Міністерство освіти і науки України
Державний університет телекомунікацій
Кафедра вищої математики

ВИЩА МАТЕМАТИКА

**Навчально-методичний посібник
для самостійної роботи студентів
освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр
заочної форми навчання напрямів підготовки
6.050901 “Радіотехніка”;
6.050903 “Телекомунікації”**

Київ – 2014

Навчально-методичний посібник обговорено та затверджено
на засіданні кафедри вищої математики
Державного університету телекомунікацій,
протокол №1 від 28.08.2014 р.

Вища математика. Навчально-методичний посібник для самостійної роботи студентів освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр заочної форми навчання напрямів підготовки 6.050901 “Радіотехніка”, 6.050903 “Телекомунікації” / Укладачі: к.ф.-м.н., доцент Дзядик С.Ю., к.т.н., доцент Скубак О.М. – К.: ДУТ, 2014. – 41 с.

Наведені типові завдання для самоперевірки знань студентів заочної форми навчання з метою підготовки до семестрового контролю з дисципліни “Вища математика”.

Для кожного розділу програми дисципліни представлені: короткий зміст теоретичного матеріалу розділу, основні теоретичні питання та різноманітні приклади.

Зміст

1. Тематичний план навчальної програми на 1 семестр

Нумерація і назва розділів та тем	Короткий зміст	Інформаційне забезпечення
Розділ 1. Вступ до курсу. Алгебра комплексних чисел 1. Вступ до курсу. 2. Алгебра комплексних чисел.	Визначення уявної одиниці і комплексного числа. Модуль, аргумент та три форми комплексного числа. Комплексні, комплексно-спряжені числа та їх положення на комплексній площині. Дії над комплексними числами: а) рівність двох комплексних чисел; б) сума та різниця; в) добуток та частка; г) піднесення до степеня та добування кореня.	[2], с.25-36 [3], гл.VII, § 1-3, с. 218-225
Розділ 2. Лінійна та векторна алгебри. **1.** Лінійна алгебра. **2.** Векторна алгебра.	**1.** Лінійна алгебра. Визначник та його властивості. Розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) за правилом Крамера. Матриці. Дії над матрицями: рівність, сума, добуток матриці на число, добуток матриць. Означення та обчислення оберненої матриці. Розв'язок СЛАР матричним методом. Ранг матриці. Теорема Кронекера-Капеллі про сумісність СЛАР. **2.** Векторна алгебра. Означення векторних величин. Рівні, колінеарні, компланарні вектори. Орт вектора. Направляючі косинуси вектора. Дії над векторами: рівність, сума, різниця, добуток вектора на число в геометричному означенні та координатах. Скалярний, векторний добутки двох векторів, їх властивості, геометричний та механічний змісти. Мішаний добуток трьох векторів, властивості та геометричний зміст. „Ліва" та „права" трійка векторів.	[1], ч.4, с.73-124. [6], §1-4, с.4-47. [8], гл.1, §1-2, гл.3, §1, §2, с.66-83. [1], ч.6, с.125-133. [7], гл.2, с.46-81.
Розділ 3. Аналітична геометрія 1. Аналітична геометрія на площині 2. Аналітична геометрія в просторі	**1.** Аналітична геометрія на площині. Декартова та полярна системи координат. Найпростіші задачі. Лінія та пряма. Визначення кута між прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямих. Відстань точки до прямої. Лінії другого порядку: коло, еліпс, гіпербола, парабола, їх канонічні рівняння та графіки. **2.** Аналітична геометрія в просторі. Найпростіші задачі. Рівняння поверхонь і ліній у просторі. Рівняння площини і прямої. Кути	[1],с.142-152. [7], гл.5, §1, с.109-119. [1], ч.6, с.162-170.

Нумерація і назва розділів та тем	**Короткий зміст**	**Інформаційне забезпечення**
	між площинами, прямою і площиною, прямими. Умови паралельності і перпендикулярності названих геометричних об’єктів. Циліндричні поверхні, поверхні другого порядку, їх канонічні рівняння та вигляд в системі координат.	[7], гл.5, §3, с.126-131, §4, с.134-139.
Розділ 4. Вступ до математичного аналізу	Сталі та змінні величини. Абсолютна величина. Визначення та способи задання функції. Класифікація функцій. Елементарні функції, їх властивості та графіки. Поняття границі змінної, послідовності та функції. Властивості границь. Умови існування границі. Нескінченно малі та великі величини, їх властивості і зв’язок. Перша та друга чудові границі. Невизначеності та їх розкриття. Неперервність функції в точці і області. Особливі точки функції та їх класифікація.	[1], ч.7, с.171-194. [3], гл.1, с.13-27, гл.2, с.31-60.
Розділ 5. Диференціальне числення функцій однієї змінної	Приріст функції, що відповідає приросту аргументу. Означення похідної. Властивості похідної. Диференційованість та неперервність. Правила диференціювання: похідна добутку, частки, складної та оберненої функцій. Похідні спеціально заданих функцій: а) логарифмічна похідна; б) похідна показниково-степеневої функції; в) похідна функції, заданої параметрично; г) похідна неявно заданої функції. Поняття диференціала функції, його властивості. Наближене обчислення значень функції за допомогою диференціала. Похідні та диференціали вищих порядків. Фізичний зміст другої похідної. Похідна другого порядку функції, заданої параметрично. Дослідження функцій методами диференціального числення: - локальні екстремуми функції, їх необхідні та достатні умови існування; - опуклості, необхідні та достатні умови точки перегину. Асимптоти графіка функції. Схема повного дослідження функції і побудова	[1], ч.8, с.200-209, с.215-229. [3], гл.3, с.68-115, [3], гл.5, с.153-187.

Нумерація і назва розділів та тем	Короткий зміст	Інформаційне забезпечення
	її графіка. Задача про найбільше і найменше значення функції.	
Розділ 6. Диференціаль-не числення функцій багатьох змінних	Означення функції багатьох (двох) змінних. Задання функції двох змінних. Границя та неперервність. Частинний приріст та частинні похідні функції двох змінних. Повний приріст функцій двох змінних та повний диференціал. Наближене обчислення значень функції за допомогою диференціала. Частинні похідні і повні диференціали вищих порядків. Дослідження на екстремум функції двох змінних.	[1], ч.9, с.239-249, с.253-257. [3], гл.8, с.243-258, с.280-293.

2. Інформаційно-методичне забезпечення на 1 семестр

1. Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика для економістів. – К. : ЦУЛ, 2002 .– 400 с.
2. Кривуца В.Г., Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика. Практикум. - К.:ЦУЛ, 2003. – 536 с.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т 1. – М.: Наука, 1976. – 456 с.
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т 2. – М.: Наука, 1985. – 602 с.
5. Навчально-методичні посібники кафедри.
6. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – Ростов-на-Дону, 1997 – 288 с.
7. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1971 – 232 с.
8. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. – М.: Наука, 1974 – 296 с.

3. Зміст семестрового контролю
(Перелік екзаменаційних завдань) на 1 семестр
Розділ 1.
Вступ до курсу. Алгебра комплексних чисел

1. Означення уявної одиниці та комплексного числа, його дійсної та уявної частин, модуля та аргументу. Геометричне зображення комплексного числа. Три форми комплексного числа.

   Приклад. Для комплексного числа:
   $$z = N + (-1)^N Ni \quad \left(i = \sqrt{-1},\, i^2 = -1\right)$$
   визначити: $\operatorname{Re} z,\ \operatorname{Im} z,\ |z|, \arg z,\ \operatorname{Arg} z$.

   Задати z на комплексній площині.

   Записати три форми комплексного числа: $z = (-1)^N N + iN$.

2. Комплексно-спряжені числа, їх властивості та положення на комплексній площині.

   Приклад. Для заданого комплексного числа $z = N + (-1)^N \sqrt{3}i$ записати $\bar{z}$. Зобразити числа z і $\bar{z}$ на комплексній площині.
3. Дії над комплексними числами:
   а) рівність двох комплексних чисел;
   б) алгебраїчна сума;
   в) добуток та частка;
   г) степінь комплексного числа;
   д) вилучення кореня із комплексного числа.

   Приклад 1. Задані числа $z_1 = 2N + (-1)Ni$, $z_2 = -3N + 4Ni$.

   Визначити: $z_1 \pm z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$.

   Приклад 2. При яких значеннях сталих a, b числа $z_3 = a + 3i$, $z_4 = -4 + bi$ рівні ($z_3 = z_4$).

   Приклад 3. Обчислити $z_5^{\,4}$, $\sqrt[3]{z_5}$, де $z_5 = -\sqrt{3}N + iN$.

Розділ 2
Лінійна та векторна алгебри
1. Лінійна алгебра

1. Визначники 2-го, 3-го, n-го порядків, властивості та правила обчислення.

   Приклади. Обчислити визначники.

$$\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ N & 7 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} N & Na+1 \\ a^2 & a^2+2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -N \\ 3 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & N \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 5 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

2. Матриці. Дії над матрицями: рівність; сума; добуток матриці на число; добуток матриць.

   Приклад 1. При яких значеннях сталих a, b, c матриці $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 3 \\ 4 & c & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & b \\ c & 4 & a \end{pmatrix}$ рівні.

   Приклад 2. Обчислити $NA + (-1)^N B$, $AB - NE$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & N \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5N & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Означення та обчислення оберненої матриці.

Приклад. Обчислити A^{-1}, якщо $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 1 & 6\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

4. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) та їх розв’язки.
   Приклад. Знайти розв’язки СЛАР за правилом Крамера та матричним методом.

$$\begin{cases}(2+N)x_1+5x_2+\quad x_3=4+7N;\\ 3x_1+4x_2-\quad x_3=1+4N;\\ 6x_1+7x_2+Nx_3=6+9N.\end{cases}$$

2. Векторна алгебра

1. Векторні величини, їх визначення. Рівні, колінеарні, компланарні вектори. Орт вектора. Направляючі косинуси вектора.
   Приклад. Побудувати вектори в системі координат:
   $\vec{a}_1=(1,-4)$, $\vec{a}_2=(-2,3)$;
   $\vec{b}_1=(2,1,-2)$, $\vec{b}_2=(1,-3,4)$, $\vec{b}_3=(1,-3,4)$.
   Обчислити орти векторів $\vec{a}_1$ і $\vec{b}_1$. Вказати їх направляючі косинуси.
2. Дії над векторами: рівність, сума, різниця, добуток вектора на число в геометричному зображенні та координатах.
   Приклад 1. При яких значеннях сталих α та β вектори
   $\vec{c}_1=(N,\alpha)$; $\vec{c}_2=(\beta,-1)$;
   $\vec{m}_1=((-1)^N N,\alpha,-2)$; $\vec{m}_2=(\beta,2,-2)$
   рівні $\vec{c}_1=\vec{c}_2$; $\quad\vec{m}_1=\vec{m}_2$.
   Приклад 2. Обчислити $2\vec{a}_1-N\vec{a}_2$; $3\vec{b}_1+N\vec{b}_2-(-1)^N\vec{b}_3$, вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$; $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$ задані в пункті 1.
3. Означення скалярного добутку двох векторів та його вигляд в координатній формі.
   Приклад 1. Визначити кут між векторами: $\vec{a}_1=(3,-N,1)$, $\vec{a}_2=((-1)^{\mathrm{N}},2,2)$.
   Приклад 2. При якому значенні сталої α вектори $\vec{b}_1=(\alpha,2,\mathrm{N})$, $\vec{b}_2=((-1)^{\mathrm{N}},3,\alpha)$ перпендикулярні.
4. Означення векторного добутку двох векторів та його вигляд в координатній формі. Геометричний зміст.
   Приклад 1. Обчислити векторний добуток векторів $\vec{a}_1=(2,-1,\mathrm{N})$, $\vec{a}_2=((-1)^{\mathrm{N}},1,0)$ та площу S трикутника, побудованого на цих векторах.
   Приклад 2. При яких значеннях сталих α та β вектори $\vec{b}_1=(\alpha,2,5)$, $\vec{b}_2=((-1)^{\mathrm{N}},1,\beta)$ колінеарні?
5. Мішаний добуток трьох векторів, його властивості та вигляд в координатній формі. Геометричний зміст. „Ліва” та „права” трійка векторів.
   Приклад 1. Для заданих векторів $\vec{a}_1=(2,\mathrm{N},1)$, $\vec{a}_2=((-1)^{\mathrm{N}},1,2)$, $\vec{a}_3=(\mathrm{N},0,1)$ визначити:

а) мішаний добуток $\vec{a}_1\,\vec{a}_2\,\vec{a}_3$.

б) яку трійку векторів вони утворюють;

в) об’єм піраміди, побудованої на векторах $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$.

Приклад 2. При якому значенні сталої α вектори $\vec{b}_1 = (\alpha, 1, \text{-}1)$, $\vec{b}_2 = (0, \alpha, 2)$, $\vec{b}_2 = (1, -3, 0)$ компланарні.

Розділ 3.

Аналітична геометрія

1. Аналітична геометрія на площині

1. Найпростіші задачі аналітичної геометрії на площині.

Приклад. Для заданих точок $M_1(2; -1)$, $M_2(\text{-}1;3)$ визначити:

а) відстань M_1M_2;

б) точку M_0, що поділяє проміжок M_1M_2 у відношенні $\lambda = 2$;

в) точку P, що є серединою відрізка M_1M_2.

2. Лінія та пряма на площині. Визначення точки перетину та кута між прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямих.

Приклад 1. Побудувати прямі $y = 2x - N$, $3x - 2y - 6 = 0$.

Визначити:

а) точку перетину цих прямих;

б) кут між ними.

Приклад 2. Для заданих прямих

$$ax + 6y + 4 = 0, \qquad 3x - Ny + N = 0$$

визначити сталу a, при якій прямі:

а) паралельні;

б) перпендикулярні.

Приклад 3. Визначити відстань точки $M_0(5; -N)$ до прямої $3x - 4y + N = 0$.

3. Лінії другого порядку на площині: коло, еліпс, гіпербола, парабола.

Приклад. Визначити та побудувати криві:

$x^2 + y^2 = N^2$; $\quad 4x^2 + 9y^2 = 36$;

$4x^2 - 9y^2 = 36$; $\quad x^2 = 2Ny$; $\quad y^2 = (-1)^N Nx$.

2. Аналітична геометрія в просторі

1. Найпростіші задачі аналітичної геометрії в просторі.

Приклад. Для заданих точок $M_1((\text{-}1)^N; N; -2)$, $M_2(2; (-1)^N N; 5)$ визначити:

а) відстань M_1M_2;

б) точку M_0, що поділяє проміжок M_1M_2 у відношенні $\lambda = 3$;

в) точку P, що є серединою відрізка M_1M_2.

2. Площина в просторі. Кут між площинами. Умови паралельності і перпендикулярності.

Приклад 1. Для площини $2x + (-1)^N 3y + z - N = 0$ визначити:

а) вектор, перпендикулярний до площини;

б) точку $M_0(1; 2; z_0)$ на заданій площині.

Приклад 2. Визначити кут між площинами:

$2x + (-1)^N 3y + 2z - N = 0$, $5x + (-1)^N y - 2z + 10 = 0$.

Приклад 3. При яких значеннях сталих α та β площини $\alpha x + 6y + 12z - N = 0$, $3x + (-1)^N y + \beta z + N = 0$ паралельні.

Приклад 4. При якому значенні сталої α площини $5x + 2y + \alpha z + 4 = 0$, $9x + \alpha y + (-1)^N 7z - 28 = 0$ перпендикулярні.

3. Задання прямої в просторі. Кут між прямими. Умови паралельності і перпендикулярності.

   Приклад 1. Для прямих

$$\frac{x-N}{2} = \frac{y+1}{(-1)^N} = \frac{z-2}{N}, \qquad \frac{\mathrm{x}-1}{\mathrm{N}} = \frac{\mathrm{y}+1}{1} = \frac{\mathrm{z}-2}{3}$$

   визначити:

   а) направляючі вектори;

   б) кут між прямими.

   Приклад 2. При якому значенні сталої α прямі

$$\frac{\tilde{o}+N}{2\alpha} = \frac{\acute{o}-N}{(-1)^N} = \frac{z+2}{1}, \qquad \frac{\tilde{o}}{(-1)^N} = \frac{\acute{o}+1}{3} = \frac{z-1}{\alpha}$$

   перпендикулярні.

   Приклад 3. При яких значеннях сталих α та β прямі

$$\frac{\tilde{o}-N}{\alpha} = \frac{\acute{o}+N}{2} = \frac{z+2}{1}, \quad \frac{\tilde{o}+2}{3} = \frac{\acute{o}-1}{\beta} = \frac{z-N}{3}$$

   Паралельні?

4. Площина та пряма в просторі, їх взаємне положення:

   а) точка перетину прямої та площини;

   б) кут між прямою та площиною;

   в) умови перпендикулярності та паралельності прямої та площини.

   Приклад. Для прямої $\frac{\tilde{o}+N}{4} = \frac{\acute{o}-2}{-3} = \frac{z-N}{2}$ та площини $x + 2Ny - 2z + 13N = 0$

   визначити:

   а) точка перетину;

   б) кут між прямою та площиною.

5. Циліндричні поверхні в просторі.

   Приклад. Визначити та намалювати циліндричні поверхні:

$$9\mathrm{x}^2 + 4\mathrm{y}^2 = 36; \quad 9x^2 - 4y^2 = 36; \quad y^2 = (-1)^N Nx; \quad x^2 = Ny.$$

6. Поверхні другого порядку в просторі.

   Приклад. Визначити вид поверхонь в просторі та намалювати:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1; \qquad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1; \qquad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = -1;$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 2z; \qquad \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 2z; \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 16;$$

$$(x-1)^2 + (y+N)^2 + (z-2)^2 = 16; \qquad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{9} = 0.$$

Розділ 4.
Вступ до математичного аналізу

1. Сталі та змінні величини. Абсолютна величина.

   Приклад 1. Визначити: $|-2|$; $|5|$; $|a|$.

   Приклад 2. Розв'язати рівняння: $|3x-2N|=6N$; $|x-1|=2N$.

   Приклад 3. Розв'язати нерівності: $|x-2N|\geq N$; $|x|<N$; $|x-N|<3N$.
2. Визначення та способи задання функції.
3. Класифікація функцій.
4. Перелічити елементарні функції.
5. Поняття границі змінної величини, послідовності та функції.
6. Нескінченно малі та великі величини, їх властивості та зв'язок.
7. Перша та друга чудові границі, їх наслідки.
8. Перелічити невизначеності, що породжуються при обчисленні границь.
9. Натуральні логарифми. Гіперболічні функції.

   Приклади. Обчислити границі виразів, не користуючись правилами Лопіталя:

   1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+5N}{Nx^2-3}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+(2N-1)x-2N}{x^2-(N+1)x+N}$; 3) $\lim\limits_{x\to N}\dfrac{x^2-N^2}{\sqrt{x}-\sqrt{N}}$;

   4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\ Nx}{x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+(-1)^N x\right)^{\frac{1}{x}}$.
10. Дослідження неперервності функції.

    Приклад 1. Дослідити неперервність функції $y=2^{\frac{1}{x-N}}$ в точках $x_1=N$, $x_2=2N$. Побудувати схематичний графік функції в околі цих точок.

    Приклад 2. Функцію

$$y=\begin{cases} x+N, & x\leq N; \\ 2x, & N<x\leq 2N; \\ x^2+1, & x>2N. \end{cases}$$

    дослідити на неперервність в точках $x_1=N$, $x_2=2N$. Побудувати її графік.

Розділ 5
Диференціальне числення функцій однієї змінної

1. Означення похідної функції однієї змінної.
2. Таблиці похідних.
3. Правила диференціювання.

   Приклади. Обчислити похідні $y'=\dfrac{dy}{dx}$:

$$y=N+2x+\frac{2N}{3}x^3;\qquad y=e^{x^2}\cdot\cos Nx,\qquad y=\frac{x^2+Nx-4}{x+N};$$

$$y=\left(x^2+N\right)\ln\left(x^2+N\right);\qquad y=\left(N^2x^2+1\right)\,arctg\,Nx;$$

$$y=\frac{\sin x-N\cos\ x}{N\sin x+\cos\ x};\qquad y=sh\ Nx+(-1)^N th3x.$$

4. Похідні спеціально заданих функцій:

а) логарифмічна похідна;
б) похідна показниково-степеневої функції;
в) похідна функції, заданої параметрично;
г) похідна неявно заданої функції.

Приклади. Обчислити похідні $y' = \frac{dy}{dx}$ функцій:

а) $y = x^{\sqrt{x+N}}$; б) $\begin{cases} x = \ln\left(1+N^2t^2\right) \\ y = t - arctg\ Nt \end{cases}$ в) $e^x \sin Ny - e^y \cos\ (N+1)y = 0$;

г) $\begin{cases} x = N\cos\ t; \\ y = (N+1)\ \sin\ t. \end{cases}$ д) $x^N + y^N = x^N y^N$.

5. Поняття диференціалу функції, його властивості. Наближене обчислення значень функції за допомогою диференціала.
Приклади. Обчислити наближено:
$\sin 60^0 18'$; $arctg\ 0{,}92$; $e^{0{,}05}$; $y = \frac{1+\ln x}{x - x\ln x}$, при $x_0 = 1{,}2$.

6. Поняття похідних та диференціалів вищих порядків.
Приклад 1. Обчислити $\frac{dy}{dx}$ та $\frac{d^2y}{dx^2}$:

а) $y = x^{2N} - 4x^N - 1$; б) $y = x^N\ \ln\ x$; в) $\begin{cases} x = N\ln t, \\ y = t^2 - N^2. \end{cases}$

Приклад 2. Обчислити dy та d^2y функцій:
$y = (x+1)^{N+5}$; $y = \sin^2 2Nx$; $y = (N+5)^{x^2}$.

Приклад 3. Точка рухається прямолінійно за законом $S(t) = \frac{2}{N}\sin\frac{\pi t}{2} + N^2t^2$.
Визначити швидкість та прискорення в кінці першої хвилини (S розраховується в м, час t – в хвилинах).

7. Дослідження функцій методами диференціального числення:
а) визначити інтервали монотонності та екстремуми функцій.

Приклад 1. $y = (x-N)^2(x+2N)^3$; $y = \frac{x^4}{4} + \frac{N}{3}x^3 - N^2x^2 + N$.

б) визначити інтервали опуклості та точки перегину графіка функцій.

Приклад 2. 1) $y = \frac{x^5}{20} - \frac{Nx^4}{12} - \frac{N^2x^3}{3} + 2Nx + N^2$;

2) $y = \frac{x^5}{20} - \frac{N^2x^3}{6} + 2Nx - N^2$.

в) визначити асимптоти графіка функцій.

Приклад 3. 1) $y = \frac{1}{x^2 - N^2}$; 2) $y = \frac{x^2 + Nx + 1}{x}$.

8. Задача про найбільше і найменше значення функції.

Приклад. Визначити найбільше та найменше значення функції $y = x^4 - 2N^2 x^2$ на сегменті $[-2N;\ 2N]$.

Розділ 6
Диференціальне числення функцій багатьох змінної

1. Означення функції багатьох змінних.

   Приклад. Визначити області існування функцій:

   $$z = \sqrt{N^2 - x^2 - y^2};\ y = \frac{1}{N^2 - x^2 - y^2};\ z = \ln\left(y^2 - 4x + 4N\right).$$

2. Поняття частинного приросту та частинної похідної.

   Приклад. Обчислити $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ функцій:

   1) $z = x^N y - y^N x$; 2) $z = \frac{x}{y} + (-1)^N \frac{y}{x}$;

   3) $z = \ln\left(x^2 - xy + Ny^2\right)$; 4) $z = arctg\,\frac{Ny}{x}$.

3. Поняття повного приросту функції та повного диференціалу.
4. Наближене обчислення значень функцій за допомогою диференціала.

   Приклад. Обчислити наближено:

   1) $1{,}04^{2{,}07}$; 2) $\ln\left(\sqrt{1{,}03} + \sqrt[3]{0{,}98} - 1\right)$; 3) $\sqrt{(3{,}01)^2 + (3{,}98)^2}$.

5. Частинні похідні і повні диференціали вищих порядків.

   Приклад. Обчислити dz і d^2z функцій:

   $z = x^3 + x^3 y - Nxy^2 + (-1)^N y^3$;

   $z = e^{x^2 - Ny}$;

   $z = x^N \sin Ny$;

   $z = N arctg\left(x + (-1)^N y\right)$.

6. Дослідження функції двох змінних на екстремум.

   Приклади. Визначити екстремуми функцій:

   $N = 1$: $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$;

   $N = 2$: $z = 4\left(x^3 - y\right) - x^2 - y^2$;

   $N = 3$: $z = x^3 + y^3 - 3xy$;

   $N = 4$: $z = (x-2)^2 + 2y^2$;

   $N = 5$: $z = (x-2)^2 - 2y^2$;

   $N = 6$: $z = x^4 + 4xy - 2y^2$;

   $N = 7$: $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$;

   $N = 8$: $z = xy(a - x - y)$;

   $N = 9$: $z = e^{2x}\left(x + y^2 + 2y\right)$;

   $N = 10$: $z = x^4 + y^4 - 2x^2 - 4xy - 2y^2$.

4. Тематичний план навчальної програми на 2 семестр

Нумерація і назва розділів та тем	Короткий зміст	Інформаційне забезпечення
Розділ 7. Невизначений інтеграл	Поняття первісної і невизначеного інтеграла. Таблиця інтегралів. Правила та методи інтегрування. Інтегрування раціональних дробів, ірраціональностей та тригонометричних функцій.	[1], с.235-260 [2], т.1, с.335-370
Розділ 8. Визначені та невластиві інтеграли. Інтеграли з параметром	Означення, властивості та теорема існування визначених інтегралів. Методи обчислення та застосування до геометричних і фізичних задач. Невластиві інтеграли, їх різновиди, збіжність та розбіжність. Інтеграли, що залежать від параметрів та їх властивості.	[1], с.263-275 с.277-285 [2], т.1, с.380-411
Розділ 9. Звичайні диференціальні рівняння	Поняття диференціального рівняння, його порядку, загального і частинного розв’язків, задачі Коші. Основні задачі. Означення та розв’язування диференціальних рівнянь першого порядку (з відокремленими та подільними змінними, однорідних, лінійних, Бернуллі). Методи розв’язання диференціальних рівнянь 2-го порядку (які допускають зниження порядку, лінійних, однорідних та неоднорідних із сталими коефіцієнтами).	[1], с.294-321 [2], т.2, с.15-38, 63-70 72-95
Розділ 10. Ряди та гармонічний аналіз	Числові та степеневі ряди, дослідження їх збіжності. Гармоніки. Ряди та перетворення Фур’є. Знаходження амплітудно-частотних характеристик періодичних та неперіодичних сигналів.	[1], с.401-415, 423-448 [2], т.2, с.254-292, 328-368

5. Інформаційно-методичне забезпечення на 2 семестр

1. Кривуца В.Г., Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика. Практикум. - К.:ЦУЛ, 2003 – 536 с.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления (для ВТУЗов), Т 1, 2, М.: Наука, 1976.
3. Навчально-методичні посібники кафедри.
4. Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика для економістів. – К. :ЦУЛ, 2002 – 400 с.
5. Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика. (Ряди, гармонічний аналіз, перетворення Лапласа, теорії поля і функцій комплексної змінної). – К.: Книжкова друкарня наукової книги., 2002 – 200 с.

6. Зміст семестрового контролю
(Перелік екзаменаційних завдань) на 2 семестр
Розділ 7
Невизначені інтеграли

1. Означення первісної функції та невизначеного інтеграла.
2. Таблиця інтегралів.
3. Властивості невизначеного інтеграла та правила інтегрування.
4. Метод безпосереднього інтегрування.

   Приклад. Знайти $\int \left(Nx^3 - 2^{Nx}\right) dx$.
5. Метод підстановки (заміни змінної).

   Приклади. Знайти інтеграли а) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+N}}$; б) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{N^2 - x^2}}$.
6. Метод інтегрування частинами.

   Приклади. Знайти інтеграли а) $\int x \sin Nxdx$; б) $\int xarctg(Nx)\, dx$.
7. Означення раціонального дробу та найпростіших раціональних дробів. Порядок дій при інтегруванні неправильного раціонального дробу.
8. Інтегрування правильних раціональних дробів.

   Приклади. а) $\int \frac{3dx}{(x+N)^k}$ $(k \geq 2,$ ціле$)$; б) $\int \frac{xdx}{(x+1)(N-x)}$.
9. Вказати підстановку для інтегрування ірраціональностей виду $R\left((ax+b)^{\alpha},\ (ax+b)^{\beta}\right)$, де α та β – дробові раціональні числа.

   Приклад. знайти інтеграл $\int \frac{N \cdot \sqrt[6]{x}dx}{x\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}\right)}$.
10. Інтегрування виразів, що містять тригонометричні функції.

    Приклади.

    а) $\int \frac{dx}{1+tgx}$; б) $\int 2\cos^2 Nx\, dx$; в) $\int \sin^4 x \cdot \cos^3 x\, dx$

Розділ 8.
Визначені та невластиві інтеграли.
Інтеграли з параметром

1. Означення та властивості визначених інтегралів.
2. Теорема існування визначеного інтеграла.
3. Похідна визначеного інтеграла по змінній верхній межі. Приклад. Знайти похідну за змінною x інтеграла $\int_x^N 3^t \cdot \cos Ntdt$.
4. Формула Ньютона-Лейбніца обчислення визначених інтегралів.

   Приклад. Обчислити $\int_1^N \left(x^2 - Nx + 3\right)dx$.
5. Обчислення визначених інтегралів підстановкою (заміною змінних).

Приклад. Обчислити $\int_1^3 \frac{xdx}{N+x^2}$.

6. Обчислення визначених інтегралів методом інтегрування частинами.

   Приклад. Обчислити $\int_1^2 \frac{\ln Nx}{x^{N+1}}\, dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2N}} x \cos\, Nx\, dx$.

7. Різновиди невластивих інтегралів, їх збіжність та розбіжність.

   Приклад. Обчислити та встановити розбіжність:

   1) $\int_0^{\infty} e^{-Nx}dx$;   2) $\int_0^N \frac{dx}{\sqrt{N^2-x^2}}$.

8. Інтеграли, що залежать від параметрів, їх властивості.

Вказати формули застосувань визначених та невластивих інтегралів

а) до геометричних задач (знаходження площ криволінійної трапеції, плоскої області, довжини дуги, об'єм тіла обертання та його площі поверхні);

б) обчислення середніх значень функції;

в) фізичних задач (шлях S, який пройде тіло із швидкістю v(t) за час T, сумарний електричний заряд Q, зосереджений з густиною q(x) на [a, b], обчислення діючих значень напруги і струму електричних коливань за період T).

Розділ 9.
Звичайні диференціальні рівняння

1. Поняття диференціального рівняння, його порядку, загального та часткового розв'язку, задачі Коші.
2. Розв'язування диференціальних рівнянь першого порядку з відокремленими та подільними змінними.

   Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$(N+y^2)dx = Nxydy.$$

3. Визначення та розв'язування однорідного диференціального рівняння першого порядку.

   Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння $x^2y' = y^2 + xy$.

4. Визначення та розв'язування лінійного диференціального рівняння першого порядку.

   Знайти розв'язок задачі Коші:

$$y' - ctgt \cdot y = N \sin t;\; y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

5. Швидкість втрати електричного заряду ізольованого провідника внаслідок недосконалості ізоляції пропорційна заряду, що є в даний момент.

   В початковий момент провідник мав заряд (250+N)CGSE і за перші дві хвилини втратив 100CGSE. Визначити, через скільки хвилин заряд провідника буде дорівнювати половині початкового.

6. Диференціальні рівняння другого порядку, що дозволяють знизити порядок, та способи їх розв'язування.

   Приклади. Знайти загальні розв'язки рівнянь

   а) $y'' = \cos Nx$;   б) $(y')^2 + Ny \cdot y'' = 0$;   в) $xy'' = y' + N$

7. Знаходження загального розв'язку диференціального рівняння із сталими коефіцієнтами виду $ay'' + by' + cy = 0$.

   Приклади. знайти загальний розв'язок рівнянь
   а) $2y'' + y' - y = 0$; б) $4y'' + 4y' + y = 0$; в) $y'' + 2y' + 5y = 0$.
8. Знаходження загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами методом варіації довільних сталих.
9. Знаходження частинного розв'язку ЛНДР із сталими коефіцієнтами другого порядку, використовуючи вид правої частини рівняння.

   Приклад. Знайти розв'язок задачі Коші:
$$y'' - 2y' + 10y = Nx^2 + 8x + N^2; \quad y(0) = 1; y'(0) = 0.$$

Розділ 10.
Ряди та гармонічний аналіз

1. Поняття числового ряду, його загального члена, частинної суми та суми ряду, збіжності та розбіжності. Необхідна умова збіжності числового ряду.

   Приклади. Записати ряд геометричної прогресії, гармонічний ряд, узагальнений гармонічний ряд і вказати їх збіжність та розбіжність.
2. Сформулювати достатні ознаки збіжності додатних числових рядів (Даламбера, ознаки Коші, порівняльні ознаки).

   Приклади. Дослідити збіжність рядів:

   а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{Nn}{3n+1}\right)^{2n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(N+1)^n}$.
3. Знакозмінні числові ряди. Поняття їх абсолютної та умовної збіжності. Ознака Лейбніца умовної збіжності знакопочережного ряду.

   Приклади. Дослідити збіжність рядів:

   а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2Nn-1}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{2n+1}{Nn+1}\right)^n$.
4. Означення степеневого ряду. Теорема Абеля. Поняття радіуса, інтервалу та області збіжності степеневого ряду.
5. Знаходження радіуса збіжності повного та неповного степеневого ряду.

   Приклади. Знайти інтервали збіжності рядів:

   а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\cdot x^n}{7^n+9^n}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)\cdot x^{3n}}{(n+1)\cdot 2^{2n}}$.
6. Розклад функцій e^u, $\sin u$, $\ln(1+u)$ в степеневі ряди.
7. Означення дійсної та уявної гармоніки, фізичний смисл їх параметрів.
8. Поняття ортогональності та ортонормованості системи функцій.
9. Вказати функції, які можна розкласти в ряд Фур'є, та формули ряду Фур'є і коефіцієнтів Фур'є.
10. Вказати вигляд ряду Фур'є для парної та непарної функції.
11. Розклад функції в ряд Фур'є за уявними гармоніками.
12. Вказати функції, для яких існує перетворення Фур'є, його фізичний смисл та основні властивості.

13. Поняття хвильових чисел, частотного та амплітудного спектрів для сигналів, заданих на скінченому відрізку та на усій числовій осі.

7. Тематичний план навчальної програми на 3 семестр

Нумерація і назва розділів та тем	Короткий зміст	Інформаційне забезпечення
Розділ 11. Кратні інтеграли	Означення подвійного та потрійного інтегралів на області, зведення їх до повторних інтегралів та обчислення. Криволінійні координати на площині та просторі. Якобіан. Заміна змінних інтегрування в подвійних та потрійних інтегралах. Подвійні інтеграли в полярних координатах. Потрійні інтеграли в циліндричних та сферичних координатах. Застосування кратних інтегралів до геометричних та технічних задач.	[1] ст. 93-95 [2] ст. 332-370 [3] ст. 564-628 [4] ст. 6-55
Розділ 12. Елементи теорія поля та їх характеристики	Скалярні та векторні поля. Скалярні поля, їх геометричне зображення: лінії та поверхні рівня. Швидкість зміни скалярного поля в заданому напрямку – похідна за напрямком. Градієнт. Векторне поле, його геометричне зображення – векторні (силові) лінії. Потік та дивергенція векторного поля. Поверхневі та криволінійні інтеграли 1-го та 2-го родів. Циркуляція та ротор (вихор) векторного поля. Класифікація векторних полів: потенціальні, соленоїдальні та гармонічні.	[1] ст. 84-110 [2] ст. 371-400
Розділ 13. Основи теорії функцій комплексної змінної	Визначення функцій комплексної змінної, її границя та неперервність. Диференціювання та аналітичність, умови Коші-Рімана. Інтегрування функції комплексної змінної. Ряди: числові, Тейлора, Лорана. Класифікація ізольованих особливих точок функції комплексної змінної. Поняття лишків та їх обчислення. Основна теорема про лишки. Обчислення інтегралів від функції комплексної змінної за допомогою лишків.	[1] ст. 111-169 [2] ст. 461-525 [3] ст.342-346, 509-510 [4] ст. 329-355
Розділ 14 Операційне числення	Поняття функції-оригіналу та її зображення (перетворення Лапласа). Властивості перетворення Лапласа. Обернене перетворення Лапласа. Застосування операційного числення до розв'язання задачі Коші для диференціального рівняння та системи диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами.	[1] ст. 75-83 [2] ст. 451-460

8. Інформаційно-методичне забезпечення на 3 семестр

1. Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика. (Ряди, гармонічний аналіз, перетворення Лапласа, теорії поля і функцій комплексної змінної). – К.: Книжкова друкарня наукової книги., 2002. – 200 с.
2. Кривуца В.Г., Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика. Практикум. - К.: ЦУЛ, 2003. – 536 с.
3. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: А.С.К., 2002. – 648 с.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч 2. – Москва: Высшая школа,1986.
5. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т 2. – Москва: Наука, 1985. – 602 с.
6. Валєєв К.Г., Джалладова І.А. Вища математика. НМП для самостійного вивчення дисципліни. – К.: КНЕУ, 2002. – 606 с.
7. Довідники з елементарної математики, вищої математики, теорії ймовірностей та математичної статистики.
8. Конспекти лекцій.
9. Навчально-методичні посібники кафедри.

9. Зміст семестрового контролю

(Перелік екзаменаційних завдань) на 3 семестр

Розділ 11.

Кратні інтеграли

1. Що називається подвійним інтегралом від функції $f(x,y)$ по області D?
2. Сформулюйте достатню умову існування подвійного інтеграла.
3. Перерахуйте властивості подвійного інтеграла.
4. Обґрунтуйте формули, що визначають об̓єм циліндричного тіла і площу плоскої фігури за допомогою подвійного інтеграла.
5. Як обчислюється повторний інтеграл від функції $f(x,y)$?

<u>Приклади</u>. Знайти повторні інтеграли:

а) $\int\limits_{-3}^{3} dx \int\limits_{x^2-4}^{5} \left(y + \frac{N+1}{2}x \right) dy$; б) $\int\limits_{0}^{\frac{N}{2}} dx \int\limits_{x^2-4}^{5} xy\,dy$.

6. Яка область D називається правильною в напрямі осі Oy? Записати формулу для обчислення подвійного інтеграла по такій області. Яка область D називається правильною в напрямі осі Ox? Записати формулу для обчислення подвійного інтеграла по такій області.

<u>Приклади</u>. Змінити порядок інтегрування в інтегралах

а) $\int\limits_{0}^{\frac{N}{2}} dx \int\limits_{0}^{x} f(x,y)dy + \int\limits_{\frac{N}{2}}^{N} dx \int\limits_{0}^{N-x} f(x,y)dy$;

б) $\int\limits_{0}^{N} dy \int\limits_{0}^{y} f(x,y)dx + \int\limits_{0}^{\sqrt{2}N} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2N^2-y^2}} f(x,y)dx$;

Обчислити подвійний інтеграл

в) $\iint\limits_D x^2 \sin(Nxy)dxdy, \quad D:\left\{ x=1,\, x=N+1,\, y=0,\, y=\dfrac{1}{x} \right\}.$

7. Сформулюйте теорему про заміну змінних у подвійному інтегралі.
8. Чому дорівнює якобіан у полярних координатах? Відповідь обґрунтуйте.
9. Як обчислюється подвійний інтеграл у полярних координатах за допомогою повторного?

Приклади: а) обчислити подвійний інтеграл, перейшовши до полярних координат:

$$\iint\limits_D (N-2x-3y)dx\,dy,\ D:\left\{\ x^2+y^2=R^2\right\};$$

б) знайти площу фігури, що обмежена лініями:

$$y=0,\, y=x,\, x^2+y^2=(N+1)x.$$

10. Що називається потрійним інтегралом від функції $f(x,y,z)$ по області D?
11. Сформулюйте достатню умову існування потрійного інтеграла.
12. Перерахуйте властивості потрійного інтеграла.
13. Як обчислюється потрійний інтеграл в прямокутних координатах?

Приклад. $\iiint\limits_\Omega 2x^2e^{xy}dx\,dy,\ \Omega:\{x=0, y=1, y=x, z=0, z=N+1\}$

14. Як обчислюється потрійний інтеграл в циліндричних координатах? Навести приклад області, для якої межі інтегрування в циліндричних координатах сталі?

Приклад. $\iiint\limits_\Omega \left(x^2+y^2\right)dx\,dy\,dz, \quad \Omega:\{z=N+1, \quad x^2+y^2=(N+1)z\ \}.$

15. Як обчислюється потрійний інтеграл в сферичних координатах? Навести приклад області, для якої межі інтегрування в сферичних координатах сталі?

Приклад. Знайти потрійний інтеграл

$$\iiint\limits_\Omega \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz,\ \Omega:\left\{x^2+y^2+z^2=2(N+1)z\right\}.$$

16. Вивести формулу для знаходження об'єму тіла за допомогою потрійного інтеграла.

Приклад. Знайти об'єм тіла:

$$\Omega:\left\{\ y=(N+2)\sqrt{x},\ \ y=(N+1)x,\ \ x+z=1\ \right\}$$

17. Вивести формулу для знаходження маси тіла.
18. Вивести формулу для знаходження електричного заряду розподіленого по просторовій області Ω.

Приклад. Знайти електричний заряд, який розподілений з густиною $\gamma(x,y,z)=x$ по області

$$\Omega:\{x-y+2z=2(N+1), \quad x=y=z=0\}.$$

19. Що називається криволінійним інтегралом першого роду? В чому полягає його фізичний і геометричний зміст?
20. Як обчислюється криволінійний інтеграл першого роду?

Приклади. Обчислити:

а) $\int\limits_L \frac{dl}{x-y}$, L – відрізок прямої, що з'єднує точки $A(-2,-1)$ та $B(3,N)$

б) $\int\limits_L (x^2+y^2)dl, \quad L{:}\{x=a\cos t,\ y=a\sin t, 0\le t<2\pi\}.$

21. Що називається криволінійним інтегралом другого роду? В чому полягає його фізичний і зміст?

22. Як обчислюється криволінійний інтеграл другого роду?

Приклад. Яку роботу виконує сила $\vec{F}=yx\vec{i}+yz\vec{j}+xz\vec{k}$ при переміщенні матеріальної точки по відрізку $AB, \quad A(0,-1,2), B(N+1,N+2,N-1)$.

23. Написати і довести формулу Гріна.

24. За допомогою формули Гріна вивести формули для обчислення площі плоскої фігури через криволінійний інтеграл першого роду.

Приклад. Знайти площу, обмежену астроїдою

$$x=\frac{N+3}{N+1}\cos^3 t, y=\frac{N+3}{N+1}\sin^3 t, 0\le t<2\pi.$$

25. В якому випадку криволінійний інтеграл не залежить від форми шляху інтегрування?

Перевірте свою відповідь на наступних

Прикладах.

а) $\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} 2xy\,dx+x^2dy$ вздовж ліній

$1)\ y=x,\quad 2)\ y=x^2,\quad 3)\ y^2=x,\quad 4)\ y=x^3;$

б) $\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} xy\,dx+(y-x)dy$ вздовж лінії

$1)\ y=x,\quad 2)\ y=x^2,\quad 3)\ y^2=x,\quad 4)\ y=x^3.$

26. Що називається поверхневим інтегралом першого роду. Як обчислюється такий інтеграл ?

27. Які поверхні називаються двосторонніми?

28. Що називається поверхневим інтегралом другого роду. Як обчислюється такий інтеграл ?

Приклад. Обчислити $\iint\limits_S z\,dxdy+y\,dxdz+x\,dydz$ по верхній стороні площини $x+y+z=N+1$, розташованій у першому октанті.

29. Записати формулу Остроградського-Гаусса.

Приклад. Покладаючи в формулі Остроградського-Гаусса $P(x,y,z)=x, \quad Q(x,y,z)=y, \quad R(x,y,z)=z$, отримати формулу для знаходження об'єму тіла через поверхневий інтеграл другого роду.

30. Записати формулу Стокса

Приклад. Обчислити за формулою Стокса $\oint\limits_L y^2dx-x^2dy+z^2dz$, де L – замкнений контур, утворений при перетині параболоїда $N+1-y=x^2+z^2,(x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0)$ з координатними площинами.

Розділ 12.
Елементи теорії поля та їх характеристики

1. Як задається скалярне поле? Що є геометричною характеристикою скалярного поля?

Приклади.

а) Побудувати лінії рівня скалярного поля: $u(x,y) = x^2 - \frac{N+3}{N+1} y$;

б) Побудувати поверхні рівня скалярного поля: $u(r) = e^{\vec{a}\cdot\vec{r}}$, де $\vec{a} = (N, N-2, N+3)$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ – радіус-вектор.

2. Як визначається та обчислюється похідна скалярного поля u за напрямом вектора $\vec{\ell}$ у декартовій системі координат.

Приклади. Знайти для даних функцій похідну в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ у напрямку до точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$:

а) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; $M_0(1,1,1)$; $M_1(N, -N, 1)$;

б) $u = \frac{x}{y} - \frac{Ny}{x}$; $M_0(1,1)$; $M_1(4,5)$.

3. Що називається градієнтом скалярного поля? Які його властивості?
4. Як обчислюється градієнт скалярного поля у декартовій системі координат?

Приклади. Для даного скалярного поля знайти напрям і величину найбільшої зміни в точці M_0.

а) $u(M) = x^2 y + y^2 z + z^2 x$; $M_0(N, 2N, -3)$;

б) $u(M) = xy(z - N)$; $M_0(2, 1, -1)$.

5. Що називається векторним полем? Наведіть приклад векторного поля.
6. Як визначається потік векторного поля? Що він характеризує?

Приклад. Знайдіть потік векторного поля $\vec{a} = \vec{i}$ через прямокутну площадку зі сторонами, рівними N та $2N$, перпендикулярну осі Ox, у додатному напрямі осі Ox. Зробіть малюнок.

7. Що називається дивергенцією векторного поля? Як обчислюється дивергенція векторного поля у декартовій системі координат.

Приклад. Знайти:

а) $div\, N\vec{r}$, де $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ – радіус-вектор;

б) $div\,(u\vec{a})$, де $u = U(x,y,z)$ – скалярна функція, $\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ – векторне поле.

8. Запишіть теорему Остроградського-Гаусса у векторній формі.

Приклад. За теоремою Остроградського-Гаусса знайдіть потік векторного поля $\vec{a} = x\vec{i} + xz\vec{j} + y\vec{k}$, через замкнену поверхню S, $S{:}\left\{x^2 + y^2 = N + 1 - z,\ z = 0\right\}$.

9. Що називається лінійним інтегралом векторного поля? Що таке циркуляція векторного поля?
10. Що називається ротором (вихром) векторного поля? Як обчислюється ротор у декартовій системі координат?

Приклади. Обчислити $rot\,\vec{a}(M)$, якщо

а) $\vec{a}(M) = Nx\vec{i} - xy^2\vec{j} + (z+1)\vec{k}$;

б) $\vec{a}(M) = (u\,\vec{r})$, де $u = u(x,y,z)$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

11. Запишіть теорему Стокса у векторній формі.

Приклади. За формулою Стокса обчислити циркуляцію поля $\vec{a}(M) = Nx\vec{i} + xz\vec{j} + z\vec{k}$ вздовж контуру утвореного перетином поверхні $z^2 = 4 - x - y$, з координатами площини $(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$. Напрям обходу додатний.

12. Які поля називаються соленоїдільними, потенціальними, гармонічними?

Приклади. Визначити клас векторного поля.

а) $\vec{a}(M) = Nxz\vec{i} - Nyz\vec{j} + x^2y^2\vec{k}$;

б) $\vec{a}(M) = 2Nx\vec{i} + z\vec{j} + y\vec{k}$.

13. Що таке оператор Гамільтона? Обґрунтуйте записи: $\nabla u = grad\,u$; $\nabla \cdot \vec{a} = div\,\vec{a}$; $\nabla \times \vec{a} = rot\,\vec{a}$.

14. Що називається оператором Лапласа? Доведіть формулу $div(grad\,u) = \Delta u$.

Розділ 13.
Основи теорії функцій комплексної змінної

1. Наведіть приклади (графічно) одно-, дво-, трьохзв'язної області D на комплексній площині.

Приклади. Побудувати область D на комплексній площині, встановити чи буде область D однозв'язною?

а) $D: \{N+1 < |z-1| < N+2\}$; б) $D: \{0 < \mathrm{Re}[(N+1)\,iz] < N+3\}$.

2. Дайте означення функції комплексної змінної. Яка функція називається однозначною? Яка функція називається многозначною?

Приклади. Виділити дійсну та уявну частину функції:

а) $W = 2z - 1$, б) $W = z + z^2$, в) $W = e^{-z}$, г) $W = tg\,z$.

3. Дайте означення похідної функції $f(z)$. Яка функція називається аналітичною (в точці та області)? Запишіть необхідні та достатні умови диференційованості функції.

Приклади. Показати, що функція $f(z)$ є аналітичною на усій комплексній площині та знайти $f'(z)$:

а) $f(z) = e^z = N$; б) $f(z) = \sin Nz - i$.

4. Яким є геометричний зміст модуля та аргумент похідної?

Приклад. За допомогою функції $f(z) = z^3$ відобразити на площину Ouv лінію $y = (N+1)x$.

5. Дайте означення інтеграла від функції комплексної змінної та сформулюйте його властивості.

Приклади. Обчислити: а) $\int\limits_{\gamma} \left[z^2 - (N+1)z^3\right]dz$, де γ – еліпс $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$;

б) $\int\limits_{\gamma} \bar{z}dz$, де γ – коло $x^2 + y^2 = (N+1)^2$.

6. Дайте означення ряду Лорана. Що є областю збіжності ряду Лорана?
Приклад. Побудувати ряд Лорана по степенях функції:

$$f(z) = \frac{Nz+1}{z^2 - 5z + 6}.$$

7. Дайте класифікацію ізольованих особливих точок. Наведіть приклади.
8. Що називається лишком аналітичної функції? Як обчислюються лишок?
Приклад. Знайти лишки в усіх особливих точках функції:

$$f(z) = \frac{z}{(z^2-1)(z^2+N^2)^2}.$$

9. Сформулюйте основну теорему про лишки.
Приклади. Обчисліть інтеграл:

а) $\oint\limits_{\gamma} \frac{dz}{z^3+1}$, де γ – коло $x^2 + y^2 = 2(N+1)x$;

б) $\int\limits_0^{\infty} \frac{z^2}{z^4+1} dz$.

Розділ 14.
Операційне числення

1. Дайте означення перетворення Лапласа. Що називається зображенням та оригіналом?

Приклад. Знайдіть зображення функції Хевісайда: $n(t) = \begin{cases} 1, & t \ge 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$

2. Чи можуть дві різні неперервні функції мати однакове зображення? Відповідь обґрунтуйте.
3. Сформулюйте властивість лінійності перетворення Лапласа, теорему подібності.

Приклади. Використовуючи сформульовані властивості, знайдіть зображення функції:

а) $f(t) = 1 + (N+1)\,t$;

б) $f(t) = \sin\,[(N+1)t]\,\cos\,[(N+1)t]$;

якщо $\sin\,t \to \frac{1}{p^2+1}$.

4. Сформулюйте теореми зсуву та запізнення.
Приклади. Знайдіть зображення функції:

а) $e^{(N+1)t}\sin\,t$; б) $\sin(t-N)\eta(t-N)$.

5. Сформулюйте теореми про диференціювання оригіналу. Якщо $f(t) \to F(p)$, то які зображення матимуть $f'(z)$, $f''(z)$, $f'''(z)$?
6. Якщо $f(t) \to F(p)$, то яке зображення матиме $\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau$. Знайдіть зображення $\cos\,at$, вважаючи зображення $\sin\,at$ відомим.

7. Заповніть таблицю:

$f(t)$	$\eta(t)$	$\frac{t^n}{n!}$	e^{at}	$\frac{t^n}{n!}e^{at}$	$\cos\beta t$	$\sin\ \beta t$	$e^{at}\cos\beta t$	$e^{at}\sin\ \beta t$
$F(p)$								

<u>Приклади</u>. Знайдіть зображення заданої функції:

а) $e^{-t}+(N+1)e^{-2(N+1)}+t^2$;

б) $t\cos\ (N+1)t$; в) $\cos^2(N+1)t$

8. Викладіть схему розв'язування лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами операційним методом.

<u>Приклади</u>. а) $x''+x'=N$; $x(0)=0$, $x'(0)=1$;

б) $x''+2x'-3x=e^{-t}$; $x(0)=0$, $x'(0)=1$.

10. Тематичний план навчальної програми на 4 семестр

Нумерація і назва розділів та тем	Короткий зміст	Інформаційне забезпечення
1. Основи теорії ймовірностей	**Предмет теорії ймовірностей. Основні поняття.** Випадкові події. Алгебра випадкових подій. Означення та властивості ймовірності. Основні поняття та принципи комбінаторики. Елементи комбінаторики.	1, с17-19, с.38-42
	Основні теореми теорії ймовірностей. Теореми додавання для несумісних та сумісних подій. Теореми множення ймовірностей незалежних та залежних подій. Ймовірність появи хоча б однієї події	1,с43-49, 59-68
	Формули повної ймовірності та Байєса. Послідовності випробувань. Схема та формула Бернуллі. Формула Пуассона. Локальна та інтегральна теореми Лапласа.	1,с.55-59 1,с.69-70
	Випадкові величини. Дискретні випадкові величини. Закони розподілу та числові характеристики дискретних випадкових величин. Неперервні випадкові величини. Закони розподілу та числові характеристики неперервних випадкових величин. Нормальний закон розподілу. Правило трьох сигм.	1,с.93-100, с.148-150, с.114-117,

Нумерація і назва розділів та тем	Короткий зміст	Інформаційне забезпечення
	Закон великих чисел. Система двох випадкових величин. Закон розподілу ймовірностей дискретної двовимірної випадкової величини. Основні числові характеристики системи двох випадкових величин. Кореляційний момент. Коефіцієнт кореляції та його властивості.	1,с.126-140 1,с.126-140
	Функції одного випадкового аргументу. Функції дискретного та неперервного випадкового аргументу та їх числові характеристики.	1,с.141-146
2. Основи математичної статистики	**Математична статистика** Предмет та основні задачі математичної статистики. Вибірковий метод. Генеральна та вибіркова сукупність. Репрезентативність вибірки. Способи відбору. Статистичний розподіл вибірки. Емпірична функція розподілу та її властивості. Полігон та гістограма частот та відносних частот. Статистичні оцінки параметрів розподілу (точкові та інтервальні). Довірчий інтервал для оцінки математичного сподівання нормального розподілу при відомому середньоквадратичному відхиленні. Статистична перевірка статистичних гіпотез. Критерій Пірсона.	1,с.165-215, 1,с.216-234, 235-242, 245-248, 1,с.265-268

11. Інформаційно-методичне забезпечення на 4 семестр

1. Барковський В.В., Барковська Н.В., Лопатін О.К. Теорія ймовірностей та математична статистика. К.: ЦУЛ, – 2002. – 447 с.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М. 1980.
3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике – М. 1975.
4. Жлуктенко В.І., Наконечний С.І. Теорія ймовірностей і математична статистика. У 2 ч.– К.: КНЕУ, 2000. – Ч. 1, 304 с; Ч 2, 334 с.
5. ВолощенкоА.Б., Джалладова І.А. Теорія ймовірностей і математична статистика- К., 2003.
6. Довідники з вищої математики, з теорії ймовірностей та математичної статистики.
7. Конспекти лекцій, робочі зошити практичних занять,
8. Навчально-методичні посібники кафедри.

12. Зміст семестрового контролю
(Перелік екзаменаційних завдань) на 4 семестр
1. Теорія ймовірностей

1. Означення випадкової події. Навести приклади випадкових подій.
2. Поняття достовірної та неможливої подій. Навести приклади.
3. Поняття елементарної та складної випадкової події. Навести приклади.
4. Поняття простору елементарних подій. Навести приклади.
5. Означення суми двох випадкових подій А та В. Схематичне зображення $A \cup B.$ Навести приклади $A \cup B.$
6. Означення добутку двох випадкових подій А та В. Схематичне зображення $A \cap B.$ Навести приклади $A \cap B.$
7. Означення різниці двох випадкових подій А та В. Схематичне зображення $A \setminus B.$ Навести приклади $A \setminus B.$
8. Класичне означення ймовірності випадкової події.

<u>Приклад.</u> Задані дві множини цілих чисел $\Omega_1 = \{1;2;3;4\}$, $\Omega_2 = \{4+N;5+N;6+N\}$. З кожної множини беруть по одному числу. Побудувати простір елементарних подій експерименту і такі випадкові події:
1) А- сума пари чисел кратна 2,
2) В- сума пари чисел кратна 5.
Обчислити Р(А), Р(В), $P(A \cup B), P(A \cap B), P(A \setminus B)$

9. Поняття геометричної ймовірності.

<u>Приклад.</u> Яка ймовірність того, що навмання кинута в круг точка потрапить в $N-$кутник вписаний в цей круг.

10. Поняття статистичної ймовірності.
11.Означення переставлення з n елементів. Формула для обчислення переставлення з n елементів. Навести приклади.

<u>Приклад.</u> Студент отримав стовпчики із 15 дат та 15 подій. Йому потрібно вказати дату кожної події, причому він може використовувати кожну дати тільки один раз. Студент знає дати N подій, а для решти подій робить це випадковим методом. Знайти ймовірність того, що він правильно датує кожну подію.

12. Означення розміщення з n елементів по $m.$ Формула для обчислення розміщення з n елементів по $m.$ Навести приклади.

<u>Приклад.</u> В групі $(N+2)$ студента. Яка ймовірність того, що дні народження студентів не збігаються.

13. Означення сполучення з n елементів по $m.$ Формула для обчислення сполучення з n елементів по $m.$ Навести приклади.

<u>Приклад.</u> В урні міститься 4 червоні, 5 білих та N зелених кульок. Навмання із урни беруть три кульки. Яка ймовірність того, що вони виявляться різного кольору?

14. Поняття сумісних та несумісних подій. Навести приклади.
Теореми додавання ймовірностей.
15. Поняття незалежних та залежних подій. Навести приклади. Поняття умовної ймовірності. Теореми множення ймовірностей.
16. Ймовірність появи хоча б однієї події.
17. Поняття надійності системи.

<u>Приклад.</u>

1.1. Студент знає 45 з 60 питань програми. Кожен екзаменаційний білет складається з трьох питань. Знайти ймовірність того, що студент знає:

1) три питання свого екзаменаційного білета;

2) два питання свого екзаменаційного білета;

3) одне питання свого екзаменаційного білета;

1.2. Два стрільці зробили постріл по мішені. Ймовірність того, що перший стрілець влучив у мішень, дорівнює 0,7, а другий - 0,8. Визначити ймовірність того, що:

1) обидва стрільці влучать в ціль;

2) обидва стрільці промахнуться;

3) тільки один стрілець влучить в ціль;

4) хоча б один стрілець влучать в ціль.

1.3. Гральний кубик підкидається три рази. Чому дорівнює ймовірність того, що при цьому цифра 3 з’явиться:

1) три рази;

2) два рази;

3) один раз;

4) хоча б один раз.

1.4. Три студенти складають екзамен з математики. Ймовірність того, що перший складе екзамен, дорівнює 0,85, для другого та третього ця ймовірність становить відповідно 0,65 і 0,45. Обчислити ймовірність таких випадкових подій:

1) три студенти складуть екзамен;

2) два студенти складуть екзамен;

3) один студент складе екзамен;

4 хоча б один студент складе екзамен.

1.5. В урні міститься 9 червоних і 5 синіх кульок. Кульки з неї виймаються по одній без повернення. Таким способом вийняли чотири кульки. Обчислити ймовірність таких випадкових подій:

1) вийняли чотири червоні кульки;

2) вийняли чотири сині кульки;

3) вийняли хоча б одну червону кульку;

3) вийняли дві червоні та дві сині кульки.

1.6. Робітник обслуговує три верстати-автомати, що працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що протягом години перший верстат потребує уваги робітника, дорівнює 0,95, для другого та третього верстатів ця ймовірність дорівнює відповідно 0,8 і 0,85. Яка ймовірність того, що протягом години уваги робітника потребують:

1) три верстати;

2) два верстати;

3) один верстат;

4) хоча б один верстат.

1.7. В урні міститься 4 зелених і 8 червоних кульок. Кульки із урни виймають по одній без повернення. Таким способом було вийнято три кульки. Обчислити ймовірність таких випадкових подій:

1) перша кулька буде червоною, друга - зеленою, третя – червоною;

2) перша кулька буде зеленою, друга - червоною, третя – зеленою;

3) три кульки будуть червоними;

4) хоча б одна кулька буде зеленою.

1.8. Дві гармати стріляють по одній цілі одним залпом. Ймовірності влучення в ціль для першої та другої гармати відповідно дорівнюють: $p_1 = 0{,}75$; $p_2 = 0{,}8$. Обчислити ймовірність таких випадкових подій:

1) ціль буде ушкоджена;

2) тільки один снаряд влучить в ціль;

3) два снаряди влучать в ціль;

4) ціль не буде ушкоджена.

1.9. Три стрільці в однакових і незалежних умовах зробили по одному пострілу по одній і тій же мішені. Ймовірності попадання в мішень для першого, другого та третього стрільців відповідно дорівнюють: $p_1 = 0{,}65$; $p_2 = 0{,}8$, $p_3 = 0{,}75$. Обчислити ймовірність таких випадкових подій:

1) тільки один стрілець влучить в мішень;

2) не більше одного стрільця влучить в мішень;

3)три стрільці влучить в мішень;

4) хоча б один стрілець влучить в мішень.

1.10. В студії телебачення три телевізійні камери. Для кожної камери ймовірність того, що вона включена в даний момент, дорівнює відповідно: $p_1 = 0{,}7$, $p_2 = 0{,}9$, $p_3 = 0{,}8$. Обчислити ймовірність таких випадкових подій:

1) включені три камери;

2) включені дві камери;

3) включена одна камера;

4) включена хоча б одна камера.

18. Поняття повної групи подій. Формули повної ймовірності та Байєса.

Приклад. До складального цеху надходять деталі від трьох інших цехів. Від першого надходить $n\%$ усіх деталей, від другого $m\%$ і від третього - решта деталей. Перший цех допускає в середньому p_1 браку, другий - p_2 і третій - p_3.

1. Яка ймовірність того, що до складального цеху надійде стандартна деталь?

2. До складального цеху надійшла стандартна деталь. Яка ймовірність того, що вона виготовлена в другому цеху?

№ варіанта	***n***	***m***	p_1	p_2	p_3
1	40	32	0,04	0,1	0,05
2	35	40	0,05	0,03	0,06
3	38	35	0,02	0,05	0,08
4	42	25	0,06	0,04	0,05
5	30	45	0,08	0,03	0,1
6	25	50	0,015	0,01	0,09
7	20	55	0,02	0,09	0,08
8	28	45	0,03	0,07	0,05
9	25	40	0,1	0,06	0,08
10	35	30	0,12	0.08	0,06

19. Схема та формула Бернуллі. За якої умови формула Бернуллі застосовується для обчислення ймовірностей.

20. Найімовірніше число появи події (мода). Формула для обчислення моди випадкової події A в результаті проведення n незалежних експериментів за схемою Бернуллі.
21. Функція Гауса та її властивості. Локальна терема Муавра-Лапласа.
22. Функція Лапласа та її властивості. Інтегральна терема Муавра-Лапласа.
23. Формула Пуассона.
24.Найпростіший потік подій, його властивості та обчислення.

Приклад.

Ймовірність появи події A в кожному випробуванні дорівнює p. Знайти ймовірність того, що при n випробуваннях подія A з'явиться:

1) k разів;

2) від k_1 до k_2 разів;

3) не більше m разів.

№ варіанта	p	n	k	k_1	k_2	m
1	0,6	100	70	40	50	60
2	0,7	200	120	100	150	180
3	0,75	300	200	230	250	150
4	0,8	400	250	200	300	100
5	0.65	100	50	60	70	55
6	0,55	200	130	140	160	100
7	0,5	300	200	220	250	150
8	0.85	400	300	320	350	200
9	0,9	100	60	80	90	75
10	0,68	200	140	100	120	90

25. Види випадкових величин та способи їх задання.
26. Дискретні випадкові величини (ДВВ). Закони розподілу та числові характеристики ДВВ. Функція розподілу її властивості та графік.
27. Неперервні випадкові величини (НВВ). Закони розподілу НВВ. Числові характеристики НВВ. Функція розподілу ймовірностей та її властивості. Щільність ймовірностей, її властивості. Числові характеристики НВВ та їх властивості.
28. Початкові та центральні моменти. Асиметрія та ексцес.

Приклад.

Ймовірність того, що радіосигнал буде прийнятий при кожній з 6 передач, дорівнює p.

1) Побудувати закон розподілу випадкової величини X – кількості прийнятих радіосигналів.

2) Побудувати функцію розподілу ймовірностей і накреслити її графік.

3) Знайти математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$, середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$.

4) Знайти моду Mo.

5) Знайти $P(1 < X < 3)$.

№ варіанта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	0,6	0,7	0,65	0,55	0,75	0,85	0,72	0,82	0,4	0,5

Приклад. Випадкова величина X задана функцією розподілу $F(x)$. Знайти:

1) диференціальну функцію $f(x)$ (щільність розподілу),

2) математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$,

3) моду Mo та медіану Me,

4) $P\left(\frac{1}{2} < X < 2\right)$.

5) Побудувати графіки функції та щільності розподілу.

1. $F(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{100} & при \quad 0 < x \le 10, \\ 1 & при \quad x > 10. \end{cases}$

2. $F(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x \le 0, \\ x^2 & при \quad 0 < x \le 1, \\ 1 & при \quad x > 1. \end{cases}$

3. $F(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x \le 1, \\ x-1 & при \quad 1 < x \le 2, \\ 1 & при \quad x > 2. \end{cases}$

4. $F(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{4} & при \quad 0 < x \le 2, \\ 1 & при \quad x > 2. \end{cases}$

5. $F(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x \le 4, \\ \dfrac{x}{4}-1 & при \quad 4 < x \le 8, \\ 1 & при \quad x > 4. \end{cases}$

6. $F(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x \le -4, \\ \dfrac{x+4}{6} & при \quad -4 < x \le 2, \\ 1 & при \quad x > 2. \end{cases}$

7. $F(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x \le 0, \\ x^3 & при \quad 0 < x \le 1, \\ 1 & при \quad x > 1. \end{cases}$

8. $F(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x \le -1, \\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{3} & при \quad -1 < x \le 2, \\ 1 & при \quad x > 2. \end{cases}$

9. $F(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x \le 2, \\ \dfrac{x}{2}-1 & при \quad 2 < x \le 4, \\ 1 & при \quad x > 4. \end{cases}$

10. $F(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{9} & при \quad 0 < x \le 3, \\ 1 & при \quad x > 3. \end{cases}$

29. Нормальний закон розподілу, його числові характеристики. Правило трьох сигм.

Приклад. Випадкова величини X розподілена нормально, її математичне сподівання дорівнює N, а середнє квадратичне відхилення $\sigma = 2$. Знайти ймовірність того, що X матиме значення в інтервалі $(N-1; N+1)$.

30. Закон великих чисел та центральна гранична теорема.

31. Функції дискретного випадкового аргументу та їх числові характеристики.

Приклад. Закон розподілу ДВВ X задано таблицею:

$X = x_i$	$-N$	$-N+1$	$-N+2$	N	$N+1$	$N+2$
p_i	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1	0,3

Побудувати закон розподілу ймовірностей для $y = x^2$. Обчислити: $M(Y)$, $D(Y)$, $\sigma(Y)$.

32. Функції неперервного випадкового аргументу та їх числові характеристики.

Приклад. Випадкова величина X задана щільністю розподілу $f(x)$.

I. Знайти:

1)параметр a ,2) інтегральну функцію $F(x)$ розподілу,

3) математичне сподівання $M(x)$М(x), дисперсію $D(x)$, середнє квадратичне відхилення $\sigma(x)$,

4) моду Mo та медіану Me;

5) $P\left(\frac{1}{2} < X < 2\right)$.

II. Побудувати графіки функції розподілу та щільності розподілу.

III. Знайти $f(y)$, $F(y)$, якщо $Y = 4\sqrt{X}$.

1. $f(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x \le 0, \\ ax^2 & при \quad 0 < x \le 1, \\ 0 & при \quad x > 1. \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x \le -1, \\ a(x+1), & при \quad -1 < x \le 2, \\ 0, & при \quad x > 2. \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x \le 0, \\ ax, & при \quad 0 < x \le 5, \\ 0, & при \quad x > 5. \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x \le 1, \\ a(x+1), & при \quad 1 < x \le 4, \\ 0, & при \quad x > 4. \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x \le 0, \\ a\sqrt{x} & при \quad 0 < x \le 4, \\ 0 & при \quad x > 4. \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x \le 0, \\ a\sqrt{x^3}, & при \quad 0 < x \le 4, \\ 0, & при \quad x > 4. \end{cases}$

7. $f(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x\le 0, \\ ax^{3/5}, & при \quad 0<x\le 1, \\ 0, & при \quad x>1. \end{cases}$ 8. $f(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x\le 0, \\ ax^{1/5} & при \quad 0<x\le 1, \\ 0 & при \quad x>1. \end{cases}$

9. $f(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x\le 0, \\ a\cos x, & при \quad 0<x\le \frac{\pi}{2}, \\ 0, & при \quad x>\frac{\pi}{2}. \end{cases}$ 10. $f(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x\le 0, \\ ax^{3}, & при \quad 0<x\le 1, \\ 0, & при \quad x>1. \end{cases}$

33. Закони розподілу та числові характеристики двовимірних випадкових величин.
34. Кореляційний момент. Коефіцієнт кореляції, його властивості та обчислення.
35. Умовні закони розподілу системи двох дискретних величин та їх числові характеристики.

Приклад. Закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин (X,Y) заданий таблицею (N задає викладач):

	$x_1=N$	$x_2=N+2$	$x_3=N+4$	$x_4=N+6$	p_{y_i}
$y_1=N+1$	$\frac{N}{10}a$	$\frac{5N}{10}a$	$\frac{4N}{10}a$	Na	
$y_2=N+3$	$\frac{9N}{10}a$	$\frac{4N}{10}a$	$\frac{5N}{10}a$	$\frac{2N}{10}a$	
$y_3=N+5$	Na	$\frac{21N}{10}a$	$\frac{11N}{10}a$	$\frac{18N}{10}a$	
p_{x_i}					

Знайти:
1) a;
2) $P(N\le X\le N+6;\ N+1\le Y\le N+5)$
3) коефіцієнт кореляції r_{xy};
4) $M(X/y=y_2)$; $M(Y/x=x_2)$.

2. Математична статистика

1. Означення генеральної та вибіркової сукупності.
2. Означення варіанти та варіаційного ряду.
3. Поняття частоти та відносної частоти варіанти.
4. Визначення дискретного статистичного розподілу вибірки.
5. Числові характеристики дискретного статистичного розподілу.
6. Емпірична функція розподілу (комулята). Властивості $F^*(x)$.
7. Інтервальний статистичний розподіл вибірки.

8. Числові характеристики інтервального статистичного розподілу.
9.Формули для обчислення моди та медіани інтервального статистичного ряду.
9. Полігон та гістограма частот та відносних частот.
10. Початкові та центральні моменти k – го порядку. Асиметрія та ексцес статистичного розподілу вибірки.
11. Розмах та коефіцієнт варіації.
12. $F^*(x)$ для інтервального статистичного ряду.
13. Точкова статистична оцінка. Незміщена точкова статистична оцінка. Зміщена точкова статистична оцінка.
14. Поняття зміщеної, ефективної, ґрунтовної точкової статистичної оцінки.
15. Виправлена дисперсія та середнє квадратичне відхилення.
16. Інтервальні статистичні оцінки для параметрів генеральної сукупності. Точність і надійність оцінки. Довірчий інтервал.
17. Побудова довірчого інтервалу для $\overline{X}_{\Gamma}$ із заданою надійністю γ при відомому значенні σ.
18. Поняття нульової та альтернативної гіпотез. Параметричні та непараметричні гіпотези. Проста та складна статистичні гіпотези.
19. Поняття статистичного критерію.
20. Область прийняття нульової гіпотези, критична область, критична точка. Перевірка правильності нульової гіпотези. Рівень значущості α.
21. Помилки першого та другого роду. Потужність критерію.
22. Критерій узгодженості Пірсона.

Завдання 1. Із партії однотипних приладів для контролю відбирають 100 штук з метою визначення часу (в год.) безперервної роботи з моменту включення до повної відмови в роботі. На підставі наведених нижче даних:

1) побудувати інтервальний статистичний ряд. При цьому область реалізацій розбити на сім однакових інтервалів;

2) знайти числові характеристики вибіркової сукупності: $\tilde{M}o$, $\tilde{M}e$, $\overline{x}$, $\tilde{D}$, $\tilde{\sigma}$, $\tilde{A}s$, $\tilde{E}s$.

3) Визначити гіпотетично, який закон розподілу має випадкова величина X — час безвідмовної роботи приладу. При рівні значущості $\alpha = 0,05$ перевірити правильність висунутої нульової гіпотези.

4) З надійністю $\gamma = 0,99$ побудувати довірчий інтервал для $\overline{X} = m$.

Варіант 1.

175	195	190	166	205	185	217	180	220	191
174	187	184	200	190	222	210	192	183	**223**
194	177	211	190	201	182	220	161	188	**215**
176	186	204	170	225	190	180	212	200	191
192	178	208	199	155	191	180	196	172	187
184	188	206	190	197	167	198	194	210	176
190	182	160	202	189	181	200	211	188	207
197	193	178	207	203	174	190	179	208	187
173	180	188	198	210	190	164	182	200	191
177	193	199	211	194	207	179	187	171	201

Варіант 2.

165	180	186	145	175	167	215	210	196	181
150	168	176	200	211	177	188	160	170	180
171	181	162	212	201	151	177	190	180	172
182	174	191	178	164	213	202	169	210	179
203	180	153	169	192	179	164	187	170	177
171	161	176	194	204	180	173	154	183	194
184	188	174	160	178	188	170	197	178	199
170	176	190	199	184	169	191	177	198	159
179	166	199	194	158	182	200	167	189	177
156	180	170	201	178	200	194	214	184	190

Варіант 3.

156	166	135	176	168	190	150	178	186	170
146	180	171	158	186	184	169	160	188	172
164	173	181	170	193	150	191	172	160	183
166	157	188	167	177	190	179	151	169	163
172	147	156	180	140	174	193	158	182	170
159	181	166	192	200	163	168	176	154	174
150	162	177	168	190	166	152	184	170	160
172	180	142	149	159	174	189	153	204	168
192	159	167	197	177	199	170	201	161	169
160	174	203	188	160	168	179	144	174	163

Варіант 4.

116	130	135	100	132	113	141	120	146	134
127	95	124	140	129	119	143	128	106	147
107	123	126	144	141	130	97	121	150	134
118	128	101	140	126	116	144	129	108	151
130	139	118	109	142	131	152	104	120	134
98	121	133	154	164	127	124	143	106	129
130	112	122	138	99	132	150	120	160	131
119	134	136	153	129	149	113	117	131	159
130	116	114	157	154	134	139	149	124	126
105	128	123	140	130	122	152	129	150	110

Варіант 5.

118	113	123	119	128	107,5	133	120	127	138
124	121	130	134	118,5	126	114	142,5	120,5	140
115	122	110	123	137	121	132	124	135	120
119	125	131	118	136	113,5	120,5	133	126	142
127	118,5	137	141	119	123	129	117	120	134
121	116	125	112	127	122	128	126	120,5	128
124	118	129	126	114,5	123	120	111	130	122
119	128	113	127	118	123	132	121	123	136
124	119,5	127	131	108	118	116	123	120	129
122	126,5	128	117	121	133	125	120	127	132

Варіант 6.

155	166	175	135	168	194	164	205	174	148
170	186	163	172	178	136	200	147	156	167
158	138	166	188	146	168	180	172	199	160
174	162	184	172	190	186	140	163	150	170
161	166	149	191	169	159	183	142	173	197
174	182	160	170	176	151	192	172	164	188
170	158	193	152	169	180	156	177	144	166
164	169	176	174	194	167	153	162	170	176
151	172	160	178	154	178	173	190	186	174
167	145	180	169	184	189	163	172	150	170

Варіант 7.

36	47	41	28	40	29	42	46	31	37
30	23	38	42	48	40	33	43	37	46
36	42	34	37	24	43	50	32	45	40
41	31	37	42	39	29	26	43	38	51
30	40	46	38	45	52	40	44	28	34
35	43	27	31	37	42	50	33	39	46
44	40	34	45	52	39	42	50	32	37
37	29	43	48	40	54	46	38	51	60
44	36	52	65	30	37	49	44	39	58
50	45	40	55	48	33	38	42	57	63

Варіант 8.

125	145	156	136	166	154	160	179	150	142
146	161	143	151	134	170	180	140	163	154
142	153	122	159	150	174	132	149	136	164
146	133	162	172	141	148	160	121	153	138
159	144	154	120	158	126	139	152	168	147
150	119	160	143	146	136	163	127	150	166
164	152	144	129	163	153	140	151	165	118
137	160	148	170	130	146	117	143	159	150
116	153	156	141	149	172	185	128	138	150
147	137	134	158	115	149	173	154	180	144

Варіант 9.

115	125	135	145	127	95	137	117	140	129
130	141	100	117	146	131	142	133	120	144
136	134	147	138	126	118	104	140	128	121
99	123	129	141	130	148	143	119	133	144
132	136	149	133	106	124	134	139	120	140
119	107	128	121	138	150	126	136	165	129
128	139	117	151	130	108	122	132	140	163
123	133	152	144	116	159	134	109	162	142
136	153	124	126	157	139	128	149	110	160
127	154	138	156	160	120	140	134	150	114

Варіант 10.

135	145	155	126	158	147	174	184	150	160
151	161	137	166	153	128	163	180	164	154
156	146	165	159	136	147	181	130	148	160
132	161	149	166	150	163	138	179	164	151
152	139	156	153	168	157	177	154	133	158
160	146	169	176	145	166	147	162	186	140
141	164	148	170	175	149	163	168	150	187
151	171	142	152	162	170	180	153	158	189
159	154	182	172	146	143	164	173	148	190
150	173	159	195	151	168	184	144	163	154

Завдання 2. Залежність між y_i від x_i наведено парним статистичним розподілом вибірки. Потрібно:

1) побудувати кореляційне поле залежності ознаки Y від X;

2) визначити точкові незміщені статистичні оцінки. Обчислити $\tilde{r}_{xy}$;

3) побудувати графік лінії регресії.

Варіант 1.

$Y = y_i$	10	12	14	16	18	20	22	24
$X = x_i$	0	5	8	10	12	14	16	18

Варіант 2.

$Y = y_i$	30	29	28	27	27,5	26	26,5	25
$X = x_i$	6	7	8	9	10	11	12	14

Варіант 3.

$Y = y_i$	1	1,2	1,3	1,5	1,4	1,3	1,6	1,5
$X = x_i$	20	20	21	22	22,5	23	22	24

Варіант 4.

$Y = y_i$	10	12	13	13,5	14	13	16	15
$X = x_i$	2	2,5	2,1	2,8	2,5	3	3,2	4

Варіант 5.

$Y = y_i$	5,4	5,6	6,2	6,8	7,1	7,8	8,5	9
$X = x_i$	1,8	2	2,8	3	3,8	3,9	4,2	4,5

Варіант 6.

$Y = y_i$	28	29	29,2	29,5	30	31	32	35
$X = x_i$	2	2,15	2,5	2,9	3	3,5	3,2	4

Варіант7.

$Y = y_i$	11	12	1,5	13,5	14	13	16	15
$X = x_i$	20	20,5	21	22	22,5	23	22	24

Варіант 8.

$Y = y_i$	9,3	9,2	9,1	9,5	9,1	9	9,6	9,3
$X = x_i$	4	5	5,5	6	6,8	7,5	8,5	10

Варіант 9.

$Y = y_i$	0,64	0,68	0,72	0,76	0,78	0,82	0,88	0,95
$X = x_i$	14	13	14,4	15	14,6	15	14	15,5

Варіант 10.

$Y = y_i$	34	32	30	28	26	24	22	20
$X = x_i$	14	13	12	11	10	9	8	7

13. Рекомендації до організації самостійної роботи

Кафедра вищої математики ДУІКТ пропонує кожному студенту врахувати наступні рекомендації:

1. Враховуючи свої індивідуальні особливості та можливості, обчислити реальний час для самостійної роботи у семестрі та частину цього часу на вивчення вищої математики. Для якісного засвоєння навчальної програми семестру з вищої математики студенту-заочнику потрібно біля 150 академічних годин.

3. Для вивчення матеріалу певного розділу студенту потрібно:

а) уважно прочитати рекомендовані сторінки підручників, ознайомитись із змістом екзаменаційних завдань відповідного розділу, щоб визначити його основу та типові приклади;

б) в звіті про самостійну роботу записати стислі відповіді на усі завдання вивчаємого розділу з обов'язковим розв'язуванням заданих прикладів (N – номер варіанту, що визначається за останньою цифрою номера залікової книжки: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10).

4. Коли виникають складності у відповідях на теоретичні завдання або при розв'язуванні прикладів, треба відповідний матеріал знову знайти у підручнику (або в додатковій літературі), ознайомитись повторно, більш уважно і, при необхідності, з викладачем на консультації.

14. Вимоги до оформлення звіту про самостійну роботу

Звіт оформлюється в окремому зошиті або на аркушах А4.

У звіті повинні бути приведені:

1. Розв'язування заданих прикладів (номер варіанту визначається за останньою цифрою номера залікової книжки: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10).
2. Розв'язування мають містити стислі теоретичні пояснення та формули.
3. В кінці звіту слід навести список використаної літератури.
4. Під час семестрового екзамену можна буде користуватись своїм звітом.

Титульний лист оформлюється так:

Міністерство освіти і науки України
Державний університет телекомунікацій
Навчально-науковий інститут заочного та дистанційного навчання

Кафедра вищої математики

ЗВІТ
Про самостійну роботу
з вищої математики на *і* семестр

студента (студентки) групи __________

____
(прізвище, ім'я, по-батькові)

залікова книжка № __________

перевірений викладачем ________ ____________________
(підпис) *(прізвище та ініціали)*

Дата _______

Київ–201__

15. Критерії оцінювання знань та вмінь студентів

Поточна семестрова робота кожного студента буде оцінюватись викладачем до іспиту

(0 – 40) балами з врахуванням наявності та якості звіту про самостійну роботу.

На екзамені кожен екзаменаційний білет буде містити 3 завдання (теоретичних і практичних) із різних розділів програми.

Кожне теоретичне питання буде оцінюватись

0 – 5 балами, а кожен приклад – **(0 – 15)** балами.

Семестрова оцінка залежить від загальної кількості балів.

„Відмінно”, якщо кількість балів **95–100**;

„Добре”, якщо кількість балів **75–94**;

„Задовільно”, якщо кількість балів **60–74**;

„Незадовільно”, якщо кількість балів менше **60**.

Отже, якісна поточна семестрова робота дозволить студенту одержати високу екзаменаційну оцінку.