МІНІСТЕРСТВО ТРАНСПОРТУ ТА ЗВ'ЯЗКУ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ДЕПАРТАМЕНТ З ПИТАНЬ ЗВ'ЯЗКУ

ОДЕСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ ЗВ'ЯЗКУ ім. О.С. Попова

Кафедра вищої математики

РОЗРАХУНКОВІ ЗАВДАННЯ З ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

Вступ до курсу вищої математики

Методичні вказівки та варіанти
комплексного індивідуального завдання
для студентів першого курсу
денної форми навчання всіх напрямків

Одеса – 2008

Укладачі: ***доц. Буслаєв А.Г., ст. виклад. Сенча І.А., виклад. Тарасенко І.В.***

Запропоновані методичні вказівки містять варіанти комплексних індивідуальних завдань для студентів першого курсу. Номер індивідуального завдання співпадає з порядковим номером студента у журналі академічної групи.

Запропоновані методичні вказівки можуть бути використані також на практичних заняттях з вищої математики.

Методичний посібник розглянуто і схвалено методичною радою факультету ТКС.

Протокол № 9 від 22 жовтня 2008 р.

Декан факультету ТКС доц. О.В. Онацький

Методичний посібник розглянуто і схвалено на засіданні кафедри вищої математики.

Протокол № 8 від 6 березня 2008 р.

Зав. кафедрою доц. А.Г. Буслаєв

ЗМІСТ

1. АРИФМЕТИКА. АЛГЕБРА

1.1 Арифметичні дії. Дії над комплексними числами

Довідковий матеріал

Форми запису комплексних чисел

Алгебраїчна форма запису	Тригонометрична форма запису	Показникова форма запису
$z = a + bi$	$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$	$z = re^{i\varphi}$

Перехід від алгебраїчної до тригонометричної (показникової) форми запису комплексних чисел

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}\ ; \qquad \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{r} \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{r} \end{cases}$$

Дії над комплексними числами

- в алгебраїчної формі запису:

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i$$

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^{\,2} + b_2^{\,2}} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^{\,2} + b_2^{\,2}} i$$

- в тригонометричної формі запису:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$z_1 / z_2 = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

$$z^n = (r(\cos\phi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right)\right),$$ де $k = 0, 1, 2, n–1$

- в показникової формі запису:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$z^n = r^n e^{in\varphi}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right)},$$ де $k = 0, 1, 2, \ldots, n–1$

<u>Завдання 1.</u> У прикладах, позначених буквами: а) виконати дії над дійсними числами; б) виконати дії над комплексними числами.

№ варіанта	а)	б)
01	$\dfrac{\left(152\frac{3}{4}-148\frac{3}{4}\right)\cdot 0,3}{0,2}$	$\dfrac{(1+i)^2(1-2i)}{3+i}+7i^{15}$
02	$\dfrac{172\frac{5}{6}-170\frac{1}{3}+3\frac{5}{12}}{0,8\cdot 0,25}$	$\dfrac{i\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)}{\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}}$
03	$\dfrac{215\frac{9}{16}-208\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}{0,0001:0,005}$	$\dfrac{\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)(1+i)^5}{i}$
04	$\dfrac{\left(85\frac{7}{30}-83\frac{5}{18}\right):2\frac{2}{3}}{0,04}$	$\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2i}\right)^2\cdot\dfrac{3-i}{2+2i}$
05	$\dfrac{\left(140\frac{7}{30}-138\frac{5}{12}\right):18\frac{1}{6}}{0,002}$	$\dfrac{-\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}}{\cos\frac{13\pi}{12}-i\sin\frac{13\pi}{12}}\cdot i^7$
06	$\dfrac{\left(49\frac{5}{24}-46\frac{7}{20}\right)\cdot 2\frac{1}{3}+0,6}{0,2}$	$\dfrac{(2-3i)^2}{\left(\cos 10^\circ+i\sin 10^\circ\right)^3(5-i)}$
07	$\dfrac{\left(6\frac{3}{5}-3\frac{3}{14}\right)\cdot 5\frac{5}{6}}{(21-1,25):2,5}$	$\dfrac{(1+2i)^3}{i}+i^{19}-i^{20}$
08	$\dfrac{2\frac{5}{8}-\frac{2}{3}\cdot 2\frac{5}{14}}{\left(3\frac{1}{12}+4,375\right):19\frac{8}{9}}$	$\dfrac{\left(-\sqrt{3}+i\right)\left(\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}\right)}{1-i}$
09	$\dfrac{0,134+0,05}{18\frac{1}{6}-1\frac{11}{14}-\frac{2}{15}\cdot 2\frac{6}{7}}$	$\left(\dfrac{\sqrt{3}i+1}{i-1}\right)^6\cdot i^{18}$
10	$\dfrac{\left(68\frac{7}{30}-66\frac{5}{18}\right):6\frac{1}{9}}{0,04}$	$\dfrac{(1+2i)^2}{2+i}+\dfrac{5+12i}{(1-i)^3}$

№ варіанта	а)	б)
11	$\dfrac{(2{,}1-1{,}965):(1{,}2\cdot 0{,}045)}{0{,}00325:0{,}013}$	$\dfrac{\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{i}$
12	$\dfrac{\left(40\frac{7}{30}-38\frac{5}{12}\right):10{,}9}{0{,}008}$	$\dfrac{(1-i)^7}{\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)^5}$
13	$\dfrac{\left(2{,}4+1\frac{5}{7}\right)\cdot 4{,}375}{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}$	$\dfrac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3}$
14	$\dfrac{\left(2{,}75-1\frac{5}{6}\right)\cdot 21}{8\frac{3}{20}-0{,}45}:\dfrac{67}{200}$	$\dfrac{5\left(\cos 100^\circ+i\sin 100^\circ\right)i}{3(\cos 40^\circ-i\sin 40^\circ)}$
15	$\dfrac{\left(6-4\frac{1}{2}\right):0{,}03}{\left(3\frac{1}{20}-2{,}65\right)\cdot 4+\frac{2}{5}}$	$\dfrac{e^{i\frac{\pi}{6}}\left(\sqrt{3}+i\right)^5}{i}$
16	$1{,}7:\dfrac{\left(4{,}5\cdot 1\frac{2}{3}+3{,}75\right)\cdot\frac{7}{135}}{\frac{5}{9}}$	$\left(i\left(1+\cos\frac{6\pi}{5}\right)+\sin\frac{6\pi}{5}\right)^5$
17	$\dfrac{\left(1{,}75:\frac{2}{3}-1{,}75\cdot 1\frac{1}{8}\right):\frac{7}{12}}{\left(\frac{17}{80}-0{,}0325\right):400}$	$\dfrac{(1+i)^9 i}{(1-i)^7}$
18	$\dfrac{3+4{,}2:0{,}1}{\left(1:0{,}3-2\frac{1}{3}\right)\cdot 0{,}3125}$	$\left(\dfrac{\cos\frac{\pi}{18}-i\sin\frac{\pi}{18}}{2+i}\right)^3$
19	$\dfrac{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{0{,}25}}{6-\frac{46}{1+2{,}2\cdot 10}}+\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{(-3+2i)^3}{\left(\cos 12^\circ+i\sin 12^\circ\right)^5 i}$

№ варіанта	а)	б)
20	$6:\frac{1}{3}-0,8:\dfrac{1,5}{\frac{3}{2}\cdot 0,4\cdot\dfrac{50}{1:\frac{1}{2}}}$	$\dfrac{\sin\frac{2\pi}{5}+i\left(1-\cos\frac{2\pi}{5}\right)}{i-1}$
21	$\left(\frac{5}{6}-0,75\right)\cdot\dfrac{20,4\cdot 4,8\cdot 6,5}{22,1\cdot 1,2}$	$\dfrac{(2-i)^3(1-2i)}{2+2i}+5i^{13}$
22	$\dfrac{45\frac{10}{63}-44\frac{25}{84}}{\left(2\frac{1}{3}-1\frac{1}{9}\right):4-\frac{3}{4}}:31$	$\left(\dfrac{i^8+\sqrt{3}i^5}{4}\right)^5$
23	$\dfrac{\left(0,5:1,25+\frac{7}{5}:1\frac{4}{7}-\frac{3}{11}\right)\cdot 3}{\left(1,5+\frac{1}{4}\right):18\frac{1}{3}}$	$\dfrac{\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)(1+i)^3}{i-1}$
24	$\left(4-3\frac{1}{2}\cdot\left(2\frac{1}{7}-1\frac{1}{5}\right)\right):0,16$	$\dfrac{(2i)^7}{\left(-\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^6}$
25	$\left(\dfrac{0,012}{5}+\dfrac{0,04204}{5,4}\right)\cdot 4560-42\frac{1}{3}$	$5e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot 0,2e^{i\frac{\pi}{6}}\left(\cos\frac{5\pi}{12}-i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$
26	$\dfrac{\left(12\frac{1}{6}-6\frac{1}{27}-5\frac{1}{4}\right)\cdot 2\frac{1}{4}+0,373}{0,2}$	$\left(\dfrac{-1+2i}{1-\sqrt{3}i}\right)^2\cdot\dfrac{i^8}{1+2i}$
27	$\dfrac{\left(58\frac{4}{15}-56\frac{7}{24}\right):0,8+2\frac{1}{9}\cdot 0,225}{8\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{5}}$	$\dfrac{(3+2i)^3}{(3-2i)^2-(5+i)^3}$
28	$\dfrac{\left(1\frac{1}{12}+2\frac{5}{32}+\frac{1}{24}\right)\cdot 9\frac{3}{5}+2,13}{0,4}$	$\dfrac{\left(\cos 31^\circ+i\sin 31^\circ\right)^{-10}}{(2-i)^2}+i^{13}$
29	$\dfrac{\left(\frac{5}{8}+2\frac{17}{24}\right):2,5}{\left(1,3+\frac{23}{30}+\frac{4}{11}\right)\cdot\frac{110}{104}}\cdot 0,5$	$\dfrac{e^{-i\frac{\pi}{3}}\left(1+\sqrt{3}i\right)^7}{i}$
30	$\dfrac{\frac{5}{6}-\frac{21}{45}}{1\frac{5}{6}}\cdot\dfrac{1,125+1\frac{3}{4}-\frac{5}{12}}{0,59}$	$\left(\dfrac{\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}}{2i}\right)^3$

1.2. Тотожні перетворення алгебраїчних виразів

Довідковий матеріал

Формули скороченого множення

1. $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$;

2. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$;

3. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;

4. $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.

Властивості степенів з дійсним показником $(a > 0;\ b > 0;\ m,\ n \in R)$

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

2. $a^m : a^n = a^{m-n}$;

3. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$;

4. $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$;

5. $(a^m)^n = a^{mn}$;

6. $a^0 = 1$;

7. $a^n\ b^n = (ab)^n$;

8. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, $a > 0;\ m \in Z;\ n \in N;\ n \geq 2$.

Властивості арифметичних коренів $(a,\ b \geq 0;\ \sqrt[n]{a},\ \sqrt[n]{b} \geq 0;\ n \in N;\ n > 1)$

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;

2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b \neq 0$;

3. $\sqrt[nm]{a^{pm}} = \sqrt[n]{a^p}$;

4. $(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$;

5. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$;

6. $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0; \end{cases}$

7. $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$;

8. $\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}$, $a \geq 0$;

9. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$;

10. $(\sqrt[n]{a})^n = a,\ a \geq 0$.

Завдання 2. У прикладах, позначених буквами а) – б) спростити вираз.

№ варіанта	а) – б)
01	а) $\left(a^2 - b^2 - c^2 + 2bc\right) : \dfrac{a+b-c}{a+b+c}$ б) $\left(\sqrt{ab} - \dfrac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right) : \dfrac{\sqrt[4]{ab} - \sqrt{b}}{a-b}$
02	а) $\dfrac{a^2-1}{n^2+an} \cdot \left(\dfrac{1}{1-n} - 1\right) \cdot \dfrac{a - an^3 - n^4 + n}{1-a^2}$ б) $\left[(a-b)\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}} + a - b\right] \cdot \left[(a-b)\left(\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}} - 1\right)\right]$

№ варіанта	а) – б)
03	а) $\dfrac{a^2-b^2}{a-b}-\dfrac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$ б) $\dfrac{n+2+\sqrt{n^2-4}}{n+2-\sqrt{n^2-4}}+\dfrac{n+2-\sqrt{n^2-4}}{n+2+\sqrt{n^2-4}}$
04	а) $\dfrac{x}{x^2+y^2}-\dfrac{y(x-y)^2}{x^4-y^4}$ б) $\sqrt{\dfrac{x}{x-a^2}}:\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}}-\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^2}}\right)$
05	а) $\dfrac{a^2+a-2}{a^{n+1}-3a^n}\cdot\left[\dfrac{(a+2)^2-a^2}{4a^2-4}-\dfrac{3}{a^2-a}\right]$ б) $\sqrt{\dfrac{(1+a)\sqrt[3]{1+a}}{3a}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{3}}{9+18a^{-1}+9a^{-2}}}$
06	а) $\dfrac{1}{a(a-6)(a-c)}+\dfrac{1}{b(b-a)(b-c)}+\dfrac{1}{c(c-a)(c-b)}$ б) $\dfrac{a}{2}\sqrt[4]{(a+1)(a^2-1)(1+2a+a^2)}\cdot\left(\dfrac{a^2+3a+2}{\sqrt{a-1}}\right)^{-1}$
07	а) $\dfrac{1+(a+x)^{-1}}{1-(a+x)^{-1}}\cdot\left(1-\dfrac{1-(a^2+x^2)}{2ax}\right)$ б) $\left(\dfrac{a-46}{a+(ab)^{\frac{1}{2}}-6b}-\dfrac{a-9b}{a+6(ab)^{\frac{1}{2}}+9b}\right)\cdot\dfrac{b^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{2}}-3b^{\frac{1}{2}}}$
08	а) $\dfrac{x}{ax-2a^2}+\dfrac{2}{x^2+x-2ax-2a}\cdot\left(1+\dfrac{3x+x^2}{3+x}\right)$ б) $\left(2^{\frac{2}{3}}+27y^{\frac{3}{5}}\right):\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}+3y^{\frac{1}{5}}\right]$
09	а) $\dfrac{2a}{a^2-4x^2}+\dfrac{1}{2x^2+6x-ax-3a}\cdot\left(x+\dfrac{3x-6}{x-2}\right)$ б) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+1}{x+x^{\frac{1}{2}}+1}:\dfrac{1}{x^{1,5}-1}$
10	а) $\left(\dfrac{2a+10}{3a-1}+\dfrac{130-a}{1-3a}+\dfrac{30}{a}-3\right)\cdot\dfrac{3a^2+8a^2-3a}{1-\frac{1}{4}a^2}$ б) $\dfrac{x+\sqrt{x^2-4x}}{x-\sqrt{x^2-4x}}-\dfrac{x-\sqrt{x^2-4x}}{x+\sqrt{x^2-4x}}$

№ варіанта	а) – б)
11	а) $\left(\dfrac{x-y}{2y-x}-\dfrac{x^2+y^2+y-2}{x^2-xy-2y^2}\right):\dfrac{4x^4+4y^2y+y^2-4}{x^2+y+xy+x}$ б) $2x+\sqrt{x^2-1}\left(1+\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)-\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}$
12	а) $\dfrac{2}{3}\left[\dfrac{1}{1+(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}})^2}+\dfrac{1}{1+(\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}})^2}\right]$ б) $\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+a}+\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}\right)+\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a}}}{x+\sqrt{x^2+a}}$
13	а) $\dfrac{2x}{x^2-1}:\left(\dfrac{1}{x^2+2x+1}-\dfrac{1}{1-x^2}\right)$ б) $\dfrac{\sqrt{\dfrac{1+a}{1-a}}+\sqrt{\dfrac{1-a}{1+a}}}{\sqrt{\dfrac{1+a}{1-a}}-\sqrt{\dfrac{1-a}{1+a}}}-\dfrac{1}{a}$
14	а) $\left(\dfrac{5}{x-2}-x-2\right)\cdot\dfrac{2-x}{x^2-6x+9}$ б) $\left(\dfrac{1}{b-\sqrt{a}}+\dfrac{1}{b+\sqrt{a}}\right)\div\dfrac{\sqrt[-2]{\dfrac{1}{9}}a^{-2}b^{-1}}{a^{-2}-a^{-1}b^{-2}}$
15	а) $\left(\dfrac{8a}{a+7}-\dfrac{15a}{a^2+14a+49}\right):\dfrac{8a+41}{a^2-49}+\dfrac{7a-49}{a+7}$ б) $\dfrac{(m+x)^{\frac{1}{2}}+(m-x)^{\frac{1}{2}}}{(m+x)^{\frac{1}{2}}-(m+x)^{\frac{1}{2}}},x=\dfrac{2mn}{n^2+1};m>0;0<n<1.$
16	а) $\left(\dfrac{a-b}{a^2+ab}-\dfrac{a}{ab+b^2}\right):\left(\dfrac{b^2}{a^3-ab^2}+\dfrac{1}{a+b}\right)$ б) $\dfrac{b}{a-b}\cdot\sqrt[3]{(a^2-2ab+b)(a^2-b^2)(a+b)}\cdot\dfrac{a^3-b^3}{\sqrt[3]{(a+b)^2}}$

№ варіанта	а) – б)
17	а) $\frac{x^2+5x}{(x-5)^2}:\left(\frac{5}{x+5}+\frac{x^2+25}{x^2-25}-\frac{5}{5-x}\right)$ б) $\sqrt[6]{8x(7+4\sqrt{3})}+\sqrt[3]{2\sqrt{6x}-4\sqrt{2x}}$
18	а) $\frac{a^3+27}{a-1}\cdot\left(\frac{a-3}{a^2-3a+9}+\frac{a+9}{a^3+27}\right):\frac{a^2+a}{a^2-1}$ б) $\sqrt{a+2\sqrt{a-2}-1}+\sqrt{a-2\sqrt{a-2}-1}$
19	а) $\frac{12a-4a^2}{2a+3}+\frac{1}{2a-3}:\left(\frac{4}{4a^2-9}-\frac{6a-9}{8a^3+27}\right)$ б) $t\cdot\frac{1+\frac{2}{\sqrt{t+4}}}{2-\sqrt{t+4}}+\sqrt{t+4}+\frac{4}{\sqrt{t+4}}$
20	а) $\left(\frac{1}{x^2-4x+4}-\frac{1}{4-x^2}\right):\frac{2x}{x^2-4}$ б) $\left(\frac{a^{0,5}+2}{a^{0,5}-2}+\frac{a^{0,5}-2}{a^{0,5}+2}-\frac{16}{a-4}\right)^2$
21	а) $\left(\frac{7}{x-3}-x-3\right)\cdot\frac{3-x}{x^2+8x+16}$ б) $\frac{x-1}{x+x^{\frac{1}{2}}+1}:\frac{x^{0,5}+1}{x^{1,5}-1}+\frac{2}{x^{-0,5}}$
22	а) $\frac{2a^3+6a^2+9{,}5a+1}{a^3-8}+\frac{a^2+1}{8+4a+2a^2}+\frac{2a}{2-a}$ б) $\frac{\sqrt{a-2\sqrt{a-2}-1}}{\sqrt{a-2}-1}+1$
23	а) $\left(\frac{9x}{x-8}+\frac{7x}{x^2-16x+64}\right):\frac{9x-65}{x^2-64}-\frac{8x+64}{x-8}$ б) $\sqrt[n]{y^{\frac{2n}{m-n}}}:\sqrt[m]{y^{\frac{(m-n)^2+4mn}{m^2-n^2}}}$
24	а) $\left(\frac{a^2}{a+b}-\frac{a^3}{a^2+2ab+b^2}\right):\left(\frac{a}{a-b}-\frac{a^2}{a^2-b^2}\right)$ б) $\sqrt[4]{6x\left(5+2\sqrt{6}\right)}\cdot\sqrt{3\sqrt{2x}-2\sqrt{3x}}$

№ варіанта	а) – б)
25	**а)** $\left(\frac{b}{b+6}+\frac{36+b^2}{36-b^2}-\frac{b}{b-6}\right):\frac{6b+b^2}{(6-b)^2}$ **б)** $\frac{4x\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2-1}$
26	**а)** $\left(\frac{2x}{x^3+1}:\frac{1-x}{x^2-x+1}+\frac{2}{x-1}\right)\cdot\frac{x^2-2x+1}{4}:\frac{x-1}{x+1}$ **б)** $\sqrt{b+2\sqrt{b+2}+3}+\sqrt{b-2\sqrt{b+2}+3}$
27	**а)** $\left(\frac{1}{(a-3)^2}-\frac{6}{9-a^2}+\frac{1}{(a+3)^2}\right):\frac{4(2a^2-9)}{81-a^4}-\frac{2a^2}{9-a^2}$ **б)** $\left(\frac{a^{\frac{1}{4}}-4}{a^{\frac{1}{4}}+4}+\frac{a^{\frac{1}{4}}+4}{a^{\frac{1}{4}}-4}-\frac{64}{a^{\frac{1}{2}}-16}\right)^2$
28	**а)** $\frac{3x-1}{4x^2+4x+1}+\frac{8}{4x^2-1}-\frac{3x+1}{4x^2-4x+1}$ **б)** $\frac{\sqrt{(x+2)^2-8x}}{\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}}$
29	**а)** $\left(\frac{6a}{2a+5}-\frac{16a}{4a^2+20a+25}\right):\frac{6a+7}{4a^2-25}+\frac{10a-25}{2a+5}$ **б)** $\sqrt{\frac{2a}{(1+a)\sqrt[3]{1+a}}}\cdot\sqrt[3]{\frac{4+{}^{8}/_{a}+{}^{4}/_{a^2}}{\sqrt{2}}}$
30	**а)** $\left(\frac{9}{a^3-9a}+\frac{1}{a+3}\right):\left(\frac{a-3}{a^2+3a}-\frac{a}{3a+9}\right)$ **б)** $\frac{\sqrt{a-2\sqrt{a+2}+3}}{\sqrt{a+2}-1}+1$

1.3. Алгебраїчні рівняння, нерівності та їх системи

Довідковий матеріал

1. Корені квадратного рівняння знаходяться за формулами:

№ з/п	Вид рівняння	Корні рівняння	Примітка
1	$ax^2+bx+c=0$	$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$, $x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$	$D=b^2-4ac\ge 0$
2	$x^2+2px+q=0$	$x_1=-p-\sqrt{D}$, $x_2=-p+\sqrt{D}$	$D=p^2-q\ge 0$
3	$ax^2+bx=0$	$x_1=0$, $x_2=-\frac{b}{a}$	Завжди має розв'язок
4	$ax^2+c=0$	$x_1=\sqrt{-\frac{c}{a}}$, $x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}}$	$-\frac{c}{a}\ge 0$

2. Квадратний тричлен ax^2+bx+c розкладається на множники $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, де x_1, x_2 - корені квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$.

3. Рівняння виду $a:x=b:c$ розв'язується за основною властивістю пропорції: $a:x=b:c \Leftrightarrow a\cdot c=b\cdot x$

4. Рівняння виду $f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)=0$, $n\in N$ заміняється на рівносильну систему $\left\{\begin{array}{l} f_1(x)=0 \\ f_2(x)=0 \\ \ldots \\ f_n(x)=0 \end{array}\right.$.

5. Рівняння виду $\frac{f(x)}{g(x)}=0$ заміняється на рівносильну систему $\left\{\begin{array}{l} f(x)=0 \\ g(x)\ne 0 \end{array}\right.$.

6. Біквадратне рівняння $ax^4+bx^2+c=0$ приводиться до квадратного рівняння $at^2+bt+c=0$ заміною $x^2=t$; $x^4=t^2$.

7. Системи алгебраїчних рівнянь $\left\{\begin{array}{l} a_{11}x+a_{12}y=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2 \end{array}\right.$ розв'язуються:

<u>А) методом підстановки:</u> з одного із рівнянь системи виражається змінна величина (наприклад, *x*); отриманий вираз підставляється замість цієї величини в інше рівняння системи:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x+a_{12}y=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{b_1-a_{12}y}{a_{11}} \\ a_{21}\dfrac{b_1-a_{12}y}{a_{11}}+a_{22}y=b_2 \end{array}\right..$$

З іншого рівняння системи знаходиться y; знайдене значення підставляється у перше рівняння системи і знаходиться x.

Б) <u>методом алгебраїчного додавання:</u> одне із рівнянь системи перетворюється так, щоб коефіцієнти при змінної величині (наприклад, x) були протилежними числами, після чого рівняння системи додаються:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ -a_{11}x - \dfrac{a_{11}a_{22}y}{a_{21}} = -\dfrac{a_{11}b_2}{a_{21}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{12}y - \dfrac{a_{11}a_{22}y}{a_{21}} = b_1 - \dfrac{a_{11}b_2}{a_{21}} \end{cases}.$$

З іншого рівняння системи знаходиться y; знайдене значення підставляється у перше рівняння системи і знаходиться x.

8. Нерівності та системи нерівностей розв'язують методом інтервалів.

9. Нерівності, що ускладнені модулем, розв'язуються за схемою:

Вид нерівності	Умова	Розв'язок
$\lvert f(x)\rvert > a$	$a > 0$	співпадає із розв'язком сукупності $\left[\begin{array}{l} f(x) > a; \\ f(x) < -a. \end{array}\right.$
$\lvert f(x)\rvert > a$	$a \le 0$	співпадає із областю допустимих значень $f(x)$
$\lvert f(x)\rvert < a$	$a > 0$	співпадає із розв'язком системи $\begin{cases} f(x) < a, \\ f(x) > -a. \end{cases}$
$\lvert f(x)\rvert < a$	$a \le 0$	не має розв'язку

<u>**Завдання 3.**</u> У прикладах, позначених буквами: а) розв'язати рівняння; б) розв'язати нерівність; г) розв'язати систему рівнянь; в) розв'язати систему нерівностей

№ варіанта	**а) - г)**	
01	**а)** $\dfrac{1}{x(x+2)} - \dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{12}$	**б)** $\dfrac{3}{\lvert x+3\rvert - 1} \ge \lvert x+2\rvert$
	в) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{2y}{x} = 1 \\ x^2 - 5xy + 2y^2 = 32 \end{cases}$	**г)** $\begin{cases} (x+3)(x-3) - 4x < x^2 - 7x + 3 \\ \dfrac{5x+3}{2} - 1 \ge 3x \end{cases}$
02	**а)** $\dfrac{21}{x^2 - 4x + 10} - x^2 + 4x = 6$	**б)** $\dfrac{4}{\lvert x-1\rvert - 1} \ge \lvert x-1\rvert$
	в) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 26 \\ xy^2 - x^2y = -6 \end{cases}$	**г)** $\begin{cases} x+3 > 9x+2 \\ \dfrac{2x-1}{6} + \dfrac{x-2}{3} - \dfrac{x+8}{2} < x-1 \end{cases}$

№ варіанта	а) - г)	
03	**а)** $\frac{4}{x^2+4}+\frac{5}{x^2+5}=2$	**б)** $\frac{9}{\lvert x-5\rvert-3}\ge\lvert x-2\rvert$
	в) $\begin{cases}x+y=2\\2x^2-xy=65\end{cases}$	**г)** $\begin{cases}5(x-4)>6(2x-1)+7\\\frac{2x+3}{3}-\frac{x+1}{4}<-1\end{cases}$
04	**а)** $\left(x^2-6x\right)^2-2\left(x-3\right)^2=81$	**б)** $\frac{7}{\lvert x-1\rvert-3}\ge\lvert x+2\rvert$
	в) $\begin{cases}3x-y=5\\3x^2+y^2=13\end{cases}$	**г)** $\begin{cases}3(x+8)\ge4(7-x)\\(x+2)(x-5)\ge(x+3)(x-4)\end{cases}$
05	**а)** $\frac{24}{x^2+2x-8}-\frac{15}{x^2+2x-3}=2$	**б)** $\left\lvert\frac{x-5}{x}\right\rvert\le6$
	в) $\begin{cases}x+y-xy=1\\xy(x+y)=20\end{cases}$	**г)** $\begin{cases}1{,}6(2-x)-0{,}4x<3\\-3(6x-1)-2x>x\end{cases}$
06	**а)** $7\left(x-\frac{1}{2}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=9$	**б)** $\lvert x^2-2x-8\rvert>5$
	в) $\begin{cases}x^2+y^2=5\\xy=2\end{cases}$	**г)** $\begin{cases}3{,}6x<1+5{,}6x\\\frac{2x}{3}-\frac{x-1}{3}<1\end{cases}$
07	**а)** $\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2-5\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2+48\frac{x^2-4}{x^2-1}=0$	**б)** $x+\lvert x-3\rvert>10$
	в) $\begin{cases}3x+2xy=6\\y-2xy=-15\end{cases}$	**г)** $\begin{cases}8x+4\ge10x+1\\\frac{3x-1}{4}-\frac{x+1}{2}\le2x+1\end{cases}$
08	**а)** $\left(x^2+2x\right)^2-\left(x+1\right)^2=55$	**б)** $\left\lvert\frac{x-1}{x+2}\right\rvert\le1$
	в) $\begin{cases}x^2-3xy+2y^2=0\\x^2+y^2=5\end{cases}$	**г)** $\begin{cases}(x+1)(x-3)-(x-4)(x+4)>3\\\frac{2x-5}{3}\ge-3\end{cases}$
09	**а)** $\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+x+2\right)-12=0$	**б)** $\left\lvert\frac{x-3}{x-4}\right\rvert\ge2$
	в) $\begin{cases}x^2+2xy+y^2=1\\x^2-xy=6\end{cases}$	**г)** $\begin{cases}2x^2+5x-3\ge0\\2-x\ge0\end{cases}$
10	**а)** $\left(x^2-5x+7\right)^2-\left(x-2\right)\left(x-3\right)=0$	**б)** $\lvert x+5\rvert>\lvert 3x+4\rvert$
	в) $\begin{cases}x+4y=10\\x^2+xy=-2\end{cases}$	**г)** $\begin{cases}(x+3)(x-5)-6<x(x+9)+1\\3x-0{,}5<2(x-0{,}4)-x\end{cases}$

№ варіанта	а) - г)	
11	а) $x^4-13x^2+36=0$	б) $\left\|x^2-4,5x-2\right\|<7$
	в) $\begin{cases}\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=2,5\\ 2x-3y=3\end{cases}$	г) $\begin{cases}(x+8)(x-1)-x(x+5)\le 7\\ \frac{x+1}{6}-x\le 6\end{cases}$
12	а) $\frac{9-x}{x-4}=\frac{5}{x-4}-3$	б) $\left\|x^2+x-2\right\|<x$
	в) $\begin{cases}x^3+y^3=7\\ x^2-xy+y^2=7\end{cases}$	г) $\begin{cases}3x-7\le 5x-3\\ x-\frac{x-1}{2}-\frac{x+3}{4}<2\end{cases}$
13	а) $\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}=\frac{7}{3}\cdot\frac{x+1}{x-1}$	б) $2\left\|x+1\right\|>x+4$
	в) $\begin{cases}x^2+10xy+25y^2=9\\ x-5y=7\end{cases}$	г) $\begin{cases}(x+1)(x-8)-5x\ge(x+9)(x-9)+1\\ \frac{3x+5}{2}-2\ge 2x\end{cases}$
14	а) $\frac{x+1}{2(x-1)}=\frac{9}{2(x+4)}+\frac{1}{x-1}$	б) $3\left\|x-1\right\|\le x+3$
	в) $\begin{cases}x+y-xy=1\\ x+y+xy=9\end{cases}$	г) $\begin{cases}(x+1)(x^2-x+1)-x(x^2+4)\ge 9\\ \frac{x-3}{5}<\frac{x+5}{3}\end{cases}$
15	а) $\frac{x^2}{x^2-4}+\frac{x+1}{2(x+4)}=\frac{1}{2-x}-\frac{1}{x+2}$	б) $3\left\|x+1\right\|\ge x+5$
	в) $\begin{cases}x^2+y^2=10\\ xy=3\end{cases}$	г) $\begin{cases}(x+11)^2\le x^2+12x+221\\ \frac{6x+1}{6}-\frac{5x+4}{4}\ge 2\end{cases}$
16	а) $\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-4}=2\sqrt{x}$	б) $4\left\|x+2\right\|<2x+10$
	в) $\begin{cases}\frac{x}{y}+\frac{6y}{x}=5\\ x^2+4xy-3y^2=18\end{cases}$	г) $\begin{cases}(x+2)(x-2)-x<x^2-5x+8\\ \frac{3x+5}{2}-2\ge 2x\end{cases}$
17	а) $\sqrt{x+1}=8-\sqrt{3x+1}$	б) $\left\|\frac{3x+1}{x-3}\right\|\le 3$
	в) $\begin{cases}x^3+y^3=9\\ x^2y+xy^2=6\end{cases}$	г) $\begin{cases}34-7x>13-3x\\ \frac{4x+7}{8}-\frac{3x+4}{4}+\frac{x-3}{2}<2x-1\end{cases}$
18	а) $\sqrt{17+x}-\sqrt{17-x}=2$	б) $\frac{\left\|2x-1\right\|}{x^2-x-2}\le\frac{1}{2}$
	в) $\begin{cases}x-y=4\\ 4x^2-xy=39\end{cases}$	г) $\begin{cases}5(x-3)+11>7(x+3)\\ \frac{2x-1}{4}-\frac{x+3}{8}<-4\end{cases}$

№ варіанта	а) - г)	
19	а) $\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}=2$	б) $\left\|x^2-3x-8\right\|>x-4$
	в) $\begin{cases}4x-y=6\\4x^2+y^2=8\end{cases}$	г) $\begin{cases}2(x+10)\ge 3(8-x)\\(x+3)(x-6)\ge(x+4)(x-5)\end{cases}$
20	а) $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a+2x}=0$	б) $\left\|3x-1>x^2-5x\right\|$
	в) $\begin{cases}xy+x+y=11\\xy(x+y)=30\end{cases}$	г) $\begin{cases}-7(2x-1)+3x-5>x\\0{,}3(x-2)-0{,}7x<-0{,}2\end{cases}$
21	а) $1-\frac{2b}{x-a}=\frac{a^2-b^2}{a^2+x^2-2ax}$	б) $\left\|\frac{4x}{3+2x-x^2}\right\|<1$
	в) $\begin{cases}x^2+y^2=20\\xy=8\end{cases}$	г) $\begin{cases}4{,}2x<2{,}2x+5\\\frac{6x}{5}-\frac{3x+1}{2}<1\end{cases}$
22	а) $\sqrt{y+2}-\sqrt{y-6}=2$	б) $\left\|\frac{x^2-2x-6}{x^2-3x+2}\right\|<3$
	в) $\begin{cases}3xy+2x=-4\\3xy+y=-8\end{cases}$	г) $\begin{cases}3x+14\ge 4-x\\\frac{5x-1}{4}-\frac{x-1}{2}\ge 3x-2\end{cases}$
23	а) $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-2}=7$	б) $\left\|\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right\|\le 1$
	в) $\begin{cases}x^2-4xy+3y^2=0\\x^2+y^2=8\end{cases}$	г) $\begin{cases}(x+2)(x-4)-(x-5)(x+5)>11\\\frac{3x-4}{5}\ge -2\end{cases}$
24	а) $\sqrt{3x-2}=2\sqrt{x+2}-2$	б) $x^2+4\ge\left\|3x+2\right\|-7$
	в) $\begin{cases}x^2-2xy+y^2=4\\x^2+xy=4\end{cases}$	г) $\begin{cases}2x^2-11x-6\ge 0\\x+4\ge 0\end{cases}$
25	а) $x^2+11+\sqrt{x^2+11}=42$	б) $3x^2-\left\|x-3\right\|>9x-2$
	в) $\begin{cases}x+3y=10\\x^2-xy=8\end{cases}$	г) $\begin{cases}(x+3)(x-1)+5>x(x-2)-14\\2(x+2{,}2)+x<-2x-2{,}1\end{cases}$
26	а) $\sqrt{a+x}-\sqrt[3]{a+x}=0$	б) $x^2-\left\|5x-3\right\|-x<2$
	в) $\begin{cases}\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=-\frac{8}{3}\\4y-3x=13\end{cases}$	г) $\begin{cases}(x+6)(x-1)-x(x+3)\le 17\\\frac{x+2}{4}-x\le 5\end{cases}$
27	а) $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=12$	б) $\left\|x^3-1\right\|>1-x$
	в) $\begin{cases}x^3-y^3=28\\x^2+xy+y^2=7\end{cases}$	г) $\begin{cases}2x-9\le 6x+3\\x-\frac{x+1}{3}-\frac{x-2}{6}<2\end{cases}$

№ варіанта	а) - г)	
28	**а)** $\sqrt{x+a}=a-\sqrt{x}$	**б)** $\lvert x-2\rvert+\lvert x-3\rvert \ge \lvert x-4\rvert$
	в) $\begin{cases} x^2+12xy+36y^2=64 \\ x-6y=6 \end{cases}$	**г)** $\begin{cases} (x+2)(x-6)-2x \ge (x+7)(x-7)+37 \\ \dfrac{15x-4}{4} > 3x-2 \end{cases}$
29	**а)** $\left(1+x^2\right)^2=4x\left(1-x^2\right)$	**б)** $x^2-3\cdot\lvert x-1\rvert>1$
	в) $\begin{cases} x+y-xy=1 \\ x+y+xy=11 \end{cases}$	**г)** $\begin{cases} (x-1)(x^2+x+1)-x(x^2+5) \ge 4 \\ \dfrac{x-2}{7} < \dfrac{x+1}{4} \end{cases}$
30	**а)** $\sqrt{x-2+2\sqrt{x+6}}=4$	**б)** $\lvert x+2\rvert+\lvert x+3\rvert \ge \lvert x+4\rvert$
	в) $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ xy=6 \end{cases}$	**г)** $\begin{cases} (x-12)^2 \ge x^2-36x+120 \\ \dfrac{2x+3}{6}-\dfrac{4x-9}{9} \le 1 \end{cases}$

1.4. Арифметична і геометрична прогресії

Довідковий матеріал

1. Арифметична прогресія (a_1 – перший член; d – різність; n – кількість членів; a_n – n-ий член; S_n – сума перших n членів):

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

$$S_n = \frac{a_1+a_n}{2}\cdot n = \frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n$$

$$a_k = \frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}, \quad k = 2, 3, \ldots$$

$$a_k + a_m = a_p + a_q, \quad \text{де } k+m = p+q$$

2. Геометрична прогресія (b_1 – перший член; q – знаменник $(q \ne 0)$; n – кількість членів; b_n – n-ий член $(b_n \ne 0)$; S_n – сума перших n членів; S – сума нескінченої геометричної прогресії ($|q| < 1$)):

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

$$S_n = b_1\frac{1-q^n}{1-q} \quad (q \ne 1)$$

$$b_k^2 = b_{k-1}\cdot b_{k+1}, \quad k = 2, 3, \ldots$$

$$b_k b_m = b_p b_q, \quad \text{де } k+m = p+q$$

$$S = \frac{b_1}{1-q}, \quad |q| < 1$$

<u>Завдання 4.</u> У прикладах, помічених буквами а) – б), відповісти на питання.

№ варіанта	а) – б)
01	**а)** Скільки додатних членів містить арифметична прогресія 40; 37; 34…?
	б) При якому значенні x числа $2x$-1, x+3, x+15 будуть послідовними членами геометричної прогресії? Знайдіть ці числа.
02	**а)** Знайдіть суму всіх від'ємних членів арифметичної прогресії -6,2; -5,9; -5,6;…
	б) Знайдіть перший член і знаменник геометричної прогресії (b_n), якщо $b_1+b_4=27$ та $b_2-b_3+b_4=18$.
03	**а)** Сума n перших членів арифметичної прогресії обчислюється за формулою $S_n=6n-n^2$. Знайдіть шостий член цій прогресії.
	б) Знайдіть суму всіх натуральних чисел, що менші 1000 та кратні 7.
04	**а)** Сума восьми перших членів арифметичної прогресії дорівнює сумі її перших одинадцяти членів. Знайдіть суму перших дев'ятнадцяти членів прогресії.
	б) Між числами 3 та 96 вставте чотири числа так, щоб вони сумісно з даними числами утворювали геометричну прогресію.
05	**а)** Знайдіть двадцять перший член арифметичної прогресії 2,2; 2,5; 2,8;…
	б) Знайдіть суму п'яти перших членів геометричної прогресії (b_n), якщо $b_3=18$ та $q=3$.
06	**а)** Знайдіть суму десяти перших членів арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_6=45$ та $a_{14}=-43$.
	б) Сума другого та третього членів геометричної прогресії дорівнює 30, а різність четвертого і другого – 90. Знайдіть п'ятий член прогресії.
07	**а)** Перший член арифметичної прогресії дорівнює -5, а різність дорівнює 6. Скільки перший членів прогресії треба взяти, щоб їх сума дорівнювала 1040?
	б) Знайдіть шостий член геометричної прогресії (b_n), якщо $b_1=4$ та $b_2=12$.
08	**а)** Перший член арифметичної прогресії дорівнює -3, а її різність дорівнює 4. Знайдіть номер члена прогресії, що дорівнює 17.
	б) Між числами 2,5 та 20 вставте два числа так, щоб вони сумісно з даними числами утворювали геометричну прогресію.
09	**а)** Знайдіть суму п'ятнадцяти перших членів арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_3=-5$ та $a_6=2,2$.
	б) Знайдіть суму всіх натуральних чисел, що менші 250 та кратні 6.

10	**а)** Знайдіть суму двадцяти перших членів арифметичної прогресії (a_n), якщо a_5=-0,8 та a_{11}=-5.
	б) Знайдіть суму нескінченої геометричної прогресії (b_n), якщо b_2-b_4=1,5 та b_1-b_3=3.
11	**а)** Знайти різність арифметичної прогресії, перший член якої дорівнює 10, а сума її перших 14-ти членів дорівнює 1050.
	б) Знайти суму всіх трьохзначних чисел, що кратні 9.
12	**а)** Чи є число 164 членом арифметичної прогресії 3; 10; 17;…? Якщо так, вкажіть його номер.
	б) Знайдіть суму 5-ти перших членів геометричної прогресії (b_n), якщо b_1=12 та b_6=324.
13	**а)** Сума n перших членів арифметичної прогресії обчислюється за формулою $S_n= 4n^2-3n$. Знайдіть три перших члени цій прогресії.
	б) Знайдіть перший член і знаменник геометричної прогресії (b_n), якщо b_7+b_4=756 та $b_5-b_6+b_7$=567.
14	**а)** Знайдіть кількість членів арифметичної прогресії, якщо сума всіх її членів дорівнює 112, добуток другого члена на різність дорівнює 30, сума третього і п'ятого членів дорівнює 32.
	б) При якому значенні x числа $3x$-2, x+2, x+8 будуть послідовними членами геометричної прогресії? Знайдіть ці числа.
15	**а)** Сума трьох чисел, що утворюють арифметичну прогресію, дорівнює 2, сума квадратів тих же чисел дорівнює 14/9. Знайдіть ці числа.
	б) Між числами 3 та 48 вставте три числа так, щоб вони сумісно з даними числами утворювали геометричну прогресію.
16	**а)** Скільки додатних членів містить арифметична прогресія 42; 38; 34…?
	б) При якому значенні x числа $2x$-3, x-4, x+2 будуть послідовними членами геометричної прогресії? Знайдіть ці числа.
17	**а)** Знайдіть суму всіх додатних членів арифметичної прогресії 4,6; 4,2; 3,8;…
	б) Знайдіть перший член і знаменник геометричної прогресії (b_n), якщо b_4-b_1=-9 та $b_2+b_3+b_4$=-6.
18	**а)** Сума n перших членів арифметичної прогресії обчислюється за формулою $S_n=3n+n^2$. Знайдіть шостий член цій прогресії.
	б) Знайдіть суму всіх натуральних чисел, що менші 700 та кратні 8.

19	**а)** Сума п'яти перших членів арифметичної прогресії дорівнює сумі її перших дев'яти членів. Знайдіть суму перших чотирнадцяти членів прогресії.
	б) Між числами 7 та 224 вставте чотири числа так, щоб вони сумісно з даними числами утворювали геометричну прогресію.
20	**а)** Знайдіть тридцять перший член арифметичної прогресії 1,8; 2; 2,2;…
	б) Знайдіть суму шести перших членів геометричної прогресії (b_n), якщо b_4=24 та q=-2.
21	**а)** Знайдіть суму десяти перших членів арифметичної прогресії (a_n), якщо a_5=14 та a_8=23.
	б) Різність четвертого та другого членів геометричної прогресії дорівнює 30, а різність четвертого і третього – 24. Знайдіть п'ятий член прогресії.
22	**а)** Перший член арифметичної прогресії дорівнює 12, а різність дорівнює -2. Скільки перший членів прогресії треба взяти, щоб їх сума дорівнювала–264?
	б) Знайдіть п'ятий член геометричної прогресії (b_n), якщо b_1=3 та b_2=15.
23	**а)** Перший член арифметичної прогресії дорівнює - 6, а її різність дорівнює 3. Знайдіть номер члена прогресії, що дорівнює 15.
	б) Між числами 8 та 27 вставте два числа так, щоб вони сумісно з даними числами утворювали геометричну прогресію.
24	**а)** Знайдіть суму десяти перших членів арифметичної прогресії (a_n), якщо a_4=-6 та a_7=2,4.
	б) Знайдіть суму всіх натуральних чисел, що менші 220 та кратні 8.
25	**а)** Знайдіть суму 16-ти перших членів арифметичної прогресії (a_n), якщо a_6=1 та a_9=2,8.
	б) Знайдіть суму нескінченої геометричної прогресії (b_n), якщо b_2+b_4=20/3 та b_1+b_3=20.
26	**а)** Знайти перший член арифметичної прогресії, різність якої дорівнює 15, а сума її перших 13-ти членів дорівнює 1326.
	б) Знайти суму всіх трьохзначних чисел, що кратні 7.
27	**а)** Чи є число 214 членом арифметичної прогресії 6; 14; 22;…? Якщо так, вкажіть його номер.
	б) Знайдіть суму 7-и перших членів геометричної прогресії (b_n), якщо b_4=6 та b_9=192.

28	**а)** Сума n перших членів арифметичної прогресії обчислюється за формулою $S_n= 3n^2+5n$. Знайдіть три перших члени цій прогресії.
	б) Знайдіть перший член і знаменник геометричної прогресії (b_n), якщо b_2-b_5=78 та $b_3+b_4+b_5$=-117.
29	**а)** Сума першого і п'ятого членів арифметичної прогресії дорівнює 5/3, а добуток третього і четвертого дорівнює 65/72. Знайдіть суму перших 17-ти членів прогресії.
	б) При якому значенні x числа x-7, x+5, 3x+1 будуть послідовними членами геометричної прогресії? Знайдіть ці числа.
30	**а)** Знайдіть три перших члена арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_1+a_2+a_3$=-12 та $a_1a_3a_5$=80.
	б) Між числами 2 та 162 вставте три числа так, щоб вони сумісно з даними числами утворювали геометричну прогресію.

1.5. Показникові та логарифмічні рівняння і нерівності

Довідковий матеріал

Властивості показникової функції

$$y = a^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

1. Область визначення функції – множина $\boldsymbol{R}$ всіх дійсних чисел.
2. Область значень функції – множина $\boldsymbol{R}_+$ всіх додатних дійсних чисел: $a^x > 0$ для будь-якого дійсного значення x.
3. При $a > 1$ функція зростає, тобто якщо $x_1 < x_2$, тоді $a^{x_1} < a^{x_2}$. При $0 < a < 1$ функція спадає, тобто якщо $x_1 < x_2$, тоді $a^{x_1} > a^{x_2}$.
4. Якщо $a^{x_1} = a^{x_2}$, тоді $x_1 = x_2$.

Властивості логарифмічної функції

$$y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$$

1. Область визначення функції – множина $\boldsymbol{R}_+$ всіх додатних дійсних чисел.
2. Область значень функції – множина $\boldsymbol{R}$ всіх дійсних чисел.
3. При $a > 1$ функція зростає, тобто якщо $0 < x_1 < x_2$, тоді $\log_a x_1 < \log_a x_2$. При $0 < a < 1$ функція спадає, тобто якщо $0 < x_1 < x_2$, тоді $\log_a x_1 > \log_a x_2$.

Властивості логарифмів

1. Якщо $x > 0$, тоді $x = a^{\log_a x}$ (основна логарифмічна тотожність).
2. $\log_a a = 1$.
3. $\log_a 1 = 0$.

4. Якщо $x_1 > 0, x_2 > 0$, тоді $\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$;

$$\log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a x_1 - \log_a x_2.$$

5. Якщо $x > 0$, тоді $\log_a x^p = p\log_a x$ ($p \in R$).

6. Якщо $x > 0$, тоді $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$, зокрема:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \text{ або } \log_a b \cdot \log_b a = 1;$$

$$\log_a b = \log_{a^p} b^p = p\log_{a^p} b = \frac{1}{p}\log_a b^p \ \left(p \in R,\ p \neq 1\right).$$

<u>Розв'язання показникових та логарифмічних рівнянь і нерівностей</u>

1. Показникове рівняння $a^{f(x)} = b^{g(x)}$ ($a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$) є рівносильним рівнянню $f(x)\log_c a = g(x)\log_c b$, ($c > 0, c \neq 1$), зокрема рівняння $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ є рівносильним рівнянню $f(x) = g(x)$.

2. Коренями рівняння $\left(u(x)\right)^{f(x)} = (u(x))^{g(x)}$ вважаються тільки розв'язки змішаної системи $\begin{cases} u(x) > 0 \\ u(x) \neq 1 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$ та ті значення *x*, для яких $u(x) = 1$.

3. Логарифмічне рівняння $\log_a f(x) = b$ є рівносильним рівнянню $f(x) = a^b$.

4. Логарифмічне рівняння $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ $(a > 0, a \neq 1)$ є рівносильним кожній із таких систем: $\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$ або $\begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$.

5. Рівняння $\log_a f(x) + \log_a g(x) = \log_a u(x)$ приводиться до рівняння $\log_a(f(x) \cdot g(x)) = \log_a u(x)$.

6. Рівняння $\log_a f(x) - \log_a g(x) = \log_a u(x)$ приводиться до рівняння $\log_a \dfrac{f(x)}{g(x)} = \log_a u(x)$.

7. Рівняння $p\log_a f(x) = \log_a u(x)$ приводиться до рівняння $\log_a (f(x))^p = \log_a u(x)$.

Примітка: 1. У пунктах 5 – 7 із знайдених коренів потрібно включити у відповідь такі, для яких $f(x) > 0, g(x) > 0, u(x) > 0$, або перевірити кожен із коренів підстановкою у початкове рівняння.

2. При розв'язанні рівнянь з використанням вказівок пунктів 5 – 7 виникає також небезпека втрати їх коренів, тому потрібно користуватись вказаними формулами у такому вигляді:

$$\log_a(f(x) \cdot g(x)) = \log_a |f(x)| + \log_a |g(x)|$$

$$\log_a \frac{f(x)}{g(x)} = \log_a |f(x)| - \log_a |g(x)|$$

$$\log_a (f(x))^p = p \log_a |f(x)| \, (p - \text{парне}) .$$

8. Нерівність $a^{f(x)} > b^{g(x)}$, ($\geq$, $<$, $\leq$) приводиться до нерівності $f(x) > g(x) \cdot \log_a b$ (при $a > 1$) або $f(x) < g(x) \cdot \log_a b$ (при $0 < a < 1$).

9. Якщо $a > 1$, тоді нерівність $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, ($\geq$, $<$, $\leq$) є рівносильною системі $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$. Якщо $0 < a < 1$, тоді ця нерівність є рівносильною системі $\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$.

10. Нерівність $\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x)$ є рівносильною сукупності систем:

$$\begin{cases} h(x) > 1, \\ f(x) > g(x), \\ g(x) > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \mathrm{h(x)} > 0, \\ \mathrm{h(x)} < 1, \\ \mathrm{f(x)} < \mathrm{g(x)}, \\ \mathrm{f(x)} > 0. \end{cases}.$$

<u>**Завдання 5.**</u> У прикладах, позначених буквами: а) – б) розв'язати рівняння; в) – г) розв'язати нерівність.

№ варіанта	а) – г)	
01	**а)** $6^{2x+4} = 3^{3x} \cdot 2^{2x+8}$	**в)** $(0{,}3)^{\frac{x^2-x-12}{x}} \geq 1$
	б) $2 - x + 3\log_5 2 = \log_5\left(3^x - 5^{2x}\right)$	**г)** $\log_{0,3} \dfrac{1+2x}{1+x} > 1$
02	**а)** $\sqrt{3^x} \cdot \sqrt{5^x} = 225$	**в)** $7^{-x} - 3 \cdot 7^{x+1} > 4$
	б) $\log_5\left(2 + \log_3(3+x)\right) = 0$	**г)** $\log_{0,2}\left(x^2 - 2x - 3\right) \geq -1$
03	**а)** $2^{3x} \cdot 5^x = 1600$	**в)** $4^x - 6 \cdot 2^{x-1} \geq 4$
	б) $\lg(5-x) = \frac{1}{3}\lg\left(35 - x^3\right) = 0$	**г)** $\log_{0,5} \log_2 \log_9 (x-1) > 0$
04	**а)** $9^{3-5x} \cdot 7^{5x-3} = 1$	**в)** $5^{2x+1} + 4 \cdot 5^x - 1 \geq 0$
	б) $\log_3\left(3^x - 8\right) = 2 - x$	**г)** $\log_3^2 x - 3\log_3 x > -2$
05	**а)** $3^{2x-1} \cdot 5^{3x+2} = \frac{9}{5} \cdot 5^{2x} \cdot 3^{3x}$	**в)** $2^{x-1} + 2^{x-2} - 3 \cdot 2^{x-3} \geq 3 \cdot 4^{\frac{2}{x}}$
	б) $\log_{\sqrt{5}}\left(4^x - 6\right) - \log_{\sqrt{5}}\left(2^x - 2\right) = 2$	**г)** $\log_{0,1}(x+1) > \log_{0,1}(5-x)$

06	**а)** $3\cdot 4^x+\frac{1}{3}9^{x+2}=6\cdot 4^{x+1}-\frac{1}{2}9^{x+1}$	**в)** $(0{,}5)^{\frac{x^2-x-2}{x}}\le 1$
	б) $\lg\left(3x^2+12x+19\right)-\lg\left(3x+4\right)=1$	**г)** $\log_{0,1}\left(x^2-x-2\right)\ge\log_{0,1}(10-2x)$
07	**а)** $0{,}6^x\cdot\left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12}=\left(\frac{27}{125}\right)^3$	**в)** $9^x-3^x\le 6$
	б) $\log_4\log_3\log_2 x=0$	**г)** $\log_{0,3}\left(2x^2-9x+4\right)\ge 2\log_{0,3}(x+2)$
08	**а)** $4^{\sqrt{x^2-2}+x}-5\cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}}=6$	**в)** $4\cdot(0{,}5)^{2x}-33\cdot(0{,}5)^x+8\le 0$
	б) $\log_4\left(2\cdot\log_3\left(1+\log_2\left(1+3\log_2 x\right)\right)\right)=\frac{1}{2}$	**г)** $\log_{\frac{1}{3}} x>\log_x 3-\frac{5}{2}$
09	**а)** $2^{x+1}+3\cdot 2^{x-3}=76$	**в)** $3\cdot 2^x+5^{x+1}\ge 3\cdot 5^x+2^{x+3}$
	б) $\log_2(x+14)+\log_2(x+2)=6$	**г)** $\log_2 x+\log_2(x-1)\le 1$
10	**а)** $3^{1-x}-3^{1+x}+9^x+9^{-x}=6$	**в)** $2^{9x-x^3}\ge 1$
	б) $\log_{16}x+\log_4 x+\log_2 x=7$	**г)** $\log_{0,4}x+\log_{0,4}(x-1)\ge\log_{0,4}(x+3)$
11	**а)** $4^{\sqrt{3x^2-2x}+1}+2=9\cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}}$	**в)** $(0{,}3)^{\frac{x^2+2x-3}{x}}\ge 1$
	б) $\log_a x-\log_{a^2}x+\log_{a^4}x=\frac{3}{4}$	**г)** $(3-2x)\log_{0,1}x<0$
12	**а)** $3\sqrt[x]{81}-10\cdot\sqrt[x]{9}+3=0$	**в)** $2^x+2^{1-x}\le 3$
	б) $x^{\frac{\lg x+7}{4}}=10^{\lg x+1}$	**г)** $\lg^2 x+\lg x^3+2\ge 0$
13	**а)** $64^{\frac{1}{x}}-2^{3+\frac{3}{x}}+12=0$	**в)** $2^{4x+1}-9\cdot 4^x+4\le 0$
	б) $\log_2\left(9-2^x\right)=3-x$	**г)** $\log^2_{0,5}(-x)-0{,}5\log_{0,5}x^4\le 3$
14	**а)** $6\cdot 4^x-13\cdot 6^x+6\cdot 9^x=0$	**в)** $2{,}5^{3\sqrt{x}+1}\ge\left(\frac{2}{5}\right)^{\sqrt{x}-1}$
	б) $\lg 2+\lg\left(4^{x-2}+9\right)=1+\lg\left(2^{x-2}+1\right)$	**г)** $\log_{x^2-6x+8}(x-4)>0$
15	**а)** $8^x+18^x=2\cdot 27^x$	**в)** $8\cdot(0{,}5)^{2x}-17\cdot(0{,}5)^x+2\le 0$
	б) $4-\lg x=3\sqrt{\lg x}$	**г)** $\log_{x+3}\frac{x-1}{x+2}\le\log_{x+3}2$

16	**а)** $16^x-5\cdot 8^x+64^x=0$	**в)** $2^{\frac{x^2-4}{x}}\le 0{,}125$
	б) $\lg^3 x-\lg^2 x-6\lg x=0$	**г)** $\log_{0,5}\frac{2x-1}{3x+1}\ge 1$
17	**а)** $27^x+12^x=2\cdot 8^x$	**в)** $2^{2x+2}-\frac{3}{4}\cdot 2^{x+2}\le 1$
	б) $2\log_3(x-2)+\log_3(x-4)^2=0$	**г)** $\log_5\left(x^2+2x-3\right)\le 1$
18	**а)** $3\cdot 16^x+36^x=2\cdot 81^x$	**в)** $9^x-6\cdot 3^{x-1}\le 3$
	б) $\lg\left(x(x+9)+\lg\frac{x+9}{x}\right)=0$	**г)** $\log_2\log_{\frac{1}{3}}\log_5 x>0$
19	**а)** $6\cdot\sqrt[x]{9}-13\cdot\sqrt[x]{6}+6\sqrt[x]{4}=0$	**в)** $3^{2x+1}+2\cdot 3^x-1\ge 0$
	б) $\log_2\left(2x^2-2\right)=\log_2(5x-4)$	**г)** $\log_5^2 x-\log_5 x>2$
20	**а)** $2^{3x-3}-5+6\cdot 2^{3-3x}=0$	**в)** $(0{,}5)^{\frac{x^2-10}{x}}\ge 8$
	б) $\log_7(x+2)=6-x$	**г)** $\log_{0,5}(2x-4)<\log_{0,5}(x+1)$
21	**а)** $5^{x-1}+5\cdot 0{,}2^{x-2}=36$	**в)** $4^x-2^x\ge 2$
	б) $5^{\lg x}-3^{\lg x-1}=3^{\lg x+1}-5^{\lg x-1}$	**г)** $\log_2\left(x^2+x-2\right)\le\log_2(2x+10)$
22	**а)** $10^{\frac{2}{x}}+25^{\frac{1}{x}}=4{,}25\cdot 50^{\frac{1}{x}}$	**в)** $3^{x+3}+3^{x+2}-2\cdot 3^{x+1}\le 10\cdot 9^{\frac{1}{x}}$
	б) $\lg\left(64\sqrt[24]{2^{x^2-40x}}\right)=0$	**г)** $\log_{0,5}\left(2x^2+3x+1\right)\ge 2\log_{0,5}(1-x)$
23	**а)** $5^{1+3x^3}-5^{1-x^3}=24$	**в)** $5\cdot(0{,}2)^{2x}-26\cdot(0{,}2)^x+5\le 0$
	б) $\log_a y+\log_a(y+5)+\log_a 0{,}02=0$	**г)** $\log_3 x+\log_x 9>2$
24	**а)** $7^{6-x}=x+2$	**в)** $7\cdot 2^{2x}+2^{2x+1}\le 3^{2x+1}+3^{2x}$
	б) $\log_x\sqrt{5}+\log_x(5x)-2{,}25=\left(\log_x\sqrt{5}\right)^2$	**г)** $\log_{0,5} x+\log_{0,5}(x+1)\ge 1$
25	**а)** $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7}=\left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$	**в)** $0{,}4^{x^3-x^2-20x}<1$
	б) $\log_x\left(5^{x^2}\right)\cdot\log_5^2 x=1$	**г)** $\log_{0,3} x+\log_{0,3}(x+1)\ge\log_{0,3}(8-x)$
26	**а)** $7\cdot 3^{x+1}-5^{x+2}=3^{x+4}-5^{x+3}$	**в)** $(0{,}5)^{4x-2}-9\cdot(0{,}25)^x+2\le 0$
	б) $\log_4(x+2)\cdot\log_x 2=1$	**г)** $(3x-6)\log_{0,5} x>0$
27	**а)** $0{,}5^{x^2}\cdot 2^{2x+2}=64^{-1}$	**в)** $(0{,}7)^{\frac{x^2+x-6}{x}}\le 1$
	б) $\log_4\left(2x^2+x+1\right)-\log_2(2x-1)=1$	**г)** $\lg^2 x+\lg x^2\ge 3$

28	**а)** $2\cdot 4^{2x}-17\cdot 4^{x}+8=0$	**в)** $4^{x}+4^{1-x}\le 5$
	б) $\log_{x+1}\left(x^{2}+x-6\right)^{2}=4$	**г)** $2\log_{0,2}^{2}(-x)-\log_{0,2}x^{2}<4$
29	**а)** $5\left(\frac{1}{25}\right)^{\sin^{2}x}+4\cdot 5^{\cos 2x}=25^{\frac{1}{2}\sin 2x}$	**а)** $2{,}56^{\sqrt{x}-1}\ge\left(\frac{5}{8}\right)^{4\sqrt{x}+1}$
	б) $\lg\frac{x-3}{\sqrt{23-2x}}=\lg 1$	**б)** $\log_{x-2}(x^{2}-8x+15)>0$
30	**а)** $5^{4x-6}=25^{3x-4}$	**в)** $4\cdot(0{,}5)^{2x}-17\cdot(0{,}5)^{x}+4\le 0$
	б) $2\cdot\log_{2}\log_{2}x+\log_{\frac{1}{2}}\log_{2}\left(2\sqrt{2}x\right)=1$	**г)** $\log_{x+4}\frac{x-2}{x+3}\le\log_{x+4}2$

2. ТРИГОНОМЕТРІЯ

2.1. Тотожні перетворення тригонометричних виразів

Довідковий матеріал

Значення тригонометричних функцій

Функції	Аргумент α							
	0	π/6	π/4	π/3	π/2	π	3π/2	2π
sin α	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	–1	0
cos α	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	–1	0	1
tg α	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0
ctg α	–	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	0	–	0	–

Формули зведення

Функции	Аргумент β			
	$\frac{\pi}{2} \pm \alpha$	$\pi \pm \alpha$	$\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$	$2\pi - \alpha$
sin β	cos α	$\mp$sin α	–cos α	–sin α
cos β	$\mp$sin α	–cos α	±sin α	cos α
tg β	$\mp$ctg α	±tg α	$\mp$ctg α	–tg α
ctg β	$\mp$tg α	±ctg α	$\mp$tg α	–ctg α

Співвідношення між тригонометричними функціями одного й того ж аргументу

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \ \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), \ n \in Z;$$

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \ \alpha \neq \pi n, \ n \in Z;$$

$$\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha = 1, \ \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, \ n \in Z;$$

$$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), \ n \in Z;$$

$$1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} = \mathrm{cosec}^2\alpha, \quad \alpha \neq \pi n, \ n \in Z.$$

Формули додавання

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta; \ \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\mathrm{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha\pm\mathrm{tg}\beta}{1\mp\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}.$$

Формули подвійного аргументу

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha;\qquad \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha;\qquad \mathrm{tg}2\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}.$$

Формули половинного аргументу

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};\quad \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Формули перетворення суми на добуток

$$\sin\alpha\pm\sin\beta=2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2};\qquad \cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\mathrm{tg}\alpha\pm\mathrm{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}.$$

Формули перетворення добутку на суму

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta));\qquad \sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta));$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)).$$

Співвідношення між $\sin\alpha, \cos\alpha, \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$

$$\sin\alpha=\frac{2\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}};\qquad \cos\alpha=\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Завдання 6. У прикладах, позначених буквами: а) спростити вираз; б) довести тотожність; в) обчислити, не користуючись таблицею; г) знайти значення виразу за даною умовою.

№ варіанта	а) – г)	
01	**а)** $\left(1+\mathrm{tg}^2x\right)\cos^2 x+\left(1+\mathrm{ctg}^2x\right)\sin^2 x$	
	б) $1+\sin x=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$	
	в) $\sin 105^\circ+\sin 75^\circ$	**г)** $\cos\frac{x}{2}$, якщо $\sin x=\frac{7}{15}$, $\frac{\pi}{2}<x<\pi$
02	**а)** $\dfrac{\cos^2\frac{x}{2}\left(\cos x-\cos 3x\right)}{\sin x+2\sin 2x+\sin 3x}$	

№ варіанта	а) – г)	
	б) $\cos^2 x - \sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}\sin x\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = \frac{1}{2}$	
	в) $\sin^3\frac{\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{10}$	г) $27\cos x$, якщо $\sin x = \frac{1}{3},\ 0 < x < \frac{\pi}{2}$
03	а) $\frac{\cos 6x}{\cos 2x} - \frac{\sin 6x}{\sin 2x} + 2$	
	б) $\frac{1+4\sin 10^\circ\cos 40^\circ - 4\sin 50^\circ\sin^2(45^\circ + x)}{4\sin 50^\circ \operatorname{tg}(135^\circ + x)\cos^2(135^\circ + x)} = \operatorname{tg} 2x$	
	в) $\frac{\cos 7^\circ\cos 3^\circ - \cos 87^\circ\sin 367}{\sin 440^\circ}$	г) $\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x$, якщо $\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x = 3$
04	а) $\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}\cdot\frac{\cos x}{1+\cos x}$	
	б) $\frac{1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x}{2\cos^2 x+\cos x-1} = 2\cos x$	
	в) $\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}$	
	г) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{x}{2}$, якщо $\sin x = -\frac{12}{13},\ \pi < x < \frac{3\pi}{2}$	
05	а) $\frac{\sin x - \sin 3x}{\sin 2x}\cdot\frac{\cos x - \cos 3x}{\cos 2x} + 2$	
	б) $\cos 24^\circ + \cos 48^\circ - \cos 84^\circ - \cos 12^\circ = \frac{1}{2}$	
	в) $\operatorname{tg}^2 20^\circ\operatorname{tg}^2 40^\circ\operatorname{tg}^2 80^\circ$	г) $\frac{\sin x}{\sin^3 x + 3\cos^3 x}$, якщо $\operatorname{ctg}x = 2$
06	а) $\frac{\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}2x - \operatorname{tg}x}$	
	б) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) = 2\operatorname{tg}x$	
	в) $\cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}$	г) $14\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$, якщо $\operatorname{tg}x = \frac{1}{2}$
07	а) $\frac{2\sin^2 2x - 1}{\sin 2x + \cos 2x}$	в) $\frac{4\cos 17^\circ\cos 43^\circ\sin 13^\circ}{\sin 399^\circ}$
	б) $1 - \sin x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$	г) $x + y$, якщо $\operatorname{ctg}x = \frac{3}{4}$, $\operatorname{tg}y = 7$ x, y – гострі кути

№ варіанта	а) – г)	
08	а) $\sin^4 x + \sin^2 x\cos^2 x - \sin^2 x + 1$	
	б) $\sin\left(\mathrm{arctg}\frac{1}{2} - \mathrm{arctg}3\right) = \frac{-1}{\sqrt{2}}$	
	в) $24\sin 306^\circ \sin 18^\circ$	г) $\frac{113}{6+14\sin x\cos x}$, якщо $\mathrm{tg}x = 0{,}2$
09	а) $\frac{(\sin x-\cos x)^2-1+\sin 4x}{\cos 4x+\cos 2x}$	в) $8\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ$
	б) $\mathrm{arctg}\frac{1}{2}+\mathrm{arctg}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$	г) $27\cos 2x$, якщо $\sin(\pi-x)=\frac{2}{3}$
10	а) $\frac{(1-\sin^2 x)(\sin 4x-\sin 2x)}{\cos x+2\cos 3x+\cos 5x}$	в) $2\sin\frac{7\pi}{10}\sin\frac{\pi}{10}$
	б) $\mathrm{arctg}\frac{1}{3}-\mathrm{arctg}\frac{1}{4}=\mathrm{arctg}\frac{1}{13}$	г) $\cos 4x - \sin 4x\cdot \mathrm{ctg}2x$, якщо $x=17^\circ$
11	а) $\frac{\sin^2 2x-4\sin^2 x}{\sin^2 2x+4\sin^2 x-4}$	
	б) $\cos\left(\mathrm{arctg}\frac{3}{5}+\arccos\frac{4}{\sqrt{17}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$	
	в) $2\sin 70^\circ \sin 50^\circ \sin 10^\circ$	г) $\sin^6 x+\cos^6 x+3\sin^2 x\cos^2 x$, якщо $x=19^\circ$
12	а) $\frac{\cos 2x(1-\cos 2x)}{\sin 3x-\sin x}\cdot\frac{\sin 4x}{\cos 3x-\cos 5x}$	
	б) $\frac{\sin x+\sin 3x}{\cos x+\cos 3x}=\mathrm{tg}2x$	
	в) $\cos 4^\circ - \sin 4^\circ \mathrm{ctg} 2^\circ$	г) $\sin x$, якщо $\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}=1{,}4$
13	а) $\frac{1-\cos(8x-3\pi)}{\mathrm{tg}2x-\mathrm{ctg}2x}$	в) $4\left(\sin^4\frac{\pi}{8}+\sin^4\frac{3\pi}{8}\right)$
	б) $\frac{\cos 6x+\cos 2x}{2\cos 4x\cdot\cos 2x}=1$	г) $49\mathrm{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, якщо $\cos x=-\frac{9}{41}, \pi<x<\frac{3\pi}{2}$
14	а) $\cos^2\left(\frac{3}{8}\pi-\frac{x}{4}\right)-\cos^2\left(\frac{11}{8}\pi+\frac{x}{4}\right)$	

№ варіанта	а) – г)	
	б) $\sin\left(\text{arctg}\frac{3}{4}-\arccos\frac{12}{13}\right)=\frac{16}{65}$	
	в) $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ$	г) $(1+\text{tg}x)(1+\text{tg}y)$, якщо $x+y=\frac{\pi}{4}$
15	а) $\cos^2(\alpha+2\beta)+\sin^2(\alpha-2\beta)-1$	
	б) $\frac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x}=\text{tg}3x$	
	в) $4\sin 20^\circ\cos 50^\circ\sin 60^\circ\cos 10^\circ$	г) $\frac{1-\cos 4x}{\cos^2 2x-1}+\frac{1+\cos 4x}{\sin^2 2x-1}$, якщо $x=17^\circ$
16	а) $2\sin^2 x+2\cos^2 x+\text{tg}^2x\,\text{ctg}^2x$	
	б) $\frac{\sin^2 2x-4\sin^2 x}{\sin^2 2x+4\sin^2 x-4}=\text{tg}^4x$	
	в) $\sin^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\sin^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8}$	
	г) $25\sin^2 x+35\cos^2 x$, якщо $\text{ctg}x=-\frac{1}{3}$	
17	а) $\frac{(\sin x+\sin 3x)(\cos x-\cos 3x)}{1-\cos 4x}$	в) $\frac{1}{\sin 10^\circ}-\frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$
	б) $\frac{\cos 3x-\cos x}{2\sin x\sin 2x}=-1$	г) $\frac{1-2\sin^2\frac{x}{2}}{1+\sin x}$, якщо $\text{tg}\frac{x}{2}=3$
18	а) $\frac{\sin 9x}{\sin 3x}-\frac{\cos 9x}{\cos 3x}-2$	в) $\cos 108^\circ\cos 216^\circ$
	б) $\frac{\sin x+\sin 3x}{\cos x+\cos 3x}=\text{tg}2x$	г) $\text{tg}^4x+\text{ctg}^4x$, якщо $\text{tg}x+\text{ctg}x=\sqrt{5}$
19	а) $\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}\cdot\frac{1-\cos x}{\cos x}$	
	б) $\frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{\cos(x+y)-\cos(x-y)}=\text{ctg}x\,\text{ctg}y$	
	в) $\text{tg}^2 200^\circ\text{tg}^2 220^\circ$	
	г) найменше значення $\text{tg}\frac{x}{2}$, якщо $\frac{\sin 3x}{\sin x}=\frac{11}{25}$	
20	а) $\frac{\sin x+\sin 3x}{\sin 2x}\cdot\frac{\cos x+\cos 3x}{\cos 2x}-2$	

№ варіанта	а) – г)	
	б) $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{7}+\operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}=\dfrac{\pi}{4}$	
	в) $\dfrac{1}{\sin\dfrac{\pi}{18}}-\dfrac{\sqrt{3}}{\cos\dfrac{\pi}{18}}$	г) $\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{ctg}y$, якщо $\sin(x+y)=2\sin(x-y)$
21	а) $\dfrac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}2x-\operatorname{tg}x}$	в) $8\sin10^\circ\sin30^\circ\sin50^\circ\sin70^\circ$
	б) $\dfrac{4}{\operatorname{ctg}^2x-\operatorname{tg}^2x}=\operatorname{tg}2x\sin2x$	г) $\cos(x+y)$, якщо $\cos x+\cos y=1$, $\sin x-\sin y=\sqrt{2}$
22	а) $\dfrac{1-\cos^2x}{\sin x-\cos x}$	в) $\cos55^\circ+\cos65^\circ+\cos175^\circ$
	б) $3+4\cos2x+\cos4x=8\cos^4x$	г) $28\operatorname{tg}x$, якщо $\operatorname{tg}(x+y)=\dfrac{16}{3}$, $\operatorname{tg}y=\dfrac{1}{4}$
23	а) $\cos^4x+\sin^2x\cos^2x-\cos^2x-1$	
	б) $\dfrac{\sin x+\cos x}{\cos^3x}-\operatorname{tg}^3x-\operatorname{tg}^2x-\operatorname{tg}x=1$	
	в) $8\left(\sin^2 2^\circ-\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-2^\circ\right)\sin\left(2^\circ-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$	
	г) $\sqrt{5}\sin\dfrac{x}{2}$, якщо $\sin x=\dfrac{4}{5}, 0<x<\dfrac{\pi}{2}$	
24	а) $\dfrac{(\sin x+\cos x)^2-1-\sin4x}{\cos4x-\cos2x}$	в) $7\cos324^\circ(\operatorname{tg}207^\circ+\operatorname{tg}63^\circ)$
	б) $\dfrac{\sin4x}{\cos^4x-\sin^4x}=2\sin2x$	г) $\dfrac{\cos4x+1}{\sin4x(\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x)}$, якщо $x=17^\circ$
25	а) $\dfrac{(1-\cos^2x)(\cos4x-\cos2x)}{\sin x-2\sin3x+\sin5x}$	
	б) $\arcsin\dfrac{5}{13}+\arcsin\dfrac{12}{13}=\dfrac{\pi}{2}$	
	в) $4\left(\sin^4\dfrac{\pi}{8}+\sin^4\dfrac{3\pi}{8}\right)$	г) $8\left(\sin^4x+\cos^4x\right)$, якщо $\sin x-\cos x=\dfrac{1}{2}$
26	а) $\dfrac{\sin^2 2x-4\cos^2x}{\sin^2 2x+4\cos^2x-4}$	б) $\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{4}+\operatorname{arctg}^3\dfrac{\sqrt{3}}{7}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
	в) $\dfrac{1}{2\sin10^\circ}-2\sin70^\circ$	г) $37\left(\sin^3x+\cos^3x\right)$, якщо $\sin x+\cos x=\dfrac{1}{3}$
27	а) $\dfrac{\sin2x(1+\cos2x)}{\sin3x+\sin x}\cdot\dfrac{\cos4x}{\cos3x+\cos5x}$	

№ варіанта	а) – г)	
	б) $\arcsin\frac{4}{5}+\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}=\mathrm{arctg}\frac{2}{11}$	
	в) $28\sin 306^\circ \sin 18^\circ$	г) $14\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$, якщо $\mathrm{tg}x=\frac{1}{2}$
28	а) $\frac{(1-\cos 2x)\cos(45^\circ+2x)}{2\sin^2 2x-\sin 4x}$	
	б) $\frac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}=\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$	
	в) $\cos 36^\circ - \sin 18^\circ$	г) $x+2y$, якщо $\cos x=\frac{7}{\sqrt{50}}$, $\mathrm{tg}y=\frac{1}{3}$, x та y - гострі кути
29	а) $\mathrm{ctg}\left(45^\circ-\frac{x}{2}\right)+\mathrm{ctg}\left(135^\circ-\frac{x}{2}\right)$	
	б) $\frac{1+\cos 4x}{\mathrm{ctg}x-\mathrm{tg}x}=\frac{1}{2}\sin 4x$	
	в) $\mathrm{tg}435^\circ+\mathrm{tg}375^\circ$	г) $125\sin 4x-75\cos 4x$, якщо $\mathrm{tg}x=2$
30	а) $\sin^2(x+2y)+\sin^2(x-2y)-1$	
	б) $\frac{\cos x}{1+\sin x}=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$	
	в) $2\sin 70^\circ \sin 50^\circ \sin 10^\circ$	г) $33(4\cos x-3\sin x)^{-1}$, якщо $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=0,2$

2.2. Тригонометричні рівняння і нерівності

Довідковий матеріал

Розв'язання простіших тригонометричних рівнянь

$$\sin x=a;\quad x=(-1)^n\arcsin a+\pi n,\quad n\in Z;$$
$$\cos x=a;\quad x=\pm\arccos a+2\pi n,\quad n\in Z;$$
$$\mathrm{tg}\,x=a;\quad x=\mathrm{arctg}\,a+\pi n,\quad n\in Z;$$
$$\mathrm{ctg}\,x=a;\quad x=\mathrm{arcctg}\,a+\pi n,\quad n\in Z.$$

Завдання 7. У прикладах, позначених буквами: а) розв'язати рівняння; б) розв'язати нерівність.

№ варіанта	а)	б)

№ варіанта	а)	б)
01	$1-\sin 5x=\left(\cos\frac{3x}{2}-\sin\frac{3x}{2}\right)^2$	$\frac{4\sin x+3}{3\sin x+1}<2$
02	$\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=0$	$\sin x\cos 5x\le\sin 9x\cos 3x$
03	$\cos x-\cos 2x=\sin 3x$	$\sin 3x\ge\sin x$
04	$\cos 4x=-2\cos^2 x$	$\sin x+\sin\frac{x}{2}>0$
05	$\sin x+\cos=\frac{1}{\sin x}$	$\sin^4 x+\cos^4 x>\frac{5}{8}$
06	$\sin 3x=\cos 2x$	$\sin x\sin 7x\le\sin 3x\sin 5x$
07	$(1+\cos 4x)\sin 4x=\cos^2 2x$	$\cos 2x\le\sin x$
08	$\sin x+\sin 5x=2$	$\lvert\cos x\rvert\le\sin x$
09	$\sin\left(x+30^\circ\right)+\cos\left(x+60^\circ\right)=1+\cos 2x$	$\sqrt{3\sin x+1}>4\sin x+1$
10	$3\cos^2-\sin^2 x-\sin 2x=0$	$2\sin(30^\circ-3x)\le 1$
11	$\sin x+\cos x=1$	$\sin 2x\sin 3x-\cos 2x\cos 3x>\sin 10x$
12	$\sin x+\cos x=1+\sin 2x$	$2\sin^2 x-\sin x+\sin 3x<1$
13	$\sin x\cdot\sin 7x=\sin 3x\cdot\sin 5x$	$\sin 4x+\cos 4xctg\,2x>1$
14	$\cos x\cdot\sin 7x=\cos 3x\cdot\sin 5x$	$\sqrt{3}\sin x-\cos x>0$
15	$\sin x\cdot\sin 2x\cdot\sin 3x=\frac{1}{4}\sin 4x$	$0\le\operatorname{tg} 2x<\sqrt{3}$
16	$2\cos^2+4\cos x=3\sin^2 x$	$\frac{4\cos x+3}{3\cos x+1}>2$
17	$\operatorname{ctg} x+\frac{\sin x}{1+\cos x}=2$	$\sin 7x\cos x\le\sin 3x\cos 5x$
18	$\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x=\operatorname{tg} 3x$	$\cos 3x\ge -2\cos x$
19	$1-\cos^2 2x=\sin 3x-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$	$\sin^6 x+\cos^6 x\le\frac{7}{16}$

№ варіанта	а)	б)
20	$\left(1-\operatorname{tg}x\right)\left(1+\sin 2x\right)=1+\operatorname{tg}x$	$\lvert\sin x\rvert \le \cos x$
21	$\sin 3x = 4\sin\cdot\cos 2x$	$\cos 2x\cos 8x \ge \cos 4x\cos 6x$
22	$\dfrac{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}} = 2\sin\dfrac{x}{2}$	$\cos 2x \ge \cos x$
23	$2\sqrt{2}\sin\left(45^\circ + x\right) = \dfrac{1+\cos 2x}{1+\sin x}$	$\sqrt{3-2\cos^2 x} > 3\sin x + 1$
24	$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin x$	$3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x < \dfrac{1}{2}$
25	$2\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}2x = \operatorname{tg}4x$	$2\cos(60^\circ - 4x) \le 1$
26	$\operatorname{tg}x + \sin 2x = \dfrac{1}{\cos x}$	$2+\operatorname{tg}2x+\operatorname{ctg}2x<0$
27	$\cos 3x + \sin 5x = 0$	$4\sin x\sin 2x\sin 3x > \sin 4x$
28	$\sin 5x\cdot\sin 4x = -\cos 6x\cdot\cos 3x$	$\sin 2x > \cos x$
29	$\left(1+\sin 2x\right)\left(\cos x - \sin x\right) = 1-2\sin^2 x$	$\sin x + \sqrt{3}\cos x < 0$
30	$\dfrac{\cos^2 x - \sin^2 2x}{4\cdot\cos^{2x}} = \sin\left(x+30^\circ\right)\cdot\sin\left(x-30^\circ\right)$	$-1 \le \operatorname{ctg}2x \le \sqrt{3}$

3. НАЧАЛА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Довідковий матеріал

Основні властивості похідної функції

1. $(c)' = 0$; 2. $[c\cdot u(x)]' = c\cdot u'(x)$, c – const;

3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$; 4. $(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$

$$5.\ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$$

Похідна складної функції: $y' = y'_u \cdot u'_x$, де $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, Таблиця похідних

1. $(x)' = 1$	8. $(\cos x)' = -\sin x$
2. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	9. $(\mathrm{tg}x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
3. $(e^x)' = e^x$	10. $(\mathrm{ctg}x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$
4. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	11. $(\arcsin\ x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
5. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	12. $(\arccos\ x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
6. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$	13. $(\mathrm{arctg}x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
7. $(\sin x)' = \cos x$	14. $(\mathrm{arcctg}x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$

Застосування похідної

1. Рівняння дотичної до графіку функції $y = f(x)$ в точці x_0:

$$y - y(x_0) = y'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

2. Рівняння нормалі до графіку функції $y = f(x)$ в точці x_0:

$$y - y(x_0) = \frac{-1}{y'(x_0)} \cdot (x - x_0).$$

3. Закон змінення швидкості: $V(t) = S'(t)$.

Дослідження функції однієї змінної

План	**Що і як робити**
1. Область допустимих значень (область визначення функції).	Знайти значення аргумента х, при яких функція існує. Якщо є $\sqrt{\ }$, то вираз під коренем повинен бути додатнім. Якщо є дріб, то знаменник не повинен дорівнювати нулю.
2. Множина значень функції.	Які значення може прийняти сама функція?
3. Нулі функції і точки перетину з осями системи координат.	Прирівняти до нуля спочатку аргумент, а потім функцію. Розв'язати рівняння виду $y = f(0)$ і $y(x) = 0$.

4. Парність та непарність функції.	Перевірити значення виразу $y(-x)$. Підставити замість х значення –х і порівняти $y(-x)$ з $y(x)$.
5. Періодичність функції.	Знайти таке значення Т, при якому $y(x+T) = y(x)$. Знаходиться лише для тригонометричних функцій.
6. Проміжки зростання та спадання функції.	Знайти першу похідну і визначити, при яких х вона додатна, а при яких - від'ємна.
7. Екстремум функції.	Знайти критичні точки, тобто ті точки, в яких $y'(x) = 0$ і перевірити чи змінює перша похідна знак при переході через точки. Якщо так, то визначити вид екстремуму і знайти відповідне значення функції.
8. Проміжки опуклості та вгнутості графіку функції.	Знайти похідну другого порядку та визначити, при яких х вона додатна, а при яких - від'ємна. В точках, при переході через які похідна другого порядку змінює знак, будуть перегини. Знайти тоді відповідні значення функції в цих точках.
9. Асимптоти графіку.	Точки а, які не входять до ОДЗ функції, будуть задавати вертикальні асимптоти $x = a$. Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$, якщо це деяке число, то воно задає горизонтальну асимптоту $y = b$. Знайти також границю $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k$, якщо вона існує і не дорівнює нулю, то знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - kx\} = b$ і записати рівняння похилої асимптоти $y = kx + b$.
10. Побудувати графік функції.	Спочатку побудувати усі асимптоти. Потім відмітити всі точки перетину з осями системи координат, точки екстремуму та точки перегину. За характером змін функції, побудувати графік.

3.1. Елементарні функції та їх графіки

<u>Завдання 8.</u> У прикладах, позначених буквами: а) знайти область визначення функції; б) знайти область значень функції; в) побудувати графік функції.

№ варіанта	**а)**	**б)**	**в)**
01	$y = \frac{\lg x}{\sqrt{3x^2 - 5x + 2}}$	$y = \sqrt{x^2 - x - 2}$	$y = 3\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

№ варіанта	а)	б)	в)
02	$y=\dfrac{1}{\ln\left(\dfrac{x-2}{4-x}\right)}$	$y=2\lvert\sin x\rvert-1$	$y=3\cos\dfrac{x}{2}$
03	$y=\sqrt{1-2\sin 2x}$	$y=2^{x+1}-2$	$y=2\mathrm{tg}\left(-\dfrac{x}{2}\right)$
04	$y=\sqrt{x^3-6x^2+5x}$	$y=\lg(4-x^2)$	$y=2^{\frac{x}{2}+1}$
05	$y=\sqrt{64-4^x}$	$y=\lvert\log_2 x\rvert$	$y=\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{3}{4}\pi-3x\right)$
06	$y=2\mathrm{ctg}\dfrac{x}{2}$	$y=\dfrac{2}{3}\lvert\sin x\rvert+2$	$y=\dfrac{1}{2}\mathrm{tg}\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$
07	$y=\lg\left(x+\dfrac{4x+3}{x}\right)$	$y=1-4^{x+1}$	$y=\lvert\sin x\rvert$
08	$y=\dfrac{\sqrt{2x-3}}{\lg(x+10)^2}$	$y=\sin x+\cos x$	$y=1-\lvert\cos x\rvert$
09	$y=\dfrac{x}{3x^2-5x-2}$	$y=\lg(1-2\cos x)$	$y=\lvert\mathrm{tg}x\rvert$
10	$y=\dfrac{\sqrt{x}}{\sin(\pi x)}$	$y=\dfrac{x^2+5}{2x-4}$	$y=\sin\lvert x\rvert$
11	$y=\log_3(\cos(2\pi x))$	$y=2^{x-2}-3$	$y=2^{\lvert x\rvert}$
12	$y=\sqrt{\cos 2x}$	$y=\dfrac{2}{1+x^2}$	$y=\mathrm{tg}\lvert x\rvert$
13	$y=\sqrt{1-\mathrm{tg}3x}$	$y=\log_5(1-x^2)+1$	$y=x+\sin x$
14	$y=\dfrac{4}{3\sin 2x}$	$y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\cos x}$	$y=3\cos(2x-1)$
15	$y=\sqrt{1-3\sqrt{x}}$	$y=2\sin x+3\cos x$	$y=3^{x+1}$
16	$y=\dfrac{\lg(2x)}{\sqrt{x(x-4)}}$	$y=\sqrt{x^2-x-6}$	$y=\dfrac{1}{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$
17	$y=\dfrac{1}{\lg\left(\dfrac{3-x}{x-5}\right)}$	$y=2+3\lvert\cos x\rvert$	$y=\dfrac{1}{3}\sin 2x$

№ варіанта	а)	б)	в)
18	$y=\sqrt{2\cos 3x-1}$	$y=2^{x+1}+3$	$y=\frac{1}{2}\mathrm{tg}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$
19	$y=\lg(3x-2x^2-x^3)$	$y=\log_2(x^2+1)+1$	$y=\frac{1}{\lvert x\rvert}$
20	$y=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^x-27}$	$y=\lg\lvert x\rvert$	$y=3^{x^2+1}$
21	$y=1-\mathrm{tg}3x$	$y=\sin 2x-\cos 2x$	$y=2\sin\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{6}\right)$
22	$y=\log_3\left(x-\frac{15}{x+2}\right)$	$y=4+\frac{1}{4}\lvert\cos x\rvert$	$y=\frac{1}{2}\sin 3x-\frac{\pi}{2}$
23	$y=\frac{\ln(3x-2)}{x^2-x-2}$	$y=5-3^{x+2}$	$y=x+\frac{1}{x}$
24	$y=\frac{\mathrm{ctg}2x}{x(x-4)}$	$y=\lg(2\sin x-1)$	$y=\log_2 3x$
25	$y=\frac{1}{1-\sqrt{\cos x}}$	$y=\frac{x^2-7}{3x+9}$	$y=2\sqrt{x}+1$
26	$y=\log_2(\cos x\cdot\sin x)$	$y=3^{x-2}-2$	$y=x+\lvert x\rvert$
27	$y=\sqrt{\sin 2x}$	$y=\frac{3}{x^2+2}$	$y=2\mathrm{tg}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$
28	$y=\sqrt{2\mathrm{ctg}\frac{x}{2}}$	$y=\log_3(x^2-9)+2$	$y=\frac{1}{\cos x}$
29	$y=\frac{1}{4\cos 2x}$	$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x}$	$y=\frac{1}{\sin x}$
30	$y=\sqrt{4-2\sqrt{x}}$	$y=\frac{1}{2}\sin x-\cos x$	$y=-\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

3.2. Похідна функції

Завдання 9. У прикладах, помічених буквами а) – г) знайти похідні від заданих функцій.

№ варіанта	а) – г)	
01	**а)** $y=3x^3-\frac{2}{x^2}+\sqrt{x}-1$	**б)** $y=e^x\mathrm{tg}x$
	в) $y=\frac{\cos x}{x^2-7}$	**г)** $y=\ln(x^4-2x+1)$
02	**а)** $y=\sqrt[4]{x}-x^2+\frac{1}{x}+x-1$	**б)** $y=(x+1)\ln x$
	в) $.y=\frac{x^3+5}{\sin x}$	**г)** $y=\cos(3x^4-2x^2)$
03	**а)** $y=\sqrt{x^3}+5x-\frac{4}{x^5}+5$	**б)** $y=(x^3-2)e^x$
	в) $y=\frac{\ln x}{(2x^4-x)}$	**г)** $y=\ln^5 x$
04	**а)** $y=6x^4+\sqrt[4]{x}+\frac{1}{x}-7$	**б)** $y=\cos x\cdot(x^3+3)$
	в) $y=\frac{4x^2+1}{e^x}$	**г)** $y=e^{x^2+2}$
05	**а)** $y=\frac{1}{3x^3}+4\sqrt{x}+x^4-x$	**б)** $y=(x^2-3)\mathrm{tg}x$
	в) $y=\frac{\mathrm{tg}x}{2x^2-5}$	**г)** $y=\sin(x^4-2)$
06	**а)** $y=\sqrt[3]{x}+6x^3-\frac{3}{\sqrt{x}}+8$	**б)** $y=(3x^4-4)\cdot\sin x$
	в) $y=\frac{\sin x}{x^3+2}$	**г)** $y=2^{x^3}$
07	**а)** $y=2\sqrt{x}+x-\frac{4}{x^8}+x^4$	**б)** $y=\mathrm{ctg}x\cdot(x^3-7)$
	в) $y=\frac{8x^3+5}{\cos x}$	**г)** $y=\arcsin(2x^4-3)$
08	**а)** $y=\frac{2}{x^3}+2x^4-\frac{1}{\sqrt[4]{x^5}}-x$	**б)** $y=(x^7+3)(x+1)$
	в) $y=\frac{3x-5}{\ln x}$	**г)** $y=\mathrm{tg}^3x$
09	**а)** $y=x^3-\frac{6}{\sqrt[3]{x}}-2x+1$	**б)** $y=\sqrt{x}\sin x$

№ варіанта	**а) – г)**	
	в) $y=\dfrac{e^x}{3x^2+2}$	**г)** $y=\sqrt{\cos x}$
10	**а)** $y=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}+x^4-2\sqrt{x}+5$	**б)** $y=\sin x\cdot \mathrm{ctg}x$
	в) $y=\dfrac{x^5+1}{\mathrm{tg}x}$	**г)** $y=(x^4-1)^2$
11	**а)** $y=3x-\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}+\sqrt{x}-6x^4$	**б)** $y=\mathrm{ctg}x\cdot e^x$
	в) $y=\dfrac{e^x}{\ln x}$	**г)** $y=e^{\sin x}$
12	**а)** $y=\sqrt{x}-\dfrac{7}{\sqrt[3]{x^2}}+5x+5$	**б)** $y=\ln x\cdot tgx$
	в) $y=\dfrac{\cos x}{\ln x}$	**г)** $y=\ln\cos x$
13	**а)** $y=x^5+4\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}+7$	**б)** $y=\dfrac{1}{x^3}\ln x$
	в) $y=\dfrac{\ln x}{ctgx}$	**г)** $y=2^{\ln x}$
14	**а)** $y=8x+\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}+7x^4-5$	**б)** $y=\cos x\cdot\ln x$
	в) $y=\dfrac{\sin x}{e^x}$	**г)** $y=\sin e^x$
15	**а)** $y=\sqrt{x^3}-\dfrac{2}{\sqrt[5]{x}}+x^4+5$	**б)** $y=e^x\cdot\mathrm{tg}x$
	в) $y=\dfrac{e^x}{\mathrm{tg}x}$	**г)** $y=\cos\ln x$
16	**а)** $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^5}}-x^5+7x-5$	**б)** $y=\mathrm{tg}x\cdot\sin x$
	в) $y=\dfrac{e^x}{\cos x}$	**г)** $y=\ln 2^x$
17	**а)** $y=\dfrac{2}{x^4}-2x^4+\dfrac{1}{\sqrt{x}}-3$	**б)** $y=\sin x\cdot 2^x$

<table>
<tr><th>№
варіанта</th><th colspan="2">а) – г)</th></tr>
<tr><td></td><td>в) $y=\dfrac{\ln x}{\sin x}$</td><td>г) $y=\sqrt{\ln x}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">18</td><td>а) $y=3x^3+4\sqrt{x}-\dfrac{1}{x^8}+7$</td><td>б) $y=\cos x\cdot \mathrm{ctg}x$</td></tr>
<tr><td>в) $y=\dfrac{\mathrm{tg}x}{e^x}$</td><td>г) $y=\ln\sqrt{x}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">19</td><td>а) $y=x^5+\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^7}}+2x$</td><td>б) $y=\dfrac{1}{x}e^x$</td></tr>
<tr><td>в) $y=\dfrac{\ln x}{\mathrm{ctg}x}$</td><td>г) $y=\sin\dfrac{1}{x^3}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">20</td><td>а) $y=8-4x^4+\dfrac{1}{\sqrt{x^5}}+\dfrac{6}{x}$</td><td>б) $y=\ln x\cdot\sqrt{x}$</td></tr>
<tr><td>в) $y=\dfrac{\ln x}{\mathrm{ctg}x}$</td><td>г) $y=\dfrac{1}{\sin^2 x}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">21</td><td>а) $y=x^2-\dfrac{2}{x^3}+\sqrt{x^5}-1$</td><td>б) $y=e^x\ln x$</td></tr>
<tr><td>в) $y=\dfrac{\cos x}{x^3+3}$</td><td>г) $y=\mathrm{tg}(x^4-2x+1)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">22</td><td>а) $y=\sqrt[3]{x}+7x^2+\dfrac{4}{x}-x+8$</td><td>б) $y=(x+1)\cos x$</td></tr>
<tr><td>в) $y=\dfrac{2x-3}{\sin x}$</td><td>г) $y=\ln(3x^4-2x^2)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">23</td><td>а) $y=8x^6-\sqrt{x^2}+\dfrac{3}{\sqrt[5]{x}}+8$</td><td>б) $y=e^x(2x^4-8)$</td></tr>
<tr><td>в) $y=\dfrac{\ln x}{8-3x^2}$</td><td>г) $y=\sin^3 x$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">24</td><td>а) $y=3x^3+\sqrt[4]{x}+\dfrac{1}{x^3}-8$</td><td>б) $y=\ln x\cdot(2x+4)$</td></tr>
<tr><td>в) $y=\dfrac{5-x^2}{e^x}$</td><td>г) $y=e^{5x-1}$</td></tr>
<tr><td>25</td><td>а) $y=\dfrac{1}{x^3}+3\sqrt[3]{x}+4x^4-x$</td><td>б) $y=\mathrm{tg}x\cdot(5x^2-6)$</td></tr>
</table>

№ варіанта	а) – г)	
	в) $y=\dfrac{\mathrm{tg}x}{10-x^3}$	**г)** $y=\mathrm{ctg}(x^4-2)$
26	**а)** $y=3\sqrt[3]{x}+x^3-\dfrac{8}{\sqrt{x}}+x^2$	**б)** $y=\sin x\cdot(3x^2+1)$
	в) $y=\dfrac{\sin x}{2x-1}$	**г)** $y=2^{x^2-1}$
27	**а)** $y=\sqrt{x}+5x-\dfrac{4}{x^4}+3x^2$	**б)** $y=(x^2+2)\mathrm{ctg}x$
	в) $y=\dfrac{4x-x^3}{\cos x}$	**г)** $y=\arcsin(x^4+x)$
28	**а)** $y=\dfrac{1}{x^4}+7x^2-\dfrac{2}{\sqrt[4]{x}}-4x$	**б)** $y=(x-2)(x^5-x)$
	в) $y=\dfrac{4-3x^2}{\ln x}$	**г)** $y=\cos^3 x$
29	**а)** $y=3x^6-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-2x+\sqrt{x}$	**б)** $y=\sqrt{x}\cdot\mathrm{tg}x$
	в) $y=\dfrac{e^x}{2-x^3}$	**г)** $y=\sqrt{\sin x}$
30	**а)** $y=\dfrac{4}{\sqrt[4]{x}}+3x^2-\sqrt{x}+5x$	**б)** $y=\ln x\cdot\mathrm{ctg}x$
	в) $y=\dfrac{x^5+1}{\mathrm{tg}x}$	**г)** $y=(x^3+1)^4$

3.3. Дослідження функції на монотонність та екстремум

Завдання 10. У прикладах, позначених буквами: а) знайти інтервали монотонності та екстремуми заданої функції; б) знайти найбільше та найменше значення функції на заданому відрізку.

№ варіанта	а)	б)
01	$y = x^3 - 9x^2 + 24x - 1$	$y = x + \frac{4}{x}, \quad [1; 3]$
02	$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - 7$	$y = (x^2 - 1)(x + 1), \quad [-2; 0]$
03	$y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$	$y = \frac{1}{3}x^3 - 4x, \quad [0; 3]$
04	$y = x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 18x - 8$	$y = x^2 + 3x, \quad [-2; 1]$
05	$y = \frac{2}{3}x^3 - 7x^2 + 12x - 5$	$y = \frac{x^2 + 8}{x - 1}, \quad [-3; 0]$
06	$y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 1$	$y = \sqrt{x}\sin x - x, \quad \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
07	$y = 2x^3 - 3x^2 - 72x + 5$	$y = \sqrt{2x - x^2}, \quad \left[\frac{1}{2}; 2\right]$
08	$y = 2x^3 - 21x^2 - 48x + 3$	$y = \sin^2 2x, \quad \left[-\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{8}\right]$
09	$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 10x + 6$	$y = x^2 \cdot e^{2x}, \quad [-2; 1]$
10	$y = x^3 + 9x^2 + 24x + 5$	$y = x^2 \ln x, \quad [e^{-2}; 1]$
11	$y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + 4$	$y = \sqrt{x} - 2\sqrt[4]{x}, \quad [0; 100]$
12	$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 8$	$y = \frac{x^4}{4} - 2x^2, \quad [-1; 4]$
13	$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 8$	$y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1, [0; 3]$
14	$y = \frac{2}{3}x^3 + 7x^2 + 12x + 9$	$y = -x^3 + 3x^2 + 2, [-1; 3]$
15	$y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 4$	$y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 5, [2; 4]$

№ варіанта	а)	б)
16	$y=2x^3+3x^2-72x$	$y=-x-\frac{9}{x},\quad [1;4]$
17	$y=2x^3+21x^2-48x-4$	$y=(1-x^2)(x-1),\quad [0;2]$
18	$y=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-10x-4$	$y=-\frac{1}{3}x^3+x,\quad [-2;0]$
19	$y=\frac{1}{3}x^3-x^2-35x+2$	$y=-x^2-x+2,\quad [-2;0]$
20	$y=x^3-9x^2+24x-3$	$y=\frac{x^2+8}{x+1},\quad [0;3]$
21	$y=2x^3-9x^2+12x+5$	$y=x\ln x,\quad [e^{-2};1]$
22	$y=2x^3-3x^2-12x+5$	$y=\frac{x}{x^2+1},\quad [-2;2]$
23	$y=x^3+\frac{15}{2}x^2+18x+10$	$y=\cos^2 2x,\quad \left[-\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{6}\right]$
24	$y=\frac{1}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2+6x+11$	$y=\frac{x^2}{e^{2x}},\quad [-1;2]$
25	$y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-6x+12$	$y=\frac{\ln x}{x},\quad [1;e^2]$
26	$y=2x^3-3x^2-72x+7$	$y=e^{x^2-4x+3},\quad [-5;5]$
27	$y=2x^3-21x^2-48x+13$	$y=\frac{x^4}{2}-9x^2,\quad [-1;4]$
28	$y=2x^3-9x^2-60x+7$	$y=2x^3-15x^2+24x+3,\ [0;2]$
29	$y=\frac{1}{3}x^3-6x^2-35x-3$	$y=x^3-6x^2+9x+3,\ [0;4]$
30	$y=2x^3-3x^2-72x-13$	$y=\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x-7,\ [-1;3]$

3.4. Повне дослідження функції

<u>Завдання 11.</u> Дослідити функцію і побудувати її графік.

№ варіанта	Завдання	№ варіанта	Завдання
01	$y=\dfrac{x}{x^2-4}$	**02**	$y=\dfrac{1}{x^2-4x+3}$
03	$y=\dfrac{2x}{x^2+1}$	**04**	$y=\dfrac{1}{x^2+1}$
05	$y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$	**06**	$y=x^2+\dfrac{2}{x}$
07	$y=\dfrac{\ln x}{x}$	**08**	$y=\dfrac{x^2-4x}{x^2-4x+8}$
09	$y=\dfrac{x+2}{x^2-9}$	**10**	$y=\dfrac{1-x}{(x-2)^3}$
11	$y=\dfrac{x^2+2x}{x-1}$	**12**	$y=\dfrac{2x}{x^2+x+1}$
13	$y=\dfrac{(x-3)^2}{x^2}$	**14**	$y=16x(x-1)^3$
15	$y=x+e^{-x}$	**16**	$y=\dfrac{x}{x^2-1}$
17	$y=\dfrac{1}{1-x^2}$	**18**	$y=\dfrac{7x}{2x^2-3x+2}$
19	$y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$	**20**	$y=e^{-x^2}$
21	$y=\dfrac{x^2}{4-x^2}$	**22**	$y=\dfrac{e^x}{x}$
23	$y=\dfrac{1}{x^2+8x}$	**24**	$y=\dfrac{4}{x^2-2x+2}$
25	$y=\dfrac{3x}{x^2+4x+4}$	**26**	$y=\dfrac{x-1}{x^2-2x+2}$
27	$y=\dfrac{x^2}{x^3-1}$	**28**	$y=\dfrac{1}{(x-4)(x-1)}$
29	$y=(x-1)\sqrt{x}$	**30**	$y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

4. ПЛАНІМЕТРІЯ

Довідковий матеріал

Трикутники

1. Площа трикутника: $S=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}a\cdot b\cdot\sin\alpha$;

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

$$S=\frac{abc}{4R};\qquad S=p\cdot r;$$

де $a,\ b,\ c$ сторони трикутника, $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$ - півпериметр,

R – радіус кола, описаного коло трикутника,
r – радіус кола, вписаного в трикутник.

2. Теорема косинусів: $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\beta$; $b^2=a^2+c^2-2bc\cdot\cos\gamma$; $c^2=a^2+b^2-2bc\cdot\cos\alpha$.

3. Теорема синусів: $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$.

4. Рівносторонній трикутник: $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $R=\frac{a\sqrt{3}}{3}$; $r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

5. Прямокутній трикутник ($a,\ b$ – катети, c – гіпотенуза трикутника):

$$S=\frac{1}{2}a\cdot b;\quad R=\frac{c}{2};\quad a^2+b^2=c^2$$ - теорема Піфагора.

Властивості: $a^2=a_c\cdot c$; $b^2=b_c\cdot c$; $h_c^2=a_c\cdot b_c$, де a_c, b_c – проекції катетів на гіпотенузу.

Чотирикутники

1. Площа прямокутника зі сторонами a и b: $S=a\cdot b$.
2. Площа квадрата зі стороною a: $S=a^2$.
3. Площа паралелограма ($a,\ b$ – сторони, α – кут, h_a – висота, що опущено на сторону a, β – кут між діагоналями d_1 и d_2):

$$S=a\cdot h_a=a\cdot b\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}d_1\cdot d_2\sin\beta.$$

4. Площа ромба (a – сторона, α – кут, h – висота, d_1 и d_2 – діагоналі):

$$S=a^2\cdot\sin\alpha=ah=\frac{1}{2}d_1d_2.$$

5. Площа трапеції (*a, b* – основи, *h* – висота): $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$.

Многокутники

1. Сторона правильного многокутника: $= 2r \cdot \sin\frac{180^0}{n} = 2r \cdot tg\frac{180^0}{n}$, де

   R – радіус описаного кола, r – радіус вписаного кола.

2. Площа правильного n-кутника:

$$S_n = \frac{1}{2}R^2 n\sin\frac{180^0}{n} = r^2 n\mathrm{tg}\frac{180^0}{n} = \frac{1}{4}a_n^2 n\mathrm{ctg}\frac{180^0}{n}.$$

Коло і круг

1. Довжина кола радіуса R: $L = 2\pi R$.
2. Площа круга радіуса R: $S = \pi R^2$.
3. Довжина хорди: $a = 2R\sin\frac{\alpha}{2}$, де α –центральний кут дуги, яку стягує хорда a.
4. Довжина дуги: $l = \frac{2\pi \cdot R\alpha}{360^0}$.
5. Площа сектора: $S = \frac{\pi R^2 \cdot \alpha}{360^0}$.
6. Площа сегменту: $S = \frac{1}{2}R^2\left[\frac{\pi\alpha}{180^0} - \sin\alpha\right]$.

Завдання 12.

№ варіанта	Завдання
01	Периметр трикутника дорівнює 33 см, а більша сторона 14 см. Знайти найменшу сторону трикутника, якщо відомо, що довжини сторін утворюють арифметичну прогресію.
02	В рівнобедреному трикутнику *ABC* з основою *AC* проведена медіана *BD*. Знайдіть її довжину, якщо периметр трикутника *ABC* дорівнює 50 см, а трикутник *ABD* - 40 см.
03	Сторони трикутника дорівнюють 8 см, 10 см, 12см. Знайти сторони трикутника, вершинами якого є середини сторін даного трикутника. У відповіді вказати периметр отриманого трикутника.
04	Запишіть формулу радіуса кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника з основою а і бічною стороною в. Використовуючи її, знайдіть радіус кола, якщо $a = 4\sqrt{3}$ см, $b = 4$ см.

№ варіанта	Завдання
05	Сторони трикутника *a, b, c*. Запишіть формулу висоти трикутника, проведеної до сторони с. Використовуючи її, знайдіть висоту трикутника, якщо a=30 см, b=25 см, c=25 см.
06	Катет прямокутного трикутника менше гіпотенузи на 8 см. Інший катет дорівнює 20 см. Знайти гіпотенузу.
07	Одна сторона паралелограма дорівнює 20 см, а діагоналі дорівнюють 54 и 14 см. Знайти периметр паралелограма.
08	У паралелограмі $ABCD$ проведена бісектриса кута A, яка перетинає сторону BC в точці E. Чому дорівнюють відрізки BE и EC, якщо AB=9 см, AD=15 см.
09	В прямокутнику точка перетину діагоналей віддалена від меншої сторони на 4 см більше, ніж від більшої сторони. Периметр прямокутника дорівнює 56 см. Знайти сторони прямокутника. У відповіді вказати довжину більшої сторони.
10	Кути, що утворюють діагоналі ромба з однієї із його сторін, відносяться один до одного як 4:5. Знайти кути ромба. У відповіді вказати величину більшого кута.
11	Дано квадрат, сторона якого 1 м, діагональ його дорівнює стороні іншого квадрата. Знайти діагональ останнього.
12	В трапеції середня лінія має довжину 22 см. Знайти більшу основу, якщо вона на 20% більше другої основи.
13	Висота, що проведена із вершини тупого кута рівнобічної трапеції, ділить більшу основу на часті, що мають довжини 4 см. и 10 см. Знайти середню лінію трапеції.
14	Один з зовнішніх кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 70°. Знайти кути трикутника. У відповіді вказати величину меншого кута.
15	Скільки сторін має правильний многокутник, якщо кожен його внутрішній кут дорівнює 135°.
16	Знайти катети прямокутного трикутника, якщо їх проекції на гіпотенузу дорівнюють 9 см. и 16 см. У відповіді вказати довжину більшого катета.
17	В круг радіуса $4\sqrt{3}$ см. вписаний трикутник. Один з його кутів дорівнює 60°. Найти (в см) довжину протилежної сторони трикутника.
18	Дано сторона та два кути трикутника. Знайти третій кут та інші дві сторони, якщо: $\alpha = 5$, $\beta = 30°$ и $\gamma = 45°$. У відповіді вказати довжину більшої із знайдених сторін.
19	Знайти невідомі сторони та гострі кути прямокутного трикутника за такими даними: гіпотенуза $c = 17$ см та катет $a = 8$ см. У відповіді вказати довжину другого катета.

№ варіанта	Завдання
20	Знайти невідомі сторони та гострі кути прямокутного трикутника, якщо гіпотенуза c=2 см та один із гострих кутів $\alpha = 30°$. У відповіді вказати довжину меншого катета.
21	Дано дві стороні трикутника та кут, який прилягає до третій стороні. Знайти інші два кути і третю сторону, якщо: $a = 12$, $b = 8$, $\gamma = 60°$. У відповіді вказати довжину третій сторони.
22	Сторона трикутника дорівнює 10 см, а протилежний їй кут - $150°$. Знайти радіус описаного кола.
23	Точки A, B, C лежать на колі. Чому дорівнює хорда AC, якщо кут ABC дорівнює $30°$, а діаметр кола – 10 см.
24	Обчислити площу трикутника, якщо сума довжин основи та висоти, що проведена до неї, дорівнює 5 см, а їх різність – 1 см.
25	Периметр рівнобедреного трикутника більше довжини його основи на 12 см, кут при вершині дорівнює $30°$. Знайти площу трикутника.
26	Знайти площу квадрата, якщо його діагональ дорівнює 4 см.
27	Обчислити площу паралелограма, сторони якого дорівнюють 10 см и 8 см, а кут між ними дорівнює $\frac{\pi}{6}$.
28	Паралелограм і трикутник мають однакові сторони. Знайти гострий кут паралелограма, якщо його площа дорівнює половині площі прямокутника.
29	Знайти площу паралелограма, якщо одна його діагональ дорівнює 12 см, а сторони – 20 см и 16 см.
30	Якщо основу прямокутника зменшити на 6 м, а висоту збільшити на 5 м, тоді його площа збільшиться на 25 см^2. Якщо ж основу прямокутника збільшити на 2 м, а висоту зменшити на 1 м, тоді його площа зменшиться на 1 м^2. Знайти площу прямокутника.

5. СТЕРЕОМЕТРІЯ

Довідковий матеріал

Призма

1. Площа бічної поверхні: $S_{біч} = P_n L$, де P_n – периметр перпендикулярного січення, L – довжина бокового ребра.
2. Об'єм призми: $V = S_{осн} \cdot H = S_n L$, де S_n – площа перпендикулярного січення, H – висота.
3. Об'єм прямокутного паралелепіпеда: $V = a \cdot b \cdot c$, де a, b, c – сторони.

Піраміда

1. Площа бічної поверхні правильної піраміди: $S = \frac{1}{2} Ph$, де P – периметр основи, h – висота.
2. Об'єм піраміди: $V = \frac{1}{S} S_{осн} H$, де $S_{осн}$ – площа основи, H – висота.
3. Площа бічної поверхні правильної усіченої піраміди $S = \frac{1}{2}(P + p)h$, де P, p – периметр основи, h – висота.
4. Об'єм усіченої піраміди: $V = \frac{1}{3} H(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$, де H – висота усіченої піраміди, $S_{1,2}$ – площа основи.

Циліндр

1. Площа циліндра: $S_{біч} = 2\pi RH$, $S_{цил} = S_{біч} + 2S_{осн} = 2\pi R(H + R)$, де R – радіус, H – висота.
2. Об'єм циліндра: $V = S_{осн} \cdot H = \pi R^2 \cdot H$.

Конус

1. Площа бічної поверхні конуса: $S_{біч} = \pi RL$, L – утворююча конуса.
2. Об'єм конуса: $V_{кон} = \frac{1}{3}\pi R^2 H$.
3. Об'єм усіченого конуса: $V = \frac{1}{3}\pi H(R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2)$, де H – висота, $R_{1,2}$ – радіуси верхньої та нижньої основ.
4. Площа бічної поверхні усіченого конуса: $S_{бок} = \pi(R_1 + R_2)L$, де L – утворююча.

Сфера та шар

1. Площа сфери: $S = 4\pi R^2$, де R – радіус.
2. Об'єм шару: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Завдання 13

№ варіанта	Завдання
01	Діагональ основи прямої правильної чотирикутної призми дорівнює 4 см, діагональ бічної грані дорівнює $\sqrt{26}$ см. Знайти бічну поверхню призми.
02	Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює $4\sqrt{3}$ см, апофема піраміди дорівнює 7 см. Знайти (в см^3) об'єм піраміди.
03	Основа піраміди – ромб із діагоналями 6 см и 8 см, висота піраміди проходить через точку перетину діагоналей ромба і дорівнює 1 см. Знайти бічну поверхню піраміди.

№ варіанта	Завдання
04	В правильній чотирикутній усіченій піраміді сторони основи 8 см та 12 см. Висота дорівнює 4 см. Знайти повну поверхню.
05	Сторони основи прямокутного паралелепіпеда a и b. Діагональ паралелепіпеда складає з площиною основи кут α. Знайти бічну поверхню паралелепіпеда, якщо $a=3$, $b=4$, $\alpha=45°$.
06	Відстань від вершини куба до його діагоналі, що поєднує дві інші вершини дорівнює $2\cdot\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ см. Знайти об'єм куба.
07	Бічне ребро правильної трикутної піраміди дорівнює 4 см та складає кут $45°$ з площиною основи. Знайти квадрат апофеми даної піраміди.
08	Діагональ основи правильної чотирикутної призми дорівнює 4 см, діагональ бічної грані дорівнює 5 см. Знайти квадрат діагоналі призми.
09	Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює $2\sqrt{5}$, апофема піраміди дорівнює $\sqrt{21}$ см. Знайти (в см^3) об'єм піраміди.
10	Знайти об'єм правильної чотирикутної піраміди, якщо її висота дорівнює 99 см, а площа діагонального січення $99\sqrt{3}$ см^2.
11	В основі призми лежить трапеція. Знайти об'єм призми, якщо площа паралельних бічних граней дорівнюють 20 см^2 и 30 см^2, а відстань між ними дорівнює 6 см.
12	В циліндрі площа основи дорівнює 5 см^2, а площа осевого січення – 2 см^2. Чому дорівнює повна поверхня циліндра.
13	У скільки разів треба збільшити висоту циліндра, не змінюючи його основу, щоб об'єм збільшився в 4 рази?
14	У скільки разів треба збільшити радіус основи циліндра, не змінюючи його висоту, щоб об'єм збільшився в 9 разів?
15	Півколо радіуса 75 см звернути в конус. Знайти (в градусах) кут осевого січення конуса.
16	Площа основи конуса 5 см^2, а утворюючи нахилені до його основи під кутом $60°$. Знайти бічну поверхню конуса.
17	Осевим січенням конуса є рівнобедрений прямокутний трикутник, площа якого дорівнює 9 см^2. Знайти об'єм конуса. У відповіді вказати значення в π раз менше отриманого.
18	Усічений конус, у якого радіуси основи дорівнюють 4 см и 22 см, потрібно перетворити на рівновеликий циліндр тій же висоти. Чому дорівнює радіус основи цього циліндра?
19	Гіпотенуза і катети прямокутного трикутника є діаметрами трьох шарів. Чому дорівнює поверхня шару діаметром якого є гіпотенуза, якщо сума поверхонь двох інших шарів дорівнює 10 см^2?
20	Поверхні 2-х шарів відносяться одна до одної як 4:1. Чому дорівнює відношення їх об'ємів?
21	Яку частину об'єму шару складає об'єм шарового сегмента, у якого

№ варіанта	Завдання
	висота дорівнює 0,1 діаметра шару?
22	Знайти збільшене в 2 рази відношення бічної поверхні рівносторонего конуса до поверхні вписаного шару, якщо утворююча конуса дорівнює 12 см.
23	Шар радіуса 47 см вписаний в конус, висота якого в 2 рази більша за діаметр шару. Знайти збільшене в 9 разів відношення об'єму конуса до об'єму шару.
24	В коло радіуса 49 см вписаний правильний трикутник. Знайти збільшене в 32 рази відношення об'ємів тіл, що отримано від вращення трикутника і кола коло діаметра, який проходить через вершину трикутника.
25	Основою похилої призми є рівнобедрений трикутник ABC, в якому сторони AB=AC=10 м, BC=12 м. Вершина A_1 рівновіддалена від вершин A, B, C та ребро AA_1=16,25 м. Знайти об'єм призми.
26	Основою піраміди є трикутник зі сторонами 13, 14 и 15 см. Бічне ребро, що лежить напроти середньої по величині сторони основи, перпендикулярно до площі основи і дорівнює 16 см. Знайти повну поверхню піраміди.
27	В основі прямого паралелепіпеда лежить паралелограм зі сторонами 1 и 4 см та гострим кутом $60°$. Більша діагональ паралелепіпеда дорівнює 5 см. Знайти його об'єм.
28	В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з гіпотенузою, що дорівнює c, і гострим кутом $30°$. Бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом $45°$. Знайти об'єм піраміди.
29	Обчислити об'єм тетраедра, якщо радіус кола, описаного навколо його грані, дорівнює R.
30	Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює a, а двогранний кут при основі дорівнює $45°$. Визначить об'єм та повну поверхню піраміди.