

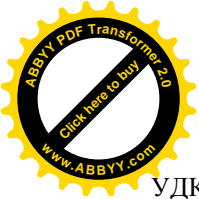
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Державний університет інформаційно-комунікаційних
технологій

**ЦИФРОВА ОБРОБКА АУДІО- ТА ВІДЕОІНФОРМАЦІЇ
У МУЛЬТИМЕДІЙНИХ СИСТЕМАХ**

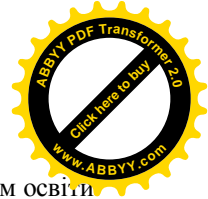
РЕКОМЕНДОВАНО МІНІСТЕРСТВОМ
ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

*Навчальний посібник
для студентів вищих навчальних закладів*

КИЇВ
НАУКОВА ДУМКА
2008



УДК 004.085.74:004.032.6(075.8)



Гриф надано Міністерством освіти
і науки України (лист
№1.4/18-Г-1917 від 18.07.2008 р.)

Р е ц е н з е н т и :

зав. відділом Інституту фізики напівпровідників НАН України,
доктор фізико-математичних наук, професор *В.М. Комащенко*,
професор кафедри звукотехніки та реєстрації інформації
Національного технічного університету України
«Київський політехнічний інститут»,
доктор технічних наук, професор *Ю.Г. Савченко* ,
професор кафедри основ схемотехніки
Одеської національної академії зв'язку ім. О.С. Попова,
доктор технічних наук, професор *І.П. Панфілов*

Цифрова обробка аудіо- та відеоінформації у мультимедійних системах: Навчальний посібник / О.В. Дробик, В.В. Кідалов, В.В. Коваль, Б.Я. Костік, В.С. Лазебний, Г.М. Розорінов, Г.О. Сукач. – К.: Наукова думка, 2008. – 144 с.: іл.

ISBN 978-966-00-0940-2

У навчальному посібнику розглянуто прикладні питання цифрової обробки аудіо- та відеоінформації у мультимедійних системах. Викладено методи та принципи побудови пристроїв цифрової обробки сигналів, а також особливості їх функціонування. Значну увагу приділено сумісному використанню технічних і програмних засобів у процесі реалізації різних технологій цифрової обробки аудіо- та відеосигналів.

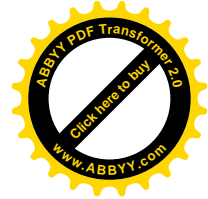
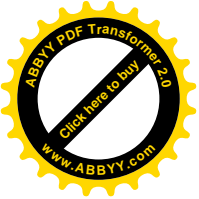
Для студентів вищих навчальних закладів усіх форм навчання спеціальності "Радіотехніка", "Телекомунікації", "Технологія електронних мультимедійних видань".

Науково-видавничий відділ фізико-математичної та технічної літератури

Редактор *І.Л. Яловнича*

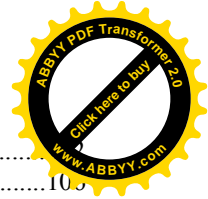
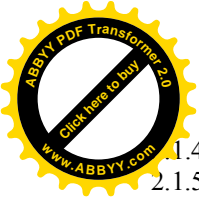
© О.В. Дробик, В.В. Кідалов, В.В. Коваль,
Б.Я. Костік, В.С. Лазебний, Г.М. Розорінов,
Г.О. Сукач, 2008

ISBN 978-966-00-0940-2

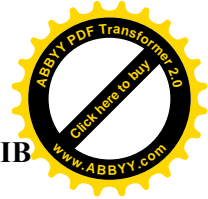
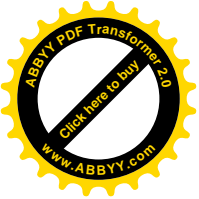


ЗМІСТ

1. ОСНОВИ ЦИФРОВОЇ ОБРОБКИ СИГНАЛІВ.....	5
1.1. Основні поняття сигналу.....	5
1.2. Шуми й завади.....	8
1.3. Розмірність сигналів.....	11
1.4. Математичний опис сигналів.....	12
1.5. Математичні моделі сигналів.....	13
1.6. Види моделей сигналів.....	14
1.7. Класифікація сигналів.....	16
1.8. Типи сигналів.....	17
1.9. Перетворення типу сигналів.....	20
1.10. Спектральне подання сигналів.....	21
1.11. Графічне відображення сигналів.....	23
1.12. Постановка завдання цифрової обробки сигналів.....	23
1.13. Перетворення Фур'є.....	24
1.14. Узагальнені функції.....	25
1.15. Відновлення дискретного сигналу.....	31
1.16. Зв'язок між безперервним і дискретним перетвореннями Фур'є. Теорема Котельникова-Шеннона.....	32
1.17. Дискретне перетворення Фур'є.....	34
1.18. Лінійні інваріантні системи.....	36
1.19. Цифрові фільтри.....	37
1.20. Z-перетворення.....	41
1.21. КІХ фільтри.....	48
1.22. Квадратурний дзеркальний фільтр.....	51
1.23. Вейвлет-перетворення.....	54
1.24. Швидкі алгоритми дискретного перетворення Фур'є.....	59
1.25. Згортка послідовностей та її обчислення.....	62
1.26. Використання вікон.....	63
1.27. Автокореляція та її обчислення.....	65
1.28. Перетворення Хартлі.....	70
1.29. Дискретне косинусне перетворення.....	74
1.30. Перетворення Уолша-Адамара.....	75
1.31. Код Грея.....	84
1.32. Перетворення Хаара.....	85
2. ЦИФРОВА ОБРОБКА ЗОБРАЖЕНЬ.....	87
2.1. Дискретизація й відновлення безперервних зображень.....	89
2.1.1. Дискретизація детермінованих зображень.....	91
2.1.2. Дискретизація випадкових зображень.....	97
2.1.3. Дискретизація сигналів у реальних системах.....	102



2.1.4. Вплив форми імпульсів дискретизації.....	105
2.1.5. Ефекти пов'язані з накладанням спектрів.....	105
2.1.6. Інтерполяційні функції в реальних системах відновлення зображення.....	107
2.2 Цифрова обробка зображень шляхом поелементних перетворень....	110
2.2.1 Лінійне контрастування зображень.....	112
2.2.2. Соляризація зображення.....	114
2.2.3. Зональне контрастування зображення.....	116
2.2.4.Перетворення гістограм, еквалізація.....	119
2.2.5. Застосування табличного методу для поелементного перетворення зображень.....	125
2.3 Фільтрація зображень.....	126
2.3.1 Оптимальна лінійна фільтрація зображення.....	128
2.3.2 Маскова фільтрація зображень.....	133
2.3.3. Медіанна фільтрація.....	137
 СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	 143



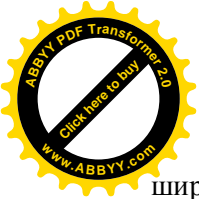
1. ОСНОВИ ЦИФРОВОЇ ОБРОБКИ СИГНАЛІВ

1.1 Основні поняття сигналу

В XVIII столітті в теорію математики увійшло поняття функції, як певної залежності якої-небудь величини "у" від іншої величини – незалежної змінної "х" з математичним записом такої залежності у вигляді $y(x)$. Незабаром математика функцій стала базовою основою теорії всіх природничих та технічних наук. Особливого значення функціональна математика набула в аудіо-, відеотехніці, техніці зв'язку, де часові функції виду $s(t)$, $v(f)$ й подібні, які було використано для опису процесу передавання інформації, почали називати сигналами.

У технічних галузях знань термін "сигнал" (signal, від латинського signum - знак) дуже часто використовують в широкому розумінні, без дотримання строгої термінології. Цей термін використовують у різних значеннях. Наприклад, його можуть застосовувати у розумінні технічного засобу для передавання, перетворення й використання інформації - електричний, магнітний, оптичний сигнал; або для опису фізичного процесу, що є матеріальним втіленням інформаційного повідомлення - зміни якого-небудь параметра носія інформації (напруги, частоти, потужності електромагнітних коливань, інтенсивності світлового потоку тощо) у часі, у просторі або залежно від зміни значень яких-небудь інших аргументів (незалежних змінних); або у розумінні значення певного фізичного стану або процесу, як, наприклад, сигнали світлофора, звукові попереджуючі сигнали й т.і. Всі ці поняття об'єднує кінцеве призначення сигналів. В цьому розумінні сигнали уособлюють певні відомості, повідомлення, інформацію про які-небудь процеси, стани або фізичні величини об'єктів матеріального світу, виражені у формі, зручній для передачі, обробки, зберігання й використання цих відомостей.

Термін "сигнал" дуже часто ототожнюють із поняттями "дані" (data) або "інформація" (information). Дійсно, ці поняття взаємозалежні й не існують одне без іншого, але стосуються різних категорій.



Поняття інформації має багато визначень, від найб. широкого (інформація є формалізоване віддзеркалення реальної світу) до практичного (відомості й дані, що є об'єктом зберігання, передачі, перетворення, сприйняття й керування). У наш час світова наука усе більше схиляється до точки зору, що інформація, поряд з матерією й енергією, належить до фундаментальних філософських категорій природознавства й становить одну із властивостей об'єктивного миру, хоча й трохи специфічну. Що стосується “даних” (від латинського datum - факт), то це сукупність фактів, результатів спостережень, вимірів стосовно яких-небудь об'єктів, явищ або процесів матеріального світу, які представлено у формалізованому вигляді - кількісному або якісному. Це не сама інформація, а тільки атрибут інформації - сировина для одержання інформації шляхом відповідної обробки й інтерпретації (тлумачення).

Термін "сигнал" у світовій практиці є загальноприйнятим для характеристики форми подання даних, що є результатом певних вимірів параметрів об'єкта досліджень у вигляді послідовності значень скалярних величин (аналогових, числових, графічних тощо) залежно від зміни яких-небудь змінних значень (часу, енергії, температури, просторових координат тощо). З урахуванням цього, надалі терміном “сигнал” у вузькому розумінні цього слова будемо позначати яким-небудь чином упорядковане **відображення** у зміні фізичного стану якого-небудь об'єкта – матеріального носія сигналу, певних даних про характер зміни у просторі або у часі. А оскільки дані містять інформацію, як про основні цільові параметри об'єкта досліджень, так і про різні супутні фактори та різні завади, то в широкому розумінні цього слова можна вважати, що сигнал є носієм загальної вимірювальної інформації. Слід зазначити, матеріальна форма носіїв сигналів (механічна, електрична, магнітна, акустична, оптична й будь-яка інша), а також форма відображення у певних фізичних параметрах будь-якого значення не відіграє. Інформативним параметром сигналу може бути будь-який параметр носія сигналу, функціонально зв'язаний зі значеннями інформаційних даних.

Сигнал у загальному розумінні - це залежність однієї величини від іншої й з математичної точки зору являє собою функцію (рис.1).

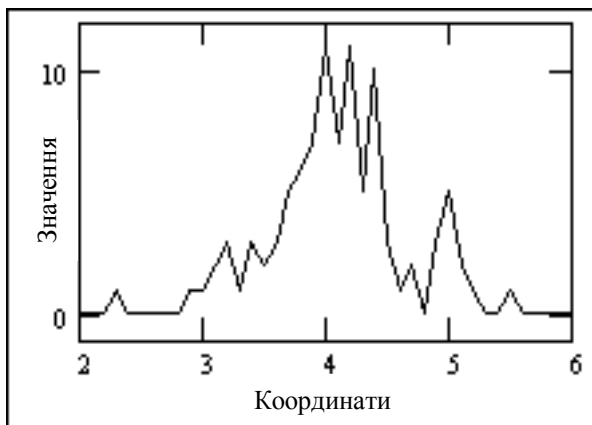


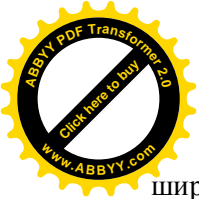
Рис. 1. Сигнал як функція

Найбільш поширеним є подання сигналів в електричній формі у вигляді залежності напруги від часу $U(t)$.

Сигнал - це інформаційна функція, що несе повідомлення про фізичні властивості, стан або поведіння якої-небудь фізичної системи, об'єкта або середовища, а метою обробки сигналів можна вважати отримання певних інформаційних відомостей, що відображені в цих сигналах (коротко - корисна або цільова інформація) й перетворення цих відомостей у форму, зручну для сприйняття й подальшого використання.

Коли говорять про "аналіз" сигналів, то йдеться не лише про суто математичні перетворення, але й про одержання на основі цих перетворень висновків стосовно специфічних особливостей відповідних процесів та об'єктів. Метою аналізу сигналів зазвичай є:

- визначення або оцінка числових параметрів сигналів (енергія, середня потужність, середньо квадратичне значення та ін.);
- розкладання сигналів на елементарні складові для порівняння властивостей різних сигналів;
- порівняння ступеня близькості, "подібності", "спорідненості" різних сигналів, у тому числі з певними кількісними оцінками.



Математичний апарат аналізу сигналів досить великий і широко застосовується на практиці в усіх без винятку галузях науки й техніки.

З поняттям сигналу нерозривно зв'язаний термін *реєстрації* сигналів, використання якого є також широким й неоднозначним, як і самого терміна "сигнал". У найбільш загальному розумінні цей термін означає операцію виділення сигналу і його перетворення у форму, зручну для подальшого використання. Так, у процесі інформації щодо фізичних властивостей яких-небудь об'єктів під реєстрацією сигналу розуміють процес виміру фізичних властивостей об'єкта й перенесення результатів вимірювань на матеріальний носій сигналу або безпосереднє енергетичне перетворення яких-небудь властивостей об'єкта в інформаційні параметри матеріального носія сигналу (як правило - електричного). Але так само широко термін реєстрації сигналів використовують і для процесів виділення вже сформованих сигналів, що несуть певну інформацію, із суми інших сигналів (радіозв'язок, аудіо й відеотехніка тощо), і для процесів фіксації сигналів на носіях довгострокової пам'яті, і для багатьох інших процесів, пов'язаних з обробкою сигналів.

Стосовно даної роботи під терміном реєстрації будемо розуміти *реєстрацію даних* які проходять через конкретну систему або точку системи й певним чином фіксуються на якому-небудь матеріальному носії або в пам'яті системи. Що стосується процесу одержання інформації за допомогою технічних засобів, які забезпечують дослідним шляхом знаходження співвідношення вимірюваної величини із прийнятої за визначенням зразковою одиницею цієї величини, і подання обмірюваного співвідношення в якій-небудь фізичній або числовій формі інформаційного сигналу, то для цього процесу будемо застосовувати, в основному, термін *детектування*.

1.2 Шуми й завади

При детектуванні сигналів, що несуть цільову для даного виду вимірів інформацію, у сумі з основним сигналом одночасно реєструються й сигнали, що заважають, - шуми й завади всілякої природи (рис.2).

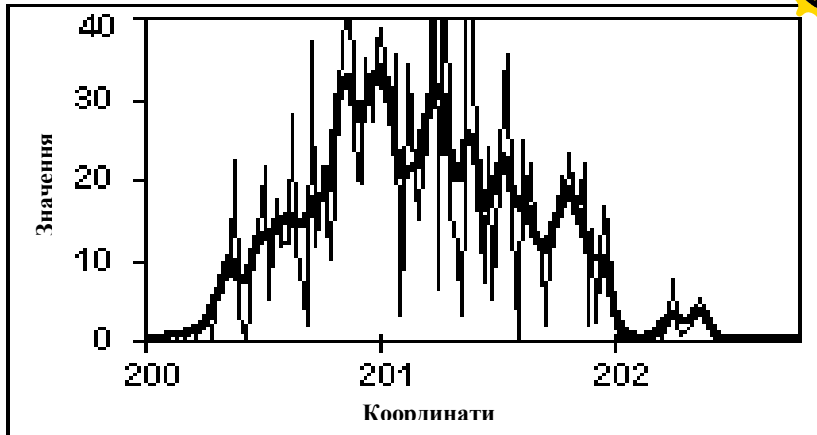


Рис. 2. Сигнал із завадами

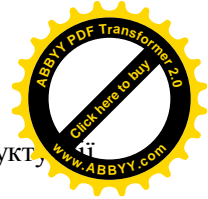
До завад належать також перекручування корисних сигналів під впливом різних дестабілізуючих факторів на процеси вимірів. Виділення корисних складових із загальної суми зареєстрованих сигналів або максимальне придушення шумів і завад в інформаційному сигналі при збереженні його корисних складових є однією з основних задач первинної обробки сигналів (результатів спостережень).

Типи завад розділяють за джерелами їхнього виникнення, за енергетичними спектрами, за характеристиками впливів на сигнал, за імовірнісними характеристиками і іншими ознаками.

Джерела завад бувають внутрішні й зовнішні.

Внутрішні шуми можуть бути властиві фізичній природі джерел сигналів, як, наприклад, теплові шуми електронних потоків в електричних ланцюгах або дробові ефекти в електронних приладах, або ті, що виникають у вимірювальних пристроях і системах передачі й обробки сигналів під впливом різних дестабілізуючих факторів - температури, підвищеної вологості, нестабільності джерел живлення, впливу механічних вібрацій на гальванічні з'єднання тощо.

Зовнішні джерела шумів бувають штучного й природного походження. До штучних джерел завад належать індустриальні завади - двигуни, перемикачі, генератори сигналів різної форми й



л. Природними джерелами завод є блискавки, флуктуації, магнітних полів, сплески сонячної енергії тощо.

Електричні й магнітні поля різних джерел завод внаслідок наявності індуктивних, ємнісних і резистивних зв'язків створюють на різних ділянках і ланцюгах сигнальних систем паразитні різниці потенціалів і струми, що накладаються на корисні сигнали.

Заводи підрозділяються на флуктуаційні, імпульсні й періодичні. Флуктуаційні або шумові заводи представляють хаотичний і безладний у часі процес у вигляді нерегулярних випадкових сплесків різної амплітуди. Як правило, флуктуаційні заводи розподілені за нормальним законом з нульовим середнім і впливають тільки на сигнали низького рівня.

Імпульсні заводи багато в чому схожі на шумові заводи й проявляються як у вигляді окремих імпульсів, так і у вигляді послідовності імпульсів, форма й параметри яких мають випадковий характер. Причинами імпульсних завод є різкі стрибки струму й напруги в промислових установках, транспортних засобах, а також природні електричні явища. Розподіл імпульсних перешкод симетричне з довільною щільністю розподілу.

Періодичні заводи викликаються періодичними низькочастотними або високочастотними полями ліній електропередач, силових електроустановок та ін. Якщо основна потужність завод зосереджена на окремих ділянках діапазону частот, наприклад, на частоті напруги промислової мережі або кратна цій частоті, то такі заводи називають зосередженими.

Залежно від характеру впливу на сигнал заводи розділяють на адитивні й мультиплікативні. Адитивні (тобто ті, які накладаються) заводи підсумовуються із сигналом, не залежать від його значень і форми й не змінюють інформативної складової самого сигналу. Мультиплікативні або деформуючі заводи можуть змінювати форму інформаційної частини сигналу, залежати від його значень і від певних особливостей у сигналі й таке інше. При відомому характері мультиплікативних завод можлива корекція сигналу на їхній вплив.

Варто зазначити, що поділ сигналів на корисні й ті, що заважають (шумові) є досить умовним. Джерелами сигналів, що заважають, також є певні фізичні процеси, явища або об'єкти. При

дсуванні природи сигналів, що заважають, вони можуть переводитися у розряд інформаційних.

1.3 Розмірність сигналів

Найпростішими сигналами мультимедійних систем є одномірні сигнали, як, наприклад, аудіосигнали, виміри яких-небудь параметрів полів (електричних, магнітних, та ін.). Значення одномірних сигналів залежать тільки від однієї незалежної змінної, як, наприклад, на рис. 3.

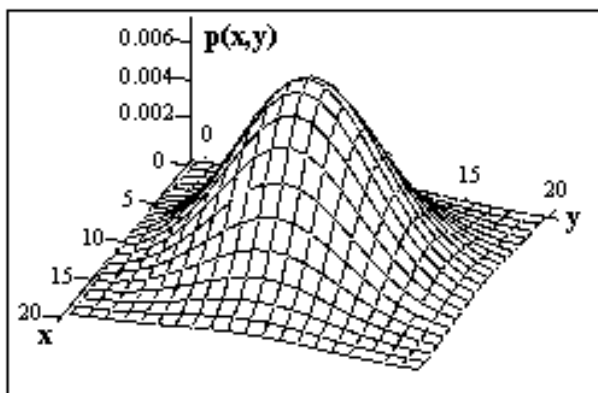
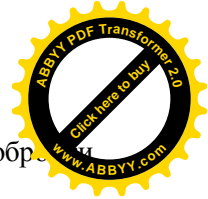


Рис. 3. Двовимірний сигнал

У загальному випадку сигнали є багатомірними функціями просторових, часових і інших незалежних змінних, наприклад, відеосигнали. Все більше застосування знаходять також багатомірні сигнали, утворені деякою множиною одномірних сигналів (рис.3).

Багатомірні сигнали можуть мати різне представлення за своїми аргументами, наприклад, дискретним за рівнем і безперервним за часом.

Багатомірний сигнал може розглядатися, як упорядкована сукупність одномірних сигналів. З урахуванням цього, при аналізі й обробці сигналів, багато принципів і практичні методи обробки одномірних сигналів, математичний апарат яких розвинений досить глибоко, поширюються й на багатомірні сигнали. Фізична



природа сигналів для математичного апарата їхньої обробки значення не має.

Разом з тим обробка багатомірних сигналів має свої особливості і може істотно відрізнятися від обробки одномірних сигналів, внаслідок більшого числа ступенів волі. Так, при дискретизації багатомірних сигналів має значення не тільки частотний спектр сигналів, але й форма растра дискретизації. Приклад не дуже корисної особливості - багатомірні поліноми сигнальних функцій, на відміну від одномірних, не розкладаються на прості множники. Що стосується порядку розмірності багатомірних сигналів, то її збільшення вище двох практично не змінює принципи й методи аналізу даних і позначається, в основному, тільки на ступені громіздкості формул і технічному ускладненні обчислень.

З огляду на ці фактори, при розгляді загальної теорії аналізу, перетворень і обробки сигналів обмежимося, в основному, одно- і двовимірними сигнальними функціями, а як універсальні незалежні змінні (аргументи функцій) будемо використовувати, зазвичай, змінну t для одномірних сигналів і змінні x, t або x, y для двовимірних сигналів, безвідносно до їхнього фізичного змісту (простір, час, енергія та ін.).

1.4 Математичний опис сигналів

Сигнали можуть бути об'єктами теоретичних досліджень і практичного аналізу тільки в тому випадку, якщо зазначено спосіб їхнього математичного опису - математична модель сигналу. Математичний опис дозволяє абстрагуватися від фізичної природи сигналу й матеріальної форми його носія, проводити класифікацію сигналів, виконувати їхнє порівняння, установлювати ступінь тотожності, моделювати системи обробки сигналів. Як правило, опис сигналу задається функціональною залежністю певного інформаційного параметра сигналу від незалежної змінної (аргументу) – $s(x), y(t)$ і т.п. Функції математичного опису сигналів можуть бути як дійсними, так і комплексними. Вибір математичного апарата опису визначається простотою й зручністю його використання при аналізі й обробці сигналів.



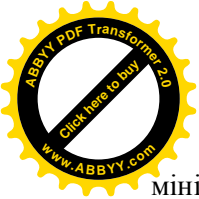
Відзначимо подвійність застосування опису сигналів функціями типу $s(t)$ й т.п. З одного боку, $s(t)$ – це величина, рівна значенню функції в момент часу t . З іншого, - ми позначаємо через $s(t)$ і саму функцію, тобто маємо правило, за яким кожному значенню t ставиться у відповідність певна величина s . У більшості аналітичних виражень це не обумовлює непорозумінь і за однозначної відповідності значень сигналів їхнім аналітичним вираженням приймається за умовчанням.

1.5 Математичні моделі сигналів

Теорія аналізу й обробки фізичних даних базується на математичних моделях відповідних фізичних полів і фізичних процесів, на основі яких створюються математичні моделі сигналів. Математичні моделі сигналів дають можливість узагальнено, абстрагуючись від фізичної природи, робити висновок про властивості сигналів, передбачувати зміни сигналів в умовах, що змінюються, замінити фізичне моделювання досліджуваних процесів математичним. За допомогою математичних моделей є можливість описувати властивості сигналів, які є головними, визначальними в досліджуваних процесах, та ігнорувати велику кількість другорядних ознак. Знання математичних моделей сигналів дає можливість класифікувати їх за різними ознаками, що характерні для того або іншого типу моделей. Так, сигнали розділяють на невинякові й винякові, залежно від можливості точного передбачення їхніх значень у будь-які моменти часу. Сигнал є невиняковим і називається *детермінованим*, якщо математична модель дозволяє здійснювати таке передбачення. Детермінований сигнал задається, як правило, математичною функцією або обчислювальним алгоритмом, а математична модель сигналу може бути представлена у вигляді

$$s = F(t, z, \omega, \dots; A, B, C, \dots),$$

де s – інформативний параметр сигналу; t, z, ω, \dots – незалежні аргументи (час, просторова координата, частота та ін.); A, B, C, \dots – параметри сигналів.



Модель повинна бути, за можливістю, простіше, мінімізована за кількістю незалежних аргументів і адекватна досліджуваному процесу, що в основному визначає результати вимірів.

Математичний опис не може бути всеосяжним та ідеально точним і, по суті, завжди відображає не реальні об'єкти, а їх спрощені або гомоморфні моделі. Моделі можуть задаватися таблицями, графіками, функціональними залежностями, рівняннями станів і переходів з одного стану в інше і т.п. Формалізований опис може вважатися математичною моделлю оригіналу, якщо він дозволяє з певною точністю прогнозувати стан і поведінку досліджуваних об'єктів шляхом формальних процедур над їхнім описом.

Невід'ємною частиною будь-якої математичної моделі сигналу є також область визначення сигналу, що встановлюється інтервалом завдання незалежної змінної. Приклади завдання інтервалу для змінних:

$$\begin{aligned} a \leq x \leq b, \quad x \in [a, b]; \\ a < y \leq b, \quad y \in (a, b]; \\ a < z < b, \quad z \in (a, b). \end{aligned}$$

Простір значень незалежної змінної звичайно позначається через індекс R . Наприклад, $R := (-\infty, +\infty)$, $x \in R$.

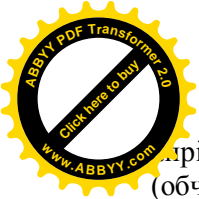
Крім завдання області визначення сигналу можуть бути також задані види чисельних значень змінних (цілі, раціональні, дійсні, комплексні).

Математичні моделі полів і сигналів на першому етапі обробки й аналізу результатів спостережень повинні дозволяти якоюсь мірою ігнорувати їхню фізичну природу й повертати її в модель тільки на заключному етапі інтерпретації даних.

1.6 Види моделей сигналів

При аналізі фізичних даних використовують два основних підходи до створення математичних моделей сигналів.

Перший підхід оперує з **детермінованими** сигналами, значення яких у будь-який момент часу або в довільній точці простору (а також залежно від будь-яких інших аргументів) є



апріорно відомими або можуть бути досить точно визначені (обчислені). Для опису невідповідних сигналів використовуються також *квазідетерміновані* моделі, у яких значення одного або декількох параметрів апріорно невідомі та вважаються випадковими величинами з малим випадковим компонентом, впливом якого можна знехотувати.

Другий підхід припускає випадковий характер сигналів, закон зміни яких у часі (або в просторі) має випадковий характер і які набувають конкретних значень з деякою ймовірністю. Модель такого сигналу являє собою опис статистичних характеристик випадкового процесу шляхом завдання законів розподілу ймовірностей, кореляційної функції, спектральної щільності енергії та ін.

Випадковість може бути обумовлена як власною фізичною природою сигналів, що характерно, наприклад, для звукових сигналів, так й ймовірнісним характером сигналів, що реєструються, як за часом або місцем їхньої появи, так і за змістом. Із цих позицій випадковий сигнал може розглядатися як відображення випадкового за своєю природою процесу або фізичних властивостей об'єкта (процесу), які визначаються випадковими параметрами чи складною структурою, результати вимірів у якій важко передбачити.

Між цими двома видами сигналів немає різкої границі. Строго кажучи, детермінованих процесів і детермінованих сигналів, що відповідають їм, у природі не існує. Навіть сигнали, добре відомі на вході в середовище (при зовнішньому впливі на неї), за місцем їхньої реєстрації завжди ускладнені випадковими завадами, впливом дестабілізуючих факторів і апріорно невідомими параметрами й будовою самого середовища. З іншого боку, модель випадкового поля часто апроксимується методом суперпозиції (накладення) сигналів відомої форми. Детерміновані моделі можуть використатися й для вивчення чисто випадкових процесів, якщо рівень корисного сигналу в цьому процесі значно вище рівня статистичних флуктуацій.

На вибір математичної моделі в тому або іншому випадку значно впливає також складність математичного апарату обробки сигналів і сформовані традиції інтерпретації результатів спостережень. Не виключається й зміна моделі, як правило, з



...овірнісної в детерміновану, у процесі нагромадження інформ...
про досліджуване явище або об'єкт.

1.7 Класифікація сигналів

Здійснюється на підставі істотних ознак відповідних математичних моделей сигналів. Усі сигнали розділяють на дві великі групи: детерміновані й випадкові (рис.4).

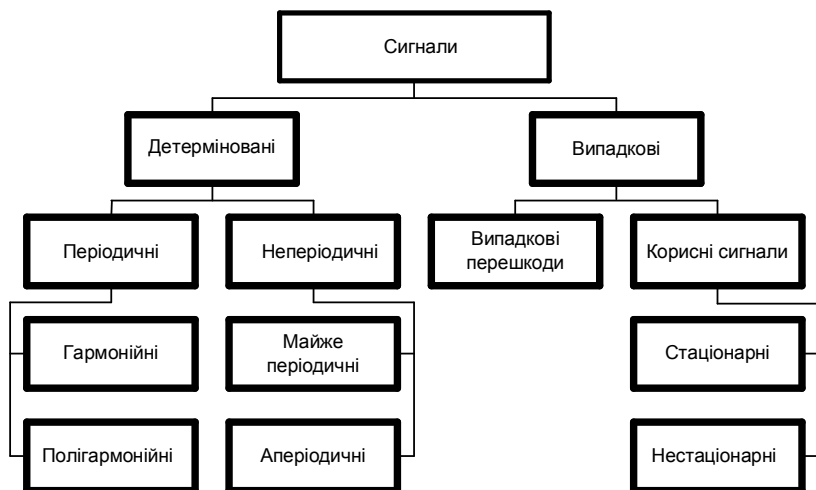


Рис. 4. Класифікація сигналів

З енергетичних позицій сигнали розділяють на два класи: з обмеженою (кінцевою) енергією та з нескінченною енергією.

Для сигналів з обмеженою енергією (інакше сигналів, що інтегруються з квадратом) повинне виконуватися співвідношення:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt < \infty.$$

Як правило, до цього класу сигналів відносять аперіодичні й імпульсні сигнали, що не мають розривів 2-го роду при обмеженій кількості розривів 1-го роду, і особливих точок, що йдуть у нескінченність. Будь-які періодичні, полігармонійні й майже



Періодичні сигнали, а також сигнали з розривами й особливими точками 2-го роду, є сигналами з нескінченною енергією. Для їхнього аналізу застосовуються спеціальні методи.

Іноді в окремий клас виділяють сигнали кінцевої тривалості, відмінні від нуля тільки на обмеженому інтервалі аргументів (незалежних змінних). Такі сигнали звичайно називають **фінітними**.

1.8 Типи сигналів

Виділяють наступні типи сигналів, яким відповідають певні форми їхнього математичного опису.

Аналоговий сигнал є безперервною функцією безперервного аргументу, тобто визначений для будь-якого значення аргументів. Джерелами аналогових сигналів, як правило, є фізичні процеси і явища, безперервні в динаміці свого розвитку в часі, у просторі або за будь-якої іншої незалежної змінної. Сигнал, що реструється, є подібним (“аналогічним”) процесу, що його породжує. Приклад математичного запису сигналу: $y(t) = 4,8 \exp\left[-(t-4)^2 / 2,8\right]$.

Приклад графічного відображення даного сигналу наведений на рис. 5; при цьому як сама функція, так і її аргументи, можуть приймати будь-які значення в межах деяких

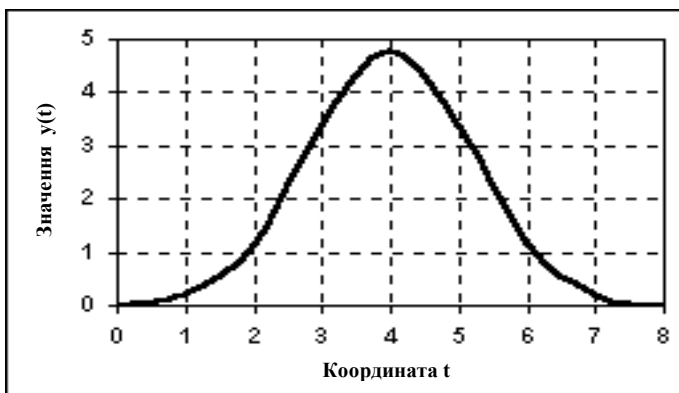


Рисунок 5 - Аналоговий сигнал

інтервалів: $y_1 \leq y \leq y_2$, $t_1 \leq t \leq t_2$.

Якщо інтервали значень сигналу або його незалежних змінних не обмежуються, то вони приймаються рівними від $-\infty$ до $+\infty$. Множина можливих значень сигналу утворить континуум - безперервний простір, у якому будь-яка сигнальна точка може бути визначена з точністю до нескінченності. Приклади сигналів, аналогових за своєю природою - зміна напруженості електричного, електромагнітного поля в часі й у просторі.

Дискретний сигнал за своїми значеннями також є безперервною функцією, але визначеною тільки за дискретними значеннями аргументу. За множиною своїх значень він є кінцевим (лічильним) і описується дискретною послідовністю відліків $y(n\Delta t)$, де $y_1 \leq y \leq y_2$, Δt - інтервал між відліками (інтервал або крок дискретизації), $n = 0, 1, 2, \dots, N$. Величина, зворотна кроку дискретизації $f = 1/\Delta t$, називається частотою дискретизації. Якщо дискретний сигнал отриманий дискретизацією аналогового сигналу, то він являє собою послідовність відліків, значення яких у точності дорівнюють значенням вихідного сигналу по координатах $n\Delta t$.

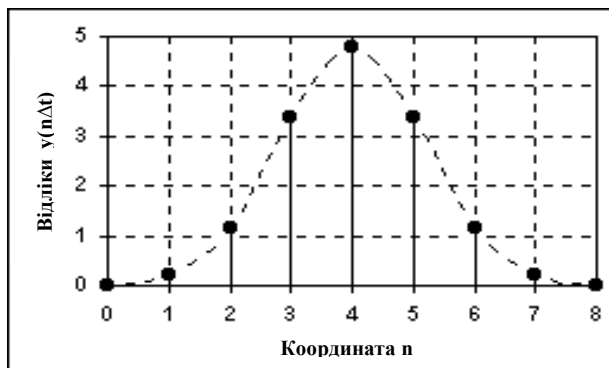


Рис. 6. Дискретний сигнал

Приклад дискретизації аналогового сигналу, наведеного на рис.5, зображено на рис.6. При $\Delta t = const$ (рівномірна

дискретизація) дискретний сигнал можна описувати скороченою позначенням $y(n)$. У технічній літературі в позначеннях дискретизованих функцій іноді залишають колишні індекси аргументів аналогових функцій, які беруть у квадратні дужки: $y[t]$. При нерівномірній дискретизації сигналу позначення дискретних послідовностей (у текстових описах) звичайно беруть у фігурні дужки - $\{s(t_i)\}$, а значення відліків наводять у вигляді таблиць із вказівкою значень координат t_i . Для числових послідовностей (рівномірних і нерівномірних) застосовується й наступний числовий опис: $s(t_i) = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$, $t = t_1, t_2, \dots, t_N$.

Цифровий сигнал є квантований за своїми значеннями й дискретний за аргументом. Він описується квантованою гратчастою функцією $y_n = Q_k[y(n\Delta t)]$, де Q_k - функція квантування із числом рівнів квантування k . При цьому інтервали квантування можуть бути як з рівномірним розподілом, так і з нерівномірним, наприклад, логарифмічним. Задається цифровий сигнал, як правило, у вигляді дискретного ряду числових даних - числового масиву за послідовним значенням аргументу при $\Delta t = const$, але в загальному випадку сигнал може задаватися й у вигляді таблиці для довільних значень аргументу.

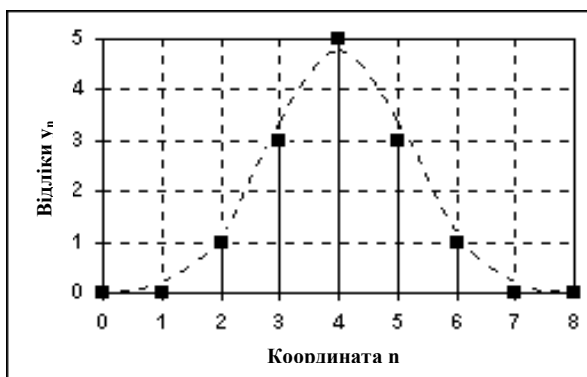
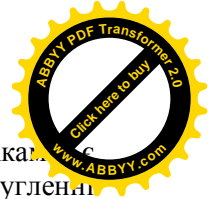
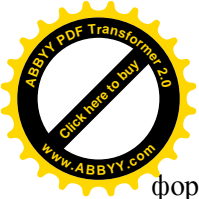


Рис. 7. Цифровий сигнал



По суті, цифровий сигнал за своїми значеннями (відліками) формалізованим різновидом дискретного сигналу при округленні відліків останнього до певної кількості цифр, як це показано на рис. 7.

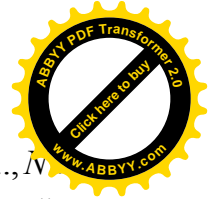
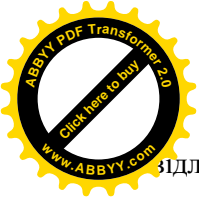
Цифровий сигнал - кінцевий по множині своїх значень. Процес перетворення нескінченних за значеннями аналогових відліків у кінцеве число цифрових значень називається квантуванням за рівнем, а виникаючі при квантуванні помилки округлення відліків - шумами або помилками квантування.

У дискретних системах і в комп'ютерах сигнал завжди представлений з точністю до певної кількості розрядів, а, отже, завжди є цифровим. З урахуванням цих факторів при описі цифрових сигналів функція квантування звичайно опускається (мається на увазі рівномірної за замовчуванням), а для опису сигналів використовуються правила опису дискретних сигналів. Що стосується форми обертання цифрових сигналів у системах зберігання, передачі й обробки, те, як правило, вони являють собою комбінації коротких одно- або двополярних імпульсів однакової амплітуди, якими у двійковому коді з певною кількістю числових розрядів кодуються числові послідовності сигналів (масивів даних).

1.9 Перетворення типу сигналів

Форми математичного відображення сигналів, особливо на етапах їхньої первинної реєстрації (детектування) і в прямих задачах опису фізичних процесів, як правило, відбивають їхню фізичну природу. Однак останнє не є обов'язковим і залежить від методики вимірів і технічних засобів детектування, перетворення, передачі, зберігання й обробки сигналів. На різних етапах процесів одержання й обробки інформації як матеріальне подання сигналів у пристроях реєстрації й обробки, так і форми їхнього математичного опису при аналізі даних, можуть змінюватися шляхом відповідних операцій перетворення типу сигналів.

Операція дискретизації здійснює перетворення аналогових сигналів (функцій), безперервних за аргументом, у функції миттєвих значень сигналів за дискретним аргументом, як, наприклад $s(t) \Rightarrow s(n\Delta t)$, де значення $s(n\Delta t)$ являють собою



відліки функції $s(t)$ у моменти часу $t = n\Delta t$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$.

Операція відновлення аналогового сигналу з його дискретного уявлення є зворотною до операції дискретизації й представляє, по суті, інтерполяцію даних.

У загальному випадку, дискретизація сигналів може приводити до певної втрати інформації про поведіння сигналів у проміжках між відліками. Однак існують умови, що обумовлені теоремою Котельникова-Шеннона, згідно яким аналоговий сигнал з обмеженим частотним спектром може бути без втрат інформації перетворений у дискретний сигнал, і потім абсолютно точно відновлений за значеннями своїх дискретних відліків.

Операція квантування або аналого-цифрового перетворення (АЦП) полягає в перетворенні дискретного сигналу $s(n\Delta t)$ у цифровий сигнал $s(n) = s_n \approx s(n\Delta t)$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$, потім, як правило, кодований у двійковій системі числення. Виникаючі при цьому втрати інформації за рахунок округлення називаються помилками або шумами квантування.

При перетворенні аналогового сигналу безпосередньо в цифровий сигнал операції дискретизації й квантування сполучаються.

Операція цифро-аналогового перетворення (ЦАП) є зворотною до операції квантування, при цьому на виході реєструється або дискретно-аналоговий сигнал $s(n\Delta t)$, що має східчасту форму, або безпосередньо аналоговий сигнал $s(t)$, що відновлюється з $s(n\Delta t)$, наприклад, шляхом згладжування.

Через те, що квантування сигналів завжди виконується з певною помилкою (максимум - до половини інтервалу квантування), відповідні операції АЦП і ЦАП не є взаємно зворотними з абсолютною точністю.

1.10 Спектральне подання сигналів

Крім звичного динамічного подання сигналів і функцій у вигляді залежності їхніх значень від певних аргументів (часу, лінійної або просторової координати, тощо) при аналізі й обробці



Даних широко використовується математичний опис сигналів за допомогою аргументами, що є зворотними аргументам динамічного подання. Так, наприклад, для часу зворотним аргументом є частота. Можливість такого опису визначається тим, що будь-який як завгодно складний за своєю формою сигнал, що не має розривів першого роду (нескінченних значень на інтервалі свого завдання), можна представити у вигляді суми більш простих сигналів, і, зокрема, у вигляді суми найпростіших гармонійних коливань, що виконується за допомогою перетворення Фур'є. Відповідно, математично розкладання сигналу на гармонійні складові описується функціями значень амплітуд і початкових фаз коливань за безперервним або дискретним аргументом – частоті зміни функцій на певних інтервалах аргументів їхнього динамічного подання. Сукупність амплітуд гармонійних коливань розкладання називають *амплітудним спектром* сигналу, а сукупність початкових фаз – *фазовим спектром*. Обидва спектри разом утворюють повний частотний спектр сигналу, що за точністю математичного подання є тотожним динамічній формі опису сигналу.

Лінійні системи перетворення сигналів описуються диференціальними рівняннями, причому для них вірний принцип суперпозиції, відповідно до якого реакція систем на складний сигнал, що складається із суми простих сигналів, дорівнює сумі реакцій від кожного складового сигналу окремо. Це дозволяє при відомій реакції системи на гармонійне коливання з певною частотою визначити реакцію системи на будь-який складний сигнал, розклавши його в ряд гармонік за частотним спектром сигналу.

Широке використання гармонійних функцій при аналізі сигналів пояснюється тим, що вони є досить простими ортогональними функціями й визначені при всіх значеннях t . Крім того, вони є власними функціями часу, що зберігають свою форму при проходженні коливань через будь-які лінійні системи й системи обробки даних з постійними параметрами (змінюються тільки амплітуда й фаза коливань). Немаловажне значення має й та обставина, що для гармонійних функцій і їхнього комплексного аналізу розроблений потужний математичний апарат.



Крім гармонійного ряду Фур'є застосовуються й інші розклади: по функціях Уолша, Бесселя, Хаара, поліномам Чебишова, Лагерра, Лежандра, вейвлетам, тощо.

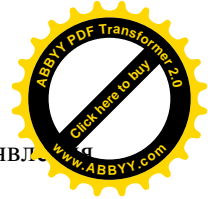
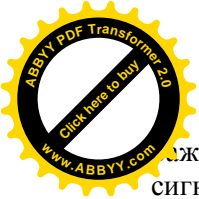
1.11 Графічне відображення сигналів

Є загальновідомим й особливих пояснень не вимагає. Для одновірних сигналів графік – це сукупність пари значень $\{t, s(t)\}$ у прямокутній системі координат. При графічному відображенні дискретних і цифрових сигналів використовується або спосіб безпосередніх дискретних відрізків відповідної масштабної довжини над віссю аргументу, або спосіб що обгинає (плавний або ламаною) за значеннями відліків.

1.12 Постановка завдання цифрової обробки сигналів

У теперішній час методи цифрової обробки сигналів, Digital Signal Processing (DSP) знаходять усе більше широке застосування, витісняючи поступово методи, засновані на аналоговій обробці. Тому далі розглядаються основи теорії й найбільш уживані алгоритми цифрової обробки.

Нехай є безперервний сигнал $x(t)$, заданий на інтервалі $[0, \infty)$. Як відзначалося раніше, при переході до цифрової форми виконуються такі дії. Вибирається крок дискретизації T , і замість вихідного сигналу утворюється дискретна послідовність $y[n] = x(nT)$, $n = 0, 1, \dots$. Далі, вибирається формат цифрового уявлення r . Припустимо, що існує таке число M , для якого виконуються нерівності: $-M \leq y[n] \leq M$ для всіх n . Інтервал $[-M, M]$ розбивається на 2^r частин. Після цього кожне значення $y[n]$ замінюється номером інтервалу, у який потрапило відповідне значення. У результаті послідовність $y[n]$ замінюється новою послідовністю $z[n]$, але тепер кожний член нової послідовності приймає значення з інтервалу $[0, 2^r - 1]$. При



вжання замість зазначеного уявлення можна перейти до уявл. сигналу цілими числами зі знаком.

На кожному зі згаданих кроків у сигнал вноситься помилка. Перша задача цифрової обробки полягає в оцінці помилки вихідного сигналу. Подальша обробка складається в добуванні з отриманого сигналу потрібної інформації й усуненні шумів. Це здійснюється за допомогою цифрової фільтрації. При переході до цифрового подання об'єм сигналу значно зростає, тому наступний крок обробки полягає в стисненні сигналу. Звичайно мається на увазі стиснення із деякими втратами інформації. Тут важливо встановити критерії припустимих втрат. Залежно від обраного критерію вибирається спосіб стиснення. Хоча одержувані дискретні послідовності нескінченні, у реальних умовах ми маємо справу лише з кінцевими послідовностями. У цьому зв'язку необхідно вміти оцінювати втрати, пов'язані з усіканням довжини послідовностей.

1.13 Перетворення Фур'є

Найважливішою характеристикою вихідного сигналу є його перетворення Фур'є. Якщо вихідний сигнал $f(t)$, заданий на всій дійсній осі, то його перетворення Фур'є має вигляд

$$F(if) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi ft} dt . \quad (1.1)$$

Функція $F(if)$ або її модуль трактується як інтенсивність вихідного сигналу на частоті f . Зворотне перетворення задається формулою

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(if)e^{i2\pi ft} df . \quad (1.2)$$

Справедливість зазначених формул можлива лише при певних обмеженнях на вихідні функції. Залежно від накладених обмежень даним формулам надають різний зміст. Ми не будемо уточнювати дану обставину, припускаючи, що всі виконувані операції типу зміни порядку інтегрування законні. Однак у кожному разі при звичайному розумінні інтегрування необхідною



мовою є спадання функцій на нескінченності. У реальних умовах це обмеження не має місця, тому попередньо потрібно ознайомитися зі спеціальним математичним апаратом, що дозволяє в деяких випадках обійти дане обмеження.

Перш, ніж переходити до викладання цього апарата, нагадаємо основні властивості перетворення Фур'є. Для стислості зв'язок між функцією та її перетворенням Фур'є будемо позначати так: $f(t) \Leftrightarrow F(if)$.

Якщо

$$f(t) \Leftrightarrow F(if), g(t) \Leftrightarrow G(if),$$

тоді

$$af(t) + bg(t) \Leftrightarrow aF(if) + bG(if),$$

$$f(t - a) \Leftrightarrow e^{-i2\pi fa} F(if).$$

Згорточкою двох функцій називається функція $h(t) = f(t) \otimes g(t)$, задана формулою:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)g(x)dx. \quad (1.3)$$

Має місце співвідношення

$$h(t) \Leftrightarrow F(if)G(if).$$

Двоїсте співвідношення має вигляд

$$f(t)g(t) \Leftrightarrow F(if) \otimes G(if).$$

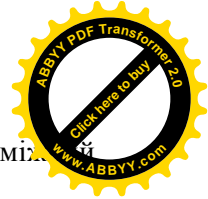
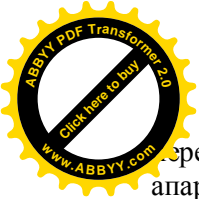
Загалом кажучи, не передбачається, що функція $f(t)$ - дійсна. Якщо ж це так, тоді

$$F(-if) = F^*(if), f'(t) \Leftrightarrow i2\pi fF(if).$$

Ця формула виходить формальним диференціюванням під знаком інтеграла в (1.2).

1.14 Узагальнені функції

Як ми вже відзначали, для того, щоб у звичайному змісті існувало перетворення Фур'є від функції, необхідно її убування на нескінченності. Очевидно, що це не виконано для стаціонарного сигналу. Для того, щоб мати можливість працювати з



Створенням Фур'є для таких функцій потрібний допоміжний апарат.

Позначимо через K множину функцій, які нескінченно диференціюються, з компактним носієм. За визначенням, послідовність $\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x)$, якщо всі ці функції мають загальний компактний носій, належать K і в кожній точці існує звичайна збіжність. Функціонал - це відображення $f: K \rightarrow C$, причому $f(\varphi_n) \rightarrow f(\varphi)$. Якщо $u(x)$ - інтегрувальна функція, то їй відповідає функціонал

$$f(\varphi) = \int \varphi(x)u(x)dx .$$

Однак існують функціонали, які не можливо представити в зазначеній формі. Наприклад,

$$\Delta(\varphi) = \varphi(0) .$$

Цього функціонала записують у формі

$$\int \varphi(x)\delta(x)dx .$$

Поряд із зазначеним функціоналом визначають функціонали $\delta(x - a)$, $\delta(tx)$, виходячи з формального правила заміни змінних в інтегралі. Хоча цей функціонал не можна представити за допомогою звичайної функції, можна ввести δ -подібну послідовність. Покладемо

$$\delta_n(x) = \begin{cases} n/2 & \text{при } -1/n \leq x \leq 1/n, \\ 0 & \text{в інших точках.} \end{cases}$$

Інтеграл від цієї функції дорівнює 1. При більших n функція $\varphi \in K$ може бути подана у вигляді

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + O(n^{-2})$$

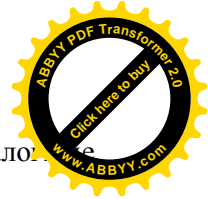
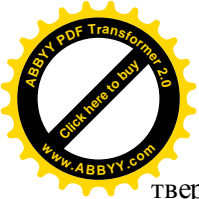
при $-1/n \leq x \leq 1/n$, тому

$$\int_{-1/n}^{1/n} \varphi(x)\delta_n(x)dx = \varphi(0) + O(1/n)$$

(другий доданок зникає в силу симетричності).

Лема. Нехай $\varphi(x)$ має інтегрувальну похідну. Тоді

$$\int \varphi(x)\cos(nx)dx \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$



Доказ проводиться інтегруванням вроздріб. Аналогічне твердження справедливо й для $\sin(nx)$.

Задача 1. Довести, що $f(t)g(t) \Leftrightarrow F(w) * G(W)$.

Приведемо деякі допоміжні твердження.

Лема. Справедлива формула

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \pi / 2. \tag{1.4}$$

Доказ. Хоча формула (1.4) добре відома, ми приведемо її доказ, оскільки вона є основою багатьох подальших викладень. Розглянемо контур, зображений на рис.8 і інтеграл по контуру в зазначеному напрямку від аналітичної функції

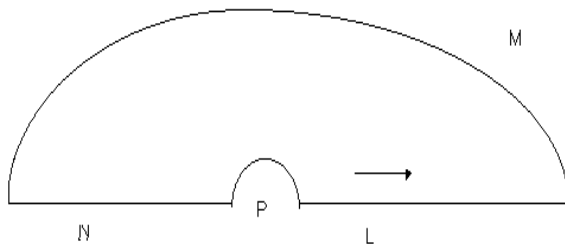


Рис. 8. Контур інтегрування

e^{iz} / z . Неважко побачити, що

$$\int \frac{e^{iz}}{z} dz = 0,$$

оскільки у функції немає особливостей усередині області інтегрування. Тут контур M - дуга окружності радіуса R , а контур P - дуга окружності радіуса ε . Обидві дуги мають центр на початку координат. За винятком крайніх точок, на контурі M виконане нерівність $\text{Im } z > 0$, тому з ростом R інтеграл по цьому контурі прагне до 0. Інтеграли по контурах N, L у сумі дають



$$2i \int_e^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx .$$

Знайдемо тепер інтеграл по контурі P . Зробимо заміну $z = \varepsilon e^{it}$.

У результаті інтеграл по цьому контурі матиме вигляд

$$\int_{\pi}^0 e^{\varepsilon e^{it}} i dt = -\pi i + O(\varepsilon) .$$

Остання оцінка отримана в результаті розкладання підінтегральної функції в ряд. Спрямовуючи ε до 0, завершуємо доказ.

Наслідок 1.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(Nx)}{x} = \pi / 2$$

при кожному N .

Доказ проводиться шляхом заміни змінної.

Наслідок 2.

$$\int_0^a \frac{\sin(Nx)}{x} \rightarrow \pi / 2, \quad N \rightarrow \infty .$$

Для будь-якого $a > 0$.

Доказ. $(\int_0^a + \int_a^{\infty}) \frac{\sin(Nx)}{x} = \pi / 2$.. Другий доданок прагне до 0

коли $N \rightarrow \infty$.

З міркувань симетрії впливає формула

$$\int_{-a}^a \frac{\sin(Nx)}{x} \rightarrow \pi, \quad N \rightarrow \infty, a > 0 . \quad (1.5)$$

Приклад пошуку узагальненої функції

Під узагальненою функцією розуміється безперервний функціонал. Прикладом такої функції є δ -функція.

Пропозиція 1. $1 \Leftrightarrow \delta(w)$.

Доказ. Очевидно, що звичайне перетворення Фур'є від 1 не існує. Покладемо



$$F_N(w) = \int_{-N}^N e^{-2wi\pi t} dt.$$

Не існує звичайної межі в цієї функції при $N \rightarrow \infty$. Знайдемо функціонала

$$\int_a^b \varphi(w) F_N(w) dw = \int_a^b \varphi(w) \frac{\sin(2\pi wN)}{\pi w} dw.$$

Якщо 0 не попадає в інтервал інтегрування, підінтегральна функція не має особливостей, і весь інтеграл прагне до 0. У протилежному випадку, інтеграл прямує до

$$\int_{-c}^c [\varphi(0) + w\varphi'(0) + O(c^2)] \frac{\sin(2\pi wN)}{\pi w} dw,$$

де c довільне мале позитивне число. Другий доданок зникає в силу симетричності, і при $c \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$ одержуємо, використовуючи (1.2), кінцевий результат.

Наслідок 3. $e^{2\pi at} \Leftrightarrow \delta(w - a)$.

Доказ. Формальне твердження є наслідок загального правила:

$$\delta(w) \Leftrightarrow 1 \rightarrow \delta(w - a) \Leftrightarrow e^{2\pi at} 1,$$

але фактично треба довести, що це правило поширюється й на узагальнені функції. Простіше всього, дати прямий доказ.

Похідні від узагальнених функцій

Похідна визначається шляхом формального застосування інтегрування вроздріб з урахуванням компактності носія функцій з K :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(w) f'(w) dw = - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(w) f(w) dw.$$

Як приклад розглянемо узагальнену функцію $\eta(w)$, задану рівністю:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(w) \eta(w) dw = \int_0^{\infty} \varphi(w) dw$$

і знайдемо її похідну.

Маємо



$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \eta'(x) dx = - \int_0^{\infty} \varphi'(x) dx = \varphi(0).$$

Це означає, що $\eta'(x) = \delta(x)$.

Примітка. Варто бути дуже обережним застосовуючи до узагальнених функцій формули, що зв'язують похідну від функції і її перетворення Фур'є.

Як приклад розглянемо перетворення Фур'є від $\eta(x)$. Діючи формально, можемо одержати:

$$\eta \Leftrightarrow F(w), \quad \eta' = \delta \Leftrightarrow 2\pi i w F(w) = 1,$$

звідки

$$F(w) = \frac{1}{2\pi i w}.$$

Тепер, виходячи з визначення, знайдемо правильну відповідь. Покладемо

$$F_N(w) = \int_0^N e^{-2wi\pi} dt = \frac{1 - e^{-2\pi i w N}}{2\pi i w}$$

та підрахуємо $\int_a^b \varphi(w) F_N(w) dw$. Якщо точка 0 не входить в

інтервал інтегрування, то інтеграл прагне до $\int_a^b \frac{\varphi(w)}{2\pi i w} dw$, тобто до

очікуваного результату. Якщо ж точка 0 належить інтервалу інтегрування, то поряд із зазначеним доданком з'явиться ще вираз:

$$\int_{-c}^c \varphi(w) F_N(w) dw = \int_{-c}^c \varphi(w) \frac{1}{2\pi i w} [1 - \cos(2\pi w N) + i * \sin(2\pi w N)] dw.$$

Другий доданок зникає в силу симетрії, а із третього доданка одержуємо δ -функцію. Остаточний результат виглядає так:

$$\eta \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi i w} + \delta(w) / 2.$$

Відзначимо, що звідси виходить правильний результат для перетворення Фур'є від δ -функції, оскільки $w\delta(w) = 0$.



Зауваження. Інтеграл $\int \frac{\varphi(w)}{w} dw$ існує в сенсі головної значення для функції з K . Це означає існування відповідного функціонала.

Задача 2. Дати строгий доказ твердження

$$\int_a^\infty \frac{\sin(Nt)}{t} dt \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

1.15. Відновлення дискретного сигналу

Ціль відновлення дискретного сигналу - знайти необхідні умови, при яких сигнал може бути відновлений по дискретних вибірках.

Насамперед, відзначимо часто використовуваний факт:

$$\cos(2\pi w_0 t) \Leftrightarrow [\delta(w - w_0) + \delta(w + w_0)]/2.$$

Перетворення Фур'є дискретної послідовності

Нехай є сигнал $x(t)$, і обраний крок дискретизації T_0 . Тоді функція замінюється послідовністю $y[n] = x(nT_0)$.

Перетворенням Фур'є дискретної послідовності називається вираз

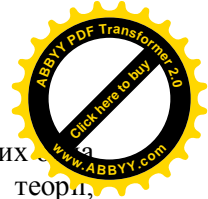
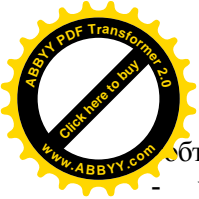
$$Y(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] e^{-2\pi w i T_0 n}. \quad (1.6)$$

Відзначимо, що функція $Y(w)$ є періодичною. Часто заради простоти позначень приймають $T_0 = 1$, і в цьому випадку період функції дорівнює 1. Це принципове розходження між перетвореннями Фур'є функції й дискретної послідовності. У той же час, обоє перетворення тісно пов'язані. Покладемо

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0).$$

Тоді

$$Y(w) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)x(t)e^{-2\pi w i t} dt, \quad (1.7)$$



Обто є перетворенням Фур'є від добутку двох функцій, з яких $\delta(t)$ - узагальнена функція. Відповідно до загальної теорії, перетворення Фур'є від добутку двох функцій дорівнює згортці образів співмножників. Тут ми відступаємо від строгого викладу, оскільки вже справедливості (1.7) вимагає обґрунтування. Для спрощення позначень покладемо $T_\delta = 1$. Знайдемо

$$U(w) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-2\pi iwt} dt.$$

Знову покладемо

$$U_N(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-N}^N \delta(t-n)e^{-2\pi iwt} dt = \sum_{n=-N}^N e^{-2\pi iwn}.$$

Треба звернути увагу на те, що це є періодична функція з періодом 1, представлена сумою геометричної прогресії. Тому маємо

$$U_N(w) = \frac{e^{-2\pi iNw} - e^{2\pi i(N+1)w}}{1 - e^{2\pi iw}}.$$

Помножимо чисельник і знаменник на $e^{-\pi iw}$. Одержимо

$$U_N(w) = \frac{\sin(2\pi(N+1/2)w)}{\sin(\pi w)}.$$

В околиці нуля при $N \rightarrow \infty$

$$\int_{-c}^c \varphi(w)U_N(w)dw = \int_{-c}^c \frac{\varphi(w)\sin(2\pi(N+1/2)w)}{\pi iw} dw$$

прямують до $\varphi(0)$. Таким чином, в околиці нуля $U_N(w) \rightarrow \delta(w)$.

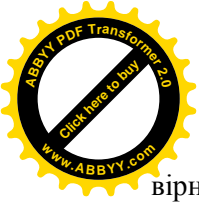
У силу періодичності, маємо остаточний результат:

$$U(w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(w-k).$$

Для довільного T_δ можемо написати

$$\sum \delta(t - T_\delta n) \Leftrightarrow \sum \delta(w - \frac{n}{T_\delta}) / T_\delta. \quad (1.8)$$

1.16 Зв'язок між безперервним і дискретним перетвореннями Фур'є. Теорема Котельникова-Шеннона



Використовуючи формули (1.7) і (1.8) та, припускаючи вірним твердження про перетворення Фур'є від добутку функцій, одержуємо:

$$Y(w) = U(w) * X(w), \text{ де } x(t) \Leftrightarrow X(w),$$

звідки випливає

$$Y(w) = \sum X(w - \frac{n}{T_0}) / T_0. \quad (1.9)$$

Ця формула встановлює зв'язок між безперервним і дискретним перетвореннями Фур'є. Як і слід було сподіватися, $Y(w)$ має період $1/T_0$, що погодиться з (1.6).

Припустимо, що спектр вихідного сигналу обмежений: $|w| \geq M \rightarrow X(w) = 0$ для якогось M . Виберемо T_0 таким чином, щоб виконувалася нерівність

$$T_0 < \frac{1}{2M}. \quad (1.10)$$

У цьому випадку функція $X(w)$ однозначно визначається функцією $Y(w)$. Значення $2M$ називається **частотою вибірки Найквіста**. Якщо частота вибірки більше зазначеної величини, спектр безперервного сигналу може бути відновлений по спектру дискретного.

Якщо вихідний сигнал має обмежений спектр і виконана умова (1.10), то безперервний сигнал можна відновити по дискретному (**теорема Котельникова-Шеннона**).

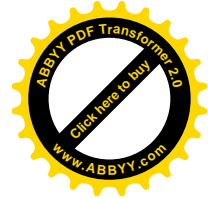
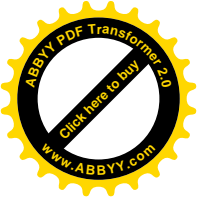
Доказ. Нехай спектр сигналу перебуває в інтервалі $[-P, P]$. Виберемо довільне $M > P$. Тоді

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(w)e^{2\pi iwt} dw = \int_{-M}^M X(w)e^{2\pi iwt} dw.$$

Функцію, задану на кінцевому інтервалі, можна розкласти в ряд Фур'є:

$$X(w) = \sum c_k e^{-2\pi ikw/2M},$$

де



$$c_k = \frac{1}{2M} \int_{-M}^M X(w) e^{2\pi i k w / 2M} dw.$$

Звідси треба, щоб

$$c_k = \frac{1}{2M} x(k / 2M).$$

Тоді

$$x(t) = \sum c_k \int_{-M}^M e^{2\pi w(t-k/2M)i} dw.$$

Поклавши тепер $T_\delta = \frac{1}{2M}$, одержимо

$$x(t) = T_\delta \sum x(kT_\delta) \frac{\sin(2\pi M(t-kT_\delta))}{\pi(t-kT_\delta)}. \quad (1.11)$$

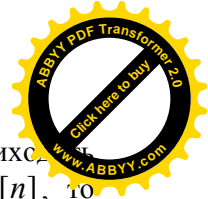
Зауваження. Необхідно мати на увазі, що в (1.10) повинна виконуватися строга нерівність, якщо ми хочемо, щоб твердження залишалось вірним і для сигналів з перетворенням Фур'є у вигляді узагальненої функції. Наприклад, нехай $x(t) = \sin(2\pi t)$, а спектр цього сигналу зосереджений на інтервалі $[-1, 1]$. Покладемо $M = 1$, тоді $T_\delta = 1/2$, але послідовність $x(kT_\delta)$ виявляється нульовою. Тобто безперервний сигнал не вдається відновити за дискретним значенням. Якщо ж $T_\delta < 1/2$, то можна скористатися формулою (1.11).

1.17 Дискретне перетворення Фур'є

З'ясуємо, що властивості дискретного перетворення Фур'є (ДПФ) є аналогічними властивостям безперервного перетворення. Будемо передбачати, що відповідні функції мають необхідні властивості. Пряме ДПФ має вигляд:

$$X(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-2\pi i w n}. \quad (1.12)$$

ДПФ є періодичною функцією. Надалі при викладі властивостей ДПФ будемо припускати, що $T_\delta = 1$. У цьому випадку



Період ДПФ дорівнює 1. Зворотне перетворення вихідних послідовностей здійснюється за допомогою почленним інтегруванням ряду (1.12). Якщо $X(w) \Leftrightarrow x[n]$, то зворотне перетворення задається формулою

$$x[n] = \int_0^1 X(w) e^{2\pi i n w} dw. \quad (1.13)$$

При цьому враховується, що

$$\int_0^1 e^{2\pi i m t} dt = \begin{cases} 0 & \text{для } m \neq 0, \\ 1 & \text{для } m = 0. \end{cases}$$

Згортка. Слід нагадати, що згортка двох послідовностей визначається формулою: $z_n = x_n * y_n$, $z_n = \sum_k x_{n-k} y_k$.

Пропозиція. ДПФ від згортки двох послідовностей рівняється добутку з перетворень Фур'є, а ДПФ від добутку двох послідовностей є згортка їхніх перетворень Фур'є.

Доказ. Знайдемо перетворення від добутку послідовностей. Маємо

$$x[n] \cdot y[n] = \int_0^1 X(u) e^{2\pi i n u} du \int_0^1 Y(v) e^{2\pi i n v} dv = \int_0^1 \int_0^1 Y(v) X(u) e^{2\pi i n(u+v)} dudv.$$

У силу періодичності підінтегральних функцій, одержимо

$$\int_0^1 e^{2\pi i n w} \int_0^1 Y(w-u) X(u) du.$$

Знайдемо ДПФ від згортки. По визначенню:

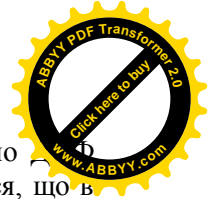
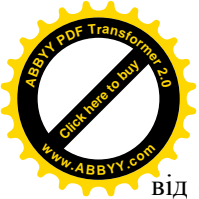
$$X(w) = \sum_n x[n] e^{-2\pi i w n}, \quad Y(w) = \sum_k y[k] e^{-2\pi i w k}.$$

Перемножуючи ці ряди й збираючи коефіцієнти при однакових ступенях, одержимо

$$X(w)Y(w) = \sum_n z[n] e^{-2\pi i w n}.$$

Відзначимо очевидний наслідок дійсності вихідної послідовності:

$$\bar{X}(w) = X(-w). \quad (1.14)$$



Приклад обчислення ДПФ. Раніше було підраховано від одичної послідовності. У реальних умовах вважається, що в негативні моменти часу сигнал відсутній. У цьому зв'язку цікаво знайти ДПФ від дискретного аналога функції η .

Пропозиція.
$$\sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - k) \Leftrightarrow \frac{1}{1 - e^{-2\pi i w}} + \sum \delta(w - k) / 2.$$

Доказ. Покладемо $F_N(w) = \sum_{k=0}^N e^{-2\pi i w k} = \frac{1 - e^{-2\pi i w(N+1)}}{1 - e^{-2\pi i w}}$. Тепер

$$\int \varphi(w) F_N(w) dw \rightarrow \int \varphi(w) \frac{1}{1 - e^{-2\pi i w}} dw + \sum \varphi(k) / 2.$$

Задача 3. Довести, що $\sum x[n] \bar{y}[n] = \int_0^1 X(w) \bar{Y}(w) dw$.

1.18 Лінійні інваріантні системи

Розглянемо послідовності $\{x[n]\}$. Очевидним чином визначаються сума цих послідовностей і їх добуток на число. У результаті зсуву виходить нова послідовність $z[n] = x[n - a]$. Подальша робота з послідовністю, отриманою в результаті дискретизації, полягає в її перетворенні за допомогою різних пристроїв. Показана на рис.9 система T здійснює таке перетворення: $T\{x[n]\} = \{y[n]\}$.

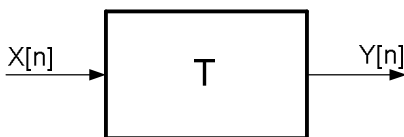
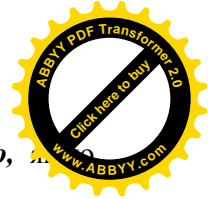
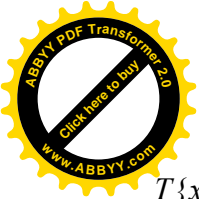


Рис. 9. Система T

Відзначимо, що вихідна послідовність є функцією від всієї вхідної послідовності, тобто кожний член вхідної послідовності залежить, загалом кажучи, від всіх членів вхідної послідовності.



Визначення. Система T називається **інваріантною**, якщо $T\{x[n-a]\} = \{y[n-a]\}$ для кожного a .

Приклади.

1. Точкова система $T(x[n]) = f(x[n])$, де f - довільна функція - інваріантна система.

2. Система $y[n] = \sum_{k=1}^M x[n-k]$ для довільного фіксованого M - інваріантна система.

3. Система $y[n] = n \sum_{k=1}^M x[n-k]$ не є інваріантною. Дійсно,

нехай $z[n] = x[n-a]$. Тоді відповідно до визначення $y'[n] = n \sum_{k=1}^M z[n-k] = n \sum_{k=1}^M x[n-k-a] \neq y[n-a]$.

Визначення. Система називається **лінійною інваріантною** (ЛІС), якщо вона лінійна й інваріантна.

Перетворення в прикладі 2 здійснюється ЛІС.

1.19 Цифрові фільтри

Цифрові фільтри є окремим випадком лінійних інваріантних систем. Істотне обмеження пов'язане з можливістю фізичної реалізації системи.

Визначення. Система називається фізично реалізованою, якщо сигнал на виході в момент часу t залежить від вхідних сигналів у моменти часу менших або рівних t .

Нехай є ЛІС T . Розглянемо зосереджену в одній точці послідовність Δ : $\Delta[0]=1$, $\Delta[t]=0$, $t \neq 0$. Нехай $T\{\Delta\} = \{h[n]\}$, а по визначенню $\Delta_k[t] = \Delta[t-k]$. Для довільної послідовності $\{x[n]\}$ справедливе розкладання $\{x[n]\} = \sum_k x[k]\Delta_k$. У силу лінійності $T\{x[n]\} = \sum_k x[k]T\{\Delta_k\}$, а у силу інваріантності $T\{\Delta_k\} = \{h[n-k]\}$. Остаточно, якщо $\{y[n]\} = T\{x[n]\}$, те

$$y[n] = \sum_k x[k]h[n-k].$$

(1.)

Інакше кажучи, реакція на будь-яку послідовність виходить за допомогою згортки цієї послідовності й послідовності $\{h[n]\}$, яку називають імпульсною реакцією, або функцією відгуку.

Якщо є дві послідовно з'єднані ЛІС, то за рахунок асоціативності операції згортки, функція відгуку виходить як згортка функцій відгуків окремих систем (рис.10).

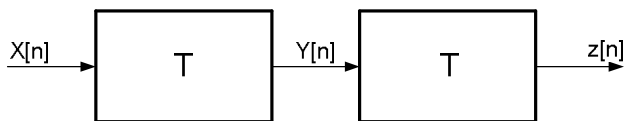


Рис. 10. Послідовно з'єднані ЛІС

Звідси впливає несподіваний висновок про комутативність послідовного з'єднання. При паралельному з'єднанні функція відгуку являє собою суму функцій, що відповідають окремим відгукам.

Загалом кажучи, сума в (1.15) нескінченна. Щоб вона мала сенс, треба ввести додаткові обмеження.

Визначення. Система (1.15) називається *стійкою*, якщо вона переводить будь-яку необмежену послідовність в обмежену.

Пропозиція. Система стійка, якщо й тільки якщо

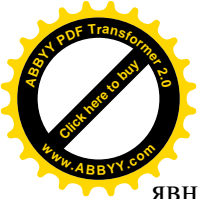
$$\sum_n |h[n]| < \infty. \tag{1.16}$$

Доказ. Достатність умови очевидна. Для доказу необхідності помітимо, що функція відгуку обмежена, оскільки це є реакція на обмежену послідовність.

Візьмемо таку вхідну послідовність $x[n] = \frac{\bar{h}[-n]}{|h[-n]|}$, якщо

$h[n] \neq 0$. Реакція в нулі на цю послідовність має вигляд

$$y[0] = \sum_k x[-k]h[k] = \sum_k |h[k]|.$$



Рекурентні системи. Попередні приклади ЛПС дають явні вираження вихідних сигналів через вхідні. Припустимо тепер, що вхідна послідовність $\{x[n]\}$ має властивість:

$$x[m] = 0, \quad m \leq t_0.$$

Нехай

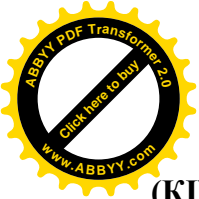
$$y[n] = \sum_{k=1}^M a_k y[n-k] + \sum_{k=L}^N b_k x[n-k], \quad n > t_0$$
$$y[m] = 0, \quad m \leq t_0, \quad (1.17)$$

де M - натуральне, а L, N - будь-які цілі числа. Ця система буде інваріантна, якщо дотримані описані вище обмеження. Мається на увазі, що разом зі зсувом вхідної послідовності зсувається й t_0 . Вона буде лінійною, якщо число t_0 одне й теж для обох вхідних послідовностей. Вона буде фізично реалізованою, якщо $N > L \geq 0$. Послідовність, задана співвідношеннями (1.17) називається рекурентною, або послідовністю з нескінченним часом відгуку. Для такої ЛПС також можна побудувати функцію відгуку. Питання про стійкість у термінах (1.17) буде розглянуто далі.

Фільтри. Нехай є ЛПС із функцією відгуку $\{h[n]\}$, на вхід якої подається $\{x[n]\}$, а на виході виходить послідовність $\{y[n]\}$. Переходячи в (1.15) до перетворень Фур'є, одержимо

$$Y(w) = H(w)X(w). \quad (1.18)$$

Рівняння (1.18) є основним у теорії фільтрації. Функція $H(w)$ називається передатною функцією фільтра. Якщо вибірка велася із частотою $1/T_0$, то $H(w)$ буде періодичною функцією з періодом $1/T_0$. Якщо послідовність $\{h[n]\}$ - дійсна, то $\bar{H}(w) = H(-w)$. Звідси випливає, що функція $|H(w)|$ є симетричною. У цьому зв'язку цю функцію розглядають лише на інтервалі $[0, \frac{1}{2T_0}]$ й зображують модуль, тому що він визначає коефіцієнт підсилення на кожній із частот.



Фільтри з кінцевою імпульсною характеристикою

(КІХ). Припустимо, що в послідовності $\{h[n]\}$ лише кінцеве число елементів відмінні від нуля. У цьому випадку фільтр називається фільтром з кінцевою імпульсною характеристикою. У цьому випадку

$$y[n] = \sum_{k=M}^L h[k]x[n-k]. \quad (1.19)$$

Переходячи до перетворень Фур'є й з огляду на те, що

$$x[n] \Leftrightarrow X(w) \Rightarrow x[n-k] \Leftrightarrow e^{-2\pi ikw} X(w),$$

одержимо

$$Y(w) = \sum_{k=M}^L h[k]e^{-2\pi ikw} X(w).$$

Інакше кажучи, передатна функція фільтра має вигляд

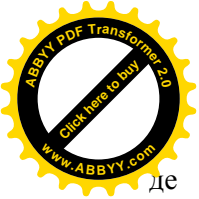
$$H(w) = \sum_{k=L}^M h[k]e^{-2\pi ikw}. \quad (1.20)$$

Фільтри з нескінченною імпульсною характеристикою (НІХ). Фільтром з нескінченною імпульсною характеристикою називається фільтр, обумовлений рекурентним співвідношенням (1.17). Як було відзначено вище, це ЛІС, тому вона може бути задана за допомогою функції відгуку $\{h[n]\}$. Остання буде мати нескінченне число ненульових елементів, та не може бути довільною збіжною послідовністю. Передатну функцію знаходимо, переходячи в (1.17) до перетворень Фур'є

$$Y(w) = \frac{\sum_{k=L}^M b_k e^{-2\pi ikw}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k e^{-2\pi ikw}} X(w). \quad (1.21)$$

НІХ фільтр є лінійною інваріантною системою, а його функцію відгуку можна знайти формальним поданням $H(w)$ у вигляді ряду:

$$U(1 + V + V^2 + V^3 + \dots),$$



де

$$U = \sum_{k=L}^M b_k e^{-2\pi i k w}, \quad V = \sum_{k=1}^N a_k e^{-2\pi i k w}$$

з наступним

підсумовуванням коефіцієнтів при однакових ступенях $e^{-2\pi i w}$.

1.20 Z - перетворення

Іноді замість перетворення Фур'є використовують Z - перетворення. Воно визначається формулою

$$X(Z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] Z^{-k}. \quad (1.22)$$

У формулі (1.22) ряд є формальним, якщо ж він сходиться, то визначає аналітичну функцію. Для Z - перетворення справедливі аналоги властивостей, доведених для перетворення Фур'є. Це ж ставиться й до передатної функції фільтра. У випадку фільтра з нескінченним часом відгуку

$$Y(z) = \frac{\sum_{k=L}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} X(z). \quad (1.23)$$

Формула (1.23) зручна в тому випадку, коли змінна Z може приймати будь-які значення на комплексній площині. Ще раз повертаємо увагу на те, що у формулі (1.23) передбачається, що ряд для X(z) має лише кінцеве число ненульових коефіцієнтів при позитивних ступенях. У цьому випадку ми можемо в явній формі одержати члени вихідної послідовності.

Приклад. Нехай $y[n] = y[n-1] + x[n]$, $x[n] = 1, n \geq 0$, $x[n] = 0, n < 0$.

Будемо припускати, що $y[n] = 0, n < 0$. Легко побачити, що рішенням є необмежена послідовність 0, 1, 2, ... З іншого боку, згідно (1.23)

$$Y(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \right)^2.$$

Формально зводячи ряд у квадрат, одержимо той же результат.

Умова стійкості фільтра зводиться до збіжності ряду $H(z)$ при $z = 1$.

Ідеальний фільтр. Під ідеальним фільтром розуміється фільтр, у якого передатна функція має прямокутну форму (рис.11).

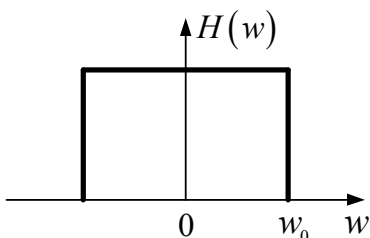


Рис. 11. Передатна функція ідеального фільтра

Покажемо, що такий фільтр не є фізично реалізованим.

Дійсно, якщо $H(w) = \sum_k a_k e^{-2\pi i w k}$, те $a_k = \int_{-w}^{w_0} e^{2\pi i w k} dw$, звідки

впливає, що нескінченне число доданків відмінні від нуля як з негативними, так і з позитивними індексами. Це означає, що в передатній функції присутні доданки, як до моменту виміру, так і після. Якби число складових після моменту виміру було б кінцевим, то справа звалася б лише до часової затримки.

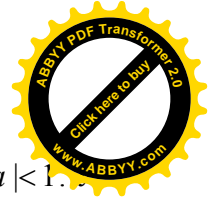
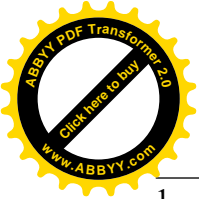
Фільтр першого порядку. Розглянемо фільтр виду

$$y[n] = ay[n-1] + \sum_{k=L}^M b_k x[n-k].$$

Це загальний вид різницевого рівняння фільтра першого порядку. Його передатна функція має вигляд

$$Y(w) = \frac{\sum_{k=L}^M b_k e^{-2\pi i w k}}{1 - a e^{-2\pi i w}} X(w), \quad |w| \leq 1/2. \quad (1.24)$$

Виникає питання щодо стійкості цього фільтра. Переходячи до Z -перетворення бачимо, що все зводиться до збіжності ряду



$\frac{1}{1 - az^{-1}}$ при $z = 1$, що має місце тоді й тільки тоді, коли $|a| < 1$.

найпростішому випадку при $L = M = 0$ передатна функція фільтра приймає вигляд

$$\frac{b_0}{1 - ae^{-2\pi iw}}$$

Залежно від знака a графік модуля описує фільтр низьких або високих частот (рис. 12).

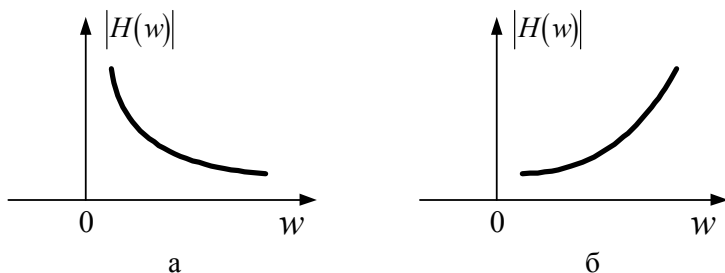


Рис. 12. Модуль передатної функції фільтра першого порядку (а – ФНЧ, б – ФВЧ).

Фільтр другого порядку. Описується різницевою рівнянням

$$y[n] = -a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] + bx[n].$$

Розглянемо тільки дійсний випадок. Переходячи до Z -перетворення, одержимо:

$$Y(z) = \frac{b}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} X(z). \quad (1.25)$$

Знайшовши корені багаточлена в знаменнику, перепишемо (1.25)

$$Y(z) = \frac{b}{(1 - e_1 z^{-1})(1 - e_2 z^{-1})} X(z). \quad (1.26)$$

Це означає, що фільтр другого порядку може бути поданий як послідовне з'єднання двох фільтрів першого порядку. Для його стійкості досить зажадати, щоб всі корені були по модулю менше одиниці. Це означає, що

$$|e| = |-a_1/2 \pm \sqrt{a_1^2/4 - a_2}| < 1.$$

Розглянемо дійсний випадок $a_1^2/4 - a_2 \geq 0$. Це область під параболою (рис.13,а).

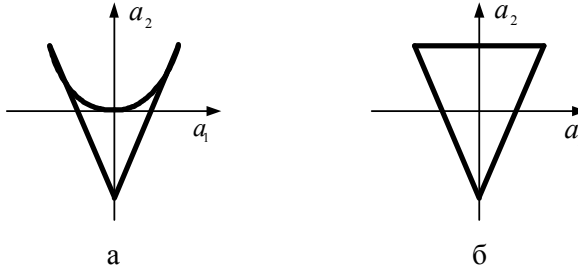


Рис. 13. Области стійкості фільтра другого порядку

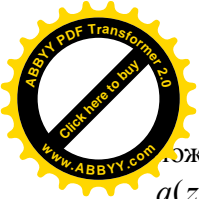
Умова на значення модулю першого кореня має вигляд $-1 + a_1/2 < \sqrt{a_1^2/4 - a_2} < 1 + a_1/2$. Зводячи другу нерівність у квадрат, одержимо $1 + a_1 + a_2 > 0$. Для виконання першої з нерівностей досить щоб $a_1 < 2$. Аналогічний розгляд умови на другий корінь дає $1 - a_1 + a_2 > 0$. Остаточню область має форму, яка показана на рис.13,а. Для комплексних коренів $a_1^2/4 - a_2 < 0$. Крім того, квадрат модуля кореня дорівнює a_2 , звідки випливає, що $a_2 < 1$. Поєднуючи обидві області, одержуємо трикутник стійкості (рис.13,б).

Інакше кажучи, якщо точка з координатами (a_1, a_2) попадає усередину трикутника, тоді фільтр буде стійким.

Фільтри вищих порядків. Припустимо, що передатна функція фільтра має вигляд

$$H(z) = \frac{p(z^{-1})}{q(z^{-1})},$$

де в чисельнику й знаменнику присутні дійсні багаточлени, причому $q(z)$ має ступінь вище двох. У цьому випадку має місце розкладання $q(z) = q_1(z) \cdots q_s(z)$ на незвідні багаточлени першого й другого ступенів з дійсними коефіцієнтами, а сам фільтр



Можна замінити послідовним з'єднанням S фільтрів. Якщо $q(z) = q_1(z)q_2(z)$ й співмножники взаємно прості, то для деяких багаточленів

$$1 = p_2(z)q_1(z) + p_1(z)q_2(z).$$

Звідси випливає, що

$$\frac{p_1(z)}{q_1(z)} + \frac{p_2(z)}{q_2(z)} = \frac{1}{q(z)}.$$

Інакше кажучи, фільтр можна представити як паралельне з'єднання двох фільтрів. Побудувавши базисні фільтри другого й першого порядку, можна з їхньою допомогою реалізувати фільтр будь-якого порядку.

Фільтр Баттерворта. Це один з базисних фільтрів. Фільтр низьких частот має передатну функцію

$$|H(w)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\sin \pi w}{A}\right)^{2M}}, \quad |w| < 1/2. \quad (1.27)$$

Це фільтр порядку M . Залежно від значень A, M міняються характеристики фільтра. Задача полягає у відшуванні дійсних коефіцієнтів фільтра по заданих параметрах. Запишемо різницеве рівняння цього фільтра:

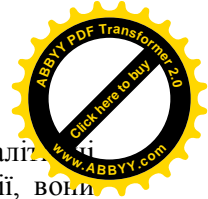
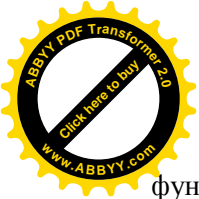
$$y[n] = -a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] - \dots - a_M y[n-M] + bx[n].$$

Тоді передатна функція має вигляд

$$H(z) = \frac{b}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_M z^{-M}}.$$

Покладемо $z = e^{2\pi i w}$. Тоді $z + 1/z = 2 \cos(2\pi w)$ й $1 - (z + 1/z)/2 = 2 \sin^2(\pi w)$. Повинна бути виконана рівність

$$H(z)H(\bar{z}) = H(z)H\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{2 - z - \frac{1}{z}}{4A^2}\right)^M}.$$



У лівій і правій частинах рівняння перебувають аналітичні функції від z . Якщо вони збігаються на якій-небудь лінії, вони рівні всюди, де мають сенс. Знайдемо корені багаточленів від змінної z . Множина коренів є інваріантною щодо заміни $z \rightarrow 1/z$. Для стійкості фільтра потрібно, щоб корені перебували усередині одиничного кола. Для відшукування нулів знаменника в правій частині одержимо рівняння

$$(2 - z - 1/z)^M = -(2A)^{2M},$$

звідки

$$2 - z - 1/z = (2A)^2 e_k, \quad k = 1, \dots, M,$$

де $e_k = \sqrt[M]{-1}$. Кожне із цих рівнянь зводиться до квадратного рівняння. Знайдемо корінь цих рівнянь і виберемо ті з них, які за модулем менше одиниці. Складемо добуток $f(z) = (1 - e_1 z^{-1}) \cdots (1 - e_M z^{-1})$. Проблема може виникнути лише у випадку, коли серед коренів виявиться корінь рівний за модулем 1. Така ситуація не є можливою, тому що в протилежному випадку

$$1 + \left(\frac{\sin \pi w}{2A} \right)^{2M} = 0 \text{ для якогось } w_0.$$

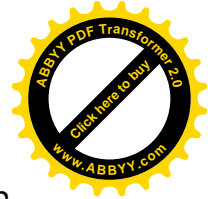
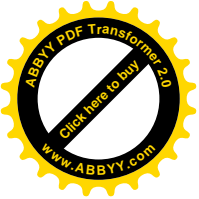
Вправа. Розглянути приклад для $M = 2$. Для пошуку коефіцієнта b досить покласти $z = 1$. Тоді $b = |f(1)|$.

Які зміни відбудуться у випадку $M = 1$?

Фільтр Баттерворта високих частот має передатну функцію виду

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{\cos \pi w}{A} \right)^{2M}}.$$

Вона отримана заміною в (1.27) $w \rightarrow w + 1/2$. З іншого боку, з виразу $1 + a_1 e^{-2i\pi w} + \dots + a_M e^{-2\pi i M w}$ при зазначеній заміні одержимо: $1 - a_1 e^{-2\pi w i} + \dots + (-1)^M a_M e^{-2\pi M w i}$. Це означає, що фільтр високих частот можна одержати з фільтра низьких частот заміною знака в коефіцієнтів з непарними індексами.



Смуговий фільтр. Розглянемо вираження

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{\sin[\pi(w - c)]}{A} \right)^{2M}}, \quad 0 < c < 1/2.$$

Очевидно, що ця функція досягає свого максимуму при $w = c$. Це означає, що передатна функція зображує смуговий фільтр. При заміні у вираженні $1 + a_1 e^{-2i\pi w} + \dots + a_M e^{-2\pi i M w}$ $w \rightarrow w - c$ одержимо фільтр із комплексними коефіцієнтами. Формально це і є рішенням задачі, однак використання комплексного фільтра для фільтрації дійсного сигналу не дуже зручно. Тому використовують вираження виду

$$\frac{1}{1 + \frac{[(\sin \pi w)^2 - (\sin \pi c)^2]^M}{A^{2M}}},$$

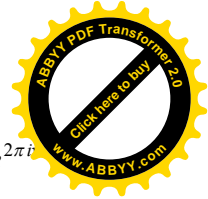
для парного M . Воно знову досягає максимуму при $w = c$. Використовуючи ту ж техніку, що й у попередньому випадку, після заміни $2 - z - 1/z = 2 \sin^2(w\pi)$ задача зводиться до пошуку коренів квадратного рівняння.

При послідовному з'єднанні фільтрів високих і низьких частот їхні передатні функції перемножуються. У результаті одержуємо передатну функцію смугового фільтра. Це найбільш простий спосіб одержання смугового фільтра, але при цьому підвищується розмірність.

Задача. Описати фільтр 4-го порядку, отриманий зазначеним способом із двох фільтрів 2-го порядку.

Тангенціальний фільтр. Для випадку фільтра низьких частот на кінці інтервалу пропущення не досягався 0. Розглянемо функцію

$$|H(w)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\operatorname{tg}(\pi w)}{A} \right)^{2M}}.$$



Така передатна функція має нуль при $w = 1/2$. Якщо $z = e^{2\pi i t}$

$$\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} = itg(\pi w).$$

Використовуючи відомий прийом, одержимо, що

$$H(z)H(z^{-1}) = \frac{Q(z)Q(z^{-1})}{P(z)P(z^{-1})}.$$

Для пошуку коефіцієнтів багаточленів у чисельнику й знаменнику розглядають нулі й полюси передатної функції.

1.21 КІХ фільтри

Смуговий фільтр на основі ФНЧ. Вище було показано, яким чином можна побудувати різні фільтри. Виявляється, кожний з таких фільтрів можна одержати на основі ФНЧ за допомогою універсальної процедури (рис.14).

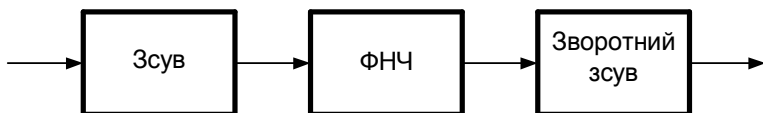
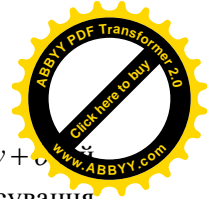


Рис. 14. Універсальна процедура одержання фільтрів

Нехай є сигнал $\{x[n]\}$ з перетворенням Фур'є $X(w)$. Розглянемо нову послідовність $z[n] = x[n]e^{2\pi i n \theta}$. По визначенню $Z(w) = X(w - \theta)$. Якщо необхідно побудувати смуговий фільтр, можна виконати вищевказану процедуру. Зсув здійснюється генератором на основі осцилятора. Зворотний зсув здійснюється так само.

Безпосереднє застосування зазначеного способу не зручно, оскільки доводиться працювати з комплексними числами, і в результаті зворотного зсуву виходить, як правило, комплексний сигнал. Вихід полягає в перетворенні виду $z[n] = x[n] \cos(n\theta)$. У

результаті $Z(w) = \frac{X(w - \theta) + X(w + \theta)}{2}$. Якщо вихідний



Сигнал має обмежений спектр і θ обране так, що носії $X(w + \theta)$ і $X(w - \theta)$ не перетинаються, задача вирішується без застосування комплексних чисел. Наприклад, нехай спектр $X(w)$ перебуває в інтервалі 2 кГц...4 кГц, і потрібно одержати лише частину сигналу в діапазоні 2,5 кГц...3,5 кГц. Вибираємо $\theta = 3$ кГц і використовуємо ФНЧ зі смугою пропускання 0,5 кГц. Після зворотного зсуву необхідно використати ще один ФНЧ зі смугою пропускання 3,5 кГц.

Фільтр як осцилятор. Вище відзначалося, що для зсуву спектра послідовності потрібне джерело, що генерує послідовності виду $\cos(n\theta)$. Звичайний спосіб генерування таких послідовностей не підходить, оскільки виникає проблема підрахунку функції від великого аргументу. Існує альтернативний спосіб генерації, заснований на теорії фільтрів.

Для стійкості фільтра досить, щоб усі корені перебували усередині одиничної окружності. Якщо корені лежать на окружності, фільтр можна використати для генерації сигналів. Розглянемо рівняння

$$y[n + 1] = 2 \cos(\theta)y[n] - y[n - 1]. \quad (1.28)$$

Рівняння $z^2 - 2 \cos(\theta)z + 1 = 0$ має два кореня $e_{1,2} = \cos(\theta) \pm i \sin(\theta)$, тому (1.28) можна записати у вигляді $y[n + 1] = (e_1 + e_2)y[n] - e_1 e_2 y[n - 1]$. З отриманої рівності випливають два рекурентних співвідношення:

$$\begin{aligned} y[n + 1] - e_1 y[n] &= e_2 (y[n] - e_1 y[n - 1]) , \\ y[n + 1] - e_2 y[n] &= e_1 (y[n] - e_2 y[n - 1]) . \end{aligned}$$

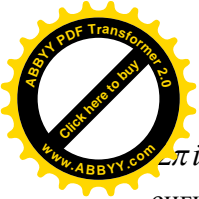
Віднімаючи з першого рівняння друге, одержимо

$$y[n](e_2 - e_1) = e_2^n (y[1] - e_1 y[0]) - e_1^n (y[1] - e_2 y[0]) .$$

Вважаючи $y[0] = 1, y[1] = \cos(\theta)$, одержимо $y[n] = \cos(n\theta)$.

Аналогічно, взявши $y[0] = 0, y[1] = \sin(\theta)$, знайдемо, що $y[n] = \sin(n\theta)$.

Фазовий зсув сигналу в результаті фільтрації. При проектуванні фільтра враховувався лише модуль передатної функції. У загальному випадку $Y(w) = e^{2\pi i u(w)} |H(w)| X(w)$. Тут



$\pi i u(w)$ аргумент передатної функції. Якщо спектр вхідного

сигналу зосереджений у точці w_0 , то в результаті фільтрації, крім зміни інтенсивності, відбувається зсув фільтрованого сигналу на величину $u(w_0)$ стосовно вхідного. При порівнянні вхідного сигналу із зосередженим спектром і результуючого сигналу спостерігається зсув одного сигналу щодо іншого. У загальному випадку спостерігається фазове перекручування сигналу, однак, воно не вловлюється вухом. У той же час, коли важлива фаза сигналу, доводиться використовувати методи компенсації або фільтр із дійсною передатною функцією. Для компенсації фазового перекручування можна використати, наприклад, фільтри виду

$$y[n] = ay[n - 1] + ax[n] - x[n - 1],$$

де a -будь-яке число, $|a| < 1$. Це стійкий фільтр, а його передатна функція має вигляд

$$\frac{a - e^{-2\pi i w}}{1 - ae^{-2\pi i w}}.$$

Модуль цієї передатної функції дорівнює 1, а аргумент міняється разом із частотою.

Розглянемо тепер фільтр, заданий рівністю

$$y[n] = \sum_{k=M}^L b_k x[n - k]. \tag{1.29}$$

Це КІХ фільтр. Після перетворення Фур'є (1.29) одержимо

$$Y(w) = \sum_{k=M}^L b_k e^{-2\pi i w k} X(w).$$

Якщо додатково припустимо, що $M = -L$, $b_k = b_{-k}$, то одержимо **симетричний** фільтр. Для нього передатна функція буде дійсною, і фільтр не вносить фазових перекручувань.

Проектування КІХ фільтрів вікон, що згладжують.

Припустимо, що функція $H(w)$ задана на інтервалі $[-1/2, 1/2]$. Представимо її у вигляді ряду



$$H(w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-2\pi i w k}$$

Для одержання КІХ фільтра з апроксимуючою передатною функцією можна залишити лише кінцеве число доданків у цій сумі. Якщо вибирати максимальні за модулем коефіцієнти, то результуюча передатна функція $\tilde{H}(w)$ буде найкращою апроксимацією в сенсі найменших квадратів при заданому числі доданків. Виявляється, що такий підхід не завжди прийнятний. З'ясуємо, що відбувається при обрізанні ряду. Уведемо функцію $win[k]$ рівну 1 при $-N \leq k \leq N$ та рівну 0 в інших точках. Тоді

$$\tilde{H}(w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} win[k] c_k e^{-2\pi i w k} = Win(w) * H(w).$$

Безпосередньо знаходимо, що

$$Win(w) = \frac{\sin(2\pi w(N + 1/2))}{\sin(\pi w)}$$

Графік цієї функції нагадує δ -функцію, але містить і бічні пелюстки. У результаті згортки з оригіналом при обчисленні

$$\tilde{H}(w_0) = \int_0^1 Win(t) H(w_0 - t) dt$$

беруть участь як значення $H(w_0)$,

так і значення цієї функції в околиці пелюстків функції $Win(w)$.

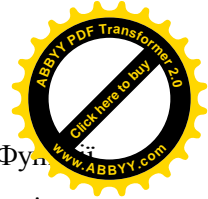
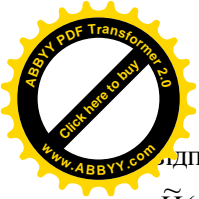
Щоб знизити зазначений ефект замість прямокутних вікон використовують інші вікна: трикутні, Хеммінга, Кайзера, Чебишова, тощо. Ці вікна відрізняються тим, що для їхніх перетворень Фур'є бічні пелюстки виражені менш яскраво.

1.22 Квадратурний дзеркальний фільтр

Розглянемо симетричний фільтр із передатною функцією

$$\tilde{H}(w) = \sum_{k=0}^M a_k \cos(2\pi k w). \quad (1.30)$$

Нехай задана дійсна передатна функція $H(w)$. Покладемо $x = \cos(2\pi w)$. У результаті заміни маємо взаємно однозначну



відповідність між точками інтервалів $[-1, 1]$ і $[-0,5; 0,5]$. Функції

$\tilde{H}(w)$, $H(w)$ перетворюються у функції $\tilde{H}_1(x)$, $H_1(x)$, відповідно.

Відомо, що існує розкладання $\cos(2\pi kw) = \sum_{p=0}^k b_{k,p} [\cos(2\pi pw)]^p$.

У результаті одержуємо задачу апроксимації дійсної функції $H_1(x)$ за допомогою багаточлена $\tilde{H}_1(x)$ ступеня не вище, ніж M . Побудувавши багаточлен, можемо повернутися до подання (1.30) заміною змінних і розкладанням у ряд Фур'є.

Апроксимацію зазначеного виду використовують у випадку, коли критерієм є не середньоквадратичне відхилення, а критерій типу $|H_1(x) - \tilde{H}_1(x)| < A$. У цьому випадку застосовується теорія, аналогічна теорії багаточленів Чебишова з найменшими відхиленнями. Задача вирішується приблизно.

Якщо спектр сигналу перебуває в інтервалі $[-A, A]$, то при переході до дискретного сигналу частота вибірки повинна задовольняти нерівності $T_o < \frac{1}{2A}$.

Наступна схема дозволяє знизити частоту вибірки при передачі по каналу зв'язку, замінивши один канал парою каналів з меншою пропускною здатністю.

Нехай є сигнал $\{x[n]\}$ і його перетворення Фур'є

$$X(w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-2\pi i k w}. \text{ Покладемо } \hat{x}[2n] = x[2n], \hat{x}[2n+1] = 0.$$

Його перетворення Фур'є $\hat{X}(w) = \frac{X(w) + X(w+0,5)}{2}$, або у формі

$$z\text{-перетворення } \hat{X}(z) = \frac{X(z) + X(-z)}{2}. \text{ Розглянемо схему,}$$

зображену на рис. 15.

Вхідний сигнал подається на два фільтри. Стрілки вниз позначають виключення відліків сигналу з непарними номерами (децимацію), а стрілки нагору - включення нульових відліків сигналу між кожними двома прийнятими (інтерполяцію). Після

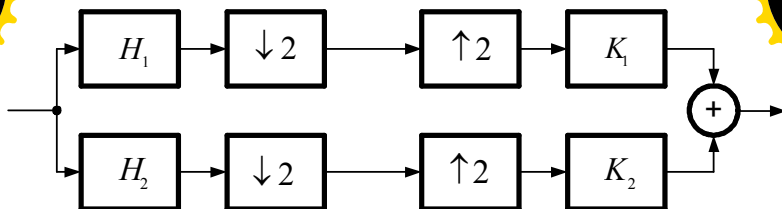
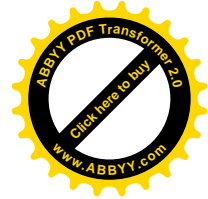
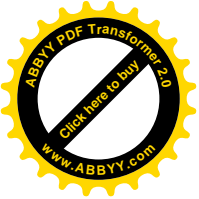


Рис. 15. Квадратурний дзеркальний фільтр

цього отримані сигнали фільтруються двома фільтрами й складаються.

Передатні функції фільтрів будемо позначати тими ж буквами, що й самі фільтри. Розглянемо результат роботи даної схеми. Позначимо через $s[n]$ вихідний сигнал, а через $S[z]$ - його z -перетворення. У термінах z -перетворень сигнал по верхній лінії після проходження через перший фільтр перетворюється в $H_1(z)X(z)$, потім після проходження по каналу й вставки нулів на суматор подається сигнал $K_1(z)[H_1(z)X(z) + H_1(-z)X(-z)]/2$. Аналогічно, розглядаючи проходження сигналу по нижній лінії й підсумовуючи результати, одержимо

$$S(z) = [H_1(z)K_1(z) + H_2(z)K_2(z)]X(z)/2 + [H_1(-z)K_1(z) + H_2(-z)K_2(z)]X(-z)/2.$$

Поки ми не накладали умов на фільтри. Тепер виберемо їх таким чином, щоб другий доданок став нульовим. Для цього покладемо $H_2(z) = H_1(-z)$, $K_1(z) = H_1(z)$, $K_2(z) = -H_1(-z)$. Цих умов досить, щоб другий доданок став нульовим. Тоді $S(z) = [H_1^2(z) - H_1^2(-z)]X(z)/2$.

Поставимо тепер задачу: вибрати $H_1(z)$ таким чином, щоб вираження у квадратних дужках було як можна більш близьким до одиничної функції. Звичайно при цьому задовольняються апроксимацією. Однак, якщо отриманий сигнал відфільтрувати спеціально підібраним фільтром, то в результаті одержимо первісний сигнал. Як приклад розглянемо передатну функцію

$$H_1(z) = a_{-1}z + a_0 + a_1z^{-1}.$$

Тоді

$$H_1^2(z) - H_1^2(-z) = 4a_0(a_{-1}z + a_1z^{-1}).$$



Поставимо на виході системи ще один фільтр, обумовлений формулою

$$a_1 y[n] = -a_{-1} y[n-2] + \frac{1}{4a_0} s[n].$$

Його передатна функція має вигляд

$$\frac{1}{4a_0 (a_1 + a_{-1} z^{-2})}.$$

У результаті вся система має передатну функцію рівну z , що рівносильне зсуву сигналу.

Задача. Застосувати той же підхід до випадку

$$H_1(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}.$$

Зауваження. Зазначений підхід виявляється корисним як альтернативний підхід до стиску сигналу, коли використовується результат передачі тільки по одній лінії.

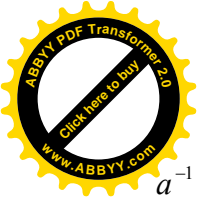
1.23 Вейвлет-перетворення

Вейвлет-перетворення (Wavelet Transform) є альтернативою перетворенню Фур'є в тих випадках, коли сигнал не носить періодичного характеру. Розрізняють безперервне й дискретне вейвлет-перетворення. Передбачається, що всі інтеграли, розглянуті нижче, існують.

Безперервне перетворення. Нехай $f(x)$ й деяка функція $s(x)$ - материнська функція. Розглянемо інтеграл виду

$$F(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \bar{s}\left(\frac{x-b}{a}\right) dx. \quad (1.31)$$

Якщо $s(x) = e^{ix}$, то в результаті одержуємо звичайне перетворення Фур'є (параметр b не використається зі зрозумілої причини). Формула (1.31) визначає загальне вейвлет-перетворення. Існує формула зворотного перетворення, що дозволяє в деяких випадках відновити вихідну функцію по її перетворенню. Однак основний зміст перетворення (1.31) полягає в іншому. Величина



$a^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} |s(\frac{x-b}{a})|^2 dx$ не залежить від параметрів. Це означає, що

вектор, заданий функцією $u(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} s(\frac{x-b}{a})$, має постійну

довжину в сенсі простору L_2 . Припустимо, що вдалося знайти такі значення параметрів, для яких $F(a,b)\sqrt{a}$ досягає локального максимуму. Це означає, що проекція функції $f(x)$ на відповідну функцію $u(a,b)$ має максимальне значення, тому графіки цих функцій аналогічні. Припустивши $g(x) = f(x) - u(a,b,x)$, одержимо розбіжність, для якої вирішується така ж задача. У результаті одержуємо наближення вихідної функції функціями, породженими за допомогою функцій $s(x)$ (альтернативний опис вихідної функції).

Залежно від того, якого роду особливості потрібно виявити, вибирають вид материнської функції. При цифровій обробці, коли вихідна функція задана лише в окремих точках, використовується дискретне перетворення. Виявилось, що й у загальному випадку вдається побудувати теорію, що нагадує теорію перетворення Фур'є.

На практиці, як материнську функцію при зазначеному підході часто використовують функцію $m(t) = a(1-t^2)\exp(-t^2/2)$ (мексиканський капелюх). Константу a визначають із умови нормування.

Масштабування. Розглянемо множину функцій L_2 на дійсній осі. Нехай $s(x) \in L_2$, причому функції $s(x-k)$, $k \in Z$ утворюють ортонормовану систему. Це означає, що

$$\int s(x-k)\bar{s}(x-m)dx = \delta_{k,m} . \tag{1.32}$$

Таку функцію називають масштабованою. Наприклад, будь-яка функція, що має носій усередині одиничного інтервалу й норму рівну 1, задовольняє умові (1.32). Позначимо через

$$S(w) = \int s(x)e^{-2\pi iwx} dx .$$

Пропозиція. Існує рівність



$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |S(u-k)|^2 = 1.$$

(1.32)

Навпаки, з (1.33) можна одержати (1.32).

Доказ. Маємо

$$S_k(w) = \int s(x-k)e^{-2\pi iwx} dx = e^{-2\pi ikw} S(w).$$

Оскільки перетворення Фур'є є ортогональним перетворенням,

$$\int s(x-m)\bar{s}(x-k)dx = \int S(w)\bar{S}(w)e^{2\pi iw(k-m)} dw.$$

З урахуванням (1.32) це означає, що

$$\int |S(w)|^2 e^{2\pi iwm} dw = \delta_{0,1}.$$

Далі, нехай $G(u) = \int s(x)\bar{s}(x-u)dx$. Перетворення Фур'є цієї функції є $|S(w)|^2$. Тоді

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi ikw} \int s(x)\bar{s}(x+k)dx = 1,$$

тому що інші доданки дорівнюють нулю в силу (1.32).

Замінімо суму інтегралом і продовжимо рівність

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi iwu} du \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(u-k)G(u).$$

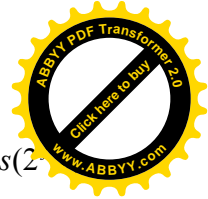
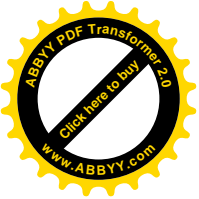
Замінімо перетворення Фур'є від добутку згорткою їхніх образів. Перетворення від першого співмножника є він сам. Таким чином,

$$\int du \sum \delta(u-k) |S(w-u)|^2 = \sum |S(w-k)|^2.$$

Зворотне твердження доводиться переписуванням формул у зворотному порядку.

Важливим прикладом материнської функції є функція, рівна 1 на інтервалі $[0, 1]$ й 0 в інших точках. Таку функцію позначимо через $e(x)$.

Задача. Знайти явний вид формули (1.32) для функції $e(x)$.



Вейвлет фільтрація. Уведемо позначення: $s_j(x) = 2^j s(2^{-j}x)$

для будь-якої функції $s(x)$. Покладемо $D_j = \sqrt{2^{-j}}$.

Пропозиція. Якщо виконано умову ортогональності, то при фіксованому j функції $v_{n,j}(x) = D_j s_j(x - 2^{-j}n)$, $j, n \in Z$ утворюють ортонормовану систему.

Доказ. Маємо

$$\int s(2^j(x - 2^{-j}n))\bar{s}(2^j(x - 2^{-j}m))dx = \int s(2^j x - n)\bar{s}(2^j x - m)dx = 0,$$

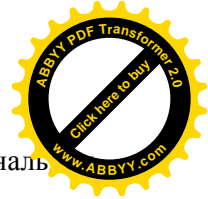
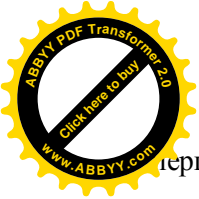
при $m \neq n$.

Нормованість перевіряється очевидним чином, за допомогою заміни змінних.

Позначимо через V_j лінійний простір, породжений функціями $v_{n,j}(x)$, $n \in Z$. Зажадаємо, щоб мало місце включення $V_j \subset V_{j+1}$, $j \in Z$. Це досить тверде обмеження. Воно виконано, наприклад, для $s(x) = e(x)$. Для довільної функції $f(x) \in L_2$ покладемо

$$A_j(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_{n,j}(x) \langle f, v_{n,j} \rangle \quad (1.34)$$

- проекція функції на простір V_j . Коефіцієнти розкладання це і є дискретні вейвлет-перетворення. Чим більше індекс простору, тим точніше наближення вихідної функції за допомогою $A_j(f)$ одержуємо. Ця процедура називається **деталізацією**. Накладемо на $s(x)$ ще одну додаткову умову: зажадаємо, щоб $\bigcup V_j = L_2$. Останнє означає, що кожну функцію з L_2 можна наблизити з довільною точністю підходящою функцією з V_j . Помітимо, що це виконано для функції $e(x)$, оскільки кожну функцію з L_2 можна наблизити східчастою функцією. Як наслідок одержимо, що це вірно й для довільної функції з носієм на інтервалі $[0, 1]$, за допомогою якої можна наблизити функцію $e(x)$. Покладемо $V_{j+1} = V_j + O_{j+1}$, де другий доданок є ортогональне доповнення до



першого. Тепер $L_2 = \sum O_j$ - пряма сума попарно ортогональних просторів. Для $e(x)$ так виходить базис Хаара.

Обчислення коефіцієнтів розкладання є трудомісткою задачею. Покажемо, яким образом вона може бути спрощена за допомогою фільтра спеціального виду. У силу зробленого припущення $v_{n,j} \in V_{j+1}$, має місце розкладання

$$v_{n,j} = \sum v_{k,j+1} \langle v_{n,j}, v_{k,j+1} \rangle.$$

Розглянемо скалярний добуток

$$\begin{aligned} \langle v_{n,j}, v_{k,j+1} \rangle &= D_j D_{j+1} 2^j 2^{j+1} \int s(2^j x - n) \bar{s}(2^{j+1} x - k) dx = \\ &= \sqrt{2}^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} s(x/2 - n) \bar{s}(x - k) dx = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} 2^{-1} s(2^{-1}(x - 2n)) \bar{s}(x - k) dx = \\ &= \langle v_{0,-1}, v_{k-2n,0} \rangle. \end{aligned}$$

Коефіцієнти в (1.34) можна знайти в такий спосіб. Покладемо $h(n) = \langle v_{0,-1}, v_{n,0} \rangle$. Тоді

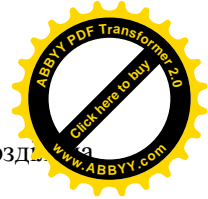
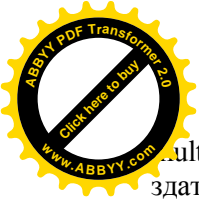
$$\langle f, v_{n,j} \rangle = \sum \langle f, v_{k,j+1} \rangle \langle v_{n,j}, v_{k,j+1} \rangle = \sum_k \langle f, v_{k,j+1} \rangle h(k - 2n). \quad (1.35)$$

Формула (1.35) являє собою згортку послідовностей. Вона дозволяє знайти коефіцієнти розкладання для менших значень індексів j , якщо відомі коефіцієнти розкладання для більших значень. Її можна розглядати як застосування фільтра спеціального виду з функцією відгуку $h(-k)$ до джерела, яким є коефіцієнти розкладання по більшому індексу.

Мультироздільна здатність. Нехай справедливо додаткове припущення: $\bigcup_j V_j = L_2$. Із включення $V_j \subset V_{j+1}$ випливає

подання $V_{j+1} = V_j \oplus O_j$, де O_j - ортогональне доповнення простору V_j до простору V_{j+1} . При зроблених припущеннях простір $L_2 = \bigoplus_j O_j$, і будь-яка функція $f(x) = \sum_j f_j(x)$, де

$f_j(x) \in O_j$. Останнє розкладання інтерпретується як подання функції з наростаючим ступенем деталізації, що і одержало назву



...multiresolution – мультироздільна здатність, тобто змінна роздільна здатність.

Якщо як материнська функція обрана функція $e(x)$, базис простору O_j становлять функції, отримані зсувом: $\varphi(x) = e(2^{j+1}x) - e(2^jx - 1)$.

1.24 Швидкі алгоритми дискретного перетворення Фур'є

Починаючи із цього моменту подальший виклад орієнтується на комп'ютерну обробку сигналу. Основна відмінність складається у відсутності поняття безперервності, на якому базувався попередній матеріал.

У результаті переходу від безперервного сигналу до дискретного виникає перекручування. Реальний сигнал $y[n] = x[n] + e[n]$. Тут перший доданок - дискретний сигнал, а другий - помилка. Нехай Δ - довжина інтервалу між сусідніми дискретними значеннями. Припустимо, що для подання сигналу використовуються B біт, а весь інтервал можливих значень вхідного сигналу це $[-X_M, X_M]$. Тоді має місце рівність $\Delta = \frac{2X_M}{2^B}$. У

процесі дискретизації замість самого сигналу береться найближче можливе дискретне значення. У силу цього, $-\Delta/2 < e[n] \leq \Delta/2$.

Відповідно до найпростішої моделі $e[n]$ має рівномірний розподіл на інтервалі зміни, тому дисперсія $\sigma^2 = \Delta^2/12$. Якість процедури

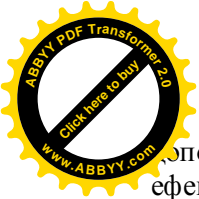
дискретизації визначається величиною $Q = \frac{S^2}{\sigma^2}$, де в чисельнику

присутня дисперсія вихідного сигналу. Заміняючи $S = X_M/4$,

одержимо $Q = \frac{X_M^2 12}{16 \Delta^2} = \frac{12 * 2^{2B}}{16 * 4} = \frac{3 * 2^{2B}}{16}$. На практиці

використається величина $10 \lg Q$ й виходить результат у децибелах. Тоді $20B \lg(2) - 10 \lg(16/3) \approx 6B - 7,2$ дБ.

При комп'ютерній обробці замість інтеграла Фур'є доводиться користуватися його наближенням, підрахованим за



з допомогою кінцевої суми. У результаті виникають додаткові ефекти, а теорія дискретного перетворення Фур'є стає самостійною дисципліною.

Розглянемо N – мірний простір послідовностей довжини N . Кожний елемент цього простору має вигляд $(f(0), f(1), \dots, f(N-1))$, де $f(x)$ – деяка функція, що приймає комплексні значення. У цьому просторі розглянемо набір векторів, складений з послідовностей χ_k , побудованих по функціях $e^{2\pi i k x / N}$, $k = 0, 1, \dots, N-1$. У просторі визначений скалярний добуток:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) \bar{g}(k).$$

Має місце рівність $\langle \chi_m, \chi_n \rangle = \delta_{m,n} N$. Це означає, що послідовності χ_k становлять базис простору. При цьому для довільної функції $f(x)$ $(f(0), f(1), \dots, f(N-1)) = \sum a_k \chi_k$, де $a_k = \langle f, \chi_k \rangle / N$. Ці дві формули звичайно записують у вигляді

$$f(x) = \sum a_k e^{2\pi i k x / N}, \quad a_k = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-2\pi i k x / N} \quad (1.36)$$

і називають дискретним перетворенням Фур'є. З останньої формули випливає, що a_k є аналог значення перетворення Фур'є вихідної функції, обчисленої в точці k / N .

Зв'язок ряду Фур'є й дискретного перетворення Фур'є. Нехай періодична на інтервалі $[0, 1]$ функція задана формулою

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{2\pi i k x}. \quad \text{Виберемо } N \text{ й знайдемо дискретне}$$

перетворення, використовуючи значення функції в точках m / N .

Легко побачити, що $\sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i k(m-p) / N}$ дорівнює N , якщо $N / (p - m)$

й 0 у протилежному випадку. Звідси треба, щоб коефіцієнт a_k у формулі (1.36), знайдений по послідовності $f(m / N)$, $m = 0, \dots, N-1$,



дорівнював $\sum_{p=-\infty}^{\infty} f_{k+pN}$. Цей ефект називають ефектом підміни

частот, оскільки разом з очікуваною частотою в цей коефіцієнт вносять вклад й інші частоти.

Перетворення дійсних послідовностей.

Якщо вихідна послідовність дійсна, то в дискретному перетворенні Фур'є присутня надмірність, тому що з N дійсних чисел виходить $2N$ дійсних чисел. З визначення треба, щоб

$$\bar{a}_k = \frac{1}{N} \sum f(x) e^{2\pi i k x / N} = \frac{1}{N} \sum f(x) e^{2\pi i (k-N)x / N} = a_{N-k}.$$

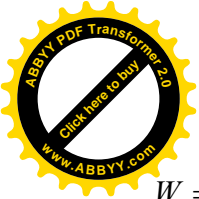
У цьому зв'язку розглядають тільки коефіцієнти a_k , $k = 0, 1, \dots, [N/2]$ (ціла частина $N/2$).

Як приклад розглянемо функцію $f(x) = \sin(2\pi kx)$. У неї два звичайних коефіцієнти: $f_k = 1/2i$, $f_{-k} = -1/2i$. З огляду на ефект підміни, одержимо, що дискретні коефіцієнти це $a_k = f_k$, $a_{N-k} = f_{-k}$. Відповідно до прийнятої угоди, буде знайдений коефіцієнт із найменшим індексом. Для того, щоб за допомогою дискретного перетворення знайти справжню частоту k треба вибирати $N > 2k$. Оскільки значення справжніх частот заздалегідь не відомі, сигнал потрібно пропустити через фільтр низьких частот, залишивши лише частоти з потрібного діапазону.

Алгоритми ДПФ. Звичайні формули для обчислення ДПФ вимагають великої кількості множень: $(N-1)^2$, де N - число точок у ДПФ. Існують прийоми, що дозволяють зменшити цю кількість. Вони називаються швидкими ДПФ (ШПФ). Найпростіший алгоритм ставиться до випадку $N = 2^n$.

Випадок $N = 2^n$. Будь-яке число в інтервалі $[0, N-1]$ однозначно представляється двійковим вектором довжини n : $m = m_0 + 2m_1 + \dots + 2^{n-1}m_{n-1}$. Якщо послідовність $a(0), a(1), \dots, a(N-1)$ задана, то покладемо

$$c(k) = \sum_{m=0}^{N-1} a(m) e^{-2\pi i k m / N}.$$



Надалі, щоб спростити виклад, уведемо позначення $W = e^{-2\pi i/N}$, звідки $W^N = 1$. Маємо

$$c(k) = \sum a(m_{n-1}, m_{n-2}, \dots, m_0) W^{k(m_0 + 2m_1 + \dots + 2^{n-1}m_{n-1})}$$

Основне зауваження полягає в наступному: підсумовування по індексу m рівносильне підсумовуванню по всіх двійкових індексах m_j . Тому

$$c(k) = \sum_{m_0} W^{km_0} \sum_{m_1} W^{k2m_1} \dots \sum_{m_{n-1}} a(m_{n-1}, m_{n-2}, \dots, m_0) W^{k2^{n-1}m_{n-1}}$$

кожний з яких приймає два значення.

Для числа k існує аналогічне двійкове подання: $k = k_0 + 2k_1 + \dots + 2^{n-1}k_{n-1}$. Розглянемо саму внутрішню

суму: $\sum_{m_{n-1}=0}^1 a(m_{n-1}, m_{n-2}, \dots, m_0) W^{k2^{n-1}m_{n-1}}$. Неважко бачити, що це

деяка функція $F_1(m_{n-2}, \dots, m_0, k_0)$. Наступна сума приймає вид

$$\sum_{m_{n-2}=0}^1 F_1(m_{n-2}, \dots, m_0, k_0) W^{k2^{n-2}m_{n-2}} = F_2(m_{n-3}, \dots, m_0, k_1, k_0).$$

Цей процес триває. Остаточню маємо $c(k) = F_n(k_{n-1}, k_{n-2}, \dots, k_0)$.

Кількість сум рівняється $n = \log_2 N$, у кожній з яких лише одне множення. Для обчислення всіх коефіцієнтів потрібно $N \log_2 N$ множень. Інша перевага цієї схеми - ошадлива витрата оперативної пам'яті.

Випадок $N = N_1 N_2$ із взаємно простими співмножниками.

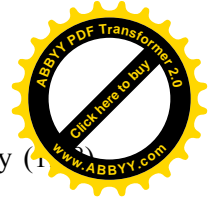
Розглянемо інший крайній випадок, коли $N = N_1 N_2$ й $(N_1, N_2) = 1$. У цьому випадку існують цілі n_2, n_1 , для яких $n_2 N_1 + n_1 N_2 = 1$. Звідси треба, щоб

$$n_2 N_1 + n_1 N_2 \equiv 1 \pmod{N} . \tag{1.37}$$

При цьому можна вважати виконаними нерівності

$$0 \leq n_1 < N_1, \quad 0 \leq n_2 < N_2 . \tag{1.38}$$

Якщо така нерівність для n_1 , наприклад, не має місця, можна розділити на N_1 . Для будь-якого цілого $k, 0 \leq k < N$ з (1.37)



випливає $k_2 N_1 + k_1 N_2 \equiv k \pmod{N}$. При обмеженнях типу (1) k_1, k_2 знаходяться однозначно. Маємо

$$c(k) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} a(x) W^{kx} = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} a(x) W^{(k_2 N_1 + k_1 N_2)x}$$

Числа $n_2 N_1, n_1 N_2$ - взаємно прості. Отже маємо для будь-якого цілого x , $0 \leq x < N$: $x_2 n_2 N_1 + x_1 n_1 N_2 \equiv x \pmod{N}$. Тепер $W^{kx} = W^{(x_2 n_2 N_1 + x_1 n_1 N_2)(k_2 N_1 + k_1 N_2)}$. Розкриваючи дужки й відкидаючи члени кратні N , одержимо показник виду $k_2 x_2 n_2 N_1^2 + k_1 x_1 n_1 N_2^2$.

З рівності $n_2 N_1 + n_1 N_2 = 1$ треба, щоб $n_2 N_1^2 \equiv N_1 \pmod{N}$, тому весь показник зрівняємо с $k_2 x_2 N_1 + k_1 x_1 N_2$. Це означає, що $W^{kx} = W^{k_2 x_2 N_1} W^{k_1 x_1 N_2}$. Уводзячи позначення $W_1 = e^{-2\pi i / N_1}$, $W_2 = e^{-2\pi i / N_2}$,

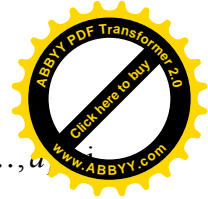
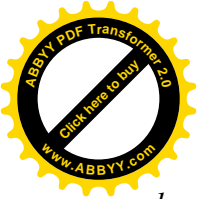
остаточно одержимо
$$\frac{1}{N} \sum a(x) W^{kx} = \frac{1}{N_1} \sum_{x_1} W_1^{k_1 x_1} \frac{1}{N_2} \sum_{x_2} W_2^{k_2 x_2} a(x_1, x_2).$$

Це означає, що перетворення Фур'є для N точок звелось до послідовного виконання перетворення Фур'є по N_2 точках, а потім - по N_1 точках результатів попереднього перетворення. При цьому буде потрібно не більш, ніж $(N_1 - 1)^2 (N_2 - 1)^2$ множень. У порівнянні з $(N_1 N_2 - 1)^2$ вираш невеликий. Якщо ж для якого-небудь із проміжних випадків є своя швидка схема, вираш може вийти значним.

1.25 Згортка послідовностей та її обчислення

Зсув послідовності. Нехай є послідовність a_0, \dots, a_{N-1} . Можна перетворити її в нескінченну послідовність, поклавши $a_{k+N} = a_k$. Виберемо ціле p й визначимо $b_k = a_{k+p}$. Знайдемо зв'язок між перетвореннями Фур'є цих послідовностей. Маємо

$$B_k = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} b_x W^{kx} = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} a_{p+x} W^{kx} = W^{-kp} A_k \quad (1.39)$$



Циклічна згортка. Нехай a_0, \dots, a_{N-1} є послідовності

b_0, \dots, b_{N-1} . Визначимо їхню згортку

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} a_{k-i} b_i . \quad (1.40)$$

Операція згортки є комутативною і, крім того, послідовність, описувана формулою (1.40), автоматично буде періодичною з періодом N . Це і є циклічна згортка вихідних послідовностей. Підрахуємо кінцеве перетворення Фур'є.

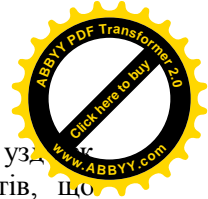
$$C_k = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} c_x W^{kx} = \frac{1}{N^2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{x=0}^{N-1} a_{x-i} b_i W^{kx} = \frac{1}{N^2} \sum_{i=0}^{N-1} b_i W^{ki} \sum_{x=0}^{N-1} a_{x-i} W^{(k-i)x} = A_k B_k . \quad (1.41)$$

Таким чином, перетворення Фур'є від згортки дорівнює добутку перетворень Фур'є від співмножників.

1.26 Використання вікон

Практично використовуються послідовності великої довжини, а дискретне перетворення Фур'є застосовується лише до окремих частин. У цьому випадку ця окрема частина трактується як періодична послідовність, що приводить до перекручування результатів. Наприклад, вихідна послідовність має вигляд 1,2,3,... Нехай $N = 4$. Вибравши перші чотири члени, одержимо послідовність 1,2,3,4,1,2,3,... .У цій послідовності є стрибок при переході від 4 до 1, чого немає у вихідній послідовності. Для того, щоб послабити зазначений ефект, використовують вікна, що згладжують, які перетворюють кінцеву послідовність у періодичну без стрибків на кінцях. Нехай $w(k)$, $k = 1, \dots, N - 1$ - послідовність, для якої $w(0) = w(N - 1) = 0$, тоді в послідовності $b_k = w(k)a_k$ не виникає стрибка через періодичне продовження. Цю послідовність називають вікном, що згладжує. Згідно (1.41), $B_k = W_k A_k$. Звичайно як вікна використовують ті ж вікна, про які йшла мова вище.

Короткочасне перетворення Фур'є. Нехай a_k , $k = 0, 1, \dots$ великої довжини. Потрібно вивчити її спектр за допомогою ДПФ. Це означає, що насправді буде досліджена лише частина послідовності довжини N . Вибирають

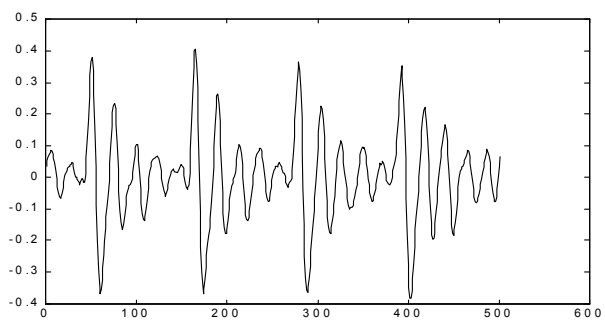


вікно відповідної довжини, після чого, пересуваючи вікно уздовж послідовності, одержують набір спектральних коефіцієнтів, що залежать від положення вікна. Це і є короточасний спектр. У цьому змісті процедура нагадує вейвлет-перетворення. Вибір довжини вікна є компромісом між точністю й роздільною здатністю. Чим довше вікно, тим більше коефіцієнтів буде знайдено, але при цьому будуть отримані усереднені по довжині вікна характеристики.

1.27 Автокореляція та її обчислення

Нехай задана нескінченна послідовність $x[n]$. По ній будується автокореляційна функція $r(t) = \sum x[k]\bar{x}[t+k]$. Ця функція грає величезне значення в обробці сигналів. Основне призначення - відшукування максимумів функції $r(t)$, які інтерпретуються як аналоги періодів. З нерівності Коші випливає, що $|r(t)| \leq r(0)$. У точках максимуму $r(t_j)$, $t_j \neq 0$ зрушена на t_j послідовність "схожа" на вихідну. Як приклад розглянемо фрагмент звукового файлу із записом звуку "а" (рис.1).

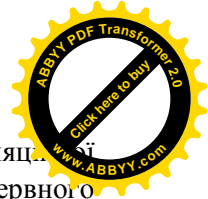
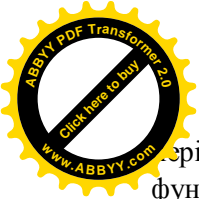
Амплітуда



Час

Рис. 16. Фрагмент запису звуку "а".

Цей сигнал не є періодичним у математичному змісті слова, однак, візуально така періодичність проглядається. Значення



Періоду перебувають по максимумам відповідної автокореляційної функції. Знайдемо перетворення Фур'є від $r(t)$. Для безперервного випадку ця задача розглядалася вище. Покладемо $y[n] = \bar{x}[-n]$. Тепер $r(t) = \sum x[n]y[-t-n] = c(-t)$, де $c(t)$ - згортка послідовностей. Перетворення Фур'є

$$R(w) = \sum r(t)e^{-2\pi i w t} = C(-w) = X(-w)Y(-w).$$

З іншого боку,

$$Y(w) = \sum \bar{x}[-n]e^{-2\pi i w n} = \bar{X}(-w).$$

Це означає, що $R(w) = |X(-w)|^2$. Якщо вихідна послідовність дійсна, то $|X(w)| = |X(-w)|$ і

$$R(w) = |X(w)|^2. \quad (1.42)$$

Випадок кінцевої послідовності. При практичному використанні автокореляційної функції звичайно мають справу з кінцевими послідовностями. Нехай дана послідовність a_0, \dots, a_{N-1} .

Визначимо функцію $r_c(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} a_k \bar{a}_{k+t}$ (як звичайно, послідовність вважається періодичною). Повторюючи попередні міркування, одержимо для кінцевого перетворення Фур'є в дійсному випадку аналог (1.42)

$$R_c(k) = |A(k)|^2. \quad (1.43)$$

Якщо для заданого N існує алгоритм ШПФ, то вигідніше для відшукування значень $r_c(t)$ спочатку знайти перетворення Фур'є від вихідної послідовності, а потім скористатися (1.43) для відшукування значень функції.

У випадку кінцевих послідовностей має місце циклічна згортка. Для того, щоб позбутися ефекту циклічності, використовується наступний прийом. Замість вихідної послідовності довжини N береться послідовність $(b) = a_0, \dots, a_{N-1}, 0, \dots, 0$ довжини $2N$. Якщо використовуються значення $r_c(t)$, $t = 0, \dots, N-1$, то при їхньому обчисленні ефект циклічності не має місця.

Практичне оцінювання частот. У попередніх розглядах враховувалася частота вибірки T_0 з вихідного безперервного сигналу. Маємо

$$A(m) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(kT_0) e^{-2\pi i k T_0 m / (NT_0)}.$$

Розглядаючи це вираження як наближення відповідного інтеграла, одержимо, що даний коефіцієнт відповідає частоті $\frac{m}{NT_0}$.

При виборі значення N варто враховувати наступну обставину - збільшення N підвищує роздільну здатність, але при цьому відбувається усереднення по довжині вікна. Якщо для оцінки періоду використана автокореляційна функція, то максимуму цієї функції в точці m відповідає частота $\frac{1}{mT_0}$.

Застосування автокореляційної функції. Як приклад укажемо застосування автокореляційної функції для обчислення частоти основного тону мовного сигналу. У цей час немає математичного визначення цієї частоти. На рис.16 наведений приклад виду сигналу, що відповідає проголошенню звуку "а". На рисунку проглядається періодичний характер коливань. Фактичне значення знайденої частоти залежить від способу оцінки. Найпростіший спосіб - підрахунок за допомогою перетворення Фур'є. Це показано на рис.17.

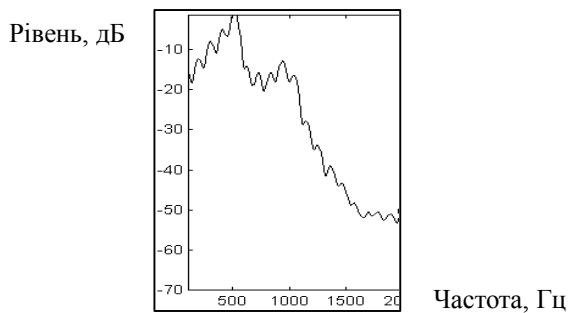


Рис. 17. Частота основного тону звуку "а"



Основному тону відповідає частота, для якої досягає максимум. Цей спосіб не дуже підходить, якщо поблизу максимуму графік є пологим.

Розглянемо інші підходи.

Амплітудне обмеження. Вибирається поріг, і вихідний сигнал замінюється послідовністю нулів і одиниць: у точках, де сигнал перевищує поріг, ставиться 1, в інших точках - 0. Виходить сигнал, який показаний на рис.18.

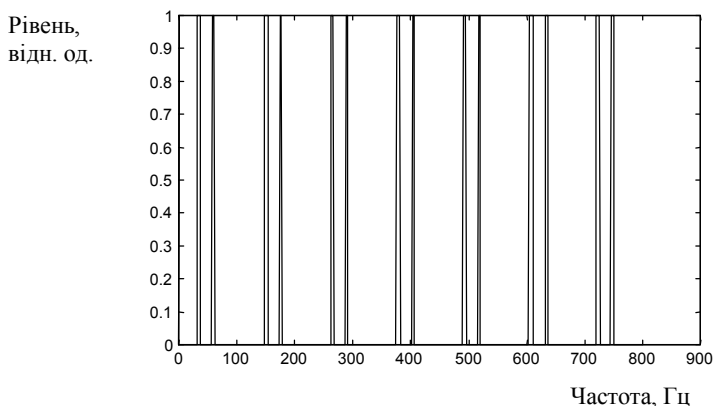
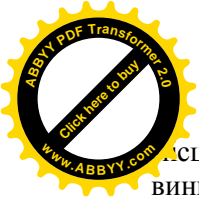


Рис. 18. Приклад амплітудного обмеження

Після цього шукають максимуми для автокореляційної функції сигналу. При цьому можна не прибігати до алгоритмів ШПФ, оскільки в цьому випадку все зводиться лише до операцій додавання.

Перетинання з нулем. Розглянемо графік функції $\sin(2\pi kt)$. Значення k можна оцінити по формулі $2T/p$, де T - довжина інтервалу, а p - кількість переходів через 0. Цей спосіб застосовують до мовного сигналу. Для того, щоб виключити з розгляду дрібні коливання в околиці 0, сигнал пропускають через фільтр низьких частот.

Застосування крос-кореляційної функції. Нехай є вхідна послідовність $x[n]$ великої довжини й зразок $y[m]$ значно меншої довжини M . Потрібно з'ясувати, чи є присутнім зразок у вхідній послідовності, і якщо є присутнім, визначити його



визнаходження. Фактично вейвлет-перетворення спочатку виникло як узагальнення цієї задачі. Очевидно, що при наявності перекручувань, задача не має точного рішення. Можна говорити лише про близькість у деякому сенсі відрізка вхідної послідовності й зразка. У дійсному випадку як міру близькості часто використовують функцію

$$r(t) = \sum_{k=0}^{M-1} x[t+k]y[k]$$

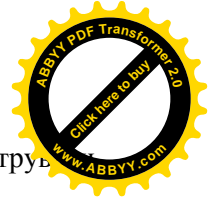
й шукають значення аргументу, для яких ця функція має локальний максимум. Після цього, відповідні відрізки вхідної послідовності піддаються додатковому дослідженню. Головна мета - указати методи, за допомогою яких здійснюється підрахунок значень $r(t)$, оскільки безпосередні обчислення вимагають значних ресурсів.

Процесор малої потужності. Припустимо, що процесор швидко робить лише операції додавання й вирахування із цілими числами. Для підрахунку добутку використовується наступний прийом. Маємо $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$. У пам'яті зберігаються значення квадратів можливих значень, а ділення на 4 у двійковому коді зводиться до логічного зрушення на дві позиції.

Використання ШПФ. Навіть при наявності потужного процесора безпосередній підрахунок всіх потрібних значень $r(t)$ є трудомісткою задачею. Для зменшення числа множень використовується наступний підхід. Зразок замінюється послідовністю $Y = (y[0], \dots, y[M-1], 0, \dots, 0)$ довжини $2M$. Із вхідної послідовності утворюють послідовності довжини $2M$ $X_k = (x[p], x[p+1], \dots, x[p+M-1], 0, \dots, 0)$, $p = kM$, $k = 0, 1, \dots$. Після цього підраховується циклічна згортка

$$c_k(t) = \frac{1}{2M} \sum_{l=0}^{2M-1} X_k(t+l)Y(l).$$

Для відшукування значень згортки використовується ШПФ. Для цього число $2M$ повинне мати відповідні арифметичні властивості. Покажемо, як за знайденим значенням $c_k(t)$



підраховуються значення $r(t)$. Це найпростіше продемонструвати на прикладі $M = 3$. Маємо

$$c_0(0) = \frac{1}{6} [X(0)Y(0) + X(1)Y(1) + X(2)Y(2)],$$

$$c_0(1) = \frac{1}{6} [X(1)Y(0) + X(2)Y(1)],$$

$$c_0(2) = \frac{1}{6} [X(2)Y(0)].$$

Аналогічно

$$c_1(1) = \frac{1}{6} [Y(1)X_1(0) + Y(2)X_1(1)] = \frac{1}{6} [Y(1)X(3) + Y(2)X(4)].$$

Тепер можна знайти значення

$$r(0) = 6c_0(0),$$

$$r(1) = 6[c_0(1) + c_1(2)],$$

$$r(2) = 6[c_0(2) + c_1(1)].$$

1.28 Перетворення Хартлі

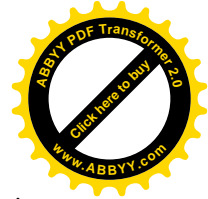
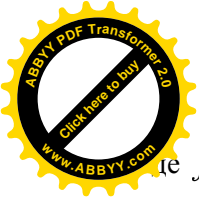
Звертання до перетворення Хартлі обумовлено ситуацією, що склалася в ряді методів обробки сигналів, де зокрема використовують дійсні послідовності даних (одномірних і двовимірних). Обробку таких даних бажано здійснювати в області дійсних чисел за допомогою взаємно симетричних прямого й зворотного перетворень. На відміну від перетворення Фур'є, що відображає дійсні функції в комплексну область, і несиметричного по i (відбувається зміна знака при переході до від прямого до зворотного перетворення), перетворення Хартлі здійснює пряме й зворотне перетворення тільки в дійсній області й має зазначену симетрію.

Покладемо

$$cas(t) = \cos(t) + \sin(t).$$

Тоді

$$H(u) = \int f(t) cas(2\pi t) dt,$$



це $f(t)$ - дійсний сигнал.

Знайдемо формули обертання. Для цього встановимо зв'язок з перетворенням Фур'є. За визначенням

$$F(u) = \int f(t) \cos(2\pi ut) dt - i \int f(t) \sin(2\pi ut) dt = A(u) - iB(u).$$

Зворотне перетворення:

$$f(t) = \int \cos(2\pi ut) A(u) du + \int \sin(2\pi ut) B(u) du + \\ + i \int \sin(2\pi ut) A(u) du - i \int \cos(2\pi ut) B(u) du.$$

За визначенням, функція $A(u)$ - парна, а $B(u)$ - непарна. У силу цього, два останні доданки рівні 0. Аналогічно, далі маємо

$$f(t) = \int \cos(2\pi ut) [A(u) + B(u)] du + \int \sin(2\pi ut) [A(u) - B(u)] du.$$

Це означає, що, зворотним до перетворення Хартлі є воно саме.

Зв'язок з перетворенням Фур'є. З визначення випливає формула, що дозволяє знайти перетворення Фур'є, якщо відомо перетворення Хартлі:

$$F(u) = \frac{1}{2} \{ [H(u) + H(-u)] - i [H(u) - H(-u)] \}.$$

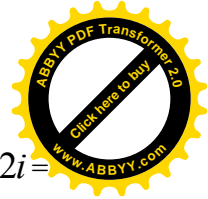
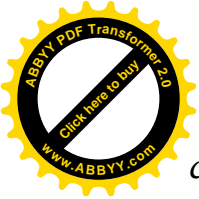
Обернено

$$H(u) = \frac{1}{2} \{ [F(u) + F(-u)] + i [F(u) - F(-u)] \}.$$

Дискретне перетворення Хартлі. Покажемо, що функції $f_k(n) = \text{cas}(2\pi kn/N)$, $n = 0, \dots, N-1$, коли $0 \leq k < N$ мають властивість ортогональності. Дійсно, покладемо

$$\langle f_k, f_m \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} \text{cas}(2\pi kn/N) \text{cas}(2\pi mn/N), \quad k \neq m.$$

Скористаємося позначенням $W = e^{2\pi i/N}$. Тоді



$$\begin{aligned} \cos(2\pi kn / N) &= (W^{kn} + W^{-kn}) / 2 + (W^{kn} - W^{-kn}) / 2i = \\ &= (1 - i)W^{kn} / 2 + (1 + i)W^{-kn} / 2 . \end{aligned}$$

Неважко бачити, що матриця переходу від одного базису до іншого є унітарною. Звідси випливає ортогональність нового базису.

Перетворення Хартлі використовується для обчислення спектра, що аналогічний спектру Фур'є. Недолік полягає у відсутності простої залежності перетворення від зсуву.

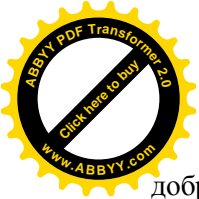
1.29 Дискретне косинусне перетворення

Метод дискретного косинусного перетворення (ДКП) є одним з поширених методів лінійних ортогональних перетворень, які останнім часом широко застосовують в області цифрової обробки сигналів. Цей метод базується на використанні ортогональної системи дискретних косинусних функцій. Перетворення даного типу добре узгоджене з параметрами сигналів, що є необхідною умовою ефективного кодування інформації. Уперше метод ДКП був опублікований у 1970 р. Зараз цей метод широко застосовують у цифровому телебаченні, для запису відеоінформації на компакт-диски та DVD-диски, для організації відеоконференцій засобами комп'ютерних мереж тощо.

ДКП є одним з різновидів дискретного перетворення Фур'є періодичної дискретної сигнальної послідовності. Математичні співвідношення для обчислення ДКП можна отримати, скориставшись узагальненими співвідношеннями дискретного перетворення Фур'є.

Взаємозв'язок між ДКП й ДПФ. Недоліком ДПФ як засобу кодування сигнального потоку є необхідність здійснення великої кількості обчислень, серед яких багато операцій множення.

Загальна кількість трансформант ДПФ для одновимірного сигналу, що складається з N послідовних відліків становить $2N$. Крім того, ці трансформанти мають комплексний характер. З огляду на склад трансформант, доцільніше здійснювати таке перетворення, за якого можна використовувати тільки дійсну або уявну частину ядра перетворення Фур'є, тобто тільки синусні або косинусні складові.



Можливість здійснення такого перетворення впливає на добре відомих властивостей ряду Фур'є. Відомо, що у разі розкладання у ряд парної сигнальної функції ряд Фур'є буде містити лише косинусні складові, а у разі розкладання непарної функції – синусні.

Оскільки ДПФ сигнальної функції, що містить N відліків породжує ядро перетворення, яке має період N , можна скористатись зазначеними вище властивостями ДПФ й побудувати довільну сигнальну послідовність шляхом її віддзеркалення відносно осі ординат. В наслідок такої процедури отримаємо нову сигнальну послідовність, яка є парною функцією, що визначена на інтервалі $2N$.

На рис.19 наведено сигналограми, що ілюструють згадану вище процедуру. На рис.19,а зображено початкову сигналограму, а на рис.19,б її модифікацію у вигляді парної функції.

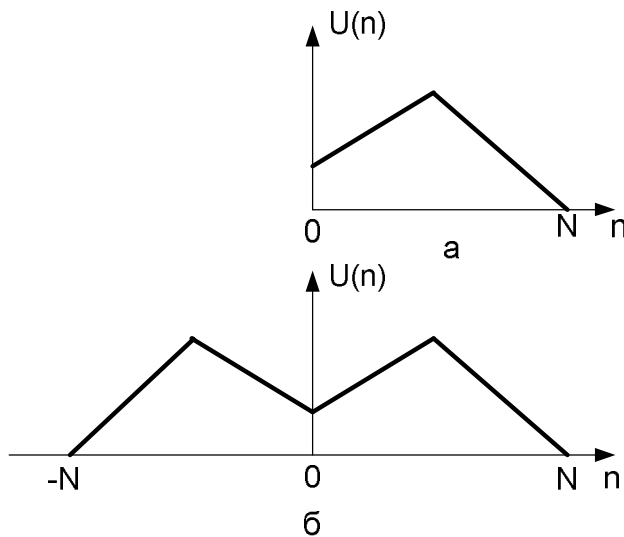


Рис. 19. Сигналограма довільної функції (а), та її модифікація у вигляді парної функції (б).

Внаслідок модифікації первинної сигнальної функції повний набір ортогональних функцій перетворення Фур'є буде складатись тільки з косинусних складових визначених на подвійному інтервалі $2N$:



$$\varphi_k = \cos \frac{2n+1}{2N} k\pi, \quad k, n \in \{0, 1, \dots, N-1\}, \quad (1.43)$$

де k – номер ортогональної функції, n – номер елементарного інтервалу.

Відповідні константи нормування для утворення системи ортогональних функцій ДКП можна знайти з умови ортогональності на інтервалі N :

$$\sum_{n=0}^{N-1} \cos \frac{2n+1}{2N} k\pi \cdot \cos \frac{2n+1}{2N} l\pi = \begin{cases} N, & k = l = 0 \\ \frac{N}{2}, & k = l \neq 0 \\ 0, & k \neq l \end{cases} \quad (1.45)$$

Якщо розподілити константу нормування між виразами для прямого та оберненого перетворення, тоді одномірну повну систему ортогональних функцій ДКП можна записати у вигляді

$$\varphi_k = \left[\frac{1}{\sqrt{N}}, \sqrt{\frac{2}{N}} \cos \frac{2n+1}{2N} k\pi \right], \quad (1.46)$$
$$k \in \{1, 2, \dots, N-1\}, \quad n \in \{0, 1, \dots, N-1\}.$$

Взаємозв'язок між ядром ДПФ та ДКП визначається співвідношенням

$$\cos \frac{2n+1}{2N} k\pi = \operatorname{Re} \left\{ \exp \left[-j \frac{\pi}{2N} k \right] \cdot W^{kn} \right\}, \quad (1.47)$$

де $W = \exp(-j \frac{2\pi}{2N})$.

Ядро ДКП знаходимо як результат множення реальної частини ядра ДПФ порядку $2N$ на ваговий коефіцієнт

$$\exp \left[-j \frac{\pi}{2N} k \right].$$

З урахуванням вищезазначеного співвідношення для прямого одномірного ДКП будуть такими:



$$C(0) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} f(n),$$

$$C(k) = \sqrt{\frac{2}{N}} \operatorname{Re} \left\{ \exp \left[-j \frac{\pi}{2N} k \right] \sum_{n=0}^{2N-1} f(n) W^{kn} \right\}, \quad (1.48)$$

$$k \in \{1, 2, \dots, N-1\}, \quad f(n) = 0, \quad n \in \{N, N+1, \dots, 2N-1\}.$$

Після здійснення відповідних перетворень співвідношення для прямого ДКП можна записати таким чином:

$$C(0) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} f(n),$$

$$C(k) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \cos \frac{2n+1}{2N} k\pi, \quad k \in \{1, 2, \dots, N-1\}. \quad (1.49)$$

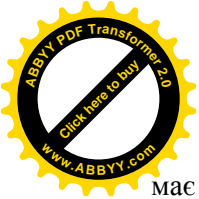
Співвідношення (1.48) і (1.49) визначають два рівноцінних способи визначення одновірних спектральних коефіцієнтів $C(0)$, $C(k)$ ДКП. Відповідно до (1.48) спектральні коефіцієнти одновірного ДКП порядку N знайдемо, виходячи з N спектральних коефіцієнтів ДПФ порядку $2N$. Формула (1.49) є стандартним записом одновірного ДКП.

Формулу для одновірного оберненого ДКП знайдемо виходячи з умови ортогональності. Якщо взяти до уваги взаємозв'язок із ДПФ, обернене ДКП можна записати як

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \hat{C}(0) + \sqrt{\frac{2}{N}} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{2N-1} \exp \left[j \frac{\pi k}{2N} \right] \hat{C}(k) \bar{W}^{kn} \right\}, \quad (1.50)$$

$$n \in \{1, 2, \dots, N-1\},$$

$$\text{де } \hat{C}(k) = \begin{cases} C(k), & k \in \{1, 2, \dots, N-1\} \\ 0, & k \in \{N, N+1, \dots, 2N-1\} \end{cases}, \quad \bar{W} = \exp(j \frac{2\pi}{2N}).$$



Спрощена стандартна формула оберненого одномірного ДКП має вигляд

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} C(0) + \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{k=1}^{N-1} C(k) \cos \frac{2n+1}{2N} k\pi. \quad (1.51)$$

Замкнута форма запису одномірного ДКП. Наведену вище формулу для одномірного ДКП можна шляхом формального перетворення привести до замкнутого вигляду. Пряме перетворення буде визначатися у цьому випадку виразом

$$C(k) = \frac{2}{N} c(k) \cdot \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \cos \frac{2n+1}{2N} k\pi, \quad (1.52)$$

$$k \in \{0, 1, \dots, N-1\},$$

а обернене перетворення:

$$f(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c(k) C(k) \cos \frac{2n+1}{2N} k\pi, \quad n \in \{0, 1, \dots, N-1\}, \quad (1.53)$$

де $c(k) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & k = 0 \\ 1, & k \in \{1, 2, \dots, N-1\}. \end{cases}$

Слід відзначити, що константу нормування введено у вираз для прямого перетворення.

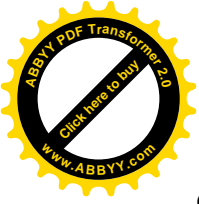
Матрична форма запису одномірного ДКП. Матрична форма запису прямого ДКП має вигляд

$$[C(k)] = [\varphi(k, n)][f(n)], \quad (1.54)$$

де $[C(k)]$ – матриця-стовпець спектральних коефіцієнтів ДКП розміром $(1 \times N)$; $[\varphi(k, n)]$ – матриця множини дискретних ортогональних функцій ДКП розміром $(N \times N)$; $[f(n)]$ – матриця-стовпець дискретних значень (відліків) сигналу. Відповідне обернене одномірне перетворення в матричній формі запису може бути подано у вигляді

$$[f(n)] = [\varphi(k, n)]^{-1} [C(k)]. \quad (1.55)$$

Оскільки умова симетричності матриці ДКП стосовно її головної діагоналі не виконується, тому



$$[\varphi(k, n)]^{-1} = [\varphi(k, n)]^T \neq [\varphi(k, n)].$$

Обернене перетворення у матричній формі може бути подано ще й у такий спосіб:

$$[f(n)] = [\varphi(k, n)]^T [C(k)], \quad k, n \in \{0, 1, \dots, N-1\}.$$

Матрична форма запису двовимірного ДКП. Для перетворення двовимірних фрагментів зображення визначимо поняття двовимірного перетворення. Ядро двовимірного ДКП є роздільним й без урахування константи нормування має вигляд

$$\widehat{\varphi}(k, n, l, m) = \cos \frac{2n+1}{2N} k\pi \cdot \cos \frac{2m+1}{2M} l\pi, \quad (1.56)$$

$$k, n \in \{0, 1, \dots, N-1\}, \quad l, m \in \{0, 1, \dots, M-1\},$$

де k, l – номери одномірних базисних функцій, а n, m – номери елементарних інтервалів (відліків) у горизонтальному та вертикальному напрямках відповідно.

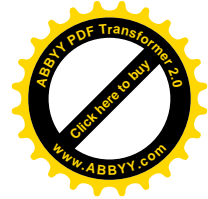
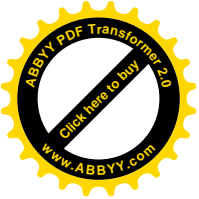
Таким чином, пряме ДКП двовимірного фрагмента зображення форматом $(N \times M)$ слід записати у вигляді

$$[C(k, l)] = [\varphi(k, n)] [f(n, m)] [\varphi(l, m)]^T, \quad (1.57)$$

де $[f(n, m)]$ – сигнальна матриця розміром $(N \times M)$; $[C(k, l)]$ – відповідна матриця спектральних коефіцієнтів ДКП розміром $(N \times M)$; $[\varphi(k, n)]$ – квадратна матриця ДКП розміром $(N \times N)$:

$$[\varphi(k, n)] = \sqrt{\frac{2}{N}} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ \cos \frac{2n+1}{2N} k\pi \end{bmatrix}; \quad k \in \{1, 2, \dots, N-1\}, \quad n \in \{0, 1, \dots, N-1\};$$

$[\varphi(l, m)]^T$ – квадратна матриця ДКП розміром $(M \times M)$, транспонована стосовно матриці



$$[\varphi(l, m)] = \sqrt{\frac{2}{M}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos \frac{2m+1}{2M} l\pi \end{bmatrix}, \quad l \in \{1, 2, \dots, M-1\}, \quad m \in \{0, 1, \dots, M-1\}.$$

Відповідна матрична форма запису двовимірного оберненого ДКП має вигляд

$$[f(n, m)] = [\varphi(k, n)]^T [C(k, l)] [\varphi(l, m)], \quad (1.58)$$

де T - оператор транспонування.

1.30 Перетворення Уолша - Адамара

Найбільш відомим та важливим перетворенням яке базується на негармонійних базисних функціях є перетворення Уолша – Адамара (ПУА). Особливістю цього перетворення є те, що ортогональні функції, які складають базис перетворення можуть набувати тільки значень $+1$ або -1 , тобто для здійснення перетворення доведеться виконати тільки операції додавання та віднімання. Таке перетворення є дуже привабливим, оскільки його може бути виконано швидше ніж інші ортогональні перетворення. Однак, слід зазначити, що це перетворення не є оптимальним з огляду на можливість скорочення сигнального потоку у порівнянні, наприклад, з ДКП. Проте простота обчислень та хороша ефективність забезпечують активне використання ПУА для стиснення аудіо- та відеопотоків.

Для знаходження функцій Уолша користуються матрицями Адамара, які забезпечують знаходження базису перетворення порядку $2N$:

$$[H_{2N}] = \begin{bmatrix} H_N & H_N \\ H_N & -H_N \end{bmatrix}. \quad (1.59)$$

Мінімальний порядок матриці Адамара може бути $H_1 = 1$.

Запишемо матриці другого та четвертого порядку H_2 та H_4 відповідно:



$$[H_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad [H_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

З наведених прикладів цілком очевидно, як побудувати матриці перетворення більш високих порядків.

Кожен рядок матриці Адамара являє собою функцію Уолша. Розглянемо особливості функцій Уолша, які ми отримали у такий спосіб. Функції Уолша називають прямокутними коливаннями. Перший рядок матриці H_4 містить функцію, що передає постійну складову, другий рядок містить відліки базисної функції, яка на інтервалі чотирьох відліків змінює знак тричі, третій рядок містить відліки функції, що на цьому ж інтервалі змінює знак один раз, а четвертий рядок – це функція, що змінює знак два рази.

Для упорядкування функцій Уолша та інших негармонійних коливань за частотною ознакою існує поняття узагальненої частоти.

Узагальнена частота будь якого періодичного коливання, що не містить постійної складової, дорівнює половині кількості змін знака на інтервалі періодичності.

Повну множину функцій Уолша wal для базису порядку $2N$, що є періодичною з періодом $t=1$, можна визначити відповідно до співвідношення:

$$S_w \in \{wal(i, t)\}, \quad i \in \{0, 1, \dots, 2N - 1\}, \quad (1.60)$$

де i – номер (розмірність) функції Уолша.

Для функцій Уолша узагальнену частоту s_i визначають у такий спосіб:

$$s_i = \begin{cases} 0 & \text{для } i=0, \\ i/2 & \text{для парних } i, \\ (i+1)/2 & \text{для непарних } i. \end{cases}$$



За аналогією з гармонійними коливаннями всю множину базисних функцій $wal(i, t)$ розподіляють на синусні sal та косинусні cal функції:

$$\begin{aligned} cal(i, t) &= wal(i, t) \quad \text{для парних } i, \\ sal(i, t) &= wal(i, t) \quad \text{для непарних } i. \end{aligned}$$

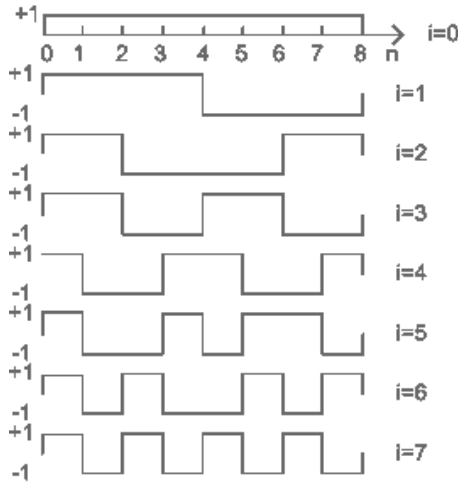


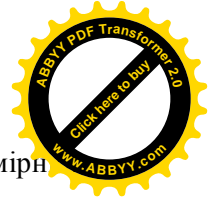
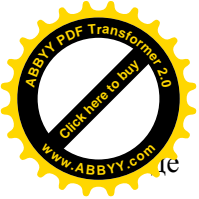
Рис. 20. Базисні функції 8-точкового перетворення Уолша-Адамара

На рис.20 наведено множину базисних функцій, упорядкованих за узагальненою частотою, для матриці H_8 , для восьмиточкового одномірного перетворення Уолша-Адамара.

Розглянемо послідовність операцій, які необхідно виконати під час одномірного та двовимірного ПУА.

Для одномірної матриці Адамара упорядкованої за узагальненими частотами, внаслідок її симетрії відносно головної діагоналі мають місце такі співвідношення:

$$\begin{aligned} [H_{2N}] &= [H_{2N}]^T, \\ [H_{2N}] \cdot [H_{2N}]^T &= 2N\mathbf{E}, \end{aligned}$$



де $[H_{2N}]^T$ - транспонована матриця ПУА, $2N$ - розмір сигналної функції, \mathbf{E} - одинична матриця.

Співвідношення для одномірної матриці сигналної функції як результату наскрізного перетворення Уолша – Адамара можна записати у такому вигляді:

$$[f_{2N}] = \frac{1}{2N} [H_{2N}]^T \cdot [F_{2N}] = \frac{1}{2N} [H_{2N}]^T \cdot [H_{2N}] \cdot [f_{2N}], \quad (1.61)$$

де $[F_{2N}] = [H_{2N}] \cdot [f_{2N}]$ - матриця трансформант, яку отримано як результат здійснення прямого перетворення Уолша – Адамара.

Множник $1/2N$ у виразі (1.61) введено для збереження масштабу амплітуд сигналної функції, оскільки добуток матриці перетворення на її транспоновану матрицю дає множник N . Для надання симетрії прямому та оберненому перетворенню Уолша – Адамара одномірної функції застосовують однаковий масштабний множник $1/\sqrt{2N}$ для прямого та оберненого ПУА.

Граф одного з алгоритмів перетворення Уолша – Адамара без урахування масштабного множника наведено на рис.21.

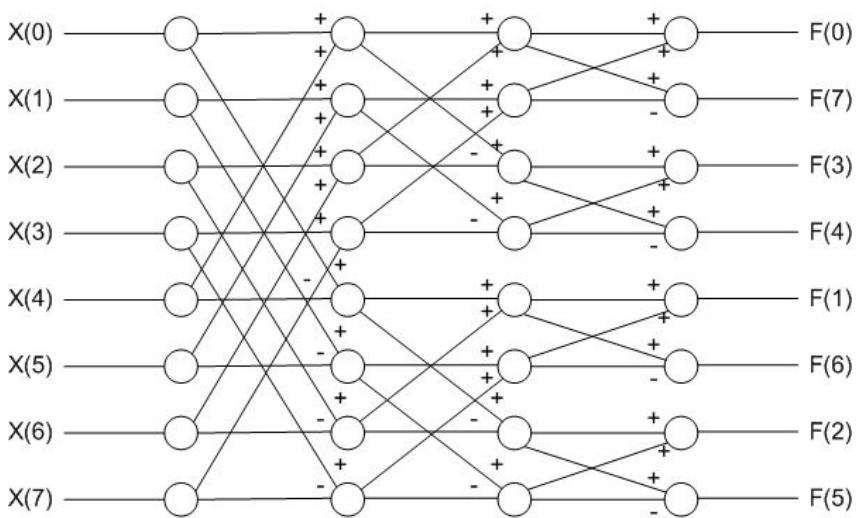
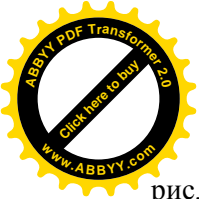


Рис. 21. Граф алгоритму обчислення одномірного восьмиточкового ПУА



Алгоритм обчислення трансформант ПУА, який наведено на рис. 21, ілюструє простоту здійснення такого перетворення. Для восьмиточкового перетворення необхідно здійснити три етапи обчислень. Кожне обчислення є операцією додавання. Знак, з яким треба брати відповідне проміжне числове значення показано біля відповідної лінії зв'язку. Слід зазначити, що після здійснення обчислень з використанням наведеного алгоритму трансформанти необхідно упорядкувати відповідно до їх номерів. Обернене ПУА можна виконати за тим самим алгоритмом.

Розглянемо тепер двовимірне перетворення Уолша – Адамара для фрагменту зображення квадратної форми, що містить N^2 відліків сигнальної функції.

Набір базисних функцій двовимірного ПУА для сигнальної функції $f(x, y)$, що містить 4×4 пікселів наведено на рис.22.

Трансформанти двовимірного ПУА знайдемо за допомогою співвідношення:

$$[F(u, v)] = [H(x, N)] \cdot [f(x, y)] \cdot [H(y, N)], \quad (1.62)$$

де $[F(u, v)]$ - матриця трансформант двовимірного перетворення, (u, v) - узагальнені частоти, що характеризують двовимірні базисні функції ПУА, $[f(x, y)]$ - матриця відліків сигнальної функції $f(x, y)$, $[H(x, N)]$ - одномірна матриця Адамара порядку N в напрямку координати x , $[H(y, N)]$ - одномірна матриця Адамара порядку N в напрямку координати y .

Якщо пряме перетворення здійснювати за формулою (1.62), тоді обернене перетворення буде визначено виразом

$$[f(x, y)] = \frac{1}{N^2} [H(x, N)] \cdot [F(u, v)] \cdot [H(y, N)]. \quad (1.63)$$

Для зручності та однотипності здійснення обчислень під час прямого та оберненого ПУА масштабний множник $1/N^2$ розподіляють між цими перетвореннями. У цьому випадку формули для обчислення прямого та оберненого ПУА набувають симетричного вигляду:

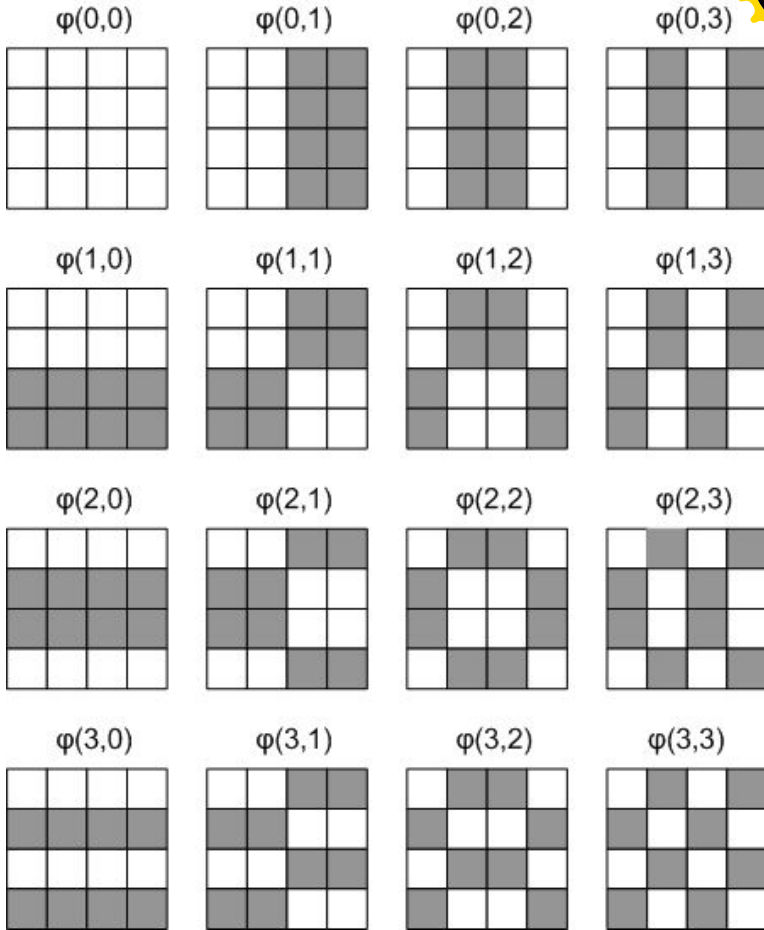
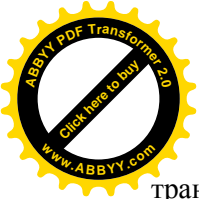


Рис. 22. Двовимірні базисні функції ПУА для $N = 4$, білий квадрат відповідає значенню +1, сірий - -1

$$[f(x, y)] = \frac{1}{N} [H(x, N)] \cdot [F(u, v)] \cdot [H(y, N)],$$

$$[F(u, v)] = \frac{1}{N} [H(x, N)] \cdot [f(x, y)] \cdot [H(y, N)]. \quad (1.64)$$



У разі використання симетричної матриці, обчислення трансформант двовимірного ПУА можна здійснювати безпосередньо за формулою:

$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) (-1)^{p(x, y, u, v)},$$

$$p(x, y, u, v) = \sum_{i=0}^{N-1} (u_i x_i \oplus v_i y_i), \quad (1.65)$$

де u_i, v_i, x_i, y_i - молодший розряд двійкового коду відповідних величин, \oplus - символ операції додавання за модулем 2.

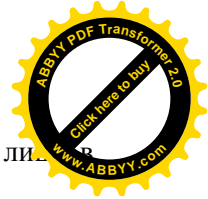
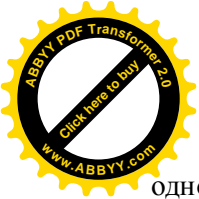
1.31 Код Грея

Нижче буде показаний зв'язок матриць Адамара зі спеціальним способом кодування цілих чисел. Виберемо натуральне n й випишемо у вигляді таблиці двійкові подання всіх чисел від 0 до $2^n - 1$. Наприклад, для $n = 3$

0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1

Слід звернути увагу на дві обставини. Таблиця має симетрію, яку можна описати в такий спосіб. Таблиця для n складається із двох підтаблиць для $n - 1$, при цьому в першій підтаблиці додано нульовий рядок, а в другий - одиничний.

Друга обставина полягає в тім, що сусідні стовпці можуть розрізнятися більш ніж в одному розряді. Це перешкоджає використанню даного кодування в асинхронних цифрових схемах. У цьому зв'язку виникла задача знайти таке кодування цілих чисел, щоб два суміжних числа розрізнялися лише в одній позиції. Найбільш популярним є кодування за назвою код Грея. Якщо число має двійкове подання $l = (l_{n-1}, \dots, l_0)$, то код Грея для нього має вигляд (g_{n-1}, \dots, g_0) , де $g_{n-1} = l_{n-1}$, а $g_k = l_k \oplus l_{k+1}$, $k < n - 1$, а знак \oplus означає підсумовування за модулем 2.



Пропозиція. У кодї Грея сусідні числа розрізняються лише в одному розряді.

Доказ. Розглянемо двійкові подання двох сусідніх чисел: $l = (l_{n-1}, \dots, l_0)$ і $m = (m_{n-1}, \dots, m_0)$, де $m = l + 1$, $m < 2^n$. Число $l = (l_{n-1}, \dots, 0, 1, \dots, 1)$, де серія з одиниць може бути й порожній, але 0 обов'язково є присутнім. У цьому випадку $m = (l_{n-1}, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ (серія з 1 замінилася серією тієї ж довжини з 0, а 0 замінився на 1). Порівнюючи коди Грея обох чисел, переконаємося, що вони розрізняються лише в одній позиції.

Перехід від звичайного коду до коду Грея й навпаки можна виразити за допомогою лінійного перетворення над полем Галуа $GF(2)$:

$$\begin{pmatrix} g_{n-1} \\ \vdots \\ g_0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} l_{n-1} \\ \vdots \\ l_0 \end{pmatrix}, \text{ а } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

У цієї матриці є зворотна $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

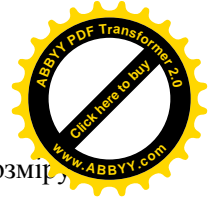
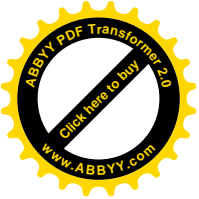
Послідовні числа, закодовані кодом Грея, також мають дзеркальну симетрію відповідних частин коду.

1.32 Перетворення Хаара

Це перетворення будується на основі матриці Хаара Ha_n порядку 2^n . При цьому $Ha_1 = H_1$.

Уведемо позначення

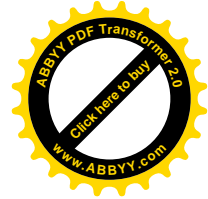
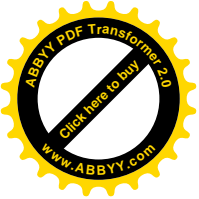
$$Ha_n = \begin{pmatrix} 1 \\ Ha_n' \end{pmatrix}.$$



Тут перший рядок складається з 1, а Ha'_n - матриця розміру $(2^n - 1) \times 2^n$. Тепер

$$Ha_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ \sqrt{2}Ha'_n & 0 \\ 0 & \sqrt{2}Ha'_n \end{pmatrix},$$

де 1 і -1 позначають рядки довжини 2^n . Очевидна ортогональність рядків цієї матриці. Множник $\sqrt{2}$ вводять для того, щоб вирівняти довжину рядків. Особливість матриці Хаара полягає в тім, що в кожному з рядків є тільки один перехід від 1 до -1. Фактично, перетворення Хаара є реалізація частки випадку вейвлет-перетворення.



2. ЦИФРОВА ОБРОБКА ЗОБРАЖЕНЬ

Обробку сигналів зображень здійснюють з метою зміни якості зображень, надання зображенню нових властивостей, аналізу інформації, що міститься у зображенні або для скорочення сигнального потоку, що передує передаванню або запису сигналів зображень.

Зображення можна розділити на два класи: статичні зображення й динамічні зображення, які в мультимедійних системах називають «відео», а в англійській термінології використовують ще й термін «movie», якщо мова йде тільки про динамічні зображення.

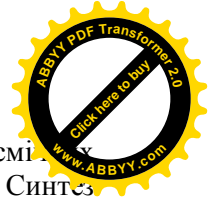
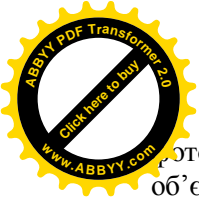
Незалежно від типу зображень все різноманіття принципів та способів обробки зображень можна розділити на такі напрямки:

1. Реставрація й поліпшення зображень.
2. Аналіз зображень (розпізнавання образів й аналіз сцен).
3. Синтез зображень.
4. Створення відеоефектів в кіно, телебаченні й інших галузях образотворчого мистецтва.
5. Кодування сигналів зображень з метою зменшення сигнальних потоків..

У рамках першого напрямку здійснюють зміну контрасту, придушення шумів, підкреслення меж об'єктів, корекцію кольорів, розфарбовування зображення тощо. Відзначимо, що, коли мова йде про поліпшення зображення, часто йдеться про таку зміну його властивостей, яка призводить до більш комфортного суб'єктивного сприйняття цього зображення, а не про досягнення більшої подібності до реального зображення.

У рамках другого напрямку здійснюють ідентифікацію об'єктів, що складають спостережувану сцену, оцінюють взаємозв'язок фрагментів зображення, а також визначають характеристики зображених об'єктів. Таку обробку здійснюють, наприклад, під час автоматизованого комп'ютерного розпізнавання тексту або для забезпечення „зору” роботизованих систем.

Синтез зображень набув останнім часом надзвичайно значного поширення. Методи та способи синтезу зображень використовують в абсолютно різних галузях діяльності. Так, наприклад, синтез тривимірних зображень здійснюють за плоскими

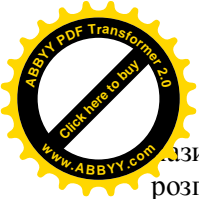


фотознімками земної поверхні або поверхні інших космічних об'єктів з метою дослідження властивостей цих об'єктів. Синтез здійснюють під час двовимірного або тривимірного моделювання об'єктів під час автоматизованого проектування споруд, транспортних засобів тощо. Значного поширення набули засоби синтезу зображень в різних сферах мистецької діяльності – створення штучних зображень об'єктів для ігрового кіно, відеокліпів, ілюстрацій до друкованих та електронних видань.

Напрямок обробки зображень, пов'язаний із створенням спецефектів хоча й використовує технічні підходи та прийоми, які застосовувались у трьох попередніх, але являє собою цілком самостійний та потужний напрямок цифрової обробки зображень. Часто візуальні спецефекти, створені електронними засобами називають іще відеоэффектами.

Процес кодування сигналів зображень здійснюють із метою скорочення психофізіологічної й статистичної надмірності сигналів з метою зменшення сигнального потоку необхідного для запису або передачі інформації про зображення. Коли говорять про скорочення психофізіологічної надмірності йдеться про виключення із сигнального потоку тієї частини сигналів зображення, відсутність яких при відновленні зображення не буде помітним глядачеві внаслідок обмежень системи зору людини. Наявність статистичної надмірності у вихідному цифровому сигнальному потоці зображення обумовлено взаємозв'язком параметрів великої кількості елементів цього зображення. Скорочення статистичної надмірності дозволяє значно скоротити сигнальний потік для статичних та динамічних зображень без втрат якості зображення та його інформаційного змісту.

У сучасних інформаційних системах зображення передають, зберігають та обробляють переважно у цифровій формі, але первинні зображення здебільшого існують у вигляді безперервних двовимірних полів розподілу яскравості та кольору. Тому перетворення первинних зображень у цифрові сигнали є обов'язковою операцією, якщо передбачається використати цифрову обробку, передачу, зберігання. Так само, як і у випадку одновимірних сигналів, таке перетворення складається із двох процедур, які здійснюють одночасно. Перша полягає в заміні безперервного зображення набором дискретних елементів й



називається дискретизацією, а друга виконує заміну безперервного розподілу яскравості й забарвлення множиною квантованих значень для кожного елемента зображення й називається квантуванням.

Двовимірний характер зображення в порівнянні зі звичайними одновимірними сигналами надає додаткові можливості щодо оптимізації цифрового сигнального потоку з метою скорочення обсягу цифрових даних. У зв'язку з цим було досліджено питання стосовно найбільш раціонального вибору рівнів квантування, а також щодо можливості використання різних типів растрів, інші аспекти дискретизації зображень [2.1.-2.5].

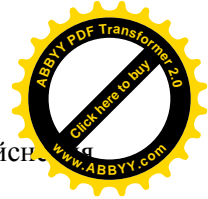
Растром називають структуру поля зображення утворену в результаті поелементного розкладання або синтезу зображення. У сучасній термінології елемент зображення називають «піксель» або «піксель», а в англійській літературі можна зустріти кілька еквівалентних назв, які було утворено від сполучення слів picture element (елемент зображення) – pictel, pixel, pel.

У переважній більшості випадків на практиці застосовують дискретизацію, з використанням прямокутного растра, й рівномірне квантування яскравості. Такий підхід застосовують через простоту виконання відповідних операцій, а також через необхідність здійснення у подальшому операцій пов'язаних з перетвореннями зображень. За умови використання прямокутного растра в остаточному вигляді сигнали оцифрованого зображення зазвичай подають у вигляді матриці (у випадку монохромного зображення) або набору матриць (у випадку кольорового зображення), рядки й стовпці яких містять квантовані значення параметрів відповідних елементів дискретизованого зображення.

2.1 Дискретизація й відновлення безперервних зображень

Для оцінки можливості дискретизації й можливості наступного відтворення зображення його можна розглядати як детерміноване поле оптичних параметрів або як реалізацію двовимірного випадкового процесу.

Залежно від прийнятої моделі зображення в процесі цифрової обробки використовують відповідний математичний апарат для



дису зображення й застосовують відповідні підходи до здійснення обробки й оцінки результатів.

Зображення об'єктів у площині екрана пристрою відображення або в площині фоточутливих елементів перетворювача оптичних параметрів в електричні сигнали являє собою розподіл цих параметрів у двовимірному просторі й може бути описано відповідною двовимірною функцією просторових координат $F_I(x, y)$. Індекс y позначенні даної функції означає відповідність вхідному зображенню (input). У процесі формування сигналів зображення в результаті його сканування (огляду) апертурою фоточутливого перетворювача з подальшою дискретизацією електричних сигналів функцію просторових координат замінюють деякою часовою функцією. При цьому між просторовими координатами, часом та номерами дискретних відліків сигналів встановлюють однозначну відповідність:

$$x = V_x t = n \cdot \Delta x = n \cdot V_x \Delta t, \quad y = V_y t = m \cdot \Delta y = m \cdot V_y \Delta t,$$

де V_x, V_y - як правило, постійна швидкість руху апертури сканера у відповідному напрямку;

$\Delta x, \Delta y$ - крок дискретизації в області просторових координат;

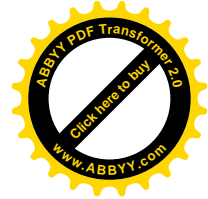
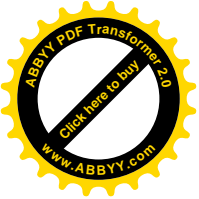
Δt - інтервал дискретизації в часовій області;

n та m - номери сигнальних відліків у відповідному напрямку.

Апертура сканера – це деякий умовний елемент за допомогою, якого здійснюють поелементне розкладання зображення. Саме слово апертура має латинське походження (apertura) й означає „отвір”. Словосполучення апертура сканера означає „оглядовий отвір”.

Просторові координати визначають відносно початкової точки сканування, час - від початку сканування.

Для більшої наочності міркувань пов'язаних з обробкою зображень розгляд процесу обробки зручно здійснювати в області просторових координат.



2.1.1 Дискретизація детермінованих зображень

Припустимо, що $F_I(x, y)$ описує первинне безперервне зображення нескінченних розмірів (розподіл яскравості, оптичної щільності тощо). В ідеальній системі дискретизації просторові відліки характерного параметра зображення утворюють шляхом множення функції, що описує цей параметр на функцію дискретизації.

Для здійснення процесу дискретизації в ідеальній системі застосовують функцію дискретизації виду:

$$D(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - m\Delta x, y - n\Delta y), \quad (2.1)$$

яка утворює решітку дискретизації, що містить δ -функції розташовані з кроком $\Delta x, \Delta y$ у відповідних напрямках.

Модель процесу дискретизації можна уявити відповідно до схеми наведеної на рис.23.

Дискретизоване зображення можна описати співвідношенням:

$$\begin{aligned} F_p(x, y) &= F_I(x, y)D(x, y) = \\ &= \sum_{m \rightarrow -\infty}^{\infty} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{\infty} F_I(m\Delta x, n\Delta y) \delta(x - m\Delta x, y - n\Delta y). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Функцію $F_I(x, y)$ може бути внесено під знак додавання, оскільки вона має значення вагового коефіцієнта для кожного конкретного відліку сигналу взятого у вузлах решітки дискретизації.

З метою здійснення аналізу процесу дискретизації й оцінки можливості відтворення зображення розглянемо просторовий частотний спектр дискретизованого зображення. Просторовий спектр дискретизованого зображення можна одержати шляхом здійснення безперервного двовимірного перетворення Фур'є.

$$F_p(\omega_x, \omega_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} F_p(x, y) \exp[-i(\omega_x x + \omega_y y)] dx dy \quad (2.3)$$

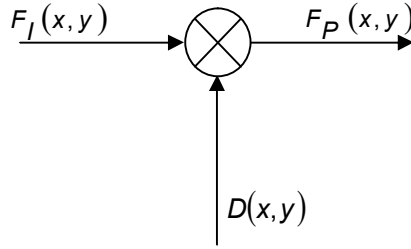


Рис. 23. Схема процесу дискретизації зображення

З огляду на (2.2) й (2.3) можна зазначити, що $F_P(\omega_x, \omega_y)$ є згорткою спектрів вихідної функції й функції дискретизації.

Якщо спектр функції дискретизації позначити $D(\omega_x, \omega_y)$, то відповідно до теореми про частотний спектр функції, що є добутком двох функцій у просторовій області можна записати:

$$F_P(\omega_x, \omega_y) = \frac{1}{4\pi^2} F_I(\omega_x, \omega_y) * D(\omega_x, \omega_y) \quad (2.4)$$

Знаком „*” будемо в подальшому позначати операцію згортки.

Двовимірне перетворення Фур'є функції дискретизації в області просторових частот утворює нескінченний набір δ -функцій

розташованих із кроком $\omega_{xs} = \frac{2\pi}{\Delta x}$; $\omega_{ys} = \frac{2\pi}{\Delta y}$ тобто

$$D(\omega_x, \omega_y) = \left(\frac{4\pi^2}{\Delta x \Delta y}\right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega_x - m\omega_{xs}, \omega_y - n\omega_{ys}) \quad (2.5)$$

Будемо вважати, що спектр просторових частот первинного зображення є обмеженим в частотній області так, що

$$F_I(\omega_x, \omega_y) = 0 \quad \text{для} \quad \begin{cases} |\omega_x| > \omega_{xc} \\ |\omega_y| > \omega_{yc} \end{cases},$$

де ω_{xc}, ω_{yc} – частоти зрізу спектра просторових частот зображення у відповідному напрямку.

Висловлене припущення є відображенням того, що будь-яке реальне зображення є обмеженим просторово, а значення



характерного параметра ϵ обмеженим за величиною, це призводить до утворення сигналів зображень обмежених у часі й за амплітудою. Енергія сигналів зображення завжди зосереджена у низькочастотній частині спектру й можна вибрати таку верхню частоту спектру корисного сигналу, за якої більш високочастотні складові можна відкинути без помітного спотворення самого зображення. Наприклад, це можна зробити для спектральних складових, рівень яких не перевищує рівень шумів.

Запишемо (2.4) з урахуванням зроблених вище зауважень:

$$F_p(\omega_x, \omega_y) = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \iint_{-\infty}^{\infty} F_l(\omega_x - \alpha, \omega_y - \beta) \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\delta\alpha - m\omega_{xs}, \beta - n\omega_{ys}) \quad (2.6)$$

де α та β - деякі нові змінні, які мають значення просторової частоти.

Якщо змінити порядок інтегрування й додати й урахувати властивість вибіркової здатності δ -функції, одержимо співвідношення:

$$F_p(\omega_x, \omega_y) = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_l(\omega_x - m\omega_{xs}, \omega_y - n\omega_{ys}). \quad (2.7)$$

Це співвідношення описує спектр просторових частот ідеально дискретизованої функції детермінованого зображення.

Зображення спектра просторових частот відповідно до (2.7) наведено на рис.24.

Як видно з рис. 24, спектр дискретизованого зображення складається з нескінченного числа спектрів вхідного зображення, які повторюються зі зміщенням на частоти, кратні $\frac{2\pi}{\Delta x}, \frac{2\pi}{\Delta y}$.

Очевидно, що залежно від співвідношення ширини спектра вихідного зображення й обраного кроку дискретизації $\Delta x, \Delta y$, сусідні спектри можуть дотикатися, перекриватися або бути розділеними деяким частотним інтервалом. Відповідно до цих варіантів говорять, що дискретизацію здійснено з найквістовою частотою, із частотою нижче найквістової, із частотою вище

дискретизованої. З огляду на рис.24 можна зробити висновок, що за умови $\omega_{xs} > 2\omega_{xc}, \omega_{ys} > 2\omega_{yc}$ процес виділення сигналу спрощується, хоча часу для цього менше.

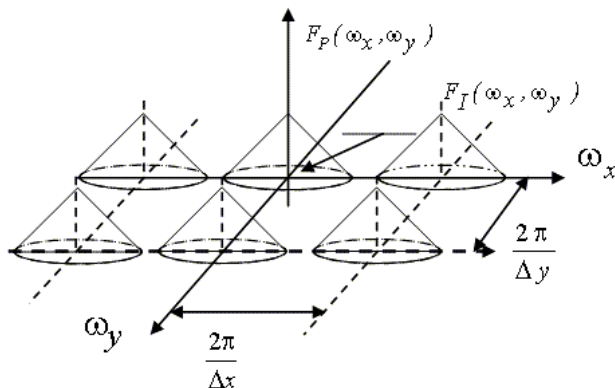


Рис. 24. Спектр просторових частот дискретизованого зображення

Таким чином, внаслідок розгляду спектра $F_P(\omega_x, \omega_y)$ можна зробити висновок про те, що з відліків функції $F_P(x, y)$ можна одержати безперервне зображення, що повністю відповідає вхідному, шляхом лінійної частотної фільтрації спектра дискретизованого зображення в області просторових частот або лінійної просторової інтерполяції в області лінійних координат.

Оскільки дискретні відліки сигнальної функції було отримано за допомогою решітки δ -функцій, значення просторової функції зображення в проміжках між вузлами решітки дискретизації можна відновити шляхом інтерполяції проміжних значень.

Розглянемо можливість відновлення зображення більш докладно.

Нехай $R(x, y)$ є імпульсний відгук фільтра, що використовують для інтерполяції, а $R_\omega(\omega_x, \omega_y)$ - його частотна характеристика. Відтворене зображення може бути представлено, як згортку послідовності відліків $F_P(x, y)$ з імпульсним відгуком відновлювального фільтра.



$$F_R(x, y) = F_I(x, y) * R(x, y)$$

Підставимо у (2.8) функцію F_P з (2.2) й обчислимо згортку з урахуванням раніше зроблених зауважень.

$$F_R(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_I(m\Delta x, n\Delta y) R(x - m\Delta x, y - n\Delta y) \quad (2.9)$$

З виразу (2.9) видно, що імпульсний відгук $R(x, y)$ виконує роль двовимірної функції, що здійснює інтерполяцію відліків на всю площину.

Частотний спектр відновленої функції в області просторових частот є добутком

$$F_R(\omega_x, \omega_y) = F_P(\omega_x, \omega_y) \cdot R_\omega(\omega_x, \omega_y).$$

З урахуванням (2.7) можна записати:

$$F_R(\omega_x, \omega_y) = \frac{1}{\Delta x \Delta y} R_\omega(\omega_x, \omega_y) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_I(\omega_x - m\omega_{xs}, \omega_y - n\omega_{ys}) \quad (2.10)$$

З (2.10) випливає, що в разі, коли спектри не перекриваються, а множник $R_\omega(\omega_x, \omega_y)$ має постійне значення в області $\omega_x < \omega_{xc}$, $\omega_y < \omega_{yc}$, рис. 25, й придушує всі спектри, для яких $m, n \neq 0$, тоді спектр відновленого зображення буде в точності збігатися зі спектром вхідного зображення.

Для зображення з обмеженою шириною спектра умову не перекривання спектрів після дискретизації може бути виконано, якщо інтервал дискретизації обрано так, що має місце співвідношення

$$\omega_{xc} \leq \frac{\omega_{xs}}{2}; \quad \omega_{yc} \leq \frac{\omega_{ys}}{2}; \quad \text{або} \quad \Delta x \leq \frac{\pi}{\omega_{xc}}; \quad \Delta y \leq \frac{\pi}{\omega_{yc}}.$$

У тих випадках, коли просторова частота дискретизації зображення достатня для запобігання накладання спектрів у дискретному зображенні, вхідне зображення можна відновити за допомогою відповідного фільтра.

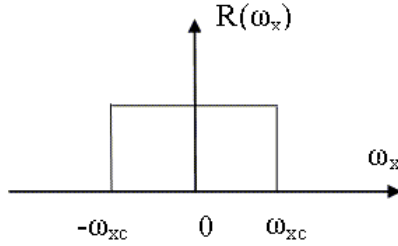


Рис. 25. Одновимірна характеристика ідеального відновлювального фільтра

Наприклад це можна зробити за допомогою таких фільтрів:

$$R_{\omega}(\omega_x, \omega_y) = k \text{ для } |\omega_x| \leq \omega_L \text{ й } |\omega_y| \leq \omega_{yL},$$

$$R_{\omega}(\omega_x, \omega_y) = 0 \text{ для } |\omega_x| \leq \omega_L \text{ й } |\omega_y| \leq \omega_{yL},$$

де k – масштабний коефіцієнт, $\omega_{yL} > \omega_{yc}$; $\omega_{xL} > \omega_{xc}$, рис.26.

Оскільки дискретні відліки сигнальної функції відомі тільки в певних точках простору лінійних координат, тоді імпульсний відгук (або ще говорять функція розсіювання точки - ФРТ) такого відновлювального фільтра повинен бути

$$R(x, y) = \frac{k\omega_{xL}\omega_{yL}}{\pi^2} \frac{\sin(\omega_{xL}x)}{\omega_{xL}x} \frac{\sin(\omega_{yL}y)}{\omega_{yL}y}. \quad (2.11)$$

У цьому випадку зображення відновлюється за допомогою нескінченної суми сигналів (функцій) виду $\sin c(x)$.

У цьому випадку зображення відновлюється за допомогою нескінченної суми сигналів (функцій) виду $\sin c(x)$.

Іншим фільтром, рис.27, придатним для повного відновлення може бути фільтр з характеристикою

$$R_{\omega}(\omega_x, \omega_y) = k \text{ за умови } \sqrt{\omega_{xL}^2 + \omega_{yL}^2} < \sqrt{\omega_{xS}^2 + \omega_{yS}^2},$$

$$R_{\omega}(\omega_x, \omega_y) = 0 \text{ - в інших випадках.}$$

Імпульсний відгук такого фільтра має вигляд:

$$R(x, y) = 2\pi\omega_0 \frac{J_1(\omega_0\sqrt{x^2 + y^2})}{(x^2 + y^2)}, \quad \omega_0 = \sqrt{\omega_{xc}^2 + \omega_{yc}^2} \quad (2.12)$$

$J_1(x)$ - функція Бесселя першого порядку.

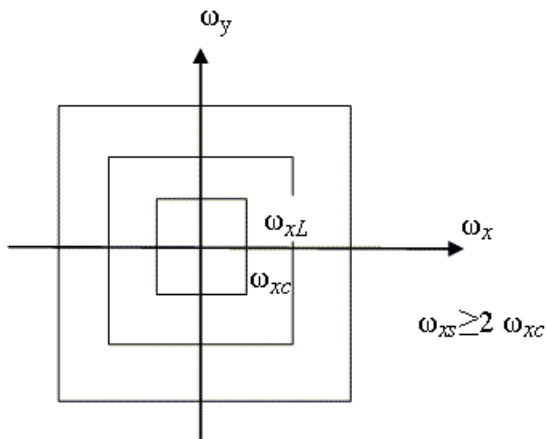


Рис. 26. Прямокутна область просторових частот, що визначає характеристики відновлювального фільтра

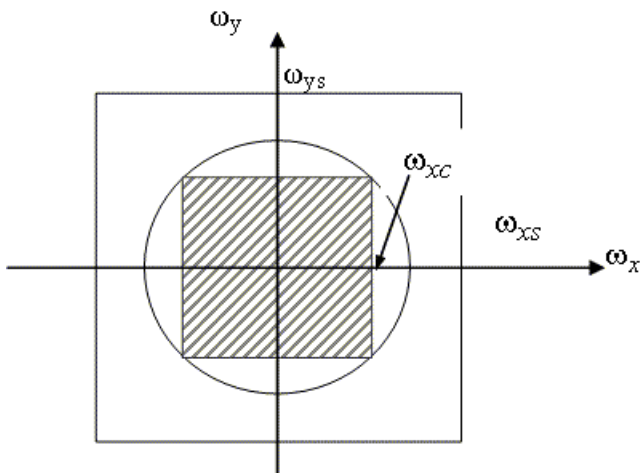


Рис. 27. Область визначення для відновлювального фільтра з характеристикою (2.12)

Теоретично існує декілька відновлювальних фільтрів, що забезпечують ідентичне відновлення зображення, однак через



можливість від'ємних значень їхніх імпульсних характеристик. Більшість із них важко або неможливо реалізувати практично.

2.1.2 Дискретизація випадкових зображень

Отже вище було розглянуто можливість подання безперервного детермінованого зображення за допомогою певним чином обраних дискретних відліків, що мають значення певного характерного параметра (яскравість, оптична щільність, коефіцієнт відбивання) у полі зображення.

Виходячи з логічних міркувань можна припустити, що зробленої оцінки достатньо для того, щоб поширити її на всі можливі зображення. Хоча, як ми вже відзначали, зображення можна розглядати як тривимірну випадкову функція деякої фізичної величини $L(x,y,t)$. У кожний конкретний момент часу зображення можна розглянути як миттєвий знімок якоїсь сцени.

У цьому випадку зображення можна розглядати як випадкове двовимірне поле й оцінити можливість подання такого поля дискретними відліками. Статистичний опис зображень широко використовують під час кодування джерела зображення й каналу передачі.

Оскільки на підставі зробленого раніше зауваження випливає, що таке подання можливо зробити, тому зосередимо нашу увагу головним чином на характеристиках й функціональних залежностях, які використовують у цьому випадку.

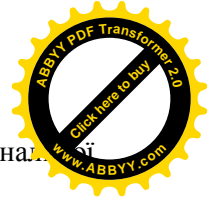
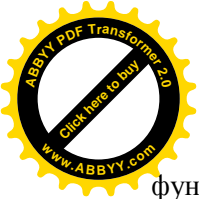
Нехай функція $F_I(x,y)$ описує безперервний двовимірний стаціонарний процес із відомим середнім значенням η_{F_I} й автокореляційною функцією відповідно до співвідношення

$$R_{F_I}(\tau_x, \tau_y) = E\{F_I(x_1, y_1)F_I^*(x_2, y_2)\}, \quad (2.13)$$

де $\tau_x = x_1 - x_2$, $\tau_y = y_1 - y_2$.

Дискретизацію здійснюємо за допомогою функції $D(x,y)$ відповідно до співвідношення (2.1).

$$F_p(x,y) = F_I(x,y)D(x,y) = F_I(x,y) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - m\Delta x, y - n\Delta y) \quad (2.14)$$



Автокореляційна функція дискретизованої сигнальної функції зображення буде мати вигляд

$$R_{F_p}(x_1, y_1, x_2, y_2) = E\{F_p(x_1, y_1) * F_p(x_2, y_2)\} = E[F_I(x_1, y_1) * F_I(x_2, y_2)]D(x_1, y_1)D(x_2, y_2) \quad (2.15)$$

Отриманий вираз складається з автокореляційної функції вихідного зображення й добутку двох функцій дискретизації, які зміщено у просторі. Цей добуток також є набором δ -функцій, що подібний до функції дискретизації:

$$D(x_1, y_1)D(x_2, y_2) = D(x_1 - x_2, y_1 - y_2) = D(\tau_x, \tau_y). \quad (2.16)$$

З урахуванням зробленого зауваження можна зазначити, що дискретизоване випадкове поле, що характеризує зображення, також є стаціонарним та має автокореляційну функцію

$$R_{F_p}(\tau_x, \tau_y) = R_{F_I}(\tau_x, \tau_y)D(\tau_x, \tau_y). \quad (2.17)$$

Знайдемо енергетичний спектр дискретизованої функції й розглянемо яким чином у ньому представлено спектр первинного зображення.

Енергетичний спектр випадкового процесу можна виразити за допомогою спектра автокореляційної функції:

$$W_{F_p}(\omega_x, \omega_y) = \frac{1}{4\pi^2} W_{F_I}(\omega_x, \omega_y) * D(\omega_x, \omega_y), \quad (2.18)$$

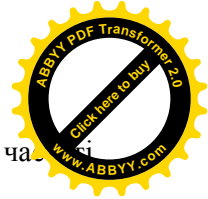
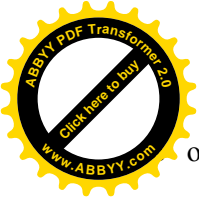
W_{F_p}, W_{F_I} - спектральні щільності функції дискретизації й сигнальної функції первинного зображень відповідно.

$D(\omega_x, \omega_y)$ - спектральне представлення функції дискретизації $D(\tau_x, \tau_y)$.

Вираз (2.18) має такий самий вигляд, що й вираз (2.4). Подібно до того, як було отримано співвідношення (2.10) можна одержати

$$W_{F_p}(\omega_x, \omega_y) = \frac{4\pi^2}{\Delta x \Delta y} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} W_{F_I}(\omega_x - m\omega_{xs}, \omega_y - n\omega_{ys}). \quad (2.19)$$

З виразу (2.19) випливає, що енергетичний спектр дискретизованого зображення містить енергетичні спектри первинного зображення, що повторюються нескінченне число разів



області просторових частот через інтервали кратні частотам дискретизації

$$\omega_{xs} = \frac{2\pi}{\Delta x}; \omega_{ys} = \frac{2\pi}{\Delta y}.$$

Співвідношенню (2.19) відповідає картина розподілу спектра просторових частот, яку наведено на рис.24.

На підставі отриманих результатів можна зробити висновок про те, що в разі виконання умови щодо співвідношення верхньої частоти спектру сигналу ω_{xc}, ω_{yc} й частоти дискретизації

$$\omega_{xc}, \omega_{yc} \leq \frac{\omega_{xs}}{2}, \frac{\omega_{ys}}{2},$$

локальні енергетичні спектри не перекриваються й зображення можна відновити за допомогою функції $R(x, y)$, що здійснює інтерполяцію. Відзначимо, що $R(x, y)$ - детермінована інтерполяційна функція.

Таким чином, відновлене безперервне випадкове зображення $F_R(x, y)$ можна описати співвідношенням:

$$F_R(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_I(m\Delta x, n\Delta y) R(x - m\Delta x, y - n\Delta y). \quad (2.20)$$

Еквівалентність первинного й відновленого зображення в цьому випадку оцінюють за допомогою середньоквадратичної похибки. Первинне й відновлене зображення є еквівалентними за умови, що похибка дорівнює нулю, тобто

$$E \left[F_I(x, y) - F_R(x, y) \right]^2 = 0, \quad (2.21)$$

де E - моментна функція випадкової величини.

Для реалізації цього співвідношення необхідно й достатньо, створити умови відповідно до критерію Найквіста й використати інтерполяційну функцію $\text{sinc}(x)$ або функцію Бесселя, тобто так само як і у випадку детермінованого зображення.

Отримані результати можна безпосередньо застосувати для здійснення дискретизації детермінованого сигналу в присутності адитивного шуму. Адитивний шум можна уявити у вигляді двовимірного випадкового поля.

Процес дискретизації такого зображення може бути проілюстровано у спектральній області за допомогою одновимірних діаграм, що наведено на рис.28.

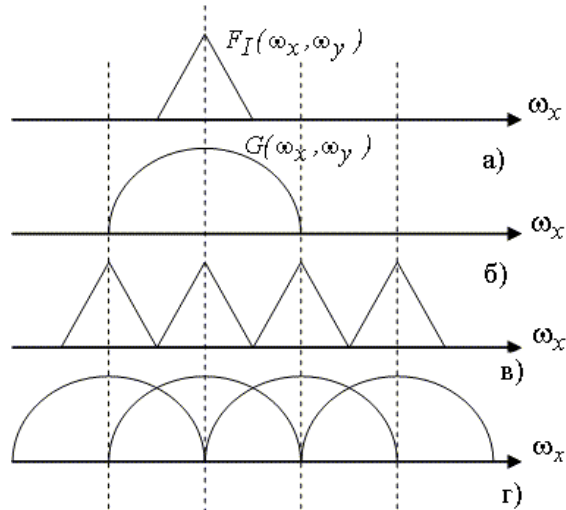
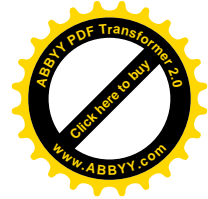
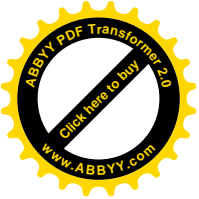


Рис. 28. Одновимірні спектри сигнальних функцій первинного й оцифрованого зображення й адитивного шуму

На рис.28 наведено спектр первинного сигналу зображення (а), первинний спектр адитивного шуму (б), спектр дискретизованого сигналу зображення (в), спектр дискретизованого шумового сигналу (г).

Як правило, спектр завади ширше спектра сигналу. За умови правильного вибору частоти дискретизації, погодженої з верхньою частотою сигналу зображення в результаті дискретизації зображення разом із шумом одержимо спектр дискретизованого зображення, що буде містити повторювані спектри первинного зображення, що не перекриваються, й повторювані спектри шумового поля, що перекриваються. Тобто, внаслідок дискретизації зросте потужність шуму в смузі частот спектра первинного зображення й у підсумку погіршиться відношення сигнал/шум. У цьому випадку відтворену репродукцію зображення буде значно сильніше спотворено шумами в порівнянні з первинним зображенням.

Щоб цього не відбувалося необхідно безпосередньо перед дискретизацією здійснювати обмеження смуги сигналу зображення відповідно до обраної частоти дискретизації.



2.1.3 Дискретизація сигналів у реальних системах

Вище було розглянуто ідеалізований процес дискретизації, коли решітка імпульсів дискретизації має необмежені розміри й складається з ідеальних зондів - дельта – імпульсів.

У реальних системах ширина імпульсів дискретизації має кінцеві розміри, а решітка імпульсів дискретизації містить обмежену кількість таких імпульсів. Крім того частота дискретизації може бути нижче найквістової.

Проаналізуємо до яких наслідків призводить наявність зазначених фактів.

Розглянемо систему, у якій зображення сканують за допомогою апертури малих розмірів, як це має місце в різних сканерах або ТВ системах. Будемо вважати, що апертура характеризується деякою функцією прозорості $P(x, y)$.

2.1.4 Вплив форми імпульсів дискретизації

Як і раніше дискретизоване зображення будемо описувати співвідношенням, що містить сигнальну функцію первинного зображення та функцію дискретизації:

$$F_p(x, y) = F_I(x, y)S(x, y). \quad (2.22)$$

Функція дискретизації складається з обмеженого числа імпульсів й має вигляд:

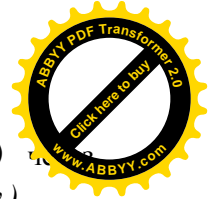
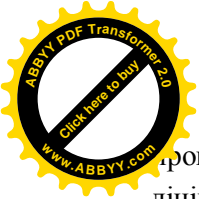
$$S(x, y) = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-M}^M P(x - m\Delta x, y - n\Delta y). \quad (2.23)$$

Відповідно з (2.23) решітка функції дискретизації містить $(2M + 1)$ імпульсів $P(x, y)$ у напрямку x й $(2N + 1)$ $(2N+1)$ у напрямку y .

Вважаємо, що імпульси дискретизації нормовано так, що

$$\iint_{-\infty}^{\infty} P(x, y) dx dy = 1. \quad (2.24)$$

Можна показати, що результат застосування зазначеної функції дискретизації буде еквівалентним до результату отриманого внаслідок застосування функції, що утворено шляхом



пропускання кінцевого набору δ - функцій з $D(x, y)$ та лінійний просторовий фільтр із імпульсним відгуком $P(x, y)$.

Отриману таким способом функцію дискретизації можна описати співвідношенням згортки:

$$S(x, y) = D(x, y) * P(x, y), \quad (2.25)$$

де
$$D(x, y) = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-M}^M \delta(x - m\Delta x, y - n\Delta y). \quad (2.26)$$

Після підстановки виразу (2.23) у (2.22) для дискретизованого зображення одержимо такий результат:

$$F_p(x, y) = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-M}^M F_I(x, y) P(x - m\Delta x, y - n\Delta y). \quad (2.27)$$

З урахуванням (2.25) й на підставі (2.22) частотний спектр дискретизованої функції має вигляд згортки спектра первинного сигналу й функції дискретизації, тобто:

$$F_p(\omega_x, \omega_y) = \frac{1}{4\pi^2} F_I(\omega_x, \omega_y) * [D(\omega_x, \omega_y) P(\omega_x, \omega_y)], \quad (2.28)$$

де $P(\omega_x, \omega_y)$ - зображення функції $P(x, y)$ в області просторових частот.

Перетворення Фур'є кінцевої решітки імпульсів дискретизації $D_I(x, y)$ визначається співвідношенням:

$$D_I(\omega_x, \omega_y) = \frac{\sin\left[\omega_x\left(M + \frac{1}{2}\right)\Delta x\right] \sin\left[\omega_y\left(N + \frac{1}{2}\right)\Delta y\right]}{\sin\frac{\omega_x\Delta x}{2} \sin\frac{\omega_y\Delta y}{2}}. \quad (2.29)$$

Якщо розглянути просторовий спектр решітки кінцевих розмірів, що складаються з δ -функцій, то цей спектр буде мати вигляд як на рис.29.

Спектр $D_I(\omega_x, \omega_y)$ визначається співвідношенням (2.29).

Як видно зі співвідношення (2.29) перехід через „0” функції, що огинає спектр обмеженої решітки дискретизації, визначається чисельником, а саме періодом функції $\sin\left[\omega_x\left(M + \frac{1}{2}\right)\Delta x\right]$.

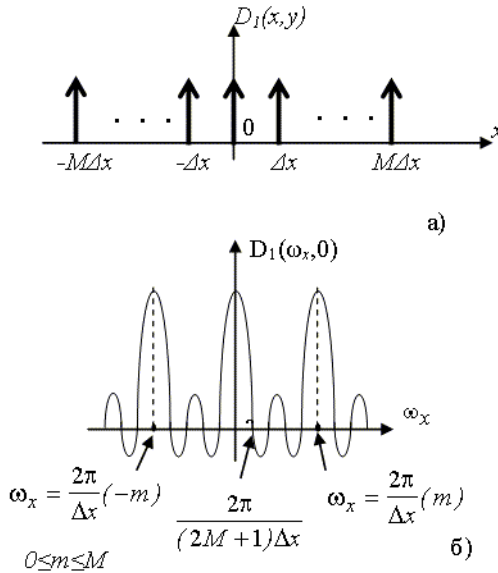


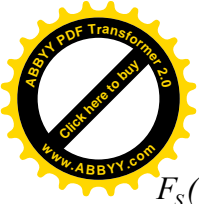
Рис. 29. Одновимірний частотний спектр обмеженої решітки δ -функцій

Така ж залежність має місце й у напрямку (ω_y) . Таким чином, нулі спектра в області просторових частот перебувають у точках $\frac{2\pi}{(2M+1)\Delta x}$. Напівперіод синусоїди $-\frac{2\pi}{(2M+1)\Delta x} \cdot \frac{1}{2}$.

Внаслідок збільшення кількості δ -імпульсів у решітці так, що $M \rightarrow \infty$ ширина спектральних максимумів зменшується й у результаті граничного переходу перетворюється у набір δ -функцій у частотній області.

Числові значення відліків дискретизованого сигналу зображення знаходимо шляхом просторового інтегрування $F_I(x, y)$ в межах деякої кінцевої ділянки, що визначається площею апертури з розмірами A_x, A_y .

Значення відліку визначеного для одного елемента зображення з індексами (m, n) можна описати співвідношенням:



$$F_S(m\Delta x, n\Delta y) = \int_{m\Delta x - A_x}^{m\Delta x + A_x} \int_{n\Delta y - A_y}^{n\Delta y + A_y} F_I(x, y) P(x - m\Delta x, y - n\Delta y) dx dy. \quad (2.30)$$

Для того, щоб одержати зручний для аналізу вираз, зробимо додаткові перетворення (2.30). Замінімо змінні так, що $x = m\Delta x - \alpha$; $y = n\Delta x - \beta$, тоді:

$$F_S(m\Delta x, n\Delta y) = \int_{-A_x}^{A_x} \int_{-A_y}^{A_y} F_I(m\Delta x - \alpha, n\Delta y - \chi) P(-\alpha, -\beta) d\alpha d\beta. \quad (2.31)$$

Оскільки F_S описує один відлік, то за межами $\pm A$ функція $P(-\alpha, -\beta) = 0$ й для зручності обчислень межі інтегрування можна поширити від $-\infty$ до $+\infty$.

Якщо зробити таким чином, то можна розглядати вираз (2.31) як згортку первинної сигнальної функції $F_I(x, y)$ й імпульсного відгуку з наступною дискретизацією цієї згортки в обмеженій області за допомогою δ -функції.

У системі відновлення зображень безперервне зображення може бути отримано шляхом інтерполяції проміжних значень за допомогою ідеальних функцій типу $\sin c(x)$ або $J_1(x)$, які визначено на нескінченній площині.

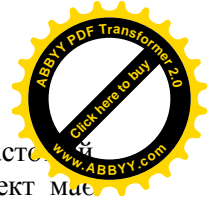
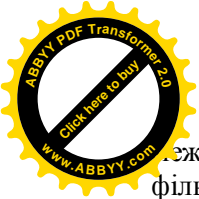
Оскільки решітка дискретизації є обмеженою, то на границях дискретизованого зображення частина інтерполяційних функцій відтинається й поблизу країв виникають помилки відновлення. Такі помилки практично відсутні для точок зображення віддалених від межі зображення на 8-10 кроків дискретизації.

Якщо знехтувати ефектами, пов'язаними з обмеженими розмірами решітки дискретизації можна записати:

$$F_S(m\Delta x, n\Delta y) = 2\pi [F_I(x, y) * P(-x, -y)] \delta(x - m\Delta x, y - n\Delta y). \quad (2.32)$$

Значимо, що імпульс дискретизації завжди симетричний, тобто $P(-x, -y) = P(x, y)$.

Як видно з (2.32) у процесі дискретизації кінцева ширина апертури сканера в просторовій області призводить до зниження чіткості зображення за рахунок усереднення значення відліку в



ежах площі апертури сканера, що рівносильне низькочастотній фільтрації спектра первинного зображення. Такий же ефект має місце в реальних системах внаслідок здійснення формування одного відліку в часовій області протягом певного інтервалу часу, що має певну протяжність.

Зазначена низькочастотна фільтрація в реальних системах часто буває корисною й усуває ефекти, пов'язані з накладанням сусідніх спектрів в разі зниження частоти дискретизації нижче критичної.

2.1.5 Ефекти пов'язані з накладанням спектрів

За умови вибору частоти дискретизації нижче найквістової повторювані спектри первинного сигналу в спектрі дискретизованого сигналу будуть перекриватися. У результаті у високочастотній частині дискретизованого сигналу спектр зазнає значних фазових та амплітудних спотворень, що призводить до зміни форми і яскравості малорозмірних фрагментів зображення. У випадку регулярних структур у зображенні виникають муарові картини.

Муаровими картинами або просто муаром називають спотворення зображення, які виникають унаслідок взаємодії дрібних регулярних структур. Приклад такого зображення наведено на рис.30.

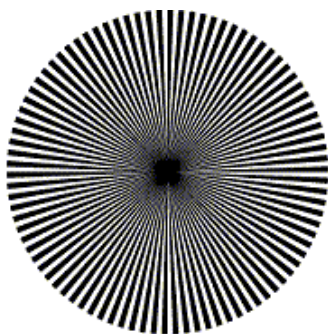
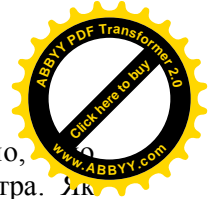
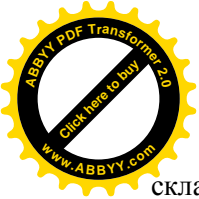


Рис. 30. Тестове зображення для перевірки виникнення муарових картин



На тестовому зображенні було зображено коло, складається із клиноподібних смужок розбіжних від центра. Як видно з рис.30 у центральній частині репродукції виникли істотні спотворення первинної структури зображення, що обумовлено недостатньою частотою дискретизації.

Назва цього явища походить від прізвища французького вченого, що досліджував його й математично описав.

Для усунення перекривання спектрів можна застосовувати попередню фільтрацію. Характеристика фільтра повинна бути рівномірною в частотній смузі існування сигналу й мати значну крутизну спаду амплітудно-частотної характеристики.

2.1.6 Інтерполяційні функції в реальних системах відновлення зображення

Раніше ми вже говорили про те, що точне відновлення зображення з послідовності дискретизованих сигналів забезпечує фільтр із імпульсною характеристикою $\text{sinc}(x)$, але у реальній системі таку функцію практично неможливо сформувати електронними засобами через необмежену область визначення.

На практиці використовують фільтри, що мають інші інтерполяційні характеристики.

Такими інтерполяційними фільтрами є фільтри з прямокутною функцією інтерполяції, трикутною, колоколоподібною та деякими іншими функціями.

Найпростішою інтерполяційною функцією є прямокутна, рис.31,а. У просторі лінійних координат x, y її описують поліномом нульового порядку. У випадку застосування такої функції говорять про інтерполяцію нульового порядку.

Трикутну функцію, рис.31,б, можна утворити як автокореляційну функцію прямокутної. Колоколоподібна функція, рис.31,в, може бути отримано як згортку прямокутної й трикутної.

Залежно від степені полінома, що описує інтерполяційну функцію, говорять про інтерполяцію нульового, першого або більш високого порядку.

Застосування неідеальних інтерполяційних функцій призводить до неточного відновлення зображення. Однак, при правильному виборі цих функцій, а також виборі частоти

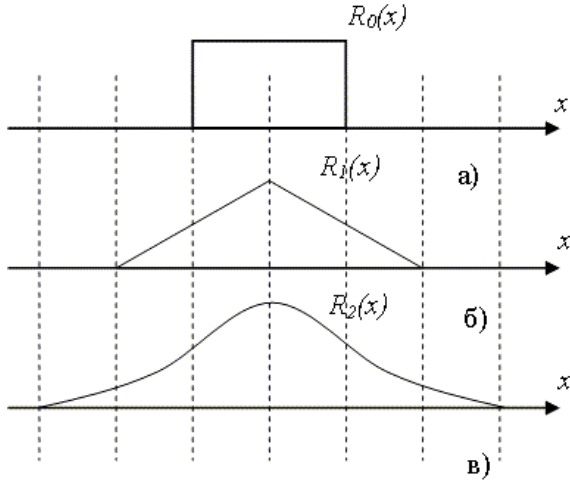
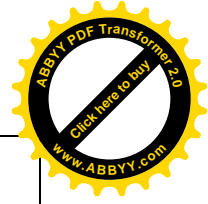


Рис. 31. Інтерполяційні функції реальних фільтрів

дискретизації зображення з урахуванням його частотних характеристик, спотворення, які виникають у репродукції, як правило, суб'єктивно практично непомітні. Характеристики інтерполяційних функцій зведено до табл.2.1.

Таблиця 2.1. Характеристики інтерполяційних функцій

Sinc(x)	$R(x, y) = \frac{4}{T_x T_y} \frac{\sin(\frac{2\pi x}{T_x})}{\frac{2\pi x}{T_x}} \frac{\sin(\frac{2\pi y}{T_y})}{\frac{2\pi y}{T_y}},$ $T_x = \frac{2\pi}{\omega_{xs}}; T_y = \frac{2\pi}{\omega_{ys}}$ $R(\omega_x, \omega_y) = \begin{cases} 1, & \omega_x \leq \omega_{xs}; \omega_y \leq \omega_{ys} \\ 0, & \text{для інших } \omega_x, \omega_y \end{cases}$
---------	--



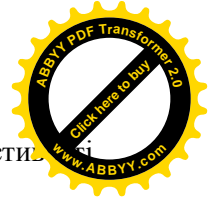
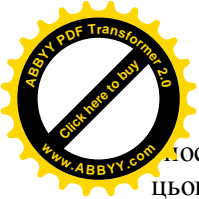
Прямокутна	$R_0(x, y) = \frac{1}{T_x T_y}, - x \leq \frac{T_x}{2}, - y \leq \frac{T_y}{2}$ $R(\omega_x, \omega_y) = \frac{\sin(\frac{\omega_x T_x}{2}) \sin(\frac{\omega_y T_y}{2})}{(\frac{\omega_x T_x}{2})(\frac{\omega_y T_y}{2})}$
Трикутна	$R_1(x, y) = R_0(x, y) * R_0(x, y),$ $R_1(\omega_x, \omega_y) = R_0^2(\omega_x, \omega_y)$
Колоколо- подібна	$R_2(x, y) = R_0(x, y) * R_1(x, y),$ $R_2(\omega_x, \omega_y) = R_0^3(\omega_x, \omega_y)$
Кубічний В-сплайн	$R_3(x, y) = R_0(x, y) * R_2(x, y),$ $R_3(\omega_x, \omega_y) = R_0^4(\omega_x, \omega_y)$
Гаусова	$R(x, y) = [2\pi\sigma_\omega^2]^{-1} \exp\left\{-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma_\omega^2}\right\}$ $R(\omega_x, \omega_y) = \exp\left\{-\frac{\sigma_\omega^2(\omega_x^2 + \omega_y^2)}{2}\right\}$

2.2 Цифрова обробка зображень шляхом поелементних перетворень

У різних інформаційних системах результати обробки даних подають у вигляді зображення, що формують на екрані пристрою відображення.

Процедуру, що забезпечує перетворення електричних сигналів у оптичне зображення називають візуалізацією, а у мультимедійних системах частото застосовують англomовне слово рендерінг (rendering).

Відтвореному зображенню бажано надати таких властивостей, за яких сприйняття окремих, найбільш суттєвих фрагментів зображення або зображення в цілому буде зручним для



досліджувача з огляду на художні або технологічні властивості цього зображення.

Коли мова йде про якість зображення, то її не завжди оцінюють за точністю відтворення первинного образу або лінійністю передавання зміни параметрів. Так, наприклад, зображення, яке було отримано у сутінках або тумані буде характеризуватись малою контрастністю, нечіткими обрисами, блідим забарвленням. Зображення, яке було отримано за допомогою інфрачервоного перетворювача, за умови безпосереднього відтворення сигналів може мати малу кількість градацій яскравості, що не дозволить виділити мало контрастні деталі тощо. Часто буває корисним підкреслити, підсилити якісь особливості відтвореної сцени з метою поліпшення її суб'єктивного сприйняття.

Суб'єктивність сприйняття зображення у разі його візуального аналізу та оцінки значно ускладнює застосування формалізованих підходів щодо формування властивостей відтвореного зображення. Тому під час здійснення візуалізації зображень набули поширення методи, для яких відсутні строгі математичні критерії оптимальності. Застосування тих чи інших методів, параметрів та режимів часто ґрунтується на досвіді, суб'єктивному сприйнятті та мистецьких здібностях.

Серед процедур, що використовують для обробки зображень можна виділити дві групи:

- поелементна обробка;
- кореляційна обробка.

За умови використання методів обробки першої групи результат обробки будь-якої точки кадру зображення залежить тільки від значення відліку характерного параметра первинного зображення в цій же точці. Очевидним достоїнством таких процедур є простота реалізації. Разом з тим, такі процедури призводять до значного суб'єктивного поліпшення візуальної якості. Саме цим визначається увага, що їй приділяють поелементним процедурам. Відзначимо, що поелементну обробку часто застосовують як заключний етап процесу комплексної обробки зображень.

Друга група зазначених вище процедур базується на тому, що між елементами всього зображення або окремих його фрагментів є



зв'язки або інакше - кореляція. Для одержання результату перетворення для кожної точки зображення в цьому випадку залучають дані про параметри певної множини точок первинного зображення, що знаходяться навколо оброблюваної точки.

Сутність поелементної обробки зображень полягає у встановленні певної функціональної залежності між остаточним значенням відліку сигналу зображення та його первинним значенням або статистичною характеристикою. Нехай $x(i, j) = x_{i, j}$, $y(i, j) = y_{i, j}$ - значення яскравості вхідного й кінцевого сигналів зображень в точці, що має координати відповідно до i відліку в напрямку вертикальної осі (номер рядка сигнальної двовимірної матриці) й j відліку в напрямку горизонтальної осі (номер стовпчика). Поелементна обробка базується на тому, що між значеннями яскравості існує однозначна функціональна залежність

$$y_{i, j} = f_{i, j}(x_{i, j}), \quad (2.33)$$

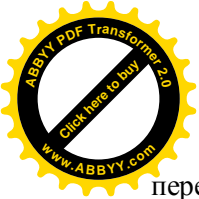
що дозволяє на підставі значень первинного сигналу визначити значення кінцевого. Як вже було зазначено, параметри функції $f_{i, j}(\cdot)$, що описує процес обробки, можуть залежати від поточних координат. Якщо така залежність існує, тоді обробка, що її здійснюють називається неоднорідною. Однак у більшості процедур, що знайшли практичне застосування, здійснюють однорідну поелементну обробку. У цьому випадку індекси i й j у виразі (2.33) можуть бути відсутні. Залежність між яскравістю елементів вхідного й кінцевого зображень у цьому випадку буде визначено функцією:

$$y = f(x), \quad (2.34)$$

однаковою для всіх точок зображення.

Процедури поелементної обробки можна розділити на процедури пов'язані із зміною контрасту зображення та процедури бінаризації зображень.

Контраст зображення – це параметр, що дорівнює відношенню максимальної яскравості до мінімальної в полі зображення.



Контрастність зображення – параметр, що визначає перепад яскравості відносно середнього рівня й чисельно дорівнює відношенню різниці максимальної й мінімальної яскравості до їх суми. Часто остаточне значення подають у відсотках.

2.2.1 Лінійне контрастування зображень

Лінійне контрастування використовують для узгодження динамічного діапазону вхідного сигналу зображення й динамічного діапазону яскравості пристрою відображення. Відтворення зображення може бути здійснено на екрані, у вигляді друкованої репродукції, діапозитиву або негативу на відповідній плівці. Якщо для цифрового значення кожного відліку зображення виділяється 1 байт (8 біт) пристрою пам'яті, то вхідний або вихідний сигнали можуть набувати одного з 256 значень. В цьому випадку діапазон можливих значень аналогового сигналу знаходиться в межах 0...255. Зазвичай значення 0 відповідає рівню чорного, а значення 255 - рівню білого. Припустимо, що мінімальна й максимальна яскравості первинного зображення мають значення x_{min} й x_{max} відповідно. Якщо ці параметри або один з них істотно відрізняються від граничних значень діапазону сигналів яскравості, то відтворена картина виглядає як малоконтрастна, незручна для сприйняття та дослідження. Приклад такого невдалого опису дискретизованого зображення наведено на рис.11,а, де діапазон яскравості має границі $x_{min} = 103$, $x_{max} = 157$ й середнє значення яскравості 131.

Під час лінійного контрастування здійснюють лінійне поелементне перетворення вхідної величини x відповідно до рівняння

$$y = a \cdot x + b, \quad (2.35)$$

де параметри a й b визначаються бажаними значеннями мінімальної y_{min} й максимальної y_{max} яскравості е кінцевому зображенні.

Для знаходження зазначених параметрів треба розв'язати систему рівнянь:



$$\begin{cases} y_{min} = a \cdot x_{min} + b \\ y_{max} = a \cdot x_{max} + b \end{cases}$$

Після підстановки знайдених значень у (2.35) рівняння для лінійного контрастування набуває остаточного вигляду:

$$y = \frac{x - x_{min}}{x_{max} - x_{min}} (y_{max} - y_{min}) + y_{min}. \quad (2.36)$$

Результат лінійного контрастування вхідного зображення рис. 32,а, наведено на рис. 32,б з параметрами кінцевого зображення $y_{min} = 0$ й $y_{max} = 255$.

Порівняння двох зображень свідчить про значно кращу візуальну якість обробленого зображення. Поліпшення обумовлено узгодженням динамічного діапазону вхідного зображення й динамічного діапазону екрана внаслідок здійснення лінійного контрастування.

2.2.2 Соляризація зображення

Даний різновид нелінійного контрастування отримав свою назву від слова “солярій”(лат. solarium, від sol – Сонце). Результат здійснення даного перетворення призводить до просвітління певної частини зображення, що має рівні яскравості, що відносяться до середини динамічного діапазону.

Перетворення здійснюють відповідно до співвідношення

$$y = k \cdot x \cdot (x_{max} - x), \quad (2.37)$$

де x_{max} - максимальне значення вихідного сигналу, а k - константа, що дозволяє управляти динамічним діапазоном перетвореного зображення. Функція, що описує дане перетворення, є квадратичною, її графік для $k = 1$ наведено на рис. 33. При $y_{max} = x_{max}$ динамічні діапазони зображень збігаються, якщо $k = 4/x_{max}$. Інший спосіб нормалізації динамічного діапазону може бути здійснено шляхом застосування одного з методів контрастування, наприклад, описаного вище лінійного контрастування.



а)

б)

Рис. 32. Лінійне контрастування зображення

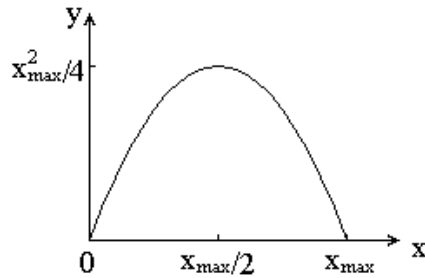


Рис. 33. Амплітудна характеристика процесу соляризації

Приклад соляризації наведено на рис.34.



а)

б)

Рисунок 34 - Приклад соляризації

Внаслідок соляризації ділянки вхідного зображення, де є рівень білого або близький до нього рівень яскравості, після обробки мають рівень чорного. Рівень чорного збережено також й для відповідних фрагментів вихідного зображення. Рівень білого в кінцевому зображенні набувають ділянки, що мали на вході середній рівень яскравості (рівень сірого).

На рис. 34,а наведено первинне зображення, а на рис.34,б – це саме зображення після соляризації й лінійного контрастування для розширення динамічного діапазону яскравості кінцевого зображення.

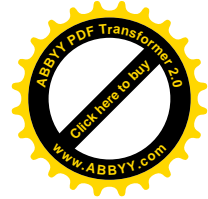
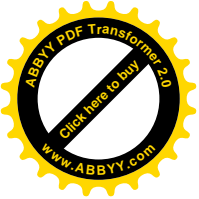
2.2.3 Зональне контрастування зображення

Цей різновид контрастування іще називають препаруванням зображення, тобто здійснення такого перетворення яскравостей певної частини динамічного діапазону, що дозволяє дослідити або підкреслити певні властивості зображення.

Препарування - це клас поелементних перетворень зображень, більшість із яких має власну назву.

Амплітудні характеристики процедур препарування, що найчастіше застосовують на практиці наведено на рис.35:

- а) бінаризація;
- б) зріз за яскравістю;

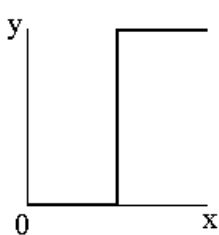


- в) інверсне контрастування;
- г) зональне лінійне контрастування.

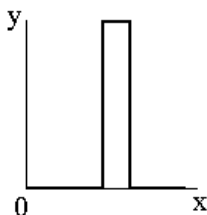
На рис.35,ж - л наведено приклади комбінацій основних процедур.

Бінаризація – це перетворення з пороговою характеристикою. За допомогою бінаризації на півтонове зображення, що містить всі рівні яскравості, перетворюють у таке, що містить тільки два рівні яскравості $y=0$ або $y=y_{max}$. Операцію застосовують, коли метою обробки є виділення характерних контурів об'єктів зображення. Основною проблемою під час здійснення такої обробки є визначення порогового значення x_0 , порівняння з яким яскравості вхідного зображення дозволяє визначити значення кінцевого зображення в кожній його точці. Найбільш виправданим підходом для визначення порогового значення є застосування математичного апарату теорії ймовірностей, випадкових процесів і випадкових полів для опису зображень.

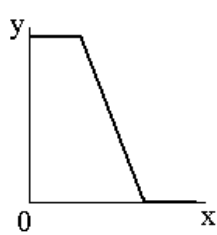
За цієї умови визначення оптимального порогу бінарного квантування являє собою статистичне завдання. Статистичному підходу до обробки зображень у подальшому буде приділено певну увагу, у тому числі й при розв'язанні завдання поділу пікселів зображення на два класи, тобто, для здійснення бінарної сегментації.



а)



б)



в)

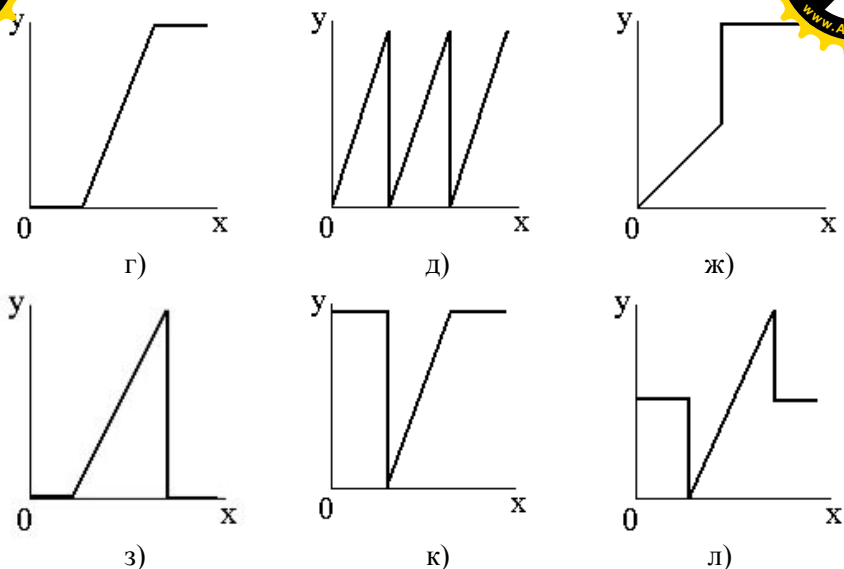


Рис. 35. Амплітудні характеристики процедур зонального контрастування

Іноді під час обробки зображення доводиться мати справу із зображеннями, збереженими у напівтоновому вигляді, але за своєю сутністю вони є такими, що мало відрізняються від бінарних.

До таких належать текст, штрихові малюнки, креслення, зображення відбитка пальця, приклад якого наведено на рис.38,а. Щільність імовірності $w(x)$, що описує розподіл яскравості такого зображення, може містити два добре розділених піка. Інтуїтивно зрозуміло, що поріг бінарного квантування варто вибирати посередині провалу між цими піками, як це показано на рис.36.

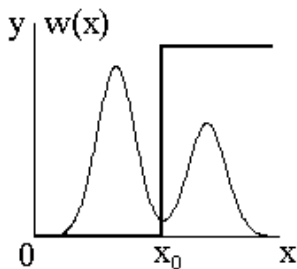


Рис. 36. Вибір порога бінарного квантування

аміна вихідного напівтонового зображення *бінарним препаратом*.
вирішує два основні завдання. По-перше, буде досягнуто більшої
наочності під час візуального сприйняття у порівнянні з
первинним зображенням.

По-друге, буде відчутно скорочено обсяг пам'яті для
зберігання зображення, оскільки бінарний препарат для запису
кожної точки бінарного зображення потребує лише 1 біт пам'яті, у
той час як для запам'ятовування напівтонового зображення частіше
за все слід використовувати 8 біт. Приклад бінаризації зображення
відбитка пальця наведено на рис.35,б.

Сутність інших перетворень, наведених на рис.35, можна
зрозуміти виходячи безпосередньо з їхніх характеристик.
Наприклад, перетворення з характеристикою, наведеною на
рис.35,б, використовують для здійснення зрізу зображення за
яскравістю, виділяючи ті його ділянки, де яскравість знаходиться в
межах виділеного інтервалу. За такого перетворення інші ділянки
виявляються повністю загашеними (мають яскравість, що
відповідає рівню чорного). Для детального дослідження
зображення можна застосувати переміщення досліджуваного
інтервалу вздовж шкали яскравості зображення, а також
застосувати зміну ширини досліджуваного інтервалу.

Перетворення, наведене на рис.35,ж, також дозволяє
підвищити детальність спостережуваної картини в обраному
діапазоні яскравості, однак на відміну від попереднього тут кінцеве

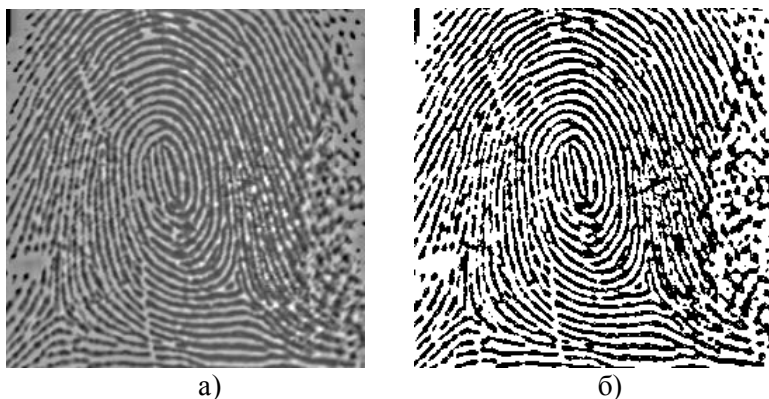


Рис. 37. Приклад бінаризації зображення



Зображення відтворюється у повному динамічному діапазоні. Своєю сутністю це перетворення являє собою лінійне контрастування, що застосовано до певного піддіапазону яскравості вхідного зображення. Як і у попередньому варіанті, ділянки, що не потрапили в цей діапазон, утворюють після препарування чорний фон.

Іноді наочність зображення підвищують шляхом здійснення контрастування із застосуванням пілкоподібної характеристики перетворення (рис.35,к). В цьому випадку різні піддіапазони яскравості одночасно зазнають локального лінійного контрастування. Однак треба взяти до уваги ту обставину, що дане перетворення, як і деякі інші, може супроводжуватись появою хибних контурів у кінцевому препараті.

Аналогічно можна якісно розглянути й інші процедури препарування, що їх наведено на рис.35.

2.2.4 Перетворення гістограм, еквалізація

В результаті всіх поелементних перетворень відбувається зміна закону розподілу ймовірностей яскравості пікселів, що описує зображення. Розглянемо механізм цієї зміни на прикладі довільного перетворення з монотонною характеристикою. Нехай функція перетворення $y = f(x)$ (рис.38), а однозначна обернена до неї функція $x = \varphi(y)$. Припустимо, що випадкова величина x розподілена відповідно до щільності ймовірності $\omega_x(x)$.

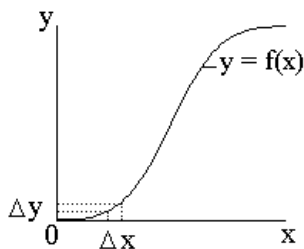
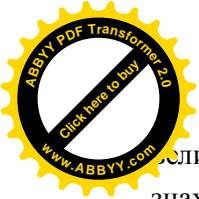


Рис. 38. Нелінійне перетворення випадкової величини

Нехай Δx - довільний малий інтервал значень випадкової величини x , а Δy - відповідний інтервал перетвореної випадкової



величини y . Знаходження величини x в інтервалі Δx обумовлює

знаходження величини y в інтервалі Δy , що означає ймовірнісну еквівалентність цих двох подій. Тому, з огляду на малі розміри обох інтервалів, можна записати приблизну рівність:

$$w_x(x)|\Delta x| \approx w_y(y)|\Delta y|,$$

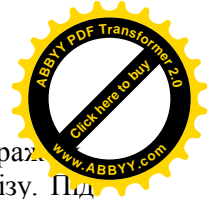
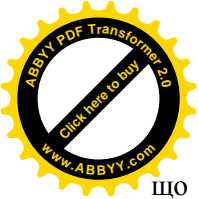
де модулі враховують залежність ймовірностей від абсолютних довжин інтервалів (незалежність від знаків Δx та Δy). Для обчислення щільності ймовірності перетвореної величини, підставимо замість x її вираз через обернену функцію y виконаємо граничний перехід $\Delta x \rightarrow 0$ (що обумовлює $\Delta y \rightarrow 0$). В результаті можна записати:

$$w_y(y) = w_x(\varphi(y)) \cdot \left| \frac{d\varphi(y)}{dy} \right|. \quad (2.36)$$

Цей вираз дозволяє обчислити щільність ймовірності результату перетворення, що *не збігається* із щільністю розподілу вихідної випадкової величини. Зрозуміло, що вигляд закону розподілу щільності ймовірності $w_y(y)$ залежить від характеристики перетворення, оскільки вираз (2.36) містить обернену функцію перетворення та її похідну.

Співвідношення набувають більш складного вигляду в разі, коли перетворення описується не взаємо-однозначною функцією. Прикладом такої більш складної характеристики з неоднозначною оберненою функцією може служити пилкоподібна характеристика рис.35,к. Однак, загалом, сутність ймовірнісних перетворень при цьому не змінюється.

Всі поелементні перетворення зображень, що їх було наведено вище можна розглядати з точки зору зміни щільності ймовірності відповідно до (2.36). Очевидно, що в результаті кожного перетворення щільність ймовірності кінцевого зображення не буде співпадати із щільністю ймовірності вихідного зображення (за винятком, звичайно, тривіального перетворення $y = f(x) \equiv x$). Неважко переконатися, що за умови лінійного контрастування буде збережено вигляд закону розподілу щільності ймовірності, однак параметри щільності ймовірності перетвореного зображення будуть іншими.



Оцінка перерозподілу імовірнісних характеристик зображень, що пройшли нелінійну обробку, є *прямим* завданням аналізу. Під час реалізації практичних завдань обробки зображень може бути поставлено *зворотнє завдання*: за відомим законом розподілу щільності ймовірності $w_x(x)$ й бажаним результатом $w_y(y)$ визначити функціональну залежність необхідного перетворення $y = f(x)$, яке слід застосувати для досягнення поставленої мети.

У практиці цифрової обробки зображень часто застосовують перетворення зображення із застосуванням рівно ймовірного розподілу. У цьому випадку

$$w_y(y) = \begin{cases} 1 / (y_{max} - y_{min}), & \text{для } y_{min} \leq y \leq y_{max}, \\ 0 & \text{для інших } y, \end{cases} \quad (2.37)$$

де y_{min} й y_{max} - мінімальне й максимальне значення яскравості перетвореного зображення.

Визначимо характеристику перетворення необхідну для досягнення зазначеного результату. Нехай x та y зв'язані функцією (2.34), а $F_x(x)$ й $F_y(y)$ - інтегральні закони розподілу вхідної й кінцевої величин. З огляду на (2.37), знаходимо:

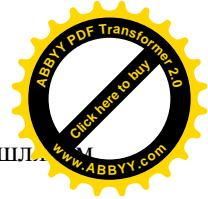
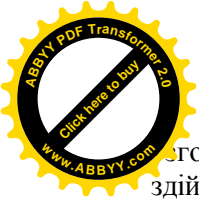
$$F_y(y) = \int_{y_{min}}^y w_y(y) dy = \frac{y - y_{min}}{y_{max} - y_{min}}.$$

Підставимо цей вираз у рівняння імовірнісної еквівалентності $F_x(x) = F_y(y)$.

Після простих перетворень одержимо кінцеве співвідношення

$$y = (y_{max} - y_{min}) \cdot F_x(x) + y_{min}. \quad (2.38)$$

Згідно (2.38) первинне зображення необхідно перетворити із застосуванням нелінійної характеристики перетворення $F_x(x)$, що визначається інтегральним законом розподілу самого вихідного зображення. Після здійснення нелінійного перетворення необхідно



згодити динамічний діапазон кінцевої величини шляхом здійснення операції лінійного контрастування.

Аналогічним чином може бути здійснено розв'язок інших подібних завдань, в яких слід привести закони розподілу зображення до заданого виду. Існує ряд таких перетворень. Одне з таких перетворень називається *гіперболізація розподілу*. Воно передбачає перетворення щільності ймовірності кінцевого зображення до гіперболічного вигляду:

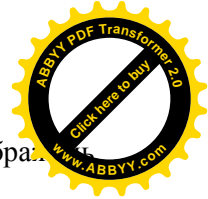
$$w_y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y(\ln y_{max} - \ln y_{min})}, & \text{для } y_{min} \leq y \leq y_{max}, \\ 0 & \text{для інших } y \end{cases} \quad (2.39)$$

Подібне перетворення можна застосовувати для надання блідому зображенню більшої глибини та правдоподібності. Якщо врахувати, що чутливість зору людини змінюється в залежності від яскравості за логарифмічним законом, то в результаті зазначеного перетворення результуюча щільність імовірності суб'єктивно сприйнятого зображення виявляється рівномірною. Таким чином, відмінність від попереднього приклада полягає в урахуванні фізіологічних властивостей зору. Можна показати, що зображення із щільністю ймовірності (2.39) можна отримати на виході нелінійного елемента з характеристикою:

$$y = y_{min} \cdot \left(\frac{y_{max}}{y_{min}} \right)^{F_x(x)}, \quad (2.39)$$

що також обумовлено інтегральним законом розподілу вихідного зображення.

Таким чином, перетворення щільності ймовірності передбачає знання інтегрального розподілу для первинного зображення. Як правило, достовірні відомості про нього відсутні. Використання аналітичних апроксимацій для опису функцій розподілу також малоприслатне, тому що їхні невеликі відхилення від дійсних розподілів можуть призводити до істотної відмінності



кінцевих результатів. Тому в практиці обробки зображень перетворення розподілів виконують у два етапи.

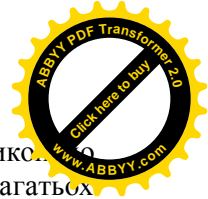
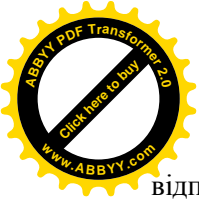
На першому етапі вимірюють гістограму вхідного зображення. Для цифрового зображення, шкала яскравості якого, знаходиться в межах $0..255$, гістограма являє собою таблицю з 256 чисел. Кожне з них показує кількість пікселів певної яскравості у даному кадрі. Для знаходження оцінки розподілу ймовірностей яскравості пікселів зображення необхідно розділити всі числа цієї таблиці на загальний розмір вибірки, що дорівнює загальному пікселів у зображенні, Позначимо цю оцінку $w_x^*(j), 0 \leq j \leq 255$. Тоді оцінку інтегрального розподілу буде визначено за формулою:

$$F^*(j) = \sum_{i=0}^j w_x^*(i).$$

На другому етапі виконують безпосередньо нелінійне перетворення (2.34), що забезпечує необхідні властивості кінцевого зображення. Під час такого перетворення замість невідомого справжнього інтегрального розподілу використовують його оцінку, що базується на гістограмі. З урахуванням цього всі методи поелементного перетворення зображень, метою яких є зміна законів розподілу, одержали назву гістограмних методів. Зокрема, перетворення, в результаті якого кінцеве зображення має рівномірний розподіл, називається еквалізацією (вирівнюванням) гістограм.

Відзначимо, що процедури перетворення гістограм можна застосовувати як до зображення в цілому, так і до окремих його фрагментів. Останнє може бути корисним для обробки нестационарних зображень, зміст яких істотно розрізняється за своїми характеристиками на різних ділянках. У цьому випадку кращого ефекту можна досягти шляхом застосування гістограмної обробки до окремих ділянок зображення.

Використання співвідношень (2.36)-(2.40), що є справедливими для зображень із безперервним розподілом яскравості, є не цілком коректним для цифрових зображень. Необхідно брати до уваги, що в результаті обробки не вдається одержати ідеальний розподіл ймовірностей вихідного зображення, тому корисно здійснювати контроль його гістограми.



На рис.2.39 наведено приклад еквалізації, яку вико... відповідно до викладеної методики. Характерною рисою багатьох зображень, одержаних у реальних системах відображення є значна питома вага темних ділянок й порівняно мале число ділянок з високою яскравістю. Еквалізація забезпечує коригування картини шляхом вирівнювання інтегральної площі ділянок з різною яскравістю. Порівняння вхідного (рис.39,а) й обробленого (рис.39,б) зображень показує, що перерозподіл, який здійснено під час обробки, яскравості призводить до поліпшення візуального сприйняття.



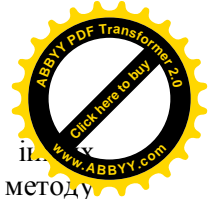
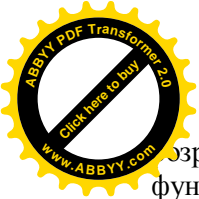
а)

б)

Рис. 39. Приклад еквалізації зображення: а – початкове зображення, б – результат обробки

2.2.5 Застосування табличного методу для поелементного перетворення зображень

Під час поелементних перетворень зображень обчислення за формулою (2.34) необхідно виконувати для всіх пікселів вхідного зображення. Навіть за умови не дуже трудомістких обчислень відповідно до виду застосовуваного перетворення загальний обсяг обчислювальної роботи, виконуваної ЕОМ, може виявитись значним. У тих завданнях, де функція $f(x)$ у формулі (2.34) передбачає трудомісткі обчислення (множення, ділення,



Обрахунки тригонометричних функцій, статистичних та інших функцій), застосування безпосередньо прямого методу перетворення яскравості може виявитись взагалі неприйнятним. Крім того, за таких обставин час виконання обробки залежить від її обчислювальної складності. Для запобігання таких незручностей застосовують табличний метод, що отримав широке розповсюдження у практиці цифрової обробки зображень.

Сутність табличного методу полягає в тому, що шляхом попереднього розрахунку створюють таблицю функції $y = f(x)$, загальний вигляд якої наведено нижче

Таблиця.2.2. Значення функції перетворення $y = f(x)$

x	x_1	x_2	...	x_{n-1}	x_n
$y=f(x)$	y_1	y_2	...	y_{n-1}	y_n

Під час обробки зображення замість обчислень використовують готові результати шляхом звернення до цієї таблиці. Значення вхідної яскравості x використовують для визначення номера стовпчика, з якого треба прочитати значення перетвореного сигналу y . Виконання цієї нескладної операції в порівнянні з безпосереднім обчисленням значень y дозволяє зробити обробку технологічною, а тривалість обчислень стає незалежною від складності перетворення.

Необхідно взяти до уваги той факт, що всі реальні таблиці, які можна записати в оперативній пам'яті комп'ютера, мають обмежену величину. Якщо множина значень вхідного сигналу перевищує розміри таблиці, то при розташуванні значення x між точками, для яких у таблиці зафіксовано певні значення, доводиться застосовувати інтерполяцію - наближене визначення відсутніх значень функції $y = f(x)$ за наявними сусідніми значеннями. Часто для забезпечення цих обчислень використовують лінійну інтерполяцію, за якої на проміжку між заданими вузлами невідому функцію замінюють відрізком прямої. Слід зазначити, що у разі, якщо вхідне зображення подано у вигляді цілого числа з діапазону 0..255, то розміри повної таблиці, що містить всі значення функції є незначними. Крім того, у цьому випадку значення яскравості вхідного сигналу є адресою, що



означає номер стовпчика у таблиці функції. Обробка з використанням цього методу виявляється дуже зручною і швидкою.

2.3 Фільтрація зображень

Дуже поширеним різновидом обробки зображень, що базується на взаємозв'язках параметрів різних пікселів зображення, є фільтрація зображень.

Зазвичай зображення, які сформовано у різних інформаційних системах, певною мірою спотворено дією завад. Наявність завад ускладнює візуальний аналіз зображень людиною-оператором й автоматичну обробку технічними засобами.

Ослаблення дії завад може бути здійснено фільтрацією. Але фільтрацію можна застосувати й для перетворення якісних показників зображення з метою надати йому інших властивостей. Наприклад, можна створити ефект скручування, розмивання, що сприймається як наслідок швидкого руху в певному напрямі тощо. Зрозуміло, що в цьому випадку кінцеве зображення буде суттєво відрізнятись від початкового, принципи перетворення зображення, які буде застосовано в цьому випадку схожі з тими, що застосовують для відокремлення корисного зображення від завад. Тому подібні перетворення у сучасних мультимедійних технологіях також називають фільтрацією.

Під час фільтрації сигнал яскравості кожної точки початкового зображення, спотвореного завадою, замінюють іншим значенням яскравості, яке за певним критерієм вважають таким, що є найменш спотвореним завадою. Алгоритми заміни поточного значення сигналу яскравості на інші базуються на кореляційних зв'язках певної множини сигналів сусідніх пікселів. Особливо ефективно може бути застосовано фільтрацію у випадках, коли зображення та завада мають відмінні частотні характеристики. Сигнал зображення, як функція просторових координат, змінюється повільніше (іноді значно повільніше), ніж завада, що також є двовимірною функцією. Ця обставина дозволяє під час оцінки корисного сигналу в кожній точці кадру взяти до уваги деяку множину сусідніх точок. У інших випадках, навпаки, ознакою корисного сигналу є різкі перепади яскравості. Проте, як



правило, частота цих перепадів відносно невелика, так що в значних проміжках між ними сигнал або постійний, або змінюється повільно. І в цьому випадку властивості сигналу проявляються не тільки під час його спостереження у локальній точці, але й у певній просторовій околиці. Зазначимо, що поняття околиці є певною мірою умовним, тому що в одному випадку її може бути утворено лише найближчими до даного пікселями, а може – й віддаленими пікселями, що знаходяться на значній відстані. У цьому останньому випадку ступінь впливу значень яскравості далеких та близьких пікселів на рішення стосовно кінцевої амплітуди сигналу після фільтрації буде різним.

Під час розробки певного фільтра головне завдання полягає у знаходженні раціональної обчислювальної процедури, яка дозволить досягти якнайкращих результатів. Найбільш поширеним підходом для розв'язання цього завдання є застосування імовірнісних моделей зображення й завад, а також використання статистичних критеріїв оптимальності. Такий підхід обумовлено випадковим характером інформаційного сигналу й завади та прагненням досягти мінімальної відмінності результату обробки від ідеального сигналу. Для різних сюжетів може бути застосовано різні описи, математичні моделі й алгоритми. Крім того, може бути застосовано різні критерії оптимальності, що також призводить до збільшення різноманітності методів фільтрації. Іноді через математичні труднощі не можна знайти оптимальну процедуру. Складність знаходження точних рішень породжує різні варіанти наближених методів та процедур.

2.3.1 Оптимальна лінійна фільтрація зображення

Розглянемо умови, за яких можна здійснити фільтрацію сигналів зображення таким чином, що похибка відтворення буде мінімальною.

Будемо вважати, що $x_{i,j}$ - значення корисного сигналу яскравості, що знаходиться на перетині i -го рядка й j -го стовпчика двовимірної сигнальної матриці, а сигнал на вході фільтру буде описано співвідношенням:

$$y_{i,j} = f(x_{i,j}, n_{i,j}), \quad i = \overline{0, I-1}, j = \overline{0, J-1},$$

де $n_{i,j}$ - значення сигналу завади у точці з координатами (i, j) , $f(\cdot)$ - функція, що описує взаємодію сигналу й завади, а I та J - відповідно число рядків і стовпчиків сигнальної матриці.

Надалі будемо дотримуватись для опису зображень декартової системи координат з початком в лівому верхньому куті растру й осями спрямованими праворуч й униз. На рис. 2.39 наведено приклади околиць різних типів. Їх зображено у вигляді множини точок. Активною точкою околиць, для якої здійснюють обробку, є точка з координатами i, j (на рис. 2.40 - не зафарбовано). Залежно від типу околиці розрізняють **каузальну**, **некаузальну й напівкаузальну** фільтрацію зображень.

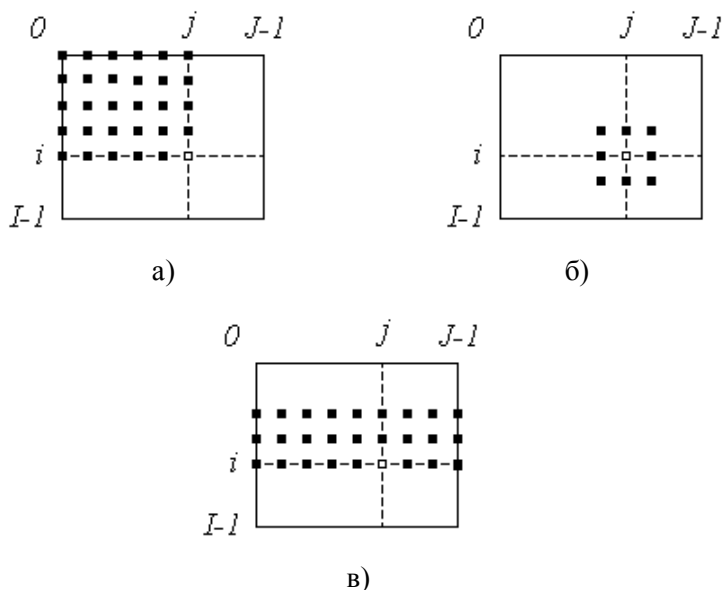


Рис. 40. Приклади можливих околиць точки зображення

Поняття „каузальний” походить від англomовного „cause” й означає причинно-наслідкову залежність поточної точки i, j й точок, що входять в околицю. Якщо обидві координати всіх точок



Околиці не перевищують відповідних координат поточної точки. Околиця й перетворення, в якому її використовують називаються каузальними. Приклад такої околиці наведено на рис. 40,а.

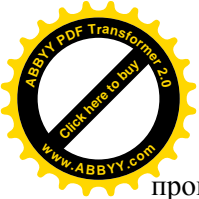
Деякі точки околиці, наведеної на рис. 40,б, задовольняють принципу каузальності. Разом з тим, тут є й такі точки, обидві координати яких перевищують відповідні координати робочої точки. Фільтрація, в якій використовують такі околиці називають некаузальною. Околицю, що наведено на рис. 40,в, називають напівкаузальною.

Зміст наведеної класифікації околиць полягає в тому, що, згідно принципу причинності, на формування відгуку фізично реалізованого фільтру не можуть впливати елементи вхідного сигналу, які не надійшли на момент формування кінцевого сигналу. Це є важливим для динамічних систем, в яких обробку здійснюють в реальному часі. Під час цифрової обробки зображень здебільшого доводиться здійснювати обробку сигналів, що знаходяться у пам'яті комп'ютера у вигляді двовимірної таблиці даних, що містить інформацію про все зображення. У цьому випадку до формування кінцевого сигналу можна залучити сигнали що пов'язані з будь-якими пікселями околиці без обмежень.

За лінійної фільтрації вихідний сигнал буде визначено відповідно до співвідношення:

$$x^*(i, j) = \sum_{i_1, j_1 \in S} a(i_1, j_1) \cdot y(i - i_1, j - j_1). \quad (2.42)$$

У цьому виразі $x^*(i, j) = x_{i, j}^*$ - результат фільтрації корисного сигналу $x(i, j) = x_{i, j}$ в точці растру з координатами (i, j) ; S - множина точок, що утворюють околицю; $a(i_1, j_1)$ - вагові коефіцієнти, сукупність яких складає двовимірну імпульсну характеристику (ІХ). Якщо область S обмежено, то імпульсна характеристика має кінцеву довжину, а фільтр є КІХ-фільтром. В іншому випадку імпульсна характеристика має нескінченну довжину, а фільтр є НІХ-фільтром. Імпульсна характеристика, що входить до складу (2.42) не залежить від координат точки (i, j) , для якої буде визначено вихідний ефект. Процедури обробки зображень, що не залежать від координат, називаються однорідними.



Найбільш поширеним критерієм оптимальності для оцінки процедур фільтрації є критерій мінімуму середнього квадрата похибок. У нашому випадку таку оцінку можна зробити відповідно до співвідношення:

$$E \left\{ \left[x(i, j) - \sum_{i_1, j_1 \in S} a(i_1, j_1) \cdot y(i - i_1, j - j_1) \right]^2 \right\} = \min_{a(\cdot)} \quad (2.43)$$

де $E\{\circ\}$ - символ математичного сподівання.

Згідно з (2.43) визначення оптимального фільтру полягає у визначенні такої імпульсної характеристики, що забезпечує найменшу середньо квадратичну помилку.

Оптимізаційну задачу з використанням (2.43) може бути зведено до розв'язання рівняння або системи рівнянь. Знайдемо екстремальне значення функції (2.43) в залежності від параметра $a_{k,l}$. Для цього слід знайти похідну від лівої частини виразу (2.43) відносно коефіцієнту $a(k, l) = a_{k,l}$ й прирівняти його нулю. Якщо взяти до уваги, що операції диференціювання, додавання й математичного сподівання є лінійними, й тому можна змінити порядок їх виконання. В результаті можна отримати співвідношення

$$E \{ x_{i,j} \cdot y_{i-k,j-l} \} = \sum_{i_1, j_1 \in S} a_{i_1, j_1} \cdot E \{ y_{i-i_1, j-j_1} \cdot y_{i-k, j-l} \} \quad (2.44)$$

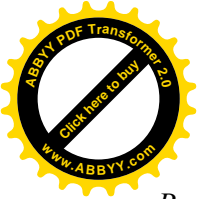
Окремі складові співвідношення (2.44), що обчислюються за формулою математичного сподівання є відліками кореляційними функціями які можна позначити як

$$B_y(k, l) = E \{ x_{i,j} \cdot y_{i-k, j-l} \},$$

$$B_y(k - i_1, l - j_1) = E \{ y_{i-i_1, j-j_1} \cdot y_{i-k, j-l} \}.$$

Із застосуванням таких позначень вираз (2.44) можна переписати у вигляді

$$B_{xy}(k, l) = \sum_{i_1, j_1 \in S} a_{i_1, j_1} \cdot B_y(k - i_1, l - j_1). \quad (2.45)$$



Якщо автокореляційна $B_x(\circ)$ й взаємно кореляційна $B_{xy}(\circ)$ функції відомі, то співвідношення (2.45) є лінійним алгебраїчним рівнянням відносно невідомих коефіцієнтів a_{i_1, j_1} . Число невідомих в цьому рівнянні дорівнює числу точок n_S , що містяться в околиці S . Обмежимося розглядом КІХ-фільтрації. Лінійне алгебраїчне рівняння з багатьма невідомими має безліч рішень. Для одержання однозначного розв'язку можна зробити диференціювання співвідношення (2.43) відносно решти $n_S - l$ невідомих. Внаслідок цієї процедури одержимо додатково $n_S - l$ рівнянь, що відрізняються одне від одного лівими частинами $B_{xy}(\circ)$ та значеннями $B_y(\circ)$, які відіграють роль коефіцієнтів у правих частинах, оскільки кореляції, що їх визначають, слід обчислювати кожного разу в інших точках. В результаті буде утворено систему n_S лінійних алгебраїчних рівнянь з n_S невідомими, яку називають у теорії фільтрації рівнянням **Вінера-Хопфа**:

$$\begin{cases} B_{xy}(k, l) = \sum_{i_1, j_1 \in S} a_{i_1, j_1} \cdot B_y(k - i_1, l - j_1) \\ k, l \in S \end{cases}, \quad (2.46)$$

Якщо розв'язати цю систему рівнянь відносно всіх невідомих a_{i_1, j_1} , загальна кількість яких n_S , то буде знайдено імпульсну характеристику лінійного фільтру, що мінімізує середній квадрат помилок фільтрації.

Для оцінки похибки відтворення зображення внаслідок оптимальної фільтрації визначимо середній квадрат похибки. Щоб отримати бажаний результат необхідно виконати піднесення до квадрату правої частини виразу (2.43) й врахувати рівняння Вінера-Хопфа (2.46). У результаті одержимо



$$D_\varepsilon = D_x \left[1 - \sum_{i_1, j_1} \sum_{\in S} a_{i_1, j_1} \cdot R_x(i_1, j_1) \right], \quad (2.47)$$

де $D_\varepsilon = E\{\varepsilon^2(\circ)\}$ - середній квадрат помилок фільтрації, $R_x(i_1, j_1)$ - нормована автокореляційна функція корисного сигналу.

Особливий інтерес складає оцінка зміни середньої яскравості відфільтрованого зображення. Для з'ясування цього обчислимо математичне сподівання стосовно обох частин рівняння (2.42). В результаті одержимо

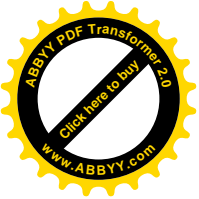
$$m_{x^*} = m_y \cdot \sum_{i_1, j_1} \sum_{\in S} a(i_1, j_1), \quad (2.48)$$

де m_y - середня яскравість вхідного зображення $y(\circ)$, що не залежить від координат. Одержаний результат (2.48), говорить про те, що й середня яскравість m_{x^*} зображення після фільтрації $x^*(\circ)$ також є величиною постійною в межах растру зображення. Часто під час здійснення обробки зображення прагнуть зберегти його середню яскравість. Як впливає з одержаного виразу (2.48), досягти цього можна за умови

$$\sum_{i_1, j_1} \sum_{\in S} a(i_1, j_1) = 1, \quad (2.49)$$

яка є додатковою вимогою до імпульсної характеристики фільтру. Тому оптимізаційну задачу (2.43) необхідно вирішувати з урахуванням даної умови.

Натомість для спрощення обчислень часто перед фільтрацією здійснюють віднімання середньої яскравості m_y від відліків сигналу вхідного зображення. Як впливає з (2.48), середнє значення яскравості на виході фільтру за цих обставин також рівне нулю незалежно від властивостей імпульсної характеристики. Це дозволяє розв'язувати систему рівнянь (2.46) без обчислень, пов'язаних із середньою яскравістю. Бажане значення середньої яскравості відновлюють після фільтрації шляхом додавання постійної складової до отриманих значень відліків.



2.3.2 Маскова фільтрація зображень

Поширеним різновидом завад є білий шум, який присутній на зображенні як адитивна складова, що спотворює сигнал зображення та сприйняття цього зображення в цілому.

Для боротьби з такою завадою часто використовують фільтрацію, яка отримала назву маскової. Маска являє собою просторове вікно, що характеризується певною прозорістю й виділяє околицю пікселів, яскравість яких використовують для визначення кінцевого значення центрального пікселя. За допомогою маски формують околицю у вигляді квадрата, хреста, горизонтальної або вертикальної смужки (штрихова маска). Кількість елементів в околиці вибирають таким чином, щоб елемент, для якого знаходять вихідне значення яскравості, розташовувався у центрі околиці. Маскові фільтри є різновидом КІХ-фільтрів. Маскові фільтри застосовують не тільки для боротьби з шумом, але й для зміни характеристик зображення такого, наприклад, як чіткість.

Сигнал на виході фільтру за умови наявності шуму можна описати співвідношенням

$$y_{i,j} = x_{i,j} + n_{i,j}, \quad i = \overline{0, I-1}, j = \overline{0, j-1}, \quad (2.50)$$

де $n_{i,j}$ - функція, що характеризує адитивний шум.

Автокореляційна функція шуму $n_{i,j}$ має вигляд

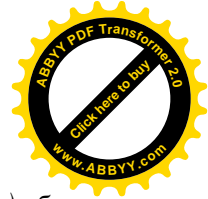
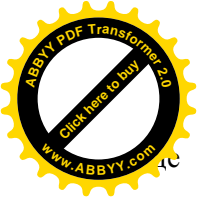
$$B_n(i, j) = D_n \cdot \delta_i \cdot \delta_j,$$

де D_n - дисперсія шуму;

$$\delta_k = \begin{cases} 1, & \text{для } k = 0 \\ 0, & \text{для } k \neq 0 \end{cases} \quad \text{- символ Кронекера.}$$

Будемо вважати, що вхідний сигнал є центрованим, тобто має нульове математичне сподівання, а сигнали зображення $x(\circ)$ й шуму $n(\circ)$ є взаємно незалежні, тому для кореляційної функції вхідного сигналу буде:

$$B_y(i, j) = D_x \cdot R_x(i, j) + D_x \cdot \delta_i \cdot \delta_j, \quad (2.51)$$



де D_x - дисперсія корисного сигналу.

За таких умов взаємна кореляційна функція $B_{xy}(\circ)$ буде збігатися з кореляційною функцією корисного сигналу $B_x(\circ)$, тому рівняння Вінера - Хопфа (2.46) у цьому випадку можна записати у такому вигляді:

$$\begin{cases} q^2 \cdot R_x(k, l) = q^2 \cdot \sum_{i_1, j_1 \in S} a_{i_1, j_1} R_x(k - i_1, l - j_1) + a_{k, l} \\ k, l \in S \end{cases}, \quad (2.52)$$

де $q = D_x / D_y$ - відношення дисперсій сигналу й шуму.

Для оцінки результатів фільтрації перетворимо також вираз для похибок фільтрації (2.47), для чого запишемо в явному вигляді те з рівнянь (2.51), яке відповідає центральному елементу маски, тобто $k = l = 0$:

$$q^2 = q^2 \cdot \sum_{i_1, j_1 \in S} a_{i_1, j_1} R_x(i_1, j_1) + a_{0,0}, \quad (2.53)$$

Знайдемо відносне значення коефіцієнта передачі для центрального елемента:

$$a_{0,0} / q^2 = 1 - \sum_{i_1, j_1 \in S} a_{i_1, j_1} R_x(i_1, j_1), \quad (2.54)$$

У результаті порівняння (2.54 з (2.57), остаточно можна записати, що

$$\delta_\varepsilon^2 = a_{0,0} / q^2, \quad (2.55)$$

де $\delta_\varepsilon^2 = D_\varepsilon / D_x$ - відносний середній квадрат помилок фільтрації.

Таким чином, для визначення помилок фільтрації необхідно знати відношення сигнал/шум (яке входить також і в рівняння Вінера - Хопфа) та значення оптимальної імпульсної характеристики в точці (0,0).



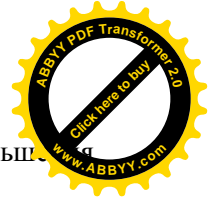
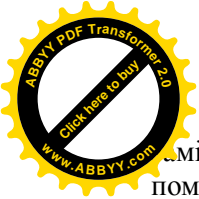
Для того, щоб скористатися комп'ютерними засобами реалізації задачі фільтрації відповідно до рівняння (2.51), необхідно виконати його упорядковане перетворення до матричної форми. Значення невідомих величин $a_{i,j}$ представимо у вигляді матриці A , що містить n_s елементів.

Множину величин, що знаходяться у лівій частині рівняння (2.51), подамо у вигляді матриці-вектора Q , а множину коефіцієнтів правої частини – у вигляді матриці F розмірності $n_s \times n_s$. Тоді рівняння (2.51) та його розв'язок можна записати у вигляді прямого та оберненого перетворень:

$$Q = F \cdot A, \quad A = F^{-1} \cdot Q. \quad (2.56)$$

На практиці найчастіше використовують лінійний різновид маскової двовимірної фільтрації. Маска, яку застосовують для фільтрації складається з множини вагових коефіцієнтів, заданих в усіх точках околиці S , що зазвичай симетрично оточують робочу точку. Поширеним різновидом околиці є квадрат 3×3 з робочим елементом у центрі, рис.40,б. Застосовують різні різновиди масок. Одним з простих варіантів, що призводить до низькочастотної фільтрації є рівномірна маска, всі дев'ять вагових коефіцієнтів якої дорівнюють $1/9$. Такий вибір коефіцієнтів відповідає умові збереження середньої яскравості відповідно до (2.49) й тому у процесі обробки центрувати зображення не потрібно.

Ефективність використання різних типів маскових фільтрів можна проілюструвати кількісно. Так для зображення, що характеризується відношенням сигнал/шум 5дБ, похибка відтворення зображення за умови застосування оптимальної маски складає $\delta^2_{\varepsilon.онт.} = 0,287$, а за умови рівномірної маски - $\delta^2_{\varepsilon.ривн.} = 0,395$. Тобто похибка відтворення для зазначеного зображення зростає майже на 30%, але візуально таку відмінність похибки відтворення може бути практично непомітно. Ситуація значно змінюється за умови, що шум має відносно більший рівень. Так, якщо відношення сигнал/шум становить 10дБ, то маємо $\delta^2_{\varepsilon.онт.} = 0,57$ і $\delta^2_{\varepsilon.ривн.} = 1,15$, тобто застосування рівномірної КІХ



Якість оптимальної призводить в цьому випадку до збільшення помилок більш ніж удвічі.

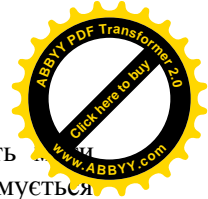
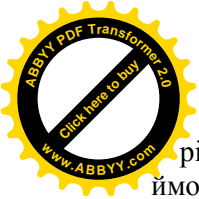
Слід відзначити певну розбіжність в оцінках якості, що даються людським оком й результатами об'єктивної оцінки кількісних показників. Деякі результати фільтрації, що мають дуже погані об'єктивні оцінки, візуально можуть сприйматись цілком задовільно. Але об'єктивна оцінка має дуже важливе значення оскільки цифрова обробка зображень знаходить застосування у різних інформаційних системах з автоматичним прийняттям рішень, що базується на цій обробці.

Функціонування таких систем, де відсутнє людське око, повністю підпорядковане математичним критеріям й якість їх роботи оцінюється тільки математичними показниками. Зрозуміло, що й якість зображень, використовуваних в цих системах, також необхідно оцінювати тільки за математичними критеріями.

Значимо, що, в цілому, застосування описаних процедур фільтрації призводить до істотного зниження рівня шуму на зображенні. Кількісно ефективність даної обробки можна охарактеризувати коефіцієнтом поліпшення відношення сигнал/шум $y = \delta_\varepsilon^2 / q^2$, де враховано, що величина δ_ε^2 визначає відношення сигнал/шум після фільтрації. Поліпшення якості залежить від рівня шуму на початковому зображенні й складає відповідно до здійснених експериментів $y = 10,2$ за умови $q^2 = -5$ дБ й $y = 17,6$ за умови $q^2 = -10$ дБ. Коефіцієнт поліпшення тим вище, чим сильніше шум на початковому зображенні.

2.3.3 Медіанна фільтрація

Майже всі лінійні алгоритми фільтрації призводять до згладжування різких перепадів яскравості зображень, що зазнали обробки. Цей недолік, особливо відчутний в тому разі, коли споживачем інформації є людина. Річ у тому, що лінійні процедури є оптимальними за умови гаусового розподілу сигналів, завад та спостережуваних даних. Реальні зображення, мають інший закон розподілу ймовірності. Однією з основних причин такого розподілу є контури об'єктів, які утворюють межу між ділянками зображення



різною яскравістю. Окремі ділянки зображення можуть мати ймовірність розподілу яскравості, що добре апроксимується гаусовою функцією, але ймовірність розподілу в межах усього зображення може дуже суттєво відрізнятись від такого закону.

Другою особливістю лінійної фільтрації є така, що оптимальність фільтрувальних властивостей стосується тільки завад, що розподілені за гаусовим законом. Такий закон розподілу характерний для шумових завад на зображенні, тому для боротьби з такими завадами лінійні алгоритми мають високі показники. Проте, часто доводиться мати справу із зображеннями, спотвореними завадами інших типів. Однією з них є імпульсна завада. Внаслідок дії такої завади на зображенні спостерігаються білі або чорні точки, які хаотично розпорознені по всьому зображенню. Застосування лінійної фільтрації у цьому випадку часто є не ефективним, тому що кожний з вхідних імпульсів (значення сигнальної функції у певній точці) викликає відгук у вигляді імпульсної характеристики фільтру. У разі імпульсної завади відгук фільтра призводить розповсюдження завади в межах околиці пікселя, що зазнав впливу імпульсної завади.

Вдалим рішенням зазначених проблем є застосування медіанної фільтрації. Цей різновид фільтрації як і багато інших алгоритмів обробки зображень було запропоновано у Південному Каліфорнійському Університеті у 1971 р. аспірантом на ім'я Дж. Тьюкі.

Відзначимо, що медіанна фільтрація є інтуїтивним методом обробки й тому її алгоритм не є результатом математично обґрунтованого рішення строго сформульованої задачі. Саме через це багатьма дослідниками приділяється велика увага аналізу ефективності обробки зображень шляхом медіанної фільтрації й порівнянню її ефективності з іншими методами.

При застосуванні медіанного фільтру (МФ) відбувається послідовна обробка кожної точки кадру, внаслідок чого утворюється послідовність оцінок. У ідейному відношенні обробка в різних точках незалежна (цим МФ схожий на масковий фільтр), але в цілях її прискорення доцільно алгоритмічно на кожному кроці використовувати раніше виконані обчислення.

Під час медіанної фільтрації використовують двовимірне вікно (апертура фільтру), що звичайно має центральну симетрію,

ри цьому його центр розташовується в поточній точці фільтрації. На рис.41 наведено два приклади найбільш часто вживаних варіантів вікон у вигляді хреста і у вигляді квадрата. Розміри апертури належать до параметрів, що оптимізуються в процесі аналізу ефективності алгоритму. Відліки зображення, що опинилися в межах вікна, утворюють **робочу вибірку** поточного кроку.

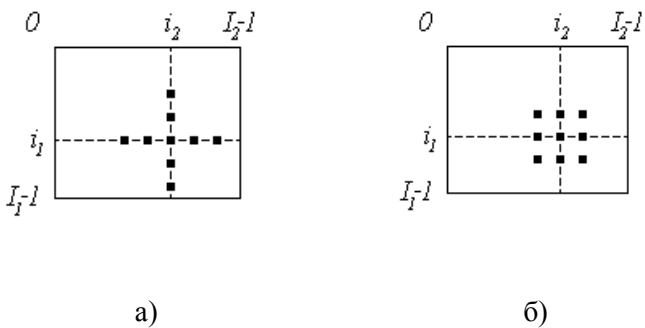
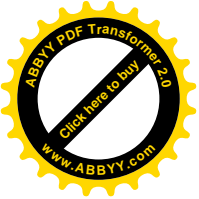


Рис. 41. Приклади вікон для медіанної фільтрації

Двовимірний характер вікна дозволяє виконувати, по суті, двовимірну фільтрацію, оскільки для утворення оцінки використовують дані як з поточних рядка й стовпця, так і з сусідніх. Позначимо робочу вибірку у вигляді одновимірного масиву $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$; число його елементів дорівнює розміру вікна, а їх розташування довільне. Зазвичай застосовують вікна з непарним числом точок n (це автоматично забезпечується за умови центральної симетрії апертури й при входженні самої центральної точки в її склад). Якщо упорядкувати послідовність $\{y_i, i = \overline{1, n}\}$ за збільшенням, то її медіаною буде той елемент вибірки, який розташовано у центрі цієї упорядкованої послідовності. Одержане таким чином число i є результатом фільтрації для поточної точки кадру. Зрозуміло, що результат такої обробки дійсно не залежить від того, в якій послідовності представлено елементи зображення в робочій вибірці y . Застосуємо формальне позначення описаної процедури у вигляді:



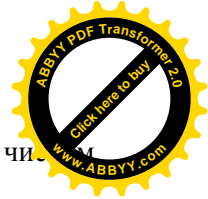
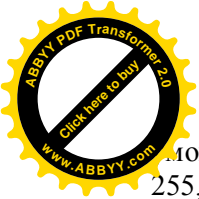
$$x^* = \text{med}(y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Розглянемо приклад. Припустимо, що вибірка має вигляд: $Y = \{136, 110, 99, 45, 250, 55, 258, 104, 75\}$, а елемент 250, розташований в її центрі, відповідає поточній точці фільтрації (i_1, i_2) (рис.41). Велике значення яскравості в цій точці кадру може бути результатом дії імпульсної (точкової) завади. Впорядкована за збільшенням вибірка має при цьому вигляд $\{45, 55, 75, 99, 104, 110, 136, 158, 250\}$, отже, відповідно до процедури

(3.48), одержуємо $x^* = \text{med}(y_1, y_2, \dots, y_9) = 104$. Бачимо, що вплив сусідів на результат фільтрації в поточній точці привів до ігнорування імпульсного викиду яскравості, що слід розглядати як ефект фільтрації. Якщо імпульсна завада не є точковою, а покриває деяку локальну область, то вона також може бути пригнічена. Це відбудеться, якщо розмір цієї локальної області буде менший, ніж половина розміру апертури медіанного фільтра (МФ). Тому для придушення імпульсних завод, що спотворюють локальні ділянки зображення, слід збільшувати розміри апертури МФ.

З (3.48) випливає, що дія МФ полягає в ігноруванні екстремальних значень вхідної вибірки - як позитивних, так і негативних викидів. Такий принцип придушення завади може бути застосований і для ослаблення шуму на зображенні. Проте дослідження придушення шуму за допомогою медіанної фільтрації показує, що її ефективність при рішенні цієї задачі нижче, ніж у лінійної фільтрації.

Результати експериментів, що ілюструють роботу МФ, наведено на рис.42. У експериментах було застосовано МФ, що має квадратну апертуру зі стороною, що дорівнює трьом пікселям. У лівому стовпчику наведено зображення, спотворені заводою, а в правому - результати їх медіанної фільтрації. На рис.42,а й рис. 42,в наведено початкове зображення, спотворене імпульсною заводою. Імпульсну заводу було створено шляхом накладення на сигнал зображення сигналу з виходу датчика випадкових чисел з рівномірним на інтервалі $[0, 1]$ законом розподілу, що створював в усіх точках кадру незалежні випадкові числа. Інтенсивність завади характеризується ймовірністю p її виникнення в кожній точці. Якщо для випадкового числа, сформованого в точці, виконувалася



мова, тоді яскравість зображення в цій точці заміщувалась числом
255, що дорівнює максимальній яскравості (рівню білого).



а)



б)



в)



г)

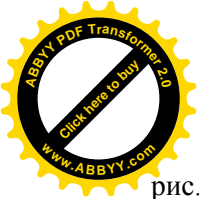


д)



е)

Рис. 42. Приклади медіанної фільтрації



На рис.42,а дією імпульсної завади спотворено 5 % , на рис.42,в – 10 % елементів зображення. В результаті обробки було забезпечено практично повне придушення завади в першому випадку й значне ослаблення в другому. На рис.42,д наведено зображення, спотворене незалежним гаусовим шумом за відношення сигнал/шум $q^2 = -5$ дБ, а рис.42,е - результат його фільтрації медіанним фільтром.

У таблиці 2.3 наведено дані, що дають можливість порівняти ефективність використання різних типів фільтрів. Для різних методів фільтрації в цій таблиці наведено значення відносного середнього квадрата помилок δ_ε^2 й коефіцієнта ослаблення шуму γ для випадку, коли відношення сигнал/шум на вході фільтру складає -5 дБ.

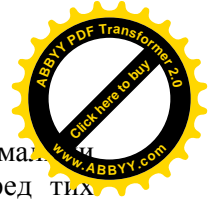
У наведених прикладах найбільшу ефективність забезпечив двовимірний фільтр Вінера, який зменшив середній квадрат помилок в 17 разів. Медіанний фільтр забезпечив найменшу з усіх розглянутих фільтрів ефективність, $\gamma = 5.86$. Однак, це число свідчить про те, що й за допомогою цього фільтра можна значно зменшити рівень шуму на зображенні.

Разом з тим, слід відзначити ту обставину, що медіанна фільтрація у меншій мірі згладжує межі зображення (рис.42,е), ніж будь-яка лінійна фільтрація. Механізм цього явища дуже простий й зрозумілий.

Таблиця 2.3. Результати фільтрації сигналів зображень різними типами фільтрів за умови $q^2 = -5$ дБ

	масковий фільтр з оптимальн. КІХ	масковий фільтр з рівномірн. КІХ	двовимір- ний рекурент. фільтр	двовимір- ний фільтр Вінера	медіан- ний фільтр
δ_ε^2	0.309	0.395	0.29	0.186	0.539
γ	10.2	8.0	10.9	17.0	5.86

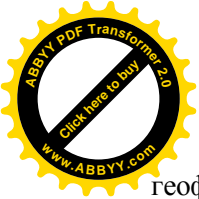
Припустимо, що апертура фільтру знаходиться поблизу межі, що розділяє світлу й темну ділянки зображення, а її центр розташовується в області темної ділянки. Тоді, найімовірніше,



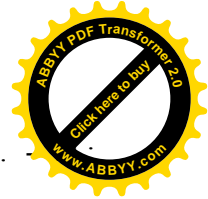
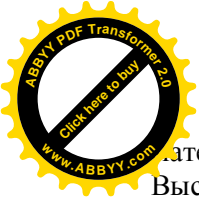
Обоча вибірка міститиме більшу кількість елементів з малішими значеннями яскравості, й медіана буде знаходитись серед тих елементів робочої вибірки, амплітуди яких співпадають з амплітудами цієї області зображення. Ситуація зміниться на протилежну, якщо центр апертури буде зміщено в область більшої яскравості. Але це й означає, що МФ є чутливим до перепадів яскравості.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Антонью А. Цифровые фильтры: анализ и проектирование. – М.: Радио и связь, 1983. – 320 с.
2. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов. - М.: Высшая школа, 1988.- 448 с.
3. Бат М. Спектральный анализ в геофизике. - М.: Недра, 1980.- 535 с.
4. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных. – М.: Мир, 1989. – 540 с.
5. Блейхут Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1989. – 448 с.
6. Вычислительная математика и техника в разведочной геофизике: Справочник геофизика. – М.: Недра, 1990. – 498 с.
7. Гольденберг Л.М. и др. Цифровая обработка сигналов: Справочник. - М.: Радио и связь, 1985.- 312 с.
8. Гольденберг Л.М. и др. Цифровая обработка сигналов: Учебное пособие для вузов. - М.: Радио и связь, 1990.- 256 с.
9. Гутников В.С. Фильтрация измерительных сигналов. – Л.: Энергоатомиздат, 1990. – 192 с.
10. Даджион Д., Мерсеро Р. Цифровая обработка многомерных сигналов. – М.: Мир, 1988. – 488 с.
11. Дмитриев В.И. Прикладная теория информации: Учебник для студентов вузов. - М.: Высшая школа, 1989.- 325 с.
12. Канасевич Э.Р. Анализ временных последовательностей в геофизике. - М.: Недра, 1985.- 300 с.
13. Клаербоут Д.Ф. Теоретические основы обработки геофизической информации с приложением к разведке нефти. – М.: Недра, 1981. – 304 с.



14. Кулханек О. Введение в цифровую фильтрацию в геофизике. – М.: Недра, 1981. – 198 с.
15. Купер Дж., Макгиллем А. Вероятностные методы анализа сигналов и систем. – М.: Мир, 1989. – 376 с.
16. Макс Ж. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях: В 2-х томах. - М.: Мир, 1983.
17. Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. – М.: Мир, 1990. – 584 с.
18. Никитин А.А. Теоретические основы обработки геофизической информации: Учебник для вузов. - М.: Недра, 1986.- 342 с.
19. Оппенгейм А.В., Шафер Р.В. Цифровая обработка сигналов. – М.: Связь, 1979. – 416 с.
20. Отнес Р., Эноксон Л. Прикладной анализ временных рядов. – М.: Мир, 1982. – 428 с.
21. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1978. – 848 с.
22. Рапопорт М.Б. Вычислительная техника в полевой геофизике: Учебник для вузов. - М.: Недра, 1993.- 350 с.
23. Сиберт У.М. Цепи, сигналы, системы. – М.: Мир, 1988. – 336 с.
24. Хемминг Р.В. Цифровые фильтры. – М.: Недра, 1987. – 221 с.
25. Лосев А.К. Линейные радиотехнические цепи: Учебник для вузов. - М.: Высшая школа, 1971. - 560 с.
26. Васильев Д.В. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебное пособие для вузов. - М.: Радио и связь, 1982. - 528 с.
27. Зиновьев А.Л., Филиппов Л.И. Введение в теорию сигналов и цепей: Учебное пособие для вузов. - М.: Высшая школа, 1975. - 264 с.
28. Севостьянов Б.А. Курс теории вероятностей и математической статистики. - М.: Наука, 1982. - 256 с.
29. Коваленко И.Н., Филиппова А.А. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие. - М.: Высшая школа, 1982. - 256 с.
30. Худсон Д. Статистика для физиков. - М.: Мир, 1970. - 296 с.
31. Гурский Е.И. Теория вероятностей с элементами



Математической статистики: Учебное пособие для вузов. -
Высшая школа, 1971.- 328 с.

32. Вероятностные методы в вычислительной технике: Учеб.
пособие для вузов / А.В.Крайников и др. - М.: Высшая школа, 1986.
- 312 с.

33. Игнатов В.А. Теория информации и передачи сигналов. -
М.: Советское радио, 1979.

34. Дьяконов В., Абраменкова И. MATLAB. Обработка
сигналов и изображений. Специальный справочник. – СПб.: Питер,
2002, 608 с.

35. Астафьева Н.М. Вейвлет-анализ: Основы теории и
примеры применения. / Успехи физических наук, 1996, т.166, № 11,
стр. 1145-1170.

36. Дремин И.Л. и др. Вейвлеты и их использование. / Успехи
физических наук, 2001, т.171, № 5, С. 465-501.

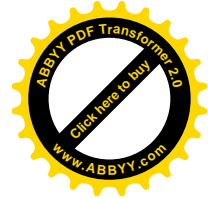
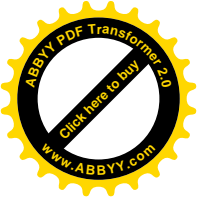
37. Петухов А.П. Введение в теорию базисов всплесков. –
СПб.: Изд. СПбГТУ, 1999, 132 с.

38. Адаптивные фильтры. /Под ред. К.Ф.Н. Коуэна и
П.М.Гранта. – М.: Мир, 1988, 392 с.

39. Дьяконов В.П. Вейвлеты. От теории к практике. – М.:
СОЛОН-Р, 2002. – 448 с.

40. Корн Г., Корн Е. Справочник по математике для научных
работников и инженеров. – М.: Наука, 1984. – 720 с.

41. Птачек М. Цифровое телевидение. Теория и техника /
Пер. с чешск. под ред. Л.С. Виленчика. – М.: Радио и связь, 1990. –
528 с.



Навчальне видання
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Державний університет інформаційно-комунікаційних
технологій

ДРОБИК Олександр Васильович
КІДАЛОВ Валерій Віталійович
КОВАЛЬ Валерій Вікторович
КОСТІК Богдан Ярославович
ЛАЗЕБНИЙ Володимир Семенович
РОЗОРІНОВ Георгій Миколайович
СУКАЧ Георгій Олексійович

**ЦИФРОВА ОБРОБКА АУДІО-
ТА ВІДЕОІНФОРМАЦІЇ
У МУЛЬТИМЕДІЙНИХ СИСТЕМАХ**

Київ, Науково-виробниче підприємство
«Видавництво “Наукова думка” НАН України», 2008

Художнє оформлення *О.В. Дробика*
Комп’ютерна верстка *Г.І.Петрусь*

Підп. до друку 15.10.2008. Формат 60×84. Папір офс. №1.
Гарн. Таймс. Друк. офс. Ум. друк. арк. 9. Обл.-вид. арк. 12,8.
Наклад 300 прим. Зам. 8-1013.

НВП «Видавництво “Наукова думка” НАН України»
Свідоцтво про внесення суб’єкта видавничої справи до Державного
реєстру – серія ДК № 2440 від 15.03.2006
01601 Київ 1, вул. Терещенківська, 3