Міністерство транспорту та зв'язку України
Державна адміністрація зв’язку
Одеська Національна Академія зв’язку ім. О.С.Попова

Кафедра інформаційних технологій

Чисельні методи та моделювання на ЕОМ

МОДУЛЬ № 1

Чисельне обчислення функцій, характеристик матриць. Розв′язок нелінійних рівнянь та систем рівнянь

Частина 2

Методичні вказівки та керівництва
з лабораторних та практичних занять

для студентів напрямків бакалаврської підготовки:
“***Автоматизація та комп’ютерно-інтегровані технології***”,
“***Телекомунікації***”, “***Мережі та системи поштового зв’язку***”,
“***Системи технічного захисту інформації***”

Одеса 2010

УДК 004.43 План НМВ 2010 р.

Методичний посібник розробили:
Л. М. Буката, В. А. Шаповаленко, О. Г. Трофименко

Методичний посібник містить короткі теоретичні відомості про методи розв’язування інженерних та наукових задач з використанням чисельних методів. У цій (другій) частині посібника наведено алгоритми і приклади програмування алгоритмічною мовою С++ та в математичному пакеті Mathcad для розв’язування задач. Згідно з навчальним планом 1-го модуля, наведено індивідуальні завдання для виконання лабораторних робіт та комплексне завдання. Буде корисний студентам для закріплення лекційного матеріалу та підготовки до виконання лабораторних робіт.

Посібник призначено за для набуття практичних знань студентами академії, які вивчають дисципліни “Чисельні методи та моделювання на ЕОМ”, “Основи математичного моделювання”, “Програмування інженерних задач”. Посібник буде також корисним аспірантам та науковим співробітникам задля розв’язування поширених наукових задач з використовуванням чисельних методів та математичних пакетів.

СХВАЛЕНО
на засіданні кафедри
інформаційних технологій
і рекомендовано до друку
Протокол № 3
від 30 листопада 2009 р.

ЗАТВЕДЖЕНО
методичною радою
факультету інформаційних мереж

Протокол № 4
від 03.12.2009 р

Передмова

Дисципліна **“**Чисельні методи та моделювання на ЕОМ” викладається в семестрах 2.3 і 2.4 студентам другого курсу, які навчаються за напрямом “Автоматизація та комп′ютерно-інтегровані технології”, призначена формування знань та навиків з використання комп’ютерів у своїй професійній та повсякденній діяльності, а саме: програмування та розв’язування поширених інженерних задач автоматизації технологічних процесів з використанням чисельних методів та математичних пакетів. Методи та алгоритми розв’язування інженерних задач, наведені у посібнику, також можуть використовувати студенти, які вивчають дисципліну “Програмування інженерних задач” (напрям “Мережі та системи поштового зв′язку”), “Чисельні методи” (напрям “Системи технічного захисту інформації”) та “Основи математичного моделювання” (напрям “Телекомунікації”).

Мета дисципліни – формування у студентів знань та навичок у таких областях:

- моделювання;
- математичні пакети;
- чисельне диференціювання та інтегрування;
- розв′язок нелінійних рівнянь;
- розв′язок систем алгебраїчних рівнянь;
- чисельні методи розв’язку диференціальних рівнянь та систем;
- інтерполяція та апроксимація функцій;
- чисельні методи розв’язування задач одновимірної оптимізації функцій;
- розв’язування задач багатовимірної оптимізації.

Програма курсу складається з двох модулів:

Модуль 1 — Чисельне обчислення функцій та характеристик матриць. Розв’язування нелінійних рівнянь та систем рівнянь.

Модуль 2 — Чисельні методи моделювання об’єктів.

Для вивчення дисципліни необхідні знання з таких дисциплін: “Вища математика“, “Комп′ютерна техніка та організація обчислювальних процесів“, “Програмування та алгоритмічні мови“, “Фізика“, “Електротехніка та електромеханіка“. Знання з дисципліни є вхідними до дисциплін “Теорія автоматичного керування“, “Комп′ютерні інтегровані технології“, “Основи систем автоматизації проектування“, “Ідентифікація та моделювання технологічних об′єктів“ тощо.

Перелік лабораторних робіт

Лабораторна робота № 1. Обчислення функцій у середовищі Mathcad. Обчислення таблиць функцій та побудова графіків у Mathcad.

Лабораторна робота № 2. Чисельне диференціювання. Обчислення інтегралів у C++ та Mathcad.

Лабораторна робота № 3. Виокремлення коренів та здобуття розв′язків нелінійних рівнянь з однією змінною.

Лабораторна робота № 4. Обчислення матриць та їхніх характеристик у Mathcad. Обчислення систем лінійних та нелінійних рівнянь.

Кожна із запропонованих до виконання лабораторних робіт має індивідуальне завдання. Метою завдань є набуття практичних навичок розв’язування інженерних задач з використовуванням чисельних методів, математичних пакетів і закріплення знань та вмінь щодо програмування алгоритмічною мовою C++.

Кожне завдання містить 30 варіантів. Студент сам або за вказівкою викладача, обирає завдання згідно з номером студента у списку групи.

До виконання лабораторної роботи допускається студент, який має підготовлений самостійно протокол лабораторної роботи згідно з вимогами, наведеними нижче. Після виконання лабораторної роботи студент повинен занести до протоколу результати обчислень, графіки функцій та висновки. Правильність здобутих результатів перевіряється викладачем.

Вимоги щодо оформлення протоколу лабораторної работи

Лабораторні роботи оформлюються в окремому зошиті.

Слід записати тему та мету лабораторної роботи.

Для *кожної задачі* лабораторної роботи треба записати такі розділи:

а) умову задачі за індивідуальним завданням;

б) опис розв’язування задачі на комп’ютері;

в) результати обчислень на комп’ютері (після виконання програми на комп’ютері);

г) аналіз результатів та висновки.

Схеми алгоритмів програм слід виконувати олівцем під лінійку у відповідності до ЄСПД.

Наприкінці роботи треба поставити особистий підпис та дату виконання роботи.

Перелік знань та умінь, яких має набути студент після вивчення матеріалу модуля 1

Знання:

- обчислювальні можливості пакету Mathcad;
- класифікація чисельних методів та структура похибок при обчисленнях;
- розв’язок нелінійних рівнянь;
- характеристики матриць та методи їхнього обчислення;
- методи обчислення систем лінійних рівнянь;
- чисельні методи розв’язування систем нелінійних рівнянь;
- чисельні методи диференціювання та обчислення інтегралів.

Вміння:

- обчислювати функції та будувати графіки у Mathcad;
- програмувати обчислення інтегралів у С++ та Mathcad;
- виокремлювати та програмувати обчислення розв’язків нелінійних рівнянь у С++ та Mathcad;
- обчислювати числові характеристики матриць в Mathcad;
- програмувати обчислення системи лінійних рівнянь в Mathcad;
- програмувати обчислення системи нелінійних рівнянь в Mathcad.
-

1 ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОГО ПАКЕТА Mathcad

1.1 Загальні відомості

Пакет Mathcad 2000 Professional дозволяє діставати розв’язок задачі у вигляді чисел або символьних виразів (аналітичний розв’язок), будувати графіки у двовимірному й тривимірному просторах, супроводжувати формули й результати обчислень текстовими поясненнями (коментарями). Меню команд вікна Mathcad 2000 Professional (російська версія) містить стандартні для більшості пакетів заголовки: Файл, Правка, Просмотр, Вставка, Форматирование, Окно, Помощь. Підменю заголовка Файл містить команди створення нового документа (файла), а також – відкриття, зберігання й друкування створених документів. Підменю заголовку Правка містить стандартні команди редагування фрагментів документа: Вырезать, Копировать, Вставить, Удалить, Заменить. Підменю заголовка Просмотр містить деякі команди налаштовування вікна: Линейка – встановлює горизонтальну лінійку з діленнями над документом, Масштаб – установлює масштаб відображення документа на екрані (від 10 до 200 %), Панели – відображає у вікні потрібні панелі інструментів: Стандартная, Форматирование й Математика, зображені на рис. 1.1 відповідно в другому, третьому й четвертому рядках вікна Mathcad.

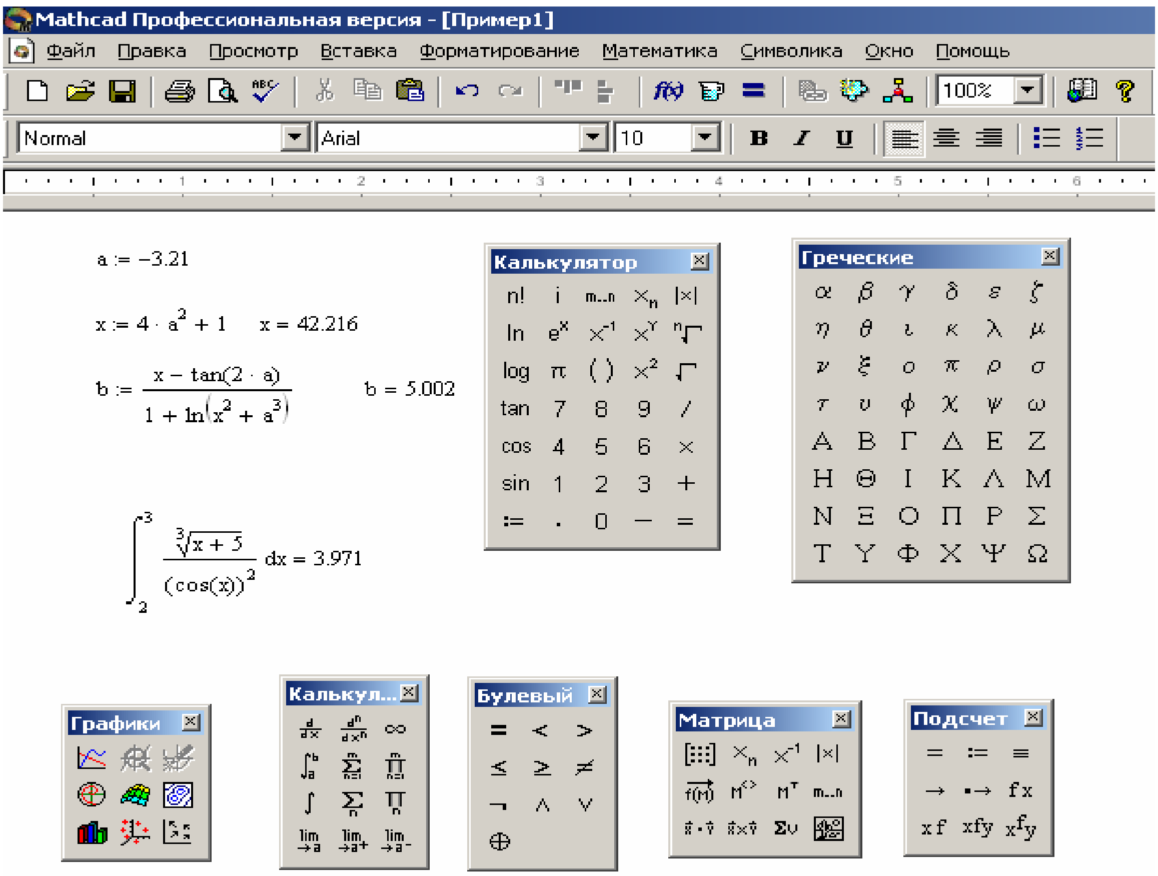


Рисунок 1.1 – Вікно пакета Mathcad 2000 Professional (російськомовна версія)

Панелі інструментів Стандартная й Форматирование містять такі самі піктограми, як і в інших пакетах (наприклад у пакеті Microsoft Word). Панель інструментів Математика, що є присутньою тільки в Mathcad, містить шаблони символів для написання математичних формул, символьних обчислень і побудови графіків або операторів програмування. На робочому полі вікна Mathcad (див. рис. 1.1) відкрито групи шаблонів:

Калькулятор – цифри й найпростіші математичні функції,

Греческие – літери грецької абетки,

Графика – побудова графіків у декартових та полярних координатах,

Булевый – знаки відносин поміж величинами й логічними операціями,

Матрица – зображення та операції над матрицями й векторами,

Калькулус (або Матаналіз) – знаки математичного аналізу (інтеграли, похідні, ряди тощо).

На робочому полі вікна Mathcad також наведено приклад обчислення певних величин b, x за формулами

$$b = \frac{x - tg(2a)}{1 + \ln(a^2 + x^3)}, \text{ де } x = 2a^2 + 1, \quad a = -3{,}21;$$

Підменю заголовка Вставка зображено на рис. 1.2. Команда График дозволяє побудувати графіки. Команда Функция дозволяє вставити у формулу одну з убудованих функцій Mathcad за допомогою вікна, зображеного на рис. 1.3. У лівій частині цього вікна розміщено список категорій функцій, праворуч – назви функцій, унизу – з'ясування щодо використання функції. Команда Текстовый регион дозволяє вводити з'ясування щодо обчислень, наприклад текст ''Приклад розрахунків'' на робочому полі Mathcad (див. рис. 1.1).

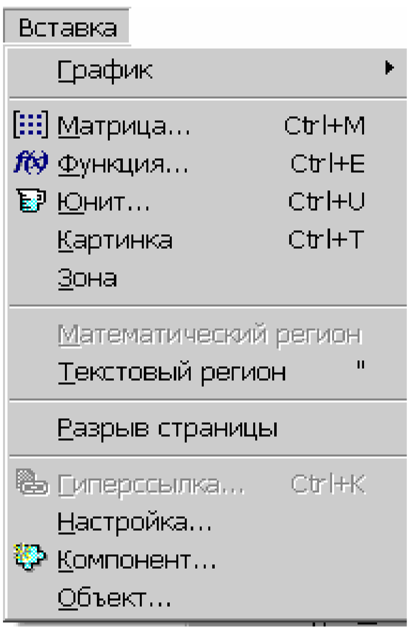


Рисунок 1.2 – Підменю команди Вставка

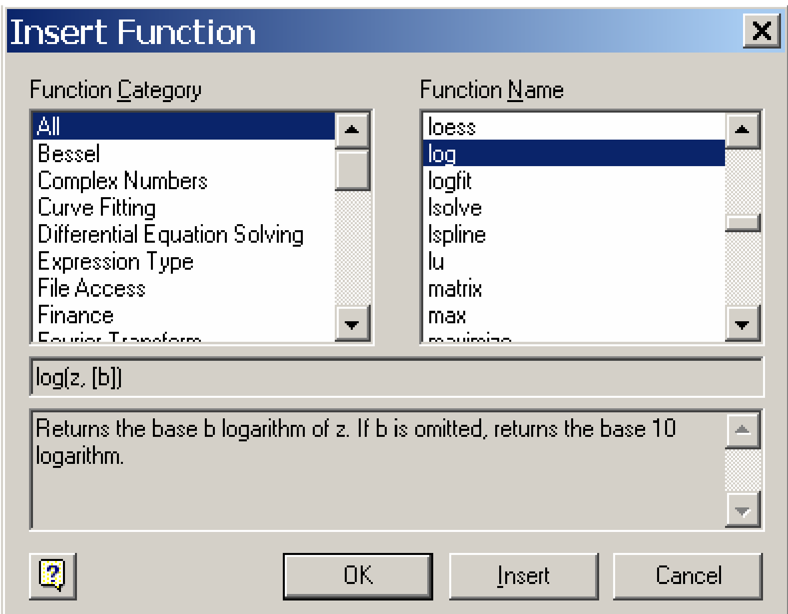


Рисунок 1.3 – Вікно вбудованих функцій Mathcad

1.2 Обчислення арифметичних виразів, сум та добутків за формулами

Задля обчислення арифметичних виразів треба перейти до математичної області (курсор матиме вигляд червоного хрестика) і за допомогою шаблонів записати математичний вираз у такий спосіб, як це наведено у прикладі на рис.1.1. Задля здобуття результату обчислення виразу слід виокремити курсором цей вираз і натиснути клавішу **=** (дорівнює). Задля присвоєння значення змінній треба записати в математичній області ім′я змінної, поряд з ним знаки **:=** (дві крапки й дорівнює), а потім математичний вираз. Наприклад, для обчислення змінної y за формулою

$$y = \frac{\cos^3\left(arctg^2\left(\left|x + \sqrt[3]{x}\right|\right) + \sin^2 x\right)}{\sin\left|\lg^2\left(\sqrt{x} + 2.8\right)\right|},$$

де $x = 1.5$, запис у Mathcad має вигляд:

$$x := 1.5$$

$$y := \frac{\left[\cos\left[\left(\mathrm{atan}\left(\left|x + \sqrt[3]{x}\right|\right)\right)^2 + \left(\sin(x)\right)^2\right]\right]^3}{\sin\left[\left|\left(\log\left(\sqrt{x} + 2.8\right)\right)^2\right|\right]} \qquad y = -1.301$$

Зверніть увагу на те, як правильно записувати функції з піднесенням до степеня: математичний запис $\mathbf{\sin^2 x}$ у Mathcad записується як $\mathbf{(\sin(x))^2}$.

Імена змінних та функцій в Mathcad, як і в кожній мові програмування – це послідовність символів. Символами в імені змінної можуть бути латинські й грецькі літери, цифри й спеціальні знаки: *%* (відсоток), _ (підкреслення), *′* (штрих). Імена не мають розпочинатися з цифри чи то спеціальних символів, наприклад: *F, f, λ, αβ_1, sum2*. Слід зазначити, що літери *F та f* позначають різні величини. Елементи векторів і матриць записують з індексами, використовуючи для цього шаблон групи Калькулятор $\boxed{x_n}$; наприклад: a_i, $c_{jк}$, $w_{i+j,m,3}$.

В Mathcad є *іменні константи*, числові значення яких з 15-ма значущими цифрами підставлятимуться в формулу при обчисленнях автоматично: $\boldsymbol{\pi}$=1,1415…, $\boldsymbol{e}$ = 2,71828…, $\infty = 10^{307}$, ***%*** = 0,01, **TOL** = 10^{-3} тощо.

Обчислення значень сум та добутків виконують з використовуванням відповідних шаблонів для запису формул групи Калькулус (або Матаналіз). Приклад розрахунків у Mathcad наведено нижче:

$$S := \sum_{i=1}^{5} i^2 \qquad S = 55 \qquad\qquad P := \prod_{k=1}^{6} k \qquad P = 720$$

$$z := \sum_{i=1}^{7} \text{if}\left[(i=2)\wedge(i=4), 0, \frac{(i-2)\cdot(i-4)}{(i+3)}\cdot\prod_{k=1}^{3}\text{if}\left[k\neq 1, \frac{(k-1)}{k+1}, 1\right]\right]$$

$$z = 0.558$$

Останній оператор, який наведено у прикладі, обчислює значення змінної n за формулою:

$$n = \sum_{i=1}^{7} \frac{(i-2)(i-4)}{i+3} \prod_{k=i}^{8} \frac{k-1}{k+1}$$

Для обчислення розв'язку за цією формулою виключають доданки та співмножники, які дорівнюють нулеві, що зреалізовано у прикладі за допомогою умовного оператора *if*.

1.3 Обчислення таблиць значень функцій та побудова графіків

Порядок обчислень розглянемо на прикладі. Нехай потрібно обчислити й вивести у вигляді таблиці та графіків значення двох функцій $f_1 = x^3$ та $f_2 = 30\cos^2(x)$, у яких дискретний аргумент x змінюється в межах від –1.5 до 4 ($x \in [-1.5;4]$) з кроком h=0.1.

Для обчислення таблиці значень функції в Mathcad треба спочатку визначити, як змінюється аргумент функції (змінна x), записати формулу функції, а потім сформувати таблицю її значень.

Задля визначення в Mathcad аргумента функції, змінюваного, слід використовувати правила запису *проміжкових змінних* у такому вигляді:

$$x := x_п, x_п + h \,..\, x_к$$

де $x_п$ – початкове значення змінної (аргумента функції x), $x_п+h$ – наступне значення змінної, $x_к$ – кінцеве значення змінної, h – крок, за яким змінюється змінна. Приміром, запис у Mathcad

$$x := -1.5, -1.4 \,..\, 4$$

означає, що аргумент x набуває значень –1.5, –1.4, 1.7, … , 3.9; 4.0 тобто змінюється з кроком 0,1 від –1.5 до 47.

Далі запишемо функцію для обчислення (наприклад f_1):

$$f1(x) := x^3$$

Задля обчислення значень таблиці функції слід записати аргумент та ім′я функції зі знаком = (дорівнює), після чого нижче з′являться відповідні стовпчики значень x та $f_1(x)$ у вигляді окремих таблиць (рис. 1.4).

Задля переглядання усіх обчислених значень функції в Mathcad можна користуватися смугою прокручування.

$x =$	$f1(x) =$
–1,50	-3.375
–1,40	-2.744
–1,30	-2.197
–1,20	-1.728
–1,10	-1.331
–1,00	-1.000
–0,90	-0.729
–0,80	-0.512

Рисунок 1.4 – Таблиця значень функції та її аргументу в Mathcad

Щоби побудувати на одному бланкові графіки кількох функцій одного аргументу (приміром для функцій $f_1(x)$ та $f_2(x)$), слід виконати такі дії:

1) відкрийте бланк для побудови графіка функцій одного аргументу за допомогою шаблона групи Графика (рис. 1.5);

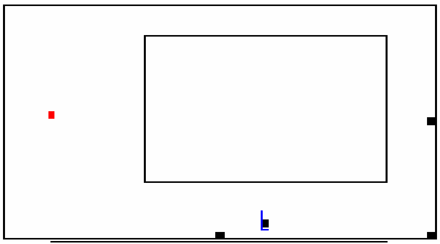


Рисунок 1.5 – Бланк побудови графіка в декартових координатах

2) запишіть ім’я аргумента – x в позначці нижче за вісь абсцис, попід внутрішнім прямокутником (див. рис 1.5 та 1.6), а в позначці ліворуч а від осі ординат (ліворуч від прямокутника) запишіть ім′я функції – $f_1(x)$, і, якщо треба додати другу функцію на цьому ж графіку, поставте кому і нижче допишіть ім′я другої функції – $f_2(x)$;

3) відведіть курсор за межі графічної області та клацніть клавішею миші.

Mathcad побудує графіки двох функцій, так як показано на рис. 1.6.

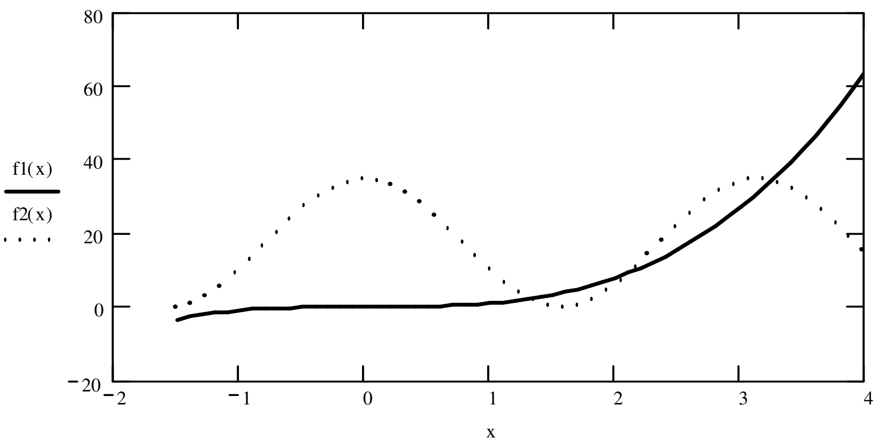


Рисунок 1.6 – Графіки функцій $f_1 = x^3$ та $f_2 = 30\cos^2(x)$ в Mathcad

Для обчислення функцій із розгалуженням в Matcad слід використовувати умовний оператор, який має вигляд

if (<u>*умова*</u>, <u>*арифметичний вираз* 1</u>, <u>*арифметичний вираз* 2</u>)

де <u>*умова*</u> – це логічний вираз з використанням знаків співвідношення, розміщених на панелі піктограм Булевый (<, >, ≤ тощо); <u>*арифметичний вираз 1*</u> – це формула для обчислень, якщо результат умови – „*Так*”; <u>*арифметичний вираз 2*</u> – формула для обчислень, якщо значення умови – „*Ні*”.

Наприклад, для обчислення таблиці функції

$$y = \begin{cases} \sin^2 x, & x < 2; \\ \cos x^3, & x \ge 2. \end{cases}$$

Якщо x змінюється на проміжку від 1 до 3 ($x \in [1;3]$) з кроком 0.2, запишемо в MatCad

$$x := 1, 1.2 \,..\, 3$$

$$y(x) := if\,(x<2, (\sin(x))^2, \cos(x^3))$$

і здобудемо результати обчислень:

x =	y(x) =
1	0.708
1.2	0.869
1.4	0.971
1.6	0.999
1.8	0.948
2	0.827
2.2	-0.341
2.4	0.308
2.6	0.293
2.8	-0.999
3	-0.292

Л а б о р а т о р н а р о б о т а № 1

ОБЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ У СЕРЕДОВИЩІ Mathcad. ОБЧИСЛЕННЯ ТАБЛИЦЬ ФУНКЦІЙ ТА ПОБУДОВА ГРАФІКІВ У Mathcad

1. Мета роботи

Ознайомитися з математичним пакетом Mathcad. Набути навичок обчислення значень функцій, сум, добутків, таблиць значень функцій а також побудови графиків у математичному пакеті Mathcad.

2. Контрольні запитання

1. Для чого призначена команда Текстовый регион?
2. До якої області треба перейти, задля обчислення арифметичних виразів?
3. Які групи шаблонів використовують для обчислення значень сум та добутків?
4. Запишіть порядок обчислення таблиць значень функцій.
5. Які дії слід виконати, щоби побудувати на одному бланкові графіки кількох функцій одного аргументу.
6. Запишіть умовний оператор Mathcad. Наведіть приклад.

3. Лабораторне завдання

З а в д а н н я 1 Обчислення значень функцій та змінних

Запишіть послідовність обчислення в Mathcad функції $\boldsymbol{y=F(x)}$ за заданими формулами та значеннями змінних згідно з варіантом індивідуального завдання, наведеного в табл. 1. Складти програму обчислення цієї функції алгоритмічною мовою С++. Записати та порівняти результати обчислень.

Таблиця 1 – **Варіанти формул для обчислення функції**

№ варіанта	**Формули для обчислення функції $y=F(x)$**	**Значення змінних**
1	$y = a\sin^2 b + b\cos^2 a;\ a = \sqrt[3]{\lvert b+c\rvert};\ b = \sqrt{x}$	x =1.52; c = 5
2	$y = a^2 + b^2$; $a = \ln\lvert x\rvert$; $b = e^k + x^2$	x =5.3 ; k =1.2
3	$y = e^x + 1.8^{-c}$; $c = a^2 + \sqrt{b}$; $a = b^3 + \ln\lvert x\rvert$	x = 2.5 ; b =7
4	$y = \sqrt[3]{\lvert a-b\rvert}$; $a = \lg x$; $b = \sqrt{x^2 + t^2}$	x =1.7 ; t = 3
5	$y = a^3 / b^2$; $a = e^{\sqrt{\lvert x\rvert}}$; $b = \sin p^2 + x^3$;	x = 2.1 ; p = 2

Закінчення таблиці 1

№ варіанта	Формули для обчислення функції y=F(x)	Значення змінних
6	$y = p^2 + t^4$; $p = x^2 - \sqrt{\lvert x\rvert}$; $t = \sqrt[3]{x + a^2}$	$x = -1.5$; $a = 3.7$
7	$y = c^3 / \cos c$; $c = a^2 + b^2$; $a = \sqrt{\lvert x\rvert} + e^{\sqrt{b}}$	$x = -1.1$; $b = 2.5$
8	$y = \sin^3(a+b)$; $a = t^3 + \sqrt{b}$; $b = \lg^2\lvert x\rvert$	$x = 10.9$; $t = 2$
9	$y = arctg^3 x^2; x = t/(p+k); k = \sqrt{p + t^2}$	$t = 4.1$; $p = 3$
10	$y = \cos^2(a + \sin b)$; $a = \sqrt{\lvert x\rvert}$; $b = x^4 + m^2$	m=2 ; x=1.1
11	$y = \sin^3 a + \cos^2 x$; $a = c + k^2$; $c = arctg\lvert x\rvert$	$k = 7.2$; $x = 0.5$
12	$y = e^{\sqrt{\lvert x\rvert}} + \cos x$; $x = a + c^3$; $a = \sin^5 b$	$b = 3$; $c = 1.7$
13	$y = a\cos x - b\sin x; x = \sqrt[3]{\lvert a-b\rvert}; a = t^2 b$	$t = 2.2$; $b = 3$
14	$y = \sqrt{x}\sin a + \sqrt{b}\cos x$; $a = \lg\lvert x\rvert$; $b = x + p^3$	$x = 11$; $p = 2.6$
15	$y = \lg a + \lg b$; $a = \sqrt{x^2 + b^2}$; $x = e^b + N$	$N = 9.1$; $b = 3$
16	$y = \ln\lvert x + t\rvert$; $x = t^2 + p$; $t = p^2 + \sqrt{M}$	$M = 3.8$; $p = 2$
17	$y = e^{a-b}; a = \lg\lvert t + b^2\rvert; t = b^2 + \sqrt{bx}$	$b = 2$; $x = 1.2$
18	$y = \sqrt[3]{x^2 + c^2}; x = e^{mk}; c = \cos^2 m + k^2$	$k = 2$; m =1.8
19	$y = p + v^3; p = \lg\lvert x\rvert; v = \sqrt{x+t}/(t^2 + x^2)$	$x = 5$; $t = 1.8$
20	$y = x^3 / t^2$; $x = e^{\sqrt{p+a}}$; $t = p^3 + a^3$	$a = 2$; $p = 1.6$
21	$y = c^2 + \sqrt{\lvert a\rvert}$; $c = \lg\lvert b\rvert$; $a = (b + x)^3$	$b = 7$; $x = 2$
22	$y = arctg^2\lvert x\rvert$; $x = t^3 + b^2$; $t = b^3 + e^{\sqrt{q}}$	q=2 ; b =1.8
23	$y = v^3 + \cos^2 w$; $v = \cos^2 a$; $w = \sqrt{a + \lvert x\rvert}$	$x = 2.9$; $a = -0.9$
24	$y = x^2 + \sqrt[3]{\lvert x\rvert}$; $x = \cos^2 b + \sin^2 a$; $a = \sqrt{b + t^2}$	$b = 7.1$; $t = 2$
25	$y = \sin^3 x + \cos x^2$; $x = \lg\lvert ct\rvert$; $c = t^2 + \sqrt{a}$	$t = -3$; $a = 8.8$
26	$y = \lg^2\lvert x + a\rvert$; $x = \sqrt{a+b}$; $a = e^{t+b}$	$t = 2$; $b = 1.8$
27	$y = arctg^3\lvert p\rvert$; p= $\sqrt{x^2 + a^2}$; $x = \sqrt{a} + \sqrt{b}$	$a = 7$; $b = 2.3$
28	$y = \ln^2(p+t)^2; p = e^{-\sqrt{t}}; t = x^2 + \sqrt{\lvert n\rvert}$	$x = 3$; $n = -1.9$
29	$y = \cos^3 x + \lvert a\rvert; x = e^{-b}; b = \lvert a\rvert + \sqrt{a + p^2}$	$a = -4$; $p = 3$
30	$y = \sin^4(a^2 + b^2)$; $a = \sqrt{b+t}$; $t = b^2 + k^3$	$b = 2$; $k = 1.8$

З а в д а н н я 2 Обчислення таблиць функцій з розгалуженням

Записати послідовність операторів для обчислення таблиці значень функції $y = f(x)$ з розгалуженою структурою в MatCad, якщо значення x змінюється на заданому проміжку від x_1 до x_2 (тобто $x \in [x_1, x_2]$) з кроком h. Індивідуальні варіанти для функції наведено в табл. 2. Побудувати графік функції. Скласти програму обчислення таблиці значень цієї ж функції і побудови графіка алгоритмічною мовою С++. Записати та порівняти результати обчислень.

Таблиця 2 – **Індивідуальні варіанти для обчислення таблиць значень функції з розгалуженням**

№ варіанта	Функція $y = f(x)$	Значення параметрів
1	$y=\begin{cases}6{,}3\mathrm{e}^{-x}+\cos^3\left(ax+bx^2\right), & x^2\le b\\ \ln\left\|ax^3+b\right\|-1{,}42x, & x^2>b\end{cases}$	$a=-1{,}75;$ $b=3{,}28; h=0.4;$ $x\in[0{,}4;\ 3{,}2]$
2	$y=\begin{cases}a^3\sin^3 x^2+\mathrm{e}^a x-\sqrt{\left\|\mathrm{e}x\right\|}, & ax\le\sqrt{\left\|x\right\|}\\ a^2\mathrm{arctg}\left(ax^3+b\right)+\cos^2 x, & ax>\sqrt{\left\|b\right\|}\end{cases}$	$a=0{,}71;$ $b=17{,}5; h=0.7;$ $x\in[3{,}5;\ 9{,}8]$
3	$y=\begin{cases}\ln\left\|ax\right\|+b\cos^2 a^3x-\mathrm{e}^b, & x^2\le\left\|a^3\right\|\\ \sqrt{\left\|1{,}7x\right\|+2{,}81\mathrm{g}\left\|bx\right\|}, & x^2>\left\|a^3\right\|\end{cases}$	$a=-3{,}48;$ $b=-1{,}28; h=0{,}4;$ $x\in[0{,}3;\ 10{,}1]$
4	$y=\begin{cases}\sin^2 a^2x+\ln\left\|xb^2\right\|, & x^2<\sqrt{\left\|b\right\|}\\ \mathrm{e}^{3a}-\sqrt{\left\|0{,}77ax^3-\lg\left\|x\right\|\right\|}, & x^2\ge\sqrt{\left\|b\right\|}\end{cases}$	$a=0{,}58;$ $b=-19{,}7; h=0{,}6;$ $x\in[3{,}1;\ 8{,}8]$
5	$y=\begin{cases}\sqrt[3]{a^2x}+bx^2-\mathrm{e}^{0{,}05x}, & x^2<0{,}85a\\ \cos^2 b^3x^2+\ln\left\|bx\right\|, & x^2\ge0{,}85a\end{cases}$	$a=2{,}47;$ $b=-0{,}9;\ h=0{,}3$ $x\in[0{,}2;\ 1{,}7]$
6	$y=\begin{cases}\sqrt{\left\|ax^2\right\|+\left\|\sin bx^{1{,}57}\right\|}, & 3x<\sqrt{b-a}\\ 1{,}4a^2x-\ln\left\|ax\right\|+\mathrm{e}^{b^2x}, & 3x\ge\sqrt{b-a}\end{cases}$	$a=1{,}38;$ $b=4{,}6;\ h=0{,}15$ $x\in[0{,}1;\ 1{,}9]$
7	$y=\begin{cases}\sqrt[3]{\cos^2\left(a+bx^3\right)+5{,}1x}, & x<\sqrt{a}\\ \mathrm{e}^{0{,}07x}+\ln\left\|b^5\cos x\right\|, & x\ge\sqrt{a}\end{cases}$	$a=2{,}81;$ $b=-3{,}67;\ h=0{,}2$ $x\in[0{,}7;\ 1{,}9]$
8	$y=\begin{cases}\sqrt{\left\|ax-\cos^2 b^3x+\ln x^2\right\|}, & x^2\ge\left\|a^3\right\|\\ \sin bx^{2{,}5}+\mathrm{e}^{ax}, & x^2<\left\|a^3\right\|\end{cases}$	$a=-1{,}98;$ $b=-0{,}75;\ h=0{,}3$ $x\in[0{,}3;\ 2{,}5]$

Продовження таблиці 2

№ варіанта	Функція $y = f(x)$	Значення параметрів
9	$y=\begin{cases} ax^2-e^{a^2x}+\ln bx^2, & x<\sqrt{9{,}8b} \\ \sqrt[3]{5{,}7b^2-\mathrm{arctg}\,a^2x}, & x\ge\sqrt{9{,}8b} \end{cases}$	$a=-3{,}8$; $b=7{,}91$; $h=2{,}1$ $x\in[4{,}1;\ 10{,}4]$
10	$y=\begin{cases} \sqrt{\lvert abx\rvert+\sin^2 2bx}, & 2x>e^2 \\ \cos^2 x^3+\lg\lvert abx\rvert, & 2x\le e^2 \end{cases}$	$a=3{,}8$; $b=-2{,}5$; $h=0{,}3$ $x\in[1{,}5;\ 9{,}7]$
11	$y=\begin{cases} \sqrt[3]{10{,}31bx+e^{ax}}, & a>x^3 \\ \cos^2 bx+\ln ax, & a\le x^3 \end{cases}$	$a=1{,}87$; $b=3{,}3$; $h=0{,}2$ $x\in[0{,}2;\ 1{,}4]$
12	$y=\begin{cases} 4{,}11\cdot\ln bx+e^{\lg ax}, & x^2\le b^{3,2} \\ \mathrm{arctg}\,ax^2-\cos^2 a^2x, & x^2>b^{3,2} \end{cases}$	$a=1{,}8$; $b=2{,}5$; $h=1{,}1$ $x\in[3{,}1;\ 8{,}6]$
13	$y=\begin{cases} e^{\lvert ax\rvert}+\sqrt{\lvert b^3x\rvert}, & \ln x<a \\ \sqrt[3]{\mathrm{arctg}bx-4{,}7ax}, & \ln x\ge a \end{cases}$	$a=-0{,}355$; $b=4{,}3$; $h=0{,}1$ $x\in[0{,}5;\ 0{,}9]$
14	$y=\begin{cases} a^3+bx^2-\sin(a^3+bx^2), & x>\ln\frac{b}{2} \\ \sqrt{\lvert e^{ax}+10{,}71\lg bx\rvert}, & x\le\ln\frac{b}{2} \end{cases}$	$a=1{,}87$; $b=11{,}3$; $h=0{,}1$ $x\in[1{,}1;\ 1{,}6]$
15	$y=\begin{cases} 2{,}5\sin^2 b^2x+\lg ab^5x, & x<a^{1/2} \\ \sqrt[3]{e^{ax}-\mathrm{arctg}b^2x}, & x\ge a^{1/2} \end{cases}$	$a=0{,}4$; $b=2{,}57$; $h=0{,}15$ $x\in[0{,}1;\ 0{,}8]$
16	$y=\begin{cases} (a+\sin bx)(1{,}38-e^{-x}), & x\ge a \\ \sqrt[3]{ab^2x+\mathrm{arctg}bx}, & x<a \end{cases}$	$a=7{,}31$; $b=1{,}87$; $h=0{,}5$; $x\in[4{,}5;\ 10{,}5]$
17	$y=\begin{cases} \sqrt{27{,}4bx+e^{ax}}, & 1/x<a \\ \mathrm{arctg}bx^2-\ln ax, & 1/x\ge a \end{cases}$	$a=1{,}4$; $b=3{,}8$; $h=0{,}2$; $x\in[0{,}5;\ 1{,}7]$
18	$y=\begin{cases} \ln(11{,}5ax+33{,}1bx), & x>a+b \\ arctg^2ax-\cos x^3+b^2, & x\le a+b \end{cases}$	$a=0{,}48$; $b=0{,}25$; $h=0{,}2$; $x\in[0{,}2;\ 1{,}0]$
19	$y=\begin{cases} e^{ax}+1.73b^4x^2, & x<0.25b \\ \sin^2 bx-\lvert\cos ax^2\rvert, & x\ge 0.25b \end{cases}$	$a=0{,}8$; $b=2{,}4$; $h=0{,}2$; $x\in[0{,}1;\ 1{,}1]$

Закінчення таблиці 2

№ варіанта	Функція $y = f(x)$	Значення параметрів
20	$y=\begin{cases}\sqrt{12{,}9ax+\ln bx}, & x\le a\\ \mathrm{arctg}a^2x-\lvert\sin bx^2\rvert, & x>a\end{cases}$	$a=2{,}49$ $b=8{,}28;\ h=0{,}9;$ $x\in[3{,}5;\ 0{,}8]$
21	$y=\begin{cases}\sqrt[3]{\left\lvert\mathrm{arctg}^2bx+\sqrt{\mathrm{e}^{5ax}}\right\rvert}, & x>b\\ \sin b^2x-\ln(ax+5b), & x\le b\end{cases}$	$a=0{,}87;$ $b=1{,}44;\ h=0{,}2;$ $x\in[0{,}3;\ 2{,}3]$
22	$y=\begin{cases}\lg\lvert bx^2\rvert+\cos^2ax, & \ln a\ge x\\ \sqrt{\mathrm{e}^2x+\mathrm{arctg}^2ab^2x}, & \ln a<x\end{cases}$	$a=14{,}7;$ $b=-3{,}1;\ h=0{,}4$ $x\in[1{,}4;10{,}7]$
23	$y=\begin{cases}\sqrt[3]{1.411b^2x+\sin^2ax}, & x<a^3\\ \mathrm{e}^{x+b}+\ln\lvert bx\rvert\cdot\lg\lvert ax\rvert, & x\ge a^3\end{cases}$	$a=1{,}7;$ $b=-4{,}1;\ h=0{,}3;$ $x\in[2{,}5;7{,}5]$
24	$y=\begin{cases}\ln ax\cdot\mathrm{e}^{bx}+\sqrt{3{,}4b^2x}, & x<\cos a\\ 1{,}4x-\mathrm{arctg}b^2x, & x\ge\cos a\end{cases}$	$a=0{,}5$ $b=-1{,}3;\ h=0{,}1;$ $x\in[0{,}4;1{,}4]$
25	$y=\begin{cases}\sqrt[3]{3{,}77a^3x}+\sqrt{\mathrm{e}^{-ax}}, & x>\mathrm{e}^{\cos b}\\ \ln a^2x-\lvert\lg bx^2\rvert, & x\le\mathrm{e}^{\cos b}\end{cases}$	$a=4{,}71,$ $b=0{,}5;\ h=0{,}4$ $x\in[0{,}5;\ 8{,}5]$
26	$y=\begin{cases}4{,}45\mathrm{tg}ax^2+7{,}1bx, & x\le\ln a\\ \mathrm{e}^{a+b}-\lvert\sin^2x^3\rvert, & x>\ln a\end{cases}$	$a=7{,}77;$ $b=-4{,}4;\ h=0.3$ $x\in[0.3;\ 6.4]$
27	$y=\begin{cases}\sin\dfrac{3\pi}{2}x+\cos(5a+bx), & x\ge a^2\\ \lg a^5x-\sqrt{\lvert\cos bx\rvert}, & x<a^2\end{cases}$	$a=1{,}1;$ $b=0{,}74;\ h=0{,}25;$ $x\in[0;\ 2{,}4]$
28	$y=\begin{cases}4{,}32\sqrt{\lvert abx\rvert+\lvert\cos x\rvert}, & \ln(a-b)\ge x\\ 17{,}3(x-b)-\mathrm{e}^{-2ax}, & \ln(a-b)<x\end{cases}$	$a=3{,}4;$ $b=-3{,}3;\ h=0{,}4;$ $x\in[0{,}1;\ 7{,}8]$
29	$y=\begin{cases}\mathrm{tg}(ax+3.8bx), & x>a+b\\ ctg^2ax-\cos3x+b^2, & x\le a+b\end{cases}$	$a=0{,}37;$ $b=0{,}21;\ h=0{,}05;$ $x\in[0{,}2;\ 1{,}0]$
30	$y=\begin{cases}a^x+1.73\cos b\ x, & x<0.25b\\ \sin^2bx-\lvert\cos ax^2\rvert, & x\ge0.25b\end{cases}$	$a=0{,}64;$ $b=1{,}47;\ h=0{,}1;$ $x\in[0{,}1;\ 1{,}1]$

З а в д а н н я 3 Побудова графіків

Побудувати графік функції $f(x)$, яку обчислено в завданні 2.

Пояснення. Щоб побудувати графік к функції одного аргументу ($f(x)$)виконайте такі дії:

– запишіть проміжок змінення аргументу

$$x := x_п, x_п+h \,..\, x_к;$$

– запишіть формулу функції $f(x)$;

– за допомогою піктограми на панелі Графика відкрийте бланк для побудови графіка функцій одного аргументу;

– в середній позначці нижче віссі абсцис надрукуйте аргумент – x, а в середній позначці зліва від осі ординат запишіть ім′я функції $f(x)$;

– виведіть курсор за межі графічної області. MathCAD побудує графік.

З а в д а н н я 4 Обчислення сум та добутків

Обчислити таблиці значень функції сум та добутків в MatCad. Згідно з індивідуальним варіантом формули для функцій наведено в табл. 3.

Зауваження. Перед виконанням завдання визначте, за яких значень змінних буде можливо, що чисельник чи то знаменник функції дорівнюватиме нулю. За допомогою оператора *if* запишіть формулу обчислення функції.

Таблиця 3 – **Індивідуальні завдання обчислення сум та добутків з розгалуженням.**

1	$S=\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)}{(k-5)}\prod_{m=1}^{k+7}\frac{m^2-9}{m-2}$	2	$P=\prod_{j=1}^{k}\frac{(j-6)j}{j-3}\sum_{i=j}^{12}\frac{\sqrt[3]{i+5}}{i-11}$
3	$Z=\prod_{j=-4}^{k}\frac{(j+2)j}{j-3}\sum_{i=j}^{k+5}\left(\frac{\sqrt[5]{i+5}}{i-11}+5i\right)$	4	$A=\prod_{j=1}^{k}\frac{(j-4)j}{j-3}\sum_{i=j}^{12}\frac{\sqrt[3]{i+5}}{i-1}$
5	$S=\sum_{k=3}^{n}\frac{(-2)^{k-1}}{(k-5)}\prod_{i=1}^{k+7}\frac{i^3-27}{i-7}$	6	$P=\prod_{j=2}^{k}\frac{(j-6)j}{(j-3)(j-1)!}$
7	$Z=\prod_{j=-3}^{k}\frac{(j+2)j}{j-3}\sum_{i=j}^{k+5}\left(\frac{i+5}{i-11}-3{,}5i\right)$	8	$Q=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k(k+3)^2}{k!}$
9	$W=\sum_{i=-2}^{k}\frac{(-1)^i(i+3)!}{i^2-4}$	10	$U=\prod_{t=2}^{k}\frac{\cos(t)}{t-3}\sum_{i=1}^{t}\left(\frac{i-2}{i-7}\right)$
11	$Y=\sum_{n=1}^{k}\frac{(-1)^{2-n}(n^2-9)^2}{(n+1)!}$	12	$S=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-3)^{3k+1}}{(k-2)^{3k+1}}\prod_{m=1}^{k+n}\frac{m^3-8}{m-3}$

Закінчення таблиці 3

13	$W=\sum_{i=1}^{k}\frac{(-1)^i}{(i-3)^2}\prod_{n=i}^{2k}\frac{n^3-8}{n+2}$		$Z=\prod_{j=-4}^{k}\frac{(j+2)j}{j-3}\sum_{i=j}^{k+5}\left(\frac{\sqrt[5]{i+5}}{i-11}+5i\right)$
15	$L=\prod_{j=1}^{k}\frac{(j-5)}{j-3}\sum_{i=k}^{12}\frac{\sqrt{\lvert i+5\rvert}}{i-1}$		$Y=\sum_{i=1}^{k}\frac{(i-1)^i}{(3-i)^2}\prod_{n=i}^{2+k}\frac{n+0.8}{n+i}$
17	$Q=\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)^{k+1}(k+3)}{(k+1)!}$		$G=\prod_{j=-3}^{k}\frac{(2j-1)}{4j-3}\sum_{i=j}^{k+5}\left(\frac{i+5}{1-k+j}\right)$
19	$Z=\prod_{t=0}^{k}\frac{t+k}{\cos(t)-3}\sum_{i=1}^{t}\left(\frac{3i-2}{i+7}\right)$		$D=\sum_{i=-2}^{k}\frac{\left(-2^i\right)\sin^2(i+3)}{(i+3)!}$
21	$R=\sum_{i=1}^{k}\frac{(1-i)^i}{(i+3)}\prod_{n=i}^{2k}\frac{n-i}{n+2}$		$Z=\prod_{n=-2}^{k}\frac{(n+1)\lvert n-9\rvert}{(n+3)!}$
23	$Q=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}(k+7)}{k!}$		$p=\prod_{i=1}^{n}\frac{(3i-1)(i-3)}{(2i-1)!}$
25	$W=\sum_{i=1}^{k}\frac{(-1)^i(i-3)^2}{i!}$		$W=\sum_{i=1}^{k}\frac{(-1)^i}{(i-3)^2}\prod_{n=i}^{2k}\frac{n^3-8}{n+2}$
27	$A=\prod_{j=1}^{k}\frac{(j^2-4)j}{j-k+1}\sum_{i=j}^{9}\frac{i-3}{i-7}$		$Y=\sum_{i=-1}^{k}\frac{(k-i)^i(i+2)!}{i^2-4}$
29	$P=\prod_{j=1}^{k}\frac{(j-6)j}{j-3}\sum_{i=j}^{12}\frac{\sqrt[3]{i+5}}{i-11}$		$F=\sum_{n=0}^{k}\frac{\left(n+2^k\right)\lvert n-4\rvert}{(n)!}$

2 ЧИСЕЛЬНЕ ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

2.1 Загальні відомості

Задачі, які потребують обчислення визначеного інтеграла, виникають у різних областях інженерної практики. Обчислення визначеного інтеграла в процесі моделювання об'єктів, чи то систем може застосовуватися в таких задачах:

1 визначання шляху за змінної швидкості

$$S = \int_{t_0}^{t} V(t)dt\,;$$

2 віднаходження швидкості за змінного прискорення

$$V = \int_{t_0}^{t} \alpha(t)dt\,;$$

3 визначання моментів інерції тіл

$$Y_z = \int_{t_0}^{t} x^2 dm\,;$$

4 віднаходження роботи змінної сили

$$A = \int_{t_0}^{t} F(t)dt\,;$$

5 розв´язування диференційних рівнянь методом інтегрування.

2.2 Постановка задачі інтегрування

Математична постановка задачі: для заданої функції $y = f(x)$ відзнайти інтеграл цієї функції на проміжку [a, b], тобто обчислити

$$\int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Якщо підінтегральну функцію $f(x)$ задано в аналітичному вигляді, і якщо функція f(x) є неперервна на відрізку [a,b] та відома її первісна, тобто

$$F'(x) = f(x), \quad \text{де} \quad x \in [a,b],$$

то інтеграл може бути обчислений за формулою Ньютона–Лейбніца як приріст первісної на проміжку $[a,b]$, тобто

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a)\,.$$

Але на практиці формула Ньютона–Лейбніца для обчислення інтеграла використовується рідко, тому що складно визначити первісну.

Для інтегрування застосовуються чисельні методи в таких випадках:

1 підінтегральну функцію $f(x)$ задано в таблиці на проміжку [a, b];

2 підінтегральну функцію $f(x)$ задано аналітично, але її первісна не може бути надана через елементарні функції;

3 підінтегральну функцію $f(x)$ задано аналітично, вона має первісну, але її віднайдення є надто складне.

2.3 Чисельні методи інтегрування

У чисельних методах інтегрування не використовується віднаходження первісної. Основу алгоритму чисельних методів інтегрування становить геометричне подання визначеного інтеграла. Інтеграл чисельно дорівнює площі S криволінійної трапеції, розташованої під підінтегральною кривою $f(x)$ на проміжку інтегрування $[a\ ,\ b]$ (рис. 2.1).

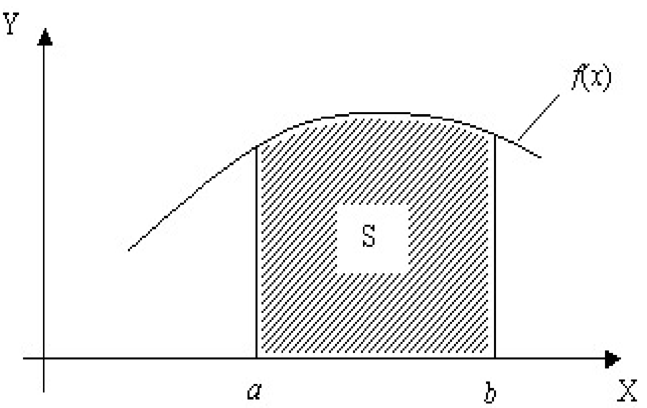


Рисунок 2.1 – Геометричне подання визначеного інтеграла

Суть усіх чисельних методів інтегрування полягає у *наближеному обчисленні площі* криволінійної трапеції. Тому всі чисельні методи є наближеними.

При обчисленні інтеграла підінтегральна функція $f(x)$ апроксимується інтерполяційним багаточленом. На практиці, щоби не мати справи з багаточленами високих степенів, увесь проміжок $[a, b]$ поділяють на n відрізків і інтерполяційні багаточлени будують для кожного відрізка.

Порядок обчислення інтеграла чисельними методами є такий (рис. 2.2):

1 весь проміжок інтегрування $[a, b]$ ділимо на n рівних відрізків з кроком

$$h = \frac{b-a}{n}.;$$

2 на кожному відрізку підінтегральну функцію $f(x)$ апроксимуємо інтерполяційним багаточленом;

3 для кожного відрізка обчислюємо площу часткової криволінійної трапеції;

4 підсумовуємо площі часткових криволінійних трапецій. Наближене значення інтеграла *I* дорівнює сумі площ часткових трапецій:

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} S_i \ .$$

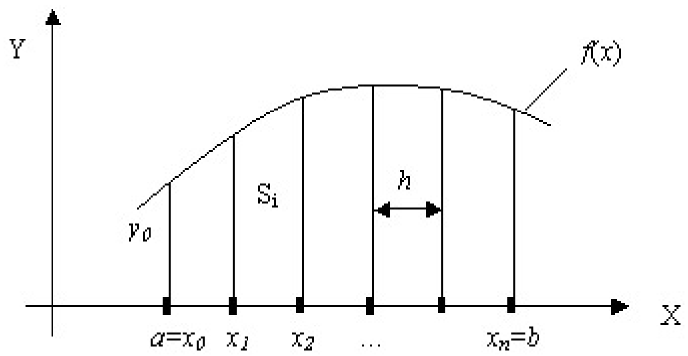


Рисунок 2.2 – Обчислення визначеного інтеграла

Віднаходження наближеного значення інтеграла називається квадратурою, а формули для наближеного обчислення інтеграла – формулами квадратури чи то сумами квадратури. Різниця *R* поміж точним значенням інтеграла і наближеним значенням називається залишковим членом, чи то похибкою формули квадратури, тобто

$$R = \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^{n-1} S_i .$$

Якщо на кожному відрізку інтервалу [*a, b*] підінтегральна функція апроксимується багаточленом нульового степеня, тобто прямою, паралельною до осі *OX*, то метод називається методом прямокутників, а формула квадратури – *формулою прямокутників*:

$$S = h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \, . \tag{2.1}$$

Якщо на кожному відрізкові інтервалу [*a,b*] підінтегральна функція апроксимується багаточленом першого степеня, тобто прямою з’єднують дві сусідні вузлові точки, то метод називається методом трапецій, а формула квадратури – *формулою трапецій*:

$$S = \frac{h}{2}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right) . \tag{2.2}$$

Якщо на кожних двох відрізках інтервалу [*a, b*] підінтегральна функція апроксимується багаточленом другого степеня, то метод називається методом Сімпсона, а формула квадратури – *формулою Сімпсона*:

$$S = \frac{h}{3}\left(f(a) + f(b) + 4\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{j=1}^{n-2} f(x_j) \right) \tag{2.3}$$

Опис чисельних методів та алгоритмів інтегрування наведено в [6,7,9].

Приклади обчислювання визначеного інтеграла

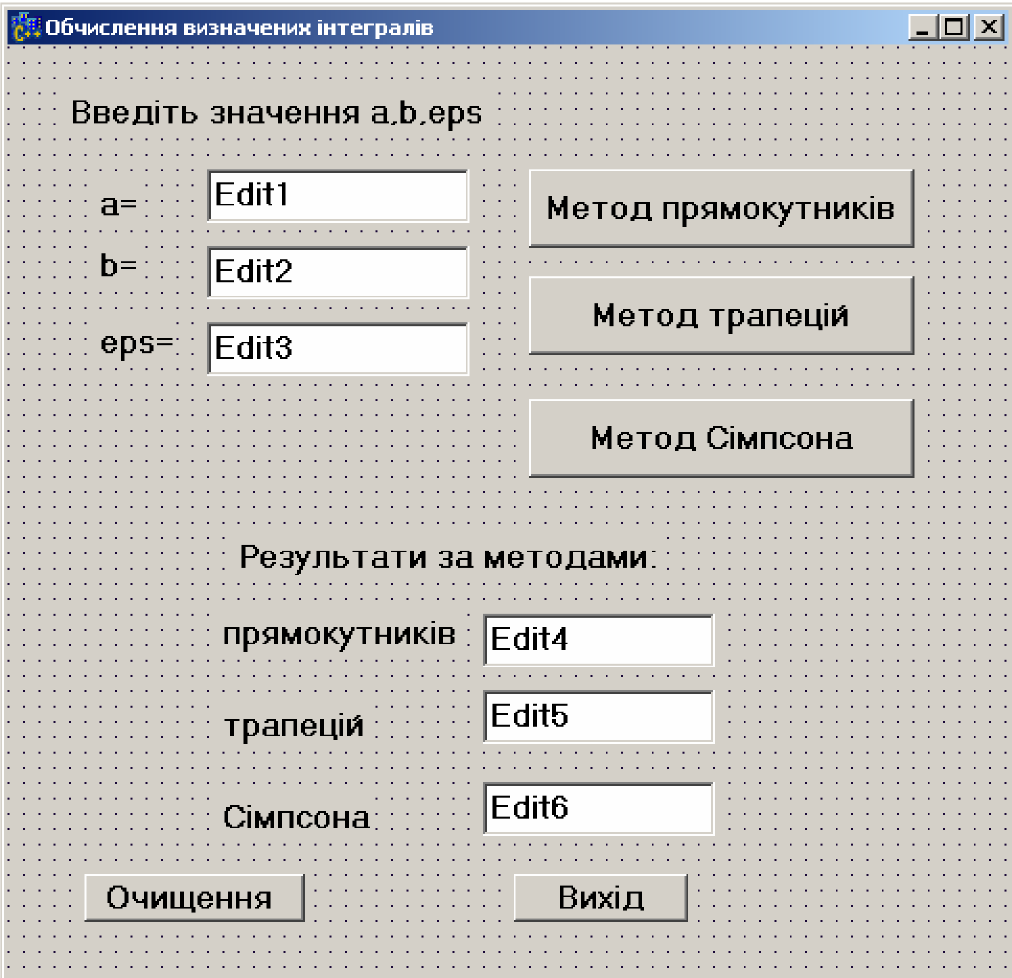
Завдання: Обчислити визначений інтеграл

$$I = \int_{1.3}^{14.3} \frac{1.7 - 2.71x + 3.72x^2}{1 + 3.74x^3} dx$$

методами трапецій, прямокутників та Сімпсона, скласти проект програми мовою C++ у середовищі Builder, а також перевірити результат обчислення у математичному пакеті MathCad.

Приклад 1 Обчислення інтегралів із заданою похибкою

Вигляд форми проекту в Borland Builder C++ наведено на рисунку



Вікно форми для обчислень інтеграла різними методами

Текст програми

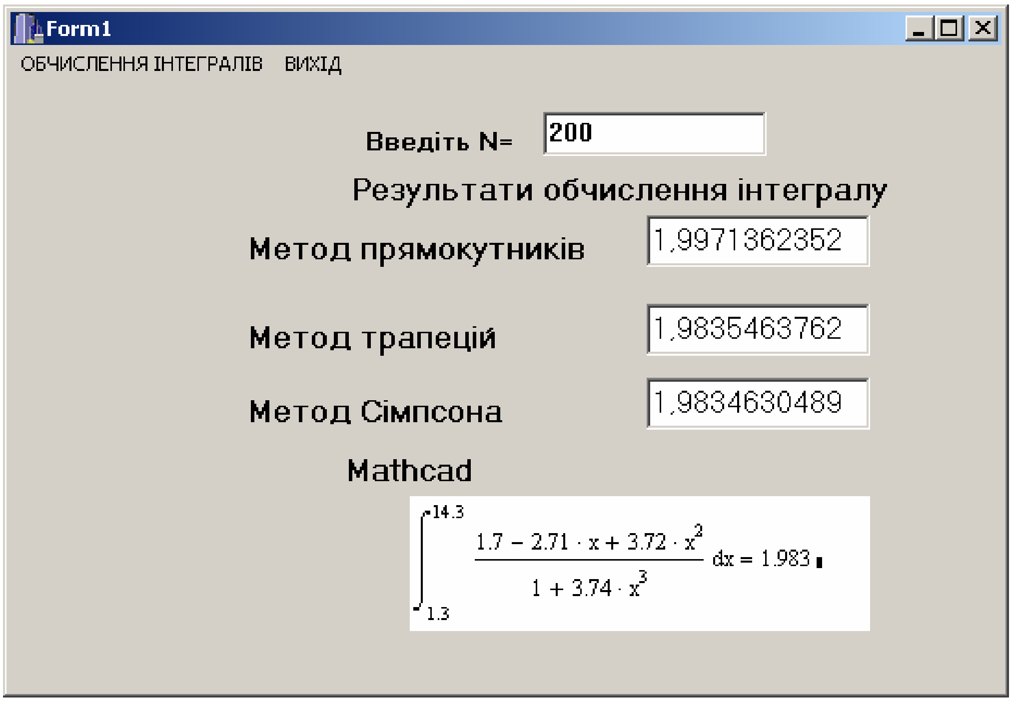
```
#include <vcl.h>
#include <math.h>
#pragma hdrstop
#include "Unit1.h"
//---------------------------------------------------------------------------
```

```
#pragma package(smart_init)
#pragma resource "*.dfm"
TForm1 *Form1;
//-------------------------------------------------------------
__fastcall TForm1::TForm1(TComponent* Owner)
       : TForm(Owner)
{
}
//--------Підінтегральна функція------------------------
 double f(double x)
 {  return   (1.7-2.71*x+3.72*x*x)/(1+3.74*pow(x,3));   }
// Метод прямокутників
double pram_int(double a,double b,double eps)
 {  double h=eps,s,x;
    for (s=0, x=a; x<b ; x+=h)
    s += f(x);
    return h*s;
 }

// Метод трапецій
double trap_int(double a,double b,double eps)
{   double h=eps,s,x;
   for (s=0, x=a+h; x<b ; x+=h)
   s += f(x);
 return h/2.*(f(a)+f(b)+2*s);
 }

// Метод Сімпсона
double simp_int(double a,double b,double eps)
 {   double h=eps,s1,s2,x; int i, n;
     n=(int)((b-a)/h)+1;
     if (n%2==0) {n++;h=(b-a)/(n-1);}
     for (s1=0, i=1,x=a+h; i<n-1 ; i+=2,x+=2*h)
     s1 += f(x);
     for (s2=0, i=2,x=a+2*h; i<n-2 ;i+=2, x+=2*h)
     s2+=f(x)  ;
     return   h/3.*(f(a)+f(b)+4*s1+2*s2);
  }

// Інтеграл за методом прямокутників

void __fastcall TForm1::Button2Click(TObject *Sender)
{
   double a,b,i_ pram,eps;
   a=StrToFloat(Edit1->Text);
```

```
  b=StrToFloat(Edit2->Text);
  eps=StrToFloat(Edit3->Text);
  i_pram= pram_int(a,b,eps); // звертання до функції методу прямокутників
 Edit4->Text=FloatToStr(i_ pram);
 }

// Інтеграл за методом трапецій
void __fastcall TForm1::Button1Click(TObject *Sender)
 {
   double a,b,i_trap,eps;
   a=StrToFloat(Edit1->Text);
   b=StrToFloat(Edit2->Text);
   eps=StrToFloat(Edit3->Text);
   i_trap=trap_int(a,b,eps); // звертання до функції методу трапецій
  Edit5->Text=FloatToStr(i_trap);
 }

// інтеграл  за методом Сімпсона

void __fastcall TForm1::Button3Click(TObject *Sender)
{
  double a,b,i_simp,eps;
  a=StrToFloat(Edit1->Text);
  b=StrToFloat(Edit2->Text);
  eps=StrToFloat(Edit3->Text);
  i_simp=simp_int(a,b,eps); // звертання до функції методу Сімпсона
 Edit6->Text=FloatToStr(i_simp);
}

//-----кнопка ОЧИЩЕННЯ---------------------------

void __fastcall TForm1::Button2Click(TObject *Sender)
 {    Edit1->Clear(); Edit2->Clear();
      Edit3->Clear();Edit4->Clear();
      Edit5->Clear();
 }

//-----кнопка ВИХІД---------------------------------

void __fastcall TForm1::Button3Click(TObject *Sender)
{
Close();
}
```

Приклад 2 Обчислення інтегралів зі значенням кількості інтервалів

Вигляд форми проекту в Borland Builder C++ наведено нижче на рисунку.



Форма та результати роботи проекту

Текст програми

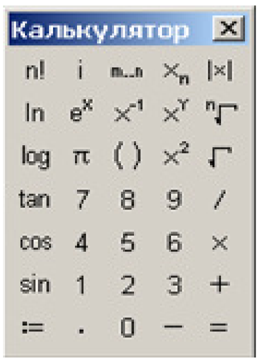
```
...
#include <vcl.h>
#include <math.h>
#pragma hdrstop
#include "Unit1.h"
#pragma package(smart_init)
#pragma resource "*.dfm"
TForm1 *Form1;

__fastcall TForm1::TForm1(TComponent* Owner)
      : TForm(Owner) {
 }

// Підінтегральна функція
   float    f(float x)
  {
   return   (1.7-2.71*x+3.72*x*x)/(1+3.74*pow(x,3));
  }
```

```
//Функція обчислення інтеграла за методом прямокутників
float PRAM(float a, float b, int n)
{float x, sum, h;
h=(b-a)/n;
sum=0;
x=a;
for(int i=0;i<n;i++)
{sum+=f(x);
x+=h;}
sum*=h;
return sum;
}

// Функція обчислення інтеграла за методом трапецій
float TRAP(float a, float b, int n)
  {    float h,s,x;
       h=(b-a)/n;
       s=0;
       x=a+h;
         for(int i=1;i<n;i++)
            {s+=f(x);
             x+=h;}
       s=h/2.*(f(a)+f(b)+2*s);
       return  s;
   }
// Функція обчислення інтеграла за методом Сімпсона
float SIM (float a, float b, int n)
{
  float h,x,s1,s2;
  h=(b-a)/n;
  x=a+h;
  s1=0; s2=0;
  for (int i=1;i<n;i++)
    {if(i%2==1) s1+=f(x);
       else s2+=f(x);
     x+=h;
    }
return h/3*(f(a)+f(b)+4*s1+2*s2);
}

// Відгук на команду меню Метод прямокутників
void __fastcall TForm1::N6Click(TObject *Sender)
{
int n; float I;
n=StrToInt(Edit1->Text);
```

```
I=PRAM(1.3,14.3,n); // звертання до функції методу прямокутників
Edit4->Text=FloatToStr(I);
}
// Відгук на команду меню Метод трапецій
void __fastcall TForm1::N2Click(TObject *Sender)
{
int n; float I;
n=StrToInt(Edit1->Text);
I=TRAP(1.3,14.3,n); // звертання до функції методу трапецій
Edit2->Text=FloatToStr(I);
}

// Відгук на команду меню Метод Сімпсона
void __fastcall TForm1::N3Click(TObject *Sender)
{int n; float INT;
n=StrToInt(Edit1->Text);
INT=SIM(1.3,14.3,n); // звертання до функції методу Сімпсона
Edit3->Text=FloatToStr(INT);
}

// Відгук на команду меню Вихід
void __fastcall TForm1::N5Click(TObject *Sender)
{
 Close();
}
```

Приклад 3 Обчислення визначеного інтеграла у математичному пакеті Mathcad

Панель інструментів Математика, наявна лише в Mathcad, містить шаблони символів задля написання математичних формул, символьних обчислень та побудови графіків чи то операторів програмування. Обчислення значень визначених інтегралів виконують з використовуванням відповідних шаблонів групи Калькулус (або Матаналіз) та групи Калькулятор, задля записування формул.



Шаблони символів Калькулус та Калькулятор

Задля обчислення значень визначених інтегралів слід перейти до математичної області (курсор матиме вигляд червоного хрестика) й обрати шаблон інтеграла

$$\boxed{\int_{\blacksquare}^{\blacksquare} \blacksquare \, d\blacksquare}$$

та записати до нього формулу задля обчислення значення визначеного інтеграла. Задля здобуття результату обчислення інтеграла слід виокремити курсором цей вираз та натиснути клавішу **=** (дорівнює). Наприклад, обчислення значення інтеграла за формулою у математичному пакеті Mathcad:

$$\int_{1.3}^{14.3} \frac{1.7 - 2.71 \cdot x + 3.72 \cdot x^2}{1 + 3.74 \cdot x^3} \, dx = 1.983$$

Л а б о р а т о р н а р о б о т а № 2

ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Мета роботи

Ознайомитися з чисельними методами обчислення інтегралів. Набути навичок використовування чисельних методів обчислення визначених інтегралів та програмування методів обчислення інтеграла, у програмах мовою С++ в середовищі програмування Builder та у математичному пакеті Mathcad.

2 Контрольні запитання

1. Що є результатом чисельного диференціювання?
2. У яких випадках доцільно використовувати чисельні методи інтегрування функцій?
3. Сформулюйте задачу віднаходження визначеного інтеграла із заданою точністю за формулою трапецій.
4. В чому полягає метод прямокутників?
5. В чому полягає метод Сімпсона?
6. Як впливає розмір проміжків інтегрування на точність обчислення визначеного інтеграла?
7. В чому полягає метод трапецій?
8. Зазначте переваги та недоліки методів обчислення визначеного інтеграла.

3 Лабораторне завдання

1 Вивчити основні теоретичні відомості, потрібні задля виконання лабораторної роботи, й дати відповіді на контрольні запитання.

2 Скласти схему алгоритму та програму мовою С++ обчислення визначеного інтеграла двома методами згідно з номером варіанта (табл. 2.2):

$$I = \int_a^4 f(x)dx ,$$

де $a = 0{,}1 \cdot N$; N – номер індивідуального варіанта; $f(x)$ – підінтегральна функція, яку обрати з табл. 2.1 згідно з номером варіанта, із заданою кількістю інтервалів n. У програмі передбачити введення з клавіатури проміжку інтегрування [a, b] та кількості інтервалів n.

3 Виконати на комп'ютері програму обчислення заданого інтеграла чисельними методами в С++ для значень $n = 10, 100, 1000$.

4 Обчислити значення інтеграла аналітично за формулою Ньютона–Лейбніца.

5 Перевірити результат обчислення визначених інтегралів у математичному пакеті Mathcad.

6 Провести порівняльний аналіз здобутих результатів.

7 Оформити протокол виконання лабораторної роботи згідно з вимогами.

Таблиця 2.1 – Індивідуальні варіанти підінтегральних функцій

№ варіанта	$f(x)$	**№ варіанта**	$f(x)$
1	x^3+2x^2+2	**16**	$x^3+0.2x^2+0.5x+0.8$
2	$x^3-3x^2+9x-10$	**17**	x^3+4x-6
3	x^3-2x+2	**18**	$x^3+0.1x^2+0.4x-1.2$
4	x^3+3x-1	**19**	x^3+3x^2+6x-1
5	x^3+x-3	**20**	$x^3-0.1x^2+0.4x-1.5$
6	$x^3+0.4x^2+0.6x-1.6$	**21**	x^3-3x^2+6x-2
7	$x^3-0.2x^2+0.4x-1.4$	**22**	$x^3-0.2x^2+0.3x-1.2$
8	$x^3-0.1x^2+0.4x+2$	**23**	$x^3-3x^2+12x-9$
9	$x^3+3x^2+12x+3$	**24**	$x^3+0.2x^2+0.5x-2$
10	$x^3-0.2x^2+0.5x-1$	**25**	x^3+3x+1
11	$x^3-0.1x^2+0.4x+1.2$	**26**	$x^3+0.2x^2+0.5x-1.2$
12	x^3-3x^2+6x-5	**27**	x^3-3x^2+9x+2
13	$x^3-0.2x^2+0.5x-1.4$	**28**	$x^3-0.1x^2+0.4x-1.5$
14	x^3+2x+4	**29**	x^3-3x^2+6x+3
15	$x^3-3x^2+12x-12$	**30**	$x^3-0.1x^2+0.3x-0.6$

Таблиця 2.2 – Індивідуальні варіанти методів обчислення інтегралів

Номери варіантів	**Методи обчислення інтегралів**
1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28	прямокутників, трапецій
2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29	Сімпсона, прямокутників
3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30	трапецій, Сімпсона

3 ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ

3.1 Постановка задачі

Дано рівняння

$$f(x) = 0, \tag{3.1}$$

де $f(x)$ – нерозривна алгебраїчна функція на проміжку $[a, b]$. Значення змінних ξ_i (де i =1, 2, ...), за яких виконується рівняння $f(\xi_i) = 0$, називають *нулями* функції $f(x)$, або *розв'язками рівняння*. Графічно розв'язок рівняння ξ – це точка перетинання функції з віссю абсцис (рис. 3.1).

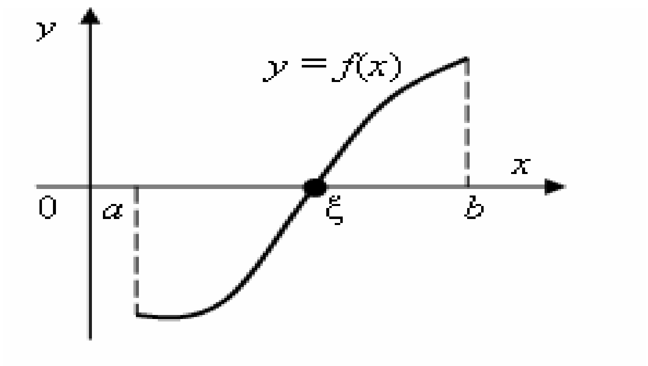


Рисунок 3.1 – Геометрична інтерпретація розв'язування рівняння

Рівняння (3.1) може мати один чи кілька розв′язків чи то не мати жодного. Проміжок $[a, b]$, на якому <u>є один і лише один розв'язок</u> ξ – рівняння, називають *проміжком ізоляції*.

Здебільшого для розв'язування рівнянь немає аналітичних формул. Тому виникає потреба у використовуванні наближених методів обчислення розв'язків рівнянь. Чисельні методи обчислення розв'язків нелінійних рівнянь з однією змінною складаються з двох етапів:

1 визначення проміжків ізоляції розв'язків рівняння з метою обрання *початкового* наближення;

2 уточнення початкового наближеного значення розв'язку до заданого ступеня точності (за заданим значенням похибки).

3.2 Методи визначання проміжків ізоляції

Задля визначання проміжків ізоляції використовується така теорема: якщо функція $f(x)$ є неперервна на проміжку $[a, b]$ і на його кінцях <u>набуває значення протилежних знаків</u>, тобто $f(a) \cdot f(b) < 0$, то усередині цього проміжку міститься хоча б один розв'язок рівняння $f(x) = 0$. Якщо, окрім цього, перша похідна $f'(x)$ на цьому проміжку зберігає знак, то цей розв'язок є єдиний.

На підставі цієї теореми зрозуміло, що задля визначання всіх проміжків ізоляції достатньо *побудувати графік функції* чи то *обчислити таблицю* її значень та визначити найменші проміжки значень змінної *x,* на кінцях яких функція має протилежні знаки. Методи та алгоритми програмування розв'язування нелінійних рівнянь з однією змінною наведено в [6, 7, 9].

3.3 Уточнення наближеного розв'язування рівняння методом ділення навпіл

За початкове наближення x_0 обираємо середину проміжка ізоляції [a, b]

$$x_0 = \frac{a+b}{2}.$$

Якщо в точці ділення значення функції дорівнює нулеві, тобто $f(x_0) = 0$, то віднайдено точне значення розв'язку рівняння (зазвичай ця умова не виконується).

Точка x_0 поділяє проміжок [a b] на два відрізки змінної x: [a, x_0] та [x_0, b]. Обчислимо значення функції $f(x)$ на кінцях кожного з цих відрізків. Далі ми обираємо той з відрізків, на кінцях якого функція $f(x)$ має протилежні знаки. Дістаний новий відрізок позначимо [a_1, b_1] і його знову поділимо навпіл, і виконаємо дії, аналогійні до попередніх. Унаслідок подовження таких кроків дістанемо послідовність вкладених відрізків: [a_1, b_1], [a_2, b_2], …, [a_n, b_n]. Процес повторюємо доти, допоки довжина відрізка не стане менше за задану похибку ε:

$$|b-a| < \varepsilon.$$

Умови для використовування методу ділення навпіл:

1) функція $f(x)$ – неперервна на проміжку [a, b];
2) на кінцях проміжку ізоляції [a, b] значення функції мають протилежні знаки, тобто $f(a) \cdot f(b) < 0$;
3) перша похідна $f'(x)$ зберігає знак на проміжку ізоляції.

Недоліком цього методу є невисока точність, тому що за зменшення інтервалу [a, b] збільшується похибка обчислення його довжини ($b - a$).

3.4 Уточнення наближеного розв'язування рівняння методом Ньютона

За початкове наближення x_0 обираємо одну з меж проміжку ізоляції [a, b] за формулою

$$x_0 = \begin{cases} a, & \text{якщо } f(a)f''(a) > 0, \\ b, & \text{якщо } f(b)f''(b) > 0. \end{cases}$$

Наступне наближення до розв'язка рівняння згідно з методом Ньютона обчислюємо за формулою

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Для віднаходження x_2 у співвідношенні слід замінити x_0 на x_1, а x_1– на x_2,. що дає формулу другого наближеного значення:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Подовжуючи цей процес, для наближення x_n віднаходимо

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad (n = 1, 2, ...)$$

Процес повторюємо доти, допоки не виконуватиметься умова: $|x_n – x_{n–1}| < \varepsilon$, де ($\varepsilon$ –задана похибка).

Умови задля використовування методу Ньютона:

1 функція $f(x)$ – неперервна на проміжку $[a, b]$;
2 на кінцях проміжка ізоляції $[a,b]$ значення функції мають протилежні знаки, тобто $f(a) \cdot f(b) < 0$;
3 перша похідна $f'(x)$ є неперервна і зберігає знак на проміжку ізоляції;
4 друга похідна $f''(x)$ є неперервна і зберігає знак на проміжку ізоляції.

Третя умова означає, що функція $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ або лише зростає $(f'(x) > 0)$, або лише спадає $(f'(x) < 0)$. Четверта умова означає, що графік функції є або увігнутим $(f''(x) > 0)$, або опуклим $(f''(x) < 0)$.

Метод Ньютона має недоліки: потребу визначання аналітично формул першої та другої похідних функції та обчислення на кожній ітерації значення не лише функції $f(x_i)$, але й першої похідної $f'(x_i)$.

3.5 Уточнення наближеного розв’язку рівняння методом ітерацій

Метод ітерацій – один з найбільш важливих методів чисельного аналізу через його можливість застосовування головної ідеї цього методу до різноманітнихих обчислювальних задач.

Задля використовування методу ітерацій початкове рівняння замінюється на еквівалентне канонічне $x = \varphi(x)$ у такий спосіб, щоби для функції $\varphi(x)$ існувала похідна на проміжку $[a, b]$. За початкове наближення x_0 можна обрати будь-яке значення проміжку ізоляції $[a, b]$, приміром його середину

$$x_0 = \frac{a+b}{2}.$$

Наступне наближення до розв’язку рівняння згідно з методом ітерацій обчислюємо через попереднє (x_0) за формулою

$$x_1 = \varphi(x_0).$$

Для віднаходження x_2 у співвідношенні слід замінити x_0 на x_1, а x_1– на x_2, що дає формулу другого наближеного значення:

$$x_2 = \varphi(x_1).$$

Подовжуючи цей процес, для x_n віднаходимо

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Процес повторюємо доти, допоки не виконуватиметься умова:

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon,$$

де ε –задана похибка.

Умови для використовування методу ітерацій:

1 функція $f(x)$ – неперервна на проміжку $[a, b]$;
2 на кінцях проміжка ізоляції $[a, b]$ значення функції мають протилежні знаки, тобто $f(a) \cdot f(b) < 0$;
3 функція $\varphi(x)$ є неперервна і на проміжку ізоляції задовольняє умові

$$|\varphi'(x)| < 1.$$

Можна обирати функцію $\varphi(x)$ за допомогою універсальної формули, яка завжди забезпечує виконання третьої умови:

$$\varphi(x) = x - \lambda f(x), \ \lambda = \frac{2}{M + m},$$

де M та m – відповідно найбільше та найменше значення похідної $f'(x)$.

Якщо $f'(x)$ має постійний знак на проміжку $[a, b]$, то її значення на кінцях проміжку можна вважати за найбільше та найменше, тобто як M та m. Отже, універсальну формулу функції $\varphi(x)$, яка забезпечує збіжність методу ітерацій, можна записувати та використовувати у вигляді

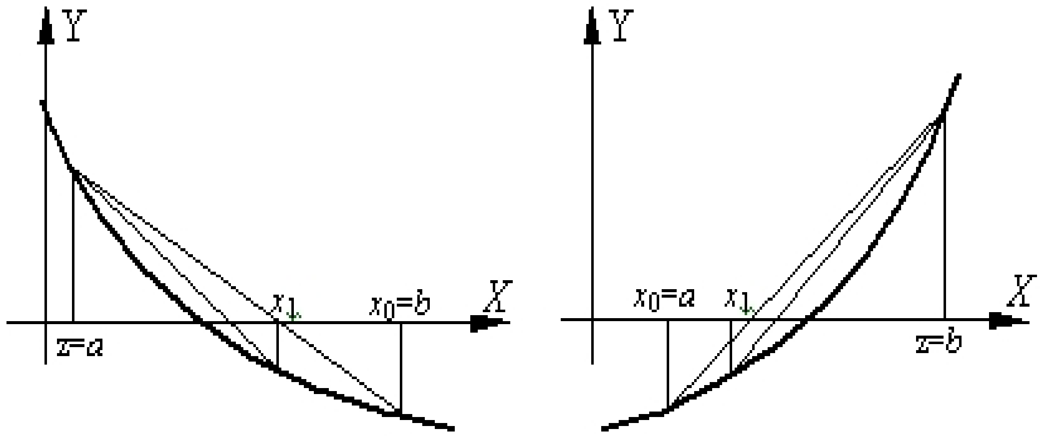
$$\varphi(x) = x - \frac{2}{f'(a) + f'(b)} f(x).$$

3.6 Уточнення наближеного розв'язку рівняння методом хорд

Метод грунтується на заміні функції $f(x)$ на хорду на кожному проміжку пошуку, перетинання якої з віссю X дає наближення розв'язку. При цьому в процесі пошуку сімейство хорд може будуватися у два способи:

а) за фіксованого лівого кінця хорд, тобто $z = a$, тоді початкова точка буде $x_0 = b$ (рис. 3.2,а);

б) за фіксованого правого кінця хорд, тобто $z = b$, тоді початкова точка буде $x_0 = a$ (рис.3. 2,б);



а) б)

Рисунок 3.2 – Варіанти побудови сімейства хорд

Наступне наближення розв'язку рівняння згідно методу за методом хорд зреалізовується за рекурентними формулами:

для випадку а:

$$x_0 = b, x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(a)}(x_n - a);$$

для випадку б:

$$x_0 = a, x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}(b - x_n).$$

Процес пошуку триває допоки не буде виконано умову

$$\left| x_{n+1} - x_n \right| \le \varepsilon .$$

Умови задля використовування методу хорд:

1 функція *f(x)* є неперервна на проміжку [*a*, *b*];

2 на кінцях проміжку ізоляції [*a*, *b*] значення функції мають протилежні знаки, тобто $f(a) \cdot f(b) < 0$;

3 перша похідна *f '(x)* – неперервна і зберігає знак на проміжку ізоляції;

4 друга похідна *f' '(x)* – неперервна і зберігає знак на проміжку ізоляції.

Метод забезпечує швидку збіжність, якщо f(z) · f''(z) > 0, тобто хорди фіксуються в тому кінці інтервалу [*a*,*b*], де знаки функції f(z) та її кривизни f''(z) збігаються.

3.7 Чисельне розв'язування нелінійних рівнянь у математичному пакеті Mathcad

В середовищі Mathcad розв'язувати нелінійні рівняння *f*(*x*) = 0 можна у різні способи. Один з них – за допомогою внутрішньої функції (оператора):

k =***root*** (*f*(*x*), *x*).

Першим аргументом оператора *root* є функція *f*(*x*). Другий аргумент – ім'я змінної *x*, якій перед використанням оператора *root* треба надати числове значення. Mathcad використовує це значення як початкове наближення при пошуку розв'язку *k*.

Функція *root* повертає значення $k = x$, за якого функція $f(x)$ чи то вираз перетворюється на нуль. Скаляр *k* є розв'язком рівняння $f(x) = 0$.

Другий спосіб розв'язування рівнянь – за допомогою ключового слова ***Given*** та функції ***Find*.** За цього способу спочатку теж треба задати початкове наближене значення змінній *x*. Далі слід надрукувати слово *Given*, ввести рівняння $f(x)$ **=** 0 й за допомогою функції *Find* знайти розв’язок:

x:= 1 (початкове значення з інтервалу ізоляції)
Given
$f(x)$**=**0
k:=Find(f ,x)
k =

Методична порада. Перед використанням операторів *root* та Given-Find треба дослідити функцію *f(x)* з метою визначення проміжків ізоляції розв'язків рівняння. Щоби визначити *кількість розв΄язків*, доволі буде побудувати графік функції $y = f(x)$ на інтервалі $x \in [a; b]$ й підрахувати, скільки разів цей графік перетинає вісь абсцис *x* (про побудову графіків у Mathcad дивись у розділі 1).

Приклади розв'язування нелінійних рівнянь

Завдання. Віднайти розв’язки нелінійного рівняння

$$f(x) = \cos(2x)\cdot e^{-0,2\cdot x}$$

на проміжку [0.3, 3] із заданою похибкою ε=0.001 в математичному пакеті Mathcad та алгоритмічною мовою С++ методами ділення навпіл, Ньютона, ітерацій та хорд.

Згідно з етапами чисельних методів розв’язування нелінійних рівнянь спочатку визначимо проміжки ізоляції функції, а потім будемо уточнювати наближені значення за алгоритмами заданих методів.

Приклад 1 Дослідження функції та обчислення розв’язків рівнянь у MathCad

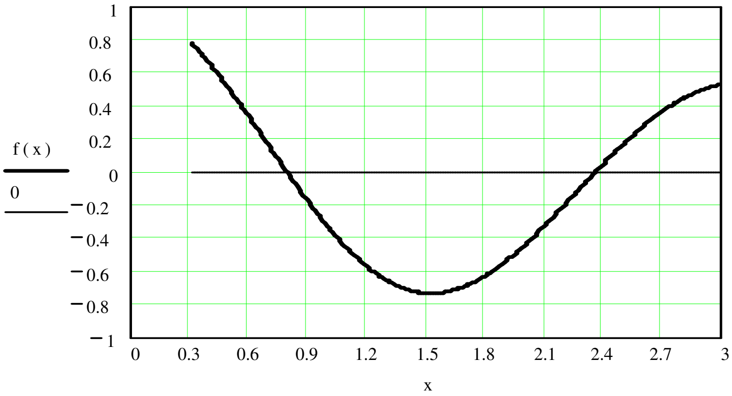
Послідовність операторів дослідження функції та розв’язування рівняння у математичному пакеті Mathcad наведено на рисунку.

$f(x) := \cos(2x) \cdot e^{-0.2 \cdot x}$

$x := 0.3, 0.3 + 0.4 .. 3.1$

Графік функції

$x := 0.3, 0.3 + 0.01 .. 3$



x =	f(x) =
0.3	0.777
0.7	0.148
1.1	-0.472
1.5	-0.733
1.9	-0.541
2.3	-0.071
2.7	0.37
3.1	0.536

Перше наближене значення роз'вязку

$x1 := 0.9$

$k1 := \mathrm{root}(f(x1), x1)$ $\quad k1 = 0.786$ $\quad f(k1) = -2.654 \times 10^{-4}$

Друге наближене значення роз'вязку

$x2 := 2.5$

$k2 := \mathrm{root}(f(x2), x2)$ $\quad k2 = 2.357$ $\quad f(k2) = 4.678 \times 10^{-4}$

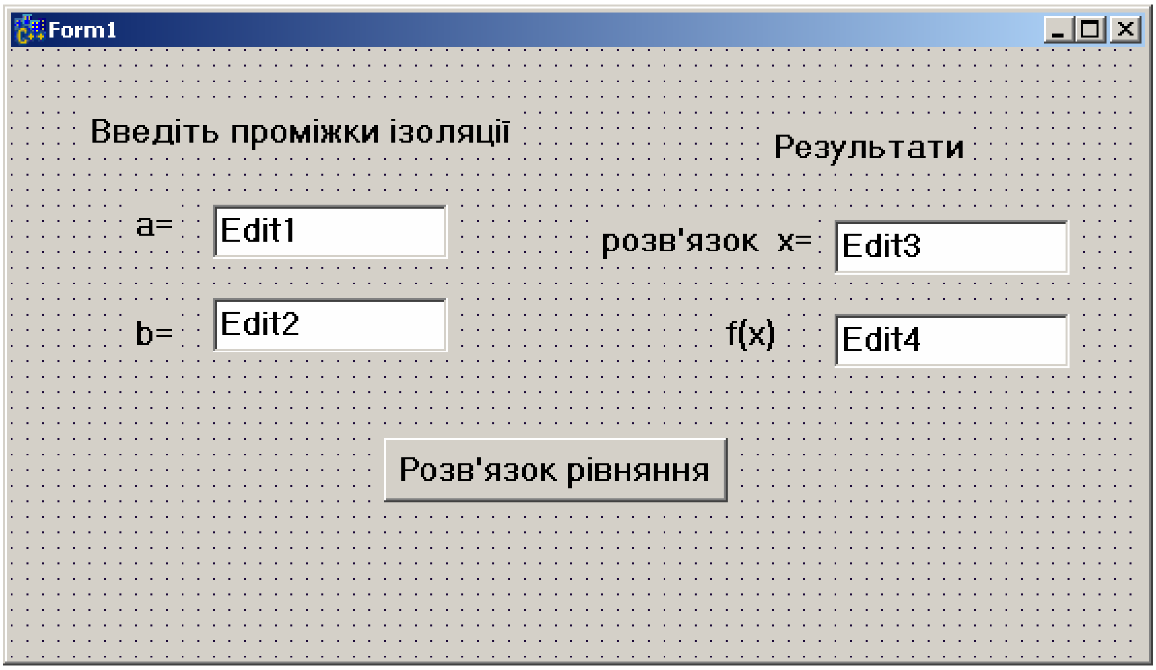
Побудова графіка, табулювання та здобування коренів рівняння в Mathcad

З графіка та таблиці значень функції $f(x) = \cos(2x) \cdot e^{-0,2 \cdot x}$ видно, що функція двічі перетинає вісь абсцис. Це означає, що рівняння $\cos(2x) \cdot e^{-0,2 \cdot x} = 0$ має два розв'язки з інтервалами ізоляції [0.7, 1.1] та [2.3, 2.7]. Відповідно до цих інтервалів було задано початкові значення розв'язків: $x1 = 0.9$ та $x2 = 2.5$.

За допомогою функції root визначено розв'язки заданого рівняння у математичному пакеті Mathcad: k1=0.786, k2=2,357.

Приклад 2 Уточнення розв΄язку нелінійного рівняння методом ділення навпіл

У прикладі 1 ми визначили проміжки ізоляції розв'язків заданого рівняння $\cos(2x) \cdot e^{-0,2 \cdot x}=0$. Наведемо приклад програми мовою C++ для розв'язання нелінійного рівняння методом ділення навпіл для відомих проміжків ізоляції $[a, b]$ із заданою похибкою $\varepsilon = 0.0001$. Форму проекту програми наведено на рисунку.



Вікно форми проекту

У програмі-відгуку на кнопку “Розв’язок рівняння” передбачено введення меж проміжків ізоляції [*a*, *b*] з компонентів Edit1та Edit2 на формі проекту і виведення значень розв’язку рівняння *x* (у програмі – змінна x_bis) та функції *f* (*x*) у компоненти Edit3 та Edit4 відповідно.

Текст програми

```
#include <vcl.h>
#pragma hdrstop
#include <math.h>
#include "Unit1.h"
//---------------------------------------------------------
#pragma package(smart_init)
#pragma resource "*.dfm"
TForm1 *Form1;
//---------------------------------------------------------
__fastcall TForm1::TForm1(TComponent* Owner)
        : TForm(Owner)
{
}
//-----Функція f(x)-------------------------------------
float f(float x)
 {  return  cos(2*x)*exp(-0.2*x);  }

//-----Функція методу ділення навпіл--------------
 float bis(float a,float b,float eps)
{ float   xr=(a+b)/2;
    while (fabs(b-a)>=eps)
```

```
  { if (f (a)*f (xr)<0) b=xr;
        else a=xr;
   xr=(a+b)/2;  }
 return xr;}
```

```
//-----Відгук на кнопку "Розв'язок рівняння"--------------
void __fastcall TForm1::Button1Click(TObject *Sender)
{   double a, b, x_bis;
    const float eps=0.0001;
    a= StrToFloat(Edit1->Text);
    b= StrToFloat(Edit21->Text);;
    x_bis = bis (a,b,eps);
    Edit31->Text=FloatToStr(x_bis);
    Edit4->Text=FloatToStr( f (x_bis) );
}
```

Приклад 3 Уточнення розв´язку нелінійного рівняння методом Ньютона

У прикладі 1 ми визначили проміжки ізоляції розв'язків заданого рівняння. Для методу Ньютона слід додатково визначити аналітично першу $f'(x)$ та другу $f2(x)$ похідні функції $f(x)=\cos(2x)\cdot e^{-0,2\cdot}$:

$$f'(x)= -2\sin(2x)\cdot e^{-0.2x} - 0.2\cos(2x)\cdot e^{-0.2x};$$

$$f''(x)= -3.962\cos(2x)\cdot e^{-0.2x} + 0.8\sin(2x)\cdot e^{-0.2x}.$$

Наведемо програму мовою С++ задля розв'язування нелінійного рівняння методом Ньютона для відомих проміжків ізоляції [a,b] із заданою похибкою ε=0.0001. У програмі-відгуку на кнопку "Розв'язок рівняння" передбачено введення меж проміжків ізоляції [a, b] з компонентів Edit1та Edit2 на формі проекту й виведення значень розв'язку рівняння x (у програмі – змінна x_new) та функції f(x_new) у компоненти Edit3 та Edit4 відповідно.

Текст програми

```
#include <vcl.h>
#pragma hdrstop
#include <math.h>
#include "Unit1.h"
#pragma package(smart_init)
#pragma resource "*.dfm"
TForm1 *Form1;
…

// Глобальні параметри: проміжок ізоляції

 float a,b;
```

```
//-----Функція f(x)-----------------------
float  f (float x)
 {  return  cos(2*x)*exp(-0.2*x);  }

//-----Перша похідна функції f(x)-------------
 float  f1 (float x)
 {  return  –2*sin(2*x)*exp(–0.2*x) – 0.2*cos(2*x)* exp(–0.2*x);  }

  //-----Друга похідна функції f(x)-----
float  f2 (float x)
 {    return  –3.96*cos(2*x)*exp(–0.2*x) + 0.8 *sin(2*x)* exp(–0.2*x);  }

//-----Функція методу Ньютона --------
float newton (float a,float b,float eps)
 { float x0, x1;
    if (f(a)*f2(a)>0) x0=a;
    if (f(b)*f2(b)>0) x0=b;
    x1= x0-f(x0)/f1(x0);
    while (fabs(x0-x1) >=eps)
      { x0=x1;
        x1= x0-f(x0)/f1(x0);
      }
      return x0;
 }

//---- Підпрограма для кнопки "Розв'язок рівняння"
void __fastcall TForm1::Button1Click(TObject *Sender)
{   double  x_new;
    const float eps=0.0001;
    a=StrToFloat(Edit1->Text);
    b=StrToFloat(Edit2->Text);
        x_new = newton (a,b,eps);
    Edit3->Text=FloatToStr(x_new);
    Edit4->Text=FloatToStr( f (x_new) ); }
```

Приклад 4 Уточнення розв΄язку нелінійного рівняння методом ітерацій

У прикладі 1 ми визначили проміжки ізоляції розв'язків заданого рівняння. Для методу ітерацій необхідно додатково визначити аналітично першу $f'(x)$ похідну функції $f(x) = \cos(2x)\cdot e^{-0,2}$ та перетворену функцію $\varphi(x)$:

$$f'(x) = -2\sin(2x)\cdot e^{-0.2x} - 0.2\cos(2x)\cdot e^{-0.2x};$$

$$\varphi(x) = x - \frac{2}{f'(a) + f'(b)} f(x).$$

Наведемо програму мовою С++ для розв'язання нелінійного рівняння методом ітерацій для відомих проміжків ізоляції [a, b] із заданою похибкою ε=0.0001. У програмі-відгуку на кнопку “Розв’язок рівняння” передбачено введення меж проміжків ізоляції [a, b] із компонентів Edit1та Edit2 на формі проекту й виведення значень розв’язків рівняння x (у програмі – змінна x_iter) та функції f(x_iter) у компоненти Edit3 та Edit4 відповідно.

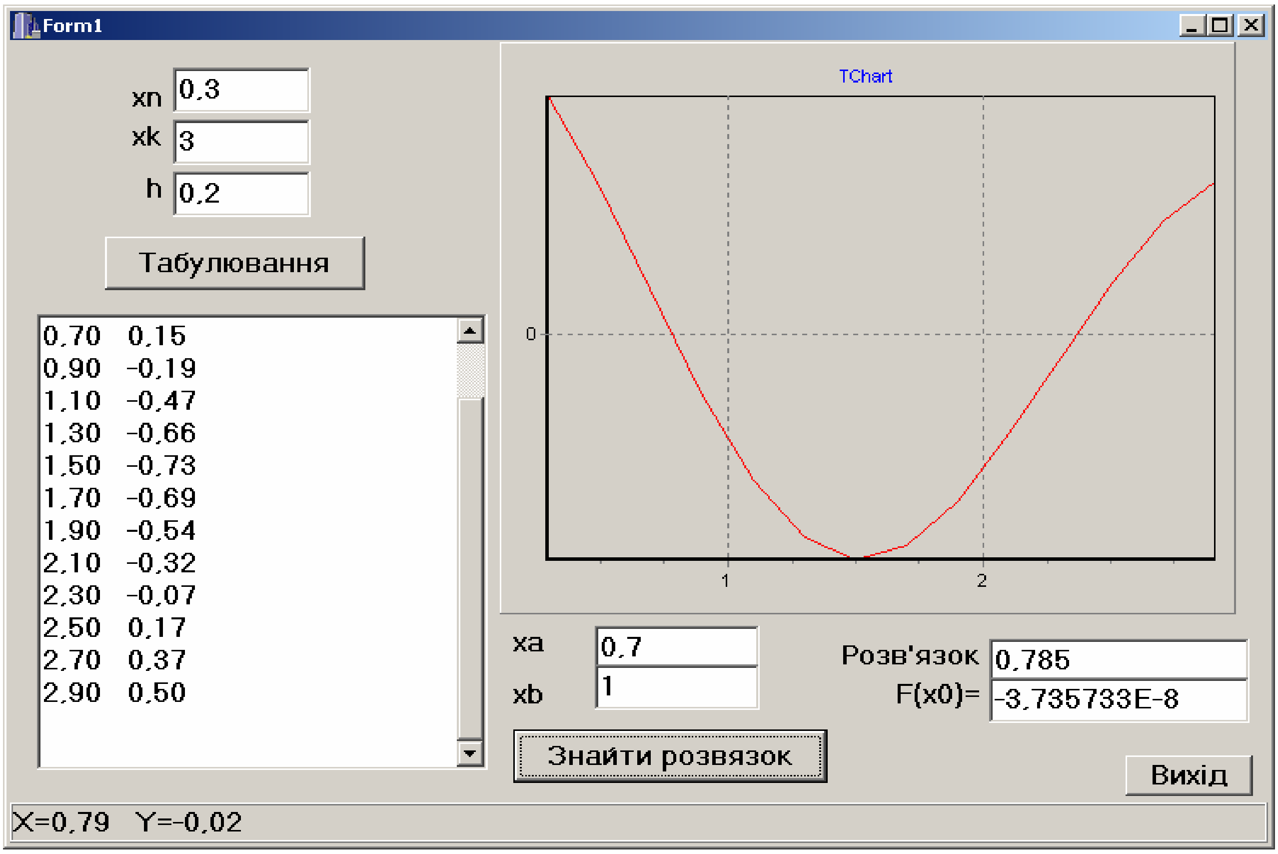
Текст програми

```
#include <vcl.h>
#pragma hdrstop
#include <math.h>
#include "Unit1.h"
…
//--Глобальні параметри: межі проміжку ізоляції
 float a,b;
//-----Функція f(x)-----------------------
float f(float x)
 {  return cos(2*x)*exp(-0.2*x);  }

//-----Похідна функції f(x)-----------------
 float f1(float x)
 {    return –2*sin(2*x)*exp(–0.2*x) – 0.2*cos(2*x)* exp(–0.2*x);  }

//------  Перетворена функція φ(x) для методу ітерацій
  float f_iter(float x)
{ return    x-2*f(x)  / (f1(a)+f1(b)); }

//-----Функція методу ітерацій --------
float iter (float a, float b, float eps)
 { float x1, x0, r;
     x0=(a+b)/2;
    do  { x1= f_iter (x0);
           r = fabs(x0-x1);
           x0=x1; }
           while  (r>=eps);
            return x1;
}

//---- Підпрограма для кнопки “Розв’язок рівняння”
void __fastcall TForm1::Button1Click(TObject *Sender)
{   double  x_iter;
```

```
        const float eps=0.0001;
        a=StrToFloat(Edit1->Text);
        b=StrToFloat(Edit2->Text);
       // розв'язок  методом ітерацій
        x_iter = iter (a,b,eps);
        Edit3->Text=FloatToStr(x_iter);
        Edit4->Text=FloatToStr( f (x_iter) );
    }
```

Приклад 5 Визначення проміжків ізоляції та уточнення розв′язку нелінійного рівняння методом хорд

Наведемо програму мовою C++ для визначання проміжків ізоляції та розв'язків нелінійного рівняння методом хорд із заданою похибкою ε=0.0001. Форму проекту програми наведено на рисунку.



Вікно форми проекту з результатами

У програмі передбачено обчислення таблиці значень функції з виведенням у компонент Memo1 та побудову графіка функції у компоненті Chart1(Series1). За допомогою побудованого у такий спосіб графіка можна визначити наближене значення розв’язку рівняння пересуваючи мишу по лінії функції; при цьому в нижньому рядку форми проекту буде відображено поточні значення X та Y= f(X) (див. підпрограму “Пересування миші на графіку”).

У програмі-відгуку на кнопку “Табулювання” передбачено введення меж заданого проміжку дослідження функції ([0.3, 3]) із компонентів Edit1 та Edit2 на формі проекту та кроку табулювання (h=0.2) з компонента Edit3. У програмі-відгуку на кнопку “Знайти розв’язок” передбачено введення меж проміжків ізоляції [*xa*, *xb*] із компонентів Edit4 та Edit5 на формі проекту й виведення значень розв’язку рівняння (змінна x0) та функції f(x0) у компоненти Edit6 та Edit7 відповідно.

Текст програми

```
#include <vcl.h>
#pragma hdrstop
#include "Unit1.h"
#include <Math.h>
#pragma package(smart_init)
#pragma resource "*.dfm"
TForm1 *Form1;
//---------------------------------------------------------------
__fastcall TForm1::TForm1(TComponent* Owner)
       : TForm(Owner)
{  }

//--Глобальні параметри
String s1,s2;

//---------------Функція--------------------------------------
float f(float x)
{return cos(2*x)*exp(-0.2*x);  }

//---------------Рекурентна формула наближення----------------
float fx0(float x0,float xa)
{ return x0-f(x0)/(f(x0)-f(xa))*(x0-xa);
}

//---------------Метод хорд-----------------------------------
float xord(float xa, float xb, int &ier)
{ float eps=1e-4;
float x1,x0;
x0=xb;
int i=0;    ier=0;
 while (true)
  {x1=fx0(x0,xa);
  if (fabs(x1-x0)<eps) break;
    x0=x1;
  if (++i>100) {ier=-1; break;}
  }
```

```
  return x1;
 }

//---------------Підпрограма табулювання----------------
void __fastcall TForm1::Tab(float xn, float xk, float h)
{  float x,y; AnsiString sx,sy;
   Memo1->Clear();
   Series1->Clear();
    x=xn;
    while (x<=xk)
     {  y=f(x);
        sx=FloatToStrF(x,ffFixed,5,2);
        sy=FloatToStrF(y,ffFixed,5,2);
        Memo1->Lines->Add(sx+"   "+sy);
         Series1->AddXY(x,y,"",clRed);
         x+=h;  }
   }

//-----------------Кнопка табулювання----------------------
void __fastcall TForm1::Button1Click(TObject *Sender)
 {
    float xn,xk,h;
    xn=StrToFloat(Edit1->Text);
    xk=StrToFloat(Edit2->Text);
    h=StrToFloat(Edit3->Text);
    Tab(xn,xk,h);
 }

//-------------------Кнопка "Знайти розв'язокку"----------------
void __fastcall TForm1::Button2Click(TObject *Sender)
{float xa,xb,x0;  int ier;
AnsiString sx0;
xa=StrToFloat(Edit4->Text);
xb=StrToFloat(Edit5->Text);
x0=xord(xa,xb,ier);
if (ier!=0)  ShowMessage("Розв'язок не знайдено!");
else
{Edit6->Text=FloatToStrF(x0,ffFixed,7,3);
Edit7->Text=FloatToStrF(f(x0),ffGeneral,7,2);}
 }

//---------------------Пересування миші на графіку-------------------
void __fastcall TForm1::Chart1MouseMove(TObject *Sender, TShiftState Shift,
      int X, int Y)
{  s1=FloatToStrF(Series1->XScreenToValue(X),ffFixed,1,2);
```

```
  s2=FloatToStrF(Series1->YScreenToValue(Y),ffFixed,1,2);
  Panel1->Caption="X="+s1+"   "+"Y="+s2; }
void __fastcall TForm1::Chart1DblClick(TObject *Sender)
 {   if (Edit4->Text==" ") Edit4->Text=s1; else   Edit5->Text=s1;
  }
//--------------Вихід-----------------------------------------
void __fastcall TForm1::Button3Click(TObject *Sender)
{ Close(); }
```

Л а б о р а т о р н а   р о б о т а № 3

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

1 Мета роботи

Ознайомитися з чисельними методами розв'язування нелінійних рівнянь. Набути навичок щодо визначення проміжків ізоляції нелінійних рівнянь з однією змінною та використовування різноманітних методів задля обчислення наближених значень розв'язків рівнянь алгоритмічною мовою С++ та в математичному пакеті MathCad.

2 Контрольні запитання

1. Що називають розв´язком рівняння?
2. Що є проміжком ізоляції кореня?
3. Сформулюйте задачу віднаходження розв´язку рівняння із заданою точністю.
4. Перелічить етапи віднаходження розв´язку рівняння.
5. Які методи визначення проміжків ізоляції вам є відомі?
6. Які властивості неперервної функції при цьому використовуються?
7. Які методи використовуються задля обчислення розв´язку рівняння із заданою точністю?
8. У чому полягає метод ділення навпіл ?
9. У чому полягає метод Ньютона (дотичних)?
10. У чому полягає метод простої ітерації?
11. У чому полягає метод хорд?
12. Зазначте переваги й недоліки методів обчислення розв´язку рівняння.

3. Лабораторне завдання

1. Вивчити основні теоретичні відомості, потрібні для виконання лабораторної роботи, і дати відповіді на контрольні запитання.
2. Обчислити таблицю значень функції

$$f(x) = x^3 - x^2 - 4.4ax + 4a$$

на заданому проміжку $x \in [-4; 4]$ з кроком зміни аргументу $h = 0.5$, де $a = 0{,}1 \cdot N$; N-номер варіанта. Побудувати графік функції в Mathcad з кроком 0.01. Визначити проміжки ізоляції розв'язків рівняння.

3. Дати опис методу розв'язування рівняння згідно з індивідуальним варіантом, наведеним в табл. 3.1.

4. Скласти схему алгоритму та програму обчислення розв'язку рівняння

$$f(x) = 0$$

мовою С++ за методом згідно з індивідуальним варіантом (див. табл. 3.1). У програмі передбачити введення значень проміжку ізоляції з клавіатури та виведення значень наближеного розв'язку рівняння та функції $f(x)$ для нього.

5. Виконати на комп'ютері програму для кожного інтервалу ізоляції та обчислити розв'язки рівнянь з заданою похибкою ε=0.0001.

6. Обчислити значення розв'язків рівняння у математичному пакеті Mathcad для всіх проміжків ізоляції.

7. Провести порівняльний аналіз здобутих результатів.

8. Оформити протокол виконання лабораторної роботи згідно з вимогами.

Таблиця 3.1 – Індивідуальні варіанти методів розв'язування нелінійних рівнянь

Номери варіантів	**Методи розв'язування нелінійних рівнянь**
1,5,9, 13, 17, 21, 25, 29	Ділення навпіл
2, 6, 10, 14,18, 22, 26,30	Ньютона
3, 7, 11, 15, 19, 23, 27	Ітерацій
4, 8, 12, 16, 20, 24, 28	Хорд

4 ОБЧИСЛЕННЯ СИСТЕМ РІВНЯНЬ

4.1 Постановка задачі розв'язування систем лінійних рівнянь

Багато задач математичного моделювання призводять до потреби розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Розглянемо систему рівнянь у загальному (математичному) вигляді. Систему лінійних алгебраїчних рівнянь можна записати в такий спосіб:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1\,;\\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2;\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n\,; \end{aligned} \tag{4.1}$$

де x_{i} – невідомі значення системи, які слід обчислити (чи розв'язок системи рівнянь); a_{ij} – коефіцієнти при невідомих; b_{i} – коефіцієнти правої частини системи рівнянь; n – кількість невідомих чи порядок системи лінійних рівнянь; $i, j = 1, \ldots, n$.

Систему лінійних рівнянь можна записати також у так званому матричному вигляді:

$$\mathbf{A\,x} = \mathbf{B}, \tag{4.2}$$

де **A** – матриця коефіцієнтів при невідомих; **x** – вектор невідомих; **B** – вектор правих частин рівнянь системи:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Якщо матриця A є неособлива, тобто її визначник не дорівнює нулеві, система (4.1) має єдиний розв'язок. У лінійній алгебрі зазвичай використовують спосіб розв'язування системи рівнянь на підставі матричної форми (4.2), який грунтується на *обчисленні оберненої матриці* $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{B}\,. \tag{4.3}$$

Для матриці **A** степеня $n > 4$ безпосереднє обчислення оберненої матриці $\mathbf{A}^{-1}$ потребує багато часу, тому формула (4.3) вельми рідко використовується на практиці (лише при розв'язувані лінійних системи рівнянь у математичних пакетах MathCad, Matlab). Більш ефективними є чисельні методи розв'язування систем лінійних рівнянь.

4.2 Метод Гаусса

Обчислення за допомогою метода Гаусса полягають у послідовному вилучанні невідомих системи задля перетворення її до еквівалентної системи з верхньою трикутною матрицею:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1;\\
a_{22}^{(1)} x_2 + a_{23}^{(1)} x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)};\\
a_{33}^{(2)} x_3 + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n &= b_3^{(2)};\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\\
a_{nn}^{(n-1)}x_n &= b_n^{(n-1)}.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Задля обчислення значень розв'язків системи лінійних рівнянь з останнього рівняння системи віднаходимо x_n

$$x_n = b_n^{(n-1)} / a_{nn}^{(n-1)}.$$

Підставивши віднайдене значення x_n у передостаннє рівняння, обчислимо x_{n-1}. Здійснюючи зворотну підстановку, далі послідовно віднаходимо x_{n-1}, x_{n-2},…, x_1 за формулами:

$$x_k = (b_n^{(k-1)} - a_{k,k+1}^{(k-1)}x_{k+1} - \ldots - a_{kn}^{(k-1)}x_n) / a_{kk}^{(k-1)},$$

чи

$$x_k = \frac{b_n^{(k-1)} - \sum_{i=k+1}^{n} a_{k,i}^{(k-1)} x_i}{a_{kk}^{(k-1)}}, \qquad \text{де } k = n-1,\ n-2, \ldots, 1. \tag{4.5}$$

Зауважимо, що обчислення множників, а також зворотна підстановка потребують ділення на головні елементи $a_{\text{kk}}^{(k-1)}$. Тому, якщо один з головних елементів дорівнює нулеві, то схему єдиного поділу не може бути зреалізовано.

4.3 Метод Зейделя задля розв'язування систем лінійних рівнянь

Метод Зейделя задля розв'язування систем лінійних рівнянь – це один з ітераційних методів. Задля застосування методу Зейделя задану систему лінійних алгебраїчних рівнянь у матричному вигляді

$$\mathbf{A\,x = B}$$

перетворимо до вигляду

$$\mathbf{x = D\,x + C}\,, \tag{4.6}$$

чи у загальному (математичному) вигляді:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0 \cdot x_1 + d_{12}x_2 + \ldots + d_{1n}x_n + c_1;\\
x_2 &= d_{21}x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + d_{2n}x_n + c_2;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_n &= d_{n1}x_1 + d_{n2}x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n + c_n;
\end{aligned}$$

де

$$d_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, \quad c_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, \text{ за } i \neq j, \; a_{ij} = 0.$$

Ідея методу полягає в тому, що при обчисленні (k + 1)-го наближення невідомої x_i враховуються вже обчислені раніше (k + 1)-і наближення невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$.

Оберемо початкові наближення розв'язків системи рівнянь $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$. Далі, враховуючі, що ($k$)-те наближення розв'язків $x_n^{(k)}$ відоме, згідно методу Зейделя будемо будуватимемо (k+1)-ше наближення розв'язків за формулами:

$$\begin{aligned} &x_1^{(k+1)} = d_{12}x_2^{(k)} + d_{13}x_3^{(k)} + \ldots + d_{1n}x_n^{(k)} + c_1 \\ &x_2^{(k+1)} = d_{21}x_1^{(k+1)} + d_{23}x_3^{(k)} + \ldots + d_{2n}x_n^{(k)} + c_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &x_n^{(k+1)} = d_{n1}x_1^{(k+1)} + d_{n2}x_2^{(k+1)} + \ldots + d_{nn}x_n^{(k)} + c_n \end{aligned} \tag{4.7}$$

Ітераційний процес методу Зейделя вважається за завершений, якщо виконується умова

$$\frac{\left\| \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)} \right\|}{\left\| \mathbf{x}^{(k)} \right\|} \leq \varepsilon,$$

де ε – задана похибка розв'язку системи рівнянь, $\left\| \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)} \right\|$, $\left\| \mathbf{x}^{(k)} \right\|$ – норми векторів різниці останнього та передостаннього наближень відповідно.

Метод Зейделя іноді називають також методом Гаусса-Зейделя, процесом Лібмана, чи то методом послідовних заміщень.

4.4 Постановка задачі розв'язування систем нелінійних рівнянь

Систему n *нелінійних рівнянь з* n *невідомими* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *у загальному випадку узвичаєно записувати в такий спосіб:*

$$\begin{aligned} &f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0; \\ &f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0; \\ &\ldots\ldots\ldots \; \ldots\ldots\ldots \; \ldots\ldots\ldots \\ &f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0; \end{aligned} \tag{4.8}$$

де $f_1, f_2, \ldots, f_n$ – будь-які функції незалежних змінних, у тому числі й нелінійні щодо невідомих.

Розв'язок системи нелінійних рівнянь – це такий вектор $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, який забезпечує тотожність системи рівнянь (4.8). Система рівнянь може не мати розв'язків, мати єдиний розв'язок, кінцеву чи нескінченну кількість розв'язків. На відміну від систем лінійних рівнянь, для систем нелінійних рівнянь не відомі прямі методи розв'язування. Лише в окремих випадках систему можна розв’язати безпосередньо. Тому задля розв’язування системи нелінійних рівнянь зазвичай використовують ітераційні методи [3 ,4, 6, 9].

4.5 Метод простої ітерації розв’язування систем нелінійних рівнянь

Задля реалізації методу ітерації задану нелінійну систему рівнянь треба шляхом алгебраїчних перетворювань з кожного рівняння виокремити по одній змінній і в такий спосіб привести систему до вигляду:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= G_1(x_1, x_2, \ldots, x_n);\\
x_2 &= G_2(x_1, x_2, \ldots, x_n);\\
&\ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ ..\\
x_n &= G_n(x_1, x_2, \ldots, x_n).
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

Потім обирають вектор початкового наближення $\boldsymbol{x}^{(0)}$:

$$
\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \ldots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix}
$$

та підставляють його до перетвореної системи рівнянь. З першого рівняння дістають нове наближення до першої змінної, з другого – до другої змінної тощо. Здобуті уточнені значення змінних знову підставляють до цих рівнянь тощо. Отже, на $(k+1)$-му кроці ітераційної процедури формула методу ітерацій для розв’язку системи нелінійних рівнянь має вигляд

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= G_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)});\\
x_2^{(k+1)} &= G_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)});\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_n^{(k+1)} &= G_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}).
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

Ітераційний процес вважається закінченим, якщо виконується умова

$$
\frac{\left\| \mathrm{x}^{(k+1)} - \mathrm{x}^{(k)} \right\|}{\left\| \mathrm{x}^{(k)} \right\|} \le \varepsilon
\tag{4.11}
$$

де ε – задана похибка розв’язку системи рівнянь, $\left\| \mathrm{x}^{(k+1)} - \mathrm{x}^{(k+1)} \right\|$, $\left\| \mathrm{X}^{(k+1)} \right\|$ – норми векторів різниці останнього та передостаннього наближень відповідно.

4.6 Метод Зейделя розв'язування систем нелінійних рівнянь

Модифікація Зейделя до алгоритму простої ітерації, як і для системи лінійних рівнянь, полягає у використовуванні уточнених значень змінних уже на поточному ітераційному кроці. Так, задля уточнення значень першої змінної використовуються тільки значення попереднього кроку, для другої змінної – значення x_1 поточного кроку, а решти змінних – від попереднього кроку:

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= G_1(x_1^{(k)},\ x_2^{(k)},\ x_3^{(k)},...,x_n^{(k)});\\
x_2^{(k+1)} &= G_2(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)},...,x_n^{(k)});\\
x_3^{(k+1)} &= G_3(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, x_3^{(k)},...,x_n^{(k)});\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
x_n^{(k+1)} &= G_n(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, x_3^{(k+1)},...,x_n^{(k)});
\end{aligned} \tag{4.12}$$

де k – номер кроку ітерації.

Умова завершення процесу розв'язування системи нелінійних рівнянь за методом Зейделя збігається з умовою (4.11) для методу простих ітерацій .

4.7 Розв´язування систем лінійних рівнянь у Mathcad

Розв´язувати в пакеті Mathcad систему лінійних рівнянь

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{B}$$

можна у два способи: за допомогою матричних операцій та функції lsolve.

Послідовність розв'язування системи лінійних рівнянь за *допомогою матричних операцій:*

1 Утворіть матрицю **A**. Для цього оберіть шаблон Матрица чи команду меню Вставка-Матрица. Відкриється діалогове вікно Insert Matrix). Зазначте в цьому вікні кількість рядків та стовпчиків матриці та натисніть покажчиком миші клавішу Create (Утворити). В місці, зазначеному курсором, утвориться шаблон матриці **A** з порожніми полями. Заповніть ці поля відповідними коефіцієнтами матриці системи рівнянь.

2 Аналогічно утворіть вектор **B** з коефіцієнтів правої частини системи рівнянь. Щоби перетворити шаблон матриці **A** на шаблон вектора **B** у полі Columns (кількість стовпчиків) надрукуйте число 1.

3 Запишіть в MathCad за допомогою шаблонів рівняння

$$\mathbf{x} := \mathbf{A}^{-1} * \mathbf{B}$$

4 Задля дістання результату запишіть **x=** , після чого з'явиться вектор значень розв'язку системи лінійних рівнянь.

*Функція **lsolve***(A,B) повертає вектор **x** дійсних або комплексних розв'язків системи лінійних рівнянь. Послідовність розв'язування системи лінійних рівнянь за допомогою функції Isolve:

1 Введіть задану систему рівнянь. Символ « **=** » (напівжирне дорівнює) оберіть з шаблона Булевый.

2 Утворіть матрицю **A** у спосіб, описаний вище у п.1.

3 Аналогічно утворіть вектор **B** з коефіцієнтів правої частини системи рівнянь.

4 Щоби виконати обчислення і здобути розв’язки системи рівнянь (вектор **x**), надрукуйте

x:=Isolve(A,B)

Функцію **lsolve** можна також вставити за допомогою діалогового вікна Вставить-Функцію.

4.8 Розв´язування системи нелінійних рівнянь в Mathcad

Для розв´язування системи нелінійних рівнянь у пакеті MathCad використовують внутрішню функцію **Find**(var1, var2, …). Аргументи var1, var2,… цієї функції – змінні, відносно яких розв´язуюєть систему. Кількість аргументів має дорівнювати кількості невідомих.

Функція Find розв´язує рівняння *ітераційним методом* та повертає чисельний результат у вигляді *скаляра* або *вектора*, яке дорівнює числу невідомих. Послідовність розв´язання систем рівнянь за допомогою функції Find:

1 Задайте початкове наближення для всіх невідомих, які входять в систему рівнянь, у вигляді вектора чи змінних з різними іменами. На основі початкового наближення будується послідовність, яка збігається до *шуканого розв´язку*.

2 Надрукуйте ключове слово **Given**. При друкуванні цього слова можна використовувати який завгодно шрифт та регістр. Слово Given зазначає Mathcad´у, що далі буде записана система рівнянь.

3 Нижче за ключове слово Given надрукуйте у довільному порядку систему рівнянь, яку треба розв'язати. Поміж лівою і правою частинами *рівнянь* має стояти символ « **=** » (півжирне дорівнює).

4 Надрукуйте ім'я функції **Find** та список її аргументів. При друкуванні в документі слова **Find** можна використовувати довільний стиль і накреслення літер. Функцію **Find** можна вставити також з діалогового вікна «Вставити функцію».

Ключове слово **Given**, рівняння, які слідують за ним, і вираз, який містить функцію **Find,** називаються *блоком розв'язування рівнянь*.

Приклади розв'язування систем алгебраїчних рівнянь

Приклад 1. Обчислення розв’язків систем лінійних рівнянь у Mathcad

Завдання. Віднайти у MathCad розв’язки системи лінійних рівнянь

$$3x_1 - x_2 \quad = 5;$$
$$-2x_1 + x_2 + x_3 = 0;$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 = 15.$$

Послідовність операторів розв’язування заданої системи лінійних рівнянь за допомогою матричних операцій у математичному пакеті Mathcad наведено нижче на рисунку.

Формування матриці та вектору

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Розв'язок системи лінійних рівнянь

$$x := A^{-1} \cdot B \qquad x = \begin{pmatrix} -2.5 \\ -12.5 \\ 7.5 \end{pmatrix}$$

Розв’язування системи лінійних рівнянь за допомогою матричних операцій

Послідовність операторів розв’язування заданої системи лінійних рівнянь за допомогою функції Isolve у MathCAD наведено нижче на рисунку.

Формування матриці та вектору

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Розв'язок системи лінійних рівнянь

$$xs := \mathrm{lsolve}\,(A\,,B) \quad xs = \begin{pmatrix} -2.5 \\ -12.5 \\ 7.5 \end{pmatrix}$$

Розв’язування системи лінійних рівнянь за допомогою функції Isolve

Вочевидь, що за обох способів розв’язок системи лінійних рівнянь збігається:

$$x_1 = -2.5,\ x_2 = -12.5,\ x_3 = 7.5.$$

Приклад 2 Обчислення розв'язків систем нелінійних рівнянь у MathCad

Завдання. Знайти у MathCad розв'язки системи нелінійних рівнянь

$$x^2 - 4y^3 - \sin x = 0;$$
$$\cos y - x^3 = 0.$$

Обираємо початкові наближенні значення розв'язку заданої системи нелінійних рівнянь: x=1, y=1. Послідовність операторів розв'язку заданої системи нелінійних рівнянь у математичному пакеті Mathcad наведено нижче на рисунку.

Початкові наближені значення

$x := 1 \qquad y := 1$

Опис системи рівнянь

Given

$(x)^2 - 4\cdot(y)^3 - \sin(x) = 0$

$\cos(y) - (x)^3 = 0$

Розв'язок системи рівнянь

$\text{Find}(x, y) = \begin{pmatrix} 0.983 \\ 0.322 \end{pmatrix}$

Розв'язок системи нелінійних рівнянь

Результат розв'язку заданої системи нелінійних рівнянь: x=0.983, y=0.322.

Приклад 3 Обчислення розв'язків систем лінійних рівнянь методом Гаусса

Завдання. Віднайти розв'язки системи рівнянь

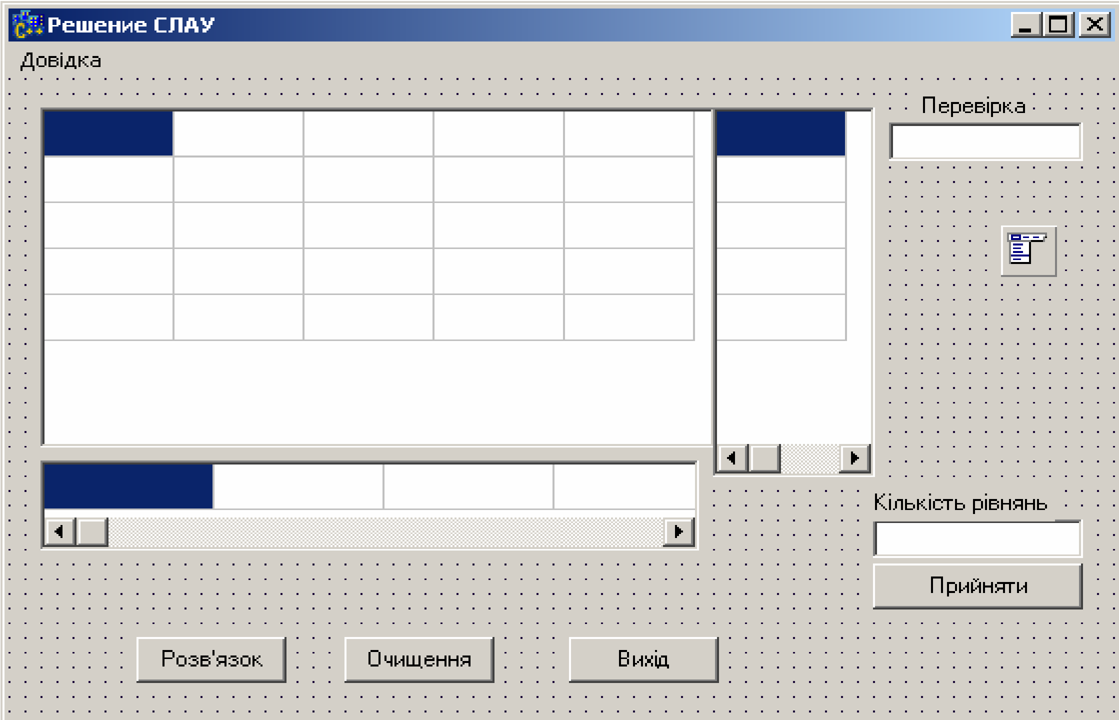
$2.8\, x_1 + 3.8\, x_2 + 4.8\, x_3 = 2.8;$

$1.8x_1 + 4.8x_2 + 5.8\, x_3 = 3.8;$

$4.8\, x_1 + 5.8x_2 - 7.8x_3 = 5.8$

методом Гаусса алгоритмічною мовою С++.

Опис програми. До змінної *n* вводиться порядок матриці системи. До двовимірного масиву *a* й одновимірного масиву *b* вводиться з клавіатури розширена матриця системи, після чого обидва масиви і змінна *n* передаються до функції *Gauss*. У функції *Gauss* для кожного *к-того* кроку обчислень виконується пошук максимального елемента в *к-тому* стовпці матриці розпочинаючи з *к-того* рядка. Номер рядка, який містить максимальний елемент зберігається в змінній *l*. В тому разі якщо максимальний елемент, перебуває не в *к-тому* рядкові, рядки з номерами *к* та *l* міняються місцями. Якщо ж всі ці елементи дорівнюють нулеві, то припиняється виконування функції *Gauss* з результатом *false*. Після обирання рядка виконується перетворення матриці за методом Гаусса. Далі обчислюється розв’язок системи і розміщується в масиві *x*. Набутий розв’язок виводиться на екран. Форму проекту програми наведено на рисунку.



Форма проекту

Текст файла бібліотеки Gauss.cpp

```
#include <vcl.h>
#pragma hdrstop
#include "gauss.h"
#pragma package(smart_init)

// ---Глобальні змінні---------
extern int u;  //кількість рівнянь
extern const col=10;  //Максимальна кількість рівнянь
extern float a[col][col+1],y[col];

// ---Функція методу Гаусса---------
int gaussu(int u)
{   float temp;
    int i,j,k,m,n=0;
n0: n++;
    for(k=n;k<=u;k++)
      {if (a[k-1][n-1]!=0)goto n1;}
      return -1;// помилка,нема розв´язку
n1: if (k==n) goto n2;
     j=u+1;
```

```
    for(m=n;m<=j;m++)
      {temp=a[n-1][m-1];
      a[n-1][m-1]=a[k-1][m-1];
      a[k-1][m-1]=temp;}
 n2: for(j=u+1;j>=n;j--)
      {a[n-1][j-1]=a[n-1][j-1]/a[n-1][n-1];}
    m=u+1;
    for(i=k+1;i<=u;i++)
      {for(j=n+1;j<=m;j++)
        {a[i-1][j-1]=a[i-1][j-1]-a[i-1][n-1]*a[n-1][j-1];}}
    if (n!=u) goto n0;
    for(i=u;i>=1;i--)
      {y[i-1]=a[i-1][m-1];
    for(k=i-1;k>=1;k--)
      {a[k-1][m-1]=a[k-1][m-1]-a[k-1][i-1]*y[i-1];}}
    return 0;
}
```

Текст головного модуля Unit1

```
#include <vcl.h>
#pragma hdrstop
#include "D:\Diskc\kurs2\Cvm\Gauss.cpp"
int u;  // кількість рівнянь
float a[col][col+1],y[col];

// -------Команда меню Довідка--------------------
void __fastcall TForm1::N1Click(TObject *Sender)
{ ShowMessage("Розв´язання системи \n лінійних рівнянь \n
                  методом послідовного \n вилучання невідомих ");}

// ---Підпрограма формування матриці в динамічній пам’яті---
void mas(float *b,int n, float a)
{int i,j;
for (i=0; i<n; i++)
  {*(b+n*(n-1)+i)-=a;
   for(j=0; j<n; j++)
    *(b+i*n+j)-=a;
   }
 }
// --------Кнопка Розв’язок-------------------
void __fastcall TForm1::Button1Click(TObject *Sender)
{   float c=0.01;
c=0.01*20;
float b[col];
```

```
//u=StrToInt(Edit1->Text);
int i,j;
for (i=0;i<u;i++)
for (j=0;j<u;j++)
  { a[i][j]=StrToFloat(SG1->Cells[j][i])-c;
    a[i][u]=StrToFloat(SG2->Cells[0][i])-c;
    b[i]=a[0][i];
};
for (i=0;i<u;i++)
for (j=0;j<u;j++)
  { SG1->Cells[j][i]=FloatToStr(a[i][j]);
    SG2->Cells[j][i]=FloatToStr(a[i][u]);    };
float s=0;
if(gaussu(u)==-1)ShowMessage("?????");
 else
 for(i=0;i<u;i++)
  { SG3->Cells[i][0]=FloatToStr(y[i]);
   s+=b[i]*y[i];
   }
   Edit2->Text=FloatToStrF(s,ffFixed,5,2);
 }

// --------Кнопка Прийняти-------------------
void __fastcall TForm1::Button4Click(TObject *Sender)
{ u=StrToInt(Edit1->Text);
SG1->ColCount=u;
SG1->RowCount=u;
SG2->RowCount=u;
SG3->ColCount=u; }

// --------Створення форми-------------------
void __fastcall TForm1::FormCreate(TObject *Sender)
  {
   Button4Click(Sender);
  }
```

Приклад 4. Обчислення розв'язків систем лінійних рівнянь методом Зейделя

Завдання. Віднайти розв'язки системи рівнянь:

$$4{,}1x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}2x_3 + 0{,}2x_4 = 21{,}14\ ,$$
$$0{,}3x_1 + 5{,}3x_2 + 0{,}9x_3 - 0{,}1x_4 = -\ 17{,}82\ ,$$
$$0{,}2x_1 + 0{,}3x_2 + 3{,}2x_3 + 0{,}2x_4 = 9{,}02\ ,$$
$$0{,}1x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}2x_3 - 9{,}1x_4 = 17{,}08$$

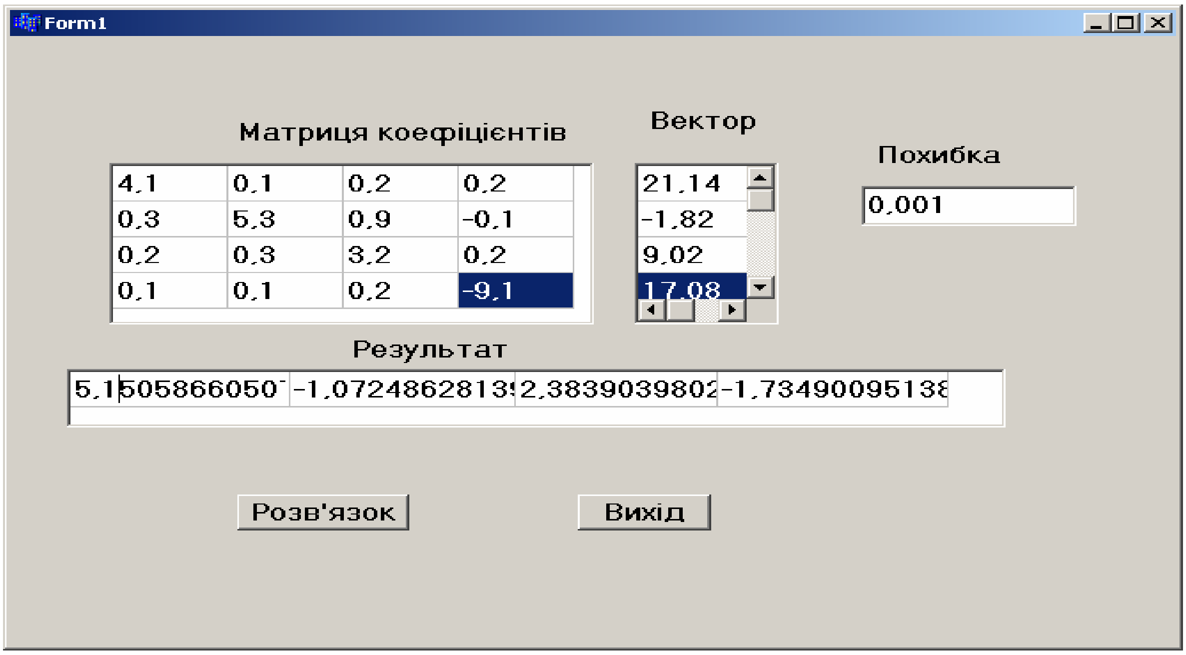
методом Зейделя з похибкою 0,001 алгоритмічною мовою С++.

Опис програми. До змінної *n* вводиться порядок матриці системи, а до змінної *e* – максимальна абсолютна похибка. За допомогою компонентів StringGrid1 та StringGrid2 вводимо двовимірний масив *a* – розширена матриця системи і одновимірний масив *b*. Початкове наближення передбачається дорівнюваним нулеві. Обидва масиви та змінні *n* і *e* передаються до функції *Seidel*. У функції *Seidel* досліджується збіжність системи, і в тому разі якщо система не збігається, виконування функції припиняється з розв'язком *false*. В перебігу кожної ітерації обчислюються нове наближення і абсолютна похибка. Коли дістала похибка стає менше за задану, виконування функції припиняється. Здобутий розв'язок виводиться на вікно форми за допомогою компонента StringGrid3. Форму проекту програми з результатами наведено на рисунку наприкінці прикладу (стор.59).

***Текст програми*:**

```
...
#include <math.h>
...
__fastcall TForm1::TForm1(TComponent* Owner)
      : TForm(Owner)
{          }
// Глобальні змінні
  const n=4;
   float e, a[n][n],b[n],x[n];

//----------------Функція методу Зейделя-----------------
int Seidel(float a[n][n], float b[n], float x[n],  float e)
{int   i, j,seid;
 float  s1, s2, s, v, m;
   //Дослідження збіжності
   for (i=0;i<n;i++)
     {   s = 0;
        for (j=0;j<n;j++)
           if (j != i)
              s = s + fabs(a[i][ j]);
        if (s >= fabs(a[i][i]))
```

```
        {  return seid = 0; }
      }
   do
      {        m = 0;
        for (i=0;i<n;i++)
          {            //Обчислення суми
           s1 = 0;             s2 = 0;
          for (j=0;j<i-1;j++)
               s1 = s1 + a[i][ j] * x[j];
           for (j=0;j<n;j++)
               s2 = s2 + a[i][ j] * x[j];
        // Обчислення нового наближення й похибки
           v= x[i];
           x[i] = x[i] - (1./ a[i][i]) * (s1 + s2 - b[i]);
           if (fabs(v - x[i]) > m )
              m = fabs(v - x[i]);
           }
      }
       while ( m >= e);
    return   seid = 1;
}

// -----------------------Відгук на кнопку «Розв'язок»-----------
void __fastcall TForm1::Button1Click(TObject *Sender)
{  int i,j;
   for (i=0;i<n;i++)
      for (j=0;j<n;j++)
      a[i][j]=StrToFloat(StringGrid1->Cells[j][i]);
   for (i=0;i<n;i++)
     b[i]=StrToFloat(StringGrid2->Cells[0][i]);
     e= StrToFloat(Edit1->Text);
 // Припускаємо початкове наближення дорівнюваним нулеві
     for (i=0;i<n;i++)
          x[i] = 0;
      if (Seidel(a, b, x, e)==1)
     { for (i=0;i<n;i++)
        StringGrid3->Cells[i][0]=FloatToStr(x[i]); }
      else
  ShowMessage("Метод Зейделя не збігається для даної системи");
}
```



Форма проекту з результатами обчислення
системи лінійних рівнянь методом Зейделя

Наближений розв’язок заданої системи лінійних рівнянь:

$x_1 = 5{,}15$, $x_2 = –1{,}07$, $x_3 = 2{,}384$, $x_4 = –1{,}735$.

Л а б о р а т о р н а   р о б о т а   № 4

ОБЧИСЛЕННЯ МАТРИЦЬ ТА ЇХНІХ ХАРАКТЕРИСТИК у MathCad. ОБЧИСЛЕННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ ТА НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Мета роботи

Ознайомитися з чисельними методами розв'язування систем лінійних рівнянь. Набути навичок використовування різноманітних методів задля розв'язування систем лінійних рівнянь в програмах мовою С++ в середовищі програмування Builder.

Контрольні запитання

1. Яка умова має виконуватися, щоб система лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) мала єдиний розв'язок?
2. Які з прямих методів розв'язування систем лінійних рівнянь вам відомі?
3. В чому полягає метод з обчисленням оберненої матриці?
4. В чому полягає метод Зейделя?
5. До якого типу – прямого чи ітераційного – належить метод Гаусса?
6. В чому полягає метод Гаусса?
7. Перелічить ітераційні методи розв'язування систем лінійних рівнянь.
8. Розкрийте сутність методу ітерацій.
9. Порівняйте прямі та ітераційні методи.

Лабораторне завдання

8. Вивчити основні теоретичні відомості, потрібні для виконання лабораторної роботи і надати відповіді на контрольні запитання.

2. Записати оператори розв'язування системи лінійних рівнянь в MathCad та виконати обчислення на комп'ютері згідно з індивідуальним варіантом завдання, наведеного в табл. 4.1.

3. Для матриці коефіцієнтів системи лінійних рівнянь згідно з індивідуальним варіантом у табл.4.1 обчислити у математичному пакеті MathCad:

- слід;
- визначник;
- транспоновану матрицю;
- обернену матрицю;
- норми матриці;
- ранг;

- власні значення та власні вектори матриці.

4. Надати короткий опис методів розв'язування системи нелінійних рівнянь.

5. Записати оператори розв'язування системи лінійних рівнянь в MathCad та виконати обчислення на комп'ютері згідно з індивідуальним завданням, наведеним в табл. 4.2

6. Оформити протокол виконання лабораторної роботи.

Таблиця 4.1 – **Індивідуальні завдання для розв'язування систем лінійних рівнянь**

№ 1 $\begin{cases} 4{,}4x_1 - 2{,}5x_2 + 19{,}2x_3 - 10{,}8x_4 = 4{,}3 \\ 5{,}5x_1 - 9{,}3x_2 - 14{,}2x_3 + 13{,}2x_4 = 6{,}8 \\ 7{,}1x_1 - 11{,}5x_2 + 5{,}3x_3 - 6{,}7x_4 = -1{,}8 \\ 14{,}2x_1 + 23{,}4x_2 - 8{,}8x_3 + 5{,}3x_4 = 7{,}2 \end{cases}$	**№ 2** $\begin{cases} 30{,}1x_1 - 1{,}4x_2 + 10x_3 - 1{,}5x_4 = 10 \\ -17{,}5x_1 + 11{,}1x_2 + 1{,}3x_3 - 7{,}5x_4 = 1{,}3 \\ 1{,}7x_1 - 21{,}1x_2 + 7{,}1x_3 - 17{,}1x_4 = 10 \\ 2{,}1x_1 + 2{,}1x_2 + 3{,}5x_3 + 3{,}3x_4 = 1{,}7 \end{cases}$
№ 3 $\begin{cases} 8{,}2x_1 - 3{,}2x_2 + 14{,}2x_3 + 14{,}8x_4 = -8{,}4 \\ 5{,}6x_1 - 12x_2 + 15x_3 - 6{,}4x_4 = 4{,}5 \\ 5{,}7x_1 + 3{,}6x_2 - 12{,}4x_3 - 2{,}3x_4 = 3{,}3 \\ 6{,}8x_1 + 13{,}2x_2 - 6{,}3x_3 - 8{,}7x_4 = 14{,}3 \end{cases}$	**№ 4** $\begin{cases} 7{,}3x_1 - 8{,}1x_2 + 12{,}7x_3 - 6{,}7x_4 = 8{,}8 \\ 11{,}5x_1 + 6{,}2x_2 - 8{,}3x_3 + 9{,}2x_4 = 21{,}5 \\ 8{,}2x_1 - 5{,}4x_2 + 4{,}3x_3 - 2{,}5x_4 = 6{,}2 \\ 2{,}4x_1 + 11{,}5x_2 - 3{,}3x_3 + 14{,}2x_4 = -6{,}2 \end{cases}$
№ 5 $\begin{cases} 5{,}7x_1 - 7{,}8x_2 - 5{,}6x_3 - 8{,}3x_4 = 2{,}7 \\ 6{,}6x_1 + 13{,}1x_2 - 6{,}3x_3 + 4{,}3x_4 = -5{,}5 \\ 14{,}7x_1 - 2{,}8x_2 + 5{,}6x_3 - 12{,}1x_4 = 8{,}6 \\ 8{,}5x_1 + 12{,}7x_2 - 23{,}7x_3 + 5{,}7x_4 = 14{,}7 \end{cases}$	**№ 6** $\begin{cases} 4{,}8x_1 + 12{,}5x_2 - 6{,}3x_3 - 9{,}7x_4 = 3{,}5 \\ 22x_1 - 31{,}7x_2 + 12{,}4x_3 - 8{,}7x_4 = 4{,}6 \\ 15x_1 + 21{,}1x_2 - 4{,}5x_3 + 14{,}4x_4 = 15 \\ 8{,}6x_1 - 14{,}4x_2 + 6{,}2x_3 + 2{,}8x_4 = -1{,}2 \end{cases}$
№ 7 $\begin{cases} 3{,}8x_1 + 14{,}2x_2 + 6{,}3x_3 - 15{,}5x_4 = 2{,}8 \\ 8{,}3x_1 - 6{,}6x_2 + 5{,}8x_3 + 12{,}2x_4 = -4{,}7 \\ 6{,}4x_1 - 8{,}5x_2 - 4{,}3x_3 + 8{,}8x_4 = 7{,}7 \\ 17{,}1x_1 - 8{,}3x_2 + 14{,}4x_3 - 7{,}2x_4 = 13{,}5 \end{cases}$	**№ 8** $\begin{cases} 6{,}4x_1 + 7{,}2x_2 - 8{,}3x_3 + 42x_4 = 2{,}23 \\ 5{,}8x_1 - 8{,}3x_2 + 14{,}3x_3 - 6{,}2x_4 = 17{,}1 \\ 8{,}6x_1 + 7{,}7x_2 - 18{,}3x_3 + 8{,}8x_4 = -5{,}4 \\ 13{,}2x_1 - 5{,}2x_2 - 6{,}5x_3 + 12{,}2x_4 = 6{,}5 \end{cases}$
№ 9 $\begin{cases} 15{,}7x_1 + 6{,}6x_2 - 5{,}7x_3 + 11{,}5x_4 = -2{,}4 \\ 8{,}8x_1 - 6{,}7x_2 + 5{,}5x_3 - 4{,}5x_4 = 5{,}6 \\ 6{,}3x_1 - 5{,}7x_2 - 23{,}4x_3 + 6{,}6x_4 = 7{,}7 \\ 14{,}3x_1 + 8{,}7x_2 - 15{,}7x_3 - 5{,}8x_4 = 23{,}4 \end{cases}$	**№ 10** $\begin{cases} 14{,}2x_1 + 3{,}2x_2 - 4{,}2x_3 + 8{,}5x_4 = 13{,}2 \\ 6{,}3x_1 - 4{,}3x_2 + 12{,}7x_3 - 5{,}8x_4 = -4{,}4 \\ 8{,}4x_1 - 22{,}3x_2 - 5{,}2x_3 + 4{,}7x_4 = 6{,}4 \\ 2{,}7x_1 + 13{,}7x_2 + 6{,}4x_3 - 12{,}7x_4 = 8{,}5 \end{cases}$
№ 11 $\begin{cases} 4{,}3x_1 - 12{,}1x_2 + 23{,}2x_3 - 14{,}1x_4 = 15{,}5 \\ 2{,}4x_1 - 4{,}4x_2 + 3{,}5x_3 + 5{,}5x_4 = 2{,}5 \\ 5{,}4x_1 + 8{,}3x_2 - 7{,}4x_3 - 12{,}7x_4 = 8{,}6 \\ 6{,}3x_1 - 7{,}6x_2 + 1{,}34x_3 + 3{,}7x_4 = 12{,}1 \end{cases}$	**№12** $\begin{cases} 7{,}3x_1 + 12{,}4x_2 - 3{,}8x_3 - 14{,}3x_4 = 5{,}8 \\ 10{,}7x_1 - 7{,}7x_2 + 12{,}5x_3 + 6{,}6x_4 = -6{,}6 \\ 15{,}6x_1 + 6{,}6x_2 + 14{,}4x_3 - 8{,}7x_4 = 12{,}4 \\ 7{,}5x_1 + 12{,}2x_2 - 8{,}3x_3 + 3{,}7x_4 = 9{,}2 \end{cases}$
№13 $\begin{cases} 14{,}4x_1 - 5{,}3x_2 + 14{,}3x_3 - 12{,}7x_4 = -14{,}4 \\ 23{,}4x_1 - 14{,}2x_2 - 5{,}4x_3 + 2{,}1x_4 = 6{,}6 \\ 6{,}3x_1 - 13{,}2x_2 - 6{,}5x_3 + 14{,}3x_4 = 9{,}4 \\ 5{,}6x_1 + 8{,}8x_2 - 6{,}7x_3 - 23{,}8x_4 = 7{,}3 \end{cases}$	**№ 14** $\begin{cases} 13{,}2x_1 - 8{,}3x_2 - 4{,}4x_3 + 6{,}2x_4 = 6{,}8 \\ 8{,}3x_1 + 4{,}2x_2 - 5{,}6x_3 + 7{,}7x_4 = 12{,}4 \\ 5{,}8x_1 - 3{,}7x_2 + 12{,}4x_3 - 6{,}2x_4 = 8{,}7 \\ 3{,}5x_1 + 6{,}6x_2 - 13{,}8x_3 - 9{,}3x_4 = -10{,}8 \end{cases}$

Закінчення таблиці 4.1

№ 15 $\begin{cases} 1{,}7x_1 + 10x_2 - 1{,}3x_3 + 2{,}1x_4 = 3{,}1 \\ 3{,}1x_1 + 1{,}7x_2 - 2{,}1x_3 + 5{,}4x_4 = 2{,}1 \\ 3{,}3x_1 - 7{,}7x_2 + 4{,}4x_3 - 5{,}1x_4 = 1{,}9 \\ 10x_1 - 20{,}1x_2 + 20{,}4x_3 + 1{,}7x_4 = 1{,}8 \end{cases}$	**№ 16** $\begin{cases} 8{,}1x_1 + 1{,}2x_2 - 9{,}1x_3 + 1{,}7x_4 = 10 \\ 1{,}1x_1 - 1{,}7x_2 + 7{,}2x_3 - 3{,}4x_4 = 1{,}7 \\ 1{,}7x_1 - 1{,}8x_2 + 10x_3 + 2{,}3x_4 = 2{,}1 \\ 1{,}3x_1 + 1{,}7x_2 - 9{,}9x_3 + 3{,}5x_4 = 27{,}1 \end{cases}$
№ 17 $\begin{cases} 1{,}7x_1 - 1{,}8x_2 + 1{,}9x_3 - 57{,}4x_4 = 10 \\ 1{,}1x_1 - 4{,}3x_2 + 1{,}5x_3 - 1{,}7x_4 = 19 \\ 1{,}2x_1 + 1{,}4x_2 + 1{,}6x_3 + 1{,}8x_4 = 20 \\ 7{,}1x_1 - 1{,}3x_2 - 4{,}1x_3 + 5{,}2x_4 = 10 \end{cases}$	**№ 18** $\begin{cases} 3{,}3x_1 - 2{,}2x_2 - 10x_3 + 1{,}7x_4 = 1{,}1 \\ 1{,}8x_1 + 21{,}1x_2 + 1{,}3x_3 - 2{,}2x_4 = 2{,}2 \\ -10x_1 + 1{,}1x_2 + 20x_3 - 4{,}5x_4 = 10 \\ 70x_1 - 1{,}7x_2 - 2{,}2x_3 + 3{,}3x_4 = 2{,}1 \end{cases}$
№ 19 $\begin{cases} 6{,}1x_1 + 6{,}2x_2 - 6{,}3x_3 + 6{,}4x_4 = 6{,}5 \\ 1{,}1x_1 - 1{,}5x_2 + 2{,}2x_3 - 3{,}8x_4 = 4{,}2 \\ 5{,}1x_1 - 5{,}0x_2 + 4{,}9x_3 - 4{,}8x_4 = 4{,}7 \\ 1{,}8x_1 + 1{,}9x_2 + 2{,}0x_3 - 2{,}1x_4 = 2{,}2 \end{cases}$	**№ 20** $\begin{cases} 1{,}7x_1 + 9{,}9x_2 - 20x_3 - 1{,}7x_4 = 1{,}7 \\ 20x_1 + 0{,}5x_2 - 30{,}1x_3 - 1{,}1x_4 = 2{,}1 \\ 10x_1 - 20x_2 + 30{,}2x_3 + 0{,}5x_4 = 1{,}8 \\ 3{,}3x_1 - 0{,}7x_2 + 3{,}3x_3 + 20x_4 = -1{,}7 \end{cases}$
№ 21 $\begin{cases} 2{,}2x_1 - 3{,}1x_2 + 4{,}2x_3 - 5{,}1x_4 = 6{,}01 \\ 1{,}3x_1 + 2{,}2x_2 - 1{,}4x_3 + 1{,}5x_4 = 10 \\ 6{,}2x_1 - 7{,}4x_2 + 8{,}5x_3 - 9{,}6x_4 = 1{,}1 \\ 1{,}2x_1 + 1{,}3x_2 + 1{,}4x_3 + 4{,}5x_4 = 1{,}6 \end{cases}$	**№ 22** $\begin{cases} 1{,}7x_1 - 1{,}3x_2 - 1{,}1x_3 - 1{,}2x_4 = 2{,}2 \\ 10x_1 - 10x_2 - 1{,}3x_3 + 1{,}3x_4 = 1{,}1 \\ 3{,}5x_1 + 3{,}3x_2 + 1{,}2x_3 + 1{,}3x_4 = 1{,}2 \\ 1{,}3x_1 + 1{,}1x_2 - 1{,}3x_3 - 1{,}1x_4 = 10 \end{cases}$
№ 23 $\begin{cases} 35{,}8x_1 + 2{,}1x_2 - 34{,}5x_3 - 11{,}8x_4 = 0{,}5 \\ 27{,}1x_1 - 7{,}5x_2 + 11{,}7x_3 - 23{,}5x_4 = 12{,}8 \\ 11{,}7x_1 + 1{,}8x_2 - 6{,}5x_3 + 7{,}1x_4 = 1{,}7 \\ 6{,}3x_1 + 10x_2 + 7{,}1x_3 + 3{,}4x_4 = 20{,}8 \end{cases}$	**№ 24** $\begin{cases} 1{,}1x_1 + 11{,}3x_2 - 1{,}7x_3 + 1{,}8x_4 = 10 \\ 1{,}3x_1 - 11{,}7x_2 + 1{,}8x_3 + 1{,}4x_4 = 1{,}3 \\ 1{,}1x_1 - 10{,}5x_2 - 1{,}7x_3 - 1{,}5x_4 = 1{,}1 \\ 1{,}5x_1 - 0{,}5x_2 + 1{,}8x_3 - 1{,}1x_4 = 10 \end{cases}$
№ 25 $\begin{cases} 35{,}1x_1 + 1{,}7x_2 + 37{,}5x_3 - 2{,}8x_4 = 7{,}5 \\ 45{,}2x_1 + 21{,}1x_2 - 1{,}1x_3 - 1{,}2x_4 = 11{,}1 \\ -21{,}1x_1 + 31{,}7x_2 + 1{,}2x_3 - 1{,}5x_4 = 2{,}1 \\ 31{,}7x_1 + 18{,}1x_2 - 31{,}7x_3 + 2{,}2x_4 = 0{,}5 \end{cases}$	**№ 26** $\begin{cases} 1{,}4x_1 + 2{,}1x_2 - 3{,}3x_3 + 1{,}1x_4 = 10 \\ 10x_1 - 1{,}7x_2 + 1{,}1x_3 - 1{,}5x_4 = 1{,}7 \\ 2{,}2x_1 + 34{,}4x_2 - 1{,}1x_3 - 1{,}2x_4 = 20 \\ 1{,}1x_1 + 1{,}3x_2 + 1{,}2x_3 + 1{,}4x_4 = 1{,}3 \end{cases}$
№ 27 $\begin{cases} 1{,}1x_1 + 11{,}2x_2 + 11{,}1x_3 - 13{,}1x_4 = 1{,}3 \\ -3{,}3x_1 + 1{,}1x_2 + 30{,}1x_3 - 20{,}1x_4 = 1{,}1 \\ 7{,}5x_1 + 1{,}3x_2 + 1{,}1x_3 + 10x_4 = 20 \\ 1{,}7x_1 + 7{,}5x_2 - 1{,}8x_3 + 2{,}1x_4 = 1{,}1 \end{cases}$	**№ 28** $\begin{cases} 1{,}3x_1 - 1{,}7x_2 + 3{,}3x_3 + 1{,}7x_4 = 1{,}1 \\ 10x_1 + 5{,}5x_2 - 1{,}3x_3 + 3{,}4x_4 = 1{,}3 \\ 1{,}1x_1 + 1{,}8x_2 - 2{,}2x_3 - 1{,}1x_4 = 10 \\ 1{,}3x_1 - 1{,}2x_2 + 2{,}1x_3 + 2{,}2x_4 = 1{,}8 \end{cases}$
№ 29 $\begin{cases} 7{,}5x_1 + 1{,}8x_2 - 2{,}1x_3 - 7{,}7x_4 = 1{,}1 \\ -10x_1 + 1{,}3x_2 - 20x_3 - 1{,}4x_4 = 1{,}5 \\ 2{,}8x_1 - 1{,}7x_2 + 3{,}9x_3 + 4{,}8x_4 = 1{,}2 \\ 10x_1 + 31{,}4x_2 - 2{,}1x_3 - 10x_4 = -1{,}1 \end{cases}$	**№30** $\begin{cases} 1{,}2x_1 + 1{,}8x_2 - 2{,}2x_3 - 4{,}1x_4 = 1{,}3 \\ 10x_1 - 5{,}1x_2 + 1{,}2x_3 + 5{,}5x_4 = 1{,}2 \\ 2{,}2x_1 - 30{,}1x_2 + 3{,}1x_3 + 5{,}8x_4 = 10 \\ 10x_1 + 2{,}4x_2 - 30{,}5x_3 - 2{,}2x_4 = 34{,}1 \end{cases}$

Таблиця 4.2 – **Індивідуальні завдання для розв’язування систем нелінійних рівнянь**

№ 1 $\begin{cases}\sin(x+1)-y=1{,}2\\ 2x+\cos y=2\end{cases}$	**№ 2** $\begin{cases}\sin(y+1)-x=1{,}2\\ 2y+\cos x=2\end{cases}$	**№ 3** $\begin{cases}\sin(x+1)-y=1\\ 2x+\cos y=2\end{cases}$
№ 4 $\begin{cases}\cos(x-1)+y=0{,}5\\ x-\cos y=3\end{cases}$	**№ 5** $\begin{cases}\cos(y-1)+x=0{,}5;\\ y-\cos x-=3.\end{cases}$	**№ 6** $\begin{cases}\cos(x-1)+y=0{,}8\\ x-\cos y=2\end{cases}$
№ 7 $\begin{cases}\sin x+2y=2\\ \cos(y-1)+x=0{,}7\end{cases}$	**№ 8** $\begin{cases}\sin y+2x=2\\ \cos(x-1)+y=0{,}7\end{cases}$	**№ 9** $\begin{cases}\sin x+2y=1{,}6\\ \cos(y-1)+x=1\end{cases}$
№ 10 $\begin{cases}\cos x+y=1{,}5\\ 2x-\sin(y-0{,}5)=1\end{cases}$	**№ 11** $\begin{cases}\cos y+x=1{,}5\\ 2y-\sin(x-0{,}5)=1\end{cases}$	**№ 12** $\begin{cases}\cos(y+0{,}5)-x=2\\ \sin x-2y=1\end{cases}$
№ 13 $\begin{cases}\sin(x+0{,}5)-y=1\\ \cos(y-2)+x=0\end{cases}$	**№ 14** $\begin{cases}\sin(y+0{,}5)-x=1\\ \cos(x-2)+y=0\end{cases}$	**№ 15** $\begin{cases}\sin(x+0{,}5)-y=1{,}2\\ \cos(y-2)+x=0\end{cases}$
№ 16 $\begin{cases}\cos(x+0{,}5)+y=0{,}8\\ \sin y-2x=1{,}6\end{cases}$	**№ 17** $\begin{cases}\cos(y+0{,}5)+x=0{,}8\\ \sin x-2y=1{,}6\end{cases}$	**№ 18** $\begin{cases}\cos(x+0{,}5)+y=1\\ \sin y-2x=2\end{cases}$
№ 19 $\begin{cases}\sin(x-1)=1{,}3-y\\ x-\sin(y+1)=0{,}8\end{cases}$	**№ 20** $\begin{cases}\sin(y-1)+x=1{,}3\\ y-\sin(x+1)=0{,}8\end{cases}$	**№ 21** $\begin{cases}\sin(x-1)+y=1{,}5\\ x-\sin(y+1)=1\end{cases}$
№ 22 $\begin{cases}2y-\cos(x+1)=0\\ x+\sin y=-0{,}4\end{cases}$	**№ 23** $\begin{cases}2x-\cos(y+1)=0\\ y+\sin x=-0{,}4\end{cases}$	**№ 24** $\begin{cases}\sin(y+1)-x=1\\ 2y+\cos x=2\end{cases}$
№ 25 $\begin{cases}\cos(x+0{,}5)-y=2\\ \sin y-2x=1\end{cases}$	**№ 26** $\begin{cases}\cos(y+0{,}5)-x=2\\ \sin x-2y=1\end{cases}$	**№ 27** $\begin{cases}\cos(y-1)+x=0{,}8\\ y-\cos x-=2\end{cases}$
№ 28 $\begin{cases}\sin(x+2)-y=1{,}5\\ x+\cos(y-2)=0{,}5\end{cases}$	**№ 29** $\begin{cases}\sin(y+2)-x=1{,}5\\ y+\cos(x-2)=0{,}5\end{cases}$	**№ 30** $\begin{cases}\cos(x-1)+y=1\\ \sin y+2x=1{,}6\end{cases}$

5 КОМПЛЕКСНЕ ЗАВДАННЯ
з теми "*Дослідження функції*"

1 Записати програму обчислення таблиці значень функції $f(x)$ в С++ та у Mathcad:

$$f(x)=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$

Коефіцієнти a_i та інтервал табулювання $[x_{min};\ x_{max}]$ взяти з табл. 5.1 відповідно до номера варіанта індивідуального завдання. Крок табулювання 0.2.

2 Побудувати графік функції з кроком 0.01 в Mathcad. Визначити проміжки ізоляції розв'язків рівняння $f(x) = 0$.

3 Віднайти значення крайнього праворуч з розв'язків рівняння $f(x) = 0$ для перших трьох наближень методом згідно з індивідуальним варіантом (графа 8). Обчислити значення всіх розв'язків рівняння на заданому інтервалі в Mathcad.

4 Обчислити інтеграл S для заданої функції $f(x)$ методом згідно з індивідуальним варіантом (графа 9) для кількості проміжків інтегрування $n = 4$:

$$S = \int_{x_{min}}^{x_{max}} f(x)dx,$$

Обчислити цей інтеграл в Mathcad як визначений та невизначений.

5 Визначити формулу наближеної функції $g(x)$ методом згідно з індивідуальним варіантом (графа 10 табл. 5.1):

- у варіантах з методами інтерполяції в якості вихідних даних обрати по три пари значень x_i та $f(x_i)$ з обчисленої таблиці у п. 1 завдання;
- у варіантах з методами апроксимації в якості вихідних даних обрати по шість пар значень x_i та $f(x_i)$ з обчисленої таблиці у п. 1 завдання.

Обчислити значення наближеної функції $g(x)$ за дістаною формулою в точках x_i та посередині поміж ними. Побудувати графіки заданої та наближеної функцій в одній площині. Обчислити середньоквадратичну похибку відхилення заданої та наближеної функцій.

Визначити наближену функцію та побудувати графіки заданої та наближеної функцій в одній площині в Mathcad. Для побудови графіка наближеної функції обрати крок $h = 0.01$.

6. Знайти інтервали унімодальності функції $f(x)$. Обчислити перші три наближення до координати крайньої ліворуч точки екстремуму для відповідного індивідуального завдання (графа 11 табл. 5.1). Обчислити в MathCad усі значення екстремумів функції $f(x)$ на заданому інтервалі.

Пояснення. *Для кожного методу навести теоретичні відомості про метод: постановку задачі, графічне пояснення та виведення формули задля обчислень.*

Таблиця 5.1 – **Варіанти індивідуальних завдань**

№	**a_0**	**a_1**	**a_2**	**a_3**	**a_4**	Інтервал $[x_{\min}; x_{\max}]$	**Метод обчислення розв'язку**	**Метод обчислення інтегралу**	**Метод наближення функції**	**Метод пошуку екстремуму**
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*
1	0	2	-1	-7	5	[-1; 1]	ітерацій	прямокутників	лінійна інтерполяція	кроковий
2	2	8	6	15	8	[-2; 2]	ділення навпіл	трапецій	інтерполяція Лагранжа	бісекцій
3	3	4	0	3	-5	[-2; 2]	Ньютона	Сімпсона	інтерполяція алгебраїчним поліномом	золотого перетину
4	0	3	-2	10	-5	[-1.5; 3]	ітерацій	трапецій	апроксимація поліномом 2-го ступеня	золотого перетину
5	1	-2	-8	12	-3	[-1; 1.5]	ділення навпіл	Сімпсона	апроксимація поліномом 3-го ступеня	кроковий
6	1	10	-17	21	-2	[-1; 1.5]	Ньютона	прямокутників	лінійна інтерполяція	бісекцій
7	1	3	3	0	-5	[-1; 1.5]	ітерацій	трапецій	інтерполяція Лагранжа	золотого перетину
8	1	3	-2	1	-5	[-1; 1.5]	ділення навпіл	Сімпсона	інтерполяція алгебраїчним поліномом	золотого перетину
9	1	-3	8	0	-9	[-1.25; 1]	Ньютона	Трапецій	апроксимація поліномом 2-го ступеня	кроковий
10	1	2	-2	3	-3	[-1; 1.5]	ітерацій	Сімпсона	апроксимація поліномом 3-го ступеня	бісекцій
11	0	1	0	-5	-3	[-2; 1]	ділення навпіл	трапецій	лінійна інтерполяція	бісекцій
12	1	2	-1	3	-4	[-1.2; 2]	Ньютона	прямокутників	інтерполяція Лагранжа	золотого перетину
13	0	3	0	-6	2	[-1; 2]	ітерацій	трапецій	інтерполяція алгебраїчним поліномом	кроковий

Подовження таблиці 5.1

№	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	Інтервал $[x_{\min}; x_{\max}]$	**Метод обчислення розв'язку**	**Метод обчислення інтегралу**	**Метод наближення функції**	**Метод пошуку екстремуму**
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*
14	1	3	-4	5	-5	[-1; 1.5]	ділення навпіл	Сімпсона	апроксимація поліномом 2-го ступеня	бісекцій
15	0	3	3	0	-15	[-1; 1.5]	Ньютона	прямокутників	апроксимація поліномом 3-го ступеня	кроковий
16	2	20	-11	19	-22	[-0.5; 1.5]	ітерацій	трапецій	лінійна інтерполяція	бісекцій
17	0	2	-1	-7	5	[-0.3; 1.5]	ділення навпіл	Сімпсона	інтерполяція Лагранжа	золотого перетину
18	1	3	-4	-7	5	[-0.5; 1.5]	Ньютона	прямокутників	інтерполяція алгебраїчним поліномом	золотого перетину
19	1	2	-1	1	-1	[-1; 2]	ітерацій	трапецій	апроксимація поліномом 2-го ступеня	кроковий
20	1	2	-3	-4	-5	[-1; 1]	ділення навпіл	прямокутників	апроксимація поліномом 3-го ступеня	бісекцій
21	0	1	-3	-4	1	[-1; 1]	Ньютона	трапецій	лінійна інтерполяція	бісекцій
22	1	1	6	-7	-4	[-1; 1]	ітерацій	Сімпсона	інтерполяція Лагранжа	золотого перетину
23	0	1	-3	1	1	[-0.5; 1]	ділення навпіл	трапецій	інтерполяція алгебраїчним поліномом	кроковий
24	-2	2	-2	3	8	[-1.5; 1]	Ньютона	Сімпсона	апроксимація поліномом 2-го ступеня	бісекцій
25	0	4	0	2	-3	[-1; 2]	ітерацій	прямокутників	апроксимація поліномом 3-го ступеня	золотого перетину

Закінчення таблиці 5.1

№	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	Інтервал $[x_{\min}; x_{\max}]$	**Метод обчислення розв'язку**	**Метод обчислення інтегралу**	**Метод наближення функції**	**Метод пошуку екстремуму**
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*
26	0	4	-4	6	-6	[-0.5; 1.5]	ділення навпіл	трапецій	лінійна інтерполяція	кроковий
27	0	5	0	2	-11	[-0.5; 1]	Ньютона	Сімпсона	інтерполяція Лагранжа	бісекцій
28	1	4	-3	2	-5	[-0.5; 1.3]	ітерацій	Сімпсона	інтерполяц ія алгебраїчним поліномом	бісекцій
29	0	1	3	0	-1	[-2; 2]	ділення навпіл	трапецій	апроксима ція поліномом 2-го ступеня	золотого перетину
30	1	2	-7	6	-4	[-1; 1.5]	Ньютона	Сімпсона	апроксима ція поліномом 3-го ступеня	кроковий

Вимоги щодо оформлення комплексного завдання

1. Комплексне завдання оформлюється в окремому зошиті або на аркушах формату А4, підшитих до швидкозшивача. Комплексне завдання пишуть від руки, але графіки результатів обчислень, які виконано на комп'ютері, можна роздрукувати та вклеїти (або вставити) як рисунки. Сторінки роботи мають бути пронумерованими.
2. Слід заповнювати лише один бік аркуша із залишенням полів задля зауваг викладача.
3. Для *кожної задачі* комплексного завдання треба записати такі розділи:
   умова задачі з індивідуальним завданням;
   короткі теоретичні відомості;
   опис розв'язування задачі на комп'ютері;
   результати обчислень на комп'ютері (після виконання програми на комп'ютері);
   аналіз результатів та висновки.
4. Схеми алгоритмів програм слід виконувати олівцем під лінійку у відповідності до ЄСПД.
5. Наприкінці роботи треба подати список використаної літератури, поставити підпис та дату виконання роботи.

Література

1 **Дьяконов В. П.** MathCad 8 PRO в математике, физике и Internet / В. П. Дьяконов, И. В. Абраменкова. – М. : Нолидж, 1999. – 512 с.
2 **Єщенко А. І.** Основи програмування в математичному пакеті Mathcad / А. І. Єщенко, І. А. Єщенко. – Одеса: УДАЗ, 2000. – 285 с.
3 **Краскевич В. Е.** Численные методы в инженерных исследованиях / В. Е. Краскевич, К. Х. Зеленский, В. И. Гречко. – К. : Вища школа, 1986. – 263 с.
4 **Крячков А. В.** Программирование на С++. Практикум: Учеб.пособие для вузов / А. В. Крячков, И. В. Сухинина, В. К. Томшин. – М. : Горячая линия – Телеком, 2000. – 344 с.
5 **Леонов Ю. Г.** Программирование инженерных задач: Метод. пособие с элементами лабораторного практикума / Ю. Г. Леонов, Н. В. Силкина, О. Д. Шпинова. – Одесса: ОНАС, 2002. – 68 с.
6 **Шаповаленко В. А.** Чисельні методи та моделювання на ЕОМ: Навч. посібник. – Ч. 1. – Модуль 1. / В. А. Шаповаленко, Л. М. Буката, О. Г. Трофименко. – Одеса: ОНАЗ, 2009. – С. 95.
7 **Поддубный Г. В.** Численные методы и их применение в инженерных расчетах: Учеб. пособие. – Ч. 1 / Г. В. Поддубный, Л. И. Соколов. – Одесса: ОЭИС, 1981. – 85 с.
8 **Поддубный Г. В.** Численные методы и их применение в инженерных расчетах: Учеб. пособие. – Ч. 2 / Г. В. Поддубный, Л. И. Соколов. – Одесса: ОЭИС, 1983. – 85 с.
9 **Фельдман Л. П.** Чисельні методи в інформатиці: Підручник / Л. П. Фельдман, А. І. Петренко, О. А. Дмитрієва. – К. : Видавнича група BHV, 2006. – 480 с.

ЗМІСТ