Міністерство освіти і науки України
Державний університет телекомунікацій
Кафедра вищої математики

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

Навчально-методичний посібник
для самостійної роботи студентів
освітньо-кваліфікаційного рівня “Бакалавр”
заочної форми навчання
галузі знань 1701 “Інформаційна безпека”
всіх напрямів підготовки

2013

Навчально-методичний посібник обговорено та затверджено
на засіданні кафедри вищої математики
Державного університету телекомунікацій,
протокол №1 від 30.08.2013 р.

Дискретна математика. Навчально-методичний посібник для самостійної роботи студентів освітньо-кваліфікаційного рівня “Бакалавр” заочної форми навчання галузі знань 1701 “Інформаційна безпека” всіх напрямів підготовки / Укладачі: доцент Скубак О.М., доцент Жданова Ю.Д. – К.: ДУТ, 2013. – 48 с.

Наведені типові завдання для самоперевірки знань студентів заочної форми навчання з метою підготовки до семестрового контролю з дисципліни “Дискретна математика”.

Для кожного розділу програми дисципліни представлені: короткий зміст тем розділу, основні теоретичні питання, методичні вказівки та зразки розв’язування й оформлення типових прикладів.

Зміст

1. Предмет, мета та завдання дисципліни 4

2. Теоретичні питання навчальної програми 5

3. Інформаційно-методичне забезпечення 6

4. Методичні рекомендації до опрацьовування тем навчальної програми 7

4.1. Рекомендації до опрацьовування тем 1-4 розділу 1 7

4.2. Рекомендації до опрацьовування теми 5 розділу 2 8

4.3. Рекомендації до опрацьовування тем 6,7 розділу 3 9

5. Рекомендації до виконання контрольних практичних завдань 10

5.1.Вимоги до оформлення звіту про самостійну роботу 11

6. Контрольні практичні завдання 12

7. Зразки виконання і оформлення контрольних практичних завдань 23

8. Критерії оцінювання знань та вмінь студентів 48

1. Предмет, мета та завдання дисципліни

Предметом навчальної дисципліни **Дискретна математика** є вивчення властивостей дискретних множин та визначених на таких множинах операторів.

Метою викладання навчальної дисципліни є:

- надати знання, уміння, компетенції в області аналізу та синтезу дискретних об'єктів;
- навчити студентів володінню математичним апаратом дискретної математики, який повинен бути достатнім для опрацьовування математичних моделей, пов'язаних з подальшою практичною діяльністю фахівців;
- дати необхідні теоретичні знання та основні напрями їх застосування в системі дисциплін за спеціальністю;
- прищепити первинні навички математичного дослідження прикладних задач;
- виробити вміння самостійно використовувати при розв'язуванні задач необхідні методи дискретної математики та спеціальну літературу.

Завданнями навчальної дисципліни **Дискретна математика** є формування наступних соціально-особистісних, інструментальних, загальнонаукових та спеціалізовано-професійних компетенцій:

- здатність учитися;
- креативність, здатність до системного мислення;
- наполегливість у досягненні мети;
- турбота про якість виконуваної роботи;
- дослідницькі навички;
- базові знання фундаментальних розділів математики в обсязі, необхідному для володіння математичним апаратом відповідної галузі знань, здатність використовувати математичні методи у сфері захисту інформації;
- здатність використовувати теоретичні знання й практичні навички в галузі математики для оволодіння теорією й методами захисту для забезпечення безпеки інформації в інформаційних і комунікаційних системах;
- здатність використовувати математичний апарат дискретної математики для освоєння теоретичних основ і практичного використання криптографічних методів;
- здатність використовувати професійно профільовані знання й практичні навички в галузі математики для освоєння загальної та прикладної криптографії.

Навчальна дисципліна **Дискретна математика** забезпечує формування вміння виконувати аналіз та синтез дискретних об'єктів, використовуючи поняття і закони теорії множин та теорії відношень, елементів комбінаторного аналізу, теорії графів; теорії булевих функцій; теорії алгоритмів.

В результаті вивчення дисципліни студент повинен уміти користуватися методами дисципліни **Дискретна математика** при вивченні загальнонаукових та спеціальних дисциплін, застосовувати ці методи при розв'язуванні практичних задач з використанням обчислювальної техніки і нормативної літератури, зокрема він повинен уміти:

- користуватися методами теорії множин, відношень, комбінаторними методами;
- застосовувати апарат теорії булевих функцій;
- застосовувати апарат теорії графів,
- застосовувати апарат теорії алгоритмів.

2. Теоретичні питання навчальної програми

Розділ 1

Елементи теорії множин і відношень

Тема 1. Основні поняття теорії множин

1. Зміст та задачі дискретної математики.
2. Поняття множини. Способи завдання множини.
3. Відношення між множинами.
4. Геометричне зображення множин.
5. Основні операції над множинами: об’єднання, переріз, різниця, доповнення.
6. Властивості операцій над множинами.
7. Декартовий добуток множин.

Тема 2. Відношення. Функції

1. Поняття відношення.
2. Способи задання відношень.
3. Образи і прообрази елементів і множин відносно відношень. Операції над відношеннями.
4. Бінарні відношення. Властивості бінарних відношень.
5. Спеціальні бінарні відношення: відношення еквівалентності та відношення порядку.
6. Поняття функції та відображення.
7. Класифікація функцій.

Тема 3. Множини з алгебраїчними операціями

1. Поняття бінарної алгебраїчної операції.
2. Властивості бінарних алгебраїчних операцій.
3. Обернені бінарні операції.
4. Елементи, виділені відносно бінарної операції.
5. Поняття алгебраїчної структури.
6. Алгебраїчні структури з одною алгебраїчною операцією (півгрупи, групи).
7. Алгебраїчні структури з двома алгебраїчними операціями (кільця, поля).
8. Ізоморфізми та гомоморфізми алгебраїчних структур.
9. Булеві алгебри.

Тема 4. Елементи комбінаторики

1. Поняття комбінаторної задачі.
2. Правила суми та добутку. Принцип включень та виключень.
3. Перестановки, розміщення, комбінації без повторень.
4. Перестановки, розміщення, комбінації з повтореннями.

Розділ 2

Елементи теорії булевих функцій

Тема 5. Елементи теорії булевих функцій

1. Поняття булевої функції.
2. Способи завдання булевих функцій.
3. Елементарні булеві функції та їх властивості.
4. Реалізація булевих функцій формулами.
5. Рівносильність та тотожність формул.
6. Принцип двоїстості.
7. Диз’юнктивна і кон’юнктивна нормальні форми
8. Досконалі диз’юнктивна і кон’юнктивна нормальні форми.
9. Приведення булевих функцій до досконалих диз’юнктивних і кон’юнктивних нормальних форм.

10. Повні системи булевих функцій.
11. Зображення булевої функції многочленом Жегалкіна.
12. Замикання і замкнені класи булевих функцій. Критерій повноти системи булевих функцій.
13. Проблема мінімізації булевих функцій.
14. Мінімізація булевих функції в класі диз'юнктивних нормальних форм методом Квайна-МакКласкі.
15. Мінімізація булевих функції в класі диз'юнктивних нормальних форм методом Карно-Вейча.
16. Реалізація булевих функції схемами з функціональних елементів.

Розділ 3
Елементи теорії графів
Елементи теорії алгоритмів

Тема 6. Елементи теорії графів

1. Основні характеристики графів.
2. Геометричне зображення графів.
3. Операції над графами.
4. Матричні способи задання графа.
5. Ізоморфізм графів.
6. Маршрути в графі.
7. Обходи в графах.
8. Зв'язність графа.
9. Мінімальні шляхи в зважених орграфах.
10. Дерева.
11. Мінімальні остовні дерева зважених графів.

Тема 7. Елементи теорії алгоритмів

1. Інтуїтивне означення алгоритму. Приклади алгоритмів.
2. Блок-схеми алгоритмів.
3. Проблема уточнення поняття алгоритму.
4. Машина Тьюрінга.
5. Функції, обчислюванні за Тьюрінгом.
6. Теза Тьюрінга.
7. Універсальна машина Тьюрінга.
8. Приклад числової функції, яка не є обчислюванною за Тьюрінгом.
9. Алгоритмічно нерозв'язувані проблеми.
10. Поняття про складність алгоритму.

3. Інформаційно-методичне забезпечення
Список літератури
3.1. Основна література

1. Бардачов Ю.М. та ін. Дискретна математика. – К.: Вища школа, 2002. – 287 с.
2. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике.– М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 416 с.
3. Донской В.И. Дискретная математика. – Симферополь:СОНАТ, 2000. – 360 с.
4. Капітонова Ю.В., Кривий С.Л., Летичевський О.А., та ін. Основи дискретної математики. Підручник. – Київ: Наукова думка, 2002. – 580 с.
5. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженера. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 480 с.

6. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. – М.: Физматлит, 2004. — 256 с.
7. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. – СПб: Питер. – 2000. – 304 с.
8. Таран Т.А., Мыценко Н.А., Темникова Е.Л. Сборник задач по дискретной математике. – К.; Просвіта, 2001. – 61 с.
9. Тевяшев А.Д., Гусарова И.Г. Основы дискретной математики в примерах и задачах. – Харьков: ХНУРЭ, 2003. – 272 с.
10. Ядренко М.Й. Дискретна математика: навчальний посібник. – К.: МП ”ТВіМС”, 2004. – 245 с.
11. Довідники з елементарної та вищої математики.
12. Конспекти лекцій, робочі зошити практичних занять.
13. Навчально-методичні посібники кафедри.

3.2. Додаткова література

14. Биркгоф Г., Барти Т. Современная прикладная алгебра. – М.: Лань, 2005. – 400 с.
15. Виленкин Н.Я., Виленкин А.Н., Виленкин П.А. Комбинаторика. – М.: ФИМА, МЦНМО, 2006. – 400 с.
16. Гиндикин С.Г. Алгебра логики в задачах. – М.: Наука,1972. – 288 с.
17. Игошин В.И. Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов. – М.: Академия, 2007. – 304 с.
18. Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов. – М.: Академия, 2008. – 448 с.
19. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. – М.: Наука,1984. – 320 с.
20. Поздняков С.Н., Рыбин С.Н. Дискретная математика. – М.: Издательский центр «Академия», 2008. – 448 с.
21. Рыжова Н.И., Голанова А.В., Швецкий М.В., Луценко А.Ю. Теория алгоритмов (электронный учебник) http://ric.uni-altai.ru/Fundamental/teor-alg
22. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера. – Киев: Техника, 1976. – 786 с.
23. Судоплатов С.В., Овчинников Е.В. Элементы дискретной математики: Учебник для втузов. – М.: ИНФРА-М, 2002. – 280 с.
24. Эббинхауз Г.-Д., Якобс К., Ман Ф.К., Хермес Г. Машины Тьюринга и вычислимые функции. – М.: Мир, 1972. – 264 с.
25. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. – М.: Наука,1986.–384 с.

3.3. Наочні посібники

1. Роздавальні матеріали до тем дисципліни.
2. Тестуючий комплекс.

3.4. Інші інформаційні джерела

1. Електронна бібліотека ДУІКТ.
2. http://www.matburo.ru/st_subject.php?p=dm
3. http://www.msclub.ce.cctpu.edu.ru/bibl/ODM/index.html
4. http://de.ifmo.ru/bk_netra/start.php?bn=23

4. Методичні рекомендації до опрацьовування тем навчальної програми

4.1. Рекомендації до опрацьовування тем 1-4 розділу 1

Елементи теорії множин і відношень

Обмін інформацією в комп’ютерних мережах здійснюється за допомогою сигналів, які за своїм видом можуть бути аналоговими (неперервними) і дискретними. Дискретні сигнали меншою мірою підлягають спотворенням під впливом перешкод, їх простіше зберігати і обробляти. Дискретні сигнали можуть біти отримані дискретизацією неперервних сигналів або подані у вигляді кодових комбінацій – слів. Останнє подання є найбільш поширеним і універсальним. Воно застосовується для кодування людської мови, у математиці, цифровій електроніці. Способи побудови та ефективного опрацювання послідовностей об'єктів дискретного характеру дає дискретна математика.

Дискретна математика (скінченна математика) – розділ математики, що вивчає властивості об'єктів дискретного характеру. Під дискретними об'єктами в математиці розуміють ті, які в сукупності утворюють скінченну або зчисленну множину. Основною особливістю дискретної математика є відсутність граничного переходу і неперервності, притаманних класичній математиці.

Дискретна математика вивчає властивості різноманітних дискретних множин і побудованих на їх основі відношень, функцій, операторів.

В темі **1 Основні поняття теорії множин** вивчається теорія множин, яка є теоретичною основою не лише дискретної, а й усієї сучасної математики. За допомогою поняття *множини* можна визначити більшу частину понять дискретної математики. В понятті множини виявляється високий рівень абстракції, який притаманний математиці. *Поняття множини і її елемента відносять до основних, первинних понять математики*. Вважають, що ці поняття, які і будь-які інші вихідні поняття деякої математичної теорії, не визначаються/

При вивченні цієї теми потрібно добре засвоїти способи задання множин, відношення між множинами, операції над множинами та їх властивості. Найбільшу увагу треба приділити отриманню навичок проведення дій в алгебрі множин.

Рекомендована навчальна література: [1], [3], [4], [5], [7], [20], [23].

Для позначення зв'язку між об'єктами або поняттями використовується таке фундаментальне поняття, як *відношення*, що вивчається в темі **2 Відношення. Функції.** Прикладами таких зв'язків між елементами множин можуть служити функціональні залежності або відношення «менше», «більше». Найбільш часто зустрічаються бінарні відношення, які є підмножинами декартового добутку двох множин.

При вивченні бінарних відношень треба приділити увагу способам задання та перевірці властивостей. Слід відзначити, що відношення, які є множинами, допускають крім способів свого задання як множин ще й алгебраїчний спосіб заданнь – матрицею, і так звані графічні способи: графіками, графами. За допомогою алгебраїчного і графічного способу задання можна легко перевірити властивості бінарного відношення і визначити його належність до класу спеціальних бінарних відношень – до класу відношень еквівалентності, або відношень порядку.

Рекомендована навчальна література: [1], [3], [4], [5], [7], [20], [23].

В темі **3 Множини з алгебраїчними операціями** вивчається поняття бінарної алгебраїчної операції. Розглядається процес утворення алгебраїчної структури на множині, на якій задані бінарні алгебраїчні операції. Якщо визначити на деякій множині одну або дві бінарні операції і наділити їх певними властивостями, а також визначити наявність нейтральних і симетричних елементів відносно цих бінарних алгебраїчних операцій, можна дістати різні алгебраїчні структури. Найбільш застосовними серед алгебраїчних структур з однією бінарною алгебраїчною операцією є групи, а серед алгебраїчних структур з двома операціями – кільця і поля.

Рекомендована навчальна література: [1], [3], [4], [5], [7], [20], [23].

В темі **4 Елементи комбінаторики** вивчається одне із застосувань теорії скінченних множин – комбінаторика. Тут треба звернути увагу на основні комбінаторні конфігурації – перестановки, розміщення, комбінації, – як на підмножини деякої основної множини та запам'ятати формули для підрахування їх числа.

Рекомендована навчальна література: [1], [10], [15].

4.2. Рекомендації до опрацьовування теми 5 розділу 2
Елементи теорії булевих функцій

При обробці дискретної інформації найчастіше використовують дискретні пристрої, в яких вхідні та вихідні сигнали мають два різних рівні. Це пов'язано з необхідністю простоти фізичної реалізації пристроїв, з економічністю виконання логічних і арифметичних операцій. Одному з рівнів присвоюється символ 0, іншому – 1 і, таким чином, пристрій здійснює обробку двійкової інформації. Для опису пристроїв переробки дискретної інформації, яка розкладається на елементарні одиниці – біти, в обчислювальній техніці застосовуються булеві функції/

В **темі 5 Елементи теорії булевих функцій** вивчаються булеві функції – функції, які визначені і набувають своїх значень на множині $\{0,1\}$. Булеві функції задаються: таблицями своїх значень, які називаються таблицями істинності; вектором значень, який є останнім стовпцем таблиці істинності; одиничною множиною – множиною наборів значень аргументів, при яких функція набуває значення 1.

Булеві функції можуть бути реалізовані формулами і ця реалізація є ще одним з способів їх задання – аналітичним. Тут треба звернути увагу на нормальні форми запису булевої функції та на способи приведення до них.

Булеві функції можуть бути реалізовані схемами з функціональних елементів і ця реалізація є ще одним з способів їх задання – технічним.

При вивченні цієї теми потрібно добре засвоїти перехід від одного способу реалізації булевої функції до іншого: від табличного до аналітичного, від аналітичного до технічного і навпаки.

Рекомендована навчальна література: [1], [4], [5], [6], [16], [17], [18], [23].

4.3. Рекомендації до опрацьовування тем 6,7 розділу 3
Елементи теорії графів
Елементи теорії алгоритмів

В темі **6 Елементи теорії графів** вивчаються скінченні графи. Само по собі дуже просте поняття графу є найважливішим математичним поняттям в дискретній математиці, теоретичній інформатиці, програмуванні. На основі теорії графів будуються моделі різних задач: маршрутизації, розподілу ресурсів, дискретної оптимізації і керування виробництвом, мінімізації алгоритмів і автоматів, проектуванні мереж ЕОМ, при розробці сучасних електронних модулів, при рішенні проблем автоматизації проектування (САПР) та ін.

Найбільш широке застосування методи теорії графів знаходять у програмуванні, тому що теорія графів надає дуже зручну мову для опису програмних (і багатьох інших) моделей. Струнка система спеціальних термінів і позначень теорії графів дозволяють просто і доступно описувати складні і тонкі речі. Особливо важлива наявність наочної графічної інтерпретації поняття графа. Сама назва «граф» має на увазі наявність графічної інтерпретації.

Граф задається як сукупність двох множин: скінченної множини V, елементи якої називаються вершинами графа, і множини E пар елементів з V, які називаються ребрами. Крім цього абстрактного задання, кожен граф допускає геометричне зображення у вигляді множини точок (вершин) і кривих, кожна з яких з'єднує деякі пари вершин.

Разом з графами розглядаються поріднені об'єкти: графи, в яких елементами множини E є впорядковані пари (орієнтовані графи), графи з петлями (псевдографи), графи з кратними ребрами (мультиграфи). Тут слід звернути увагу на термінологію, яка застосовується для орієнтованих і неорієнтованих графів. Наприклад, елементи множини V для орієнованих графів називаються вузлами, елементи множини E – дугами.

Для алгебраїчного задання графів використовуються матриці суміжності і матриці інцидентності, за властивостями яких можна робити висновки про властивості самого графа.

При вивченні цієї теми треба звернути увагу на нові поняття *маршруту, ланцюгу, циклу, досяжності і зв'язності.*

Теорія графів містить багато алгоритмів, які мають велике значення для застосувань.

При розв'язуванні багатьох практичних задач виникає необхідність пошуку мінімального шляху між двома довільними вузлами орієнтованого графа. Для знаходження мінімального шляху між двома довільними вузлами існують певні алгоритми, наприклад, алгоритм Дейкстри, алгоритм Форда-Беллмана.

У випадках, коли, наприклад, потрібно з'єднати n міст комунікаційними лініями (залізничними лініями, автомобільними дорогами, лініями електропередач, мережею трубопроводів і т. д.) так, щоб сумарна довжина ліній або їх вартість була б мінімальною, або потрібно побудувати схему електричної мережі, в якої клеми повинні бути сполучені за допомогою проводів найменшої загальної довжини виникає необхідність побудови мінімального остовного дерева зваженого графа. Для побудови мінімального остовного дерева, яке має своїм коренем одну з вершин будь-якого зваженого графа, можуть бути використані методи Краскала, Пріма або Борувки.

Наявність графічної інтерпретації робить цю тему легкою для засвоєння.

Рекомендована навчальна література: [1], [3], [4], [5], [7], [20], [23].

Поняття алгоритму, що вивчається в темі **7 Елементи теорії алгоритмів,** з появою комп'ютерів стало звичним і загальновживаним. До початку 20 століття поняття алгоритму у своїй основі не мінялося; воно залишалося інтуїтивним поняттям, що мало скоріше методологічне, а не математичне значення. У 20-х роках 20 століття задача точного означення поняття алгоритму стала однією з центральних проблем математики. Розв'язок її було отримано в 1936-1937р. Розглядається один з підходів до точного означення алгоритму заснований на уявленні про алгоритмічний процес, як про процес, який може здійснювати придатно влаштована „машина". Основною теоретичною моделлю цього типу є машина Алана Тьюрінга.

При вивченні цієї теми треба звернути увагу на способи задання машини Тьюрінга. Треба навчитися визначати повний стан (конфігурацію або машинне слово) машини Тьюрінга та навчитися переходити з заданої конфігурації в кінцеву.

Рекомендована навчальна література: [1], [3], [4], [5], [7], [20], [21], [24].

5. Рекомендації до виконання контрольних практичних завдань

Практичні завдання розподіляються по варіантах, номери яких відповідають останній цифрі номера залікової книжки студента: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Звіт про виконання здається на перевірку в термін, вказаний викладачем. Оцінка цієї роботи значно залежить від правильного самостійного розв'язання прикладів та задач і від повноти пояснень та акуратності оформлення розв'язків.

Наслідком несамостійного розв'язання прикладів та задач будуть значні складності при здачі заліку та у подальшому вивченні багатьох розділів математики та інших навчальних дисциплін.

5.1.Вимоги до оформлення звіту про самостійну роботу

Звіт оформлюється в зошиті або на аркушах А4.

У звіті повинні бути приведені:

1. Розв'язування заданих прикладів (номер варіанту визначається за останньою цифрою номера залікової книжки: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10).
2. Розв'язування мають містити стислі теоретичні пояснення та формули.
3. В кінці звіту слід навести список використаної літератури.
4. Під час семестрової атестації можна буде користуватись своїм звітом.

Титульний лист оформлюється так:

Державний університет інформаційно-комунікаційних технологій
Навчально-науковий інститут заочного та дистанційного навчання

Кафедра вищої математики

ЗВІТ
про самостійну роботу
з дискретної математики
студента (студентки) 2 курсу, групи ________,
____
(прізвище, ім'я, по-батькові)
залікова книжка № __________

перевірений викладачем ________ __________________
(підпис) (прізвище та ініціали)

Дата _______

Київ – 201_

6. Контрольні практичні завдання

Розділ 1
Елементи теорії множин і відношень
Тема 1. Основні поняття теорії множин

Завдання 1. Нехай U – множина точок площини, на якій задана прямокутна декартова система координат. Знайти та зобразити на площині множини:

1) $A\cap B$; 2) $A\cup B$; 3) $A\setminus B$; 4) $B\setminus A$; 5) $\overline{A}$; 6) $\overline{B}$; 7) $A\Delta B$.

№ варіанта	A	B
1	$A=\left\{(x,y): x^2+y^2\le 4\right\}$	$B=\left\{(x,y): 1\le x\le 5,\ 1\le y\le 2\right\}$
2	$A=\left\{(x,y): (x+2)^2+y^2\le 4\right\}$	$B=\left\{(x,y): \lvert x+2\rvert+\lvert y\rvert\le 2\right\}$
3	$A=\left\{(x,y): 4x^2+y^2\le 16\right\}$	$B=\left\{(x,y): x^2+4y^2\le 16\right\}$
4	$A=\left\{(x,y): (x-1)^2+y^2\le 4\right\}$	$B=\left\{(x,y): \lvert x-1\rvert+\lvert y\rvert\le 2\right\}$
5	$A=\left\{(x,y): y\ge x^2\right\}$	$B=\left\{(x,y): x^2+(y-3)^2\le 9\right\}$
6	$A=\left\{(x,y): (x-3)^2+y^2\le 1\right\}$	$B=\left\{(x,y): \lvert x-3\rvert+\lvert y\rvert\le 1\right\}$
7	$A=\left\{(x,y): x^2+(y-2)^2\le 4\right\}$	$B=\left\{(x,y): x^2+(y-1)^2<1\right\}$
8	$A=\left\{(x,y): (x-1)^2+y^2\le 1\right\}$	$B=\left\{(x,y): (x-2)^2+y^2<4\right\}$
9	$A=\left\{(x,y): \lvert x\rvert+\lvert y\rvert\le 5\right\}$	$B=\left\{(x,y): x^2+y^2\le 25\right\}$
10	$A=\left\{(x,y): \lvert x-3\rvert+\lvert y\rvert\le 2\right\}$	$B=\left\{(x,y): (x-3)^2+y^2<4\right\}$

Завдання 2. Довести справедливість співвідношень між множинами, використовуючи

а) закони алгебри множин;

б) діаграми Ейлера-Венна.

№ варіанта	**Співвідношення**
1	$\left(A\cup(B\cap C)\right)\setminus\left(\overline{A}\setminus\overline{(B\cap C)}\right)=A$
2	$(A\Delta B)\setminus C=\left(A\setminus(B\cup C)\right)\cup\left(B\setminus(A\cup C)\right)$
3	$A\setminus(B\Delta C)=A\cap\left((\overline{B}\cap\overline{C})\cup(B\cap C)\right)$
4	$(A\setminus B)\setminus C=(A\setminus C)\setminus(B\setminus C)$

№ варіанта	**Співвідношення**
5	$(A\Delta B)\setminus C=(A\setminus C)\Delta(B\setminus C)$
6	$\left(\overline{A\cap B}\setminus C\right)\cup\left(\overline{A\cap B}\cap\overline{C}\right)=\overline{A}\cup\overline{B}$
7	$\left(\left(A\cup\overline{B}\right)\setminus C\right)\cup\left(\left(A\cup\overline{B}\right)\cap C\right)=A\cup\overline{B}$
8	$A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$
9	$A\Delta(B\cap C)=(A\setminus C)\Delta((A\Delta B)\cap C)$
10	$\left(A\cup\overline{B}\right)\cap\left(A\cup\overline{C}\right)=A\cup\left(\overline{B}\setminus C\right)$

Завдання 3. Знайти і зобразити в ПДСК множину $X\times Y$, якщо

1) $X=\{x: x\in R,\ N-4\le x<N+1\}$, $Y=\{y: y\in N,\ y<3\}$;

2) $X=\{x: x\in Z,\ -N-1\le x<N+2\}$, $Y=\{y: y\in R,\ -N<y\le N+1\}$.

Тема 2. Відношення. Функції

Завдання 4. Для бінарного відношення ρ на множині $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$:

1) Записати всі можливі способи задання: а) переліком елементів; б) характеристичною властивістю; в) матрицею, г) графіком, д) графом.

2) Знайти а) область визначення $D(\rho)$, б) область значень $E(\rho)$, в) обернене відношення ρ^{-1}, г) композицію $\rho\circ\rho^{-1}$, д) композицію $\rho^{-1}\circ\rho$, є) декартовий добуток $E\left(\rho^{-1}\circ\rho\right)\times D\left(\rho\circ\rho^{-1}\right)$, е) образ $\rho(a)$, прообраз $\rho^{-1}(b)$.

3) Визначити властивості.

№ варіанта	ρ	$\rho(a)$	$\rho^{-1}(b)$
1	$\{(5,3),(4,3),(5,4),(4,2),(4,4),(6,0),(5,0),(2,0)\}$	$\rho(5)$	$\rho^{-1}(0)$
2	$\{(6,0),(2,5),(0,1),(7,1),(6,8),(5,0),(2,0),(2,4)\}$	$\rho(2)$	$\rho^{-1}(1)$
3	$\{(7,1),(7,5),(8,0),(6,0),(6,5),(4,2),(2,7),(6,2)\}$	$\rho(7)$	$\rho^{-1}(0)$
4	$\{(2,8),(4,5),(3,0),(3,5),(2,0),(2,1),(2,2),(0,7)\}$	$\rho(2)$	$\rho^{-1}(0)$
5	$\{(8,9),(1,0),(9,5),(0,4),(1,1),(9,7),(4,0),(0,2)\}$	$\rho(0)$	$\rho^{-1}(0)$
6	$\{(2,1),(1,0),(0,3),(8,0),(3,0),(1,5),(0,7),(0,9)\}$	$\rho(1)$	$\rho^{-1}(0)$
7	$\{(4,0),(5,2),(4,7),(5,0),(3,2),(3,5),(3,7),(2,8)\}$	$\rho(3)$	$\rho^{-1}(0)$
8	$\{(3,1),(2,0),(8,0),(1,9),(2,8),(9,2),(2,9),(0,6)\}$	$\rho(2)$	$\rho^{-1}(0)$
9	$\{(5,1),(4,0),(0,1),(6,4),(5,2),(5,0),(3,0),(3,5)\}$	$\rho(5)$	$\rho^{-1}(1)$
10	$\{(3,1),(3,8),(4,4),(1,0),(2,5),(0,9),(0,7),(2,0)\}$	$\rho(3)$	$\rho^{-1}(0)$

Завдання 5. Для заданого відображення f : а) знайти образ елемента x, б) знайти прообраз елемента y, в) вказати тип, г) у випадку бієкції знайти обернене відображення.

№ варіанта	f	x	y
1	$f(x)=5x+3$	2	–2
2	$f(x)=\frac{2}{x}+x+2$	1	5
3	$f(x)=x^2+3x+5$	0,5	15
4	$f(x)=-3x-4$	–1	2
5	$f(x)=5x^2+23x-10$	–5	–22
6	$f(x)=\frac{1}{x}-x-1$	–2	5
7	$f(x)=2x^2-7x-4$	3	–7
8	$f(x)=x-2+\frac{3}{x}$	3	2
9	$f(x)=4x-5$	–1	3
10	$f(x)=x+1-\frac{2}{x}$	1	4

Тема 3. Множини з алгебраїчними операціями

Завдання 6. Визначити, чи є групою множина A відносно операції φ.

№ варіанта	A	φ
1	Z	$a*b=a+b+2012$
2	$A=\left\{\frac{a}{5^m}, a\in Z, m\in N\right\}$	додавання
3	$A=\left\{a+b\sqrt{3}, a,b\in Z\right\}$	додавання
4	$A=\left\{\frac{a}{2m}, a\in Z, m\in N\right\}$	множення
5	$A=\left\{a+bi, a,b\in Z, a\vdots 2, b\vdots 2\right\}$	додавання

№ варіанта	A	φ
6	R_+	$a*b=\dfrac{ab}{2012}$
7	$A=\left\{7^n : n\in Z, n-\text{í åï àðí å}\right\}$	множення
8	$A=\left\{\dfrac{a}{2^k}, a\in Z, k\in N\right\}$	додавання
9	$A=\left\{a-b\sqrt{5}, a,b\in Z, a^2+b^2\neq 0\right\}$	множення
10	$Q\setminus\left\{0\right\}$	$a*b=\dfrac{ab}{2}$

Тема 4. Елементи комбінаторики

Завдання 7. Розв’язати задачі:

а) На вершину гори ведуть $2N+1$ стежинок. Скількома способами турист може піднятися в гору і потім спуститися з неї? при умові, що підйом і спускання мають відбуватися по різних стежинках?

б) Скількома способами можна розташувати на полиці $N+3$ різних книг, якщо 2 певні книги мають стояти одна біля одної?; якщо 2 певні книги не мають стояти одна біля одної?

в) Скількома способами можна розподілити $3N+16$ студентів на три підгрупи, в першу з яких входять $N+2$ особи, в другу – $N+4$, а в третю – $N+10$ осіб?

г) Скільки існує різних автомобільних номерів, які складаються з п’яти цифр, якщо перша цифра не дорівнює N?

Розділ 2
Елементи теорії булевих функцій
Тема 5. Елементи теорії булевих функцій

Завдання 1. Для булевої функції f, заданої формулою:

1) скласти таблицю істинності;

2) знайти ДДНФ і ДКНФ двома способами:

а) за допомогою таблиці,

б) за допомогою рівносильних перетворень.

3) знайти зображення у вигляді многочлена Жегалкіна.

№ варіанта	f
1	$\left(\left(x\leftrightarrow y\right)\vee z\right)\rightarrow x$
2	$x\leftrightarrow\left(\left(y\vee z\right)\rightarrow y\right)$
3	$x\leftrightarrow\left(y\rightarrow\left(z\vee x\right)\right)$

№ варіанта	f
4	$(x \leftrightarrow y) \rightarrow (z \vee y)$
5	$x \leftrightarrow ((y \mid z) \rightarrow y)$
6	$((x \rightarrow y)\ z) \leftrightarrow x$
7	$(x \leftrightarrow y) \mid (z \vee x)$
8	$(x \rightarrow y) \rightarrow (z \vee x)$
9	$(x \rightarrow y) \leftrightarrow (z \mid y)$
10	$x \leftrightarrow (y\ (z \mid x))$

Завдання 2. Булеву функцію $f\left(\vec{x}^4\right)$, задану переліком десяткових еквівалентів наборів, на яких вона дорівнює одиниці,

1) мінімізувати в класі ДНФ двома методами: Квайна-МакКласкі і Карно-Вейча;
2) реалізувати схемою з функціональних елементів.

№ варіанта	$f\left(\vec{x}^4\right)$
1	3, 6, 7, 9, 10, 11, 15
2	2, 3, 5, 7, 11, 14, 15
3	0, 1, 4, 10, 11, 12, 15
4	2, 3, 6, 8, 9, 13, 14
5	2, 3, 5, 7, 10, 11, 15
6	0, 3, 5, 7, 10, 14, 15
7	0, 2, 5, 8, 13, 14, 15
8	0, 3, 5, 7, 8, 11, 12
9	1, 2, 3, 7, 11, 12, 15
10	0, 1, 2, 3, 6, 8, 15

Розділ 3
Елементи теорії графів
Елементи теорії алгоритмів

Тема 6. Елементи теорії графів

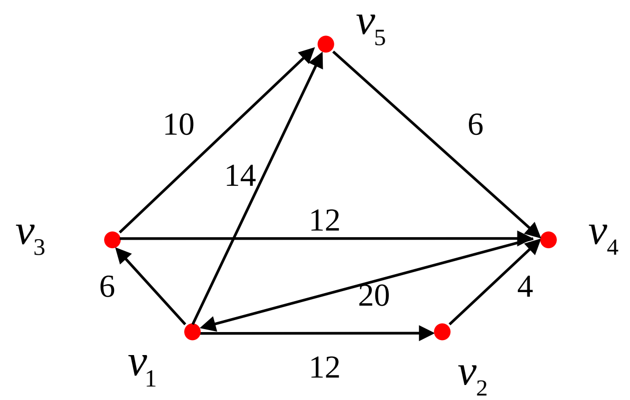
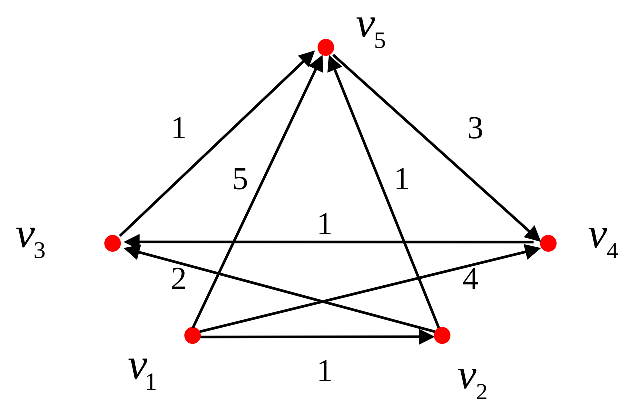
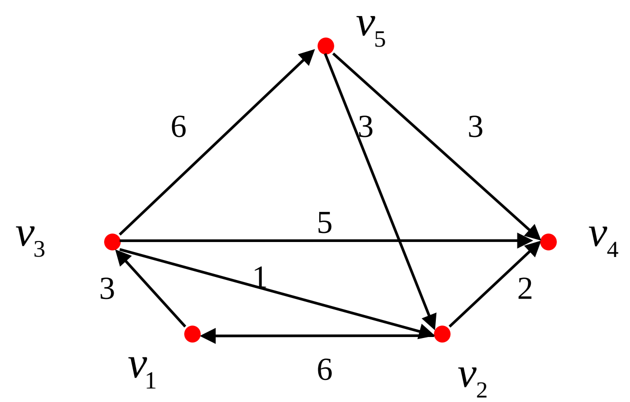
Завдання 1. І. Для зваженого орграфа $\vec{G} = \left(V, \vec{E}\right)$, заданого графічно, знайти:

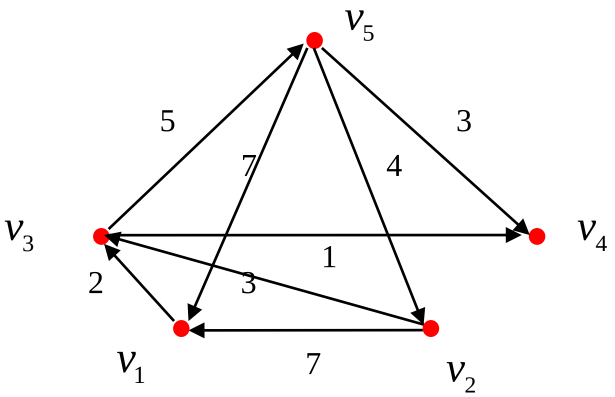
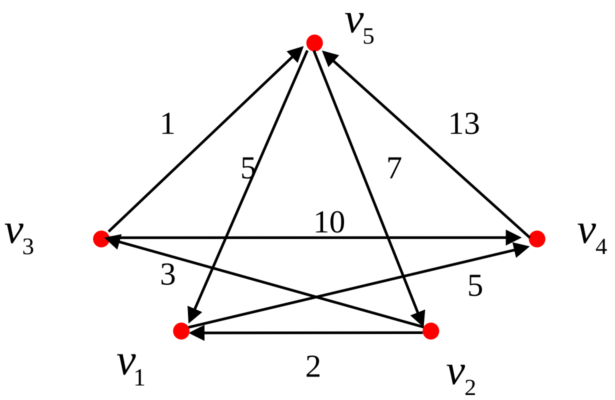
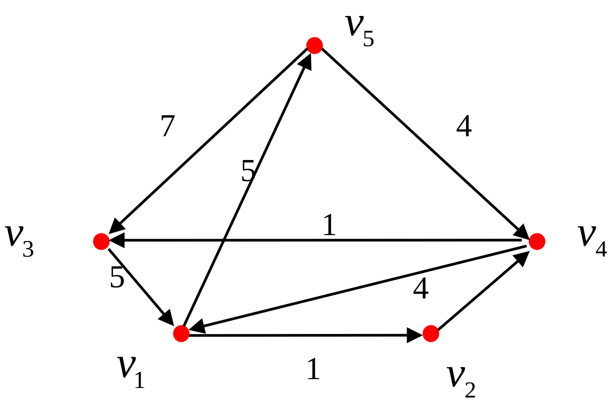
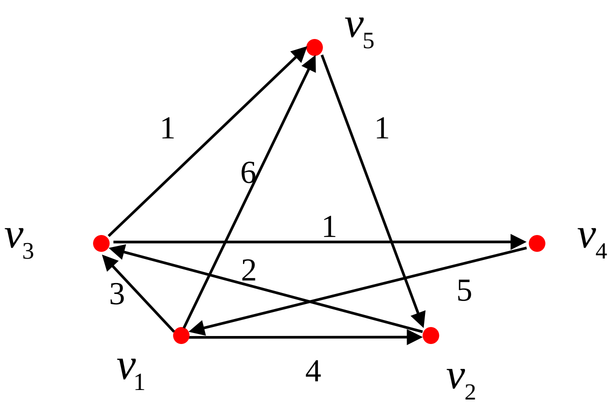
1) матрицю суміжності;
2) півстепені вузлів;
3) всі шляхи довжини 2 і 3;
4) матрицю досяжності;
5) компоненти сильної зв’язності;
6) матрицю зв’язності;
7) граф конденсації;
8) матрицю інцидентності;
9) матрицю довжин дуг;

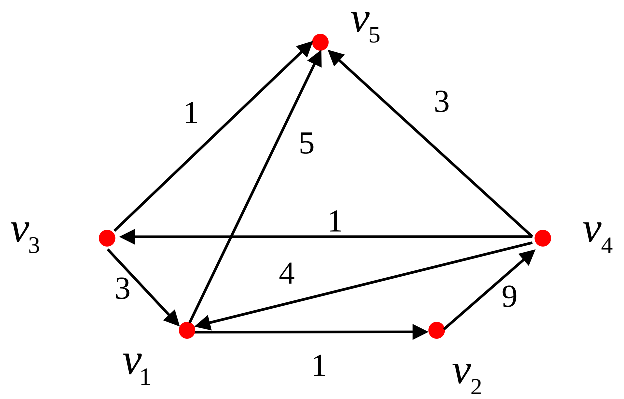
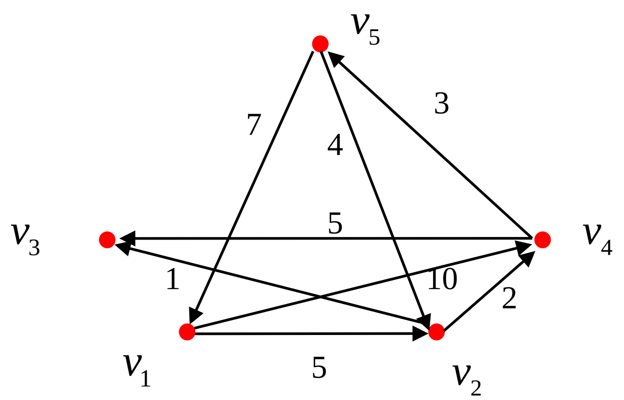
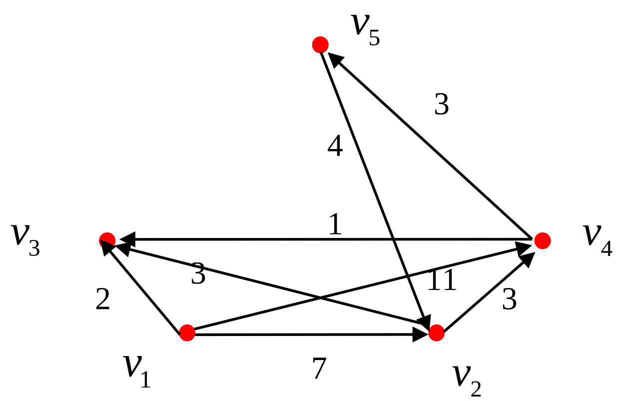
10) мінімальний шлях від вузла v_1 до вузла v_5 за допомогою алгоритму Дейкстри;

II. Для зваженого асоційованого графа $G=(V,E)$ (графа, отриманого з $\vec{G}$ скасуванням орієнтації) знайти:

11) матрицю суміжності;
12) степені вершин;
13) матрицю інцидентності;
14) ейлерів цикл. Якщо такого циклу в графі нема, то вилучити мінімально можливе число дуг, і в новому графі знайти такий цикл
15) матрицю довжин ребер;
16) мінімальне остовне дерево за допомогою алгоритму Краскала.

№ варіанта	$\vec{G}=(V,\vec{E})$
1	
2	
3	

№ варіанта	$\vec{G}=\left(V,\vec{E}\right)$
4	
5	
6	
7	

<table>
<tr><th>№ варіанта</th><th>$\vec{G} = \left(V, \vec{E}\right)$</th></tr>
<tr><td>8</td><td>
</td></tr>
<tr><td>9</td><td>
</td></tr>
<tr><td>10</td><td>
</td></tr>
</table>

Тема 7. Елементи теорії алгоритмів

Завдання 2. Для машини Тьюрінга

$$M = \left\{A = \{0,1\},\ Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, C, P,\ q_1,\ q_0,\ 0\right\},$$

заданої програмою P:

1) Записати програму а) у вигляді таблиці; б) у вигляді діаграми переходів.

2) За початковою конфігурацією K_1 знайти заключну конфігурацію K_0.

№ варіанта	P	K_1
1	$\begin{cases} q_1 0 \to q_1 0R, \\ q_1 1 \to q_2 1R, \\ q_2 0 \to q_3 0L, \\ q_2 1 \to q_2 1R, \\ q_3 0 \to q_0 1S, \\ q_3 1 \to q_4 1L, \\ q_4 0 \to q_3 1R, \\ q_4 1 \to q_4 0L. \end{cases}$	$K_1 = 01q_1 01^2 0$
2	$\begin{cases} q_1 0 \to q_1 0R, \\ q_1 1 \to q_2 1R, \\ q_2 0 \to q_3 0L, \\ q_2 1 \to q_2 1R, \\ q_3 0 \to q_0 0S, \\ q_3 1 \to q_4 0L, \\ q_4 0 \to q_3 1L, \\ q_4 1 \to q_4 1L. \end{cases}$	$K_1 = q_1 0^2 1^3 0$
3	$\begin{cases} q_1 0 \to q_2 0R, \\ q_1 1 \to q_1 1R, \\ q_2 0 \to q_0 0L, \\ q_2 1 \to q_3 1R, \\ q_3 0 \to q_4 0L, \\ q_3 1 \to q_3 0R, \\ q_4 0 \to q_4 0L, \\ q_4 1 \to q_0 1S. \end{cases}$	$K_1 = 0q_1 01^3 0$
4	$\begin{cases} q_1 0 \to q_2 0R, \\ q_1 1 \to q_0 1R, \\ q_2 0 \to q_3 1R, \\ q_2 1 \to q_2 1R, \\ q_3 0 \to q_4 0L, \\ q_3 1 \to q_3 1R, \\ q_4 0 \to q_1 0L, \\ q_4 1 \to q_1 0L. \end{cases}$	$K_1 = q_1 01^2 01^3$

№ варіанта	P	K_1
5	$\begin{cases} q_1 0 \to q_1 0R, \\ q_1 1 \to q_2 1R, \\ q_2 0 \to q_3 0L, \\ q_2 1 \to q_2 1R, \\ q_3 0 \to q_0 1S, \\ q_3 1 \to q_4 1L, \\ q_4 0 \to q_3 1R, \\ q_4 1 \to q_4 0L. \end{cases}$	$K_1 = 10q_1 01^2 0$
6	$\begin{cases} q_1 0 \to q_1 0R, \\ q_1 1 \to q_2 1R, \\ q_2 0 \to q_3 0L, \\ q_2 1 \to q_2 1R, \\ q_3 0 \to q_0 1S, \\ q_3 1 \to q_4 1L, \\ q_4 0 \to q_3 1R, \\ q_4 1 \to q_4 0L. \end{cases}$	$K_1 = 01^2 q_1 010$
7	$\begin{cases} q_1 0 \to q_2 0R, \\ q_1 1 \to q_0 1R, \\ q_2 0 \to q_3 1R, \\ q_2 1 \to q_2 1R, \\ q_3 0 \to q_4 0L, \\ q_3 1 \to q_3 1R, \\ q_4 0 \to q_1 0L, \\ q_4 1 \to q_1 0L. \end{cases}$	$K_1 = 10q_1 01^2 0$
8	$\begin{cases} q_1 0 \to q_2 0R, \\ q_1 1 \to q_1 1R, \\ q_2 0 \to q_0 0L, \\ q_2 1 \to q_3 1R, \\ q_3 0 \to q_4 0L, \\ q_3 1 \to q_3 0R, \\ q_4 0 \to q_4 0L, \\ q_4 1 \to q_0 1S. \end{cases}$	$K_1 = 1q_1 101^2 0$

№ варіанта	P	K_1
9	$\begin{cases} q_1 0 \to q_1 0R, \\ q_1 1 \to q_2 1R, \\ q_2 0 \to q_3 0L, \\ q_2 1 \to q_2 1R, \\ q_3 0 \to q_0 0S, \\ q_3 1 \to q_4 0L, \\ q_4 0 \to q_3 1L, \\ q_4 1 \to q_4 1L. \end{cases}$	$K_1 = 1^2 q_1 0^2 10$
10	$\begin{cases} q_1 0 \to q_2 0R, \\ q_1 1 \to q_1 1R, \\ q_2 0 \to q_0 0L, \\ q_2 1 \to q_3 1R, \\ q_3 0 \to q_4 0L, \\ q_3 1 \to q_3 0R, \\ q_4 0 \to q_4 0L, \\ q_4 1 \to q_0 1S. \end{cases}$	$K_1 = 01 q_1 01^3$

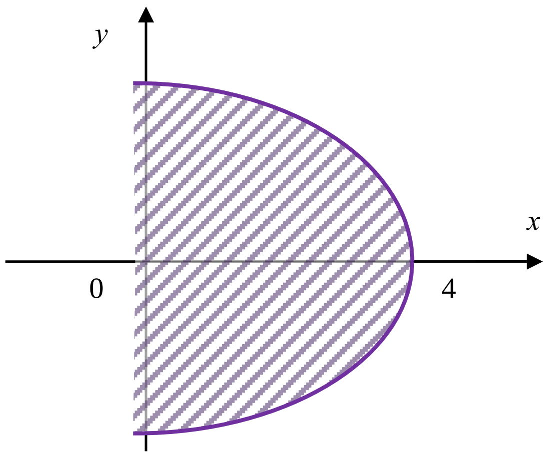
7. Зразки виконання і оформлення контрольних практичних завдань
Розділ 1
Елементи теорії множин і відношень
Тема 1. Основні поняття теорії множин

Завдання 1. Нехай U – множина точок площини, на якій задана прямокутна декартова система координат. Знайти та зобразити на площині множини:

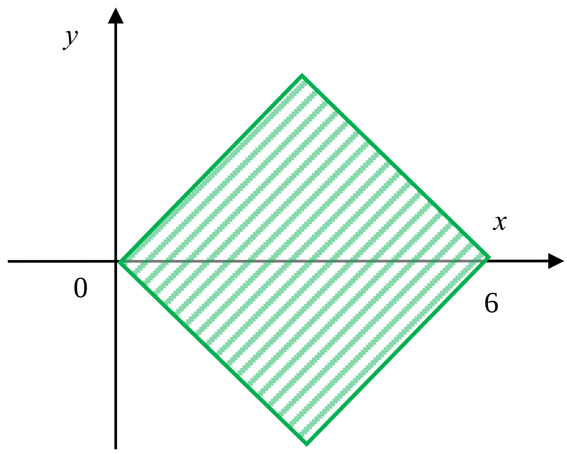
1) $A \cap B$; 2) $A \cup B$; 3) $A \setminus B$; 4) $B \setminus A$; 5) $\overline{A}$; 6) $\overline{B}$; 7) $A \Delta B$, якщо

$A = \left\{ (x, y) : y^2 + 3x - 6 \le 0 \right\}$ $\qquad$ $B = \left\{ (x, y) : |x - 3| + |y| \le 3 \right\}$

Розв'язання: Побудуємо схематично дані множини:



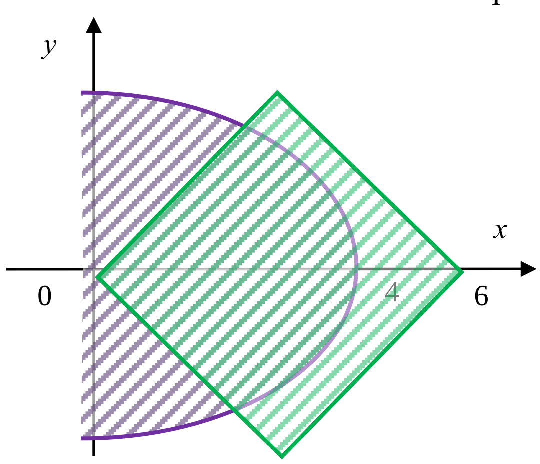
Множина $A = \left\{ (x, y) : y^2 + 3x - 12 \le 0 \right\}$ – внутрішня частина параболи $x \le -\dfrac{y^2}{3} + 4$ з вершиною у точці $(4, 0)$:



Множина $B = \left\{ (x, y) : |x - 3| + |y| \le 3 \right\}$ – внутрішня частина квадрату, утвореного перерізом прямих

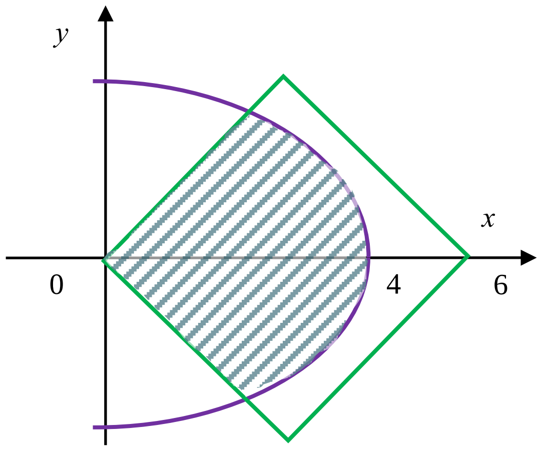
$$\begin{cases} y = 3 - (x - 3); \\ y = 3 + (x - 3); \\ y = -3 - (x - 3); \\ y = -3 + (x - 3). \end{cases}$$

За означеннями основних операцій над множинами будемо мати:



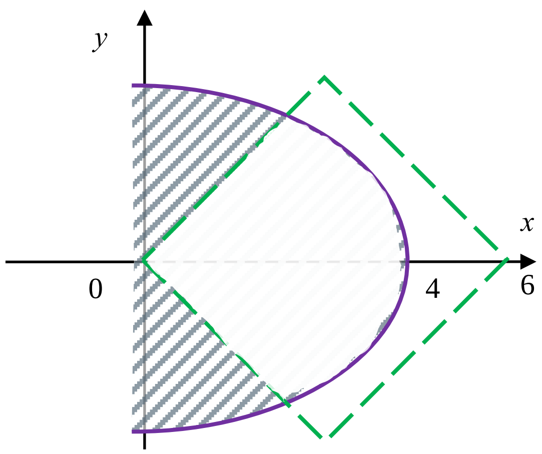
1) Об'єднання множин A і B:

$$A \bigcup B = \left\{ (x, y) : y^2 + 3x - 6 \le 0 \ \text{àáî} \ |x - 3| + |y| \le 3 \right\}$$



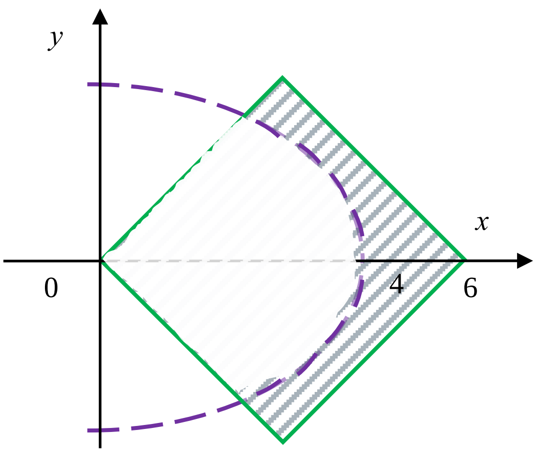
2) Переріз множин A і B:

$$A \bigcap B = \left\{ (x, y) : y^2 + 3x - 6 \le 0 \text{ і } |x-2| + |y| \le 2 \right\}$$



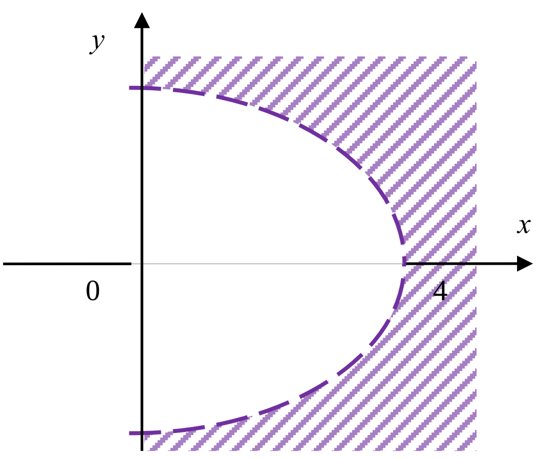
3) Різниця множин A і B:

$$A \setminus B = \left\{ (x, y) : y^2 + 3x - 6 \le 0 \text{ і } |x-2| + |y| > 2 \right\}$$



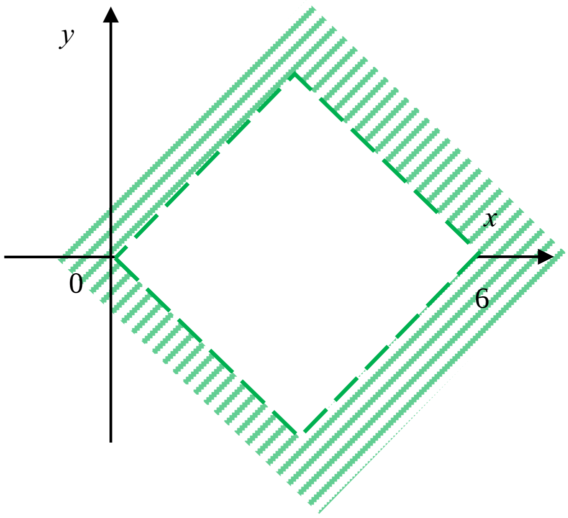
4) Різниця множин B і A:

$$B \setminus A = \left\{ (x, y) : |x-2| + |y| \le 2 \text{ і } 2y^2 + 3x - 6 > 0 \right\}$$

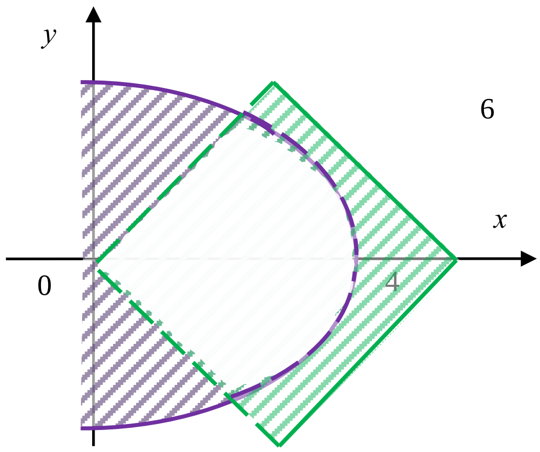


5) Доповнення до множини A:

$$\overline{A} = \left\{ (x, y) : y^2 + 3x - 6 > 0 \right\}$$



6) Доповнення до множини B:
$\overline{B} = \{(x,y): |x-3| + |y| > 3\}$



7) Симетрична різниця множин A і B:
$A \Delta B = (A \bigcup B) \setminus (A \bigcap B)$

Завдання 2. Довести справедливість співвідношень між множинами, використовуючи

а) закони алгебри множин;

б) діаграми Ейлера-Венна.

Доведення. а) Використовуючи закони алгебри множин, маємо:

$(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) =$ за властивістю $A \setminus B = A \cap \overline{B}$;

$= (A \bigcap \overline{C}) \bigcap \overline{(B \bigcap \overline{C})} =$ за законом де Моргана $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

$= (A \bigcap \overline{C}) \bigcap (\overline{B} \bigcup \overline{\overline{C}}) =$ за властивостями $\overline{\overline{A}} = A$,

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

$= A \bigcap (\overline{C} \bigcap (\overline{B} \bigcup C)) =$ за властивістю

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

$= A \bigcap ((\overline{C} \bigcap \overline{B}) \bigcup (\overline{C} \bigcap C)) =$ за властивостями $A \cap \overline{A} = \varnothing$,

$A \cup \varnothing = A,\ A \cap B = B \cap A$;

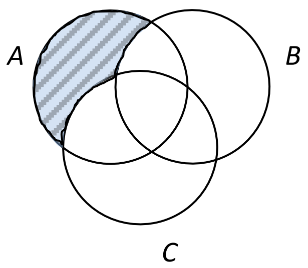
$= A \bigcap (\overline{B} \bigcap \overline{C}) =$ за властивістю

$$(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C);$$

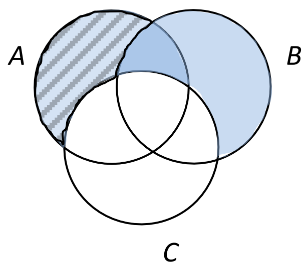
$=\left(A\bigcap \overline{B}\right)\bigcap \overline{C} =$ за властивістю $A\setminus B = A\cap \overline{B}$;

$=(A\setminus B)\setminus C.$

б) За допомогою діаграм Ейлера-Венна. Намалюємо діаграми окремо для лівої і правої частини рівності:



$(A\setminus B)\setminus C$



$(A\setminus C)\setminus(B\setminus C)$

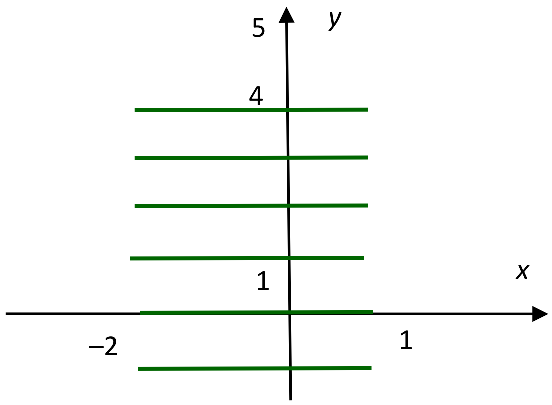
Оскільки заштриховані області на діаграмах збігаються, то рівність доведено.

Завдання 3. Знайти і зобразити в ПДСК множину $X\times Y$, якщо $X=\{x : x\in R, -2\le x\le 1\}$; $Y=\{y : y\in Z, -1\le y<5\}$;

Розв'язання: За означенням декартового добутку

$X\times Y=\{(x,y) : x\in R, -2\le x\le 1, y\in Z, -1\le y<5\}$.

Зобразимо множину $X\times Y$:



Таким чином, декартовий добуток $X\times Y$ є сукупність відрізків.

Тема 2. Відношення. Функції

Завдання 4. Для бінарного відношення ρ"b ділиться на a без остачі" на множині $A=\{2,3,4,6,8,9,12,18,24,36\}$:

1) Записати всі можливі способи задання: а) переліком елементів; б) характеристичною властивістю; в) матрицею, г) графіком, д) графом.

2) Знайти а) область визначення $D(\rho)$, б) область значень $E(\rho)$, в) обернене відношення ρ^{-1}, г) композицію $\rho\circ\rho^{-1}$, д) композицію $\rho^{-1}\circ\rho$, є) декартовий добуток $E(\rho^{-1}\circ\rho)\times D(\rho\circ\rho^{-1})$, е) образ $\rho(a)$, прообраз $\rho^{-1}(b)$.

3) Визначити властивості.

Розв'язання:

1) Задамо відношення всіма можливими способами:

а) переліком елементів:

$$\rho=\{(2,2),(2,4),(2,6),(2,8),(2,12),(2,18),(2,24),(2,36),(3,3),(3,6),(3,9),(3,12),(3,18),(3,24),(3,36),(4,4),(4,8),(4,12),(4,24),(4,36),(6,6),(6,12),(6,18),(6,24),(6,36),(8,8),(8,24),(9,9),(9,18),(9,36),(12,12),(12,24),(12,36),(18,18),(18,36),(24,24),(36,36)\}.$$

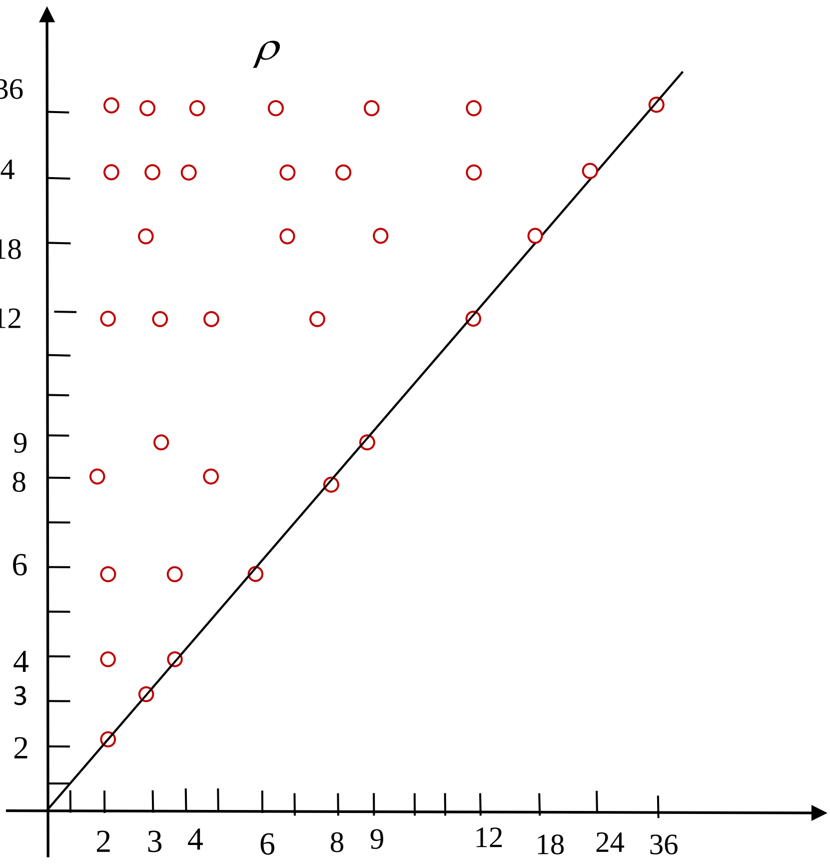
б) характеристичною властивістю:

$\rho=\{(a,b): a,b\in A,\ b$ ä³ëèòüñÿ í à a áåç î ñòà÷³$\}$;

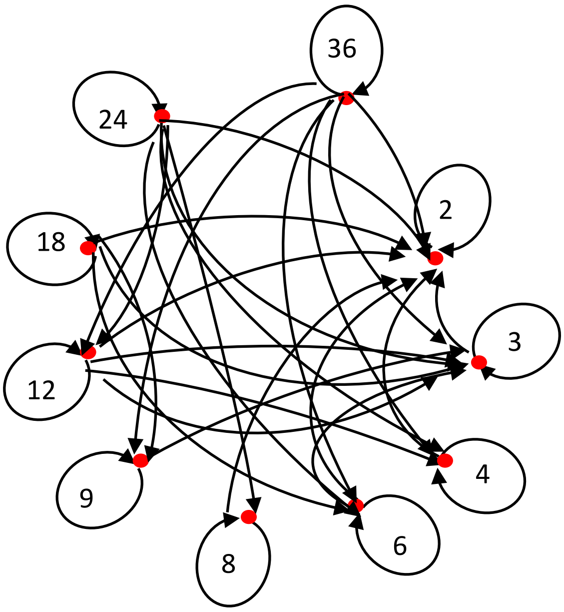
в) матрицею:

$$\begin{array}{c} \\ 2\\3\\4\\6\\8\\9\\12\\18\\24\\36 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} 2&3&4&6&8&9&12&18&24&36 \end{array}\\ \begin{pmatrix} 1&0&1&1&1&0&1&1&1&1\\ 0&1&0&1&0&0&1&1&1&1\\ 0&0&1&0&1&0&1&0&1&1\\ 0&0&0&1&0&0&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&1&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \end{array};$$

г) графіком:



д) графом.



2) а) Знайдемо область визначення, яку складають перші компоненти пар, які знаходяться у відношенні $\rho : D(\rho) = \{2,3,4,6,8,9,12,18,24,36\} = A$;

б) Знайдемо область значень, яку складають другі компоненти пар, які знаходяться у відношенні ρ: $E(\rho) = \{2,3,4,6,8,9,12,18,24,36\} = A$;

в) Знайдемо обернене відношення, для чого поміняємо місцями перші і другі компоненти пар, які знаходяться у відношенні ρ:

$$\rho^{-1} = \{(2,2),(4,2),(6,2),(8,2),(12,2),(18,2),(24,2),(36,2),(3,3),$$
$$(6,3),(9,3),(12,3),(18,3),(24,3),(36,3),(4,4),(8,4),(12,4),(24,4),$$
$$(36,4),(6,6),(12,6),(18,6),(24,6),(36,6),(8,8),(24,8),(9,9),(18,9),$$
$$(36,9),(12,12),(24,12),(36,12),(18,18),(36,18),(24,24),(36,36)\}.$$

г) Побудуємо композицію $\rho \circ \rho^{-1}$.

Процес знаходження $\rho \circ \rho^{-1}$ відповідно до означення композиції зручно зобразити таблицею, в якій реалізується перебір всіх можливих значень a,b,c. Для кожної пари $(a,b) \in \rho$ потрібно розглянути всі можливі пари $(b,c) \in \rho^{-1}$.

$(a,b) \in \rho$	$(b,c) \in \rho^{-1}$	$(a,c) \in \rho \circ \rho^{-1}$
$(2,2)$	$(2,2)$	$(2,2)$
$(2,4)$	$(4,2)$	$(2,2)$
$(2,6)$	$(6,2)$	$(2,2)$
	$(6,3)$	$(2,3)$
	$(6,6)$	$(2,6)$
$(2,8)$	$(8,2)$	$(2,2)$
	$(8,4)$	$(2,4)$
	$(8,8)$	$(2,8)$

$(2,12)$	$(12,2)$	$(2,2)$
	$(12,3)$	$(2,3)$
	$(12,4)$	$(2,4)$
	$(12,6)$	$(2,6)$
	$(12,12)$	$(2,12)$
$(2,18)$	$(18,2)$	$(2,2)$
	$(18,3)$	$(2,3)$
	$(18,6)$	$(2,6)$
	$(18,9)$	$(2,9)$
	$(18,18)$	$(2,18)$
…	…	….

Пари з останнього стовпця і утворюють композицію:

$$\rho \circ \rho^{-1} = \{(2,2),(2,3),(2,4),(2,6),(2,8),(2,12),(2,24),(2,36),(3,2),(3,3),(3,4),(3,6),(3,9),(3,12),(3,18),(3,24),(3,36),(4,2),(4,3),(4,4),(4,6),(4,8),(4,12),(4,18),(4,24),(4,36),(6,2),(6,3),(6,4),(6,6),(6,9),(6,12),(6,18),(6,24),(6,36),(8,2),(8,3),(8,4),(8,6),(8,8),(8,12),(8,24),(9,2),(9,3),(9,4),(9,6),(9,9),(9,18),(9,36),(12,2),(12,3),(12,4),(12,6),(12,8),(12,12),(12,24),(12,36),(18,2),(18,3),(18,4),(18,6),(18,9),(18,12),(18,18),(18,36),(24,2),(24,3),(24,4),(24,6),(24,8),(24,12),(24,24),(36,2),(36,3),(36,4),(36,6),(36,9),(36,12),(36,18),(36,36)\}.$$

д) Побудуємо композицію $\rho^{-1} \circ \rho$:

$(a,b) \in \rho^{-1}$	$(b,c) \in \rho$	$(a,c) \in \rho^{-1} \circ \rho$
$(2,2)$	$(2,2)$	$(2,2)$
	$(2,4)$	$(2,4)$
	$(2,6)$	$(2,6)$
	$(2,8)$	$(2,8)$
	$(2,12)$	$(2,12)$
	$(2,18)$	$(2,18)$
	$(2,24)$	$(2,24)$
	$(2,36)$	$(2,36)$

$(4,2)$	$(2,2)$	$(4,2)$
	$(2,4)$	$(4,4)$
	$(2,6)$	$(4,6)$
	$(2,8)$	$(4,8)$
	$(2,12)$	$(4,12)$
	$(2,18)$	$(4,18)$
	$(2,24)$	$(4,24)$
	$(2,36)$	$(4,36)$
$(6,2)$	$(2,2)$	$(6,2)$
	$(2,4)$	$(6,4)$
…	…	….

Пари з останнього стовпця і утворюють композицію:

$$\rho^{-1}\circ\rho=\{(2,2),(2,3),(2,4),(2,6),(2,8),(2,12),(2,24),(2,36),(4,2),$$
$$(4,4),(4,6),(4,8),(4,12),(4,18),(4,24),(4,36),(6,2),(6,3),(6,4),$$
$$(6,6),(6,8),(6,12),(6,18),(6,24),(6,36),(8,2),(8,4),(8,6),(8,8),$$
$$(8,12),(8,18),(8,24),(8,36),(12,2),(12,3),(12,4),(12,6),(12,8),$$
$$(12,12),(12,18),(12,24),(12,36),(18,2),(18,3),(18,4),(18,6),(18,8),$$
$$(18,9),(18,12),(18,18),(18,24),(18,36),(24,2),(24,3),(24,4),(24,6),$$
$$(24,8),(24,12),(24,18),(24,24),(24,36),(36,2),(36,4),(36,6),(36,8),$$
$$(36,12),(36,18),(36,24),(36,36),(3,3),(3,6),(3,9),(3,12),(3,18),$$
$$(3,24),(3,36),(9,3),(9,6),(9,9),(9,12),(9,18),(9,24),(9,36)\}.$$

є) Область значень $E\left(\rho^{-1}\circ\rho\right)$ складають другі компоненти пар, які знаходяться у відношенні $\rho^{-1}\circ\rho$:

$$E\left(\rho^{-1}\circ\rho\right)=\{2,3,4,6,8,9,12,18,24,36\}=A$$

Область визначення $D\left(\rho\circ\rho^{-1}\right)$ складають перші компоненти пар, які знаходяться у відношенні $\rho\circ\rho^{-1}$:

$$D\left(\rho\circ\rho^{-1}\right)=\{2,3,4,6,8,9,12,18,24,36\}=A$$

Утворимо декартовий добуток $E\left(\rho^{-1}\circ\rho\right)\times D\left(\rho\circ\rho^{-1}\right)$:

$$E\left(\rho^{-1}\circ\rho\right)\times D\left(\rho\circ\rho^{-1}\right)=A^2.$$

е) Знайдемо образ $\rho(9)$: $\rho(9)=\{9,18,36\}$;

Знайдемо прообраз $\rho^{-1}(12)$: $\rho^{-1}(12)=\{2,3,4,6,12\}$.

3) Визначимо властивості .

1) $\forall a\in A$ a ділиться на a без остачі – рефлексивність.

Наявність цієї властивості легко прослідкувати за матрицею: всі елементи головної діагоналі дорівнюють 1; за графом відношення: всі вузли мають петлі.

2) $\forall a,b\in A$ b ділиться на a без остачі або b ділиться на a без остачі – антисиметричність.

Наявність цієї властивості легко прослідкувати за матрицею: в матриці нема 1, симетрично розташованих відносно головної діагоналі; за графом: не існує двох різних вузлів, зв'язаних парою різнонапрямлених дуг.

3) $\forall a,b,c\in A$ a ділиться на b і b ділиться на c $\Rightarrow a$ ділиться на c – транзитивність.

Наявність цієї властивості легко прослідкувати за графом: для будь-яких двох дуг, таких, що одна напрямлена від a до b, а друга – від b до c, існує дуга, яка з'єднує a з c в напрямі від a до c. ((6,12); (12,24); (6,24))

Отже, відношення ρ є відношенням нестрогого порядку.

Завдання 5. Для заданого відображення f : а) знайти образ елемента x, б) знайти прообраз елемента y, в) вказати тип, г) у випадку бієкції знайти обернене відображення.

$$f(x)=2x-1,\ f(1),\ f^{-1}(1).$$

Розв'язання.

а) $f(1)=2\cdot 1-1=1$,

б) За означенням прообразу $f^{-1}(y)=\{x\in R\ :\ f(x)=y\}$, отже

$f^{-1}(1)=\{x\in R\ :\ 2x-1=1\}=\{x\in R\ :\ x=1\}=1$,

в) Перевіримо сюр'єктивність: $f(X)=Y$

$f(R)=\{y\in R:\ \exists x\in R\ \ 2x-1=y\}=R$, отже f – сюр'єктивно;

Перевіримо ін'єктивність:

$\forall x_1,x_2\in R\ \ x_1\neq x_2 \Rightarrow\ f(x_1)\neq f(x_2)$, отже f – ін'єктивно;

Таким чином, дане відображення є бієкцією.

г) Обернене відображення $f^{-1}(y)=\{x\in X\ :\ x=f(y)\}$:

$f^{-1}(y)=\{x\in X\ :\ x=2y-1\}=\dfrac{x+1}{2}$.

Тема 3. Множини з алгебраїчними операціями

Завдання 6. Визначити, чи є групою множина $A=\{11^n, n\in Z\}$ відносно операції множення.

Розв'язання. Операція множення цілих степенів числа 11 є алгебраїчною, тому що

$$11^n\cdot 11^m=11^{n+m}\in A$$

Перевіримо аксіоми групи.

1) Операція множення цілих степенів числа 11 є асоціативною: якщо $a = 11^{k_1}$, $b = 11^{k_2}$, $c = 11^{k_3}$, то

$\left(a \cdot b\right) \cdot c = \left(11^{k_1} \cdot 11^{k_2}\right) \cdot 11^{k_3} =$ за властивостями степенів

$= 11^{k_1} \cdot \left(11^{k_2} \cdot 11^{k_3}\right) = a \cdot \left(b \cdot c\right).$

2) В множині $A = \left\{11^n, n \in Z\right\}$ відносно звичайної операції множення існує нейтральний елемент. Ним є $1 = 11^0 \in A$.

3) В множині $A = \left\{11^n, n \in Z\right\}$ відносно звичайної операції множення існує симетричний елемент. Ним є $\left(11^n\right)^{-1} = \left(11^{-1}\right)^n \in A$.

Таким чином, $\left(A, \cdot\right)$ – група.

Тема 4. Елементи комбінаторики

Завдання 7. Розв’язати задачі:

а) Скільки словників треба видати, щоб можна було безпосередньо виконувати переклади з будь-якої з 5 мов: української, російської, англійської, німецької, французької – на будь-яку іншу з цих мов?

Розв’язання. І спосіб. Словник – це впорядкована пара з двох мов, наприклад, (українська, англійська), (російська, німецька). За правилом добутку число таких впорядкованих пар дорівнює 25. Оскільки обидві мови в словнику різні, то виключимо з цього числа однакові пари, яких буде 5. Остаточно маємо 20 словників.

ІІ спосіб. Задача про число розміщень по двом різним місцям (словник) двох з п’яти різних елементів (мов):

$$A_5^2 = \frac{5!}{3!} = 5 \cdot 4 = 20.$$

б) На книжковій полиці треба розташувати 15 різних книг з математики, 12 різних книг з фізики і 16 різних книг з інформатики. Скількома способами це можна зробити, якщо книги з одного предмету мають стояти разом, але книги з математики не повинні стояти поруч з книгами з інформатики?

Розв’язання. Книги з фізики повинні бути розташовані між книгами з математики і книгами з інформатики, тому можливими конфігураціями є МФІ та ІМФ. Книги з математики можна розташувати $P_{15} = 15!$ способами, книги з фізики – $P_{12} = 12!$ способами, книги з інформатики – $P_{16} = 16!$. За правилом добутку маємо

$$2 \cdot P_{15} \cdot P_{12} \cdot P_{16} = 2 \cdot 15! \cdot 12! \cdot 16! \text{ (способів).}$$

в) Скількома способами можна призначити комісію з 6 чоловіків і 8 жінок з групи осіб, яка містить 12 чоловіків і 20 жінок?

Розв’язання. Існує C_{12}^6 способів вибору чоловіків і C_{20}^8 способів вибору жінок. За правилом добутку маємо

$$C_{12}^6 \cdot C_{20}^8 = \frac{12!}{6!6!} \cdot \frac{20!}{8!12!} = 924 \cdot 125970 = 116396280 \text{ (способів).}$$

г) Скільки існує 7-значних телефонних номерів, в кожному з яких жодна цифра не повторюється?

Розв'язання. Задача про число розміщень по семи різним місцям семи з десяти різних цифр:

$$A_{10}^{7}=\frac{10!}{7!}=10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4=604800\,.$$

Розділ 2
Елементи теорії булевих функцій
Елементи теорії графів
Тема 5. Елементи теорії булевих функцій

Завдання 1 розв'язується з використанням означень елементарних булевих функцій, основних рівносильностей. При знаходженні многочлена Жегалкіна бажано використати хоча б два методи, щоб перевірити відповідь

Завдання 1. Для булевої функції f, заданої формулою:

1) скласти таблицю істинності;
2) знайти ДДНФ і ДКНФ двома способами:
   а) за допомогою таблиці,
   б) за допомогою рівносильних перетворень.
3) знайти зображення у вигляді многочлена Жегалкіна.

$$f=\left(\overline{xy}\,\&\left(x\to\bar z\right)\right)\mid\left(\bar x\to y\right)$$

Розв'язання.

1) Побудуємо таблицю істинності даної булевої функції

$$f=\underbrace{\left(\overline{xy}\,\&\left(x\to\bar z\right)\right)}_{A}\mid\left(\bar x\to y\right)$$

x	y	z	xy	$\overline{xy}$	$\bar z$	$x\to\bar z$	A	$\bar x$	$\bar x\to y$	f
0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	$1^{\vee}$
0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	$1^{\vee}$
0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	$0^{\wedge}$
0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	$0^{\wedge}$
1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	$0^{\wedge}$
1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	$1^{\vee}$
1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	$1^{\vee}$
1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	$1^{\vee}$

2) Знайдемо **ДДНФ** двома способами.

а) **за допомогою таблиці**:

1) З таблиці видно, що наборів, на яких функція набуває значення 1, п'ять: $(0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(1,0,1)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$.
2) Для кожного набору утворимо відповідну повну елементарну кон'юнкцію: $x^0y^0z^0$, $x^0y^0z^1$, $x^1y^0z^1$, $x^1y^1z^0$, $x^1y^1z^1$, або $\bar x\,\bar y\,\bar z$, $\bar x\,\bar y\,z$, $x\,\bar y\,z$, $xy\,\bar z$, xyz.
3) З'єднаємо отримані повні елементарні кон'юнкції знаками $\vee$:

$f\left(x,y,z\right)\equiv \underline{\underline{\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\vee \overline{x}\,\overline{y}z\vee x\overline{y}z\vee xy\overline{z}\vee xyz}}$ – отримали ДДНФ.

б) **за допомогою рівносильних перетворень**:

$f=\left(\overline{xy}\,\&\left(x\to \overline{z}\right)\right)|\left(\overline{x}\to y\right)\equiv$ – позбавимося у формулі від входження знаку $|$:

$\equiv \overline{\left(\overline{xy}\,\&\left(x\to \overline{z}\right)\right)\left(\overline{x}\to y\right)}\equiv$ – позбавимося у формулі від входження знаку $\to$:

$\equiv \overline{\left(\overline{xy}\,\&\left(\overline{x}\vee \overline{z}\right)\right)\left(x\vee y\right)}\equiv$ – доб'ємося того, щоб знак $\overline{\ }$ стояв тільки перед змінними, для чого скористаємося законами де Моргана:

$\equiv \overline{\left(\overline{xy}\,\&\left(\overline{x}\vee \overline{z}\right)\right)}\vee \overline{\left(x\vee y\right)}\equiv$

$\equiv \left(\overline{\overline{xy}}\vee \overline{\left(\overline{x}\vee \overline{z}\right)}\right)\vee \overline{x}\,\overline{y}\equiv$

$\equiv \underline{xy\vee xz\vee \overline{x}\,\overline{y}}\equiv$ – отримали ДНФ, елементарні кон'юнкції якої поповнимо до повних:

$\equiv xyz\vee xy\overline{z}\vee xyz\vee x\overline{y}z\vee \overline{x}\,\overline{y}z\vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\equiv$ – з однакових членів отриманої диз'юнкції залишаємо тільки один:

$\equiv \underline{\underline{\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\vee \overline{x}\,\overline{y}z\vee x\overline{y}z\vee xy\overline{z}\vee xyz}}$ – отримали ДДНФ.

Знайдемо **ДКНФ** двома способами:

а) за допомогою таблиці істинності.

1) З таблиці видно, що наборів, на яких функція набуває значення 0, три: $\left(0,1,0\right)$, $\left(0,1,1\right)$, $\left(1,0,0\right)$.

2) Для кожного набору утворимо відповідну повну елементарну диз'юнкцію: $x^0\vee y^1\vee z^0$, $x^0\vee y^1\vee z^1$, $x^1\vee y^0\vee z^0$, або

$x\vee \overline{y}\vee z$, $x\vee \overline{y}\vee \overline{z}$, $\overline{x}\vee y\vee z$.

3) З'єднаємо отримані повні елементарні диз'юнкції знаками $\&$:

$f\left(x,y,z\right)\equiv \underline{\underline{\left(x\vee \overline{y}\vee z\right)\left(x\vee \overline{y}\vee \overline{z}\right)\left(\overline{x}\vee y\vee z\right)}}$ – отримали ДКНФ.

б) за допомогою рівносильних перетворень:

$f=\left(\overline{xy}\,\&\left(x\to \overline{z}\right)\right)|\left(\overline{x}\to y\right)\equiv$ – позбавимося у формулі від входження знаку $|$:

$\equiv \overline{\left(\overline{xy}\,\&\left(x\to \overline{z}\right)\right)\left(\overline{x}\to y\right)}\equiv$ – позбавимося у формулі від входження знаку $\to$:

$\equiv \overline{\left(\overline{xy}\,\&\left(\overline{x}\vee \overline{z}\right)\right)\left(x\vee y\right)}\equiv$ – доб'ємося того, щоб знак $\overline{\ }$ стояв тільки перед змінними, для чого скористаємося законами де Моргана:

$\equiv \overline{\left(\overline{xy}\,\&\left(\overline{x}\vee \overline{z}\right)\right)}\vee \overline{\left(x\vee y\right)}\equiv$

$$\equiv\left(\overline{\overline{xy}}\vee\overline{\left(\bar{x}\vee\bar{z}\right)}\right)\vee\bar{x}\bar{y}\equiv$$

$\equiv xy\vee xz\vee\bar{x}\bar{y}\equiv$ – отримали ДНФ, з якої за дистрибутивністю отримаємо КНФ:

$$\equiv\left(\underbrace{x\vee\bar{x}}_{1}\right)\left(x\vee\bar{y}\right)\left(\bar{x}\vee y\vee z\right)\left(\underbrace{\underbrace{\bar{y}\vee y}_{1}\vee z}_{1}\right)\equiv$$

$\equiv\underline{\left(x\vee\bar{y}\right)\left(\bar{x}\vee y\vee z\right)}\equiv$ – отримали КНФ, елементарні диз’юнкції якої поповнимо до повних:

$\equiv\underline{\underline{\left(x\vee\bar{y}\vee z\right)\left(x\vee\bar{y}\vee\bar{z}\right)\left(\bar{x}\vee y\vee z\right)}}$ – отримали ДКНФ.

3) Знайдемо зображення даної функції у вигляді многочлена Жегалкіна.

I спосіб. Застосуємо ***метод заміни***, за яким у формулі в ДДНФ робимо заміну $\bar{x}=x\oplus 1$, $\vee=\oplus$.

$f\left(x,y,z\right)\equiv\bar{x}\bar{y}\bar{z}\vee\bar{x}\bar{y}z\vee x\bar{y}z\vee xy\bar{z}\vee xyz\equiv$ – замінимо $\bar{x}$ на $x\oplus 1$, $\vee$ на $\oplus$:

$\equiv\left(x\oplus 1\right)\left(y\oplus 1\right)\left(z\oplus 1\right)\oplus\left(x\oplus 1\right)\left(y\oplus 1\right)z\oplus x\left(y\oplus 1\right)z\oplus xy\left(z\oplus 1\right)\oplus xyz\equiv$

– розкриємо дужки:

$\equiv\left(xyz\oplus xz\oplus yz\oplus z\oplus xy\oplus x\oplus y\oplus 1\right)\oplus\left(xyz\oplus xz\oplus yz\oplus z\right)\oplus$

$\oplus\left(xyz\oplus xz\right)\oplus\left(xyz\oplus xy\right)\oplus xyz\equiv$

$\equiv xyz\oplus xz\oplus yz\oplus z\oplus xy\oplus x\oplus y\oplus 1\oplus xyz\oplus xz\oplus yz\oplus z\oplus$

$\oplus xyz\oplus xz\oplus xyz\oplus xy\oplus xyz\equiv$ – приведемо подібні, пам’ятаючи, що парне число однакових доданків в сумі за модулем 2 дає 0:

$\equiv\underline{\underline{1\oplus x\oplus y\oplus xz\oplus xyz}}$ – многочлен Жегалкіна.

II спосіб. Застосуємо ***метод невизначених коефіцієнтів***. Запишемо функцію у вигляді многочлена Жегалкіна від трьох змінних у загальному вигляді:

$$f\left(x,y,z\right)=a_0\oplus a_1x\oplus a_2y\oplus a_3z\oplus a_4xy\oplus a_5xz\oplus a_6yz\oplus a_7xyz\,.$$

Визначимо коефіцієнти, використовуючи значення функції на всіх наборах. Підставимо в обидві частини різні значення змінних x,y,z, отримаємо систему рівнянь (одне рівняння для кожного рядка таблиці).

$$\begin{cases}1=a_0;\\1=a_0\oplus a_3;\\0=a_0\oplus a_2;\\0=a_0\oplus a_2\oplus a_3\oplus a_6;\\0=a_0\oplus a_1;\\1=a_0\oplus a_1\oplus a_3\oplus a_5;\\1=a_0\oplus a_1\oplus a_2\oplus a_4;\\1=a_0\oplus a_1\oplus a_2\oplus a_3\oplus a_4\oplus a_5\oplus a_6\oplus a_7.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_0=1;\\a_1=1;\\a_2=1;\\a_3=0;\\a_4=0;\\a_5=1;\\a_6=0;\\a_7=1.\end{cases}$$

Розв'язавши систему, підставимо знайдені коефіцієнти в многочлен. Отже, $f\left(x,y,z\right)=\underline{\underline{1\oplus x\oplus y\oplus xz\oplus xyz}}$ – многочлен Жегалкіна.

III спосіб. Застосуємо ***метод трикутника Паскаля*** по одиницях його лівої сторони за таблицею істинності функції.

x	y	z	трикутник Паскаля
0	0	0	1 1 0 0 0 1 1 1
0	0	1	0 1 0 0 1 0 0
0	1	0	1 1 0 1 1 0
0	1	1	0 1 1 0 1
1	0	0	1 0 1 1
1	0	1	1 1 0
1	1	0	0 1
1	1	1	1

Верхня сторона трикутника є вектор значень функції. Будь-який інший елемент трикутника є сума за модулем 2 двох сусідніх елементів попереднього рядка. Ліва сторона трикутника містить п'ять одиниць. Отже, многочлен Жегалкіна буде містити п'ять доданків. Перша одиниця трикутника відповідає набору (0 0 0). Отже, перший доданок многочлена Жегалкіна є 1. Друга одиниця трикутника відповідає набору (0 1 0). Отже, другий доданок многочлена Жегалкіна є y. Третя одиниця трикутника відповідає набору (1 0 0). Отже, третій доданок многочлена Жегалкіна є x. Четверта одиниця трикутника відповідає набору (1 0 1). Отже, четвертий доданок многочлена Жегалкіна є xz. П'ята одиниця трикутника відповідає набору (1 1 1). Отже, п'ятий доданок многочлена Жегалкіна є xyz.

Остаточно маємо:

$f\left(x,y,z\right)=\underline{\underline{1\oplus x\oplus y\oplus xz\oplus xyz}}$ – многочлен Жегалкіна.

Завдання № 2. Булеву функцію $f\left(\vec{x}^4\right)$, задану переліком десяткових еквівалентів наборів, на яких вона дорівнює одиниці,

1) мінімізувати в класі ДНФ двома методами: Квайна-МакКласкі і Карно-Вейча;
2) реалізувати схемою з функціональних елементів.

$$f\left(\vec{x}^4\right)=\vee\left(1,3,6,7,8,10,14,15\right)$$

Розв'язання.

а) Мінімізуємо дану булеву функцію методом Квайна-МакКласкі.

І. Одержимо скорочену ДНФ для даної булевої функції, йдучи за алгоритмом Квайна-МакКласкі.

№ набору	Крок 1	Крок 2	Крок 3	Крок 3	Прості імпліканти
1	0001	0001 V	00-1	00-1	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_4$
3	0011	1000 V	10-0	10-0	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_4$
6	0110	0011 V V	0-11	0-11	$\bar{x}_1x_3x_4$
7	0111	0110 V V	011- V	-11-	x_2x_3
8	1000	1010 V V	-110 V	1-10	$x_1x_3\bar{x}_4$
10	1010	0111 V V V	1-10		
14	1110	1110 V V V	-111 V		
15	1111	1111 V V	111- V		

Відповідь: $f\left(\vec{x}^4\right)=\overline{x}_1\overline{x}_2x_4 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1x_3x_4 \vee x_2x_3 \vee x_1x_3\overline{x}_4$ – СДНФ.

II. Одержимо тупикову ДНФ для даної булевої функції, йдучи за алгоритмом Квайна-МакКласкі.

Побудуємо імплікантну таблицю:

K_i / $(\Pi I)_i$	0001	0011	0110	0111	1000	1010	1110	1111	
00-1	1	1	0	0	0	0	0	0	V
10-0	0	0	0	0	1	1	0	0	V
0-11	0	1	0	1	0	0	0	0	
-11-	0	0	1	1	0	0	1	1	V
1-10	0	0	0	0	0	1	1	0	

Ця таблиця має одне покриття, його утворюють перший, другий і четвертий рядки. Отже, тупикова ДНФ

$$f\left(\vec{x}^4\right)=\overline{x}_1\overline{x}_2x_4 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_4 \vee x_2x_3$$

є мінімальною.

Відповідь: $f\left(\vec{x}^4\right)=\overline{x}_1\overline{x}_2x_4 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_4 \vee x_2x_3$ – МДНФ.

б) Мінімізуємо дану булеву функцію методом Карно-Вейча, йдучи за алгоритмом.

1) Сформуємо карту Карно для даної булевої функції f.

x_3	0	0	1	1
x_4	0	1	1	0
x_1 x_2				
0 0	0	1	1	0
0 1	0	0	1	1
1 1	0	0	1	1
1 0	1	0	0	1

2) Знайдемо покриття всіх одиниць функції f прямокутниками максимальних розмірів так, щоб число таких прямокутників було б найменшим.

З таблиці видно, що імпліканти з однієї змінної відсутні, тому що немає двох сусідніх рядків або стовпців, які вміщують тільки одиниці.

Будемо шукати імпліканти з двох і трьох змінних, тобто прямокутники, які являють собою два клітинки з одиницями, що витягнуті в одну лінію, або складені у великий квадрат. Бачимо, що в першому рядку існує прямокутник, який покривається імплікантом з трьох змінних $\overline{x}_1\overline{x}_2x_4$. В другому і третьому рядку і в третьому і четвертому стовпці існує великий квадрат, який покривається імплікантом з двох змінних x_2x_3. В четвертому рядку існує прямокутник, який покривається імплікантом з трьох змінних $x_1\overline{x}_2\overline{x}_4$.

Таким чином, всі одиниці покриті імплікантами.

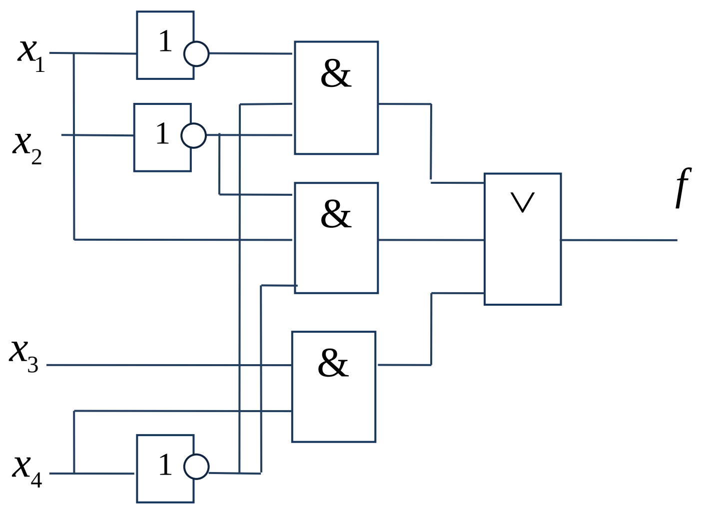
3) Утворимо диз’юнкцію імплікантів, що відповідають прямокутникам покриття:

$$f\left(\vec{x}^4\right) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee x_2 x_3$$

Таким чином, знайдена мінімальна ДНФ.

2) Реалізуємо схемою з функціональних елементів в стандартному базисі.

Схема, що реалізує дану булеву функцію в системі базисних елементів $\&$, $\vee$, $\bar{\ }$, має вигляд:



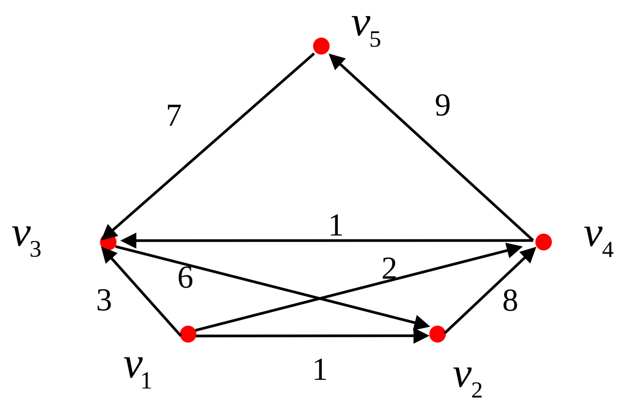
Тема 5. Елементи теорії графів

Завдання 1. I. Для зваженого орграфа $\vec{G} = \left(V, \vec{E}\right)$, заданого графічно, знайти:

1) матрицю суміжності;
2) півстепені вузлів;
3) всі шляхи довжини 2 і 3;
4) матрицю досяжності;
5) компоненти сильної зв’язності;
6) матрицю зв’язності;
7) граф конденсації;
8) матрицю інцидентності;
9) матрицю довжин дуг;
10) мінімальний шлях від вузла v_1 до вузла v_5 за допомогою алгоритму Дейкстри;

II. Для зваженого асоційованого графа $G = (V, E)$ (графа, отриманого з $\vec{G}$ скасуванням орієнтації) знайти:

11) матрицю суміжності;
12) степені вершин;
13) матрицю інцидентності;
14) ейлерів цикл. Якщо такого циклу в графі нема, то вилучити мінімально можливе число дуг, і в новому графі знайти такий цикл
15) матрицю довжин ребер;
16) мінімальне остовне дерево за допомогою алгоритму Краскала.



Розв'язання. I. Для зваженого орграфа $\vec{G} = \left(V, \vec{E}\right)$, заданого графічно

1) Знайдемо матрицю суміжності. Елемент a_{ij} матриці суміжності дорівнює 1, якщо вузли v_i і v_j суміжні, і дорівнює 0 в противному випадку.

$$A\left(\vec{G}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Знайдемо півстепені вузлів за властивостями матриці суміжності. Сума елементів i-го рядка матриці суміжності орієнтованого графа дорівнює півстепеню виходу $d^-\left(v_i\right)$ вузла v_i. Сума елементів i-го стовпця матриці суміжності орієнтованого графа дорівнює півстепеню виходу $d^+\left(v_i\right)$ вузла v_i. Зведемо знайдені півстепені вузлів у таблицю:

Вузол	$d^-\left(v_i\right)$	$d^+\left(v_i\right)$
v_1	3	1
v_2	1	2
v_3	1	3
v_4	2	2
v_5	1	1

3) Знайдемо всі шляхи довжини 2. Оскільки число всіх шляхів довжини k, які з'єднують будь-яку пару вузлів v_i, v_j графа, дорівнює ij-му елементу матриці $A^k\left(\vec{G}\right)$, то для знаходження всіх шляхів довжини 2 піднесемо до другого степеня матрицю суміжності $A = A\left(\vec{G}\right)$:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Оскільки елемент a_{12} в матриці A^2 дорівнює 1, в $\vec{G}$ існує один шлях довжини 2 з вершини v_1 у вершину v_2. Це шлях v_1, v_3, v_2.

Аналогічно знаходяться інші шляхи довжини 2.

Зведемо знайдені шляхи довжини 2 у таблицю:

Початок	Кінець	Шлях довжини 2
v_1	v_2	v_1, v_3, v_2
v_1	v_3	v_1, v_4, v_3
v_1	v_4	v_1, v_2, v_4
v_1	v_5	v_1, v_4, v_5
v_2	v_3	v_2, v_4, v_3
v_2	v_5	v_2, v_4, v_5
v_3	v_4	v_3, v_2, v_4
v_4	v_2	$v_4, v_3, v_2,$
v_4	v_3	v_4, v_5, v_3
v_5	v_2	v_5, v_3, v_2

4) Знайдемо матрицю досяжності $R\left(\vec{G}\right)$. Для цього обчислимо вираз

$$E + A + A^2 + A^3 + A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

і застосуємо до нього булеве відображення:

$$R\left(\vec{G}\right) = B\left(E + A + A^2 + A^3 + A^4\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5) Використаємо матрицю досяжності для виявлення компонентів сильної зв’язності графа $\vec{G}$. Знайдемо

$$R^T\left(\vec{G}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

і обчислимо матрицю $R\left(\vec{G}\right) \otimes R^T\left(\vec{G}\right)$, де $\otimes$ – поелементне множення матриць:

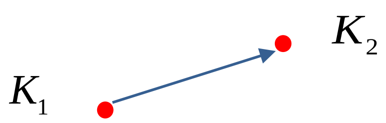
$$R\left(\vec{G}\right)\otimes R^{T}\left(\vec{G}\right)=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&1&1&1\\0&1&1&1&1\\0&1&1&1&1\\0&1&1&1&1\end{pmatrix}.$$

Ця матриця має блоково-діагональий вигляд, де кожний блок визначає сильну компоненту зв'язності. В графа $\vec{G}$ дві компоненти зв'язності. Так, вершина v_1 складає одну сильну компоненту зв'язності $K_1=\{v_1\}$. Вершини v_2, v_3, v_4, v_5 також складають сильну компоненту зв'язності $K_2=\{v_2,v_3,v_4,v_5\}$.

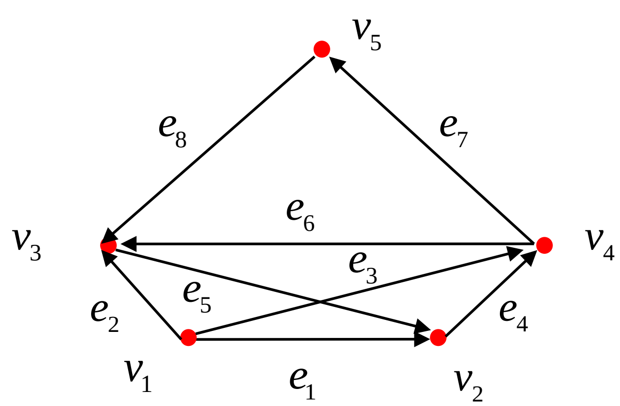
6) Знайдемо матрицю зв'язності:

$$S\left(\vec{G}\right)=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&1&1&1\\0&1&1&1&1\\0&1&1&1&1\\0&1&1&1&1\end{pmatrix}.$$

7) граф конденсації $\vec{G}*$ графа $\vec{G}$ має вигляд:



8) Знайдемо матрицю інцидентності $B\left(\vec{G}\right)$ графа $\vec{G}$. Для цього позначимо дуги графа $\vec{G}$ наступним чином:



Елемент b_{ij} матриці інцидентності $B\left(\vec{G}\right)$ дорівнює –1, якщо дуга $\left(v_i,v_j\right)$ виходить з вершини v_i, дорівнює 1, якщо дуга $\left(v_i,v_j\right)$ входить у вершину v_i, і дорівнює 0, якщо дуга $\left(v_i,v_j\right)$ не є інцидентною вершині v_i.

$$B\left(\vec{G}\right)=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

9) Знайдемо матрицю довжин дуг. Елемент c_{ij} матриці довжин дуг $C\left(\vec{G}\right)$ дорівнює довжині дуги $\left(v_i, v_j\right)$, якщо така дуга існує і дорівнює $\propto$ в протилежному випадку.

$$C\left(\vec{G}\right)=\begin{pmatrix} \propto & 1 & 3 & 2 & \propto \\ \propto & \propto & \propto & 8 & \propto \\ \propto & 6 & \propto & \propto & \propto \\ \propto & \propto & 1 & \propto & 9 \\ \propto & \propto & 7 & \propto & \propto \end{pmatrix}$$

10) Знайдемо мінімальний шлях від вузла v_1 до вузла v_5 за допомогою алгоритму Дейкстри.

Протокол роботи алгоритму будемо оформлювати у вигляді таблиці, яку побудуємо в процесі розв'язування.

Крок 0. Всі вузли помічаються: стартовий вузол v_1 отримує постійну мітку 0, всі інші вузли отримують тимчасові мітки ∞:

$$l^*\left(v_1\right)=0,\ \forall v_j \neq v_1\ \ l\left(v_j\right)=\infty.$$

Ці значення занесемо в нульовий рядок таблиці.

Крок 1. Для вузлів v_2, v_3, v_4 з тимчасовими мітками, в які заходять дуги з вузла v_1 з постійною міткою, оновлюємо мітки:

$G\left(v_1\right)=\left\{v_2, v_3, v_4\right\}$;

$l\left(v_2\right)=\min\left\{\infty, 0+1\right\}=1_1$;

$l\left(v_3\right)=\min\left\{\infty, 0+3\right\}=3_1$;

$l\left(v_4\right)=\min\left\{\infty, 0+2\right\}=2_1$;

$l^*\left(v_2\right)=\min\left\{1_1, 3_1, 2_1\right\}=1.$

Постійну мітку отримує вузол v_2.

Ці значення занесемо в перший рядок таблиці.

Крок 2. Для вузла v_4 з тимчасовою мітками, в яку заходить дуга з вузла v_2 з постійною міткою, оновлюємо мітки:

$G(v_2) = \{v_4\}$;

$l(v_4) = \min\{2_1, 1+8\} = 2_2$;

$l^*(v_4) = 2$.

Постійну мітку отримує вузол v_4.

Ці значення занесемо в другий рядок таблиці.

Крок 3. Для вузлів v_3, v_5 з тимчасовими мітками, в які заходять дуги з вузла v_4 з постійною міткою, оновлюємо мітки:

$G(v_4) = \{v_3, v_5\}$;

$l(v_3) = \min\{3_1, 2+1\} = 3_3$

$l(v_5) = \min\{\infty, 2+9\} = 11_3$;

$l^*(v_3) = \min\{3_3, 11_3\} = 3.$

Постійну мітку отримує вузол v_3.

Ці значення занесемо в третій рядок таблиці.

Крок 4. З вузла v_3 з постійною міткою не виходять дуги до вузлів з тимчасовими мітками.

$G(v_3) = \varnothing$;

$l(v_5) = \min\{11_3\} = 11_4$,

$l^*(v_5) = 11.$

Ці значення занесемо в четвертий рядок таблиці.

Таблиця.

Кроки \ Вузли	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
0	$\underline{0}$	∞	∞	∞	∞
1	$\underline{0}$	$\underline{1}$	3_1	2_1	∞
2	$\underline{0}$	$\underline{1}$	3_1	$\underline{2}$	∞
3	$\underline{0}$	$\underline{1}$	$\underline{3}$	$\underline{2}$	11_3
4	$\underline{0}$	$\underline{1}$	$\underline{3}$	$\underline{2}$	$\underline{11}$

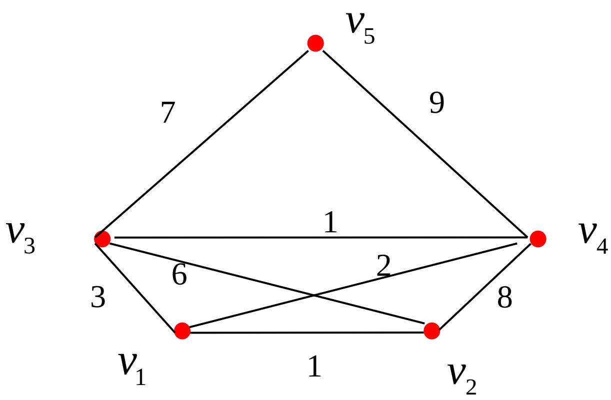
Всі вузли отримали постійні мітки. Алгоритм завершено:

$$d(v_1, v_2) = 1,\ d(v_1, v_3) = 3,\ d(v_1, v_4) = 2,\ d(v_1, v_5) = 11 .$$

Щоб знайти мінімальний шлях від вузла v_1 до вузла v_5, використаємо тимчасові індекси в постійних міток: у вузла v_5 – 11_4, у вузла v_4 – 2_1. Отже, мінімальний шлях з v_1 до v_5 є s: v_1, v_4, v_5. Його довжина

$$l(s) = \sum_{(v_i, v_j) \in s} c(v_i, v_j) = c(v_1, v_4) + c(v_4, v_5) = 2 + 9 = 11.$$

II. Для зваженого асоційованого графа $G=(V,E)$ (графа, отриманого з $\vec{G}$ скасуванням орієнтації)



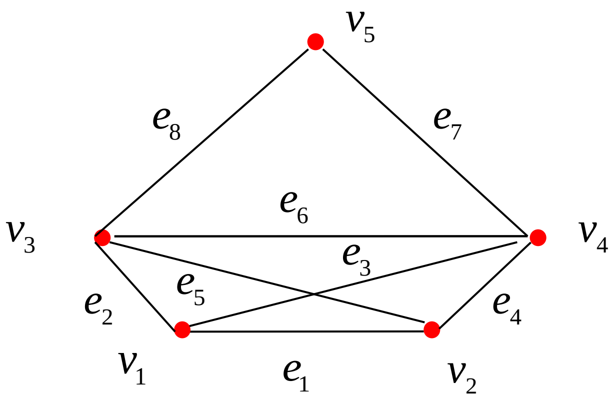
11) Знайдемо матрицю суміжності. Елемент a_{ij} матриці суміжності дорівнює 1, якщо вузли v_i і v_j суміжні, і дорівнює 0 в противному випадку.

$$A(G)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

12) Знайдемо степені вершин за властивостями матриці суміжності. Сума елементів i-го рядка або i-го стовпця матриці суміжності неорієнтованого графа дорівнює степеню $d(v_i)$ вершини v_i. Зведемо знайдені степені вершин у таблицю:

Вершина	$d(v_i)$
v_1	4
v_2	3
v_3	4
v_4	4
v_5	2

13) Знайдемо матрицю інцидентності. Для цього позначимо дуги графа G наступним чином:

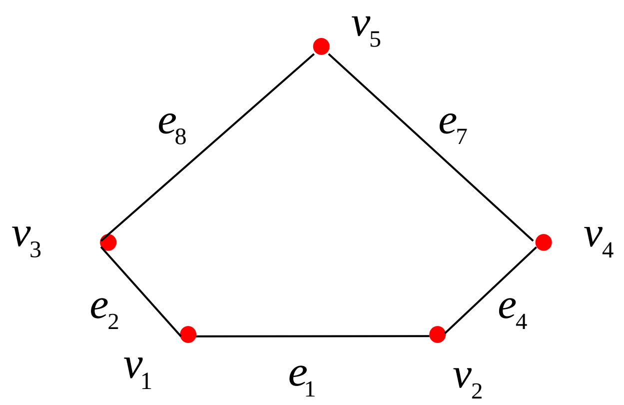


Елемент b_{ij} матриці інцидентності $B(G)$ дорівнює 1, якщо ребро (v_i,v_j) інцидентне вершині v_i, і дорівнює 0, якщо ребро (v_i,v_j) не є інцидентним вершині v_i.

$$B(G)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

14) Знайдемо ейлерів цикл. Оскільки в графі G існують вершини з непарним степенем, то ейлерового циклу в графі нема.

Вилучимо з графа G ребра e_3, e_5, e_6.



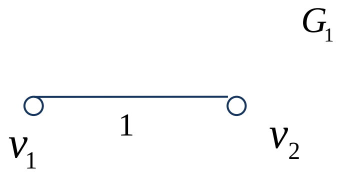
Тоді, наприклад, ейлеровий цикл: v_1, v_2, v_4, v_5, v_3, v_1.

15) Знайдемо матрицю довжин ребер. Елемент c_{ij} матриці довжин дуг $C(G)$ дорівнює довжині ребра (v_i,v_j), якщо таке ребро існує і дорівнює $\propto$ в протилежному випадку.

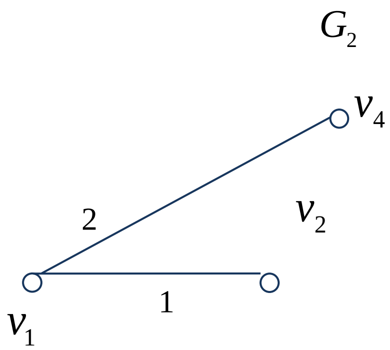
$$C(G)=\begin{pmatrix} \propto & 1 & 3 & 2 & \propto \\ 1 & \propto & 6 & 8 & \propto \\ 3 & 6 & \propto & 1 & 7 \\ 2 & 8 & 1 & \propto & 9 \\ \propto & \propto & 7 & 9 & \propto \end{pmatrix}$$

16) Знайдемо мінімальне остовне дерево за допомогою алгоритму Краскала.

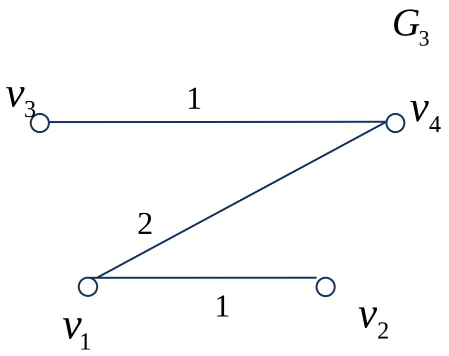
Крок 1. Вибираємо в графі G ребро мінімальної довжини. Ребер мінімальної довжини 1 два: (v_1, v_2), (v_3, v_4). Беремо (v_1, v_2). Будуємо граф G_1, що складається з даного ребра і інцидентних йому вершин. Покладаємо $i=1$. Оскільки $1=i \neq n-1=4$, то переходимо до кроку 2.



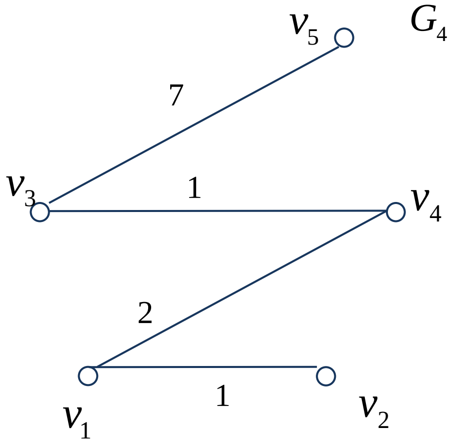
Крок 2. Будуємо граф G_2, додаючи до графа G_1 нове ребро мінімальної довжини, вибране серед всіх ребер графа G, кожне з яких інцидентне одній з вершин v_1, v_2 графа G_1 і одночасно інцидентне якій-небудь вершині графа G, що не міститься в G_1, тобто одній з вершин v_3, v_4, v_5. Таким чином, треба вибрати ребро мінімальної довжини з ребер (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_2, v_3), (v_2, v_4). Ребро мінімальної довжини 2 одне: (v_1, v_4). Разом з цим ребром включаємо в G_2 й інцидентну йому вершину v_4, що не міститься в G_1. Покладаємо $i=2$. Оскільки $2=i \neq n-1=4$, то переходимо до кроку 3.



***Крок* 3.** Будуємо граф G_3, додаючи до графа G_2 нове ребро мінімальної довжини, вибране серед всіх ребер графа G, кожне з яких інцидентне одній з вершин v_1, v_2, v_4 графа G_2 і одночасно інцидентне якій-небудь вершині графа G, що не міститься в G_2, тобто одній з вершин v_3, v_5. Таким чином, треба вибрати ребро мінімальної довжини з ребер (v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_5). Ребро мінімальної довжини 1 одне: (v_3, v_4). Разом з цим ребром включаємо в G_3 й інцидентну йому вершину v_3, що не міститься в G_2. Покладаємо $i=3$. Оскільки $3=i \neq n-1=4$, то переходимо до кроку 4.



***Крок* 4.** Будуємо граф G_4, додаючи до графа G_3 нове ребро мінімальної довжини, вибране серед всіх ребер графа G, кожне з яких інцидентне одній з вершин v_1, v_2, v_3, v_4 графа G_3 і одночасно інцидентне вершині графа G, що не міститься в G_3, тобто вершині v_5. Таким чином, треба вибрати ребро мінімальної довжини з ребер (v_3, v_5), (v_4, v_5). Ребро мінімальної довжини 7 одне: (v_3, v_5). Разом з цим ребром включаємо в G_4 й



інцидентну йому вершину v_5, що не міститься в G_3. Покладаємо $i=4$. Оскільки $4=i=n-1$, то граф G_4 – шукане мінімальне остовне дерево.

Тема 7. Елементи теорії алгоритмів

Завдання 2. Для машини Тьюрінга

$$M=\left\{A=\{0,1\},\ Q=\{q_0,q_1,q_2,q_3\},\ C,P,\ q_1,\ q_0,\ 0\right\},$$

заданої програмою P:

$$\begin{cases} q_1 0 \to q_2 1R, \\ q_1 1 \to q_2 1R, \\ q_2 0 \to q_3 0R, \\ q_2 1 \to q_1 0L, \\ q_3 0 \to q_2 1S, \\ q_3 1 \to q_0 0L. \end{cases}$$

1) Записати програму а) у вигляді таблиці; б) у вигляді діаграми переходів.

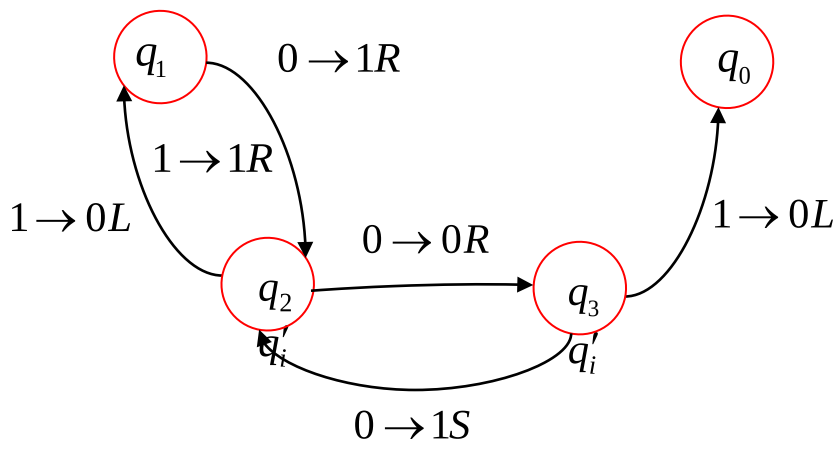
2) За початковою конфігурацією $K_1=1q_1 0^3 1$ знайти заключну конфігурацію K_0.

Розв'язання. 1) Запишемо програму

а) у вигляді таблиці відповідностей:

$Q \backslash A$	0	1
q_1	$q_2 1R$	$q_2 1R$
q_2	$q_3 0R$	$q_1 0L$
q_3	$q_2 1S$	$q_0 0L$

б) у вигляді діаграми переходів.



2) За початковою конфігурацією $K_1=1q_1 0^3 1$ знайдемо заключну конфігурацію K_0:

$$1q_1 0001$$

$$1 1 q_2 0 0 1$$
$$1 1 0\ q_3 0 1$$
$$1 1 0\ q_2 1 1$$
$$1 1 q_1 0\ 0 1$$
$$1 1 1 q_2\ 0 1$$
$$1 1 1 0 q_3\ 1$$
$$1 1 1 q_0\ 0\ 0$$

Таким чином, $K_0 = 1^3 q_0 0^2$.

8. Критерії оцінювання знань та вмінь студентів

Поточна семестрова робота кожного студента буде оцінюватись викладачем до екзамену:

0–40 балами з врахуванням наявності та якості звіту про самостійну роботу.

На екзамені кожен екзаменаційний білет буде містити 3 завдання (теоретичних і практичних) із різних розділів програми.

Кожне теоретичне питання буде оцінюватись **0 – 5** балами, а кожен приклад – **0 – 15** балами.

Семестрова оцінка залежить від загальної кількості балів і складає:

„Відмінно”, якщо кількість балів **95–100**;

„Добре”, якщо кількість балів **75–94**;

„Задовільно”, якщо кількість балів **60–74**;

„Незадовільно”, якщо кількість балів менше **60**.

Отже, якісна поточна семестрова робота дозволить студенту одержати високу екзаменаційну оцінку.