

Барабаш О.В., Онищенко В.В.

***ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ***  
**3**  
***ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ***

Навчальний посібник

Частина 1

Київ-2013

Навчальний посібник розроблений *проф. Барабашом О.В.* та *доц. Онищенко В.В.*, обговорений і затверджений на засіданні кафедри вищої математики Державного університету телекомунікацій від 15.11.2013, протокол №5 та на засіданні Вченої ради Державного університету телекомунікацій від 27.11.2013 р., протокол №4.

**Барабаш О.В., Онищенко В.В.** Лабораторний практикум з вищої математики. Ч. 1.  
Навчальний посібник. – Київ: ДУТ, 2013. – 117 с.

У навчальному посібнику міститься цикл лабораторних робіт з курсу Вища математика для технічних спеціальностей. Для виконання цих робіт пропонується використовувати програму *Math*. Для кожної лабораторної роботи наведено зразок виконання.

До посібника входить добірка задач для самостійної роботи студентів.

© О.В.Барабаш, В.В.Онищенко  
© ДУТ, 2013

## Вступ

Сучасна система освіти, завдяки швидкому розвитку інформаційних технологій, вимагає суттєвих змін. Ці зміни пов'язані як з використанням нових інформаційних технологій навчання, які базуються на можливостях сучасної комп'ютерної техніки, так і з методикою викладання взагалі. Мова йде про зміну системи освіти, про оволодіння інформаційною культурою, під якою розуміємо одну із складових загальної культури, що по суті є вищим проявом освіченості, професійної компетентності. Отже сучасне інформаційно-комунікаційне суспільство вимагає від людини (викладача чи студента) вчитися протягом всього життя. Вміння запам'ятовувати стає не основним для успішного життя. Сьогодні вимагає мобільності: швидко навчатись новому і забувати навички і вміння, які перестають використовуватись.

Даний навчальний посібник вміщує цикл лабораторних робіт з курсу Вища математика для технічних спеціальностей. Для виконання цих робіт пропонується використовувати програму Maxima. Для кожної лабораторної роботи наведено зразок виконання.

Maxima — це система комп'ютерної алгебри, аналогічна Mathematica, Maple та іншим подібним системам. Незважаючи на складність програмних продуктів, що призначені для символьних обчислень, відмінність Maxima від аналогічних програм в тому, що вона є безкоштовною і розповсюджується з відкритим вихідним кодом (ліцензія GPL).

Maxima, як і Mathematica, бере свій початок від програми Macsyma — одної з самих перших систем комп'ютерної алгебри. Розробка цих продуктів ведеться в MIT (Massachusetts Institute of Technology — Массачусетський технологічний інститут) з 1968 року. Сама Maxima розроблялась з 1982 р. як комерційна система на основі Macsyma, а з 2000 року після публікації вихідного коду на SourceForge продовжує розвиватись завдяки багатьом розробникам.

Maxima має широкий набір засобів для проведення аналітичних обчислень, числових обчислень та побудови графіків. За своїми можливостями система близька до таких комерційних систем, як Maple та Mathematica. В той же час має високу ступінь мобільності: може працювати на всіх основних сучасних операційних системах.

Автори вважають, що даний навчальний посібник буде корисним для майбутніх фахівців технічних напрямів.

# Семестр 1

## Лабораторна робота 1

*Тема роботи: «Операції над матрицями. Визначники. Правило Крамера»*

*Мета роботи: навчитись виконувати дії з матрицями, визначниками, розв'язувати системи лінійних алгебраїчних рівнянь за правилом Крамера.*

*Завдання:*

### Варіант 1.

*Завдання 1.*

Знайти значення матричного виразу

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^T$$

*Завдання 2.*

Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 4 & 7 & 2 & 8 \\ -5 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

*Завдання 3.*

Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера та перевірити розв'язок підстановкою

$$\begin{cases} 4x - 2y + z = 3 \\ x + 3y - 2z = 1 \\ 2x - y - z = -2 \end{cases}$$

### Варіант 2.

*Завдання 1.*

Знайти значення матричного виразу

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

*Завдання 2.*

Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 & 8 \\ 5 & -2 & 7 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

*Завдання 3.*

Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера та перевірити розв'язок підстановкою

$$\begin{cases} 2x - y + z = 5 \\ x + 3y - 2z = 11 \\ 3x - 2y - z = 2 \end{cases}$$

Варіант 3.

*Завдання 1.*

Знайти значення матричного виразу

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T$$

*Завдання 2.*

Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 4 & 7 & 2 & 8 \\ -3 & 1 & 7 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

*Завдання 3.*

Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера та перевірити розв'язок підстановкою

$$\begin{cases} 4x - 2y + 3z = 3 \\ x + 2y - 2z = 10 \\ 2x - 3y - z = -2 \end{cases}$$

Варіант 4.

*Завдання 1.*

Знайти значення матричного виразу

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

*Завдання 2.*

Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & 8 \\ 5 & -2 & 7 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

*Завдання 3.*

Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера та перевірити розв'язок підстановкою

$$\begin{cases} 2x - y + z = 15 \\ x + 3y - 2z = 1 \\ 3x - 2y - z = 2 \end{cases}$$

### Варіант 5.

*Завдання 1.*

Знайти значення матричного виразу

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^T$$

*Завдання 2.*

Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 4 & 7 & 2 & 8 \\ -5 & 6 & 7 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

*Завдання 3.*

Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера та перевірити розв'язок підстановкою

$$\begin{cases} 4x - 2y + z = 3 \\ x + 3y - 2z = 11 \\ 2x - y - 3z = -2 \end{cases}$$

### Варіант 6.

*Завдання 1.*

Знайти значення матричного виразу

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

*Завдання 2.*

Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 & 8 \\ 5 & -2 & -7 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

*Завдання 3.*

Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера та перевірити розв'язок підстановкою

$$\begin{cases} x - y + z = 5 \\ 2x + 3y - 2z = 1 \\ 3x - 2y - z = 12 \end{cases}$$

### Варіант 7.

*Завдання 1.*

Знайти значення матричного виразу

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T$$

*Завдання 2.*

Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 0 & 7 & 2 & 8 \\ -5 & 6 & 7 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

*Завдання 3.*

Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера та перевірити розв'язок підстановкою

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 3 \\ x + 3y - 2z = 1 \\ 2x - y - z = -12 \end{cases}$$

### Варіант 8.

*Завдання 1.*

Знайти значення матричного виразу

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

*Завдання 2.*

Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 8 \\ 5 & -2 & 7 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

*Завдання 3.*

Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера та перевірити розв'язок підстановкою

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y - z = 2 \end{cases}$$

### Варіант 9.

*Завдання 1.*

Знайти значення матричного виразу

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}^T$$

*Завдання 2.*

Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 4 & 8 & 2 & 7 \\ -5 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

*Завдання 3.*

Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера та перевірити розв'язок підстановкою

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 3 \\ 2x + 3y - 2z = 1 \\ x - y - z = -2 \end{cases}$$

### Варіант 10.

*Завдання 1.*

Знайти значення матричного виразу

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

*Завдання 2.*

Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 8 \\ 5 & -2 & 7 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

*Завдання 3.*

Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера та перевірити розв'язок підстановкою

$$\begin{cases} 2x - y + z = 5 \\ x + 3y - 3z = 1 \\ 3x - 2y - z = 12 \end{cases}$$



### Варіант 11.

*Завдання 1.*

Знайти значення матричного виразу

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^T$$

*Завдання 2.*

Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 4 & 7 & 2 & 8 \\ -3 & 6 & 7 & 12 \\ 5 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

*Завдання 3.*

Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера та перевірити розв'язок підстановкою

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = -3 \\ x + 3y - 2z = 1 \\ 3x - y - z = 2 \end{cases}$$

### Варіант 12.

*Завдання 1.*

Знайти значення матричного виразу

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

*Завдання 2.*

Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 7 & 7 & 2 & -8 \\ 5 & -2 & 7 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

*Завдання 3.*

Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера та перевірити розв'язок підстановкою

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 5 \\ x + 3y - 2z = 11 \\ 3x - 2y - z = 12 \end{cases}$$

### Варіант 13.

*Завдання 1.*

Знайти значення матричного виразу

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^T$$

*Завдання 2.*

Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 4 & 7 & 2 & 8 \\ -5 & 6 & 7 & 10 \\ -4 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

*Завдання 3.*

Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера та перевірити розв'язок підстановкою

$$\begin{cases} 4x - 2y + z = 13 \\ x + 3y - 2z = 1 \\ 2x - y - z = -2 \end{cases}$$

### Варіант 14.

*Завдання 1.*

Знайти значення матричного виразу

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

*Завдання 2.*

Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 & 8 \\ 5 & -2 & 6 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

*Завдання 3.*

Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера та перевірити розв'язок підстановкою

$$\begin{cases} 2x - 4y + z = 5 \\ x + 3y - 2z = 1 \\ 3x - 2y - z = 12 \end{cases}$$

### Варіант 15.

*Завдання 1.*

Знайти значення матричного виразу

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^T$$

*Завдання 2.*

Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 & 2 & 8 \\ -5 & 1 & 7 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

*Завдання 3.*

Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера та перевірити розв'язок підстановкою

$$\begin{cases} 5x - 2y + z = 3 \\ x + 3y - 2z = 1 \\ 2x - y - 5z = -2 \end{cases}$$

### Варіант 16.

*Завдання 1.*

Знайти значення матричного виразу

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 8 & -1 & 9 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -2 & 6 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^T$$

*Завдання 2.*

Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 8 & 5 & 1 & 8 \\ -8 & 6 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

*Завдання 3.*

Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера та перевірити розв'язок підстановкою

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 8 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 11 \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 13 \end{cases}$$

### Варіант 17.

*Завдання 1.*

Знайти значення матричного виразу

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 8 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - 7 \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

*Завдання 2.*

Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 & 8 \\ 8 & -1 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

*Завдання 3.*

Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера та перевірити розв'язок підстановкою

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6 \end{cases}$$

Варіант 18.

*Завдання 1.*

Знайти значення матричного виразу

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - 7 \cdot \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

*Завдання 2.*

Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 7 & 7 & 2 & -8 \\ 5 & -2 & 7 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

*Завдання 3.*

Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера та перевірити розв'язок підстановкою

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8 \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -1 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Варіант 19.

*Завдання 1.*

Знайти значення матричного виразу

$$\begin{pmatrix} 11 & -1 & 6 \\ 0 & 8 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 7 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}^T$$

*Завдання 2.*

Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 11 & 1 & 2 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & 10 \\ -2 & 11 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

*Завдання 3.*

Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера та перевірити розв'язок підстановкою

$$\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - x_3 = 7 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

### Варіант 20.

*Завдання 1.*

Знайти значення матричного виразу

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ 14 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 2 & -9 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 7 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$$

*Завдання 2.*

Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 8 \\ 5 & -12 & 7 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 9 \end{vmatrix}$$

*Завдання 3.*

Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера та перевірити розв'язок підстановкою

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 21 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -16 \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 41 \end{cases}$$

### **Зразок виконання лабораторної роботи 1**

*Завдання 1.*

Знайти значення матричного виразу

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^T$$

**Завдання 2.**

Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 8 \\ 5 & -2 & 7 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

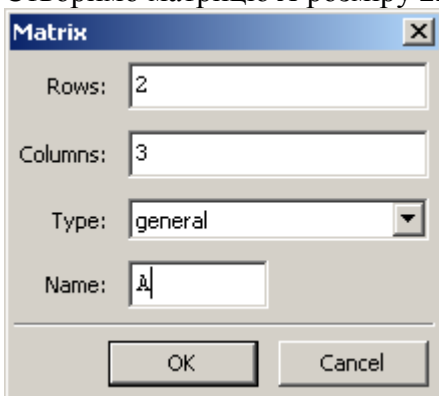
**Завдання 3.**

Розв'язати систему рівнянь за правилом Крамера та перевірити розв'язок підстановкою

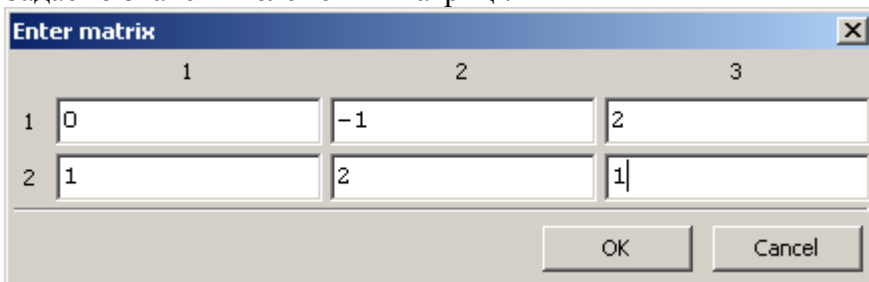
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 12 \end{cases}$$

**Завдання 1. Розв'язок:**

Створимо матрицю A розміру 2x3. Меню Algebra > Enter Matrix...



Задаємо значення елементів матриці:



В результаті дістанемо:

```
(%i1) A: matrix(
      [0, -1, 2],
      [1, 2, 1]
    );
(%o1) [0 -1 2]
      [1 2 1]
```

Аналогічно задаємо матриці  $B, C, D$ .

```
(%i2) B: matrix(  
      [1,2,1],  
      [2,-1,1],  
      [0,1,-2]  
    );
```

```
(%o2)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ 
```

```
(%i3) C: matrix(  
      [1,-1],  
      [2,0],  
      [0,3]  
    );
```

```
(%o3)  $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ 
```

```
(%i4) D: matrix(  
      [1,-2],  
      [2,1]  
    );
```

```
(%o4)  $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 
```

Вводимо вираз:

```
--> A.transpose(B).C-5*ttranspose(D),
```

де функція `transpose` повертає транспоновану матрицю. Натискаємо `Shift + Enter`,

```
(%i9) A.transpose(B).C-5*ttranspose(D);
```

```
(%o9)  $\begin{bmatrix} 1 & -25 \\ 18 & -11 \end{bmatrix}$ 
```

## Завдання 2. Розв'язок:

Введемо матрицю  $M$  розміру  $4 \times 4$ :

```
(%i2) M: matrix(
      [1, 2, 2, 8],
      [5, -2, 7, 1],
      [4, 1, 3, 0],
      [-2, -3, 1, 6]
    );
```

```
(%o2) 
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 8 \\ 5 & -2 & 7 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

```

Обчислюємо визначник за допомогою функції determinant:

```
(%i3) determinant(M);
(%o3) 204
```

### Завдання 3. Розв'язок:

Вводимо рівняння системи:

```
(%i1) eq1: 2*x1-x2+x3=5;
      eq2: x1+3*x2-3*x3=1;
      eq3: 3*x1-2*x2-x3=12;
(%o1) x3-x2+2 x1=5
      (%o2) -3 x3+3 x2+x1=1
      (%o3) -x3-2 x2+3 x1=12
```

Утворюємо матрицю коефіцієнтів системи:

```
(%i4) A: coefmatrix([eq1, eq2, eq3], [x1, x2, x3]);
(%o4) 
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

```

Знаходимо головний визначник системи  $\Delta$ :

```
(%i6) D: determinant(A);
(%o6) -21
```

Знаходимо  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ :

```
(%i11) A1: matrix(
      [5, -1, 1],
      [1, 3, -3],
      [12, -2, -1]
    );
(%o11) 
$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \\ 12 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

```

```
(%i12) D1: determinant(A1);
(%o12) -48
```



```
(%i13) A2: matrix(
      [2, 5, 1],
      [1, 1, -3],
      [3, 12, -1]
    );
```

```
(%o13)  $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & 12 & -1 \end{bmatrix}$ 
```

```
(%i14) D2: determinant(A2);
```

```
(%o14) 39
```

```
(%i15) A3: matrix(
      [2, -1, 5],
      [1, 3, 1],
      [3, -2, 12]
    );
```

```
(%o15)  $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 12 \end{bmatrix}$ 
```

```
(%i16) D3: determinant(A3);
```

```
(%o16) 30
```

Знаходимо відповідь:

```
(%i17) X1: D1/D; X2: D2/D; X3: D3/D;
```

```
(%o17)  $\frac{16}{7}$ 
```

```
(%o18)  $\frac{13}{7}$ 
```

```
(%o19)  $-\frac{10}{7}$ 
```

Переводимо у десяткову форму:

```
(%i32) float(X1); float(X2); float(X3);
```

```
(%o32) 2.285714285714286
```

```
(%o33) -1.857142857142857
```

```
(%o34) -1.428571428571429
```

Перевіряємо правильність одержаної відповіді підстановкою:

```
(%i36) ev(eq1, x1=X1, x2=X2, x3=X3);
      ev(eq2, x1=X1, x2=X2, x3=X3);
      ev(eq3, x1=X1, x2=X2, x3=X3);
```

```
(%o36) 5=5
```

```
(%o37) 1=1
```

```
(%o38) 12=12
```

## Лабораторна робота 2

Тема роботи: «Обернена матриця. Матричні рівняння»

*Мета роботи:* навчитись розв'язувати матричні рівняння та знаходити обернену матрицю.

*Завдання:*

Варіант 1.

*Завдання 1.* Знайти матрицю  $A^{-1}$ , обернену до матриці  $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -3 & 4 & 1 \\ 1 & -5 & -3 \end{pmatrix}$ .

Перевірити виконання рівності  $A^{-1} \cdot A = E$ .

*Завдання 2.* Знайти матрицю  $X$  з рівняння

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Перевірити розв'язок підстановкою.

*Завдання 3.* Знайти загальний розв'язок системи рівнянь з параметром  $p$  (виразити невідомі через параметр  $p$ ). Перевірити розв'язок підстановкою. Знайти значення параметра  $p$ , при якому система не має розв'язку.

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 31 \\ p \cdot x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 28 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 56 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

*Завдання 4.* Знайти матрицю  $X$  з рівняння  $\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -20 & 10 \\ 34 & 26 \end{pmatrix}$ .

Варіант 2.

*Завдання 1.* Знайти матрицю  $A^{-1}$ , обернену до матриці  $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ -5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ .

Перевірити виконання рівності  $A^{-1} \cdot A = E$ .

*Завдання 2.* Знайти матрицю  $X$  з рівняння

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Перевірити розв'язок підстановкою.

*Завдання 3.* Знайти загальний розв'язок системи рівнянь з параметром  $p$  (виразити невідомі через параметр  $p$ ). Перевірити розв'язок підстановкою. Знайти значення параметра  $p$ , при якому система не має розв'язку..

$$\begin{cases} -x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -15 \\ -2x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 2x_4 = -2 \\ -5x_1 + p \cdot x_2 + 4x_3 - x_4 = -8 \\ -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 14 \end{cases}$$

Завдання 4. Знайти матрицю  $X$  з рівняння  $\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 46 & -18 \\ -4 & 26 \end{pmatrix}$ .

Варіант 3.

Завдання 1. Знайти матрицю  $A^{-1}$ , обернену до матриці  $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -3 & 6 & -2 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ .

Перевірити виконання рівності  $A^{-1} \cdot A = E$ .

Завдання 2. Знайти матрицю  $X$  з рівняння  $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

Перевірити розв'язок підстановкою.

Завдання 3. Знайти загальний розв'язок системи рівнянь з параметром  $p$  (виразити невідомі через параметр  $p$ ). Перевірити розв'язок підстановкою. Знайти значення параметра  $p$ , при якому система не має розв'язку.

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = -6 \\ p \cdot x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 36 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 7 \\ 4x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 48 \end{cases}$$

Завдання 4. Знайти матрицю  $X$  з рівняння  $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & -11 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$ .

Варіант 4.

Завдання 1. Знайти матрицю  $A^{-1}$ , обернену до матриці  $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -3 & 5 & 5 \\ 5 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ .

Перевірити виконання рівності  $A^{-1} \cdot A = E$ .

Завдання 2. Знайти матрицю  $X$  з рівняння

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Перевірити розв'язок підстановкою.

*Завдання 3.* Знайти загальний розв'язок системи рівнянь з параметром  $p$  (виразити невідомі через параметр  $p$ ). Перевірити розв'язок підстановкою. Знайти значення параметра  $p$ , при якому система не має розв'язку.

$$\begin{cases} p \cdot x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 31 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = -16 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = -10 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = -1 \end{cases}$$

*Завдання 4.* Знайти матрицю  $X$  з рівняння  $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 & -32 \\ 17 & 20 \end{pmatrix}$ .

### Варіант 5.

*Завдання 1.* Знайти матрицю  $A^{-1}$ , обернену до матриці  $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -5 & -3 & 4 \\ -5 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ .

Перевірити виконання рівності  $A^{-1} \cdot A = E$ .

*Завдання 2.* Знайти матрицю  $X$  з рівняння

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Перевірити розв'язок підстановкою.

*Завдання 3.* Знайти загальний розв'язок системи рівнянь з параметром  $p$  (виразити невідомі через параметр  $p$ ). Перевірити розв'язок підстановкою. Знайти значення параметра  $p$ , при якому система не має розв'язку..

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 5 \\ -2x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -8 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 11 \\ p \cdot x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 15 \end{cases}$$

*Завдання 4.* Знайти матрицю  $X$  з рівняння  $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 36 & 38 \end{pmatrix}$ .

### Варіант 6.

*Завдання 1.* Знайти матрицю  $A^{-1}$ , обернену до матриці  $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & -3 \\ 6 & -5 & -5 \end{pmatrix}$ .

Перевірити виконання рівності  $A^{-1} \cdot A = E$ .

*Завдання 2.* Знайти матрицю  $X$  з рівняння

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Перевірити розв'язок підстановкою.

*Завдання 3.* Знайти загальний розв'язок системи рівнянь з параметром р (виразити невідомі через параметр р). Перевірити розв'язок підстановкою. Знайти значення параметра р, при якому система не має розв'язку.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 = -1 \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 + p \cdot x_4 = 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 35 \end{cases}$$

*Завдання 4.* Знайти матрицю X з рівняння  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -47 & -48 \\ -23 & -29 \end{pmatrix}$ .

### Варіант 7.

*Завдання 1.* Знайти матрицю  $A^{-1}$ , обернену до матриці  $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ -5 & 4 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ .

Перевірити виконання рівності  $A^{-1} \cdot A = E$ .

*Завдання 2.* Знайти матрицю X з рівняння  $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

Перевірити розв'язок підстановкою.

*Завдання 3.* Знайти загальний розв'язок системи рівнянь з параметром р (виразити невідомі через параметр р). Перевірити розв'язок підстановкою. Знайти значення параметра р, при якому система не має розв'язку.

$$\begin{cases} -x_1 - 5x_2 + x_3 + x_4 = -11 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 5x_4 = -21 \\ -2x_1 + 3x_2 + p \cdot x_3 + 4x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 - x_4 = -3 \end{cases}$$

*Завдання 4.* Знайти матрицю X з рівняння  $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -48 & -4 \\ 35 & 11 \end{pmatrix}$ .

### Варіант 8.

Завдання 1. Знайти матрицю  $A^{-1}$ , обернену до матриці  $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \\ 5 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ .

Перевірити виконання рівності  $A^{-1} \cdot A = E$ .

Завдання 2. Знайти матрицю  $X$  з

рівняння  $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ . Перевірити розв'язок

підстановкою.

Завдання 3. Знайти загальний розв'язок системи рівнянь з параметром  $p$  (виразити невідомі через параметр  $p$ ). Перевірити розв'язок підстановкою. Знайти значення параметра  $p$ , при якому система не має розв'язку.

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 18 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 4x_1 - x_2 - 5x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + p \cdot x_4 = 15 \end{cases}$$

Завдання 4. Знайти матрицю  $X$  з рівняння  $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -37 & 22 \\ 9 & -8 \end{pmatrix}$ .

#### Варіант 9.

Завдання 1. Знайти матрицю  $A^{-1}$ , обернену до матриці  $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ .

Перевірити виконання рівності  $A^{-1} \cdot A = E$ .

Завдання 2. Знайти матрицю  $X$  з рівняння

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Перевірити розв'язок підстановкою.

Завдання 3. Знайти загальний розв'язок системи рівнянь з параметром  $p$  (виразити невідомі через параметр  $p$ ). Перевірити розв'язок підстановкою. Знайти значення параметра  $p$ , при якому система не має розв'язку..

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 5x_4 = -16 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 12 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_4 = -8 \\ 4x_1 + p \cdot x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 36 \end{cases}$$

Завдання 4. Знайти матрицю  $X$  з рівняння  $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & -14 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ .

Варіант 10.

Завдання 1. Знайти матрицю  $A^{-1}$ , обернену до матриці  $A = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ .

Перевірити виконання рівності  $A^{-1} \cdot A = E$ .

Завдання 2. Знайти матрицю  $X$  з рівняння  $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ .

Перевірити розв'язок підстановкою.

Завдання 3. Знайти загальний розв'язок системи рівнянь з параметром  $p$  (виразити невідомі через параметр  $p$ ). Перевірити розв'язок підстановкою. Знайти значення параметра  $p$ , при якому система не має розв'язку.

$$\begin{cases} -2x_1 - 5x_2 + x_3 + 3x_4 = -12 \\ p \cdot x_1 - x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 16 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 18 \\ -x_1 + x_2 - 5x_3 - 5x_4 = -44 \end{cases}$$

Завдання 4. Знайти матрицю  $X$  з рівняння  $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$ .

Варіант 11.

Завдання 1. Знайти матрицю  $A^{-1}$ , обернену до матриці  $A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 5 \\ -2 & -1 & -7 \\ 2 & -5 & -7 \end{pmatrix}$ .

Перевірити виконання рівності  $A^{-1} \cdot A = E$ .

Завдання 2. Знайти матрицю  $X$  з рівняння

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Перевірити розв'язок підстановкою.

Завдання 3. Знайти загальний розв'язок системи рівнянь з параметром  $p$  (виразити невідомі через параметр  $p$ ). Перевірити розв'язок підстановкою. Знайти значення параметра  $p$ , при якому система не має розв'язку.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 6 \\ -5x_1 - 5x_2 + x_3 + x_4 = -25 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -1 \\ p \cdot x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 13 \end{cases}$$

Завдання 4. Знайти матрицю X з рівняння  $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & -20 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ .

### Варіант 12.

Завдання 1. Знайти матрицю  $A^{-1}$ , обернену до матриці  $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ -1 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ .

Перевірити виконання рівності  $A^{-1} \cdot A = E$ .

Завдання 2. Знайти матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Перевірити розв'язок підстановкою.

Завдання 3. Знайти загальний розв'язок системи рівнянь з параметром p (виразити невідомі через параметр p). Перевірити розв'язок підстановкою. Знайти значення параметра p, при якому система не має розв'язку.

$$\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 18 \\ -5x_1 + p \cdot x_2 - x_3 - 5x_4 = -21 \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 5x_4 = -39 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 6 \end{cases}$$

Завдання 4. Знайти матрицю X з рівняння  $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -43 & -37 \\ 22 & 13 \end{pmatrix}$ .

### Варіант 13.

Завдання 1. Знайти матрицю  $A^{-1}$ , обернену до матриці  $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ .

Перевірити виконання рівності  $A^{-1} \cdot A = E$ .

Завдання 2. Знайти матрицю X з рівняння



$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Перевірити розв'язок підстановкою.

*Завдання 3.* Знайти загальний розв'язок системи рівнянь з параметром  $p$  (виразити невідомі через параметр  $p$ ). Перевірити розв'язок підстановкою. Знайти значення параметра  $p$ , при якому система не має розв'язку.

$$\begin{cases} -5x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -17 \\ p \cdot x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 29 \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + p \cdot x_4 = 18 \\ -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = -18 \end{cases}$$

*Завдання 4.* Знайти матрицю  $X$  з рівняння  $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 29 & -21 \\ -45 & 13 \end{pmatrix}$ .

Варіант 14.

*Завдання 1.* Знайти матрицю  $A^{-1}$ , обернену до матриці  $A = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 5 \\ 5 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ .

Перевірити виконання рівності  $A^{-1} \cdot A = E$ .

*Завдання 2.* Знайти матрицю  $X$  з рівняння

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Перевірити розв'язок підстановкою.

*Завдання 3.* Знайти загальний розв'язок системи рівнянь з параметром  $p$  (виразити невідомі через параметр  $p$ ). Перевірити розв'язок підстановкою. Знайти значення параметра  $p$ , при якому система не має розв'язку.

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - x_3 + 3x_4 = -6 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 32 \\ -2x_1 + x_2 + p \cdot x_3 - 5x_4 = -42 \\ -5x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases}$$

*Завдання 4.* Знайти матрицю  $X$  з рівняння  $\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$ .

Варіант 15.

*Завдання 1.* Знайти матрицю  $A^{-1}$ , обернену до матриці  $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -5 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ .

Перевірити виконання рівності  $A^{-1} \cdot A = E$ .

*Завдання 2.* Знайти матрицю  $X$  з

$$\text{рівняння } \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Перевірити розв'язок}$$

підстановкою.

*Завдання 3.* Знайти загальний розв'язок системи рівнянь з параметром  $p$  (виразити невідомі через параметр  $p$ ). Перевірити розв'язок підстановкою. Знайти значення параметра  $p$ , при якому система не має розв'язку.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 11 \\ p \cdot x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 13 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 22 \end{cases}$$

*Завдання 4.* Знайти матрицю  $X$  з рівняння  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -11 & 4 \\ 27 & 24 \end{pmatrix}$ .

### Варіант 16.

*Завдання 1.* Знайти матрицю  $A^{-1}$ , обернену до матриці  $A = \begin{pmatrix} 6 & 12 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 6 & -5 & -5 \end{pmatrix}$ .

Перевірити виконання рівності  $A^{-1} \cdot A = E$ .

*Завдання 2.* Знайти матрицю  $X$  з рівняння

$$\begin{pmatrix} 12 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 1 & -6 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -9 \end{pmatrix}.$$

Перевірити розв'язок підстановкою.

*Завдання 3.* Знайти загальний розв'язок системи рівнянь з параметром  $p$  (виразити невідомі через параметр  $p$ ). Перевірити розв'язок підстановкою. Знайти значення параметра  $p$ , при якому система не має розв'язку.

$$\begin{cases} 3x_1 - 12x_2 + x_3 - 5x_4 = -1 \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 18 \\ -p \cdot x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ -x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 21 \end{cases}$$

*Завдання 4.* Знайти матрицю  $X$  з рівняння  $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -17 & -18 \\ -13 & -19 \end{pmatrix}$ .

Варіант 17.

Завдання 1. Знайти матрицю  $A^{-1}$ , обернену до матриці  $A = \begin{pmatrix} 1 & -7 & -2 \\ -6 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ .

Перевірити виконання рівності  $A^{-1} \cdot A = E$ .

Завдання 2. Знайти матрицю  $X$  з рівняння  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 9 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

Перевірити розв'язок підстановкою.

Завдання 3. Знайти загальний розв'язок системи рівнянь з параметром  $p$  (виразити невідомі через параметр  $p$ ). Перевірити розв'язок підстановкою. Знайти значення параметра  $p$ , при якому система не має розв'язку.

$$\begin{cases} -2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + x_4 = -13 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -12 \\ -2x_1 + x_2 + p \cdot x_3 + 5x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 - 4x_4 = -13 \end{cases}$$

Завдання 4. Знайти матрицю  $X$  з рівняння  $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} -5 & -11 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -18 & -5 \\ 15 & 11 \end{pmatrix}$ .

Варіант 18.

Завдання 1. Знайти матрицю  $A^{-1}$ , обернену до матриці  $A = \begin{pmatrix} 11 & -3 & 13 \\ 8 & -12 & -1 \\ 5 & 2 & -9 \end{pmatrix}$ .

Перевірити виконання рівності  $A^{-1} \cdot A = E$ .

Завдання 2. Знайти матрицю  $X$  з рівняння

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 7 & 14 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 12 & 0 \\ 1 & -7 & 0 \\ 9 & 1 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 9 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Перевірити розв'язок підстановкою.

Завдання 3. Знайти загальний розв'язок системи рівнянь з параметром  $p$  (виразити невідомі через параметр  $p$ ). Перевірити розв'язок підстановкою. Знайти значення параметра  $p$ , при якому система не має розв'язку.

$$\begin{cases} 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 8 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 13 \\ 4x_1 - 6x_2 - 5x_3 + x_4 = -3 \\ p \cdot x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 15 \end{cases}$$

Завдання 4. Знайти матрицю X з рівняння  $\begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} -17 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 & 28 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$ .

Варіант 19.

Завдання 1. Знайти матрицю  $A^{-1}$ , обернену до матриці  $A = \begin{pmatrix} -2 & 9 & 2 \\ 12 & 8 & 3 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$ .

Перевірити виконання рівності  $A^{-1} \cdot A = E$ .

Завдання 2. Знайти матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix} 1 & -11 & 0 \\ 8 & 3 & -10 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 6 & -2 & 0 \\ 3 & 14 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -1 & 0 \\ 2 & 15 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Перевірити розв'язок підстановкою.

Завдання 3. Знайти загальний розв'язок системи рівнянь з параметром p (виразити невідомі через параметр p). Перевірити розв'язок підстановкою. Знайти значення параметра p, при якому система не має розв'язку..

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 15x_3 - 8x_4 = -13 \\ -x_1 + 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 12 \\ p \cdot x_1 + x_2 - 5x_3 - 4x_4 = -18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 49 \end{cases}$$

Завдання 4. Знайти матрицю X з рівняння  $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & -14 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ .

Варіант 20.

Завдання 1. Знайти матрицю  $A^{-1}$ , обернену до матриці  $A = \begin{pmatrix} -11 & -5 & 11 \\ 24 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ .

Перевірити виконання рівності  $A^{-1} \cdot A = E$ .

Завдання 2. Знайти матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & 7 & -1 \\ 3 & 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 6 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 7 & 9 & 1 \\ 0 & 5 & -10 \end{pmatrix}.$$

Перевірити розв'язок підстановкою.

*Завдання 3.* Знайти загальний розв'язок системи рівнянь з параметром  $p$  (виразити невідомі через параметр  $p$ ). Перевірити розв'язок підстановкою. Знайти значення параметра  $p$ , при якому система не має розв'язку.

$$\begin{cases} -2x_1 - 7x_2 + x_3 + 3x_4 = -2 \\ 7x_1 - x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 19 \\ -x_1 - p \cdot x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 81 \\ -x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_4 = -14 \end{cases}$$

*Завдання 4.* Знайти матрицю  $X$  з рівняння  $\begin{pmatrix} -9 & -3 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 13 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ .

## Зразок виконання лабораторної роботи 2

*Завдання 1.* Знайти матрицю  $A^{-1}$ , обернену до матриці  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ .

Перевірити виконання рівності  $A^{-1} \cdot A = E$ .

*Завдання 2.* Знайти матрицю  $X$  з рівняння

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 6 & 7 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Перевірити розв'язок підстановкою.

*Завдання 3.* Знайти загальний розв'язок системи рівнянь з параметром  $p$  (виразити невідомі через параметр  $p$ ). Перевірити розв'язок підстановкою. Знайти значення параметра  $p$ , при якому система не має розв'язку.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 7 \\ p \cdot x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 = 11 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 5x_4 = 4 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 22 \end{cases}$$

*Завдання 4.* Знайти матрицю  $X$  з рівняння  $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 7 & -11 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

### Завдання 1. Розв'язок:

Введемо матрицю  $A$ .

```
(%i1) A: matrix(
      [2,-1,3],
      [5,0,1],
      [-2,2,4]
    );
```

```
(%o1) 
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

```

Знайдемо обернену матрицю  $A_{\text{оберн}}$  за допомогою функції `invert`.

```
(%i4) Aobern: invert(A);
```

```
(%o4) 
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{24} & \frac{5}{24} & -\frac{1}{48} \\ -\frac{11}{24} & \frac{7}{24} & \frac{13}{48} \\ \frac{5}{24} & -\frac{1}{24} & \frac{5}{48} \end{bmatrix}$$

```

Перевіримо виконання рівностей  $A \cdot A_{\text{оберн}} = A_{\text{оберн}} \cdot A = E$ .

```
(%i5) A.Aobern;
      Aobern.A;
```

```
(%o5) 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```

```
(%o6) 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```

## Завдання 2. Розв'язок:

Введемо матриці  $A, B, C$ .

```
(%i1) A: matrix(
      [1,2,3],
      [0,1,2],
      [5,1,4]
    );
```

```
(%o1) 
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

```

```
(%i2) B: matrix(
      [6,7,1],
      [4,2,1],
      [3,0,1]
    );
```

```
(%o2) 
$$\begin{bmatrix} 6 & 7 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```

```
(%i3) C: matrix(
      [1,-1,0],
      [4,1,2],
      [0,1,-1]
    );
```

```
(%o3) 
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

```

Знайдемо обернені матриці до матриць  $A$  і  $B$ .

```
(%i4) A1: invert(A); B1: invert(B);
```

```
(%o4) 
$$\begin{bmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{5}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{10}{7} & -\frac{11}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{5}{7} & \frac{9}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

```

```
(%o5) 
$$\begin{bmatrix} -2 & 7 & -5 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & -21 & 16 \end{bmatrix}$$

```

Обчислимо розв'язок рівняння за формулою  $X = A^{-1}CB^{-1}$ .

```
(%i6) X: A1.C.B1;
```

```
(%o6) 
$$\begin{bmatrix} -\frac{36}{7} & \frac{123}{7} & -14 \\ -\frac{75}{7} & \frac{251}{7} & -28 \\ \frac{55}{7} & -\frac{185}{7} & 21 \end{bmatrix}$$

```

Перевіримо одержаний розв'язок підстановкою у початкове рівняння.

```
(%i7) A.X.B;
```

```
(%o7) 
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

```

В результаті отримали матрицю  $C$ , т.ч., розв'язок вірний.

### Завдання 3. Розв'язок:

Уведемо рівняння системи:

```
(%i5) eq1: 2*x1+x2+3*x3-2*x4=7;
      eq2: p*x1+3*x2-4*x3-x4=11;
      eq3: 2*x1+3*x2-x3-5*x4=4;
      eq4: -x1-2*x2+3*x3+2*x4=22;

(%o5) -2 x4+3 x3+x2+2 x1=7
      (%o6) -x4-4 x3+3 x2+p x1=11
      (%o7) -5 x4-x3+3 x2+2 x1=4
      (%o8) 2 x4+3 x3-2 x2-x1=22
```

Розв'язуємо систему за допомогою функції `linsolve`.

```
(%i15) sol: linsolve([eq1,eq2,eq3,eq4],[x1,x2,x3,x4]);

(%o15) [ x1 =  $\frac{899}{11p-31}$ , x2 =  $-\frac{331p+620}{11p-31}$ , x3 =  $-\frac{2p+403}{11p-31}$ , x4 =  $-\frac{207p-93}{11p-31}$  ]
```

Перевіряємо правильність одержаного розв'язку, підставляючи його в початкові рівняння (функція `rhs` повертає праву сторону рівності).

```
(%i18) X1: rhs(sol[1]); X2: rhs(sol[2]); X3: rhs(sol[3]); X4: rhs(sol[4]);

(%o18)  $\frac{899}{11p-31}$ 
      (%o19)  $-\frac{331p+620}{11p-31}$ 
      (%o20)  $-\frac{2p+403}{11p-31}$ 
      (%o21)  $-\frac{207p-93}{11p-31}$ 
```

Здійснюємо підстановку

```
(%i22) ev([eq1,eq2,eq3,eq4],x1=X1,x2=X2,x3=X3,x4=X4);

(%o22) [  $-\frac{3(2p+403)}{11p-31} + \frac{1798}{11p-31} - \frac{331p+620}{11p-31} + \frac{2(207p-93)}{11p-31} = 7$ ,  $\frac{4(2p+403)}{11p-31} + \frac{899p}{11p-31} - \frac{3(331p+620)}{11p-31} + \frac{207p-93}{11p-31} = 11$ ,  $\frac{2p+403}{11p-31} + \frac{1798}{11p-31} - \frac{3(331p+620)}{11p-31} + \frac{5(207p-93)}{11p-31} = 4$ ,  $-\frac{3(2p+403)}{11p-31} + \frac{899}{11p-31} + \frac{2(331p+620)}{11p-31} - \frac{2(207p-93)}{11p-31} = 22$  ]
```

Після спрощення видно, що всі рівності виконуються.

```
(%i23) ratsimp(%);
(%o23) [ 7=7, 11=11, 4=4, 22=22 ]
```

Знаходимо матрицю коефіцієнтів

```
(%i11) A: coefmatrix([eq1,eq2,eq3,eq4],[x1,x2,x3,x4]);

(%o11) 
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ p & 3 & -4 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & -5 \\ -1 & -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

```



Та обчислюємо її визначник.

```
(%i13) d: determinant(A);  
(%o13) 2(7 p - 11) - 13 p + 3(4 - 4 p) + 41
```

Прирівнюючи визначник до нуля, знаходимо значення параметра, при яких система не має розв'язків.

```
(%i14) solve(d=0,p);  
(%o14) [p =  $\frac{31}{11}$ ]
```

#### Завдання 4. Розв'язок:

Введемо матрицю невідомих змінних  $X$  та матриці  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

```
(%i1) X: matrix(  
    [x1, x2],  
    [x3, x4]  
);
```

```
(%o1)  $\begin{bmatrix} x1 & x2 \\ x3 & x4 \end{bmatrix}$ 
```

```
(%i2) A: matrix(  
    [-1, -3],  
    [7, -11]  
);
```

```
(%o2)  $\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 7 & -11 \end{bmatrix}$ 
```

```
(%i3) B: matrix(  
    [3, 0],  
    [2, -2]  
);
```

```
(%o3)  $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ 
```

```
(%i4) C: matrix(  
    [11, 3],  
    [2, 1]  
);
```

```
(%o4)  $\begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 
```

Задамо ліву та праву частини матричного рівняння  $AX = XB + C$

```
(%i8) leqn: A.X;
```

```
(%o8)  $\begin{bmatrix} -3 x3 - x1 & -3 x4 - x2 \\ 7 x1 - 11 x3 & 7 x2 - 11 x4 \end{bmatrix}$ 
```

```
(%i9) reqn: B.X+C;
```

```
(%o9)  $\begin{bmatrix} 3 x1 + 11 & 3 x2 + 3 \\ -2 x3 + 2 x1 + 2 & -2 x4 + 2 x2 + 1 \end{bmatrix}$ 
```

та розв'яжемо його як систему чотирьох лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою функції `linsolve`

```
(*i12) linsolve([leqn[1,1]=reqn[1,1],leqn[1,2]=reqn[1,2],leqn[2,1]=reqn[2,1],leqn[2,2]=reqn[2,2]], [x1,x2,x3,x4]);
(*o12) [x1=-31/17, x2=-8/17, x3=-21/17, x4=-19/51]
```

### Лабораторна робота 3

*Тема роботи: «Системи лінійних алгебраїчних рівнянь»*

*Мета роботи:* навчитись досліджувати та розв'язувати системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

*Завдання:*

#### Варіант 1.

*Завдання 1.* Розв'язати систему

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 36 \\ 4x_1 - 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 = -38 \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 5x_4 = -2 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -10 \end{cases}$$

Перевірити розв'язок підстановкою.

*Завдання 2.* Дослідити систему на сумісність. Для цього знайти ранг основної та розширеної матриць, порівняти їх (використати теорему Кронекера-Капеллі).

Звести матрицю до трикутного вигляду. Знайти загальний розв'язок.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_4 + x_5 = 1 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 - 6x_4 - 5x_5 = 4 \\ 7x_1 - 8x_2 + 2x_3 + 9x_4 + x_5 = 7 \\ 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 9x_4 - 7x_5 = 5 \end{cases}$$

*Завдання 3.* Знайти параметр  $p$  при якому система має ненульовий розв'язок.

При знайденому  $p$  знайти розв'язок, в якому принаймні одна невідома дорівнює

одиниці.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ p \cdot x - 7y + 11z = 0 \end{cases}$$

#### Варіант 2.

*Завдання 1.* Розв'язати систему

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - x_3 + 3x_4 = -6 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 32 \\ -2x_1 + x_2 - 5x_3 - 5x_4 = -42 \\ -5x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases}$$

Перевірити розв'язок підстановкою.

*Завдання 2.* Дослідити систему на сумісність. Для цього знайти ранг основної та розширеної матриць, порівняти їх (використати теорему Кронекера-Капеллі).

Звести матрицю до трикутного вигляду. Знайти загальний розв'язок.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = -3 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - 3x_5 = 1 \\ 2x_1 - 10x_2 + 6x_3 + 8x_4 - 2x_5 = 11 \\ -5x_1 - 9x_2 + 11x_3 + 8x_4 - 10x_5 = 18 \end{cases}$$

*Завдання 3.* Знайти параметр  $p$  при якому система має ненульовий розв'язок.

При знайденому  $p$  знайти розв'язок, в якому принаймні одна невідома дорівнює

одиниці. 
$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ p \cdot x - 7y + 8z = 0 \end{cases}$$

### Варіант 3.

*Завдання 1.* Розв'язати систему

$$\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 18 \\ -5x_1 + 2x_2 - x_3 - 5x_4 = -21 \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 5x_4 = -39 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 6 \end{cases}$$

Перевірити розв'язок підстановкою.

*Завдання 2.* Дослідити систему на сумісність. Для цього знайти ранг основної та розширеної матриць, порівняти їх (використати теорему Кронекера-Капеллі).

Звести матрицю до трикутного вигляду. Знайти загальний розв'язок.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = -3 \\ 3x_1 - 2x_3 + x_4 + x_5 = -1 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 4 \\ 2x_1 - 6x_2 + 6x_3 - 4x_4 - 3x_5 = -11 \\ -3x_1 - x_2 + 11x_3 - x_4 - 9x_5 = -5 \end{cases}$$

*Завдання 3.* Знайти параметр  $p$  при якому система має ненульовий розв'язок.

При знайденому  $p$  знайти розв'язок, в якому принаймні одна невідома дорівнює

одиниці. 
$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ -2x + 2y - z = 0 \\ p \cdot x + 5y + 8z = 0 \end{cases}$$

### Варіант 4.

*Завдання 1.* Розв'язати систему

$$\begin{cases} -5x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -17 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 29 \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 18 \\ -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = -18 \end{cases}$$

Перевірити розв'язок підстановкою.

*Завдання 2.* Дослідити систему на сумісність. Для цього знайти ранг основної та розширеної матриць, порівняти їх (використати теорему Кронекера-Капеллі).

Звести матрицю до трикутного вигляду. Знайти загальний розв'язок.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 2 \\ -3x_1 + 10x_2 - 8x_3 - x_4 - 5x_5 = -1 \\ 11x_1 - 2x_2 - x_3 + 8x_4 + x_5 = 8 \\ -5x_1 + 14x_2 - 11x_3 - 2x_4 - 7x_5 = -2 \end{cases}$$

**Завдання 3.** Знайти параметр  $p$  при якому система має ненульовий розв'язок. При знайденому  $p$  знайти розв'язок, в якому принаймні одна невідома дорівнює

одиниці. 
$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ -2x + 2y - z = 0 \\ p \cdot x - y - 7z = 0 \end{cases}$$

#### Варіант 5.

**Завдання 1.** Розв'язати систему 
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = -6 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 36 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 7 \\ 4x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 48 \end{cases}$$

Перевірити розв'язок підстановкою.

**Завдання 2.** Дослідити систему на сумісність. Для цього знайти ранг основної та розширеної матриць, порівняти їх (використати теорему Кронекера-Капеллі).

Звести матрицю до трикутного вигляду. Знайти загальний розв'язок.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 = -2 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 2 \\ 6x_1 - 7x_2 + 6x_3 - 15x_4 - 2x_5 = 5 \\ 3x_1 - 5x_2 + 11x_3 - 14x_4 - 10x_5 = 12 \end{cases}$$

**Завдання 3.** Знайти параметр  $p$  при якому система має ненульовий розв'язок.

При знайденому  $p$  знайти розв'язок, в якому принаймні одна невідома дорівнює

одиниці. 
$$\begin{cases} 2x + y - 4z = 0 \\ -3x + 2y - z = 0 \\ p \cdot x - y - 10z = 0 \end{cases}$$

#### Варіант 6.

**Завдання 1.** Розв'язати систему 
$$\begin{cases} -2x_1 - 5x_2 + x_3 + 3x_4 = -12 \\ 3x_1 - x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 16 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 18 \\ -x_1 + x_2 - 5x_3 - 5x_4 = -44 \end{cases}$$

Перевірити розв'язок підстановкою.

**Завдання 2.** Дослідити систему на сумісність. Для цього знайти ранг основної та розширеної матриць, порівняти їх (використати теорему Кронекера-Капеллі).

Звести матрицю до трикутного вигляду. Знайти загальний розв'язок.

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = -2 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = -5 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 2 \\ 10x_1 - 7x_3 - 2x_4 + 8x_5 = 3 \end{cases}$$

*Завдання 3.* Знайти параметр  $p$  при якому система має ненульовий розв'язок. При знайденому  $p$  знайти розв'язок, в якому принаймні одна невідома

дорівнює одиниці. 
$$\begin{cases} 2x - y - 3z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ p \cdot x - 5y - 7z = 0 \end{cases}$$

#### Варіант 7.

*Завдання 1.* Розв'язати систему 
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 = -1 \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 35 \end{cases}$$

Перевірити розв'язок підстановкою.

*Завдання 2.* Дослідити систему на сумісність. Для цього знайти ранг основної та розширеної матриць, порівняти їх (використати теорему Кронекера-Капеллі).

Звести матрицю до трикутного вигляду.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 2 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = -1 \\ 7x_1 - 4x_2 - 8x_3 - 5x_5 = 8 \\ -4x_1 + 6x_2 - x_3 + 13x_4 + x_5 = 1 \\ 10x_1 - 6x_2 - 11x_3 - x_4 - 7x_5 = 11 \end{cases}$$

*Завдання 3.* Знайти параметр  $p$  при якому система має ненульовий розв'язок. При знайденому  $p$  знайти розв'язок, в якому принаймні одна невідома

дорівнює одиниці. 
$$\begin{cases} x - y - 3z = 0 \\ -x + 2y - 2z = 0 \\ 5x - 7y + p \cdot z = 0 \end{cases}$$

#### Варіант 8.

*Завдання 1.* Розв'язати систему 
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 31 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 28 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 56 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Перевірити розв'язок підстановкою.

*Завдання 2.* Дослідити систему на сумісність. Для цього знайти ранг основної та розширеної матриць, порівняти їх (використати теорему Кронекера-Капеллі).

Звести матрицю до трикутного вигляду. Знайти загальний розв'язок.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = 2 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = -2 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 2 \\ 7x_1 - x_2 + 6x_3 - 3x_4 - 2x_5 = 8 \\ 2x_1 + 4x_2 + 11x_3 - 2x_4 - 10x_5 = 16 \end{cases}$$

*Завдання 3.* Знайти параметр  $p$  при якому система має ненульовий розв'язок. При знайденому  $p$  знайти розв'язок, в якому принаймні одна невідома дорівнює

одиниці. 
$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ p \cdot x - 7y + 8z = 0 \end{cases}$$

#### Варіант 9.

*Завдання 1.* Розв'язати систему 
$$\begin{cases} -5x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 31 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = -16 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = -10 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = -1 \end{cases}$$

Перевірити розв'язок підстановкою.

*Завдання 2.* Дослідити систему на сумісність. Для цього знайти ранг основної та розширеної матриць, порівняти їх (використати теорему Кронекера-Капеллі). Звести матрицю до трикутного вигляду. Знайти загальний розв'язок.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = -2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = -5 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 2 \\ 9x_1 + 4x_2 - 4x_3 - 5x_4 - x_5 = 3 \end{cases}$$

*Завдання 3.* Знайти параметр  $p$  при якому система має ненульовий розв'язок. При знайденому  $p$  знайти розв'язок, в якому принаймні одна невідома

дорівнює одиниці. 
$$\begin{cases} 3x - y + p \cdot z = 0 \\ -x + y - 2z = 0 \\ 11x - 5y - 5z = 0 \end{cases}$$

#### Варіант 10.

*Завдання 1.* Розв'язати систему 
$$\begin{cases} -x_1 - 5x_2 + x_3 + x_4 = -11 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 5x_4 = -21 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 - x_4 = -3 \end{cases}$$

Перевірити розв'язок підстановкою.

*Завдання 2.* Дослідити систему на сумісність. Для цього знайти ранг основної та розширеної матриць, порівняти їх (використати теорему Кронекера-Капеллі). Звести матрицю до трикутного вигляду. Знайти загальний розв'язок.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = -2 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 - 2x_5 = 1 \\ 12x_1 - 7x_2 - 8x_3 + 9x_4 + x_5 = -8 \\ -5x_1 + 4x_2 - x_3 - 7x_4 - 8x_5 = -1 \\ 17x_1 - 10x_2 - 11x_3 + 13x_4 + 2x_5 = -11 \end{cases}$$

*Завдання 3.* Знайти параметр  $p$  при якому система має ненульовий розв'язок.

При знайденому  $p$  знайти розв'язок, в якому принаймні одна невідома дорівнює

одиниці. 
$$\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 0 \\ -x + 3y - 2z = 0 \\ p \cdot x - 12y - 5z = 0 \end{cases}$$

#### Варіант 11.

*Завдання 1.* Розв'язати систему

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 5x_4 = -16 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 12 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_4 = -8 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 36 \end{cases}$$

Перевірити розв'язок підстановкою.

*Завдання 2.* Дослідити систему на сумісність. Для цього знайти ранг основної та розширеної матриць, порівняти їх (використати теорему Кронекера-Капеллі).

Звести матрицю до трикутного вигляду. Знайти загальний розв'язок.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = -1 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 = 2 \\ 9x_1 - 8x_2 + 4x_3 - 3x_4 - 3x_5 = 12 \\ 7x_1 - 9x_2 + 13x_3 - 2x_4 - 9x_5 = 21 \end{cases}$$

*Завдання 3.* Знайти параметр  $p$  при якому система має ненульовий розв'язок.

При знайденому  $p$  знайти розв'язок, в якому принаймні одна невідома дорівнює

одиниці. 
$$\begin{cases} 3x + 4y - 3z = 0 \\ -4x + 3y - 2z = 0 \\ 17x + p \cdot y - 5z = 0 \end{cases}$$

#### Варіант 12.

*Завдання 1.* Розв'язати систему

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 6 \\ -5x_1 - 5x_2 + x_3 + x_4 = -25 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 13 \end{cases}$$

Перевірити розв'язок підстановкою.

*Завдання 2.* Дослідити систему на сумісність. Для цього знайти ранг основної та розширеної матриць, порівняти їх (використати теорему Кронекера-Капеллі).

Звести матрицю до трикутного вигляду. Знайти загальний розв'язок.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 1 \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = -3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = -5 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 2 \\ 11x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 6 \end{cases}$$

*Завдання 3.* Знайти параметр  $p$  при якому система має ненульовий розв'язок. При знайденому  $p$  знайти розв'язок, в якому принаймні одна невідома дорівнює

$$\text{одиниці.} \begin{cases} 3x + p \cdot y - 3z = 0 \\ -4x + 3y - z = 0 \\ 17x - 3y - 7z = 0 \end{cases}$$

### Варіант 13.

$$\text{Завдання 1. Розв'язати систему} \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 5 \\ -2x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -8 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 11 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 15 \end{cases}$$

Перевірити розв'язок підстановкою.

*Завдання 2.* Дослідити систему на сумісність. Для цього знайти ранг основної та розширеної матриць, порівняти їх (використати теорему Кронекера-Капеллі).

Звести матрицю до трикутного вигляду. Знайти загальний розв'язок.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = -3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 1 \\ 5x_1 - 5x_2 - 8x_3 + 9x_4 - 7x_5 = -11 \\ 12x_1 + x_2 - x_3 - 7x_4 + 4x_5 = -3 \\ 6x_1 - 7x_2 - 11x_3 + 13x_4 - 10x_5 = -15 \end{cases}$$

*Завдання 3.* Знайти параметр  $p$  при якому система має ненульовий розв'язок.

При знайденому  $p$  знайти розв'язок, в якому принаймні одна невідома дорівнює

$$\text{одиниці.} \begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ -4x + 2y - z = 0 \\ p \cdot x - y - 7z = 0 \end{cases}$$

### Варіант 14.

$$\text{Завдання 1. Розв'язати систему} \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 18 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 4x_1 - x_2 - 5x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 = 15 \end{cases}$$

Перевірити розв'язок підстановкою.

*Завдання 2.* Дослідити систему на сумісність. Для цього знайти ранг основної та розширеної матриць, порівняти їх (використати теорему Кронекера-Капеллі).

Звести матрицю до трикутного вигляду. Знайти загальний розв'язок.



$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 + x_5 = -1 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 1 \\ -x_1 - 10x_2 + 10x_3 - 3x_4 - 3x_5 = 13 \\ -7x_1 - 7x_2 + 17x_3 - 2x_4 - 9x_5 = 20 \end{cases}$$

*Завдання 3.* Знайти параметр  $p$  при якому система має ненульовий розв'язок.

При знайденому  $p$  знайти розв'язок, в якому принаймні одна невідома дорівнює

одиниці. 
$$\begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ -4x + y - z = 0 \\ p \cdot x + y - 7z = 0 \end{cases}$$

#### Варіант 15.

*Завдання 1.* Розв'язати систему 
$$\begin{cases} -x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -15 \\ -2x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 2x_4 = -2 \\ -5x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = -8 \\ -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 14 \end{cases}$$

Перевірити розв'язок підстановкою.

*Завдання 2.* Дослідити систему на сумісність. Для цього знайти ранг основної та розширеної матриць, порівняти їх (використати теорему Кронекера-Капеллі).

Звести матрицю до трикутного вигляду. Знайти загальний розв'язок.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 1 \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = -5 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 2 \\ 18x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 9x_4 + 8x_5 = 6 \end{cases}$$

*Завдання 3.* Знайти параметр  $p$  при якому система має ненульовий розв'язок.

При знайденому  $p$  знайти розв'язок, в якому принаймні одна невідома дорівнює

одиниці. 
$$\begin{cases} x + 5y - 3z = 0 \\ -4x + y - z = 0 \\ p \cdot x + 13y - 7z = 0 \end{cases}$$

#### Варіант 16.

*Завдання 1.* Розв'язати систему 
$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 11 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5 \\ 2x_1 - 13x_2 + 11x_3 - 8x_4 = 49 \\ 4x_1 + 9x_2 - 13x_3 + 14x_4 = -37 \end{cases}$$

Перевірити розв'язок підстановкою.

*Завдання 2.* Дослідити систему на сумісність. Для цього знайти ранг основної та розширеної матриць, порівняти їх (використати теорему Кронекера-Капеллі).

Звести матрицю до трикутного вигляду. Знайти загальний розв'язок.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5 = -13 \\ x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 28 \\ x_1 - 6x_3 - 2x_4 - 5x_5 = -22 \\ x_1 + 3x_2 + 15x_3 + 7x_4 + 13x_5 = 53 \end{cases}$$

*Завдання 3.* Знайти параметр  $p$  при якому система має ненульовий розв'язок.

При знайденому  $p$  знайти розв'язок, в якому принаймні одна невідома дорівнює

одиниці. 
$$\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 0 \\ -px + 3y - 2z = 0 \\ 6x - 12y - 5z = 0 \end{cases}$$

Варіант 17.

*Завдання 1.* Розв'язати систему 
$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 - 19x_2 + 24x_3 + 8x_4 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

Перевірити розв'язок підстановкою.

*Завдання 2.* Дослідити систему на сумісність. Для цього знайти ранг основної та розширеної матриць, порівняти їх (використати теорему Кронекера-Капеллі).

Звести матрицю до трикутного вигляду. Знайти загальний розв'язок.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5 = -13 \\ x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 28 \\ x_1 - 6x_3 - 2x_4 - 5x_5 = -22 \\ x_1 + 3x_2 + 15x_3 + 7x_4 + 13x_5 = 53 \end{cases}$$

*Завдання 3.* Знайти параметр  $p$  при якому система має ненульовий розв'язок.

При знайденому  $p$  знайти розв'язок, в якому принаймні одна невідома дорівнює

одиниці. 
$$\begin{cases} 3x + 11y - 3z = 0 \\ -5x + 3y - 2z = 0 \\ 7x + p \cdot y - 5z = 0 \end{cases}$$

Варіант 18.

*Завдання 1.* Розв'язати систему 
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 10 \\ 4x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 3x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -12 \end{cases}$$

Перевірити розв'язок підстановкою.

*Завдання 2.* Дослідити систему на сумісність. Для цього знайти ранг основної та розширеної матриць, порівняти їх (використати теорему Кронекера-Капеллі).

Звести матрицю до трикутного вигляду. Знайти загальний розв'язок.

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 3x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 6x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 + 9x_4 - 6x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 4x_4 - 5x_5 = 0 \\ 5x_1 + 10x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 15x_5 = 0 \end{cases}$$

*Завдання 3.* Знайти параметр  $p$  при якому система має ненульовий розв'язок.

При знайденому  $p$  знайти розв'язок, в якому принаймні одна невідома дорівнює

одиниці. 
$$\begin{cases} 6x + p \cdot y - 13z = 0 \\ -4x + 3y - z = 0 \\ 11x - 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

#### Варіант 19.

*Завдання 1.* Розв'язати систему 
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 6x_4 = 11 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -3 \end{cases}$$

Перевірити розв'язок підстановкою.

*Завдання 2.* Дослідити систему на сумісність. Для цього знайти ранг основної та розширеної матриць, порівняти їх (використати теорему Кронекера-Капеллі).

Звести матрицю до трикутного вигляду. Знайти загальний розв'язок.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 - x_5 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ 6x_1 + 9x_2 + 12x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 9x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$$

*Завдання 3.* Знайти параметр  $p$  при якому система має ненульовий розв'язок.

При знайденому  $p$  знайти розв'язок, в якому принаймні одна невідома дорівнює

одиниці. 
$$\begin{cases} 12x + 6y - z = 0 \\ -x + 3y - 2z = 0 \\ p \cdot x - 4y - 7z = 0 \end{cases}$$

#### Варіант 20.

*Завдання 1.* Розв'язати систему 
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Перевірити розв'язок підстановкою.

*Завдання 2.* Дослідити систему на сумісність. Для цього знайти ранг основної та розширеної матриць, порівняти їх (використати теорему Кронекера-Капеллі).

Звести матрицю до трикутного вигляду. Знайти загальний розв'язок.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2 \end{cases}$$

**Завдання 3.** Знайти параметр  $p$  при якому система має ненульовий розв'язок. При знайденому  $p$  знайти розв'язок, в якому принаймні одна невідома дорівнює

одиниці. 
$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ -x + 5y - 7z = 0 \\ p \cdot x + 9y - 17z = 0 \end{cases}$$

### Зразок виконання лабораторної роботи 3

**Завдання 1.** Розв'язати систему 
$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Перевірити розв'язок підстановкою.

**Завдання 2.** Дослідити систему на сумісність. Для цього знайти ранг основної та розширеної матриць, порівняти їх (використати теорему Кронекера-Капеллі). Звести матрицю до трикутного вигляду. Знайти загальний розв'язок.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 = 4 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 6 \\ 2x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 4x_4 - 5x_5 = 1 \\ 3x_1 + 8x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 11x_5 = 8 \end{cases}$$

**Завдання 3.** Знайти параметр  $p$  при якому система має ненульовий розв'язок. При знайденому  $p$  знайти розв'язок, в якому принаймні одна невідома дорівнює

одиниці. 
$$\begin{cases} 4x - 2y + 6z = 0 \\ 3x + 6y - 3z = 0 \\ p \cdot x - 7y + 11z = 0 \end{cases}$$

### Завдання 1. Розв'язок:

Введемо рівняння однорідної системи.

```
(%i1) eq1: 2*x1-4*x2+5*x3+3*x4=0;
      eq2: 4*x1-8*x2+17*x3+11*x4=0;
      eq3: 3*x1-6*x2+4*x3+2*x4=0;
(%o1) 3 x4+5 x3-4 x2+2 x1=0
      (%o2) 11 x4+17 x3-8 x2+4 x1=0
      (%o3) 2 x4+4 x3-6 x2+3 x1=0
```

Розв'яжемо систему за допомогою функції `linsolve`.

```
(%i4) linsolve([eq1,eq2,eq3],[x1,x2,x3,x4]);
solve: dependent equations eliminated: (3)
(%o4) [ x1= $\frac{14 \%r2+2 \%r1}{7}$ , x2= $\%r2$ , x3= $-\frac{5 \%r1}{7}$ , x4= $\%r1$ 
```

З одержаного розв'язку видно, що змінні  $x_2$  та  $x_4$  є вільними, а  $x_1$  та  $x_3$  виражаються через них. При цьому третє рівняння було вилучене, оскільки воно виражається через попередні два.

## Завдання 2. Розв'язок:

Введемо рівняння системи.

```
(%i1) eq1: x1-2*x2+x3+3*x4-x5=4;
      eq2: 3*x1+x2+2*x3-x4+x5=3;
      eq3: 2*x1+3*x2-x3-2*x4+5*x5=6;
      eq4: 2*x1-4*x2+4*x3+4*x4-5*x5=1;
      eq5: 3*x1+8*x2-3*x3-7*x4+11*x5=8;
(%o1) -x5+3 x4+x3-2 x2+x1=4
(%o2) x5-x4+2 x3+x2+3 x1=3
(%o3) 5 x5-2 x4-x3+3 x2+2 x1=6
(%o4) -5 x5+4 x4+4 x3-4 x2+2 x1=1
(%o5) 11 x5-7 x4-3 x3+8 x2+3 x1=8
```

Побудуємо основну та розширену матрицю системи.

```
(%i6) A: coefmatrix([eq1,eq2,eq3,eq4,eq5],[x1,x2,x3,x4,x5]);
      [ 1 -2  1  3 -1 ]
      [ 3  1  2 -1  1 ]
(%o6) [ 2  3 -1 -2  5 ]
      [ 2 -4  4  4 -5 ]
      [ 3  8 -3 -7 11 ]
(%i7) Ae: augcoefmatrix([eq1,eq2,eq3,eq4,eq5],[x1,x2,x3,x4,x5]);
      [ 1 -2  1  3 -1 -4 ]
      [ 3  1  2 -1  1 -3 ]
(%o7) [ 2  3 -1 -2  5 -6 ]
      [ 2 -4  4  4 -5 -1 ]
      [ 3  8 -3 -7 11 -8 ]
```

Слід зауважити, що функція `augcoefmatrix` для побудови розширеної матриці, подає елементи останнього стовпчика з оберненим знаком. Однак на ранг розширеної матриці це не впливає.

Приведемо основну та розширену матриці системи до ступінчастого вигляду за допомогою функції `echelon`.

```
(%i8) echelon(A);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & -\frac{10}{7} & \frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
(%i9) echelon(Ae);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & -\frac{10}{7} & \frac{4}{7} & \frac{9}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Таким чином, ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці але менший ніж кількість змінних. Отже система має безліч розв'язків. Знайдемо їх за допомогою функції `linsolve`.

```
(%i10) linsolve([eq1,eq2,eq3,eq4,eq5],[x1,x2,x3,x4,x5]);
```

```
solve: dependent equations eliminated: (2 5)
```

```
(%o10) [x1=-\frac{12 %r2+17 %r1-55}{14}, x2=-\frac{-22 %r2+5 %r1+25}{14}, x3=\frac{2 %r2+3 %r1-7}{2}, x4=%r2, x5=%r1]
```

З одержаного розв'язку видно, що змінні  $x_4$  та  $x_5$  є вільними, а  $x_1$ ,  $x_2$  та  $x_3$  виражаються через них.

### Завдання 3. Розв'язок:

Введемо рівняння системи.

```
(%i1) eq1: 4*x-2*y+6*z=0;  
      eq2: 3*x+6*y-3*z=0;  
      eq3: p*x-7*y+11*z=0;
```

```
(%o1) 6 z-2 y+4 x=0
```

```
(%o2) -3 z+6 y+3 x=0
```

```
(%o3) 11 z-7 y+p x=0
```

Побудуємо основну матрицю системи.

```
(%i5) A: coefmatrix([eq1,eq2,eq3],[x,y,z]);
```

```
(%o5) [ 4 -2 6  
       3  6 -3  
       p -7 11 ]
```

Знайдемо її визначник та прирівнявши його до нуля, знайдемо значення параметра  $p$ , при якому система має ненульові розв'язки.

```
(%i7) d: determinant(A);
(%o7) 2(3p+33)+6(-6p-21)+180
(%i8) solve(d=0,p);
(%o8) [p=4]
(%i9) p:4;
(%o9) 4
```

Покладемо  $p = 4$  в третьому рівнянні.

```
(%i13) eq3: ev(eq3,p=4);
(%o13) 11z-7y+4x=0
```

Розв'яжемо систему при  $p = 4$ .

```
(%i15) s: linsolve([eq1,eq2,eq3],[x,y,z]);
solve: dependent equations eliminated: (3)
(%o15) [x=-%r2, y=%r2, z=%r2]
```

Знайдемо розв'язок, в якому принаймні одна невідома дорівнює 1.

```
(%i16) ev(s,%r2=1);
(%o16) [x=-1, y=1, z=1]
```

## Лабораторна робота 4

*Тема роботи: «Вектори. Прямі та площини.»*

*Мета роботи:* навчитись виконувати основні дії над векторами (знаходити довжину вектора, суму векторів, лінійну комбінацію векторів, координати вектора в базисі, скалярний, векторний добуток); розв'язувати задачі на прямі та площини

*Завдання:*

### Варіант 1.

*Завдання 1.* Дано два вектора  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  і  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Знайти їх довжини  $|\vec{a}|$ ,  $|\vec{b}|$ ; суму  $\vec{a} + \vec{b}$ ; лінійну комбінацію  $2\vec{a} - 3\vec{b}$ ; скалярний добуток  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ; векторний добуток  $\vec{a} \times \vec{b}$ ; кут  $\varphi$  між векторами  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

*Завдання 2.* Знайти координати вектора  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$  в базисі  $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ , якщо його задано в базисі  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , старий і новий базиси пов'язані

$$\text{співвідношеннями} \begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + 2e_3 \\ e'_2 = 2e_1 - e_2 \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}.$$

*Завдання 3.* Знайти кут (в градусах) між площинами

$$x - 3y + 5z = 0, \quad 2x - y + 5z - 16 = 0.$$

**Завдання 4.** Знайти точку перетину прямої  $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{4}$  та площини  $x + 2y + 3z - 14 = 0$ .

**Завдання 5.** Знайти об'єм, площу основи ABC та висоту піраміди з вершинами в точках  $A \llcorner 3 \ 6 \ 6$ ,  $B \llcorner 2 \ 1$ ,  $C \llcorner 1 \ 0 \ 1$ ,  $D \llcorner 4 \ 6 \ -3$ , опущеної з вершини D на грань ABC

Варіант 2.

**Завдання 1.** Дано два вектора  $\vec{a} = \llcorner 1 \ 2 \ 3$  і  $\vec{b} = \llcorner 1 \ -1$ . Знайти їх довжини  $|\vec{a}|$ ,  $|\vec{b}|$ ; суму  $\vec{a} + \vec{b}$ ; лінійну комбінацію  $2\vec{a} - 3\vec{b}$ ; скалярний добуток  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ; векторний добуток  $\vec{a} \times \vec{b}$ ; кут  $\varphi$  між векторами  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

**Завдання 2.** Знайти координати вектора  $\vec{a} = \llcorner 2 \ 4$  в базисі  $\llcorner e'_1 \ e'_2 \ e'_3$ , якщо його задано в базисі  $\llcorner e_1 \ e_2 \ e_3$ , старий і новий базиси пов'язані

$$\text{співвідношеннями} \begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + 3e_3 \\ e'_2 = 1.5e_1 - e_2 \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases} .$$

**Завдання 3.** Знайти кут (в градусах) між площинами  $x - 3y + z - 1 = 0$ ,  $x + z - 1 = 0$ .

**Завдання 4.** Знайти точку перетину прямої  $\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{5}$  та площини  $x + 2y - 5z + 20 = 0$ .

**Завдання 5.** Знайти об'єм, площу основи ABC та висоту піраміди з вершинами в точках  $A \llcorner 4 \ 2 \ 6$ ,  $B \llcorner -3 \ 0$ ,  $C \llcorner 10 \ 5 \ 8$ ,  $D \llcorner 5 \ 2 \ -4$ , опущеної з вершини D на грань ABC

Варіант 3.

**Завдання 1.** Дано два вектора  $\vec{a} = \llcorner 2 \ 1$  і  $\vec{b} = \llcorner 1 \ -1$ . Знайти їх довжини  $|\vec{a}|$ ,  $|\vec{b}|$ ; суму  $\vec{a} + \vec{b}$ ; лінійну комбінацію  $2\vec{a} - 3\vec{b}$ ; скалярний добуток  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ; векторний добуток  $\vec{a} \times \vec{b}$ ; кут  $\varphi$  між векторами  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

**Завдання 2.** Знайти координати вектора  $\vec{a} = \llcorner 3 \ 6$  в базисі  $\llcorner e'_1 \ e'_2 \ e'_3$ , якщо його задано в базисі  $\llcorner e_1 \ e_2 \ e_3$ , старий і новий базиси пов'язані

$$\text{співвідношеннями} \begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + 4e_3 \\ e'_2 = \frac{4}{3}e_1 - e_2 \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases} .$$



*Завдання 3.* Знайти кут (в градусах) між площинами  $4x - 5y + 3z - 1 = 0$ ,  $x - 4y - z + 9 = 0$ .

*Завдання 4.* Знайти точку перетину прямої  $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-1}{2}$  та площини  $x - 3y + 7z - 24 = 0$ .

*Завдання 5.* Знайти об'єм, площу основи ABC та висоту піраміди з вершинами в точках  $A(2, 4)$ ,  $B(-1, -2)$ ,  $C(3, 1)$ ,  $D(4, 2, 1)$ , опущеної з вершини D на грань ABC

Варіант 4.

*Завдання 1.* Дано два вектори  $\vec{a} = (1, 2, 0)$  і  $\vec{b} = (2, -1)$ . Знайти їх довжини  $|\vec{a}|$ ,  $|\vec{b}|$ ; суму  $\vec{a} + \vec{b}$ ; лінійну комбінацію  $2\vec{a} - 3\vec{b}$ ; скалярний добуток  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ; векторний добуток  $\vec{a} \times \vec{b}$ ; кут  $\varphi$  між векторами  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

*Завдання 2.* Знайти координати вектора  $\vec{a} = (4, 1)$  в базисі  $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ , якщо його задано в базисі  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , старий і новий базиси пов'язані

$$\text{співвідношеннями} \begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + \frac{3}{2}e_3 \\ e'_2 = 3e_1 - e_2 \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}.$$

*Завдання 3.* Знайти кут (в градусах) між площинами  $3x - y + 2z + 15 = 0$ ,  $5x + 9y - 3z - 1 = 0$ .

*Завдання 4.* Знайти точку перетину прямої  $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{2}$  та площини  $2x - y + 4z = 0$ .

*Завдання 5.* Знайти об'єм, площу основи ABC та висоту піраміди з вершинами в точках  $A(1, 4)$ ,  $B(1, 5, -2)$ ,  $C(7, -3, 2)$ ,  $D(6, -3, 6)$ , опущеної з вершини D на грань ABC

Варіант 5.

*Завдання 1.* Дано два вектори  $\vec{a} = (2, 2, 1)$  і  $\vec{b} = (1, -1, -1)$ . Знайти їх довжини  $|\vec{a}|$ ,  $|\vec{b}|$ ; суму  $\vec{a} + \vec{b}$ ; лінійну комбінацію  $2\vec{a} - 3\vec{b}$ ; скалярний добуток  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ; векторний добуток  $\vec{a} \times \vec{b}$ ; кут  $\varphi$  між векторами  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

Завдання 2. Знайти координати вектора  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$  в базисі  $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ , якщо його задано в базисі  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , старий і новий базиси пов'язані

$$\text{співвідношеннями} \begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + \frac{5}{4}e_3 \\ e'_2 = 5e_1 - e_2 \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}.$$

Завдання 3. Знайти кут (в градусах) між площинами

$$2x + 3y + z + 6 = 0, \quad x - 3y - 2z + 3 = 0.$$

Завдання 4. Знайти точку перетину прямої  $\frac{x-5}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{0}$  та площини  $3x + y - 5z - 12 = 0$ .

Завдання 5. Знайти об'єм, площу основи ABC та висоту піраміди з вершинами в точках  $A \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $B \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ ,  $C \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ ,  $D \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ , опущеної з вершини D на грань ABC

#### Варіант 6.

Завдання 1. Дано два вектора  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$  і  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Знайти їх довжини  $|\vec{a}|$ ,  $|\vec{b}|$ ; суму  $\vec{a} + \vec{b}$ ; лінійну комбінацію  $2\vec{a} - 3\vec{b}$ ; скалярний добуток  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ; векторний добуток  $\vec{a} \times \vec{b}$ ; кут  $\varphi$  між векторами  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

Завдання 2. Знайти координати вектора  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$  в базисі  $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ , якщо його задано в базисі  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , старий і новий базиси пов'язані

$$\text{співвідношеннями} \begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + 5e_3 \\ e'_2 = \frac{5}{4}e_1 - e_2 \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}.$$

Завдання 3. Знайти кут (в градусах) між площинами

$$3x + y - z - 6 = 0, \quad 3x - y + 2z = 0.$$

Завдання 4. Знайти точку перетину прямої  $\frac{x+1}{-3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-2}$  та площини  $x + 3y - 5z + 9 = 0$ .

Завдання 5. Знайти об'єм, площу основи ABC та висоту піраміди з вершинами в точках  $A \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $B \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ ,  $C \begin{pmatrix} -5 \\ -9 \end{pmatrix}$ ,  $D \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ , опущеної з вершини D на грань ABC

### Варіант 7.

Завдання 1. Дано два вектора  $\vec{a} = \langle 1 \ 4 \ 1 \rangle$  і  $\vec{b} = \langle 1 \ -2 \ 1 \rangle$ . Знайти їх довжини  $|\vec{a}|$ ,  $|\vec{b}|$ ; суму  $\vec{a} + \vec{b}$ ; лінійну комбінацію  $2\vec{a} - 3\vec{b}$ ; скалярний добуток  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ; векторний добуток  $\vec{a} \times \vec{b}$ ; кут  $\varphi$  між векторами  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

Завдання 2. Знайти координати вектора  $\vec{a} = \langle 1 \ 5 \ 10 \rangle$  в базисі  $\{e'_1 \ e'_2 \ e'_3\}$ , якщо його задано в базисі  $\{e_1 \ e_2 \ e_3\}$ , старий і новий базиси пов'язані

$$\text{співвідношеннями} \begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + 6e_3 \\ e'_2 = \frac{6}{5}e_1 - e_2 \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}.$$

Завдання 3. Знайти кут (в градусах) між площинами  $3y - z = 0$ ,  $2y + z = 0$ .

Завдання 4. Знайти точку перетину прямої  $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1}$  та площини  $x - 2y + 5z + 17 = 0$ .

Завдання 5. Знайти об'єм, площу основи ABC та висоту піраміди з вершинами в точках  $A \langle 2 \ 0 \ 1 \rangle$ ,  $B \langle 5 \ 0 \ 1 \rangle$ ,  $C \langle 2 \ 4 \ 1 \rangle$ ,  $D \langle 1 \ 1 \ 1 \rangle$ , опущеної з вершини D на грань ABC

### Варіант 8.

Завдання 1. Дано два вектора  $\vec{a} = \langle 1 \ -2 \ 1 \rangle$  і  $\vec{b} = \langle 2 \ 1 \ -1 \rangle$ . Знайти їх довжини  $|\vec{a}|$ ,  $|\vec{b}|$ ; суму  $\vec{a} + \vec{b}$ ; лінійну комбінацію  $2\vec{a} - 3\vec{b}$ ; скалярний добуток  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ; векторний добуток  $\vec{a} \times \vec{b}$ ; кут  $\varphi$  між векторами  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

Завдання 2. Знайти координати вектора  $\vec{a} = \langle 0 \ 5 \ 1 \rangle$  в базисі  $\{e'_1 \ e'_2 \ e'_3\}$ , якщо його задано в базисі  $\{e_1 \ e_2 \ e_3\}$ , старий і новий базиси пов'язані

$$\text{співвідношеннями} \begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + \frac{6}{5}e_3 \\ e'_2 = 6e_1 - e_2 \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}.$$

Завдання 3. Знайти кут (в градусах) між площинами  $3x + 4y - 2z + 1 = 0$ ,  $2x - 4y + 3z + 4 = 0$ .

Завдання 4. Знайти точку перетину прямої  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-4}{1}$  та площини  $x - 2y + 4z - 19 = 0$ .

**Завдання 5.** Знайти об'єм, площу основи ABC та висоту піраміди з вершинами в точках  $A \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $B \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $C \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix}$ ,  $D \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \\ -7 \end{pmatrix}$ , опущеної з вершини D на грань ABC

### Варіант 9.

**Завдання 1.** Дано два вектора  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  і  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Знайти їх довжини  $|\vec{a}|$ ,  $|\vec{b}|$ ; суму  $\vec{a} + \vec{b}$ ; лінійну комбінацію  $2\vec{a} - 3\vec{b}$ ; скалярний добуток  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ; векторний добуток  $\vec{a} \times \vec{b}$ ; кут  $\varphi$  між векторами  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

**Завдання 2.** Знайти координати вектора  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}$  в базисі  $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ , якщо його задано в базисі  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , старий і новий базиси пов'язані

$$\text{співвідношеннями} \begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + 7e_3 \\ e'_2 = \frac{7}{6}e_1 - e_2 \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}.$$

**Завдання 3.** Знайти кут (в градусах) між площинами  $x + 2y + 2z + 5 = 0$ ,  $16x + 12y - 15z - 16 = 0$ .

**Завдання 4.** Знайти точку перетину прямої  $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+4}{-1}$  та площини  $2x - y + 3z + 23 = 0$ .

**Завдання 5.** Знайти об'єм, площу основи ABC та висоту піраміди з вершинами в точках  $A \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $B \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -8 \end{pmatrix}$ ,  $C \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$ ,  $D \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ , опущеної з вершини D на грань ABC

### Варіант 10.

**Завдання 1.** Дано два вектора  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  і  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Знайти їх довжини  $|\vec{a}|$ ,  $|\vec{b}|$ ; суму  $\vec{a} + \vec{b}$ ; лінійну комбінацію  $2\vec{a} - 3\vec{b}$ ; скалярний добуток  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ; векторний добуток  $\vec{a} \times \vec{b}$ ; кут  $\varphi$  між векторами  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

**Завдання 2.** Знайти координати вектора  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$  в базисі  $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ , якщо його задано в базисі  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , старий і новий базиси пов'язані

$$\text{співвідношеннями} \begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + \frac{2}{3}e_3 \\ e'_2 = -2e_1 - e_2 \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}.$$

**Завдання 3.** Знайти кут (в градусах) між площинами  $2x - y + 5z + 5 = 0$ ,  $x + 2y + 3z - 16 = 0$ .

*Завдання 4.* Знайти точку перетину прямої  $\frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+3}{0}$  та площини  $2x - 3y - 5z - 7 = 0$ .

*Завдання 5.* Знайти об'єм, площу основи ABC та висоту піраміди з вершинами в точках  $A \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ ,  $B \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $C \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$ ,  $D \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ , опущеної з вершини D на грань ABC

### Варіант 11.

*Завдання 1.* Дано два вектора  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$  і  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Знайти їх довжини  $|\vec{a}|$ ,  $|\vec{b}|$ ; суму  $\vec{a} + \vec{b}$ ; лінійну комбінацію  $2\vec{a} - 3\vec{b}$ ; скалярний добуток  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ; векторний добуток  $\vec{a} \times \vec{b}$ ; кут  $\varphi$  між векторами  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

*Завдання 2.* Знайти координати вектора  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$  в базисі  $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ , якщо його задано в базисі  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , старий і новий базиси пов'язані

$$\text{співвідношеннями} \begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 - 3e_3 \\ e'_2 = \frac{3}{4}e_1 - e_2 \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}.$$

*Завдання 3.* Знайти кут (в градусах) між площинами  $2x + 2y + z - 1 = 0$ ,  $x + z - 1 = 0$ .

*Завдання 4.* Знайти точку перетину прямої  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{3}$  та площини  $4x + 2y - z - 11 = 0$ .

*Завдання 5.* Знайти об'єм, площу основи ABC та висоту піраміди з вершинами в точках  $A \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $B \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $C \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $D \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix}$ , опущеної з вершини D на грань ABC

### Варіант 12.

*Завдання 1.* Дано два вектора  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  і  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Знайти їх довжини  $|\vec{a}|$ ,  $|\vec{b}|$ ; суму  $\vec{a} + \vec{b}$ ; лінійну комбінацію  $2\vec{a} - 3\vec{b}$ ; скалярний добуток  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ; векторний добуток  $\vec{a} \times \vec{b}$ ; кут  $\varphi$  між векторами  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

Завдання 2. Знайти координати вектора  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}$  в базисі  $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ , якщо його задано в базисі  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , старий і новий базиси пов'язані

$$\text{співвідношеннями} \begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 - 4e_3 \\ e'_2 = \frac{4}{5}e_1 - e_2 \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}.$$

Завдання 3. Знайти кут (в градусах) між площинами  $3x + y + z - 4 = 0$ ,  $y + z + 5 = 0$ .

Завдання 4. Знайти точку перетину прямої  $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-1}{-1}$  та площини  $3x - 2y - 4z - 8 = 0$ .

Завдання 5. Знайти об'єм, площу основи ABC та висоту піраміди з вершинами в точках  $A \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $B \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $C \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $D \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ , опущеної з вершини D на грань ABC

### Варіант 13.

Завдання 1. Дано два вектора  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  і  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Знайти їх довжини  $|\vec{a}|$ ,  $|\vec{b}|$ ; суму  $\vec{a} + \vec{b}$ ; лінійну комбінацію  $2\vec{a} - 3\vec{b}$ ; скалярний добуток  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ; векторний добуток  $\vec{a} \times \vec{b}$ ; кут  $\varphi$  між векторами  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

Завдання 2. Знайти координати вектора  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$  в базисі  $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ , якщо його задано в базисі  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , старий і новий базиси пов'язані

$$\text{співвідношеннями} \begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + \frac{4}{5}e_3 \\ e'_2 = -4e_1 - e_2 \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}.$$

Завдання 3. Знайти кут (в градусах) між площинами  $3x - 2y - 2z - 16 = 0$ ,  $x + y - 3z - 7 = 0$ .

Завдання 4. Знайти точку перетину прямої  $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{2}$  та площини  $x + 2y - z - 2 = 0$ .

Завдання 5. Знайти об'єм, площу основи ABC та висоту піраміди з вершинами в точках  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $C \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $D \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ , опущеної з вершини D на грань ABC

### Варіант 14.

Завдання 1. Дано два вектора  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  і  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ . Знайти їх довжини  $|\vec{a}|$ ,  $|\vec{b}|$ ; суму  $\vec{a} + \vec{b}$ ; лінійну комбінацію  $2\vec{a} - 3\vec{b}$ ; скалярний добуток  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ; векторний добуток  $\vec{a} \times \vec{b}$ ; кут  $\varphi$  між векторами  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

Завдання 2. Знайти координати вектора  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$  в базисі  $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ , якщо його задано в базисі  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , старий і новий базиси пов'язані

$$\text{співвідношеннями} \begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 - 5e_3 \\ e'_2 = \frac{5}{6}e_1 - e_2 \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}.$$

Завдання 3. Знайти кут (в градусах) між площинами

$$2x + 2y + z + 9 = 0, \quad x - y + 3z - 1 = 0.$$

Завдання 4. Знайти точку перетину прямої  $\frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z+2}{3}$  та площини  $5x - y + 4z + 3 = 0$ .

Завдання 5. Знайти об'єм, площу основи ABC та висоту піраміди з вершинами в точках  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $B \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $C \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $D \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ , опущеної з вершини D на грань ABC

### Варіант 15.

Завдання 1. Дано два вектора  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$  і  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ . Знайти їх довжини  $|\vec{a}|$ ,  $|\vec{b}|$ ; суму  $\vec{a} + \vec{b}$ ; лінійну комбінацію  $2\vec{a} - 3\vec{b}$ ; скалярний добуток  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ; векторний добуток  $\vec{a} \times \vec{b}$ ; кут  $\varphi$  між векторами  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

Завдання 2. Знайти координати вектора  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$  в базисі  $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ , якщо його задано в базисі  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , старий і новий базиси пов'язані

$$\text{співвідношеннями} \begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + \frac{8}{9}e_3 \\ e'_2 = -8e_1 - e_2 \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}.$$

Завдання 3. Знайти кут (в градусах) між площинами

$$x + 2y + 2z - 3 = 0, \quad 2x - y + 2z - 6 = 0.$$

Завдання 4. Знайти точку перетину прямої  $\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-4}{3}$  та площини  $x + 3y + 5z - 42 = 0$ .

Завдання 5. Знайти об'єм, площу основи ABC та висоту піраміди з вершинами в точках  $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $B \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $C \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $D \begin{pmatrix} 9 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$ , опущеної з вершини D на грань ABC

### Варіант 16.

Завдання 1. Дано два вектора  $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$  і  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Знайти їх довжини  $|\vec{a}|$ ,  $|\vec{b}|$ ; суму  $\vec{a} + \vec{b}$ ; лінійну комбінацію  $3\vec{a} - 4\vec{b}$ ; скалярний добуток  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ; векторний добуток  $\vec{a} \times \vec{b}$ ; кут  $\varphi$  між векторами  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

Завдання 2. Знайти координати вектора  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$  в базисі  $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ , якщо його задано в базисі  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , старий і новий базиси пов'язані

$$\text{співвідношеннями} \begin{cases} e'_1 = e_1 + 3e_2 + e_3 \\ e'_2 = \frac{2}{3}e_1 - e_2 \\ e'_3 = -e_1 + 2e_2 + e_3 \end{cases}.$$

Завдання 3. Знайти кут (в градусах) між площинами  $3x + y - z - 6 = 0$ ,  $3x - y + 2z = 0$ .

Завдання 4. Знайти точку перетину прямої  $\frac{x+1}{-3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-2}$  та площини  $x + 3y - 5z + 9 = 0$ .

Завдання 5. Знайти об'єм, площу основи ABC та висоту піраміди з вершинами в точках  $A \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $B \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ ,  $C \begin{pmatrix} -5 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $D \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ , опущеної з вершини D на грань ABC

### Варіант 17.

Завдання 1. Дано два вектора  $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  і  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ . Знайти їх довжини  $|\vec{a}|$ ,  $|\vec{b}|$ ; суму  $\vec{a} + \vec{b}$ ; лінійну комбінацію  $4\vec{a} - 2\vec{b}$ ; скалярний добуток  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ; векторний добуток  $\vec{a} \times \vec{b}$ ; кут  $\varphi$  між векторами  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

Завдання 2. Знайти координати вектора  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$  в базисі  $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ , якщо його задано в базисі  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , старий і новий базиси пов'язані

$$\text{співвідношенням} \begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + 7e_3 \\ e'_2 = \frac{4}{5}e_1 - e_2 \\ e'_3 = -e_1 + 3e_2 + e_3 \end{cases}.$$



Завдання 3. Знайти кут (в градусах) між площинами  $3y - z = 0$ ,  $2y + z = 0$ .

Завдання 4. Знайти точку перетину прямої  $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1}$  та площини  $x - 2y + 5z + 17 = 0$ .

Завдання 5. Знайти об'єм, площу основи ABC та висоту піраміди з вершинами в точках  $A \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $B \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $C \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $D \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , опущеної з вершини D на грань ABC

#### Варіант 18.

Завдання 1. Дано два вектора  $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$  і  $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Знайти їх довжини  $|\vec{a}|$ ,  $|\vec{b}|$ ; суму  $\vec{a} + \vec{b}$ ; лінійну комбінацію  $2\vec{a} - 3\vec{b}$ ; скалярний добуток  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ; векторний добуток  $\vec{a} \times \vec{b}$ ; кут  $\varphi$  між векторами  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

Завдання 2. Знайти координати вектора  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  в базисі  $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ , якщо його задано в базисі  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , старий і новий базиси пов'язані

$$\text{співвідношенням } \begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 + 3e_3 \\ e'_2 = 2e_1 - 4e_2 \\ e'_3 = -e_1 + 3e_2 + e_3 \end{cases}.$$

Завдання 3. Знайти кут (в градусах) між площинами  $3x + 4y - 2z + 1 = 0$ ,  $2x - 4y + 3z + 4 = 0$ .

Завдання 4. Знайти точку перетину прямої  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-4}{1}$  та площини  $x - 2y + 4z - 19 = 0$ .

Завдання 5. Знайти об'єм, площу основи ABC та висоту піраміди з вершинами в точках  $A \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $B \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $C \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $D \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix}$ , опущеної з вершини D на грань ABC

#### Варіант 19.

Завдання 1. Дано два вектора  $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$  і  $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Знайти їх довжини  $|\vec{a}|$ ,  $|\vec{b}|$ ; суму  $\vec{a} + \vec{b}$ ; лінійну комбінацію  $2\vec{a} - 4\vec{b}$ ; скалярний добуток  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ; векторний добуток  $\vec{a} \times \vec{b}$ ; кут  $\varphi$  між векторами  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

Завдання 2. Знайти координати вектора  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$  в базисі  $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ , якщо його задано в базисі  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , старий і новий базиси пов'язані

$$\text{співвідношенням} \begin{cases} e'_1 = e_1 - e_2 + 3e_3 \\ e'_2 = \frac{7}{6}e_1 - e_2 \\ e'_3 = -e_1 + 2e_2 + e_3 \end{cases}.$$

Завдання 3. Знайти кут (в градусах) між площинами

$$x + 2y + 2z + 5 = 0, 16x + 12y - 15z - 16 = 0.$$

Завдання 4. Знайти точку перетину прямої  $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+4}{-1}$  та площини  $2x - y + 3z + 23 = 0$ .

Завдання 5. Знайти об'єм, площу основи ABC та висоту піраміди з вершинами в точках  $A \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $B \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $C \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $D \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ , опущеної з вершини D на грань ABC

#### Варіант 20.

Завдання 1. Дано два вектора  $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  і  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Знайти їх довжини  $|\vec{a}|$ ,  $|\vec{b}|$ ; суму  $\vec{a} + \vec{b}$ ; лінійну комбінацію  $2\vec{a} + 3\vec{b}$ ; скалярний добуток  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ; векторний добуток  $\vec{a} \times \vec{b}$ ; кут  $\varphi$  між векторами  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

Завдання 2. Знайти координати вектора  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  в базисі  $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ , якщо його задано в базисі  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , старий і новий базиси пов'язані

$$\text{співвідношенням} \begin{cases} e'_1 = e_1 + 4e_2 + 3e_3 \\ e'_2 = -2e_1 - 3e_2 \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}.$$

Завдання 3. Знайти кут (в градусах) між площинами

$$2x - y + 5z + 5 = 0, x + 2y + 3z - 16 = 0.$$

Завдання 4. Знайти точку перетину прямої  $\frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+3}{0}$  та площини  $2x - 3y - 5z - 7 = 0$ .

Завдання 5. Знайти об'єм, площу основи ABC та висоту піраміди з вершинами в точках  $A \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $B \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $C \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$ ,  $D \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ , опущеної з вершини D на грань ABC

## Зразок виконання лабораторної роботи 4

**Завдання 1.** Дано два вектора  $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$  і  $\vec{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ . Знайти їх довжини  $|\vec{a}|$ ,  $|\vec{b}|$ ; суму  $\vec{a} + \vec{b}$ ; лінійну комбінацію  $2\vec{a} - 5\vec{b}$ ; скалярний добуток  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ; векторний добуток  $\vec{a} \times \vec{b}$ ; кут  $\varphi$  між векторами  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ .

**Завдання 2.** Знайти координати вектора  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$  в базисі  $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ , якщо його задано в базисі  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , старий і новий базиси пов'язані

$$\text{співвідношенням} \begin{cases} e'_1 = e_1 + 3e_2 - 3e_3 \\ e'_2 = 2e_1 - 5e_2 \\ e'_3 = -e_1 + 2e_2 + e_3 \end{cases}.$$

**Завдання 3.** Знайти кут (в градусах) між площинами  $x - 5y + 3z = 0$ ,  $2x - 5y + 5z - 6 = 0$ .

**Завдання 4.** Знайти точку перетину прямої  $\frac{x-3}{-2} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z+1}{2}$  та площини  $2x + 3y - 5z + 11 = 0$ .

**Завдання 5.** Знайти об'єм, площу основи ABC та висоту піраміди з вершинами в точках  $A \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ,  $B \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $C \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ ,  $D \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ , опущеної з вершини D на грань ABC

### Завдання 1. Розв'язок:

Завантажимо пакет "vect".

```
(%i1) load("vect");  
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.0/share/maxima/5.27.0/share/vector/vect.mac
```

Введемо вектори  $\vec{a}$  та  $\vec{b}$ .

```
(%i2) a: [-3, 1, 4];  
      b: [-7, 4, 5];  
(%o2) [-3, 1, 4]  
(%o3) [-7, 4, 5]
```

Знайдемо довжину векторів  $\vec{a}$  та  $\vec{b}$  за формулами  $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$ ,  $|\vec{b}| = \sqrt{\vec{b} \cdot \vec{b}}$ .

```
(%i4) len_a: sqrt(a.a);  
      len_b: sqrt(b.b);  
(%o4)  $\sqrt{26}$   
(%o5)  $3\sqrt{10}$ 
```

Обчислимо значення виразів  $\vec{a} + \vec{b}$  та  $2\vec{a} - 5\vec{b}$ .

```
(%i6) a+b;  
      2*a-5*b;  
(%o6) [-10, 5, 9]  
(%o7) [29, -18, -17]
```

Обчислимо скалярний добуток  $\bar{a} \cdot \bar{b}$ .

```
(%i10) ab: a.b;  
(%o10) 45
```

Обчислимо векторний добуток  $\bar{a} \times \bar{b}$ .

```
(%i11) a~b;  
(%o11) -[-7, 4, 5] ~ [-3, 1, 4]  
(%i12) express(%);  
(%o12) [-11, -13, -5]
```

Щоб знайти косинус кута між векторами  $\bar{a}$  та  $\bar{b}$ , скористаємось формулою

$$\cos \varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| |\bar{b}|}.$$

```
(%i13) cos: ab/(len_a*len_b);  
(%o13)  $\frac{15}{\sqrt{10} \sqrt{26}}$ 
```

Спростимо одержаний вираз.

```
(%i14) radcan(%);  
(%o14)  $\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{13}}$ 
```

Таким чином,  $\varphi = \arccos \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{13}}$ .

## Завдання 2. Розв'язок:

Нехай  $e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$ ,  $e' = \begin{bmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{bmatrix}$ . Введемо матрицю  $A$ , таку, що  $e' = Ae$ .

```
(%i1) A: matrix(  
    [1, 3, -3],  
    [2, -5, 0],  
    [-1, 2, 1]  
);  
(%o1)  $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & -5 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ 
```

Введемо вектор  $\bar{a}$ .

```
(%i2) a: [5, -2, 6];  
(%o2) [5, -2, 6]
```

Маємо  $e = A^{-1}e'$ ,  $a = ae = aA^{-1}e'$ . Таким чином, координати вектора  $\bar{a}$  у новому базисі можна знайти за формулою  $aA^{-1}$ .

```
(%i5) a.invert(A);  
(%o5)  $\begin{bmatrix} \frac{27}{8} & \frac{71}{8} & \frac{129}{8} \end{bmatrix}$ 
```

### Завдання 3. Розв'язок:

Завантажимо пакет "vect".

```
(%i1) load("vect");  
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.0/share/maxima/5.27.0/share/vector/vect.mac
```

Введемо вектори нормалей до площин.

```
(%i2) a: [1, -5, 3];  
      b: [2, -5, 5];  
(%o2) [1, -5, 3]  
(%o3) [2, -5, 5]
```

Щоб знайти косинус кута між площинами, скористаємось формулою

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} \sqrt{\vec{b} \cdot \vec{b}}}.$$

```
(%i5) c: a.b/(sqrt(a.a)*sqrt(b.b));  
(%o5)  $\frac{14}{\sqrt{6} \sqrt{35}}$ 
```

Знайдемо величину кута в градусах як  $\arccos(c) \frac{180}{\pi}$ .

```
(%i7) acos(c)*180/%pi;  
      180 acos( $\frac{14}{\sqrt{6} \sqrt{35}}$ )  
(%o7)  $\frac{\pi}{\pi}$   
(%i8) float(%), numer;  
(%o8) 14.96321743330711
```

### Завдання 4. Розв'язок:

Задамо рівняння прямої у параметричному вигляді та рівняння площини.

```
(%i1) X:-2*t+3;  
      Y:-t+5;  
      Z:2*t-1;  
      F:2*x+3*y-5*z+11;  
(%o1) 3-2 t  
(%o2) 5-t  
(%o3) 2 t-1  
(%o4) -5 z+3 y+2 x+11
```

Підставимо параметричні рівняння прямої у рівняння площини:

```
(%i5) f: ev(F, x=X, y=Y, z=Z);  
(%o5) -5 (2 t-1)+3 (5-t)+2 (3-2 t)+11
```

Прирівняємо до нуля та розв'яжемо одержане рівняння відносно параметра  $t$ .

```
(%i6) solve(f=0,t);
```

```
(%o6) [ t= $\frac{37}{17}$  ]
```

Знайдемо координати точки перетину, підставивши одержане значення параметра у рівняння прямої.

```
(%i7) ev(X,t=37/17);
```

```
ev(Y,t=37/17);
```

```
ev(Z,t=37/17);
```

```
(%o7)  $\frac{23}{17}$ 
```

```
(%o8)  $\frac{48}{17}$ 
```

```
(%o9)  $\frac{57}{17}$ 
```

### Завдання 5. Розв'язок:

Завантажимо пакет “vect”.

```
(%i1) load("vect");
```

```
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.0/share/maxima/5.27.0/share/vector/vect.mac
```

Введемо координати вершин піраміди.

```
(%i2) A: [3, 1, 4];
```

```
B: [-1, 6, 1];
```

```
C: [-1, 1, 6];
```

```
D: [0, 4, -1];
```

```
(%o2) [3, 1, 4]
```

```
(%o3) [-1, 6, 1]
```

```
(%o4) [-1, 1, 6]
```

```
(%o5) [0, 4, -1]
```

Знайдемо координати векторів  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$ ,  $\overline{AD}$ .

```
(%i6) AB: B-A;
```

```
AC: C-A;
```

```
AD: D-A;
```

```
(%o6) [-4, 5, -3]
```

```
(%o7) [-4, 0, 2]
```

```
(%o8) [-3, 3, -5]
```

Знайдемо площу основи за формулою  $S = \frac{|AB \times AC|}{2}$ .

```
(%i18) ABxAC: express(AB~AC);
```

```
(%o18) [10, 20, 20]
```

```
(%i19) S: sqrt(ABxAC.ABxAC)/2;
```

```
(%o19) 15
```

Знайдемо об'єм піраміди  $V = \frac{|(AB \times AC) \cdot AD|}{6}$ .

(%i21) V: abs(ABxAC.AD)/6;

(%o21)  $\frac{35}{3}$

Знайдемо висоту піраміди за формулою  $h = \frac{3V}{S}$ .

(%i22) h: 3\*V/S;

(%o22)  $\frac{7}{3}$

## Лабораторна робота 5

*Тема роботи: «Власні числа та власні вектори.»*

*Мета роботи: навчитись знаходити власні числа та власні вектори матриці*

*Завдання:*

### Варіант 1.

*Завдання 1.* Знайти власні числа та власні вектори матриці  $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

за допомогою стандартних вбудованих функцій Maxima.

*Завдання 2.* Знайти власні числа та нормовані власні вектори матриці за

означенням  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

### Варіант 2.

*Завдання 1.* Знайти власні числа та власні вектори матриці  $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

за допомогою стандартних вбудованих функцій Maxima.

*Завдання 2.* Знайти власні числа та нормовані власні вектори матриці за

означенням  $\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

### Варіант 3.

*Завдання 1.* Знайти власні числа та власні вектори матриці  $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

за допомогою стандартних вбудованих функцій Maxima.

*Завдання 2.* Знайти власні числа та нормовані власні вектори матриці за

означенням  $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

### Варіант 4.

*Завдання 1.* Знайти власні числа та власні вектори матриці  $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

за допомогою стандартних вбудованих функцій Maxima.

*Завдання 2.* Знайти власні числа та нормовані власні вектори матриці за означенням  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

#### Варіант 5.

*Завдання 1.* Знайти власні числа та власні вектори матриці  $\begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

за допомогою стандартних вбудованих функцій Maxima.

*Завдання 2.* Знайти власні числа та нормовані власні вектори матриці за означенням  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$

#### Варіант 6.

*Завдання 1.* Знайти власні числа та власні вектори матриці  $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

за допомогою стандартних вбудованих функцій Maxima.

*Завдання 2.* Знайти власні числа та нормовані власні вектори матриці за означенням  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

#### Варіант 7.

*Завдання 1.* Знайти власні числа та власні вектори матриці  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

за допомогою стандартних вбудованих функцій Maxima.

*Завдання 2.* Знайти власні числа та нормовані власні вектори матриці за означенням  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

#### Варіант 8.

*Завдання 1.* Знайти власні числа та власні вектори матриці  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

за допомогою стандартних вбудованих функцій Maxima.



*Завдання 2.* Знайти власні числа та нормовані власні вектори матриці за означенням  $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Варіант 9.

*Завдання 1.* Знайти власні числа та власні вектори матриці  $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

за допомогою стандартних вбудованих функцій *Math*а.

*Завдання 2.* Знайти власні числа та нормовані власні вектори матриці за означенням  $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Варіант 10.

*Завдання 1.* Знайти власні числа та власні вектори матриці  $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

за допомогою стандартних вбудованих функцій *Math*а.

*Завдання 2.* Знайти власні числа та нормовані власні вектори матриці за означенням  $\begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Варіант 11.

*Завдання 1.* Знайти власні числа та власні вектори матриці  $\begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

за допомогою стандартних вбудованих функцій *Math*а.

*Завдання 2.* Знайти власні числа та нормовані власні вектори матриці за означенням  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

Варіант 12.

*Завдання 1.* Знайти власні числа та власні вектори матриці  $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

за допомогою стандартних вбудованих функцій *Math*а.

*Завдання 2.* Знайти власні числа та нормовані власні вектори матриці за означенням  $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$

Варіант 13.

*Завдання 1.* Знайти власні числа та власні вектори матриці  $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

за допомогою стандартних вбудованих функцій *Math*а.

*Завдання 2.* Знайти власні числа та нормовані власні вектори матриці за означенням  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

Варіант 14.

*Завдання 1.* Знайти власні числа та власні вектори матриці  $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

за допомогою стандартних вбудованих функцій *Math*а.

*Завдання 2.* Знайти власні числа та нормовані власні вектори матриці за означенням  $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$

Варіант 15.

*Завдання 1.* Знайти власні числа та власні вектори матриці  $\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

за допомогою стандартних вбудованих функцій *Math*а.

*Завдання 2.* Знайти власні числа та нормовані власні вектори матриці за означенням  $\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Варіант 16.

*Завдання 1.* Знайти власні числа та власні вектори матриці  $\begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

за допомогою стандартних вбудованих функцій *Math*а.

*Завдання 2.* Знайти власні числа та нормовані власні вектори матриці за означенням  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$

Варіант 17.

*Завдання 1.* Знайти власні числа та власні вектори матриці  $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

за допомогою стандартних вбудованих функцій *Math*а.

*Завдання 2.* Знайти власні числа та нормовані власні вектори матриці за означенням  $\begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

Варіант 18.

*Завдання 1.* Знайти власні числа та власні вектори матриці  $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

за допомогою стандартних вбудованих функцій *Math*а.

Завдання 2. Знайти власні числа та нормовані власні вектори матриці за означенням  $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

Варіант 19.

Завдання 1. Знайти власні числа та власні вектори матриці  $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

за допомогою стандартних вбудованих функцій Maxima.

Завдання 2. Знайти власні числа та нормовані власні вектори матриці за означенням  $\begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Варіант 20.

Завдання 1. Знайти власні числа та власні вектори матриці  $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

за допомогою стандартних вбудованих функцій Maxima.

Завдання 2. Знайти власні числа та нормовані власні вектори матриці за означенням  $\begin{pmatrix} 11 & -2 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$

**Зразок виконання лабораторної роботи 5**

Завдання 1. Знайти власні числа та власні вектори матриці  $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

за допомогою стандартних вбудованих функцій Maxima.

Завдання 2. Знайти власні числа та нормовані власні вектори матриці за означенням  $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

**Завдання 1. Розв'язок:**

Завантажимо пакет "eigen".

```
(%i1) load("eigen");
```

```
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.0/share/maxima/5.27.0/share/matrix/eigen.mac
```

Введемо матрицю A.

```
(%i2) A: matrix(
      [4,-2,-1],
      [-1,3,-1],
      [1,-2,2]
    );
```

```
(%o2)  $\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ 
```

Знаходимо власні числа матриці  $A$  за допомогою функції `eigenvalues`. Ця функція повертає два списки, перший з яких – це власні числа, а другий – кратності кожного з власних чисел.

```
(%i3) eigenvalues(A);
(%o3) [[1, 5, 3], [1, 1, 1]]
```

Таким чином, матриця  $A$  має власні числа 1, 5, 3, кожне кратності 1.

Знаходимо власні вектори за допомогою функції `eigenvectors`. Вона повертає два списки, з яких перший містить, в свою чергу, список власних чисел та список їх кратностей, а другий – містить власні вектори.

```
(%i4) eigenvectors(A);
(%o4) [[ [1, 5, 3], [1, 1, 1] ], [ [ [1, 1, 1] ], [ [1, -1, 1] ], [ [1, 1, -1] ] ]]
```

Таким чином, власні вектори, що відповідають власним числам 1, 5, 3 –  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,

$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ .

## Завдання 2. Розв'язок:

Введемо матрицю  $A$

```
(%i1) A: matrix(
      [3,1],
      [2,4]
    );
```

```
(%o1)  $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ 
```

Знайдемо характеристичний поліном матриці  $A$  за допомогою функції `charpoly`.

```
(%i3) chpol: charpoly(A, lambda);
(%o3) (3-lambda)(4-lambda)-2
```

Знайдемо власні числа як корені характеристичного полінома.

```
(%i5) evl: solve(chpol);
(%o5) [ lambda=5, lambda=2 ]
```

Задамо вектор-стовпчик невідомих  $x$

```
(%i7) x: matrix ([x1], [x2]);
(%o7)  $\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \end{bmatrix}$ 
```

Задамо вектор  $Ax - \lambda x$  для першого власного числа  $\lambda_1 = 5$ .

```
(%i9) v1: ev(A.x-lambda*x, evl[1]);
(%o9)  $\begin{bmatrix} x2-2 x1 \\ 2 x1-x2 \end{bmatrix}$ 
```

Утворимо перше рівняння для знаходження власного вектора.

```
(%i11) eq1: v1[1,1]=0;
(%o11) x2-2 x1=0
```

Задаємо умову нормування.

```
(%i12) eqnorm: x1^2+x2^2=1;
(%o12) x2^2+x1^2=1
```

Знайдемо власний вектор, що відповідає власному числу  $\lambda_1 = 5$ .

```
(%i13) solve([eq1,eqnorm],[x1,x2]);
(%o13) [ [ x1=-\frac{1}{\sqrt{5}}, x2=-\frac{2}{\sqrt{5}} ], [ x1=\frac{1}{\sqrt{5}}, x2=\frac{2}{\sqrt{5}} ] ]
```

Аналогічно знаходимо власний вектор, що відповідає власному числу  $\lambda_2 = 2$ .

```
(%i14) v2: ev(A.x-lambda*x, evl[2]);
(%o14)  $\begin{bmatrix} x2+x1 \\ 2 x2+2 x1 \end{bmatrix}$ 
(%i15) eq2: v2[1,1]=0;
(%o15) x2+x1=0
(%i16) solve([eq2,eqnorm],[x1,x2]);
(%o16) [ [ x1=-\frac{1}{\sqrt{2}}, x2=\frac{1}{\sqrt{2}} ], [ x1=\frac{1}{\sqrt{2}}, x2=-\frac{1}{\sqrt{2}} ] ]
```

## Лабораторна робота 6

*Тема роботи:* «Границі та похідні.»

*Мета роботи:* навчитись знаходити границі та похідні

*Завдання:*

### Варіант 1.

*Завдання 1.* Знайти границі

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^3 + 4}, \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}, \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{3x^2},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+4}{x+8} \right)^{-3x}.$$

Завдання 2. Знайти похідні функції

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x}}, \quad y = 3^{x^2 + \frac{1}{x^2}}, \quad y = \log_5^2 \sqrt{x^2 + \sqrt{x}}, \quad y = \sin^3 \frac{2x}{\sqrt{x+5}}, \quad y = \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 4}{x+1}.$$

Завдання 3. Знайти значення похідних  $y'$ ,  $y''$ ,  $y'''$ ,  $y''''$ ,  $y'''''$  функції  $y = \frac{x}{x^2 + 1}$  в точці  $x = 1$ .

### Варіант 2.

Завдання 1. Знайти границі

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 - 3x^4}{2x^3 + 3x^2 - 5}, \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 + x - 6}, \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{6x+1} - 5}, \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin(x+1)}{1 - x^2},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x+4}{3x} \right)^{-4x}.$$

Завдання 2. Знайти похідні функції

$$y = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{x+4}}{x}}, \quad y = 6^{\ln 3x + \frac{1}{\sqrt{x}}}, \quad y = \operatorname{tg}^3 \left( 3x + \frac{2}{\sqrt{x}} \right), \quad y = \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{\sqrt{x+7}}, \quad y = \arccos \frac{4x + \sqrt{x} + 2}{x+4}.$$

Завдання 3. Знайти значення похідних  $y'$ ,  $y''$ ,  $y'''$ ,  $y''''$ ,  $y'''''$  функції  $y = \sqrt[3]{x^2 + x + 1}$  в точці  $x = 0$ .

### Варіант 3.

Завдання 1. Знайти границі

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x^2+1}, \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{x-5}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x - \sin 3x}{x \sin x},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-2}{x+1} \right)^{2x-3}.$$

Завдання 2. Знайти похідні функції

$$y = \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 3\sqrt{x}}}, \quad y = e^{x^2 + \frac{1}{x\sqrt{x}}}, \quad y = \operatorname{tg}^3 \left( \frac{x}{\sqrt{x+2}} \right), \quad y = \cos^2 \frac{x}{2x^2 + 4}, \quad y = \operatorname{arctg}^2 \frac{2x}{x+2}.$$

Завдання 3. Знайти значення похідних  $y'$ ,  $y''$ ,  $y'''$ ,  $y''''$ ,  $y'''''$  функції  $y = x \cdot \sin(x^2 + x)$  в точці  $x = 0$ .

Варіант 4.

Завдання 1. Знайти границі

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{10 + x\sqrt{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^4 + 4x^2 - 5}, \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x+2}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1 - \sqrt{x}},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{3x}.$$

Завдання 2. Знайти похідні функції

$$y = \left(\frac{1}{\sqrt{x \cdot x + x}}\right)^{-3}, \quad y = 2^{x + \cos^2 x}, \quad y = \ln\left(\arccos \frac{1}{\sqrt{x}}\right), \quad y = \frac{1}{4\sqrt{5}} \ln \frac{2 + \sqrt{5} \cdot \operatorname{tg} x}{x}, \quad y = \arcsin x.$$

Завдання 3. Знайти значення похідних  $y'$ ,  $y''$ ,  $y'''$ ,  $y''''$ ,  $y'''''$  функції  $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$  в точці  $x = 1$ .

Варіант 5.

Завдання 1. Знайти границі

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 1}{3x + 7}, \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}, \quad \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x-3} - 2}{\sqrt{x+2} - 3}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x - \sin 3x}{2x^2},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-4}{2x}\right)^{-3x}.$$

Завдання 2. Знайти похідні функції

$$y = \sqrt[3]{x^2 \cdot x + x}, \quad y = e^{x^2 + \sin x}, \quad y = \ln^3\left(\frac{x}{2x-1}\right), \quad y = \sin^2(x^2 + 1), \quad y = \arccos \frac{x^2 - 3}{x + 2}$$

Завдання 3. Знайти значення похідних  $y'$ ,  $y''$ ,  $y'''$ ,  $y''''$ ,  $y'''''$  функції  $y = \ln(x^2 + x^2)$  в точці  $x = -1$ .

Варіант 6.

Завдання 1. Знайти границі

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{100x}{x^2 - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^3 - x^2 + x - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{\sin x},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+4}\right)^{3x+2}.$$

Завдання 2. Знайти похідні функції

$$y = 2x \cdot \sqrt[3]{x^2 + 4x}, \quad y = e^{x^2 + \sin x}, \quad y = \log_7 \sqrt{x^2 + 16x}, \quad y = \operatorname{tg}^2 \frac{x+1}{2\sqrt{x}}, \quad y = \arcsin^2 \frac{x^3}{4}$$

Завдання 3. Знайти значення похідних  $y'$ ,  $y''$ ,  $y'''$ ,  $y''''$ ,  $y'''''$  функції  $y = x \cdot e^{x^2}$  в точці  $x = -1$ .

#### Варіант 7.

Завдання 1. Знайти границі

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 1}{x^3 - 8x + 5}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x+1}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{\sin 3x},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{x} \right)^{-5x+1}.$$

Завдання 2. Знайти похідні функції

$$y = \frac{x}{\sqrt[3]{x+7x^2}}, \quad y = e^{x^2 + \frac{1}{x}}, \quad y = \lg^3 \left( \frac{x}{3x^2 + 2} \right), \quad y = \operatorname{ctg}^3 \left( \frac{x}{x+1} \right), \quad y = \arccos \frac{x^2}{x-1}.$$

Завдання 3. Знайти значення похідних  $y'$ ,  $y''$ ,  $y'''$ ,  $y''''$ ,  $y'''''$  функції  $y = \arcsin \sqrt{x}$  в точці  $x = 0$ .

#### Варіант 8.

Завдання 1. Знайти границі

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 5}{x^3 + 2}, \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 11x + 5}{3x^2 - 14x - 5}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{\sqrt{x^2 + 16} - 4}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos^2 2x}{x^2},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2-3x}{5-3x} \right)^x.$$

Завдання 2. Знайти похідні функції

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x}}, \quad y = 3^{x^2 + \frac{1}{x^2}}, \quad y = \log_5 \sqrt{x^2 + \sqrt{x}}, \quad y = \sin^3 \frac{2x}{\sqrt{x+5}}, \quad y = \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 4}{x+1}.$$

Завдання 3. Знайти значення похідних  $y'$ ,  $y''$ ,  $y'''$ ,  $y''''$ ,  $y'''''$  функції  $y = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$  в точці  $x = 0$ .

#### Варіант 9.

Завдання 1. Знайти границі

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 12x + 6}{3x^2 - 2x}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{1-\sqrt{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+10} - \sqrt{4-x}}{2x^2 - x - 21}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 5x}{2x^2},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x}{1+2x} \right)^{-4x}.$$

Завдання 2. Знайти похідні функції

$$y = \frac{3x}{\sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x}}}, \quad y = e^{-x + \operatorname{tg} x}, \quad y = \sin^4 \left( \frac{x}{\sqrt{x+1}} \right), \quad y = \frac{\cos^2 \sqrt{x-3x}}{1 + \ln x}, \quad y = x^{1-\sqrt[3]{x-1}}.$$



Завдання 3. Знайти значення похідних  $y'$ ,  $y''$ ,  $y'''$ ,  $y''''$ ,  $y'''''$  функції  $y = \frac{\sqrt{x-1}}{x}$  в точці  $x = 1$ .

Варіант 10.

Завдання 1. Знайти границі

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n - \sqrt{n^2 - 2n} \right), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{\sin^2 x}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[3]{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos \pi x}{1 - \cos \pi x},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos 2x \frac{1}{x^2}.$$

Завдання 2. Знайти похідні функції

$$y = \frac{x-1}{\sqrt{x+3}\sqrt{x}}, \quad y = e^{-x^2 + \operatorname{tg} x}, \quad y = \cos^3 \left( \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} \right), \quad y = \frac{\cos^3 x - x}{1+x}, \quad y = \sin x^{1-\sqrt[3]{x}}.$$

Завдання 3. Знайти значення похідних  $y'$ ,  $y''$ ,  $y'''$ ,  $y''''$ ,  $y'''''$  функції  $y = \sin \left( \frac{1}{x} \right)$  в точці  $x = 1$ .

Варіант 11.

Завдання 1. Знайти границі

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x^2 - 1}{6x^2 - 6x}, \quad \lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{4x}{x^2 - 9} - \frac{2}{x-3} \right), \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{2x^2},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{x-3} \right)^{x-5}.$$

Завдання 2. Знайти похідні функції

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{2x+x^2+3}}, \quad y = e^{\frac{x}{\sqrt{x+4}}}, \quad y = x \cdot \frac{\operatorname{arctg} x}{\arcsin x} - 1, \quad y = \sin^3 \sqrt{x+4}, \quad y = \operatorname{arctg}^2 \frac{\sqrt{x}}{x+4x^2}.$$

Завдання 3. Знайти значення похідних  $y'$ ,  $y''$ ,  $y'''$ ,  $y''''$ ,  $y'''''$  функції  $y = \sqrt[3]{\sin x + x}$  в точці  $x = 0.5$ .

Варіант 12.

Завдання 1. Знайти границі

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n - \sqrt[3]{n^3 + n^2} \right), \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - x - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt[3]{16x} - 4}{\sqrt{4+x} - \sqrt{2x}}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{\sin \pi x},$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( e^{x-1} - 1 \right) \frac{3x-1}{x-1}.$$

Завдання 2. Знайти похідні функції

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x}}, \quad y = 3^{x^2 + \frac{1}{x^2}}, \quad y = \log_5^2 \left( 4 + \sqrt{x} \right), \quad y = \sin^3 \frac{2x}{\sqrt{x+5}}, \quad y = \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 4}{x+1}.$$

Завдання 3. Знайти значення похідних  $y'$ ,  $y''$ ,  $y'''$ ,  $y''''$ ,  $y'''''$  функції  $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}-1}$  в точці  $x = 0$ .

Варіант 13.

Завдання 1. Знайти границі

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{x^2+1}, \quad \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{7}}{2x-14}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{x \sin x},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^{2x-3}.$$

Завдання 2. Знайти похідні функції

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2+x-1}}, \quad y = 3^{x^2 - \frac{1}{x^3}}, \quad y = \log_5^3(x^2 + \sqrt{x}), \quad y = \sin^5 \frac{x}{\sqrt{x+5}},$$

$$y = \operatorname{arctg} \frac{x^2 - x}{x+1}.$$

Завдання 3. Знайти значення похідних  $y'$ ,  $y''$ ,  $y'''$ ,  $y''''$ ,  $y'''''$  функції  $y = \sqrt[3]{x + \frac{1}{x}}$  в точці  $x = 1$ .

Варіант 14.

Завдання 1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n - \sqrt{n^2 + n} \right), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{1 - \cos x}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[3]{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos \pi x}{1 - \cos \pi x},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x - \sin 2x \stackrel{= \frac{1}{x^2}}{=}.$$

Завдання 2. Знайти похідні функції

$$y = \sqrt[3]{x^2 \cdot (x+1)}, \quad y = e^{x^2 + \sin x}, \quad y = \ln^3 \left( \frac{x}{2x-1} \right), \quad y = \sin^2(x^2 + 1), \quad y = \arccos \frac{x^2 - 3}{x+2}$$

Завдання 3. Знайти значення похідних  $y'$ ,  $y''$ ,  $y'''$ ,  $y''''$ ,  $y'''''$  функції  $y = e^{x^2-x}$  в точці  $x = 0$ .

Варіант 15.

Завдання 1. Найдите пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n - \sqrt{n^2 - 3n + 1} \right), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{3^x - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt[3]{x}}{1 - x}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \sin \left( \frac{3\pi}{2} x \right)}{1 - \cos \pi x},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{x+1} - 1 \stackrel{= \frac{1}{x^2}}{=}.$$

Завдання 2. Знайти похідні функції

$$y = \sqrt[3]{x \cdot \ln x}, \quad y = e^{x^2 + \sin x}, \quad y = \ln^3 \left( \frac{x^2}{2x-1} \right), \quad y = \sin^2 \sqrt{x^2 + x - 1},$$

$$y = \operatorname{arctg} \frac{x^2 - x - 1}{x + 2}$$

Завдання 3. Знайти значення похідних  $y', y'', y''', y''''$  функції  $y = \operatorname{arctg} x$  в точці  $x = 1$ .

### Варіант 16.

Завдання 1. Знайти границі

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{5 + 4x - x^2}{x^2 - 16x + 55}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^{3x-2}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 4x + 1}{2x^2 + 3x + 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos \pi x}{1 - \cos \pi x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos 2x = \frac{1}{x^2}.$$

Завдання 2. Знайти похідні функції

$$y = \sqrt[3]{x^4 + 5x} - \sqrt{x-1}; \quad y = \frac{1 + \operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg} 2x}; \quad y = x^{2/x}; \quad y = \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x}; \quad x \sin 2y - y \cos x = 0.$$

Завдання 3. Знайти значення похідних  $y', y'', y''', y''''$  функції  $y = \cos \left( \frac{1}{x} \right)$  в точці  $x = 1$ .

### Варіант 17.

Завдання 1. Знайти границі

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x} - \sqrt{6-x}}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-5}{x+3} \right)^{-3x+5}; \quad \lim_{x \rightarrow -4} \frac{3x^2 + 19x + 28}{4 - 3x - x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{2x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{x-3} \right)^{x-5}.$$

Завдання 2. Знайти похідні функції

$$y = \frac{3x}{\sqrt[3]{2+x}} - 6\sqrt{2+x}; \quad y = \sin^2 5x; \quad y = x^{e^x}; \quad y = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}; \quad e^{2xy} - x^2 + y^2 = 0.$$

Завдання 3. Знайти значення похідних  $y', y'', y''', y''''$  функції  $y = \sqrt[3]{x + \cos 3x}$  в точці  $x = 0.5$ .

### Варіант 18.

Завдання 1. Знайти границі

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin 2x \cdot \operatorname{ctg} 6x; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x-2} \right)^{5x-1}; \quad \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt{x-7} - \sqrt{9-x}}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\sin \pi x}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left( e^{x-1} - 1 \right)^{\frac{3x-1}{x-1}}.$$

Завдання 2. Знайти похідні функції

$$y = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}; \quad y = e^{1+\ln^2 x}; \quad y = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}; \quad y = x^{\arcsin x}; \quad y \sin x + \cos x - y = \cos y.$$

Завдання 3. Знайти значення похідних  $y', y'', y''', y''''$  функції  $y = \frac{1}{\sqrt[5]{2x-1} + 3}$  в точці  $x = 0$ .

### Варіант 19.

Завдання 1. Знайти границі

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+7}-\sqrt{9-x}}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-2}{x+2} \right)^{3x-2}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+2} - \sqrt{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{x \sin x},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^{2x-3}.$$

Завдання 2. Знайти похідні функції

$$y = x^{-1/3} + 5x^3 + 2x^{-3/4}; \quad y = \cos \ln^2 x; \quad y = 2x^{\sqrt{x}}; \quad y = e^{\sin x} - 1; \quad \cos y = \frac{y}{x}.$$

Завдання 3. Знайти значення похідних  $y'$ ,  $y''$ ,  $y'''$ ,  $y''''$ ,  $y'''''$  функції  $y = \sqrt[3]{3x + \frac{1}{2x}}$  в точці  $x = 1$ .

### Варіант 20.

Завдання 1. Знайти границі

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 11x + 5}{3x^2 - 14x - 5}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-3}{x+1} \right)^{-2x+1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 2}{10 - 2x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos \pi x}{1 - \cos \pi x},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin 2x}{x^2}.$$

Завдання 2. Знайти похідні функції

$$y = x^3 \sqrt{\frac{2}{1+x}}; \quad y = \frac{1 + \sin 3x}{1 - \sin 3x}; \quad y = 2^{\frac{1-x}{1+x}}; \quad y = \ln x^x; \quad xy + \ln y - 2 \ln x = 0.$$

Завдання 3. Знайти значення похідних  $y'$ ,  $y''$ ,  $y'''$ ,  $y''''$ ,  $y'''''$  функції  $y = e^{x^3-3x}$  в точці  $x = 0$ .

### Зразок виконання лабораторної роботи 6

Завдання 1. Знайти границі: 1)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x+6} - 2}{\sqrt{x-1} - 1}$ , 2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-5}{x+4} \right)^{x-2}$ , 3)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$ ,

4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$ , 5)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}$ .

Завдання 2. Знайти похідні функції: 1)  $y = \ln \left( \frac{x}{x^2 - 1} \right)^2$ , 2)  $y = x^3 \operatorname{arctg} x$ , 3)  $y = \left( \frac{x^2 + 2x}{3 + x^3} \right)^{6x}$ ,

4)  $x \cos 3y - y \sin x = 0$ , 5)  $y = \frac{\sin 3x - \ln x}{\sqrt{x} + \cos x}$

Завдання 3. Знайти значення похідних  $y'$ ,  $y''$ ,  $y'''$ ,  $y''''$ ,  $y'''''$ , ...  $y^{10}$  функції  $y = \operatorname{arctg} x^2 + \sqrt{x}$  в точці  $x = 1$ .

### Завдання 1. Розв'язок:

1) Введемо вираз, границю якого потрібно знайти.

```
(%i1) f: ((x+6)^(1/3)-2)/(sqrt(x-1)-1);
```

```
(%o1) 
$$\frac{(x+6)^{1/3}-2}{\sqrt{x-1}-1}$$

```

Знайдемо границю за допомогою функції limit.

```
(%i2) limit(f, x, 2);
```

```
(%o2) 
$$\frac{1}{6}$$

```

2) Введемо вираз, границю якого потрібно знайти та знайдемо границю за допомогою функції

limit (inf - означає, що  $x \rightarrow \infty$ )

```
(%i5) f: ((x-5)/(x+4))^(x-2);
```

```
(%o5) 
$$\left(\frac{x-5}{x+4}\right)^{x-2}$$

```

```
(%i6) limit(f, x, inf);
```

```
(%o6) %e-9
```

3) Введемо вираз, границю якого потрібно знайти та знайдемо границю за допомогою функції limit

```
(%i2) f: (x^2-9)/(x^2-3*x);
```

```
(%o2) 
$$\frac{x^2-9}{x^2-3x}$$

```

```
(%i3) limit(f, x, 3);
```

```
(%o3) 2
```

4) Аналогічно 1)-3):

```
(%i4) f: (tan(x)-sin(x))/x^3;
```

```
(%o4) 
$$\frac{\tan(x)-\sin(x)}{x^3}$$

```

```
(%i5) limit(f, x, 0);
```

```
(%o5) 
$$\frac{1}{2}$$

```

5) Аналогічно 1)-4):

```
(%i10) f: (x+1)^(1/3)-x^(1/3);
```

```
(%o10) 
$$(x+1)^{1/3}-x^{1/3}$$

```

```
(%i11) limit(f, x, inf);
```

```
(%o11) 0
```

## Завдання 2. Розв'язок:

1). Введемо функцію, похідну якої потрібно знайти. Слід зауважити, що для позначення натурального логарифма в Maxima використовується функція log.

```
(%i1) f: log(x/(x^2-1))^2;
```

```
(%o1) log\left(\frac{x}{x^2-1}\right)^2
```

Знайдемо похідну

```
(%i2) diff(f, x);
```

```
(%o2) \frac{2(x^2-1)\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{2x^2}{(x^2-1)^2}\right)\log\left(\frac{x}{x^2-1}\right)}{x}
```

Спростимо одержаний вираз.

```
(%i3) ratsimp(%);
```

```
(%o3) \frac{(2x^2+2)\log\left(\frac{x}{x^2-1}\right)}{x^3-x}
```

2). Введемо функцію, похідну якої потрібно знайти. Слід зауважити, що для позначення  $\arctg x$  в Maxima використовується функція  $\operatorname{atan}(x)$

```
(%i1) f:x^3*atan(x);
```

```
(%o1) x^3 atan(x)
```

Знайдемо похідну

```
(%i2) diff(f, x);
```

```
(%o2) 3x^2 atan(x) + \frac{x^3}{x^2+1}
```

3). Введемо функцію, похідну якої потрібно знайти та знайдемо похідну, спростимо одержаний результат:

```
(%i18) f: ((x^2+2*x)/(3+x^3))^(6*x);
```

```
(%o18) \left(\frac{x^2+2x}{x^3+3}\right)^{6x}
```

```
(%i12) diff(f, x);
```

```
(%o12) \left(\frac{x^2+2x}{x^3+3}\right)^{6x} \left( 6 \log\left(\frac{x^2+2x}{x^3+3}\right) + \frac{6x(x^3+3)\left(\frac{2x+2}{x^3+3} - \frac{3x^2(x^2+2x)}{(x^3+3)^2}\right)}{x^2+2x} \right)
```

```
(%i13) ratsimp(%);
```

```
(%o13) \frac{(6x^4+12x^3+18x+36)\left(\frac{x^2+2x}{x^3+3}\right)^{6x} \log\left(\frac{x^2+2x}{x^3+3}\right) + (-6x^4-24x^3+36x+36)\left(\frac{x^2+2x}{x^3+3}\right)^{6x}}{x^4+2x^3+3x+6}
```

4) Задамо рівняння, що неявно визначає функцію.

```
(%i1) eq: x*cos(3*y)-y*sin(x)=0;
(%o1) x cos(3 y)-sin(x) y=0
```

Вкажемо, що  $y$  залежить від  $x$ .

```
(%i2) depends(y, x);
(%o2) [y(x)]
```

Продиференціюємо обидві частини рівняння по  $x$ .

```
(%i3) drv: diff(eq, x);
(%o3) -3 x (d/d x y) sin(3 y)+cos(3 y)-sin(x) (d/d x y)-cos(x) y=0
```

Знайдемо похідну, розв'язавши останній вираз відносно  $\frac{dy}{dx}$ .

```
(%i4) solve(drv, 'diff(y, x));
(%o4) [d/d x y = (cos(3 y)-cos(x) y) / (3 x sin(3 y)+sin(x))]
```

5) Аналогічно 1)-3):

```
(%i1) f: ((sin(3*x)-log(x))/(sqrt(x)+cos(x)));
(%o1) (sin(3 x)-log(x)) / (cos(x)+sqrt(x))
(%i10) diff(f, x);
(%o10) (3 cos(3 x)-1/x) * (1/(2*sqrt(x))-sin(x)) * (sin(3 x)-log(x)) / (cos(x)+sqrt(x))^2
```

### Завдання 3. Розв'язок:

Задамо функцію для диференціювання та точку, в якій необхідно обчислити похідні.

```
(%i1) f: atan(x^2+sqrt(x));
(%o1) atan(x^2+sqrt(x))
(%i2) x0:1;
(%o2) 1
```

За допомогою циклу `for` знаходимо значення похідних до порядку 10 в точці  $x_0 = 1$ . Опція `numer` вмикає чисельні розрахунки.

```

(%i4) for i:1 thru 10 do (
      g:diff(f, x, i),
      display(ev(g, numer, x=x0))
    );
ev(g, numer, x=x0)=0.5
ev(g, numer, x=x0)=-0.65
ev(g, numer, x=x0)=0.725
ev(g, numer, x=x0)=0.2925
ev(g, numer, x=x0)=-6.431249999999999
ev(g, numer, x=x0)=23.814374999999999
ev(g, numer, x=x0)=29.005312500000097
ev(g, numer, x=x0)=-1275.49996874999
ev(g, numer, x=x0)=12678.99904687621
ev(g, numer, x=x0)=-82500.6962390632
(%o4) done

```

## Лабораторна робота 7

*Тема роботи: «Графіки функцій.»*

*Мета роботи: навчитись будувати графіки функції*

*Завдання:*

### Варіант 1.

*Завдання 1.* Вивести на екран 20 значень функції  $y = \frac{x^2 \cdot 2^x}{1 + 2x}$

на проміжку  $1 \leq x \leq 5$  з кроком 0.2.

*Завдання 2.* Побудувати графік функції  $y = \frac{x}{\cos x + 2}$  на проміжках

$-3 \leq x \leq 3, -3 \leq y \leq 3$ .

*Завдання 3.* Побудувати графік функції, заданої параметрично  $\begin{cases} x = t + \cos t \\ y = 1 - \sin 2t \end{cases}$  на

проміжку зміни параметру  $0 \leq t \leq 5$ .

*Завдання 4.* Побудувати графік функції, заданої рівнянням в полярних координатах  $\rho = \cos 3\varphi + 2 \sin \varphi$ .

### Варіант 2.

*Завдання 1.* Вивести на екран 20 значень функції  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

на проміжку  $1 \leq x \leq 5$  з кроком 0.2.

*Завдання 2.* Побудувати графік функції  $y = \sqrt[3]{x} \cdot \sin x$  на проміжках

$-8 \leq x \leq 8, -3 \leq y \leq 3$ .

*Завдання 3.* Побудувати графік функції, заданої параметрично  $\begin{cases} x = t + \cos t \\ y = \sin(2t) \end{cases}$  на

проміжку зміни параметру  $0 \leq t \leq 5$ .



*Завдання 4.* Побудувати графік функції, заданої рівнянням в полярних координатах  
 $\rho = 2 \cos \varphi + \sin 2\varphi$ .

Варіант 3.

*Завдання 1.* Вивести на екран 20 значень функції  $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x-2}}{x+1}$

на проміжку  $0 \leq x \leq 5$  з кроком 0.25.

*Завдання 2.* Побудувати графік функції  $y = x \cdot \sin x^2$  на проміжках  
 $-2 \leq x \leq 2$ ,  $-5 \leq y \leq 5$ .

*Завдання 3.* Побудувати графік функції, заданої параметрично  $\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = 1 - \cos(t) \end{cases}$  на

проміжку зміни параметру  $0 \leq t \leq 2$ .

*Завдання 4.* Побудувати графік функції, заданої рівнянням в полярних координатах  
 $\rho = \cos \varphi + 2 \sin \varphi$ .

Варіант 4.

*Завдання 1.* Вивести на екран 20 значень функції  $f(x) = \sqrt{\sin x + 1} - x$   
на проміжку  $0 \leq x \leq 2$  з кроком 0.1.

*Завдання 2.* Побудувати графік функції  $y = x^2 \cdot e^{-x}$  на проміжках  
 $-2 \leq x \leq 2$ ,  $-5 \leq y \leq 5$ .

*Завдання 3.* Побудувати графік функції, заданої параметрично  $\begin{cases} x = t - \sin^2 t \\ y = \cos(2t) \end{cases}$  на

проміжку зміни параметру  $0 \leq t \leq 4$ .

*Завдання 4.* Побудувати графік функції, заданої рівнянням в полярних координатах  
 $\rho = \cos 3\varphi + 2 \sin \varphi$ .

Варіант 5.

*Завдання 1.* Вивести на екран 20 значень функції  $f(x) = \sqrt[3]{2-x}$   
на проміжку  $0 \leq x \leq 10$  з кроком 0.5.

*Завдання 2.* Побудувати графік функції  $y = x^2 \cdot \sin 2x$  на проміжках  
 $-3 \leq x \leq 2$ ,  $-5 \leq y \leq 5$ .

*Завдання 3.* Побудувати графік функції, заданої параметрично  $\begin{cases} x = t + \sin t \\ y = \cos(2t) \end{cases}$  на

проміжку зміни параметру  $0 \leq t \leq 5$ .

*Завдання 4.* Побудувати графік функції, заданої рівнянням в полярних координатах  
 $\rho = \cos \varphi + 2 \sin 2\varphi$ .

Варіант 6.

*Завдання 1.* Вивести на екран 20 значень функції  $f(x) = \ln x - \sqrt{x}$   
на проміжку  $1 \leq x \leq 6$  з кроком 0.25.

*Завдання 2.* Побудувати графік функції  $y = \ln(x^2 + 1) \cdot \sin x$  на проміжках  
 $-3 \leq x \leq 3$ ,  $-3 \leq y \leq 3$ .

Завдання 3. Побудувати графік функції, заданої параметрично  $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = \sin(2t) \end{cases}$  на

проміжку зміни параметру  $0 \leq t \leq 5$ .

Завдання 4. Побудувати графік функції, заданої рівнянням в полярних координатах  $\rho = \cos 2\varphi + 2 \sin 3\varphi$ .

#### Варіант 7.

Завдання 1. Вивести на екран 20 значень функції  $f(x) = \sin\left(\sqrt{x} - \frac{\pi}{5}\right)$

на проміжку  $1 \leq x \leq 9$  з кроком 0.4.

Завдання 2. Побудувати графік функції  $y = x^2 \cdot \sin 3x$  на проміжках  $-2 \leq x \leq 2$ ,  $-5 \leq y \leq 5$ .

Завдання 3. Побудувати графік функції, заданої параметрично  $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 3t - t \end{cases}$  на

проміжку зміни параметру  $-2 \leq t \leq 3$ .

Завдання 4. Побудувати графік функції, заданої рівнянням в полярних координатах  $\rho = \varphi \cdot \cos \varphi + \sin 2\varphi$ .

#### Варіант 8.

Завдання 1. Вивести на екран 20 значень функції  $f(x) = \sin \sqrt[3]{-x}$  на проміжку  $-2 \leq x \leq 3$  з кроком 0.25.

Завдання 2. Побудувати графік функції  $y = x \cdot \sin^2 x$  на проміжках  $-4 \leq x \leq 4$ ,  $-4 \leq y \leq 4$ .

Завдання 3. Побудувати графік функції, заданої параметрично  $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = t - \cos(2t) \end{cases}$  на

проміжку зміни параметру  $-1 \leq t \leq 1$ .

Завдання 4. Побудувати графік функції, заданої рівнянням в полярних координатах  $\rho = \cos \varphi + \varphi \cdot \sin 2\varphi$ .

#### Варіант 9.

Завдання 1. Вивести на екран 20 значень функції  $f(x) = \frac{x}{1 + \sqrt{x}}$

на проміжку  $0 \leq x \leq 2$  з кроком 0.1.

Завдання 2. Побудувати графік функції  $y = \sqrt[3]{-x} \cdot \sin 3x$  на проміжках  $-5 \leq x \leq 5$ ,  $-3 \leq y \leq 3$ .

Завдання 3. Побудувати графік функції, заданої параметрично  $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = \sqrt[3]{t} \cdot \cos t \end{cases}$  на

проміжку зміни параметру  $0 \leq t \leq 6$ .

Завдання 4. Побудувати графік функції, заданої рівнянням в полярних координатах  $\rho = 2 \cos \varphi + \varphi \cdot \sin \varphi$ .

#### Варіант 10.

Завдання 1. Вивести на екран 20 значень функції  $f(x) = \frac{x}{\arctg x}$

на проміжку  $1 \leq x \leq 11$  з кроком 0.5.

*Завдання 2.* Побудувати графік функції  $y = x \cdot \sqrt[3]{\sin 2x}$  на проміжках  $0 \leq x \leq 4$ ,  $-2 \leq y \leq 2$ .

*Завдання 3.* Побудувати графік функції, заданої параметрично  $\begin{cases} x = t + \sqrt{t} \\ y = \cos(2t) \end{cases}$  на

проміжку зміни параметру  $0 \leq t \leq 5$ .

*Завдання 4.* Побудувати графік функції, заданої рівнянням в полярних координатах  $\rho = \sin \varphi + 2 \sin 3\varphi$ .

#### Варіант 11.

*Завдання 1.* Вивести на екран 20 значень функції  $f(x) = \arcsin x - x$  на проміжку  $-1 \leq x \leq 1$  з кроком 0.1.

*Завдання 2.* Побудувати графік функції  $y = x^3 \cdot \sin x - x^2 - 2$  на проміжках  $-2 \leq x \leq 2$ ,  $-10 \leq y \leq 10$ .

*Завдання 3.* Побудувати графік функції, заданої параметрично  $\begin{cases} x = \sqrt{t} + \sin t \\ y = t + \cos t \end{cases}$  на

проміжку зміни параметру  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

*Завдання 4.* Побудувати графік функції, заданої рівнянням в полярних координатах  $\rho = \frac{2}{3 - \sin 2\varphi}$ .

#### Варіант 12.

*Завдання 1.* Вивести на екран 20 значень функції  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$

на проміжку  $-4 \leq x \leq 0$  з кроком 0.2.

*Завдання 2.* Побудувати графік функції  $y = x^2 \cdot \sin x + x \cdot \cos x$  на проміжках  $-2 \leq x \leq 2$ ,  $-6 \leq y \leq 6$ .

*Завдання 3.* Побудувати графік функції, заданої параметрично  $\begin{cases} x = t \cdot \sin 2t \\ y = t - \cos t \end{cases}$  на

проміжку зміни параметру  $0 \leq t \leq 5$ .

*Завдання 4.* Побудувати графік функції, заданої рівнянням в полярних координатах  $\rho = \cos 3\varphi + \sin 2\varphi$ .

#### Варіант 13.

*Завдання 1.* Вивести на екран 20 значень функції  $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2 - x}}{1 + x}$

на проміжку  $0 \leq x \leq 10$  з кроком 0.5.

*Завдання 2.* Побудувати графік функції  $y = \left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot \sin x$  на проміжках  $0 \leq x \leq 5$ ,  $-6 \leq y \leq 6$ .

*Завдання 3.* Побудувати графік функції, заданої параметрично  $\begin{cases} x = t + t^2 \\ y = \sin \left(t - \frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$  на

проміжку зміни параметру  $-4 \leq t \leq 1$ .

*Завдання 4.* Побудувати графік функції, заданої рівнянням в полярних координатах  
 $\rho = \cos \varphi + \varphi \cdot \cos 2\varphi$ .

Варіант 14.

*Завдання 1.* Вивести на екран 20 значень функції  $f(x) = \ln \sqrt{x}$  на проміжку  $1 \leq x \leq 16$  з кроком 0.75.

*Завдання 2.* Побудувати графік функції  $y = x^2 \cdot \cos x$  на проміжках  $-2 \leq x \leq 2$ ,  $-5 \leq y \leq 5$ .

*Завдання 3.* Побудувати графік функції, заданої параметрично  $\begin{cases} x = \sin t \\ y = 2t - \cos t \end{cases}$  на проміжку зміни параметру  $0 \leq t \leq 5$ .

*Завдання 4.* Побудувати графік функції, заданої рівнянням в полярних координатах  
 $\rho = \cos 2\varphi + 2 \sin \varphi + \varphi$ .

Варіант 15.

*Завдання 1.* Вивести на екран 20 значень функції  $f(x) = e^{\sqrt{x}}$  на проміжку  $0 \leq x \leq 5$  з кроком 0.25.

*Завдання 2.* Побудувати графік функції  $y = \frac{\sin x}{x+1}$  на проміжках  $0 \leq x \leq 4$ ,  $-2 \leq y \leq 2$ .

*Завдання 3.* Побудувати графік функції, заданої параметрично  $\begin{cases} x = t + e^{-t} \\ y = \cos(t) \end{cases}$  на проміжку зміни параметру  $0 \leq t \leq 5$ .

*Завдання 4.* Побудувати графік функції, заданої рівнянням в полярних координатах  
 $\rho = \cos \varphi + \varphi + 1$ .

Варіант 16.

*Завдання 1.* Вивести на екран 20 значень функції  $f(x) = \cos \sqrt[3]{-x}$  на проміжку  $-2 \leq x \leq 3$  з кроком 0.25.

*Завдання 2.* Побудувати графік функції  $y = x \cdot \sin^2 x$  на проміжках  $-2 \leq x \leq 2$ ,  $-2 \leq y \leq 2$ .

*Завдання 3.* Побудувати графік функції, заданої параметрично  $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = t - \cos(2t) \end{cases}$  на проміжку зміни параметру  $-1 \leq t \leq 1$ .

*Завдання 4.* Побудувати графік функції, заданої рівнянням в полярних координатах  
 $\rho = \cos \varphi + \varphi + \sin 2\varphi$ .

Варіант 17.

*Завдання 1.* Вивести на екран 20 значень функції  $f(x) = \sqrt[3]{5-2x}$  на проміжку  $2.5 \leq x \leq 10$  з кроком 0.5.

*Завдання 2.* Побудувати графік функції  $y = x^2 \cdot \cos 2x$  на проміжках  $-3 \leq x \leq 2$ ,  $-5 \leq y \leq 5$ .

*Завдання 3.* Побудувати графік функції, заданої параметрично  $\begin{cases} x = t + \sin t \\ y = \cos(2t) \end{cases}$  на проміжку зміни параметру  $0 \leq t \leq 5$ .

*Завдання 4.* Побудувати графік функції, заданої рівнянням в полярних координатах  $\rho = \cos \varphi + 2 \sin 2\varphi + 5$ .

**Варіант 18.**

*Завдання 1.* Вивести на екран 20 значень функції  $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2 - 1}}{1 + x}$

на проміжку  $0 \leq x \leq 10$  з кроком 0.5.

*Завдання 2.* Побудувати графік функції  $y = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \cdot \sin x$  на проміжках

$0 \leq x \leq 5, -6 \leq y \leq 6$ .

*Завдання 3.* Побудувати графік функції, заданої параметрично  $\begin{cases} x = t + t^2 \\ y = \sin t - \frac{\pi}{4} \end{cases}$  на

проміжку зміни параметру  $-4 \leq t \leq 1$ .

*Завдання 4.* Побудувати графік функції, заданої рівнянням в полярних координатах  $\rho = \cos \varphi + \varphi + \cos 2\varphi$ .

**Варіант 19.**

*Завдання 1.* Вивести на екран 20 значень функції  $f(x) = 2 \ln x - 3\sqrt{x}$

на проміжку  $6 \leq x \leq 16$  з кроком 0.5.

*Завдання 2.* Побудувати графік функції  $y = \ln(x^2 + 1) \cdot \sin x$  на проміжках

$-3 \leq x \leq 3, -3 \leq y \leq 3$ .

*Завдання 3.* Побудувати графік функції, заданої параметрично  $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = \sin(2t) \end{cases}$  на

проміжку зміни параметру  $0 \leq t \leq 5$ .

*Завдання 4.* Побудувати графік функції, заданої рівнянням в полярних координатах  $\rho = \cos 2\varphi + 2 \sin 5\varphi$ .

**Варіант 20.**

*Завдання 1.* Вивести на екран 20 значень функції  $f(x) = \arccos x - x$

на проміжку  $-1 \leq x \leq 1$  з кроком 0.1.

*Завдання 2.* Побудувати графік функції  $y = x^3 \cdot \cos x - x^2 - 2$  на проміжках

$-2 \leq x \leq 2, -10 \leq y \leq 10$ .

*Завдання 3.* Побудувати графік функції, заданої параметрично  $\begin{cases} x = \sqrt{t} + \sin t \\ y = t + \cos t \end{cases}$  на

проміжку зміни параметру  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

*Завдання 4.* Побудувати графік функції, заданої рівнянням в полярних координатах

$$\rho = \frac{2}{3 - \cos 2\varphi}.$$

**Зразок виконання лабораторної роботи 7**

*Завдання 1.* Вивести на екран 20 значень функції  $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{1 + x}$  на проміжку  $0 \leq x \leq 5$  з кроком 0,25.

**Завдання 2.** Побудувати графік функції  $y = x^2 \sin x$  на проміжках  $-2 \leq x \leq 2$ ,  $-5 \leq y \leq 5$ .

**Завдання 3.** Побудувати графік функції, заданої параметрично  $\begin{cases} x = t + \sin t \\ y = \cos 2t \end{cases}$  на проміжку зміни параметру  $0 \leq t \leq 5$ .

**Завдання 4.** Побудувати графік функції, заданої рівнянням в полярних координатах  $\rho = \cos \varphi + 2 \sin 2\varphi$ .

### Завдання 1. Розв'язок:

**Завдання 1.** Вивести на екран 20 значень функції  $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x}$  на проміжку  $0 \leq x \leq 5$  з кроком 0,25.

Задаємо функцію  $f(x)$ .

```
(%i1) f(x):=x^(1/3)/(1+x);
```

```
(%o1) f(x):= \frac{x^{1/3}}{1+x}
```

Задаємо кінці проміжку на величину кроку.

```
(%i2) a: 0; b: 5; h: 0.25;
```

```
(%o2) 0
```

```
(%o3) 5
```

```
(%o4) 0.25
```

Утворюємо список точок, у яких має бути обчислена функція.

```
(%i5) xx: makelist(i,i,a,b,h);
```

```
(%o5) [0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0, 1.25, 1.5, 1.75, 2.0, 2.25, 2.5, 2.75, 3.0, 3.25, 3.5, 3.75, 4.0, 4.25, 4.5, 4.75, 5.0]
```

Обчислюємо значення функції.

```
(%i6) f(xx);
```

```
(%o6) [0, 0.50396841995795, 0.5291336839894, 0.51917731223775, 0.5, 0.47876326445153, 0.45788569702133, 0.4382076843955, 0.41997368329829, 0.40319098372445, 0.38777394522784, 0.37360524408738, 0.36056239257685, 0.3485289492244, 0.33739877465285, 0.32707710588988, 0.31748021039364, 0.30853445726452, 0.30017520444497, 0.29234568754774, 0.28499599111278]
```

### Завдання 2. Розв'язок:

**Завдання 2.** Побудувати графік функції  $y = x^2 \sin x$  на проміжках  $-2 \leq x \leq 2$ ,  $-5 \leq y \leq 5$ .

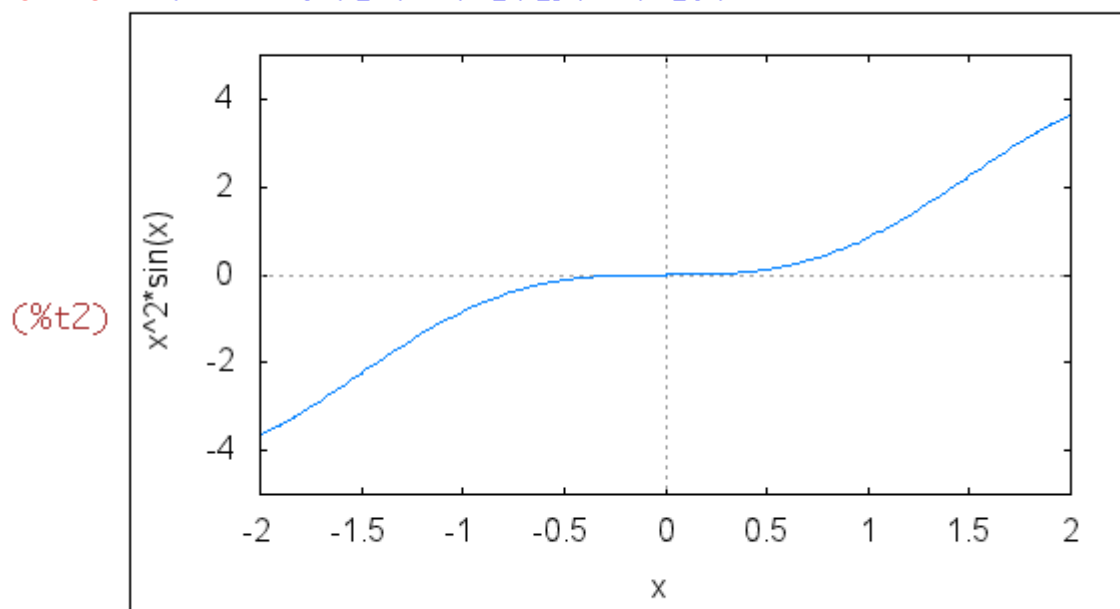
Задаємо функцію

```
(%i1) f: x^2*sin(x);
```

```
(%o1) x2 sin(x)
```

Будуємо графік, вказуючи відповідні проміжки для залежної та незалежної змінних як аргументи.

```
(%i2) wxplot2d(f,[x,-2,2],[y,-5,5]);
```



### Завдання 3. Розв'язок:

**Завдання 3.** Побудувати графік функції, заданої параметрично  $\begin{cases} x = t + \sin t \\ y = \cos 2t \end{cases}$  на проміжку зміни параметру  $0 \leq t \leq 5$ .

Задаємо параметричні вирази для  $x$  та  $y$ :

```
(%i1) x: t+sin(t);
```

```
      y: cos(2*t);
```

```
(%o1) sin(t)+t
```

```
(%o2) cos(2 t)
```

Задаємо кінці проміжку для параметра.

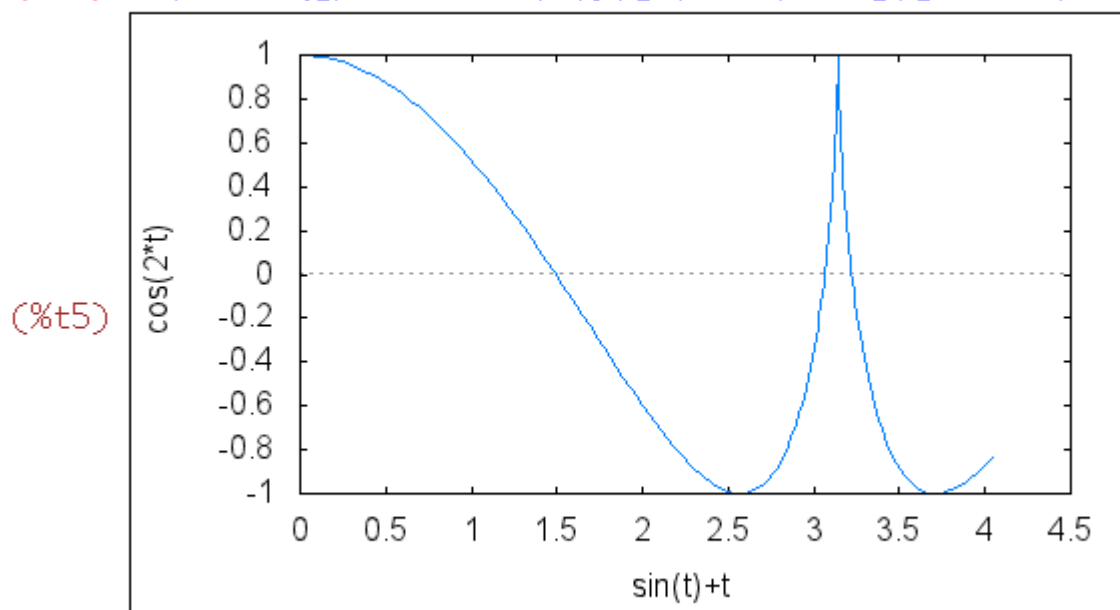
```
(%i3) tmin: 0; tmax: 5;
```

```
(%o3) 0
```

```
(%o4) 5
```

Будуємо графік, вказуючи як аргументи кінці проміжку, в якому змінюється параметр, а також кількість точок графіка (`nticks`).

```
(%i5) wxplot2d([parametric,x,y,[t,tmin,tmax],[nticks,200]]);
```



#### Завдання 4. Розв'язок:

**Завдання 4.** Побудувати графік функції, заданої рівнянням в полярних координатах  $\rho = \cos \varphi + 2 \sin 2\varphi$ .

Завантажуємо пакет draw.

```
(%i1) load(draw)$
```

Задаємо рівняння функції в полярних координатах

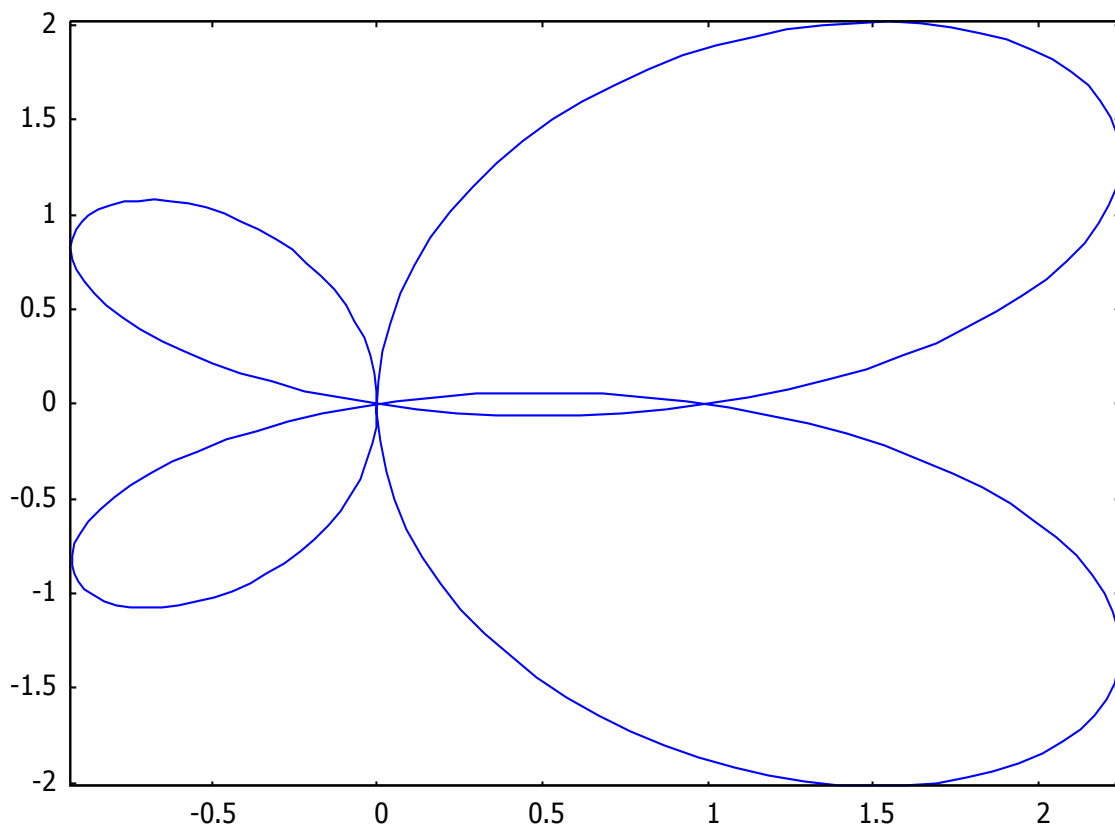
```
(%i2) rho: cos(phi)+2*sin(2*phi);
```

```
(%o2) 2 sin(2 phi)+cos(phi)
```

Будуємо графік, вказуючи як аргументи кількість точок (`nticks = 200`) та інтервал зміни параметра  $\varphi$  (`phi`) від 0 до  $2\pi$  (`2*%pi`)

```
(%i3) draw2d(nticks = 200,  
polar(rho,phi,0,2*%pi))$
```





## Лабораторна робота 8

*Тема роботи: «Нулі, екстремуми та точки перегину.»*

*Мета роботи: навчитись будувати графіки функції*

*Завдання:*

### Варіант 1.

*Завдання 1.* Побудувати на одній координатній площині графіки функцій  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x \cdot \sin x - x + 4$ , її першої похідної  $f'(x)$  та другої похідної  $f''(x)$ . Проміжки зміни  $x$  та  $y$  обрати так, щоб було видно точки перетину всіх трьох графіків з віссю  $X$ , а також екстремуми та точки перегину графіка  $f(x)$ .

*Завдання 2.* Знайти всі нулі функції  $f(x)$  та перевірити отримані значення підстановкою.

*Завдання 3.* Знайти точки екстремуму  $f(x)$  як нулі функції  $f'(x)$ . Перевірити отримані значення підстановкою в  $f'(x)$ . Знайти значення  $f(x)$  в точках екстремуму.

*Завдання 4.* Знайти точки перегину  $f(x)$  як нулі функції  $f''(x)$ . Перевірити отримані значення підстановкою в  $f''(x)$ . Знайти значення  $f(x)$  в точках перегину.

*Завдання 5.* Зобразити знайдені точки екстремуму та перегину на графіку функції  $f(x)$ .

### Варіант 2.

*Завдання 1.* Побудувати на одній координатній площині графіки функції  $f(x) = x^4 - 3x^2 - 2x \cdot \sin x - x + 2$ , її першої похідної  $f'(x)$  та другої похідної  $f''(x)$ . Проміжки зміни  $x$  та  $y$  обрати так, щоб було видно точки перетину всіх трьох графіків з віссю  $X$ , а також екстремуми та точки перегину графіка  $f(x)$ .

*Завдання 2.* Знайти всі нулі функції  $f(x)$  та перевірити отримані значення підстановкою.

*Завдання 3.* Знайти точки екстремуму  $f(x)$  як нулі функції  $f'(x)$ . Перевірити отримані значення підстановкою в  $f'(x)$ . Знайти значення  $f(x)$  в точках екстремуму.

*Завдання 4.* Знайти точки перегіну  $f(x)$  як нулі функції  $f''(x)$ . Перевірити отримані значення підстановкою в  $f''(x)$ . Знайти значення  $f(x)$  в точках перегіну.

*Завдання 5.* Зобразити знайдені точки екстремуму та перегіну на графіку функції  $f(x)$ .

### Варіант 3.

*Завдання 1.* Побудувати на одній координатній площині графіки функції  $f(x) = x^3 - 4x^2 \cdot \cos x - x + 1$ , її першої похідної  $f'(x)$  та другої похідної  $f''(x)$ . Проміжки зміни  $x$  та  $y$  обрати так, щоб було видно точки перетину всіх трьох графіків з віссю  $X$ , а також екстремуми та точки перегіну графіка  $f(x)$ .

*Завдання 2.* Знайти всі нулі функції  $f(x)$  та перевірити отримані значення підстановкою.

*Завдання 3.* Знайти точки екстремуму  $f(x)$  як нулі функції  $f'(x)$ . Перевірити отримані значення підстановкою в  $f'(x)$ . Знайти значення  $f(x)$  в точках екстремуму.

*Завдання 4.* Знайти точки перегіну  $f(x)$  як нулі функції  $f''(x)$ . Перевірити отримані значення підстановкою в  $f''(x)$ . Знайти значення  $f(x)$  в точках перегіну.

*Завдання 5.* Зобразити знайдені точки екстремуму та перегіну на графіку функції  $f(x)$ .

### Варіант 4.

*Завдання 1.* Побудувати на одній координатній площині графіки функції  $f(x) = x^3 - 2x^2 \cdot \sin x - x + 1$ , її першої похідної  $f'(x)$  та другої похідної  $f''(x)$ . Проміжки зміни  $x$  та  $y$  обрати так, щоб було видно точки перетину всіх трьох графіків з віссю  $X$ , а також екстремуми та точки перегіну графіка  $f(x)$ .

*Завдання 2.* Знайти всі нулі функції  $f(x)$  та перевірити отримані значення підстановкою.

*Завдання 3.* Знайти точки екстремуму  $f(x)$  як нулі функції  $f'(x)$ . Перевірити отримані значення підстановкою в  $f'(x)$ . Знайти значення  $f(x)$  в точках екстремуму.

*Завдання 4.* Знайти точки перегіну  $f(x)$  як нулі функції  $f''(x)$ . Перевірити отримані значення підстановкою в  $f''(x)$ . Знайти значення  $f(x)$  в точках перегіну.

*Завдання 5.* Зобразити знайдені точки екстремуму та перегіну на графіку функції  $f(x)$ .

### Варіант 5.

*Завдання 1.* Побудувати на одній координатній площині графіки функції  $f(x) = x^3 + x^2 \cdot \sin x - 2x - 3$ , її першої похідної  $f'(x)$  та другої похідної  $f''(x)$ . Проміжки зміни  $x$  та  $y$  обрати так, щоб було видно точки перетину всіх трьох графіків з віссю  $X$ , а також екстремуми та точки перегіну графіка  $f(x)$ .

*Завдання 2.* Знайти всі нулі функції  $f(x)$  та перевірити отримані значення підстановкою.

*Завдання 3.* Знайти точки екстремуму  $f(x)$  як нулі функції  $f'(x)$ . Перевірити отримані значення підстановкою в  $f'(x)$ . Знайти значення  $f(x)$  в точках екстремуму.

*Завдання 4.* Знайти точки перегіну  $f(x)$  як нулі функції  $f''(x)$ . Перевірити отримані значення підстановкою в  $f''(x)$ . Знайти значення  $f(x)$  в точках перегіну.

*Завдання 5.* Зобразити знайдені точки екстремуму та перегіну на графіку функції  $f(x)$ .

### Варіант 6.

*Завдання 1.* Побудувати на одній координатній площині графіки функції  $f(x) = x^5 + x^2 - 2x + 1$ , її першої похідної  $f'(x)$  та другої похідної  $f''(x)$ . Проміжки зміни  $x$  та  $y$  обрати так, щоб було видно точки перетину всіх трьох графіків з віссю  $X$ , а також екстремуми та точки перегіну графіка  $f(x)$ .

*Завдання 2.* Знайти всі нулі функції  $f(x)$  та перевірити отримані значення підстановкою.

*Завдання 3.* Знайти точки екстремуму  $f(x)$  як нулі функції  $f'(x)$ . Перевірити отримані значення підстановкою в  $f'(x)$ . Знайти значення  $f(x)$  в точках екстремуму.

*Завдання 4.* Знайти точки перегину  $f(x)$  як нулі функції  $f''(x)$ . Перевірити отримані значення підстановкою в  $f''(x)$ . Знайти значення  $f(x)$  в точках перегину.

*Завдання 5.* Зобразити знайдені точки екстремуму та перегину на графіку функції  $f(x)$ .

#### Варіант 7.

*Завдання 1.* Побудувати на одній координатній площині графіки функції  $f(x) = x^4 - 3x^3 - 2\cos 2x - 1$ , її першої похідної  $f'(x)$  та другої похідної  $f''(x)$ . Проміжки зміни  $x$  та у обрати так, щоб було видно точки перетину всіх трьох графіків з віссю  $X$ , а також екстремуми та точки перегину графіка  $f(x)$ .

*Завдання 2.* Знайти всі нулі функції  $f(x)$  та перевірити отримані значення підстановкою.

*Завдання 3.* Знайти точки екстремуму  $f(x)$  як нулі функції  $f'(x)$ . Перевірити отримані значення підстановкою в  $f'(x)$ . Знайти значення  $f(x)$  в точках екстремуму.

*Завдання 4.* Знайти точки перегину  $f(x)$  як нулі функції  $f''(x)$ . Перевірити отримані значення підстановкою в  $f''(x)$ . Знайти значення  $f(x)$  в точках перегину.

*Завдання 5.* Зобразити знайдені точки екстремуму та перегину на графіку функції  $f(x)$ .

#### Варіант 8.

*Завдання 1.* Побудувати на одній координатній площині графіки функції  $f(x) = x^3 - \cos x - 3x$ , її першої похідної  $f'(x)$  та другої похідної  $f''(x)$ . Проміжки зміни  $x$  та у обрати так, щоб було видно точки перетину всіх трьох графіків з віссю  $X$ , а також екстремуми та точки перегину графіка  $f(x)$ .

*Завдання 2.* Знайти всі нулі функції  $f(x)$  та перевірити отримані значення підстановкою.

*Завдання 3.* Знайти точки екстремуму  $f(x)$  як нулі функції  $f'(x)$ . Перевірити отримані значення підстановкою в  $f'(x)$ . Знайти значення  $f(x)$  в точках екстремуму.

*Завдання 4.* Знайти точки перегину  $f(x)$  як нулі функції  $f''(x)$ . Перевірити отримані значення підстановкою в  $f''(x)$ . Знайти значення  $f(x)$  в точках перегину.

*Завдання 5.* Зобразити знайдені точки екстремуму та перегину на графіку функції  $f(x)$ .

#### Варіант 9.

*Завдання 1.* Побудувати на одній координатній площині графіки функції  $f(x) = x^3 - 2^x - x + 1$ , її першої похідної  $f'(x)$  та другої похідної  $f''(x)$ . Проміжки зміни  $x$  та у обрати так, щоб було видно точки перетину всіх трьох графіків з віссю  $X$ , а також екстремуми та точки перегину графіка  $f(x)$ .

*Завдання 2.* Знайти всі нулі функції  $f(x)$  та перевірити отримані значення підстановкою.

*Завдання 3.* Знайти точки екстремуму  $f(x)$  як нулі функції  $f'(x)$ . Перевірити отримані значення підстановкою в  $f'(x)$ . Знайти значення  $f(x)$  в точках екстремуму.

*Завдання 4.* Знайти точки перегину  $f(x)$  як нулі функції  $f''(x)$ . Перевірити отримані значення підстановкою в  $f''(x)$ . Знайти значення  $f(x)$  в точках перегину.

*Завдання 5.* Зобразити знайдені точки екстремуму та перегину на графіку функції  $f(x)$ .

### Варіант 10.

*Завдання 1.* Побудувати на одній координатній площині графіки функції  $f(x) = x^4 - 3x - 2x - 1$ , її першої похідної  $f'(x)$  та другої похідної  $f''(x)$ . Проміжки зміни  $x$  та у обрати так, щоб було видно точки перетину всіх трьох графіків з віссю  $X$ , а також екстремуми та точки перегину графіка  $f(x)$ .

*Завдання 2.* Знайти всі нулі функції  $f(x)$  та перевірити отримані значення підстановкою.

*Завдання 3.* Знайти точки екстремуму  $f(x)$  як нулі функції  $f'(x)$ . Перевірити отримані значення підстановкою в  $f'(x)$ . Знайти значення  $f(x)$  в точках екстремуму.

*Завдання 4.* Знайти точки перегину  $f(x)$  як нулі функції  $f''(x)$ . Перевірити отримані значення підстановкою в  $f''(x)$ . Знайти значення  $f(x)$  в точках перегину.

*Завдання 5.* Зобразити знайдені точки екстремуму та перегину на графіку функції  $f(x)$ .

### Варіант 11.

*Завдання 1.* Побудувати на одній координатній площині графіки функції  $f(x) = x^5 - 3x - 2x$ , її першої похідної  $f'(x)$  та другої похідної  $f''(x)$ . Проміжки зміни  $x$  та у обрати так, щоб було видно точки перетину всіх трьох графіків з віссю  $X$ , а також екстремуми та точки перегину графіка  $f(x)$ .

*Завдання 2.* Знайти всі нулі функції  $f(x)$  та перевірити отримані значення підстановкою.

*Завдання 3.* Знайти точки екстремуму  $f(x)$  як нулі функції  $f'(x)$ . Перевірити отримані значення підстановкою в  $f'(x)$ . Знайти значення  $f(x)$  в точках екстремуму.

*Завдання 4.* Знайти точки перегину  $f(x)$  як нулі функції  $f''(x)$ . Перевірити отримані значення підстановкою в  $f''(x)$ . Знайти значення  $f(x)$  в точках перегину.

*Завдання 5.* Зобразити знайдені точки екстремуму та перегину на графіку функції  $f(x)$ .

### Варіант 12.

*Завдання 1.* Побудувати на одній координатній площині графіки функції  $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{1 + x^2}$ , її першої похідної  $f'(x)$  та другої похідної  $f''(x)$ . Проміжки зміни  $x$  та у обрати так, щоб було видно точки перетину всіх трьох графіків з віссю  $X$ , а також екстремуми та точки перегину графіка  $f(x)$ .

*Завдання 2.* Знайти всі нулі функції  $f(x)$  та перевірити отримані значення підстановкою.

*Завдання 3.* Знайти точки екстремуму  $f(x)$  як нулі функції  $f'(x)$ . Перевірити отримані значення підстановкою в  $f'(x)$ . Знайти значення  $f(x)$  в точках екстремуму.

*Завдання 4.* Знайти точки перегину  $f(x)$  як нулі функції  $f''(x)$ . Перевірити отримані значення підстановкою в  $f''(x)$ . Знайти значення  $f(x)$  в точках перегину.

### Варіант 13.

*Завдання 1.* Побудувати на одній координатній площині графіки функції  $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{2 - \sin x}$ , її першої похідної  $f'(x)$  та другої похідної  $f''(x)$ . Проміжки зміни  $x$  та у обрати так, щоб було видно точки перетину всіх трьох графіків з віссю  $X$ , а також екстремуми та точки перегину графіка  $f(x)$ .

*Завдання 2.* Знайти всі нулі функції  $f(x)$  та перевірити отримані значення підстановкою.

*Завдання 3.* Знайти точки екстремуму  $f(x)$  як нулі функції  $f'(x)$ . Перевірити отримані значення підстановкою в  $f'(x)$ . Знайти значення  $f(x)$  в точках екстремуму.

*Завдання 4.* Знайти точки перегину  $f(x)$  як нулі функції  $f''(x)$ . Перевірити отримані значення підстановкою в  $f''(x)$ . Знайти значення  $f(x)$  в точках перегину.

*Завдання 5.* Зобразити знайдені точки екстремуму та перегину на графіку функції  $f(x)$ .

#### Варіант 14.

*Завдання 1.* Побудувати на одній координатній площині графіки функції  $f(x) = \frac{x^2 - 2^x}{2 + \cos x}$ , її першої похідної  $f'(x)$  та другої похідної  $f''(x)$ . Проміжки зміни  $x$  та  $y$  обрати так, щоб було видно точки перетину всіх трьох графіків з віссю  $X$ , а також екстремуми та точки перегину графіка  $f(x)$ .

*Завдання 2.* Знайти всі нулі функції  $f(x)$  та перевірити отримані значення підстановкою.

*Завдання 3.* Знайти точки екстремуму  $f(x)$  як нулі функції  $f'(x)$ . Перевірити отримані значення підстановкою в  $f'(x)$ . Знайти значення  $f(x)$  в точках екстремуму.

*Завдання 4.* Знайти точки перегину  $f(x)$  як нулі функції  $f''(x)$ . Перевірити отримані значення підстановкою в  $f''(x)$ . Знайти значення  $f(x)$  в точках перегину.

*Завдання 5.* Зобразити знайдені точки екстремуму та перегину на графіку функції  $f(x)$ .

#### Варіант 15.

*Завдання 1.* Побудувати на одній координатній площині графіки функції  $f(x) = \frac{x - 3^x + 3}{5 + \cos x}$ , її першої похідної  $f'(x)$  та другої похідної  $f''(x)$ . Проміжки зміни  $x$  та  $y$  обрати так, щоб було видно точки перетину всіх трьох графіків з віссю  $X$ , а також екстремуми та точки перегину графіка  $f(x)$ .

*Завдання 2.* Знайти всі нулі функції  $f(x)$  та перевірити отримані значення підстановкою.

*Завдання 3.* Знайти точки екстремуму  $f(x)$  як нулі функції  $f'(x)$ . Перевірити отримані значення підстановкою в  $f'(x)$ . Знайти значення  $f(x)$  в точках екстремуму.

*Завдання 4.* Знайти точки перегину  $f(x)$  як нулі функції  $f''(x)$ . Перевірити отримані значення підстановкою в  $f''(x)$ . Знайти значення  $f(x)$  в точках перегину.

*Завдання 5.* Зобразити знайдені точки екстремуму та перегину на графіку функції  $f(x)$ .

#### Варіант 16.

*Завдання 1.* Побудувати на одній координатній площині графіки функції  $f(x) = x - 3^x + \ln x$ , її першої похідної  $f'(x)$  та другої похідної  $f''(x)$ . Проміжки зміни  $x$  та  $y$  обрати так, щоб було видно точки перетину всіх трьох графіків з віссю  $X$ , а також екстремуми та точки перегину графіка  $f(x)$ .

*Завдання 2.* Знайти всі нулі функції  $f(x)$  та перевірити отримані значення підстановкою.

*Завдання 3.* Знайти точки екстремуму  $f(x)$  як нулі функції  $f'(x)$ . Перевірити отримані значення підстановкою в  $f'(x)$ . Знайти значення  $f(x)$  в точках екстремуму.

*Завдання 4.* Знайти точки перегину  $f(x)$  як нулі функції  $f''(x)$ . Перевірити отримані значення підстановкою в  $f''(x)$ . Знайти значення  $f(x)$  в точках перегину.

*Завдання 5.* Зобразити знайдені точки екстремуму та перегину на графіку функції  $f(x)$ .

### Варіант 17.

*Завдання 1.* Побудувати на одній координатній площині графіки функції  $f(x) = \frac{x - 3^x + 3}{5x + \ln x}$ , її першої похідної  $f'(x)$  та другої похідної  $f''(x)$ . Проміжки зміни  $x$  та  $y$  обрати так, щоб було видно точки перетину всіх трьох графіків з віссю  $X$ , а також екстремуми та точки перегину графіка  $f(x)$ .

*Завдання 2.* Знайти всі нулі функції  $f(x)$  та перевірити отримані значення підстановкою.

*Завдання 3.* Знайти точки екстремуму  $f(x)$  як нулі функції  $f'(x)$ . Перевірити отримані значення підстановкою в  $f'(x)$ . Знайти значення  $f(x)$  в точках екстремуму.

*Завдання 4.* Знайти точки перегину  $f(x)$  як нулі функції  $f''(x)$ . Перевірити отримані значення підстановкою в  $f''(x)$ . Знайти значення  $f(x)$  в точках перегину.

*Завдання 5.* Зобразити знайдені точки екстремуму та перегину на графіку функції  $f(x)$ .

### Варіант 18.

*Завдання 1.* Побудувати на одній координатній площині графіки функції  $f(x) = x^8 + 8x^3 + 5$ , її першої похідної  $f'(x)$  та другої похідної  $f''(x)$ . Проміжки зміни  $x$  та  $y$  обрати так, щоб було видно точки перетину всіх трьох графіків з віссю  $X$ , а також екстремуми та точки перегину графіка  $f(x)$ .

*Завдання 2.* Знайти всі нулі функції  $f(x)$  та перевірити отримані значення підстановкою.

*Завдання 3.* Знайти точки екстремуму  $f(x)$  як нулі функції  $f'(x)$ . Перевірити отримані значення підстановкою в  $f'(x)$ . Знайти значення  $f(x)$  в точках екстремуму.

*Завдання 4.* Знайти точки перегину  $f(x)$  як нулі функції  $f''(x)$ . Перевірити отримані значення підстановкою в  $f''(x)$ . Знайти значення  $f(x)$  в точках перегину.

*Завдання 5.* Зобразити знайдені точки екстремуму та перегину на графіку функції  $f(x)$ .

### Варіант 19.

*Завдання 1.* Побудувати на одній координатній площині графіки функції  $f(x) = \cos 2x + \ln x + 7$ , її першої похідної  $f'(x)$  та другої похідної  $f''(x)$ . Проміжки зміни  $x$  та  $y$  обрати так, щоб було видно точки перетину всіх трьох графіків з віссю  $X$ , а також екстремуми та точки перегину графіка  $f(x)$ .

*Завдання 2.* Знайти всі нулі функції  $f(x)$  та перевірити отримані значення підстановкою.

*Завдання 3.* Знайти точки екстремуму  $f(x)$  як нулі функції  $f'(x)$ . Перевірити отримані значення підстановкою в  $f'(x)$ . Знайти значення  $f(x)$  в точках екстремуму.

*Завдання 4.* Знайти точки перегину  $f(x)$  як нулі функції  $f''(x)$ . Перевірити отримані значення підстановкою в  $f''(x)$ . Знайти значення  $f(x)$  в точках перегину.

*Завдання 5.* Зобразити знайдені точки екстремуму та перегину на графіку функції  $f(x)$ .

### Варіант 20.

*Завдання 1.* Побудувати на одній координатній площині графіки функції  $f(x) = \frac{x^5 - 5^x + 3}{5 + x^3}$ , її першої похідної  $f'(x)$  та другої похідної  $f''(x)$ . Проміжки зміни  $x$  та  $y$  обрати так, щоб було видно точки перетину всіх трьох графіків з віссю  $X$ , а також екстремуми та точки перегину графіка  $f(x)$ .

*Завдання 2.* Знайти всі нулі функції  $f(x)$  та перевірити отримані значення підстановкою.

**Завдання 3.** Знайти точки екстремуму  $f(x)$  як нулі функції  $f'(x)$ . Перевірити отримані значення підстановкою в  $f'(x)$ . Знайти значення  $f(x)$  в точках екстремуму.

**Завдання 4.** Знайти точки перегину  $f(x)$  як нулі функції  $f''(x)$ . Перевірити отримані значення підстановкою в  $f''(x)$ . Знайти значення  $f(x)$  в точках перегину.

**Завдання 5.** Зобразити знайдені точки екстремуму та перегину на графіку функції  $f(x)$ .

## Зразок виконання лабораторної роботи 8

**Завдання 1.** Побудувати на одній координатній площині графіки функції  $f(x) = x^3 - x^2 - 7 \cos x + 6$ , її першої похідної  $f'(x)$  та другої похідної  $f''(x)$ . Проміжки зміни  $x$  та  $y$  обрати так, щоб було видно точки перетину всіх трьох графіків з віссю  $X$ , а також екстремуми та точки перегину графіка  $f(x)$ .

**Завдання 2.** Знайти всі нулі функції  $f(x)$  та перевірити отримані значення підстановкою.

**Завдання 3.** Знайти точки екстремуму  $f(x)$  як нулі функції  $f'(x)$ . Перевірити отримані значення підстановкою в  $f'(x)$ . Знайти значення  $f(x)$  в точках екстремуму.

**Завдання 4.** Знайти точки перегину  $f(x)$  як нулі функції  $f''(x)$ . Перевірити отримані значення підстановкою в  $f''(x)$ . Знайти значення  $f(x)$  в точках перегину.

**Завдання 5.** Зобразити знайдені точки екстремуму та перегину на графіку функції  $f(x)$ .

### Завдання 1. Розв'язок:

**Завдання 1.** Побудувати на одній координатній площині графіки функції  $f(x) = x^3 - x^2 - 7 \cos x + 6$ , її першої похідної  $f'(x)$  та другої похідної  $f''(x)$ . Проміжки зміни  $x$  та  $y$  обрати так, щоб було видно точки перетину всіх трьох графіків з віссю  $X$ , а також екстремуми та точки перегину графіка  $f(x)$ .

Задаємо функцію  $f(x) = x^3 - x^2 - 7 \cos x + 6$  та знаходимо її похідні, які позначаємо  $f1, f2$ .

```
(%i1) f:x^3-x^2-7*cos(x)+6;
```

```
(%o1) -7*cos(x)+x^3-x^2+6
```

```
(%i2) f1:diff(f,x);
```

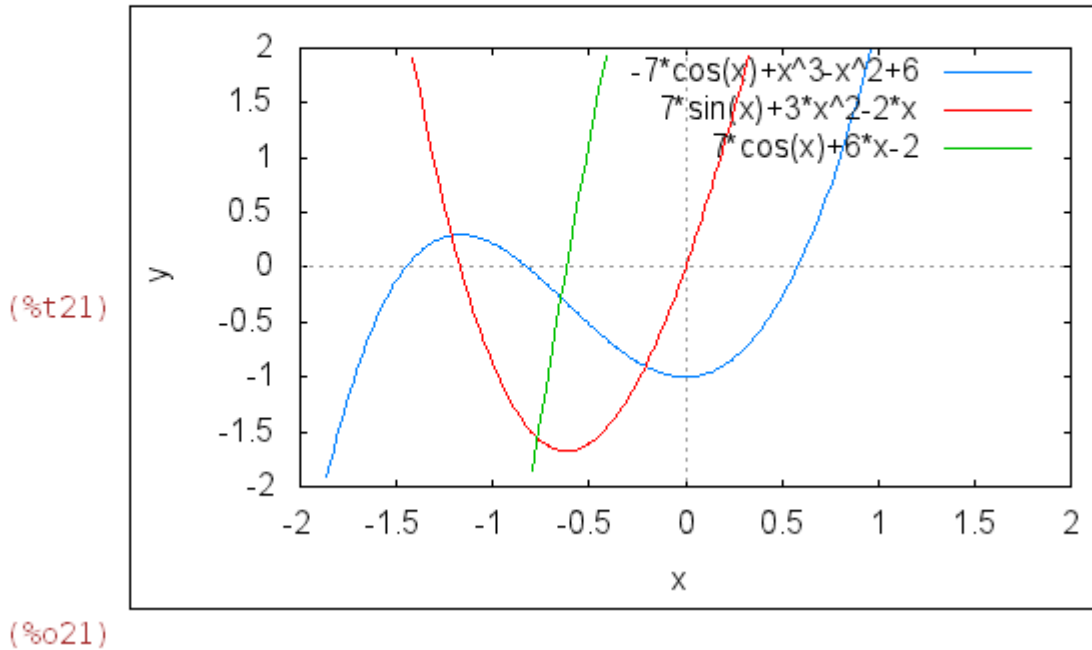
```
(%o2) 7*sin(x)+3*x^2-2*x
```

```
(%i3) f2:diff(f,x,2);
```

```
(%o3) 7*cos(x)+6*x-2
```

Будуємо графіки функції  $f$  та її похідних.

```
(%i21) wxplot2d([f,f1,f2],['x,-2,2'],['y,-2,2]);
plot2d: some values were clipped.
plot2d: some values were clipped.
plot2d: some values were clipped.
```



### Завдання 2. Розв'язок:

**Завдання 2.** Знайти всі нулі функції  $f(x)$  та перевірити отримані значення підстановкою.

З графіка видно, що  $f$  має нулі на проміжках  $[-2,-1]$ ,  $[-1,0]$  та  $[0,1]$ . Знайдемо їх наближені значення та виконаємо перевірку підстановкою.

```
(%i10) x1:find_root(f,x,-2,-1);
(%o10) -1.452359148192865
(%i11) ev(f,x=x1);
(%o11) 3.3306690738754696 10-16
(%i12) x2:find_root(f,x,-1,0);
(%o12) -0.8195322392935
(%i13) ev(f,x=x2);
(%o13) 0.0
(%i14) x3:find_root(f,x,0,1);
(%o14) 0.57905661665617
(%i15) ev(f,x=x3);
(%o15) 0.0
```

### Завдання 3. Розв'язок:

**Завдання 3.** Знайти точки екстремуму  $f(x)$  як нулі функції  $f'(x)$ . Перевірити отримані значення підстановкою в  $f'(x)$ . Знайти значення  $f(x)$  в точках екстремуму.



Як видно з графіка, похідна  $f_1$  має нулі на проміжках  $[-2, -1]$ , та в точці нуль. Знайдемо їх наближені значення, виконаємо перевірку підстановкою, а також знайдемо значення функції  $f$  в цих критичних точках.

```
(%i25) xx1:find_root(f1,x,-2,-1);
(%o25) -1.1697700494378
(%i32) ev(f1,x=xx1);
(%o32) 0.0
(%i33) y1:ev(f,x=xx1);
(%o33) 0.29842537606286
(%i27) xx2:find_root(f1,x,-1,1);
(%o27) 0.0
(%i28) ev(f1,x=xx2);
(%o28) 0.0
(%i34) y2:ev(f,x=xx2);
(%o34) -1.0
```

#### Завдання 4. Розв'язок:

**Завдання 4.** Знайти точки перегину  $f(x)$  як нулі функції  $f''(x)$ . Перевірити отримані значення підстановкою в  $f''(x)$ . Знайти значення  $f(x)$  в точках перегину.

З графіка також видно, що точка перегину функції  $f$  (нуль другої похідної  $f_2$ ) належить інтервалу  $[-1, 0]$ . Знайдемо її, виконаємо перевірку та визначимо значення функції  $f$  в цій точці.

```
(%i30) xxx1:find_root(f2,x,-1,0);
(%o30) -0.61772872283452
(%i31) ev(f2,x=xxx1);
(%o31) 8.8817841970012523 10-16
(%i35) yy:ev(f,x=xxx1);
(%o35) -0.32367945865975
```

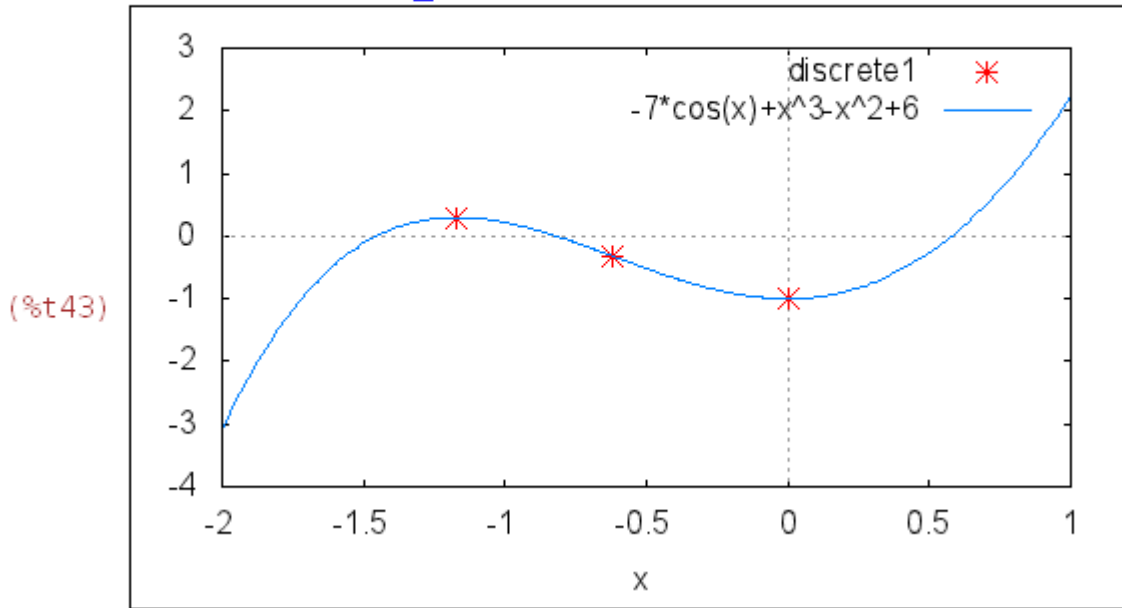
#### Завдання 5. Розв'язок:

**Завдання 5.** Зобразити знайдені точки екстремуму та перегину на графіку функції  $f(x)$ .

Зобразимо знайдені точки екстремуму та перегину на графіку функції  $f$ .

```
(%i37) extr: [[xx1,y1],[xx2,y2],[xxx1,yy]];
(%o37) [[-1.1697700494378, 0.29842537606286], [0.0, -1.0], [-0.61772872283452, -0.32367945865975]]
```

```
(%i43) wxplot2d([[discrete, extr], f], [x,-2,1],
                [style, points, lines], [color, red, blue],
                [point_type, asterisk])$
```



## Лабораторна робота 9

**Тема роботи: «Частинні похідні, екстремум функцій двох змінних.»**

**Мета роботи:** навчитись знаходити частинні похідні функції двох змінних, градієнт, похідну за напрямом та досліджувати функцію на екстремум.

**Завдання:**

### Варіант 1.

**Завдання 1.** Для функції двох аргументів  $f(x, y) = \frac{x - y^2}{\sqrt{x} + 1}$  знайти її частинні похідні

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

**Завдання 2.** Для функції  $F(x, y, z) = \frac{x^2}{y^2 - z}$  знайти її градієнт в точці  $M(-1; 2; 0)$ .

**Завдання 3.** Для функції  $F(x, y, z)$  з завдання 2 знайдіть похідну в точці  $M$  за напрямом вектора  $\vec{v} = (2; 1; 3)$ .

**Завдання 4.** Дослідити на локальний екстремум функцію

$$f(x, y) = 9x^2 + 4y^2 - 8y + 6x \cos y - 4y \sin x + \cos^2 y - \cos^2 x + 6$$

в області  $D$ , що обмежена нерівностями  $-3 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 5$ :

1. Зобразити лінії рівня функції  $f(x, y)$  в області  $D$ .
2. Визначити за графіком наближені координати точки екстремуму.

3. Розв'язати систему рівнянь 
$$\begin{cases} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0 \end{cases}$$
 та знайти точку, підозрілу на екстремум.

4. Обчислити значення других похідних  $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$ ,  $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$  в отриманій точці та перевірити виконання достатніх умов екстремуму.
5. Визначити тип точки (мінімум, максимум) та знайдіть значення функції  $f(x, y)$  в цій точці.

### Варіант 2.

*Завдання 1.* Для функції двох аргументів  $f(x, y) = \frac{\sin(x + y^2)}{x}$  знайти її частинні похідні

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

*Завдання 2.* Для функції  $F(x, y, z) = \frac{\sin(x^2 - y)}{z}$  знайти її градієнт в точці  $M(1; -2; 2)$ .

*Завдання 3.* Для функції  $F(x, y, z)$  з завдання 2 знайдіть похідну в точці  $M$  за напрямом вектора  $\vec{v} = (1; -1; 2)$ .

*Завдання 4.* Дослідити на локальний екстремум функцію

$$f(x, y) = 4x^2 + 9y^2 - 6y + 4x \cos y - 6y \sin x + \cos^2 y - \cos^2 x + 7 + 2 \sin x$$

в області  $D$ , що обмежена нерівностями  $-3 \leq x \leq 2$ ,  $-2 \leq y \leq 3$ :

1. Зобразити лінії рівня функції  $f(x, y)$  в області  $D$ .
2. Визначити за графіком наближені координати точки екстремуму.

3. Розв'язати систему рівнянь 
$$\begin{cases} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0 \end{cases}$$
 та знайти точку, підозрілу на екстремум.

4. Обчислити значення других похідних  $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$ ,  $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$  в отриманій точці та перевірити виконання достатніх умов екстремуму.
5. Визначити тип точки (мінімум, максимум) та знайдіть значення функції  $f(x, y)$  в цій точці.

### Варіант 3.

*Завдання 1.* Для функції двох аргументів  $f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x - y}}$  знайти її частинні похідні

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

*Завдання 2.* Для функції  $F(x, y, z) = \frac{\cos(xy)}{z - x^2}$  знайти її градієнт в точці  $M(-1; 1; 2)$ .

*Завдання 3.* Для функції  $F(x, y, z)$  з завдання 2 знайдіть похідну в точці  $M$  за напрямом

вектора  $\bar{v} = (2; -1; 1)$ .

*Завдання 4.* Дослідити на локальний екстремум функцію

$$f(x, y) = x^2 - 6 \sin y \sin x - 8 \cos^2 y - \cos^2 x + 2x \cos y + 7$$

в області  $D$ , що обмежена нерівностями:  $-3 \leq x \leq 1$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ :

1. Зобразити лінії рівня функції  $f(x, y)$  в області  $D$ .
2. Визначити за графіком наближені координати точки екстремуму.
3. Розв'язати систему рівнянь 
$$\begin{cases} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0 \end{cases}$$
 та знайти точку, підозрілу на екстремум.
4. Обчислити значення других похідних  $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$ ,  $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$  в отриманій точці та перевірити виконання достатніх умов екстремуму.
5. Визначити тип точки (мінімум, максимум) та знайдіть значення функції  $f(x, y)$  в цій точці.

#### Варіант 4.

*Завдання 1.* Для функції двох аргументів  $f(x, y) = \frac{\operatorname{tg}(x - y)}{\sqrt{y + 1}}$  знайти її частинні похідні

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

*Завдання 2.* Для функції  $F(x, y, z) = \frac{e^{z-x^2}}{y}$  знайти її градієнт в точці  $M(-1; 1; 3)$ .

*Завдання 3.* Для функції  $F(x, y, z)$  з завдання 2 знайдіть похідну в точці  $M$  за напрямом вектора  $\bar{v} = (2; -1; 1)$ .

*Завдання 4.* Дослідити на локальний екстремум функцію

$$f(x, y) = y^2 - 4 \sin y \sin x - \cos^2 y - 3 \cos^2 x - 2y \cos x + 4$$

в області  $D$ , що обмежена нерівностями:  $-1 \leq x \leq 2$ ,  $-1 \leq y \leq 3$ :

1. Зобразити лінії рівня функції  $f(x, y)$  в області  $D$ .
2. Визначити за графіком наближені координати точки екстремуму.
3. Розв'язати систему рівнянь 
$$\begin{cases} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0 \end{cases}$$
 та знайти точку, підозрілу на екстремум.
4. Обчислити значення других похідних  $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$ ,  $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$  в отриманій точці та перевірити виконання достатніх умов екстремуму.

5. Визначити тип точки (мінімум, максимум) та знайдіть значення функції  $f(x, y)$  в цій точці.

Варіант 5.

*Завдання1.* Для функції двох аргументів  $f(x, y) = \frac{x-y}{\sqrt{xy+1}}$  знайти її частинні похідні

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

*Завдання2.* Для функції  $F(x, y, z) = \frac{\arctg(x+z)}{y}$  знайти її градієнт в точці  $M(-2; -1; 1)$ .

*Завдання3.* Для функції  $F(x, y, z)$  з завдання2 знайдіть похідну в точці  $M$  за напрямом вектора  $\vec{v} = (1; -1; 3)$ .

*Завдання 4.* Дослідити на локальний екстремум функцію  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x \cos y - 2y \sin x + \cos^2 y - \cos^2 x - 3$  в області  $D$ , що обмежена нерівностями:  $-2 \leq x \leq 4, -3 \leq y \leq 3$ :

1. Зобразити лінії рівня функції  $f(x, y)$  в області  $D$ .
2. Визначити за графіком наближені координати точки екстремуму.

3. Розв'язати систему рівнянь  $\begin{cases} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0 \end{cases}$  та знайти точку, підозрілу на екстремум.

4. Обчислити значення других похідних  $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$  в отриманій точці

та перевірити виконання достатніх умов екстремуму.

5. Визначити тип точки (мінімум, максимум) та знайдіть значення функції  $f(x, y)$  в цій точці.

Варіант 6.

*Завдання1.* Для функції двох аргументів  $f(x, y) = \frac{e^x - \sqrt{y}}{x}$  знайти її частинні похідні

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

*Завдання2.* Для функції  $F(x, y, z) = \frac{x^2 + y + x}{z - 2y}$  знайти її градієнт в точці  $M(-1; -1; 2)$ .

*Завдання3.* Для функції  $F(x, y, z)$  з завдання2 знайдіть похідну в точці  $M$  за напрямом вектора  $\vec{v} = (1; -1; 3)$ :

*Завдання 4.* Дослідити на локальний екстремум функцію  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2x \sin y + 2y \sin x + \sin^2 y - \cos^2 x$  в області  $D$ , що обмежена нерівностями:  $-2 \leq x \leq 3, -3 \leq y \leq 3$ :

1. Зобразити лінії рівня функції  $f(x, y)$  в області  $D$ .
2. Визначити за графіком наближені координати точки екстремуму.
3. Розв'язати систему рівнянь 
$$\begin{cases} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0 \end{cases}$$
 та знайти точку, підозрілу на екстремум.
4. Обчислити значення других похідних  $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$  в отриманій точці та перевірити виконання достатніх умов екстремуму.
5. Визначити тип точки (мінімум, максимум) та знайдіть значення функції  $f(x, y)$  в цій точці.

#### Варіант 7.

*Завдання1.* Для функції двох аргументів  $f(x, y) = x \cdot \sin y + y^3$  знайти її частинні похідні

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

*Завдання2.* Для функції  $F(x, y, z) = \frac{x^2 + z}{z - y}$  знайти її градієнт в точці  $M(-1; -1; 1)$ .

*Завдання3.* Для функції  $F(x, y, z)$  з завдання2 знайдіть похідну в точці  $M$  за напрямом вектора  $\vec{v} = (1; -1; 2)$ .

*Завдання 4.* Дослідити на локальний екстремум функцію  $f(x, y) = x^2 + y^2 + e^{2y} + 2y \sin x - 2xe^y - \cos^2 x + 7$  в області  $D$ , що обмежена нерівностями:  $-1 \leq x \leq 2, -3 \leq y \leq 1$ :

1. Зобразити лінії рівня функції  $f(x, y)$  в області  $D$ .
2. Визначити за графіком наближені координати точки екстремуму.
3. Розв'язати систему рівнянь 
$$\begin{cases} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0 \end{cases}$$
 та знайти точку, підозрілу на екстремум.

4. Обчислити значення других похідних  $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$ ,  $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$  в отриманій точці та перевірити виконання достатніх умов екстремуму.
5. Визначити тип точки (мінімум, максимум) та знайдіть значення функції  $f(x, y)$  в цій точці.

### Варіант 8.

*Завдання1.* Для функції двох аргументів  $f(x, y) = \frac{xy^3}{e^x + 1}$  знайти її частинні похідні

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

*Завдання2.* Для функції  $F(x, y, z) = \frac{z^3 + e^y}{x - y}$  знайти її градієнт в точці  $M(-1; 2; 1)$ .

*Завдання3.* Для функції  $F(x, y, z)$  з завдання2 знайдіть похідну в точці  $M$  за напрямом вектора  $\vec{v} = (1; 2; 3)$ .

*Завдання 4.* Дослідити на локальний екстремум функцію  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2ye^x + e^{2x} - 2x \cos y + \cos^2 y + 1$  в області  $D$ , що обмежена нерівностями:  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 2$ :

1. Зобразити лінії рівня функції  $f(x, y)$  в області  $D$ .
2. Визначити за графіком наближені координати точки екстремуму.

3. Розв'язати систему рівнянь  $\begin{cases} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0 \end{cases}$  та знайти точку, підозрілу на екстремум.

4. Обчислити значення других похідних  $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$ ,  $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$  в отриманій точці та перевірити виконання достатніх умов екстремуму.
5. Визначити тип точки (мінімум, максимум) та знайдіть значення функції  $f(x, y)$  в цій точці.

### Варіант 9.

*Завдання1.* Для функції двох аргументів  $f(x, y) = \sin\left(\frac{x}{y+1}\right)$  знайти її частинні похідні

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

*Завдання2.* Для функції  $F(x, y, z) = \frac{e^x \cdot z^3 - 1}{y + 1}$  знайти її градієнт в точці  $M(-1; 1; 1)$ .

*Завдання3.* Для функції  $F(x, y, z)$  з завдання2 знайдіть похідну в точці  $M$  за напрямом вектора  $\vec{v} = (1; 2; 3)$ .

*Завдання 4.* Дослідити на локальний екстремум функцію  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2ye^x + e^{2x} + 2x \sin y - \cos^2 y + 3$  в області  $D$ , що обмежена нерівностями:  $-2 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 2$ :

1. Зобразити лінії рівня функції  $f(x, y)$  в області  $D$ .
2. Визначити за графіком наближені координати точки екстремуму.

3. Розв'язати систему рівнянь  $\begin{cases} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0 \end{cases}$  та знайти точку, підозрілу на екстремум.

4. Обчислити значення других похідних  $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$  в отриманій точці та перевірити виконання достатніх умов екстремуму.
5. Визначити тип точки (мінімум, максимум) та знайдіть значення функції  $f(x, y)$  в цій точці.

#### Варіант 10.

*Завдання1.* Для функції двох аргументів  $f(x, y) = \sqrt{\frac{x+y}{xy+1}}$  знайти її частинні похідні

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

*Завдання2.* Для функції  $F(x, y, z) = 3\sqrt{\frac{z-2x}{y}}$  знайти її градієнт в точці  $M(0; -1; 1)$ .

*Завдання3.* Для функції  $F(x, y, z)$  з завдання2 знайдіть похідну в точці  $M$  за напрямом вектора  $\vec{v} = (3; 1; 1)$ .

*Завдання 4.* Дослідити на локальний екстремум функцію  $f(x, y) = x^2 + 2x \sin y - 2e^x \cos y + e^{2x} + 9$  в області  $D$ , що обмежена нерівностями:  $-3 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 3$ :

1. Зобразити лінії рівня функції  $f(x, y)$  в області  $D$ .
2. Визначити за графіком наближені координати точки екстремуму.

3. Розв'язати систему рівнянь  $\begin{cases} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0 \end{cases}$  та знайти точку, підозрілу на екстремум.

4. Обчислити значення других похідних  $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$  в отриманій точці та перевірити виконання достатніх умов екстремуму.



5. Визначити тип точки (мінімум, максимум) та знайдіть значення функції  $f(x, y)$  в цій точці.

Варіант 11.

Завдання1. Для функції двох аргументів  $f(x, y) = \frac{\sqrt{x} - y}{\sqrt{y} + 1}$  знайти її частинні похідні

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Завдання2. Для функції  $F(x, y, z) = \frac{e^y x^3 - y}{z}$  знайти її градієнт в точці  $M(-2; -1; 1)$ .

Завдання3. Для функції  $F(x, y, z)$  з завдання2 знайдіть похідну в точці  $M$  за напрямом вектора  $\vec{v} = (3; 2; -1)$ .

Завдання 4. Дослідити на локальний екстремум функцію

$$f(x, y) = y^2 + 2y \sin x - 2e^y \cos x + e^{2y} + 3$$

в області  $D$ , що обмежена нерівностями:  $-2 \leq x \leq 3, -3 \leq y \leq 1$ :

1. Зобразити лінії рівня функції  $f(x, y)$  в області  $D$ .
2. Визначити за графіком наближені координати точки екстремуму.

3. Розв'язати систему рівнянь 
$$\begin{cases} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0 \end{cases}$$
 та знайти точку, підозрілу на екстремум.

4. Обчислити значення других похідних  $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$  в отриманій точці

та перевірити виконання достатніх умов екстремуму.

5. Визначити тип точки (мінімум, максимум) та знайдіть значення функції  $f(x, y)$  в цій точці.

Варіант 12.

Завдання1. Для функції двох аргументів  $f(x, y) = \frac{y^2}{\sqrt{x} - y}$  знайти її частинні похідні

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Завдання2. Для функції  $F(x, y, z) = 3\sqrt{\frac{z-x}{y+2}}$  знайти її градієнт в точці  $M(1; -1; 2)$ .

Завдання3. Для функції  $F(x, y, z)$  з завдання2 знайдіть похідну в точці  $M$  за напрямом вектора  $\vec{v} = (3; 1; 1)$ .

Завдання 4. Дослідити на локальний екстремум функцію

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2y \cos x - 2x \sin y + \cos^2 x - \cos^2 y - 3$$

в області D, що обмежена нерівностями:  $-3 \leq x \leq 3$ ,  $-2 \leq y \leq 4$ :

1. Зобразити лінії рівня функції  $f(x, y)$  в області D.
2. Визначити за графіком наближені координати точки екстремуму.
3. Розв'язати систему рівнянь 
$$\begin{cases} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0 \end{cases}$$
 та знайти точку, підозрілу на екстремум.
4. Обчислити значення других похідних  $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$ ,  $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$  в отриманій точці та перевірити виконання достатніх умов екстремуму.
5. Визначити тип точки (мінімум, максимум) та знайдіть значення функції  $f(x, y)$  в цій точці.

#### Варіант 13.

Завдання1. Для функції двох аргументів  $f(x, y) = \frac{\sqrt{x-y}}{x^2}$  знайти її частинні похідні

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Завдання2. Для функції  $F(x, y, z) = \frac{y}{\sqrt{1-x-y-z}}$  знайти її градієнт в точці

$M(1; -1; -1)$ .

Завдання3. Для функції  $F(x, y, z)$  з завдання2 знайдіть похідну в точці M за напрямом вектора  $\vec{v} = (3; 1; 1)$ .

Завдання 4. Дослідити на локальний екстремум функцію

$$f(x, y) = y^2 + 2y \cos x - 6 \sin y \sin x - \cos^2 y - 8 \cos^2 x + 7$$

в області D, що обмежена нерівностями:  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $-3 \leq y \leq 1$ :

1. Зобразити лінії рівня функції  $f(x, y)$  в області D.
2. Визначити за графіком наближені координати точки екстремуму.
3. Розв'язати систему рівнянь 
$$\begin{cases} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0 \end{cases}$$
 та знайти точку, підозрілу на екстремум.
4. Обчислити значення других похідних  $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$ ,  $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$  в отриманій точці та перевірити виконання достатніх умов екстремуму.
5. Визначити тип точки (мінімум, максимум) та знайдіть значення функції  $f(x, y)$  в цій точці.

Варіант 14.

Завдання1. Для функції двох аргументів  $f(x, y) = \frac{x+1}{x+\sqrt{y}}$  знайти її частинні похідні

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Завдання2. Для функції  $F(x, y, z) = \frac{\sqrt{1-x-y-z}}{x}$  знайти її градієнт в точці

$M(1; -1; -2)$ .

Завдання3. Для функції  $F(x, y, z)$  з завдання2 знайдіть похідну в точці  $M$  за напрямом вектора  $\vec{v} = (3; 1; 1)$ .

Завдання 4. Дослідити на локальний екстремум функцію

$$f(x, y) = 9y^2 + 4x^2 - 8x + 6y \cos x - 4x \sin y + \cos^2 x - \cos^2 y + 8$$

в області  $D$ , що обмежена нерівностями:  $-1 \leq x \leq 5, -3 \leq y \leq 2$ :

1. Зобразити лінії рівня функції  $f(x, y)$  в області  $D$ .
2. Визначити за графіком наближені координати точки екстремуму.

3. Розв'язати систему рівнянь 
$$\begin{cases} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0 \end{cases}$$
 та знайти точку, підозрілу на екстремум.

4. Обчислити значення других похідних  $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$  в отриманій точці

та перевірити виконання достатніх умов екстремуму.

5. Визначити тип точки (мінімум, максимум) та знайдіть значення функції  $f(x, y)$  в цій точці.

Варіант 15.

Завдання1. Для функції двох аргументів  $f(x, y) = \arctg\left(\frac{y}{x}\right)$  знайти її частинні похідні

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Завдання2. Для функції  $F(x, y, z) = \sqrt[3]{y + e^x} \cdot \sqrt{z}$  знайти її градієнт в точці  $M(2; -1; 1)$

Завдання3. Для функції  $F(x, y, z)$  з завдання2 знайдіть похідну в точці  $M$  за напрямом вектора  $\vec{v} = (3; 1; 1)$ .

Завдання 4. Дослідити на локальний екстремум функцію

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 2y - 2x + e^{2y} + 2e^y - 2y \cos x - 2xe^y + \cos^2 x - 2 \cos x + 4$$

в області  $D$ , що обмежена нерівностями:  $1 \leq x \leq 2, -1.5 \leq y \leq -0.5$ :

1. Зобразити лінії рівня функції  $f(x, y)$  в області  $D$ .
2. Визначити за графіком наближені координати точки екстремуму.

3. Розв'язати систему рівнянь 
$$\begin{cases} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0 \end{cases}$$
 та знайти точку, підозрілу на екстремум.
4. Обчислити значення других похідних  $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$ ,  $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$  в отриманій точці та перевірити виконання достатніх умов екстремуму.
5. Визначити тип точки (мінімум, максимум) та знайдіть значення функції  $f(x, y)$  в цій точці.

#### Варіант 16.

*Завдання 1.* Для функції двох аргументів  $f(x, y) = \sqrt{\frac{2x + xy}{y + 1}}$  знайти її частинні похідні

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

*Завдання 2.* Для функції  $F(x, y, z) = \sqrt[5]{\frac{z - 2y}{3x}}$  знайти її градієнт в точці  $M(0; -1; 1)$ .

*Завдання 3.* Для функції  $F(x, y, z)$  з завдання 2 знайдіть похідну в точці  $M$  за напрямом вектора  $\vec{v} = (3; 1; 1)$ .

*Завдання 4.* Дослідити на локальний екстремум функцію

$$f(x, y) = x^2 + 3x \sin y - 5e^x \cos y + e^{3x} + 7$$

в області  $D$ , що обмежена нерівностями:  $-3 \leq x \leq 1$ ,  $-2 \leq y \leq 3$ :

6. Зобразити лінії рівня функції  $f(x, y)$  в області  $D$ .
7. Визначити за графіком наближені координати точки екстремуму.

8. Розв'язати систему рівнянь 
$$\begin{cases} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0 \end{cases}$$
 та знайти точку, підозрілу на екстремум.

9. Обчислити значення других похідних  $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$ ,  $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$  в отриманій точці та перевірити виконання достатніх умов екстремуму.
10. Визначити тип точки (мінімум, максимум) та знайдіть значення функції  $f(x, y)$  в цій точці.

#### Варіант 17.

*Завдання 1.* Для функції двох аргументів  $f(x, y) = \frac{\sqrt{y - 5y}}{\sqrt{x + 1}}$  знайти її частинні похідні

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Завдання2. Для функції  $F(x, y, z) = \frac{e^y x^5 - y}{z}$  знайти її градієнт в точці  $M(-2; -1; 1)$ .

Завдання3. Для функції  $F(x, y, z)$  з завдання2 знайдіть похідну в точці  $M$  за напрямом вектора  $\vec{v} = (3; 2; -1)$ .

Завдання 4. Дослідити на локальний екстремум функцію

$$f(x, y) = y^2 + 4y \sin x - 4e^y \cos x + e^{4y} + 3$$

в області  $D$ , що обмежена нерівностями:  $-2 \leq x \leq 3, -3 \leq y \leq 1$ :

6. Зобразити лінії рівня функції  $f(x, y)$  в області  $D$ .

7. Визначити за графіком наближені координати точки екстремуму.

8. Розв'язати систему рівнянь 
$$\begin{cases} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0 \end{cases}$$
 та знайти точку, підозрілу на екстремум.

9. Обчислити значення других похідних  $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$  в отриманій точці та перевірити виконання достатніх умов екстремуму.

10. Визначити тип точки (мінімум, максимум) та знайдіть значення функції  $f(x, y)$  в цій точці.

#### Варіант 18.

Завдання1. Для функції двох аргументів  $f(x, y) = \frac{x^2}{\sqrt{x-y}}$  знайти її частинні похідні

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Завдання2. Для функції  $F(x, y, z) = \sqrt[3]{\frac{z-2x}{y+4}}$  знайти її градієнт в точці  $M(1; -1; 2)$ .

Завдання3. Для функції  $F(x, y, z)$  з завдання2 знайдіть похідну в точці  $M$  за напрямом вектора  $\vec{v} = (3; 1; 1)$ .

Завдання 4. Дослідити на локальний екстремум функцію

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x \cos y - 2y \sin x + \cos^2 x - \cos^2 y - 5$$

в області  $D$ , що обмежена нерівностями:  $-3 \leq x \leq 3, -2 \leq y \leq 4$ :

6. Зобразити лінії рівня функції  $f(x, y)$  в області  $D$ .

7. Визначити за графіком наближені координати точки екстремуму.

8. Розв'язати систему рівнянь 
$$\begin{cases} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0 \end{cases}$$
 та знайти точку, підозрілу на екстремум.

9. Обчислити значення других похідних  $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$  в отриманій точці та перевірити виконання достатніх умов екстремуму.

10. Визначити тип точки (мінімум, максимум) та знайдіть значення функції  $f(x, y)$  в цій точці.

Варіант 19.

Завдання1. Для функції двох аргументів  $f(x, y) = \frac{\sqrt{x-y}}{y^2}$  знайти її частинні похідні

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Завдання2. Для функції  $F(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{1-x-y-z}}$  знайти її градієнт в точці

$M(1; -1; -1)$ .

Завдання3. Для функції  $F(x, y, z)$  з завдання2 знайдіть похідну в точці  $M$  за напрямом вектора  $\vec{v} = (3; 1; 1)$ .

Завдання 4. Дослідити на локальний екстремум функцію

$$f(x, y) = x^2 + 2x \cos y - 6 \sin y \sin x - \cos^2 y - 8 \cos^2 x + 5$$

в області  $D$ , що обмежена нерівностями:  $-1 \leq x \leq 1, -3 \leq y \leq 1$ :

6. Зобразити лінії рівня функції  $f(x, y)$  в області  $D$ .

7. Визначити за графіком наближені координати точки екстремуму.

8. Розв'язати систему рівнянь 
$$\begin{cases} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0 \end{cases}$$
 та знайти точку, підозрілу не екстремум.

9. Обчислити значення других похідних  $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$  в отриманій точці та перевірити виконання достатніх умов екстремуму.

10. Визначити тип точки (мінімум, максимум) та знайдіть значення функції  $f(x, y)$  в цій точці.

Варіант 20.

Завдання1. Для функції двох аргументів  $f(x, y) = \frac{e^y - \sqrt{x}}{y}$  знайти її частинні похідні

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Завдання2. Для функції  $F(x, y, z) = \frac{y^2 + y + x}{z - 2x}$  знайти її градієнт в точці  $M(-1; -1; 2)$ .

Завдання3. Для функції  $F(x, y, z)$  з завдання2 знайдіть похідну в точці  $M$  за напрямом вектора  $\vec{v} = (1; -1; 3)$ :

**Завдання 4.** Дослідити на локальний екстремум функцію  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2y - 2y \sin x + 2x \sin y + \sin^2 y - \cos^2 x$  в області  $D$ , що обмежена нерівностями:  $-2 \leq x \leq 3, -3 \leq y \leq 3$ :

1. Зобразити лінії рівня функції  $f(x, y)$  в області  $D$ .
2. Визначити за графіком наближені координати точки екстремуму.
3. Розв'язати систему рівнянь 
$$\begin{cases} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0 \end{cases}$$
 та знайти точку, підозрілу на екстремум.
4. Обчислити значення других похідних  $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$  в отриманій точці та перевірити виконання достатніх умов екстремуму.
5. Визначити тип точки (мінімум, максимум) та знайдіть значення функції  $f(x, y)$  в цій точці.

### Зразок виконання лабораторної роботи 9

**Завдання 1.** Для функції двох аргументів  $f(x, y) = \frac{x^2 - y}{\sqrt{x}}$  знайти її частинні похідні

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

**Завдання 2.** Для функції  $F(x, y, z) = x^2 + xy + z^2$  знайти її градієнт в точці  $M(1; 2; 0)$ .

**Завдання 3.** Для функції  $F(x, y, z)$  з завдання 2 знайдіть похідну в точці  $M$  за напрямом вектора  $\vec{v} = (1; 2; 1)$ .

**Завдання 4.** Дослідити на локальний екстремум функцію

$$f(x, y) = 5x^2 + 4y^2 - 6y + 7x \cos y - 4y \sin x + 5$$

в області  $D$ , що обмежена нерівностями  $-3 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 5$ :

1. Зобразити лінії рівня функції  $f(x, y)$  в області  $D$ .
2. Визначити за графіком наближені координати точки екстремуму.
3. Розв'язати систему рівнянь 
$$\begin{cases} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0 \end{cases}$$
 та знайти точку, підозрілу на екстремум.
4. Обчислити значення других похідних  $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$  в отриманій точці та перевірити виконання достатніх умов екстремуму.
5. Визначити тип точки (мінімум, максимум) та знайдіть значення функції  $f(x, y)$  в цій точці.

## Завдання 1. Розв'язок:

**Завдання 1.** Для функції двох аргументів  $f(x, y) = \frac{x^2 - y}{\sqrt{x}}$  знайти її частинні похідні

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Задаємо функцію  $f(x, y)$ .

```
(%i1) f: (x^2-y)/sqrt(x);
```

```
(%o1)  $\frac{x^2 - y}{\sqrt{x}}$ 
```

Обчислюємо похідні першого порядку  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .

```
(%i2) dfdx: diff(f,x);  
      dfdy: diff(f,y);
```

```
(%o2)  $2\sqrt{x} - \frac{x^2 - y}{2x^{3/2}}$ 
```

```
(%o3)  $-\frac{1}{\sqrt{x}}$ 
```

Обчислюємо похідні другого порядку  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ .

```
(%i4) d2fdx2: diff(f,x,2);  
      d2fdy2: diff(f,y,2);  
      d2fdxdy: diff(f,x,1,y,1);
```

```
(%o4)  $\frac{3(x^2 - y)}{4x^{5/2}}$ 
```

```
(%o5) 0
```

```
(%o6)  $\frac{1}{2x^{3/2}}$ 
```

## Завдання 2. Розв'язок:

**Завдання 2.** Для функції  $F(x, y, z) = x^2 + xy + z^2$  знайти її градієнт в точці  $M(1; 2; 0)$ .

Задаємо функцію  $F(x, y, z)$ .

```
(%i7) F: x^2+x*y+z^2;
```

```
(%o7)  $z^2 + x y + x^2$ 
```

Обчислюємо частинні похідні та знаходимо градієнт (вектор grad).



```
(%i8) dFdx: diff(F,x);
      dFdy: diff(F,y);
      dFdz: diff(F,z);
      grad: [dFdx,dFdy,dFdz];
(%o8) y+2x
(%o9) x
(%o10) 2z
(%o11) [y+2x,x,2z]
```

Обчислюємо значення градієнта в точці  $M(1,2,0)$ .

```
(%i12) gr:ev(grad,x=1,y=2,z=0);
(%o12) [4,1,0]
```

### Завдання 3. Розв'язок:

**Завдання 3.** Для функції  $F(x, y, z)$  з завдання 2 знайдіть похідну в точці  $M$  за напрямом вектора  $\bar{v} = (1; 2; 1)$ .

Завантажуємо пакет `eigen`.

```
(%i14) load(eigen)$
```

Задамо вектор  $\bar{v} = (1, 2, 1)$  та знайдемо вектор напрямних косинусів  $\bar{l} = \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}$ , для чого

скористаємось функцією `uvect` пакету `eigen`.

```
(%i15) v: [1,2,1];
      l: uvect(v);
(%o15) [1,2,1]
(%o16) [1/√6, 2/√6, 1/√6]
```

Знайдемо похідну за напрямком  $\frac{\partial F}{\partial l}$  в точці  $M(1,2,0)$  як скалярний добуток вектора  $\bar{l}$  на значення градієнта в цій точці (вектор `gr`).

```
(%i17) dFdl: gr.l;
(%o17) √6
```

### Завдання 4. Розв'язок:

**Завдання 4.** Дослідити на локальний екстремум функцію

$$f(x, y) = 5x^2 + 4y^2 - 6y + 7x \cos y - 4y \sin x + 5$$

в області  $D$ , що обмежена нерівностями  $-3 \leq x \leq 2$ ,  $-1 \leq y \leq 5$ :

1. Зобразити лінії рівня функції  $f(x, y)$  в області  $D$ .
2. Визначити за графіком наближені координати точки екстремуму.

3. Розв'язати систему рівнянь 
$$\begin{cases} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0 \end{cases}$$
 та знайти точку, підозрілу на екстремум.

- Обчислити значення других похідних  $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$ ,  $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$  в отриманій точці та перевірити виконання достатніх умов екстремуму.
- Визначити тип точки (мінімум, максимум) та знайдіть значення функції  $f(x,y)$  в цій точці.

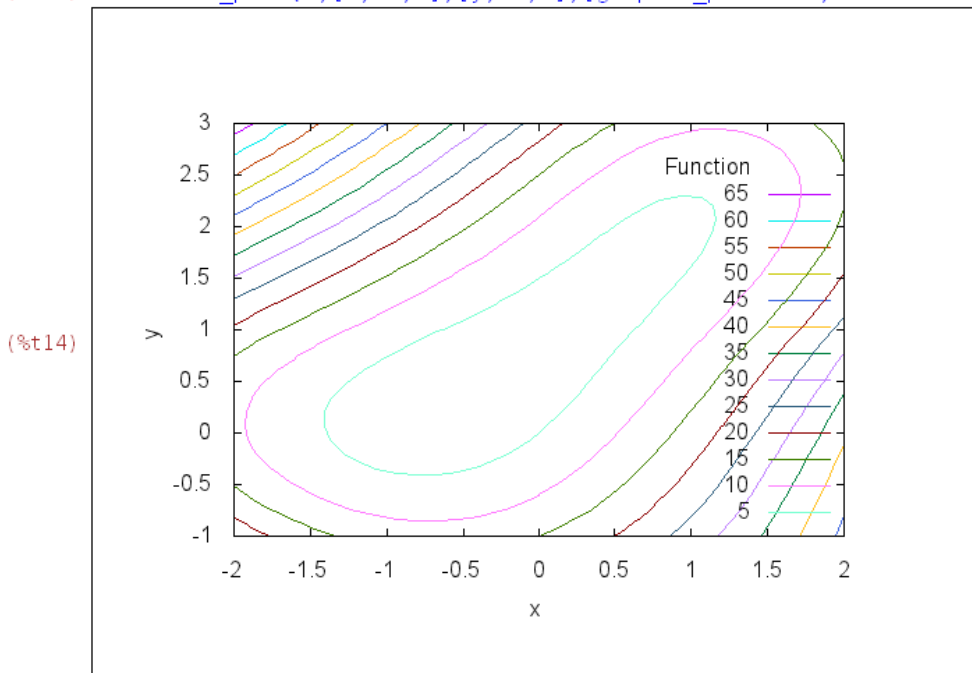
Задаємо функцію  $f(x,y)$ .

```
(%i1) f: 5*x^2+4*y^2-6*y+7*x*cos(y)-4*y*sin(x)+5;
```

```
(%o1) 7 x cos(y)+4 y^2-4 sin(x) y-6 y+5 x^2+5
```

- За допомогою функції `contour_plot` зображуємо лінії рівня, встановивши кількість ліній рівня за допомогою додаткової опції `[gnuplot_preamble, "set cntrparam levels 13"]`.

```
(%i14) wxcontour_plot(f,[x,-2,2],[y,-1,3],[gnuplot_preamble, "set cntrparam levels 13"]);
```



```
(%o14)
```

- З побудованих ліній рівня видно, що функція має екстремум (мінімум) поблизу початку координат.

- Знаходимо частинні похідні першого порядку.

```
(%i15) dfdx:diff(f,x); dfdy:diff(f,y);
```

```
(%o15) 7 cos(y)-4 cos(x) y+10 x
```

```
(%o16) -7 x sin(y)+8 y-4 sin(x)-6
```

Завантажуємо пакет `minpack`.

```
(%i18) load(minpack)$
```

Щоб знайти точку, підозрілу на екстремум, розв'язуємо систему

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

за допомогою функції `minpack_solve`, вказуючи при цьому `[0, 0]` як наближений розв'язок.

```
(%i20) m:minpack_solve([dfdx,dfdy],[x,y],[0,0]);
(%o20) [ [-0.54790920368656, 0.33288668338378 ], 3.3306690738754696 10^-15, 1 ]
```

Координати точки, підозрілої на екстремум, присвоюємо змінним `x0`, `y0` та обчислюємо значення похідних першого порядку в цій точці, щоб переконатися, що вони справді близькі до нуля.

```
(%i21) x0:m[1][1]; y0:m[1][2];
      ev(dfdx,x=x0,y=y0);
      ev(dfdy,x=x0,y=y0);
(%o21) -0.54790920368656
(%o22) 0.33288668338378
(%o23) 0.0
(%o24) 3.3306690738754696 10^-15
```

4. Обчислюємо значення других похідних в критичній точці.

```
(%i25) d2fdx2: diff(f,x,2);
      d2fdy2: diff(f,y,2);
      d2fdxdy: diff(f,x,1,y,1);
(%o25) 4 sin(x) y + 10
(%o26) 8 - 7 x cos(y)
(%o27) - 7 sin(y) - 4 cos(x)
(%i28) A: ev(d2fdx2,x=x0,y=y0);
      B: ev(d2fdy2,x=x0,y=y0);
      C: ev(d2fdxdy,x=x0,y=y0);
(%o28) 9.306392469449296
(%o29) 11.62481440017302
(%o30) -5.70187015608522
```

Перевіряємо достатні умови екстремуму.

```
(%i31) A*B-C^2;
(%o31) 75.67376191566061
```

Оскільки  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0$ , достатні умови екстремуму виконуються.

5. Оскільки  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 9,30639... > 0$ , то точка  $(x_0, y_0)$  є точкою мінімуму. Знаходимо значення функції  $f$  в цій точці.

```
(%i32) ev(f,x=x0,y=y0);  
(%o32) 2.015749683394199
```

## ЗМІСТ

Вступ .....	3
Лабораторна робота 1 .....	4
Зразок виконання лабораторної роботи 1 .....	13
Завдання 1. Розв'язок: .....	14
Завдання 2. Розв'язок: .....	15
Завдання 3. Розв'язок: .....	16
Лабораторна робота 2 .....	17
Зразок виконання лабораторної роботи 2 .....	29
Завдання 1. Розв'язок: .....	29
Завдання 2. Розв'язок: .....	30
Завдання 3. Розв'язок: .....	32
Завдання 4. Розв'язок: .....	33
Лабораторна робота 3 .....	34
Зразок виконання лабораторної роботи 3 .....	44
Завдання 1. Розв'язок: .....	44
Завдання 2. Розв'язок: .....	45
Завдання 3. Розв'язок: .....	46
Лабораторна робота 4 .....	47
Зразок виконання лабораторної роботи 4 .....	59
Завдання 1. Розв'язок: .....	59
Завдання 2. Розв'язок: .....	60
Завдання 3. Розв'язок: .....	61
Завдання 4. Розв'язок: .....	61
Завдання 5. Розв'язок: .....	62
Лабораторна робота 5 .....	63
Зразок виконання лабораторної роботи 5 .....	67
Завдання 1. Розв'язок: .....	67
Завдання 2. Розв'язок: .....	68
Лабораторна робота 6 .....	69
Зразок виконання лабораторної роботи 6 .....	76
Завдання 1. Розв'язок: .....	76
Завдання 2. Розв'язок: .....	77
Завдання 3. Розв'язок: .....	79
Лабораторна робота 7 .....	80
Зразок виконання лабораторної роботи 7 .....	85
Завдання 1. Розв'язок: .....	86
Завдання 2. Розв'язок: .....	86
Завдання 3. Розв'язок: .....	87
Завдання 4. Розв'язок: .....	88
Лабораторна робота 8 .....	89
Зразок виконання лабораторної роботи 8 .....	95
Завдання 1. Розв'язок: .....	95
Завдання 2. Розв'язок: .....	96
Завдання 3. Розв'язок: .....	96
Завдання 4. Розв'язок: .....	97
Завдання 5. Розв'язок: .....	97
Лабораторна робота 9 .....	98
Зразок виконання лабораторної роботи 9 .....	111
Завдання 1. Розв'язок: .....	112
Завдання 2. Розв'язок: .....	112
Завдання 3. Розв'язок: .....	113
Завдання 4. Розв'язок: .....	113