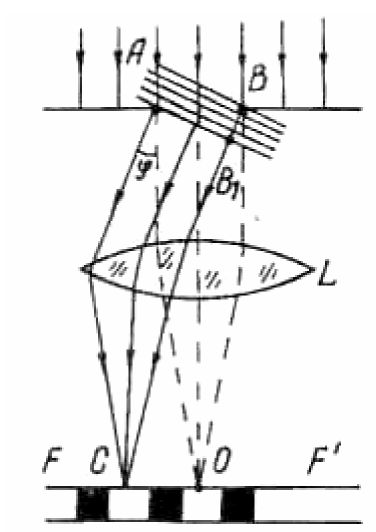
Тема 14. **Дифракція паралельних променів з точки зору хвильової природи світла (дифракція Фраунгофера)**

Питання лекції

1. Дифракція на вузькій щілині.
2. Дифракційна гратка.
3. Дослідження дифракційної картини
4. Дифракційна гратка як спектральний прилад.

1. Дифракція на вузькій щілині.

Дифракцію Фраунгофера можна спостерігати, якщо паралельний пучок світла спрямувати на вузьку щілину і потім сфокусувати **дифраговані паралельні промені** на екрані за допомогою лінзи (рис. 14.1).



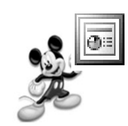


Рис. 14.1

Якщо згідно з принципом Гюйгенса-Френеля хвильову поверхню щілини розбити на елементарні зони, то вторинні хвилі, що посилаються цими елементарними зонами в напрямку φ, зберуться в точці *P*, і з врахуванням різниці фаз матимуть результуючу амплітуду коливання. Розрахунок показує, що значення амплітуди *E* визначається формулою:

$$E_{\varphi} = E_0 \frac{sin\left(\frac{\pi b}{\lambda} sin\varphi\right)}{\frac{\pi b}{\lambda} sin\varphi} = E_o \frac{(sin\alpha)}{\alpha}\ , \tag{1}$$

де $\alpha = \left(\frac{\pi b}{\lambda} sin\varphi\right)$.

При $\varphi = 0$ $\frac{sin\alpha}{\alpha} \to 1$ і $E_{\varphi=0} = E_0$, тобто, в центрі дифракційної картини повинен спостерігатися максимум. Це так званий нульовий максимум. Ліворуч і праворуч від нульового максимуму розміщені мінімуми амплітуди. Згідно з формулою (1) мінімуми будуть тоді, коли

$$sin\left(\frac{\pi b}{\lambda} sin\varphi\right) = 0, \tag{2}$$

або коли $\frac{\pi b}{\lambda} sin\varphi = \pm m\pi$, де $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$ ($m = 0$ виключається, бо тут максимум).

Таким чином, **умова мінімумів**

$$sin\varphi = \pm \frac{m\lambda}{b} \tag{3}$$

або $$\sin\varphi = \pm\frac{\lambda}{b};\ \pm\frac{2\lambda}{b};\ \pm\frac{3\lambda}{b}. \tag{3'}$$

Кількість мінімумів можна визначити з умови, що

$$sin\varphi = \pm \frac{m\lambda}{b} \le 1,$$

звідки $$m \le \frac{b}{\lambda}. \tag{4}$$

Інтенсивність пропорційна квадрату амплітуди:

$$I_{\varphi} \cong E_{\varphi}^{2} = E_{0}^{2} \cdot \frac{sin^{2}\left(\frac{\pi b}{\lambda} sin\varphi\right)}{\left(\frac{\pi b}{\lambda} sin\varphi\right)^{2}} \quad . \qquad (5)$$

На рис. 14.2 представлено графік залежності інтенсивності I від кута φ (точніше – від $sin\varphi$). Ця залежність має у центрі максимум і мінімуми в точках :

$$\pm\frac{\lambda}{b};\ \pm\frac{2\lambda}{b};\ \pm\frac{3\lambda}{b}\ldots$$

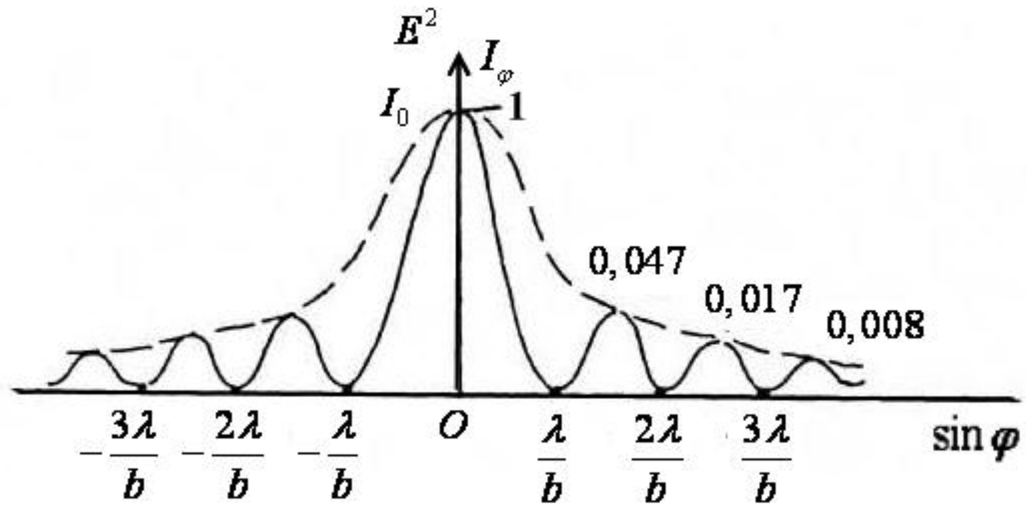


Рис. 14.2

Вторинні максимуми відносно слабкі. Інтенсивність головного і наступних максимумів відносяться як

1: 0,047: 0,017: 0,008.

Однак практичне значення має так звана дифракційна гратка (решітка), яка являє собою періодичний ряд гострих країв, на яких відбувається перевипромінення світла і створення дифракційної картини із максимумів і мінімумів.

2. Дифракційна гратка. Дифракційні спектри

Дифракційна гратка (гратка) – це періодична система великої кількості паралельних прозорих щілин однакової ширини b, розділених однаковими непрозорими проміжками шириною a (рис. 14.3). Величина $\boldsymbol{d = a + b}$ називається періодом (сталою) гратки. Густота щілин ~10^3 мм$^{-1}$.

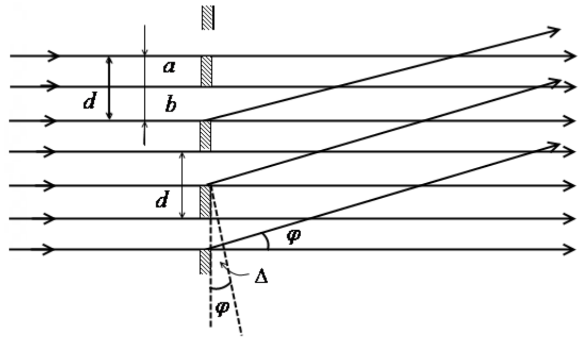


Рис. 14.3

Реальна дифракційна гратка – це прозора пластинка, на якій робиться велика кількість гострих царапин (сотні штрихів на міліметр). Кожна царапина, її краї – це і є перевипромінювачі світла.

Для спостереження дифракції, як і у випадку з щілиною, на фокусній відстані *F* від екрану *E* ставиться лінза *L* (рис. 14.4).

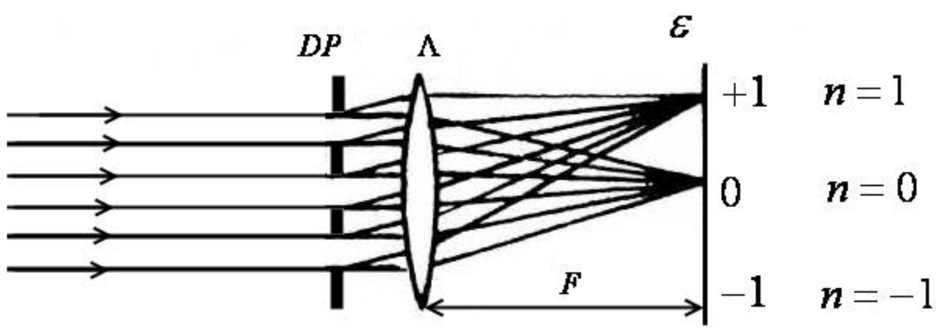


Рис. 14.4

Нехай на гратку падає плоска хвиля. На краях щілин відбувається дифракція променів у різних напрямках. Паралельні промені від різних щілин інтерферують між собою і дають у відповідних напрямках максимуми і мінімуми, що залежить від різниці ходу Δ. Згідно з рис. 3 різниця ходу

$$\Delta = d\,sin\varphi\ . \qquad (6)$$

Максимум спостерігається при умові, коли різниця ходу дорівнює парному числу півхвиль:

$$\Delta = \pm 2n\frac{\lambda}{2}. \qquad (7)$$

З (6) і (7) отримуємо **умову максимуму** для дифракційної картини:

$$d\, sin\varphi = \pm n\lambda\,, \qquad (8)$$

де n = 0, 1, 2, … – порядок максимуму, φ – кут, в напрямку якого виникає максимум.

За допомогою лінзи дифраговані паралельні промені збираються на екрані *E*, розміщеному на фокальній відстані, і виникає дифракційна картина із ряду світлих і темних смуг (рис. 14.4).

Якщо на гратку спрямувати сильний паралельний промінь лазера, то дифракційну картину можна спостерігатиі без лінзи на екрані, що знаходиться на великій відстані (рис. 14.5).

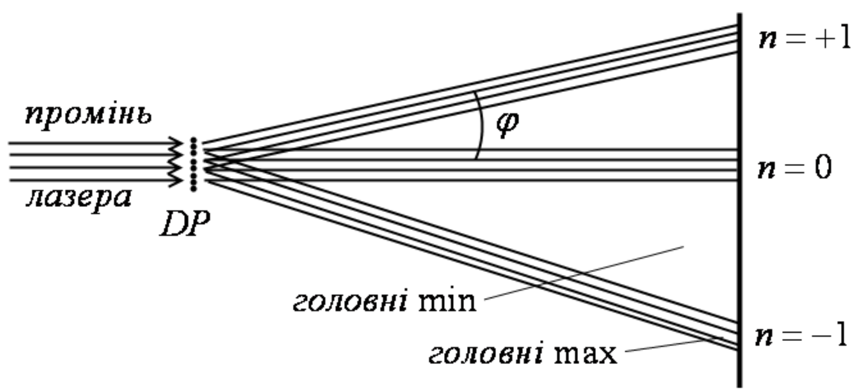
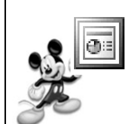


Рис. 14.5



Кут φ , під яким спостерігається максимум, залежить від порядку максимуму n:

$$sin\varphi = \pm\frac{\lambda}{d}n\,,$$

Максимуми будуть при n = 0, 1, 2, ... , тобто при

$$sin\varphi = 0,\ \pm\frac{\lambda}{d},\ \pm 2\frac{\lambda}{d}\ \dots$$

– ці максимуми називають ще **головними максимумами**.

Слід зазначити, що головні максимуми дуже різкі, але їх інтенсивність зменшується при зростанні порядку n.

Залежність інтенсивності при дифракції в залежності від $sin\varphi$ представлена на рис. 14.6.

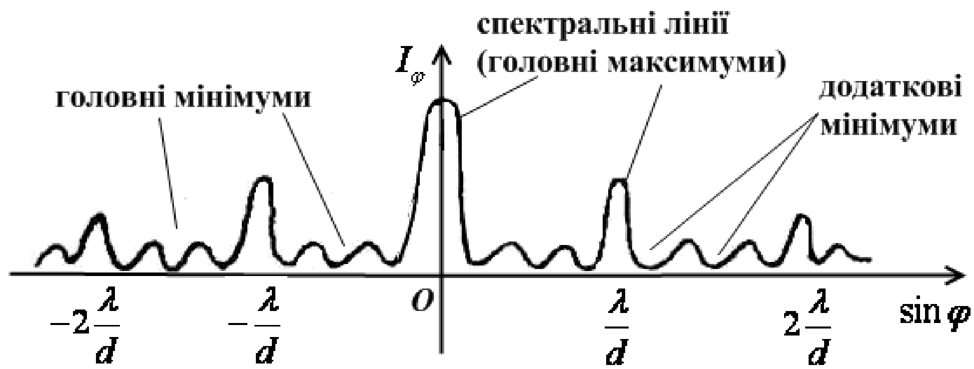


Рис. 14.6

Між головними максимумами знаходяться головні мінімуми. Вони виникають у тих напрямках, у яких ні одна з щілин не випромінює світла. Тобто, умова **головних мінімумів** така ж, як і у випадку однієї щілини:

$$b\ sin\varphi = \pm\, m\lambda\ ,\quad m = 1,2,\ 3... \tag{9}$$

Крім того, внаслідок інтерференції променів, які йдуть від ідентичних точок різних щілин, в деяких напрямках виникають **додаткові мінімуми**. Їх число залежить від кількості штрихів гратки N і визначається умовою:

$$d\ sin\varphi\ = \pm\ n\lambda + \ p\frac{\lambda}{N}\ , \qquad (10)$$

де $n = 0, 1, 2, ...;$ $p = 1, 2, ... N\text{-}1.$

Формула (10) це умова додаткових мінімумів. Вона визначає, що між головними максимумами розміщаються N-1 додаткових мінімумів. Тому чим більше щілин, тим більше мінімумів між максимами і тим контрастнішою стає дифракційна картина.

З ростом кількості щілин N зростає також інтенсивність максимумів.

3. Дифракційна гратка як спектральний прилад

З умови (8) головних максимумів дифракційної гратки

$$d\ sin\varphi\ = \pm\ n\lambda$$

маємо:

$$sin\varphi = \pm\frac{n}{d}\cdot\lambda\ .$$

Як бачимо, положення головних максимумів (під кутом φ) залежить від довжини хвилі λ. Тому при пропусканні через гратку білого світла усі максимуми, крім центрального, розкладуться у спектр, фіолетова частина якого знаходиться з боку центра, а червона – на краях. Таким чином, дифракційна гратка може бути використана як спектральний прилад.

На рис. 14.7 зображено дифракційні спектри різних порядків.

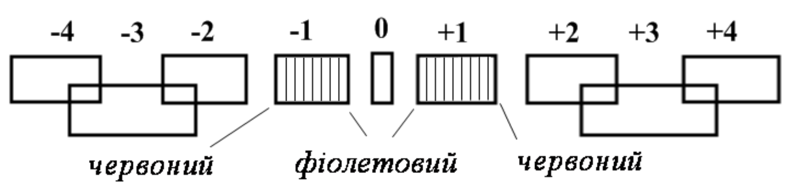


Рис. 14.7

Спектри більших порядків можуть перекриватись, що залежить від параметрів гратки.

Основними параметрами дифракційної гратки є **роздільна здатність** і д**исперсія**.

Роздільна здатність характеризує здатність до розділення близьких спектральних ліній λ_1 і λ_2. Перехід від однієї довжини хвилі до другої відбувається плавно. Тому для того, щоб була можливість розрізнити дві хвилі, треба щоб їхні обриси були досить чіткими, щоб виступали два максимуми. Розділення вважається граничним, якщо **максимум першої хвилі** припадає на **мінімум другої**. Це так звана умова Релея (рис. 14.8).

розрізнення є

розрізнення немає

Рис. 14.8

Найменша різниця $\delta\lambda$, яка задовольняє умову Релея, визначає **роздільну здатність** спектрального приладу.

Роздільною здатністю називають відношення довжини хвилі λ, в області якої робляться виміри, до $\delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$, при якій можливе розділення:

$$R = \frac{\lambda}{d\lambda}. \quad (11)$$

Знайдемо роздільну здатність дифракційної гратки. Для цього запишемо умову максимуму для довжини хвилі λ_1 і умову мінімуму для λ_2 (візьмемо умову додаткового мінімуму):

$$\begin{cases} d\sin\varphi_{max} = n\lambda_1 \\ d\sin\varphi_{max} = n\lambda_2 + p\dfrac{\lambda_2}{N} \end{cases} \quad (12)$$

Розділення буде при $\varphi_{max} = \varphi_{min}$ (умова Релея):

$$n\lambda_1 = n\lambda_2 + p\frac{\lambda_2}{N}, \tag{13}$$

де $n = 0, 1, 2, ...;\ p = 1, 2, ..., N - 1$.

Звідси маємо: $$n(\lambda_1 - \lambda_2) = p\frac{\lambda_2}{N}.$$

Візьмемо перший мінімум (p=1).

Тоді $$n(\lambda_1 - \lambda_2) = \frac{\lambda_2}{N},$$

звідки $$\frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = nN = R$$

або в загальному вигляді

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = nN. \tag{14}$$

Як бачимо, роздільна здатність дифракційної гратки зростає при збільшенні числа штрихів N, а також при переході до спектрів вищих порядків (n).

Сучасні дифракційні гратки мають роздільну здатність $R \sim 10^5$.

Кутова дисперсія. Кутова дисперсія визначає кутову відстань між двома спектральними лініями, які відрізняються довжиною хвилі на одиницю ($1\,\mathring{A}$) (рис. 14.9).

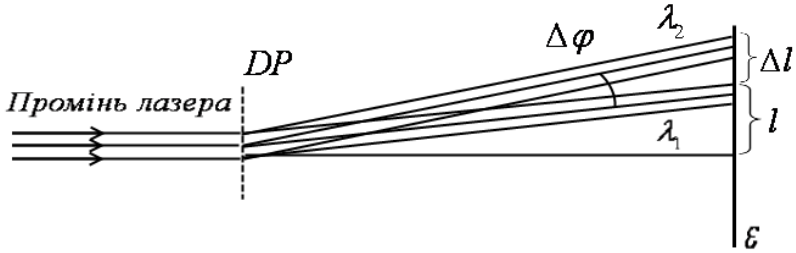


Рис. 14.9

Відповідно до рис. 14.9 кутова дисперсія

$$D_{\varphi} \cong \frac{\Delta\varphi}{\Delta\lambda}. \tag{15}$$

Лінійна дисперсія. Лінійна дисперсія визначає лінійну відстань (на екрані) між двома спектральними лініями, які відрізняються по довжині хвилі на одиницю (1 Å):

$$D_{\varphi} \cong \frac{\Delta l}{\Delta\lambda} .$$

Умова максимуму при дифракції

$$d\,sin\varphi = \pm n\lambda .$$

Продиференціюємо:

$$d\left(d\,sin\varphi\right) = \pm n \cdot d\lambda,$$

$$-d\,cos\varphi\; d\varphi = \pm n \cdot d\lambda.$$

Звідси

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = D_{\varphi} = \frac{n}{d\,cos\varphi}.$$

При невеликих кутах $cos\varphi \approx 1$, тому

$$D_{\varphi} \approx \frac{n}{d}.$$

Кутова дисперсія тим більша, чим більший порядок спектру і чим менший період гратки.

Питання для контролю

1. Що спостерігається в центрі дифракційної картини при дифракції світлових хвиль на одній щілині ?
2. Записати та пояснити умову мінімумів інтенсивності світла при дифракції від однієї щілини.
3. Що таке дифракційна гратка (гратка) ?
4. Записати та пояснити умову головних максимумів інтенсивності світла при дифракції на дифракційній гратці.
5. Що таке "стала дифракційної гратки" ?
6. Записати та пояснити умову додаткових мінімумів інтенсивності світла при дифракції на дифракційній гратці.
7. Який вигляд має спектр, одержаний при розкладанні білого світла на складові при його проходженні через дифракційну гратку ?.
8. Сформулювати та записати критерій граничного розділення спектральних ліній (умову Релея).

9. Записати та пояснити формулу для роздільної здатності дифракційної гратки.
10. Записати та пояснити формули для кутової та лінійної дисперсії дифракційної гратки.

Допоміжна література

1. *Малинко В.Н., Сусь Б.А.* Курс физики, т. 2, ч. 2. – Киев: КВВИУС, 1987. – § 66, 68, 69, 70.
2. *Савельев И.В.* Курс общей физики, т. 2. – М: Наука, 1978. – §129, 130.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Монохроматичне світло (λ = 0,5 мкм) нормально падає на круглий отвір діаметром b = 1 см. На якій відстані l від джерела повинна знаходлтитсь точка спостереження, щоб в отворі уміщувалась одна зона Френеля ? Дві зони ?

Відповідь; l_1 = 50 м; l_2 = 25 м.

2. Визначити площу другої" зони Френеля у випадку плоского фронту хвилі, якщо відстань від поверхні хвилі до точки спостереження l = 25 м, **а** довжина хвилі λ = 0,5 мкм.

Відповідь: S = 8 мм^2.

3. Чому дорівнює стала дифракційної гратки d**,** якщо для того, щоб спостерігати червону лінію (λ=$7\cdot10^7$м) у спектрі другого порядку, зорову трубу довелось встановити під кутом φ = 30° до осі ? Яке число періодів на одному сантиметрі (густота штрихів) має ця гратка ?

Відповідь: d = 2,8 мкм, n = $3{,}3\cdot10^5$ м$^{-1}$.

4. На дифракційну гратку, яка має n= 400 штрихів на міліметрі, падає нормально монохроматичне світло (λ = 0,6 мкм). Знайти число дифракційних максимумів, які дає ця гратка. Визначити кут відхилення останнього максимуму.

Відповідь: k = 9; φ = 74°.

5. Кутова дисперсія гратки у спектрі першого порядку D_φ = $\mathbf{2}\cdot10^5$ рад/м. Знайти період d дифракційної гратки і лінійну дисперсію D_1 (в мм/Å) при фокусній відстані лінзи F = 0,4 м для довжини хвилі λ = 0,668 мкм.

Відповідь: d = $5\cdot10^{-6}$ м, D_1 = $8\cdot10^{-3}$ мм/Å.

6. Чому дорівнює стала дифракційної гратки *d*, якщо ця гратка може розділяти у першому порядку лінії спектру калію λ_1 = 4044 Å і λ_2 = 4047 Å ? Ширина гратки l = 3 см.

Відповідь: d = 2,2·10^{-5} м.