Тема 7. Енергія електричного поля

Питання теми

7.1. Енергія системи зарядів.
7.2. Енергія зарядженого провідника і конденсатора.
7.3. Енергія електричного поля. Об'ємна густина енергії електричного поля.
7.4. Енергія електричного поля. Об'ємна густина енергії.
7.5. Приклад розрахунку енергії електричного поля

7.1. Енергія системи зарядів

Якщо є система заряджених тіл, то між цими тілами існує електрична взаємодія (рис. 7.1). При дії сили на заряд він переміщується, отже електричне поле виконує роботу. Це зачить, що поле має енергію.

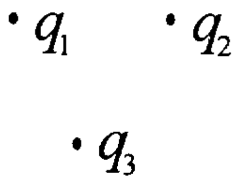

Рис. 7.1

Сили електричної взаємодії потенціальні, тобто робота цих сил не залежить від шляху. Це значить, що система заряджених тіл має потенціальну енергію.

Знайдемо вираз для потенціальної енергії системи точкових зарядів.

Нехай на початку маємо два заряди q_1 і q_2. Коли ці заряди віддалені один від одного на нескінченність, вони не взаємодіють і їх енергія дорівнює нулеві. Зблизимо заряди на відстань r_{12} (рис. 7.2) .

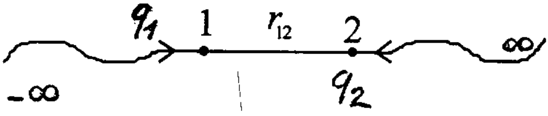

Рис. 7.2

При цьому потрібно виконати роботу проти електричних сил, яка піде на збільшення потенціальної енергії системи. Нехай переноситься заряд q_1 із $-\infty$ в точку *1*, віддалену від q_2 на r_{12}. Тоді

$$A_1 = q_1 \varphi_1 = q_1 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_2}{r_{12}}, \tag{1}$$

де $\varphi_1 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{q_2}{r_{12}}$ – потенціал в точці *l*, створений зарядом q_2. Аналогічно, якщо переносити заряд q_2 з ∞ в точку *2* на відстані r_{12} від q_1,

$$A_2 = q_2 \varphi_2 = q_2 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1}{r_{12}}, \tag{2}$$

де $\varphi_2 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{q_1}{r_{12}}$ потенціал, створений зарядом q_1 в точці *2*. Роботи A_1 і A_2 ідуть на збільшення енергії системи зарядів. Очевидно, що

$$A_1 = A_2 = q_1 j_1 = q_2 j_2 = W. \tag{3}$$

Для того, щоб у вираз для енергії системи обидва заряди входили симетрично, запишемо його таким чином:

$$W_{12} = \frac{1}{2}\left(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2\right). \qquad (4)$$

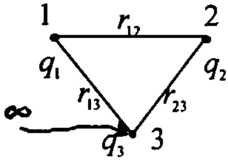

Рис. 3

Тепер перенесемо із нескінченності ще один заряд q_3 і помістимо його в точку *3* на відстані r_{13} від q_1, і r_{23} від q_2 (рис. 3).

При цьому виконаємо роботу

$$A_3 = q_3\varphi_3 = q_3\left(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}}\right), \qquad (5)$$

де $\varphi_3 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}}$ потенціал в точці *3*, створюваний зарядами q_1 і q_2. Разом з A_1 (чи A_2) робота A_3 буде рівна енергії трьох зарядів:

$$W_{12} + W_3 = W_{123} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}}\right). \qquad (6)$$

Цей вираз можна звести до вигляду

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1q_2}{2r_{12}} + \frac{q_1q_2}{2r_{12}} + \frac{q_3q_1}{2r_{13}} + \frac{q_3q_1}{2r_{13}} + \frac{q_3q_2}{2r_{23}} + \frac{q_3q_2}{2r_{23}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[q_1 \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_2}{r_{12}} + \frac{q_3}{r_{13}}\right)}_{\varphi_1} + q_2 \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_{12}} + \frac{q_3}{r_{23}}\right)}_{\varphi_2} + q_3 \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}}\right)}_{\varphi_3}\right]$$

Отже, енергія системи трьох зарядів

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\left(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2 + q_3\varphi_3\right)}. \quad (7)$$

Аналогічно можна переконатись, що у випадку N зарядів потенціальна енергія системи

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\sum_i q_i\varphi_i}, \qquad (8)$$

де φ_i − потенціал, створений всіма іншими зарядами в точці, куди поміщається i-й заряд,

7.2. Енергія зарядженого провідника

Заряд q, який знаходиться на провіднику, можна розглядати як систему точкових зарядів (рис. 7.4)

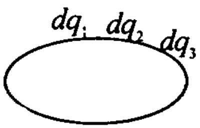

Рис. 7.4

Але, як ми вже знаємо, система зарядів має енергію, що рівна роботі, яку треба виконати, щоб перенести всі заряди із ∞ на провідник.

Перенесення першої порції заряду dq не супроводжується виконанням роботи, оскільки потенціал провідника спочатку рівний нулеві. Однак перенесення наступної порції dq вже потребує деякої роботи, бо зі збільшенням заряду на провіднику його потенціал зростає. Роботу по переміщенню нової порції заряду запишемо:

$$dA = \varphi dq = \frac{q}{C} dq, \qquad (9)$$

де $\varphi = \frac{q}{C}$ потенціал провідника, обумовлений тим зарядом, який на ньому вже знаходиться, C − ємність провідника. Робота йде на збільшення енергії провідника:

$$dA = dW = \frac{q}{C} dq \cdot$$

Звідси одержуємо вираз для енергії:

$$W = \int dW = \int \frac{q}{C} dq = \frac{q^2}{2C} + const. \qquad (10)$$

Енергію незарядженого провідника будемо вважати рівною нулеві: $q = 0$, $W = 0$. Тоді з формули (11) маємо, що $const=0$. Отже енергія зарядженого провідника виражається формулою:

$$\boxed{W = \frac{q^2}{2C} = \frac{qj}{2} = \frac{Cj^2}{2}}. \qquad (11)$$

Формулу для енергії зарядженого провідника можна одержати також на основі інших міркувань.

Будемо розглядати провідник як систему зарядів Δq. Тоді можемо скористатись формулою (8) для енергії системи зарядів:

$$\boxed{W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i}. \qquad (12)$$

Оскільки поверхня провідника є еквіпотенціальною, то потенціали всіх точок, де знаходяться елементарні заряди *dq*, однакові і рівні потенціалу провідника φ. Із врахуванням цього (13) запишемо:

$$W = \frac{1}{2}\sum \Delta q\varphi = \frac{\varphi}{2}\sum \Delta q = \frac{1}{2}\varphi q \qquad (13)$$

− енергія зарядженого провідника.

7.3. Енергія зарядженого конденсатора

В зарядженому конденсаторі на його електродах розміщені заряди +*q* і -*q* і вони взаємодіють. Процес виникнення цих зарядів +*q* і -*q* можна уявити так, ніби від однієї обкладки забираються дуже малі порції заряду *dq* і переносяться на іншу (рис. 7.5).

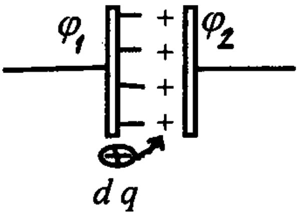

Рис. 7.5

Робота по перенесенню однієї з порцій

$$dA = dq\left(j_2 - j_1\right) = dq\cdot U,$$

де U – напруга на конденсаторі. Враховуючи, що $U = \dfrac{q}{C}$, (14)

запишемо:

$$dW = dA = Udq = \frac{q}{C}dq.$$

Натисніть на символ

23Ener_k.flv

Інтегруючи, одержимо:

$$W = \int dW = \int \frac{q}{C} dq = \frac{q^2}{2C} + const \cdot \qquad (15)$$

На початку, коли конденсатор не заряджений, *q=0* і його енергія *W=0*. Тому *const=0*. Таким чином, енергія зарядженого конденсатора (15) виражається формулою:

$$\boxed{W = \frac{q^2}{2C} = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2}} \,. \qquad (16)$$

Де ж зосереджена енергія системи зарядів або енергія зарядженого конденсатора ?

Проаналізуємо це питання окремо.

7.4. Енергія електричного поля. Об'ємна густина енергії

Ми розглянули питання енергії системи зарядів, зарядженого провідника, конденсатора. Для всіх цих систем характерна наявність електричного поля і саме воно має енергію. Енергію електричного поля можна виразити через величини, що характеризують поле – вектори $\vec{E}$ і $\vec{P}$. Зробимо це для плоского конденсатора. Поле плоского конденсатора зосереджене між його пластинами (рис. 7.6). Енергія конденсатора (16)

$$W = \frac{CU^2}{d}, \qquad (17)$$

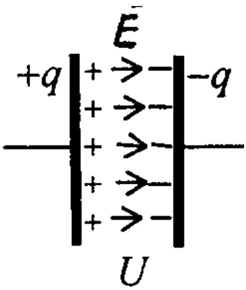

Рис. 7.6

Враховуючи, що ємність конденсатора

$C = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$, одержуємо

$$W = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}\cdot\frac{U^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2}\cdot\left(\frac{U}{d}\right)^2\cdot d\cdot S,$$

звідки

$$\boxed{W = \frac{ee_0}{2}\cdot E^2\cdot V}. \qquad (18)$$

Ми дістали вираз (18) для енергії електричного поля плоского конденсатора.

Оскільки поле в плоскому конденсаторі можна вважати однорідним, то енергія розподіляється в об'ємі між електродами з однаковою густиною. З формули (18) маємо, що **об'ємна густина енергії**

$$\boxed{w = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}}. \qquad (19)$$

Враховуючи, що $D = \varepsilon\varepsilon_0 E$, формулу (19) для об'ємної густини енергії можемо записати:

$$\boxed{w = \frac{ED}{2}}. \qquad (20)$$

Оскільки електрична індукція

$$D = \varepsilon\varepsilon_0 E = \varepsilon_0\left(1+\chi\right)E = \qquad (21)$$
$$= \varepsilon_0 E + \varepsilon_0\chi E = \varepsilon_0 E + P,$$

де χ − діелектрична сприйнятливість, P − вектор поляризації, тоді формулу (20) можемо записати:

$$w = \frac{DE}{2} = \frac{\left(\varepsilon_0 E + P\right)E}{2} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{PE}{2}, \qquad (22)$$

де $\dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2}$ − густина енергії електричного поля у вакуумі, а $\dfrac{PE}{2}$ − енергія, що йде на поляризацію одиниці об'єму діелектрика.

7.5. Приклад розрахунку енергії електричного поля

Вирахуємо енергію електричного поля зарядженої кулі з радіусом R , яка знаходиться в діелектричному середовищі з діелектричною проникністю ε (рис. 7.7).

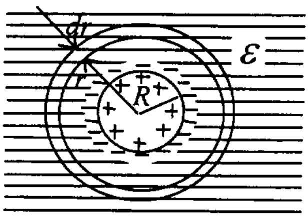

Рис. 7.7

Розіб'ємо простір навколо кулі на концентричні шари товщиною dr. Об'єм такого шару буде:

$$dV = 4\pi r^2 \cdot dr. \quad (23)$$

В ньому зосереджена енергія

$$dW = w \cdot dV. \quad (24)$$

Оскільки $w = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}$,

а напруженість поля, створена зарядженою кулею, $$E = \frac{1}{\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q}{r^2},$$

то вираз (24) матиме вигляд:

$$dW = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}dV = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\right)^2 \cdot 4\pi r^2 dr$$

або $$dW = \frac{1}{2}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2}. \qquad (25)$$

Інтегруючи (25), одержимо:

$$W = \int dW = \frac{1}{2}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int_R^\infty \frac{dr}{r^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{q^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R} = \frac{q^2}{2C},$$

де $$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R \; - \qquad (26)$$

ємність кулі.

Питання для контролю

1. Пояснити, чому система зарядів має енергію ? Від чого залежить ця енергія ?
2. Чому і яку енергію має заряджений провідник? Як її розраховувати ?
3. Розрахувати енергію зарядженого Конденсатора. Де вона зосереджена ?
4. Розрахувати енергію електричного поля. Виразити енергію і густину енергії електричного поля через величини, які характеризують електричне поле.

Допоміжна література:

1. *Савельев И. В.* Курс общей физики. Т. 2. − Москва: Наука, 1978, § 28-30.