

Тема 8: Рівняння Максвелла

Питання лекції:

1. Зв'язок між змінним магнітним полем і вихорним електричним полем (перше рівняння Максвелла).
2. Струм зміщення (виникнення магнітного поля при зміні електричного поля – рівняння Максвелла).
3. Електромагнітне поле. Рівняння Максвелла в інтегральній формі.
4. Рівняння Масквелла в диференціальній формі.

1. Зв'язок між змінним магнітним полем і вихорним електричним полем (перше рівняння Максвелла)

При вивченні явища електромагнітної індукції було встановлено, що магнітне поле, яке змінюється в часі, викликає у провідному контурі е.р.с. індукції $\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}$.

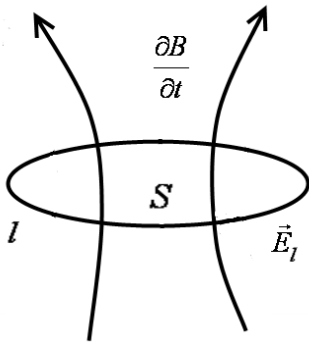


Рис. 8.1

Електрорушійна сила виражається через циркуляцію вектора електричного поля, яке в даному випадку є вихровим (рис. 8.1):

$$\mathcal{E}_i = \oint_1 \vec{E}_{\text{вих}} d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (1)$$

Тут $\Phi = \int_S \vec{B}_n ds$ – неоднорідний потік вектора \vec{B} через площу S , охоплену контуром. Тому (1) можна записати:

$$\oint_1 \vec{E}_{\text{вих}} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \left(\int_S \vec{B}_n ds \right). \quad (2)$$

Це закон електромагнітної індукції у найзагальнішому вигляді.

Максвелл допустив, що **змінне в часі магнітне поле**, обумовлює **появу в просторі вихорного поля** (незалежно від наявності провідного контура). Провідний контур дає можливість лише **виявити** (по індукційному струмові) існування у відповідних точках простору електричного поля. – **Це одне із положень електромагнітної теорії Максвелла.**

В загальному випадку електричне поле складається із



вихорного $\vec{E}_{вих}$ і електростатичного поля \vec{E}_q (створеного нерухомими зарядами):

$$\vec{E} = \vec{E}_{вих} + \vec{E}_q \quad (3)$$

Електростатичне поле потенціальне, його лінії починаються на додатніх і закінчуються на від'ємних зарядах. Циркуляція вектора \vec{E}_q по будь-якому замкненому контуру для електростатичного поля рівна нулеві:

$$\oint_1 \vec{E}_q d\vec{l} = 0 \quad (4)$$

Додамо відповідно ліві і праві частини (2) і (4):

$$\oint_1 \vec{E}_{вих} d\vec{l} + \oint_1 \vec{E}_q d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \left(\int_s B_n ds \right), \quad (5)$$

$$\oint_1 (\vec{E}_{вих} + \vec{E}_q) d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \left(\int_s B_n ds \right). \quad (6)$$

Враховуючи (3), рівняння (6) запишемо:

$$\boxed{\oint_1 (\vec{E} d\vec{l}) = -\frac{d}{dt} \left(\int_s B_n ds \right)}. \quad (7)$$

Це одне з основних рівнянь електромагнітної теорії Максвелла.

2. Струм зміщення (виникнення магнітного поля при зміні електричного поля)

Отже, змінне магнітне поле викликає вихорне електричне поле. Аналізуючи різні електромагнітні процеси, Максвелл прийшов до висновку, що повинно існувати і зворотнє явище. Тобто, **зміна електричного поля повинна викликати магнітне поле**. Це друге основне положення теорії Максвелла, яке доводиться таким чином.

Відомо, що магнітне поле є обов'язковою ознакою електричного струму. Електричний струм – це напрямлений рух зарядів і сила струму визначається як кількість зарядів, що проходять через перпендикулярну поверхню за одиницю часу:

$I = \frac{dq}{dt}$. Струм в електричному полі неперервний і протікає по всьому колу. Однак є випадки, коли в колі протікає струм, але заряди на деяких проміжках кола не переміщуються. Уявімо собі електричне коло, яке складається з конденсатора C і джерела е.р.с. \mathcal{E} (рис. 8.2).

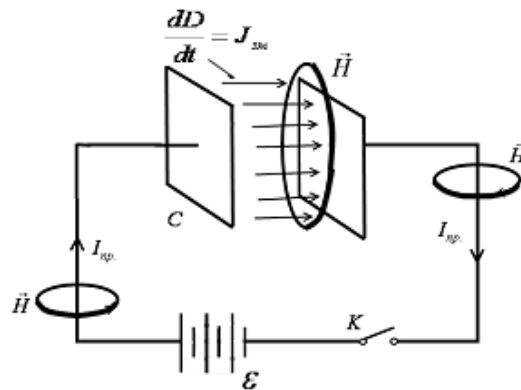


Рис. 8.2

Допустимо, що замкнули ключ K і конденсатор заряджається. Тоді в цей час у колі тече струм I , обумовлений рухом зарядів. Однак між пластинами конденсатора заряди не переміщуються (бо їх там нема – вакуум), тому **струм провідності** протікати не може. Виходить, що ніби є розрив електричного кола, але струм по всьому колу тече. Пояснити таку суперечність можна тим, що між пластинами конденсатора у цей час є електричне поле, яке змінюється ($\frac{dE}{dt}$ або $\frac{dD}{dt}$).

Максвелл допустив, що саме **змінне електричне поле** виконує роль струму на ділянці між електродами, яке назвав **струмом зміщення**. Таким чином, струми провідності в провідниках електричного кола замикаються **струмами зміщення** між пластинами (у вакуумі, в діелектрику).

Знайдемо кількісний зв'язок між змінним електричним полем і викликаним ним магнітним полем.

Між обкладками конденсатора існує електричне поле \vec{E} (чи електричне зміщення \vec{D}). В плоскому конденсаторі напруженість електричного поля

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \text{ або } D = \sigma. \quad (8)$$

Заряд на пластині $q = \sigma \cdot S = DS.$ (9)

Сила струму зміщення

$$I_{зм} = \frac{dq}{dt} = S \frac{dD}{dt}. \quad (10)$$

Густина струму зміщення $\frac{I_{зм}}{S} = \frac{dD}{dt}$

або $j_{зм} = \frac{dD}{dt}. \quad (11)$

Таким чином, коло струму стає замкненим: на ділянці провідників тече струм провідності ($I_{пр}$), а на ділянці конденсатора – струм зміщення ($I_{зм}$).

Слід відзначити, що струм зміщення існує скрізь, де відбувається зміна електричного поля, також і в провідниках. Однак у поовідниках струм зміщення малий порівняно зі струмом провідності. І навпаки, в діелектриках (у вакуумі) струм провідності малий, а більший струм зміщення.

Взагалі через будь-який переріз замкнутого кола тече деякий сумарний струм густиною j (рис. 8.3):

$$j = j_{пр} + j_{зм} = j_{пр} + \frac{dD}{dt}. \quad (12)$$

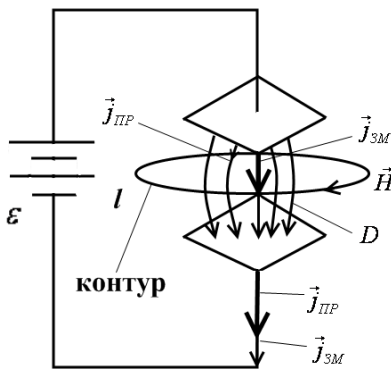


Рис. 8.3

Оскільки навколо струму існує магнітне поле, можна знайти циркуляцію вектора \vec{H} вздовж контура l , що охоплює цей сумарний (повний) струм (закон повного струму):

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = I_{пр} + I_{зм}. \quad (13)$$

В загальному випадку

$$I_{np} = \int_S \vec{j}_{np} d\vec{S}, \quad (14)$$

$$I_{zm} = \int_S \frac{d\vec{D}}{dt} d\vec{S}. \quad (15)$$

Враховуючи (14) і (15), вираз (13) запишемо:

$$\oint_1 \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j}_{np} d\vec{S} + \int_S \frac{d\vec{D}}{dt} d\vec{S},$$

або

$$\boxed{\oint_1 \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j}_{np} + \frac{d\vec{D}}{dt} \right) d\vec{S}.} \quad (16)$$

Це ще одне **рівняння Максвелла**, яке ми знаємо як закон повного струму. Воно показує, що зміна в часі вектора електричної індукції \vec{D} пов'язана з магнітним полем \vec{H} .

3. Електромагнітне поле. Рівняння Максвелла в інтегральній формі

Ми незалежно встановили, що змінне магнітне поле призводить до появи вихорного електричного поля, а змінне електричне поле викликає магнітне поле. Обидва поля мають вихорний характер: силові лінії цих полів замкнені і взаємно переплетені. Електричні лінії охоплюють магнітні, а магнітні – електричні. Якісно це можна зобразити так (рис. 8.4):

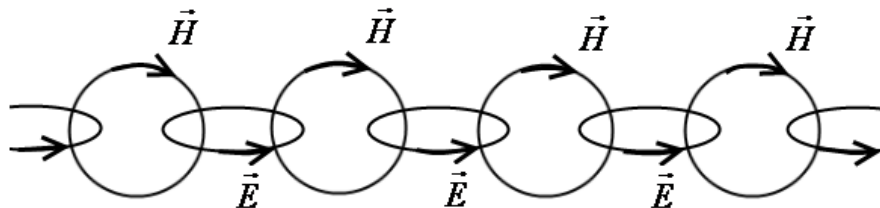


Рис. 8.4

Таким чином, існує єдине електромагнітне поле як утворення матерії в просторі. Відкриття струму зміщення дало можливість Максвеллу створити теорію електричних і магнітних явищ. Ця теорія пояснила всі відомі в той час експериментальні факти і передбачила ряд нових явищ, існування яких підтвердилось пізніше. Основним же наслідком теорії Максвелла був висновок про існування **електромагнітних хвиль**, що поширюються зі швидкістю світла. Теоретичне дослідження властивостей цих хвиль привело Максвелла до створення електромагнітної теорії світла. Основу теорії становлять **рівняння Максвелла**. У вченні про електромагнетизм ці рівняння відіграють таку ж роль, як закони Ньютона в механіці. Рівняння Максвелла не виводяться, а лише виражають сукупність наших відомостей про електромагнітне поле.

Запишемо **рівняння Максвелла в інтегральній формі**. В системі рівнянь прийнято записувати першим закон повного струму, другим – рівняння, що виражає закон електромагнітної індукції, третім і четвертим – теореми Остроградського-Гаусса для магнітного і електростатичного полів:

$$\begin{aligned} \oint_1 \vec{H} d\vec{l} &= \int_s \frac{d\vec{D}}{dt} d\vec{s} + \int_s \vec{j} d\vec{s}, & \int_s \vec{B} d\vec{s} &= 0, \\ \oint_1 \vec{E} d\vec{l} &= -\frac{d}{dt} \left(\int_s \vec{B} d\vec{s} \right), & \int_s \vec{D} d\vec{s} &= q. \end{aligned} \quad (17)$$

Ці рівняння зв'язують значення \vec{E} і \vec{H} вздовж деякого контура l зі значеннями $\frac{dB}{dt}$ і $\frac{dD}{dt}$ в точках поверхні, охопленої контуром (рис. 8.5). Наприклад, зміна у часі вектора \vec{B} , що пронизує поверхню S контура l , викликає у цьому контурі вихорне електричне поле $E_{вих}$.

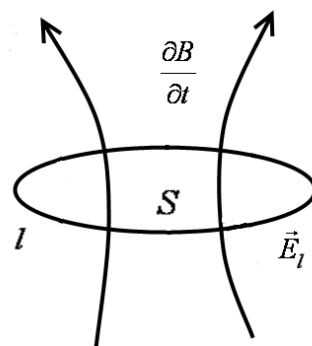


Рис. 8.5

4. Рівняння Максвелла в диференціальній формі

Рівняння Максвелла в інтегральній формі застосовуються до поверхонь будь-якої величини, тому величини $\vec{E}, \vec{H}, \frac{d\vec{B}}{dt}, \frac{d\vec{D}}{dt}$, що у них входять, відносяться до **різних** точок простору (див. рис. 8.5). Однак можна перетворити ці рівняння у таку форму, щоб усі величини відносились до **однієї і тієї ж точки простору**. Для цього рівняння Максвелла треба застосувати до поверхонь безмежно малої величини (аналогічно до того, як це робиться при виведенні рівняння Пуассона). Тоді одержимо такі системи диференціальних рівнянь (замість рівнянь 17)):

$$\begin{aligned}\frac{dH_z}{dy} - \frac{dH_y}{dz} &= \frac{dD_x}{dt} + j_x, \\ \frac{dH_x}{dz} - \frac{dH_z}{dx} &= \frac{dD_y}{dt} + j_y, \\ \frac{dH_y}{dx} - \frac{dH_x}{dy} &= \frac{dD_z}{dt} + j_z,\end{aligned}\tag{17}$$

$$\begin{aligned}\frac{dE_z}{dy} - \frac{dE_y}{dz} &= -\frac{dB_x}{dt}, \\ \frac{dE_x}{dz} - \frac{dE_z}{dx} &= -\frac{dB_y}{dt}, \\ \frac{dE_y}{dx} - \frac{dE_x}{dy} &= -\frac{dB_z}{dt},\end{aligned}\tag{18}$$

$$\begin{aligned}\frac{dB_x}{dx} + \frac{dB_y}{dy} + \frac{dB_z}{dz} &= 0, \\ \frac{dD_x}{dx} + \frac{dD_y}{dy} + \frac{dD_z}{dz} &= \rho\end{aligned}\tag{19}$$

(рівняння Пуассона).

$$\int \frac{dx}{x} =$$

У векторному вигляді ці рівняння можна представити таким чином:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{d\vec{D}}{dt} + \vec{j}, & \operatorname{div} \vec{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= \frac{d\vec{B}}{dt}, & \operatorname{div} \vec{D} &= \rho. \end{aligned} \quad (20)$$

Питання для контролю

1. Основні положення електромагнітної теорії Максвелла .
2. Що таке струм зміщення ?
3. Який кількісний зв'язок існує між змінним електричним полем і викликаним ним магнітним полем ?
4. Що таке електромагнітне поле ?
5. У чому полягає основний висновок із електромагнітної теорії Максвелла ?
6. Записати і пояснити рівняння Максвелла в інтегральній формі.
7. Записати та пояснити рівняння Максвелла в диференціальній формі.

Допоміжна література

1. *Ионушас К.К., Малинко В.Н.* Курс фізики, т. 2, ч. 1. – Киев: КВВИУС, 1987. – §§ 17, 18, 19, 20.
2. *Савельев И.В.* Курс общей физики, т. 2. – М.: Наука, 1978. – §§ 69–71.
3. *Савельев И.В.* Курс общей физики, т. 1. – М.: Наука, 1973. – §§ 103, 105–108.
4. *Калашиников С.Г.* Электричество. 1977. – §§ 131, 136–139.