нулю), а коефіцієнт підсилення зростає (його граничне значення дорівнює одиниці). Таким чином, за відсутності завади оптимальна система є безінерційною ланкою (дисперсія похибки дорівнює нулю).

Дисперсію сумарної похибки в оптимальній системі автопідстроювання частоти визначимо за формулою [9]

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[|1 - W_0(j\omega)|^2 S_x(\omega) + |W_0(j\omega)|^2 S(\omega) \right] d\omega = \frac{T_0 - (1 - K_0)^2 T_x}{2T_x(T_0 + T_x)} N_x + \frac{K_0^2}{2T_0} N_s.$$

Взявши до уваги введене значення ρ , матимемо

$$\sigma_e^2 = \frac{N_x}{2T_x \sqrt{1+\rho}} \left[1 + \frac{\rho}{(\sqrt{1+\rho} + 1)^2} \right]. \quad (2.46)$$

Обчислимо дисперсію похибки за формулою (2.31):

$$\sigma_{e\min}^2 = \frac{N_x}{2T_x \sqrt{1+\rho}}.$$

Отримане значення менше від обчисленого за оптимальною частотною характеристикою. Це пояснюється тим, що у формулі (2.31) не враховано фізичну реалізованість системи.

Передавальна функція розімкненої оптимальної системи автопідстроювання частоти

$$W_{p0}(s) = \frac{K_{p0}}{Ts + 1},$$

де $K_{p0} = K_0 / (1 - K_0)$; $T = T_0 / (1 - K_0)$.

Передавальна функція послідовності коректувального пристрою відповідно до виразу (2.37)

$$W_k(s) = K_k \frac{T_r s + 1}{Ts + 1}.$$

Коректувальний пристрій в оптимальній системі автопідстроювання частоти вмикають між підсилювачем і дискримінатором, він може бути реалізований RC-ланкою з відставанням за фазою.

Підбиваючи підсумок, зазначимо, що теорія лінійної фільтрації Колмогорова–Вінера для стаціонарних процесів, викладена вище, має один істотний недолік: практична реалізація оптимальних фільтрів супроводжується великими труднощами. А якщо врахувати, що реальні модульовані сигнали не є стаціонарними, то побудова оптимального фільтра на базі лінійної теорії стає практично неможливою. Оскільки лінійний фільтр оптимальний для сигналу $s(u, t)$, а не для самого повідомлення $u(t)$, то при проектуванні нестационарних оптимальних систем фільтр Колмогорова–Вінера не застосовується. Розв'язання нестационарних задач оптимальних систем зв'язку базується на оптимальних фільтрах Калмана.

2.5. СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНИХ ФІЛЬТРІВ КАЛМАНА МЕТОДОМ ПРОСТОРУ СТАНІВ

Ефективним шляхом синтезу оптимальних нестационарних фільтрів є запропонований Калманом і Б'юсі метод простору станів. Відповідно до методики, викладеної в процес, що виділяється (повідомлення), зображується у вигляді компоненти чи лінійної комбінації компонент векторного процесу $x(t)$. Складові процесу $x(t)$ визначаються розв'язанням системи лінійних диференціальних рівнянь, збурюваннями в яких є білі шуми. Описаний векторний процес є окремим випадком багатовимірного марковського процесу. Тому підхід Калмана–Б'юсі до синтезу оптимальних лінійних фільтрів може бути названий *марковською теорією оптимальної лінійної фільтрації*. Будемо, однак, для зручності, а також зважаючи на розповсюджену термінологію, називати його *синтезом за методом простору станів*.

Зазначений підхід до синтезу оптимальних лінійних фільтрів тісно поєднується з загальною теорією оптимальної нелінійної фільтрації марковських процесів, розробленою Р. Л. Стратоновичем [35]. У [5] показано, як основні співвідношення для оптимальних фільтрів Калмана можуть бути отримані з результатів марковської теорії оптимальної нелінійної фільтрації. Оскільки задача оптимальної лінійної фільтрації простіша за задачу нелінійної фільтрації, то відповідний до неї математичний апарат розроблений на даний час більш детально.

Опис повідомлень. Розгляд синтезу оптимальних лінійних фільтрів методом простору станів почнемо з пояснення можливості зображення повідомлення у вигляді компоненти або лінійної комбінації компонент марковського процесу.

Нехай, наприклад, процес $\lambda(t)$, який підлягає виділенню за допомогою оптимального фільтра, є розв'язком лінійного стохастичного диференціального рівняння n -го порядку

$$A(p)\lambda(t) = k_1 B(p)n(t), \quad (2.47)$$

де $A(p) = p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_0$; $B(p) = b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \dots + b_1 p + 1$; $n(t)$ – білий шум; $m \leq n-1$. Процес $S(t)$ відповідно до (2.47) можна розглядати як результат впливу білого шуму $n(t)$ на формувальний фільтр з операторним коефіцієнтом передачі

$$K_f(p) = k_1 B(p) / A(p). \quad (2.48)$$

Зображення повідомлення $\lambda(t)$ у вигляді розв'язку рівняння (2.47) є достатньо універсальним. Так, якщо при синтезі оптимального лінійного фільтра задана спектральна щільність $S_\lambda(\omega)$ повідомлення $\lambda(t)$, яка описується дробово-раціональною функцією, то процес $S(t)$ можна розглядати як ефект на виході формувального фільтра (2.48) в усталеному режимі й відображати диференціальним рівнянням вигляду (2.47). Для цього достатньо прирівняти $S_\lambda(\omega) = |K_f(j\omega)|^2 = |k_1 B(j\omega) / A(j\omega)|^2$, визначити з цієї умови комплексний коефіцієнт передачі $K_f(j\omega)$ і відновити за $K_f(j\omega)$ диференціальне рівняння формувального фільтра.

Замінивши змінні в рівнянні (2.47), його можна подати системою лінійних диференціальних рівнянь першого порядку, до правих частин яких входить білий шум, але не його похідні. Якщо $B(p) = 1$, то вказаний перехід виконується за допомогою заміни змінних:

$$\left. \begin{aligned} dx_1(t)/dt &= x_2(t); \\ dx_2(t)/dt &= x_3(t); \\ \dots\dots\dots \\ dx_{n-1}(t)/dt &= x_n(t), \end{aligned} \right\} \quad (2.49)$$

де $x_1(t) = \lambda(t)$.

Рівняння (2.47) у нових змінних записується у вигляді

$$\frac{dx_n}{dt} = -a_{n-1}x_n - \dots - a_0x_1 + k_1 n(t). \quad (2.50)$$

Сукупність компонент $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, що задовольняють рівняння (2.49), (2.50), утворить вектор-функцію, яка описує багатовимірний марковський процес $\mathbf{x}(t)$ в n -вимірному просторі (просторі станів). Систему рівнянь (2.49) можна записати у векторній формі:

$$d\mathbf{x}/dt = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{H}n(t), \quad (2.51)$$

де $\mathbf{x}(t)$ – n -вимірний вектор-стовпець із компонентами $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$; \mathbf{F} і \mathbf{H} – відповідно матриця і вектор-стовпець вигляду

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ -a_0 & \dots & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ k_1 \end{bmatrix}. \quad (2.52)$$

Повідомлення $\lambda(t) = x_1(t)$ при такому підході є першою компонентою векторного процесу $\mathbf{x}(t)$ і пов'язане з ним співвідношенням

$$\lambda(t) = x_1(t) = \mathbf{c}_\lambda \mathbf{x}(t), \quad (2.53)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_{n-1} \\ k_1 - \sum_{k=1}^{n-1} a_k c_k \end{bmatrix}.$$

Повідомлення $\lambda(t)$ в даному випадку також визначається через векторний процес $\mathbf{x}(t)$ рівністю (2.53).

Існує інший спосіб складання системи стохастичних диференціальних рівнянь першого порядку з завадами у вигляді білого шуму. В цьому випадку вводиться нова змінна $x_1(t)$, пов'язана з $\lambda(t)$ співвідношенням

$$\lambda(t) = B(p)x_1(t). \quad (2.59)$$

Після підстановки (2.59) в рівняння (2.47) останнє записується так:

$$A(p)x_1(t) = k_1 n(t). \quad (2.60)$$

Рівнянню (2.60) відповідає система диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\left. \begin{aligned} dx_1 / dt &= x_2(t), \\ \dots\dots\dots \\ dx_{n-1} / dt &= x_n(t), \\ dx_n / dt &= -\sum_{k=0}^{n-1} a_k x_{k+1} + k_1 n(t). \end{aligned} \right\} \quad (2.61)$$

Ця система може бути записана у вигляді векторного рівняння

$$d\mathbf{x} / dt = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{H}(t)n(t),$$

де $\mathbf{x}(t)$ – n -вимірний векторний процес; матриця \mathbf{F} і вектор-стовпець \mathbf{H} визначаються виразами (2.52). На відміну від попереднього випадку, повідомлення $\lambda(t)$ при даному способі заміни змінних виражається, як впливає з (2.59), (2.61), через кілька компонент векторного процесу $\mathbf{x}(t)$. Так, якщо $B(p) = 1 + T_1 p$, то

$$\lambda(t) = x_1(t) + T_1 x_2(t). \quad (2.62)$$

Зв'язок між повідомленнями $\lambda(t)$ і n -вимірним вектором $\mathbf{x}(t)$ встановлюється виразом]

$$\lambda(t) = \mathbf{c}_\lambda \mathbf{x}(t),$$

де $\mathbf{c}_\lambda = [1 \ T_1 \ 0 \ \dots \ 0]$ – вектор-рядок, який містить n компонент.

Другий спосіб складання системи стохастичних диференціальних рівнянь дозволяє отримати у векторному рівнянні простіший порівняно з першим способом вираз для вектора-стовпця \mathbf{H} . Однак це досягається ціною ускладнення вектора-рядка \mathbf{c}_λ .

Проведений розгляд показує, як можна зобразити повідомлення у вигляді окремої компоненти чи лінійної комбінації кількох компонент векторного марковського процесу, якщо це повідомлення або описується лінійним диференціальним рівнянням n -го порядку достатньо загального вигляду (2.47), або задається дробово-раціональною спектральною щільністю.

На практиці виникають також задачі, в яких процес (повідомлення), що виділяється, описується диференціальним рівнянням чи системою диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами. При синтезі згладжуючих ланок складних пристроїв зв'язку на входи фільтра, який оптимізується, надходять разом із шумом кілька компонент процесу, який фільтрується, або фільтрівний процес в суміші з різними завадами. Щоб охопити ці випадки, а також ряд інших можливих випадків, загальна постановка задачі синтезу оптимального лінійного фільтра методом простору станів формується наступним чином.

Постановка задачі. Передбачається, що векторний процес $\mathbf{x}(t)$, який описує повідомлення $\lambda(t)$ в n -вимірному просторі станів, задовольняє векторному диференціальному рівнянню

$$d\mathbf{x}/dt = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{H}(t)\mathbf{n}(t), \quad (2.63)$$

де $\mathbf{x}(t)$ – вектор-функція, що містить n компонент; $\mathbf{F}(t)$ – квадратна матриця розміром $n \times n$, яка залежить у загальному випадку від часу; $\mathbf{n}(t)$ – вектор білих шумів, який складається з l компонент; $\mathbf{H}(t)$ – матриця розміром $n \times l$.

Кореляційна матриця процесу, коли шум $\mathbf{n}(t)$ в загальному випадку передбачається нестационарним, має вигляд

$$\mathbf{R}_x(t, u) = M \{ \mathbf{n}(t)\mathbf{n}^T(u) \} = \mathbf{Q}(t)\delta(t-u), \quad (2.64)$$

де $\mathbf{Q}(t)$ – квадратна матриця розміром $l \times l$.

Нагадаємо, що в найпростішому випадку повідомлення $\lambda(t)$ є однією з компонент векторного процесу $\mathbf{x}(t)$. Однак, як видно, наприклад, з формули (2.62), можливі й більш складні ситуації, коли повідомлення $\lambda(t)$ є комбінацією кількох компонент процесу $\mathbf{x}(t)$. У задачах одночасної фільтрації кількох повідомлень компоненти вектора $\mathbf{x}(t)$ можуть бути пов'язані з різними повідомленнями. Обмежимося надалі обговоренням фільтрації одного повідомлення, який виражається через процес $\mathbf{x}(t)$ співвідношенням

$$\lambda(t) = \mathbf{c}_\lambda \mathbf{x}(t),$$

де \mathbf{c}_λ – вектор-рядок, що містить n елементів.

Фільтр, який оптимізується, в загальному випадку має декілька входів, на які можуть надходити в суміші з шумом повідомлення $\lambda(t)$ та його похідні. Сукупність процесів на m входах фільтра утворює спостережуваний векторний процес

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{n}(t), \quad (2.65)$$

де $\boldsymbol{\varphi}(t)$ – вектор-функція, яка складається із m елементів; $\mathbf{C}(t)$ – прямокутна матриця розміром $m \times n$; $\mathbf{n}(t)$ – m -вимірний вектор білих шумів (шумів вимірювання) з кореляційною матрицею

$$\mathbf{R}(t, u) = \mathbf{R}(t)\delta(t-u); \quad (2.66)$$

тут $\mathbf{R}(t)$ – додатна визначена квадратна матриця розміром $m \times m$. В багатьох випадках процес $\boldsymbol{\varphi}(t)$ скалярний і являє собою адитивну суміш повідомлення $\lambda(t)$ і шуму. В цьому випадку $\mathbf{C}(t)$ – матриця розміром $1 \times n$, тобто вектор-рядок, що збігається з \mathbf{c}_λ .

Спостережуваний процес $\boldsymbol{\varphi}(t)$ надходить на вхід фільтра, починаючи з моменту $t = t_0$. Значення кореляційної матриці процесу $\mathbf{x}(t)$ у момент $t = t_0$ вважається відомим. Процес $\mathbf{x}(t)$ і

завада $\mathbf{n}(t)$ вважаються незалежними. Фільтр має забезпечити виділення повідомлення $\lambda(t)$ з мінімальною середньоквадратичною похибкою в будь-який момент часу $t > t_0$.

Рівняння оптимального фільтра. Рівняння, які визначають структуру й характеристики оптимального фільтра, при розглянутій постановці задачі можуть бути отримані різними способами. Оскільки виведення їх досить громіздке, обмежимося тут обговоренням кінцевих результатів.

Структура оптимального фільтра описується векторним диференціальним рівнянням

$$d\mathbf{x}_0 / dt = \mathbf{G}_0(t, t)[\varphi(t) - \mathbf{C}(t)\mathbf{x}_0(t)] + \mathbf{F}(t)\mathbf{x}_0(t), \quad (2.67)$$

де $\mathbf{x}_0(t)$ – векторний процес на виході оптимального фільтра, який відтворює з деякою помилкою процес $\mathbf{x}(t)$; $\mathbf{G}_0(t, t)$ – матриця змінних коефіцієнтів, яка утворюється з матриці $\mathbf{G}_0(t, u)$ при $t = u$; $\mathbf{G}_0(t, u)$ – матриця імпульсних перехідних функцій оптимального фільтра, яку також називають *перехідною матрицею*.

Початкове значення вектора $\mathbf{x}_0(t_0)$ в рівнянні (2.67) звичайно вважається нульовим.

Нагадаємо, що коли дія й реакція на виході фільтра описуються скалярними функціями, перехідна матриця містить єдину компоненту – звичайну імпульсну перехідну функцію фільтра. Якщо фільтр є багатовимірним, то компонента перехідної матриці, що знаходиться на перетині i -го рядка та j -го стовпця, – це імпульсна перехідна функція, яка пов'язує змінення i -ї компоненти вихідного процесу при дії у вигляді одиничного дельта-імпульсу з його j -ю компонентою. Останнє еквівалентне одиничному початковому значенню i -ї компоненти процесу на виході фільтра при нульових початкових значеннях решти компонент.

Матриця $\mathbf{G}_0(t, t)$, що входить у (2.67), визначається виразом

$$\mathbf{G}_0(t, t) = \mathbf{E}(t)\mathbf{C}^T(t)\mathbf{R}^{-1}(t), \quad (2.68)$$

де $\mathbf{R}^{-1}(t)$ – матриця, обернена до матриці $\mathbf{R}(t)$; $\mathbf{E}(t)$ – матриця дисперсій помилок фільтрації:

$$\mathbf{E}(t) = M \left\{ [\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t)][\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t)]^T \right\}. \quad (2.69)$$

Матриця $\mathbf{E}(t)$ – квадратна симетрична розміром $n \times n$. Її елементами є дисперсії та взаємні дисперсії помилок фільтрації окремих складових вектора $\mathbf{x}(t)$. Іноді $\mathbf{E}(t)$ називають *матрицею коваріацій*.

Зміна помилок фільтрації в часі описується рівнянням

$$d\mathbf{E} / dt = \mathbf{F}(t)\mathbf{E}(t) + \mathbf{E}(t)\mathbf{F}^T(t) - \mathbf{E}(t)\mathbf{C}^T(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{C}(t)\mathbf{E}(t) + \mathbf{H}(t)\mathbf{Q}\mathbf{H}^T(t). \quad (2.70)$$

Рівняння (2.70) є матричним нелінійним диференціальним рівнянням Ріккаті. Для його розв'язку необхідно задати початкове значення $\mathbf{E}(t_0)$ матриці дисперсій помилок. Якщо в момент $t = t_0$ процес $\mathbf{x}_0(t_0)$ на виході фільтра дорівнює нулю, то, як видно з (2.69), матриця $\mathbf{E}(t_0)$ дорівнює матриці дисперсій компонент процесу $\mathbf{x}(t)$, що фільтрується в момент $t = t_0$, тобто $\mathbf{E}(t_0) = M \left\{ \mathbf{x}(t_0)\mathbf{x}^T(t_0) \right\}$.

Сукупність виразів (2.67), (2.68), (2.70) повністю визначає структуру й параметри оптимального фільтра. Структурна схема такого фільтра, побудована за рівнянням (2.67), зображена на рис. 2.6. Подвійними лініями на цьому рисунку позначені зв'язки між векторними процесами. При розв'язанні конкретних задач рівняння (2.67) доцільно подати у вигляді системи

диференціальних рівнянь першого порядку. За цією системою рівнянь легко будується, як показано в п. 2.6, структура оптимального фільтра.

Найбільш складним етапом синтезу оптимальних фільтрів є розв'язання рівняння (2.70). Як правило, воно вимагає застосування ЕОМ.

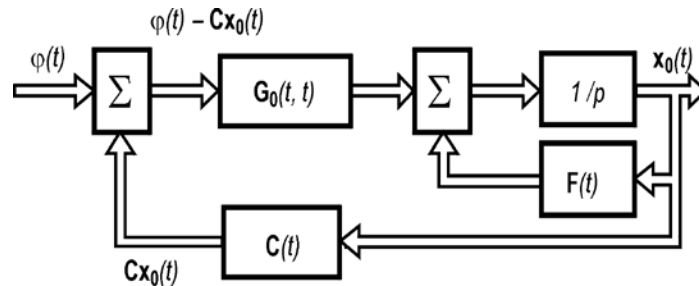


Рис. 9.6. Структурна схема фільтра, котрий побудований за рівнянням (2.67)

Одним із можливих шляхів розв'язання рівняння (2.70) є заміна нелінійного диференціального рівняння з матрицею розміром $n \times n$ системою лінійних диференціальних рівнянь, еквівалентних лінійному матричному диференціальному рівнянню з матрицею розміром $2n \times 2n$. Ця заміна виконується зображенням $\mathbf{E}(t)$ у вигляді

$$\mathbf{v}_1(t) = \mathbf{E}(t)\mathbf{v}_2(t), \quad (2.71)$$

де $\mathbf{v}_1(t)$ і $\mathbf{v}_2(t)$ – n -вимірні вектори, що задовольняють рівнянням

$$d\mathbf{v}_1 / dt = \mathbf{F}\mathbf{v}_1 + \mathbf{H}\mathbf{Q}\mathbf{H}^T \mathbf{v}_2, \quad (2.72)$$

$$d\mathbf{v}_2 / dt = \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C}\mathbf{v}_1 - \mathbf{F}^T \mathbf{v}_2. \quad (2.73)$$

Щоб переконатися в слушності виконуваного переходу, подамо (2.72), враховуючи (2.71), так:

$$\dot{\mathbf{E}}(t)\mathbf{v}_2(t) + \mathbf{E}(t)\dot{\mathbf{v}}_2(t) = \mathbf{F}\mathbf{E}(t)\mathbf{v}_2(t) + \mathbf{H}\mathbf{Q}\mathbf{H}^T \mathbf{v}_2(t). \quad (2.74)$$

Замінивши $\mathbf{v}_2(t)$ в (2.74) відповідно до (2.73), отримаємо

$$\left[\dot{\mathbf{E}}(t) - \mathbf{F}\mathbf{E}(t) - \mathbf{E}(t)\mathbf{F}^T + \mathbf{E}(t)\mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C}\mathbf{E}(t) - \mathbf{H}\mathbf{Q}\mathbf{H}^T \right] \mathbf{v}_2(t) = 0. \quad (2.75)$$

При виконанні рівняння Ріккати рівняння (2.75) задовольняється тотожно, що й доводить правомірність виконуваного переходу.

Виразимо матрицю дисперсій $\mathbf{E}(t)$ через перехідну матрицю $\mathbf{T}(t, t_0)$ системи рівнянь (2.72), (2.73). Матриця $\mathbf{T}(t, t_0)$ встановлює наступний зв'язок:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1(t) \\ \mathbf{v}_2(t) \end{bmatrix} = \mathbf{T}(t, t_0) \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1(t_0) \\ \mathbf{v}_2(t_0) \end{bmatrix}. \quad (2.76)$$

Зобразимо матрицю $\mathbf{T}(t, t_0)$ розміром $2n \times 2n$ у вигляді блочної матриці, елементи якої – матриці розміром $n \times n$:

$$\mathbf{T}(t, t_0) = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{11}(t, t_0) & \mathbf{T}_{12}(t, t_0) \\ \mathbf{T}_{21}(t, t_0) & \mathbf{T}_{22}(t, t_0) \end{bmatrix}.$$

На підставі (2.76)

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1(t) &= \mathbf{T}_{11}(t, t_0)\mathbf{v}_1(t_0) + \mathbf{T}_{12}(t, t_0)\mathbf{v}_2(t_0), \\ \mathbf{v}_2(t) &= \mathbf{T}_{21}(t, t_0)\mathbf{v}_1(t_0) + \mathbf{T}_{22}(t, t_0)\mathbf{v}_2(t_0). \end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(t)[\mathbf{T}_{21}(t, t_0)\mathbf{v}_1(t_0) + \mathbf{T}_{22}(t, t_0)\mathbf{v}_2(t_0)] &= \\ = \mathbf{T}_{11}(t, t_0)\mathbf{v}_1(t_0) + \mathbf{T}_{12}(t, t_0)\mathbf{v}_2(t_0). \end{aligned} \quad (2.77)$$

Помноживши доданки, що входять до обох частин рівності (2.77), на $\mathbf{v}_2^{-1}(t_0)$, та врахувавши, що $\mathbf{v}_1(t_0)\mathbf{v}_2^{-1}(t_0) = \mathbf{E}(t_0)$, після перетворення отримаємо

$$\mathbf{E}(t)[\mathbf{T}_{21}(t, t_0)\mathbf{E}(t_0) + \mathbf{T}_{22}(t, t_0)] = \mathbf{T}_{11}(t, t_0)\mathbf{E}(t_0) + \mathbf{T}_{12}(t, t_0). \quad (2.78)$$

Для визначення матриці $\mathbf{E}(t)$ необхідно знати початкове значення $\mathbf{E}(t_0)$ і перехідну матрицю $\mathbf{T}(t, t_0)$. Щоб знайти матрицю $\mathbf{T}(t, t_0)$, запишемо систему рівнянь (2.72) і (2.73) у такому вигляді:

$$d\mathbf{v}/dt = \mathbf{A}\mathbf{v}(t), \quad (2.79)$$

де $\mathbf{v}(t)$ – складений вектор, компонентами якого є вектори $\mathbf{v}_1(t)$ і $\mathbf{v}_2(t)$; \mathbf{A} – блочна матриця:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}(t) & \mathbf{H}(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{H}^T(t) \\ \mathbf{C}^T(t)\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}(t) & -\mathbf{F}^T(t) \end{bmatrix}. \quad (2.80)$$

Існують різні методи обчислення перехідної матриці для системи, описуваної рівнянням (2.79). Якщо розмір матриці \mathbf{A} невеликий, а її складові – матриці \mathbf{F} , \mathbf{C} , \mathbf{H} , \mathbf{Q} – сталі в часі, то перехідну матрицю $\mathbf{T}(t, t_0)$ можна, наприклад, знайти за формулою

$$\mathbf{T}(t, t_0) = \mathbf{T}(t - t_0) = \mathbf{T}(\tau) = L^{-1} \left\{ [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \right\}, \quad (2.81)$$

де L^{-1} – операція оберненого перетворення Лапласа; \mathbf{I} – одинична матриця; $[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}$ – матриця, обернена до $[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]$; s – оператор перетворення Лапласа.

В тих випадках, коли необхідно знайти значення коефіцієнтів $\mathbf{G}_0(t, t_0)$ в структурній схемі оптимального фільтра тільки в усталеному режимі, достатньо знайти усталене значення матриці $\mathbf{E}(t)$. Якщо, крім того, корисне повідомлення й завади є стаціонарними процесами, то в рівнянні (2.70) слід покласти $d\mathbf{E}/dt = 0$ і розв'язати отримане матричне алгебраїчне рівняння. Остання задача є значно простішою, ніж розв'язання повного рівняння (2.70).

2.6. ПРИКЛАДИ СИНТЕЗУ ОПТИМАЛЬНИХ ФІЛЬТРІВ

Розглянемо приклади синтезу лінійних фільтрів методом простору станів.

Приклад 2.3. Нехай повідомлення $\lambda(t)$ – стаціонарний випадковий процес, який описується диференціальним рівнянням першого порядку

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{1}{T}\lambda(t) + \frac{1}{T}n(t).$$

Такий процес відповідає білому шуму $n(t)$, пропущеному через інерційну ланку з операторним коефіцієнтом передачі $K(p) = 1/(1 + pT)$. Функція кореляції шуму $n(t)$ записується у вигляді

$$R_x(t, u) = S_3(0)\delta(t - u), \quad (2.82)$$

де $S_3(0)$ – спектральна щільність шуму $n(t)$ на нульовій частоті. Зазначимо, що при цьому спектральна щільність повідомлення $\lambda(t)$

$$S_\lambda(\omega) = \frac{2\mu\sigma_\lambda^2}{\omega^2 + \mu^2}, \quad (2.83)$$

де $\mu = 1/T$; $\sigma_\lambda^2 = S_\lambda(0)/(2T)$ – дисперсія процесу $\lambda(t)$. Оскільки $\lambda(t)$ описується рівнянням першого порядку, то векторний процес $\mathbf{x}(t)$ в даній задачі одновимірний і складається з єдиної компоненти, яка збігається з $\lambda(t)$. Відповідно, процес $\mathbf{x}(t)$ описується рівнянням

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{T}x(t) + \frac{1}{T}n(t). \quad (2.84)$$

Припустимо, що суміш повідомлення й завади на вході фільтра має вигляд

$$\varphi(t) = x(t) + n(t), \quad (2.85)$$

де $n(t)$ – стаціонарний білий шум із спектральною щільністю $S_3(0)$ та функцією кореляції $R(\tau) = S_3(0)\delta(\tau)$.

Порівняння (2.82), (2.84), (2.85) із (2.64) і (2.65) показує, що в даній задачі матриці \mathbf{F} , \mathbf{H} , \mathbf{C} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} є сталими скалярами і дорівнюють:

$$\mathbf{F} = -1/T, \quad \mathbf{H} = 1/T, \quad \mathbf{C} = 1, \quad \mathbf{Q} = S_3(0), \quad \mathbf{R} = S_\lambda(0), \quad (2.86)$$

де S_3 і S_λ – спектральна щільність завади і повідомлення відповідно.

Рівняння (2.67), що визначає структуру оптимального фільтра, в даному випадку конкретизується:

$$d\mathbf{x}_0/dt = \mathbf{G}_0(t, t)[\varphi(t) - \mathbf{x}_0(t)] - \mathbf{x}_0(t)/T, \quad (2.87)$$

де згідно з (2.68) і (2.86)

$$\mathbf{G}_0(t, t) = \mathbf{E}(t)/S(0). \quad (2.88)$$

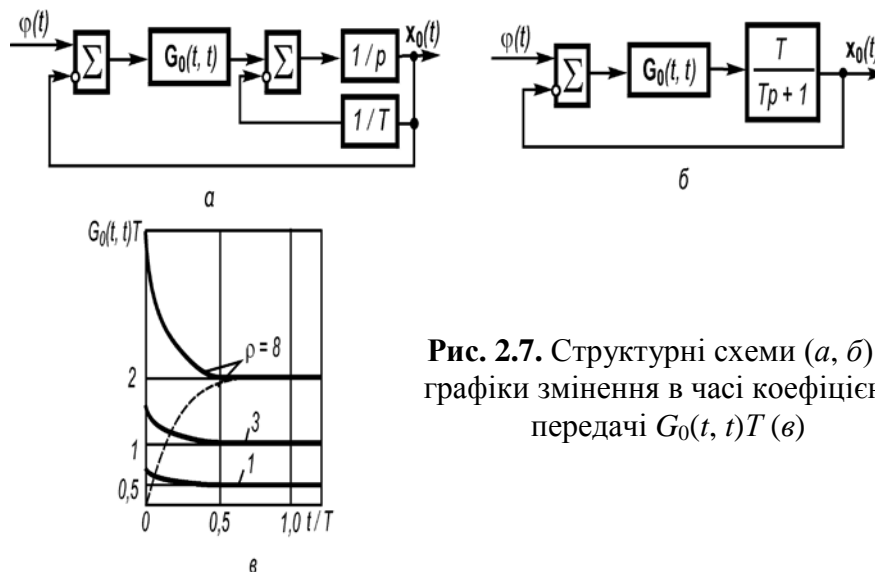


Рис. 2.7. Структурні схеми (а, б) та графіки змінення в часі коефіцієнта передачі $G_0(t, t)T$ (в)

Рівнянню (2.87) відповідає структурна схема, показана на рис. 2.7, а. Суматор, охоплений зворотним зв'язком, можна замінити інерційною ланкою. Тоді структурна схема набере вигляду, як на рис. 2.7, б.

Рівняння (2.70) для дисперсій похибок в даній задачі скалярне:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2}{T}E(t) - \frac{1}{S_n(0)}E^2(t) + \frac{1}{T^2}S_3(0).$$

Замінімо його відповідно до (2.72), (2.73) системою лінійних диференціальних рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}_{1n=2}}{dt} &= -\frac{1}{T}\mathbf{v}_1 + \frac{S}{T^2}\mathbf{v} \\ \frac{d\mathbf{v}^2}{dt} &= \frac{\mathbf{v}_1}{S_3(0)} + \frac{\mathbf{v}_2}{T} \end{aligned} \right\} \quad (2.89)$$

Із системи (2.89) випливає, що матриця **A** має такий вигляд:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1/T & S_n(0)/T^2 \\ 1/S_3(0) & 1/T \end{bmatrix}. \quad (2.90)$$

Припустимо, що $t_0 = 0$, і використаємо для обчислення перехідної матриці $\mathbf{T}(t, 0)$ формулу (2.80). Матриця $[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]$ згідно з (2.90) дорівнює

$$\begin{bmatrix} s+1/T & -S_n(0)/T^2 \\ -1/S_3(0) & s-1/T \end{bmatrix}.$$

Обернена до неї матриця

$$[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} = \frac{1}{s^2 - \gamma^2} \begin{bmatrix} s-1/T & S_n(0)/T^2 \\ 1/S_3(0) & s+1/T \end{bmatrix}, \quad (2.91)$$

де $\gamma = \sqrt{1 + S_n(0)/S_3(0)} = \sqrt{1 + \rho/T}$; $\rho = S_n(0)/S_3(0)$.

Виконавши обернене перетворення Лапласа для елементів матриці (2.91), дістанемо

$$\mathbf{T}(t, 0) = \begin{bmatrix} \text{ch } \gamma t - \frac{1}{\gamma T} \text{sh } \gamma t & \frac{S_n(0)}{T^2 \gamma} \text{sh } \gamma t \\ \frac{\text{sh } \gamma t}{S_3(0) \gamma} & \text{ch } \gamma t + \frac{\text{sh } \gamma t}{\gamma T} \end{bmatrix}; \quad (2.92)$$

отже,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{11} &= \text{ch } \gamma t - \frac{\text{sh } \gamma t}{\gamma T}, & \mathbf{T}_{12} &= \frac{S_n(0) \text{sh } \gamma t}{T^2 \gamma}, \\ \mathbf{T}_{21} &= \frac{\text{sh } \gamma t}{S_3(0) \gamma}, & \mathbf{T}_{22} &= \text{ch } \gamma t + \frac{\text{sh } \gamma t}{\gamma T}. \end{aligned} \quad (2.93)$$

За формулою (2.78) з урахуванням (2.93) знаходимо, що дисперсія похибки

$$E(t) = \frac{E(0) \left[\text{ch } \gamma t - \frac{\text{sh } \gamma t}{\gamma T} \right] + \frac{S_n(0) \text{sh } \gamma t}{T^2 \gamma}}{E(0) \cdot \frac{\text{sh } \gamma t}{S_3(0) \gamma} + \text{ch } \gamma t + \frac{\text{sh } \gamma t}{\gamma T}}. \quad (2.94)$$

Значення $E(0)$ дорівнює дисперсії σ_λ^2 процесу $\lambda(t)$ і визначається співвідношенням (2.84), тобто $E(0) = \sigma_\lambda^2 = S_n(0)/2T$. При цьому вираз (2.94) для похибки набирає вигляду

$$E(t) = \sigma_\lambda^2 \frac{\sqrt{1 + \rho} \cdot \text{ch } \gamma t + \text{sh } \gamma t}{\sqrt{1 + \rho} \cdot \text{ch } \gamma t + (1 + 0,5\rho) \text{sh } \gamma t}. \quad (2.95)$$

Дисперсію похибки фільтрації в усталеному режимі знайдемо, взявши в (2.95) $t \rightarrow \infty$:

$$E_{\text{уст}} = \frac{S_n(0)/T}{1 + \gamma T} = \frac{2\sigma_\lambda^2}{1 + \sqrt{1 + \rho}}.$$

Змінення в часі коефіцієнта передачі $G_0(t, t)$ за схемою оптимального фільтра описується, як впливає з (2.88) і (2.95), виразом

$$G_0(t, t) = \frac{1}{2T} \rho \frac{\sqrt{1 + \rho} \cdot \text{ch } \gamma t + \text{sh } \gamma t}{\sqrt{1 + \rho} \cdot \text{ch } \gamma t + (1 + 0,5\rho) \text{sh } \gamma t}. \quad (2.96)$$

На рис. 2.7, в суцільними лініями показано розраховане за формулою (2.96) для кількох значень ρ змінення нормованого коефіцієнта $G_0(t, t)T$ в часі. Як бачимо, коефіцієнт $G_0(t, t)$ максимальний в перший момент часу, а потім поступово зменшується, прямуючи до усталеного значення $G_{\text{уст}}$. Така поведінка коефіцієнта $G_0(t, t)$ оптимального фільтра пояснюється тим, що в перший момент часу повідомлення $\lambda(t)$ не проходить на вихід фільтра, й виникає значна помилка. Щоб швидко усунути її, необхідно розширити смугу пропускання слідкуючої системи, що й досягається збільшенням коефіцієнта $G_0(t, t)$. У процесі оброблення слідкуючою системою повідомлення $\lambda(t)$ вага помилки, спричиненої неточним відтворенням повідомлення $\lambda(t)$,

зменшується. Одночасно збільшується флуктуаційна складова помилки. Щоб обмежити її, доцільно звужити смугу пропускання системи, зменшивши коефіцієнт $G_0(t, t)$. Початкове та усталене значення коефіцієнта $G_0(t, t)$, як випливає з (2.96), дорівнюють

$$G_{0y}(0) = \frac{\rho}{2T}, \quad G = \frac{\rho}{T(1+\sqrt{1+\rho})}. \quad (2.97)$$

Їх співвідношення $G_{0y}(0)/G = (1+\sqrt{1+\rho})/2$, яке характеризує ступінь змінення коефіцієнта $G_0(t, t)$, тим більше, чим більше відношення $\rho = S_n(0)/S_s(0)$ спектральних щільностей повідомлення й завади. Зі зростанням ρ зростає також значення коефіцієнта передачі $G_0(t, t)T$ в усталеному режимі.

Якщо повідомлення $\lambda(t)$ є нестационарним процесом, то поведінка коефіцієнта $G_0(t, t)$ оптимального фільтра змінюється. Розглянемо такий випадок. Нехай в умовах даної задачі вхідний сигнал $\lambda(t)$ утворюється вмиканням на вхід формувального фільтра білого шуму $n(t)$ в той же момент часу t_0 , коли суміш повідомлення й завади надходить для фільтрації на вхід оптимального фільтра.

Повідомлення $\lambda(t)$ в цьому випадку є процесом з наростаючою дисперсією $\sigma_\lambda^2(t) = \sigma_{\lambda_{уст}}^2 [1 - \exp(-2(t-t_0)/T)]$, яка прямує до усталеного значення $\sigma_{\lambda_{уст}}^2 = S_n(0)/(2T)$. В момент $t=t_0$ повідомлення на виході формувального фільтра відсутнє і дисперсія $\sigma_\lambda^2(t_0) = 0$. Оскільки початкове значення $x_0(t_0)$ процесу на виході оптимального фільтра береться рівним нулю, то при $\sigma_\lambda^2(t_0) = 0$ дисперсія помилки $E(t_0)$ в момент $t=t_0$ також дорівнює нулю.

Зміну коефіцієнта $G_0(t, t)$ в схемі оптимального фільтра для цього випадку можна обчислити за формулами (2.86) і (2.94), поклавши в (2.94) $E(t_0) = 0$. Відповідна крива при $\rho = 8$ показана на рис. 2.7, в штриховою лінією. Як видно з рисунка, оптимальний коефіцієнт $G_0(t, t)$ в даному випадку збільшується зі зростанням дисперсії повідомлення, прямуючи до попереднього усталеного значення.

Комплексний коефіцієнт передачі знайденого оптимального фільтра, наведеного на рис. 2.7, б, в усталеному режимі дорівнює

$$\Phi(j\omega) = \frac{G_{уст}T/(1+j\omega T)}{1+G_{уст}T/(1+j\omega T)} = k_{екв} \frac{1}{1+j\omega T_{екв}}, \quad (2.98)$$

$$\text{де } T_{екв} = T/\sqrt{1+\rho}, \quad k_{екв} = \rho/(1+\rho+\sqrt{1+\rho}).$$

Оцінимо, який же виграш досягається за рахунок змінності параметрів оптимального фільтра. Для цього порівняємо похибки фільтрації при виділенні стаціонарного повідомлення оптимальним фільтром зі змінними параметрами і оптимальним фільтром (2.98) зі сталими параметрами. Якщо початкові умови на виході фільтра нульові, то в перший момент для обох фільтрів дисперсії похибки дорівнюють дисперсії повідомлення, тобто однакові. Однакові вони і в усталеному режимі. Виграш при використанні оптимального фільтра зі змінними параметрами проявляється в зменшенні помилки в перехідному режимі.

Виведемо співвідношення, яке описує зміну похибки фільтрації для оптимального фільтра (2.98). Дисперсія флуктуаційної складової σ_{1s}^2 , яка зумовлена дією завади $n(t)$, змінюється за законом

$$\sigma_{1s}^2(t) = S_2(0) \int_0^t g(\tau) d\tau,$$

де $g_2(\tau)$ – імпульсна перехідна функція, яка відповідає комплексному коефіцієнту передачі (2.98):

$$g(t) = (k_{\text{екв}} / \text{екв})^{-t/T_{\text{екв}}}.$$

Після інтегрування отримаємо

$$\sigma_{1s}^2(t) = S(0) \frac{k_{\text{екв}}^2}{2T} (1 - e^{-2t/T_{\text{екв}}}).$$

Комплексний коефіцієнт передачі, який пов'язує повідомлення $\lambda(t)$ і спричинену його зміненням складову похибки, дорівнює

$$K(j\omega) = 1 - \Phi(j\omega).$$

Йому відповідає імпульсна перехідна функція

$$g_2(t) = \delta(t) - \frac{k_{\text{екв}}}{T_{\text{екв}}} e^{-t/T_{\text{екв}}}.$$

Оскільки повідомлення $\lambda(t)$ не є білим шумом і має функцію кореляції $R_\lambda(\tau) = \sigma_\lambda^2 e^{-\mu|\tau|}$, то для обчислення дисперсії складової похибки, зумовленої неточним відтворенням повідомлення, застосуємо формулу [17]

$$\sigma_2^2(t) = 2 \int_0^t g_2(\tau) g_1(\tau) d\tau,$$

де $g_1(\tau)$ – функція, зображення якої за Лапасом дорівнює добутковій зображення $\sigma_\lambda^2 / (s + \mu)$ кореляційної функції $R_\lambda(\tau)$ дії та передавальної функції $K(s)\Phi(s)$, тобто

$$g_1(\tau) = \sigma_\lambda^2 K(s) / (s + \mu).$$

Тоді, виконавши інтегрування, дістанемо

$$\sigma_{2\text{екв}}^2(t) = \sigma_\lambda^2 [1 - k (1 - e^{-2t/T_{\text{екв}}})].$$

Повідомлення й завада за умовою задачі незалежні. Тому змінення повної дисперсії похибки описується виразом

$$\sigma^2(t) = E(t) = \sigma_1^2(t) + \sigma_2^2(t) = \sigma_\lambda^2 \left[1 - (1 - e^{-2\gamma t}) \frac{\rho}{(1 + \sqrt{1 + \rho})^2} \right].$$

Змінення нормованої похибки $E(t)/\sigma_\lambda^2$,

розраховане за наведеною формулою для кількох значень ρ , показане на рис. 2.8 штриховою лінією; суцільними лініями зображені обчислені за формулою (2.95) аналогічні криві для оптимального фільтра зі змінними параметрами. Порівняння кривих дозволяє зробити для розглянутого випадку фільтрації стаціонарного повідомлення наступні висновки:

1) виграш у зменшенні похибки фільтрації, який досягається за рахунок змінності параметрів, збільшується зі зростанням величини ρ (відношення повідомлення–завада);

2) інтервал часу, в межах якого проявляється перевага оптимального фільтра зі змінними параметрами, пропорційний до постійної часу T фільтра, що формує повідомлення, а отже, обернено пропорційний до ширини спектра повідомлення;

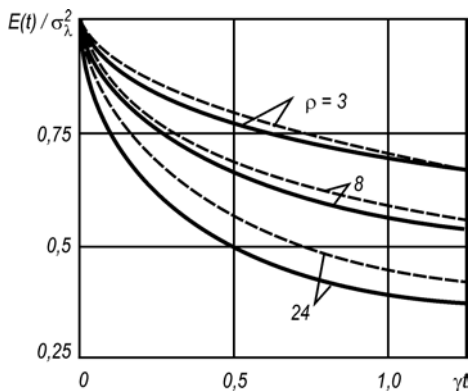


Рис. 2.8. Змінення нормованої похибки

3) в цілому виграш за рахунок змінності параметрів порівняно невеликий, і для розглянутих співвідношень повідомлення–завада не перевищує 15 %.

Проте такі висновки не зменшують інтересу до оптимальних фільтрів зі змінними параметрами та методів їх синтезу. Якщо повідомлення чи завада описуються нестационарними випадковими процесами, то оптимальний фільтр навіть в усталеному режимі має змінні параметри, й заміна його фільтром зі сталими параметрами може призвести до істотного погіршення якості фільтрації.

Приклад 2.4. Припустимо, що повідомлення $\lambda(t)$ може бути зображене як процес, що формується на виході двох послідовно ввімкнених інтеграторів, і описане стохастичним диференціальним рівнянням другого порядку

$$d^2\lambda/dt^2 = k_{12}n(t). \quad (2.99)$$

Спектральна щільність процесу $\lambda(t)$ дорівнює $S_\lambda(\omega) = k_{12}^2 S_n(0)/\omega^4$. На вхід фільтра, що оптимізується, надходить суміш

$$\varphi(t) = \lambda(t) + n(t), \quad (2.100)$$

де $n(t)$ – білий шум із спектральною щільністю $S_n(0)$.

Необхідно знайти структуру і параметри оптимального фільтра, який мінімізує середньоквадратичну похибку відтворення процесу $\lambda(t)$ в будь-який момент часу t .

Для розв'язання поставленої задачі подамо рівняння (2.97) у вигляді системи рівнянь першого порядку:

$$dx_1/dt = x_2(t), \quad dx_2/dt = k_{12}n(t),$$

де $x_1(t) = \lambda(t)$. Отриману систему рівнянь запишемо в матричній формі:

$$\begin{bmatrix} dx_1/dt \\ dx_2/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ k_{12} \end{bmatrix} n(t). \quad (2.101)$$

Із порівняння (2.101) і (2.63) випливає, що в даній задачі вектор $\mathbf{x}(t)$ містить дві компоненти: $x_1(t) = \lambda(t)$ і $x_2(t)$, а матриці \mathbf{F} , \mathbf{H} , \mathbf{Q} – сталі:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ k_{12} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = S_n(0). \quad (2.102)$$

Рівняння (2.98) також запишемо в матричній формі, виразивши $\varphi(t)$ через вектор $\mathbf{x}(t)$:

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + n(t). \quad (2.103)$$

Із порівняння (2.103) і (2.65) випливає, що в даному випадку матриці \mathbf{C} і \mathbf{R} конкретизуються у вигляді

$$\mathbf{C} = [1 \ 0], \quad \mathbf{R} = S_3(0). \quad (2.104)$$

Оскільки вектор $\mathbf{x}(t)$ в даній задачі містить дві компоненти, то матриця дисперсій помилок $\mathbf{E}(t)$ має розмір 2×2 :

$$\mathbf{E}(t) = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix}. \quad (2.105)$$

Синтез фільтра зручно розпочати з визначення матриці коефіцієнтів $\mathbf{G}_0(t, t)$. Згідно з (2.68) $\mathbf{G}_0(t, t) = \mathbf{E}(t)\mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1}$, тому, враховуючи (2.103) і (2.102), отримуємо

$$\mathbf{G}_0(t, t) = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{R}^{-1} = \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{bmatrix} \mathbf{R}^{-1}. \quad (2.106)$$

Щоб знайти структуру оптимального фільтра для даної задачі, підставимо в рівняння (2.62) матриці \mathbf{F} , \mathbf{C} , $\mathbf{G}_0(t, t)$, які визначаються виразами (2.102), (2.104), (2.106), і запишемо його у вигляді системи рівнянь першого порядку:

$$\begin{aligned} dx_{10}/dt &= x_{20}(t) + R^{-1}e_{11}[\varphi(t) - x_{10}(t)], \\ dx_{20}/dt &= R^{-1}e_{21}[\varphi(t) - x_{10}(t)]. \end{aligned} \quad (2.107)$$

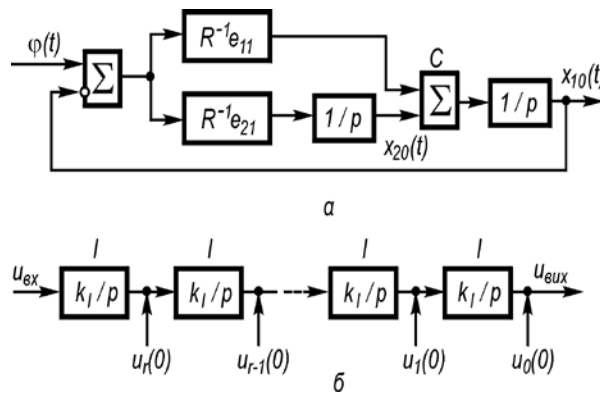


Рис. 2.9. Змінення структурної схеми

Структурна схема оптимального фільтра, описуваного рівняннями (2.107), показана на рис. 2.9, а. Залишається знайти коефіцієнти, що входять до нього: $e_{11}(t)$ та $e_{21}(t)$. Для цього необхідно розв'язати рівняння (2.70). Обмежимося для простоти розглядом усталеного режиму, в якому $d\mathbf{E}(t)/dt = 0$. Обчислимо з урахуванням (2.72), (2.74) окремі доданки рівняння (2.70):

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\mathbf{E} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{21} & e_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{E}\mathbf{F}^T &= \begin{bmatrix} e_{21} & 0 \\ e_{22} & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{E}\mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C}\mathbf{E} &= \begin{bmatrix} e_{11}^2 & e_{11}e_{12} \\ e_{21}e_{11} & e_{21}e_{12} \end{bmatrix} \mathbf{R}^{-1}, & \mathbf{H}\mathbf{Q}\mathbf{H}^T &= \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_{12}^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Підсумувавши всі доданки (2.70) з урахуванням того, що матриця \mathbf{E} симетрична і $e_{12} = e_{21}$, отримаємо наступну систему алгебраїчних рівнянь:

$$2e_{21} - R^{-1}e_{12}^2 = 0, \quad e_{221} - e_{11}e_{21}R^{-1} = 0, \quad Qk^2 - R^{-1}e^2 = 0,$$

звідки

$$\begin{aligned} e_{21} &= \sqrt{\frac{Qk^2}{2R}} = \sqrt{k^2 S(0)S(0)}, \\ e_{11} &= \sqrt{\frac{2e_{21}}{R}} = \sqrt[4]{4k^2 S(0)S^3(0)}. \end{aligned} \quad (2.108)$$

В усталеному режимі комплексний коефіцієнт передачі розімкненої слідкуючої системи відповідно до рис. 2.9, б та рівностей (2.108)

$$K(j\omega) = \frac{K_a(1 + j\omega T_1)}{(j\omega)^2}, \quad (2.109)$$

$$\text{де } K_a = R^{-1}e_{211}k \sqrt{S(0)/S(0)}; \quad T_1 = e_{21}/e = \sqrt[4]{4S(0)/k^2 S(0)}.$$

Отже, за умовами даної задачі оптимальний фільтр в усталеному режимі є слідкуючою системою з двома інтеграторами і демпфівальним ланцюжком, параметри яких визначаються співвідношеннями (2.109).

2.7. ОПТИМАЛЬНИЙ ФІЛЬТР ДЛЯ ПОВІДОМЛЕННЯ, ОПИСУВАНОВОГО СТЕПЕНЕВИМ ПОЛІНОМОМ

Метод простору станів дозволяє достатньо просто знаходити структуру й параметри оптимального фільтра, який мінімізує похибку фільтрації в будь-який момент часу, та у випадку, коли повідомлення $\lambda(t)$ описується поліномом із випадковими коефіцієнтами:

$$\lambda(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_r t^r, \quad (2.110)$$

де a_0, a_1, \dots, a_r – випадкові величини з відомою кореляційною матрицею. Елементами цієї матриці є значення $M\{a_i a_j\} = \sigma_{ij}^2$. Застосування методу простору станів в даному випадку засновано на можливості зобразити повідомлення $\lambda(t)$ як процес на виході формувального фільтра, який складається із $r+1$ послідовно ввімкнених інтеграторів I (рис. 2.9, б). Дійсно, якщо зовнішня дія на вході ланцюжка інтеграторів відсутня, тобто $u_{\text{вх}}(t) = 0$, а початкові значення $u_i(0)$ на входах інтеграторів встановлені рівними

$$u_i(0) = \frac{a_i i!}{k_1^i},$$

то на виході ланцюжка утворюється процес (2.110). Формування повідомлення $\lambda(t)$ схемою, яка показана на рис. 2.7 в, описується диференціальним рівнянням $d^{r+1}\lambda/dt^{r+1} = 0$. Поклавши $\lambda(t) = x_1(t)$, це рівняння можна замінити системою $r+1$ рівнянь першого порядку:

де $\mathbf{R}_\lambda(0)$ – матриця розміром $(r+1) \times (r+1)$. Елемент цієї матриці, який стоїть на перетині i -го рядка та j -го стовпця, дорівнює $r_{ij} = M\{x_i(0)x_j(0)\}$. Він визначається через відомий момент σ_{ij}^2 коефіцієнтів a_i, a_j співвідношенням

$$r_{ij} = M\{i!a_i j!a_j\} = i!j!\sigma_{ij}^2. \quad (2.117)$$

Таким чином, матриця $\mathbf{E}(0)$ повністю визначається за відомими значеннями σ_{ij}^2 .

Матрицю $\mathbf{E}(t)$ в даному випадку можна знайти, розв'язавши рівняння (2.115) шляхом переходу до системи лінійних рівнянь (2.72) та (2.73). Нагадаємо, що при цьому в процесі розв'язання виникає необхідність визначити перехідну матрицю $\mathbf{T}(t, t_0)$ розміром $2n \times 2n$, де $n = r+1$. Якщо для її пошуку використовується формула (2.81), то при обчисленні оберненої матриці $[\mathbf{sI} - \mathbf{A}]^{-1}$ зручно зобразити $[\mathbf{sI} - \mathbf{A}]$ у вигляді блочної матриці:

$$[\mathbf{sI} - \mathbf{A}] = \begin{bmatrix} \mathbf{m} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{bmatrix}. \quad (2.118)$$

Тоді відповідно до [11]

$$[\mathbf{sI} - \mathbf{A}] = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{K} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix},$$

де

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= [\mathbf{m} - \mathbf{bd}^{-1}\mathbf{c}]^{-1}, & \mathbf{B} &= -\mathbf{d}^{-1}\mathbf{cM}, \\ \mathbf{D} &= [\mathbf{d} - \mathbf{cm}^{-1}\mathbf{b}]^{-1}, & \mathbf{K} &= -\mathbf{m}^{-1}\mathbf{bD}. \end{aligned} \quad (2.119)$$

Оскільки в задачі фільтрації повідомлення, описуваного поліномом, $\mathbf{Q} = 0$, то в матриці $[\mathbf{sI} - \mathbf{A}]$, як видно з (2.80), блок $\mathbf{b} = 0$. Рівності (2.119) при цьому набувають дуже простого вигляду:

$$\mathbf{M} = -\mathbf{m}^{-1}, \quad \mathbf{B} = -\mathbf{d}^{-1}\mathbf{cM}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{d}^{-1}, \quad \mathbf{K} = 0,$$

і процедура визначення матриці $\mathbf{E}(t)$ спрощується.

Кореляційну матрицю $\mathbf{E}(t)$ похибок фільтрації при $\mathbf{Q} = 0$ можна знайти також за формулою

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{P}(t, 0) \mathbf{\Omega}^1(t) {}^T(t, 0), \quad (2.120)$$

де $\mathbf{\Omega}(t, 0) = e^{\mathbf{F}t}$ – перехідна матриця формувального фільтра;

$$\mathbf{P}(t) \mathbf{\Omega} = \mathbf{E}^{-1}(\mathbf{C} \mathbf{\Omega}^T(\tau) {}^T \quad \int_0^t (\tau) d\tau.$$

Рівність (2.120) є наведеним розв'язком рівняння (2.115), вираженим через легко обчислювану матрицю $\mathbf{\Omega}(t, 0)$. Розмір всіх матриць, які входять в (2.120), не перевищує $n \times n$.

Обсяг обчислень при визначенні матриці $\mathbf{E}(t)$ обома способами приблизно однаковий. Розглянемо побудову оптимального фільтра для повідомлення $\lambda(t)$, яке описується поліномом першого порядку.

Приклад 2.5. Нехай повідомлення

$$\lambda(t) = a_0 + a_1 t, \quad (2.121)$$

де a_0, a_1 – випадкові незалежні величини з нульовими математичними сподіваннями та дисперсіями σ_0^2 і σ_1^2 відповідно. На вхід фільтра надходить суміш

$$\varphi(t) = \lambda(t) + n(t),$$

де $n(t)$ – білий шум зі спектральною щільністю $S_n(0)$ і функцією кореляції $R(\tau) = S_n(0)\delta(\tau)$.

Фільтр має забезпечити мінімум середньоквадратичної похибки в будь-який момент часу t . Оскільки порядок полінома (2.121) $r=1$, то вектор $\mathbf{x}(t)$ і матриця \mathbf{F} в даному прикладі у відповідності до (2.13) набувають вигляду

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.122)$$

Суміш $\varphi(t)$, виражена через векторний процес $\mathbf{x}(t)$, записується при цьому так:

$$\varphi(t) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + n(t), \quad x_1(t) = \lambda(t).$$

Звідси після зіставлення з (2.65) випливає, що

$$\mathbf{C} = [1 \ 0], \quad \mathbf{R} = S_n(0). \quad (2.123)$$

Вектор $\mathbf{x}(t)$ і матриці \mathbf{F} , \mathbf{C} , \mathbf{R} , як випливає із (2.122), (2.123), (2.102), (2.103), такі ж самі, як і в прикладі 2.4, тому знайдені там диференціальні рівняння (2.107) й структурна схема (рис. 2.7) оптимального фільтра залишаються правильними і для даного випадку. Однак коефіцієнти $e_{11}(t)$ і $e_{21}(t)$ ми отримуємо іншими. Для їх визначення необхідно розв'язати рівняння (2.115).

Застосуємо для обчислення матриці $\mathbf{E}(t)$ формулу (2.120). Знайдемо спочатку перехідну матрицю $\mathbf{\Omega}(t, 0) = e^{\mathbf{F}t}$. Згідно з (2.79), (2.81), (2.121)

$$\mathbf{\Omega}(t, 0) = L^{-1} \{ [s\mathbf{I} - \mathbf{F}]^{-1} \},$$

де

$$[s\mathbf{I} - \mathbf{F}] = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix};$$

отже,

$$[s\mathbf{I} - \mathbf{F}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/s & 1/s^2 \\ 0 & 1/s \end{bmatrix}. \quad (2.124)$$

Визначивши обернене перетворення Лапласа для кожного елемента матриці (2.124), отримаємо:

$$\mathbf{\Omega}(t, 0) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.125)$$

Множення матриць $\mathbf{\Omega}^T$, \mathbf{C}^T , \mathbf{R}^{-1} , \mathbf{C} , $\mathbf{\Omega}$ і наступне інтегрування дає наступний результат:

$$\int_0^t \mathbf{\Omega}^T \mathbf{C}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{\Omega} d\tau = \mathbf{R}^{-1} \begin{bmatrix} t & t^2/2 \\ t^2/2 & t^3/3 \end{bmatrix}. \quad (2.126)$$

Оскільки коефіцієнти a_0 і a_1 за умовою задачі – незалежні величини з дисперсіями σ_0^2 і σ_1^2 , то матриця $\mathbf{E}(0)$ відповідно до (2.115) і (2.116) має такий вигляд:

$$\mathbf{E}(0) = \begin{bmatrix} \sigma_0^2 & 0 \\ 0 & \sigma_1^2 \end{bmatrix}. \quad (2.127)$$

Із (2.120), (2.126) і (2.127) випливає, що

$$\mathbf{P}^{-1}(t) = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 1/\sigma_1^2 + t^3/3R & -t^2/2R \\ -t^2/2R & 1/\sigma_0^2 + t/R \end{bmatrix}, \quad (2.128)$$

де $\Delta = (1/\sigma_0^2 + t/R)(1/\sigma_1^2 + t^3/3R) - t^4/(4R^2)$.

Підставивши (2.125) і (2.128) в формулу (2.120), знаходимо матрицю $\mathbf{E}(t)$. Її елементи $e_{11}(t)$ і $e_{21}(t)$, що визначають змінні коефіцієнти передачі в структурній схемі оптимального фільтра, дорівнюють:

$$e_{11}(t) = \frac{\sigma_0^2 + \sigma_1^2 t^2 + \frac{\sigma_0^2 \sigma_1^2 t^3}{3S_3(0)}}{1 + \frac{\sigma_0^2 t}{S_3(0)} + \frac{\sigma_1^2 t^3}{3S_3(0)} + \frac{\sigma_0^2 \sigma_1^2 t^4}{12S_3^2(0)}},$$

$$e_{21}(t) = \frac{\sigma_1^2 t + \frac{\sigma_0^2 \sigma_1^2 t^2}{3S_3(0)}}{1 + \frac{\sigma_0^2 t}{S_3(0)} + \frac{\sigma_1^2 t^3}{3S_3(0)} + \frac{\sigma_0^2 \sigma_1^2 t^4}{12S_3^2(0)}}.$$

Як видно з отриманих виразів, коефіцієнти кореляції та дисперсія помилки виділення повідомлення $\lambda(t)$ зі зростанням t прямують до нуля. Пояснюється це тим, що коефіцієнти a_0 і a_1 у виразі (2.121) стали в часі, й при необмеженому зростанні часу спостереження можуть бути виміряні з як завгодно високою точністю.

2.8. ПОНЯТТЯ ПРО ОПТИМАЛЬНУ НЕЛІНІЙНУ ФІЛЬТРАЦІЮ

У п. 2.1 при розгляді оптимальної нелінійної фільтрації наведені схеми слідкувального приймання (рис. 2.1, б, в), які забезпечують мінімум середньоквадратичної похибки.

Синтез системи, яка здійснює нелінійне перетворення сигналу й забезпечує найбільшу точність слідкування за корисним параметром сигналу (повідомленням), котрий змінюється за час слідкування, може бути проведений методами оптимальної нелінійної фільтрації.

В теорії оптимальної нелінійної фільтрації поєдналися два основні підходи. Перший з них, запропонований Р.Л. Стратоновичем, заснований на описі параметра фільтрівного сигналу за

допомогою марковського процесу. Цей підхід дозволив розв'язати ряд важливих і цікавих задач синтезу оптимальних нелінійних систем. Великий внесок у розвиток цього напрямку оптимальної нелінійної фільтрації та його застосування до синтезу оптимальних приймальних пристроїв при різних методах модуляції сигналу зробив В. І. Тихонов.

Підхід, розроблений І. А. Большаковим і В. Г. Рєпіним, заснований на припущеннях про нормальність процесу $\lambda(t)$ та високу точність його виділення, які дозволяють застосувати гауссову апроксимацію багатовимірному апостеріорного закону розподілу параметра $\lambda(t)$. У літературі такий підхід одержав назву квазілінійного методу. При проведенні синтезу системи оптимальної нелінійної фільтрації даним методом вхідна напруга записується у вигляді

$$u_{\text{вх}}(t) = u_c(t, \lambda, \lambda_n) + u_{\text{ш}}(t),$$

де $u_{\text{сн}}(t, \lambda, \lambda_n)$ – напруга сигналу; $u_{\text{ш}}(t)$ – білий шум зі спектральною щільністю $S(\omega) = S(0)$; $\lambda(t)$ – корисний параметр сигналу, за яким ведеться слідкування; $\lambda_n(t)$ – вектор невідомих параметрів сигналу, які не несуть інформації (їх іноді називають заважаючими або супровідними).

При спрощуючому припущенні, що час кореляції заважаючих параметрів сигналу набагато менший за час кореляції корисного параметра (повідомлення), оптимальна система нелінійної фільтрації є замкненою слідкуючою системою, функціональна схема якої зображена на рис. 2.10, а.

Параметр $\lambda(t)$, за яким ведеться спостереження (частота, фаза, тимчасове положення), нелінійно пов'язаний з радіосигналом $u_c(t, \lambda)$, що діє на вході радіотехнічної слідкуючої системи. Тому слідкуюча система має містити елементи, які здійснюють нелінійне перетворення радіосигналу. Задачу оптимізації структури всієї системи за критерієм мінімуму помилки слідкування слід розв'язувати при цьому на основі теорії оптимальної нелінійної фільтрації.

Нелінійну операцію виділення із сигналу інформації про величину неузгодженості виконує дискримінатор (рис. 2.10, а). Якщо дискримінатор вже вибраний або заданий, то задача синтезу зводиться до оптимізації структури фільтра. Під фільтром тут розуміється вся інерційна частина системи, що слідкує за дискримінатором.

Припустимо, що помилка слідкування не виходить за межі лінійної ділянки характеристики дискримінатора, і подамо вихідну напругу дискримінатора у вигляді

$$u_{\text{вих}}(t) = S_{\text{д}} x(t) + \xi(t),$$

де $S_{\text{д}}$ – крутість дискримінаційної характеристики; $x(t)$ – похибка слідкування (неузгодженість); $\xi(t)$ – флуктуаційна напруга на виході дискримінатора, яку вважатимемо незалежною від помилки слідкування.

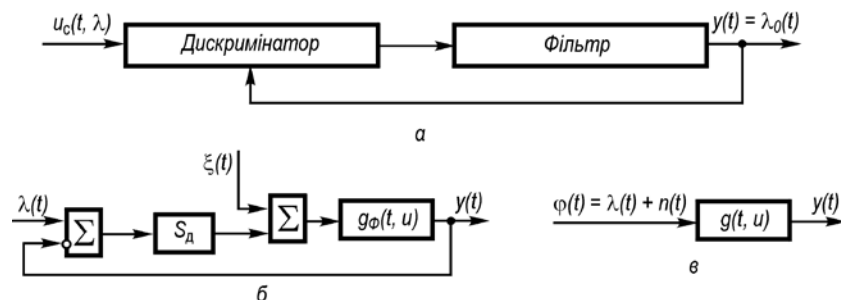


Рис. 2.10. Схеми слідкуючих систем: а – функціональна; б, в – структурні

У загальному випадку оптимальний фільтр у контурі слідкуючої системи (рис. 2.10, *a*) може бути нелінійним. Введемо ще одне обмеження, і шукатимемо оптимальний фільтр у класі лінійних пристроїв. При цьому слідкуюча система, яка розглядається, виглядатиме так, як на рис. 2.9, *б*, де $g_{\Phi}(t, u)$ – імпульсна перехідна функція фільтра, що оптимізується (фільтр може мати змінні параметри).

З точки зору формування процесу $y(t)$ слідкуюча система, показана на рис. 2.9, *б*, може бути замінена еквівалентним фільтром (рис. 2.10, *в*) з імпульсною перехідною функцією $g(t, u)$, на вході якого діє суміш сигналу і завади:

$$\varphi(t) = \lambda(t) + \xi(t) / S_{\Delta} = \lambda(t) + n(t). \quad (2.129)$$

Завада $n(t)$ відповідає флуктуаційному коливанню (шуму), перерахованому до входу дискримінатора. Імпульсна перехідна функція $g(t, u)$ еквівалентного фільтра пов'язана з аналогічною функцією $g_{\Phi}(t, u)$ фільтра в контурі слідкуючої системи інтегральним рівнянням [15]

$$S_{\Delta} g_{\Phi}(t, u) = g(t, u) + S_{\Delta} \int_u^t g(\theta, u) g_{\Phi}(t, \theta) d\theta. \quad (2.130)$$

Дискримінатор оптимальної системи виконує нелінійне перетворення вхідного сигналу, внаслідок чого формується напруга $z(t)$:

$$z(t) = \left. \frac{\partial Q_1(u_{\text{вх}}, \lambda, t)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_0}, \quad (2.131)$$

де λ_0 – оцінка параметра $\lambda(t)$; $Q_1(u_{\text{вх}}, \lambda, t)$ – функція, що визначається співвідношенням

$$\int_{t-\Delta t}^t Q_1(u_{\text{вх}}, \lambda, t) dt = \ln P_{\lambda}(u_{\text{вх}}); \quad (2.132)$$

$P_{\lambda}(u_{\text{вх}})$ – функція правдоподібності, тобто залежність від λ багатовимірної щільності ймовірності реалізації вхідного процесу $u_{\text{вх}}(t)$, розглянутої на інтервалі часу Δt . Інтервал Δt вибирається значно більшим за час кореляції заважаючих параметрів, але значно меншим, ніж час кореляції корисного параметра сигналу. Функція правдоподібності $P_{\lambda}(u_{\text{вх}})$ обчислюється шляхом усереднення функції правдоподібності, записаної для сигналу, всі параметри якого, крім λ , відомі точно. Усереднення проводиться за всіма можливими значеннями заважаючих параметрів, з урахуванням їх априорної щільності ймовірності.

Оскільки відповідно до (2.131) похідна функція Q_1 обчислюється в точці $\lambda = \lambda_0$, до дискримінатора (рис. 2.10, *a*) підводиться також оцінка $\lambda_0(t)$. Слідкуючий за дискримінатором фільтр в оптимальній системі є лінійним і, в загальному випадку, нестационарним. Його імпульсна перехідна функція $g_{\Phi}(t, u)$ збігається з імпульсною перехідною функцією оптимального фільтра в контурі лінійної слідкуючої системи, зображеної на рис. 2.10, *б*. При цьому в схемі на рис. 2.10, *б*, як показано в [15], доцільно взяти

$$S_{\Delta} = K, \quad S_{\xi}(\omega) = S_{\xi}(0) = K, \quad (2.133)$$

де $S_{\xi}(0)$ – спектральна щільність процесу $\xi(t)$;

$$K = -\overline{\partial^2 Q_1} / \partial \lambda^2. \quad (2.134)$$

Методика визначення імпульсної перехідної функції $g_{\Phi}(t, u)$ оптимального фільтра в контурі лінійної слідкуючої системи докладно викладена в [35]. За цією методикою для визначення оптимальної функції $g_{\Phi}(t, u)$ необхідно спочатку, розв'язавши інтегральне рівняння, знайти функцію $g(t, u)$ еквівалентного лінійного фільтра. Потім за знайденою функцією $g(t, u)$ визначається функція $g_{\Phi}(t, u)$ в результаті розв'язання інтегрального рівняння (2.130). Якщо повідомлення $\lambda(t)$ та завада $u_{\text{ш}}(t)$ стаціонарні і потрібно мінімізувати помилку фільтрації тільки в усталеному режимі, то оптимальний лінійний фільтр має сталі параметри, а його комплексний коефіцієнт передачі $K(j\omega)$ записується у вигляді

$$K(j\omega) = \frac{1}{k} \cdot \frac{\Phi(j\omega)}{1 - \Phi(j\omega)}, \quad (2.135)$$

де $\Phi(j\omega)$ – коефіцієнт передачі оптимального лінійного фільтра, який виділяє повідомлення $\lambda(t)$ із суміші з білим шумом, спектральна щільність якого дорівнює $1/k$.

Достоїнством методу, запропонованого І.А. Большаковим і В.Г. Рєпіним, є можливість роздільного синтезу дискримінатора й лінійного фільтра. Із зміненням спектра корисного параметра $\lambda(t)$ дискримінатор оптимальної системи залишається незмінним, і заново доводиться шукати тільки оптимальний лінійний фільтр.

Марковський підхід до теорії оптимальної нелінійної фільтрації носить більш загальний характер, оскільки принципово його можна застосувати у випадку негауссової апостеріорної щільності ймовірності виділюваного параметра. Більшість практичних результатів при марковському підході отримані поки в рамках гауссового наближення, при якому апостеріорна щільність ймовірності процесу $\lambda(t)$ також вважається гауссовою. Однак і в цьому випадку можна вказати коло задач, розв'язання яких за марковським підходом має певні переваги. Трудомісткість синтезу на основі марковського підходу і квазілінійним методом приблизно однакова, якщо виконуються наступні умови:

- 1) повідомлення та завада є стаціонарними випадковими процесами, заданими своїми кореляційними функціями чи енергетичними спектрами;
- 2) мінімізація помилки фільтрації виконується в усталеному режимі;
- 3) всі параметри сигналу, крім корисного (тобто такого, що несе інформацію про повідомлення), відомі.

Деяку перевагу при виконанні цих умов, очевидно, можна надати квазілінійному методу. Якщо умови 1) і 2) не виконуються, то оптимальні згладжувальні ланцюги слідкуючої системи мають бути нестационарними. Синтез їх на основі марковського підходу простіший. Це аналогічно перевазі синтезу оптимальних лінійних нестационарних фільтрів методом простору станів у порівнянні з безпосереднім розв'язанням інтегральних рівнянь Вінера–Хопфа.

Якщо заважаючі параметри сигналу змінюються в часі, а період їх зміни чи час кореляції порівнянні з часом кореляції корисного параметра сигналу, то доцільно проводити синтез на основі марковської теорії.

Метод синтезу, заснований на марковській теорії, зручний також у тих випадках, коли потрібно з мінімальною похибкою відфільтрувати кілька параметрів (або кілька складових параметра) сигналу.

Контрольні запитання для самооцінки рівня знань

1. Якій умові відповідає оптимальний приймач неперервних сигналів?
2. В якому випадку кореляційна обробка прийнятих сигналів є оптимальною?
3. В чому полягає принцип слідкувального приймання?
4. В якому випадку теорію оптимального приймання можна розглядати як теорію оптимальної нелінійної фільтрації?
5. Поясніть постановку задачі синтезу оптимальних пристроїв (систем зв'язку).
6. Поясніть фізичний зміст оптимальної смуги пропускання пристрою зв'язку.
7. Як обчислюються значення оптимальних параметрів (систем) зв'язку з умови мінімуму середньоквадратичної похибки?
8. Поясніть постановку задачі оптимальної фільтрації Колмогорова–Вінера та умови фізичної реалізованості оптимального розв'язання.
9. Які недоліки теорії лінійної фільтрації Колмогорова–Вінера для стаціонарних процесів?
10. В чому полягають особливості методу просторів станів при синтезі фільтрів Колмогорова?
11. Запишіть рівняння оптимального фільтра.
12. Які особливості має оптимальний фільтр для повідомлення, описуваного степеневим поліномом?
13. Які два підходи в теорії нелінійної оптимальної фільтрації Ви знаєте?
14. Які переваги методу І. А. Большакова та В. Г. Рєпіна?
15. Які переваги має метод синтезу, заснований на марковській теорії?

Післямова до розділу 2

Ви завершили вивчення розділу. Тепер Ви знаєте:

- що при передаванні неперервних коливань функція $P(s/x)$ є щільністю розподілу ймовірності:

$$P(s_i/x) > P(s_j/x), \quad j \neq i;$$

- що смугу пропускання пристрою зв'язку, при якій середня квадратична похибка набуває мінімального значення, називають *оптимальною*;

- що, мінімум сумарної середньої квадратичної похибки системи визначається не тільки смугою пропускання, але й виглядом її частотної характеристики. Тому в загальному випадку синтез системи полягає в пошуку її оптимальних частотних характеристик з умови мінімуму середніх квадратичних похибок при заданих статистичних характеристиках сигналу і завади;

- що, синтез оптимальної системи зводиться до визначення *реалізованої оптимальної частотної характеристики*, найбільш близької до отриманої нереалізованої;

- що, ефективним шляхом синтезу оптимальних нестационарних фільтрів є запропонований Калманом і Б'юсі метод простору станів. Відповідно до методики, процес, що виділяється (повідомлення), зображується у вигляді компоненти чи лінійної комбінації компонент векторного процесу $x(t)$. Складові процесу $x(t)$ визначаються розв'язанням системи лінійних диференціальних рівнянь, збурюваннями в яких є білі шуми. Векторний процес є окремим випадком багатовимірного марковського процесу. Тому підхід Калмана–Б'юсі до синтезу оптимальних лінійних фільтрів названий *марковською теорією оптимальної лінійної фільтрації*, або *синтезом за методом простору станів*;

Ви маєте поняття про оптимальну нелінійну фільтрацію, в теорії якої поєднались два основні підходи. Перший, запропонований Р.Л. Стратоновичем, заснований на описі параметра фільтрівного сигналу за допомогою марковського процесу. Цей підхід дозволив розв'язати ряд важливих і цікавих задач синтезу оптимальних нелінійних систем. Другий - розроблений І. А. Большаковим і В. Г. Репіним, заснований на припущеннях про нормальність процесу $\lambda(t)$ та високу точність його виділення, які дозволяють застосувати гауссову апроксимацію багатовимірною апостеріорного закону розподілу параметра $\lambda(t)$ (такий підхід одержав назву квазілінійного методу). Перевагою даного методу є можливість роздільного синтезу дискримінатора й лінійного фільтра. Із зміненням спектра корисного параметра $\lambda(t)$ дискримінатор оптимальної системи залишається незмінним, і заново доводиться шукати тільки оптимальний лінійний фільтр.

Доцільно повторити основні математичні описи сигналів та завад, енергетичні та кореляційні характеристики сигналів, теорему Котельникова, методи модуляції, викладені у посібнику Беркман Л.Н., Варфоломєєва О.Г., Грушевська В.П. **Типові сигнали та завади в електрозв'язку**, перш ніж вивчати матеріал наступного розділу.

ПЕРЕДАВАННЯ НЕПЕРЕРВНИХ ПОВІДОМЛЕНЬ

3.1. Потенційна завадостійкість систем передавання неперервних повідомлень

Завадостійкість зв'язку при передаванні неперервних повідомлень звичайно характеризується величиною середньоквадратичної похибки $\overline{\varepsilon^2}$:

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{T} \int_0^T [v(t) - u(t)]^2 dt. \quad (3.1)$$

Різницю $v(t) - u(t)$ можна розглядати як “заваду” на виході приймача.

Відношення сигнал–завада в каналі може бути поліпшене приймачем. Ступінь поліпшення залежить не тільки від способу приймання, але й від способу передавання, зокрема від способу модуляції. Тому завадостійкість систем зв'язку при передаванні неперервних повідомлень зручно оцінювати відносним збільшенням (виграшем) відношення сигнал–завада на виході приймача у порівнянні зі значенням цього відношення на вході:

$$\gamma = \frac{P_{сз}^* / P^*}{P_{сз} / P} = \frac{q_{\text{вих}}}{q_{\text{вх}}}, \quad (3.2)$$

де $q_{\text{вих}} = P_{сз}^* / P^*$ і $q_{\text{вх}} = P_{сз} / P$ – відношення середніх потужностей сигналу і завади відповідно на виході і вході приймача. При заданому способі передавання величина γ визначає виграш, забезпечуваний приймачем, а в інших випадках – виграш, що може бути отриманий при різних способах передавання.

При порівняльній оцінці різних систем зв'язку слід брати на вході і виході відношення потужностей сигналу не до потужностей завади, а до їх середніх спектральних щільностей, тобто визначати *узагальнений виграш системи*:

$$\gamma' = \frac{q'_{\text{вих}}}{q'_{\text{вх}}} = \frac{\gamma}{\nu}, \quad (3.3)$$

де $q'_{\text{вих}} = \frac{q_{\text{вих}}}{F_m} = \frac{P_{сз}^*}{P_3 / F_m}$; $q'_{\text{вх}} = \frac{q_{\text{вх}}}{F} = \frac{P_{сз}}{P_3 / F}$; $\nu = \frac{F}{F_m}$; F – ширина смуги модульованого сигналу; F_m – ширина смуги первинного сигналу.

Визначимо спотворення переданих повідомлень $u(t)$ у разі приймання на оптимальний приймач, що реалізує умову максимуму апостеріорної ймовірності:

$$\Delta^2 = \int_0^T [x(t) - s(u, t)]^2 dt. \quad (3.4)$$

Оскільки $u(t)$, а отже і Δ^2 , є функціями деяких параметрів λ_e , то за вимогами отримання мінімуму виразу (3.3) частинні похідні від Δ^2 за λ_e мають дорівнювати нулю, тобто

$$\frac{\partial \Delta^2}{\partial \lambda_e} = \overbrace{-2[x(t) - s(u, t)] D_e(t)} = 0, \quad (3.5)$$

де $D_e(t) = \frac{\partial s(u, t)}{\partial \lambda_e}$.

Припустимо, що сигнали $s(u, t)$ вибрані так, що всі $D_e(t)$ ортогональні між собою:

$$\widetilde{D_i(t)D_j(t)} = 0, \quad i \neq j; \quad \widetilde{D_{2i-1}(t)} = \widetilde{D_{2i}(t)}. \quad (3.6)$$

Нехай під впливом завад прийнятий сигнал $x(t)$ набув приросту Δx , тоді λ_e набуде деякого приросту $\Delta \lambda$, а сигнал $s(u, t)$ – приросту

$$\Delta s(u, t) = \sum_{e=e_1}^{e_2} D_e(t) \Delta \lambda_e. \quad (3.7)$$

При цьому умова (3.5) запишеться у вигляді

$$\left[x(t) + \Delta x(t) - s(u, t) - \sum_{e=e_1}^{e_2} D_e(t) \Delta \lambda_e \right] D_e(t) = 0,$$

або, взявши до уваги (3.3) і (3.6),

$$\widetilde{\Delta x(t)D_e(t)} - \widetilde{D_e^2(t)} \Delta \lambda_e = 0,$$

звідки

$$\Delta \lambda_e = \frac{\widetilde{\Delta x D_e(t)}}{\widetilde{D_e^2(t)}}. \quad (3.8)$$

При малому рівні завад функція $x(t)$ одержує приріст $dx(t) = w(t)$. При цьому прирости параметрів λ_e

$$d\lambda_e = \frac{\widetilde{D_e(t)w(t)}}{\widetilde{D_e^2(t)}}. \quad (3.9)$$

Оскільки $w(t)$ є випадкова величина з нормальним розподілом, то і прирости $d\lambda_e$, набуті від впливу завад, також будуть випадковими величинами, що мають нормальний розподіл з нульовим середнім і дисперсією

$$D[d\lambda_e] = \overline{[d\lambda_e]^2} = \frac{N_0}{2T \widetilde{D_e^2(t)}}. \quad (3.10)$$

Величина $d\lambda_e$ характеризує відхилення параметра λ_e від переданого значення λ_{0e} , тобто похибку відтворення цього параметра $\delta_e = \lambda_e - \lambda_{0e} = d\lambda_e$. При малому рівні завад щільність імовірності цієї похибки є нормальною:

$$p(\delta_e) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta_e^2}} e^{-\frac{\delta_e^2}{2\delta_e^2}}, \quad (3.11)$$

де $\sqrt{\delta_e^2}$ – середньоквадратичне значення похибки.

В телеметричних системах повідомленнями є передавані параметри, що характеризують ті або інші фізичні величини (швидкість, температуру тощо). Потенційна завадостійкість таких систем визначається середньоквадратичною похибкою

$$\overline{\delta_e^2} = D[\delta_e] = \frac{N_0}{2T \overline{D_e^2(t)}} \quad (3.12)$$

або ймовірністю того, що похибка за модулем перевищить задану величину δ_0 :

$$P_n = P(|\delta_e| > \delta_0) = \int_{\delta_0}^{\infty} p(\delta_e) d\delta_e = \frac{1}{2} \left[1 - \Phi \left(\frac{\delta_0}{\sqrt{\overline{\delta_e^2}}} \right) \right]. \quad (3.13)$$

Якщо в загальному випадку передавалося неперервне повідомлення

$$u(t) = \sum_{e=e_1}^{e_2} \lambda_{0e} \varphi_e(t),$$

то за відсутності завад прийнятий сигнал $x(t) = s(u, t)$. За цим сигналом оптимальний приймач відтворює передане повідомлення $u(t)$ без спотворень: $v(t) = u(t)$.

За наявності завад відтворене оптимальним приймачем повідомлення

$$v(t) = \sum_{e=e_1}^{e_2} (\lambda_{0e} + d\lambda_e) \varphi_e(t) = u(t) + w^*(t), \quad (3.14)$$

де

$$w^*(t) = \sum_{e=e_1}^{e_2} w_e \varphi_e(t) = \sum_{e=e_1}^{e_2} \sqrt{\frac{N_0}{2T \overline{D_e^2(t)}}} \bar{\theta}_e \varphi_e(t). \quad (3.15)$$

Тут $\bar{\theta}_e$ – нормальна випадкова величина з одиничною дисперсією. Оскільки за відсутності завад $v(t) = u(t)$, то функцію $w^*(t)$ можна розглядати як складову вихідного коливання, обумовлену завадою на вході, тобто як коливання завади на виході приймача.

Функція $w^*(t)$ є стаціонарним флуктуаційним коливанням з нормальним законом розподілу ймовірностей. Така функція повністю характеризується своїм енергетичним спектром. Згідно з (3.15) цей спектр визначається виразом

$$G_3^*(f) = \frac{N_0}{\overline{D_e^2(t)}}. \quad (3.16)$$

Інтенсивність завади на виході приймача, визначена (3.16), є мінімально можливою і характеризує потенційну завадостійкість при даній системі модуляції. Із зіставлення (3.12) і (3.16) випливає співвідношення

$$G_3^*(f) = 2T \overline{\delta_e^2}. \quad (3.17)$$

Потужність завади на виході приймача зі смугою частот від f_1 до f_2

$$P_3^* = \int_{f_1}^{f_2} G_3^*(f) df = N_0 \int_{f_1}^{f_2} \widetilde{D_e^2(f)}. \quad (3.18)$$

Слід пам'ятати, що коливання $w^*(t)$ і потужність P_3^* визначено для $u(t)$, яке лежить у межах ± 1 . Потужність сигналу (повідомлення) на виході при цих умовах

$$P_c^* = \widetilde{u^2(t)} = \frac{1}{k_{\Pi}^2}, \quad (3.19)$$

де $k_{\Pi} = \frac{|u(t)|_{\max}}{\sqrt{\widetilde{u^2(t)}}} = \frac{1}{\sqrt{\widetilde{u^2(t)}}}$ – пік-фактор повідомлення.

Тому відношення сигнал–завада на виході приймача

$$q_{\text{вих}} = \frac{P_c^*}{P_3^*} = \frac{1}{k_{\Pi}^2 \int_{f_1}^{f_2} G_3^*(f) df}. \quad (3.20)$$

У випадку, коли $u(t)$ зображується синусоїдою, $k_{\Pi} = \sqrt{2}$ і

$$q_{\text{вих}} = \frac{1}{2 \int_{f_1}^{f_2} G_3^*(f) df}.$$

При телефонній передачі мови беруть $k_{\Pi} \approx 3$.

Відношення сигнал–завада на вході приймача відповідно

$$q_{\text{вх}} = \frac{P_c}{P_3} = \frac{U_p}{N_0 F}, \quad (3.21)$$

де U_p – реальна напруга, яка дорівнює $U/\sqrt{2}$; U – максимальна напруга.

Узагальнений виграш системи γ' згідно з (3.3), (3.15) і (3.16) визначатиметься наступним виразом:

$$\gamma' = \frac{q_{\text{вих}}}{\sqrt{q_{\text{вх}}}} = \frac{N_0 F_m}{k_{\Pi} P_c \int_{f_1}^{f_2} G_3^*(f) df}. \quad (3.22)$$

Тут, як і раніше, ми вважаємо, що спектр завади на вході приймача рівномірний.

Частотні характеристики приймача вважаються ідеальними: тракту високої частоти (до детектора) – із смугою пропускання F , а тракту низької частоти – із смугою $F_m = f_2 - f_1$.

Відомі системи модуляції можна розділити на прямі та інтегральні. *Прямими* називаються такі системи, в яких повідомлення $u(t)$ входить безпосередньо у вираз сигналу. Для цих систем

$$s(u, t) = S[u(t), t] = S \left[\sum_{e=e_1}^{e_2} \lambda_e \varphi_e(t), t \right], \quad D_e(t) = \frac{\partial s(u, t)}{\partial \lambda_e} = \frac{\partial s(u, t)}{\partial u} \varphi_e(t) \quad (3.23)$$

і, вважаючи частоту несучою ($f_0 \gg F_m$),

$$\widetilde{D_e^2(t)} = \left[\frac{\partial s(u, t)}{\partial u} \right]^2.$$

Тоді згідно з (3.16) для прямих систем матимемо

$$G_3^*(f) = \frac{N_0}{\left[\frac{\partial s(u, t)}{\partial u} \right]^2}. \quad (3.24)$$

До прямих систем належать різні види лінійної модуляції (АМ, БМ) і фазова модуляція (ФМ).

Інтегральними називають системи, в яких повідомлення $u(t)$ входить у вираз сигналу під знаком інтеграла:

$$s(u, t) = S \left[\int u(t) dt, t \right] = S(\Psi, t), \quad (3.25)$$

де $\Psi = \int u(t) dt$.

Для таких систем

$$\widetilde{D_e^2(t)} = \left(\frac{T}{2\pi l} \right)^2 \left[\frac{\partial s(u, t)}{\partial \Psi} \right]^2,$$

де l – ціле число, яке відповідає обраній смузі частот;

$$G_3^*(f) = \frac{N_0 (2\pi f)^2}{\left[\frac{\partial s(u, t)}{\partial \Psi} \right]^2}. \quad (3.26)$$

Це співвідношення можна безпосередньо одержати на підставі теореми про спектр похідної.

Із формул (3.24) і (3.26) випливає, що енергетичний спектр завади на виході приймача в прямих системах модуляції виходить рівномірним, а в інтегральних системах – параболічним.

Для передавання неперервних повідомлень по каналу зв'язку застосовуються різні способи модуляції. При синусоїдальному переноснику цими способами є амплітудна модуляція (АМ), односмугова (ОМ), двосмугова амплітудна модуляція з пригніченою несучою (БМ), частотна (ЧМ) і фазова (ФМ). Вказані системи модуляції відносяться до типу аналогових систем, в яких один з параметрів неперервного коливання змінюється відповідно до переданого повідомлення.

При імпульсному способі передавання неперервних повідомлень як переносник використовується періодична послідовність імпульсів певної форми. Основними видами модуляції в цьому випадку є амплітудно-імпульсна модуляція (АІМ), широтно-імпульсна (ШІМ), фазо-імпульсна модуляція (ФІМ) і частотно-імпульсна (ЧІМ).

При цифровому або кодовому способі передавання найбільшого поширення набули імпульсно-кодова модуляція (ІКМ) і дельта-модуляція (ДМ).

І, нарешті, можна застосувати різні способи модуляції складного (шумоподібного) переносника.

3.2. АНАЛОГОВІ СПОСОБИ ПЕРЕДАВАННЯ ІНФОРМАЦІЇ

Визначимо потенційну завадостійкість систем з амплітудною, частотною та фазовою модуляціями.

Амплітудна модуляція. В цьому випадку сигнал має вигляд

$$s(u, t) = A_0 [1 + mu(t)] \cos \omega_0 t, \quad m \leq 1.$$

Тоді

$$\frac{ds(u, t)}{du} = mA_0 \cos \omega_0 t;$$

$$\begin{aligned} \overline{\frac{ds(u, t)}{du}} &= \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{ds(u, t)}{du} \right]^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T m^2 A_0^2 \cos^2 \omega_0 t dt = \\ &= \frac{1}{2T} m^2 A_0^2 \int_0^T (1 + \cos \omega_0 t) dt = \frac{1}{2} \cdot m^2 A_0^2. \end{aligned}$$

Згідно з (3.24) енергетичний спектр завади на виході приймача АМ-сигналів

$$G_3^*(f) = \frac{2N_0}{m^2 A_0^2}. \quad (3.27)$$

Для визначення потужності сигналу на вході приймача з урахуванням того, що модульований сигнал $s(t)$ найчастіше є нестационарним процесом, необхідно усереднити квадрат сигналу за ансамблем і за часом:

$$\begin{aligned} P_c &= \overline{s^2(u, t)} = \frac{A_0^2}{T} \int_0^T \overline{[1 + mu(t)]^2 \cos^2 \omega_0 t} dt = \\ &= \frac{A_0^2}{2T} \int_0^T [1 + 2m\overline{u(t)} + m^2 \overline{u^2(t)}] (1 + \cos 2\omega_0 t) dt. \end{aligned}$$

Оскільки повідомлення – центрований випадковий процес, то $\overline{u(t)} = 0$, а внаслідок прийнятого нормування

$$\overline{u^2(t)} = \frac{u_{\max}^2}{k_{\Pi}^2},$$

дістанемо

$$P_c = \frac{A_0^2}{2} \left[1 + \frac{m^2}{k_{\Pi}^2} \right]. \quad (3.28)$$

Тут і далі припускаємо, що $\omega_0 T \geq 1$, тому значенням $\int_0^T \cos^2 \omega_0 t dt = \frac{\sin 2\omega_0 T}{2\omega_0} < \frac{1}{2\omega_0}$ можна знехтувати в порівнянні з T .

Узагальнений вигравш при АМ відповідно до (3.12) дорівнює

$$\gamma'_{AM} = \frac{m^2}{m^2 + k_{\Pi}^2}; \quad \gamma_{AM} = \frac{2m^2}{m^2 + k_{\Pi}^2}. \quad (3.29)$$

Граничне значення вигравшу при АМ дорівнює 1. Воно досягається тоді, коли $m=1$ і $k_{\Pi}=1$. Практично завжди $m < 1$, а $k_{\Pi} > 1$, і тому $\gamma_{AM} < 1$, $\gamma'_{AM} < 0,5$, тобто система АМ дає програш. Так, при передаванні мови $k_{\Pi} \approx 3$, і тоді при $m=0,9$ $\gamma_{AM} = 0,165$ і $\gamma'_{AM} = 0,083$. Малі значення вигравшу при АМ обумовлені тим, що лише невелика частина потужності сигналу припадає на бічні смуги, які несуть корисну інформацію. Отже, усунення несучої в АМ-сигналі може сприяти збільшенню вигравшу, що і має місце при баланській і односмуговій модуляції.

При баланській модуляції сигнал формується шляхом простого перемноження первинного сигналу $u(t)$ і колювання переносника:

$$s(u, t) = A_0 u(t) \cos \omega_0 t.$$

Середня потужність такого сигналу

$$P_c = \frac{1}{2} A_0^2 u^2(t) = \frac{1}{2} \frac{A_0^2}{k_{\Pi}^2}, \quad (3.30)$$

а похідна

$$\frac{\overline{ds(u, t)}}{du} = \frac{1}{2} A_0^2. \quad (3.31)$$

З урахуванням співвідношень (3.30) і (3.31) при коефіцієнті розширення смуги частот $\nu = 2$ маємо

$$\gamma_{\text{БМ}} = 2; \quad \gamma'_{\text{БМ}} = 1.$$

Отже, виграш при БМ не залежить від пік-фактора.

Односмугова модуляція, як відомо, є просто перенесенням спектра первинного сигналу вгору на частоту ω_0 . Це лінійна операція, при якій не змінюються ширина спектра і співвідношення між потужностями складових. Тому при демодуляції вхідна завада перетвориться у вихідну так само, як і сигнал. З цих міркувань можна, не вдаючись до громіздких обчислень, записати: $\gamma_{\text{ОМ}} = \gamma'_{\text{ОМ}} = 1$. Отже, узагальнений виграш при БМ і ОМ однаковий. Проте смуга частот, займана сигналом при ОМ, в 2 рази менша, ніж при БМ.

Системи АМ, БМ і ОМ – лінійні, тому одержані вище співвідношення для оптимального приймача є слушними як при слабких, так і при сильних завадах на вході. Ці співвідношення визначають граничну (потенційну) завадостійкість систем.

Фазова модуляція також належить до прямих видів модуляції, проте нелінійних. При фазовій модуляції сигнал можна записати у вигляді

$$s(u, t) = A_0 \cos[\omega_0 t + \beta u(t)], \quad (3.32)$$

де β – девіація фази або індекс фазової модуляції.

Для такого сигналу

$$P_c = \frac{1}{T} \int_0^T \overline{s^2(u, t)} dt = \frac{1}{2} A_0^2;$$

$$\overline{\left[\frac{\partial s(u, t)}{\partial u(t)} \right]^2} = \int_0^T \left[\frac{\partial s(u, t)}{\partial u} \right] dt = \frac{1}{2} \beta^2 A_0^2;$$

$$G(f) = \frac{2N_0}{\beta^2 A_0^2}; \quad \gamma_{\text{ФМ}} = \frac{\beta^2 \nu}{k_{\Pi}^2}.$$

При великих індексах модуляції ($\beta \approx \nu/2$) маємо

$$\gamma_{\text{ФМ}} = \frac{\nu^3}{4k_{\Pi}^2}; \quad \gamma'_{\text{ФМ}} = \frac{\nu^2}{4k_{\Pi}^2}. \quad (3.33)$$

Як бачимо, при ФМ виграш залежить від індексу модуляції і пік-фактора повідомлення. Оскільки β може бути більше за одиницю, то і виграш у цій системі може бути значно більшим за

одиницю. Платою за цей виграш буде розширення смуги частот, зайнятої сигналом. Отримані співвідношення слушні для малого рівня шуму на вході приймача, оскільки сигнал $s(u, t)$ при ФМ нелінійно залежить від $u(t)$.

Частотна модуляція відноситься до інтегральних систем модуляції, потенційна завадостійкість яких на підставі співвідношення [4]

$$G_{\varepsilon}(f) = (2\pi f)^2 N_0 / \overline{\left[\frac{\partial s(u, t)}{\partial \psi} \right]^2}. \quad (3.34)$$

Сигнал при ЧМ можна зобразити у вигляді

$$s(u, t) = A_0 \cos[\omega_0 t + \Delta\omega\psi(t)], \quad (3.35)$$

де $\Delta\omega$ – девіація частоти; $\psi(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau$.

Для сигналу, який описується (3.35), маємо

$$\frac{\partial s(u, t)}{\partial \psi} = -\Delta\omega A_0 \sin[\omega_0 t + \Delta\omega\psi(t)];$$

$$\overline{\frac{\partial s(u, t)}{\partial \psi}} = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{\partial s(u, t)}{\partial \psi} \right]^2 dt = \frac{1}{2} \Delta\omega^2 A_0^2.$$

На підставі (3.34) енергетичний спектр шуму на виході приймача ЧМ

$$G_{\varepsilon}(f) = 2 \left(\frac{2\pi f}{\Delta\omega} \right)^2 \cdot \frac{N_0}{A_0^2}. \quad (3.36)$$

Оскільки

$$\gamma = \frac{q_{\text{вих}}}{q_{\text{вх}}} \cdot \frac{N_0 F_c}{k_{\text{п}}^2 P_c \int_0^{F_c} G_{\varepsilon}(f) dt}; \quad \gamma' = \frac{\gamma}{\nu} = \frac{N_0 F}{k_{\text{п}}^2 P_c \int_0^{F_c} G_{\varepsilon}(f) dt},$$

то отримаємо вирази для виграшу [17]:

$$\gamma_{\text{ЧМ}} = \frac{3\Delta f F}{k_{\text{п}} F_c^3} = \frac{3\beta^2 \nu}{k_{\text{п}}^2} \approx \frac{3 \nu^3}{4 k_{\text{п}}^2}; \quad (3.37)$$

$$\gamma'_{\text{ЧМ}} = \frac{3F^2}{4k_{\text{п}}^2 F_c} = \frac{3\beta^2}{k_{\text{п}}^2} \approx \frac{3 \nu^3}{4 k_{\text{п}}^2}. \quad (3.38)$$

Тут враховано, що при великому індексі модуляції $\beta = \Delta f / F_c$, а смуга сигналу $F \approx 2\beta F_c$. При ЧМ так само, як і при ФМ, виграш може бути значно більшим за одиницю, і досягається це за рахунок розширення смуги частот сигналу (збільшення індексу модуляції). Частотна і фазова модуляція є прикладами систем, в яких вірогідність передавання повідомлень при даному рівні завад може бути підвищена не тільки завдяки збільшенню потужності сигналу, як це має місце при лінійних

видах модуляції, але і за рахунок розширення смуги частот, займаної сигналом. Всі ці висновки і одержані вище співвідношення для ЧМ, так само як і для ФМ, слушні лише для малого рівня завад. Ці системи, як буде показано далі, мають яскраво виражений пороговий ефект.

3.3. ПОРІГ ЗАВАДОСТІЙКОСТІ ШИРОКОСМУГОВИХ СИСТЕМ МОДУЛЯЦІЇ

Всі широкосмугові системи модуляції забезпечують високу завадостійкість за умови, що відношення сигнал–завада $q_{\text{вх}}$ на вході приймача перевищує деяке граничне (порогове) значення q_t . При $q_{\text{вх}} < q_t$ широкосмугові системи втрачають свої переваги (різко знижується завадостійкість), і зв'язок стає практично неможливим. Розглянута в попередніх розділах теорія завадостійкості слушна для “малих” завад ($q_{\text{вх}} > q_t$).

Значення порога практично визначає граничну дальність зв'язку при заданій потужності передавача. Тому важливо установити це значення і закон зміни відношення сигнал–завада на виході приймача за порогом (при $q_{\text{вх}} < q_t$).

Розглянемо один з можливих методів розв'язання цієї задачі. При передаванні реальних сигналів ємність каналу C_p і кількість відтвореної на виході приймача інформації I_p за час T можна визначити за формулами [20]

$$C_{\text{рвх}} = TF \log \delta (q + 1), \quad (3.39)$$

$$I_{\text{рвх}} = TF_m \log \delta_m (q + 1), \quad (3.40)$$

де δ і δ_m – коефіцієнти, які залежать від статистичних властивостей сигналу і завади. В реальній системі зв'язку I_p звичайно менше за C_p . Із зменшенням відношення сигнал–завада $q_{\text{вх}}$ на вході приймача C_p і I_p зменшуються, причому C_p зменшується швидше, ніж I_p . При деякому значенні q_t досягається рівність $C_p = I_p$. Оскільки I_p не може бути більше за C_p , то ця рівність є граничною, яка визначає порогове значення сигнал–завада q_t . Із подальшим зменшенням $q_{\text{вх}}$ різко зменшується $q_{\text{вих}}$, отже, збільшуються помилки (спотворення) на виході приймача. В цій області ($q_{\text{вх}} < q_t$) в кращому разі може бути забезпечена лише рівність $C_p = I_p$, що визначає граничну завадостійкість приймача при великому рівні завад.

Прирівнюючи C_p і I_p згідно з (3.39) і (3.40), одержимо вираз для відношення сигнал–завада на виході приймача за порогом ($q_{\text{вх}} < q_t$):

$$q_{\text{вих}} = \frac{\delta^v}{\delta_m} (q_{\text{вх}} + 1)^v - 1. \quad (3.41)$$

Поблизу порога, коли $1 < q_{\text{вх}} < q_t$,

$$q_{\text{вих}} \approx \frac{\delta^v}{\delta_m} (q_{\text{вх}} + 1)^v.$$

Вираз, що визначає відношення сигнал–завада на виході приймача до порога ($q_{\text{вх}} < q_t$), відомий з теорії “малих” завад. Згідно з (3.3) цей вираз у загальному вигляді можна записати так:

$$q_{\text{вих}} = \gamma q_{\text{вх}}, \quad (3.42)$$

де γ залежить від виду модуляції. Порогові значення q_t і $q_t^* = q_{t_{\text{вих}}}$ можна визначити, розв'язавши наступну систему рівнянь, складених на підставі (3.41) і (3.42):

$$\begin{cases} \delta^v (q_t + 1)^v - \delta_m (q_t^* + 1) = 0, \\ \gamma q_t - q_t^* = 0. \end{cases} \quad (3.43)$$

Практично ця система рівнянь розв'язується графічно.

Розглянемо окремі види модуляції на підставі одержаних загальних співвідношень. Для односмугової системи (ОМ) $v=1$, $\delta = \delta_m$. За формулою (3.41) $q_{\text{вих}} = q_{\text{вх}}$ при $q_{\text{вх}} > q_t$, $q_{\text{вих}} = q_{\text{вх}}$ при $q_{\text{вх}} < q_t$. Отже, поріг в системі ОМ відсутній.

Для амплітудної модуляції $v=2$. Взявши $k_{\Pi} = \sqrt{2}$, маємо

$$q_{\text{вих}} = \frac{m^2}{1 + \frac{m^2}{2}} q_{\text{вх}} \quad \text{при } q_{\text{вх}} > q_t, \quad (3.44)$$

а згідно з (3.41)

$$q_{\text{вих}} = \frac{\delta^2}{\delta_m} (q_{\text{вх}} + 1)^2 \quad \text{при } q_{\text{вх}} < q_t \quad (3.44a)$$

Розв'язком системи рівнянь (3.43) з урахуванням експериментальних даних для δ і δ_m є значення q_t порядку одиниці.

Отже, поріг при АМ хоча й існує, але виражений вельми слабо. Це слушно при умові, що ширина смуги пропускання височастотної частини приймача дорівнює ширині спектра сигналу. При більш широкій смузі пропускання q_t зростає і спостерігається швидке зменшення $q_{\text{вих}}$ за порогом.

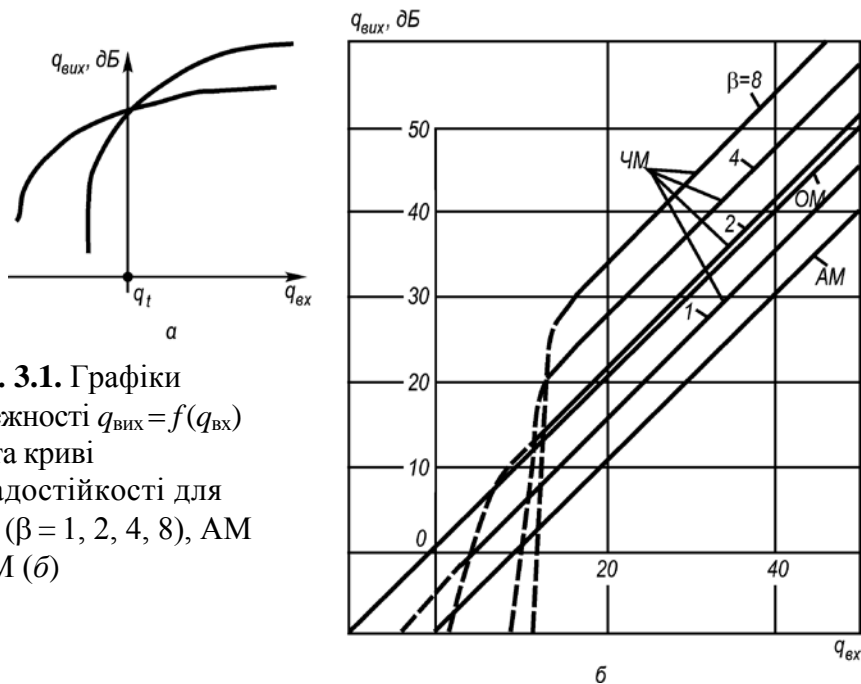


Рис. 3.1. Графіки залежності $q_{\text{вих}} = f(q_{\text{вх}})$ (а) та криві завадостійкості для ЧМ ($\beta = 1, 2, 4, 8$), АМ і ОМ (б)

Для ЧМ $v \approx 2m$:

$$q_{\text{вих}} = 3m^3 q_{\text{вх}} \quad q_{\text{вх}} > q_t \quad (3.45)$$

$$q_{\text{вих}} = \frac{\delta^{2m}}{\delta_m} (q_{\text{вх}} + 1)^{2m} \text{ при } 1 < q_{\text{вх}} < q_t \quad (3.46)$$

Розв'язання системи рівнянь (3.43) для ЧМ зводиться до розв'язання алгебраїчного рівняння степеня $2m$. При $3m^3 q_{\text{вх}} \gg 1$ і $q_{\text{вх}} > 1$ слушна наближена формула

$$q_t \approx \frac{1}{\delta} (3m^3)^{1/(2m)}. \quad (3.47)$$

В загальному випадку для будь-якої системи модуляції можна вважати

$$q_t \approx \frac{1}{\delta} \gamma^{\frac{1}{v}}. \quad (3.48)$$

На рис. 3.1 наведена залежність відношення сигнал–завада на виході приймача ЧМ $q_{\text{вих}} = f(q_{\text{вх}})$ при різних індексах модуляції. Вздовж осі абсцис відкладено відношення сигнал–завада в децибелах на вході приймача ОМ, а вздовж осі ординат – відношення сигнал–завада в децибелах на виході приймача ЧМ. Оскільки для ЧМ $F \approx 2mF_m$, а для ОМ $F = F_m$, то на вході приймача $q_{\text{ЧМ}} = q_{\text{ОМ}} / (2m)$.

Криві розраховані за (3.45) і (3.46) з урахуванням експериментальних даних для δ і δ_m . Для порівняння на цьому ж рисунку нанесені відповідні криві для АМ і ОМ. Оскільки визначення δ і δ_m при $q_{\text{вх}} \ll 1$ є складним, то криві в цій області (пунктир) проведені орієнтовно.

З рисунку видно, що зі збільшенням індексу модуляції порогове значення q_t^* збільшується і поріг стає більш різко вираженим. За порогом завадостійкість ЧМ стрімко зменшується і при порівняно великому рівні завад стає гіршою, ніж завадостійкість систем ОМ і АМ. При $m \leq 1$ поріг виражений слабо і криві для ЧМ наближаються до кривих для АМ.

Графічний розв'язок системи рівнянь (3.43) для частотної модуляції при різних значеннях $v = 2m$ показує, що порогове значення відношення сигнал–завада на вході приймача q_t при зміні індексу модуляції змінюється в межах від 1 до 2. Порогова потужність при цьому змінюється у досить широких межах, оскільки

$$P_t = q_t P_3, \quad (3.49)$$

де $P_3 = N_0 F$ – потужність шуму на вході приймача, пропорційна ширині смуги пропускання приймача F і, отже, індексу модуляції m .

При малому рівні завад ($q_{\text{вх}} > q_t$) мінімально необхідна потужність сигналу на вході приймача ЧМ при заданому $q_{\text{вих}}$

$$P_{\text{min}} = \frac{q_{\text{вих}} P_3}{\gamma} \approx \frac{P_3 q_{\text{вих}}}{3m^3}. \quad (3.50)$$

Із збільшенням m ця потужність зменшується. Тут виграш γ , визначуваний за (3.2), повністю реалізується.

При великому рівні завад ($q_{\text{вх}} < q_t$) величина виграшу різко зменшується і мінімальна потужність сигналу практично визначається величиною порога q_t . Збільшення індексу модуляції при цьому може виявитися недоцільним. З умови $P_{\text{min}} = P_t$ можна визначити максимально допустимий індекс

модуляції, при якому ще реалізується вигреш γ і потужність сигналу визначається за (3.50). На підставі (3.49) і (3.50) маємо

$$q_t = \frac{q_{\text{вих}}}{\gamma} = \frac{q_{\text{вих}}}{3m^3},$$

звідки

$$m_{\text{max}} \leq \sqrt[3]{\frac{q_{\text{вих}}}{3q_t}}. \quad (3.51)$$

Отже, оптимальний індекс модуляції тим вищий, чим вищі вимоги до якості передавання повідомлень (до величини $q_{\text{вих}}$). При індексі модуляції, визначуваному виразом (3.51), задане значення $q_{\text{вих}}$ досягається при мінімальній витраті потужності сигналу на вході. Проте за цих умов щонайменше зменшення потужності вхідного сигналу призводить до переходу за поріг, тобто до різкого зменшення $q_{\text{вих}}$.

Набуті значення порогу для різних видів модуляції ($q_t = 1 \div 2$) є граничними: в реальних приймачах вони можуть бути досягнуті, але не можуть бути перевищені. За експериментальними даними поріг в системі ЧМ для звичайного способу приймання настає приблизно при рівності пікових значень сигналу і завади, що відповідає $q_t' \approx 10$. Це означає, що коли рівень завад великий, то реальна завадостійкість приймача ЧМ значно менша за потенційну. Отже, існує можливість шляхом удосконалення схеми приймача знизити поріг завадостійкості і тим самим збільшити дальність зв'язку при тій самій потужності передавача, що особливо актуально для розробки наддалеких космічних ліній зв'язку.

Більшість методів зниження порога при ЧМ заснована на принципі “стиснення” спектра сигналу в приймачі. Частотно-модульований сигнал можна зобразити синусоїдою, положення якої на шкалі частот змінюється відповідно до закону модуляції. Ширина смуги пропускання звичайного ЧМ-приймача вибирається такою, щоб вона вмщала корисний сигнал у будь-який момент часу за період модуляції. Ця смуга набагато ширша за смугу частот повідомлення, що передається. Проте ЧМ-сигнал не займає цю смугу весь час; можна лише стверджувати, що в будь-який момент часу він знаходиться в деякому відрізку смуги. Наявність апріорної інформації про швидкість зміни частоти сигналу дозволяє здійснити стеження за цією частотою вузькосмуговим приймачем, що досягається введенням зворотного зв'язку за частотою або застосуванням слідкуючого фільтра проміжної частоти.

Схема включення слідкуючого фільтра в тракт проміжної частоти демодулятора ЧМ-сигналів подана на рис. 3.2, а.

Для перестроювання середньої частоти фільтра застосовуються реактивні керовані елементи (варикапи, реактивні транзистори та ін.). Керуюча напруга на них подається з виходу демодулятора. Смуга пропускання слідкуючого фільтра встановлюється приблизно рівною подвоєній максимальній частоті спектра модулюючого сигналу f_{ϕ} . Потужність завад на виході слідкуючого фільтра знижується приблизно в $m_{\text{ЧМ}}$ разів, що призводить до зниження порога на 5–7 дБ.

Технічні труднощі виконання перестроюваного з частотою F_{max} фільтра призвели до деяких змін схеми (рис. 3.2, б). Вузькосмуговий фільтр проміжної частоти зі смугою $\Pi'_s \approx 2F_{\text{max}}$ не перестроюється. Зворотний зв'язок у схемі подається на гетеродин та вибирається таким, щоб синхронно зі змінами частоти прийнятого сигналу $f_{0д} \pm \Delta f$ у тому самому напрямку змінювалась частота гетеродина G з дев'яцістю $\Delta f_{\text{д.г.}}$.

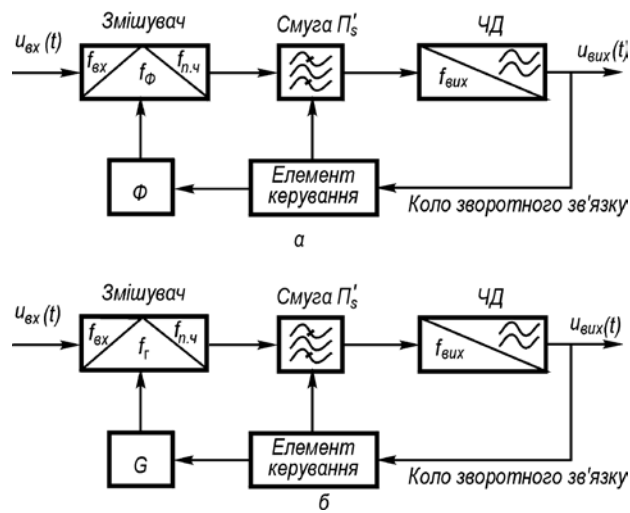


Рис. 3.2. Структурні схеми порогознижувальних демодуляторів ЧМ:
 а – зі слідкуючим фільтром; б – зі слідкуючим гетеродином

Така схема зниження порога названа *слідкуючим гетеродином*. Частота на виході змішувача в цій схемі при $f_r - f_0 = f_{п.ч}$ ($f_{п.ч}$ – проміжна частота)

$$f_{вих} = (f_r \pm \Delta f_{д.г}) - (f_0 \pm \Delta f_d) = f_{п.ч} \pm (\Delta f_{д.г} - \Delta f_d), \quad (3.52)$$

де f_r – частота гетеродина; $\Delta f_{д.г}$ – девіація частоти гетеродина; Δf_d – девіація на виході частотного детектора.

Із формули (3.52) випливає, що, змінюючи девіацію частоти гетеродина $\Delta f_{д.г}$, можна зменшити ширину спектра сигналу на виході змішувача і, відповідно, знизити поріг завадостійкості.

3.4. СИСТЕМИ З ПІДНЕСУЧИМИ

У техніці зв'язку нерідко застосовується *подвійна модуляція*. При цьому повідомлення, яке передається, модулюється допоміжне коливання (піднесуча) з частотою f_n , а потім одержаним модульованим коливанням модулюється інше коливання (несуча) з частотою $f_n \gg f_n$. В багатоканальних системах подвійна модуляція дозволяє здійснити частотне ущільнення каналів.

В одноканальних системах з піднесучою подвійна модуляція дозволяє замінити вимогу до стабільності несучої частоти на легше здійсненну вимогу до стабільності піднесучої частоти. Крім того, такі системи, як ЧМ-АМ або ФМ-АМ, застосовуються у випадках, коли не можна використовувати безпосередньо ЧМ або ФМ внаслідок селективних завмирань. Наприклад, у телеметричних системах необхідно передавати не тільки форму, але й масштаб повідомлення $u(t)$, а завмирання в каналах у разі застосування АМ або ОМ спричинятимуть зміни амплітуди повідомлення, що приймається. В таких випадках часто використовують ЧМ-АМ або ФМ-АМ. З цієї ж причини система ЧМ-АМ застосовується у фототелеграфних системах на коротких хвилях.

Різноманітність систем модуляції дозволяє реалізувати велику кількість систем з піднесучими. Практичне застосування знаходять такі системи, як ОМ-АМ, ФМ-АМ, ЧМ-АМ, ОМ-ОМ, ЧМ-ОМ, ОМ-БМ, ОМ-ЧМ, ЧМ-ЧМ та ін.

При малому рівні завад вигравш систем з піднесучими визначається тим же самим методом, що і при звичайній однократній модуляції на підставі (3.22). Розглянемо для прикладу систему ФМ-АМ. У цій системі сигнал можна зобразити так:

$$s(t) = A_{0н} \left\{ 1 + m \cos[\omega_n t + m u(t)] \right\} \cos(\omega + \phi), \quad (3.53)$$

де m_n і ω_n – відповідно індекс амплітудної модуляції та несуча частота; m_p і ω_p – відповідно індекс фазової модуляції та піднесуча частота.

Оскільки система ФМ-АМ належить до прямих систем модуляції, то вираз можна визначити за (3.22) з урахуванням (3.24).

Для сигналу (3.53)

$$\widetilde{D_e^2}(t) = \left(\frac{\partial s}{\partial u} \right)^2 = \frac{1}{2} A_{0H}^2 m_p^2 m_n^2, \quad \widetilde{cP} = \widetilde{s^2}(t) = \frac{1}{2} A^2 \left(1 + \frac{m_n^2}{m_p^2} \right),$$

звідки

$$\gamma'_{\text{ФМ-АМ}} = \frac{m_p^2 m_n^2}{k_p^2 (2 + m_n^2)} = \frac{m_p^2}{k_p^2} \frac{m_n^2}{2 + m_n^2} = \gamma'_{\text{ФМ}} \gamma'_{\text{АМ}}. \quad (3.54)$$

З одержаного виразу випливає, що узагальнений вираз дорівнює добуткові виразів при ФМ і АМ. Легко переконатися, що для будь-якої системи з піднесучою, в якій модуляція несучої є прямою, узагальнений вираз γ' дорівнює добуткові виразів першого γ'_n і другого γ'_n ступенів модуляції, тобто

$$\gamma' = \gamma'_n \gamma'_n. \quad (3.55)$$

Поріг завадостійкості в системах з піднесучими в загальному випадку спостерігатиметься по обох ступенях модуляції. Тут важливо визначити, по якому ступеню модуляції поріг настає раніше і де він виражений сильніше. В системі ОМ-ОМ поріг відсутній. Якщо в одному ступені модуляції використовується ОМ, БМ або АМ, а в іншому ступені – ФМ або ЧМ, то поріг завадостійкості визначається тим ступенем, в якому застосована фазова або частотна модуляція. Так, в системі ЧМ-АМ поріг визначається модуляцією піднесучої, а в системі ОМ-ЧМ – модуляцією несучої [6].

3.5. ІМПУЛЬСНІ СПОСОБИ ПЕРЕДАВАННЯ

Згідно з теоремою В. О. Котельникова, неперервне коливання $u(t)$ може бути передано по лінії зв'язку з необхідною точністю шляхом передавання окремих миттєвих значень цього коливання

$$\dots u(-2T_i), u(-T_i), u(0), u(T_i), u(2T_i), \dots, \quad (3.56)$$

узятих для моментів часу, віддалених один від одного на величину $T_i \leq 1/(2F_m)$, де F_m – найвища частота коливання $u(t)$.

В системах зв'язку, заснованих на цьому принципі (імпульсні системи), для передавання коливання $u(t)$ використовується періодична послідовність імпульсів

$$f(t) = \sum_{k=-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}-1} U(t - kT_i). \quad (3.57)$$

При цьому один з параметрів цієї послідовності змінюється відповідно до зміни миттєвих значень (3.56) коливання $u(t)$, що передається.

Модульовану послідовність імпульсів на виході першого ступеня модуляції можна записати у вигляді

$$f(u, t) = \sum_{k=-\frac{d}{2}}^{\frac{d-1}{2}} U[u(kT_i), t - kT_i]. \quad (3.58)$$

У виразах (3.57) і (3.58) межі суми узяті на підставі припущення про те, що повідомлення передається в інтервалі часу від $-T/2$ до $T/2$, де T – достатньо велика величина в порівнянні з періодом повторення імпульсів T_i ; $d = \frac{T}{T_i} = pT$, де p – тактова частота. Вважаємо, що d – ціле число;

$U(t)$ – рівняння обвідної імпульсу, причому $U(t) = 0$ при $t < 0$ і $t > \tau_0$, де τ_0 – тривалість імпульсу.

Для передавання коливання $f(u, t)$ по радіо необхідно застосувати ще один ступінь модуляції. При цьому може бути використана будь-яка з систем модуляції, розглянутих в цьому розділі раніше.

Сигнал, випромінюваний передавачем, є коливаннями, залежними від часу і повідомлення, що передається:

$$s(u, t) = S[u(kT_i), t]. \quad (3.59)$$

Потенційну завадостійкість імпульсних систем модуляції можна визначити, виходячи із загальної формули (3.16) або відповідно (3.24) для *прямих* систем модуляції несучої та формули (3.26) – для *інтегральних* систем.

Позначення систем в подальшому викладі прийнято у вигляді короткого запису $XYZ-AB$, де перші три букви позначають вид імпульсної модуляції в каналах, а символ AB – спосіб модуляції несучої.

Докладні дослідження завадостійкості імпульсних систем модуляції читач може знайти в [6]. Тут ми обмежимося лише аналізом одержаних результатів. Виявляється, що потенційна завадостійкість систем АІМ-АМ, АІМ-БМ і АІМ-ОМ дорівнює потенційній завадостійкості відповідних аналогових систем АМ, БМ, ОМ. Для цих систем завадостійкість не залежить від форми, тривалості імпульсів і ширини спектра сигналу.

В системах АІМ-ФМ і АІМ-ЧМ завадостійкість може бути підвищена завдяки розширенню смуги частот, займаної сигналом.

Узагальнений вираз в системі ФІМ-АМ визначається наступним виразом:

$$\gamma' = \frac{1}{2k_{\text{п}}^2 k_{\text{ф}}^2} \left(\frac{\Delta\tau_m}{\tau_0} \right)^2, \quad (3.60)$$

де $k_{\text{ф}}$ – коефіцієнт, залежний від форми імпульсу; $\Delta\tau_m$ – максимальна девіація імпульсу. Як бачимо, завадостійкість системи ФІМ залежить від форми імпульсу. При оптимальному виборі параметрів системи ФІМ-АМ $F\tau_0 = 1$, $p = 2F_m$, $\Delta\tau_m = 1/(2p)$, $k_{\text{п}} = \sqrt{2}$ і

$$\gamma'_{\text{opt}} = \frac{v^2}{32k_{\text{ф}}}. \quad (3.61)$$

При $k_{\text{ф}} = 1/12$, що відповідає трикутній формі імпульсів,

$$\gamma'_{\text{opt}} = \frac{3}{8} v^2. \quad (3.62)$$

Цей вираз збігається з (3.38) для системи з частотною модуляцією. Отже, потенційна завадостійкість системи ФІМ-АМ при оптимальному виборі параметрів і потенційна завадостійкість системи ЧМ однакові.

Система з частотно-імпульсною модуляцією (ЧІМ) має таку ж потенційну завадостійкість, що і система ФІМ-АМ.

Застосування ЧМ і ФМ з ФІМ дозволяє забезпечити більш високу завадостійкість порівняно з системою ФІМ-АМ лише в разі достатньо великих індексів модуляції. Якщо ж імпульси короткі, то застосування високих індексів модуляції може виявитися практично нездійсненним або недоцільним.

Важливим достоїнством системи ФІМ-АМ є те, що її передавальний пристрій працює в режимі передачі короткочасних імпульсів. У системах ФІМ-ЧМ і ФІМ-ФМ ця перевага втрачається.

Таблиця 3.1. Виграш демодулятора при оптимальному прийманні неперервних сигналів

Модуляція	Виграш	Коефіцієнт розширення смуги α
АМ	$\frac{m_{AM}^2}{m_{AM}^2 + k_n^2} \alpha_{AM}$	2
БМ	γ_{BM}	2
ОМ	γ_{OM}	1
АІМ	γ_{AIM}	$1/T_i$
ЧМ	$\frac{3}{k_n^2} m_{ЧМ}^2 \alpha_{ЧМ} \approx \frac{3}{k_n^2} \alpha_{ЧМ}^3$	$2(m+1)$
ФМ	$\frac{m_{ФМ}^2}{k_n^2} \alpha_{ФМ} \approx 4 \frac{\alpha_{ФМ}^3}{k_n^2}$	$2(m+1)$
АІМ-АМ	$\frac{0,6}{k_n^2} \alpha_{AIM-AM}^3$	$2/T_i$
ФІМ-АМ	$\frac{3}{4k_n^2} \alpha_{ФІМ-AM}^3$	$2/T_i$

Примітка. В таблиці введено такі позначення: $\alpha = F_s / F_{max}$ – коефіцієнт розширення смуги частот, що показує, у скільки разів ширина спектра модульованого сигналу F_s більша за максимальну частоту модулюючого сигналу F_{max} ; m_{AM} , $m_{ЧМ}$, $m_{ФМ}$ – коефіцієнти модуляції.

Формули, що визначають потенційну завадостійкість систем з ФІМ, слушні й для відповідних систем з ШІМ при $u(t)=0$. Але слід пам'ятати, що в системі з ШІМ середня тривалість імпульсу більша, ніж у системі з ФІМ. Внаслідок цього при однаковій амплітуді імпульсу в системі ШІМ-АМ витрачається більша середня потужність передавача, ніж в системі ФІМ-АМ.

Істотною перевагою імпульсних методів модуляції є можливість ефективного амплітудного обмеження за максимумом і мінімумом. Це дає змогу значно підвищити завадостійкість приймання при малому рівні завад. Сказане не стосується системи АІМ, в якій обмеження імпульсів за амплітудою неприпустиме.

В даний час широко застосовується порогове приймання, при якому модульовані параметри імпульсу визначаються в момент переходу його через деякий рівень (поріг). При великому рівні завад окремі викиди завади можуть перевищити рівень порога і призвести до помилкових спрацьовувань вихідних пристроїв у проміжках між імпульсами. Крім того, викиди завади можуть пригнічувати окремі імпульси сигналу. Якщо пікове значення завади дорівнює порогу спрацьовування приймача або більше за нього, то ймовірність помилкових спрацьовувань різко збільшується і приймання стає практично неможливим.

Отже, в імпульсних системах з амплітудною модуляцією несучої, а також в системах передавання ОМ і БМ поріг завадостійкості визначається порогом спрацьовування приймача. Звичайно пороговий рівень в приймачі вибирається рівним половині амплітуди сигналу. В цьому випадку поріг завадостійкості при пік-факторі завади $k_n = 4$

$$q_t = 32 \frac{\tau_0}{T_i} n, \quad (3.63)$$

де n – число каналів.

Порогова потужність при цьому

$$P_t = 32 \frac{\tau_0}{T_i} n N_0 F. \quad (3.64)$$

При оптимальному виборі параметрів системи $F\tau_0 = 1$, $T_i = 1/(2F_m)$ і

$$P_t = 64nN_0F_m. \quad (3.65)$$

Одержані вирази показують, що порогова потужність сигналу в імпульсних системах з амплітудною модуляцією несучої не залежить від смуги пропускання приймача. Це обумовлює одну з найважливіших переваг імпульсних систем порівняно, наприклад, з частотною модуляцією. Дійсно, вибираючи достатньо малу тривалість імпульсу, можна збільшити виграш системи γ , не збільшуючи при цьому порогову потужність сигналу. В системі ж з частотною модуляцією зі збільшенням виграшу γ за рахунок розширення смуги частот каналу збільшується поріг потужності сигналу.

В імпульсних системах з частотною модуляцією несучої поріг завадостійкості визначається системою модуляції несучої.

Розрахункові формули виграшу оптимального демодулятора для різних способів модуляції при завадах у вигляді адитивного білого гауссового шуму подані в табл. 3.1.

3.6. ЦИФРОВЕ ПЕРЕДАВАННЯ НЕПЕРЕРВНИХ ПОВІДОМЛЕНЬ

Для передавання неперервних повідомлень можна скористатися дискретним каналом, перетворивши неперервне повідомлення в *цифровий сигнал*, тобто в послідовність символів, зберігши істотну частину інформації, визначувану його епсилон-ентропією. Типовими прикладами цифрових систем передавання неперервних повідомлень є системи з імпульсно-ковою модуляцією (ІКМ) і дельта-модуляцією (ДМ).

Як наголошувалося раніше, для перетворення неперервного повідомлення в цифрову форму використовуються операції дискретизації та квантування. Одержана таким чином послідовність квантованих відліків кодується і передається по дискретному каналу як усяке дискретне повідомлення. На приймальній стороні неперервне повідомлення після декодування відновлюється (з тією або іншою точністю).

Основна технічна перевага цифрових систем передавання перед неперервними системами полягає в їх високій завадостійкості. Ця перевага є найвідчутнішою в системах передавання з *багатократною ретрансляцією* (переприйманням) сигналів. Типові системи подібного типу – кабельні і радіорелейні лінії великої протяжності. В них сигнали передаються по ланцюгу ретрансляторів, розташованих на таких відстанях один від одного, які забезпечують надійний зв'язок. У таких системах завади і спотворення, котрі виникають в окремих ланках, як правило, накопичуються. Припустимо для простоти, що сигнал у кожному ретрансляторі тільки підсилюється. Тоді, якщо адитивні завади в кожній ланці статистично незалежні, їх потужність на вході останньої ланки дорівнює сумі потужностей завад усіх ланок.

Якщо система складається з k однакових ланок, для забезпечення заданої вірогідності зв'язку слід забезпечити на вході кожного ретранслятора відношення сигнал–завада в k разів більше, ніж при передаванні без ретрансляцій. У реальних системах число ретрансляцій k може досягати кількох десятків, а іноді й сотень; накопичення завад уздовж тракту передавання стає основним чинником, що обмежує протяжність лінії зв'язку.

В цифрових системах для ослаблення ефекту накопичення завад при передаванні з ретрансляціями разом з підсиленням застосовують регенерацію імпульсів, тобто демодуляцію з відновленням переданих кодових символів і повторну модуляцію на переприймальному пункті. У разі використання регенерації адитивна завада з входу ретранслятора не надходить на його вихід. Проте вона спричинює помилки при демодуляції. Помилково прийняті в одному регенераторі символи в такому вигляді передаються і на наступні регенератори, отже, помилки все ж таки накопичуються. Використовуючи k регенераторів і беручи допустиму ймовірність помилки $p \ll 1$, необхідно в демодуляторі кожного регенератора забезпечити ймовірність помилки p_1 не більше ніж p/k . Однак на відміну від попереднього випадку для цього зовсім не потрібно збільшувати відношення сигнал–завада на вході регенератора в k разів.

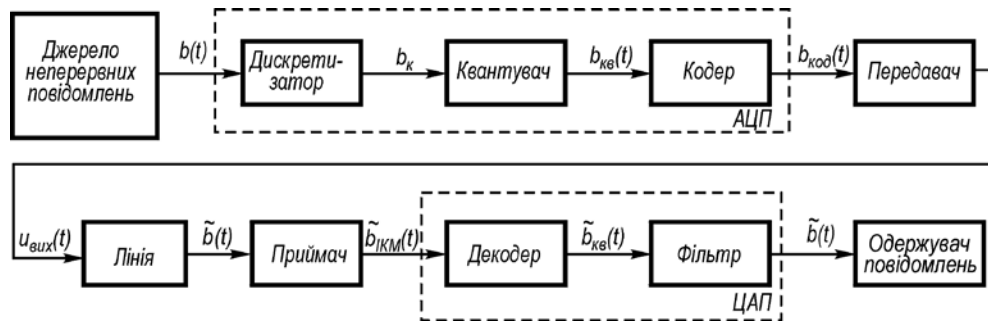


Рис. 3.3. Структурна схема системи цифрового передавання неперервних повідомлень

Наприклад, при передаванні двійкових символів у каналі з адитивним гауссовим шумом і некогерентному прийманні двійкових ортогональних сигналів помилки визначаються за формулами, наведеними в розд. 6. Якщо потрібно забезпечити $p < 10^{-5}$, то в системі без переприймання для цього необхідно мати $q_{\text{вх}} > 20$ дБ. При використуванні $q_{\text{вх}} > 30$ дБ слід забезпечити на кожному з регенераторів $p < 10^{-8}$.

У цифровій системі передавання неперервних повідомлень можна, крім того, підвищити вірогідність застосуванням завадостійкого кодування. Висока завадостійкість цифрових систем передавання дозволяє здійснити практично необмежений за дальністю зв'язок, використовуючи канали порівняно невисокої якості.

Іншою істотною перевагою цифрових систем передавання інформації є широке використання в апаратурі перетворення сигналів сучасної елементної бази цифрової обчислювальної техніки і мікропроцесорів. Сукупність пристроїв, що виконують перетворення вхідних цифрових сигналів у вихідні цифрові сигнали за заданим алгоритмом цифрового перетворення, називають *цифровими фільтрами*. По суті, цифровий фільтр є спеціалізованою ЕОМ або мікропроцесором. Більше того, на цифровій основі можуть бути інтегровані в єдину систему сигнали передавання даних з сигналами передавання мови і телебачення. Можливість зведення всіх видів інформації, що передається, до цифрової форми дозволить здійснити інтеграцію систем передавання і систем комутації. Простота з'єднання цифрового каналу з ЕОМ істотно розширює галузь використання обчислювальної техніки при побудові апаратури зв'язку і автоматизації управління мережами зв'язку країни.

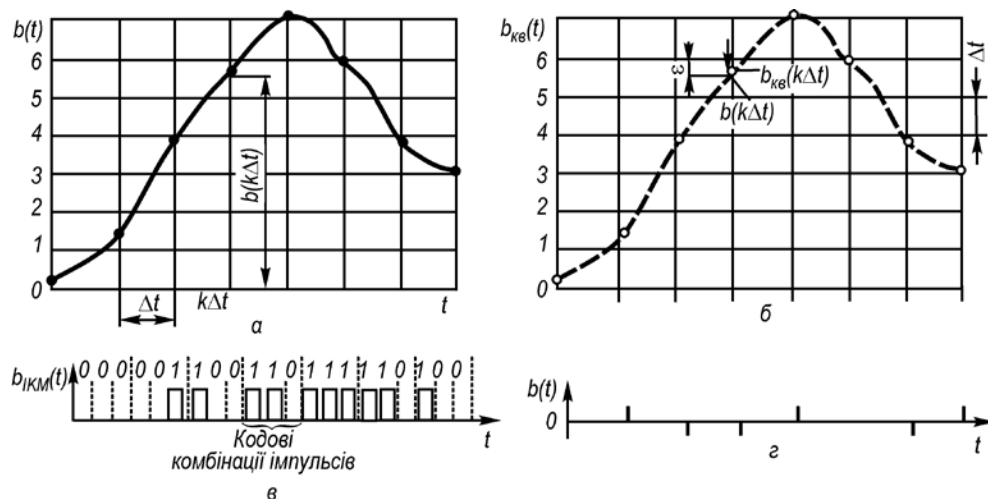


Рис. 3.4. Перетворення неперервного повідомлення в послідовність двійкових імпульсів

Зазначені вище, а також інші переваги цифрових систем передавання неперервних повідомлень дозволяють припустити, що в найближчі роки ці системи знайдуть застосування ширше, ніж неперервні (аналогові) системи зв'язку.

Перейдемо тепер до розгляду структурної схеми цифрового каналу передавання неперервних повідомлень (рис. 3.3). На відміну від неперервного каналу передавання у складі цифрового каналу передбачені пристрої для перетворення неперервного повідомлення в цифрову форму – аналого-цифровий перетворювач (АЦП) на передавальній стороні – і пристрої перетворення

цифрового сигналу в неперервний – цифро-аналоговий перетворювач (ЦАП) на приймальній стороні.

Перетворення аналог–цифра складається з трьох операцій: спочатку неперервне повідомлення піддається дискретизації за часом через інтервали Δt (рис. 3.4, а); одержані відліки миттєвих значень $b(k\Delta t)$ квантуються (рис. 3.4, б); нарешті, отримана послідовність квантованих значень $b_{кв}(k\Delta t)$ повідомлення, що передається, зображується за допомогою кодування у вигляді послідовності m -кових кодових комбінацій (рис. 3.4, в). Таке перетворення називається *імпульсно-кодовою модуляцією*. Частіше всього кодування тут зводиться до запису номера рівня в двійковій системі числення. Надалі розглядатимемо цифрові системи, в яких неперервне повідомлення перетворено в послідовність кодових комбінацій, складених з двійкових символів.

Одержаний з виходу АЦП сигнал ІКМ надходить або безпосередньо в лінію зв'язку, або на вхід передавача (модулятора), де послідовність двійкових імпульсів перетворюється в радіоімпульси.

На приймальній стороні лінії зв'язку послідовність імпульсів після демодуляції і регенерації в приймачі надходить на цифро-аналоговий перетворювач (ЦАП), призначення якого полягає в зворотному перетворенні (відновленні) неперервного повідомлення за прийнятною послідовністю кодових комбінацій. До складу ЦАП входять декодувальний пристрій, призначений для перетворення кодових комбінацій в квантовану послідовність відліків, і згладжувальний фільтр, який відтворює неперервне повідомлення за квантованими значеннями.

Перетворення неперервних повідомлень у цифрову форму в системах ІКМ супроводжується округленням миттєвих значень до найближчих дозволених рівнів квантування. Похибка зображення, що виникає при цьому, є неусувною, але контрольованою (оскільки не перевищує половини кроку квантування) (рис. 3.4, г). Вибравши малий крок квантування, можна забезпечити еквівалентність за заданим ϵ -критерієм початкового і квантованого повідомлень. Похибку (помилку) квантування, що є різницею між початковим повідомленням і повідомленням, відновленим за квантованими відліками, називають *шумом квантування*.

3.7. ЗАВАДОСТІЙКІСТЬ ІМПУЛЬСНО-КОДОВОЇ МОДУЛЯЦІЇ

Однією з причин, що призводять до відмінності прийнятого повідомлення від переданого в системі з ІКМ, є шум квантування, іншою – завади в каналі, які накладаються на символи кодових комбінацій, що передаються. Помилки в символах (за відсутності надлишковості) спричинюють помилкове декодування всієї кодової комбінації.

Внаслідок помилкового декодування символу дійсно передане дискретне значення повідомлення замінюється іншим можливим (не обов'язково найближчим); похибка залежить від того, які з символів кодової комбінації прийняті з помилкою. Назвемо цю складову шуму *шумом помилкових імпульсів*. Таким чином, оцінюючи завадостійкість, треба враховувати сумарний шум як за рахунок квантування, так і за рахунок помилкових імпульсів при декодуванні.

Шум квантування не пов'язаний із завадами в каналі і цілком визначається вибором числа рівнів квантування. Його можна зробити скільки завгодно малим, збільшуючи число рівнів. При цьому доводиться збільшувати число кодових символів, що припадають на кожний відлік, тобто скорочувати тривалість символу і розширювати спектр сигналу в каналі. Отже, так само, як і при завадостійких аналогових видах модуляції, зниження цього шуму досягається за рахунок розширення спектра сигналу.

Шум помилкових імпульсів є аномальним. Він повністю визначається завадами в каналі і видом модуляції несучої. З розширенням спектра сигналу потужність аномального шуму, як правило, зростає.

Потужність шуму квантування. Для визначення потужності шуму квантування зобразимо реалізацію $u(t)$ неперервного повідомлення її розкладом в ряд Котельникова:

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k\Delta t) \frac{\sin 2\pi F_c(t - k\Delta t)}{2\pi F_c(t - k\Delta t)}. \quad (3.66)$$

Після фільтрації квантованих відліків отримаємо функцію $u_{\text{KB}}(t)$, яка приблизно відображає вихідне повідомлення $u(t)$:

$$u_{\text{KB}}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_{\text{KB}}(k\Delta t) \frac{\sin 2\pi F_c(t-k\Delta t)}{2\pi F_c(t-k\Delta t)}. \quad (3.67)$$

Подамо далі квантоване значення відліку $u_{\text{KB}}(k\Delta t)$ у вигляді суми:

$$u_{\text{KB}}(k\Delta t) = u(k\Delta t) + d_k \Delta u, \quad (3.68)$$

де d_k – безрозмірна випадкова величина, що лежить в інтервалі $-0,5 < d_k < 0,5$. В розрахунках дуже часто приймають, що похибка квантування має рівномірний розподіл (при великому числі рівнів квантування це близько до істини):

$$\begin{cases} w(d) = 1 \text{ при } |d| < 0,5; \\ w(d) = 0 \text{ при } |d| > 0,5. \end{cases} \quad (3.69)$$

Позначивши відлікову функцію Котельникова в (3.66) через $\psi_k(t)$, перепишемо (3.67) у вигляді

$$u_{\text{KB}}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [u(k\Delta t) + d_k \Delta u] \psi_k(t),$$

або

$$u_{\text{KB}}(t) = u(t) + \Delta u \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k \psi_k(t). \quad (3.70)$$

Тоді похибка квантування (шум квантування)

$$\varepsilon(t) = \Delta u \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k \psi_k(t). \quad (3.71)$$

З урахуванням (3.69) маємо

$$\overline{d_k^2} = D(d) = \int_{-0,5}^{0,5} d^2 dx = \frac{d^3}{3} \Big|_{-0,5}^{0,5} = \frac{1}{12}. \quad (3.72)$$

Отже, середня потужність шуму квантування

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = (\Delta u)^2 D(dk) = \frac{(\Delta u)^2}{12}, \quad (3.73)$$

а відношення середніх потужностей повідомлення і шуму квантування

$$P_u / P_\varepsilon = B^2(t) / \overline{\varepsilon^2(t)} = 12u^2(t) / (\Delta u)^2. \quad (3.74)$$

Виразимо Δu через число рівнів L . Вважаючи, що $u(t)$ – нормоване повідомлення, $-1 < u(t) < 1$, дістанемо

$$\Delta u(t) = (u_{\max} - u_{\min}) / (L - 1) = 2 / (L - 1). \quad (3.75)$$

З іншого боку, $\overline{u^2(t)} = P_u = 1 / k_{\Pi}^2$, де k_{Π}^2 – пік-фактор повідомлення. Тоді

$$\frac{P_u}{P_\varepsilon} = \frac{\overline{u^2(t)}}{\overline{\varepsilon^2(t)}} = \frac{1}{k_{\Pi}^2} \frac{12}{(\Delta u)^2} = \frac{3(L-1)^2}{k_{\Pi}^2} = \frac{3(2^n - 1)^2}{k_{\Pi}^2}, \quad (3.76)$$

де n – число символів на відлік при двійковому коді без надлишковості. З (3.76) випливає, що вірогідність квантованого повідомлення залежить від числа рівнів квантування. Вибираючи його достатньо великим, можна зменшити відносно значення шуму квантування до будь-якого допустимого значення. Нижче наведена залежність відношення P_u / P_ε від числа рівнів квантування при рівномірному розподілі $w(u) = \frac{1}{2}(-1 < u < 1)$, коли $k_{\Pi} = \sqrt{3}$:

Число рівнів квантування	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048
Число символів у кодовій комбінації n	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Відносна потужність шуму квантування, дБ	-16,9	-23,5	-29,8	-36,3	-42,1	-48,1	-54,2	-60,2	-66,2

З наведених даних випливає, що додавання кожного двійкового символу в кодовій комбінації (збільшення розрядності коду) покращує відношення P_u / P_ε приблизно на 6 дБ. З іншого боку, збільшення розрядності вимагає підвищення швидкодії багаторозрядних кодувальних пристроїв, а також відповідного розширення смуги частот каналу передавання.

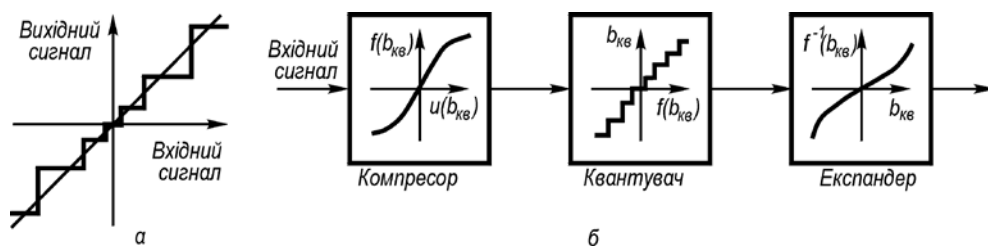


Рис. 3.5. Характеристика квантувача з нерівномірним кроком (а) і схема, що пояснює принцип компандування (б)

Частіше всього розподіл повідомлення не є рівномірним і в одержані цифри необхідно внести поправку, зменшивши їх за модулем на $20 \lg(k_{\Pi}^2 / \sqrt{3})$ дБ. При $k_{\Pi}^2 = 3$ (телефонні повідомлення) це складає 4,8 дБ, а при $k_{\Pi}^2 = 10$ (симфонічна музика) – 15,2 дБ.

Важливою особливістю шуму квантування, яка відрізняє його від адитивних шумів, є те, що він виникає одночасно з появою повідомлення $u(t)$. З технічної точки зору шум квантування

можна трактувати як різновид нелінійних спотворень, що виникають у процесі квантування. Тому шум квантування не змінюється при ретрансляції сигналів, тобто не накопичується. Безпосередньо виміряти його складно, і тому для кількісної оцінки використовують розрахункові прийоми, один з яких розглянутий вище.

Дію шуму квантування на повідомлення, що приймаються, можна помітно зменшити, застосовуючи *нерівномірне квантування*, при якому великі рівні повідомлення квантуються з більшим кроком, а низькі рівні – з меншим кроком (рис. 3.5, а). Очевидно, що шум квантування при цьому корельований з повідомленням і має тим меншу миттєву потужність, чим менший рівень повідомлення. Це дозволяє при тому ж числі рівнів краще розрізнити слабкі відрізки повідомлення. Якщо розподіл імовірностей повідомлення такий, що великі рівні зустрічаються значно рідше, ніж малі (що має місце, наприклад, при передаванні мови), то нерівномірне квантування зводиться до того, що часто виникаючі значення $u(t)$ передаються з меншою помилкою квантування, а рідко виникаючі значення $u(t)$ – з більшою помилкою квантування. В результаті усереднення по всіх значеннях дисперсія помилки квантування буде зменшена.

Одним з поширених способів нерівномірного квантування є квантування з *компандуванням сигналу*. Компандерна система є комплексом двох нелінійних перетворювачів з взаємооберненими характеристиками – компресора і експандера (рис. 3.5, б). Динамічний діапазон вхідного сигналу “стискається” за допомогою компресора на передавальній стороні, потім сигнал рівномірно квантується. Комбінація цих операцій еквівалентна нерівномірному квантуванню, причому закон зміни кроку квантування визначається нелінійною характеристикою компресора. Після кодування і передавання по лінії зв’язку на приймальній стороні проводиться обернене перетворення, відновлюються відліки з рівномірним кроком квантування. Потім вони піддаються експандуванню, при якому відновлюється початковий динамічний діапазон. В даний час частіше за все застосовується компандування в цифровій формі, тобто безпосереднє нерівномірне квантування.

Шум помилкових імпульсів при декодуванні. Позначимо ймовірність помилкового приймання одного символу кодової комбінації через p . Ця ймовірність залежить від виду модуляції і знаходиться за формулами, наведеними в розд. 6. Припускаючи, що помилки при прийманні символів є незалежними, запишемо вираз для ймовірності того, що кратність поєднання помилок складе Δ :

$$P(\Delta) = C_n^q p^q (1-p)^{n-q}. \quad (3.77)$$

Ймовірність того, що кодова комбінація приймається хоча б з однією помилкою при $np \ll 1$,

$$1 - (1-p)^n \approx np. \quad (3.78)$$

При декодуванні кожний символ кодової комбінації, залежно від займаного ним місця, робить певний “внесок” в декодоване повідомлення. Якщо використовується двійковий код, то помилка в молодшому розряді кодової комбінації призводить до похибки у вихідному повідомленні, рівної кроку квантування Δu ; помилка в другому символі призводить до появи у вихідному повідомленні похибки $2\Delta u$ і т. д. При цьому середня потужність шуму, обумовленого дією помилкових імпульсів,

$$\overline{\varepsilon_{п.і}^2} = [1 - (1-p)^n] \frac{(\Delta u)^2}{n} \sum_{i=1}^{\infty} 2^{i-1} \approx p (\Delta u)^2 \sum_{i=1}^{\infty} 2^{2(i-1)}. \quad (3.79)$$

При фіксованому значенні $n = \log L$ шум помилкових імпульсів залежить тільки від ймовірності помилок p , яка, в свою чергу, визначається відношенням потужностей сигналу і завади в каналі та видом модуляції.

Як зазначалося, на відміну від шуму квантування шум помилкових імпульсів накопичується при ретрансляції. Проте в правильно спроектованих системах з ІКМ потужність сигналу

перевищує порогову, при якій аномальним шумом помилкових імпульсів, в порівнянні з шумом квантування, можна нехтувати. За цієї умови вірність приймання практично визначається шумом квантування і може бути скільки завгодно великою, якщо число рівнів достатньо велике.

Очевидно, що в системах з ІКМ так само, як і в інших завадостійких системах передавання неперервних повідомлень, має місце поріг завадостійкості, тобто правильність приймання різко погіршується, якщо потужність сигналу падає нижче за порогову. З сказаного вище ясно, що ця порогова потужність збільшується із зростанням числа ретрансляторів, але дуже повільно. При цьому порогова потужність збільшується також із зростанням числа рівнів квантування. Основна причина цього полягає в тому, що чим більше число рівнів, тим більше кодових символів має припадати на один відлік і, отже, тим менша тривалість передавання одного символу.

Оскільки ймовірність помилки визначається енергією елемента сигналу, то при скороченні його тривалості доводиться збільшувати його потужність. Втім, це збільшення порогової потужності також невелике порівняно з відповідним зменшенням шуму квантування. Так, з переходом від 128 рівнів квантування до 256 шум квантування зменшується на 6 дБ. При цьому замість семи символів у кодовій комбінації доводиться передавати вісім, тому тривалість імпульсу зменшиться в $8/7 \approx 1,14$ разів. Для того щоб зберегти попередню ймовірність помилки, потрібно збільшити потужність сигналу в 1,14 разів, тобто лише на 0,6 дБ.

Слід зауважити, що слабкий шум помилкових імпульсів, який має місце при роботі над порогом завадостійкості, сприймається в телефонних системах як окремі клацання. Якщо потужність сигналу впаде і виявиться нижчою за поріг, ці клацання стають частими і зливаються в суцільний шумовий фон. Аналогічна картина й для аномального шуму в аналогових системах (наприклад, ЧМ).

Висока завадостійкість ІКМ-систем досягається за рахунок розширення спектра ІКМ-сигналу порівняно зі спектром початкового повідомлення. Знайдемо спочатку мінімальну ширину спектра ІКМ-сигналу при основі коду $m=2$. Якщо ширина спектра початкового повідомлення дорівнює F_c , то мінімальна частота дискретизації відповідно до теореми Котельникова дорівнює $2F_c$. Кожний відлік після квантування може набувати $L = 2u_{\max}/(\Delta u + 1)$ можливих дискретних значень і замінюється при кодуванні комбінацією з $n = \log L$ двійкових імпульсів. Отже, тривалість кожного імпульсу не може бути більшою, ніж $\tau_i = 1/(2F_c \log L)$, а необхідна смуга частот визначається як $F' \approx 1/(2\tau_i) = F_c \log L$. При двосмуговій амплітудній модуляції сигнал ІКМ-АМ займатиме смугу частот

$$F = 2F' = 2F_c \log L. \quad (3.80)$$

Оскільки при ІКМ вірогідність передавання визначається числом рівнів квантування, то збільшення вірогідності супроводжується розширенням спектра ІКМ-сигналу за логарифмічним законом. Так, із збільшенням L в 2 рази ширина спектра сигналу збільшиться в $\log 2L/\log L = (1+1/\log L)$ разів. Ширина спектра ІКМ-сигналу залежить від основи коду m : при $m=2$ ширина спектра ІКМ-сигналу найбільша; зі збільшенням m ширина спектра зменшується.

З викладеного випливає, що в системі передавання з ІКМ, як і в завадостійких аналогових системах модуляції, проводиться "обмін" потужності сигналу на смугу частот. Проте в системі з ІКМ цей обмін здійснюється значно ефективніше, ніж в системах з аналоговою модуляцією. Дійсно, як було показано на прикладах, у завадостійких системах модуляції, таких як ЧМ, ФМ, ВФМ, відношення потужності повідомлення до потужності шуму на виході зростає пропорційно квадрату ширини спектра сигналу (якщо потужність сигналу вища за порогову). В системі з ІКМ це зростання відбувається значно швидше, експоненціально. Дійсно, ширина спектра пропорційна числу n символів в кодовій комбінації, тоді як потужність шуму квантування зменшується відповідно до (3.76) майже пропорційно 2^{2n} . Іншими словами, пропорційно ширині спектра збільшується виграш системи, виражений в децибелах.

Такий самий характер залежності вірогідності від ширини спектра має бути в ідеальній системі модуляції, тому в цьому відношенні ІКМ поводить себе як ідеальна система. Більш докладний аналіз приводить до висновку, що при однаковій ширині спектра виграш в ІКМ приблизно на 8 дБ менший, ніж у теоретично ідеальній системі. В даний час не існує систем модуляції, більш близьких до

ідеальної, якщо спектр повідомлення, що передається, рівномірний. Тому система з ІКМ широко використовується в тих випадках, коли високу вірогідність необхідно забезпечити з мінімальною витратою потужності передавача, наприклад в супутникових системах.

3.8. КОДУВАННЯ З ЗАВБАЧЕННЯМ

У ряді важливих випадків (наприклад, при передаванні мови, телевізійних зображень, даних телеметрії) між відліками повідомлень, що передаються, є статистичні, зокрема кореляційні, зв'язки. Наявність таких взаємозв'язків дозволяє підвищити ефективність систем передавання інформації. Розглянемо один з поширених способів передавання – спосіб передавання з завбаченням. На рис. 3.6, а наведена структурна схема системи зв'язку із завбаченням, де 31 та 32 – завбачувачі; ЛЗ – лінія зв'язку; В – віднімач; С – суматор.

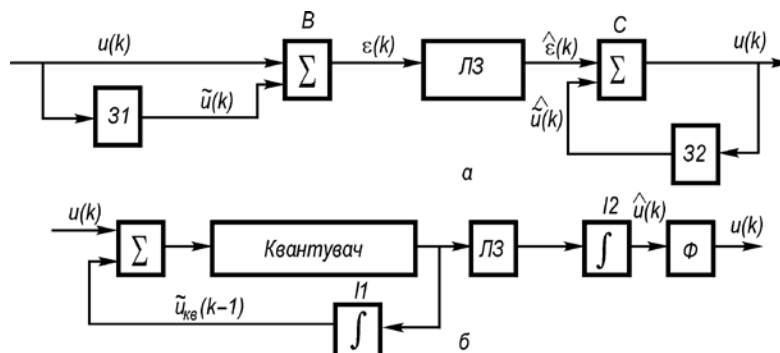


Рис. 3.6. Структурні схеми системи зв'язку з завбачувачем (а) і системи з дельта-модуляцією (б)

Послідовність корельованих відліків $u(k\Delta t) = u(k)$ початкового сигналу подають на один з входів віднімального пристрою, а на його другий вхід надходить вихідний сигнал $\tilde{u}(k)$ завбачувача 31, сформований з попередніх відліків. Одержаний таким чином сигнал помилки завбачення $\varepsilon(k)$ поступає в тракт передавання. Оскільки в сигналі помилки якраз і містяться нові відомості, що зображаються різницею між істинним і завбаченим значеннями, то такий спосіб передавання називається *передаванням із завбаченням*. Для спрощення вважаємо, що завади в каналі помилок не створюють. На приймальному кінці є такий же завбачувач, як і на передавальному. Оскільки він обробляє ті ж самі попередні відліки, то завбачене ним значення нового відліку $\hat{u}(k)$ буде таким, як і на передавачі. Додавши до нього прийняте значення помилки завбачення $\hat{\varepsilon}(k)$, можна відновити істинний відлік:

$$u(k) = \hat{u}(k) + \hat{\varepsilon}(k). \quad (3.81)$$

Очевидно, що чим сильніші кореляційні зв'язки, тим точніше можна сформувати сигнал завбачення і, отже, тим менша енергія буде потрібна для передавання сигналу помилки в порівнянні з початковим сигналом. При сильних кореляційних зв'язках, а також при марковських повідомленнях, значення $\hat{u}(k)$ може бути завбачено за одним попереднім відліком:

$$\hat{u}(k) = f[u(k-1)]. \quad (3.82)$$

Звичайно можна одержати достатньо малу помилку завбачення, поклавши

$$\hat{u}(k) = u(k-1), \quad (3.83)$$

звідки

$$\varepsilon(k) = u(k) - u(k-1). \quad (3.84)$$

Дійсно, середня енергія сигналу помилки по ансамблю

$$\begin{aligned} E_\varepsilon &= \overline{[u(k) - u(k-1)]^2} = \overline{u^2(k) + u^2(k-1) - 2u(k) \cdot u(k-1)} = \\ &= \overline{2u^2(k) - 2u(k) \cdot u(k-1)} = 2E_u(1 - \bar{R}), \end{aligned} \quad (3.85)$$

де $\bar{R} = \overline{u(k)u(k-1)}/E_u$ – коефіцієнт кореляції між відліками. З (3.85) випливає, що при $R > 0,5$ енергія сигналу помилки E_ε менша за енергію початкового сигналу E_u .

У цифрових системах передавання відліки сигналу помилки піддають звичайним операціям квантування і кодування. Результатом такого перетворення на передавальній стороні є імпульсно-кодове зображення сигналу помилки, або сигнал *диференціальної імпульсно-кової модуляції* (ДІКМ). В даний час відома велика кількість варіантів технічного здійснення кодування з завбаченням. Основна їх відмінність зводиться до різниці в операціях формування сигналу помилки: в одних системах сигнал помилки формується в аналоговій формі, а потім кодується, в інших – спочатку кодується початковий аналоговий сигнал, а потім формується сигнал помилки.

В системах з ДІКМ звичайно застосовують нерівномірне квантування сигналу помилки, тому що найбільш імовірні малі помилки. Оскільки потужність шуму квантування складає певну частку потужності квантованого процесу, а потужність помилки завбачення, як правило, істотно менша за потужність повідомлення, шум квантування при ДІКМ менший, ніж при звичайній ІКМ з тим самим числом рівнів.

Як показує аналіз, система ДІКМ забезпечує однакову з ІКМ якість передавання при меншому числі символів в кодовій комбінації (на один і більше символів залежно від ступеня кореляції відліків і від алгоритму завбачення).

Шум помилкових імпульсів також має місце при ДІКМ, причому він погіршує вірогідність приймання в більшій мірі, ніж при звичайній ІКМ. Річ у тому, що помилковий прийом кодової комбінації призводить до помилкового прийому не тільки одного відліку повідомлення, але і ряду подальших відліків, оскільки завбачені значення на приймальній стороні відрізнятимуться від завбачених на передавачі. Тому допустима ймовірність помилок при ДІКМ менша ніж при ІКМ, отже, порогова потужність сигналу вища. Існують різні способи зменшення впливу “розплоджування” помилок.

Кореляція між відліками зростає у міру скорочення інтервалу між ними. Тому при великій частоті дискретизації число рівнів квантування сигналу помилки можна зменшити до двох і перейти до однорозрядних систем. Такий спосіб кодування називають *дельта-модуляцією*.

Квантований сигнал помилки має вигляд

$$\varepsilon_{\text{кв}}(k) = \gamma(k)\Delta u, \quad (3.86)$$

де

$$\gamma(k) = \begin{cases} +1, & \text{якщо } \varepsilon(k) \geq 0; \\ -1, & \text{якщо } \varepsilon(k) < 0. \end{cases}$$

По суті, сигнал на виході дельта-модулятора містить лише відомості про полярність (знак) сигналу помилки. На приймальній стороні інтегратор додає або віднімає Δu , забезпечуючи, таким чином, зменшення похибки між початковими значеннями відліків і відновленими значеннями. Принцип формування сигналу дельта-модуляції наведений на рис. 3.6, б, де $I1, I2$ – інтегратори, Φ – фільтр. Відліки $u(k)$ повідомлення, що передається, порівнюються з квантованим відліком $\tilde{u}_{\text{кв}}(k-1)$, отриманим в результаті складання всіх попередніх квантованих сигналів помилки:

$$\tilde{u}_{\text{кв}}(k-1) = \sum_{i=0}^{k-1} \varepsilon_{\text{кв}}(i) = \Delta u \sum_{i=0}^{k-1} \gamma(i).$$

Якщо $u(k) > \tilde{u}_{\text{кв}}(k-1)$, квантувач формує значення $\gamma(k)=1$, в протилежному випадку $\gamma(k)=-1$. Отримані символи γ передаються по тракту зв'язку (рис. 3.7). Одночасно імпульси $\Delta u \gamma(i)$ надходять на суматор (інтегратор) для формування квантованого відліку $u_{\text{кв}}(k)$, котрий, як зазначалося вище, порівнюється з черговим відліком повідомлення. На вході суматора квантований сигнал $\tilde{u}_{\text{кв}}(t)$ має вигляд східчастої функції (рис. 3.7, а). Кожен імпульс $+1$ збільшує, а кожен імпульс -1 зменшує східчасту функцію на один крок квантування (рис. 3.7, а), тобто при дельта-модуляції (ДМ) сусідні значення східчастої функції розрізняються обов'язково на один крок квантування.

Операцію декодування сигналу ДМ на приймальній стороні виконує суматор (інтегратор), такий само, як і на передавальній стороні, на виході якого (за відсутності помилкових імпульсів) виходить східчаста напруга $\tilde{u}_{\text{кв}}(t)$. Після його згладжування за допомогою фільтра одержимо функцію $\hat{u}(t)$, достатньо близьку до $u(t)$. Різниця $\hat{u}(t) - u(t)$ є шумом квантування. Його значення тим менше, чим вища частота дискретизації і чим менший крок Δu . Проте крок квантування Δu не можна вибирати дуже малим, інакше виникають додаткові спотворення (так звані перевантаження по нахилу), спричинені тим, що східчаста функція не встигає стежити за швидкими змінами повідомлення $u(t)$ (рис. 3.7, в). Якщо взяти максимальне значення крутизни зміни повідомлення $|u'(t)|_{\text{max}}$, то для неспотвореного передавання необхідно виконати умову $u'(t)_{\text{max}} \Delta t < \Delta u$. Якщо практично максимальне значення повідомлення за модулем не перевищує $|u(t)|_{\text{max}}$, а число різних рівнів квантування, що визначає шум квантування, дорівнює L , то

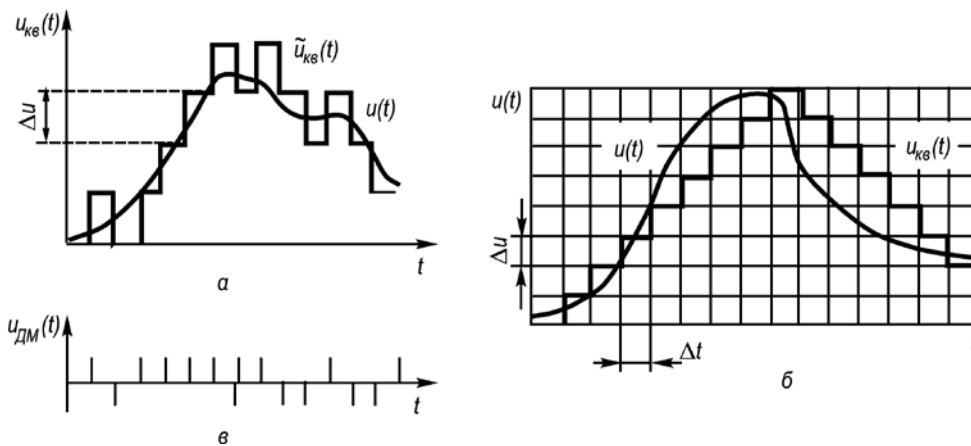


Рис. 3.7. Графіки, що пояснюють принцип формування сигналів дельта-модуляції (а, б) та появу завад внаслідок перевантаження по нахилу при дельта-модуляції (в)

$$\Delta t \leq \frac{1}{L} \frac{|u(t)|_{\text{max}}}{|u'(t)|_{\text{max}}} \quad (3.87)$$

В порівнянні з ІКМ і ДІКМ сигнали ДМ мають значно вищу частоту проходження відліків. Проте на кожний відлік при ДМ передається один імпульс, а при ІКМ – кілька, залежно від числа рівнів. Як показує аналіз, при однаковій правильності передавання частота проходження імпульсів при ІКМ і ДМ також приблизно однакова. Тому обидві ці системи займають приблизно однакову смугу частот. Істотною перевагою систем передавання з ДМ є простота кодувальних і декодувальних пристроїв. Окрім того, шум помилкових імпульсів при ДМ менший, ніж при ІКМ (за тою ж імовірністю помилки в каналі), оскільки при ДМ кожна помилка змінює рівень сигналу тільки на $\pm 2\Delta u$. До недоліків ДМ можна віднести явище розплоджування помилок, створюваних помилковими імпульсами (як і при ДІКМ), а також можливість перевантаження по нахилу.

Зазначимо, що останніми роками успішно розробляються численні різновиди ДІКМ і ДМ, зокрема адаптивні системи, в яких для зменшення шумів квантування використовують змінний крок квантування залежно від поточних статистичних характеристик повідомлення, що передається.

Як приклад на рис. 3.8, *a* наведена структурна схема кодера адаптивної ДМ. Характерною особливістю є наявність в ланцюзі зворотного зв'язку розв'язувального пристрою РП, який керує величиною кроку квантування Δu . Якщо знак приростів $\gamma(k)$ залишається незмінним протягом трьох-чотирьох інтервалів дискретизації, то це означає наявність перева-

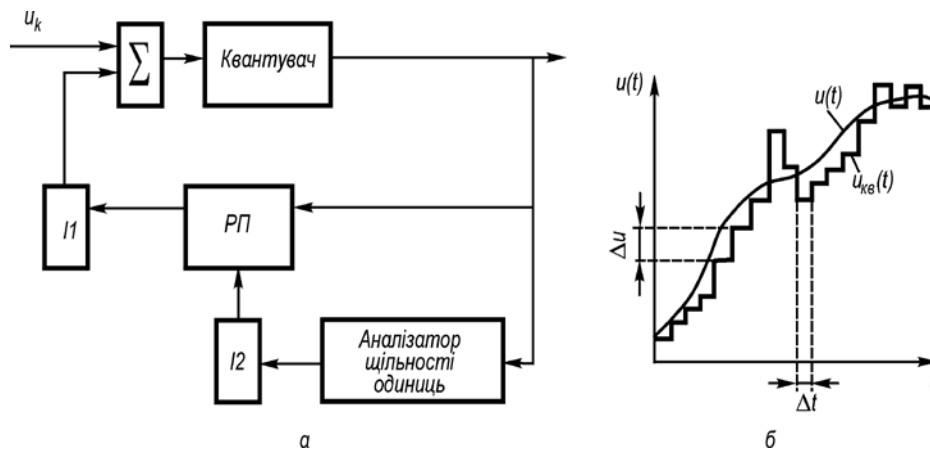


Рис. 3.8. Структурна схема кодера адаптивної ДМ (*a*) та зміна кроку квантування при адаптивній ДМ (*б*)

таження (рис. 3.8, *б*). Розв'язувальний пристрій подвоює амплітуду імпульсів, що надходять на вхід інтегратора *I1*. Якщо і в цьому разі знак приросту (сигналу помилки) не зміниться, то розмір кроку Δu знову подвоюється, і т. д. Зі зміною знака приросту розмір кроку квантування зменшується. До складу пристрою керування розміром кроку квантування має входити аналізатор щільності одиниць та імпульсний підсилювач з керованим коефіцієнтом посилення. На виході інтегратора *I2* зі зміною коефіцієнта посилення залежно від щільності одиниць формуватиметься східчаста напруга з кроком квантування, що адаптивно змінюється (рис. 3.8, *б*).

Контрольні запитання для самооцінки рівня знань

1. Як кількісно оцінюється завадостійкість при передаванні неперервних повідомлень?
2. Дайте означення понять “виграш” та “узагальнений виграш” системи.
3. Чому дорівнює виграш при АМ, ОМ і БМ?
4. Чому дорівнює виграш при ЧМ? Завдяки чому досягається велике значення виграшу при ЧМ та ФМ?
5. Що називається порогом завадостійкості? В яких системах він різко виражений?
6. Які способи зниження порога застосовуються при ЧМ?
7. Для чого застосовується подвійна модуляція?
8. Для чого застосовуються імпульсні методи модуляції? У чому їх переваги з аналоговими системами?
9. Чому дорівнює виграш у системі ФМ-АМ? Порівняйте його з ЧМ.
10. Що таке шум квантування? Від чого залежить його величина?
11. У чому полягають основні переваги цифрових методів передавання повідомлень?
12. Складіть структурну схему цифрової системи передавання. Поясніть призначення окремих вузлів.
13. Поясніть принцип дії АЦП та ЦАП, сформулюйте вимоги до них.
14. Сформулюйте сутність ІКМ. Поясніть принципову різницю між шумом квантування і завадами в каналі передавання. Яким чином покращуються відношення сигнал–завада при квантуванні?
15. У чому полягають переваги цифрового передавання з компандуванням?
16. Поясніть принцип дії цифрових систем з завбаченням.
17. Поясніть принцип дії, переваги та недоліки систем передавання з дельта-модуляцією.
18. Поясніть принцип дії та переваги систем передавання з адаптивною дельта-модуляцією.

19. Чи існує кореляція між сигналом та шумом квантування у системі ІКМ з рівномірним (лінійним) квантуванням і в системі з нерівномірним квантуванням (миттєвим компандуванням)?

Післямова до розділу 3

Ви завершили вивчення одного з найважливіших розділів навчальної дисципліни «Передавання неперервних повідомлень».

Кожний з Вас сформував для себе термінологічний мінімум. Тепер Ви можете спілкуватись професійною мовою, свідомо застосовувати отримані знання:

- у проведенні розрахунків характеристик випадкових сигналів на виході каналів, чітко характеризувати процес дискретизації сигналів за теоремою Котельникова;
- при характеризованні системи електрозв'язку;
- у сфері створення та вдосконалення систем передавання інформації.

Виконання курсової роботи (Додаток А, наведено узагальнений приклад розрахунку та оптимізації характеристик системи електрозв'язку) сприяє закріпленню, поглибленню і узагальненню знань здобутих Вами при вивченні лекційного курсу ТЕЗ, а також уміння та навички, одержані при виконанні практичних, лабораторних робіт для розв'язання конкретних інженерних завдань.

ЗАДАЧІ

Задача 1

Задано аналогову систему передачі неперервних сигналів із параметрами:

- передавальний первинний сигнал – радіомовний вищого класу;
- вид модуляції – ЧМ із девіацією частоти 45 кГц;
- канал електрозв'язку описується гауссовською моделлю з постійними параметрами;
- середня потужність сигналу на вході демодулятора $P_S=3 \cdot 10^{-11}$ Вт/Гц;

Зобразити структурну схему системи передачі, що відображає описаний вище процес передачі та пояснити призначення окремих блоків.

Розрахувати:

1. Індекс частотної модуляції ЧМ;
2. Мінімально-необхідну смугу частот каналу, приймаючи смугу каналу рівній ширині спектра модульованого сигналу;
3. Відношення сигнал/шум на вході демодулятора (виході каналу);
4. Чи забезпечується при цьому робота вище порога?;
5. Виграш демодулятора;
6. Відношення сигнал/шум на виході демодулятора та подати його в децибелах;
7. Чи буде при такому відношенні сигнал/шум забезпечене якісне відновлення первинного сигналу?

До зміни яких показників системи передачі призведе збільшення девіації частоти?

Задача 2

Задано аналогову систему передачі неперервних сигналів із параметрами:

- передавальний первинний сигнал – відео;
- вид модуляції – ЧМ з індексом модуляції $m_{\text{ЧМ}}=2,5$;
- канал електрозв'язку описується гауссовою моделлю з постійними параметрами;
- середня потужність сигналу на вході демодулятора $P_S=2 \cdot 10^{-13}$ Вт/Гц;

Зобразити структурну схему системи передачі, що відображає описаний вище процес передачі та пояснити призначення окремих блоків.

Розрахувати:

1. Мінімально-необхідну смугу частот каналу, приймаючи смугу каналу, яка дорівнює ширині спектра модульованого сигналу;
2. Потужність шуму на вході демодулятора (виході каналу);
3. Відношення сигнал/шум на вході демодулятора (виході каналу);
4. Чи забезпечується при цьому робота вище порога?;
5. Пропускнну спроможність каналу;
6. Виграш демодулятора;
7. Відношення сигнал/шум на виході демодулятора та подати його в децибелах;
8. Чи буде при такому відношенні сигнал/шум забезпечене якісне відновлення первинного сигналу?

Які показники системи передачі змінюються при заміні ЧМ на ОМ?

Задача 3

Задано систему передачі дискретних повідомлень.

Параметри джерела повідомлень:

- обсяг алфавіту джерела $M_a=32$ знаки;
- знаки в повідомленні, що видається джерелом, незалежні, коефіцієнт надмірності джерела $\chi=0,3$.

Повідомлення джерела кодується простим двійковим кодом. Швидкість модуляції на виході кодера 1200 Бод. Для передачі цифрового сигналу неперервним гауссовим каналом зв'язку з постійними параметрами використовується модуляція ЧМ-2.

Демодулятор некогерентний. На його вході: середня потужність сигналу $P_S=0,04$ Вт; білий шум зі спектральною щільністю потужності $N_0=2 \cdot 10^{-6}$ Вт/Гц.

Зобразити структурну схему системи передачі, що відображає описаний вище процес передачі та пояснити призначення окремих блоків.

Розрахувати:

1. Довжину простого коду;
2. Тривалість двійкового символу на виході кодера простого коду;
3. Ентропію джерела повідомлень;
4. Мінімально можливу ширину спектра модульованого сигналу;
5. Відношення середніх потужностей сигналу і шуму на виході каналу зв'язку, приймаючи смугу каналу рівною знайдений ширині спектра сигналу;
6. Пропускнну здатність неперервного каналу зв'язку, що використовується для передачі модульованого сигналу;
7. Відношення енергії сигналу до спектральної щільності потужності шуму на вході демодулятора;
8. Імовірність помилки двійкового символу на виході демодулятора.

Як зміниться завадостійкість при переході до когерентного прийому?

Задача 4

Задано систему передачі дискретних повідомлень.

Джерело видає повідомлення двійковими символами; символи незалежні, коефіцієнт надмірності джерела $\chi = 0,5$; швидкість модуляції 4800 Бод.

Для передачі цифрового сигналу неперервним гауссовим каналом зв'язку з постійними параметрами використовується модуляція ФМ-2.

Демодулятор когерентний. На його вході: середня потужність сигналу $P_S=0,08$ Вт; шум білий зі спектральною густиною потужності $N_0 = 2 \cdot 10^{-6}$ Вт/Гц.

Зобразити структурну схему системи передачі, що відображає описаний вище процес передачі та пояснити призначення окремих блоків.

Розрахувати:

1. Тривалість двійкового символу на виході кодера простого коду;
2. Ентропію джерела повідомлень;
3. Продуктивність джерела повідомлень;
4. Мінімально можливу ширину спектра модульованого сигналу;
5. Відношення середніх потужностей сигналу і шуму на виході каналу зв'язку, приймаючи смугу каналу рівною знайденій ширині спектра сигналу;
6. Пропускную здатність неперервного каналу зв'язку, що використовується для передачі модульованого сигналу;
7. Відношення енергії сигналу до спектральної щільності потужності шуму на вході демодулятора;
8. Імовірність помилки двійкового символу на виході демодулятора.

Як зміниться завадостійкість при переході до модуляції ЧМ-2 і чому?

Задача 5

Задано систему передачі дискретних повідомлень.

Джерело видає повідомлення двійковими символами, швидкість модуляції 1200 Бод.

Потім послідовність двійкових символів кодується коригуючим кодом. Параметри коригуючого коду:

- число інформаційних символів $k = 57$;
- довжина коду $n = 63$;
- кодова відстань $d_{\min} = 3$.

Для передачі цифрового сигналу, закодованого коригуючим кодом, неперервним гауссовим каналом зв'язку з постійними параметрами використовується модуляція ЧМ-2.

Демодулятор некогерентний. На його вході: середня потужність сигналу $P_S = 0,05$ Вт; шум білий зі спектральною густиною потужності $N_0 = 2 \cdot 10^{-6}$ Вт/Гц.

Зобразити структурну схему системи передачі, що відображає описаний вище процес передачі та пояснити призначення окремих блоків.

Розрахувати:

- Тривалість двійкового символу на вході кодера коригуючого коду (на виході джерела);
- Тривалість двійкового символу на виході кодера коригуючого коду;
- Мінімально можливу ширину спектра модульованого сигналу;
- Відношення енергії сигналу до спектральної щільності потужності шуму на вході демодулятора;
- Імовірність помилки двійкового символу на виході демодулятора;
- Кратність помилок, що виправляються декодером заданого коду;

Як зміниться завадостійкість демодулятора при переході до когерентного прийому?

Задача 6

Задано систему передачі дискретних повідомлень.

Джерело видає повідомлення двійковими символами; швидкість модуляції 9600 Бод.

Потім послідовність двійкових символів кодується коригуючим кодом. Параметри коригуючого коду:

- число інформаційних символів $k = 26$;
- довжина коригуючого коду $n = 31$;
- кодова відстань $d_{\min} = 3$.

Для передачі цифрового сигналу, закодованого коригуючим кодом, неперервним гауссовим каналом зв'язку з постійними параметрами використовується модуляція ВФМ-2.

Демодулятор когерентний. На його вході: середня потужність сигналу $P_S = 0,23$ Вт; шум білий зі спектральною густиною потужності $N_0 = 2 \cdot 10^{-6}$ Вт/Гц.

Зобразити структурну схему системи передачі, що відображає описаний вище процес передачі та пояснити призначення окремих блоків.

Розрахувати:

1. Тривалість двійкового символу на вході кодера коригуючого коду (на виході джерела);
2. Тривалість двійкового символу на виході кодера коригуючого коду;
3. Мінімально можливу ширину спектра модульованого сигналу;
4. Відношення енергії сигналу до спектральної щільності потужності шуму на вході демодулятора;
5. Імовірність помилки двійкового символу на виході демодулятора.
6. Кратність помилок, що виправляються декодером заданого коду.

Як зміниться завадостійкість демодулятора при переході від когерентного до некогерентного прийому?

Задача 7

Задано систему передачі дискретних повідомлень.

Джерело видає повідомлення двійковими символами, швидкість модуляції 300 Бод.

Потім послідовність двійкових символів кодується коригуючим кодом. Параметри коригуючого коду:

- число інформаційних символів $k = 11$;
- довжина коду $n = 15$;
- кодова відстань $d_{\min} = 3$.

Для передачі цифрового сигналу неперервним гауссовим каналом зв'язку з постійними параметрами використовується модуляція ЧМ-2.

Демодулятор когерентний. На його вході: середня потужність сигналу $P_S = 0,015$ Вт; шум білий зі спектральною густиною $N_0 = 2 \cdot 10^{-6}$ Вт/Гц.

Зобразити структурну схему системи передачі, що відображає описаний вище процес передачі та пояснити призначення окремих блоків.

Розрахувати:

1. Тривалість двійкового символу на вході кодера коригуючого коду (на виході джерела);
2. Тривалість двійкового символу на виході кодера коригуючого коду;
3. Мінімально можливу ширину спектра модульованого сигналу;
4. Відношення енергії сигналу до спектральної щільності потужності шуму на вході демодулятора;
5. Імовірність помилки двійкового символу на виході демодулятора;
6. Кратність помилок, що виправляються декодером заданого коду.

Як зміниться завадостійкість демодулятора при переході до некогерентного прийому?

Задача 8

Задано аналогову систему передачі неперервних сигналів із параметрами:

- передавальний первинний сигнал - радіомовний 1-го класу;
- вид модуляції - ОМ;
- канал електровз'язку описується гауссовою моделлю з постійними параметрами;
- середня потужність сигналу на вході демодулятора $P_S = 2 \cdot 10^{-2}$ Вт;
- шум на вході демодулятора білий зі спектральною густиною $N_0 = 10^{-11}$ Вт/Гц;

Зобразити:

1. Структурну схему системи передачі, що відображає описаний вище процес передачі та пояснити призначення окремих блоків.
2. Спектр первинного та модульованого (нижня бокова) сигналів при частоті несучої $f_0=5 \cdot 10^5$ Гц

Розрахувати:

1. Мінімально-необхідну смугу частот каналу, приймаючи смугу каналу рівній ширині спектра модульованого сигналу;
2. Відношення потужностей сигналу і шуму на вході демодулятора (виході каналу);
3. Пропускнну здатність каналу.
4. Відношення сигнал/шум на виході демодулятора та подати його в децибелах;
5. Чи буде при такому відношенні сигнал/шум забезпечене якісне відновлення первинного сигналу?

Пояснити, які переваги має ОМ у порівнянні з АМ?

Задача 9

Задано систему передачі дискретних повідомлень.

Параметри джерела повідомлень:

- обсяг алфавіту джерела $M_a=16$ знаків;
- знаки в повідомленні, що видаються джерелом, незалежні, коефіцієнт надмірності джерела $\chi=0,2$;
- тривалість видачі одного знака $T_{zn}=0,01$ с.

Повідомлення джерела кодується простим двійковим кодом. Для передачі цифрового сигналу неперервним гауссовим каналом зв'язку з постійними параметрами використовується модуляція ВФМ-2.

Демодулятор когерентний. На його вході: середня потужність сигналу $P_S=0,07$ Вт; шум білий зі спектральною густиною потужності $N_0=2 \cdot 10^{-6}$ Вт/Гц.

Зобразити структурну схему системи передачі, що відображає описаний вище процес передачі та пояснити призначення окремих блоків.

Розрахувати:

1. Ентропію джерела повідомлень;
2. Довжину простого коду;
3. Тривалість двійкового символу на виході кодера простого коду;
4. Мінімально можливу ширину спектра модульованого сигналу;
5. Відношення середніх потужностей сигналу і шуму каналу зв'язку, приймаючи смугу каналу рівною знайдений ширині спектра сигналу;
6. Пропускнну здатність неперервного каналу зв'язку, що використовується для передачі модульованого сигналу;
7. Відношення енергії сигналу до спектральної щільності потужності шуму на вході демодулятора;
8. Імовірність помилки двійкового символу на виході демодулятора.

Як зміниться завадостійкість при переході до некогерентного прийому?

Задача 10

Задано аналогову систему передачі неперервних сигналів із параметрами:

- передавальний первинний сигнал - радіомовний вищого класу;
- вид модуляції - ЧМ з індексом модуляції $m_{ЧМ}=5$;
- канал електрозв'язку описується гауссовою моделлю з постійними параметрами;
- середня потужність сигналу на вході демодулятора $P_S=0,02$ Вт;

- шум на вході демодулятора білий зі спектральною густиною $N_0 = 10^{-11}$ Вт/Гц;

Зобразити структурну схему системи передачі, що відображає описаний вище процес передачі та пояснити призначення окремих блоків.

Розрахувати:

1. Мінімально-необхідну смугу частот каналу, приймаючи смугу каналу рівній ширині спектра модульованого сигналу;
2. Відношення потужностей сигналу і шуму на вході демодулятора (виході каналу),
3. Чи забезпечується при цьому робота вище порога?;
4. Виграш демодулятора;
5. Відношення сигнал/шум на виході демодулятора та подати його в децибелах;
6. Чи буде при такому відношенні сигнал/шум забезпечене якісне відновлення первинного сигналу?

Як підвищити відношення сигнал/шум на виході демодулятора?

Задача 11

Задано аналогову систему передачі неперервних сигналів із параметрами:

- передавальний первинний сигнал - факсимільний напівтоновий;
- вид модуляції - БМ ;
- канал електрозв'язку описується гауссовою моделлю з постійними параметрами;
- середня потужність сигналу на вході демодулятора $P_S = 4 \cdot 10^{-2}$ Вт;
- шум на вході демодулятора білий зі спектральною щільністю $N_0 = 10^{-9}$ Вт/Гц;

Зобразити:

1. Структурну схему системи передачі, що відображає описаний вище процес передачі та пояснити призначення окремих блоків.
2. Спектр первинного та модульованого сигналів при частоті несучої $N_0 = 4 \cdot 10^5$ Гц .

Розрахувати:

1. Мінімально-необхідну смугу частот каналу, приймаючи смугу каналу, яка дорівнює ширині спектра модульованого сигналу;
2. Потужність шуму на вході демодулятора (виході каналу);
3. Відношення сигнал/шум на вході демодулятора(виході каналу);
4. Пропускнну спроможність каналу;
5. Відношення сигнал/шум на виході демодулятора та подати його в децибелах;
6. Чи буде при такому відношенні сигнал/шум забезпечене якісне відновлення первинного сигналу?
- 7.

Що можна зробити, щоб зменшити смугу частот каналу?

Задача 12

Задано аналогову систему передачі неперервних сигналів із параметрами:

- передавальний первинний сигнал - розмовний;
- вид модуляції - АМ із коефіцієнтом модуляції $m_{AM} = 0.4$;
- канал електрозв'язку описується гауссовою моделлю з постійними параметрами;
- середня потужність сигналу на вході демодулятора $P_S = 8 \cdot 10^{-5}$ Вт;
- шум на вході демодулятора білий зі спектральною густиною $N_0 = 10^{-12}$ Вт/Гц;

Зобразити :

1. Структурну схему системи передачі, що відображає описаний вище процес передачі та пояснити призначення окремих блоків.
2. Часові діаграми первинного та модульованого сигналів.

Розрахувати:

1. Мінімально-необхідну смугу частот каналу, приймаючи смугу каналу рівній ширині спектра модульованого сигналу;
2. Потужність шуму на вході демодулятора (виході каналу);
3. Пропускню здатність каналу;
4. Виграш демодулятора;
5. Відношення сигнал/шум на виході демодулятора та подати його в децибелах;
6. Чи буде при такому відношенні сигнал/шум забезпечене якісне відновлення первинного сигналу?

Запропонувати методи збільшення пропускної спроможності каналу.

Задача 13

Задано аналогову систему передачі неперервних сигналів із параметрами:

- передавальний первинний сигнал – радіомовний вищого класу;
- вид модуляції – ЧМ із девіацією частоти 45 кГц;
- канал електрозв'язку описується гауссовською моделлю з постійними параметрами;
- середня потужність сигналу на вході демодулятора $P_S=3 \cdot 10^{-11}$ Вт/Гц;

Зобразити структурну схему системи передачі, що відображає описаний вище процес передачі та пояснити призначення окремих блоків.

Розрахувати:

1. Індекс частотної модуляції ЧМ;
2. Мінімально-необхідну смугу частот каналу, приймаючи смугу каналу рівній ширині спектра модульованого сигналу;
3. Відношення сигнал/шум на вході демодулятора (виході каналу);
4. Чи забезпечується при цьому робота вище порога?;
5. Виграш демодулятора;
6. Відношення сигнал/шум на виході демодулятора та подати його в децибелах;
7. Чи буде при такому відношенні сигнал/шум забезпечене якісне відновлення первинного сигналу?

До зміни яких показників системи передачі призведе збільшення девіації частоти?

Задача 14

Задано систему передачі дискретних повідомлень.

Параметри джерела повідомлень:

- обсяг алфавіту джерела $M_a=32$ знаки;
- знаки в повідомленні, що видаються джерелом, незалежні, коефіцієнт надмірності джерела $\chi=0,4$.

Повідомлення джерела кодується простим двійковим кодом. Швидкість модуляції на виході кодера 1200 Бод. Для передачі цифрового сигналу неперервним гауссовим каналом зв'язку з постійними параметрами використовується модуляція ЧМ-2.

Демодулятор некогерентний. На його вході: середня потужність сигналу $P_S=0,09$ Вт; шум білий зі спектральною густиною потужності $N_0=2 \cdot 10^{-6}$ Вт/Гц.

Зобразити структурну схему системи передачі, що відображає описаний вище процес передачі та пояснити призначення окремих блоків.

Розрахувати:

1. Довжину простого коду;
2. Тривалість двійкового символу на виході кодера простого коду;

3. Час, що витрачається на передачу одного знаку повідомлення;
4. Ентропію джерела повідомлень;
5. Продуктивність джерела повідомлень;
6. Мінімально можливу ширину спектра модульованого сигналу;
7. Відношення енергії сигналу до спектральної щільності потужності шуму на вході демодулятора;
8. Імовірність помилки двійкового символу на виході демодулятора.

Як зміниться завадостійкість при переході до когерентного прийому?

Задача 15

Задано систему передачі дискретних повідомлень.

Джерело видає повідомлення двійковими символами; символи незалежні, коефіцієнт надмірності джерела $\chi = 0,5$; швидкість модуляції 4800 Бод.

Для передачі цифрового сигналу неперервним гауссовим каналом зв'язку з постійними параметрами використовується модуляція ЧМ-2.

Демодулятор когерентний. На його вході: середня потужність сигналу $P_S = 0,08$ Вт; шум білий зі спектральною густиною потужності $N_0 = 2 \cdot 10^{-6}$ Вт/Гц.

Зобразити структурну схему системи передачі, що відображає описаний вище процес передачі та пояснити призначення окремих блоків.

Розрахувати:

1. Тривалість двійкового символу на виході кодера простого коду;
2. Ентропію джерела повідомлень;
3. Продуктивність джерела повідомлень;
4. Мінімально можливу ширину спектра модульованого сигналу;
5. Відношення середніх потужностей сигналу і шуму на виході каналу зв'язку, приймаючи смугу каналу рівною знайдений ширині спектра сигналу;
6. Пропускную здатність неперервного каналу зв'язку, що використовується для передачі модульованого сигналу;
7. Відношення енергії сигналу до спектральної щільності потужності шуму на вході демодулятора;
8. Імовірність помилки двійкового символу на виході демодулятора.

Як зміниться завадостійкість при переході до модуляції ФМ-2 і чому?

Задача 16

Задано систему передачі дискретних повідомлень.

Джерело видає повідомлення двійковими символами, швидкість модуляції 1200 Бод.

Потім послідовність двійкових символів кодується коригуючим кодом. Параметри коригуючого коду:

- число інформаційних символів $k = 57$;
- довжина коду $n = 63$;
- кодова відстань $d_{\min} = 3$.

Для передачі цифрового сигналу, закодованого коригуючим кодом, неперервним гауссовим каналом зв'язку з постійними параметрами використовується модуляція ВФМ-2.

Демодулятор некогерентний. На його вході: середня потужність сигналу $P_S = 0,05$ Вт; шум білий зі спектральною густиною потужності $N_0 = 2 \cdot 10^{-6}$ Вт/Гц.

Зобразити структурну схему системи передачі, що відображає описаний вище процес передачі та пояснити призначення окремих блоків.

Розрахувати:

1. Тривалість двійкового символу на вході кодера коригуючого коду (на виході джерела);
2. Тривалість двійкового символу на виході кодера коригуючого коду;
3. Мінімально можливу ширину спектра модульованого сигналу;

4. Відношення енергії сигналу до спектральної щільності потужності шуму на вході демодулятора;
5. Імовірність помилки двійкового символу на виході демодулятора;
6. Кратність помилок, що виправляються декодером заданого коду;

Як зміниться завадостійкість демодулятора при переході до когерентного прийому?

Задача 17

Задано аналогову систему передачі неперервних сигналів із параметрами:

- передавальний первинний сигнал - розмовний;
- вид модуляції - АМ із коефіцієнтом модуляції $m_{AM} = 0.4$;
- канал електрозв'язку описується гауссовою моделлю з постійними параметрами;
- середня потужність сигналу на вході демодулятора $P_S = 8 \cdot 10^{-5}$ Вт;
- шум на вході демодулятора білий зі спектральною густиною $N_0 = 10^{-12}$ Вт/Гц;

Зобразити :

1. Структурну схему системи передачі, що відображає описаний вище процес передачі та пояснити призначення окремих блоків.
2. Часові діаграми первинного та модульованого сигналів.

Розрахувати:

1. Мінімально-необхідну смугу частот каналу, приймаючи смугу каналу рівній ширині спектра модульованого сигналу;
2. Потужність шуму на вході демодулятора (виході каналу);
3. Пропускнну здатність каналу;
4. Виграш демодулятора;
5. Відношення сигнал/шум на виході демодулятора та подати його в децибелах;
6. Чи буде при такому відношенні сигнал/шум забезпечене якісне відновлення первинного сигналу?

Запропонувати методи збільшення пропускної спроможності каналу.

Задача 18

Задано аналогову систему передачі неперервних сигналів із параметрами:

- передавальний первинний сигнал - радіомовний вищого класу;
- вид модуляції - ФМ із індексом модуляції $m_{FM} = 4$;
- канал електрозв'язку описується гауссовою моделлю з постійними параметрами;
- середня потужність сигналу на вході демодулятора $P_S = 0,2$ Вт;
- шум на вході демодулятора білий зі спектральною щільністю $N_0 = 8 \cdot 10^{-11}$ Вт/Гц;

Зобразити структурну схему системи передачі, що відображає описаний вище процес передачі та пояснити призначення окремих блоків.

Розрахувати:

1. Мінімально-необхідну смугу частот каналу, приймаючи смугу каналу рівній ширині спектра модульованого сигналу;
2. Відношення потужностей сигналу і шуму на вході демодулятора (виході каналу), чи забезпечується при цьому робота вище порога?;
3. Виграш демодулятора;
4. Пропускнну спроможність каналу;
5. Відношення сигнал/шум на виході демодулятора та подати його в децибелах;
6. Чи буде при такому відношенні сигнал/шум забезпечене якісне відновлення первинного сигналу?

Запропонувати методи збільшення виграшу демодулятора для заданого виду модуляції.

ДОДАТОК А

РОЗРАХУНОК ТА ОПТИМІЗАЦІЯ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМИ ЕЛЕКТРОЗВ'ЯЗКУ

В додатку А розглянуто завдання і наведено узагальнений приклад розрахунку та оптимізації характеристик системи електрозв'язку. При розрахунку використано класичні методи, які забезпечують характеристики систем за швидкістю передавання і достовірністю приймання при наявності завод з математичної точки зору.

ЗАВДАННЯ

1. Структурна схема цифрової системи передачі (ЦСП)

Зобразити структурну схему ЦСП неперервних повідомлень, яка містить джерело та одержувач повідомлень, АЦП і ЦАП, кодер і декодер заводостійкого коду, модулятор і демодулятор, лінію зв'язку та джерело завод. Зобразити часові діаграми в усіх точках схеми, задавши вільну форму неперервного вихідного сигналу та числом рівнів квантування. Пояснити, з яких міркувань вибираються інтервал дискретизації за часом і крок квантування за рівнем. До часових діаграм дати необхідні пояснення, виходячи з призначення кожного блоку.

2. Розрахунок характеристик аналого-цифрового перетворення та інформаційних характеристик повідомлень на виході АЦП

2.1. По заданій верхній граничній частоті спектру повідомлення, пікфактору сигналу P та допустимому відношенні сигнал/завада квантування $p_{kb} = P_b / P_\varepsilon$ визначити:

1) мінімально допустиме число рівнів квантування L (L вибирають рівним цілого ступеня числа 2);
2) значність кодових комбінацій та тривалість символу на виході АЦП, вважаючи, що тривалість кодової комбінації дорівнює інтервалу дискретизації.

2.2) Знайти ентропію незалежних дискретних повідомлень на виході АЦП та продуктивність джерела повідомлень, якщо імовірність передачі символу 1: $P(1)=0$, де K і P – передостання та остання цифри номеру студентського квитка.

3. Розрахунок характеристик заводостійкості прийому сигналів у дискретному каналі

3.1. Вважаючи канал зв'язку каналом із постійними параметрами, побудувати залежність імовірності помилки двійкового символу на виході оптимального демодулятора від відношення енергії сигналу E до спектральної щільності потужності завади N_0 на виході демодулятора, $h^2 = E / N_0$, для чого розрахувати 5.7 значень $P_{зав}$, задавши такі значення, при яких Рош зміниться від 0.5 до 10^{-6} : $P_{зав} = f(h)$

Формула для розрахунку імовірності помилки обрана з урахуванням методу модуляції та способу прийому.

Розрахувати імовірність помилки символу на виході демодулятора для заданих виду та способу прийому, вважаючи, що в каналі зв'язку немає заводостійкого кодування.

Амплітуда модульованого сигналу a (потужність сигналу $P_c = \frac{a^2}{2}$) та спектральна щільність потужності завади N_0 на виході демодулятора задані.

Зробіть висновок про необхідність застосування заводостійкого коду.

4. Вибір коригуючого коду та розрахунок характеристик завадостійкого декодування

4.1. Сигнал з виходу АЦП надходить на вхід кодера завадостійкого коду. В дискретному каналі зв'язку використовується завадостійке кодування систематичним кодом (10.6) або (11.7) з мінімальною кодовою відстанню $d_0 = 3$. Для трьох рівнів квантування, заданих у таблиці, записати кодові комбінації на виході завадостійкого кодера. Виробляючі матриці кодів:

$$G_{(10,6)} = \begin{pmatrix} 1000001100 \\ 0100000110 \\ 0010000011 \\ 0001001010 \\ 0000100101 \\ 0000011001 \end{pmatrix} \quad G_{(11,7)} = \begin{pmatrix} 10000001100 \\ 01000000110 \\ 00100000011 \\ 00010001010 \\ 00001000101 \\ 00000101001 \\ 00000011110 \end{pmatrix}$$

Визначити відстані між комбінаціями на вході кодера та між комбінаціями на його виході. Визначте тривалість символу на виході кодера завадостійкого коду.

Зробіть висновок про коригуючі можливості коду.

4.2. Розрахуйте імовірності однократних та двократних помилок на вході декодера. Зробіть висновок про те, чи поліпшиться завадостійкість прийому при виправленні декодером однократних помилок.

Описати принцип виправлення однократної помилки для випадку передачі комбінації.

5. Розрахунок пропускної спроможності каналу зв'язку

5.1 Визначити пропускну спроможність дискретного каналу: вхід модулятора – вихід демодулятора C_g . Значення імовірності помилки символу розраховано раніше в пункті 3. Порівняти пропускну спроможність дискретного каналу з продуктивністю джерела цифрового повідомлення, зробити висновки на підставі теореми Шеннона.

5.2. Визначити пропускну спроможність неперервного каналу, необхідну для передачі цифрових сигналів, при цьому потужність сигналу розраховувалась в п. 3., спектральна потужність завади N_0 береться з вихідних даних, а смуга попускання F_k розраховується, виходячи з спектру сигналу.

$$F_{kAM} = F_{kOOF} = \frac{2}{\tau_0}; \quad F_{kЧЧ} = \frac{5}{\tau_0}$$

τ_0 - тривалість символу на вході модулятора

6. Розробка структурної схеми демодулятора.

Зобразити структурну схему демодулятора для заданого виду модуляції та способу прийому, записати алгоритм прийому, описати призначення та принцип роботи його вузлів.

7. Розрахунок ефективності системи передачі

Розрахувати коефіцієнти η, β, γ , які визначають ефективність системи зв'язку, вважаючи, що втрати інформації в каналі зневажливо малі і швидкість передачі дорівнює продуктивності джерела повідомлень.

8. Висновок

Дати оцінку розрахованої системи зв'язку в цілому:

- з якою метою була застосована ЦСП;
- які блоки виконані оптимальними та за якими критеріями;
- які міри прийняті для поліпшення якості передачі;
- чи є запас в розрахованій ЦСП по швидкості передачі, смузі частот та енергетиці.

ПРИКЛАД РОЗРАХУНКУ

1. Структурна схема цифрової системи передачі (ЦСП)

Структурна схема цифрової системи передачі (ЦСП) представлена на рис.1, а часові діаграми в точках, вказаних на схемі представлені на рис.2. Джерело повідомлень видає на виході неперервний сигнал (т. 1). В складі ЦСП передбачені прилади для перетворення неперервного повідомлення в цифрову форму – аналого-цифровий перетворювач (АЦП) на передаючій стороні та прилад перетворення цифрового сигналу в неперервний – цифро-аналоговий перетворювач (ЦАП) на стороні прийому.

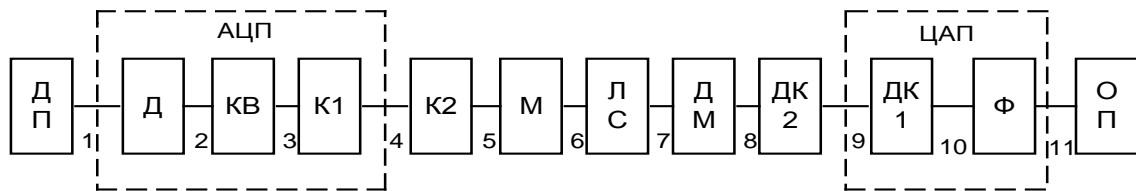


Рис. 1. Структурна схема цифрової системи передачі

ДП – джерело неперервних повідомлень,

Д1 – дискретизатори – здійснюють дискретизацію неперервного сигналу за часом.

КВ – квантувач – здійснює квантування за рівнем отриманого дискретизованого сигналу. Крок квантування обирають таким, щоб різниця між сусідніми рівнями квантова них відліків перевищувала максимальне значення завади більш, ніж в двічі. Вибір такого кроку квантування дозволяє відрізнити сусідні за величиною значення передаваного сигналу навіть за самих несприятливих умов положення завади.

К1, К2 – кодери – здійснюють кодування квантованих значень передаваного повідомлення двійковим кодом.

М – модулятор – здійснює процес модуляції, тобто змінює параметри несучого коливання за законом закодованого повідомлення. Модуляція дозволяє перенести спектр цифрового сигналу в область високих частот, за умови чого передача сигналу по лініях зв'язку буде більш ефективною. Для цього можуть використовуватись наступні методи дискретної модуляції: амплітудна модуляція (АМ), частотна модуляція (ЧМ), фазова модуляція (ФМ).

Л – лінія зв'язку – це середовище, яке використовується для передачі сигналів від передавача до приймача (симетричний, коаксіальний або волоконно-оптичний кабель – в системах електровз'язку та вільний простір в радіозв'язку).

Дм – демодулятор – перетворює аналоговий сигнал на прийомній стороні в цифровий.

Дк – декодер – здійснює перетворення кодових комбінацій в квантовану послідовність відліків.

Ф – фільтр – відновлює неперервне повідомлення по квантованим значенням. На виході фільтра отримуємо вихідний передаваний сигнал.

ОП – отримувач повідомлень

В склад АЦП входить дискретизатор, квантувач і кодер 1. Перетворення аналого-цифра складається з трьох операцій, спочатку неперервне повідомлення (т. 1) піддається дискретуванню за часом. Це здійснюється за допомогою дискретизатора. Інтервал дискретування вибирається на

основі теореми Котельникова, в якій говориться, що сигнал з фінітним спектром можна точно відновити по його відлікам, взятим через інтервали часу $\Delta t \leq 1/2F_B$, де F_B - верхня гранична частота спектра сигналу. На практиці частоту дискретизації вибирають рівною $f_D = 2.3 \div 2.5F_B$. Отримана послідовність миттєвих значень (т.2) квантується за рівнем у квантувачі. Кількість рівнів квантування M визначається виходячи з помилки квантування, пікфактора сигналу та відношення сигнал/завада. А число розрядів в кодовому слові буде дорівнювати $m = \log 2M$. Отримана послідовність квантованих значень переданого повідомлення (т. 3) представляється завдяки кодуванню у вигляді послідовності m -ічних кодових комбінацій. Частіше за все кодування зводиться до запису номера рівня в двійковій системі обчислення. Таке перетворення називається імпульсно-ковою модуляцією (ІКМ) і виконується в кодері 1 (К1) (т. 4). Для забезпечення підвищення завадостійкості послідовність імпульсів з виходу (К2) К1 (т. 4) подається на (К2). Задача К2 складається у введенні надлишковості в повідомленні у відповідності з принципом завадостійкого кодування. Кількість можливих кодових комбінацій стає більше, ніж повідомлень. Частина комбінацій називається дозволеними (ті, що сформовані К2), а частина - заборонені (ті, що з'явилися в результаті помилки).

Завдяки цьому стає можливим виявлення та виправлення помилок на прийомі. На рис. 2 представлений код з перевіркою на парність, який дозволяє виявляти однократні помилки. З виходу К2 (т. 5) послідовність імпульсів подається на модулятор. Загальний принцип модуляції полягає в зміні одного або декількох параметрів несучого колювання згідно з переданим повідомленням. На рис.2 представлена амплітудна модуляція. З виходу модулятора (т. 6) сигнал відправляється в лінію зв'язку. Лінією зв'язку називається середовище, яке використовується для передачі сигналів від передавача до приймача (симетричний, коаксіальний або волоконно-

оптичний кабель в системах електрозв'язку, вільне середовище в системах радіозв'язку).

На прийомі отриманий сигнал (т. 7) потрапляє на демодулятор, на виході якого (т. 8) отримуємо послідовність імпульсів, що передаються на вхід декодера 2 (Д2). Задача Д2 полягає у визначенні дозволена чи заборонена комбінація потрапила на його вхід, тобто в виявленні помилки та виправленні якщо використовувався код це дозволяє. На рис. 2 представлений код с перевіркою на парність, що дозволяє виявити однократні помилки, але не виправляти їх. Отриманий сигнал про помилку може визвати запит по зворотному каналу зв'язку про повторну передачу невірної прийнятого повідомлення. З виходу Д2 (т. 9) імпульсна послідовність передається на вхід ЦАП, призначення якого полягає у відновленні неперервного повідомлення

по прийнятій послідовності кодових комбінацій. В склад ЦАП входять Д1, призначений для перетворення кодових комбінацій в квантова ну послідовність відліків (т. 10), та згладжуючий фільтр, який відновлює неперервне повідомлення по квантова ним значенням (т. 11). Отримане неперервне повідомлення потім передається отримувачу повідомлення.



Рис.2. Часова діаграма функціонування системи електрозв'язку

2. Розрахунок характеристик аналого-цифрового перетворення та інформаційних характеристик повідомлень на виході АЦП

2.1. Розрахунок мінімально допустимої кількості рівнів квантування L .

За заданою верхньою частотою спектру повідомлення, пікфактора сигналу Π і допустимому відношенню сигнал/шум квантування знаходяться мінімально допустиме число рівнів квантування, значність кодівих комбінацій і тривалість символу на виході АЦП.

Розглянемо приклад. Вихідні дані:

F_c – верхня гранична частота спектру повідомлення, [кГц];

Π – пікфактор сигналу;

$\rho_{kb} = \frac{P_c}{P_{ш}} - \text{допустиме відношення сигнал/шум квантування, [дБ].}$

Частота дискретизації обирається на основі теореми Котельникова, в якій твердиться, що будь-яку функцію з фінітним (обмеженим) спектром можна представити у вигляді відліків рівно відстоячих один від одного на відстань:

$$\Delta t \leq 1/2 \cdot F_B, [\text{кГц}] \quad (1)$$

або ж відліки представити с частотою:

$$f_D = 2F_B, [\text{кГц}], \quad (2)$$

де F_B - верхня частота спектра сигналу.

На практиці величину частоти дискретизації обирають за наступною нерівністю:

$$f_D = 2.3 \div 2.5 F_B, [\text{кГц}] \quad (3)$$

2.2. Визначення значності кодівих комбінацій та тривалості символу на виході АЦП

Визначимо мінімально допустиму кількість рівнів квантування L , виходячи з допустимого відхилення сигнал/шум.

$$\rho = \frac{3(L-1)^2}{\Pi^2} \quad (4)$$

Через вираз (4) знайдемо потрібну нам величину L , отримуємо:

$$L = \sqrt{\frac{\rho_{kb} \cdot \Pi^2}{3}} + 1 \quad (5)$$

Величину L обирають рівною цілого степеня числа 2, тобто: $L = 2^n$. Так наприклад, якщо отриманий результат дорівнює 59, то L в цьому випадку буде дорівнювати: $L = 2^n = 64$ рівнів квантування.

Тривалість символу на виході АЦП:

$$\tau_0 = \frac{1}{f_0 \cdot m}, [\text{мкс}] \quad (6)$$

Кількість розрядів в кодовому слові (значність) визначається за формулою:

$$m = \log_2 L, [\text{од}] \quad (7)$$

2.3. Визначення ентропії незалежних дискретних повідомлень на виході АЦП та продуктивність джерела повідомлень.

Оскільки за умовою задані незалежні дискретні повідомлення на виході АЦП, то ентропію можна визначити використовуючи теорему Шеннона для незалежних повідомлень:

$$H(A) = -\sum_{i=1}^3 p(a_i) \log_2 p(a_i), [\text{біт}] \quad (8)$$

Продуктивність джерела повідомлень дорівнює ентропії джерела за одиницю часу:

$$\Pi = \frac{H(A)}{\tau_0}, [\text{Кбіт/с}] \quad (9)$$

3. Розрахунок характеристик завадостійкості прийому сигналів в дискретному каналі.

Розрахунок імовірності помилки символу на виході демодулятора для заданих виду модуляції та способу прийому, за умови, що в каналі зв'язку немає завадостійкого кодування.

Вихідні дані:

a - амплітуда модульованого сигналу, [В];

N_0 - спектральна щільність потужності завади на виході, [В²/Гц];

Вважаючи сигнал синусоїдальним, можемо розрахувати потужність сигналу:

$$P_c = a^2 / 2, [\text{мВт}] \quad (10)$$

Енергію сигналу можемо знайти як:

$$E = P_c \cdot \tau_0, [\text{Дж}] \quad (11)$$

де τ_0 - величина розрахована в формулі (6).

З формул (10), (11), враховуючи, що $h^2 = E / N_0$, можна записати:

$$h = \sqrt{\frac{a^2 \cdot \tau_0}{2 \cdot N_0}} \quad (12)$$

Імовірність помилки символу на виході демодулятор:

$$P = 0.5 \cdot [1 - \Phi(kh)] \quad (13)$$

де: $\Phi(h)$ - функція Крампфа.

Коефіцієнт k для різних видів модуляції приймає різні значення:

для АМ – $1/\sqrt{2}$; для ЧМ – 1; для ФМ – $\sqrt{2}$; для ОФМ – $\Phi^2(h)$.

В ЦСП при використанні регенерації адитивна завада з виходу ретранслятора не потрапляє на його вхід. Однак вона викликає помилки при демодуляції. Помилково прийняті в одному регенераторі символи в такому ж вигляді передаються і на наступні регенератори, так що відбувається накопичення помилок. Підвищити вірність можна застосовуючи завадостійкий код. Таким чином, застосування завадостійкого коду дозволить підвищити дальність зв'язку.

Вважаючи канал зв'язку каналом з постійними параметрами, будуються залежності імовірності помилки двійкового символу на виході оптимального демодулятора від відношення енергії сигналу E до спектральної щільності потужності завади N_0 на виході демодулятора, $h_2 = E/N_0$, для чого розраховуємо 6..9 значень $P_{ном}$, задаючись такими значеннями h , при яких $P_{ном}$ зміниться від 0.5 до 10^{-7} .

Отримані результати записуються в таблицю виду:

h		
$P_{ном}$		

За даними з таблиці будемо графік залежності $P_{ном} = f(h)$

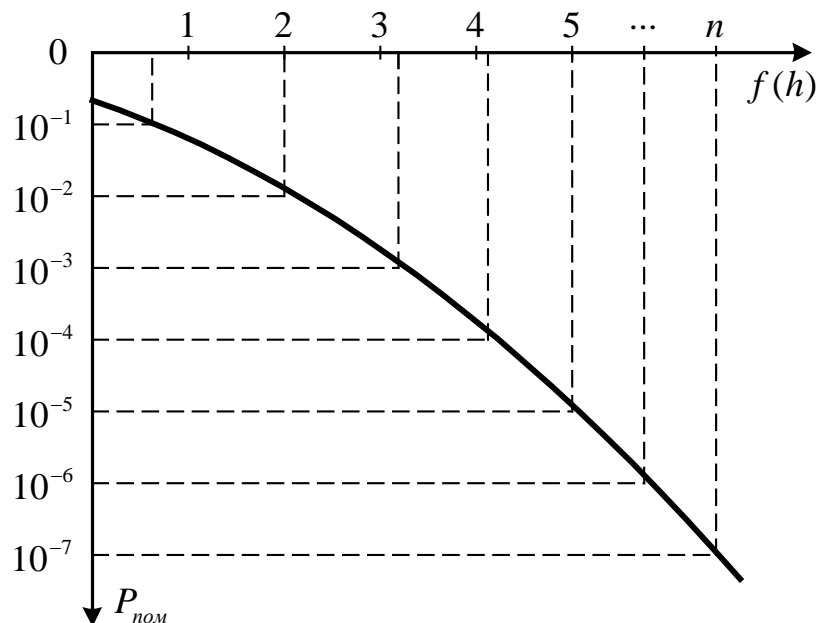


Рис. 3. Графік залежності $P_{ном} = f(h)$.

На основі всього вище викладеного можемо зробити висновок, що для зменшення імовірності помилки та підвищення завадостійкості необхідно застосувати надлишкове кодування, яке дає можливість виправити помилки в повідомленні.

4. Вибір коригуючого коду та розрахунок характеристик завадостійкого кодування.

Сигнал з виходу АЦП потрапляє на вхід кодера завадостійкого коду. В дискретному каналі зв'язку використовується завадостійке кодування систематичним кодом (10,6) з мінімальною кодовою відстанню. Для трьох рівнів квантування, що задані, запишемо кодові комбінації на вході та виході завадостійкого кодера.

Наприклад: кодуємо рівні:

21	010101;
37	100101;
56	111000;

Виробляюча матриця:

$$G_{(10,6)} = \begin{pmatrix} 1000001100 \\ 0100000110 \\ 0010000011 \\ 0001001010 \\ 0000100101 \\ 0000011001 \end{pmatrix}$$

Матриця перевірки:

$$R = \begin{pmatrix} 1001011000 \\ 1100100100 \\ 0111000010 \\ 0010110001 \end{pmatrix}$$

Знаходимо перевіряючі розряди:

$$\begin{aligned} r_{21,1} &= 10 \oplus 01 \oplus 00 \oplus 11 \oplus 00 \oplus 11 = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0 \\ r_{21,2} &= 10 \oplus 11 \oplus 00 \oplus 01 \oplus 10 \oplus 01 = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 0 \\ r_{21,3} &= 00 \oplus 11 \oplus 10 \oplus 11 \oplus 00 \oplus 01 = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 = 0 \\ r_{21,4} &= 00 \oplus 01 \oplus 10 \oplus 01 \oplus 10 \oplus 11 = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{37,1} &= 11 \oplus 00 \oplus 00 \oplus 11 \oplus 00 \oplus 11 = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 1 \\ r_{37,2} &= 11 \oplus 10 \oplus 00 \oplus 01 \oplus 10 \oplus 01 = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 1 \\ r_{37,3} &= 01 \oplus 10 \oplus 10 \oplus 11 \oplus 00 \oplus 01 = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 = 1 \\ r_{37,4} &= 01 \oplus 00 \oplus 10 \oplus 01 \oplus 10 \oplus 11 = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{56,1} &= 11 \oplus 01 \oplus 01 \oplus 10 \oplus 00 \oplus 10 = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 1 \\ r_{56,2} &= 11 \oplus 11 \oplus 01 \oplus 00 \oplus 10 \oplus 00 = 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 0 \\ r_{56,3} &= 01 \oplus 11 \oplus 11 \oplus 10 \oplus 00 \oplus 00 = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 0 \\ r_{56,4} &= 01 \oplus 01 \oplus 11 \oplus 00 \oplus 10 \oplus 10 = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 1 \end{aligned}$$

На виході кодера отримаємо кодові комбінації:

$$\begin{array}{lll} 21 & 010101 & 0001; \\ 37 & 100101 & 1111; \\ 56 & 111000 & 1001; \end{array}$$

Визначимо кодову відстань між комбінаціями на вході кодера:

$$\begin{array}{lll} 21 & 010101 & \\ 37 & 100101 & \\ & 110000 & d=2 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 37 & 100101 & \\ 56 & 111000 & \\ & 011101 & d=4 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 56 & 111000 & \\ 21 & 010101 & \\ & 101101 & d=4 \end{array}$$

Визначимо кодову відстань між комбінаціями на виході кодера:

21	010101	0001	
37	100101	1111	
	110000	1110	d=5
37	100101	1111	
56	111000	1001	
	011101	0110	d=6
56	111000	1001	
21	010101	0001	
	101101	1000	d=5

Тривалість символу на виході кодера завадостійкого коду розрахована в п. 2.2.

Завадостійкий код (10,6) з мінімальною кодовою відстанню $d_0=2$ забезпечує виправлення однократних помилок.

Розрахуємо імовірності однократних і двократних помилок на вході декодера.

Імовірність помилки кратності g на вході декодера розраховується за формулою:

$$P(q) = C_n^q \cdot p^q \cdot (1-p)^{n-q} \quad (13)$$

де: $n = 10$, q - кратність помилки.

Принцип завадостійкого кодування полягає у введенні надлишковості. При цьому кількість можливих комбінацій стає більшою, ніж кількість повідомлень. Частина комбінацій називається допустимими (сформовані кодером), а частина – забороненими (з'явилися в результаті помилки). Завдяки цьому стає можливим виявлення та виправлення помилок на прийомі. Суть процесу полягає в тому, що в пам'ять кодуємого простору записуються допустимі кодові комбінації вибраного коду і правило, за яким з кожним із M повідомлень джерела порівнюється одна з таких комбінацій. Дане правило застосовується і в декодері. Отримавши від джерела відповідне повідомлення, кодер шукає відповідну йому комбінацію та посилає її в канал. В свою чергу декодер, прийнявши комбінацію, спотворену завадами, звіряє її стан зі всіма M комбінаціями списку і відшукує ту з них, яка ближче інших до прийнятої.

5. Розрахунок пропускної спроможності каналу зв'язку

5.1. Визначення пропускної спроможності дискретного каналу

Визначення пропускної спроможності дискретного каналу: вхід – вихід демодулятора. Для двійкового симетричного каналу зв'язку пропускна спроможність за одиницю часу має вигляд:

$$C_0 = V \cdot [1 + p \cdot \log_2 p + (1-p) \cdot \log_2 (1-p)], \text{ [кбіт / с]} \quad (14)$$

де: V – швидкість передачі.

$$V = 1/\tau_0 \quad (15)$$

В основній теоремі кодування - теоремі Шеннона – твердиться: якщо продуктивність джерела повідомлень $H(A)$ менша за пропускну спроможність каналу C_0 , то існує такий спосіб кодування та декодування, при якому імовірність помилкового декодування і надійність можуть бути скільки завгодно малими. Якщо ж продуктивність джерела повідомлень $H(A)$ більша за пропускну спроможність каналу C_0 , то таких способів не існує. Отже, для вірної передачі

повідомлення, необхідно, щоб швидкість передачі інформації була не менша за продуктивність джерела.

За отриманими результатами продуктивності Π (п.2.3.) і пропускної спроможності C_0 треба зробити висновок чи є можливим створення системи передачі, яка б забезпечувала задану вірність передачі.

5.2. Визначення пропускної спроможності неперервного каналу

Визначимо пропускну спроможність неперервного каналу, необхідну для передачі цифрових сигналів. Згідно теореми Шеннона пропускну спроможність неперервного каналу зв'язку дорівнює:

$$C_n = \Delta F \cdot \log_2 \left(1 + \frac{P_c}{P_{ш}} \right), \text{ [кбіт/с]} \quad (16)$$

Вважаючи сигнал синусоїдальним, можемо розрахувати потужність сигналу:

$$P_c = a^2 / 2, \text{ [мВт]} \quad (17)$$

Потужність шуму:

$$P_{ш} = N_0 \cdot \Delta F, \text{ [мкВт]} \quad (18)$$

Пропускна спроможність дискретного каналу залежить тільки від швидкості передачі вікових символів та від імовірності помилки в них. Пропускна ж спроможність неперервного каналу залежить від ширину смуги пропускання і від відношення сигнал/шум.

6. Розробка структурної схеми демодулятора

Узагальнена схема оптимального прийому має вигляд:

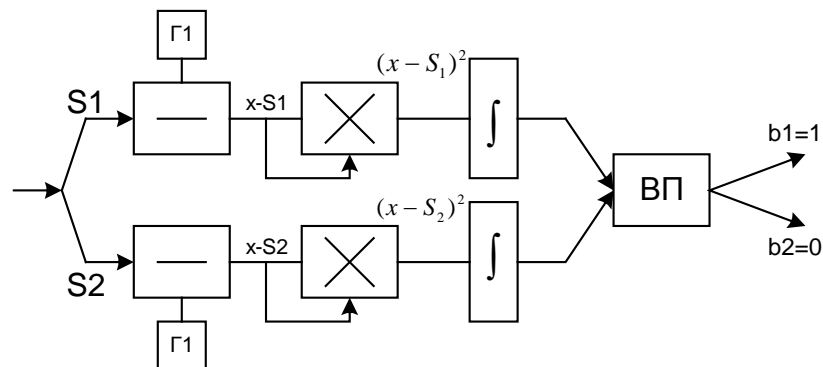


Рис. 4. Узагальнена схема оптимального прийому

— - вирівнюючі пристрої;

⊗ - множник;

Г1, Г2 – генератори опорних коливачь сигналів;

∫ - інтегратор;

ВП – вирішувачий пристрій.

Для запису алгоритму оптимального прийому виберемо критерій Котельникова. Для однакових априорних імовірностей сигналів:

$p(S_1) = p(S_2) = \dots = p(S_n) = \frac{1}{n}$, критерій Котельникова має вигляд:

$\int_0^T [x(t) - S_i(t)]^2 dt \ll \int_0^T [x(t)S_j(t)]^2 dt$, тобто: оптимальний приймач відтворює повідомлення з найменшим середньоквадратичним відхиленням.

Для двійкової системи: $\int_0^T [x(t) - S_1(t)]^2 dt \ll \int_0^T [x(t)S_2(t)]^2 dt$ для АМ: $S_1(t) = a \cdot \cos \omega_0 t$; $S_2(t) = 0$.

Тому, критерій Котельникова приймає вигляд: $\int_0^T x(t) - S_1(t) > \frac{E}{2}$

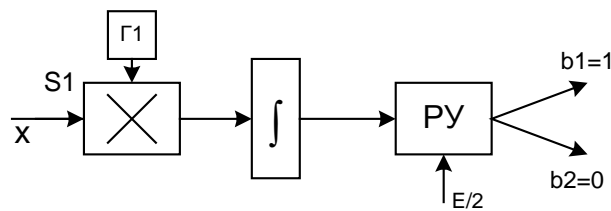


Рис. 5. Оптимальний приймач сигналів АМ:

Демодулятор являє собою когерентний приймач, оптимальний за критерієм максимальної правдоподібності. Демодулятор обчислює функцію взаємної кореляції прийнятого сигналу та варіантів переданого. Рішення приймається на користь того варіанту, де ця функція буде максимальною.

7. Розрахунок ефективності системи передачі.

Розрахувати коефіцієнти β, γ, η , що визначають ефективність системи зв'язку, вважаючи, що втрати інформації в каналі зневажливо малі і швидкість передачі дорівнює продуктивності джерела повідомлень.

Коефіцієнти використання каналу по смузі частот β (частотна ефективність): $\beta = \frac{V}{\rho_0}$, де: V

– приймають рівним $1/\tau_0$, ρ_0 - відношення потужності сигналу $P_c = \frac{a^2}{2}$ до спектральної щільності потужності шуму N_0

$$\beta = \frac{\Pi \cdot N_0}{P_c} \quad (18)$$

Коефіцієнт використання каналу по потужності γ (енергетична ефективність): $\gamma = \frac{V}{\Delta F}$, де: ΔF - смуга частот каналу зв'язку.

Коефіцієнт використання каналу за пропускну спроможністю η (інформаційна ефективність): $\eta = \frac{V}{C_0}$, де: C_0 - пропускна спроможність неперервного каналу зв'язку.

8. Висновок

Основною технічною перевагою цифрових систем передачі перед неперервними системами є їх висока завадостійкість. Ця перевага найбільш проявляється в системах передачі з багатократною ретрансляцією сигналів. Типові системи подібного типу – кабельні та радіорелейні лінії великої протяжності. В них сигнали передаються ланцюгами ретрансляторів, які знаходяться на таких відстанях один від одного, які забезпечують надійний зв'язок. В таких системах завади та спотворення, які виникають в окремих ланках, як правило накопичуються. Вважаючи, що сигнал в кожному ретрансляторі тільки посилюється і адитивні завади в кожному ланцюзі статично незалежні, їх потужність на вході останнього ланцюга буде дорівнювати сумі потужностей завад всіх ланцюгів. При цифровій системі передачі неперервних повідомлень можливо підвищити точність застосуванням завадостійкого кодування. В нашій системі зв'язку використовується завадостійке кодування систематичним кодом (10,6) з мінімальною кодовою відстанню $d_0=2$. Висока завадостійкість цифрових систем передачі дозволяє здійснити практично необмежений дальністю зв'язок при використанні каналів порівняно невисокої якості.

Іншою суттєвою перевагою цифрових систем передачі інформації є широке використання в апаратурі перетворення сигналів сучасної елементної бази цифрової обчислювальної техніки та мікропроцесорів. На цифровій основі можуть бути поєднані в єдиній системі сигнали передачі даних з сигналами передачі мови і телебачення. Можливість приведення всіх видів передаваної інформації до цифрового вигляду дозволяє здійснити інтеграцію систем передачі та систем комутації. Простота поєднання цифрового каналу з ЕОМ дозволяє суттєво розширити область використання обчислювальної техніки при побудові апаратури зв'язку та автоматизації управління мережами зв'язку.

Порядок захисту курсової роботи

Захист курсової роботи відбувається перед комісією, яка затверджується кафедрою.

Студент допускається до захисту за умови наявності підписаної керівником і студентом пояснювальної записки і розрахункової частини роботи.

Для захисту студенту відводиться 10-15 хвилин на виклад змісту роботи; в процесі захисту комісія виказує свої зауваження. За наслідками захисту (доповідь, відповіді на запитання, якість роботи) виставляється оцінка у відомості і на титульному аркуші записки пояснення. У разі виявлення принципових помилок курсова робота повертається на доопрацювання.

Після захисту студент повинен здати пояснювальну записку керівникові. У разі незадовільної оцінки призначається повторний захист з усуненням помилок курсової роботи або з видачею нового завдання. За відсутності достатнього матеріалу у контрольні терміни, студенту, як правило, видається нове завдання.

Список літератури, рекомендованої для поглибленого вивчення дисципліни

1. *Абакумов В. Г.* Электронные промышленные устройства: Учеб. пособие для вузов. – К.: Вища шк., 1998. – 376 с.
2. *Банкет В. Л., Дорофеев В. М.* Цифровые методы в спутниковой связи. – М.: Радио и связь, 1988. – 448 с.
3. *Барковський В. В., Барковська Н. В., Лопатін О. К.* Математика для економістів: Теорія ймовірностей та математична статистика. – К.: Нац. акад. управління, 1997. – 225 с.
4. *Баскаков С. И.* Радиотехнические цепи и сигналы: Учеб. для вузов. – М.: Высш. шк., 1998. – 448 с.
5. *Большаков И. А., Репин В. Г.* Вопросы нелинейной фильтрации // Автоматика и телемеханика. – 1961. – № 4. – С. 53–57.
6. *Варакин Л. Е.* Системы связи с шумоподобными сигналами. – М.: Радио и связь, 1985. – 384 с.
7. *Варакин Л. Е.* Теория систем сигналов. – М.: Сов. радио, 1978. – 304 с.
8. *Варакин Л. Е.* Теория сложных сигналов. – М.: Сов. радио, 1970. – 375 с.
9. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 576 с.
10. *Витерби А. Д., Омура Д. К.* Принципы цифровой связи и кодирования. – М.: Радио и связь, 1982. – 526 с.
11. *Волочий Б.Ю.* Передавання сигналів у інформаційних системах. Ч.1.: Нав. Посібник. – Львів: Видавництво Національного університету «Львівська політехніка», 2005. -196 с.
12. *Джури Э.* Импульсные системы автоматического регулирования / Пер. с англ.; Под ред. Я. З. Цыпкина. – М.: Мир, 1963. – 453 с.
13. *Диксон Р. К.* Широкополосные системы / Пер. с англ.; Под ред. В. И. Жуковского. – М.: Связь, 1979. – 303 с.
14. *Зайцев Г. Ф., Стеклов В. К., Брицький О. І.* Теорія автоматичного управління. – К.: Техніка, 2002. – 688 с.
16. *Зюко А. Г.* Помехоустойчивость и эффективность систем связи. – М.: Связь, 1973. – 359 с.
17. *Зюко А. Г., Коробов Ю. Ф.* Теория передачи сигналов: Учеб. для вузов. – М.: Связь, 1972. – 282 с.
18. *Игнатов В. А.* Теория информации и передачи сигналов: Учеб. для вузов. – М.: Сов. радио, 1979. – 280 с.
19. *Кларк Дж., Кейн Дж.* Кодирование и исправление ошибок в системах цифровой связи / Пер. с англ.; Под ред. Б. С. Цибакова. – М.: Радио и связь, 1987. – 392 с.
20. *Кловский Д. Д.* Теория передачи сигналов. – М.: Связь, 1972. – 282 с.
21. *Кловский Д. Д.* Теория передачи сигналов в задачах. – М.: Связь, 1978. – 252 с.
22. *Кловский Д. Д., Шилкин В. А.* Теория электрической связи: Сб. задач и упражнений. – М.: Радио и связь, 1990. – 280 с.
23. *Коновалов Г. Ф.* Радиоавтоматика: Учеб. для вузов. – М.: Высш. шк., 1990. – 335 с.
24. *Котельников В. А.* Теория потенциальной помехоустойчивости. – Л.: Госэнергоиздат, 1956. – 152 с.
25. *Маркюс Ж.* Дискретизация и квантование. – М.: Энергия, 1969. – 286 с.

26. Назаров М. В., Кувшинов Б. И., Попов О. В. Теория передачи сигналов. – М.: Связь, 1970. – 368 с.
27. Панфілов І. П., Дирда В. Ю., Капацін А. В. Теорія електричного зв'язку. – К.: Техніка, 1998. – 322 с.
28. Первачев С. В. Радиоавтоматика. – М.: Радио и связь, 1982. – 403 с.
29. Передача дискретных сообщений: Учеб. для вузов / В. П. Шувалов, Н. В. Захарченко, В. О. Шварцман и др.; Под ред. В. П. Шувалова. – М.: Радио и связь, 1990. – 464 с.
30. Поляков П. Ф. Широкополосные аналоговые системы связи со сложными сигналами. – М.: Радио и связь, 1981. – 153 с.
31. Пугачев В. С. Статистические методы в технической кибернетике. – М.: Сов. радио, 1971. – 192 с.
32. Радиоавтоматика: Учеб. для вузов / Г. Ф. Зайцев, Г. Н. Арсеньев и др. – М.: ООО “ДВК”, 2004. – Т. 1. – 523 с.
33. Системы фазовой синхронизации / С. Н. Складенко, В. К. Стеклов, Р. В. Уваров, В. М. Чмиль. – К.: Техніка, 1994. – 160 с.
34. Складенко С. М., Стеклов В. К., Беркман Л. Н. Поштовый зв'язок. – К.: Техніка, 2004. – 904 с.
35. Стратонович Р. Л. К теории оптимальной нелинейной фильтрации случайных функций // Теория вероятностей и ее применение. – 1959. – № 2. – С. 44–49.
36. Солодов А. В. Теория информации и ее применение к задачам автоматического управления и контроля. – М.: Наука, 1967. – 436 с.
37. Стилкер Дж. Цифровая спутниковая связь / Пер. с англ. В. В. Маркова. – М.: Связь, 1979. – 592 с.
38. Статистическая динамика радиотехнических следящих систем / С. В. Первачев, А. А. Валуев, В. М. Чиликин. – М.: Сов. радио, 1973. – 488 с.
39. Стеклов В. К., Беркман Л. Н. Проектування телекомунікаційних мереж. – К.: Техніка, 2002. – 792 с.
40. Стеклов В. К., Беркман Л. Н. Теорія електричного зв'язку. . – К.: Техніка, 2006. – 552 с.
41. Теория передачи сигналов: Учеб. для вузов / А. Г. Зюко, Д. Д. Кловский, М. В. Назаров, Л. М. Финк. – М.: Связь, 1986. – 304 с.
42. Теория электрической связи: Учеб. для вузов / А. Г. Зюко, Д. Д. Кловский, В. И. Коржик, М. В. Назаров. – М.: Радио и связь, 1998. – 432 с.
43. Тихонов В. И. Нелинейная фильтрация и квазиэлектронный характер фазовой автоподстройки частоты // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1965. – № 2. – С. 44–49.
44. Туркин А. И. Рекуррентный прием сложных сигналов (на основе метода вхождения и решения безостановочных экстремальных задач). – М.: Радио и связь, 1988. – 248 с.
45. Финк Л. М. Теория передачи дискретных сообщений. – М.: Сов. радио, 1970. – 727 с.
46. Філіпський Ю. К. Випадкові сигнали в радіотехніці. – К.: Вища шк., 1986. – 126 с.
47. Хлытчиев С. М., Тарасова Н. П., Лившиц В. М. Теоретические основы почтовой связи: Учеб. для вузов. – М.: Радио и связь, 1990. – 380 с.
48. Цыпкин Я. З. Основы теории автоматических систем. – М.: Наука, 1967. – 448 с.
49. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике / Пер. с англ.; Под ред. Н. А. Железнова. – М.: Мир, 1963. – 829 с.