

## Тема 9: Електромагнітні хвилі

### Питання лекції:

1. Доведення необхідності існування електромагнітних хвиль (ЕМХ) на основі аналізу рівнянь Максвелла.
2. Дослідження рівняння ЕМХ. Основні властивості ЕМХ.
3. Енергія електромагнітних хвиль.
4. Густина потоку енергії ЕМХ (вектор Умова-Пойнтінга).
5. Проблемні питання щодо висновків теорії Максвелла ЕМХ.

### 1. Доведення необхідності існування електромагнітних хвиль (ЕМХ) на основі аналізу рівнянь Максвелла

З рівнянь Максвелла випливає необхідність існування електромагнітних хвиль. Щоб довести це, запишемо рівняння Максвелла (с. ) в диференціальній формі:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dH_z}{dy} - \frac{dH_y}{dz} &= \frac{dD_x}{dt} + j_x, \\ \frac{dH_x}{dz} - \frac{dH_z}{dx} &= \frac{dD_y}{dt} + jy, \\ \frac{dH_y}{dx} - \frac{dH_x}{dy} &= \frac{dD_z}{dt} + jz, \\ \frac{dD_x}{dx} + \frac{dD_y}{dy} + \frac{dD_z}{dz} &= \rho, \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} \frac{dE_z}{dy} - \frac{dE_y}{dz} &= -\frac{dB_x}{dt}, \\ \frac{dE_x}{dz} - \frac{dE_z}{dx} &= -\frac{dB_y}{dt}, \\ \frac{dE_y}{dx} - \frac{dE_x}{dy} &= -\frac{dB_z}{dt}, \\ \frac{dB_x}{dx} + \frac{dB_y}{dy} + \frac{dB_z}{dz} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Будемо вважати, що середовище непровідне, тобто  $\rho = 0$ ,  $j_x = j_y = j_z = 0$ . Вважатимемо також, що  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  залежать тільки від однієї координати  $x$  і від часу  $t$ . Тоді рівняння Максвелла приймуть вигляд:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \frac{dD_x}{dt}, \\ -\frac{dH_z}{dx} &= \frac{dD_y}{dt}, \\ \frac{dH_y}{dx} &= \frac{dD_z}{dt}, \\ \frac{dD_x}{dx} &= 0, \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} 0 &= -\frac{dB_x}{dt}, \\ -\frac{dE_z}{dx} &= -\frac{dB_y}{dt}, \\ \frac{dE_y}{dx} &= -\frac{dB_z}{dt}, \\ \frac{dB_x}{dx} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Виділимо в обох системах рівнянь (1) рівняння з однією кladовою, наприклад  $E_y$ :

$$-\frac{dH_z}{dx} = \frac{dD_y}{dt}, \quad \frac{dE_y}{dx} = -\frac{dB_z}{dt}. \quad (2)$$

Враховуючи, що  $D_y = \varepsilon_0 E_y$ , а  $B_z = \mu\mu_0 H_z$  рівняння (2) запишемо:

$$-\frac{dH_z}{dx} = \varepsilon_0 \frac{dE_y}{dt}, \quad \frac{dE_y}{dx} = -\mu\mu_0 \frac{dH_z}{dt}. \quad (3)$$

Виключимо магнітне поле із системи рівнянь (3), для чого продиференціюємо перше рівняння по  $t$ , а друге – по  $x$ :

$$-\frac{d^2 H_z}{dx dt} = \varepsilon_0 \frac{d^2 E_y}{dt^2}, \quad \frac{d^2 E_y}{dx^2} = -\mu\mu_0 \frac{d^2 H_z}{dx dt}. \quad (4)$$

Перемноживши ліві і праві сторони (4), одержуємо:

$$\boxed{\frac{d^2 E_y}{dx^2} = \varepsilon_0 \mu\mu_0 \frac{d^2 E_y}{dt^2}}. \quad (5)$$

Якщо подібним чином із (3) виключити  $E_y$ , матимемо:

$$\boxed{\frac{d^2 H_z}{dx^2} = \varepsilon_0 \mu\mu_0 \frac{d^2 H_z}{dt^2}}. \quad (6)$$

Рівняння (5) і (6) – це рівняння хвилі в диференціальній формі, або так зване **хвильове рівняння** (див. с. ):

$$\frac{d^2 S}{dx^2} = \frac{1}{v^2} \frac{d^2 S}{dt^2}. \quad (7)$$

Порівнюючи (7) з рівняннями (5) і (6), бачимо, що

$$\varepsilon_0 \mu\mu_0 = \frac{1}{v^2},$$

звідки швидкість хвилі

$$\boxed{v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\sqrt{\varepsilon\mu}}}. \quad (8)$$

Розв'язками хвильових рівнянь (5) і (6) є гармонічні функції

$$E_y = E_{0y} \cos(\omega t - kx + \psi_1), \quad (9)$$

$$H_z = H_{0z} \cos(\omega t - kx + \psi_2). \quad (10)$$

Ці функції являють собою плоску хвилю, що поширюється в напрямку  $x$ .

Таким чином, виходячи з рівнянь Максвелла, приходимо до висновку, що одночасно і взаємно пов'язано повинні існувати електричні і магнітні хвилі – електромагнітні хвилі.

Дослідимо характер і властивості цих хвиль.

## 2. Дослідження рівняння електромагнітної хвилі. Основні властивості електромагнітних хвиль

Запишемо ще раз рівняння Максвелла (3), з яких одержали рівняння хвиль (9) і (10):

$$\left. \begin{aligned} -\frac{dH_z}{dx} &= \varepsilon \varepsilon_0 \frac{dE_y}{dt}, \\ \frac{dE_y}{dx} &= -\mu \mu_0 \frac{dH_z}{dt}. \end{aligned} \right\} (3)$$

Як бачимо, в цю систему рівнянь входять компоненти  $H_z$  і  $E_y$ , тобто взаємно перпендикулярні складові електричного і магнітного полів. Складова електричного поля  $E_y$ , змінюючись у часі, пов'язана зі зміною магнітного поля  $H_z$ , а змінне в часі магнітне поле  $H_z$  пов'язане зі зміною поля  $E_y$ . Аналогічно можна показати, що таке справедливо і для інших компонентів ( $E_x$ ,  $E_z$ ,  $H_x$ ,  $H_y$ ). Таким чином, ми приходимо до важливого висновку: **взаємно обумовлені електричне і магнітне поля, змінюючись в часі, є взаємно перпендикулярними.**

Отже, в загальному випадку можна записати, що в електромагнітній хвилі

$$\boxed{\vec{H} \perp \vec{E}} \quad (11)$$

Знайдемо фази коливань  $E$  і  $H$ .

Для цього вирази для  $H_z$  і  $E_y$  ( див. (9) і (10) ) :

$$E_y = E_{0y} \cos(\omega t - kx + \psi_1),$$

$$H_z = H_{0z} \cos(\omega t - kx + \psi_2),$$

підставимо у рівняння (3):

$$\begin{aligned} -\frac{dH_z}{dx} &= \varepsilon_0 \frac{dE_y}{dt}, \\ \frac{dE_y}{dx} &= -\mu\mu_0 \frac{dH_z}{dt}. \end{aligned}$$

Відповідно продиференціювавши, отримаємо:

$$-H_{0z} \cdot k \cdot \sin(\omega t - kx + \psi_2) = -\varepsilon\varepsilon_0 E_{0y} \omega \sin(\omega t - kx + \psi_1), \quad (12)$$

$$E_{0y} \cdot k \cdot \sin(\omega t - kx + \psi_1) = \mu\mu_0 H_{0z} \omega \sin(\omega t - kx + \psi_2).$$

Ліві і праві сторони рівнянь можуть бути рівні лише тоді, коли аргументи у функціях синусів будуть однакові, що можливо тільки при умові рівності фаз:

$$\boxed{\psi_1 = \psi_2} \quad (13)$$

**Таким чином, коливання векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  мають однакові фази.**

Коефіцієнти лівої і правої сторін рівнянь (12) також повинні бути рівними:

$$-H_{0z} \cdot k = -\varepsilon\varepsilon_0 E_{0y} \omega, \quad (14)$$

$$E_{0y} \cdot k = \mu\mu_0 H_{0z} \omega. \quad (15)$$

Розділимо рівняння (14) і (15) одне на одне:

$$\frac{H_{0z}}{E_{0y}} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0} \cdot \frac{E_{0y}}{H_{0z}}. \quad (16)$$

Звідси одержуємо співвідношення для амплітуд  $E_{0y}$  і  $H_{0z}$ :

$$\mu\mu_0 H_{0z}^2 = \varepsilon\varepsilon_0 E_{0y}^2,$$

$$\boxed{\sqrt{\mu\mu_0} H_{0z} = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} E_{0y}}. \quad (17)$$

Коливання векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  являють собою єдину електромагнітну хвилю і ми можемо сконструювати зображення цієї хвилі для певного моменту часу (рис. 9.1).

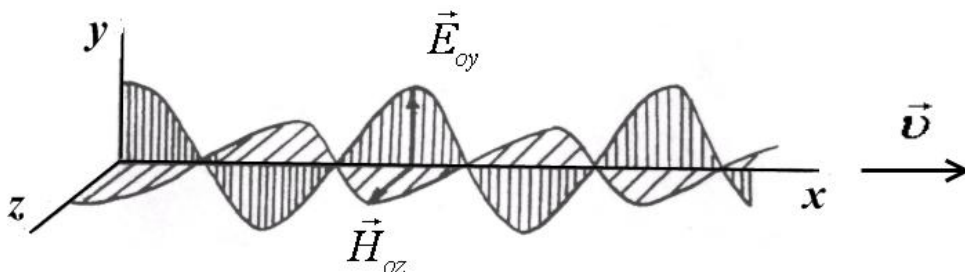


Рис. 9.1

Характерно, що якщо електромагнітна хвиля поширюється в напрямку  $x$ , то коливання  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  відбуваються відповідно в напрямках  $y$  і  $z$  з однаковою фазою.

Більш детальний аналіз показує, що вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  утворюють **правогвинтову систему** відносно швидкості  $\vec{v}$ .

Користуючись формулою (8), визначимо величину швидкості  $v$ :



$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \sqrt{\varepsilon \mu}}. \quad (18)$$

Для вакууму  $\varepsilon = 1$ ,  $\mu = 1$ . Із врахуванням цього

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м/с},$$

тобто, 
$$v = c. \quad (19)$$

Таким чином, електромагнітні хвилі у вакуумі поширюються зі швидкістю світла. Такий результат дав можливість Максвеллові зробити висновок, що світло – це теж електромагнітні хвилі.

З формули (18) маємо, що

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu \cdot \varepsilon}} \quad (20)$$

– швидкість хвилі в середовищі, яке характеризується магнітною проникністю  $\mu$  і діелектричною проникністю  $\varepsilon$ .

Показник заломлення світла 
$$n = \frac{c}{v}.$$

Звідси 
$$v = \frac{c}{n}. \quad (21)$$

Порівнюючи (20) і (21), приходимо до висновку, що показник заломлення електромагнітної хвилі

$$n = \sqrt{\varepsilon \mu}. \quad (22)$$

Максвелл передбачив існування електромагнітного поля в 1865 р. У 1896 р. електромагнітні хвилі вперше були застосовані О.С. Поповим для передачі повідомлення на 250

м, чим було закладено основу радіотехніки.



### 3. Енергія електромагнітних хвиль. Густина енергії

Електромагнітні хвилі переносять енергію. Наприклад, світло нагріває предмети, на які воно падає,  $\gamma$ -промені викликають сильну іонізацію). Дійсно, електромагнітна хвиля – це вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$ , які змінюються в часі. Але ми знаємо, що електричні і магнітні поля мають енергію. Густини енергії постійних електричного і магнітного полів відповідно рівні:

$$w_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon E^2, \quad (23)$$

$$w_H = \frac{1}{2} \mu_0 \mu H^2. \quad (24)$$

Густина енергії електромагнітної хвилі

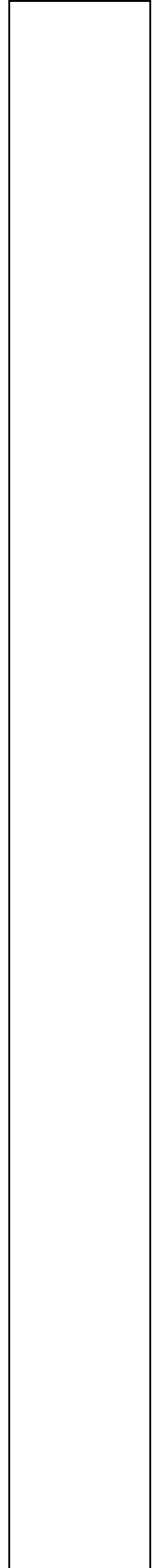
$$\begin{aligned} w &= w_E + w_H = \frac{1}{2} (\epsilon \epsilon_0 E^2 + \mu \mu_0 H^2) = \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt{\epsilon \epsilon_0} E \cdot \sqrt{\epsilon \epsilon_0} E + \sqrt{\mu \mu_0} H \cdot \sqrt{\mu \mu_0} H). \end{aligned} \quad (25)$$

Тут

$$\begin{aligned} E &= E_0 \cos(\omega t - kx + \psi_1), \\ H &= H_0 \cos(\omega t - kx + \psi_2). \end{aligned}$$

Було встановлено (17), що  $\sqrt{\epsilon \epsilon_0} E = \sqrt{\mu \mu_0} H$ , тому в (25) можемо зробити заміну:

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2} (\sqrt{\epsilon \epsilon_0} E \cdot \sqrt{\mu \mu_0} H + \sqrt{\epsilon \epsilon_0} E \cdot \sqrt{\mu \mu_0} H) = \\ &= \sqrt{\epsilon \epsilon_0} \sqrt{\mu \mu_0} E H. \end{aligned} \quad (26)$$



Враховуючи (8), знаходимо вираз для густини енергії ЕМХ:

$$w = \frac{1}{v} E \cdot H \quad (27)$$

#### 4. Густина потоку енергії електромагнітної хвилі (вектор Умова–Пойнтінга)

Якщо енергія переноситься електромагнітними хвилями в просторі, то є потік цієї енергії через поверхню, яку проходить хвиля. Потік – це кількість енергії, яка переноситься через поверхню за одиницю часу ( $\frac{\Delta W}{\Delta t}$ ). **Кількість енергії, яка переноситься за одиницю часу через перпендикулярну одиничну поверхню, називається густиною потоку  $\Pi$ :**

$$\Pi = \frac{\Delta W}{\Delta t \cdot \Delta S_{\perp}} \quad (28)$$

Розрахуємо густина потоку. Для цього на поверхні  $S$  виділимо елементарну площину  $\Delta S$  і знайдемо енергію, яка переноситься в напрямку  $\vec{v}$  (рис. 9.2).

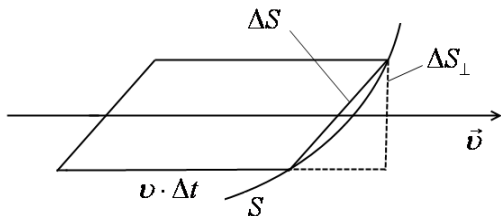


Рис. 9.2

Побудуємо похилий циліндр довжиною  $v\Delta t$ . Енергія, що міститься в циліндрі, пройде в напрямку  $\vec{v}$  через поверхню  $\Delta S$ .

Ця енергія  $\Delta W = w \cdot \Delta V = w \cdot v\Delta t \cdot \Delta S_{\perp}$ , (29)  
де  $\Delta V$  – об'єм циліндра.

Звідси  $\frac{\Delta W}{\Delta t \Delta S_{\perp}} = w \cdot v$ . (30)



Оскільки  $w = \frac{1}{2}EH$ , то

$$\frac{\Delta W}{\Delta t \Delta S_{\perp}} = \frac{1}{v} EH \cdot v = EH. \quad (31)$$

Таким чином, густина потоку енергії електромагнітної хвилі

$$\Pi = \frac{\Delta W}{\Delta t \cdot \Delta S_{\perp}} = EH. \quad (32)$$

Густина потоку енергії  $\vec{\Pi}$  – вектор. Тому у векторному вигляді

$$\vec{\Pi} = [\vec{E}\vec{H}]. \quad (32')$$

Звідси випливає, що  $\vec{\Pi} // \vec{v}$ .

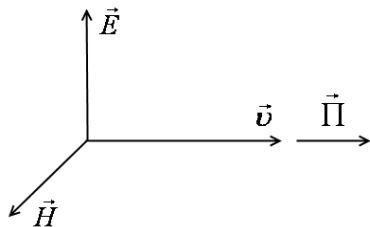


Рис. 9.3

На рис. 3 представлена взаємна орієнтація векторів  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  і  $\vec{\Pi}$ .

Поняття густини потоку енергії було введено в роботах Умова про рух енергій в різних середовищах, а для електромагнітного поля – Пойнтінгом. Тому  $\vec{\Pi}$  називається вектором Умова-Пойнтінга. Він рівний кількості енергії, яка проходить за одиницю часу через одиничну поверхню, перпендикулярну до поширення хвилі. Середнє у часі значення вектора  $\vec{\Pi}$  дорівнює інтенсивності хвилі:

$$I = \langle \Pi \rangle = \left\langle \frac{W}{t \cdot S} \right\rangle. \quad (33)$$



## 5. Проблемні питання щодо висновків теорії Максвелла ЕМХ

З теорії Максвелла випливає, що електромагнітна хвиля являє собою взаємно узгоджені коливання електричного ( $\vec{E}$ ) і магнітного ( $\vec{H}$ ) полів, які відбуваються у взаємно перпендикулярних напрямках (рис. 1). Оскільки електричне і магнітне поля мають енергію, то при зміні напруженості цих полів змінюється також енергія електромагнітної хвилі. У зв'язку з цим постає питання: у що перетворюється енергія електромагнітної хвилі при зміні  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$ ? Проблема в тому, що  $E$  і  $H$  змінюються в однаковій фазі, тобто, разом зростають або разом спадають, тому перехід енергії електричного поля в енергію магнітного поля і навпаки, як це має місце в коливальному контурі, неможливий. У коливальному контурі різниця фаз між коливаннями  $E$  і  $H$  рівна  $\pi/2$ , що й забезпечує можливість взаємного переходу енергій електричного і магнітного полів. Підстав для сумніву в правильності висновків електромагнітної теорії Максвелла нема, тому пропонується цілком логічне і обгрунтоване тлумачення цієї суперечності.

Справа в тому, що світло і інші електромагнітні хвилі мають двоїсту природу – вони не тільки хвилі, а ще й частинки (фотони). Ознакою корпускулярних властивостей властивостей є наявність маси у частинки, що спричиняє її імпульс. Правда, маса фотона є масою динамічною (релятивістською), яка пов'язана з рухом частинки і визначається з відомої формули в теорії відносності:  $W = c^2 m$ . Тому можна допустити, що світло (ЕМХ) – це потік фотонів, які знаходяться в коливальному стані типу енергія–маса–енергія–маса–... Тобто, фактично йдеться про існування особливої форми руху матерії, прикладом якої і є світло чи інші електромагнітні хвилі.

### Питання для контролю

1. Як з рівнянь Максвелла у диференціальній формі можна одержати рівняння електромагнітної хвилі в диференціальній формі ?
2. За якою формулою визначається швидкість електромагнітної хвилі у вакуумі ? В середовищі ?
3. Як напрямлені вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  в електромагнітній хвилі ?
3. В якій фазі коливаються вектори  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  в електромагнітній хвилі ?
5. Яке співвідношення для амплітуд векторів  $\vec{E}$  і  $\vec{H}$  в електромагнітній хвилі ?
6. Що таке показник заломлення електромагнітної хвилі ?
6. За якою формулою визначається енергія, густина енергії електромагнітної хвилі ?
8. Що таке густина потоку енергії електромагнітної хвилі (вектор Умова-Пойнтінга), за якою формулою вона визначається ?

### Допоміжна література

1. *Ионушас К.К., Малинко В.Н.* Курс фізики, т. 2, ч. I. – Киев: КВВИУС, 1987. – §§ 46-48.
2. *Савельев И.В.* Курс общей фізики, т. 2. – М.: Наука, 1978. – §§ 104-107.
3. *Савельев И.В.* Курс общей фізики, т. 1. – М.: Наука, 1973. – §§ 109-112.
4. *Калашиников С.Г.* Электричество. – М. : 1977. – §§ 237-242.
5. *Сусь Б.А.* Квантова фізика. Курс лекцій для самостійної роботи студентів. – К.: ВІТІ НТУУ “КПІ”. 2007. – С. 59.

