Тема 3: Робота сил електричного поля. Потенціал

Питання теми

3.1. Робота сил електростатичного поля при переміщенні заряду. Циркуляція вектора напруженості.
3.2. Енергія взаємодії точкових зарядів. Потенціал, різниця потенціалів.
3.3. Зв'язок між напруженістю і потенціалом електричного поля. Еквіпотенціальні поверхні.
3.4. Рівняння Лапласа.

3.1. Робота сил електростатичного поля при переміщенні заряду. Циркуляція вектора напруженості

Поле, сили якого виконують роботу, що не залежить від форми шляху, на якому вони діють, називається **потенціальним** або **консервативним.**

Потенціальним є електричне поле, в чому легко переконатися. Для цього визначимо роботу, необхідну для переміщення точкового заряду q' з точки *1* в точку *2* вздовж довільної траєкторії у полі іншого точкового заряду q (рис.3.1).

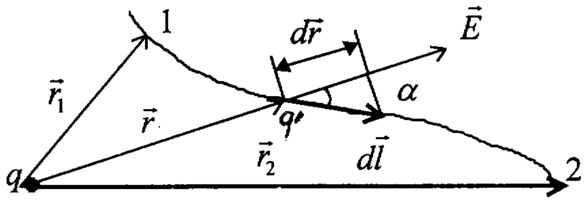

Рис. 3.1

Робота на елементарному шляху *dl*

$$dA = Fdl\,cos\,\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{qq'}{r^2} dr,$$

де $dr = dl cos\alpha$. Для роботи на шляху 1–2 одержимо такий вираз:

$$dA_{12} = \int_{r_1}^{r_2} dA = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r_2} - \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r_1}. \qquad (1)$$

Як бачимо, робота не залежить від шляху, по якому переміщується заряд, а залежить лише від **початкового** і **кінцевого** положень цього заряду, тобто від r_1 і r_2. Це означає, що **електростатичне поле − потенціальне.**

З формули (1) видно також, що ця робота може бути додатною і від'ємною: при $r_1 > r_2$ $A > 0$, а при $r_1 < r_2$ $A < 0$. Звідси випливає, що **при переміщенні заряду *q′* в електростатичному полі по замкненому контуру робота дорівнює нулю.**

Дійсно, якщо при переміщенні заряду *q′* на ділянці $1 - l' - 2$ початкове положення (1) менше, ніж кінцеве (2), то робота буде від'ємною ($A_1 < 0$) (рис. 3.2).

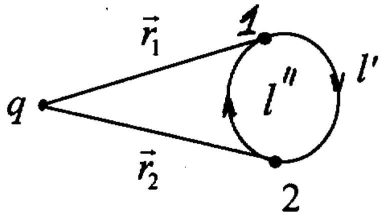

Рис. 3.2

При переміщенні ж вздовж $2 - l'' - 1$ навпаки, початкове положення більше, ніж кінцеве, тому робота буде додатною ($A_2 > 0$). В сумі робота по переміщенню заряду q' по замкненому контуру дорівнює нулеві:

$$A = A_1 + A_2 = 0.$$

Знайдемо вираз для роботи по переміщенню заряду в електростатичному полі по замкненому контуру.

При переміщенні на dl

$$dA = Fdl\cos a =$$

$$= F\cos a\, dl = F_l dl, \qquad (2)$$

де F_l − проекція сили на напрям dl. Оскільки $F_l = E_l q'$, то

$$dA = E_l q' dl.$$

Для замкненого контура можемо записати:

$$A = \oint_l q' E_l dl = q' \oint_l E_l dl = 0. \qquad (3)$$

Звідси маємо, що

$$\boxed{\frac{A}{q`} = \oint_l E_l dl = 0} \quad - \qquad (4)$$

робота по переміщенню одиничного заряду в потенціальному полі по замкненому контуру дорівнює нулеві.

Криволінійний інтеграл

$$\boxed{\oint_l E_l dl = \oint_l \vec{E}\, d\vec{l}} \qquad (5)$$

називається циркуляцією вектора $\vec{E}$.

Характерним для електростатичного поля є те, що циркуляція вектора напруженості $\vec{E}$ по будь-якому замкненому контуру дорівнює нулеві.

Робота з переміщення заряду *q* в електростатичному полі по замкненому контуру дорівнює нулю

Формула (4) є математичним виразом потенціальності поля. Причому, слід звернути увагу, що ця формула справедлива лише для **електростатичного поля, яке є потенціальним**. Далі буде показано, що електричне поле може не бути потенціальним (вихорне поле) і умова (4) для нього не виконується.

3.2. Енергія взаємодії точкових зарядів. Потенціал

Тіло, яке знаходиться в полі потенціальних сил, має потенціальну енергію. За рахунок цієї енергії силами поля може бути виконана робота. Роботу сил потенціального поля можна представити як різницю потенціальних енергій $W_{П_1}$ і $W_{П_2}$, які має точковий заряд q' у початковій *1* і кінцевій 2 точках поля, створеного зарядом *q* (рис. 3.3):

$$A_{12} = W_{П_2} - W_{П_1} \qquad (6)$$

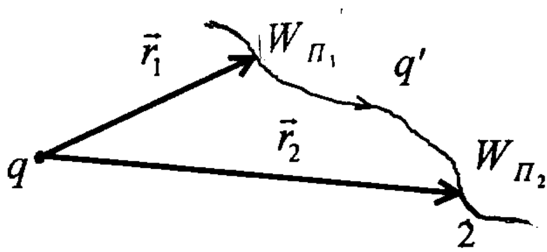

Рис. 3.3

Але згідно з формулою (1), робота сил електростатичного поля при переміщенні заряду q' з точки *1* в точку *2* (рис. 3.3)

$$A_{12} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r_2} - \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r_1}. \tag{7}$$

Порівнюючи формули (6) і (7), маємо:

$$W_{П1} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r_1},$$

$$W_{П2} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r_2}.$$

Як бачимо, **потенціальна енергія заряду q' в полі точкового заряду q залежить від відстані між цими зарядами і може бути представлена таким чином:**

$$\boxed{W_П = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{qq'}{r}} \tag{8}$$

Різні пробні заряди q', q'', ... в одній і тій же точці поля мають різні енергії W', W'', **...** , однак відношення $\frac{W_П}{q'}$ для всіх пробних зарядів, згідно з (8), буде одне і те ж, тобто буде деякою константою, яку позначимо буквою φ:

$$\boxed{\varphi = \frac{W_П}{q'} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}. \qquad (9)$$

При $q' = 1$ чисельно $\varphi = W_П$. Ця величина називається **потенціалом** поля в даній точці. Звідси випливає, що **потенціал − це фізична величина, яка чисельно дорівнює потенціальній енергії одиничного додатного точкового заряду в даній точці поля.**

Оскільки потенціал виражається через енергію, то він є <u>енергетичною</u> характеристикою поля. Крім того, потенціал − **скалярна величина**, тому що енергія − скаляр.

Потенціал − це фізична величина, яка чисельно дорівнює потенціальній енергії одиничного додатного заряду в даній точці поля

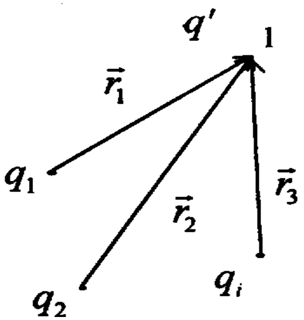

Рис. 3.4

Потенціал у деякій точці *1* може бути створений системою зарядів $q_1, q_2, \dots q_i$ (рис. 3.4).

Тому для потенціальної енергії системи зарядів можемо записати:

$$W_П = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_1 \frac{qq'}{r_1}, \qquad (10)$$

звідки

$$\boxed{j = \frac{W_n}{q'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_1 \frac{q_1}{r_1} = \sum_1 j_1} \; - \qquad (11)$$

потенціал поля, створеного системою точкових зарядів, рівний алгебраїчній сумі потенціалів, створених кожним із зарядів зокрема, що є вираженням принципу суперпозиції полів.

3.3. Різниця потенціалів

Оскільки які-небудь точки *1* і *2* можуть мати неоднакові потенціали φ_1 і φ_2, то між ними існує **різниця потенціалі**в (рис. 3.5): $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$.

Рис. 3.5

Виразимо роботу з переміщення заряду з точки *1* в точку *2* через різницю потенціалів. Згідно з формулою (6), робота поля

$$A_{21} = W_{П_2} - W_{П_1}. \qquad (12)$$

Так як $\varphi = \dfrac{W_П}{q'}$, $W_П = \varphi \cdot q'$, то (12) можемо записати:

$$A_{12} = W_{П_2} - W_{П_1} = \varphi_2 q' - \varphi_1 q'$$

чи

$$\boxed{A_{12} = q'\left(j_2 - j_1\right)}. \qquad (13)$$

Робота сил електростатичного поля дорівнює добутку величини заряду, що перемішується, на різницю потенціалів точок.

Якщо заряд q' з точки з потенціалом φ_1 віддаляється на нескінченність (де $\varphi_2 = \varphi_\infty = 0$), то робота сил поля при цьому

$$A_\infty = q'\left(0 - \varphi_1\right) = -q'\varphi_1,$$

звідки $$\varphi_1 = -\frac{A_\infty}{q'}.$$

Приймемо, що якщо поле виконує роботу з переміщенню заряду, то вона додатна, а коли робота виконується проти поля − то від'ємна. Із врахуванням цього в загальному вигляді можемо записати:

$$\boxed{\varphi = \frac{A_\infty}{q'}} \; - \qquad (14)$$

потенціал чисельно дорівнює роботі, яку треба виконати проти сил поля, щоб перемістити одиничний додатний заряд із нескінченності в дану точку поля.

Згідно з формулою (13) робота сил поля

$$A_{12} = q'\left(\varphi_2 - \varphi_1\right).$$

Якщо різниця потенціалів $\varphi_1 - \varphi_2$ для точок *1* і *2* дорівнює нулеві, то й робота по переміщенню заряду з точки *1* в точку *2* рівна нулеві. У просторі є такі точки поля, потенціал яких однаковий (рис. 3.6).

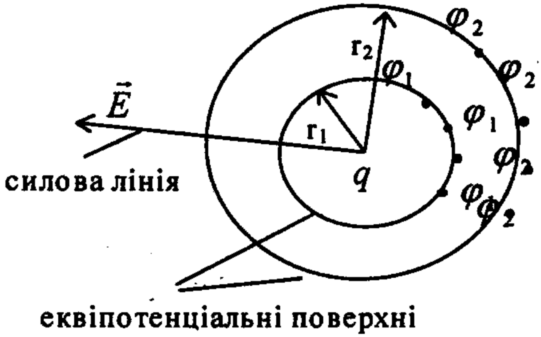

Рис. 3.6

Якщо ці точки утворюють поверхню, то така поверхня називається **еквіпотенціальною**. Наприклад, згідно з формулою (9) однаковий потенціал

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r}$$

мають всі точки сфери, в центрі якої знаходиться заряд q (рис. 3.6).

Еквіпотенціальні поверхні мають таку особливість, що робота поля по переміщенню по них заряду рівна нулеві. Так як напруженість поля $\vec{E}$ і сила $\vec{F}$, що діє на заряд, перпендикулярні до поверхні, а значить до напрямку переміщення, то:

$$dA = Fdl\,cos\,\alpha = 0.$$

Зауважимо, що силові лінії завжди перпендикулярні до еквіпотенціальних поверхонь.

За допомогою еквіпотенціальних ліній можна представити електростатичне поле. Такі лінії зображуються з певною густотою для відповідних значень потенціалу.

На рис. 3.7 представлена картина еквіпотенціальних і силових ліній для двох електродів з потенціалами $\varphi_1 = 0$ і $\varphi_4 = 4\ B$.

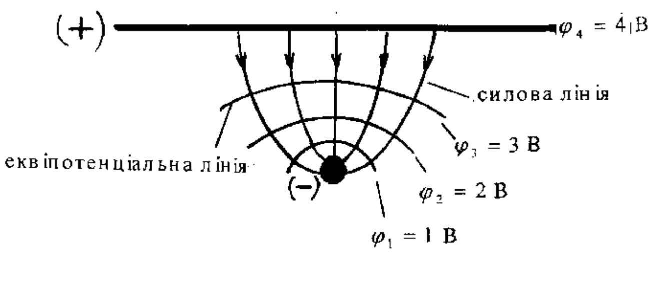

Рис. 3.7

3.4. Зв'язок між напруженістю і потенціалом електричного поля

Електричне поле можна описати за допомогою векторної величини $\vec{E}$ чи скалярної величини φ. Оскільки $\vec{E}$ і φ описують одне і те ж поле в даній точці, між ними повинен бути зв'язок. Щоб встановити його, розглянемо роботу сил поля по переміщенню заряду q' на відрізку шляху dl (рис. 3.8):

$$dA = Fdl\cos\alpha = q'Edl\cos\alpha = q'E_l dl, \quad (15)$$

де $E_l = E\cos\alpha$ − проекція напруженості поля $\vec{E}$ на напрям переміщення l.

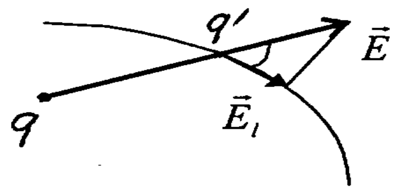

Рис. 3.8

З іншого боку, ця робота рівна зменшенню потенціальної енергії заряду:

$$dA = -q'd\varphi \quad (16)$$

(знак "−" означає зменшення енергії). Оскільки φ змінюється в залежності від l, то можна вважати, що чим більше dl, тим більше $d\varphi$:

$$dj = \frac{\partial j}{\partial l} dl \cdot \qquad (17)$$

Коефіцієнт пропорційності $\frac{\partial j}{\partial l}$ (частинна похідна) характеризує "швидкість" зміни φ з відстанню *l*. Таким чином

$$dA = -q' d\varphi = -q' \frac{\partial \varphi}{\partial l} dl \cdot \qquad (18)$$

Прирівнявши праві частини формул (15) і (18):

$$q' E_l dl = -q' \frac{\partial j}{\partial l} dl,$$

одержимо

$$E_l = -\frac{\partial j}{\partial l} \quad - \qquad (19)$$

компонент напруженості E_1 в напрямку l рівний "швидкості" зміни потенціалу в цьому напрямку.

Напруженість електричного поля виражається через зміну потенціалу з відстанню

Оскільки l має довільну орієнтацію, компоненти $\vec{E}$ в напрямку x, y, z виражаються таким чином (рис. 3.9):

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x};$$
$$E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}; \qquad (20)$$
$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

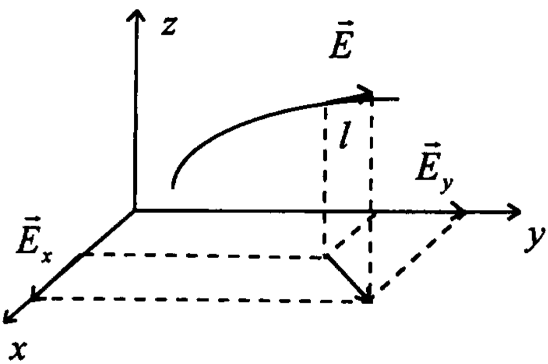

Рис. 3.9

Вектор $\vec{E}$ представляється через ці компоненти:

$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k} = \qquad (21)$$
$$= -\left(\frac{\partial j}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial j}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial j}{\partial z}\vec{k}\right),$$

де $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – одиничні вектори по осях x, y, z.

Величина в дужках називається градієнтом потенціалу φ:

$$\boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{k} = grad\,\varphi\,.} \qquad (22)$$

Градієнт − величина **векторна**. Він напрямлений в сторону зростання потенціалу. Користуючись поняттям градієнта (формула 22), вираз (21) для напруженості поля можна записати:

$$\boxed{\vec{E} = -grad\,\varphi\,.} \qquad (23)$$

Отже, напруженість поля протилежна до напрямку зростання потенціалу.

Частинні похідні $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ являють собою проекції градієнта на координатні осі *x, y, z.* Аналогічно похідна $\frac{\partial \varphi}{\partial l}$, взята в довільному напрямку $\mathbf{l}$, буде проекцією градієнта на цей напрямок.

Градієнт – це перепад (зміна) скалярної величини з відстанню

3.5. Рівняння Лапласа

Рівняння Лапласа дає можливість знайти розподіл потенціалу в просторі. Це диференціальне рівняння, яке одержується з рівняння Пуассона, якщо напруженість поля в ньому виразити через потенціал. Рівняння Пуассона (теорема Остроградського-Гаусса в диференціальній формі):

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=\frac{r}{e_0}. \qquad (24)$$

Оскільки $E_x=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $E_y=-\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $E_z=-\frac{\partial\varphi}{\partial z}$,

то (24) можемо записати:

$$\frac{\partial^2 j}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 j}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 j}{\partial z^2}=-\frac{r}{e_0}. \qquad (25)$$

Якщо в просторі заряди відсутні ($r=0$), рівняння (25) набуває вигляду:

$$\boxed{\frac{\partial^2 j}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 j}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 j}{\partial z^2}=0\,.} \qquad (26)$$

Це і є рівняння Лапласа. Його розв'язок дає значення потенціалу в залежності від координат: $\varphi=\varphi(x,y,z)$.

Часто трапляються випадки, коли розподіл зарядів невідомий, а задані потенціали провідників. Наприклад, j_A, j_B, j_c – потенціали провідників *A, B, C* (рис. 3.10).

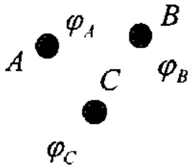

Рис. 3.10

Потрібно знайти значення потенціалів у будь-якій точці між провідниками. Розв'язок рівняння Лапласа і дає ці значення.

Питання для контролю

1. Пояснити, від чого залежить робота з переміщення ьзаряду в електричному полі.
2. Що таке циркуляція вектора ? Чому дорівнює циркуляція вектора $\vec{E}$ при переміщенні заряду в електричному полі ?
3. Від чого залежить енергія заряду в електричному полі ? Що таке потенціал ?
4. Що таке різниця потенціалів ?
5. Дати визначення еквіпотенціальних ліній, поверхонь.
6. Як зв'язані між собою характеристики електричного поля напруженість і потенціал ?

Допоміжна література

1. *Савельев И. В.* Курс общей физики. Т. 2. − Москва: Наука, 1978, § 6, 8.