

## Тема 4: Вимушені коливання

1. Вимушені коливання. Диференціальне рівняння вимушених коливань.
2. Розв'язок диференціального рівняння вимушених коливань.
3. Резонанс.

### 1. Вимушені коливання. Диференціальне рівняння вимушених коливань і його розв'язок.

Коливання реальних коливальних систем через наявність сил тертя або опору є згасаючими. Однак у техніці бувають випадки, коли потрібні незгасаючі коливання. Наприклад, у годинниках, у коливальних контурах генераторів (передавачів). Тому використовуються **вимушені коливання – коливання під дією періодичної сили, яка поповнює втрати енергії, що йдуть на подолання опору.**

Нехай вимушуюча сила змінюється за законом косинуса:

$$F_{\text{вим}} = F_0 \cos \omega t. \quad (1)$$

Повна сила, яка діє на точку з масою  $m$ , що коливається, дорівнює алгебраїчній сумі квазіпружної сили, сили тертя і вимушуючої сили. Рівняння руху точки буде:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -r \frac{dx}{dt} - kx + F_0 \cos \omega t. \quad (2)$$

Розділимо ліву і праву частини на  $m$  і перенесемо доданки, що містять  $x$ , в ліву частину рівняння; одержимо шукане диференціальне рівняння:

$$\boxed{\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t.} \quad (3)$$

Замінивши  $\frac{r}{m} = 2\beta$ ,  $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ ,  $(4)$

дістанемо:  $\boxed{\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t.} \quad (5)$

Це неоднорідне диференціальне рівняння в загальному вигляді.

### 2. Розв'язок диференціального рівняння вимушених коливань

Розв'язком диференціального рівняння вимушених коливань є гармонічна функція (наводимо без доведення):

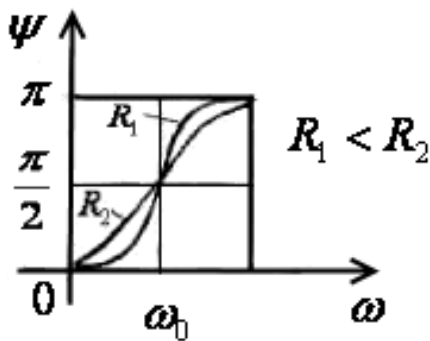


Рис. 4.4

З рисунка видно, що різниця фаз  $\Delta\psi = \psi$  між вимушеними коливаннями тіла і коливаннями сили, яка змінюється від нуля (у фазі) до  $\pi$  (у протифазі), залежить від частоти. При резонансі ( $\omega = \omega_0$ )  $\psi = \frac{\pi}{2}$ .

### 3. Резонанс

**Річке зростання амплітуди вимушених коливань при наближенні частоти вимушуючої сили до власної частоти називається резонансом.**

Розглянемо це явище детальніше.

1. При малих частотах ( $\omega \ll \omega_0$ , рис. 4.3)

$$A = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k} = x_{cm} . \quad (9)$$

Тобто, амплітуда практично не змінюється з частотою і є фактично статичним зміщенням під дією сталої сили: зміщення тіла, яке коливається, в цьому випадку невідстанно відбувається за зміною вимушуючої сили майже у фазі. Цей граничний випадок використовується у техніці вимірювань, наприклад, у самописцях. Щоб зміщення встигало за зміною вимушуючої сили (вимірюваної величини, яку треба записати), необхідно, щоб

$$\omega \ll \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} .$$

2. При високих частотах ( $\omega \gg \omega_0$ ) коливання тіла відбуваються у фазі, протилежній до фази коливань вимушуючої сили (різниця фаз  $\psi = \pi$ ). Це означає, що коли зміщення відбувається в одну сторону, то вимушуюча сила діє на тіло в протилежному напрямку. При таких умовах амплітуда



коливань не може бути значною. Цей випадок має практичне застосування. Наприклад, при перевезенні цінних приладів, щоб захистити від тряски, їх підвішують на відносно м'яких пружинах. Тоді при  $\omega \gg \omega_0$ , навіть при сильних коливаннях точки підвісу, амплітуда коливань приладу незначна.

3. При  $\omega \approx \omega_0$  спостерігається різке зростання амплітуди, а при деякій частоті ( $\omega = \omega_{рез}$ ) вона досягає максимального значення (рис. 4.3).

Резонансну частоту ( $\omega_{рез}$ ) можна знайти з умови мінімуму величини, яка стоїть у знаменнику виразу для амплітуди (7). Умова мінімуму – рівність похідної нулеві:

$$\frac{d}{d\omega} \left[ (\omega_0^2 - \omega_{рез}^2)^2 + 4\beta^2 \omega_{рез}^2 \right] = 0, \quad (10)$$

$$2(\omega_0^2 - \omega_{рез}^2)(-2\omega_{рез}) + 8\beta^2 \omega_{рез} = 0$$

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (11)$$

Щоб знайти вираз для амплітуди при резонансі, покладемо у (7)  $\omega = \omega_{рез}$ :

$$A_{рез} = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{[\omega_0^2 - (\omega_0^2 - 2\beta^2)]^2 + 4\beta^2(\omega_0^2 - 2\beta^2)}} \quad (12)$$

Звідси

$$A_{рез} = \frac{\frac{F_0}{m}}{2\beta \sqrt{(\omega_0^2 - \beta^2)}} \quad (13)$$

Значення  $A_{рез}$  і  $\omega_{рез}$  залежать від коефіцієнта згасання  $\beta$ . В ідеальному випадку  $\beta = 0$  ( $\beta \ll \omega_0$ ) і максимум має місце при частоті  $\omega_{рез} = \omega_0$ . Із зростанням  $\beta$  максимум дещо зміщується в бік менших частот.

У випадку слабого згасання ( $\omega \gg \beta$ ) знайдемо відношення амплітуд при резонансі ( $\omega \approx \omega_0$ ) і при  $\omega = 0$

(формули (13) і (9)):

$$\begin{aligned} \frac{A_{рез}}{x_{стат}} &= \frac{\frac{F_0}{m}}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \cdot x_{стат}} = \frac{F_0 m \omega_0^2}{m \omega_0 \cdot 2\beta F_0} = \\ &= \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{2\pi}{T \cdot 2\beta} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\pi}{\lambda} = Q. \end{aligned} \quad (14)$$

Як бачимо, це відношення характеризує добротність коливальної системи: чим різкіший максимум по відношенню до статичного зміщення під дією вимушуючої сили, тим вища добротність.

Запишемо вираз для швидкості при гармонічних коливаннях:

$$x = A \cos(\omega t + \psi), \quad (15)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \psi) = A\omega \sin\left(\omega t + \psi - \frac{\pi}{2}\right). \quad (16)$$

Оскільки при резонансі (тобто при частоті  $\omega \approx \omega_0$ )  $\psi = \frac{\pi}{2}$  (рис. 3), то

$$v = A\omega \cos \omega t \quad (17)$$

Як бачимо, коливання швидкості відбувається за таким же законом, як і коливання вимушуючої сили, тобто у фазі:  $F = F_0 \cos \omega t$ .

При цьому зовнішня сила виконує найбільшу роботу, оскільки напрям руху тіла весь час співпадає з напрямком зовнішньої сили.

Таким чином, явище резонансу обумовлене тим, що при  $\omega = \omega_{рез}$  настають найкращі умови для поступання в коливальну систему енергії від джерела зовнішньої сили.

Явище резонансу можна спостерігати там, де є коливання під дією зовнішньої періодичної сили. В ряді випадків резонанс може бути небезпечним і таких прикладів можна навести багато. Коливання осі ротора може

викликати дрижання основи і привести до сильних вібрацій, інколи руйнівних. Власна частота вібрацій крил літака не повинна наближатися до частоти коливань гвинта, оскільки можуть виникнути сильні вібрації і може початися руйнування. Принцип резонансу лежить в основі дії вимірювача частоти. У приладі є набір сталевих язичків з різним періодом власних коливань. Біля кожного язичка встановлена невелика котушка з феромагнітним осердям. Якщо через котушки пропустити змінний струм, то на язички буде діяти змінна сила і найбільше буде коливатися той язичок, частота коливань якого дорівнює частоті струму.

### Питання для контролю

1. Які коливання називаються вимушеними ?
2. Записати диференціальне рівняння вимушеного механічного коливання та його розв'язок.
3. Записати і пояснити формулу для амплітуди та початкової фази вимушеного коливання.
4. Зобразити і пояснити графік залежності амплітуди вимушених коливань від частоти.
5. Що таке резонанс ?
6. Записати і пояснити формули для амплітуди і частоти при резонансі.

### Допоміжна література

1. *Ионушас К.К., Малинко В.Н.* Курс фізики, т. 2, ч.1. – Київ: КВВИУС, 1987. – § 31-32.
2. *Савельев И.В.* Курс общей фізики, т.1. – М.: 1977, § 60.