Тема 1: **Гармонічні коливальні процеси**

Питання лекції:

1. Коливальні процеси. Види коливань.
2. Гармонічні коливання. Диференціальне рівняння гармонічних коливань і його розв'язок.
3. Енергія гармонічних коливань.
4. Електричні коливання в ідеалізованому контурі.
5. Геометричне зображення гармонічних коливань.

1. Коливальні процеси

Коливаннями називаються процеси, для яких характерна повторюваність. Наприклад, хитання маятника годинника, коливання струни, коливання напруги між електродами конденсатора в контурі приймача і т. п. Коливальні процеси лежать в основі цілого ряду явищ – звуку, світла, вібрацій. Вони в основі електротехніки і радіотехніки.

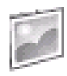


рис.1

В залежності від характеру впливу на коливальну систему розрізняють **вільні** і **вимушені** коливання. Вільні коливання завжди згасаючі. Однак у фізиці розглядають ідеалізований випадок, коли опір коливанню відсутній і виведена з рівноваги коливальна система може коливатися як завгодно довго. Такі коливання ідеалізованих систем називаються **власними** коливаннями.

В залежності від фізичної природи процесу, для якого характерна повторюваність, бувають **механічні, електромеханічні, електромагнітні** коливання. Наприклад, коливання пружинного маятника, коливання вібратора, мембрани телефона, коливання векторів $\vec{E}$ і $\vec{H}$ в електромагнітній хвилі.

Особливе місце серед коливань займають **періодичні коливання,** тобто коливання, при яких стан руху тіла чи зміни величини повторюється через однакові проміжки часу. Характер періодичних коливань може бути різний.

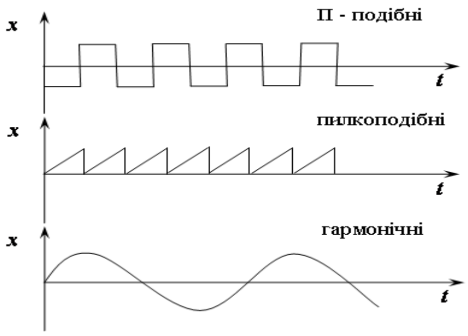


Рис. 1.1

На рис. 1.1 наведено графіки періодичних коливань. Серед розмаїття періодичних коливань дуже важливе місце займають **гармонічні коливання**, які описуються так званими гармонічними функціями – синусом і косинусом.

2. **Гармонічні коливання. Диференціальне рівняння гармонічного коливання і його розв’язок**

Прикладами гармонічних коливань можуть бути коливання пружинного маятника, камертона, струни, коливання фізичних величин – сили струму, напруги в колі змінного струму, напруженості електричного $\vec{E}$ і магнітного $\vec{H}$ полів в електромагнітній хвилі та ін. Як один з таких прикладів розглянемо коливання пружинного маятника – зв'язаної з пружиною кульки, що рухається вздовж осі x (рис. 1.2).

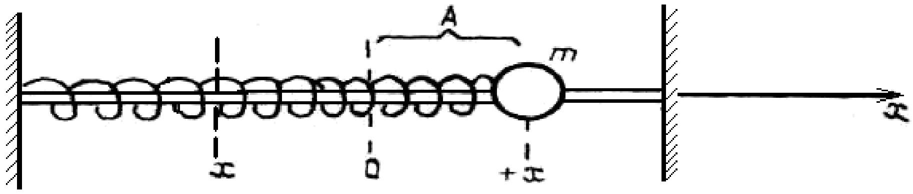


Рис. 1.2

Якщо кульку масою m вивести з положення рівноваги O, змістивши на відстань A, то на неї з боку пружини буде діяти пружна сила, яка повертатиме кульку до положення рівноваги:

$$F = -kx. \qquad (1)$$

Під дією цієї сили кулька буде коливатися, прискорюючись і сповільнюючись. Згідно з другим законом Ньютона

$$F = m \cdot a = m\frac{d^2x}{dt^2}. \qquad (2)$$

Тоді рівняння (1) можемо записати: $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$,

чи

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0}. \qquad (3)$$

Одержане рівняння є **диференціальним рівнянням гармонічного коливання**. В таких рівняннях (вони вивчаються в курсі математики) величину $\frac{k}{m} > 0$ позначають через ω_0^2:

$$\boxed{\frac{k}{m} = \omega_0^2}. \qquad (4)$$

Тоді диференціальне рівняння (3) матиме вигляд:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0}. \qquad (5)$$

Це найпростіше, так зване однорідне диференціальне рівняння гармонічного коливання. Розв'язком цього рівняння є гармонічні функції:

$$\boxed{x = A\cos(\omega_0 t + \psi)}. \qquad (6)$$

$$x = A\sin(\omega_0 t + \psi'). \qquad (6')$$

Тут A – **амплітуда** – максимальне зміщення від положення рівноваги точки (величини), що коливається;

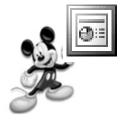
$\omega_0 t + \psi$ чи $\omega_0 t + \psi'$ – **фаза коливання,** яка визначає положення точки, що коливається, і напрямок її руху в будь-який момент часу, або іншими словами – фаза визначає стан коливального процесу в даний момент часу;

$\psi, \psi' = \psi + \frac{\pi}{2}$ – **початкова фаза,** яка визначає положення точки, що коливається, у початковий момент часу;

$\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$ – **циклічна (кругова) частота** (число коливань, що відбуваються за 2π одиниць часу);

$\nu_0 = \dfrac{1}{T_0}$ – **частота** (число коливань, що відбуваються за одиницю часу);

T_0 – **період коливань** (час, протягом якого здійснюється одне повне коливання).



У тому, що функції (6, 6') є розв'язками рівняння (5), можна переконатися їх підстановкою в рівняння (5), в результаті чого воно перетворюється у тотожність (переконатися в цьому самостійно).

3. **Енергія гармонічних коливань**

Система, що коливається, має кінетичну і потенціальну енергію. Знайдемо вираз для повної енергії:

$$W = W_п + W_к. \tag{7}$$

Нехай пружинний маятник коливається за законом косинуса:

$$x = A cos(\omega_0 t + \psi). \tag{8}$$

Потенціальна енергія стиснутої пружини

$$W_п = \frac{kx^2}{2} = \frac{k}{2} A^2 cos^2(\omega_0 + \psi). \tag{9}$$

Враховуючи, що $\dfrac{k}{m} = \omega_o^2$ і $k = m\omega_0^2$, одержимо:

$$W_п = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} cos^2(\omega_0 t + \psi). \tag{10}$$

Кінетична енергія виражається через швидкість:

$$W_K = \frac{m\upsilon^2}{2}.$$

Швидкість знайдемо, взявши похідну від (8):

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \, sin\left(\omega_0 t + \psi\right).$$

Тоді

$$W_K = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} sin^2\left(\omega_0 t + \psi\right). \qquad (11)$$

Позначивши $\omega_0 t + \psi = \alpha$, матимемо вираз для повної енергії:

$$W = W_K + W_П = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} sin^2 \alpha + \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} cos^2 \alpha =$$
$$= \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}\left(sin^2 \alpha + cos^2 \alpha\right)$$

або

$$\boxed{W = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}.} \qquad (12)$$

Як бачимо, енергія коливання залежить від амплітуди.

Ми розглянули пружні коливання, які відбуваються під дією пружної сили:

$$F = -kx. \qquad (13)$$

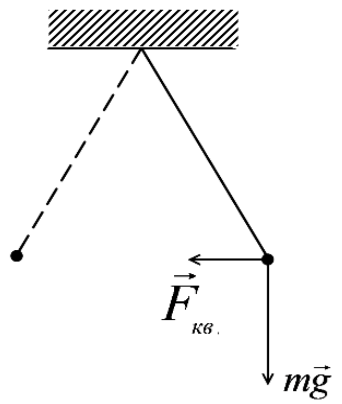


Рис. 1.3

Однак часто коливальні процеси відбуваються під дією **квазіупружної сили** – не пружної сили, що має вигляд, аналогічний закону Гука (13):

$$F_{кв.пр} = -kx, \qquad (14)$$

Квазіупружною силою є поворотна сила математичного маятника, яка виникає як складова ваги (mg) кульки маятника (рис.3).

У техніці (особливо радіотехніці) широко використовуються електричні коливання, які теж є квазіупружними. Коливання під дією квазіупружної сили також гармонічні і описуються функціями косинуса чи синуса.

4. Електричні коливання в ідеалізованому коливальному контурі

У коливальному контурі, що складається з котушки індуктивності L і ємності C, виникають коливання електричного заряду q, які викликають коливання напруги на конденсаторі і змінний струм у контурі (рис. 1.4).

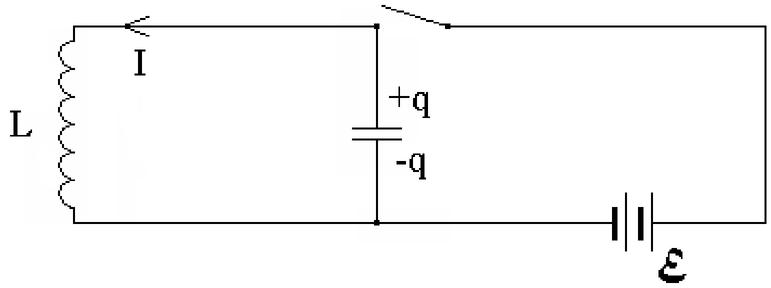


Рис. 1.4

Якщо конденсатору надати заряду q, між його електродами виникає електричне поле з енергією

$$W_C = \frac{q^2}{2C} . \tag{15}$$

Після відмикання джерела е.р.с. $\mathcal{E}$ конденсатор буде розряджатися через котушку індуктивності L і енергія електричного поля зменшуватиметься, а в котушці з'явиться магнітне поле з енергією

$$W_L = \frac{LI^2}{2} . \tag{16}$$

Коли конденсатор розрядиться, електричне поле стане рівним нулеві, а магнітне поле котушки індуктивності – максимальним. Після цього магнітне поле буде зменшуватися, а конденсатор – перезаряджатись. Таким чином, у контурі виникають коливання заряду і напруги на електродах конденсатора, а також струму і енергії. Покажемо, що ці коливання також гармонічні.

Запишемо для коливального контура (рис. 1.4) друге правило Кірхгофа:

$$IR + U_C = \mathcal{E}_i \ , \qquad (17)$$

де $\mathcal{E}_i$ – е.р.с. індукції, що виникає в контурі.

Ми розглядаємо **ідеалізований контур**, тобто такий, **в якому активний опір *R = 0*** і в ньому енергія у вигляді тепла не виділяється. Тоді (17) прийме вигляд:

$$U_c = \mathcal{E}_i \, . \qquad (18)$$

Оскільки $C = \dfrac{q}{U_C}, \quad \mathcal{E}_i = -L\dfrac{dI}{dt}, \quad I = \dfrac{dq}{dt},$

то (18) можемо записати:

$$\frac{q}{C} = -L\frac{dI}{dt} = -L\frac{d^2q}{dt^2}\,.$$

Звідси

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0$$

або

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0} \qquad (19)$$

Ми одержали рівняння гармонічного коливання в диференціальній формі. Якщо позначити

$$\boxed{\frac{1}{LC} = \omega_0^2}, \qquad (20)$$

то (19) матиме вигляд, аналогічний до (5):

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 = 0} \ . \qquad (21)$$

Розв’язком цього рівняння буде, подібно до (6), гармонічна функція

$$\boxed{q = q_0 cos(\omega_0 t + \psi)}\,. \tag{22}$$

Як видно, заряд на електродах конденсатора змінюється з циклічною частотою

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}\;. \tag{23}$$

Період коливань

$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{LC}}\;. \tag{24}$$

Це **формула Томсона** для періоду коливань в **ідеалізованому коливальному контурі.**

Оскільки $U_C = \dfrac{q}{C}$, то напруга на конденсаторі змінюється за законом:

$$\boxed{U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} cos\left(\omega_0 t + \Psi\right),} \tag{25}$$

тобто змінюється так же, як і заряд – у фазі з ним.

Струм у контурі $\quad I = \dfrac{dq}{dt} = -\omega_0 q_0\, sin\left(\omega_0 t + \psi\right)$.

Якщо виразити через косинус, то

$$\boxed{I = \omega_0 q_0\, cos\left(\omega_0 t + \psi + \frac{\pi}{2}\right)}. \tag{26}$$

Таким чином, струм у коливальному контурі випереджує напругу по фазі на $\dfrac{\pi}{2}$, тобто максимум струму, наприклад, буде на $\dfrac{\pi}{2}$ раніше, ніж максимум напруги на конденсаторі.

На рис. 1.5 представлено залежності q, U_C та I від часу.

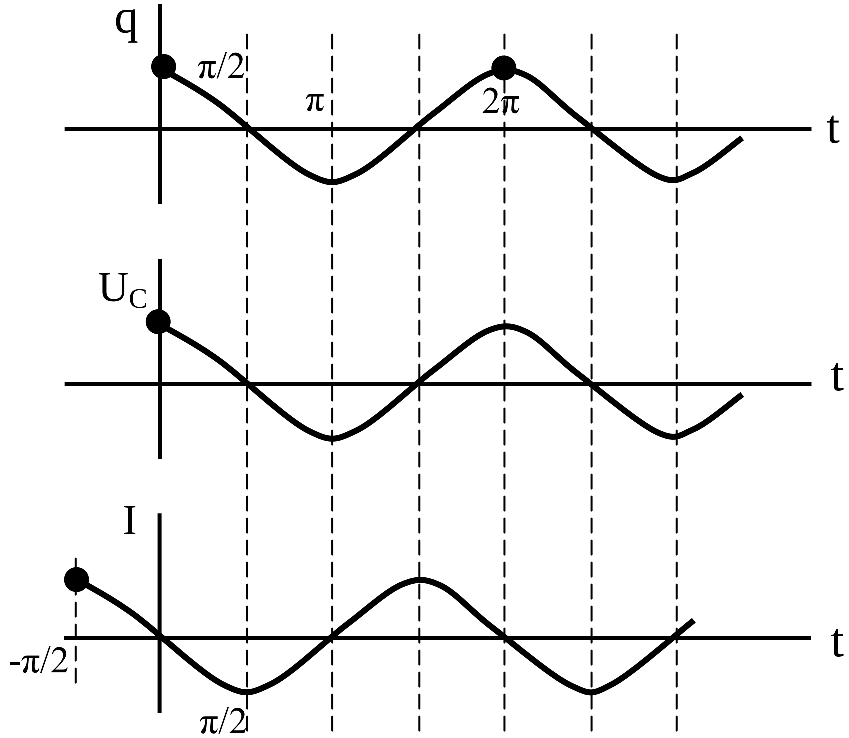
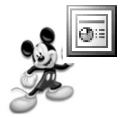


Рис. 1.5



5. Геометричне зображення гармонічних коливань

Ми розглянули коливання пружинного маятника, коливання заряду, напруги, струму в коливальному контурі. Багато величин у фізиці зображуються у вигляді векторів. Вектор характеризується довжиною і напрямком (рис. 1.6). Кут Ψ в даному випадку характеризує напрям вектора. Таке геометричне зображення вектора називається векторною діаграмою.

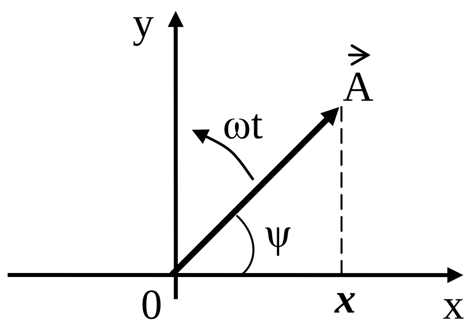


Рис. 1.6

За допомогою діаграм зручно зобразити коливальний рух. Для цього треба уявити, що вектор $\vec{A}$ обертається навколо точки O з кутовою швидкістю ω. Тоді проекція вектора на вісь x змінюється за законом:

$$x = A\ cos\varphi.$$

Тут $\varphi = \psi + \omega t$, тому

$$x = A cos\left(\omega t + \psi \right).$$

У даному випадку ψ – початкова фаза коливання, тобто значення ψ при $t = 0$.

Тут $\varphi = \psi + \omega t$,

У даному випадку ψ – початкова фаза коливання, тобто значення ψ при $t = 0$.

Питання для контролю

1. Які коливання називаються гармонічними ? Записати диференціальне рівняння гармонічного коливання та його розв'язок.
2. Які коливання називаються власними ?
3. Що таке амплітуда, фаза, початкова фаза гармонічного коливання ?
4. Що таке частота, циклічна частота, період гармонічних коливань ?
5. Від чого залежить енергія коливань ?
6. Який коливальний контур називається ідеалізованим ?
7. Як відбувається коливання заряду, напруги і струму в коливальному контурі ?

Допоміжна література

1. *Ионушас К.К., Малинко В.Н.* Курс физики, т. 2. – Киев: КВВИУС, 1987, § 21, 22, 24.

2. *Савельев И.В.* Курс общей физики, т. 1. – М.: 1977. – § 49, 50, 53.

3. *Савельев И.В.* Курс общей физики, т. 2. – М., 1978. – § 89.

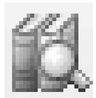


рис.1