Тема 2. Теорема Остроградського-Гаусса та її застосування для розрахунку електричних полів

Питання теми

2.1. Теорема Остроградського-Гаусса.
2.2. Рівняння Пуассона.
2.3. Розрахунок напруженості поля безмежної рівномірно зарядженої площини.
2.4. Розрахунок електричного поля плоского конденсатора.
2.5. Розрахунок напруженості поля, створеного рівномірно зарядженим нескінченно довгим циліндром.
2.6. Визначення напруженості поля поблизу поверхні зарядженого провідника.

2.1. Теорема Остроградського-Гаусса

Теорема Остроградського-Гаусса виражає **потік вектора напруженості $\vec{E}$ (чи потік вектора електричного зміщення $\vec{D}$) через довільну замкнену поверхню, що охоплює заряд.**

Щоб довести теорему, точковий заряд q обхопимо замкненою сферичною поверхнею S (рис. 2.1).

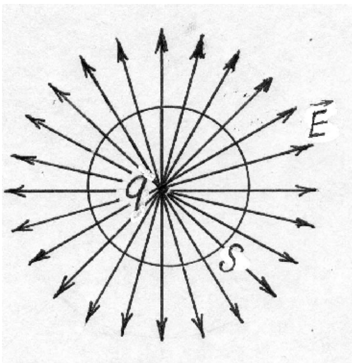

Рис. 2.1

Натисніть на символ

49Ostr.pdf

32Ostr.flv

37patrio.pdf

09T_Ostr.swf

Напруженість електричного поля, створеного точковим зарядом на поверхні *S,*

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}. \qquad (1)$$

Знайдемо потік вектора напруженості через усю поверхню сфери, яка обхоплює заряд q. Потік через елемент поверхні dS

$$dN = E_n dS.$$

Потік через усю поверхню

$$N = \oint_S E_n dS. \qquad (2)$$

Оскільки лінії напруженості перпендикулярні до поверхні, то $E = E_n$ і формулу (2) запишемо:

$$N = \oint_S E dS = \int_S \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} dS =$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \oint_S dS. \qquad (3)$$

Інтеграл по всій поверхні дорівнює площі сфери:

$$\oint_S dS = 4\pi r^2. \qquad (4)$$

Тому (3) запишемо:

$$N = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \oint_S dS = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot 4\pi r^2$$

або

$$N = \oint_S E_n \, dS = \frac{q}{\varepsilon_0}. \qquad (5)$$

Тобто, створений зарядом q потік N вектора напруженості поля $\vec{E}$ через замкнену поверхню S, що обхоплює цей заряд, дорівнює величині цього заряду, діленій на ε_0. Причому, не має значення, де саме всередині замкненої поверхні міститься заряд і яку форму має поверхня. На рис. 2.2 видно, що від зміни положення заряду і форми поверхні, кількість ліній, які пронизують поверхню, не змінюється.

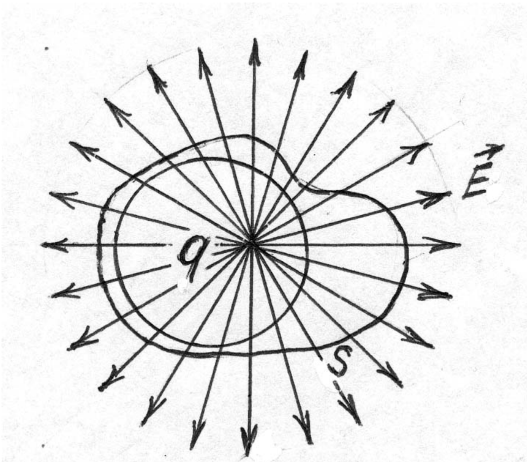

Рис. 2.2.

Ми розглянули потік вектора напруженості через замкнену поверхню, який створюється одним точковим зарядом. Однак всередині замкненої поверхні може бути декілька зарядів q_1, q_2, q_k і кожен з них буде створювати своє поле в деякій точці *A* поверхні *S* (рис. 2.3) .

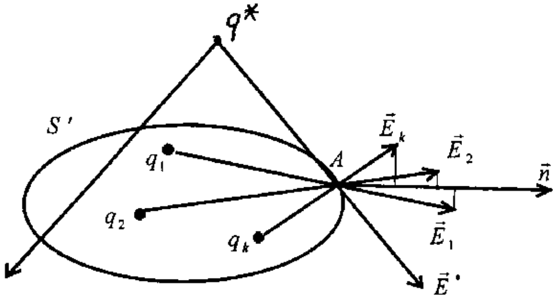

Рис. 2.3

У цьому випадку в точці *A,* згідно з формулою (5), для кожного заряду q_i можемо записати:

$$\oint_S E_{n_1} dS = \frac{q_1}{e_0};$$

$$\oint_S E_{n_2} dS = \frac{q_2}{e_0};$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (6)$$

$$\oint_S E_{n_1} dS = \frac{q_k}{e_0},$$

де E_{n_1}, E_{n_2},... E_{n_k} – проекції векторів $\vec{E}$ на нормаль $\vec{n}$. Додавши ліві і праві сторони (7), матимемо:

$$\oint_S (E_{n_1} + E_{n_2} + \ldots + E_{n_k})dS = \frac{q_1 + q_2 + \ldots + q_k}{\varepsilon_0}. \quad (7)$$

Проекції E_{n_1}, E_{n_2} ... E_{n_k} додаються і дорівнюють проекції E_n результуючого вектора $\vec{E}$ на нормаль $\vec{n}$:

$$E_{n_1} + E_{n_2} + \ldots + E_{n_k} = E_n. \quad (8)$$

В результаті (8) можемо записати:

$$\boxed{\oint_S E_n dS = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}.} \quad (9)$$

Це і є **теорема Остроградського-Гаусса**, яка формулюється таким чином: **потік вектора напруженості через замкнену поверхню, створюваний зарядами, які знаходяться всередині поверхні, рівний алгебраїчній сумі цих зарядів, діленій на e_0.**

Зауважимо, що формула (9) виведена для випадку, коли заряди у вакуумі. У діелектричному середовищі з діелектричною проникністю ε слід враховувати його поляризацію і теорема Остроградського-Гаусса матиме вид:

$$\boxed{\oint_S E_n dS = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon\varepsilon_0}.} \quad (10)$$

Якщо ж для характеристики поля скористатися вектором електричного зміщення (електростатичною індукцією) $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}$, то теорема Остроградського-Гаусса запишеться простіше:

$$\boxed{\oint_S D_n\, dS = \sum_i q_i\ ,} \qquad (10\ a)$$

Таким чином, теорема Остроградського-Гаусса враховує тільки заряди, що всередині замкненої поверхні.

Теорема Остроградського-Гаусса враховує поле тільки тих зарядів, які всередині замкненої поверхні

Натисніть на символ

09T_Ostr.swf

Будь-які інші заряди q^*, що поза замкненою поверхнею, ніякого стосунку до теореми не мають (рис. 2.3). На це звертаємо увагу, тому що традиційно теорема Остроградського-Гаусса поширюється на всі заряди, навіть ті, які не охоплюються замкненою поверхнею. Робиться це на тій підставі, що потік через замкнену поверхню, створюваний цими зарядами, рівний нулеві. Дійсно, заряд q^*, що знаходиться поза замкненою поверхнею (рис. 2.3), створює потік вектора напруженості через замкнену поверхню, рівний нулеві, оскільки кількість ліній, які входять у замкнену поверхню, рівна кількості ліній, що виходять з неї. Тому результуючий потік завжди рівний алгебраїчній сумі зарядів всередині поверхні, діленій на ε_0. Однак при цьому слід пам'ятати, що хоча заряди *q** за межами замкненої поверхні теоремою Остроградського-Гаусса не враховуються, що випливає з доведення теореми, поле цих зарядів $\vec{E}^*$ (рис. 2.3) може бути значним і його треба знаходити не в зв'язку з теоремою. Тому потоки, які створюються зарядами, що знаходяться всередині замкненої поверхні, і потоки від зарядів, розташованих зовні цієї поверхні, треба чітко розмежовувати. Або ж замкнену поверхню *S* треба вибирати так, щоб вона охоплювала всі заряди, які створюють поле у вибраній точці простору. Неврахування викладеного робить некоректним застосування теореми Остроградського-Гаусса для розрахунку електричних полів, які створюються зарядженими тілами, що й читаємо у посібниках з фізики для вищої школи.

Заряди, що знаходяться поза замкненою поверхнею, ніякого відношення до теореми не мають

2.2. Рівняння Пуассона

Теорема Остроградського-Гаусса

$$\oint\limits_{S'} E_n dS = \frac{\sum\limits_1 q_1}{\varepsilon_0} \qquad (10)$$

пов'язує значення напруженості поля $\vec{E}$ в точках замкненої поверхні S з величиною заряду, що знаходиться всередині цієї поверхні (рис. 2.4).

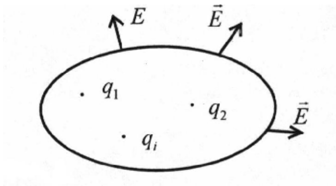

Рис. 2.4

Це означає, що вона пов'язує величини $\vec{E}$ і q, які відносяться до різних точок простору.

Однак теоремі можна надати таку форму, щоб у неї входили величини $\vec{E}$ і q, які б стосувались однієї і тієї ж точки простору. Для цього слід знайти потік вектора $\vec{E}$ (чи вектора $\vec{D}$) через замкнену поверхню S, що обхоплює **елементарний** об'єм dV, в якому знаходиться заряд. Нехай таким об'ємом буде елементарний паралелепіпед зі сторонами dx, dy, dz: $dV = dxdydz$ (рис. 2.5).

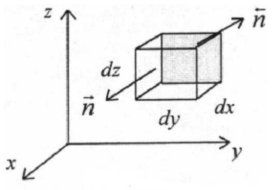

Рис. 2.5

Заряд всередині об'єму

$$dq = r \cdot dx \cdot dy \cdot dz,$$

де r – об'ємна густина заряду.

Вирахувавши потік вектора $\vec{E}$ через всі грані, дістанемо формулу:

$$\boxed{\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{r}{\varepsilon_0}}. \qquad (11)$$

Це так зване **рівняння Пуассон**а, яке виражає теорему Остроградського-Гаусса в диференціальній формі.

Оскільки теорема Остроградського-Гаусса враховує тільки заряди, які знаходяться всередині замкненої поверхні, при розрахунках необхідно замкненою поверхнею обхоплювати всі заряди, що створюють поле

Натисніть на символ

06Pplast.flv

07Pol_pl.sw

2.3. Розрахунок напруженості поля безмежної, рівномірно зарядженої площини

Теорема Остроградського-Гаусса використовується для розрахунку електричних полів, створюваних симетричними зарядженими тілами, зокрема зарядженою площиною.

Лінії вектора напруженості $\vec{E}$ поля, що створюється безмежно великою зарядженою площиною, перпендикулярні до площини. Це випливає з міркувань симетрії.

Так, у деякій точці A (рис. 2.6) ніякий напрямок для вектора $\vec{E}$ не має переваг, окрім напрямку, перпендикулярного до площини.

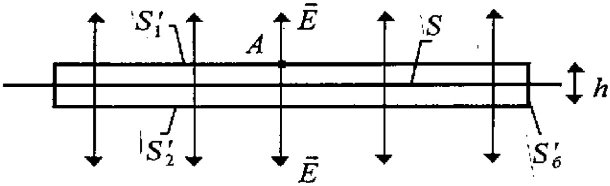

Рис. 2.6

Для визначення напруженості поля скористаємося теоремою Остроградського-Гаусса, тобто знайдемо потік вектора напруженості через деяку замкнену поверхню S', що проходить через дану точку A, в якій хочемо знайти напруженість поля. Оскільки поле в цій точці створюється всією безмежною зарядженою площиною S, то **згідно з**

теоремою весь її заряд необхідно охопити замкненою поверхнею $S' = S'_1 + S'_2 + S'_б$.

Однак реально нема потреби вибирати допоміжну поверхню S' безмежно великою і охоплювати нею весь заряд, тим більше, що оперувати поняттям "безмежність" некоректно. Фізично термін "безмежна заряджена площина" означає, що її протяжність повинна бути настільки великою, щоб полем у точці A, створюваним зарядами, які знаходяться на краях площини, можна було знехтувати. Тому у відповідності із сказаним будемо вибирати допоміжну поверхню S' просто великою. Висоту h, навпаки, візьмемо настільки малою, щоб боковою поверхнею S'_d порівняно з $S'_1\, S'_2$, а отже і потоком вектора напруженості через неї, також можна було знехтувати. За таких умов теорема Остроградського-Гаусса (10) може бути записана:

$$\oint_{S'} E_n dS = E \cdot S_1^1 + E \cdot S_2^1 + \int_{S'_\delta} E_n dS = \frac{\sum_1 q_1}{\varepsilon_0}. \qquad (12)$$

Заряд у правій частині формули (12) виразимо через поверхневу густину заряду $s = q / S$:

$$\sum_1 q_1 = s \cdot S \cdot$$

Знехтувавши потоком через бокову поверхню $S_d^{'}$, (12) запишемо:

$$E \cdot S'_1 + E \cdot S'_2 = \frac{\sigma \cdot S}{\varepsilon_0}. \qquad 13)$$

Враховуючи, що $S'_1 = S'_2 = S_1$, одержуємо:

$$2ES = \frac{\sigma \cdot S}{\varepsilon_0}.$$

Звідки

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \tag{14}$$

– напруженість поля, створюваного безмежною рівномірно зарядженою площиною у вакуумі.

Якщо заряджена площина знаходиться не у вакуумі, то треба враховувати поляризацію середовища, тому напруженість поля безмежної зарядженої площини визначатиметься за формулою:

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}}. \tag{14 a}$$

Таким чином, напруженість поля рівномірно зарядженої безмежно великої площини визначається тільки поверхневою густиною заряду s і не залежить від положення точки, в якій розраховується поле. Практично це означає, що електричне поле поблизу рівномірно зарядженої площини однорідне. Наприклад, однорідним можна вважати поле між пластинами плоского кондесатора.

2.4. Розрахунок електричного поля плоского конденсатора

Натисніть на символ

Заряджений плоский конденсатор можна розглядати як дві заряджені пластини, кожна з яких незалежно одна від одної створює електричне поле (рис. 2.7).

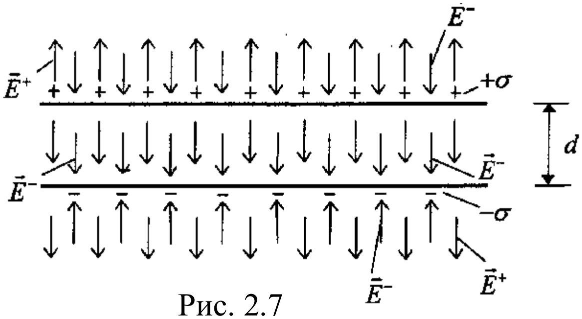

Рис. 2.7

10P_pl_k.flv

39P_kond.flv

Оскільки в конденсаторі пластини (електроди) знаходяться на невеликій відстані *d,* то їх можна вважати безмежно великими і до них можна застосовувати ті результати, які були одержані при розрахунку поля безмежної зарядженої площини. Як видно з рис. 7, зовні конденсатора поля додатньо і від'ємно заряджених пластин відповідно $\vec{E}^+$ і $\vec{E}^-$ компенсуються, тобто електричне поле за межами конденсатора рівне нулю. Між пластинами конденсатора поля $\vec{E}^+$ і $\vec{E}^-$ напрямлені однаково, тому вони додаються і результуюче поле, згідно з (14 а),

$$E = \frac{s}{2\varepsilon\varepsilon_0}\cdot 2 = \frac{s}{\varepsilon\varepsilon_0}. \qquad (15)$$

2.5. Розрахунок напруженості поля, створюваного рівномірно зарядженим, нескінченно довгим циліндром

Електричне поле нескінченно довгого зарядженого циліндра створюється всім його зарядом і в деякій точці *A* з міркувань симетрії вектор напруженості напрямлений перпендикулярно до осі циліндра (рис. 2.8).

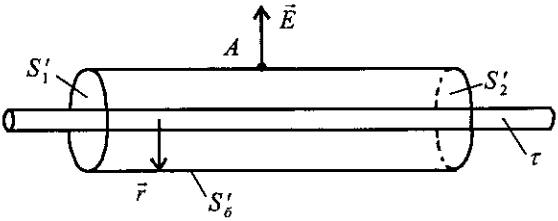

Рис. 2.8

Натисніть на символ

12Cyl_k.flv

Для визначення напруженості поля увесь заряд циліндра, який створює поле, необхідно охопити замкненою (також циліндричною) допоміжною поверхнею

Заряджений циліндр необхідно охопити замкненою (також циліндричною) допоміжною поверхнею $S' = S'_1 + S'_2 + S'_\delta$, яка б проходила через точку A, а краї цієї поверхні S'_1 і S'_2 знаходились якомога далі від точки A (рис. 2.8).

Згідно з теоремою Остроградського-Гаусса

$$\oint_S E_n dS = \int_{S'_d} E_n dS + \int_{S'_1} E_{n_1} dS + \int_{S'_2} E_{n_2} dS = \frac{q}{\varepsilon_0}. \qquad (16)$$

Оскільки допоміжний циліндр довгий, то потік через торцеві поверхні S'_1 і S'_2 можна вважати малим і ним можна знехтувати порівняно з потоком через бічну поверхню S'_d. Тоді формулу (16) запишемо:

$$\oint_{S'_d} E_n dS = \frac{q}{\varepsilon_0}. \qquad (17)$$

Враховуючи, що $E_n = E$, а $q = t \cdot l$, одержимо:

$$E \cdot l \cdot 2p r = \frac{d}{\varepsilon_0}. \qquad (18)$$

Звідси

$$\boxed{E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\tau}{r}}, \qquad (19)$$

де r − радіус циліндричної допоміжної поверхні S'_d, $\tau = q / l$ − лінійна густина заряду.

2.6. Визначення напруженості поля поблизу поверхні зарядженого провідника

Нехай провідник має форму пластини (рис. 2.9). Надлишковий заряд у провіднику зосереджується на поверхні (це питання детально розгляддається пізніше). Напруженість поля, створюваного зарядженою поверхнею S_1, буде такою ж, як у випадку зарядженої площини $(E' = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0})$.

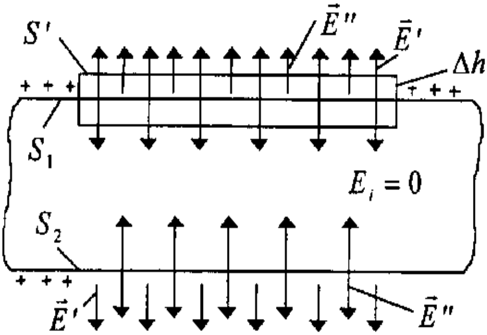

Рис. 2.9

Однак протилежна поверхня S_2 також

створює поле $E'' = \frac{s}{2\varepsilon_0}$.

Ці поля E' і E'' всередині провідника взаємно компенсуються, а зовні − додаються. Тому результуюче поле біля поверхні

$$E = E' + E'' = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Питання для контролю:

1. Що таке потік вектора напруженості (вектора електричного зміщення) ?
2. Сформулювати і пояснити теорему Остроградського-Гаусса.
3. Чому дорівнює потік вектора напруженості поля через замкнену поверхню від заряду, що знаходиться зовні цієї поверхні ?
4. Розрахувати за допомогою теореми Остроградського-Гаусса поле зарядженої безмежної площини.
5. Розрахувати поле зарядженого нескінченно-довгого циліндра.
6. Чи можна за допомогою теореми Остроградського-Гаусса показати, що поле всередині сфери, рівномірно-зарядженої по поверхні, дорівнює нулеві ?
7. Чи можна застосувати теорему Остроградського-Гаусса для розрахунку поля плоского конденсатора, незважаючи на те, що його пластини не є безмежно великими ?

Допоміжна література:

1. *Савельев И. В.* Курс общей физики. Т. 2. − Москва: Наука, 1978, §14.