МІНІСТЕРСТВО ТРАНСПОРТУ ТА ЗВ'ЯЗКУ УКРАЇНИ
Державний департамент з питань зв’язку та інформатизації

ОДЕСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ ЗВ'ЯЗКУ ім. О. С. ПОПОВА

Кафедра вищої математики

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Навчальний посібник

Одеса 2006

УДК 512.64

Укладачі: ***Стрелковська І.В.***

СХВАЛЕНО
на засіданні кафедри
вищої математики
та рекомендовано
до друку.
Протокол № 3
від 26.10.06

ЗМІСТ

I. Визначники……………………………………………………………..5
1.1. Визначники II та III порядку. Поняття визначників II та III порядків, їх обчислення……………………………………………..5
1.2. Поняття мінору та алгебраїчного доповнення елементів визначників II, III порядків………………………………………… 7
1.3. Властивості визначників II та III порядків………………………… 8
1.4. Визначники n−го порядку………………………………………..13
1.5. Множення визначників……………………………………………...18
II. Матриці, види матриць, дії над матрицями…………………………21
2.1. Матриці. Види матриць…………………………………….....21
2.2. Рівність матриць………………………………………………….23
2.3. Лінійні операції над матрицями……………………………….24
2.4. Множення матриць……………………………………………….27
2.5.1. Основні поняття та теореми…………………………………30
2.5.2. Метод Жоржано−Гаусса знаходження оберненої матриці…..33
2.6. Ранг матриці………………………………………………………….40
2.6.1. Мінор матриці…………………………………………………...40
2.6.2. Ранг матриці……………………………………………………..40
2.6.3. Елементарні перетворення матриці…………………………41
2.6.4. Знаходження елементарних перетворень……………………...43
2.6.5. Поняття про лінійну залежність……………………………..45
III. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь…………………………….49
3.1. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Основні поняття…………49
3.2. Застосування визначників до розв’язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Теорема Крамера……………….………….49
3.3. Розв’язування систем n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими за допомогою матриць……………………………..54
3.4. Метод Гауса розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (метод послідовного виключення невідомих)……………..58
3.4.1. Розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом послідовного виключення невідомих……………….58
3.4.2. Розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою таблиць Гаусса……………………………….60
3.4.3. Метод Жордано−Гаусса Розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь(метод повного виключення невідомих)……………………………………………………….67
3.5. Дослідження систем лінійних алгебраїчних рівнянь……………..71
3.6. Однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь………………85
3.7. Зв'язок між розв'язками неоднорідних систем лінійних алгебраїчних рівнянь та відповідних їм однорідних систем лінійних алгебраїчних рівнянь………………………………..96
IV. Методичні вказівки до розв’язання задач та задачі для самостійного розв’язання……………………………………………………………...97
4.1. Обчислення визначників…………………………………………..97

4.2. Матриці. Дії над матрицями……………………………………..102
4.3. Обернена матриця……………………………………………..108
4.4. Ранг матриці……………………………………………………117
4.5. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь…………………………..124
4.5.1. Правило Крамера…………………………………………124
4.5.2. Матричний метод…………………………………………131
4.5.3. Метод Гауса……………………………………………..139
4.5.4. Метод Жордано−Гаусса…………………………………..149
4.6. Дослідження систем лінійних алгебраїчних рівнянь……………..149
4.7. Однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь……………….152
Контрольні запитання………………………………………………..161
Перевірочні тести……………………………………………………163
Задачі для самостійного розв’язування……………………………….168

I. ВИЗНАЧНИКИ

1.1. Визначники II та III порядку. Поняття визначників II та III порядків, їх обчислення

Означення. Визначником II порядку називається число, яке подане формулою

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} . \qquad (1.1)$$

При цьому $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ – числа, які називаються елементами визначника; числа a_{11}, a_{12} утворюють перший рядок визначника, а числа a_{21}, a_{22} утворюють другий рядок; числа a_{11}, a_{21} утворюють перший стовпчик визначника, а числа a_{12}, a_{22} – другий стовпчик; числа a_{11}, a_{22} – утворюють головну діагональ визначника, а числа a_{12}, a_{21} – утворюють побічну діагональ визначника.

Неважко помітити, що перший індекс кожного елемента вказує на номер рядка, у якому знаходиться цей елемент, а другий індекс вказує на номер стовпчика.

Приклад. Обчислити визначник

$$d = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} .$$

Розв'язання

$$d = 1 \cdot 4 - (-3) \cdot 2 = 4 + 6 = 10 .$$

Означення. Визначником III порядку називається число, яке подане формулою

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} . \qquad (1.2)$$

Але ця формула незручна для запам'ятовування. Розглянемо деякі зручніші методи обчислення визначників III порядку.

1. *Правило трикутника*

Зобразимо схематично визначник.

а) б)

Рисунок 1.1 − Схематичне зображення визначника

На кожному з рисунків зображені три пунктирні лінії. На кожній з них знаходиться по три елементи. Якщо ці три елементи помножити, то отримаємо три доданки $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{13}a_{21}a_{32}$, $a_{12}a_{23}a_{31}$, які входять у праву частину формули (1.2). Скориставшись рисунком (1.1, б) та змінивши на протилежні знаки знайдених добутків, ми отримаємо останні три доданки, які входять у праву частину формули (1.2).

Приклад. Обчислити визначник

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 6 & 2 & 7 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

$$d = 1\times5\times7 + (-3)\times4\times2 + 2\times0\times6 - (-3)\times5\times6 - 1\times0\times2 - 2\times4\times7 = 35 - 24 + 90 - 56 = 45.$$

2. *Обчислення визначника дописуванням стовпчиків або рядків*

Складемо допоміжну таблицю, для цього допишемо справа у визначнику перший та другий стовпчики або знизу перший та другий рядки.

Рисунок 1.2 − Схематичне зображення обчислення визначника дописуванням стовпчиків та рядків

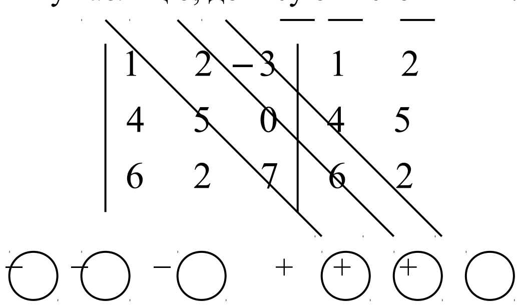
Помноживши елементи, які знаходяться на пунктирних лініях, помічених знаком „+”, ми отримаємо перші три доданки правої частини формули (1.2), а за допомогою трьох пунктирних ліній, помічених знаком „–”, ми отримаємо останні три доданки формули (1.2), якщо змінити на протилежні знаки добутків.

Приклад. Обчислити визначник

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 6 & 2 & 7 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

1. Складаємо допоміжну таблицю, дописуючи стовпчики.



$$d = 1\times5\times7 + 2\times0\times6 + (-3)\times4\times2 - (-3)\times5\times6 - 1\times0\times2 - 2\times4\times7 = 35 - 24 + 90 - 56 = 45$$

.

2. Складаємо допоміжну таблицю, дописуючи рядки.

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 6 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 0 \end{array}$$

$$d = 1 \times 5 \times 7 + 4 \times 2 \times (-3) + 6 \times 2 \times 0 - (-3) \times 5 \times 6 - 0 \times 2 \times 1 - 7 \times 2 \times 4 = 35 - 24 + 90 - 56 = 45.$$

1.2. Поняття мінору та алгебраїчного доповнення елементів визначників II, III порядків

Означення. Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника d називається такий визначник, який одержимо з визначника d після викреслювання рядка та стовпчика, на перетині яких знаходиться елемент a_{ij}.

Приклад. Знайти мінор M_{23} визначника

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 6 & 2 & 7 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Викреслимо у даному визначнику d другий рядок та третій стовпчик.

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 6 = -10.$$

Означення. Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} визначника називається мінор M_{ij}, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$.

Приклад. Знайти алгебраїчне доповнення елемента a_{23} визначника d

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 6 & 2 & 7 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

$M_{23} = -10$, $A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = (-1)^5 \cdot (-10) = 10$.

Беручи до уваги поняття алгебраїчного доповнення, можна дати інше означення визначника.

Означення. Визначником II порядку називається число, що подане формулою

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} . \qquad (1.1')$$

Означення. Визначником III порядку називається число, що подане формулою

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}. \qquad (1.2')$$

Можна показати, що формули (1.1) та (1.1'), (1.2) та (1.2') еквівалентні.
Як відомо,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} .$$

З іншого боку,

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a_{11} \cdot (-1)^2 a_{22} + a_{12} \cdot (-1)^3 a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} .$$

Отже, виходить, що формула (1.1') є слушною.
Далі,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} .$$

З іншого боку,

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}(-1)^2 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^3 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^4 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Значить і формула (1.2') є слушною.

1.3. Властивості визначників II та III порядків

Властивість 1. Якщо рядки визначника замінити на стовпчики, то значення визначника не зміниться.

Таке перетворення визначника називається транспонуванням, а отриманий визначник називається транспонованим по відношенню до даного.

Доведення

Нехай

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \_$$

заданий визначник,

$$d^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \_$$

транспонований визначник.

Доведемо, що $d = d^T$, скориставшись формулою (1.2).

$d = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$.

$d^T = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$.

Праві частини отриманих рівностей однакові, значить, рівні і ліві частини, тобто $d = d^T$, що і потрібно було довести.

Зауваження. Приймаючи до уваги доведену властивість, будемо усі інші властивості формулювати та доводити лише для рядків, маючи на увазі, що вони слушні і для стовпчиків.

Властивість 2. Якщо усі елементи будь-якого рядка визначника дорівнюють нулю, то і сам визначник дорівнює нулю.

Доведення

Нехай нулю дорівнюють елементи другого рядка визначника

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Тоді за формулою (1.2)

$d = a_{11} \times 0 \times a_{33} + a_{13} \times 0 \times a_{32} + a_{12} \times 0 \times a_{31} - a_{13} \times 0 \times a_{31} - a_{11} \times 0 \times a_{32} - a_{12} \times 0 \times a_{33} = 0$, що і необхідно було довести.

Властивість 3. При перестановці двох рядків знак визначника змінюється на протилежний.

Доведення

Розглянемо визначник

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

та поміняємо у ньому місцями два сусідні рядки, наприклад, другий та третій. Отримаємо визначник

$$d_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Тоді

$d = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$,

$d_1 = a_{11}a_{23}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{31}$.

Неважко помітити, що праві частини отриманих рівнянь протилежні по знаку. Отже, $d = -d_1$. Тепер у визначнику d поміняємо місцями не сусідні рядки, тобто перший та третій. Отримаємо визначник

$$d_2 = \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}.$$

$d_2 = a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32} - a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{21}a_{32}$.

Вочевидь, що $d = -d_2$.

Таким чином, властивість доведена.

Властивість 4. Визначник, який має два однакові рядки, дорівнює нулю.

Доведення

Нехай у визначнику d є два однакові рядки. Поміняємо їх місцями і отримаємо визначник d_1. У відповідності до властивості (3) маємо:

$$d = -d_1. \tag{1.3}$$

Але у зв'язку з тим, що рядки у визначнику мінялись однакові, виходить, що

$$d = d_1. \tag{1.4}$$

Рівності (1.3) та (1.4) обидві слушні, а сумісні лише тоді, коли $d = 0$, що і необхідно було довести.

Властивість 5. Якщо усі елементи будь-якого рядка визначника мають спільний множник, то його можна виносити за знак визначника.

Доведення

Розглянемо такий визначник, у якому усі елементи одного з рядків мають спільний множник k.

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = ka_{11}a_{22}a_{33} + ka_{13}a_{21}a_{32} + ka_{12}a_{23}a_{31} - ka_{13}a_{22}a_{31} - ka_{11}a_{23}a_{32} -$$

$$-ka_{12}a_{21}a_{33} = k\left(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\right) =$$

$$= k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

що і необхідно було довести.

Наслідок. Якщо у визначнику є два рядки, елементи яких пропорційні, то такий визначник дорівнює нулю.

Властивість 6. Якщо кожний елемент будь-якого рядка визначника є сумою двох доданків, то визначник можна подати як суму двох визначників, у кожному з котрих усі елементи ті самі, що і в заданому визначнику, окрім елементів вказаного рядка. У першому визначнику вказаний рядок складається з перших доданків, а у другому – з других.

Доведення

Мусимо довести таку рівність:

$$\begin{vmatrix} b_{11}+c_{11} & b_{12}+c_{12} & b_{13}+c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{1.5}$$

Обчислимо усі визначники. Позначимо визначник, який стоїть зліва у рівності (1.5) через d, а визначники справа – через d_1 та d_2. Тоді

$$d=\left(b_{11}+c_{11}\right)a_{22}a_{33}+\left(b_{12}+c_{12}\right)a_{23}a_{31}+\left(b_{13}+c_{13}\right)a_{21}a_{32}-\left(b_{13}+c_{13}\right)a_{22}a_{31}-$$
$$-\left(b_{11}+c_{11}\right)a_{23}a_{32}-\left(b_{12}+c_{12}\right)a_{21}a_{33}.$$

$$d_1+d_2=b_{11}a_{22}a_{33}+b_{12}a_{23}a_{31}+b_{13}a_{21}a_{32}-b_{13}a_{22}a_{31}-b_{12}a_{21}a_{33}-b_{11}a_{23}a_{32}+$$
$$+c_{11}a_{22}a_{33}+c_{12}a_{23}a_{31}+c_{13}a_{21}a_{32}-c_{13}a_{22}a_{31}-c_{12}a_{21}a_{33}-c_{11}a_{23}a_{32}=$$
$$=\left(b_{11}+c_{11}\right)a_{22}a_{33}+\left(b_{12}+c_{12}\right)a_{23}a_{31}+\left(b_{13}+c_{13}\right)a_{21}a_{32}-\left(b_{13}+c_{13}\right)a_{22}a_{31}-$$
$$-\left(b_{11}+c_{11}\right)a_{23}a_{32}-\left(b_{12}+c_{12}\right)a_{21}a_{33}=d,$$

що і необхідно було довести.

Властивість 7. Сума добутків елементів будь-якого рядка визначника на їх алгебраїчні доповнення дорівнює значенню визначника.

Доведення

Треба довести рівність:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}.$$

Перетворюючи обидві частини цієї рівності, отримаємо таку рівність:

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}=$$
$$=a_{11}\left(-1\right)^2\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{12}\left(-1\right)^3\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\left(-1\right)^4\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=$$
$$=a_{11}\left(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}\right)-a_{12}\left(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}\right)+a_{13}\left(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}\right)=$$
$$=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{31}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}=$$
$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},$$

що і стверджує справедливість початкової рівності.

Властивість 8. Сума добутків елементів будь-якого рядка визначника на алгебраїчні доповнення до відповідних елементів іншого рядка дорівнює нулю.

Доведення

Треба довести рівність

$$a_{21}\left(-1\right)^2\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{22}\left(-1\right)^3\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{23}\left(-1\right)^4\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=$$
$$=a_{21}\left(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}\right)-a_{22}\left(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}\right)+a_{23}\left(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}\right)=$$
$$=a_{21}a_{22}a_{33}-a_{21}a_{23}a_{32}-a_{22}a_{21}a_{33}+a_{22}a_{23}a_{31}+a_{23}a_{21}a_{32}-a_{23}a_{22}a_{31}=0,$$

що і треба було довести.

Властивість 9. Визначник не зміниться, якщо до елементів будь-якого рядка додати відповідні елементи другого рядка, помножені на одне й те ж число.

Доведення

Мусимо довести рівність:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & a_{13}+ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \quad (1.6)$$

Позначимо через d визначник, який стоїть зліва, а через d_1 – визначник, який стоїть справа в рівності (1.6) і перетворимо визначник d_1, застосовуючи властивості 5 та 6.

$$d_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = d + k\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Застосувавши властивість 4, бачимо, що

$$d_1 = d + k \times 0$$

або

$$d_1 = d,$$

що і потрібно було довести.

1.4. Визначники n-го порядку

Означення. Визначником порядку n називається число, яке дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка або стовпчика на їх алгебраїчні доповнення.

Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{cases} a_{1m}A_{1m} + a_{2m}A_{2m} + \ldots + a_{nm}A_{nm}, \ m = 1,2,\ldots,n. \\ a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}, \ i = 1,2,\ldots,n. \end{cases} \quad (1.7)$$

Із цієї формули виходить, що обчислення визначника n-го порядку зводиться до обчислення визначників (n – 1)-го порядку.

Можна довести, що визначники n-го порядку мають ті ж властивості, що і визначники II, III порядків.

Визначники можна обчислювати, користуючись рівністю (1.7) або ж властивостями визначників.

Приклад. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Розкладемо визначник за елементами другого рядка.

$$\Delta = 0\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 2\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 4\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+2\times(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 0\times(-1)^{2+5}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} -$$

$$-4\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Обчислимо отримані визначники IV порядку.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\times(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 1\times(-1)^{4+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 0\times(-1)^{4+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+1\times(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -2\times(-2+3+6-(-12+3) + 1(-1-15+6-1-6-15) +$$

$$+1\times(-3+15-2+3+1-30) = -2\times(-3) + 1\times(-8) + 1\times(-16) = -42.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -5\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\times(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -5\times(9+3+3+3) + (-1-1+6-2-1-3) + 2\times(3+18+6-3) = -44.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\times(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -5\times(3+2+2+1-3+2) + (-1-1+6-2-1-3) + 2\times(-1+2+6+4-1-3) = -18.$$

Таким чином,

$$\Delta = 2\times(-42) - 4\times(-44) + 2\times(-18) = 56.$$

Розглянемо тепер інший метод обчислення визначників, використовуючи властивості визначників.

Приклад. Обчислити визначник

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 3 & 2 & 3 & -1\\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0\\ 5 & 0 & -1 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 1 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1\end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Поставимо мету, в якомусь з рядків або стовпчиків визначника зробити якнайбільше нулів. Помножимо другий стовпчик на (−2) і додамо до третього стовпчика, а тоді помножимо другий стовпчик на (−1) й додамо до четвертого стовпчика. Отримаємо:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 3 & -4 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 5 & 0 & -1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1\end{vmatrix}.$$

Тепер розкладемо визначник Δ за елементами другого рядка.

$$\Delta=2\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & -4 & 0 & -1\\ 5 & -1 & -1 & 2\\ 1 & 3 & 4 & 1\\ 2 & -1 & -1 & 1\end{vmatrix}.$$

Знову будемо створювати нулі в отриманому визначнику. Помножимо перший стовпчик на 4 та додамо до другого стовпчика, далі перший стовпчик додаємо до четвертого стовпчика. Отримаємо:

$$\Delta=2\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 5 & 19 & -1 & 7\\ 1 & 7 & 4 & 2\\ 2 & 7 & -1 & 3\end{vmatrix}.$$

Цей визначник розкладемо за елементами першого рядка.

$$\Delta=2\times1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}19 & -1 & 7\\ 7 & 4 & 2\\ 7 & -1 & 3\end{vmatrix}=2\times(228-49-14-196+38+21)=56.$$

Такий метод знаходження визначників простіший, ніж попередній, але ним зручно користуватися, коли серед елементів визначника є одиниці.

Розглянемо ще один метод обчислення визначників на цьому ж прикладі.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Порядок роботи.

1. Елемент a_{11}, який відрізняється від нуля, будемо називати провідним елементом. Залишаємо без змін перший рядок, а у першому стовпчику усі елементи, за винятком першого, вважаємо нулями. Усі інші елементи a'_{ij} визначника обчислюємо за так званим правилом прямокутника:

$$a'_{ij} = a_{ij} \cdot a_{11} - a_{i1} \cdot a_{1j}.$$

Це правило зручно розглядати наступним чином. Вважаємо, що елемент a_{ij} разом з провідним елементом a_{11} є вершинами прямокутника, які лежать на його діагоналі, званою головною діагоналлю.

Неважко визначити дві інші вершини прямокутника, які лежать на його другій діагоналі, a_{i1} та a_{1j}. Далі знаходимо добутки елементів, які символізують вершини, що належать головній діагоналі, а потім − іншій діагоналі.

Різниця цих добутків дає значення елемента a'_{ij}.

Отже маємо:

$$a'_{32} = 0 \times 1 - 5 \times 3 = -15;$$
$$a'_{33} = -1 \times 1 - 5 \times 2 = -11;$$
$$a'_{34} = -1 \times 1 - 5 \times 3 = -16;$$
$$a'_{35} = 2 \times 1 - 5 \times (-1) = 7;$$
$$a'_{42} = -1 \times 1 - 1 \times 3 = -4;$$
$$a'_{43} = 1 \times 1 - 1 \times 2 = -1;$$
$$a'_{44} = 3 \times 1 - 1 \times 3 = 0;$$
$$a'_{45} = 1 \times 1 - 1 \times (-1) = 2;$$
$$a'_{52} = 1 \times 1 - 2 \times 3 = -5;$$
$$a'_{53} = 1 \times 1 - 2 \times 2 = -3;$$
$$a'_{54} = 0 \times 1 - 2 \times 3 = -6;$$
$$a'_{55} = 1 \times 1 - 2 \times (-1) = 3.$$

Зауваження 1. Якщо у якомусь рядку елемент, який знаходиться під провідним елементом дорівнює нулеві, то елементи цього рядка слід переписати без змін.

2. Записуємо визначник Δ після проведених перетворень

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -15 & -11 & -16 & 7 \\ 0 & -4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & -3 & -6 & 3 \end{vmatrix}.$$

Зауваження 2. Записуючи визначник Δ після перетворень, перед визначником необхідно записати множник, що дорівнює $\frac{1}{a_{ij}^{\ k}}$, де a_{ij} – провідний елемент, а k – число рядків визначника під рядком з провідним елементом, якщо у цьому рядку елемент, розміщений під провідним елементом, відрізняється від нуля.

У даному випадку провідний елемент $a_{ij} = 1$, отже, означений множник дорівнює одиниці у степені $k = 3$.

3. Наступні перетворювання складаються з таких етапів:
- перший та другий рядки переписуємо без змін;
- перший стовпчик переписуємо без змін;
- у другому стовпчику усі елементи, починаючи з третього, вважаємо нулями;
- елемент a'_{22} назначаємо провідним елементом;
- усі інші елементи a''_{ij} обчислюємо за правилом прямокутника, за умови, що однією з вершин обов'язково буде провідний елемент $a'_{22} \neq 0.$

$a''_{33} = 2\times(-11) - (-15)\times4 = 38;$ $\quad a''_{45} = 2\times2 - (-4)\times0 = 4;$

$a''_{34} = 2\times(-16) - (-15)\times2 = -2;$ $\quad a''_{53} = 2\times(-3) - (-5)\times4 = 14;$

$a''_{35} = 2\times7 - (-15)\times0 = 14;$ $\quad a''_{54} = 2\times(-6) - (-5)\times2 = -2;$

$a''_{43} = 2\times(-1) - (-4)\times4 = 14;$ $\quad a''_{55} = 2\times3 - (-5)\times0 = 6.$

$a''_{44} = 2\times0 - (-4)\times2 = 8;$

4. Знову записуємо визначник Δ після перетворень

$$\Delta = \frac{1}{2^3}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 38 & -2 & 14 \\ 0 & 0 & 14 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 14 & -2 & 6 \end{vmatrix}.$$

Для спрощення подальших розрахунків з другого, третього, четвертого та п’ятого рядків можна винести спільні множники.

$$\Delta = \frac{2\cdot2\cdot2\cdot2}{2^3}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 19 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

5. Продовжимо аналогічні перетворення, назначивши провідним елементом $a''_{33} = 19.$

$a'''_{44} = 19\times4 - 7\times(-1) = 83;$ $\quad a'''_{54} = 19\times(-1) - 7\times(-1) = -12;$

$a'''_{45} = 19\times2 - 7\times7 = -13;$ $\quad a'''_{55} = 19\times3 - 7\times7 = 8.$

6.Записуємо визначник Δ після перетворень

$$\Delta=\frac{2}{19^2}\begin{vmatrix}1&3&2&3&-1\\0&1&2&1&0\\0&0&19&-1&7\\0&0&0&83&-11\\0&0&0&-12&8\end{vmatrix}.$$

7. Тепер провідним елементом назначимо $a_{44}''' = 83$.

$a_{55}^{IV} = 8 \times 83 - (-12) \times (-11) = 532$.

8. Запишемо визначник Δ

$$\Delta=\frac{2}{19^2 \times 83}\begin{vmatrix}1&3&2&3&-1\\0&1&2&1&0\\0&0&19&-1&7\\0&0&0&83&-11\\0&0&0&0&532\end{vmatrix}.$$

9. Отриманий визначник розкладаємо за елементами останнього рядка.

$$\Delta=\frac{532\cdot 2}{19^2\cdot 83}\begin{vmatrix}1&3&2&3\\0&1&2&1\\0&0&19&-1\\0&0&0&83\end{vmatrix}.$$

Знову розкладаємо визначник за елементами останнього рядка.

$$\Delta=\frac{532\times 2\times 83}{19^2\times 83}\begin{vmatrix}1&3&2\\0&1&2\\0&0&19\end{vmatrix}=\frac{532\times 2\times 19}{19^2}\begin{vmatrix}1&3\\0&1\end{vmatrix}=\frac{532\times 2\times 1}{19}=56.$$

1.5. Множення визначників

Нехай дані два визначника одного і того ж порядку *n*.

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\-&-&-&-\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{nn}\end{vmatrix};\qquad |B|=\begin{vmatrix}b_{11}&b_{12}&\dots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&\dots&b_{2n}\\-&-&-&-\\b_{n1}&b_{n2}&\dots&b_{nn}\end{vmatrix}.$$

Означення. Добутком визначників $|A|$ та $|B|$ називається визначник $|C|$ того ж порядку n:

$$|C|=\begin{vmatrix}c_{11}&c_{12}&\dots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\dots&c_{2n}\\-&-&-&-\\c_{n1}&c_{n2}&\dots&c_{nn}\end{vmatrix},$$

усі елементи якого знаходяться за однією з чотирьох формул:

$$1)\ c_{ij} = a_{i1}b_{j1} + a_{i2}b_{j2} + \ldots + a_{in}b_{jn};$$

$$2)\ c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj};$$

$$3)\ c_{ij} = a_{1i}b_{j1} + a_{2i}b_{j2} + \ldots + a_{ni}b_{jn};$$

$$4)\ c_{ij} = a_{1i}b_{1j} + a_{2i}b_{2j} + \ldots + a_{ni}b_{nj}.$$

У першому випадку елемент c_{ij} знаходиться як сума добутків i -го рядка визначника $|A|$ на j -й рядок визначника $|B|$. Кажуть, що у даному випадку добуток отримано множенням рядків першого визначника на рядки другого визначника. У другому випадку елемент c_{ij} отримано множенням рядків на стовпчики, у третьому – стовпчиків на рядки, у четвертому − стовпчиків на стовпчики. Значення визначника $|C|$ те ж саме у всіх чотирьох випадках, незважаючи на те, що елементи c_{ij} різні.

Добуток визначників позначається так:

$$|C| = |A| \cdot |B|.$$

Приклад. Знайти добуток визначників чотирма способами:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}, \qquad |B| = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

$$1)\ \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4\times4 + 3\times5 & 4\times(-1) + 3\times2 \\ 7\times4 + 6\times5 & 7\times(-1) + 6\times2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 31 & 2 \\ 58 & 5 \end{vmatrix} = 39;$$

$$2)\ \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4\times4 + 3\times(-1) & 4\times5 + 3\times2 \\ 7\times4 + 6\times(-1) & 7\times5 + 6\times2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 26 \\ 22 & 47 \end{vmatrix} = 39;$$

$$3)\ \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4\times4 + 7\times5 & 3\times4 + 6\times5 \\ 4\times(-1) + 7\times2 & 3\times(-1) + 6\times2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 51 & 42 \\ 10 & 9 \end{vmatrix} = 39;$$

$$4)\ \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4\times4 + 7\times(-1) & 4\times5 + 7\times2 \\ 3\times4 + 6\times(-1) & 3\times5 + 6\times2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 34 \\ 6 & 27 \end{vmatrix} = 39.$$

Множення визначників можна використовувати для обчислення деяких визначників спеціального вигляду.

Приклад. Обчислити визначник

$$D = \begin{vmatrix} x_2 & -x_1 & -x_3 & -x_4 \\ x_1 & x_2 & -x_4 & x_3 \\ x_3 & x_4 & x_2 & -x_1 \\ x_4 & -x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Піднесемо визначник D до квадрату, помноживши стовпчики на стовпчики, отримаємо

$$D^2 = \begin{vmatrix} x_2^2+x_1^2+x_3^2+x_4^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1^2+x_2^2+x_4^2+x_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3^2+x_4^2+x_2^2+x_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_4^2+x_3^2+x_1^2+x_2^2 \end{vmatrix} =$$

$$=\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\right)^4.$$

Оскільки визначник D має на головній діагоналі добуток, рівний x_2^4, з обох частин отриманої рівності можна добути арифметичний корінь, звідки

$$D = \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2\right)^2.$$

II. МАТРИЦІ, ВИДИ МАТРИЦЬ, ДІЇ НАД МАТРИЦЯМИ

2.1. Матриці. Види матриць

Означення. Матрицею розмірності $(m\times n)$ називається множина чисел, що утворюють прямокутну таблицю з m рядків та n стовпчиків.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} \\ - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Для будь-якого аргументу a_{ij} перший індекс визначає номер рядка, а дру-гий − номер стовпчика. Скорочено матриці позначають так:

$$A = \left(a_{ij} \right),$$

де $i=1,2,\ldots,m, \quad j=1,2,\ldots,n.$

Означення. Якщо кількість рядків матриці не дорівнює кількості стовпчиків, то матриця називається прямокутною. Так, наприклад, матриці

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{pmatrix}$$

є прямокутними матрицями.

Означення. Якщо кількість рядків дорівнює кількості стовпчиків і дорівнює n, то матриця називається квадратною матрицею порядку n. Наприклад,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Означення. Кожній квадратній матриці відповідає визначник, складений з елементів матриці, який називається детермінантом матриці та позначається $|A|$ або $\det A$.

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} \\ - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots a_{mn} \end{vmatrix}.$$

Розглянемо квадратну матрицю порядку n:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Елементи матриці $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ складають її головну діагональ, а елементи $a_{1n}, a_{2n-1}, \ldots, a_{n1}$ складають допоміжну діагональ матриці.

Означення. Квадратна матриця, у якої всі елементи, окрім тих, що знаходяться на головній діагоналі, дорівнюють нулеві, називається діагональною матрицею

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (2.2)$$

Означення. Квадратна матриця, елементи якої задовольняють умові $a_{mn}=a_{nm}$, називається симетричною матрицею

$$S=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (2.3)$$

Означення. Діагональна матриця, у якої $a_{11}=a_{22}=...=a_{nn}$, називається скалярною матрицею

$$C=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}. \qquad (2.4)$$

Означення. Скалярна матриця, у якої $a_{11}=a_{22}=...=a_{nn}=1$, називається одиничною матрицею

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (2.5)$$

Примітка. Визначник одиничної матриці дорівнює одиниці, тобто $\det E=1$.

Означення. Квадратна матриця, усі елементи якої дорівнюють нулеві, називається нульовою матрицею

$$0=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \qquad (2.6)$$

Примітка. Визначник нульової матриці дорівнює нулеві.

Означення. Прямокутні матриці, розмір яких ($1\times n$)або ($m\times 1$), називаються відповідно матриця–рядок та матриця–стовпчик

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ...a_{1n} \end{pmatrix}, \qquad (2.7)$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}. \qquad (2.8)$$

Такі матриці називаються векторами.

2.2. Рівність матриць

Означення. Дві матриці називаються рівними, якщо у них однаковий розмір, а відповідні елементи рівні між собою.

Означення. Якщо у матриці

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

розмірності $\left(m\times n \right)$ рядки замінити стовпчиками, то отримана матриця

$$A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (2.9)$$

розмірності ($n\times m$) називається транспонованою матрицею.

Зв'язок між A та A^T зручно показати на схемі.

Рисунок 2.1− Схематичне зображення зв'язку між матрицями A та A^T.

Для матриці–рядка $A=\left(a_{11}\ \ a_{12}...a_{1n} \right)$ транспонованою матрицею є матриця–стовпчик.

$$A^T=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix}.$$

Для матриць є слушною рівність:

$$\left(A^T \right)^T=A.$$

2.3. Лінійні операції над матрицями

Означення. Сумою матриць A та B однієї розмірності називається така матриця $C = A + B$ тієї ж розмірності, елементи якої дорівнюють сумі відповідних елементів матриць A та B.

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Тоді сума матриць $C = A + B$ має вигляд

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Приклад. Скласти матриці A та B, якщо:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix};$

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

Розв'язання

а) $C = A + B = \begin{pmatrix} 2-1 & 4+3 \\ -1+1 & 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$

б) $C = A + B = \begin{pmatrix} 1+2 & 2-4 & -3+1 \\ 2+3 & -4+0 & 5+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$

Властивості додавання матриць

Властивість 1. Комутативна.

$$A + B = B + A,$$

де A та B матриці однієї розмірності.

Властивість 2. Сполучна.

$$(A + B) + C = A + (B + C),$$

де A, B, C – матриці однієї розмірності.

Властивість 3. Поглинання нуля.

$$A + 0 = A.$$

Властивість 4. Існування протилежної матриці.

$$A + (-A) = 0.$$

Властивість 5. $\left(A+B\right)^T = A^T + B^T$.

Означення. Добутком матриці A на число k називається така матриця kA, кожен елемент якої дорівнює відповідному елементу матриці A, помноженому на число k.

Нехай

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

тоді

$$kA=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

Властивості множення матриці на число

Властивість 1.

$$\alpha A = A\alpha,$$

де α – дійсне число;

Властивість 2.

$$\left(\alpha\beta\right)A = \alpha\left(\beta A\right),$$

де α, β – дійсні числа;

Властивість 3.

$$\left(\alpha+\beta\right)A = \alpha A + \beta A,$$

де α, β – дійсні числа;

Властивість 4.

$$\alpha\left(A+B\right) = \alpha A + \alpha B,$$

де α – дійсне число;

Властивість 5.

$$\left(\lambda A\right)^T = \lambda A^T,$$

де − дійсне число.

Завдання на самостійну роботу. Довести слушність властивостей 1−5.

Приклад. Помножити матрицю A

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

на число $k=3$.

Розв'язання

$$3A=\begin{pmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot(-1) & 3\cdot 4 \\ 3\cdot 0 & 3\cdot 5 & 3\cdot(-3) \\ 3\cdot(-2) & 3\cdot 1 & 3\cdot 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & -3 & 12 \\ 0 & 15 & -9 \\ -6 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приклад. Знайти матрицю, протилежну матриці A, де

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Розв'язання

Для того, щоб знайти матрицю $(-A)$, протилежну матриці A, треба матрицю A помножити на (-1).

$$-A=-1\cdot A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Приклад. Знайти лінійну комбінацію $(3A-2B)$ матриць A та B, якщо

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -7 \end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 5 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

$$3A=\begin{pmatrix} 6 & -12 & 0 \\ -3 & 15 & 3 \\ 0 & 9 & -21 \end{pmatrix},\qquad -2B=\begin{pmatrix} -8 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & -10 \\ -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$3A-2B=\begin{pmatrix} 6-8 & -12+2 & 0+4 \\ -3+0 & 15+6 & 3-10 \\ 0-4 & 9+0 & -21+8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -10 & 4 \\ -3 & 21 & -7 \\ -4 & 9 & -13 \end{pmatrix}.$$

2.4 **. Множення матриць**

Розглянемо матриці

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix} \text{ та } B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ - & - & - & - \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix},$$

такі, що кількість стовпчиків першої матриці дорівнює кількості рядків другої матриці.

Означення. Добутком матриці A розмірності $(m \times p)$ на матрицю B розмірності $(p \times n)$ називається матриця C розмірності $(m \times n)$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ - & - & - & - \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix},$$

тобто матриця, у якої кількість рядків співпадає з кількістю рядків першої матриці, а кількість стовпчиків – з кількістю стовпчиків другої матриці.

Елемент c_{ij} матриці C дорівнює сумі добутків елементів $i-$ того рядка першої матриці на відповідні елементи $j-$ того стовпчика другої матриці, тобто

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}. \tag{2.10}$$

Зрозуміти процес множення матриць можна на таких схемах.

Рисунок 2.2−Схематичне зображення множення матриць.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ - & - & - & - \\ \boxed{a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip}} \\ - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & \boxed{b_{1j}} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & \boxed{b_{2j}} & \cdots & b_{2n} \\ - & - & - & - & - & - \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & \boxed{b_{pj}} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ - & - & \boxed{c_{ij}} & - \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

Рисунок 2.3 − Множення матриць.

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots + a_{ip}b_{pj},$$

де $i = 1; 2; \ldots m; \quad j = 1; 2; \ldots; n.$

Приклад. Знайти добуток матриць

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання

Знаходимо кожний з елементів матриці $C = AB$.

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 3\cdot 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 1 = 6;$$

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} = 3\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 1\cdot 0 = 2;$$

$$c_{13} = a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} = 3\cdot(-1) + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 = -1;$$

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{32} = 2\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 2\cdot 0 = 1;$$

$$c_{23} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} = 2\cdot(-1) + 1\cdot 1 + 2\cdot 1 = 1;$$

$$c_{31} = a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} = 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 1 = 8;$$

$$c_{32} = a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} = 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) + 3\cdot 0 = -1;$$

$$c_{33} = a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} = 1\cdot(-1) + 2\cdot 1 + 3\cdot 1 = 4.$$

Виходить,
$$C = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Приклад. Знайти добуток AB, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

$$AB = \begin{pmatrix} 0\cdot 3 + (-1)\cdot 2 + 2\cdot 1 & 0\cdot 1 + (-1)\cdot 1 + 2\cdot 0 \\ 2\cdot 3 + 1\cdot 2 + 1\cdot 1 & 2\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 0 \\ 3\cdot 3 + 0\cdot 2 + 1\cdot 1 & 3\cdot 1 + 0\cdot 1 + 1\cdot 0 \\ 3\cdot 3 + 7\cdot 2 + 1\cdot 1 & 3\cdot 1 + 7\cdot 1 + 1\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 9 & 3 \\ 10 & 3 \\ 24 & 10 \end{pmatrix}.$$

Якщо ми спробуємо знайти добуток BA, то дійдемо висновку, що це неможливо.

Властивості множення матриць

Властивість 1. Добуток матриць може бути нульовою матрицею, хоча обидва множника не нульові матриці.

Властивість 2. Множення матриць не комутативне:

$$AB \neq BA.$$

Примітка. Ті матриці, які задовольняють умові

$$AB = BA,$$

називаються переставними або комутативними.

Властивість 3. Множення матриць асоціативне:

$$(AB)C = A(BC).$$

Властивість 4. Для множення матриць слушна рівність:

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$$

Властивість 5. Множення матриць дистрибутивне відносно додавання:
$\left(A+B\right)\times C = AB + BC;$

$C\times\left(A+B\right) = CA + CB.$

Завдання на самостійну роботу. Довести слушність властивостей 1-5.

Властивість 6. Для транспонування добутку матриць слушна формула:

$$\left(AB\right)^T = B^T A^T. \qquad (5.11)$$

Доведення

Для доведення цієї властивості знайдемо елементи матриць $\left(AB\right)^T$ та $B^T A^T$, які знаходяться у $i-$ тому рядку та $j-$ ому стовпчику.

$$\left(AB\right)^T_{ij} = \left(AB\right)_{ji} = a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \cdots + a_{jn}b_{ni},$$

де $j = 1,2,\ldots m,\quad i = 1,2,\ldots e;$

$$\left(B^T A^T\right)_{ij} = b_{1i} + a_{j1} + b_{2i}a_{j2} + \cdots + b_{ni}a_{jn},$$

де $i = 1,2,\ldots,e;\quad j = 1,2,\ldots,m.$

Порівнюючи отримані результати для елементів матриць $\left(AB\right)^T$ та $B^T A^T$, які стоять в i –тому рядку та j –тому стовпчику, бачимо, що ці елементи рівні між собою. Виходить, що і матриці теж рівні між собою.

Примітка. За правилом транспонування добутку матриць маємо:

$$\left(A\times A^T\right)^T = \left(A^T\right)^T A^T = A\times A^T, \qquad (2.12)$$

тобто матриця $A\times A^T$ при транспонуванні не змінюється. Виходить, що у матриці $A\times A^T$ елементи, симетричні відносно головної діагоналі. Такі матриці, як уже відомо, називаються симетричними.

Властивість 7. Визначник добутку двох квадратних матриць одного порядку дорівнює добутку їх визначників:

$$D\left(AB\right) = D\left(A\right)\, D\left(B\right). \qquad (2.13)$$

Слушність цієї властивості виходить з правила множення визначників.

2.5. Обернена матриця

2.5.1. Основні поняття та теореми

Означення. Матриця називається неособливою , або невиродженою, якщо її визначник відрізняється від нуля, і особливою або виродженою , якщо її визначник дорівнює нулеві.

Означення. Матриця A^{-1} називається оберненою матрицею по відношенню до квадратної матриці A, якщо $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, де E – одинична матриця.

Означення. Якщо обернена матриця A^{-1} існує, то матриця A називається оборотною. Знаходження оберненої матриці за умови, що вона існує, називається оберненням матриці. Знаходження оберненої матриці має велике значення при розв'язуванні систем лінійних алгебраїчних рівнянь а також при розв'язуванні задач лінійного програмування.

Теорема. Для існування оберненої матриці необхідно та достатньо, щоб матриця була неособливою.

Доведення

I. Необхідність.

Нехай обернена матриця A^{-1} існує, тоді $AA^{-1} = E$;

$$\det\left(AA^{-1}\right) = \det E; \qquad \det A \times \det A^{-1} = 1.$$

Виходить, що $\det A \neq 0$ і, значить, матриця A – неособлива.

II. Достатність.

Нехай $\det A \neq 0$, доведемо, що існує обернена матриця A^{-1}. Для матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

побудуємо матрицю з алгебраїчних доповнень

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{n1} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ - & - & - & - \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, \tag{2.14}$$

яка називається союзною або приєднаною по відношенню до матриці A. Далі знайдемо добуток матриць A та A^*. Для цього розглянемо елемент добутку з індексами ij :

$$\left(AA^*\right)_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn}.$$

Із властивостей визначників виходить, що

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} \det A, \text{якщо} \quad i = j \\ 0, \text{якщо} \quad i \neq j \end{cases}$$

Отже, усі діагональні елементи матриці AA^* дорівнюють $\det A$, а недіагональні – нулеві. Виходить, $AA^* = \det AE$. За умовою $\det A \neq 0$, тоді

$$\frac{1}{\det A} AA^* = \frac{\det A}{\det A} E$$

або

$$A\left(\frac{1}{\det A} A^*\right) = E.$$

Таким чином, матриця $\frac{1}{\det A} A^* = A^{-1}$ є обернена матриця для неособливої матриці A.

Аналогічно доводиться рівність $A^* A = \det A \times E$. Теорема доведена.

Тепер потрібно показати, що для кожної неособливої матриці існує лише одна обернена матриця. Припустимою, що існує ще одна обернена матриця A''. Тоді

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E \text{ та } A''A = AA'' = E.$$

$$A^{-1} = A^{-1}E = A^{-1}\left(AA''\right) = \left(A^{-1}A\right)A'' = EA'' = A''.$$

Виходить $A^{-1} = A''$, тобто обернена матриця може бути лише одна.
Остаточно отримано формулу

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (2.15)$$

За допомогою обернених матриць можна розв'язувати матричні рівняння.

Якщо $AX = B$, то $X = A^{-1}B$.

Якщо $YA = B$, то $Y = BA^{-1}$.

Схема знаходження оберненої матриці

1. Знайти визначник матриці A, тобто $\det A$.
2. Знайти алгебраїчні доповнення усіх елементів матриці A.
3. Скласти приєднану матрицю A^*.
4. Помножити приєднану матрицю на число $\dfrac{1}{\det A}$.

Приклад. Знайти матрицю, обернену до матриці A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

1. $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$.

Виходить, A – неособлива матриця.

2. $A_{11} = 3;\quad A_{21} = 1;$ $A_{12} = -4;\quad A_{22} = 2.$

3. $A^* = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$

4. $A^{-1} = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$

Перевірка:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \times \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2\times 3 + 1\times 4 & 2\times 1 - 2\times 1 \\ 4\times 3 - 3\times 4 & 4\times 1 + 3\times 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Приклад. Знайти матрицю, обернену до матриці A:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 7\end{pmatrix}.$$

Розв'язання

1. $$\det A\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 7\end{vmatrix}=14\neq 0.$$

A – неособлива матриця.

2. $$A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & 7\end{vmatrix}=-7;\quad A_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}2 & 3\\ 0 & 7\end{vmatrix}=-14;\quad A_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}2 & 3\\ -1 & 2\end{vmatrix}=7;$$

$$A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}0 & 2\\ 3 & 7\end{vmatrix}=6;\quad A_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 7\end{vmatrix}=-2;\quad A_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-2;$$

$$A_{13}=(-1)^3\begin{vmatrix}0 & -1\\ 3 & 0\end{vmatrix}=3;\quad A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix}=6;\quad A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-1.$$

3. $$A^*=\begin{pmatrix}-7 & -14 & 7\\ 6 & -2 & -2\\ 3 & 6 & -1\end{pmatrix}.$$

4. $$A^{-1}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}-7 & -14 & 7\\ 6 & -2 & -2\\ 3 & 6 & -1\end{pmatrix}.$$

Перевірка:

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 7\end{pmatrix}\times\frac{1}{14}\begin{pmatrix}-7 & -14 & 7\\ 6 & -2 & -2\\ 3 & 6 & -1\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}-7+12+9 & -14-4+18 & 7-4-3\\ 0-6+6 & 0+2+12 & 0+2-2\\ -21+0+21 & -42+0+42 & 21+0-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

2.5.2. Метод Жордано-Гаусса знаходження оберненої матриці

Розглянемо тепер знаходження оберненої матриці методом Жордано-Гаусса.

1. Складемо таблицю I, у лівій частині якої записані елементи матриці A, а у правій – елементи одиничної матриці E того ж порядку, що і матриця A.
2. Діагональні елементи матриці A послідовно вважаються провідними елементами і при цьому на відповідному етапі провідними вважаються ті рядок та стовпчик, на

перетині яких знаходиться провідний елемент.

3. Далі переходимо до складання таблиці II. У таблиці I провідним елементом є елемент a_{11}, а провідним рядком – перший рядок. Провідний рядок поділимо на провідний елемент і отриманий рядок переносимо у таблицю II. У таблиці I провідним стовпчиком є перший стовпчик. Цей стовпчик у таблицю II записується таким чином, що усі елементи, які знаходились під провідним елементом замінюються нулями. Тепер розглянемо, як знаходяться ті елементи таблиці II, що не належали провідному рядку або стовпчику. У таблиці I виділяємо прямокутник, у якому даний елемент та провідний елемент є вершинами прямокутника, що лежать на одній з діагоналей прямокутника, званій головною діагоналлю. Знаходимо добуток елементів, що належать головній діагоналі, та від отриманого добутку віднімаємо добуток елементів, які належать другій діагоналі прямокутника. Результат a'_{ij} ділимо на провідний елемент та заносимо у таблицю II замість даного елемента.
4. У побудованій таким чином таблиці II провідним елементом вважаємо елемент a'_{22}. Аналогічно створюємо таблицю III , при цьому перший рядок та перший стовпчик таблиці II у таблицю III переходять без змін.

Такий метод обчислення елементів нової таблиці називається правилом прямокутника. Але нові елементи можна шукати і за формулою

$$a'_{kj} = \frac{a_{kj}a_{ii} - a_{ki}a_{ij}}{a_{ii}},$$

де a_{ii} – провідний елемент.

Продовжуємо цей процес до того часу, поки зліва отримаємо одиничну матрицю, тоді матриця справа буде оберненою до заданої матриці.

Приклад. Знайти матрицю, обернену поданій

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

1. Складемо таблицю I.

Таблиця I.

I	2 2 -3	1 0 0
	1 -1 0	0 1 0
	-1 0 1	0 0 1

2. Переходимо до таблиці II.

Елементи першого рядка ділимо на провідний елемент 2, результати записуємо у перший рядок таблиці II.

Усі елементи першого стовпчика, що лежать нижче першого рядка замінимо на 0.

Інші елементи таблиці II знаходимо за формулою.

$$a'_{22} = \frac{a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}}{a_{11}} = -2; \qquad a'_{23} = \frac{a_{23}a_{11} - a_{21}a_{13}}{a_{11}} = -\frac{3}{2};$$

$$a'_{24} = \frac{a_{24}a_{11} - a_{21}a_{14}}{a_{11}} = -\frac{1}{2}; \qquad a'_{25} = \frac{a_{25}a_{11} - a_{21}a_{15}}{a_{11}} = 1;$$

$$a'_{26} = \frac{a_{26}a_{11} - a_{21}a_{16}}{a_{11}} = 0; \qquad a'_{32} = \frac{a_{32}a_{11} - a_{21}a_{12}}{a_{11}} = 3;$$

$$a'_{33} = \frac{a_{33}a_{11} - a_{21}a_{13}}{a_{11}} = \frac{5}{2}; \qquad a'_{34} = \frac{a_{34}a_{11} - a_{21}a_{14}}{a_{11}} = \frac{1}{2};$$

$$a'_{35} = \frac{a_{35}a_{11} - a_{21}a_{15}}{a_{11}} = 0; \qquad a'_{36} = \frac{a_{36}a_{11} - a_{21}a_{16}}{a_{11}} = 1.$$

Тепер можна записати таблицю II.

Таблиця II

II	$\begin{matrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & -2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 3 & \frac{5}{2} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{matrix}$

3. У таблиці II провідний елемент $a'_{22} = -2$. Перший рядок та перший стовпчик таблиці II переходять без змін у таблицю III. Другий рядок таблиці II ділимо на $a'_{22} = -2$, результат заносимо у таблицю III, також записуємо у таблицю III другий стовпчик, у якому усі елементи, що лежать нижче другого рядка, дорівнюють 0.

Інші елементи знаходимо за формулою.

$$a''_{13} = \frac{a'_{13}a'_{22} - a'_{12}a'_{23}}{a'_{22}} = \frac{3}{4}; \qquad a''_{14} = \frac{a'_{14}a'_{22} - a'_{12}a'_{24}}{a'_{22}} = \frac{1}{4};$$

$$a''_{15} = \frac{a'_{15}a'_{22} - a'_{12}a'_{25}}{a'_{22}} = \frac{1}{2}; \qquad a''_{16} = \frac{a'_{16}a'_{22} - a'_{12}a'_{26}}{a'_{22}} = 0;$$

$$a''_{33} = \frac{a'_{33}a'_{22} - a'_{12}a'_{32}}{a'_{22}} = \frac{1}{4}; \qquad a''_{34} = \frac{a'_{34}a'_{22} - a'_{12}a'_{24}}{a'_{22}} = -\frac{1}{4};$$

$$a''_{35} = \frac{a'_{35}a'_{22} - a'_{12}a'_{25}}{a'_{22}} = \frac{3}{2}; \qquad a''_{36} = \frac{a'_{36}a'_{22} - a'_{12}a'_{26}}{a'_{22}} = 1.$$

Таблиця III

III	$\begin{matrix} 1 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} & 1 \end{matrix}$

4. У таблиці III провідним елементом є $a''_{33} = \frac{1}{4}$. До таблиці IV переходимо за аналогічними правилами.

$$a'''_{14} = \frac{a''_{14}a''_{33} - a''_{13}a''_{34}}{a''_{33}} = 1; \qquad a'''_{15} = \frac{a''_{15}a''_{33} - a''_{13}a''_{35}}{a''_{33}} = -4;$$

$$a'''_{16} = \frac{a''_{16}a''_{33} - a''_{13}a''_{36}}{a''_{33}} = -3; \qquad a'''_{24} = \frac{a''_{24}a''_{33} - a''_{13}a''_{34}}{a''_{33}} = 1;$$

$$a'''_{25} = \frac{a''_{25}a''_{33} - a''_{13}a''_{35}}{a''_{33}} = -5; \qquad a'''_{26} = \frac{a''_{26}a''_{33} - a''_{13}a''_{36}}{a''_{33}} = -3.$$

Таблиця IV

IV	1 0 0 0 1 0 0 0 1	1 -4 -3 1 -5 -3 -1 6 4

5. Оскільки у лівій частині вийшла одинична матриця, можна визнати, що у правій частині ми отримали обернену матрицю. Отже,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. Перевірка:

$$A \times A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Іноді виходить так, що елемент, який у ході перетворень слід вважати провідним, дорівнює нулеві. У цьому випадку належить скористатись одним з поданих способів.

1. До рядка, що утворює нульовий провідний елемент, слід додати другий рядок так, щоб при цьому збереглися отримані раніше нулі, а новий провідний елемент вже відрізнявся від нуля.
2. Поміняти місцями два рядки.
3. До стовпчика, що утримує нульовий провідний елемент, додати інший стовпчик так, щоб збереглися отримані раніше нулі та новий провідний елемент відрізнявся від нуля.
4. Поміняти місцями два стовпчики.
5. У провідному рядку вибрати провідним не діагональний, а будь-який інший елемент, що відрізняється від нуля та розміщується правіше діагонального.

Зробивши одне з рекомендованих перетворень, необхідно продовжити процес пошуку оберненої матриці. При цьому слід мати на увазі, що коли перетворення виконується з рядками, то отримана справа матриця і є оберненою матрицею. Якщо ж перетворення виконуються зі стовпчиками, то отримана матриця ще не є оберненою. Наприклад, коли у процесі перетворень поміняти місцями *i*-й та *j*-й стовпчики, то в отриманій справа матриці слід поміняти місцями *i*-й та *j*-й рядки. Після цього матриця стане оберненою.

Якщо у процесі перетворень до *i*-го стовпчика додавався *j*-й, то в отриманій справа матриці слід до j-го рядка додати i-й, після чого матриця стане оберненою.

Якщо замість нульового провідного елемента було обрано інший, недіагональний елемент, то після виконання усіх перетворень зліва виходить не одинична матриця, а така, з якої перестановкою рядків можна отримати одиничну матрицю. При цьому аналогічна перестановка повинна виконуватись і над матрицею, що знаходиться справа. Тоді отримана матриця буде оберненою.

Приклад. Знайти обернену до поданої матрицю методом Жордано−Гаусса.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 0 & 5\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Розв'язання

I	1 0 2 3 0 5 -1 1 1	1 0 0 0 1 0 0 0 1
II	1 0 2 0 0 -1 0 1 3	1 0 0 -3 1 0 1 0 1
III	1 0 2 0 1 2 0 1 3	1 0 0 -2 1 1 1 0 1
IV	1 0 2 0 1 2 0 0 1	1 0 0 -2 1 1 3 -1 0
V	1 0 0 0 1 0 0 0 1	-5 2 0 -8 3 1 -3 -1 0

Отже, виходить

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-5 & 2 & 0\\ -8 & 3 & 1\\ 3 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Перевірка:

$$A\times A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 0 & 5\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5 & 2 & 0\\ -8 & 3 & 1\\ 3 & -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Завдання на самостійну роботу. Розв’язати цей приклад, помінявши місцями другий та третій рядки на другому етапі перетворень.

Розв’яжемо тепер цей приклад ще раз за допомогою перетворень 3 та 4.

Якщо користуватись перетворенням 3, то будемо мати таку таблицю.

I	$\begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$
II	$\begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}$
III	$\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}$
IV	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -5 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -8 & 3 & 0 \end{matrix}$

Випадково так вийшло, що зліва вже вийшла одинична матриця, отже, необхідність у заключному етапі перетворень для елемента a_{33} відпала. У матриці, що вийшла з правої сторони слід поміняти місцями другий та третій рядки, внаслідок чого отримаємо обернену матрицю. Тепер будемо користуватись перетворенням 4. Таблиця у цьому разі має такий вигляд.

I	$\begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$
II	$\begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}$
III	$\begin{matrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}$
IV	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -5 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -11 & 4 & -1 \end{matrix}$

V	1 0 0 0 1 0 0 0 1	-5 2 0 -8 3 1 11 4 -1

Перетворення зроблені. Зліва вийшла одинична матриця, а от справа ще не отримана обернена матриця. Для її знаходження слід до третього рядка додати другий рядок, що і дасть обернену матрицю

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-5 & 2 & 0\\ -8 & 3 & 1\\ 3 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Розглянемо тепер перетворення 5. Таблиця буде такою.

I	1 0 2 3 0 5 -1 1 1	1 0 0 0 1 0 0 0 1
II	1 0 2 0 0 -1 0 1 3	1 0 0 -3 1 0 1 0 1
III	1 0 0 0 0 1 0 1 0	-5 2 0 3 -1 0 -8 3 1

Для того, щоб зліва вийшла одинична матриця, слід другий та третій рядок поміняти місцями.

Отже, обернена матриця має такий вигляд:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-5 & 2 & 0\\ -8 & 3 & 1\\ 3 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Слід мати на увазі, що метод Джордано-Гаусса має сенс застосовувати до матриць розмірності $n \geq 4$.

2.6. Ранг матриці

2.6.1. Мінор матриці

Розглянемо матрицю A розмірності $(m \times n)$.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Означення. Мінором $k-$го порядку матриці A розмірності $(m*n)$ називається визначник порядку $k\left(k\le\min\{m,n\}\right)$, складений з елементів матриці A, що знаходяться на перетині будь-яких k рядків та будь-яких k стовпчиків матриці A.

Матриця розмірності $(m\times n)$ має мінори порядку $1,2,...,p,$ де $p\le\min\{m,n\}$. При цьому під мінорами І порядку вважають самі елементи матриць.

2.6.2. Ранг матриці

Означення. Рангом матриці називається найбільший порядок її мінора, відмінного від нуля.

Ранг нульової матриці дорівнює нулеві. При обчисленні ранга матриці слід переходити від мінорів менших порядків до мінорів більших порядків. Якщо вже є один мінор M порядку k, що відмінний від нуля, то у цьому випадку слід переходити до обчислення мінорів $(k+1)$ порядку, що окаймляють цей мінор. Якщо усі окаймляючі мінори дорівнюють нулеві, то ранг матриці дорівнює k.

Приклад. Знайти ранг матриці A

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -3 & 6 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & 11 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Оскільки серед елементів матриці є такі, які відрізняються від нуля, то можна стверджувати, що серед мінорів І порядку є відмінні від нуля. Розглянемо далі мінори ІІ порядку, утворені першим та другим рядками та першим і другим стовпчиками.

$$M=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}=0.$$

Обчислимо інші мінори у першому та другому рядках.

$$M=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}=0;\quad M=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}=-18\ne 0.$$

Ми знайшли мінор, що відрізняється від нуля. Отже, можна переходити до обчислення окаймляючих мінорів ІІІ порядку.

$$M=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}=101\ne 0.$$

Знаходимо окаймляючий мінор IV порядку.

$$M=\begin{vmatrix}1&-1&2&3\\3&-1&6&0\\2&-1&3&4\\0&-5&11&7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\3&0&0&-9\\2&1&-1&-2\\6&1&-1&-11\end{vmatrix}=0,$$

як визначник зі стовпчиками, елементи яких пропорційні. Значить, ранг матриці дорівнює 3, тобто $r(A)=3$.

Такий метод знаходження рангу матриці називається методом окаймляючих мінорів.

2.6.3. Елементарні перетворення матриці

Нехай A та $\tilde{A}$ будь-які матриці розмірності $(m\times n)$. Позначимо рядки матриці A через $a_1,a_2,...,a_k,...,a_l,...,a_m$.

1) Матриця $\tilde{A}$ отримана з матриці A перестановкою двох рядків, якщо її рядки утворюють наступну послідовність:

$$a_1,a_2,...,a_l,...,a_k,...,a_m.$$

2. Матриця $\tilde{A}$ отримана з матриці A множенням $k-$го рядка матриці A на число $\lambda\neq 0$, якщо рядки матриці $\tilde{A}$ утворюють послідовність:

$$a_1,a_2,...,\lambda a_l,...,a_k,...,a_m.$$

3. Матриця $\tilde{A}$ отримана з матриці A додаванням до елементів $k-$го рядка матриці A, відповідних елементів $l-$го рядка, помножених на число λ, якщо рядки матриці $\tilde{A}$ утворюють послідовність:

$$a_1,a_2,...,a_k+\lambda a_l,...,a_l,...,a_n.$$

Операції над матрицями, перелічені у пунктах 1; 2; 3, називаються елементарними перетвореннями рядків матриці. Аналогічні операції можна ввести і для стовпчиків.

Зауваження. Якщо матриця $\tilde{A}$ отримана з матриці A елементарними перетвореннями, то і матриця A може бути отримана з матриці $\tilde{A}$.

За допомогою елементарних перетворень матриці можна приводити до біль простої форми. Розглянемо один із методів.

I етап.

Нехай A – ненульова матриця. Може бути, в цій матриці є нульові стовпці. Тоді за допомогою елементарного перетворення 1 запишемо їх першими.

II етап.

Далі працюємо з тією частиною матриці, де залишились ненульові стовпці. Нехай перший ненульовий стовпчик є $k-$м стовпчиком. Якщо його перший елемент дорівнює нулеві, то перший рядок матриці за допомогою елементарного перетворення 1 поміняємо на такий, в якому $k-$й елемент відрізняється від нуля.

Подальші перетворення направлені на те, щоб у $k-$му стовпчику усі елементи, які лежать нижче I рядка стали нулями. Так, щоб елемент з індексами $2,k$ дорівнював нулеві, необхідно елементи другого рядка поділити на a_{2k} та помножити на $(-a_{1k})$ за допомогою елементарного перетворення 2, після чого елементи другого рядка за допомогою елементарного перетворення 3 додати до відповідних елементів першого рядка. Таким самим чином утворити нулі в усіх інших рядках k –го стовпчика.

$$\tilde{A}' = \begin{pmatrix} 0 & 0\cdots & 0 & a_{1k} & a_{1,k+1}\cdots a_{1n} \\ 0 & 0\cdots & 0 & 0 & a'_{2,k+1}\cdots a'_{2n} \\ - & - & - & & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a'_{m,k+1}\cdots a'_{mn} \end{pmatrix}$$

Ш етап.

Перший рядок отриманої матриці залишаємо надалі без змін і в наступних перетвореннях він участі не приймає. До тієї частини матриці $\tilde{A}$, що складається з другого, третього, ..., m –го рядків; $k+1, k+2, ..., k_n$ стовпчиків застосуємо перетворення такі, як і на I та II етапах.

Продовжуючи цей процес, ми зможемо матрицю A привести до ступінчастої форми.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0...0 & a'_{1k} & a'_{1,k+1} & ... & ... & ... & a'_{1n} \\ 0 & 0...0 & 0 & 0...0 & a'''_{2,k+1} & ... & ... & a'''_{2n} \\ - & - & - & - & - & - & & \\ 0 & 0...0 & 0 & 0...0 & ... & ... & ... & a^{(r)}_{j,k+r} \\ - & - & - & - & - & - & & \\ 0 & 0...0 & 0 & 0...0 & ... & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0...0 & 0 & 0...0 & ... & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}.$$

З цього виходить наступна теорема.

Теорема. Будь-яку ненульову матрицю можна привести до ступінчатої форми.

2.6.4. Знаходження рангу матриці методом елементарних перетворень

Він побудований на елементарних перетвореннях матриці, що не змінюють рангу матриці. До таких перетворень матриці відносяться наступні перетворення.

1. Транспонування матриці.
2. Перестановка двох рядків або двох стовпчиків.
3. Викреслювання рядка або стовпчика, усі елементи яких дорівнюють нулеві.
4. Викреслювання рядка або стовпчика, елементи яких пропорційні відповідним елементам іншого рядка або стовпчика.
5. Множення усіх елементів рядка або стовпчика на одне й теж число, відмінне від нуля.
6. Додавання до елементів рядка або стовпчика відповідних елементів іншого рядка або стовпчика, помножених на одне й теж число.

Приклад. Знайти ранг матриці A

$$A = \begin{pmatrix} 14 & 12 & 6 & 8 & 2 \\ 6 & 104 & 21 & 9 & 17 \\ 7 & 6 & 3 & 4 & 1 \\ 35 & 30 & 15 & 20 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

$$r(A)=r\begin{pmatrix}14 & 12 & 6 & 8 & 2\\ 6 & 104 & 21 & 9 & 17\\ 7 & 6 & 3 & 4 & 1\\ 35 & 30 & 15 & 20 & 5\end{pmatrix}.$$

В матриці A перший, третій та четвертий рядки мають пропорційні елементи. Значить, один з рядків, наприклад перший, можна викреслити. Тоді маємо

$$r(A)=\begin{pmatrix}6 & 104 & 21 & 9 & 17\\ 7 & 6 & 3 & 4 & 1\\ \cancel{35} & \cancel{30} & \cancel{15} & \cancel{20} & \cancel{5}\end{pmatrix}.$$

Елементи другого стовпчика можна поділити на 2, а елементи третього стовпчика на 3.

$$r(A)=\begin{pmatrix}6 & 52 & 7 & 9 & 17\\ 7 & 3 & 1 & 4 & 1\\ \cancel{35} & \cancel{15} & \cancel{5} & \cancel{20} & \cancel{5}\end{pmatrix}.$$

Будемо елементи останнього стовпчика послідовного множити на −7; −3; −1; −4 та додавати результати множення відповідно до першого, другого, третього, четвертого стовпчиків.

$$r(A)=\begin{pmatrix}-113 & 1 & -10 & -59 & 17\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Поділимо елементи першого, третього, четвертого стовпчиків відповідно на −113; −10; −59.

$$r(A)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 17\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Тепер можна залишити четвертий та п’ятий стовпчики.

$$r(A)=\begin{pmatrix}1 & 17\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Помножимо елементи першого стовпчика на −17 та додамо до елементів другого стовпчика.

$$r(A)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Оскільки визначник отриманої одиничної матриці завжди дорівнює одиниці, тобто, відмінний від нуля, то ранг матриці A дорівнює порядку отриманої одиничної матриці.

$$r(A)=2.$$

Означення. Відмінний від нуля мінор називається базисним мінором, а його рядки та стовпчики називаються відповідно базисними рядками та стовпчиками.

Базисних мінорів у матриці може бути декілька.

2.6.5. Поняття про лінійну залежність

Нехай маємо матрицю A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Позначимо рядки цієї матриці таким чином:

$$e_1 = (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n});$$
$$e_2 = (a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n});$$
$$- \quad - \quad -$$
$$e_m = (a_{m1}, a_{m2}, ..., a_{mn}).$$

Вираз типу

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_{m-1} e_{m-1},$$

де $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{m-1}$ – деякі дійсні числа, називається лінійною комбінацією рядків $e_1, e_2, ..., e_{m-1}$.

Припустимо, є слушною рівність

$$e_m = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_{m-1} e_{m-1}$$

або

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_{m-1} e_{m-1} - e_m = 0,$$

де під символом 0 мається на увазі нульовий рядок

$$0 = (0; 0; ...; 0),$$

то це означає, що рядок e_m лінійно виражається через рядки $e_1, e_2, ..., e_{m-1}$.

Означення. Рядки $e_1, e_2, ..., e_m$ матриці A називаються лінійно залежними, якщо існують такі числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$, серед яких хоча б одне відрізняється від нуля, та є слушною рівність

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_m e_m = 0.$$

Якщо рівність

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_m e_m = 0,$$

можлива лише тоді, коли $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_m = 0$, то рядки $e_1, e_2, ..., e_m$ називаються лінійно незалежними.

З попереднього виходить, що коли один з рядків матриці лінійно виражається через інші рядки матриці, то рядки цієї матриці між собою лінійно залежні.

Є слушним і обернене твердження. Нехай між рядками матриці існує лінійна залежність, тобто,

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_m e_m = 0,$$

а хоча б одне з чисел, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ відрізняється від нуля. Припустимо, що $\lambda_m \neq 0$, тоді поділивши на λ_m обидві частини останньої рівності, отримаємо:

$$e_m = -\frac{\lambda_1}{\lambda_m}e_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_m}e_2 - \ldots - \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m}e_{m-1},$$

а це і означає, що один з рядків матриці виражається через лінійну комбінацію інших рядків.

Усі розглянуті твердження щодо рядків матриці розповсюджуються і на її стовпчики.

Теорема (про ранг матриці).Якщо ранг матриці дорівнює r, то в цій матриці існує r лінійно незалежних рядків та r лінійно незалежних стовпчиків.

Доведення

Розглянемо матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Нехай ранг матриці A дорівнює r. Припустимо, що ненульовий мінор $r-$го порядку, званий базисним мінором, розміщується у лівому верхньому куту матриці.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1r} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2r} \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} \ldots & a_{rr} \ldots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots & a_{mr} \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Детермінант D базисного мінору відрізняється від нуля.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Потрібно довести, що рядки базисного мінору лінійно незалежні. А ми припустимо, що ці рядки лінійно залежної. Тоді є слушною рівність

$$e_r = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_{r-1} e_{r-1}.$$

Помножимо елементи першого рядка матриці A на $(-\lambda_1)$ та додамо до відповідних елементів $r-$го рядка. У новій матриці помножимо елементи другого рядка на $(-\lambda_2)$ та додамо до відповідних елементів $r-$го рядка. Продовжуючи цей процес, нарешті елементи $(r-1)$ рядка помножимо на $(-\lambda_{r-1})$ та додамо до відповідних елементів $r-$го рядка. Після таких перетворень, які, до речі, не змінюють ранг матриці, виходить, що $r-$й рядок останньої матриці складається лише з нулів.

Визначник D від цих перетворень також не міг змінити своє значення, але оскільки у ньому останній рядок став нульовим рядком, то значить, $D=0$. Такий результат протиречить умові і це пов'язано з неправильним припущенням про те, що базисні рядки матриці лінійно залежні.

Таким чином, доведено, що базисні рядки матриці лінійно незалежні. Залишається довести, що усі інші рядки матриці лінійно виражаються через її базисні рядки.

Розглянемо такий визначник Δ, в якому до базисних рядків приєднався $k-$й рядок, а до базисних стовпчиків приєднався $l-$й стовпчик.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & a_{2l} \\ - & - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} & a_{ml} \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kr} & a_{kl} \end{vmatrix},$$

де

$$1 \le l \le n; \qquad r \le l \le m.$$

Якщо $l \le r$, то в Δ буде два однакових стовпчика і тоді $\Delta = 0$. Якщо $l > r$, то Δ - це мінор $(r+1)$ порядку, отже, він дорівнює нулеві.

Розкладемо визначник Δ за елементами останнього стовпчика.

$$\Delta = a_{1l}A_{1l} + a_{2l}A_{2l} + \cdots + a_{rl}A_{rl} + a_{kl}A_{kl},$$

де $A_{1l}, A_{2l}, \ldots, A_{rl}, A_{kl} -$ алгебраїчні доповнення елементів останнього стовпчика. Звідси маємо:

$$a_{1l}A_{1l} + a_{2l}A_{2l} + \cdots + a_{rl}A_{rl} + a_{kl}A_{kl} = 0.$$

Слід звернути увагу на те, що в алгебраїчні доповнення не входять елементи останнього стовпчика. До речі, A_{kl} співпадає з D.

$$A_{kl} \ne 0.$$

У зв'язку з цим обидві частини рівності можна поділити на $A_{kl} \ne 0.$

$$a_{kl} = -\frac{A_{1l}}{A_{kl}}a_{1l} - \frac{A_{2l}}{A_{kl}}a_{2l} - \cdots - \frac{A_{rl}}{A_{kl}}a_{rl}.$$

Позначимо:

$$\lambda_1 = -\frac{A_{1l}}{A_{kl}}; \quad \lambda_2 = -\frac{A_{2l}}{A_{kl}}; \ \cdots; \quad \lambda_r = -\frac{A_{rl}}{A_{kl}}.$$

Тоді

$$a_{kl} = \lambda_1 a_{1l} + \lambda_2 a_{2l} + \cdots + \lambda_r a_{rl}.$$

Як уже було відмічено, l може набувати значень від 1 до n. Надаючи l тих чи інших значень, отримаємо такі рівності:

$$\begin{aligned} a_{k1} &= \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21l} + \cdots + \lambda_r a_{r1}; \\ a_{k2} &= \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \cdots + \lambda_r a_{r2}; \\ &- \ - \ - \ - \ - \ - \ - \ - \\ a_{kn} &= \lambda_1 a_{1n} + \lambda_2 a_{2n} + \cdots + \lambda_r a_{rn}. \end{aligned}$$

Зрозуміло, що $k-$й рядок матриці A лінійно виражається через перші r рядків

$$l_k = \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \cdots + \alpha_r l_r.$$

Наслідок 1. Максимальне число лінійно незалежних рядків матриці дорівнює максимальному числу лінійно незалежних стовпчиків.

Наслідок 2. Для того, щоб визначник дорівнював нулеві, необхідно та достатньо, щоб його рядки чи то стовпчики були лінійно залежні.

ІІІ. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

3.1. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Основні поняття

Розглянемо систему m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{3.1}$$

Означення. Розв'язком системи (3.1) лінійних алгебраїчних рівнянь називається така упорядкована сукупність чисел $\left(c_1, c_2, \ldots, c_n\right)$, що кожне з рівнянь системи переходить у вірну рівність, якщо замість x_i поставити c_i, де $\left(i = 1, 2, \ldots, n\right)$.

Означення. Система лінійних алгебраїчних рівнянь називається сумісною, якщо вона має хоча б один розв'язок.

Означення. Система лінійних алгебраїчних рівнянь називається означеною, якщо вона має лише один розв'язок, та неозначеною, якщо розв'язків більше за один.

Означення. Дві системи лінійних алгебраїчних рівнянь називаються еквівалентними, якщо вини несумісні або коли вони сумісні і мають одні й ті ж розв'язки.

У наступних параграфах розглянемо методи дослідження систем на сумісність та методи їх розв'язування.

3.2. **Застосування визначників до розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Теорема Крамера**

Розглянемо систему n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{3.2}$$

Означення. Визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{3.3}$$

складений з коефіцієнтів при невідомих у системі (3.2) називається визначником системи.

Теорема. Якщо визначник Δ системи n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими відрізняється від нуля, то система:

1 сумісна,

2 має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами

$$X_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

де Δ - визначник системи, а Δ_k – визначник, що виходить з визначника Δ, якщо k –й стовпчик замінити на стовпчик з вільних членів.

Доведення

Нехай

1) $A_{1k}, A_{2k}, \ldots, A_{nk}$ – алгебраїчні доповнення елементів k –го стовпчика визначника Δ;

2) визначник системи $\Delta \neq 0$.

Помножимо перше рівняння системи (3.2) на A_{1k}, друге − на $A_{2k}, \ldots, n$ –е на − A_{nk}. Отримані рівняння додамо почленно, внаслідок чого отримаємо таку рівність:

$$X_1 \sum_{i=1}^{n} a_{i1}A_{ik} + X_2 \sum_{i=1}^{n} a_{i2}A_{ik} + \ldots + X_k \sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ik} + \ldots + X_n \sum_{i=1}^{n} a_{in}A_{ik} = \sum_{i=1}^{n} b_i A_{ik}. \tag{3.4}$$

На основі властивості 8 визначників виходить, що усі доданки лівої частини рівності (3.4) дорівнюють 0, за винятком доданка $X_k \sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$, який у відповідності із властивістю 7 визначника можна подати у вигляді

$$X_k \sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{ik} = X_k \Delta ,$$

а права частина рівності (3.4) являє собою визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1\,k-1} & b_1 & a_{1\,k+1} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2\,k-1} & b_2 & a_{2\,k+1} \cdots a_{1n} \\ - & - \quad - & - & - \quad - \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{n\,k-1} & b_n & a_{n\,k+1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (3.5)$$

Визначник Δ_k, отриманий з визначника Δ заміною k–го стовпчика на стовпчик вільних членів.

Таким чином, рівність (3.4) можна подавати у вигляді

$$X_k \Delta = \Delta_k , \qquad (3.6)$$

звідки виходить, що

$$X_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}, \qquad (k = 1; 2; ...; n) , \qquad (3.7)$$

Формули (3.7) називаються формулами Крамера і, за умови, що $\Delta \neq 0$, за цими формулами знаходиться розв'язок системи (3.2), який являється єдиним розв'язком.

Якщо $\Delta = 0$ та усі $\Delta_k = 0$, а також дорівнюють нулеві усі мінори порядку $k \geq 2$ елементів цих визначників, то рівність (3.7) переходить у тотожну рівність

$$X_k \times 0 = 0 , \qquad (3.8)$$

оскільки воно слушне при будь-якому значенні X_k.

Якщо $\Delta = 0$, усі $\Delta_k = 0$, але серед мінорів елементів визначників Δ_k є хоча б один ненульовий визначник, то система несумісна.

Якщо $\Delta = 0$, а серед визначників Δ_k хоча б один відрізняється від нуля, то система (3.2) несумісна.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 = 6; \\ x_1 - x_2 = 5. \end{cases}$$

Розв'язання

Обчислимо визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0; \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 14; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 9.$$

Тоді,

$$x_1 = \frac{14}{1} = 14; \quad x_2 = \frac{9}{1} = 9.$$

Приклад. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 5; \\ 6x_1 + 2x_2 = 7. \end{cases}$$

Розв'язання

Обчислимо визначники.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 0; \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

Така система несумісна.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3; \\ 4x_1 - 2x_2 = 6. \end{cases}$$

Розв'язання

Обчислимо визначники.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0; \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 0; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

Це невизначена система. Друге рівняння системи є наслідком першого рівняння.

З першого рівняння системи маємо

$$x_2 = 2x_1 - 3.$$

За цією формулою можна знайти нескінченну множину розв'язків системи. Якщо x_1 набуває довільні значення, то відповідні значення набуває x_2 .

x_1	-5	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	10	...
x_2	-13	-3	-2	0	17	...

Приклад. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 4; \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

Розв'язання

Обчислимо визначники.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 27; \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 54;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 81; \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -27;$$

Знаходимо невідомі:

$$x_1 = \frac{54}{27} = 2; \quad x_2 = \frac{81}{27} = 3; \quad x_3 = -\frac{27}{27} = -1.$$

Приклад. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1; \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0; \\ 4x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1. \end{cases}$$

Розв'язання

Обчислимо визначники.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 \\ 4 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0; \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Наступне обчислення визначників непотрібне, бо з того, що $\Delta = 0$, а $\Delta \neq 0$ виходить, що система несумісна.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2; \\ x_1 - x_2 - 11x_3 - 2x_4 = -4; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 1; \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$$

Розв'язання

Обчислимо визначники системи.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -11 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Помножимо четвертий стовпчик на (-3) та додамо до першого, потім помножимо четвертий стовпчик на (-2) і додамо до другого, нарешті, помножимо перший стовпчик на (-3) та додамо до третього.

Тоді

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & 3 & -5 & -2 \\ 17 & 13 & 16 & -5 \\ -2 & -2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{1+4} \times \begin{vmatrix} 7 & 3 & -5 \\ 17 & 13 & 16 \\ -2 & -2 & -3 \end{vmatrix} == -(-273 + 170 - 96 - 130 +$$

$$+ 224 + 153) = -48 \neq 0.$$

Аналогічно обчислюємо інші визначники.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ -4 & -1 & -11 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -96; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & -11 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 144;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -48; \qquad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -11 & -4 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 48.$$

Таким чином,

$$x_1 = \frac{-96}{-48} = 2; \qquad x_2 = \frac{144}{-48} = -3;$$

$$x_3 = \frac{-48}{-48} = 1; \qquad x_4 = \frac{48}{-48} = -1.$$

Як бачимо, при $n \geq 4$ застосування правила Крамера пов'язане з великими розрахунками.

Слід мати на увазі, що правило Крамера:

1) відповідає на питання про сумісність системи рівнянь;
2) дозволяє знайти розв’язок системи.

3.3. Розв'язування систем *n* лінійних алгебраїчних рівнянь з *n* невідомими за допомогою матриць

Знову розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими (3.2).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Введемо в обіг наступні матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}; \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

За допомогою цих матриць систему (3.2) можна записати у вигляді матричного рівняння:

$$AX = B. \tag{3.9}$$

Нехай A – неособлива матриця. Тоді існує A^{-1}. Обидві частини рівняння (3.9) помножимо зліва на A^{-1}.

$$A^{-1}AX = A^{-1}B; \qquad EX = A^{-1}B.$$

Оскільки $EX = X$, то виходить, що

$$X = A^{-1}B. \tag{3.10}$$

Формула (3.10) визначає розв'язок системи (3.2) у матричній формі.

Виходить, для того, щоб розв'язати систему (3.2) лінійних алгебраїчних рівнянь потрібно додержуватись такої схеми:

1) записати матриці A, B, X;
2) знайти $\det A$ та з'ясувати, чи є матриця A неособливою, і якщо матриця неособлива, то продовжити розв'язування системи;
3) знайти обернену матрицю A^{-1};
4) знайти матрицю X за формулою (3.10);
5) зробити перевірку знайденого розв'язку, підставляючи знайдені значення невідомих у систему.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь за допомогою матриць

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3; \\ 2x_1 + x_2 - 7x_3 = 1; \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases} \qquad (*)$$

Розв'язання

Розглянемо матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -7 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}; \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо $\det A$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -7 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = -20 \neq 0.$$

Значить, існує обернена матриця A^{-1}. Знайдемо її.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -7 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -26; \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -12; \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = 10;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -25; \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -10; \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = 15;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -11; \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -2; \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5.$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{20}\begin{pmatrix} -26 & -12 & 10 \\ -25 & -10 & 15 \\ -11 & -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{20}\begin{pmatrix} -78-12+30 \\ -75-10+45 \\ -33-2+15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, $x_1 = 3;\ x_2 = 2;\ x_3 = 1.$

Перевірка:

$$\begin{cases} 1\times 3-2\times 2+4\times 1=3; \\ 2\times 3+1\times 2-7\times 1=1; \text{або} \quad 1 \quad 1; \\ 3\times 3-4\times 2+2\times 1=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3=3; \\ \quad = \\ 3=3. \end{cases}$$

Система розв'язана вірно.

Приклад. Розв'язати матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times X = \begin{pmatrix} 7 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Позначимо,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} 7 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=-2\neq 0,$$

отже, A – неособлива матриця. Шукаємо обернену матрицю.

$$A_{11}=4; \qquad A_{21}=-2;$$

$$A_{12}=-3; \qquad A_{22}=1.$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$X=A^{-1}B=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 7 \\ 17 \end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 28 & -34 \\ -21 & 17 \end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Значить,

$$x_1=3; \quad x_2=2.$$

Приклад. Розв'язати матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} X=\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Нехай,

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}; \qquad B=\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Шукаємо

$$\det A=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}=5\neq 0;$$

A – неособлива матриця.

Далі шукаємо A^{-1}.

$$A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}1&1\\-1&4\end{vmatrix}=5;\qquad A_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}-1&0\\-1&4\end{vmatrix}=4;\qquad A_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}-1&0\\1&1\end{vmatrix}=-1;$$

$$A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}-2&1\\2&4\end{vmatrix}=10;\qquad A_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}3&0\\2&4\end{vmatrix}=12;\qquad A_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}3&0\\-2&1\end{vmatrix}=-3;$$

$$A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}-2&1\\2&-1\end{vmatrix}=0;\qquad A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}3&-1\\2&-1\end{vmatrix}=1;\qquad A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}3&-1\\-2&1\end{vmatrix}=1.$$

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5&4&-1\\10&12&-3\\0&1&1\end{pmatrix};\qquad X=A^{-1}B=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5&4&-1\\10&12&-3\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\0\\15\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}25&-15\\50&-45\\0&15\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}10\\5\\15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}.$$

Отже,

$$x_1=2;x_2=1;\ x_3=3.$$

Приклад. Розв'язати систему рівнянь за допомогою матриць

$$\begin{cases}x_1+2x_2 \qquad\quad =10;\\ 3x_1+2x_2+x_3=23;\\ \qquad\ \ x_2+2x_3=13.\end{cases}$$

Розв'язання

Нехай,

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&2&1\\0&1&2\end{pmatrix};\qquad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix};\qquad B=\begin{pmatrix}10\\23\\13\end{pmatrix}.$$

$$\det A=\begin{vmatrix}1&2&0\\3&2&1\\0&1&2\end{vmatrix}=-9\neq 0;$$

A − неособлива матриця.

$$A_{11}=3;\qquad A_{21}=-4;\qquad A_{31}=2;$$
$$A_{12}=-6;\qquad A_{22}=2;\qquad A_{32}=-1;$$
$$A_{13}=3;\qquad A_{23}=-1;\qquad A_{33}=-4.$$

Тоді,

$$A^{-1}=-\frac{1}{9}\begin{pmatrix}3&-4&2\\-6&2&-1\\3&-1&-4\end{pmatrix}.$$

$$X = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -36 \\ -27 \\ -45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$x_1 = 4;\ x_2 = 3;\ x_3 = 5.$$

Наприкінці слід зауважити, що матричний метод розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь може бути застосований лише до систем n рівнянь з n невідомими за умови, що визначник системи відрізняється від нуля.

3.4. Метод Гаусса розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (метод послідовного виключення невідомих)

3.4.1 Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом послідовного виключення невідомих

Будемо над рівняннями системи (3.1) виконувати елементарні перетворення, які призводять до еквівалентних систем.

Це такі перетворення, як:

1) перестановка рівнянь системи;
2) перенумерація невідомих;
3) множення обох частин одного з рівнянь на одне й те саме відмінне від нуля число з наступним додаванням до другого рівняння;
4) викреслювання рівнянь типу

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 0.$$

Перший етап перетворень спрямований на те, щоб в усіх рівняннях, за винятком першого, позбавитись від невідомого x_1. З цією метою домножимо перше рівняння на $\left(-a_{21}\right)$, а друге – на a_{11}, де a_{21} та a_{11} не дорівнюють нулеві. Отримані рівняння почленно додамо. Внаслідок такого перетворення замість другого рівняння маємо таке рівняння, до складу якого x_1 не входить.

Далі помножимо перше рівняння на $\left(-a_{31}\right)$, якщо $a_{31} \neq 0$, а третє – на a_{11}. Отримані рівняння почленно додамо. Замість третього рівняння виходить нове рівняння, до складу якого також не входить x_1. Продовжуючи цей процес, отримаємо наступну систему рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ \qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2; \\ \qquad - \quad - \quad - \quad - \\ \qquad a'_{n2}x_2 + \ldots + a'_{nn}x_n = b'_n. \end{cases} \tag{3.11}$$

Якщо в процесі перетворень буде отримане рівняння типу

$$0x_2 + 0x_3 + \cdots + 0x_n = b_i',$$

де $b_i' \neq 0,$ то система (3.1) є несумісною, якщо ж такого рівняння немає, то можна переходити до другого етапу перетворень. Цього разу перетворення виконуються над остаточною частиною системи (3.1), яка виділена за допомогою рамки. Ці перетворення аналогічні проведеним, але цього разу націлені на те, щоб в усіх рівняннях системи, починаючи з третього, позбавитись від x_2 .

На кожному етапі перетворень кількість рівнянь остаточної частини буде зменшуватись на одне рівняння.

Продовжуючи цей процес, приходимо до одного з двох випадків: або після якогось перетворення стане зрозуміло, що система несумісна, або ж ми отримаємо таку систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ \qquad a_{22}'x_2 + \ldots + a_{2r}'x_r + \ldots + a_{2n}'x_n = b_2'; \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ \qquad\qquad a_{rr}^{(r)} + \ldots + a_{rn}^{(r)}x_n = b_r^{(r)}. \end{cases} \tag{3.12}$$

У цій системі діагональні коефіцієнти відрізняються від нуля. Слід звернути увагу на те, щ кількість рівнянь у системі (3.12) може дорівнювати m , а може зменшитись через те, що у процесі перетворювань були отримані та викреслені рівняння типу

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 0 .$$

Будемо називати систему (3.12) ступеньковою.

Розглянемо два випадки: $r = n$ та $r < n$

Випадок 1.

Нехай $r = n$. Тоді система має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ \qquad a_{22}'x_2 + \ldots + a_{2n}'x_n = b_2'; \\ - \quad - \quad - \quad - \\ \qquad\qquad a_{nn}^{(r)}x_n = b_n^{(r)}. \end{cases} \tag{3.13}$$

Така система називається трикутною. З останнього рівняння знаходимо єдине значення невідомого x_n . Підставляючи це значення у попереднє рівняння, знаходимо x_{n-1} і т.д.

Таким чином, система (3.12), у якій $r = n$, має єдиний розв'язок.

Випадок 2.

Нехай $r < n$. У кожному з рівнянь переносимо у праву частину доданки з невідомими $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$.

Виходить така система:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n; \\ \qquad a_{22}'x_2 + \ldots + a_{2r}'x_r = b_2' - a_{2,r+1}'x_{r+1} - \ldots - a_{2n}'x_n; \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ \qquad\qquad a_{rr}^{(r)}x_r = b_r^{(r)} - a_{r,r+1}^{(r)}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}^{(r)}x_n. \end{cases} \tag{3.14}$$

Якщо у цю систему замість невідомих $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ підставити будь-які числа, то для визначення інших невідомих $x_1, x_2, \ldots x_r$ будемо мати систему трикутного виду, з якої знаходиться єдиний набір значень $x_1, x_2, \ldots x_r$. Звідси можна зробити висновок, що при $r < n$ система (3.14) має нескінченну кількість розв'язків.

Формули (3.14) визначають усю сукупність розв'язків. З них можна знайти значення $x_1, x_2, \ldots x_r$, якщо визначені значення $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$. Останні значення можна вибирати будь-яким чином, ці невідомі називаються вільними невідомими. Так, у системі (3.1) це невідомі $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$. Отже, ступенькова система, у якій число r рівнянь менше, ніж число n невідомих, має нескінченну кількість розв’язків. У такій системі $(n-r)$ невідомих є вільними.

Зауваження. Якщо у процесі приведення такої системи до трикутної форми доводиться міняти місцями невідомі, то в отриманій ступеньковій системі вільними невідомими, можливо, будуть не $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$, а якісь інші $(n-r)$ невідомих.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9; \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases} \left| \begin{array}{l} \times(-2) \\ {}^{+}\times(3) \\ \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} \times(-1) \\ {}^{+}\times(+) \\ \end{array} \right.$$

Розв'язання

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4; \\ \quad -7x_2 + 11x_3 = 19; \\ \quad -8x_2 + 7x_3 = 5. \end{cases} \left| \begin{array}{l} \\ \times(8) \\ {}^{+}\times(-7) \end{array} \right. \qquad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4; \\ \quad -7x_2 + 11x_3 = 19; \\ \qquad 39x_3 = 117. \end{cases}$$

Отримана система має трикутну форму, значить, задана система є визначеною системою.

Обернений хід.

$$39x_3 = 117 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 3.$$

$$-7x_2 + 11x_3 = 19 \quad \Rightarrow \quad -7x_2 = 19 - 11 \times 3 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2.$$

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \quad \Rightarrow \quad 3x_1 = 4 - 2 \times 2 + 3 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1.$$

Таким чином, маємо розв'язок:

$$x_1 = 1;\ x_2 = 2;\ x_3 = 3.$$

3.4.2. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою таблиць Гаусса

При розв'язуванні систем методом Гаусса зручно користуватися таблицями.

Складаємо таблицю з коефіцієнтів при невідомих та вільних членів у системі.

Також вводимо у таблицю контрольний стовпчик, який дорівнює сумі коефіцієнтів при невідомих у відповідному рядку.

Таблиця I

Коефіцієнти при невідомих				b_i	Контрольний стовпчик
x_1	x_2	$---$	x_n		
a_{11}	a_{12}	$---$	a_{1n}	b_1	$\sum_{i=1}^{n} a_{1i}$
a_{21}	a_{22}	$---$	a_{2n}	b_2	$\sum_{i=1}^{n} a_{2i}$
–	–	– – –	–	–	–
a_{m1}	a_{m2}	$---$	a_{mn}	b_m	$\sum_{i=1}^{n} a_{mi}$

Якщо у таблиці I $a_{11} = 0$, то слід поміняти місцями стовпчики так, щоб уже перший коефіцієнт відрізнявся від нуля, або ж у системі поміняти місцями рівняння.

Будемо вважати, що $a_{11} \neq 0$.

Тоді його можна призначити провідним елементом. Починаємо складати таблицю II.

Перший рядок у таблицю II переносимо без змін, при цьому усі елементи першого стовпчика за винятком a_{11} дорівнюють нулеві .

Для того, щоб обчислити інші елементи таблиці II будемо користуватись формулою

$$a'_{ij} = a_{ij}a_{11} - a_{i1}a_{1j}. \qquad (3.15)$$

Можна також користуватися правилом прямокутника. Для цього елемент a_{11} назначаємо провідним елементом. Далі утворюємо такі прямокутники з горизонтальними та вертикальними сторонами, в яких одна з діагоналей, звана головною діагоналлю з'єднує вершини прямокутника, однією з яких є провідний елемент, а інша – той елемент, який ми хотіли б обчислити. Множимо елементи, що поєднує головна діагональ утвореного прямокутника та отриманого добутку, віднімаємо добуток елементів, які поєднує друга діагональ прямокутника. Отриманий результат записуємо у таблицю II на місці шуканого елемента.

За таким правилом знаходимо усі елементи таблиці II, включаючи елементи контрольного стовпчика. Після цього робимо перевірку обчислень за допомогою контрольного стовпчика. Сума нових коефіцієнтів при невідомих повинна дорівнювати числу у контрольному стовпчику. Якщо ця умова виконується, то можна переходити до таблиці III. Елемент a'_{22} таблиці II призначаємо провідним елементом. У таблицю III переносимо без змін перший та другий рядки, перший стовпчик, а замість елементів другого стовпчика, що лежать нижче другого рядка, записуємо нулі.

За формулою

$$a''_{ij} = a'_{ij}a'_{22} - a'_{i2}a'_{2j} \qquad (3.15')$$

або за правилом прямокутника обчислюємо елементи таблиці III.

Потім, призначивши провідним елемент a''_{33} таблиці III, переходимо до таблиці IV. Продовжувати цей процес будемо доти, доки таблиця набуде трикутної або трапецеїдальної форми.

Далі починається обернений хід.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь з допомогою таблиць Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9; \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

Розв'язання

Будемо розв’язувати систему за допомогою таблиць Гаусса.

№ Таблиці	Коефіцієнти при невідомих			b_i	Контрольний стовпчик
	x_1	x_2	x_3		
I	3 2 1	2 −1 −2	−1 3 2	4 9 3	4 4 1
II	3 0 0	2 −7 −8	−1 11 7	4 19 5	4 4 −1
III	3 0 0	2 −7 0	−1 11 39	4 19 117	4 4 39

Як бачимо з таблиці, отримана внаслідок відображених у таблиці перетворень система має трикутну форму, виходить, ця система визначена та має лише єдиний розв’язок.

Коментарії до таблиці I:

1) складаємо таблицю I відповідно умові;
2) елементи контрольного стовпчика знаходимо як суму коефіцієнтів при невідомих у відповідному рядку.

Коментарії до таблиці II:

1) елемент $a_{11} = 3$ таблиці I призначаємо провідним елементом, а перший рядок – провідним рядком;
2) перший рядок таблиці I заносимо без змін у перший рядок таблиці II;
3) усі елементи першого стовпчика, які знаходяться нижче першого рядка дорівнюють нулеві;
4) знаходимо інші елементи таблиці II, користуючись правилом прямокутника:

$$a'_{22} = -1 \times 3 - 2 \times 2 = -7; \qquad a'_{32} = -2 \times 3 - 2 \times 1 = -8;$$

$$a'_{23} = 3 \times 3 - (-1) \times 2 = 11; \qquad a'_{33} = 2 \times 3 - (-1) \times 1 = 7;$$

$$b'_2 = 9 \times 3 - 4 \times 2 = 19; \qquad b'_3 = 3 \times 3 - 4 \times 1 = 5;$$

$$k'_2 = 4 \times 3 - 4 \times 2 = 4; \qquad k'_3 = 1 \times 3 - 4 \times 1 = -1.$$

5) перевірка за допомогою контрольного стовпчика:

$$0-7+11=4=k_2';$$
$$0-8+7=-1=k_3'.$$

Коментарії до таблиці III:

1) елемент $a_{22}'=-7$ таблиці II призначаємо провідним елементом, а перший рядок – провідним рядком;
2) перший та другий рядки таблиці II заносимо без змін до таблиці III;
3) перший стовпчик таблиці II переносимо буз змін до таблиці III;
4) усі елементи другого стовпчика таблиці II, які знаходяться нижче другого рядка $a_{22}'=-7$, дорівнюють нулеві;
5) знаходимо інші елементи таблиці III:
$$a''_{33}=7\times(-7)-11\times(-8)=39;$$
$$b_3''=5\times(-7)-19\times(-8)=117;$$
$$k_3''=-1\times(-7)-4\times(-8)=39;$$
6) перевірка за допомогою контрольного стовпчика:
$$0+0+39=39=k_3''.$$

Коефіцієнти знайдені правильно.

Таблиця III складена. Ця таблиця є останньою.

Обернений хід.

У відповідності до таблиці III маємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases}3\times x_1+2\times x_2-1\times x_3=4;\\0\times x_1-7\times x_2+11\times x_3=19;\\0\times x_1+0\times x_2+39\times x_3=117.\end{cases}$$

З III рівняння маємо:

$$39x_3=117 \quad \Rightarrow \quad x_3=3.$$

З II рівняння маємо:

$$-7x_2+11\times 3=19 \quad \Rightarrow \quad x_2=2.$$

З I рівняння маємо:

$$3x_1+2\times 2-3=4 \quad \Rightarrow \quad x_1=1.$$

Перевірка.

$$\begin{cases}3\times 1+2\times 2-1\times 3=4;\\2\times 1-1\times 2+3\times 3=9;\\1\times 1-2\times 2+2\times 3=3.\end{cases} \qquad \begin{cases}4=4;\\9=9;\\3=3.\end{cases}$$

Відповідь: $(1;2;3)$.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь за допомогою таблиць Гаусса

$$\begin{cases}2x_1+x_2-4x_3=5;\\3x_1+2x_2+x_3=7;\\x_1+x_2+5x_3=2.\end{cases}$$

Розв'язання

Коментарії до таблиці I:

1) складаємо таблицю I відповідно умові;
2) Елементи контрольного стовпчика знаходимо як суму коефіцієнтів при невідомих.

№ Таблиці	Коефіцієнти при невідомих			b_i	Контрольний стовпчик
	x_1	x_2	x_3		
I	2	1	−4	5	−1
	3	2	1	7	6
	1	1	5	2	7
II	2	1	−4	5	−1
	0	1	14	−1	15
	0	1	14	−1	15
III	2	1	−4	5	−1
	0	1	14	−1	15

Коментарії до таблиці II:

1) елемент $a_{11} = 2$ таблиці I призначаємо провідним елементом, а перший рядок – провідним рядком;
2) елементи першого рядка без змін переносимо до таблиці II;
3) усі елементи першого стовпчика, які знаходяться нижче першого рядка, дорівнюють нулеві;
4) знаходимо інші елементи таблиці II:

$$a'_{22} = 2\times 2 - 1\times 3 = 1; \qquad a'_{32} = 1\times 2 - 1\times 1 = 1;$$

$$a'_{23} = 1\times 2 - (-4)\times 3 = 14; \qquad a'_{33} = 5\times 2 - (-4)\times 1 = 14;$$

$$b'_2 = 7\times 2 - 5\times 3 = -1; \qquad b'_3 = 2\times 2 - 5\times 1 = -1;$$

$$k'_2 = 6\times 2 - (-1)\times 3 = 15; \qquad k'_3 = 7\times 2 - (-1)\times 1 = 15;$$

5) перевірка за допомогою контрольного стовпчика:

$$0 + 1 + 14 = 15 = k'_2;$$

$$0 + 1 + 14 = 15 = k'_3;$$

6) особливість таблиці II полягає у тому, що до її складу входять два однакові рядки, отже, одного з них можна позбутись;
7) отримаємо таблицю III, що складається з перший двох рядків таблиці II;
8) таблиця III має трапецеїдальну форму, значить, система має нескінченну кількість розв'язків.

Обернений хід.

Відповідно таблиці III маємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 5; \\ \quad x_2 + 14x_3 = -1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -1 - 14x_3; \\ 2x_1 = 5 - (-1 - 14x_3) + 4x_3. \end{cases}$$

Тоді маємо формули

$$\begin{cases} x_2 = -1 - 14x_3; \\ x_1 = 3 + 9x_3, \end{cases}$$

x_1	x_2	x_3
-6	13	-1
3	-1	0
21	-29	2
–	–	–
–	–	–
–	–	–

які дозволяють знаходити нескінченну множину розв'язків. Тут x_3 – вільне невідоме, а x_1 та x_2 – базисні невідомі. Якщо вільному невідомому x_3 надавати ті чи інші значення, то будемо отримувати відповідні конкретні значення базисних невідомих x_1 та x_2.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь за допомогою таблиць Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 3; \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 - x_4 = 1; \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 4. \end{cases}$$

Розв'язання

№ таб-лиці	Коефіцієнти при невідомих				b_i	Контрольний стовпчик
	x_1	x_2	x_3	x_4		
I	1	2	-1	3	3	5
	2	-5	4	-1	1	0
	4	-1	2	5	4	10
II			-1	3	3	5
	1	2	6	-7	-5	-10

	0 0	−9 −9	6	−7	−8	−10
III	1 0 0	2 −9 0	−1 6 0	3 −7 0	3 −5 27	5 −10 0

Коментарії до таблиці I:

1) складаємо таблицю I відповідно умові;
2) елементи контрольного стовпчика знаходимо як суму коефіцієнтів при невідомих.

Коментарії до таблиці II:

1) елемент $a_{11} = 1$ призначаємо провідним елементом, а перший рядок – провідним рядком;
2) перший рядок таблиці I без змін переносимо до таблиці II;
3) усі елементи першого стовпчика, які знаходяться нижче першого рядка, дорівнюють нулеві;
4) знаходимо інші елементи таблиці II:

$a'_{22} = -5\cdot 1 - 2\cdot 2 = -9;$ $\quad a'_{32} = -1\cdot 1 - 2\cdot 4 = -9;$

$a'_{23} = 4\cdot 1 - (-1)\cdot 2 = 6;$ $\quad a'_{33} = 2\cdot 1 - (-1)\cdot 4 = 6;$

$a'_{24} = -1\cdot 1 - 3\cdot 2 = -7;$ $\quad a'_{34} = 5\cdot 1 - 3\cdot 4 = -7;$

$b'_2 = 1\cdot 1 - 3\cdot 2 = -5;$ $\quad b'_3 = 4\cdot 1 - 3\cdot 4 = -8;$

$k'_2 = 0\cdot 1 - 5\cdot 2 = -10;$ $\quad k'_3 = 10\cdot 1 - 5\cdot 4 = -10;$

5) перевірка за допомогою контрольного стовпчика:

$$0 - 9 + 6 - 7 = -10 = k'_2;$$

$$0 - 9 + 6 - 7 = -10 = k'_3.$$

Коефіцієнти знайдені правильно. Таблиця II складена.

Коментарії до таблиці III:

1) призначаємо провідним елементом елемент $a'_{22} = -9$ таблиці II, а перший рядок – провідним рядком;
2) перший та другий рядки таблиці II переносимо без змін до таблиці III;
3) перший стовпчик таблиці II переносимо без змін до таблиці III;
4) усі елементи другого стовпчика таблиці III, які лежать нижче другого рядка, дорівнюють нулеві;
5) знаходимо інші елементи таблиці III:

$a''_{33} = 6\cdot(-9) - 6\cdot(-9) = 0;$

$a''_{34} = -7\cdot(-9) - (-7)\cdot(-9) = 0;$

$b''_3 = -8\cdot(-9) - (-5)\cdot(-9) = 27;$

$k''_3 = -10\cdot(-9) - (-10)\cdot(-9) = 0;$

6) перевірка за допомогою контрольного стовпчика:

$$0-9+6-7=-10=k_2'';$$
$$0+0+0+0=0=k_3''.$$

Коефіцієнти знайдені правильно. Таблиця III складена.

Особливість таблиці III полягає в тому, що її третьому рядку відповідає рівняння

$$0\times x_1+0\times x_2+0\times x_3+0\times x_4=27.$$

Таке рівняння не має розв'язків. Значить, система несумісна.

3.4.3. Метод Жордано-Гаусса розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. (Метод повного виключення невідомих)

Метод Жордано-Гаусса являє собою модифікацію метода Гаусса. Розглянемо цей метод поетапно стосовно системи (3.1).

1. Складаємо таблицю I так, як і у методі Гаусса.
2. Покладемо, що a_{11} – провідний елемент, а перший рядок – провідний рядок.

   Поділимо елементи першого рядка на $a_{11}\neq 0$, отримані результати записуємо у перший рядок таблиці II. Усі елементи першого стовпчика таблиці II, за винятком a_{11}, дорівнюють нулеві.

   Інші елементи таблиці II знаходимо так само, як і при обчисленні оберненої матриці методом Жордано-Гаусса:

   $$a'_{kj}=\frac{a_{kj}a_{ii}-a_{ki}a_{ij}}{a_{ii}},$$

   де a_{ii} – провідний елемент.

   У таблиці II елемент a'_{22} призначимо провідним елементом, а другий рядок – провідним рядком. Після цього переходимо до складання таблиці III.
3. Усі елементи другого рядка таблиці II поділимо на a'_{22}, отримані результати заносимо у другий рядок таблиці III. До того ж перший стовпчик таблиці II переносимо у таблицю III без змін, а другий стовпчик у таблиці III складається з нулів, за винятком елемента $a''_{22}=1$.
4. Продовжуючи аналогічно цей процес на якомусь етапі отримаємо таку таблицю, у якій коефіцієнти при невідомих утворюють одиничну матрицю, якщо у системі (3.1) $m=n$. Якщо ж $m\neq n$, то деяка частина таблиці буде являти собою одиничну матрицю.
5. Обернений хід робиться таким же чином, як у методі Гаусса, але тепер це буде значно простіше.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь методом Жордано-Гаусса

$$\begin{cases}3x_1+2x_2-x_3=4;\\2x_1-x_2+3x_3=9;\\x_1-2x_2+2x_3=3.\end{cases}$$

Розв'язання

Коментарії до таблиці ІІ:

1) відповідно з умовою складаємо таблицю І;

2) елемент $a_{11} = 3$ призначаємо провідним елементом, а перший рядок – провідним рядком;

3) елементи провідного стовпчика поділимо на $a_{11} = 3$ та утворимо з них перший рядок таблиці ІІ;

4) перший стовпчик таблиці ІІ складається з усіх нулів, за винятком елемента $a'_{11} = 1$;

5) знаходимо інші елементи таблиці ІІ:

$$a'_{22} = \frac{-1 \times 3 - 2 \times 2}{3} = -\frac{7}{3}; \qquad a'_{32} = \frac{-2 \times 3 - 2 \times 1}{3} = -\frac{8}{3};$$

$$a'_{23} = \frac{3 \times 3 - (-1) \times 2}{3} = \frac{11}{3}; \qquad a'_{33} = \frac{2 \times 3 - (-1) \times 1}{3} = \frac{7}{3};$$

$$b'_2 = \frac{9 \times 3 - 2 \times 4}{3} = \frac{19}{3}; \qquad b'_3 = \frac{3 \times 3 - 1 \times 4}{3} = \frac{5}{3};$$

$$k'_2 = \frac{4 \times 3 - 1 \times 4}{3} = \frac{8}{3}; \qquad k'_3 = \frac{1 \times 3 - 1 \times 4}{3} = -\frac{1}{3};$$

№ Таблиці	Коефіцієнти при невідомих			b_i	Контрольний стовпчик
	x_1	x_2	x_3		
І	3 2 1	2 −1 −2	−1 3 2	4 9 3	4 4 1
ІІ	1 0 0	$\frac{2}{3}$ $-\frac{7}{3}$ $-\frac{8}{3}$	$-\frac{1}{3}$ $\frac{11}{3}$ $\frac{7}{3}$	$\frac{4}{3}$ $\frac{19}{3}$ $\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$ $\frac{4}{3}$ $-\frac{1}{3}$
ІІІ	1 0 0	0 1 0	$\frac{5}{7}$ $-\frac{11}{7}$ $-\frac{13}{7}$	$\frac{22}{7}$ $-\frac{19}{7}$ $-\frac{39}{7}$	$\frac{12}{7}$ $-\frac{4}{7}$ $-\frac{13}{7}$

IV	1 0 0	0 1 0	0 0 1	1 2 3	1 1 1

5) перевірка за допомогою контрольного стовпчика:

$$0-\frac{7}{3}+\frac{11}{3}=\frac{4}{3}=k_2';$$

$$0-\frac{8}{3}+\frac{7}{3}=-\frac{1}{3}=k_3'.$$

Отже, коефіцієнти знайдені правильно. Таблиця II складена.

Коментарії до таблиці III:

1) елемент $a_{22}'=-\frac{7}{3}$ призначаємо провідним елементом, а другий рядок– провідним рядком;
2) усі елементи другого рядка таблиці II поділимо на $a_{22}'=-\frac{7}{3}$ та з отриманих елементів створюємо другий рядок таблиці III;
3) перший стовпчик таблиці II переносимо без змін до таблиці III;
4) усі елементи другого стовпчика таблиці III, є нулями за винятком елемента $a_{22}'=1$;
5) знаходимо інші елементи таблиці III:

$$a''_{13}=\frac{-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{7}{3}\right)-\frac{11}{3}\times\frac{2}{3}}{-\frac{7}{3}}=\frac{5}{7};\qquad b_3''=\frac{\frac{5}{3}\times\left(-\frac{7}{3}\right)-\frac{19}{3}\times\left(-\frac{8}{3}\right)}{-\frac{7}{3}}=-\frac{39}{7};$$

$$a''_{33}=\frac{\frac{7}{3}\times\left(-\frac{7}{3}\right)-\frac{11}{3}\times\left(-\frac{8}{3}\right)}{-\frac{7}{3}}=-\frac{13}{7};\qquad k_1''=\frac{\frac{4}{3}\times\left(-\frac{7}{3}\right)-\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}}{-\frac{7}{3}}=\frac{12}{7};$$

$$b_1''=\frac{\frac{4}{3}\times\left(-\frac{7}{3}\right)-\frac{19}{3}\times\frac{2}{3}}{-\frac{7}{3}}=\frac{22}{7};\qquad k_2''=\frac{\frac{-1}{3}\times\left(-\frac{7}{3}\right)-\frac{4}{3}\times\left(-\frac{8}{3}\right)}{-\frac{7}{3}}=-\frac{13}{7};$$

6) перевірка за допомогою контрольного стовпчика:

$$1+0+\frac{5}{7}=\frac{12}{7}=k_1'';$$

$$0+0-\frac{13}{7}=-\frac{13}{7}=k_3''.$$

Коефіцієнти знайдені правильно. Таблиця III складена.

Коментарії до таблиці IV:

1) елемент $a''_{33} = -\frac{13}{7}$ призначимо провідним елементом, а третій рядок – провідним рядком;
2) усі елементи третього рядка поділимо на $a''_{33} = -\frac{13}{7}$, а отримані елементи запишемо у третій рядок таблиці IV;
3) перший та другий стовпчики таблиці III переносимо без змін до таблиці IV.
4) усі елементи третього стовпчика таблиці IV є нулями, за винятком елемента $a''_{33} = 1$;
5) знаходимо інші елементи таблиці IV:

$$b_1''' = \frac{\frac{22}{7} \times \left(-\frac{13}{7}\right) - \left(-\frac{39}{7}\right) \times \frac{5}{7}}{-\frac{13}{7}} = 1;$$

$$b_3''' = \frac{-\frac{19}{7} \times \left(-\frac{13}{7}\right) - \left(-\frac{39}{7}\right) \times \left(-\frac{11}{7}\right)}{-\frac{13}{7}} = 2;$$

$$k_1''' = \frac{\frac{12}{7}\left(-\frac{13}{7}\right) - \left(-\frac{13}{7}\right) \times \frac{5}{7}}{-\frac{13}{7}} = 1;$$

$$k_2''' = \frac{\frac{-4}{7}\left(-\frac{13}{7}\right) - \left(-\frac{13}{7}\right) \times \left(-\frac{11}{7}\right)}{-\frac{13}{7}} = 1;$$

6) перевірка за допомогою контрольного стовпчика:

$$1 + 0 + 0 = 1 = k_1''';$$

$$0 + 1 + 0 = 1 = k_2'''.$$

Коефіцієнти знайдені правильно. Таблиця IV складена.

Обернений хід.

З останньої таблиці маємо таку систему рівнянь:

$$1 \times x_1 + 0 \times x_2 + 0 \times x_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1;$$

$$0 \times x_1 + 1 \times x_2 + 0 \times x_3 = 2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2;$$

$$0 \times x_1 + 0 \times x_2 + 1 \times x_3 = 3 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 3.$$

Як бачимо, у методі Жордано-Гаусса обернений хід виключно простий. Проте прямий хід більш зручно виконувати у методі Гаусса.

Слід звернути увагу на те, що і метод Гаусса і метод Жордано-Гаусса:

- прості у застосуванні;
- відповідають на питання про сумісність системи;
- застосовуються як до систем n рівнянь з n невідомими, так і до систем n рівнянь з m невідомими.

3.5. Дослідження систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Розглянемо систему m алгебраїчних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{3.16}$$

Введемо в обіг матриці:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}; \tag{3.17}$$

та

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ - & - & - & - & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

Означення. Матриця A називається матрицею системи, а матриця B називається розширеною матрицею цієї системи.

Відповідь на питання про сумісність системи (3.16) дає наступна теорема.

Теорема Кронекера-Капеллі. Для того, щоб система(3.16) лінійних алгебраїчних рівнянь була сумісною необхідно та достатньо, щоб ранг матриці A системи дорівнював рангу розширеної матриці B. При цьому, якщо ранг матриць A та B дорівнює числу невідомих, то система має єдиний розв'язок, а якщо ранг матриць A та B менше числа невідомих, то система має нескінченну кількість розв'язків.

Доведення

I. Необхідність.

Будемо виходити з того, що система сумісна та сукупність $(\alpha_1;\alpha_2;\ldots\alpha_n)$ – її розв'язок. Тоді є слушними рівності:

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = b_1; \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = b_2; \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \ldots + a_{mn}\alpha_n = b_m. \end{cases} \qquad (*)$$

Розглянемо матрицю B. Помножимо елементи першого стовпчика матриці B на $(-\alpha_1)$ та додамо до відповідних елементів останнього стовпчика. В отриманій матриці елементи другого стовпчика помножимо на $(-\alpha_2)$ та додамо до відповідних елементів останнього стовпчика. Будемо продовжувати цей процес і, нарешті, елементи останнього стовпчика помножимо на $(-\alpha_m)$ та додамо до відповідних елементів останнього стовпчика.

Врешті-решт, виходить, що від елементів останнього стовпчика ми відняли вирази, які співпадають відповідно з лівими частинами системи (*). Отже, ми прийшли до такої матриці:

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & 0 \\ - & - & - & - & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & 0 \end{pmatrix}.$$

Матриця C отримана з матриці B за допомогою елементарних перетворень, які не змінюють ранг матриці, значить,

$r(C) = r(B)$.

Але матриця C від матриці A відрізняється лише нульовим стовпчиком. Тож виходить, що $r(C) = r(A)$. Тоді маємо:

$$r(A) = r(B).$$

Саме це ми й хотіли довести.

II. Достатність.

Будемо виходити з того, що

$$r(A) = r(B) = r,$$

де $r \le \min(m; n)$.

Тоді існує хоча б один мінор r-го порядку матриці A, який відрізняється від нуля. Припустимо для простоти, що цей мінор розміщується в лівому верхньому куту матриці A.

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} \\ - & - & - & - \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix} \ne 0.$$

Рядки мінору M лінійно незалежні, а звідси виходить, що перші r рядків матриць A та B лінійно незалежні, а інші ($n - r$) рядків цих матриць є лінійною комбінацією означених r рядків. У цьому випадку система (*) складається лише з r незалежних рівнянь, а інші ($n - r$) рівнянь є їх лінійною комбінацією чи то їх наслідками.

Значить, щоб розв'язати систему (*), слід розв’язати лише її перші r рівнянь.

При цьому можливі такі випадки:

1) $r = n$.

Тоді систему можна розв'язати за правилом Крамера, і така система буде мати єдиний розв'язок;

2) $r < n$.

Тоді будемо розглядати перші r рівнянь, а систему запишемо таким чином:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - ... - a_{1n}x_n; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2,r+1}x_{r+1} - ... - a_{2n}x_n; \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + ... + a_{rr}x_r = b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - ... - a_{rn}x_n. \end{cases} \qquad (**)$$

Невідомим $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n$ можна надавати будь-які значення та знаходити відповідні значення невідомих $x_1, x_2, ...x_r$.

Система при цьому сумісна та має нескінченну кількість розв'язків.

Наслідок. Якщо в системі n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими визначник Δ системи дорівнює нулеві, то тоді

$$r(A) < n.$$

У випадку коли

$$r(A) = r(B)$$

система сумісна та має безліч розв'язків, а якщо

$$r(A) < r(B),$$

то система несумісна.

Нехай $r(A) = r(B) = r \geq 1$. Це означає, що одна з матриць A та B має принаймні один мінор порядку r, який відрізняється від нуля.

Означення. Будь-який мінор порядку r матриці, ранг якої дорівнює r, який відрізняється від нуля, називається базисним мінором, а рядки та стовпчики, з яких він утворений, називаються базисними рядками та стовпчиками.

Схема розв'язування систем m лінійних рівнянь з *n* невідомими

Знаходимо ранги матриці A системи та розширеної матриці B.

Якщо

$$r(A) \neq r(B),$$

то система несумісна. Якщо

$$r(A) = r(B) = r,$$

то продовжуємо розв’язувати систему.

2. Оберемо будь-який базисний мінор.
3. Залишаємо в системі лише ті рівняння, які відповідають базисним рядкам.
4. Ті r невідомих, які відповідають базисним стовпчикам, залишимо зліва та будемо називати базисними невідомими, а інші ($n - r$) невідомих перенесемо вправо та будемо називати вільними невідомими.
5. Отриману систему r рівнянь з r базисними невідомими розв'язуємо одним з розглянутих раніше методів, внаслідок чого одержимо формули, які базисні невідомі виражають через вільні невідомі. Ці формули складають загальний розв'язок системи.
6. Надаючи вільним невідомим будь-які числові значення, по загальному розв'язку системи можна знайти нескінченну множину розв'язків системи. Ці розв'язки

називаються частинними розв'язками системи. До того ж, таким чином може бути отриманий який завгодно розв'язок системи.

Зауваження 1. Якщо в системі є декілька базисних мінорів, то, в залежності від обраного базисного мінору, будуть змінюватись формули, які складають загальний розв'язок системи, але частинні розв'язки не залежать від вибору базисного мінору.

Зауваження 2. Якщо ранг матриць A та B дорівнює числу невідомих, то усі невідомі являються базисними невідомими, а система має єдиний розв'язок.

Приклад. Дослідити на сумісність наступну систему рівнянь

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1; \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2; \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3; \end{cases}$$

та, якщо система сумісна, знайти її загальний розв'язок, а також три частинних розв'язка.

Розв'язання

1. Складемо матрицю системи та розширену матрицю системи.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 6 & -3 & 4 & 8 & 13 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 6 & -3 & 4 & 8 & 13 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Шукаємо ранг кожної з матриць, виконуючи елементарні перетворення, що не змінюють рангу матриці. Оскільки матриці A та B відрізняються лише останнім стовпчиком, то зручно водночас шукати ранги обох матриць.

$$r\left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & -2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 6 & -3 & 4 & 8 & 13 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{array}\right) \sim$$

Коментарії:

1) поділимо елементи першого стовпчика на 2;

2) помножимо елементи третього стовпчика на (-2) та додамо до відповідних елементів першого стовпчика;

3) помножимо елементи третього стовпчика на 2 та додамо до відповідних елементів другого стовпчика;

4) помножимо елементи третього стовпчика на (-1) і до елементів четвертого стовпчика;

5) помножимо елементи третього стовпчика на (-2) і додамо до елементів п’ятого стовпчика;

6) помножимо елементи третього стовпчика на (-1) і додамо до елементів шостого стовпчика.

$$\sim r\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\sim$$

Коментарії:

1) оскільки елементи другого та п'ятого, шостого стовпчиків однакові, а елементи першого стовпчика їм пропорційні, то можна перший, другий, шостий стовпчики закреслити;

2) оскільки надалі нам необхідно буде визначити базисний мінор, то буде доцільним вести надалі нумерацію стовпчиків відповідно тому положенню, яке вони займають по відношенню до системи;

$$\sim r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\sim$$
$$(3)\ (4)\ (5)$$

Коментарії:

1) оскільки ми мали змогу закреслити шостий стовпчик, то це означає, що $r(A)=r(B)$, а значить, система сумісна;

2) подальші перетворення мають на меті, знайти базисний мінор;

3) елементи четвертого стовпчика помножимо на (-1) і додамо до третього а також до п'ятого стовпчиків.

$$\sim r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\sim$$
$$(3)\ (4)\ (5)$$

Коментарії:

1) елементи другого рядка додамо до елементів четвертого рядка.

$$\sim r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}\sim$$
$$(3)\ (4)\ (5)$$

Коментарії:

1) елементи п'ятого стовпчика помножимо на (-4) і додамо до елементів четвертого стовпчика.

$$\sim r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}\sim$$
$$(3)\ (4)\ (5)$$

Коментарії:

1) елементи третього та четвертого рядків пропорційні, отже, четвертий рядок можна викреслити і розпочати нумерацію рядків.

$$\sim r\begin{array}{c c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \\ (3)\ (4)\ (5) & \end{array}.$$

Ми отримали таку матрицю, що стане одиничною матрицею III порядку, якщо в ній четвертий та п’ятий стовпчики поміняти місцями. Це означає, що

$r(A)=r(B)=3$.

3. Базисним є мінор, що утворений першим, другим, третім рядками та третім, четвертим, п’ятим стовпчиками. Базисними невідомими є $x_3, x_4, x_5,$, а вільними невідомими є x_1 та x_2. Значить, четверте рівняння можна відкинути, оскільки воно являється лінійною комбінацією інших рівнянь системи.

4. Запишемо систему у наступному вигляді:

$$\begin{cases} x_3+x_4+2x_5=1-4x_1+2x_2; \\ 4x_3+8x_4+13x_5=9-6x_1+3x_2; \\ x_3+2x_4+3x_5=2-2x_1+x_2. \end{cases} \qquad (*)$$

6. Розв'яжемо отриману систему методом Гаусса.

Коментарії до таблиці:

1) складаємо таблицю I відповідно системі (*);

2) елемент $a_{11}=1$ призначаємо провідним елементом, а перший рядок – провідним рядком;

3) перший рядок таблиці I без змін переносимо у таблицю II;

4) ті елементи першого стовпчика таблиці I, які лежать нижче елемента $a_{11}=1$, замінимо на нулі та запишемо цей стовпчик у таблицю II;

№ таблиці	Коефіцієнти при базисних невідомих			b_i	Коефіцієнти при вільних невідомих	
	x_3	x_4	x_5		x_1	x_2

I	1 4 1	1 8 2	2 13 3	1 9 2	−4 −6 −2	2 3 1
II	1 0 0	1 4 1	2 5 1	1 5 1	−4 10 2	2 −5 −1
III	1 0 0	1 4 0	2 5 −1	1 5 −1	−4 10 −2	2 −5 1

5) шукаємо інші елементи таблиці II:

$a'_{22} = 8 \times 1 - 1 \times 4 = 4;$ $\quad a'_{32} = 2 \times 1 - 1 \times 1 = 1;$

$a'_{23} = 13 \times 1 - 2 \times 4 = 5;$ $\quad a'_{33} = 3 \times 1 - 2 \times 1 = 1;$

$b'_2 = 9 \times 1 - 1 \times 4 = 5;$ $\quad b'_3 = 2 \times 1 - 1 \times 1 = 1;$

$a'_{24} = -6 \times 1 - (-4) \times 4 = 10;$ $\quad a'_{34} = -2 \times 1 - 1 \times (-4) = 2;$

$a'_{25} = 3 \times 1 - 4 \times 2 = -5;$ $\quad a'_{35} = 1 \times 1 - 1 \times 2 = -1;$

6) елемент $a'_{22} = 4$ таблиці II призначаємо провідним елементом, а другий рядок − провідним рядком;

7) перший рядок таблиці II та другий рядок таблиці II без змін переносимо до таблиці III;

8) перший стовпчик таблиці II без змін переносимо до таблиці III;

9) у другому стовпчику таблиці II той елемент, який лежить нижче другого рядка, замінимо нулем і запишемо у таблицю III;

10) шукаємо інші елементи таблиці III:

$a''_{33} = 1 \times 4 - 5 \times 1 = -1;$ $\quad a''_{34} = 2 \times 4 - 10 \times 1 = -2;$

$b''_3 = 1 \times 4 - 5 \times 1 = -1;$ $\quad a''_{35} = -1 \times 4 - (-5) \times 1 = 1.$

Обернений хід.

1. Останньому рядку таблиці III відповідає рівняння:

$$-x_5 = -1 - 2x_1 + x_2$$

або

$$x_5 = 1 + 2x_1 - x_2;$$

2. Другому рядку таблиці III відповідає рівняння:

$$4x_4 + 5x_5 = 5 + 10x_1 - 5x_2$$

або

$$4x_4 + 5(1 + 2x_1 - x_2) = 5 + 10x_1 - 5x_2,$$

$$4x_4 = 5 - 5 + 10x_1 - 10x_1 - 5x_2 + 5x_2,$$

$$x_4 = 0;$$

3. Нарешті, на основі першого рядка таблиці маємо

$$x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 - 4x_1 + 2x_2$$

або

$$x_3 + 2(1 + 2x_1 - x_2) = 1 - 4x_1 + 2x_2,$$
$$x_3 = 1 - 2 - 4x_1 - 4x_1 + 2x_2 + 2x_2,$$
$$x_3 = -1 - 8x_1 + 4x_2;$$

4. Загальний розв'язок системи має вигляд:

$$\begin{cases} x_3 = -1 - 8x_1 + 4x_2; \\ x_4 = 0; \\ x_5 = 1 + 2x_1 - x_2. \end{cases}$$

Візьмемо до уваги, що вільні невідомі можуть набувати будь-які значення, тоді загальний розв'язок можна записати у вигляді

$$\begin{cases} x_3 = -1 - 8c_1 + 4c_2; \\ x_4 = 0; \\ x_5 = 1 + 2c_1 - c_2; \end{cases}$$

5.Тепер маємо можливість знайти декілька частинних розв'язків системи. Будемо вільним невідомим надавати конкретні числові значення і знайдемо відповідні значення базисних невідомих.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	0	−1	0	1
1	4	7	0	−1
−2	−8	−17	0	5
–	–	–	–	–
–	–	–	–	–

Приклад. Дослідити задану систему рівнянь на сумісність

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 5; \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 7; \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 2; \\ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -2; \\ x_1 + 4x_2 - 9x_3 = 3. \end{cases}$$

У тому випадку, коли система рівнянь сумісна, знайти її загальний розв'язок та три частинних розв'язки, якщо вони існують.

Розв'язання

1. Складемо основну та розширену матриці системи.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & -5 \\ 1 & 4 & -9 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 5 \\ 3 & -2 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & -5 & -2 \\ 1 & 4 & -9 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Знайдемо ранги матриць A та B методом окаймляючих мінорів.

$$M_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -7 \neq 0; \qquad M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -56 \neq 0.$$

Таким чином,

$$r(A) = 3.$$

В матриці B візьмемо мінор M_3, що окаймляє мінор M_2.

$$M_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 & 5 \\ 3 & -2 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & -5 & -2 \end{vmatrix}.$$

Коментарії:

1) елементи другого стовпчика помножимо на (-2) та додамо до елементів першого стовпчика;

2) елементи другого стовпчика помножимо на 4 і додамо до елементів третього стовпчика;

3) елементи другого стовпчика помножимо на (-5) і додамо до елементів четвертого стовпчика.

$$M_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & -2 & -7 & 17 \\ -1 & 1 & 9 & -3 \\ -7 & 3 & 7 & -17 \end{vmatrix}.$$

Коментарії:

1) елементи першого стовпчика додамо до елементів другого стовпчика.

$$M_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & -2 & 0 & 17 \\ -1 & 1 & 8 & -3 \\ -7 & 3 & 0 & -17 \end{vmatrix}.$$

Коментарії:

1) елементи другого рядка додамо до елементів четвертого рядка.

$$M_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & -2 & 0 & 17 \\ -1 & 1 & 8 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

як визначник, у якому є два однакових рядки.

Ми маємо ще один окаймляючий мінор.

$$M_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 & 5 \\ 3 & -2 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & -9 & 3 \end{vmatrix}.$$

Коментарії:

1) елементи другого стовпчика помножимо на (-2) та додамо до елементів першого стовпчика;

2) елементи другого стовпчика помножимо на 4 і додамо до елементів третього стовпчика;

3) елементи другого стовпчика помножимо на (-5) і додамо до елементів четвертого стовпчика.

$$M_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & -2 & -7 & 17 \\ -1 & 1 & 9 & -3 \\ -7 & 4 & 7 & -17 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 7 & -7 & 17 \\ -1 & 9 & -3 \\ -7 & 7 & -17 \end{vmatrix} = 0,$$

як визначник з двома однаковими рядками.

Значить,

$$r(B) = 3.$$

3. Оскільки $r(B) = r(A) = 3$, то значить, система рівнянь сумісна. Базисними є перший, другий, третій рядки та перший, другий, третій стовпчики. Четверте та п'яте рівняння мусимо відкинути.

Оскільки ранг матриць A та B дорівнює кількості невідомих, то система має єдиний розв'язок.

4. Система набуває вигляд

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 5; \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 7; \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 2. \end{cases} \qquad (*)$$

Розв'яжемо цю систему методом Гаусса.

№ таблиці	Коефіцієнти при невідомих			b_i	Контрольний стовпчик
	x_1	x_2	x_3		
I	2	1	−4	5	−1
	3	−2	1	7	2
	1	1	5	2	7
II	2	1	−4	5	−1
	0	−7	14	−1	7
	0	1	14	−1	15

III	2 0 0	1 −7 0	−4 14 −112	5 −1 8	−1 7 −112

Коментарії до таблиці:

1) таблицю I складаємо відповідно системі (*);
2) контрольний стовпчик дорівнює сумі коефіцієнтів при невідомих;
3) елемент $a_{11} = 2$ призначаємо провідним елементом, а перший рядок – провідним рядком;
4) перший рядок таблиці I без змін переносимо у таблицю II;
5) елементи першого стовпчика таблиці I, які лежать нижче першого рядка замінимо на нулі та запишемо цей стовпчик у таблицю II;
6) шукаємо інші елементи таблиці II:

$$a'_{22} = -2 \times 2 - 1 \times 3 = -7; \qquad a'_{32} = 1 \times 2 - 1 \times 1 = 1;$$

$$a'_{23} = 1 \times 2 - (-4) \times 3 = 14; \qquad a'_{33} = 5 \times 2 - (-4) \times 1 = 14;$$

$$b'_2 = 7 \times 2 - 5 \times 3 = -1; \qquad b'_3 = 2 \times 2 - 5 \times 1 = -1;$$

$$k'_2 = 2 \times 2 - (-1) \times 3 = 7; \qquad k'_3 = 7 \times 2 - (-1) \times 1 = 15;$$

7) перевірка за допомогою контрольного стовпчика:

$$0 - 7 + 14 = 7 = k'_2;$$

$$0 + 1 + 14 = 15 = k'_3.$$

Коефіцієнти знайдені правильно. Таблиця II складена;

8) елемент $a'_{22} = -7$ таблиці II призначаємо провід елементом, а другий рядок – провідним рядком;
9) перший та другий рядки таблиці II без змін переносимо у таблицю III;
10) перший стовпчик таблиці II без змін переносимо у таблицю III;
11) елемент другого стовпчика таблиці II, який лежить нижче елемента $a'_{22} = 7$, замінимо нулем і запишемо цей стовпчик у таблицю III;
12) шукаємо інші елементи таблиці III:

$$a''_{33} = 14 \cdot (-7) - 14 \cdot 1 = -112;$$

$$b''_3 = -1 \cdot (-7) - (-1) \cdot 1 = 8;$$

$$k''_3 = 15 \cdot (-7) - 7 \cdot 1 = -112.$$

5. Матриця A приведена до трикутної форми. Можна починати обернений хід.

$$-122x_3 = 8; \qquad x_3 = -\frac{1}{14}.$$

$$-7x_2 + 14x_3 = -1; \qquad -7x_2 = -1 - 14 \times \left(-\frac{1}{4}\right);$$

$$-7x_2 = -1 + 1; \qquad -7x_2 = 0; \qquad x_2 = 0.$$

$$2x_1 + x_2 - 4x_3 = 5; \qquad 2x_1 = 5 + 4 \times \left(-\frac{1}{14}\right);$$

$$2x_1 = \frac{33}{7}; \qquad x_1 = \frac{33}{14}.$$

Таким чином,

$$x_1 = \frac{33}{14}; \qquad x_2 = 0; \qquad x_3 = -\frac{1}{14}.$$

Це єдиний розв'язок системи.

Приклад. Перевірити, чи сумісна система рівнянь і розв'язати цю систему, якщо вона сумісна,

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 5; \\ 9x_1 + 3x_2 - x_3 + 6x_4 = 8; \\ 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 10. \end{cases}$$

Розв'язання

1. Складемо матриці A та B.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ 9 & 3 & -1 & 6 \\ 6 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 & 5 \\ 9 & 3 & -1 & 6 & 8 \\ 6 & 2 & 4 & 4 & 10 \end{pmatrix}.$$

2. Знаходимо ранги цих матриць методом окаймляючих мінорів.

$$M_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 0; \qquad M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0.$$

можна переходити до окаймляючих мінорів.

$$M_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 9 & 3 & -1 \\ 6 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0; \qquad M_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Значить,

$$r(A) = 2.$$

Для матриці B маємо:

$$M_5 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 8 \\ 2 & 4 & 10 \end{vmatrix} = 0; \qquad M_6 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 8 \\ 4 & 4 & 10 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким чином,

$$r(B) = 2.$$

3. Система рівнянь сумісна. Базисними є перший та другий рядки, з чого виходить, що третє рівняння необхідно відкинути.

Базисними є другий та третій стовпчики, з чого виходить, що базисними невідомими є x_2 та x_3, а x_1 та x_4 – вільні невідомі.

4. Система рівнянь набуває вигляд

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = 5 - 3x_1 - 2x_4; \\ 3x_2 - x_3 = 8 - 9x_1 - 6x_4. \end{cases}$$

5. Розв'яжемо цю систему за правилом Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7; \qquad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 5-3x_1-2x_4 & 2 \\ 8-9x_1-6x_4 & -1 \end{vmatrix} = -21+21x_1+14x_4;$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & 5-3x_1-2x_4 \\ 3 & 8-9x_1-6x_4 \end{vmatrix} = -7.$$

$$x_2 = \frac{-21+21x_1+14x_4}{-7}$$

або

$$x_2 = 3-3x_1-2x_4;$$

$$x_3 = \frac{-7}{-7}$$

або

$$\mathrm{x}_3 = 1.$$

5. Таким чином, система рівнянь має нескінченну множину розв'язків. Загальний розв'язок системи заданий формулами

$$\begin{cases} x_2 = 3-3x_1-2x_4; \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} \mathrm{x}_1 = c_1; \\ x_4 = c_2; \\ x_2 = 3-3c_1-2c_2; \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Будемо вільним невідомим надавати будь-які числові значення, що дозволить знайти частинні розв'язати системи рівнянь.

x_1	x_2	x_3	x_4
1	2	1	−1
−1	6	1	0
2	3	1	−3
–	–	–	–
–	–	–	–

3.6. Однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Означення. Однорідною системою лінійних алгебраїчних рівнянь називається така система рівнянь, в якій усі вільні члени дорівнюють нулеві

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0; \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \qquad (3.19)$$

На основі теореми Кронекера-Капелі можна стверджувати, що така система завжди сумісна, оскільки розширена матриця B від матриці A системи відрізняється лише на нульовий стовпчик.

Означення. Будь-яка однорідна система рівнянь завжди має нульовий розв'язок $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$, званий тривіальним розв'язком .

Теорема. Для того, щоб однорідна система m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими мала ненульові розв'язки, необхідно та достатньо, щоб ранг r матриці цієї системи був менше за n.

Доведення

Як ми знаємо з розділу 3.5, будь-яка система лінійних алгебраїчних рівнянь, у тому числі і система (3.19), має єдиний розв'язок тоді і лише тоді, коли $r = n$. Якщо ж $r < n$, то система (3.19) є сумісною, але невизначеною і має безліч розв'язків.

Теорема. Для того, щоб однорідна система n алгебраїчних рівнянь з n невідомими мала ненульові розв'язки, необхідно та достатньо, щоб визначник Δ цієї системи дорівнював нулеві.

Доведення

І. Необхідність.

Будемо виходити з того, що система рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0; \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = 0; \end{cases} \qquad (3.19')$$

має ненульові розв'язки. Звідси виходить, що ранг r цієї системи менше за n, а це означає, що визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

не може відрізнятись від нуля, оскільки тоді виконувалась би умова $r = n$.

ІІ. Достатність.

Нехай Δ дорівнює нулеві. Тоді є неможливою рівність $r = n$. Значить,

$$r < n.$$

Теорема. Будь-яка лінійна комбінація розв'язків невизначеної однорідної системи рівнянь також є розв'язком цієї системи.

Доведення

Нехай

$$x_1 = \alpha_1;\ x_2 = \alpha_2;\ ...;\ x_n = \alpha_n -$$

деякий нетривіальний розв'язок однорідної системи (3.19). Значить,

$$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + ... + a_{in}\alpha_n = 0, \qquad (*)$$

де $i = 1; 2; ...; m$.

Позначимо

$$l_1 = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n).$$

Нехай тепер

$$x_i = \beta_i;\ x_2 = \beta_2; ...; x_n = \beta_n -$$

ще один нетривіальний розв'язок цієї ж системи рівнянь. Значить,

$$a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + ... + a_{in}\beta_n = 0,$$

де $i = 1;2;...; m$.

Позначимо

$$l_2 = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n). \qquad (**)$$

Утворимо тау лінійну комбінацію:

$$c_1 l_1 + c_2 l_2 = (c_1\alpha_1 + c_2\beta_1; c_1\alpha_2 + c_2\beta_2; ...; c_1\alpha_n + c_2\beta_n).$$

Якщо взяти до уваги рівності (*) та (**), то можна стверджувати, що буде слушною і наступна рівність:

$$a_{il}(c_1 a_1 + c_2\beta_1) + a_{i2}(c_1\alpha_2 + c_2\beta_2) + ... + a_{in}(c_1\alpha_n + c_2\beta_n) = 0.$$

Остання рівність означає, що будь-яка лінійна комбінація розв'язків невизначеної однорідної системи також є її розв'язком.

Означення. Лінійно незалежна система розв'язків $l_1; l_2; ... l_k$ однорідної системи рівнянь (3.19) називається фундаментальною системою розв’язків цієї системи, якщо кожний інший розв’язок системи є лінійною комбінацією розв’язків $l_1; l_2; ... l_n$.

Теорема (про існування фундаментальних систем розв'язків). Якщо ранг r матриці однорідної системи розвіянь (3.19) менше за n, то ця система має фундаментальні системи розв'язків.

Доведення

Нехай матриця системи

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Припустимо для зручності, що базисний мінор порядку r займає лівий верхній кут матриці A. Тоді можна стверджувати, що

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2r} \\ - & - & - & - \\ a_{r1} & a_{r2} & ... & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

У цьому разі базисними невідомими будемо вважати невідомі $x_1; x_2; ...; x_r$. Подамо перші r рівнянь системи (3.19) у наступному вигляді:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1r}x_r = -a_{1,r+1}x_{r+1} - ... - a_{1n}x_n; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2r}x_r = -a_{2,r+1}x_{r+1} - ... - a_{2n}x_n; \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + ... + a_{rr}x_r = -a_{r,r+1}x_{r+1} - ... - a_{rn}x_n. \end{cases} \tag{3.20}$$

Вільним невідомим надамо такі значення:

$$x_{r+1} = 1;\ x_{r+2} = 0; ...; x_n = 0 .$$

Підставимо ці значення в останню систему. Тоді маємо:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1r}x_r = -a_{1,r+1}; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2r}x_r = -a_{2,r+1}; \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + ... + a_{rr}x_r = -a_{r,r+1}. \end{cases} \tag{3.21}$$

Визначник цієї системи, як ми вже знаємо, відрізняється від нуля. Отже, система (3.21) має єдиний розв'язок. Позначимо його так:

$$x_1 = \alpha_1;\quad x_2 = \alpha_2;\ ...;\ x_r = \alpha_r .$$

При цьому система (3.19) має такий розв'язок:

$$x_1 = \alpha_1;\ x_2 = \alpha_2; ...;\ x_r = \alpha_r;\quad x_{r+1} = 1;\quad x_{r+2} = 0; ...;\quad x_n = 0 .$$

Його можна записати так:

$$(\alpha_1; \alpha_2; ...; \alpha_r;\ 1;\ 0;\ 0; ...;\ 0) .$$

Тепер вільним невідомим надамо інші значення, а саме:

$$x_{r+1} = 0;\ x_{r+2} = 1;\ ...;\ x_n = 0 .$$

Підставляючи ці значення у систему (3.20), аналогічно знайдемо ще один розв'язок системи (3.19).

$$(\beta_1; \beta_2; ...; \beta_r;\ 0;\ 1;\ 0; ...;\ 0) .$$

Таким же чином можна знайти й інші розв'язки. Усього їх буде $k = n - r$. Запишемо їх.

$$e_1 = (\alpha_1; \alpha_2; ...; \alpha_r; 1; 0; 0; ...; 0)$$
$$e_2 = (\beta_1; \beta_2; ...; \beta_r; 0; 1; 0; ...; 0)$$
$$- \quad - \quad - \quad -$$
$$e_k = (\gamma_1; \gamma_2; ...; \gamma_r; 0; 0; 0; ...; 1) \quad (3.22)$$

Відповідна матриця

$$\Phi = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_r & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_r & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_r & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

має ранг $r = k$, оскільки мінор M $k-$го порядку

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \ldots & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

цієї матриці відрізняється від нуля. Звідси виходить, що розв'язки (3.22) між собою лінійно незалежні.

Отже, ми маємо $k = n - r$ лінійно незалежних розв'язків.

Залишається показати, що усі інші розв'язки системи лінійно виражається через них.

Візьмемо будь-який розв'язок системи (3.19).

$$e = (\mu_1; \mu_2; ...; \mu_r; \mu_{r+1}; ...; \mu_n).$$

Тепер розглянемо такий рядок

$$e_0 = e - \mu_{r+1}e_1 - \mu_{r+2}e_2 - ... - \mu_n e_k.$$

Цей рядок є лінійною комбінацією розв'язків системи (3.20), а значить він також є розв'язком системи (3.20). Неважко помітити, що коли в e_0 провести спрощення, то усі елементи, які займають останні k місць дорівнюють нулеві. Тобто, e_0 можна було б написати так:

$$e_0 = (\rho_1; \rho_2; ...; \rho_r; 0; 0; ...; 0).$$

Виходить, що усі вільні невідомі мають нульові значення і система (3.20) – це однорідна система, визначник якої відрізняється від нуля. Тоді існує лише тривіальний розв'язок цієї системи. З цього твердження виходить, що e_0 – нульовий рядок.

$$e_0 = (0; 0; ...; 0).$$

На основі останнього висновку маємо:

$$e - \mu_{r+1}e_1 - \mu_{r+2}e_2 - ... - \mu_n e_k = 0$$

або

$$e = \mu_{r+1}e_1 + \mu_{r+2}e_2 + ... + \mu_n e_k.$$

Таким чином, ми довели, що будь-який розв'язок системи (3.19) може бути виражений через розв'язки системи (3.20). Значить, систему (3.20) можна вважати фундаментальною системою розв'язків.

Якщо б у процесі доведення вільним невідомим ми б надавали інші значення, при яких мінор M матриці Φ відрізнявся б від нуля, то ми б отримали іншу фундаментальну систему розв'язків. Отже, виходить, що одна й та ж однорідна система має нескінченну кількість фундаментальних розв'язків.

Кожна фундаментальна система має $k=n-r$ лінійно незалежних розв'язків і кожні $k=n-r$ лінійно незалежних розв'язків утворюють фундаментальну систему розв'язків.

Зауваження. Якщо ранг r однорідної системи рівнянь (3.19) дорівнює n, то така система рівнянь не має фундаментальної системи розв'язків. Якщо ранг $r=n-1$, та така система рівнянь має фундаментальну систему розв'язків, що складається з одного розв'язка, і тоді будь-який ненульовий розв'язок є фундаментальною системою розв'язків.

Означення. Загальним розв'язком однорідної системи рівнянь (3.19) називається лінійна комбінація розв'язків будь-якої фундаментальної системи розв'язків.

Правило набування фундаментальної системи розв'язків

1. Необхідно взяти будь-який мінор M порядку $k=n-r$, що відрізняється від нуля. Наприклад, такий:

$$M=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Вільним $k=n-r$ невідомим по черзі надавати значення, які співпадають з елементами першого, потім другого і т.д., $k-$го рядків.

3. Із загального розв'язку системи рівнянь знаходять відповідні значення базисних невідомих.

4. Отримані $k=n-r$ розв'язків утворюють фундаментальну систему розв'язків.

Така фундаментальна система розв'язків називається нормальною.

Загальний розв'язок системи описується формулами, в яких базисні невідомі виражені через вільні невідомі. Якщо для простоти припустити, що базисними невідомими є $x_1; x_2; ...; x_r$, то загальний розв'язок можна подати таким чином:

$$\begin{cases} x_1=\varphi_1\left(x_{r+1}; x_{r+2}; ...; x_n\right); \\ x_2=\varphi_2\left(x_{r+1}; x_{r+2}; ...; x_n\right); \\ - \quad - \quad - \quad - \\ x_r=\varphi_r\left(x_{r+1}; x_{r+2}; ...; x_n\right) \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} x_{r+1} = c_1; \\ x_{r+2} = c_{2;} \\ - \quad - \quad - \\ x_n = c_{n-r}; \\ x_1 = \varphi_1\left(c_1; c_2; \ldots; c_{n-r}\right); \\ x_2 = \varphi_2\left(c_1; c_2; \ldots; c_{n-r}\right); \\ - \quad - \quad - \quad - \\ x_r = \varphi_r\left(c_1; c_2; \ldots; c_{n-r}\right). \end{cases}$$

Приклад. Розв'язати наступну систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0; \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0; \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0; \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання

Задана система є однорідною системою.

Оскільки кількість невідомих дорівнює кількості рівнянь, то необхідно перевірити, чи має ця система нетривіальні розв'язки. Знайдемо визначник системи.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -3 & -18 & -9 \\ 0 & 2 & 12 & -10 \end{vmatrix} = \left(-1\right)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & -6 & 5 \\ -3 & -18 & -9 \\ 2 & 12 & -10 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 \times 2 \begin{vmatrix} -1 & -6 & 5 \\ 1 & 6 & 3 \\ 1 & 6 & -5 \end{vmatrix} = -6 \times \begin{vmatrix} -1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Коментарії:

елементи першого рядка помножимо на:

$\left(-3\right)$ та додамо до відповідних елементів другого рядка;

$\left(-4\right)$ та додамо до відповідних елементів третього рядка;

$\left(-3\right)$ та додамо до відповідних елементів четвертого рядка;

отриманий визначник зручно розкласти за елементами першого стовпчика;

визначник III порядку можна спростити, якщо з другого та третього рядків винести спільні множники;

в отриманому після цього визначникові елементи першого рядка додамо до відповідних елементів:

другого рядка;

третього рядка;

останній з визначників має нульовий рядок, такий визначник дорівнює нулеві. Таким чином, маємо підстави стверджувати, що однорідна система має нескінченну кількість розв'язків.
Розв'яжемо цю систему методом Гаусса.

№ таблиці	Коефіцієнти при базисних невідомих				b	Контрольний стовпчик
	x_1	x_2	x_3	x_4		
I	1	2	4	−3	0	4
	3	5	6	−4	0	10
	4	5	−2	3	0	10
	3	8	24	−19	0	16
II	1	2	4	−3	0	4
	0	−1	−6	5	0	−2
	0	−3	−18	15	0	−6
	0	2	12	−10	0	4
III	1	2	4	−3	0	4
	0	−1	−6	5	0	−2
	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0

Коментарії до таблиці:

відповідно умові складаємо таблицю I;

елементи контрольного стовпчика дорівнюють сумі коефіцієнтів при невідомих;

для перехода до таблиці II елемент $a_{11} = 1$ призначимо провідним елементом, а перший рядок − провідним рядком;

перший рядок переносимо без змін до таблиці II;

у першому стовпчику усі елементи, які лежать нижче провідного елемента, замінимо нулями та перенесемо до таблиці II;

знаходимо інші елементи таблиці II:

$a'_{22} = 5\times1 - 2\times3 = -1;$ $\quad a'_{34} = 3\times1 - (-3)\times4 = 15;$

$a'_{23} = 6\times1 - 4\times3 = -6;$ $\quad k'_3 = 10\times1 - 4\times4 = -6;$

$a'_{24} = -4\times1 - (-3)\times3 = 5;$ $\quad a'_{42} = 8\times1 - 2\times3 = 2;$

$k'_2 = 10\times1 - 4\times3 = -2;$ $\quad a'_{43} = 24\times1 - 4\times3 = 12;$

$a'_{32} = 5\times1 - 2\times4 = -3;$ $\quad a'_{44} = -19\times1 - (-3)\times3 = -10;$

$a'_{33} = -2\times1 - 4\times4 = -18;$ $\quad k'_3 = 16\times1 - 4\times3 = 4;$

перевірка за допомогою контрольного стовпчика:

$$0 - 1 - 6 + 5 = -2 = k'_2;$$

$$0 - 3 - 18 + 15 = -6 = k'_3;$$

$$0 + 2 + 12 - 10 = 4 = k'_4.$$

Коефіцієнти знайдені правильно. Таблиці II складена;

елемент $a'_{22} = -1$ таблиці II призначимо провідним елементом, а другий рядок – провідним рядком;

перший та другий рядки таблиці II без змін переносимо до таблиці III;

перший стовпчик таблиці II без змін переносимо до таблиці III;

елементи другого стовпчика таблиці II, які розміщуються нижче другого рядка, замінимо нулями та перенесемо до таблиці III;

знаходимо інші елементи таблиці III:

$a''_{33} = -18 \times (-1) - (-6) \times (-3) = 0;$ $a''_{43} = 12 \times (-1) - (-6) \times 2 = 0;$

$a''_{34} = 15 \times (-1) - 5 \times (-3) = 0;$ $a''_{44} = -10 \times (-1) - 5 \times 2 = 0;$

$k''_3 = -6 \times (-1) - (-2) \times (-3) = 0;$ $k''_4 = 4 \times (-1) - (-2) \times 2 = 0;$

перевірка за допомогою контрольного стовпчика:

$$0 + 0 + 0 + 0 = 0 = k''_3;$$
$$0 + 0 + 0 + 0 = 0 = k''_4.$$

Коефіцієнти знайдені правильно. Таблиця III складена.

З останньої таблиці бачимо, що III та IV рівняння в системі можна відкинути, оскільки вони являють собою лінійну комбінацію I та II рівнянь.
Система набуває вигляд

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0; \\ \quad - x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Розглянемо матрицю системи.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Її мінор $M = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, отже, ранг матриці дорівнює 2.

$$r(A) = 2.$$

Невідомі x_1 та x_2 вважаємо базисними невідомими, а x_3 та x_4 – вільними невідомими.
Запишемо тепер систему рівнянь в такому вигляді

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -4x_3 + 3x_4; \\ \quad - x_2 = 6x_3 - 5x_4. \end{cases}$$

У зв'язку з проведеними раніше перетвореннями, ця система готова до проведення оберненого ходу. З II рівняння маємо:

$$x_2 = - 6x_3 - 5x_4.$$

З I рівняння маємо:

$$x_1 = -2x_2 - 4x_3 + 3x_4$$

або

$$x_1 = -2(- 6x_3 + 5x_4) - 4x_3 + 3x_4,$$
$$x_1 = 8x_3 - 7x_4.$$

Загальний розв'язок системи може бути поданий у наступному вигляді

$$\begin{cases} x_3 = c_1; \\ x_4 = c_2; \\ x_1 = 8c_1 - 7c_2; \\ x_2 = -6c_1 + 5c_2. \end{cases}$$

З загального розв'язку можемо отримати частинні розв'язки, надаючи вільним невідомим ті чи інші значення.

x_1	x_2	x_3	x_4
1	-1	1	1
-5	3	2	3
-16	12	-2	0
–	–	–	–
–	–	–	–

Приклад. Розв'язати однорідну систему рівнянь, знайти її фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0; \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання

В систему входить п'ять невідомих та лише три рівняння. Матриця A системи:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Знайдемо ранг матриці. Будемо шукати ранг матриці методом окаймляючих мінорів.

$$M_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0; \qquad M_2 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Тепер обчислимо окаймляючі мінори.

$$M_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \qquad M_4 = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 0.$$

Виходить,

$$r(A) = 2.$$

Оскільки базисними рядками є перший та другий рядки, то значить, третє рівняння є наслідком перших двох рівнянь, а оскільки базисними стовпчиками є другий та третій, то невідомі x_2 та x_3 будемо вважати базисними невідомими.

Систему рівнянь доцільно записати таким чином:

$$\begin{cases} -x_2 + 3x_3 = -2x_1 + 2x_4 - 4x_5; \\ -2x_2 + 5x_3 = -4x_1 - x_4 - 7x_5. \end{cases}$$

Будемо шукати базисні розв'язки. Відомо, що $n = 5;\ r = 2$, значить, $k = 5 - 2 = 3$. Звідси виходить, що базисних розв'язків має бути три. З цією метою вільним невідомим x_1, x_3, x_5 надамо деякі конкретні значення, наприклад, $x_1 = 1;\ x_3 = 0;\ x_5 = 0.$ Тоді приходимо до наступної системи:

$$\begin{cases} -x_2 + 3x_3 = -2; \\ -2x_2 + 5x_3 = -4. \end{cases} \qquad (*)$$

Визначник цієї системи співпадає з базисним мінором, значить, він відрізняється від нуля, а система (*) має єдиний розв'язок.

Знайдемо його за правилом Крамера.

$$\Delta = 1; \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 2; \quad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 0;$$

$$x_2 = 2; \quad x_3 = 0.$$

Таким чином, знайдемо один з розв'язків заданої системи:

$$x_1 = 1; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = 0; \quad x_4 = 0; \quad x_5 = 0.$$

Запишемо цей розв'язок у вигляді стовпчика

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Знову шукаємо розв'язок системи, надаючи вільним невідомим інших значень, а саме: $x_1 = 0;\ x_4 = 1;\ x_5 = 0.$ Це приводить нас до наступної системи:

$$\begin{cases} -x_2 + 3x_3 = 2; \\ -2x_2 + 5x_3 = -1. \end{cases} \qquad (**)$$

Розв'язуючи систему (**) за правилом Крамера, маємо:

$$\Delta = 1; \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 13; \quad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = 10;$$

$$x_2 = 13; \quad x_3 = 10.$$

Другий базисний розв'язок:

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 13; \quad x_3 = 5; \quad x_4 = 1; \quad x_5 = 0$$

або у вигляді стовпчика

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Нарешті, знайдемо третій базисний розв'язок. Нехай $x_1 = 0;\ x_4 = 0;\ x_5 = 1.$

Це дає таку систему:

$$\begin{cases} -x_2 + 3x_3 = -4; \\ -2x_2 + 5x_3 = -7. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо

$$x_2 = 1; \ x_3 = -1.$$

Третій базисний розв'язок:

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 1; \quad x_3 = -1; \quad x_4 = 0; \quad x_5 = 1$$

або у вигляді стовпчика

$$X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отримані базисні розв'язки між собою лінійно-незалежні.
Дійсно, утворимо матрицю із стовпців, які представляють базисні розв'язки.

$$\text{Б} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 13 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$r(\text{Б}) = 3$, оскільки до її складу входить ненульовий мінор III порядку:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

З таких розв'язків можна скласти фундаментальну систему розв'язків.
Зауваження. Фундаментальна система розв'язків, побудована таким чином, називається нормальною фундаментальною системою розв'язків.
Загальний розв'язок системи може бути знайдений, як лінійна комбінація базових розв'язків, тобто,

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3,$$

а саме

$$\begin{cases} x_1 = c_1; \\ x_2 = 2c_1 + 13c_2 + c_3; \\ x_3 = 5c_2 - c_3; \\ x_4 = c_2; \\ x_5 = c_3. \end{cases}$$

3.7. Зв'язок між розв’язками неоднорідних систем лінійних алгебраїчних рівнянь та відповідних їм однорідних систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Знову повернемося до систем (3.1) і (3.19) лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими.

Ці системи рівнянь відрізняються лише вільними членами. При цьому система (3.1) називається неоднорідною системою рівнянь, а відповідна їй однорідна система (3.19) рівнянь називається приведеною системою рівнянь по відношенню до системи (3.1).

Між розв’язками неоднорідної та приведеної системи рівнянь існує певний зв'язок.

Сума будь-якого розв'язку неоднорідної системи рівнянь та будь-якого розв'язку її приведеної системи є розв'язком неоднорідної системи рівнянь.

Різниця двох будь-яких розв'язків неоднорідної системи рівнянь є розв'язком її приведеної системи.

Загальний розв'язок неоднорідної системи рівнянь дорівнює сумі будь-якого частинного розв'язку неоднорідної системи рівнянь та загального розв'язку її приведеної системи.

Equation Chapter 1 Section 1**IV. МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ТА ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ**

4.1. Обчислення визначників

Приклад. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

безпосередньо за формулою (1.2);

за правилом трикутника.

Розв'язання

1) Звернемося до параграфа 1.1. За формулою (1.2) маємо:

$$\Delta = 1 \times 3 \times 4 + 4 \times 0 \times (-1) + (-2) \times 2 \times (-3) - (-2) \times 3 \times (-1) - 4 \times 2 \times 4 - 1 \times 0 \times (-3) =$$

$$= 12 + 12 - 6 - 32 = -14.$$

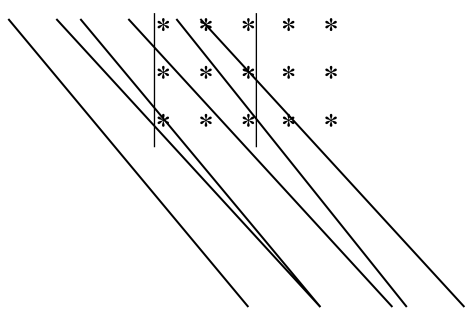
2) Обчислимо той же визначник, користуючись правилом трикутника.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 3 \times 4 + 4 \times 0 \times (-1) + (-2) \times 2 \times (-3) - (-2) \times 3 \times (-1) - 1 \times 0 \times (-3) -$$

$$- 4 \times 2 \times 4 = -14.$$

Для того, щоб запам'ятати формулу (1.2) добре користуватися методом дописування стовпчиків або рядків.

Зобразимо елементи визначника схематично та проведемо допоміжні прямі. Добутки елементів визначника, що знаходяться на прямих l_1, l_2, l_3 беруться зі своїм знаком, а добутки елементів, розміщених на прямих l_4, l_5, l_6 – з протилежним знаком.



$l_4 \quad l_5 \quad l_6 \qquad l_1 \quad l_2 \quad l_3$

Сума усіх отриманих добутків дорівнює визначнику Δ (розділ 1.1).

Приклад. Обчислити визначник

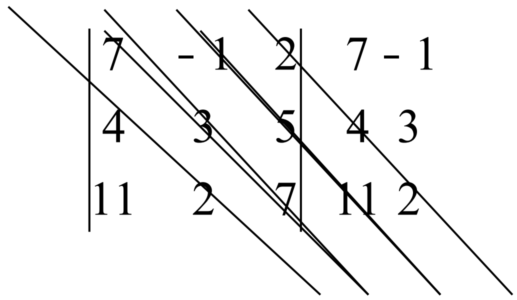
$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 11 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

1) безпосередньо за формулою (1.2);
2) способом дописування стовпчиків;
3) способом дописування рядків.

Розв'язання

1) $\Delta = 7\times3\times7 + 2\times4\times2 + (-1)\times5\times11 - 2\times3\times11 - 7\times5\times2 - 4\times(-1)\times7 = 0$

2) $\begin{vmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 11 & 2 & 7 \end{vmatrix} \begin{matrix} 7 & -1 \\ 4 & 3 \\ 11 & 2 \end{matrix}$



l_4 l_6 l_5 l_3 l_2 l_1

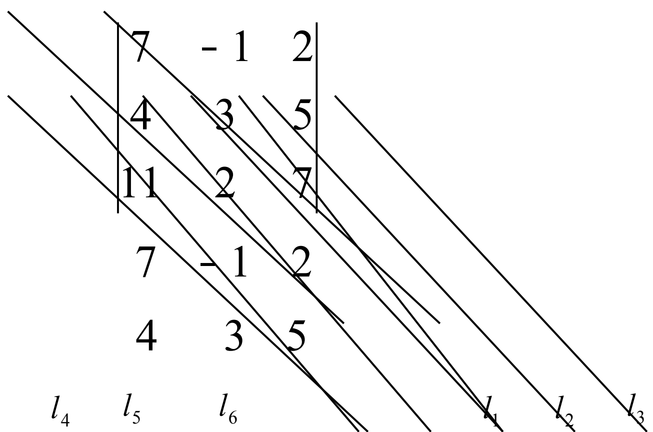
$l_4 \quad l_6 \quad l_5 \quad l_3 \quad l_2 \quad l_1$

$$\Delta = 7\times3\times7 + (-1)\times5\times11 + 2\times4\times2 - 2\times3\times11 - 7\times5\times2 - (-1)\times4\times7 = 0.$$

l_1 l_2 l_3 l_5 l_6 l_4

3) Під визначником допишемо перший та другий рядки.

$$\begin{vmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 11 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$
$$\begin{matrix} 7 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{matrix}$$



+ + + − − −

$$\Delta = 7\times3\times7+(-1)\times5\times11+2\times4\times2-2\times3\times11-7\times5\times2-(-1)\times4\times7=0.$$ l_1

l_2
l_3
l_5
l_6
l_4

Ми розглянули способи обчислення визначників лише III порядку.

Розглянемо тепер спосіб, який можна застосовувати до визначників будь-якого порядку, а саме, метод розкладання визначника за елементами будь-якого рядка чи стовпчика (параграф 1.1 ($1.1'$), ($1.2'$); параграф 1.4 (1.7)).

Приклад. Обчислити визначник Δ :

1) безпосередньо за формулою (1.2);

2) розкладанням за елементами будь-якого рядка чи стовпчика, якщо

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -3 & 2\\ 4 & 5 & -1\\ 6 & 0 & 7\end{vmatrix}.$$

Розв'язання

1) За формулою (1.2) маємо:

$$\Delta = 35+18-60+84=77.$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}7 & -1 & 2\\ 4 & 3 & 5\\ 11 & 2 & 7\end{vmatrix}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}7 & -1 & 2\\ 4 & 3 & 5\\ 11 & 2 & 7\end{vmatrix}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}7 & -1 & 2\\ 4 & 3 & 5\\ 11 & 2 & 7\end{vmatrix}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}7 & -1 & 2\\ 4 & 3 & 5\\ 11 & 2 & 7\end{vmatrix}$$

2) Як виходить з формули ($1.2'$), визначник можна розкласти чи за елементами будь-якого рядка чи за елементами будь-

$$\Delta=\begin{vmatrix}7 & -1 & 2\\ 4 & 3 & 5\\ 11 & 2 & 7\end{vmatrix}$$

l_4 l_5 l_6 l_1 l_2 l_3

якого стовпчика. Аналізуючи умову, приходимо до висновку, що найкраще розкласти визначник за елементами третього рядка або другого стовпчика, оскільки там один з елементів дорівнює нулеві. Отже, будемо розкладати визначник за елементами другого стовпчика.

Нам необхідно знайти алгебраїчні доповнення елементів другого стовпчика.

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -(28+6) = -34;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 12 = -5.$$

Алгебраїчне доповнення A_{32} можна не знаходити, оскільки його доведеться множити на 0.

Таким чином, за формулою ($1.2'$)

$$\Delta = -3 \times (-34) + 5 \times (-5) = 77.$$

Тепер розглянемо визначники порядку n.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - & - & - & - \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{im} & \dots & a_{in} \\ - & - & - & - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{cases} a_{i1} \times A_{i1} + a_{i2} \times A_{i2} + \dots + a_{in} \times A_{in}; & i = 1, 2, \dots, n; \\ a_{1m} \times A_{1m} + a_{2m} \times A_{2m} + \dots + a_{nm} \times A_{nm}; & m = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \tag{4.1}$$

Приклад. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ -5 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix},$$

користуючись формулою (4.1).

Розв'язання

Розкладемо визначник за елементами третього стовпчика. Це зручно, тому що один з елементів цього стовпчика дорівнює 0.

Знайдемо відповідні алгебраїчні доповнення.

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^4(-30 - 6 - 1 - 3 - 15 + 4) = -51;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -5 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^6(-4 - 60 - 11 - 4 + 6 + 10) = -51;$$

$$A_{43} = (-1)^{4+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -5 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^7(2-60-2+8+6-5) = -(-51) = 51.$$

Тоді

$$\Delta = -3\times(-51) + 5\times(-51) + 2\times 51 = 0.$$

Звернемо увагу на те, що при виборі рядка або стовпчика був вибраний такий стовпчик, у якого був елемент, що дорівнює 0. Це звільнило нас від необхідності обчислювати ще одне алгебраїчне доповнення. Зрозуміло, що чим більше нулів має рядок або стовпчик, тим легше обчислювати визначник.

Іноді, використовуючи властивості визначників, ці нулі роблять навмисно.

Приклад. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ -5 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix},$$

використовуючи спосіб створення нулів.

Розв'язання

Розглянемо другий рядок та утворимо у ньому ще два нуля. З цією метою домножимо четвертий стовпчик на (-5) та додамо до першого стовпчика, а тоді помножимо четвертого стовпчик на (-1) та додамо до другого стовпчика.

Отримаємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} -18 & -3 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 7 & 4 & 5 & -1 \\ -11 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Після цього отриманий визначник розкладемо за елементами другого рядка.

$$\Delta = 0\times A_{21} + 0\times A_{22} + 0\times A_{23} + (-1)\times A_{24} = -1\times(-1)^{2+4}\times\begin{vmatrix} -18 & -3 & -3 \\ 7 & 4 & 5 \\ -11 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -1\times(-1)^6\times(-3)\times\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 7 & 4 & 5 \\ -11 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\times(48+7-55+44-30-14) = 0.$$

Приклад. Обчислити визначник Δ за правилом прямокутника, якщо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ -5 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

Відповідно порядку роботи, запропонованого у розділі 1.4, маємо:

$$\Delta = \frac{1}{2^3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -15 & 18 \\ 0 & 4 & 16 & -10 \\ 0 & 7 & 1 & 8 \end{vmatrix}.$$

З другого та третього рядків можна винести спільні множники.

$$\Delta = \frac{3 \cdot 2}{2^3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 6 \\ 0 & 2 & 8 & -5 \\ 0 & 7 & 1 & 8 \end{vmatrix}.$$

Далі продовжуємо користуватися правилом прямокутника.

$$\Delta = \frac{3}{2^2 \cdot 1^2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 18 & -17 \\ 0 & 0 & 36 & -34 \end{vmatrix}.$$

Неважко помітити, що третій та четвертий рядки мають пропорційні коефіцієнти, отже, виходить, що

$$\Delta = 0.$$

Приклад. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} \end{vmatrix}.$$

Роз'язання

Будемо розкладати визначник за елементами п'ятого стовпчика.

$$\Delta = (-1)^{5+5} \cdot a_{55} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Знову розкладаємо визначник за елементами четвертого стовпчика.

$$\Delta = (-1)^{4+4} \cdot a_{44} \cdot a_{55} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Далі аналогічно.

$$\Delta = (-1)^{3+3} \cdot a_{33} \cdot a_{44} \cdot a_{55} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{2+2} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{44} \cdot a_{55} \cdot a_{11} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{44} \cdot a_{55}.$$

4.2. Матриці. Дії над матрицями

Приклад. Задані матриці

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 4\\ 2 & 5 & 0\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}1 & -1 & -4\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

Знайти матрицю С, якщо:

1) $C=2A;$
2) $C=3B;$
3) $C=-3A+4B;$
4) $4A+2C=5B.$

Розв'язання

1) $C=2A$.

Значить, для того, щоб знайти матрицю А, потрібно усі її елементи помножити на 2.

$$C=2\times\begin{pmatrix}3 & -1 & 4\\ 2 & 5 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -2 & 8\\ 4 & 10 & 0\end{pmatrix}$$

2) $C=3B$.

Аналогічно, маємо

$$C=3\times\begin{pmatrix}1 & -1 & -4\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -3 & -12\\ 9 & 6 & 3\end{pmatrix}$$

3) $C=-3A+4B$.

Знаходимо матриці $(-3A)$ та $4B$.

$$-3A=-3\times\begin{pmatrix}3 & -1 & 4\\ 2 & 5 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9 & 3 & -12\\ -6 & -15 & 0\end{pmatrix},$$

$$4B=4\times\begin{pmatrix}1 & -1 & -4\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -4 & -16\\ 12 & 8 & 4\end{pmatrix}$$

Для того, щоб знайти суму цих матриць, потрібно скласти їх відповідні елементи.

$$C=\begin{pmatrix}-9+4 & 3-4 & -12-16\\ -6+12 & -15+8 & 0+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & -1 & -28\\ 6 & -7 & 4\end{pmatrix}$$

4) $4A+2C=5B.$

Це матричне рівняння. Розв'язуючи його, знаходимо матрицю С.

$$2C=5B-4A; \qquad C=\frac{5}{2}B-2A$$

або

$$C=\frac{5}{2}B+(-2)A.$$

Тоді

$$C=\frac{5}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}+(-2)\cdot\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & -10 \\ \frac{15}{2} & 5 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix} -6 & 2 & -8 \\ -4 & -10 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{5}{2}-6 & -\frac{5}{2}+2 & -10-8 \\ \frac{15}{2}-4 & 5-10 & \frac{5}{2}+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & -18 \\ \frac{7}{2} & -5 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

Приклад. Знайти добуток матриць A та B, якщо:

1) $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$;

2) $A=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$;

3) $A=\begin{pmatrix} 5 & 7 & -4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

У кожному з трьох випадків кількість стовпчиків матриці A дорівнює кількості рядків матриці B, значить, існує добуток цих матриць. Будемо шукати добуток у відповідності з правилом множення матриць (параграф 1.5).

1) $$A\cdot B=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot 2+4\cdot(-3)+5\cdot(-1)+7\cdot 4 \end{pmatrix}=15.$$

Отримана матриця є скалярною матрицею.

2)

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot2 & 1\cdot3 & 1\cdot(-1)\\2\cdot2 & 2\cdot3 & 2\cdot(-1)\\3\cdot2 & 3\cdot3 & 3\cdot(-1)\\-5\cdot2 & -5\cdot3 & -5\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\4 & 6 & -2\\6 & 9 & -3\\-10 & -15 & 5\end{pmatrix}.$$

3) $$A\cdot B=\begin{pmatrix}5 & 7 & -4\\2 & 5 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot3+7\cdot2-4\cdot(-1)\\2\cdot3+5\cdot2+1\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}33\\15\end{pmatrix}$$

Приклад. Дано матриці

$$A=\begin{pmatrix}2 & 5 & 7 & 4\\-1 & 2 & 0 & -3\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}5 & 7 & 1 & 2\\-2 & 3 & 0 & 2\\-3 & 0 & 1 & 1\\1 & 1 & 2 & -2\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 2\\0 & 1 & 2 & 0\\4 & 1 & 1 & 1\\0 & 2 & -1 & 2\end{pmatrix},\qquad D=\begin{pmatrix}2 & -1\\3 & 0\\5 & -2\\1 & -3\end{pmatrix}.$$

Знайти:

1) вимірність матриць $AC,\ DA,\ AD\ DAC,\ BCDA$;

2) k_{23}, де k_{23} – елемент матриці $K = AB$;

3) r_{31}, де r_{31} – елемент матриці $R=CD$;

Розв'язання

1) При множенні матриці вимірністю (m×n) на матрицю вимірністю $(n\times p)$ виходить матриця–добуток вимірністю $(m\times p)$. За умовою вимірність матриць A, B, C, D дорівнює відповідно $(2\times4), (4\times4), (4\times4), (4\times2).$ Отже, виходить, що вимірність матриць AC, DA, AD відповідно дорівнює $(2\times4)\cdot(4\times4)=(2\times4);\ (4\times2)\cdot(2\times4)=(4\times4);\ (2\times4)\cdot(4\times2)= =(2\times2).$

Матриця DAC – це добуток матриць DA і C, значить, її вимірність дорівнює $(4\times4)\cdot(4\times4)=(4\times4),$ а матриця $BCDA$ – це добуток матриць BC та DA і її розмірність дорівнює $\left((4\times4)\cdot(4\times4)\right)\cdot(4\times4)=(4\times4)\cdot(4\times4)= =(4\times4)$.

2) Елемент k_{23} матриці K є сумою добутків елементів другого рядка матриці A на відповідні елементи третього стовпчика матриці B.

Отже,

$$k_{23}=(-1\quad 2\quad 0\quad -3)\times\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}=(-1+0+0-6)=(-7)=-7.$$

3) Елемент r_{31} матриці R – це сума добутків елементів третього рядка матриці C на перший стовпчик матриці D, тобто,

$$r_{31}=(4\quad 1\quad 1\quad 1)\times\begin{pmatrix}2\\3\\5\\1\end{pmatrix}=(4\times 2+1\times 3+1\times 5+1\times 1)=(17)=17.$$

Приклад. Знайти добуток матриць A та B, якщо він існує, у кожному з випадків:

1) $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&-1&3\\4&0&5\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}2&7&1\\3&2&-4\\1&-3&5\end{pmatrix};$

2) $A=\begin{pmatrix}3&-2&1\\1&0&4\\0&3&-5\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}2\\6\\7\end{pmatrix};$

3) $A=\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}5&-2&3\end{pmatrix};$

4) $A=\begin{pmatrix}5&-2&3\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}.$

Розв'язання

Матриці A та B – це квадратні матриці одного порядку, значить, існує і має такий же порядок їх добуток.

$$AB=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&-1&3\\4&0&5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&7&1\\3&2&-4\\1&-3&5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\times 2+\ 0\times 3\ +2\times 1 & 1\times 7+0\times 2+2\times(-3) & 1\times 1+0\times(-4)+2\times 5\\ 0\times 2+(-1)\times 3+3\times 1 & 0\times 7-1\times 2-3\times(-3) & 0\times 1-1\times(-4)+3\times 5\\ 4\times 2+\ 0\times 3\ +5\times 1 & 4\times 7-0\times 3+5\times(-3) & 4\times 1+0\times(-4)+5\times 5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 11 \\ 0 & -11 & 19 \\ 13 & 13 & 29 \end{pmatrix}.$$

Вимірність матриць A та B відповідно дорівнює (3×3) та (3×1). Добуток матриць існує та має вимірність (3×1).

$$AB=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\times 2-2\times 6+1\times 7 \\ 1\times 2+0\times 6+4\times 7 \\ 0\times 2+3\times 6-5\times 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 30 \\ -17 \end{pmatrix}.$$

У цьому випадку вимірність матриць A та B відповідно дорівнює (3×1) та (1×3). Значить, вимірність добутку дорівнює (3×3).

$$AB=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\times 5 & 3\times(-2) & 3\times 3 \\ 4\times 5 & 4\times(-2) & 4\times 3 \\ 2\times 5 & 2\times(-2) & 2\times 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 15 & -6 & 9 \\ 20 & -8 & 12 \\ 10 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

У цьому випадку добуток теж існує і має вимірність $(1\times 3)\times(3\times 1)=$ $=(1\times 1)$.

$$AB=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5\times 3+(-2)\times 4+3\times 2 \end{pmatrix}=(13)=13.$$

Отримана матриця − скаляр.

Приклад. Знайти добутки матриць AB та BA. Результати порівняти.

1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

2) $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

В обох випадках множниками є квадратні матриці одного порядку, отже, добутки існують і мають такий самий порядок.

1) $$AB=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\times(-2)+2\times 1 & 1\times 2+2\times 3 \\ 3\times(-2)+4\times 1 & 3\times 2+4\times 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -2 & 18 \end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2\times 1+2\times 3 & -2\times 2+2\times 4 \\ 1\times 1+3\times 3 & 1\times 2+3\times 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 10 & 14 \end{pmatrix},$$

2) $$AB=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\times 0+1\times 1 & 3\times 1+1\times 0 \\ 0\times 0+2\times 1 & 0\times 1+2\times 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\times3+1\times0 & 0\times1+1\times2\\ 1\times3+0\times0 & 1\times1+0\times2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$$

В обох випадках $AB \neq BA$, тобто матриці A та B не комутативні.

Приклад. Зайти добутки матриць AE та EA, якщо

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix},\qquad E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Результати порівняти.

Розв'язання

$$AE=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times1+3\times0 & 1\times0+3\times1\\ 2\times1+4\times0 & 2\times0+4\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix},$$

$$EA=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times1+0\times2 & 1\times3+0\times4\\ 0\times1+1\times2 & 0\times3+1\times4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}.$$

Висновок: $AE = EA = A.$

Приклад. а) Знайти матрицю $C = AE + OB$:

1) безпосередньо;

2) користуючись властивостями матриць, якщо

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad O=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}5 & -4\\ -2 & 1\end{pmatrix};$$

б) Знайти матриці A^2, E^3, O^2.

Розв'язання

а) 1) $$C = AE + OB=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}5 & -4\\ -2 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\times1+2\times0 & 1\times0+2\times1\\ 2\times1-3\times0 & 2\times0-3\times1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\times5+0\times(-2) & 0\times(-4)+0\times1\\ 0\times5+0\times(-2) & 0\times(-4)+0\times1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix}.$$

2) $$C = AE + OB = A + O = A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix}$$

б) 1) $$A^2 = A\times A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times1+\ 2\times2 & 1\times2+\ 2\times(-3)\\ 2\times1+(-3)\times2 & 2\times2+(-3)\times(-3)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}5 & -4\\ -4 & 13\end{pmatrix}.$$

2) $$E^3 = E \times E \times E = (E \times E) \times E = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \times 0 + 0 \times 0 & 1 \times 0 + 0 \times 1 \\ 0 \times 1 + 1 \times 0 & 0 \times 0 + 1 \times 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \times 0 + 0 \times 0 & 1 \times 0 + 0 \times 1 \\ 0 \times 1 + 1 \times 0 & 0 \times 0 + 1 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

або, якщо користуватись властивостями добутків, то

$$E^3 = E(E \times E) = E \times E = E;$$

3) $$O^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

або, якщо користуватись властивостями добутків, то

$$O^2 = O \times O = O.$$

4.3. Обернена матриця

Приклад. Перевірити, чи є матриця A неособливою:

1) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

2) $$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \\ 7 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

1) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для того, щоб дізнатися, чи є матриця A неособливою, потрібно дізнатися, чи не дорівнює нулеві $\det A$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -13 \neq 0.$$

Визначник матриці A відрізняється від нуля, а це означає, що матриця A неособлива.

2) $$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \\ 7 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно,

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \\ 7 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 0.$$

Це означає, що A – особлива матриця.

Приклад. Знайти матрицю A^{-1}, якщо

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 10 \neq 0.$$

A – неособлива матриця, отже, існує обернена матриця. Знайдемо алгебраїчні доповнення елементів матриці A.

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot 4 = 4, \qquad A_{21} = (-1)^3 \cdot 3 = -3,$$

$$A_{12} = (-1)^3 \cdot (-2) = 2, \qquad A_{22} = (-1)^4 \cdot 1 = 1.$$

Тоді обернена матриця

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 & -0,3 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Перевірка.

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E,$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 24 \neq 0.$$

Обернена матриця A^{-1} існує. Знаходимо алгебраїчні доповнення матриці A

.

$$A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}4&0\\1&5\end{vmatrix}=20;\qquad A_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}-1&3\\1&5\end{vmatrix}=8;\qquad A_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}-1&3\\4&0\end{vmatrix}=-12;$$

$$A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}1&0\\2&5\end{vmatrix}=-5;\qquad A_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}2&3\\2&5\end{vmatrix}=4;\qquad A_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}2&3\\1&0\end{vmatrix}=3;$$

$$A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}1&4\\2&1\end{vmatrix}=-7;\qquad A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}2&-1\\2&1\end{vmatrix}=-4;\qquad A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}2&-1\\1&4\end{vmatrix}=9.$$

Тоді

$$A^{-1}=\frac{1}{24}\begin{pmatrix}20&8&-12\\-5&4&3\\-7&-4&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{20}{24}&\frac{8}{24}&\frac{-12}{24}\\\frac{-5}{24}&\frac{4}{24}&\frac{3}{24}\\\frac{-7}{24}&\frac{-4}{24}&\frac{9}{24}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{6}&\frac{1}{3}&-\frac{1}{2}\\-\frac{5}{24}&\frac{1}{6}&\frac{1}{8}\\-\frac{7}{24}&-\frac{1}{6}&\frac{3}{8}\end{pmatrix}.$$

Перевірка.

$$A\times A^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&3\\1&4&0\\2&1&5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\frac{5}{6}&\frac{1}{3}&-\frac{1}{2}\\-\frac{5}{24}&\frac{1}{6}&\frac{1}{8}\\-\frac{7}{24}&-\frac{1}{6}&\frac{3}{8}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E.$$

$$A^{-1}\times A=\begin{pmatrix}\frac{5}{6}&\frac{1}{3}&-\frac{1}{2}\\-\frac{5}{24}&\frac{1}{6}&\frac{1}{8}\\-\frac{7}{24}&-\frac{1}{6}&\frac{3}{8}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&-1&3\\1&4&0\\2&1&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E$$

.

Приклад. Знайти методом Жордано-Гаусса матрицю, обернену до даної (параграф 2.5.2)

$$A=\begin{pmatrix}2&4&0&6\\-1&2&1&3\\5&0&-1&2\\-2&-3&1&0\end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Коментарії:

призначимо провідним елементом $a_{11} = 2$;

усі елементи першого, провідного, рядка розділимо на $a_{11} = 2$ і отримані результати заносимо до таблиці II;

усі елементи провідного стовпчика, за винятком $a'_{11} = 1$, вважаємо нулями та заносимо до таблиці III;

переходимо до розрахунків інших елементів таблиці II за правилом прямокутника:

$$a'_{22} = (2\times2-(-1)\times4)\times\frac{1}{2} = 4; \qquad a'_{32} = (0\times2-5\times4)\times\frac{1}{2} = -10;$$

$$a'_{23} = (1\times2-(-1)\times0)\times\frac{1}{2} = 1; \qquad a'_{33} = (-1\times2-5\times0)\times\frac{1}{2} = -1;$$

$$a'_{24} = (3\times2-(-1)\times6)\times\frac{1}{2} = 6; \qquad a'_{34} = (2\times2-5\times6)\times\frac{1}{2} = -13;$$

$$a'_{25} = (0\times2-(-1)\times1)\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}; \qquad a'_{35} = (0\times2-5\times1)\times\frac{1}{2} = -\frac{5}{2};$$

$$a'_{26} = (1\times2-(-1)\times0)\times\frac{1}{2} = 1; \qquad a'_{36} = (0\times2-5\times0)\times\frac{1}{2} = 0;$$

$$a'_{27} = (0\times2-(-1)\times0)\times\frac{1}{2} = 0; \qquad a'_{37} = (1\times2-5\times0)\times\frac{1}{2} = 1;$$

$$a'_{28} = (0\times2-(-1)\times0)\times\frac{1}{2} = 0; \qquad a'_{38} = (0\times2-5\times0)\times\frac{1}{2} = 0;$$

$$a'_{42} = (-3\times2-(-2)\times4)\times\frac{1}{2} = 1; \qquad a'_{46} = (0\times2-(-2)\times0)\times\frac{1}{2} = 0;$$

$$a'_{43} = (1\times2-(-2)\times0)\times\frac{1}{2} = 1; \qquad a'_{47} = (0\times2-(-2)\times0)\times\frac{1}{2} = 0;$$

$$a'_{44} = (0\times2-(-2)\times6)\times\frac{1}{2} = 6; \qquad a'_{48} = (1\times2-(-2)\times0)\times\frac{1}{2} = 1.$$

$$a'_{45} = (0\times2-(-2)\times1)\times\frac{1}{2} = 1;$$

призначимо провідним елементом $a'_{22} = 4$;

поділимо елементи провідного рядка на $a'_{22} = 4$ і результати занесемо до таблиці III;

перший стовпчик таблиці II переносимо до таблиці III без змін;

другий стовпчик таблиці III складається з нулів, за винятком елемента $a'_{22} = 1$;

знаходимо інші елементи таблиці III:

$$a''_{13} = (0 \times 4 - 2 \times 1) \times \frac{1}{4} = -\frac{1}{2};$$

$$a''_{14} = (3 \times 4 - 2 \times 6) \times \frac{1}{4} = 0;$$

$$a''_{15} = (\frac{1}{2} \times 4 - 2 \times \frac{1}{2}) \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4};$$

$$a''_{16} = (0 \times 4 - 2 \times 1) \times \frac{1}{4} = -\frac{1}{2};$$

$$a''_{17} = (0 \times 4 - \frac{1}{2} \times 0) \times \frac{1}{4} = 0;$$

$$a''_{18} = (0 \times 4 - \frac{1}{2} \times 0) \times \frac{1}{4} = 0;$$

$$a''_{33} = (-1 \times 4 - (-10) \times 1) \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2};$$

$$a''_{34} = (-13 \times 4 - (-10) \times 6) \times \frac{1}{4} = 2;$$

$$a''_{35} = (-\frac{5}{2} \times 4 - (-10) \times \frac{1}{2}) \times \frac{1}{4} = -\frac{5}{4};$$

$$a''_{36} = (0 \times 4 - (-10) \times 1) \times \frac{1}{4} = \frac{5}{2};$$

$$a''_{37} = (1 \times 4 - (-10) \times 0) \times \frac{1}{4} = 1;$$

$$a''_{38} = (0 \times 4 - (-10) \times 0) \times \frac{1}{4} = 0;$$

$$a''_{43} = (1 \times 4 - 1 \times 1) \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4};$$

$$a''_{44} = (6 \times 4 - 1 \times 6) \times \frac{1}{4} = \frac{9}{2};$$

$$a''_{45} = (1 \times 4 - 1 \times \frac{1}{2}) \times \frac{1}{4} = \frac{7}{8};$$

$$a''_{46} = (0 \times 4 - 1 \times 1) \times \frac{1}{4} = -\frac{1}{4};$$

$$a''_{47} = (0 \times 4 - 1 \times 0) \times \frac{1}{4} = 0;$$

$$a''_{48} = (1 \times 4 - 1 \times 0) \times \frac{1}{4} = 1.$$

I	$\begin{matrix} 2 & 4 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & 1 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$
II	$\begin{matrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & -10 & -1 & -13 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$

III	$\begin{matrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{9}{2} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} & 1 & 0 \\ \frac{7}{8} & -\frac{1}{4} & 0 & 1 \end{matrix}$
IV	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{2} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{5}{6} & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{matrix}$
V	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{19}{42} & \frac{13}{21} & \frac{3}{7} & \frac{4}{21} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{59}{42} & \frac{47}{21} & \frac{6}{7} & -\frac{8}{21} \\ \frac{3}{7} & \frac{3}{14} & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{matrix}$

призначимо провідним елемент $a''_{33} = \frac{3}{2}$;

елементи провідного рядка поділимо на $a''_{33} = \frac{3}{2}$ і результати запишемо до таблиці IV;

перший та другий стовпчики таблиці III переносимо без змін до таблиці IV;

третій стовпчик таблиці IV складається з нулів, за винятком елемента $a'''_{33} = 1$;

знаходимо інші елементи таблиці IV:

$$a'''_{14} = (0 \times \frac{3}{2} - (-\frac{1}{2}) \times 2) \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3};$$

$$a'''_{15} = (\frac{1}{4} \times \frac{3}{2} - (-\frac{1}{2}) \times (-\frac{5}{4})) \times \frac{2}{3} = -\frac{1}{6};$$

$$a'''_{16} = (-\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} - (-\frac{1}{2}) \times \frac{5}{2}) \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3};$$

$$a'''_{17} = (0 \times \frac{3}{2} - (-\frac{1}{2}) \times 1) \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3};$$

$$a'''_{18} = (0 \times \frac{3}{2} - (-\frac{1}{2}) \times 0) \times \frac{2}{3} = 0;$$

$$a'''_{24} = (\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \times 2) \times \frac{2}{3} = \frac{7}{6};$$

$$a'''_{25} = (\frac{1}{8} \times \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \times (-\frac{5}{4})) \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3};$$

$$a'''_{26} = (\frac{1}{4} \times \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \times \frac{5}{2}) \times \frac{2}{3} = -\frac{1}{6};$$

$$a'''_{27} = (0 \times \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \times 1) \times \frac{2}{3} = -\frac{1}{6};$$

$$a'''_{28} = (0 \times \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \times 0) \times \frac{2}{3} = 0;$$

$$a'''_{44} = (\frac{9}{2} \times \frac{3}{2} - \frac{3}{4} \times 2) \times \frac{2}{3} = \frac{7}{2};$$

$$a'''_{45} = (\frac{7}{8} \times \frac{3}{2} - \frac{3}{4}(-\frac{5}{4})) \times \frac{2}{3} = \frac{3}{2};$$

$$a'''_{46} = (-\frac{1}{4} \times \frac{3}{2} - \frac{3}{4} \times \frac{5}{2}) \times \frac{2}{3} = -\frac{3}{2};$$

$$a'''_{47} = (0 \times \frac{3}{2} - \frac{3}{4} \times 1) \times \frac{2}{3} = -\frac{1}{2};$$

$$a'''_{48} = (1 \times \frac{3}{2} - \frac{3}{4} \times 0) \times \frac{2}{3} = 1;$$

15) переходимо до таблиці V. Для цього в таблиці IV призначимо провідним елементом a'''_{44};

16) елементи провідного рядка поділимо на $a'''_{44} = \frac{7}{2}$ і результати запишемо до таблиці IV;

17) перші три стовпчики таблиці IV переносимо без змін до таблиці V;

18) четвертий стовпчик таблиці IV складається з нулів, за винятком елемента $a''''_{44} = 1$;

19) знайдемо інші елементи таблиці V:

$$a''''_{15}=\left(-\frac{19}{42}\times\frac{7}{2}-\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{6}\right)\right)\times\frac{2}{7}=-\frac{19}{42};\qquad a''''_{27}=\left(0\times\frac{7}{2}-\frac{7}{6}\left(-\frac{1}{6}\right)\right)\times\frac{2}{7}=0;$$

$$a''''_{16}=\left(\frac{13}{21}\times\frac{7}{2}-\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\right)\times\frac{2}{7}=\frac{13}{21};\qquad a''''_{28}=\left(-\frac{1}{3}\times\frac{7}{2}-\frac{7}{6}\times 0\right)\times\frac{2}{7}=-\frac{1}{3};$$

$$a''''_{17}=\left(\frac{3}{7}\times\frac{7}{2}-\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\right)\times\frac{2}{7}=\frac{3}{7};\qquad a''''_{35}=\left(-\frac{59}{42}\times\frac{7}{2}-\frac{4}{3}\times\frac{3}{2}\right)\times\frac{2}{7}=-\frac{59}{42};$$

$$a''''_{18}=\left(\frac{4}{21}\times\frac{7}{2}-\frac{2}{3}\times 0\right)\times\frac{2}{7}=\frac{4}{21};\qquad a''''_{36}=\left(\frac{47}{21}\times\frac{7}{2}-\frac{4}{3}\times\left(-\frac{3}{2}\right)\right)\times\frac{2}{7}=\frac{47}{21};$$

$$a''''_{25}=\left(-\frac{1}{6}\times\frac{7}{2}-\frac{7}{6}\times\frac{1}{3}\right)\times\frac{2}{7}=-\frac{1}{6};\qquad a''''_{37}=\left(\frac{6}{7}\times\frac{7}{2}-\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\times\frac{2}{7}=\frac{6}{7};$$

$$a''''_{26}=\left(\frac{1}{3}\times\frac{7}{2}-\frac{7}{6}\left(-\frac{1}{6}\right)\right)\times\frac{2}{7}=\frac{1}{3};\qquad a''''_{38}=\left(-\frac{8}{21}\times\frac{7}{2}-\frac{4}{3}\times 1\right)\times\frac{2}{7}=-\frac{8}{21};$$

в лівій частині таблиці V вийшла одинична матриця. Це означає, що в правій частині таблиці V ми маємо матрицю, обернену до заданої.
Отже,

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{19}{42} & \frac{13}{21} & \frac{3}{7} & \frac{4}{21} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{59}{42} & \frac{47}{21} & \frac{6}{7} & -\frac{8}{21} \\ \frac{3}{7} & \frac{3}{14} & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix};$$

перевірка

$$A\times A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} -\frac{19}{42} & \frac{13}{21} & \frac{3}{7} & \frac{4}{21} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{59}{42} & \frac{47}{21} & \frac{6}{7} & -\frac{8}{21} \\ \frac{3}{7} & \frac{3}{14} & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}=$$

$$
=\begin{pmatrix}
2\cdot\left(-\frac{19}{42}\right)+4\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)+0\cdot\left(-\frac{59}{42}\right)+6\cdot\frac{3}{7} & 2\cdot\frac{13}{21}+4\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{47}{21}+6\cdot\frac{3}{14} & 2\cdot\frac{3}{7}+4\cdot 0+0\cdot\frac{6}{7}+6\cdot\left(-\frac{1}{7}\right) & 2\cdot\frac{4}{21}+4\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+0\cdot\left(-\frac{8}{21}\right)+6\cdot\frac{2}{7} \\
-1\cdot\left(-\frac{19}{42}\right)+2\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)+1\cdot\left(-\frac{59}{42}\right)+3\cdot\frac{3}{7} & -1\cdot\frac{13}{21}+2\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{47}{21}+3\cdot\frac{3}{14} & -1\cdot\frac{3}{7}+2\cdot 0+1\cdot\frac{6}{7}+3\cdot\left(-\frac{1}{7}\right) & -1\cdot\frac{4}{21}+2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+1\cdot\left(-\frac{8}{21}\right)+3\cdot\frac{2}{7} \\
5\cdot\left(-\frac{19}{42}\right)+0\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)-1\cdot\left(-\frac{59}{42}\right)+2\cdot\frac{3}{7} & 5\cdot\frac{13}{21}+0\cdot\frac{1}{3}-1\cdot\frac{47}{21}+2\cdot\frac{3}{14} & 5\cdot\frac{3}{7}+0\cdot 0-1\cdot\frac{6}{7}+2\cdot\left(-\frac{1}{7}\right) & 5\cdot\frac{4}{21}+0\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)-1\cdot\left(-\frac{8}{21}\right)+2\cdot\frac{2}{7} \\
-2\cdot\left(-\frac{19}{42}\right)-3\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)+1\cdot\left(-\frac{59}{42}\right)+0\cdot\frac{3}{7} & -2\cdot\frac{13}{21}-3\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{47}{21}+0\cdot\frac{3}{14} & -2\cdot\frac{3}{7}-3\cdot 0+1\cdot\frac{6}{7}+0\cdot\left(-\frac{1}{7}\right) & -2\cdot\frac{4}{21}-3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+1\cdot\left(-\frac{8}{21}\right)+0\cdot\frac{2}{7}
\end{pmatrix}=
$$

$$
=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=E.
$$

Приклад. Розв'язати матричне рівняння

$$3A = XB,$$

якщо

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

За умовою $3A = XB$. Обидві частини цього рівняння помножимо на B^{-1} справа. Тоді

$$3AB^{-1} = XBB^{-1}, \qquad 3AB^{-1} = XE, \qquad 3AB^{-1} = X.$$

Отже, потрібно знайти B^{-1}. Для цього спочатку знайдемо $\det B$.

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Матриця B неособлива.

$$B_{11} = 1, \qquad B_{21} = 4,$$

$$B_{12} = 0, \qquad B_{22} = 1.$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = 3AB^{-1} = 3\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 2\times1-1\times0 & 2\times4-1\times1 \\ 3\times1+0\times0 & 3\times4+0\times1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 12 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 21 \\ 9 & 36 \end{pmatrix}$$

4.4. Ранг матриці

Приклад. Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

На основі означення рангу матриці (параграф 2.6) ми мусимо знайти мінор найбільшого порядку матриці, який відрізняється від нуля. Серед мінорів I порядку, тобто серед елементів матриці, усі відрізняються від нуля. Матриця II порядку, отже, вона має лише один мінор II порядку, який співпадає з її детермінантом.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 11.$$

Значить,

$$r(A) = 2.$$

Приклад. Знайти ранг матриці A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Мінори I порядку, тобто елементи матриці, відрізняються від нуля. Переходимо до мінорів II порядку.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -8 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким чином, єдиний мінор II порядку матриці A дорівнює нулеві. Оскільки у матриці є ненульові елементи, то виходить, що ранг матриці дорівнює одиниці, тобто,

$$r(A) = 1.$$

Приклад. Знайти ранг матриці A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & -3 & 9 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

Розв'язання

Серед мінорів I порядку є такі, що відрізняються від нуля. Тепер переходимо до мінорів II порядку, яких у даній матриці 10. Нам необхідно перевірити, чи є такі, що відрізняються від нуля.

$$M_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 0; \qquad M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 0; \qquad M_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -24 \neq 0.$$

Таким чином, ранг матриці дорівнює 2, тобто,

$$r(A) = 2.$$

Приклад. Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Серед мінорів I порядку є такі, що відрізняються від нуля.
Будемо шукати ненульові мінори II порядку.

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -12 \neq 0.$$

Тепер можна розглянути окаймляючий для M_1 мінор.

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -30 - 8 + 5 + 12 = -21 \neq 0.$$

Оскільки мінорів IV порядку у даній матриці немає, то значить,

$$r(A) = 3.$$

Приклад. Знайти ранг матриці A, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -1 & 4 \\ 9 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Знайдемо ненульовий мінор II порядку.

$$M = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -7 \neq 0.$$

Тепер будемо шукати окаймляючий мінор III порядку матриці A.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \\ 9 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 9 & 5 & 7 \end{vmatrix} = -14 \neq 0.$$

Значить, ранг матриці A дорівнює 3.

Ми знайшли ранг матриці, користуючись означенням матриці. Якщо розмірність матриці велика, то шукати ранг матриці таким способом нелегко. Ранг матриці можна знаходити за допомогою елементарних перетворень матриці, які не змінюють рангу матриці. Знайдемо ранг тієї самої матриці A, але уже за допомогою елементарних перетворень (параграф 2.6).

$$r(A) = r\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -1 & 4 \\ 9 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Коментарії:

1) помножимо елементи третього стовпчика на 5 та додамо до відповідних елементів першого стовпчика;

2) помножимо елементи третього стовпчика на 2 та додамо до відповідних елементів другого стовпчика;

3) помножимо елементи третього стовпчика на 4 та додамо до відповідних елементів четвертого стовпчика.

$$r(A) = r\begin{pmatrix} 14 & 7 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 14 & 7 & 1 & 11 \end{pmatrix}.$$

Коментарії:

поділимо елементи першого стовпчика на 14, а другого – на 7.

$$r(A) = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 11 \end{pmatrix}.$$

Коментарії:

один із двох однакових стовпчиків (перший чи другий) можна викреслити.

$$r(A) = r\begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 11 \end{pmatrix}.$$

Коментарії:

1) помножимо елементи другого рядка на 2 та додамо до відповідних елементів першого рядка;

2) елементи другого рядка додамо до відповідних елементів третього рядка.

$$r(A) = r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

Коментарії:

1) помножимо елементи першого рядка на (−1) та додамо до відповідних елементів третього рядка;

2) елементи другого рядка помножимо на (−1).

$$r(A) = r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Коментарії:

1) поділимо елементи третього рядка на 2.

$$r(A) = r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Коментарії:

помножимо елементи першого стовпчика на (−9) та додамо до відповідних елементів третього стовпчика.

$$r(A) = r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Виходить, що ранг матриці A дорівнює рангові одиничної матриці III порядку. Оскільки визначник такої матриці дорівнює 1, тобто, відрізняється від нуля, то, значить,

$$r(A) = 3.$$

Приклад. Знайти ранг матриці, користуючись методом елементарних перетворень

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

$$r(A) = r\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Коментарії:

1) елементи першого та четвертого рядків пропорційні. Отже, четвертий рядок можна викреслити.

$$r(A) = r\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Коментарії:

додамо елементи першого стовпчика до відповідних елементів четвертого стовпчика;

2) помножимо елементи першого стовпчика на 2 та додамо до відповідних елементів п'ятого стовпчика.

$$r(A) = r\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 6 & 9 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 5 & 7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Коментарії:

1) елементи другого стовпчика помножимо на 2 та додамо до відповідних елементів першого стовпчика;

2) елементи другого стовпчика помножимо на 3 та додамо до відповідних елементів третього стовпчика;

3) елементи другого стовпчика помножимо на 6 та додамо до відповідних елементів четвертого стовпчика;

4) елементи другого стовпчика помножимо на 9 та додамо до відповідних елементів п'ятого стовпчика.

$$r(A) = r\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & -5 & -11 \end{pmatrix}.$$

Коментарії:

елементи першого рядка помножимо на (−1);

2) елементи другого рядка помножимо на (−1) та додамо до відповідних елементів третього рядка.

$$r(A) = r\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -5 & -11 \end{pmatrix}.$$

Коментарії:

елементи першого стовпчика поділимо на (−1);

елементи третього стовпчика поділимо на (−1);

елементи четвертого стовпчика поділимо на (−5);

елементи п'ятого стовпчика поділимо на (−11).

$$r\left(A\right)=r\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Коментарії:

1) елементи третього стовпчика помножимо на 2 та додамо до відповідних елементів другого стовпчика;

2) оскільки третій, четвертий та п’ятий стовпчики однакові, то четвертий та п’ятий стовпчики можна викреслити.

$$r\left(A\right)=r\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Коментарії:

1) поміняємо місцями перший та другий рядки, така операція на ранг матриці не впливає.

$$r\left(A\right)=r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ранги заданої за умовою матриці A та матриці, отриманої внаслідок елементарних перетворень, співпадають.

Оскільки

$$\det E=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=3,$$

то

$$r\left(A\right)=r\left(E\right)=3.$$

Приклад. Знайти ранг матриці, користуючись правилом прямокутників,

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання

Правилом прямокутників ми вже користувались при обчисленні визначників. В основу цього правила покладені елементарні перетворення, які не змінюють ранг матриці. Будемо користуватись цим правилом так само, як і при обчисленні визначників, але не будемо враховувати ті множники, які з’являються перед визначником після проведених перетворень.

$$r(A)=r\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$r(A)=r\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & -1 & 1 & -4 & -13 \\ 0 & 2 & -6 & -12 & -2 \end{pmatrix}= \qquad (*)$$

$$=r\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 10 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -16 \end{pmatrix}. \qquad (**)$$

Коментарії:

1) елемент $a_{11}=2$ призначимо провідним елементом, а перший рядок будемо називати провідним рядком;
2) перший рядок без змін переносимо в матрицю (*);
3) усі елементи першого стовпчика, за винятком першого, вважаємо нулями;
4) усі інші елементи матриці (*) знаходимо за правилом прямокутника:

$a'_{22}=2\cdot 0-(-1)\cdot(-1)=-1;$

$a'_{23}=2\cdot 0-(-1)\cdot 3=3;$

$a'_{24}=2\cdot 1-(-1)\cdot 4=6;$

$a'_{25}=2\cdot 2-(-1)\cdot 5=9;$

$a'_{32}=2\cdot(-2)-3\cdot(-1)=-1;$

$a'_{33}=2\cdot 5-3\cdot 3=1;$

$a'_{34}=2\cdot 4-3\cdot 4=-4;$

$a_{35}=2\cdot 1-3\cdot 5=-13;$

$a'_{42}=2\cdot 0-2\cdot(-1)=2;$

$a'_{43}=2\cdot 0-2\cdot 3=-6;$

$a'_{44}=2\cdot(-2)-2\cdot 4=-12;$

$a'_{45}=2\cdot 4-2\cdot 5=-2;$

5) записуємо матрицю (*);
6) елемент $a'_{22}=-1$ призначимо провідним елементом, а другий рядок будемо називати провідним рядком;
7) переносимо без змін у матрицю (**) перший і другий рядки та перший стовпчик;
8) у другому стовпчику елементи, які лежать під другим рядком вважаємо нулями;
9) інші елементи матриці (**) знаходимо за правилом прямокутника.

$a''_{33} = -1 \times 1 - (-1) \times 3 = 2;$ $a''_{43} = -1 \times (-6) - 2 \times 3 = 0;$

$a''_{34} = -1 \times (-4) - (-1) \times 6 = 10;$ $a''_{44} = -1 \times (-12) - 2 \times 6 = 0;$

$a''_{35} = -1 \times (-13) - (-1) \times 9 = 22;$ $a''_{44} = -1 \times (-2) - 2 \times 9 = -16.$

до складу матриці (**) входить мінор III порядку

$$M = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times (-1) \times 2 = -4 \neq 0.$$

Значить, ранг матриці дорівнює 3, тобто,

$$r(A) = 3.$$

4.5. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Правило Крамера

Приклад. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 10; \\ 5x_1 - 6x_2 = 4. \end{cases}$$

Розв'язання

Система складається із двох рівнянь з двома невідомими. Таку систему зручно розв'язувати за допомогою правила Крамера (параграф 3.2).

Складаємо визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = -18 - 20 = -38 \neq 0.$$

Визначник Δ відрізняється від нуля, значить, система сумісна і має єдиний розв'язок.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = -60 - 16 = -76;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 50 = -38.$$

Знаходимо невідомі за формулами (3.7).

$$x_1 = \frac{-76}{-38} = 2; \qquad x_2 = \frac{-38}{-38} = 1.$$

Приклад. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 = 5; \\ 8x_1 - 6x_2 = 10. \end{cases}$$

Розв'язання

Користуємося правилом Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{vmatrix} = -24 + 24 = 0.$$

Оскільки визначник системи дорівнює нулеві, то система або несумісна, або має нескінченну кількість розв'язків. Для з'ясування питання про сумісність системи рівнянь знайдемо інші визначники.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 10 & -6 \end{vmatrix} = -30 + 30 = 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} = 40 - 40 = 0.$$

Якщо усі визначники системи дорівнюють нулеві, то система має нескінченну кількість розв'язків.

У заданій системі друге рівняння є наслідком першого рівняння.

З першого рівняння маємо формулу

$$x_1 = \frac{5 + 3x_2}{4},$$

де $x_2 \in (-\infty; +\infty)$.

Надаючи x_2 будь–які значення, будемо отримувати відповідні значення x_1.

x_1	x_2
$\frac{5}{4}$	0
$\frac{1}{2}$	-1
2	1
–	–
–	–

Приклад. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0; \\ 5x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -5. \end{cases}$$

Розв'язання

Розв'яжемо систему за допомогою правила Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & -5 & 2 \end{vmatrix} = -6 - 10 - 5 + 5 + 15 + 4 = 3 \neq 0.$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, то система сумісна та має єдиний розв'язок.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -5 & -5 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 5 - 5 + 5 = 3;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & -5 & 2 \end{vmatrix} = -10 + 5 + 15 - 4 = 6;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & -5 & -5 \end{vmatrix} = 15 - 10 + 5 - 10 = 0.$$

Тоді маємо:

$$x_1 = \frac{3}{3} = 1; \qquad x_2 = \frac{6}{3} = 2; \qquad x_3 = \frac{0}{3} = 0.$$

Відповідь: (1;2;0).

Приклад. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 1; \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3; \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 6 + 4 - 6 - 4 - 2 = 0;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 9 - 4 - 3 = -4 \neq 0.$$

Оскільки $\Delta = 0$, а $\Delta_1 \neq 0$, то система не має розв'язків.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2; \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4; \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 5. \end{cases}$$

Розв'язання

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0; \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0; \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Усі визначники дорівнюють нулеві, але ж система несумісна. Дійсно, з першого рівняння

$$x_1 - x_2 + x_3 = 2,$$

а з третього рівняння виходить

$$x_1 - x_2 + x_3 = \frac{5}{3}.$$

Значить, перше та третє рівняння суперечні.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2; \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4; \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 6. \end{cases}$$

Розв'язання

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0; \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 6 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 0; \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

У цій системі друге те третє рівняння є наслідком першого рівняння.
З першого рівняння маємо

$$x_1 = 2 + x_2 - x_3.$$

Система має нескінченну кількість розв'язків.

Якщо змінним x_2 та x_3 надавати будь-які значення, можна знайти відповідні значення x_1.

x_1	x_2	x_3
2	0	0
0	−1	1
2	1	1
−5	−3	4
–	–	–
–	–	–
–	–	–

Приклад. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = -3; \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -3; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0; \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 4. \end{cases}$$

Розв'язання

Будемо розв'язувати систему рівнянь за правилом Крамера.

Знаходимо визначник системи.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 5 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = (-1)\times(-1)^{1+3}\times\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -4 \\ 5 & 1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -3 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -(-1)\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (0+3) = 3.$$

Коментарії з приводу обчислення визначника Δ :

1) елементи першого рядка визначника помножимо на (−1) та додамо до відповідних елементів другого рядка;

2) елементи першого рядка визначника помножимо на (−1) та додамо до відповідних елементів третього рядка;

3) елементи першого рядка визначника помножимо на 2 та додамо до відповідних елементів четвертого рядка;

4) отриманий визначник зручно обчислити, розкладаючи за елементами третього стовпчика;

5) у визначнику III порядку елементи першого стовпчика помножимо на (−1) та додамо до відповідних елементів третього стовпчика;

6) отриманий визначник зручно розкласти за елементами першого рядка.

Обчислимо визначник Δ , який утворюється, якщо у визначнику Δ перший стовпчик замінити на стовпчик вільних членів.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & -1 & -1 & 3 \\ -3 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1)\times(-1)^{2+4}\times\begin{vmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} -3 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 3\times\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 3\times(-1)\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 3\times(7-4) = 9.$$

Коментарії з приводу обчислення визначника Δ_1***:***

1) елементи першого рядка помножимо на (−1) та додамо до відповідних елементів другого рядка;
2) отриманий визначник можна розкласти за елементами другого рядка;
3) ми прийшли до визначника III порядку, який зручно обчислити безпосередньо за формулою, але можна і створити додаткові нулі для спрощення розрахунків. З цією метою елементи другого рядка помножимо на (−1) та додамо до відповідних елементів першого рядка;
4) у визначнику, який вийшов внаслідок останнього перетворення, можна винести спільний множник (−3) за знак визначника;
5) отриманий визначник можна розкласти за елементами третього стовпчика.

Переходимо до обчислення визначника Δ_2, який виходить з визначника Δ , якщо у ньому другий стовпчик замінити на стовпчик вільних членів.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 3\times\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\times(-1)\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -3\times\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -3\times\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -3\times(-1)\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3\times(1-3) = -6.$$

Коментарії з приводу обчислення визначника Δ_2***:***

1) елементи третього рядка помножимо на (−1) та додамо до відповідних елементів першого рядка;
2) елементи третього рядка помножимо на (−1) та додамо до відповідних

елементів другого рядка;
3) елементи третього рядка помножимо на 2 та додамо до відповідних елементів четвертого рядка;
4) внаслідок проведених перетворень отримали визначник, у якому елементи другого рядка мають спільний множник 3, який можна винести за знак визначника;
5) отриманий визначник зручно розкласти за елементами третього стовпчика;
6) ми вийшли на визначник III порядку. Для його спрощення елементи другого стовпчика додамо до відповідних елементів третього стовпчика;
7) вийшов визначник III порядку, який зручно розкласти за елементами другого рядка.

Переходимо до обчислення визначника Δ_3. Цей визначник виходить з визначника Δ , якщо замість третього стовпчика підставити стовпчик вільних членів.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)\times(-1)\begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -2\times(-3-0) = 6.$$

Коментарії з приводу обчислення визначника Δ_3:
1) елементи першого рядка помножимо на (-1) та додамо до відповідних елементів другого рядка;
2) елементи першого стовпчика нового визначника помножимо на (-1) та додамо до відповідних елементів четвертого стовпчика;
3) отриманий визначник зручно розкласти за елементами другого рядка;
4) у визначнику III порядку елементи першого стовпчика додамо до відповідних елементів третього стовпчика;
5) отриманий визначник III порядку зручно розкласти за елементами другого рядка;

Залишається обчислити визначник Δ_4, який виходить з визначника Δ , якщо в ньому четвертий стовпчик замінити на стовпчик вільних членів.

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -1\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-1)\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 3 = -9.$$

Коментарії з приводу обчислення визначника Δ_4 ***:***
1) елементи першого стовпчика помножимо на (−1) та додамо до відповідних елементів другого стовпчика;
2) елементи першого рядка у цьому ж визначникові помножимо на (−1) та додамо до відповідних елементів третього рядка;
3) елементи першого стовпчика у цьому ж визначникові помножимо на 2 та додамо до відповідних елементів четвертого рядка;
4) у визначникові, який вийшов внаслідок перетворень 1) − 3), зручно провести розкладання за елементами третього стовпчика.

Після того, як обчислені усі визначники, за формулами 3.7 у параграфі 3.2 можемо знайти невідомі.

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-9}{3} = -3; \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-6}{3} = -2;$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{6}{3} = 2; \qquad x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{-9}{3} = -3.$$

Перевірка:

$$\begin{cases} 2\times3 - 1\times(-2) - 1\times2 + 3\times(-3) = -3; \\ 1\times3 - 1\times(-2) - 1\times2 + 2\times(-3) = -3; \\ 1\times3 + 2\times(-2) - 1\times2 - 1\times(-3) = 0; \\ 1\times3 + 2\times(-2) + 2\times2 - 1\times(-3) = 4. \end{cases} \qquad \begin{cases} -3 = -3; \\ -3 = -3; \\ 0 = 0; \\ 4 = 4. \end{cases}$$

Відповідь: (3;−2;2;−3).

4.5.2. Матричний метод

Приклад. Записати систему у вигляді матричного рівняння та розв’язати це рівняння

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 9; \\ 3x_1 - 4x_2 = 5. \end{cases}$$

Розв’язання

Будемо розв’язувати систему рівнянь за допомогою матриць (параграф 3.3).

Позначимо:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Тоді систему можна записати у вигляді матричного рівняння $AX = B$. Помноживши обидві частини цього рівняння на A^{-1} зліва, маємо

$$X = A^{-1}B.$$

Шукаємо A^{-1}.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -17 \neq 0;$$

$$A_{11} = -4; \qquad A_{21} = -3;$$

$$A_{12} = -3; \qquad A_{22} = 2;$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{17}\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{17} & \frac{3}{17} \\ \frac{3}{17} & -\frac{2}{17} \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{4}{17} & \frac{3}{17} \\ \frac{3}{17} & -\frac{2}{17} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{51}{17} \\ \frac{17}{17} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Виходить,

$$x_1 = 3, \qquad x_2 = 1.$$

Відповідь: (3,1).

Приклад. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою матриць

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 5; \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4; \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 1. \end{cases}$$

Розв’язання

Позначимо:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Запишемо систему у вигляді матричного рівняння $AX = B$. Тоді

$$X = A^{-1}B.$$

Шукаємо A^{-1}.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Алгебраїчні доповнення матриці A:

$$A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}-2 & 3\\ -3 & 5\end{vmatrix}=-1;\quad A_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}1 & -2\\ -3 & 5\end{vmatrix}=1;\quad A_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & 3\end{vmatrix}=-1;$$

$$A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}3 & 3\\ 2 & 5\end{vmatrix}=-9;\quad A_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}2 & -2\\ 2 & 5\end{vmatrix}=14;\quad A_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}2 & -2\\ 3 & 3\end{vmatrix}=-12;$$

$$A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}3 & -2\\ 2 & -3\end{vmatrix}=-5;\quad A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & -3\end{vmatrix}=8;\quad A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix}=-7.$$

$$A^{-1}=-\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ -9 & 14 & -12\\ -5 & 8 & -7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 9 & -14 & 12\\ 5 & 8 & 7\end{pmatrix}.$$

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 9 & 14 & 12\\ 5 & 8 & 7\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}5\\ 4\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}.$$

Отже,

$$x_1=2;\quad x_2=1;\quad x_3=0.$$

Відповідь: (2;1;0).

Приклад. Розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases}2x_1-x_2-x_3+3x_4=-3;\\ x_1-x_2-x_3+2x_4=-3;\\ x_1+2x_2-x_3-x_4=0;\\ x_1+3x_2+2x_3-x_4=4.\end{cases}$$

Розв’язання

Розв’яжемо систему рівнянь матричним способом. Вводимо наступні матриці:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1 & 3\\ 1 & -1 & -1 & 2\\ 1 & 2 & -1 & -1\\ 1 & 3 & 2 & -1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}-3\\ -3\\ 0\\ 4\end{pmatrix},\qquad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}.$$

Матриця A – матриця IV порядку. Обернену матрицю в цьому випадку краще шукати методом Джордано-Гусса (параграф 2.5.2).

I	$\begin{matrix} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$
II	$\begin{matrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$
III	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \\ -4 & 7 & 0 & 1 \end{matrix}$
IV	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -13 & \frac{16}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{matrix}$
V	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 4 & -\frac{19}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ -3 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -3 & \frac{16}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{matrix}$

Коментарії до таблиці I:

1) у відповідності з методикою параграфа 2.5.2 складаємо таблицю I;

2) призначаємо провідним елементом $a_{11} = 2$, а перший рядок будемо вважати провідним рядком;

3) елементи провідного рядка поділимо на $a_{11} = 2$ і отримані елементи заносимо

в перший рядок таблиці II;

4) перший стовпчик таблиці II складається з нулів, за винятком елемента $a'_{11}=1$;

5) знаходимо інші елементи таблиці II:

$$a'_{22}=\frac{1}{2}\times\left(-1\times2-(-1)\times1\right)=-\frac{1}{2};$$

$$a'_{23}=\frac{1}{2}\times\left(-1\times2-(-1)\times1\right)=-\frac{1}{2};$$

$$a'_{24}=\frac{1}{2}\times\left(2\times2-3\times1\right)=\frac{1}{2};$$

$$a'_{25}=\frac{1}{2}\times\left(0\times2-1\times1\right)=-\frac{1}{2};$$

$$a'_{26}=\frac{1}{2}\times\left(1\times2-0\times1\right)=1;$$

$$a'_{27}=\frac{1}{2}\times\left(0\times2-0\times1\right)=0;$$

$$a'_{28}=\frac{1}{2}\times\left(0\times2-0\times1\right)=0;$$

$$a'_{32}=\frac{1}{2}\times\left(2\times2-(-1)\times1\right)=\frac{5}{2};$$

$$a'_{33}=\frac{1}{2}\times\left(-1\times2-(-1)\times1\right)=-\frac{1}{2};$$

$$a'_{34}=\frac{1}{2}\times\left(-1\times2-3\times1\right)=-\frac{5}{2};$$

$$a'_{35}=\frac{1}{2}\times\left(0\times2-1\times1\right)=-\frac{1}{2};$$

$$a'_{36}=\frac{1}{2}\times\left(0\times2-0\times1\right)=0;$$

$$a'_{37}=\frac{1}{2}\times\left(1\times2-0\times1\right)=1;$$

$$a'_{38}=\frac{1}{2}\times\left(0\times2-0\times1\right)=0;$$

$$a'_{42}=\frac{1}{2}\times\left(3\times2-(-1)\times1\right)=\frac{7}{2};$$

$$a'_{43}=\frac{1}{2}\times\left(2\times2-(-1)\times1\right)=\frac{5}{2};$$

$$a'_{44}=\frac{1}{2}\times\left(-1\times2-3\times1\right)=-\frac{5}{2};$$

$$a'_{45}=\frac{1}{2}\times\left(0\times2-1\times1\right)=-\frac{1}{2};$$

$$a'_{46}=\frac{1}{2}\times\left(0\times2-0\times1\right)=0;$$

$$a'_{47}=\frac{1}{2}\times\left(0\times2-0\times1\right)=0;$$

$$a'_{48}=\frac{1}{2}\times\left(1\times2-0\times1\right)=1.$$

Коментарії до таблиці II:

1) призначимо провідним елементом $a'_{22}=-\frac{1}{2}$, а провідним рядком – другий рядок;

2) поділимо елементи другого рядка таблиці II на $a'_{22}=-\frac{1}{2}$ і отримані елементи заносимо у другий рядок таблиці III;

3) перший стовпчик переносимо в таблицю III без змін;

4) другий стовпчик складається з усіх нулів, за винятком елемента $a''_{22}=1$;

5) знаходимо інші елементи таблиці III:

$$a''_{13}=-2\times\left(-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=0;$$

$$a''_{14}=-2\times\left(\frac{3}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=1;$$

$$a''_{15}=-2\times\left(\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=1;$$

$$a''_{16}=-2\times\left(0\times\left(-\frac{1}{2}\right)-1\times\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=-1;$$

$$a''_{17}=-2\times\left(0\times\left(-\frac{1}{2}\right)-0\times\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=0;$$

$$a''_{18}=-2\times\left(0\times\left(-\frac{1}{2}\right)-0\times\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=0;$$

$$a''_{33}=-2\times\left(-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{5}{2}\right)=-3;$$

$$a''_{34}=-2\times\left(-\frac{5}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\right)=0;$$

$$a''_{35}=-2\times\left(-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{5}{2}\right)=-3;$$

$$a''_{36}=-2\times\left(0\times\left(-\frac{1}{2}\right)-1\times\frac{5}{2}\right)=5;$$

$$a''_{37}=-2\times\left(1\times\left(-\frac{1}{2}\right)-0\times\frac{5}{2}\right)=1;$$

$$a''_{38}=-2\times\left(0\times\left(-\frac{1}{2}\right)-0\times\frac{5}{2}\right)=0;$$

$$a''_{43}=-2\times\left(\frac{5}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{7}{2}\right)=-1;$$

$$a''_{44}=-2\times\left(-\frac{5}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\times\frac{7}{2}\right)=1;$$

$$a''_{45}=-2\times\left(-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{7}{2}\right)=-4;$$

$$a''_{46}=-2\times\left(0\times\left(-\frac{1}{2}\right)-1\times\frac{7}{2}\right)=7;$$

$$a''_{47}=-2\times\left(0\times\left(-\frac{1}{2}\right)-0\times\frac{7}{2}\right)=0;$$

$$a''_{48}=-2\times\left(1\times\left(-\frac{1}{2}\right)-0\times\frac{7}{2}\right)=1.$$

Коментарії до таблиці III:

1) елемент $a''_{33}=-3$ призначаємо провідним елементом, а третій рядок таблиці III – провідним рядком;

2) поділимо елементи третього рядка на $a''_{33}=-3$ і отримані елементи заносимо у третій рядок таблиці IV;

3) перший та другий стовпчики переносимо без змін до таблиці IV;

4) третій стовпчик таблиці IV складається з усіх нулів, за винятком елемента $a'''_{33}=1$;

5) знаходимо інші елементи таблиці IV:

$$a'''_{14} = -\frac{1}{3} \times \left(1 \times (-3) - 0 \times 0 \right) = 1;$$

$$a'''_{15} = -\frac{1}{3} \times \left(1 \times (-3) - (-3) \times 0 \right) = 1;$$

$$a'''_{16} = -\frac{1}{3} \times \left(-1 \times (-3) - 5 \times 0 \right) = -1;$$

$$a'''_{17} = -\frac{1}{3} \times \left(0 \times (-3) - 1 \times 0 \right) = 0;$$

$$a'''_{18} = -\frac{1}{3} \times \left(0 \times (-3) - 0 \times 0 \right) = 0;$$

$$a'''_{24} = -\frac{1}{3} \times \left(-1 \times (-3) - 0 \times 1 \right) = -1;$$

$$a'''_{25} = -\frac{1}{3} \times \left(1 \times (-3) - (-3) \times 1 \right) = 0;$$

$$a'''_{26} = -\frac{1}{3} \times \left(-2 \times (-3) - 5 \times 1 \right) = -\frac{1}{3};$$

$$a'''_{27} = -\frac{1}{3} \times \left(0 \times (-3) - 1 \times 1 \right) = \frac{1}{3};$$

$$a'''_{28} = -\frac{1}{3} \times \left(0 \times (-3) - 0 \times 1 \right) = 0;$$

$$a'''_{44} = -\frac{1}{3} \times \left(1 \times (-3) - 0 \times (-1) \right) = 1;$$

$$a'''_{45} = -\frac{1}{3} \times \left(-4 \times (-3) - (-3) \times (-1) \right) = -3;$$

$$a'''_{46} = -\frac{1}{3} \times \left(7 \times (-3) - 5 \times (-1) \right) = \frac{16}{3};$$

$$a'''_{47} = -\frac{1}{3} \times \left(0 \times (-3) - 1 \times (-1) \right) = -\frac{1}{3};$$

$$a'''_{48} = -\frac{1}{3} \times \left(1 \times (-3) - 0 \times (-1) \right) = 1.$$

Коментарії до таблиці IV:

1) елемент $a'''_{44} = 1$ призначаємо провідним елементом, а четвертий рядок таблиці IV – провідним рядком;

2) поділимо елементи четвертого рядка на $a'''_{44} = 1$ та отримаємо четвертий рядок таблиці V;

4) четвертий стовпчик таблиці V складається з усіх нулів, за винятком елемента $a''''_{44} = 1$;

5) знаходимо інші елементи таблиці V:

$$a''''_{15} = \left(1 \times 1 - (-3) \times 1 \right) = 4;$$

$$a''''_{16} = \left(-1 \times 1 - \frac{16}{3} \times 1 \right) = -\frac{19}{3};$$

$$a''''_{17} = \left(0 \times 1 - \left(-\frac{1}{3} \right) \times 1 \right) = \frac{1}{3};$$

$$a''''_{18} = \left(0 \times 1 - 1 \times 1 \right) = -1;$$

$$a''''_{25} = \left(0 \times 1 - (-3) \times (-1) \right) = -3;$$

$$a''''_{26} = \left(-\frac{1}{3} \times 1 - \frac{16}{3} \times (-1) \right) = 5;$$

$$a''''_{27} = \left(\frac{1}{3} \times 1 - \left(-\frac{1}{3} \right) \times (-1) \right) = 0;$$

$$a''''_{28} = \left(0 \times 1 - 1 \times (-1) \right) = 1;$$

$$a''''_{35} = \left(1 \times 1 - (-3) \times 0 \right) = 1;$$

$$a''''_{36} = \left(-\frac{5}{3} \times 1 - \frac{16}{3} \times 0 \right) = -\frac{5}{3};$$

$$a''''_{37} = \left(-\frac{1}{3} \times 1 - \left(-\frac{1}{3} \right) \times 0 \right) = -\frac{1}{3};$$

$$a''''_{38} = \left(0 \times 1 - 1 \times 0 \right) = 0.$$

Коментарії:

1) ліва частина таблиці V являє собою одиничну матрицю, а це означає, що у правій частині таблиці V знаходиться матриця, обернена до заданої матриці A,

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 4 & -\frac{19}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ -3 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -3 & \frac{16}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Перевіримо, чи дійсно отримана матриця є оберненою, тобто, перевіримо, чи є слушною рівність:

$$AA^{-1}=E.$$

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1 & 3\\ 1 & -1 & -1 & 2\\ 1 & 2 & -1 & -1\\ 1 & 3 & 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & -\frac{19}{3} & \frac{1}{3} & -1\\ -3 & 5 & 0 & 1\\ 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & 0\\ -3 & \frac{16}{3} & -\frac{1}{3} & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot4-1\cdot(-3)-1\cdot1+3\cdot(-3) & 2\cdot\left(-\frac{19}{3}\right)-1\cdot5-1\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)+3\cdot\frac{16}{3} & 2\cdot\frac{1}{3}-1\cdot0-1\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) & 2\cdot(-1)-1\cdot1-1\cdot0+3\cdot1\\ 1\cdot4-1\cdot(-3)-1\cdot1+2\cdot(-3) & 1\cdot\left(-\frac{19}{3}\right)-1\cdot5-1\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)+2\cdot\frac{16}{3} & 1\cdot\frac{1}{3}-1\cdot0-1\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) & 1\cdot(-1)-1\cdot1-1\cdot0+2\cdot1\\ 1\cdot4+2\cdot(-3)-1\cdot1-1\cdot(-3) & 1\cdot\left(-\frac{19}{3}\right)+2\cdot5-1\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)-1\cdot\frac{16}{3} & 1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot0-1\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)-1\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) & 1\cdot(-1)+2\cdot1-1\cdot0-1\cdot1\\ 1\cdot4+3\cdot(-3)+2\cdot1-1\cdot(-3) & 1\cdot\left(-\frac{19}{3}\right)+3\cdot5+2\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)-1\cdot\left(\frac{16}{3}\right) & 1\cdot\frac{1}{3}+3\cdot0+2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)-1\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) & 1\cdot(-1)+3\cdot1+2\cdot0-1\cdot1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix};$$

3) знаходимо шукану матрицю X за формулою:

$$X=A^{-1}B.$$

$$X=\begin{pmatrix}4 & -\frac{19}{3} & \frac{1}{3} & -1\\ -3 & 5 & 0 & 1\\ 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & 0\\ -3 & \frac{16}{3} & -\frac{1}{3} & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\ -3\\ 0\\ 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cdot(-3)-\frac{19}{3}\cdot(-3)+\frac{1}{3}\cdot0-1\cdot4\\ -3\cdot(-3)+5\cdot(-3)+0\cdot0+1\cdot4\\ 1\cdot(-3)-\frac{5}{3}\cdot(-3)-\frac{1}{3}\cdot0+0\cdot4\\ -3\cdot(-3)+\frac{16}{3}\cdot(-3)-\frac{1}{3}\cdot0+1\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -2\\ 2\\ -3\end{pmatrix}.$$

Таким чином, виходить:

$$x_1 = 3; \quad x_2 = -2; \quad x_3 = 2; \quad x_4 = 3.$$

4) перевірка: підставляємо знайдені значення невідомих у систему

$$\begin{cases} 2\times 3 - 1\times(-2) - 1\times 2 + 3\times(-3) = -3; \\ 1\times 3 - 1\times(-2) - 1\times 2 + 2\times(-3) = -3; \\ 1\times 3 + 2\times(-2) - 1\times 2 - 1\times(-3) = 0; \\ 1\times 3 + 3\times(-2) + 2\times 2 - 1\times(-3) = 4; \end{cases} \qquad \begin{cases} -3 = -3; \\ -3 = -3; \\ 0 = 0; \\ 4 = 4. \end{cases}$$

Відповідь: (3;–2;2;–3).

4.5.3.Метод Гаусса

Приклад. Розв’язати наступну систему рівнянь методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0; \\ 5x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -5. \end{cases}$$

Розв’язання

Будемо спиратись на описання метода Гаусса у параграфі 3.4.
Складаємо таблицю.

№ табл.	Коефіцієнти при невідомих			b_i	Контрольний стовпчик
	x_1	x_2	x_3		
I	3	- 1	1	1	3
	2	- 1	1	0	2
	5	- 5	2	- 5	2
II	3	- 1	1	1	3
	0	- 1	1	- 2	0
	0	10	1	- 20	- 9
III	3	- 1	1	1	3
	0	- 1	1	- 2	0
	0	0	9	0	9

Коментарії до таблиці I:

1) складаємо таблицю I відповідно умові;

2) елементи контрольного стовпчика дорівнюють сумі коефіцієнтів при невідомих у відповідному рядку.

Коментарії до таблиці II:

1) елемент $a_{11} = 3$ призначаємо провідним елементом, а перший рядок – провідним рядком;

2) елементи провідного рядка таблиці I без змін заносимо у перший рядок таблиці II;

3) усі елементи першого стовпчика, які знаходяться нижче першого рядка, дорівнюють нулеві;

4) знаходимо інші елементи таблиці II, користуючись правилом прямокутника:

$$a'_{22} = -1 \cdot 3 - (-1) \cdot 2 = -1; \qquad b'_2 = 0 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = -2;$$

$$a'_{23} = 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 1; \qquad b'_3 = -5 \cdot 3 - 1 \cdot 5 = -20;$$

$$a'_{32} = -5 \cdot 3 - (-1) \cdot 5 = -10; \qquad k'_2 = 2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 = 0;$$

$$a'_{33} = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 5 = 1; \qquad k'_3 = 2 \cdot 3 - 3 \cdot 5 = -9;$$

5) перевірка за допомогою контрольного стовпчика:

$$0 - 1 + 1 = 0 = k'_2;$$

$$0 - 10 + 1 = -9 = k_3.$$

Коефіцієнти знайдені правильно. Таблиця II складена.

Коментарії до таблиці III:

1) елемент $a'_{22} = -1$ призначаємо провідним елементом, а другий рядок – провідним рядком;

2) перший та другий рядки таблиці II переносимо без змін до таблиці III;

3) перший стовпчик таблиці II переносимо до таблиці III без змін;

4) усі елементи другого стовпчика таблиці III, які лежать нижче другого рядка, дорівнюють нулеві;

5) знаходимо інші елементи таблиці III:

$$a''_{33} = 1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-10) = 9;$$

$$b''_3 = -20 \cdot (-1) - (-2) \cdot (-10) = 0;$$

$$k''_3 = -9 \cdot (-1) - 0 \cdot (-10) = 9;$$

6) перевірка за допомогою контрольного стовпчика:

$$0 + 0 + 1 = 1 = k''_3.$$

Коефіцієнти знайдені правильно. Таблиця III складена.

Ця таблиця є останньою таблицею, оскільки в ній лише III рядки.

Обернений хід.

Отримана таблиця відповідає наступній системі рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 1; \\ \quad\; - x_2 + x_3 = -2; \\ \qquad\quad 9x_3 = 0. \end{cases}$$

З третього рівняння маємо:

$$x_3 = 0.$$

З другого рівняння маємо:

$$-x_2 + 0 = -2,$$

$$x_2 = 2.$$

З першого рівняння маємо:

$$3x_1 - 2 + 0 = 1;$$

$$3x_1 = 3;$$

$$x_1 = 1.$$

Перевірка:

$$\begin{cases} 3 \times 1 - 2 + 0 = 1; \\ 2 \times 1 - 2 + 0 = 0; \\ 5 \times 1 - 5 \times 2 + 0 = -5; \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 = 1; \\ 0 = 0; \\ -5 = -5. \end{cases}$$

Відповідь: (1;2;0).

Приклад. Розв'язати систему рівнянь методом Гаусса (в табличній формі)

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = -3; \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -3; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0; \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 4. \end{cases}$$

Розв'язання

Складаємо таблицю.

№ табл.	Коефіцієнти при невідомих				b_i	Контрол. стовпчик
	x_1	x_2	x_3	x_4		
I	2	- 1	- 1	3	- 3	3
	1	- 1	- 1	2	- 3	1
	1	2	- 1	- 1	0	1
	1	3	2	- 1	4	5

II	2	- 1	- 1	3	- 3	3
	0	- 1	- 1	1	- 3	- 1
	0	5	- 1	- 5	3	- 1
	0	7	5	- 5	11	7
III	2	- 1	- 1	3	- 3	3
	0	- 1	- 1	1	- 3	- 1
	0	0	6	0	12	6
	0	0	2	- 2	10	0
IV	2	- 1	- 1	3	- 3	3
	0	- 1	- 1	1	- 3	- 1
	0	0	6	0	12	6
	0	0	0	- 12	36	- 12

Коментарії до таблиці I:

1) складаємо таблицю I відповідно умові;

2) елементи контрольного стовпчика знаходимо як суму коефіцієнтів при невідомих у відповідному рядку.

Коментарії до таблиці II:

1) елемент $a_{11} = 2$ таблиці I призначаємо провідним елементом, а перший рядок таблиці I − провідним рядком;
2) переносимо перший рядок таблиці I без змін до таблиці II;
3) усі елементи першого стовпчика таблиці II, які лежать нижче першого рядка, дорівнюють нулеві;
4) знаходимо інші елементи таблиці II:

$a'_{22} = -1 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 = -1;$ $\quad b'_3 = 0 \cdot 2 - (-3) \cdot 1 = 3;$

$a'_{23} = -1 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 = -1;$ $\quad k'_3 = 1 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = -1;$

$a'_{24} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1;$ $\quad a'_{42} = 3 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 = 7;$

$b'_2 = -3 \cdot 2 - (-3) \cdot 1 = -3;$ $\quad a'_{43} = 2 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 = 5;$

$k'_2 = 1 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = -1;$ $\quad a'_{44} = -1 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = -5;$

$a'_{32} = 2 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 = 5;$ $\quad b'_4 = 4 \cdot 2 - (-3) \cdot 1 = 11;$

$a'_{33} = -1 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 = -1;$ $\quad k'_4 = 5 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 7;$

$a'_{34} = -1 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = -5;$

5) перевірка за допомогою контрольного стовпчика:

$$0-1-1+1=-1=k_2';$$
$$0+5-1-5=-1=k_3';$$
$$0+7+5-5=7=k_4'.$$

Коефіцієнти знайдені правильно. Таблиця II складена.

Коментарії до таблиці III:

1) елемент $a_{22}'=-1$ таблиці II призначаємо провідним елементом, а другий рядок – провідним рядком;

2) переносимо перший та другий рядки таблиці II без змін до таблиці III;

3) перший стовпчик таблиці II переносимо без змін до таблиці III;

4) усі елементи другого стовпчика таблиці III, які лежать нижче другого рядка, дорівнюють нулеві;

5) знаходимо інші елементи таблиці III:

$$a_{33}''=-1\times(-1)-(-1)\times 5=6;$$
$$a_{34}''=-5\times(-1)-1\times 5=0;$$
$$b_3''=3\times(-1)-(-3)\times 5=12;$$
$$k_3''=-1\times(-1)-(-1)\times 5=6;$$
$$a_{43}''=5\times(-1)-(-1)\times 7=2;$$
$$a_{44}''=-5\times(-1)-1\times 7=-2;$$
$$b_4''=11\times(-1)-(-3)\times 7=10;$$
$$k_4''=7\times(-1)-(-1)\times 7=0;$$

6) перевірка за допомогою контрольного стовпчика:

$$0+0+6+0=6=k_3'';$$
$$0+0+2-2=0=k_4''.$$

Коефіцієнти знайдені правильно. Таблиця III складена.

Коментарії до таблиці IV:

1) елемент $a_{33}''=6$ таблиці III призначаємо провідним елементом, а третій рядок – провідним рядком;

2) переносимо перший, другий та третій рядки з таблиці II до таблиці III без змін;

3) перший та другий стовпчики таблиці II переносимо до таблиці III без змін;

4) усі елементи третього стовпчика, які лежать нижче третього рядка, дорівнюють нулеві;

5) знаходимо інші елементи таблиці IV:

$$a_{44}'''=-2\times 6-0\times 2=-12;$$
$$b_4'''=10\times 6-12\times 2=36;$$
$$k_4'''=0\times 6-6\times 2=-12;$$

6) перевірка за допомогою контрольного стовпчика:

$$0+0+0-12=-12=k_4'''.$$

Коефіцієнти знайдені правильно. Таблиця IV складена.

Обернений хід.
У відповідності з таблицею IV маємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2\cdot x_1 - 1\cdot x_2 - 1\cdot x_3 + 3\cdot x_4 = -3; \\ 0\cdot x_1 - 1\cdot x_2 - 1\cdot x_3 + 1\cdot x_4 = -3; \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 6\cdot x_3 + 0\cdot x_4 = 12; \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 - 12\cdot x_4 = 36. \end{cases}$$

З четвертого рівняння маємо:

$$-12x_4 = 36 \quad \Rightarrow \quad x_4 = -3.$$

З третього рівняння маємо:

$$6x_3 = 12 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 2.$$

З другого рівняння маємо:

$$-x_2 - 2 - 3 = -3 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -2.$$

З першого рівняння маємо:

$$2x_1 + 2 - 2 - 9 = -3 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3.$$

Перевірка.

$$\begin{cases} 2\cdot 3 - 1\cdot(-2) - 1\cdot 2 + 3\cdot(-3) = -3; \\ 1\cdot 3 - 1\cdot(-2) - 1\cdot 2 + 2\cdot(-3) = -3; \\ 1\cdot 3 + 2\cdot(-2) - 1\cdot 2 - 1\cdot(-3) = 0; \\ 1\cdot 3 + 3\cdot(-2) + 2\cdot 2 - 1\cdot(-3) = 4; \end{cases} \qquad \begin{cases} -3 = -3; \\ -3 = -3; \\ 0 = 0; \\ 4 = 4. \end{cases}$$

Відповідь: (3; –2; 2; –3).

4.5.4. Метод Жордано-Гусса

Приклад. Розв’язати систему рівнянь методом Жордано-Гусса

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = -3; \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -3; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0; \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 4. \end{cases}$$

Розв’язання

Звернемося до параграфа 3.4.3.

№ табл.	Коефіцієнти при невідомих				b_i	Контрол. стовпчик
	x_1	x_2	x_3	x_4		
I	2	-1	-1	3	-3	3
	1	-1	-1	2	-3	1
	1	2	-1	-1	0	1
	1	3	2	-1	4	5
II	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$
	0	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$
	0	$\frac{7}{2}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{7}{2}$
III	1	0	0	1	0	2
	0	1	1	-1	3	1
	0	0	-3	0	-6	-3
	0	0	-1	1	-5	0
IV	1	0	0	1	0	2
	0	1	0	-1	1	0
	0	0	1	0	2	1
	0	0	0	1	-3	1
V	1	0	0	0	3	1
	0	1	0	0	-2	1
	0	0	1	0	2	1
	0	0	0	1	-3	1

Коментарії до таблиці I:

1) складаємо таблицю I відповідно умові;
2) елементи контрольного стовпчика знаходимо як суму коефіцієнтів при невідомих;

Коментарії до таблиці II:

1) елемент $a_{11}=2$ таблиці I призначаємо провідним елементом, а перший рядок – провідним рядком;
2) елементи провідного рядка поділимо на провідний елемент, а отримані результати запишемо у перший рядок таблиці II;
3) усі елементи першого стовпчика у таблиці II дорівнюють нулеві за винятком

елемента $a'_{11}=1$;

4) знаходимо інші елементи таблиці II.

Їх можна знаходити за правилом прямокутника, але при цьому отриманий результат необхідно поділити на провідний елемент.

Можна також користуватися формулою:

$$a'_{kj}=\frac{a_{kj}\times a_{ii}-a_{ki}\times a_{ij}}{a_{ii}},$$

де $a_{ii}-$ провідний елемент.

$$a'_{22}=\frac{1}{2}\times\left(-1\times2-(-1)\times1\right)=-\frac{1}{2};\qquad b'_3=\frac{1}{2}\times\left(0\times2-(-3)\times1\right)=\frac{3}{2};$$

$$a'_{23}=\frac{1}{2}\times\left(-1\times2-(-1)\times1\right)=-\frac{1}{2};\qquad k'_3=\frac{1}{2}\times\left(1\times2-3\times1\right)=-\frac{1}{2};$$

$$a'_{24}=\frac{1}{2}\times\left(2\times2-3\times1\right)=\frac{1}{2};\qquad a'_{42}=\frac{1}{2}\times\left(3\times2-(-1)\times1\right)=\frac{7}{2};$$

$$b'_2=\frac{1}{2}\times\left(-3\times2-(-3)\times1\right)=-\frac{3}{2};\qquad a'_{43}=\frac{1}{2}\times\left(2\times2-(-1)\times1\right)=\frac{5}{2};$$

$$k'_2=\frac{1}{2}\times\left(1\times2-3\times1\right)=-\frac{1}{2};\qquad a'_{44}=\frac{1}{2}\times\left(-1\times2-3\times1\right)=-\frac{5}{2};$$

$$a'_{32}=\frac{1}{2}\times\left(2\times2-(-1)\times1\right)=-\frac{5}{2};\qquad b'_4=\frac{1}{2}\times\left(4\times2-(-3)\times1\right)=\frac{11}{2};$$

$$a'_{33}=\frac{1}{2}\times\left(-1\times2-(-1)\times1\right)=-\frac{1}{2};\qquad k'_4=\frac{1}{2}\times\left(5\times2-3\times1\right)=\frac{7}{2};$$

$$a'_{34}=\frac{1}{2}\times\left(-1\times2-3\times1\right)=\frac{5}{2};$$

5) перевірка за допомогою контрольного стовпчика:

$$0-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}=k'_2;$$

$$0+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}=-\frac{1}{2}=k'_3;$$

$$0+\frac{7}{2}+\frac{5}{2}-\frac{5}{2}=\frac{7}{2}=k'_4.$$

Коефіцієнти знайдені правильно. Таблиця II складена.

Коментарії до таблиці III:

1) призначаємо елемент $a'_{22}=-\frac{1}{2}$ провідним елементом, а другий стовпчик − провідним стовпчиком;

2) елементи провідного рядка поділимо на провідний елемент $a'_{22}=-\frac{1}{2}$ та запишемо отримані результати у другий рядок таблиці III;
3) перший стовпчик таблиці II переносимо без змін до таблиці III;
4) усі елементи другого стовпчика таблиці III, за винятком елемента $a''_{22}=1$, дорівнюють нулеві;
5) знаходимо інші елементи таблиці III:

$$a''_{13}=-2\times\left(-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=0;\quad b''_3=-2\times\left(\frac{3}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{3}{2}\right)\times\frac{5}{2}\right)=-6;$$

$$a''_{14}=-2\times\left(\frac{3}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=1;\quad k''_3=-2\times\left(-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{5}{2}\right)=-3;$$

$$b''_1=-2\times\left(-\frac{3}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{3}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=0;\quad a''_{43}=-2\times\left(\frac{5}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{7}{2}\right)=-1;$$

$$k''_1=-2\times\left(\frac{3}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=2;\quad a''_{44}=-2\times\left(-\frac{5}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\times\frac{7}{2}\right)=1;$$

$$a''_{33}=-2\times\left(-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{5}{2}\right)=-3;\quad b''_4=-2\times\left(\frac{11}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{3}{2}\right)\times\frac{7}{2}\right)=-5;$$

$$a''_{34}=-2\times\left(-\frac{5}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\right)=0;\quad k''_4=-2\times\left(\frac{7}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{7}{2}\right)=0;$$

6) перевірка за допомогою контрольного стовпчика:

$$1+0+0+1=2=k''_1;$$

$$0+0-3+0=-3=k''_3;$$

$$0+0-1+1=0=k''_4.$$

Коефіцієнти знайдені правильно. Таблиця III складена.

Коментарії до таблиці IV:

1) елемент $a''_{33}=-3$ таблиці III призначаємо провідним елементом, а третій рядок − провідним рядком;
2) елементи провідного рядка поділимо на провідний елемент $a''_{33}=-3$ та отримані результати запишемо у третій стовпчик таблиці IV;
3) перший та другий стовпчики таблиці III переносимо до таблиці IV без змін;
4) усі елементи третього стовпчика таблиці IV дорівнюють нулеві, за винятком елемента $a'''_{33}=1$;
5) знаходимо інші елементи таблиці IV:

$$a'''_{14}=-\frac{1}{3}\times\left(1\times(-3)-0\times0\right)=1;$$

$$b'''_{1}=-\frac{1}{3}\times\left(0\times(-3)-(-6)\times0\right)=0;$$

$$k'''_{1}=-\frac{1}{3}\times\left(2\times(-3)-(-3)\times0\right)=2;$$

$$a'''_{24}=-\frac{1}{3}\times\left(-1\times(-3)-0\times1\right)=-1;$$

$$b'''_{2}=-\frac{1}{3}\times\left(3\times(-3)-(-6)\times1\right)=1;$$

$$k'''_{2}=-\frac{1}{3}\times\left(1\times(-3)-(-3)\times1\right)=0;$$

$$a'''_{44}=-\frac{1}{3}\times\left(1\times(-3)-0\times(-1)\right)=1;$$

$$b'''_{4}=-\frac{1}{3}\times\left(-5\times(-3)-(-6)\times(-1)\right)=-3;$$

$$k'''_{4}=-\frac{1}{3}\times\left(0\times(-3)-(-3)\times(-1)\right)=1;$$

6) перевірка за допомогою контрольного стовпчика:

$$1+0+0+1=2=k'''_{1};$$

$$0+1+0-1=0=k'''_{2};$$

$$0+0+0+1=1=k'''_{4}.$$

Коефіцієнти знайдені правильно. Таблиця IV складена.

Коментарії до таблиці V:

1) елемент $a'''_{44}=1$ таблиці IV призначаємо провідним елементом, а четвертий рядок − провідним рядком;

2) усі елементи провідного рядка поділимо на провідний елемент та запишемо результати у четвертий рядок таблиці V;

3) перший, другий, третій стовпчики таблиці IV без змін переносимо до таблиці V;

4) усі елементи четвертого стовпчика таблиці V дорівнюють нулеві, за винятком елемента $a''''_{44}=1$;

5) знаходимо інші елементи таблиці V:

$$b''''_{1}=0\times1-(-3)\times1=3;$$

$$k''''_{1}=2\times1-1\times1=1;$$

$$b''''_{2}=1\times1-(-3)\times(-1)=-2;$$

$$k''''_{2}=0\times1-1\times(-1)=1;$$

$$b''''_{3}=2\times1-(-3)\times0=2;$$

$$k''''_{3}=1\times1-1\times0=1;$$

6) перевірка за допомогою контрольного стовпчика:

$$1+0+0+0=1=k''''_{1};$$

$$0+1+0+0=1=k''''_{2};$$

$$0+0+1+0=1=k''''_{3};$$

$$0+0+0+1=1=k''''_{4}.$$

Обернений хід:

Відповідно таблиці V маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 = 3 & \Rightarrow \quad x_1 = 3; \\ 0\cdot x_1 + x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 = -2 & \Rightarrow \quad x_2 = -2; \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + x_3 + 0\cdot x_4 = 2 & \Rightarrow \quad x_3 = 2; \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + x_4 = -3 & \Rightarrow \quad x_4 = -3. \end{cases}$$

Перевірка.

$$\begin{cases} 2\cdot 3 - 1\cdot(-2) - 1\cdot 2 + 3\cdot(-3) = -3; \\ 1\cdot 3 - 1\cdot(-2) - 1\cdot 2 + 2\cdot(-3) = -3; \\ 1\cdot 3 + 2\cdot(-2) - 1\cdot 2 - 1\cdot(-3) = 0; \\ 1\cdot 3 + 3\cdot(-2) + 2\cdot 2 - 1\cdot(-3) = 4; \end{cases} \qquad \begin{cases} -3 = -3; \\ -3 = -3; \\ 0 = 0; \\ 4 = 4. \end{cases}$$

Відповідь: (3;−2; 2;−3).

4.6. Дослідження систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Приклад. Дослідити на сумісність систему рівнянь та знайти її розв'язок, якщо вона сумісна,

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 1; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 2; \\ 3x_1 + 9x_2 - 12x_3 + 3x_4 = 2. \end{cases}$$

Розв'язання

Будемо досліджувати систему на сумісність за допомогою теореми Кронекера−Капелі (3.5).

Складаємо матриці A та B.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & 9 & -12 & 3 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & 9 & -12 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо ранги цих матриць.

$$r\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -4 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & 9 & -12 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim r\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 12 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim r\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 9 & 6 & 15 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Коментарії:

елементи другого стовпчика поділимо на 3, а елементи третього стовпчика помножимо на (-1);

в отриманій матриці елементи четвертого стовпчика:

а) помножимо на 2 та додамо до відповідних елементів першого та четвертого стовпчиків;

б) додамо до відповідних елементів другого та третього стовпчиків;

в отриманій матриці елементи першого стовпчика поділимо на 3, другого стовпчика поділимо на 2, а третього − на 5;

у новій матриці вийшло три однакових стовпчика, отже, двох із них можна позбутись;

Складемо матриці A та B.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо ранги цих матриць.

$$r\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim r\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim r\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \\ 7 & 4 & 7 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim r\begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & -1 \\ 7 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \sim r\begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & -1 \\ 7 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \sim r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$r\begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 7 & 0 \\ 7 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \sim r\begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim r\begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim r\begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \sim r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Коментарії:

елементи четвертого стовпчика поділимо на 2;

елементи другого стовпчика додамо до відповідних елементів:

а) першого стовпчика;

б) третього стовпчика;

3) елементи другого рядка помножимо на:

а) 2 та додамо до відповідних елементів першого рядка;

б) 3 та додамо до відповідних елементів третього рядка;

в) 4 та додамо до відповідних елементів четвертого рядка;

4) елементи другого рядка помножимо на (-1);

елементи першого рядка додамо до відповідних елементів третього рядка;

елементи третього рядка помножимо на (-1) та додамо до відповідних елементів четвертого рядка;

четвертий нульовий рядок можна закреслити;

елементи третього стовпчика помножимо на (-1) та додамо до відповідних елементів першого стовпчика;

елементи першого стовпчика поділимо на (-2);

елементи третього рядка поділимо на 7;

елементи третього рядка помножимо на (-5) та додамо до відповідних елементів першого рядка.

$$r(A) = 3; \qquad r(B) = 3.$$

Означена система сумісна. Оскільки у процесі перетворень став нульовим четвертий рядок, можна стверджувати, що четверте рівняння системи є лінійною комбінацією перших трьох. Отже, від четвертого рівняння можна позбавитись.

Розв'яжемо тепер систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2; \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0; \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$$

Таку систему зручно розв'язати за правилом Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 9 + 2 + 3 - 3 + 2 = 14;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 4 - 6 - 6 = -14;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -6 + 2 + 2 + 2 = 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 2 + 6 + 2 + 4 = 14.$$

$$x_1 = -1; \qquad x_2 = 0; \qquad x_3 = 1.$$

Відповідь: $(-1; 0; 1)$.

4.7. Однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Приклад. Розв'язати наступну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання

В заданій системі усі вільні члени дорівнюють нулеві, отже, ця система є однорідною системою рівнянь.

Звернемося до параграфа 3.6.

Знаходимо визначник системи.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 - 9 + 3 - 1 - 6 = -10 \neq 0.$$

Оскільки визначник системи відрізняється від нуля, то система має єдиний розв'язок, а саме, тривіальний розв'язок.

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

Відповідь: (0; 0; 0).

Приклад. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0; \\ 8x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання

Маємо однорідну систему рівнянь. Знаходимо визначник системи.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 & -1 \\ 8 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 & -1 \\ 12 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 12 \times (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Коментарії:

елементи першого рядка послідовно додамо відповідних елементів другого, третього, четвертого рядків;

отриманий визначник зручно розкласти за елементами другого рядка;

визначник III порядку, який маємо внаслідок попереднього перетворення, дорівнює нулеві, оскільки другий рядок складається виключно з нулів.

Таким чином, задана система рівнянь має нескінченну кількість розв'язків. Знайдемо їх методом Гаусса.

Коментарії до таблиці:

таблицю I складаємо відповідно умові та елемент $a_{11} = 4$ призначаємо провідним елементом, а перший рядок − провідним рядком;

елементи контрольного стовпчика дорівнюють сумі коефіцієнтів при невідомих;

перший рядок таблиці I переносимо до таблиці II без змін;

усі елементи першого стовпчика таблиці II, які лежать нижче першого рядка, дорівнюють нулеві;

знаходимо інші елементи таблиці:

$a'_{22} = 1 \times 4 - (-1) \times 8 = 12;$ $\quad a'_{34} = 1 \times 4 - (-1) \times 2 = 6;$

$a'_{23} = -1 \times 4 - 1 \times 8 = -12;$ $\quad k'_3 = 3 \times 4 - 3 \times 2 = 6;$

$a'_{24} = 1 \times 4 - (-1) \times 8 = 12;$ $\quad a'_{42} = 2 \times 4 - (-1) \times 1 = 9;$

$k'_2 = 9 \times 4 - 3 \times 8 = 12;$ $\quad a'_{43} = -1 \times 4 - 1 \times 1 = -5;$

$a'_{32} = 1 \times 4 - (-1) \times 2 = 6;$ $\quad a'_{44} = 2 \times 4 - (-1) \times 1 = 9;$

$a'_{33} = -1 \times 4 - 1 \times 2 = -6;$ $\quad k'_4 = 4 \times 4 - 3 \times 1 = 13;$

№ табл.	Коефіцієнти при невідомих				b_i	Контрол. стовпчик
	x_1	x_2	x_3	x_4		
I	4	−1	1	−1	0	3
	8	1	−1	1	0	9
	2	1	−1	1	0	3
	1	2	−1	2	0	4
II	4	−1	1	−1	0	3
	0	12	−12	12	0	12
	0	6	−6	6	0	6
	0	9	−5	9	0	13
III	4	−1	1	−1	0	3
	0	1	−1	1	0	1
	0	1	−1	1	0	1
	0	9	−5	9	0	13
IV	4	−1	1	−1	0	3
	0	1	−1	1	0	1
	0	9	−5	9	0	13
V	4	−1	1	−1	0	3
	0	1	−1	1	0	1
	0	0	4	0	0	4

VI	4	–1	1	–1	0	3
	0	1	–1	1	0	1
	0	0	1	0	0	1

перевірка за допомогою контрольного стовпчика:

$$0+12-12+12=12=k_2';$$

$$0+6-6+6=6=k_3';$$

$$0+9-5+9=13=k_4'.$$

Коефіцієнти знайдені правильно. Таблиця II складена;

особливість таблиці II в тому, що елементи другого та третього рядків можна поділити на їх спільні множники, внаслідок чого отримаємо таблицю III;

особливість таблиці III полягає в тому, що вона має однакові другий та третій рядки, значить, одного з них можна позбутись. Це приводить до таблиці IV;

елемент $a_{22}'''=1$ таблиці IV призначаємо провідним елементом, а другий рядок – провідним рядком;

перший та другий рядки таблиці IV переносимо до таблиці V без змін;

перший стовпчик таблиці IV переносимо до таблиці V без змін;

елементи другого стовпчика таблиці V, які лежать нижче другого рядка, замінимо на нуль;

знаходимо інші елементи таблиці V:

$$a_{33}''''=4\times 1-(-1)\times 0=4;$$

$$a_{34}''''=0\times 1-1\times 0=0;$$

$$k_3''''=4\times 1-1\times 0=4;$$

перевірка за допомогою контрольного стовпчика:

$$0+0+4+0=4=k_3''''.$$

Коефіцієнти знайдені правильно. Таблиця V складена;

особливість таблиці V полягає в тому, що усі елементи третього рядка можна поділити на їх спільний множник, внаслідок чого приходимо до таблиці VI.

Таблиця VI має трапецеїдальну форму.

Розглянемо матрицю, яка відповідає таблиці V.

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо ранг цієї матриці.

$$r(A)=r\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\sim r\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\sim r\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\sim r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\sim$$

$$\sim r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=3.$$

Коментарії до обчислення рангу матриці:

знаходимо ранг матриці A, користуючись елементарними перетвореннями, які не змінюють рангу матриці;

елементи першого стовпчика поділимо на 4;

в отриманій матриці другий та четвертий стовпчики однакові, отже, одного з них можна позбутися;

в отриманій після попереднього перетворення матриці робимо наступні перетворення:

а) елементи першого стовпчика додамо до відповідних елементів другого стовпчика;

б) елементи першого стовпчика помножимо на (-1) та додамо до третього стовпчика;

5) в отриманій матриці елементи другого стовпчика додамо до відповідних елементів третього стовпчика;

6) ми отримали одиничну матрицю розмірності (3×3). Значить,

$$r(A)=3.$$

У процесі елементарних перетворень ми позбавились четвертого стовпчика, значить, мінор

$$M=\begin{vmatrix}4 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}\neq 0.$$

На цій підставі будемо вважати, що базисними невідомими є $x_1, x_2, x_3,$ а x_4 – вільна невідома.

Запишемо систему на основі таблиці VI у вигляді:

$$\begin{cases}4x_1-x_2+x_3-x_4=0;\\ \quad\; x_2-x_3+x_4=0;\\ \qquad\quad x_3\qquad\; =0.\end{cases}$$

Залишаючи зліва лише базисні невідомі маємо:

$$\begin{cases}4x_1-x_2+x_3=x_4;\\ \quad\; x_2-x_3=-x_4;\\ \qquad\quad x_3=0.\end{cases}$$

Тепер необхідно базисні невідомі подати через вільну невідому або знайти конкретні значення базисних невідомих.

$$\begin{cases}x_3=0;\\ x_2=-x_4;\\ x_1=\dfrac{1}{4}(x_4+x_2).\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}x_3=0;\\ x_4=c;\\ x_1=0;\\ x_2=-c.\end{cases}\qquad (*)$$

Ми отримали загальний розв’язок (*) однорідної системи. Якщо вільній невідомій x_4 надавати конкретні значення, то конкретних значень набуватиме й x_2, а x_1 та x_3 дорівнюють нулеві незалежно від

x_4. Для кожного значення

x_4 буде знайдений відповідний частинний розв'язок.

x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	0	0
0	2	0	-2
0	-7	0	7
–	–	–	–
–	–	–	–
–	–	–	–

Приклад. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0; \\ 8x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання

Маємо однорідну систему рівнянь. Знаходимо визначник системи.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 & -1 \\ 8 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -9 & 1 & -9 \\ 8 & -15 & -1 & -15 \\ 2 & -3 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Коментарії:

помножимо елементи першого стовпчика на (−2) та додамо до відповідних елементів:

а) другого стовпчика;

б) четвертого стовпчика;

2) отриманий визначник має два однакових стовпчика, отже, такий визначник дорівнює нулеві.

Звідси виходить, що система невизначена та має нескінченну множину розв'язків. Знайдемо їх методом Гаусса.

№ табл.	Коефіцієнти при невідомих				b_i	Контрол. стовпчик
	x_1	x_2	x_3	x_4		
I	4	-1	1	-1	0	3
	8	1	-1	1	0	9
	2	1	-1	1	0	3
	1	2	-2	2	0	3

II	4	−1	1	−1	0	3
	0	12	−12	12	0	12
	0	6	−6	6	0	6
	0	9	−9	9	0	9
III	4	−1	1	−1	0	3
	0	1	−1	1	0	1
	0	1	−1	1	0	1
	0	1	−1	1	0	−1
IV	4	−1	1	−1	0	3
	0	1	−1	1	0	1

Коментарії до таблиці:

таблицю I складаємо відповідно умові;

елементи контрольного стовпчика дорівнюють сумі коефіцієнтів при невідомих;

елемент $a_{11} = 4$ таблиці I призначаємо провідним елементом, а перший рядок − провідним рядком;

перший рядок таблиці I без змін переносимо до таблиці II;

у першому стовпчику таблиці I усі елементи, які лежать нижче $a_{11} = 4$, замінимо на нулі та перенесемо до таблиці II;

знаходимо інші елементи таблиці:

$$a'_{22} = 1\times 4 - (-1)\times 8 = 12; \qquad a'_{34} = 1\times 4 - (-1)\times 2 = 6;$$

$$a'_{23} = -1\times 4 - 1\times 8 = -12; \qquad k'_3 = 3\times 4 - 3\times 2 = 6;$$

$$a'_{24} = 1\times 4 - (-1)\times 8 = 12; \qquad a'_{42} = 2\times 4 - (-1)\times 1 = 9;$$

$$k'_2 = 9\times 4 - 3\times 8 = 12; \qquad a'_{43} = -2\times 4 - 1\times 1 = -9;$$

$$a'_{32} = 1\times 4 - (-1)\times 2 = 6; \qquad a'_{44} = 2\times 4 - (-1)\times 1 = 9;$$

$$a'_{33} = -1\times 4 - 1\times 2 = -6; \qquad k'_4 = 3\times 4 - 3\times 1 = 9;$$

7) перевірка за допомогою контрольного стовпчика.

$$0 + 12 - 12 + 12 = 12 = k'_2;$$

$$0 + 6 - 6 + 6 = 6 = k'_3;$$

$$0 + 9 - 9 + 9 = 9 = k'_4.$$

Коефіцієнти знайдені правильно. Таблиця II складена;

8) особливості таблиці II полягають в тому, що елементи другого, третього та четвертого рядків можна поділити на їх спільні множники, внаслідок чого отримаємо таблицю III;

9) особливістю таблиці III є те, що другий, третій та четвертий рядки таблиці однакові, отже, третього та четвертого рядків можна позбутись. Таким чином, приходимо до таблиці IV.

З таблиці IV виходить, що третє та четверте рівняння таблиці є лінійною комбінацією перших двох рівнянь, їх можна не враховувати.

Розглянемо тепер таку систему:

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0; \\ 8x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Матриця A системи:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -1 \\ 8 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Мінор M II порядку цієї матриці:

$$M = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = 12 \neq 0.$$

Значить, ранг матриці A дорівнює 2.

Якщо зважити на згаданий мінор, то базисними невідомими можна вважати x_1 та x_2, а x_3 та x_4 – вільними невідомими.

Виходячи з цих припущень, систему рівнянь запишемо у наступному вигляді:

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 = -x_3 + x_4; \\ 8x_1 + x_2 = x_3 - x_4. \end{cases}$$

З цієї системи маємо:

$$\begin{cases} x_1 = 0; \\ x_2 = x_3 - x_4 \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} x_1 = 0; \\ x_3 = c_1; \\ x_4 = c_2; \\ x_2 = c_1 - c_2. \end{cases}$$

Ми отримали загальний розв’язок однорідної системи.
Надаючи сталим ті чи інші значення, можемо знайти частинні розв’язки.

x_1	x_2	x_3	x_4
0	8	1	-7
0	-7	-5	2
0	2,9	3	0,1
0	$-8,5$	0,5	9
–	–	–	–
–	–	–	–
–	–	–	–

Приклад. Розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0; \\ 7x_1 + 5x_2 - x_3 = 0; \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 0; \\ x_1 - 10x_2 + 8x_3 = 0; \\ 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання

Розглянемо матрицю A системи.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 7 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & -10 & 8 \\ 5 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо ранг матриці.

$$r(A) = r\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 7 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & -10 & 8 \\ 5 & -2 & 4 \end{pmatrix} \sim r\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 9 & 6 & 0 \\ 9 & 6 & 0 \end{pmatrix} \sim r\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim r\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim r\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim r\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim r\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim r\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim r\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

Коментарії:

елементи першого рядка помножимо на:

а) (-1) та додамо до відповідних елементів другого рядка;

б) 2 та додамо до відповідних елементів третього рядка;

в) 8 та додамо до відповідних елементів четвертого рядка;

г) 4 та додамо до відповідних елементів п'ятого рядка;

2) елементи другого, третього, четвертого та п'ятого рядків можна поділити на їх спільні множники, внаслідок чого приходимо до нової матриці, у якій другий рядок співпадає з третім, а четвертий − з п'ятим. Позбудемось третього та п'ятого рядків. Це приводить до матриці III порядку;

3) в отриманій матриці:

а) елементи третього стовпчика додамо до відповідних елементів першого стовпчика;

б) елементи третього стовпчика помножимо на 2 та додамо до елементів другого стовпчика;

4) елементи першого рядка отриманої матриці поділимо на (-1);

5) елементи другого стовпчика нової матриці помножимо на (-2) та додамо до відповідних елементів першого стовпчика;

6) в отриманій матриці елементи першого стовпчика поділимо на (-1);

7) елементи другого рядка останньої матриці помножимо на (−2) та додамо до відповідних елементів третього рядка;

8) визначник отриманої матриці відрізняється від нуля, отже,

$$r(A) = 3.$$

Виходить, що в заданій системі досить залишити перше, друге, четверте рівняння.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0; \\ 7x_1 + 5x_2 - x_3 = 0; \\ x_1 - 10x_2 + 8x_3 = 0. \end{cases}$$

Оскільки ми вже знаємо, що визначник Δ цієї системи відрізняється від нуля, то можна стверджувати, що така система має лише один, тривіальний, розв’язок:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

Відповідь: (0;0;0).

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

Що називається визначником II порядку?
Які перетворення не змінюють визначника?
При яких перетвореннях змінюється знак визначника?
За якими ознаками можна дійти висновку, що визначник дорівнює нулеві?
За якої умови співпадають мінор та алгебраїчне доповнення елемента визначника?
Як побудувати мінор III порядку матриці розмірності (4×4)?
Яким має бути визначник системи рівнянь, щоб ця система мала єдиний розв’язок?
Які існують правила обчислення визначників III порядку?
Яким має бути визначник невиродженої матриці?
Чи може число 6 бути елементом одиничної матриці?
Чи може число 0 бути елементом діагональної матриці?
Елемент $a_{32} = -3$ є елементом симетричної метриці. Назвіть ще один елемент цієї матриці.
Сума ненульових елементів одиничної матриці дорівнює 9. Запишіть цю матрицю.
Чи існує зв'язок між детермінантами одиничної та діагональної матриць IV порядку?
Що називається базисним мінором матриці?
Матриця A має 7 базисних рядків. Скільки у неї базисних стовпчиків?
Які рядки матриці називаються лінійно залежними?
Якщо один з рядків матриці дорівнює сумі двох інших рядків, то що можна сказати про ці три рядки?
Які системи рівнянь можна розв’язати за правилом Крамера?
Які системи рівнянь можна розв’язувати матричним методом?
Які системи рівнянь можна розв’язувати методом Гаусса?
Обернена матриця знаходиться методом Жордано−Гаусса. На певному етапі елемент a_{ii}, який мав стати провідним елементом, виявився нулем. Які заходи можна вжити, щоб продовжити пошук оберненої матриці?
Скільки фундаментальних систем розв’язків має однорідна система рівнянь?
Чи може система лінійних алгебраїчних рівнянь мати три розв’язки?
Які перетворення не змінюють рангу метриці?
Чи існує $\det A$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}?$$

27. Чи існує A^T, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}?$$

28. У якому розумінні рядки та стовпчики матриці рівноправні?
29. Як зміниться визначник $n-$го порядку, якщо усі його стовпчики записати в оберненому порядку?
30. Матриця називається трикутною, якщо усі її елементи, що знаходяться по один бік від діагоналі, дорівнюють нулеві. Чому дорівнює детермінант цієї матриці?
31. Символ Кронекера заданий таким чином

$$\delta_{pk} = \begin{cases} 1,\text{якщо} & p = k \\ 0,\text{якщо} & p \neq k \end{cases}$$

Як за його допомогою записати одиничну матрицю?

32. Чи існує сума матриць розмірності (2×3) та (3×1)?
33. Чи можна від однієї матриці відняти іншу? Як це зробити? Яким умовам повинні задовольняти матриці? Якою буде розмірність отриманої матриці?
34. Чи можна перемножити дві матриці розмірності (2×3) кожна?
35. Матриця $A = (1 \quad 2 \quad 3)$. Добуток $AB = C$, де $C = (0 \quad 1)$. Яку розмірність має матриця A?
36. Нехай A – матриця–рядок, B – матриця–стовпчик. Якими мають бути A та B, якщо для них існує добуток:
    а) AB;
    б) BA;
    в) AB та BA;
    г) AB, BA та при цьому $AB = BA$?
37. Що називається фундаментальною системою розв’язків однорідної системи рівнянь?
38. Як побудувати фундаментальну систему розв’язків однорідної системи рівнянь?
39. Яка система лінійних рівнянь називається сумісною?

ПЕРЕВІРОЧНІ ТЕСТИ

Виберіть правильні варіанти відповідей.
№1.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 17 & 9 & 18 \\ 7^{10} & 8 & -1 \end{vmatrix}; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 7^{10} & 8 & -1 \\ 4 & 5 & -1 \\ 17 & 9 & 18 \end{vmatrix}.$$

1) $\Delta_1 = \Delta_2$; 2)
$\Delta_1 = -\Delta_2$; 3)
$\Delta_1 \neq \pm\Delta_2$.

№2.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}.$$

1) $\Delta_1 = \Delta_2$; 2)
$\Delta_1 = -\Delta_2$; 3)
$\Delta_1 \neq \pm\Delta_2$.

№3.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2i & i \\ 4 & i^5 \end{vmatrix}; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & i^2 \\ 5 & i \end{vmatrix},$$

де i – уявна одиниця.

1) $\Delta_1 < \Delta_2$; 2)
$\Delta_1 = \Delta_2$; 3)
Δ_1 та
Δ_2 – непорівнянні.

№4.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -4 \end{vmatrix}.$$

1) $\Delta < 0$; 2)
$\Delta = 0$; 3)
$\Delta > 0$.

№5.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & -1 \end{vmatrix}; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

1) $\Delta_1 < \Delta_2$; 2)
$\Delta_1 = \Delta_2$; 3)
Δ_1 та
Δ_2 – непорівнянні.

№6.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}, \qquad \det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}.$$

1) $A = \det A$; 2)
$A > \det A$; 3)
A та
$\det A$ – непорівнянні.

№7.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$C = A - B.$$

1) $C = 1$; 2)
C – не існує; 3)
$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

№8.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

1) $A^{-1} = \dfrac{1}{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}}$; 2)
A^{-1} – не існує; 3)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{3}{13} & \frac{-2}{13} \end{pmatrix}.$$

№9.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

1) $A \times B = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -9 & 25 \end{pmatrix};$ 2)
$A \times B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 9 & 25 \end{pmatrix};$ 3)
$A \times B = -130.$

№10.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) $r(A) = r(B);$ 2)
$r(A) < r(B);$

3)
$r(A) > r(B).$

№11.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

1) $r(A) = r(B);$ 2)
$r(A) = \frac{1}{10} r(B)$; 3)
$r(A) > r(B).$

№12.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

1) $M_{11} = M_{33}$; 2)
$M_{11} < M_{33}$; 3)

$M_{11} > M_{33}$.

№13.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

1) $A_{11} = A_{33}$; 2)
$A_{11} > A_{33}$; 3)
$A_{11} < A_{33}$.

№14.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

1) $A_{11} + A_{33} = 0$; 2)
$A_{11} + A_{33} < 0$; 3)
$A_{11} + A_{33} > 0$.

№15.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

1) $\Delta = 0$; 2)
$\Delta = 6$; 3)
$\Delta = 54$.

№16.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}; \quad C = A \times B.$$

1) $c_{23} = 21$; 2)
$c_{23} = 22$; 3)
$c_{23} = -6$.

№17.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

1) $c_{33} = -3;$ 2) $c_{33} = 3;$ 3) c_{33} – не існує.

№18.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

1) $A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 4 & 16 \end{pmatrix};$ 2) $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ 14 & 14 \end{pmatrix};$ 3) $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$

№19.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & a^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$ 2) $A^n = \begin{pmatrix} n & na \\ 0 & n \end{pmatrix};$ 3) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

№20.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

1) $A^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix};$ 2)

$$A^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 1 \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix};$$

3)
$$A^n = \begin{pmatrix} n\lambda & 1 \\ 0 & n\lambda \end{pmatrix}.$$

№21.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

1) $AB = \begin{pmatrix} 9 & -8 \\ 10 & -20 \end{pmatrix};$ 2) $AB = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix};$ 3) $AB = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}.$

№22.

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

1) $A^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix};$ 2) $A^n = \begin{pmatrix} n\cos\alpha & -n\sin\alpha \\ n\sin\alpha & n\cos\alpha \end{pmatrix};$

3) $A^n = \begin{pmatrix} \cos^n\alpha & -\sin^n\alpha \\ \sin^n\alpha & \cos^n\alpha \end{pmatrix}.$

№23.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4; \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5; \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 6. \end{cases}$$

При розв’язанні системи методом Гауса на першому етапі коефіцієнт a'_{22} дорівнює

1) −2; 2) −1; 3) 1.

№24. Дано рівняння

$$\begin{vmatrix} 3 & k & -k \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$A = x_1 + x_2,$$

де $x_1; x_2$ – корені цього рівняння.

1) $A = 9;$ 2) $A = -8;$ 3) $A = -9.$

№25. Дано рівняння

$$\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$A = x_1 - 4x_2,$$

де $x_1; x_2$ – корені цього рівняння, $\left(x_1 < x_2 \right)$.

1) $A = 0;$ 2) $A = -5;$ 3) $A = 5.$

№26. Дана нерівність

$$\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} \geq 0.$$

Множина розв’язків належить проміжку $\left[a; b \right]$. $A = b - a.$

1) $A = 10;$ 2) $A = 2;$ 3) $A = -2.$

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ’ЯЗАННЯ

Обчислити визначники.

№1. $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}.$ №2.

$$\begin{vmatrix} 5 & 12 \\ -25 & -60 \end{vmatrix}.$$

№3.

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

№4. $$\begin{vmatrix} \sin 12^\circ 4' & \cos 12^\circ 4' \\ -\cos 12^\circ 4' & \sin 12^\circ 4' \end{vmatrix}.$$

№5. $$\begin{vmatrix} \sin 17^\circ & \cos 17^\circ \\ \sin 73^\circ & \cos 73^\circ \end{vmatrix}.$$

№6.

$$\begin{vmatrix} \cos 22^\circ 30' & \sin 22^\circ 30' \\ \sin 22^\circ 30' & \cos 22^\circ 30' \end{vmatrix}.$$

№7. $$\begin{vmatrix} a-b & 1 \\ a^3-b^3 & a^2+ab+b^2 \end{vmatrix}.$$

№8.

$$\begin{vmatrix} x^2-5x+6 & x-2 \\ 3-x & 1 \end{vmatrix}.$$

Довести тотожність.

№9. $$\begin{vmatrix} \cos 2\alpha + \cos 5\alpha & 1 \\ \cos 3\alpha + \cos 4\alpha & 1 \end{vmatrix} = -4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\cos\frac{7\alpha}{2};$$

№10. $$\begin{vmatrix} \sin(4\pi+\alpha) & \cos(\pi+\alpha) \\ -\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) & \cos\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right) \end{vmatrix} = 1;$$

№11. $$\begin{vmatrix} \sin(\alpha+4\pi) & \cos(\pi-\alpha) \\ -\sin\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right) & \cos\left(\alpha-\frac{5\pi}{2}\right) \end{vmatrix} = -\cos 2\alpha.$$

№12. $$\begin{vmatrix} tg2\alpha + ctg3\beta & tg2\alpha \\ ctg2\alpha + tg3\beta & tg3\beta \end{vmatrix} = 0.$$

Обчислити визначники:

- безпосередньо за формулою (1.2);
- за правилом трикутника;
- дописуванням стовпчиків;
- дописуванням рядків;
- розкладанням за елементами будь-якого рядка або стовпчика;
- утворенням нулів;

за правилом прямокутника.
Порівняти отримані результати.

№13. $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & -4 \\ 9 & 30 & 0 \end{vmatrix}$.

№14. $\begin{vmatrix} 8 & -3 & 5 \\ 14 & -4 & 7 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

№15. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

Перевірити слушність властивостей визначників на прикладі визначників.

№16. $\begin{vmatrix} 12 & 8 \\ 9 & 7 \end{vmatrix}$.

№17. $\begin{vmatrix} 12 & 4 & -5 \\ 1 & 10 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

№18. $\begin{vmatrix} 4 & -7 & 9 \\ -2 & 0 & 11 \\ 6 & 5 & 7 \end{vmatrix}$.

Обчислити визначник:
розкладанням за елементами будь-якого рядка або стовпчика;
утворенням нулів;
за правилом прямокутника.
Порівняти отримані результати.

№19. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 & 2 \\ 6 & 6 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

Довести тотожність.
№20.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c).$$

Довести тотожності.

№21. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

№22. $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = n!$$

Знайти суму матриць A та B, якщо

№23. $$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -7 & 4 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

№24. $$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 5 & 8 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

№25. $$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} -7 & -4 & -1 \\ 2 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

№26. Перевірити слушність комутативного закону $A + B = B + A$ для матриць

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

№27. Перевірити слушність сполучного закону $(A + B) + C = A + (B + C)$ для матриць

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 7 & -1 & 5 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Знайти лінійні комбінації матриць.

№28. $2A - 3B,$ якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

№29. $3A + 2B,$ якщо

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

№30. $2A+3B-C,$ якщо

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C=\begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Знайти добутки матриць AB та
$BA,$ а також
A^2 та
B^2.

№31.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

№32.

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}; \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

№33.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}; \qquad B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайти матрицю $AB,$ якщо
№34.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \qquad B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

№35.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

№36.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

№37. Знайти матрицю $C = A^2 + 2B,$ де

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

№38. Знайти матрицю $C = AB - BA,$ де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

№39. Знайти матрицю $C = (2A) \times (3B)$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

№40. Знайти матрицю $AE,$ якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 6 \end{pmatrix}; \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

№41. Знайти матрицю $EA,$ якщо

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

№42. Довести, що добуток AB ненульових матриць

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

та

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$$

є нульова матриця

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

№43. Знайти добуток матриць A та B, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

№44. Дано матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Знайти A^2, A^3, A^4, A^6.

№45. Дано матрицю

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Довести, що

$$E^n = E,$$

де $n -$ будь-яке натуральне число.

Знайти матрицю, обернену до даної.

№46.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

№47.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & i^4 \\ i^{24} & 8 \end{pmatrix}.$$

№48.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

№49.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}.$$

№50.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

№51.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

№52.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

№53.

$$A = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \\ 6 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

№54.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

№55.

$$A = 6 \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

№56.

$$A = B^2,$$

де

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

№57.

$$A = B^3,$$

де

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

№58.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

№59.

$$A=B^T,$$

де

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

№60.

$$A=\begin{pmatrix} 5\det A & i^{280} & \ln e^5 \\ \operatorname{tg}420\pi & \sin\dfrac{121\pi}{2} & \lg 0,01 \\ \ln\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

№61.

$$A = B + B^T,$$

де

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

№62.

$$A = B + B^2,$$

де

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

№63.

$$A = B + E + B^T,$$

де

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв’язати матричні рівняння.

№64.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \times X = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

№65.

$$\begin{pmatrix} 2 & -7 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \times X = \begin{pmatrix} -18 \\ 19 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

№66.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \times X = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

№67.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язати системи лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою:

а) правила Крамера;

б) матричним методом;

в) методом Гаусса.

№68.

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 13 \\ 2x_1 + 7x_2 = 81. \end{cases}$$

№69.

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 7; \\ 2x_1 + 5x_2 - 7x_3 = -5; \\ 5x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 13. \end{cases}$$

№70.

$$\begin{cases} -7x_1 + 2x_3 = -7; \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 14; \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 10. \end{cases}$$

№71.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 = 0; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -2; \\ 5x_1 - 4x_2 - x_3 = -4; \\ 7x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 3x_5 = -5. \end{cases}$$

№72.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 14; \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 16; \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 6; \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$$

Знайти ранг матриці.

№73.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}.$$

№74.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

№75.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

№76.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Дослідити на сумісність системи рівнянь та знайти їх розв'язки, якщо система сумісна.

№77.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1; \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 3; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 5. \end{cases}$$

№78.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2; \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 - x_4 = 3; \\ x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 = -1. \end{cases}$$

№79.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 - 4x_4 + 8x_5 = 4; \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 + 8x_4 - 7x_5 = 9; \\ 5x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 3x_4 - x_5 = 11. \end{cases}$$

Розв’язати однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

№80.

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 0; \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

№81.

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 - x_5 = 0; \\ 7x_1 - x_2 + 2x_3 + 7x_4 - 2x_5 = 0; \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 0; \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

№82.

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 0; \\ 2x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 0; \\ 5x_1 + 28x_2 + 7x_3 = 0. \end{cases}$$

№83.

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 0; \\ 2x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 0; \\ 5x_1 + 28x_2 + 7x_3 = 0; \\ 3x_1 + 12x_2 + 4x_3 = 0; \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$$

Знайти фундаментальні системи розв’язків для однорідних систем рівнянь.

№84.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

№85.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

№86.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0; \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

№87.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0; \\ 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0; \\ 3x_1 - 4x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

№88. Знайти таке значення λ, щоб система рівнянь мала розв'язок.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2; \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = \lambda. \end{cases}$$

Знайти загальні розв'язки неоднорідної системи рівнянь, користуючись відповідною однорідною системою рівнянь.

№89.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1; \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0; \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2; \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3. \end{cases}$$

№90.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 = 1; \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 + x_6 = 1. \end{cases}$$