Тема 2**. Складання гармонічних коливань**

Питання лекції:

1. Складання однаково напрямлених гармонічних коливань з рівними частотами
2. Складання коливань з частотами, які значно відрізняються.
3. Складання коливань з близькими частотами. Биття.
4. Складання взаємно перпендикулярних гармонічних коливань. Поняття про фігури Ліссажу.

1. Складання однаково напрямлених гармонічних коливань з рівними частотами.

Прикладом участі тіла в двох коливаннях може бути коливання пружинного маятника, в якого коливається точка підвісу (наприклад, пружинний маятник коливається в каюті корабля, який коливається на хвилях, рис. 2.1). В результаті коливання кульки масою *m* виявиться складним. Знайдемо закономірності такого коливання.

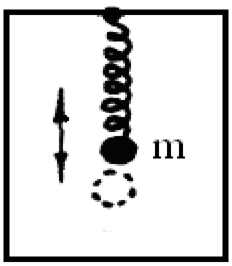

Рис. 2.1

Розглянемо найпростіший випадок, коли точка (чи якась фізична величина) бере участь у двох гармонічних коливаннях однакового напрямку і частоти:

$$x_1 = A_1 cos(\omega t + \psi_1); \quad x_2 = A_2 cos(\omega t + \psi_2). \qquad (1)$$

Зобразимо ці коливання за допомогою векторів $\vec{A}_1$ і $\vec{A}_2$ на площині (рис. 2.2).

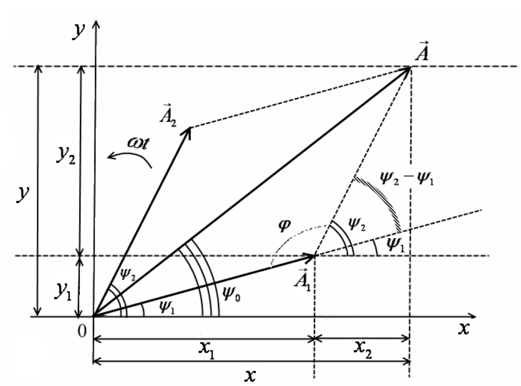

Рис. 2.2

Початкові фази коливань ψ_1 і ψ_2. Так як вектори $\vec{A}_1$ і $\vec{A}_2$ обертаються навколо точки *0* з однаковою кутовою швидкістю $\vec{\omega}$, то кут $(\psi_1 - \psi_2)$ між векторами $\vec{A}_1$ та $\vec{A}_2$ у будь-який момент часу незмінний. Результуючий вектор $\vec{A}$ знайдемо як векторну суму векторів $\vec{A}_1$ і $\vec{A}_2$:

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2, \qquad (2)$$

тобто, побудуємо діагональ паралелограма зі сторонами A_1 і A_2. Модуль результуючого вектора A з часом змінюватись не буде, оскільки кут $(\Psi_2 - \Psi_1)$ між $\vec{A}_1$ і $\vec{A}_2$ не змінюється. Отже, вектор $\vec{A}$ теж буде обертатись з кутовою швидкістю ω і являє собою результуюче коливання:

$$\boxed{x = A cos(\omega t + \psi_0),} \qquad (3)$$

де A – амплітуда коливання,

Ψ_0 – початкова фаза результуючого коливання,

x_1, x_2, x – відповідно проекції векторів $\vec{A}, \vec{A}_1, \vec{A}_2$ на вісь *x*, причому,

$$x = x_1 + x_2. \qquad (4)$$

Щоб рівняння (3) мало конкретний вигляд, треба знайти конкретні вирази для A і Ψ_0. Амплітуду A результуючого коливання знайдемо, застосовуючи теорему косинусів:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 cos\varphi, \qquad (5)$$

де φ – кут між векторами $\vec{A}_1$ і $\vec{A}_2$.

З рисунка видно, що $\varphi = \pi - (\psi_2 - \psi_1)$. (6)

Тому

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 cos[\pi - (\psi_2 - \psi_1)],$$

або

$$\boxed{A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 cos(\psi_2 - \psi_1).} \qquad (7)$$

Початкову фазу визначимо із співвідношення:

$$tg\psi_0 = \frac{y}{x} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2}. \tag{8}$$

Згідно з рисунком

$$y_1 = A_1 sin\psi_1, y_2 = A_2 sin\psi_2,$$
$$x_1 = A_1 cos\psi_1, x_2 = A_2 cos\psi_2.$$

Тоді (8) можемо записати:

$$\boxed{tg\psi_0 = \frac{A_1 sin\psi_1 + A_2 sin\psi_2}{A_1 cos\psi_1 + A_2 cos\psi_2}.} \tag{9}$$

Проаналізуємо вираз для амплітуди (7).

1) Якщо різниця фаз $\psi_2 - \psi_1 = 0$ (коливання відбуваються з однаковою фазою), то

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2,$$
$$A^2 = (A_1 + A_2)^2,$$
$$\boxed{A = A_1 + A_2} \tag{10}$$

– амплітуда максимальна .

2) Коли $\psi_2 - \psi_1 = \pm\pi -$ коливання у протифазі.

Тоді $$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 = (A_1 + A_2)^2$$

і $$A = \left| A_1 - A_2 \right| \tag{11}$$

– амплітуда результуючого коливання мінімальна.

Якщо різниця фаз довільна, то амплітуда буде мати проміжне значення.

Таким чином, **при складанні двох однаково напрямлених коливань з рівними частотами виходить результуюче коливання тієї ж частоти, однак його амплітуда залежить від різниці фаз коливань, що складаються. Вона максимальна, якщо різниця фаз дорівнює нулеві, і мінімальна, коли коливання у протифазі.**

Тепер розглянемо, що буде, якщо частоти коливань неоднакові.

2. Складання коливань з частотами, які значно відрізняються

Якщо **частоти коливань двох векторів різні,** то вектори обертаються з різними кутовими швидкостями. В результаті маємо коливання**,** в якому амплітуда і фаза змінюються в часі. Щоб переконатись в цьому, розглянемо три моменти такого коливання (рис. 2.3). Будемо вважати, що $\omega_1 < \omega_2$. Тоді вектор $\vec{A}_2$ обертатиметься швидше, ніж вектор $\vec{A}_1$. Амплітуда результуючого коливання періодично змінюватиметься і в якісь моменти часу вона буде максимальною (рис. 2.3 *а*, *в*), а в інші моменти (рис. 2.3 *б*) – мінімальною.

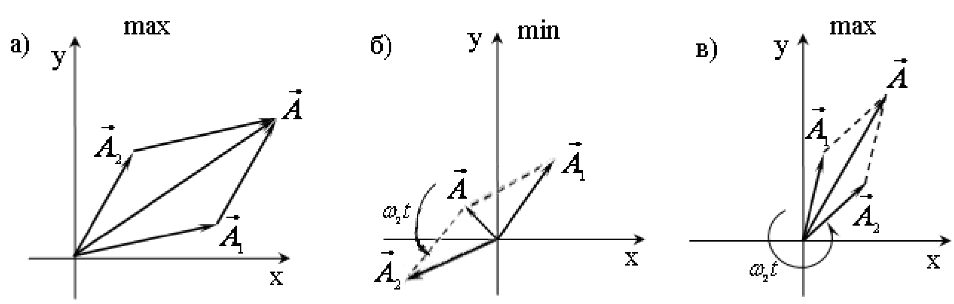

Рис. 2.3

Коливання виходить складним. Воно періодичне, але негармонійне. Воно містить частоти коливань, що складаються .

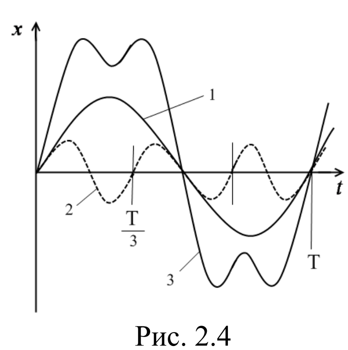

Рис. 2.4

Наприклад, якщо складати коливання з частотами ω і 3ω, то результуюче коливання буде містити в собі коливання з частотою ω – перша гармоніка, і 3ω – третя гармоніка (рис. 2.4).

Відзначимо, що в радіотехніці широко використовується складання коливань, а також виділення коливання певної частоти із складного коливання. Метод такого розкладання запропонував на початку XIX ст. Жан Фур'є. Він показав, що будь-яка періодична функція може бути розкладена на на гармоніки:

$$f(t)=A_0+A_1cos(\omega_1t+\varphi_1)+A_2cos(\omega_2t+\varphi_2)+\ldots$$

Це так званий розклад Фур'є, з яким буде детальне ознайомлення в курсі математики.

Спеціальний інтерес являє складання двох коливань одного напрямку з різними, але близькими частотами.

3. Складання коливань з близькими частотами. Биття

Амплітуди коливання будемо вважати однаковими і початкові фази для спрощення викладу приймемо рівними нулеві ($\psi_2=\psi_1=0$). Тоді коливання запишемо так:

$$x_1=Acos\omega t, \qquad (12)$$

$$x_2=Acos(\omega+\Delta\omega)t,$$

де $\Delta\omega=\omega_2-\omega_1$, $\omega_1=\omega$, $\omega_2=\omega+\Delta\omega$.

Складемо ці коливання:

$$x=x_1+x_2=A(cos\omega t+cos(\omega+\Delta\omega)t). \qquad (13)$$

Застосуємо формулу для суми косинусів:

$$x=2Acos\left[\frac{\omega+(\omega+\Delta\omega)}{2}t\right]cos\left[\frac{\omega-(\omega+\Delta\omega)}{2}t\right],$$

$$x=2Acos\left[\left(\frac{2\omega}{2}+\frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right]cos\frac{\Delta\omega}{2}t. \qquad (14)$$

Оскільки $\Delta\omega<<\omega$, то можна знехтувати доданком $\frac{\Delta\omega}{2}$ у першому множнику. Тоді (14) запишемо:

$$x = 2Acos(\omega t)\cdot cos\frac{\Delta\omega}{2}t$$

або

$$\boxed{x = 2Acos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cdot cos\,\omega t} \qquad (15)$$

Ми одержали результуюче коливання тієї ж частоти ω**,** що й у початкових коливань $\left(\omega_1 \approx \omega_2 \approx \omega\right)$**,** однак його амплітуда повільно (з частотою $\frac{\Delta\omega}{2}$) змінюється:

$$\boxed{A_б = 2Acos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right).} \qquad (16)$$

Такі коливання отримали назву «биття».

Максимальне значення амплітуди при биттях $\left|A_{б\,\max}\right| = 2A$. Нехай цей максимум спостерігається в початковий момент (при t = 0). Найближчий **мінімум** буде тоді, коли косинус стане рівним нулеві, тобто при

$$\frac{\Delta\omega}{2}t = \frac{\pi}{2}.$$

Звідси знаходимо цей час:

$$t = \frac{\pi}{\Delta\omega}.$$

Наступний максимум амплітуди $A_б$ буде через проміжок часу, який у два рази більший. Це і є період для биття:

$$T_б = 2\frac{\pi}{\Delta\omega}. \qquad (17)$$

Коливання (15), що складаються, відбуваються з частотою $\omega = \frac{2\pi}{T}$ і їх період коливань

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{18}$$

Оскільки $\omega >> \Delta\omega$, то період коливань амплітуди – період биття $T_б$, набагато більший від періоду коливань, що складаються (T). Відповідно до зробленого опису можемо биття зобразити графічно (рис. 2.5).

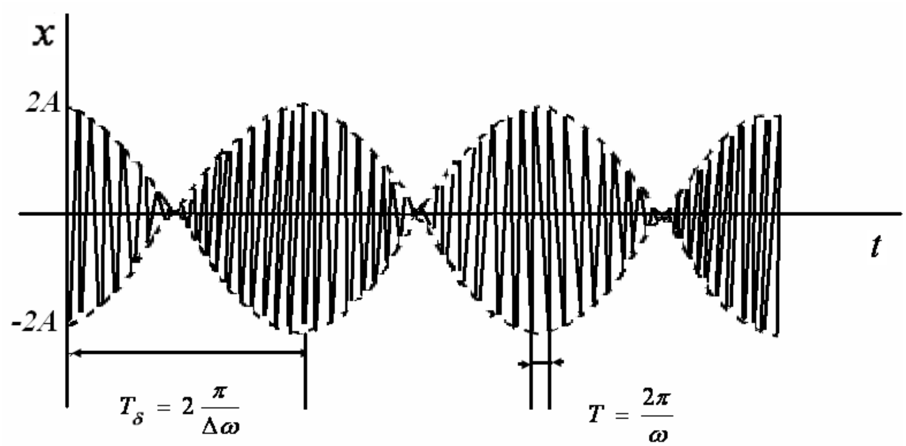

Рис. 2.5

Частота биття

$$f_б = \frac{1}{T_б} = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi} = f_2 - f_1.$$

Таким чином, **при складанні коливань з близькими частотами виникають коливання з пульсуючою амплітудою.** Причому частота пульсації амплітуди значно нижча, ніж частота коливань, що складаються.

Складання близьких за частотою коливань використовується в техніці. На цьому принципі базується, наприклад, робота приладу для вимірювання ємності. В цьому приладі є спеціальний генератор – **гетеродин** – коливання якого складаються з коливаннями в коливальному контурі. В результаті при близьких значеннях частот цих коливань виникають биття – коливання низької частоти, які можна виявити навіть за допомогою звичайного приладу зі стрілкою: його стрілка встигає реагувати на них – смикається.

Биття використовується також у військових супергетеродинних приймачах для прийому телеграфічних сигналів (азбуки Морзе). В цих приймачах коливання так званої проміжної частоти $f_{пр}$ складаються з коливаннями телеграфного гетеродина – малопотужного генератора коливань, частота яких $f_Г$ відрізняється від $f_{пр}$ на звукову частоту. В результаті виникають биття, амплітуда яких змінюється зі звуковою частотою (що дає можливість приймати телеграфні сигнали на слух).

4. Складання взаємно перпендикулярних гармонічних коливань. Поняття про фігури Ліссажу.

У попередніх питаннях ми розглядали додавання однаково напрямлених коливань, тобто коли точка (величина) бере участь у двох коливаннях, які відбуваються в одному напрямку. Тепер ми розглянемо коливання, одне з яких відбувається в напрямку *x*, а друге – в напрямку *y*. Прикладом такої ситуації може бути коливання електронного променя на екрані електронно-променевої трубки, якщо подати синусоїдальну напругу на пластини *x*, а іншу синусоїдальну напругу – на пластини *y*. Що ж при цьому відбудеться ? Розв'яжемо цю задачу стосовно поведінки променя при його одночасному коливанні в напрямках *x* і *y* математично.

Нехай коливання променя в напрямках *x* і *y* відбуваються за гармонічним законом:

$$\begin{aligned} x &= a\cos\omega t \\ y &= b\cos(\omega t+\psi). \end{aligned} \qquad (19)$$

Для зручності ми вибрали початок відрахунку часу так, щоб початкова фаза першого коливання була рівна нулеві, а початкова фаза другого коливання – ψ, так що різниця фаз $\Delta\psi = \psi$.

Щоб одержати рівняння кривої, по якій рухається точка (промінь), тобто траєкторії, треба із системи рівнянь (19) вилучити час *t*. Для цього друге рівняння розпишемо за допомогою формули для косинуса суми:

$$y = b\cos(\omega t + \psi) = b(\cos\omega t\cos\psi - \sin\omega t\sin\psi). \qquad (20)$$

З першого рівняння маємо: $\cos\omega t = \dfrac{x}{a}$.

Виразимо $\sin\omega t$ через косинус:

$$\sin\omega t = \sqrt{1 - \cos^2\omega t} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} .$$

Підставимо одержані значення в формулу (20):

$$y = b\left(\frac{x}{a}\cos\psi - \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\sin\psi\right), \qquad (21)$$

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{a}\cos\psi - \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\sin\psi. \qquad (22)$$

Рівняння (22) можна привести до вигляду:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\psi = \sin^2\psi} . \qquad (23)$$

Це рівняння еліпса, осі якого орієнтовані довільно відносно осей координат (рис. 2.6).

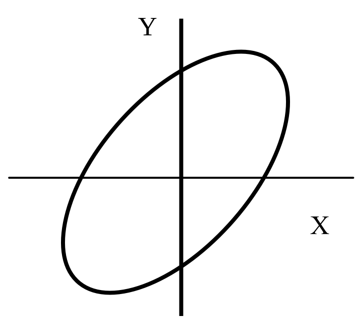

Рис. 2.6

Таким чином, результуюча траєкторія точки (променя) при участі у двох взаємно перпендикулярних коливаннях – еліпс.

Розглянемо деякі частинні випадки.

1) Нехай різниця фаз

$$\Delta\psi = \psi = \pm\frac{\pi}{2}. \qquad (24)$$

Тоді (23) матиме вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (24)$$

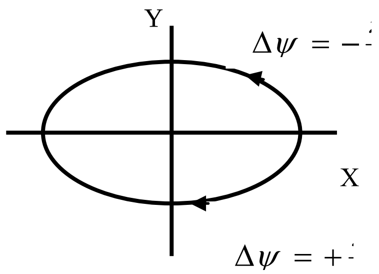

Рис. 2.7

Це еліпс, осі якого співпадають з осями координат (рис. 2.7).

Випадки $\Delta\psi=+\frac{\pi}{2}$ і $\Delta\psi=-\frac{\pi}{2}$ відрізняються тим, що рух по еліпсу відбувається у протилежні сторони.

2) $\Delta\psi=\psi=0$.

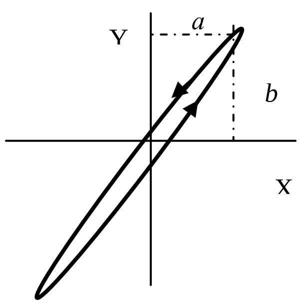

Рис. 2.8

У цьому випадку еліпс (23) вироджується в пряму лінію:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}=0, \quad \left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^2=0,$$

$$y=\frac{b}{a}x . \qquad (25)$$

Це і є пряма лінія, по якій рухається точка (рис. 2.8).

3) $\Delta\psi=\psi=\pi.$

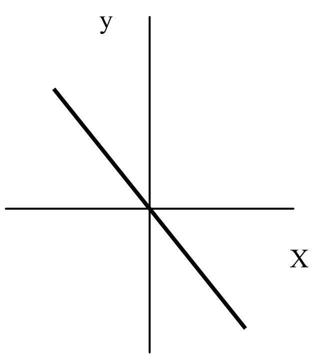

Рис. 2.9

Із (23) маємо:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{2xy}{ab}=0, \quad \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2=0,$$

$$y=-\frac{b}{a}x. \qquad (26)$$

Це теж пряма, тільки з від’ємним нахилом (рис. 2.9).

Якщо частоти взаємно перпендикулярних коливань неоднакові, то траєкторії результуючого руху мають вигляд досить складних кривих, які дістали назву **фігури Ліссажу** (рис. 2.10).

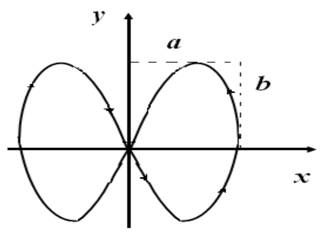

Рис. 2.10

Наприклад, коли співвідношення частот

$$\frac{f_x}{f_y} = \frac{n}{m} = \frac{1}{2}, \qquad (27)$$

а різниця фаз $\Delta\psi = 0$, то рівняння коливань (19)можна записати:

$$x = a\cos\omega t,$$
$$y = b\cos 2\omega t$$

Це означає, що за час, коли точка по горизонталі переміститься від центра до краю, то по вертикалі вона це зробить туди й назад і траєкторія матиме характений вигляд (рис. 2.10).

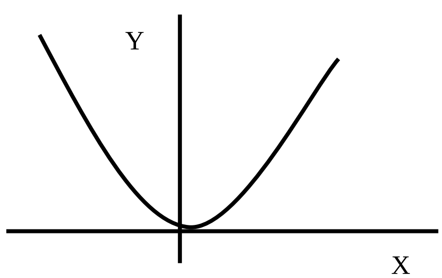

Рис. 2.11

Якщо $\Delta\psi = \dfrac{\pi}{2}$, траєкторія точки вироджується в незамкнену криву (рис. 2.11).

При іншому співвідношенні частот виходять більш складні фігури Ліссажу.

Фігури Ліссажу використовуються для визначення частот невідомих коливань.

Якщо f_y – відома частота, то число точок дотику кривої до вертикальної лінії (n=1) і до горизонтальної лінії (m=2) (рис. 2.12)., можна знайти невідому частоту за формулою

$$f_x = \frac{n}{m} f_y .$$

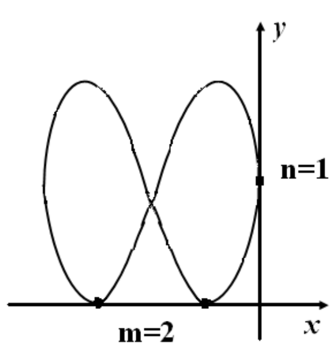

Рис. 2.12

Питання для контролю

1. Зобразити графічно гармонічне коливання за допомогою вектора.
2. Записати і пояснити рівняння результуючого коливання при складанні двох гармонічних коливань з однаковими частотами.
3. Пояснити явище биття при складанні коливань з близькими частотами.
4. Записати і пояснити рівняння траєкторії руху точки, яка бере участь у взаємно перпендикулярних коливаннях.
5. Що таке фігури Ліссажу ?

Допоміжна література

1. *Ионушас К.К., Малинко В.Н.* Курс физики, т. 2, ч.1. – Киев: КВВИУС, 1987, §25-27.
2. *Савельев И.В.* Курс общей физики, т. 1 – М.: 1977, § 55–57.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Через який час після початку руху точка, яка коливається за рівнянням $x = 7 sin 0{,}5\pi t$ см, пройде шлях від положення рівноваги до максимального зміщення ? Чому дорівнює період коливань ?

Відповідь: $T = 4$ с, $A = 7$ см.

2. Рівняння коливання матеріальної точки масою $m = 1{,}6 \cdot 10^{-2}$ кг має вигляд: $x = 0{,}1 sin(\frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{4})$. Знайти значення максимальної сили і повну енергію точки. Відповідь: $2{,}5 \cdot 10^{-4}$ Н.

Рекомендації для розв'язку:

а) значення максимальної сили можна знайти за другим законом Ньютона, для чого потрібно розрахувати прискорення точки, взявши другу похідну від x *по часу ;*

б) Повну енергію точки можна розрахувати, знайшовши максимальне значення кінетичної або потенціальної енергії.

3. Коливальний контур складається з конденсатора ємністю С = 5 мкФ і котушки індуктивністю L = 0,2 Гн. Максимальна

напруга на конденсаторі $U_0 = 90$ В. Визначити частоту коливань f у контурі і повну енергію коливань. Опором контура знехтувати. Відповідь: $f \approx 500$ Гц, $W \approx 2 \cdot 10^{-2}$ Дж.

4. Чому дорівнює відношення енергії магнітного поля коливального контура до енергії його електричного поля для моменту, часу $t = \frac{T}{8}$? Відповідь: 1.

Рекомендації для розв'язку.

Виразити енергію магнітного поля $W_B = \frac{LI^2}{2}$ *через заряд* q *і*

розділити її на енергію електричного поля $W_E = \frac{q^2}{2C}$.

5. Коливальний контур радіоприймача складається з котушки індуктивності (L=1 мГ) і змінного конденсатора, ємністьякогознаходиться в межах від C_1= 10 пФ до C_2 = 90 пФ . В якому діапазоніловжин хвиль може приймати радіостанції цей приймач ? Відповідь: 190÷560 м.

Рекомендації для розв'язку

Виходити з того, що швидкість поширення електромагнітної хвилі $c = \lambda \nu = 3 \cdot 10^8$ *м/с, а її частота* ν *дорівнює частоті коливань у оливальному контурі.*

6. У коливальному контурі збуджуються дві е.р.с. ε_1 і ε_2, які змінюються за гармонічним законом з однаковою частотою f =20 кГц і амплітудами ε_{01}=0,2 В і ε_{02}=0,5 В. Різниця фаз між цими коливаннями дорівнює $\pi/4$. Початкова фаза одного з них $\psi_1 = 0$. Визначити амплітуду і фазу результуючого коливання.

7. Знайти аналітично (у вигляді формул) і графічно амплітуду A коливань, які виникають при додаванні двох коливань одного напрямку:

$$x_1 = 3cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)см, \qquad x_2 = 8sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)см.$$

Відповідь: A_0= 7 см.

Рекомендації для розв'язку.

Для аналітичного розв'язку необхідно знайти різницю фаз. Це легко зробити, якщо обидва коливання представити однією функцією $(sin(\omega t+\psi)$ *чи* $cos(\omega t+\psi))$.

Для графічного розв'язку коливання слід представити за допомогою векторних діаграм і знайти амплітуду як довжину сумарного вектора.

8. На вертикально відхиляючі пластини у осцилографа подано напругу від генератора частотою f_y= 1500 Гц, а на горизонтально відхиляючі пластини x – напругу невідомої частоти. На екрані отримана фігура Ліссажу, яка зображена на рис. 2.13 Визначити частоту невідомого сигналу.

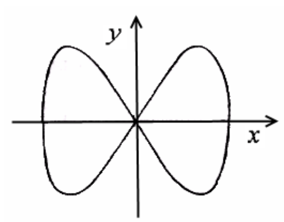

Рис. 2.13

9. У супергетеродинному приймачеві для прийому телеграфних сигналів (азбука Морзе) застосовується так званий телеграфний гетеродин. Це малопотужний генератор коливань, частота яких $f_Г$ відрізняється від проміжної частоти $f_{пр}$ на звукову частоту. Коливання проміжної частоти $f_{пр}$ на вході детектора складаються з коливаннями гетеродина $f_Г$ і виникають "биття", амплітуда яких змінюється зі звуковою частотою (див. схему на рис. 2.14).

В одному з приймачів $f_{пр}$=215 кГц, $f_Г$=216 кГц . Визначити, на якій частоті будуть прийматися сигнали.

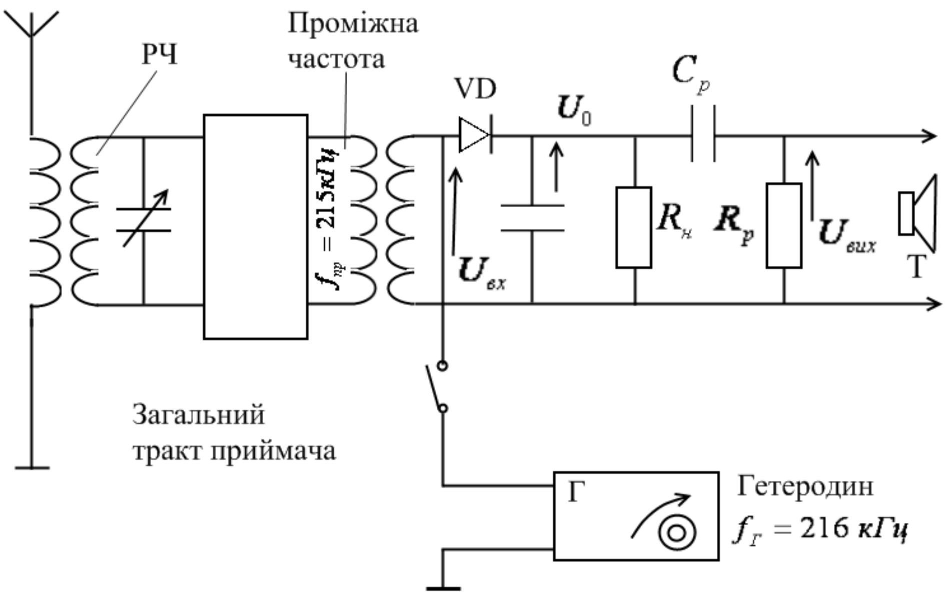

Рис. 2.14

Рекомендації для розв'язку

Без гетеродина телеграфний сигнал прийматися не може, бо після детектора VD "випрямлений" сигнал матиме постійну напругу U_0' *і через його роздільний конденсатор* C_p *струм не піде. Телефон на виході зафіксує хіба що початок і кінець сигналу ("крапки" або "риски") у вигляді різкої зміни напруги* $U_{вих}$*, що сприймається як тріск.*

Якщо ж увімкнути гетеродин, то напруги сигналів $U_{вх}$ *і* $U_Г$ *додаються і дають "биття" – коливання низької частоти (*U_0*), які проходять через конденсатор* C_p *і створюють у телефоні звук певної частоти, яка дорівнює частоті "биття":* $f_б = f_Г - f_{пр}$

На рис. 2.15 зображено характер зміни в часі напруг $U_{пр}$ *,* U_0*, і* $U_{вих}$ *в телеграфному режимі з гетеродином і без нього .*

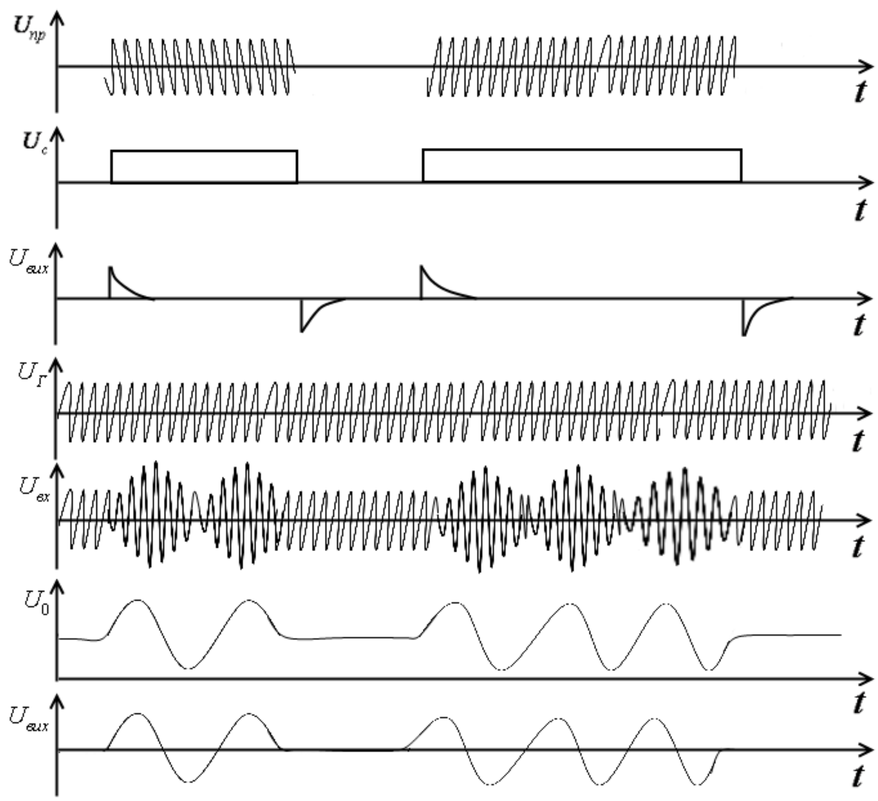

Рис. 2.15