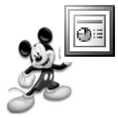
Тема 3: **Згасаючі коливання**

Питання лекції:

1. Згасаючі коливання. Рівняння і характеристики згасаючих коливань.
2. Логарифмічний декремент згасання.
3. Добротність коливальної системи.
4. Електричні згасаючі коливання в реальному контурі.
5. Аперіодичний процес. Критичний опір.

1. Згасаючі коливання. Рівняння і характеристики згасаючих коливань

Коли на тіло діє тільки одна квазіпружна сила, воно здійснює незгасаючі гармонічні коливання з постійною амплітудою $A = const$. В дійсності ж на рухомі тіла завжди діють з боку оточуючого середовища сили тертя, які перешкоджають руху. На подолання опору середовища, на тертя, на створення хвиль, на непружні деформації і т.п. витрачається енергія. Внаслідок цього механічна енергія тіла, що коливається, неперервно зменшується, переходячи в інші форми енергії, і розсіюється в оточуючому середовищі.



Повна енергія тіла, що коливається, визначається амплітудою:

$$W = W_K + W_П = \frac{m\omega_0^2}{2}. \quad (1)$$

При зменшенні енергії амплітуда зменшується і коливання стає згасаючим. Повна сила, яка діє на точку, дорівнює сумі квазіпружної сили $F_{кв}$ і сили тертя $F_т$. Сила тертя дорівнює $F_T = -r\upsilon$, де r – коефіцієнт тертя, υ – швидкість руху точки. Тому диференціальне рівняння для точки, що коливається, буде:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_{кв} + F_т, \quad (2)$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\upsilon = -kx - r\frac{dx}{dt},$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + r\frac{dx}{dt} + kx = 0,$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0.} \quad (3)$$

Позначимо коефіцієнти

$$\boxed{\frac{r}{m}=2\beta},\quad \boxed{\frac{k}{m}=\omega_0^2} \qquad (4)$$

(зміст такого позначення випливає із теорії диференціальних рівнянь). Тоді рівняння (2) набуде вигляду:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0\,. \qquad (5)$$

Розв'язком цього диференціального рівняння є функція (без доведення)

$$\boxed{x=A_0e^{-\beta t}cos\left(\omega t+\psi\right).} \qquad (6)$$

Рівняння (6) є рівнянням згасаючих коливань. Тут, згідно з (4),

$$\boxed{\beta=\frac{r}{2m}} \quad \text{– коефіцієнт згасання;} \qquad (7)$$

$$\boxed{\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}} \qquad (8)$$

– циклічна частота згасаючих коливань, ω_0 – частота власних коливань (при r = 0).

Рівняння згасаючих коливань (6) відрізняється від гармонічних тим, що його **амплітуда**

$$\boxed{A\left(t\right)=A_0e^{-\beta t}} \qquad (9)$$

з часом зменшується. На рис. 3.1 суцільною лінією зображено залежність зміщення точки, що коливається, від часу, а пунктирною лінією – залежність амплітуди від часу.

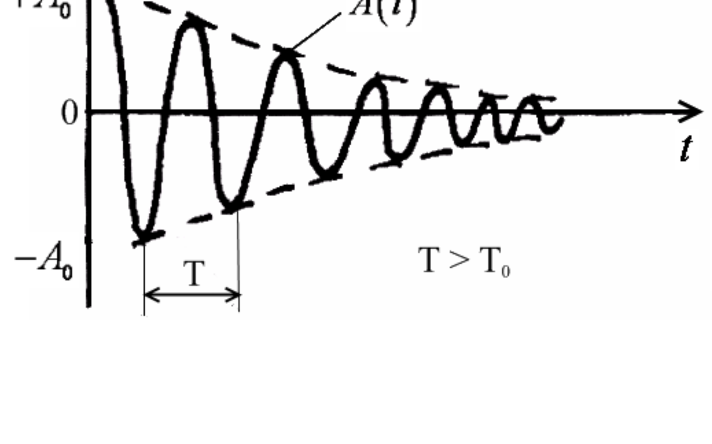


Рис.3.1

Амплітуда згасаючого коливання з часом зменшується за експоненціальним законом (9). Це зменшення тим більше, чим більше r (чи β), тобто чим більше тертя.

2. Логарифмічний декремент згасання

Співставимо значення амплітуди у два сусідні моменти часу, які відрізняються на період T:

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t},$$

$$A(t+T) = A_0 e^{-\beta(t+T)}$$

Відношення $$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T} = const$$

називається **декрементом згасання,** а логарифм декремента згасання

$$\boxed{ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T = \lambda} \qquad (10)$$

називається **логарифмічним декрементом згасання.**

Отже, **логарифмічний декремент згасання**

$$\boxed{\lambda = \beta T}, \text{ а } \beta = \frac{\lambda}{T}.$$

Таким чином, амплітуду згасаючого коливання (9) можемо записати через логарифмічний декремент згасання

$$\boxed{A = A_0 e^{-\frac{\lambda}{T}t}.} \qquad (11)$$

3. Добротність коливальної системи

Коливальні системи, особливо в радіотехніці, прийнято характеризувати добротністю. **Добротність визначається відношенням енергії коливань системи до втрат енергії за період:**

$$\boxed{Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W}\,.} \qquad (12)$$

Виразимо добротність через логарифмічний декремент. Для цього знайдемо швидкість зміни енергії в коливальній системі. Повна енергія коливальної системи при слабкому згасанні

$$W \approx \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} = \frac{m\omega_0^2}{2}\left(A_0 e^{-\beta t}\right)^2 = \frac{m\omega_0^2 A_0^2}{2} e^{-2\beta t}.$$

Позначимо $\dfrac{m\omega_0^2 A_0^2}{2} = W_0$ – енергія при $t = 0$.

В результаті отримуємо вираз для енергії коливальної системи в залежності від часу:

$$W = W_0 e^{-2\beta t}. \qquad (13)$$

Знайдемо швидкість зміни енергії:

$$\frac{dW}{dt} = -2\beta W_0 e^{-2\beta t} = -2\beta W.$$

Припустимо, що енергія не дуже сильно змінюється за період (слабке згасання). Тоді можемо записати:

$$\frac{\Delta W}{\Delta t} = -2\beta W.$$

При $\Delta t = T$ одержимо $\dfrac{\Delta W}{T} = -2\beta W,$ звідки

$$\left|\Delta W\right| = -2\beta WT. \qquad (14)$$

Тоді добротність

$$\left|Q\right| = 2\pi \frac{W}{\Delta W} = 2\pi \frac{W}{2\beta WT} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\pi}{\lambda},$$

тобто

$$\boxed{Q = \frac{\pi}{\lambda}.} \qquad (15)$$

Знайдемо інший вираз для добротності. Амплітуда згасаючих коливань $A = A_0 e^{-\beta t} = A_0 e^{-\frac{\lambda}{T}t}$.

При деякому значенні $t = \tau$

$$\frac{\lambda}{T}\tau = 1. \tag{16}$$

Це означає, що амплітуда за час τ зменшується в e разів:

$$A = A_0 e^{-\frac{\lambda}{T}\tau} = A_0 e^{-1} = \frac{A_0}{e}. \tag{17}$$

За цей час відбувається N_e коливань:

$$N_\text{e} = \nu\, t = \frac{1}{T}\tau\,, \tag{18}$$

де ν – кількість коливань за 1 с (рис. 3.2).

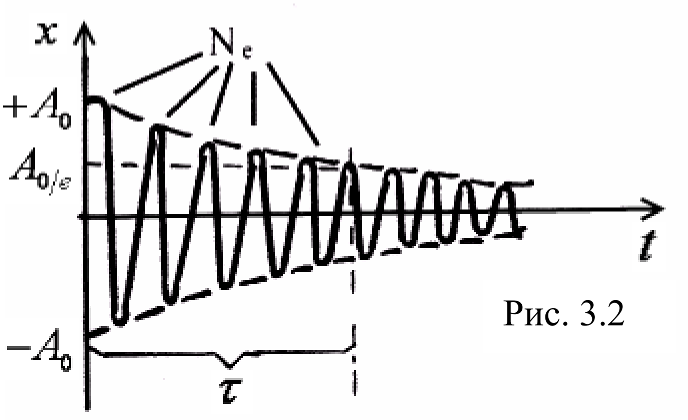


Рис. 3.2

Так як, згідно з (16), $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{\lambda}$,

то (18) запишемо: $N_e = \frac{1}{T}\tau = \frac{1}{\lambda}$.

Добротність (15), таким чином, можна виразити через N_e – число коливань за час τ , коли амплітуда зменшується в e разів :

$$\boxed{Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi \cdot N_e}. \tag{19}$$

Для коливальних контурів радіоприймачів $Q \sim 10^2 \div 10^3$.

4. Електричні згасаючі коливання в реальному контурі

Ми розглянули ідеалізований коливальний контур, опір якого вважали рівним нулеві. Однак будь-який реальний контур має активний опір і енергія, акумульована в контурі, поступово витрачається в цьому опорі на нагрівання, внаслідок чого вільні коливання згасають. Встановимо, за яким законом відбуваються згасання.

Нехай на пластині конденсатора накопичується додатній заряд. У колі діє ЕРС індукції.

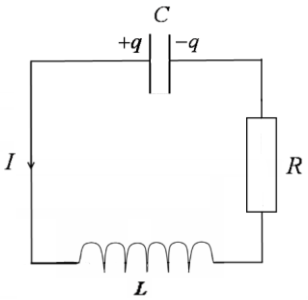


Рис. 3.3.

Згідно з другим правилом Кірхгофа

$$IR+\frac{q}{C}=-L\frac{dI}{dt},$$

або

$$\frac{dI}{dt}+\frac{R}{L}I+\frac{q}{LC}=0. \qquad (20)$$

Враховуючи, що $I=\dfrac{dq}{dt}$, (20) запишемо:

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dq}{dt}+\frac{1}{LC}q=0.} \qquad (21)$$

Позначимо $\boxed{\dfrac{1}{LC}=\omega_0^2}$ і $\boxed{\dfrac{R}{L}=2\beta}$.

Тоді диференціальне рівняння можемо записати

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2}+2\beta\frac{dq}{dt}+\omega_0^2q=0.} \qquad (22)$$

Розв'язком цього рівняння буде:

$$\boxed{q(t)=q_0e^{-\beta t}cos(\omega t+\psi),} \qquad (23)$$

де $$\boxed{\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}=\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}.} \qquad (24)$$

Таким чином, частота згасаючих коливань ω (аналогічно (8)) менша від частоти ω_0 власних коливань.

При $R = 0$ одержимо рівняння для **ідеалізованого коливального контура** (формула Томсона):

$$\omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

Запишемо основні параметри згасаючого коливання у реальному коливальному контурі.

Логарифмічний декремент

$$\lambda=ln\frac{A(t)}{A(t+T)}=\beta T.$$

Враховуючи, що $\frac{R}{L}=2\beta$, а $\beta=\frac{R}{2L}$, одержимо:

$$\boxed{\lambda=\beta T=\frac{R}{2L}T=\frac{R}{2L}\frac{2\pi}{\omega}=\frac{\pi R}{L\omega},} \qquad (25)$$

де $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$.

Добротність контура

$$Q=\frac{\pi}{\lambda}=\frac{\pi}{\frac{\pi R}{L\omega}}=\frac{L\omega}{R},$$

$$\boxed{Q=\frac{L\omega}{R}=\frac{L}{R}\sqrt{\omega_0^2-\beta^2},} \qquad (26)$$

або

$$Q=\frac{L}{R}\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}=\sqrt{\frac{L^2}{R^2LC}-\frac{L^2R^2}{R^2\cdot 4L^2}},$$

звідки

$$Q=\sqrt{\frac{L}{R^2C}-\frac{1}{4}}. \qquad (26')$$

5. **Аперіодичний процес. Критичний опір**

Як було встановлено, при наявності тертя (опору) частота коливань (відносно власної частоти) зменшується:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\,.$$

У випадку електричних коливань (21)

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\,.$$

Період коливань

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}$$

із збільшенням опору зростає і стає нескінченним, коли підкореневий вираз перетворюється в нуль:

$$\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} = 0\,.$$

Звідси $$R = \boxed{R_{КР} = \sqrt{\frac{4L}{C}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}\,.} \qquad (24)$$

Таке коливання стає **аперіодичним,** а опір, при якому коливальний процес переходить в аперіодичний, називається **критичним.**

На рис. 3.4 зображено аперіодичний процес $(\beta > \omega_0)$ поряд із згасаючими $(\beta > 0)$ і незгасаючими $(\beta = 0)$ коливаннями.

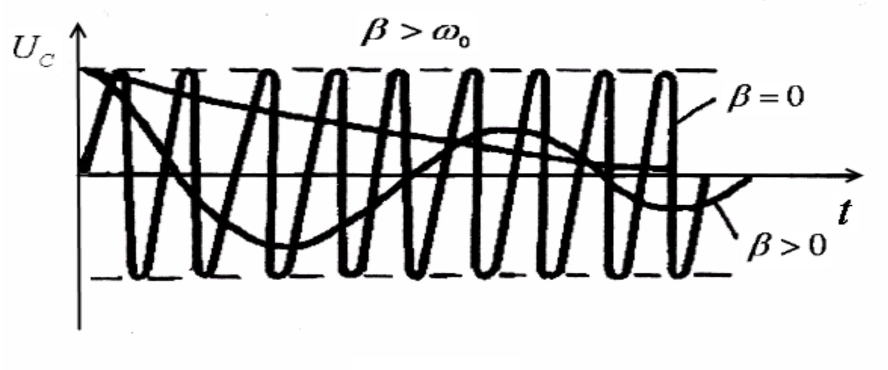
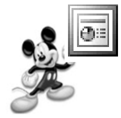


Рис. 3.4



Критичний опір вказується на чутливих вимірювальних приладах – гальванометрах. Такий опір повинно мати коло з гальванометром, щоб рамка приладу після проходження по ній струму, плавно, без коливань (аперіодично) поверталась до положення рівноваги.

Питання для контролю

1. Які коливання називаються згасаючими ? Записати диференціальне рівняння згасаючих коливань і його розв'язок.
2. Записати формули для коефіцієнта згасання, часу релаксації, декремента та логарифмічного декремента згасання. Дати їм пояснення.
3. Що таке добротність коливальної системи та як вона визначається ?
4. Як виражається добротність через логарифмічний декремент ?
5. Записати диференціальне рівняння згасаючих коливань для реального коливального контура і його розв'язок.
6. За якою формулою визначається частота згасаючих коливань. Порівняйте цю формулу з формулою для частоти власних коливань. Чим ці формули відрізняються одна від одної ?
7. Який опір називається критичним ?

Допоміжна література

1. *Ионушас К.К., Малинко В.Н.* Курс физики, т. 2, ч.1. – Киев: КВВИУС, 1987. – § 28–30.
2. *Савельев И.В*. Курс общей физики, т. 2. – М.: 1978. – § 90.