Тема 6. **Хвилі у пружному середовищі**

Питання лекції:

1. Хвильові процеси. Види хвиль.
2. Хвильова поверхня. Принцип Гюйгенса.
3. Рівняння хвилі.
4. Поняття про хвильовий пакет. Групова швидкість.
5. Хвильове рівняння.

1. **Хвильові процеси. Види хвиль**

Хвильові процеси широко розповсюджені у природі, у техніці і відіграють велику роль у житті людини. Електромагнітні хвилі приносять енергію від Сонця, людина бачить завдяки електромагнітним світловим хвилям. Електромагнітні хвилі є основою радіозв'язку, звукові хвилі дають можливість людині чути тощо.

Тіло, яке коливається (або система), віддає свою енергію в зовнішнє середовище. При цьому воно створює навколо себе періодично повторювані збурення середовища. На частинки середовища діє періодична зовнішня сила і вони коливаються з частотою цієї вимушуючої сили. Оскільки частинки середовища взаємозв'язані, взаємодіють між собою, коливальний процес розповсюджується з деякою швидкістю і супроводжується перенесенням енергії.

Розповсюдження в середовищі періодичного збурення, яке супроводжується перенесенням енергії, називається **хвилею.**

Існують поздовжні і поперечні хвилі. У поздовжніх хвилях частинки середовища коливаються в напрямку, який співпадає з напрямком розповсюдження коливань. На рис. 6.1 s – зміщення, $\vec{\upsilon}$ – швидкість поширення хвиль.

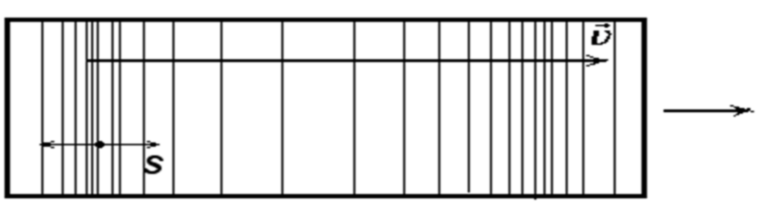

Рис. 6.1

Поздовжні хвилі можуть розповсюджуватись у газах, рідинах динах і твердих тілах. Це хвилі об'ємної деформації.

Поперечні хвилі є хвилями деформації зсуву. Тому вони можуть розповсюджуватись тільки в твердих тілах. Прикладом поперечної хвилі є хвиля, створена у довгому шнурі (рис. 6.2).

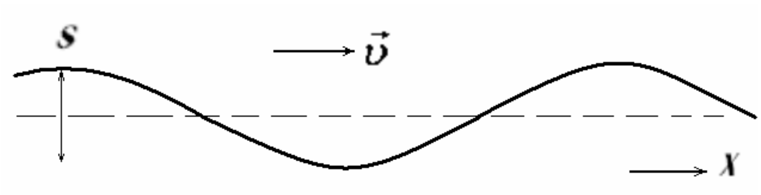

Рис. 6.2

Хвилі в середовищі розповсюджуються з деякою швидкістю υ. Це фазова швидкість. Вона характеризує швидкість переміщення даної фази, наприклад, максимуму зміщення. Максимуми зміщення йдуть один за одним від джерела коливань.

Найближча відстань між двома сусідніми точками, які коливаються в однаковій фазі (наприклад максимуми), називається **довжиною хвилі** λ (рис. 6.3).

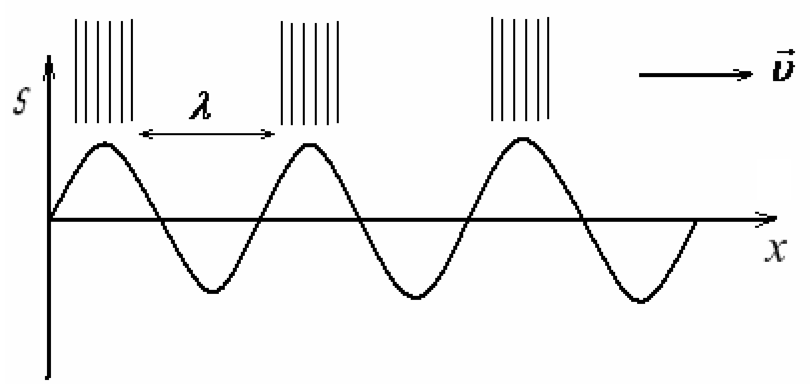

Рис. 6.3

Найменший проміжок часу між моментами, коли точка, що коливається, знаходиться в однаковій фазі, називається періодом T.

Швидкість поширення сталої фази – так звана фазова швидкість – є швидкістю поширення хвилі:

$$\upsilon = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \frac{1}{T} = \lambda \nu = \lambda \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\omega}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \frac{\omega}{\kappa}.$$

Величина $\qquad \kappa = 2\pi/\lambda$

$$\qquad (1)$$

або $\qquad \kappa = \omega / \upsilon$

називається хвильового числом.

2. Хвильова поверхня. Принцип Гюйгенса

Розглянемо хвилю, яка розповсюджується від центра коливань O в однорідному середовищі. Точки середовища з постійною фазою утворюють так звану **хвильову поверхню** і таких хвильових переверхонь існує безліч (рис. 6.4).

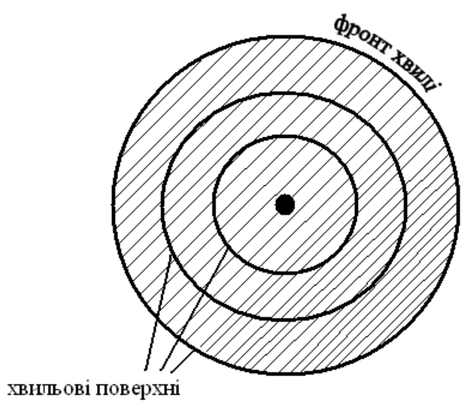

Рис. 6.4

Крайня хвильова поверхня, яка відділяє збурену частину середовища від незбуреної, називається **фронтом хвиль.** Це геометричне місце точок, до яких на деякий момент часу дійшли коливання. Хвильові поверхні бувають різної форми. У найпростіших випадках вони мають форму площини або сфери. Відповідно хвиля в цих випадках називається **плоскою** чи **сферичною.** Невеликі ділянки сферичної хвильової поверхні на великій відстані від центра коливань можна розглядати як плоску хвилю. Напрямки, по яких розповсюджуються коливання, називаються **променями.** У випадку сферичного фронту хвилі промені напрямлені по радіусах (рис. 6.5).

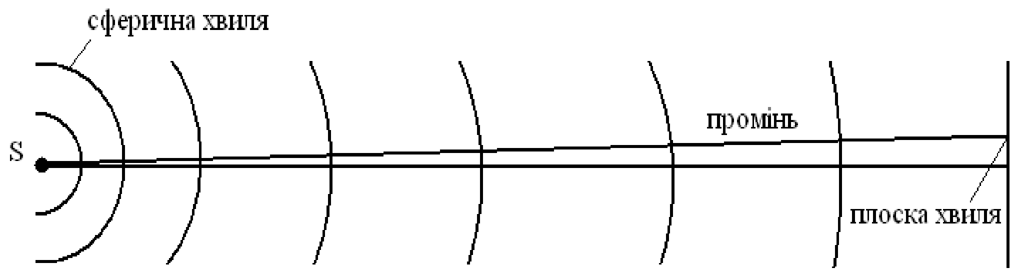

Рис. 6.5

Розглянемо механізм розповсюдження хвиль (принцип Гюйгенса).

У 1678 р. нідерландський вчений Х. Гюйгенс на основі своїх безпосередніх спостережень вів поняття, що **всяка точка хвильової поверхні є центром нової хвилі** – це так званий **принцип Гюйгенса.**

Припустимо, що в момент часу t_1 хвиля, яка розповсюджується із точки O, захопила точки на поверхні S_1 (рис. 6.6). Це означає, що всі точки цієї поверхні в даний момент прийшли в коливальний рух і тому вони всі стали центрами новоутворених хвиль.

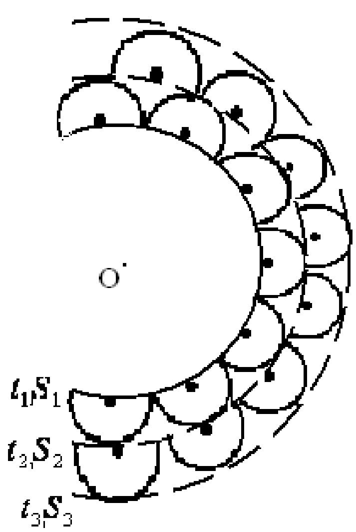

Рис.6.6

Хвильові поверхні всіх нових мікрохвиль мають обвідну S_2, яку ми сприймаємо як поверхню або **фронт хвилі** для наступного моменту t_2. Відповідно всі точки цієї поверхні є центрами нових мікрохвиль з обвідною S_3, яка є фронтом для моменту t_3 тощо. Утворення хвиль на поверхні води може бути ілюстрацією до принципу Гюйгенса.

3. **Рівняння хвилі**

Розглянемо хвилю, яка розповсюджується в напрямку Оx. Для більшої наочності викладок будемо вважати, що маємо справу з поперечними коливаннями. Тобто будемо вважати, що коливання (зміщення) відбуваються в напрямку Оy, а хвиля поширюється у напрямку Оx (рис 6.7.)

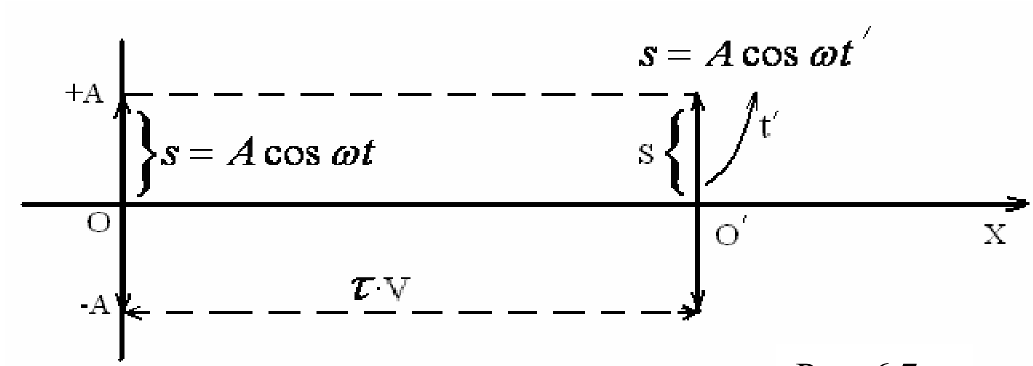

Рис. 6.7

На осі Ox виберемо точку " 0 " і нехай ця точка коливається за гармонічним законом:

$$s = A cos(\omega t), \tag{2}$$

де s – зміщення точки, A – амплітуда коливання, ω – циклічна частота. Початкову фазу приймемо рівною 0. За таким же законом коливаються і всі інші точки, що лежать на осі x, оскільки маємо справу з пружним середовищем і коливання передаються в напрямку x.

Запишемо рівняння коливання точки O', розміщеної на відстані x. Це теж буде гармонічне коливання, однак ми не можемо записати його в точно такому ж вигляді, оскільки ця точка починає коливатися через проміжок часу $\tau = x/\upsilon$, який необхідний для розповсюдження деформації (υ – швидкість поширення хвилі) на відстань x. Тому відлік зміщення s частинок на відстані x потрібно починати через час τ і зміщення точки від положення рівноваги буде визначатися формулою, подібною до формули (1), тільки у неї входитиме час t', за який відбувається зміщення від положення рівноваги. Загальний час t визначається співвідношенням:

$$t = \tau + t'.$$

Звідси знаходимо $t' = t - \tau$ і рівняння коливання точки на відстані x можемо записати:

$$s = A cos\,\omega(t') = A cos\,\omega(t - \tau),$$

Тому **рівняння сферичної хвилі** має вигляд:

$$\boxed{s = \frac{A}{r} cos\left(\omega t - kr + \psi \right)} \qquad (6)$$

Якщо ж врахувати ще розсіяння і поглинання хвиль у середовищі, тобто їх згасання, то амплітуда зменшується з відстанню за експоненціальним законом:

$$A = A_0 \cdot e^{-\gamma r},$$

де γ – коефіцієнт згасання. Тоді рівняння сферичної хвилі набуває вигляду:

$$\boxed{s = \frac{A_0}{r} \cdot e^{-\gamma r} cos\left(\omega t - kr + \psi \right).} \qquad (7)$$

Користуючись рівнянням хвилі, наприклад плоскої (5), легко одержати вираз для фазової швидкості, виходячи з умови незмінності фази:

$$\omega t - kx + \psi = const \qquad (8)$$

Зробивши перестановку, маємо:

$$kx = \omega t + \psi - const, \qquad (9)$$

або

$$x = \frac{\omega}{k} t + \frac{\psi}{k} - \frac{const}{k} \qquad (10)$$

Похідна $\frac{dx}{dt}$ і буде фазовою швидкістю:

$$\boxed{\upsilon = \frac{\omega}{k}}. \qquad (11)$$

4. Поняття про хвильовий пакет. Групова швидкість

Ми розглянули поширення хвилі однієї певної частоти ω – так званої монохроматичної хвилі. Однак монохроматичні хвилі – це ідеалізований випадок. Реально хвиля може бути суперпозицією хвиль декількох частот. Являє інтерес група хвиль, частоти яких неперервно змінюються в невеликому інтервалі $\Delta\omega$. Це так званий хвильовий пакет. Хвильовий пакет можна представити у вигляді інтегралу Фур'є – неперервної суми нескінченно великого числа монохроматичних хвиль, амплітуди і фази яких різні, а частоти знаходяться в інтервалі $\Delta\omega$:

$$s(x,t)=\int_{\omega_0-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2}} A_\omega cos\left(\omega t-k_\omega x+\psi_0\right), \qquad (12)$$

де A_ω– амплітуда, k_ω – хвильове число, ψ_0 – початкова фаза монохроматичної хвилі з частотою ω.

Така хвиля – хвильовий пакет – являє собою імпульс з певними частотами, амплітудами і фазами складових гармонічних монохроматичних хвиль. Швидкість поширення кожної складової може бути різною. Залежність фазової швидкості хвилі від її частоти називається **дисперсією**. Коли дисперсія відсутня, фазові швидкості монохроматичних хвиль однакові і фазові співвідношення між ними не змінюються, а значить і форма імпульсу, яку переносить пакет хвиль, не змінюється. Наприклад, у вакуумі всі електромагнітні хвилі поширюються з однаковою швидкістю *c*, тобто дисперсія відсутня. Коли ж хвилі поширюються у середовищі, монохроматичні складові мають різні швидкості, фазові співвідношення між ними у різних точках простору неперервно змінюються і форма імпульсу, а також хвильового пакету, яким він представляється, також змінюється. В такому випадку швидкість переміщення пакету як цілого прийнято характеризувати так званою **груповою швидкістю.** Оскільки з рухом пакету пов'язане перенесення енергії, то за групову швидкість беруть швидкість поширення максимуму амплітуди, тобто центру пакету.

Знайдемо аналітичний вираз для групової швидкості. У центрі пакету групи хвиль коливання, які створюються близькими за довжиною хвилями, підсилюються. Це можливо завдяки тому, що в центрі фази коливань співпадають, тобто не залежать від довжини хвилі, а також від хвильового числа (умова максимуму при інтерференції). Це означає, що похідна від фази по хвильовому числу дорівнює нулеві. Оскільки фаза хвилі

$$\psi = \omega t - k_{\omega} x + \psi_0 , \tag{13}$$

то
$$\frac{d\psi}{dk_{\omega}} = \frac{d\omega}{dk_{\omega}} t - x = 0 ,$$

звідки
$$\frac{x}{t} = u = \frac{d\omega}{dk_{\omega}} .$$

Таким чином, групова швидкість

$$\boxed{u = \frac{d\omega}{dk} .} \tag{14}$$

Знайдемо зв'язок між фазовою та груповою швидкостями.

Фазова швидкість $\upsilon = \dfrac{\omega}{k}$, звідки $\omega = \upsilon \cdot k$

і
$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{d\left(\upsilon \cdot k\right)}{dk} = \upsilon + \frac{d\upsilon}{dk} \cdot k . \tag{15}$$

Підставивши в (15) значення $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ і $dk = -2\pi \dfrac{d\lambda}{\lambda^2}$, одержимо формулу Релея, яка пов'язує фазову та групову швидкості:

$$\boxed{u = \upsilon - \lambda \frac{d\upsilon}{d\lambda} .} \tag{16}$$

Як бачимо, **швидкість поширення хвилі у середовищі** залежить від довжини хвилі, тобто має місце **дисперсія.** Якщо $\dfrac{d\upsilon}{d\lambda} > 0$ – дисперсія називається нормальною.

При $\dfrac{d\upsilon}{d\lambda} < 0$ – аномальна дисперсія.

При відсутності дисперсії $\frac{d\upsilon}{d\lambda} = 0$ і тоді $u = \upsilon$.

Наприклад, на поверхні рідини можуть виникати хвилі двох видів – гравітаційні і капілярні, пов'язані з силами поверхневого натягу. Для гравітаційних хвиль $u < \upsilon$, для молекулярних $u > \upsilon$.

5. Хвильове рівняння.

Це диференціальне рівняння другого порядку, яке зв'язує величини s, x, t для всякої точки простору при проходженні хвилі через цю точку. Щоб встановити вигляд цього рівняння, співставимо другі частинні похідні по **координатах** і **часу** від функції, яка описує плоску хвилю:

$$s = A\cos\left(\omega t - kx + \psi\right); \tag{17}$$

$$\frac{ds}{dx} = Ak\sin\left(\omega t - kx + \psi\right); \tag{18}$$

$$\frac{d^2 s}{dx^2} = -Ak^2 \cos\left(\omega t - kx + \psi\right) = -k^2 s; \tag{19}$$

$$\frac{ds}{dt} = -A\omega \sin\left(\omega t - kx + \psi\right); \tag{20}$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -A\omega^2 \cos\left(\omega t - kx + \psi\right) = -\omega^2 s; \tag{21}$$

Розділимо ліві і праві частини рівнянь (19) і (21):

$$\frac{\frac{d^2 s}{dx^2}}{\frac{d^2 s}{dt^2}} = \frac{k^2}{\omega^2} .$$

Звідси

$$\boxed{\frac{d^2 s}{dx^2} = \frac{k^2}{\omega^2}\frac{d^2 s}{dt^2}.} \tag{22}$$

Це і є хвильове рівняння.

Оскільки $$\frac{k}{\omega}=\frac{2\pi}{\lambda\frac{2\pi}{T}}=\frac{1}{\frac{\lambda}{T}}=\frac{1}{\upsilon}, \quad (23)$$

хвильове рівняння можна записати:

$$\boxed{\frac{d^2s}{dx^2}=\frac{1}{\upsilon^2}\frac{d^2s}{dt^2}}. \quad (24)$$

Якщо хвиля поширюється у просторі в будь-якому напрямі, то рівняння (24) має вигляд:

$$\boxed{\frac{d^2s}{dx^2}+\frac{d^2s}{dy^2}+\frac{d^2s}{dz^2}=\frac{1}{\upsilon^2}\frac{d^2s}{dt^2}} \quad (25)$$

Коротший запис рівняння (23) має вигляд:

$$\boxed{\Delta s=\frac{1}{\upsilon^2}\frac{d^2s}{dt^2}} \quad (26)$$

де $\Delta=\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}+\frac{d^2}{dz^2}$ – оператор Лапласа.

Питання для контролю

1. Що називається хвилею ? Які види хвиль ви знаєте ?
2. Що таке довжина хвилі ? Період ? Фазова швидкість ? Хвильове число ?
3. Що таке хвильова поверхня, фронт хвилі, промінь ?
4. В чому полягає принцип Гюйгенса ?
5. Запишіть та поясніть рівняння сферичної хвилі.
6. Запишіть і поясніть хвильове рівняння.

Допоміжна література

1. *Ионушас К.К., Малинко В.Н.* Курс физики, т.2, ч.1. – Киев: КВВИУС, 1987. – § 38–41.
2. *Савельев И.В.* Курс общей физики, т. 2. – М.: Наука, 1978. – § 93–96.
3. *Савельев И.В.* Курс общей физики, т.1. – М.: Наука, 1973. – § 77–80.