Міністерство транспорту та зв'язку України
Державний департамент з питань зв'язку та інформатизації
Одеська національна академія зв'язку ім. О.С. Попова

Кафедра вищої математики
Кафедра теорії електричних кіл

КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

Методичний посібник
для студентів технічних факультетів усіх форм навчання

Одеса 2004

Укладачі: ***Паскаленко В.М., Стрелковська І.В., Шкуліпа А.В.***

Рецензент – ***Соколов Л.І.***

Редактор – ***Буслаєв А.Г.***

ВСТУП

Комплексні числа широко використовуються при розрахунках електричних кіл, коли впливом є гармонічні коливання. Кола при цьому можуть бути як зосередженими, так і з розподіленими параметрами.

При підготовці фахівців на всіх технічних факультетах, починаючи з першого курсу, у дисциплінах «Теорія електричних кіл та сигналів», «Теорія електрозв'язку», «Направляючі системи й електродинаміка» і ін. користуються символічним методом розрахунку кіл (метод комплексних амплітуд). Метод полягає в тім, що будь-яке гармонічне коливання подається у вигляді спрямованого вектора, який характеризується величиною (модулем) та кутом. У декартовій системі координат вектор можна розкласти на дійсну і уявну складові, для чого у відповідність кожному вектору ставиться певне комплексне число. За допомогою символічного методу істотно полегшуються всі електротехнічні розрахунки. У пропонованому методичному посібнику докладно розглядаються комплексні числа та відповідні їм вектори, подання комплексних чисел у різних формах та дії над ними.

Посібник призначений для студентів технічних факультетів усіх форм навчання.

1. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

1.1. Уявні числа

Означення. Число, квадрат якого дорівнює –1, ($i^2 = -1$) називається ***уявною одиницею*** і позначається i

$$i=\sqrt{-1},\ i^2=-1.$$

Означення. Числа, які мають вигляд bi, де b – дійсне число, називаються ***уявними числами.***

Наприклад: $2i$; $\frac{1}{5}i$; $-6i$.

Відомо, що дійсні числа зображуються точками на осі ОХ. Уявні числа зображуються точками на осі ОУ, у зв'язку з чим вісь ОХ називається дійсною віссю, а вісь ОУ уявною віссю. Множина уявних чисел знаходиться у взаємно однозначній відповідності з множиною дійсних чисел.

Означення. Два уявних числа b_1і та b_2і називаються **рівними**, якщо $b_1 = b_2$.

Означення. Уявне число ($-bi$) називається **протилежним** уявному числу bi.

Наприклад: $5i$ та $-5i$; $\frac{1}{2}i$ та $-\frac{1}{2}i$.

Теорема. Будь-який натуральний степінь числа i може бути перетворений до одного з чотирьох видів 1; i; -1; $-i$.

Доведення.

Розглянемо вираз i^m, де m – натуральне число. Зрозуміло, що можливі чотири випадки:

1) $m = 4k$, $k = 1, 2, \ldots$
2) $m = 4k + 1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$
3) $m = 4k + 2$, $k = 0, 1, 2, \ldots$
4) $m = 4k + 3$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Нехай $m = 4k$, тоді $i^m = i^{4к} = (i^4)^к = 1^к = 1$.
Нехай $m = 4k + 1$, тоді $i^m = i^{4k+1} = i^{4k}i = 1 \cdot i = i$.
Нехай $m = 4k + 2$, тоді $i^m = i^{4k+2} = i^{4k}i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$.
Нехай $m = 4k + 3$, тоді $i^m = i^{4k+3} = i^{4k}i^3 = 1 \cdot i^2 i = -i$.

Приклад. Обчислити значення виразу $A = 4i^{17} + 8i$.

Розв'язання
$A = 4i^{17} + 8i = 4i^{16+1} + 8i = 4i^{16}\cdot i + 8i = 4(i^4)^4 i + 8i = 4i + 8i = 4i + 8i = 12i$.

Зауваження: Для того, щоб обчислити степінь уявної одиниці зручно користуватись таким правилом:

1) поділити показник степеню на 4;
2) замінити i^m на i^p, де p – остача, що отримана при діленні m на 4, тобто число p знаходиться із рівності $m = 4k + p$.

1.2. Комплексні числа

Означення. ***Комплексним числом*** називається число, яке має вигляд $a+bi$, де a, b – дійсні числа, i – уявна одиниця. При цьому число "*a*" називається ***дійсною частиною*** комплексного числа, "*b*" – ***уявною частиною*** комплексного числа.

Символічно дійсну та уявну частини комплексного числа позначають так:

$a = \mathrm{Re}\, z$ (ре зет),

$b = \mathrm{Im}\, z$ (ім зет).

У основі цих позначень використані перші букви латинських слів "Realis", що означає "дійсний" та "Imaginaris", що означає "уявний".

Зауваження. Іноді уявною частиною комплексного числа $z = a + bi$ називають bi.

Означення. Два комплексних числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ та $z_2 = a_2 + b_2 i$ називаються ***рівними***, якщо $\mathrm{Re}\, z_1 = \mathrm{Re}\, z_2$, $\mathrm{Im}\, z_1 = \mathrm{Im}\, z_2$.

Для комплексних чисел не існує понять більше та менше, тобто, комплексні числа не порівняні.

Означення. Комплексне число $(-a - bi)$ називається **протилежним** комплексному числу $a + bi$.

Означення. Два комплексних числа, у яких дійсні частини рівні, а уявні частини протилежні, називаються ***комплексно спряженими*** числами і позначаються відповідно $z = a + bi$ та $\bar{z} = a - bi$.

Означення. ***Модулем*** комплексного числа $z = a + bi$ називається невід'ємне число r, яке визначається формулою

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{1.1}$$

При цьому використовується позначення $r = |z|$. Модуль будь–якого комплексного числа визначається однозначно. Спряжені числа мають рівні модулі, тобто $|z| = |\bar{z}|$.

Дійсно, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$; $|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-в^2)} = \sqrt{a^2 + в^2} = |\bar{z}|$.

1.3. Геометричне зображення комплексних чисел

Оберемо на площині декартову прямокутну систему координат *ХОУ*. Нехай M_1 – будь-яка точка на площині. Її положення на *ХОУ* визначається двома дійсними числами – координатами (a; b). Поставимо точці M_1 у відповідність комплексне число $z = a + bi$. Це комплексне число називається комплексною координатою точки M_1 (іноді комплексну координату точки називають “афікс”). Таким чином, будь-якому комплексному числу відповідає точка на площині.

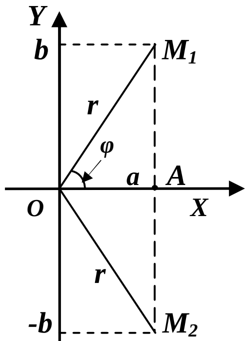

Рисунок 1.1

Множина усіх комплексних чисел знаходиться у взаємно однозначній відповідності з множиною усіх точок комплексної площини. Спряжені числа зображуються на площині точками, симетричними відносно осі *ОХ*.

З’єднаємо точку О (0; 0) з точкою $M_1(a; b)$ і побудуємо вектор $\overline{OM_1}$. Вочевидь, що $|\overline{OM_1}| = \sqrt{a^2 + b^2} = r = |z|$. Таким чином, модуль комплексного числа z дорівнює його відстані від нульової точки О (0; 0) комплексної площини.

Означення. ***Аргументом*** комплексного числа $z = a + bi$ називається кут φ нахилу вектора $\overline{OM_1}$ до осі *ОХ* і при цьому використовується позначення $\varphi = \arg z$.

Вочевидь, у кожного комплексного числа існує нескінченна множина аргументів, які відрізняються між собою на число, кратне 2π.

Означення. **Головним значенням аргументу** комплексного числа називається той з його аргументів, який знаходиться між $(-\pi)$ та π і при цьому використовується позначення

$$\varphi = \arg z. \qquad (1.2)$$

Виходить,

$$-\pi < \varphi \le \pi. \qquad (*)$$

Примітка. Нарівні з припущенням (∗) існує і таке припущення:

$$0 < \arg z < 2\pi. \qquad (**)$$

Головне значення аргументу будь-якого комплексного числа визначено однозначно. Виняток становить лише число $0+0i$, аргумент якого не визначений. Аргументи комплексно спряжених чисел протилежні по знаку.

$$\arg z = -\arg \bar{z}. \qquad (1.3)$$

Дійсно, спряжені числа симетричні відносно осі OX, тому їх аргументи протилежні по знаку.

Означення. Два комплексних числа ***рівні*** між собою, якщо рівні між собою їх модулі, а аргументи рівні між собою з точністю до числа, кратного 2π.

Для обчислення аргументів зручно користуватися такими формулами:

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}, & \text{якщо } z \in \text{ I чверті} \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}, & \text{якщо } z \in \text{ II чверті} \\ -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}, & \text{якщо } z \in \text{ III чверті} \\ -\operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}, & \text{якщо } z \in \text{ IV чверті} \\ \pi, & \text{якщо } a < 0;\ b = 0 \\ 0, & \text{якщо } a > 0;\ b = 0 \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{якщо } a = 0;\ b > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{якщо } a = 0;\ b < 0 \end{cases} \qquad (1.4)$$

Аргумент комплексного числа можна також шукати, виходячи з таких міркувань. З $\Delta\ OAM_1$ (рис. 1.1) виходить, що $\cos\varphi = \dfrac{a}{r}$; $\sin\varphi = \dfrac{b}{r}$. Аналізуючи знаки $\cos\varphi$ та $\sin\varphi$, визначаємо таке значення φ, що належить відповідній чверті.

1.4. Алгебраїчна форма комплексного числа. Дії над комплексними числами, які задані у алгебраїчній формі

Комплексне число, подане у вигляді $z = a + bi$ називається ***комплексним числом у алгебраїчній формі.***

1.4.1. Додавання комплексних чисел

Означення. ***Сумою*** двох комплексних чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ та $z_2 = a_2 + b_2 i$ називається комплексне число $z = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$.

Виходить,

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i. \quad (1.5)$$

Таким чином, щоб додати два комплексних числа потрібно додати їх дійсні частини і це дає дійсну частину суми та додати уявні частини, що дає уявну частину суми. Сума спряжених чисел завжди є дійсне число.

$$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a,$$

тобто,

$$z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}\, z. \quad (1.6)$$

1.4.2. Віднімання комплексних чисел

Означення. Різницею двох комплексних чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ та $z_2 = a_2 + b_2 i$ називається таке комплексне число $z = x + iy$, яке у сумі з числом z_2 дає число z_1.

Віднімання комплексних чисел завжди можливе.

Теорема. Для будь–яких комплексних чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ та $z_2 = a_2 + b_2 i$ завжди існує різниця $z = z_1 - z_2$, яка визначена однозначно.

Доведення.

Доведемо, що існує таке число $z = x + iy$, що $z_1 = z + z_2$, тобто, що справедливі рівності:

$$\begin{cases} a_1 = x + a_2; \\ b_1 = y + b_2. \end{cases}$$

Отримана система має розв’язок, і до того ж лише один, а саме:

$$x = a_1 - a_2,\; y = b_1 - b_2,$$

що і слід було довести.

Таким чином, для того, щоб відняти комплексні числа достатньо відняти їх дійсні частини і їх різницю взяти за дійсну частину різниці, а також відняти уявні частини і взяти їх різницю за уявну частину різниці

$$z_3 = z_1 - z_2 = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i.$$

Виходить,

$$(a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\, i. \quad (1.7)$$

Різниця двох спряжених чисел завжди є уявне число.

$$z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi) = 2bi,$$

тобто,

$$z - \bar{z} = 2\mathrm{Im}\, z. \quad (1.8)$$

1.4.3. Множення комплексних чисел

Означення. Добутком двох комплексних чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ та $z_2 = a_2 + b_2 i$ називається таке комплексне число, яке визначається формулою:

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i. \qquad (1.9)$$

Щоб помножити комплексні числа слід помножити їх по правилу множення многочленів, замінивши при цьому i^2 на –1 і звести подібні члени.

$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i.$

В процесі множення комплексних чисел краще виконувати безпосереднє множення. Добуток спряжених чисел завжди є дійсне число

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = (a^2 - b^2 \cdot i^2) = a^2 + b^2.$$

$$z \cdot \bar{z} = r^2. \qquad (1.10)$$

Приклад. Знайти значення виразу $A = (6 - 3i)(9 + i) - (5 - i)(5 + i)$.

Розв'язання.

$$A = (54 - 27i + 6i - 3i^2) - (25 - i^2) = 31 - 21i.$$

1.4.4. Ділення комплексних чисел

Означення. Часткою від ділення комплексного числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ на комплексне число $z_2 = a_2 + b_2 i$ називається таке комплексне число z, яке у добутку із z_2 дає z_1.

Доведемо, що завжди існує частка від ділення двох комплексних чисел, якщо знаменник відрізняється від нуля.

Теорема. Частка $\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i}$ визначена і до того ж однозначно для усіх комплексних чисел $a_1 + b_1 i$ та $a_2 + b_2 i$, якщо тільки $a_2 + b_2 i \neq 0$, тобто $a_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$.

Доведення.

Нехай $z_3 = x + iy$. Доведемо, що існують такі числа x та y, що задовольняють рівнянню: $(x + iy)(a_2 + b_2 i) = a_1 + b_1 i$.

Виконавши множення, отримаємо:

$$(xa_2 - yb_2) + (xb_2 + ya_2) = a_1 + b_1 i.$$

Виходячи з рівності комплексних чисел, отримаємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} xa_2 - yb_2 = a_1; \\ xb_2 + ya_2 = b_1. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему за допомогою правила Крамера.

Знаходимо

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}= a_2^2 + b_2^2;\ \Delta_1=\begin{vmatrix} a_1 & -b_2 \\ b_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 + b_1b_2;\ \Delta_2=\begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ b_2 & b_1 \end{vmatrix}=a_2b_1 - a_1b_2.$$

Враховуючи, що $x=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}, y=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}$ маємо

$$x=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2};\quad y=\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}.$$

Отже, система має розв'язок і до того ж єдиний. Тоді,

$$\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i. \qquad (1.11)$$

Приклад. Обчислити значення виразу $A=\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$.

Розв'язання.

$$A=\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\cdot\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-i}=\frac{3-2i\sqrt{3}+i^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2-i^2}=\frac{3-2\sqrt{3}i-1}{3+1}=\frac{2-2\sqrt{3}i}{4}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Над комплексними числами у алгебраїчній формі можливо виконувати і такі дії як піднесення до степеня, добування кореня. Але виконання цих дій в алгебраїчній формі досить трудомістке.

1.5. Тригонометрична форма комплексного числа. Дії над комплексними числами, поданими у тригонометричній формі

1.5.1. Тригонометрична форма комплексного числа

Розглянемо комплексне число $z=a+bi$ та звернемося до рис. 1.1. З прямокутного трикутника ΔOAM_1 виходить, що $a=OA;\ b=AM_1$ або

$$a=r\cos\varphi;\ b=r\sin\varphi. \qquad (1.12)$$

У зв'язку з цим комплексне число $z=a+bi$ можна подати у вигляді:

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi). \qquad (1.13)$$

Комплексне число, подане у вигляді (1.13), називається комплексним числом у **тригонометричній формі.**

Над комплексними числами у тригонометричній формі зручно виконувати такі алгебраїчні дії як множення, ділення, піднесення до степеня, добування кореня.

1.5.2. Множення комплексних чисел

Теорема. Модуль добутку двох комплексних чисел дорівнює добутку їх модулів, а аргумент добутку дорівнює сумі аргументів множників.

Доведення.

Нехай

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Тоді,

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1 r_2((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) +$$
$$+ i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\cos\varphi_1)) = r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$$

Таким чином, доведено формулу:

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ = r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)). \qquad (1.14)$$

1.5.3. Піднесення до степеня комплексних чисел. Перша формула Муавра

Нехай $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тоді,

$$z^n = \underbrace{z\cdot z \ldots z}_{n \text{ раз}} = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Отже, отримано формулу:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \qquad (1.15)$$

яка називається ***першою формулою Муавра.***

1.5.4. Ділення комплексних чисел

Теорема. Модуль частки двох комплексних чисел дорівнює частці модулів діленого та дільника; аргумент частки двох комплексних чисел, що відрізняються від нуля, дорівнює різниці аргументів діленого та дільника.

Доведення.

Нехай $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

Позначимо через $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ частку $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Тоді, з рівності $z = \dfrac{z_1}{z_2}$ виходить, що $z_1 = z\cdot z_2$, або

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = r r_2(\cos(\varphi+\varphi_2) + i\sin(\varphi+\varphi_2)).$$

З рівності комплексних чисел випливає, що

$$\begin{cases} r_1 = r r_2, \\ \varphi_1 = \varphi + \varphi_2, \end{cases}$$

тому (з точністю до $2\pi n$, $n \in Z$)

$$r = \frac{r_1}{r_2}; \quad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Таким чином, доведено формулу

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \qquad (1.16)$$

Приклад. Записати у тригонометричній формі комплексні числа $z_1 = 5 - 5i$ та $z_2 = \sqrt{3} + i$. Обчислити значення виразу $z = z_1^2 : z_2^3$.

Розв’язання.

$$|z_1| = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}; \quad \arg z_1 = \operatorname{arctg}(-1) = -\operatorname{arctg} 1 = -\frac{\pi}{4};$$

$$|z_2| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2; \qquad \arg z_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6};$$

$$z_1 = 5\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})); \qquad z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6});$$

$$z_1^2 = (5\sqrt{2})^2(\cos 2(-\frac{\pi}{4}) + i\sin 2(-\frac{\pi}{4})) = 50(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2}));$$

$$z_2^3 = 2^3(\cos 3\cdot\frac{\pi}{6} + i\sin 3\cdot\frac{\pi}{6}) = 8(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2});$$

$$z = \frac{z_1^2}{z_2^3} = \frac{50(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2}))}{8(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})} = \frac{25}{4}\cos(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2})) =$$

$$= \frac{25}{4}(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)) = \frac{25}{4}(-1 + i0) = -\frac{25}{4}.$$

1.5.5.Добування кореня з комплексного числа

Теорема. Будь-яке комплексне число, що відрізняється від 0, має рівно n значень кореня n-го степеня, які визначаються за формулою:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}),$$

де $k = 0,1,2,\ldots,(n-1)$.

Доведення.

Нехай

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0.$$

Припустимо, що існує корінь *n*-го степеня із числа *z* і позначимо його

$$\omega = \rho(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Виходить, що

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \rho(\cos\theta + i\sin\theta).$$

За першою формулою Муавра подамо цю рівність у вигляді:

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta).$$

З рівності отриманих комплексних чисел виходить:

1. рівність модулів: $r = \rho^n$, звідки

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \qquad (1.17)$$

2. рівність аргументів з точністю до числа, кратного 2π : $\varphi + 2\pi k = \theta$, звідки

$$\theta = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \text{ де } k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (1.17')$$

Зокрема, якщо $k = 0$, то $\theta = \frac{\varphi}{n}$; якщо $k = 1$, то $\theta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}$;

якщо $k = 2$, то $\theta = \frac{\varphi}{n} + \frac{4\pi}{n}$;

. . .

якщо $k = n - 1$, то $\theta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}$.

Якщо ж $k = n$, $k = n + 1$, $k = n + 2$, …, а також якщо $k = -1$, $k = -2$, $k = -3$, ..., то будемо отримувати значення θ, які відрізняються від вже знайдених на кути, кратні 2π. Тобто, ніяких нових значень ω, окрім вже отриманих *n* значень, не буде. Отже,

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \qquad (1.18)$$

де $k = 0, 1, 2, \ldots, (n - 1)$.

Отримана формула називається **другою формулою Муавра.**

Відповідно формулі (1.18) корінь степеню *n* з комплексного числа має рівно *n* значень. Кожне з значень має один і той же модуль *r*, а це означає що усі комплексні числа, що дорівнюють значенням $\sqrt[n]{z}$, розміщуються на колі радіуса *r* з центром у точці *O*(0,0). Аргументи цих комплексних чисел при $k = 0; 1; 2; \ldots; n - 1$ відрізняються на величину $\frac{2\pi}{n}\kappa$, а будь-які два сусідніх значення відрізняються на $\frac{2\pi}{n}$. Звідси виходить, що коли значення $\sqrt[n]{z}$ розмістити на колі радіуса r, відстань між сусідніми афіксами буде однаковою. А коли побудувати замкнуту ламану з вершинами у цих точках, то отримаємо правильний многокутник.

Приклад.

1). Побудувати многокутник, вершинами якого є значення кореня: $\sqrt[6]{-64}$.

2). Обчислити площу цього многокутника.

3). Знайти суму усіх значень кореня.

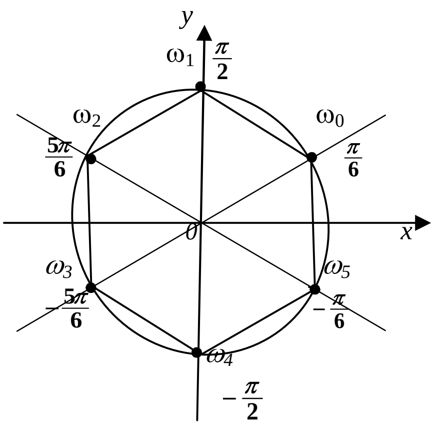

Рисунок 2

Розв'язання.

1). $-64=-64+0i;\ r=\sqrt{(-64)^2+0^2}=64.$

$\varphi=\pi;$ Отже, $-64=64(\cos\pi+i\sin\pi)$.

$\sqrt[6]{-64}=\sqrt[6]{64(\cos\pi+\sin\pi)}=$

$=\sqrt[6]{64}\cdot\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{6}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{6}\right);\ k=0,\,1,\,2,\,3,\,4,\,5.$

Тоді,

$k=0\Rightarrow\omega_0=2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6});$ $\qquad k=3\Rightarrow\omega_3=2(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6});$

$k=1\Rightarrow\omega_1=2(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2});$ $\qquad k=4\Rightarrow\omega_4=2(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2});$

$k=2\Rightarrow\omega_2=2(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6});$ $\qquad k=5\Rightarrow\omega_5=2(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}).$

Три останні значення слід привести до стандартної форми, оскільки їх аргументи виходять за межі проміжку (-π; π]. Для цього користуючись періодичністю функцій, зробимо наступні перетворення.

$$\omega_3=2(\cos(\frac{7\pi}{6})+i\sin(\frac{7\pi}{6}))=2(\cos(\frac{7\pi}{6}-2\pi)+i\sin(\frac{7\pi}{6}-2\pi))=$$

$$=2(\cos(-\frac{5\pi}{6})+i\sin(-\frac{5\pi}{6}));$$

$$\omega_4=2(\cos(\frac{3\pi}{2})+i\sin(\frac{3\pi}{2}))=2(\cos(\frac{3\pi}{2}-2\pi)+i\sin(\frac{3\pi}{2}-2\pi))=$$

$$=2(\cos(-\frac{\pi}{2})+i\sin(-\frac{\pi}{2}));$$

$$\omega_5=2(\cos(\frac{11\pi}{6})+i\sin(\frac{11\pi}{6}))=2(\cos(\frac{11\pi}{6}-2\pi)+i\sin(\frac{11\pi}{6}-2\pi))=$$

$$=2(\cos(-\frac{\pi}{6})+i\sin(-\frac{\pi}{6})).$$

Відклавши на колі радіуса $r=2$ знайдені значення кореня, побудуємо шестикутник.

2). Це правильний шестикутник. Його площа знаходиться за формулою

$$S=\frac{n}{2}\cdot a\cdot r.$$

У нашому випадку $n = 6$; $r = 2$; $a = 2$. Виходить $S = \frac{6}{2}\cdot 2\cdot 2 = 12$ (од. кв.).

3). Знаходимо суму усіх значень кореня.

$$A = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} + \cos(-\frac{5\pi}{6}) + i\sin(-\frac{5\pi}{6}) +$$

$$+ \cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2}) + \cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6})) =$$

$$= 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} + 0 + i - \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} + 0 - i + \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}) = 0.$$

Слід мати на увазі, що сума усіх значень кореня з комплексного числа завжди дорівнює нулеві.

Приклад. Знайти усі значення $\sqrt[4]{i}$.

Розв'язання.

Подамо число i у тригонометричній формі, користуючись формулами (1.1) та (1.4):

$$i = 0 + 1\cdot i;\ \ a = 0;\ \ b = 1;\ \ r = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1;$$

$$\varphi = \arg z = \frac{\pi}{2};\ \ i = 1(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}).$$

Запишемо число $\omega = \sqrt{1(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})}$ у вигляді

$$\omega = \sqrt[4]{1(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})} = \rho(\cos\theta + i\sin\theta),$$

тоді, $\rho = \sqrt[4]{1} = 1;\ \ \theta = \dfrac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{4};\ k = 0,1,2,3.$

Якщо $k = 0$, то $\theta_0 = \frac{\pi}{8};\ \ \omega_0 = 1(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8});$

Якщо $k = 1$, то $\theta_1 = \dfrac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{4} = \frac{5\pi}{8}; \omega_1 = 1(\cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8});$

Якщо $k = 2$, то $\theta_2 = \dfrac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{4} = \frac{9\pi}{8};\ \ \omega_2 = 1(\cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8});$

Якщо $k = 3$, то $\theta_3 = \dfrac{\frac{\pi}{2} + 6\pi}{4} = \frac{13\pi}{8};\ \ \omega_3 = 1(\cos\frac{13\pi}{8} + i\sin\frac{13\pi}{8}).$

Отримані значення ω_2 та ω_3 записані у нестандартній формі у зв'язку з тим, що їх аргументи виходять за межі проміжку. Користуючись періодичністю функцій sin*x* та cos*x*, виконуємо необхідні перетворення:

$$\omega_2 = \cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8} = \cos\left(\frac{9\pi}{8} - 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{8} - 2\pi\right) =$$
$$= \cos\left(-\frac{7\pi}{8}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{8}\right) \approx -0{,}92 - 0{,}38\,i.$$

Аналогічно,

$$\omega_3 = \cos\frac{13\pi}{8} + i\sin\frac{13\pi}{8} = \cos\left(\frac{13\pi}{8} - 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{13\pi}{8} - 2\pi\right) =$$
$$= \cos\left(-\frac{3\pi}{8}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{8}\right) \approx 0{,}38 - 0{,}92\,i.$$

1.6. Показникова форма комплексного числа. Дії над комплексними числами, які задані у показниковій формі

Дуже часто у математиці та її прикладаннях застосовується вираз $\cos\varphi + i\sin\varphi$. Для цього виразу використовуються скорочені позначення: $e^{i\varphi}$ або $\exp(i\varphi)$.

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \qquad (1.19)$$

Нехай

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Тоді комплексне число z можна записати у такій формі

$$z = re^{i\varphi}. \qquad (1.20)$$

Число, подане у вигляді (1.20), називається ***показниковою формою комплексного числа.***

Розглянемо, як виконуються деякі алгебраїчні дії над комплексними числами у показниковій формі. Нехай

$$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}; \; z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}.$$

Тоді,

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}. \qquad (1.21)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}. \qquad (1.22)$$

Якщо $z = re^{i\varphi}$, то $z^n = (re^{i\varphi})^n$. Отже,

$$(re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}. \qquad (1.23)$$

Останній результат називається ***першою формулою Муавра*** у показниковій формі.

Слушність формул (1.21) – (1.23) виходить із вже відомих правил роботи з комплексними числами, поданими у тригонометричній формі.

Рівність

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \qquad (1.24)$$

називається ***формулою Ейлера.***

Існують і інші формули, які також називаються формулами Ейлера.

Замінимо φ на (–φ) у рівності (1.24). Отримаємо ще одну формулу Ейлера:

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi. \qquad (1.25)$$

Почленно додамо рівності (1.24) та (1.25):

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}. \qquad (1.26)$$

Почленно віднімемо від рівності (1.24) рівність (1.25):

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}. \qquad (1.27)$$

Отже, отримано ще дві формули Ейлера.

Введення уявних, комплексних чисел дало змогу зробити дуже важливі відкриття у області математики, радіотехніки, електроніки і т.д. Відомий німецький математик Готфрід Лейбніц про ці числа говорив: “Хоч їх називають уявними, але від цього вони не перестають бути корисними і навіть необхідними для аналітичного виразу реальних величин”.

2. МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ПО ТЕМІ ТА ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

2.1. Алгебраїчна форма комплексного числа та його геометрична інтерпретація

Приклад 1. Зобразити точками на комплексній площині числа:
1) $z=-3i$; 2) $z=-3$; 3) $z=5+2i$; 4) $z=5-2i$; 5) $z=-5+2i$; 6) $z=-5-2i$.

Розв'язання.

На комплексній площині побудуємо прямокутну систему координат.

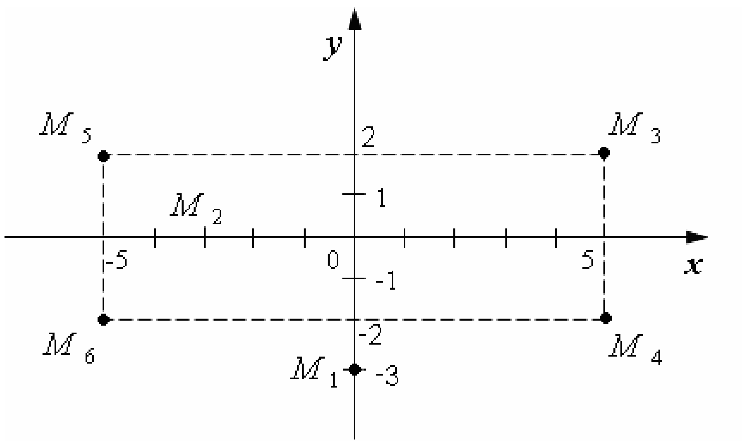

Рисунок 2.1

Дані комплексні числа $z=a+bi$ зобразимо за допомогою точок $M(a;\ b)$ на комплексній площині. При цьому слід врахувати, що у випадку 1 числу $z=-3i$ відповідає точка $M_1(0;\ -3)$, а у випадку 2 числу $z=-3$ відповідає точка $M_2(-3;0)$. У випадках 3 – 6 відповідно маємо точки M_3 (5; 2), M_4(5; -2), M_5(-5; 2), M_6 (-5; -2).

Приклад 2. Записати афікси наданих чисел та побудувати відповідні їм радіуси-вектори: $z_1=2+3i;\ z_2=-2+3i;\ z_3=-2-3i;\ z_4=2-3i;\ z_5=3i;\ z_6=2.$

Розв'язання.

Оскільки афіксом комплексного числа $z=a+bi$ називається точка на комплексній площини координат, то афіксом даних (a, b) комплексних чисел відповідно є точки M_1(2; 3), M_2(-2; 3), M_3(-2; -3), M_4(2; -3), M_5(0; 3), M_6(2; 0). Побудуємо ці точки на комплексній площині і побудуємо їх радіуси-вектори.

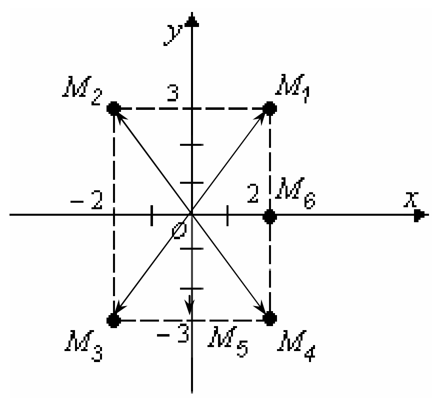

Рисунок 2.2

Приклад 3. Перетворити вирази, скориставшись поняттям уявної одиниці:

$$1)\ \sqrt{-16};\quad 2)\ \sqrt{-25};\ 3)\ 5-\sqrt{-64};\quad 4)\ \sqrt{7}+\sqrt{-7}.$$

Розв'язання.

1) $\sqrt{-16}=\sqrt{-1\cdot 16}=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{16}=\pm 4i;$

2) $\sqrt{-25}=\sqrt{-1\cdot 25}=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{25}=\pm 5i;$

3) $5-\sqrt{-64}=5-\sqrt{-1\cdot 64}=5-(\pm 8i)=5\mp 8i;$

4) $\sqrt{7}+\sqrt{-7}=\sqrt{7}+\sqrt{-1\cdot 7}=\sqrt{7}\pm\sqrt{7}i.$

Приклад 4. Для поданих чисел $z_1=3;\ z_2=-3i;\ z_3=4-5i;\ z_4=-5+6i$ знайти: 1) спряжені; 2) протилежні; 3) обернені числа.

Розв'язання.

Запишемо розв'язок у вигляді таблиці:

z	спряжене z	протилежне z	обернене z
$z_1 = 3$	3	-3	$\frac{1}{3}$
$z_2 = -3i$	$3i$	$3i$	$\frac{1}{-3i}$
$z_3 = 4 - 5i$	$4 + 5i$	$-4 + 5i$	$\frac{1}{4-5i}$
$z_4 = -5 + 6i$	$-5 - 6i$	$5 - 6i$	$\frac{1}{-5+6i}$

Приклад 5. Виконати зазначені дії: 1) $(4 - 7i) + (9 + 8i)$; 2) $(5 + 3i) - (7 - 3i)$; 3) $(6 + 4i)(7 + 8i)$; 4) $\frac{3-2i}{1-5i}$.

Розв'язання.

Дані комплексні числа записані у алгебраїчній формі. Виконаємо додавання, віднімання, множення та ділення комплексних чисел за відомими правилами.

1) $(4-7i)+(9+8i)=(4+9)+(-7i+8i)=13+i;$

2) $(5+2i)-(7-3i)=5+2i-7+3i=(5-7)+(2i+3i)=-2+5i;$

3) $(6+4i)\cdot(7+8i)=42+28i+48i+32i^2=42-32+76i=10+76i;$

4) $\frac{3-2i}{1-5i}.$

Ділення комплексних чисел у алгебраїчній формі зручно виконувати, помноживши чисельник та знаменник на вираз, спряжений знаменнику.

$$\frac{3-2i}{1-5i}=\frac{3-2i}{1-5i}\cdot\frac{1+5i}{1+5i}=\frac{3-2i+15i-10i^2}{1-25i^2}=\frac{(3+10)+(-2i+15i)}{1+25}=\frac{13+13i}{26}=$$
$$=\frac{1+i}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i.$$

Приклад 6. Розкласти на комплексні множники подані вирази:

1) $64x^2+625y^2$; 2) $m+n$; 3) 137; 4) 11.

Розв'язання.

1) $64x^2+625y^2=64x^2-(-625y^2)=64x^2-625y^2\cdot i^2=(8x)^2-(25yi)^2=$
$=(8x-25yi)(8x+25yi)$.

2) $m+n=m-(-n)=m-(i^2n)=(\sqrt{m})^2-(i\sqrt{n})^2=(\sqrt{m}-i\sqrt{n})(\sqrt{m}+i\sqrt{n})$.

3) $137=121+16=121-(-16)=121-(16i^2)=(11)^2-(4i)^2=(11-4i)(11+4i)$.

4) $11=5+6=5-(-6)=5-(6i^2)=(\sqrt{5})^2-(\sqrt{6}i)^2=(\sqrt{5}-\sqrt{6}i)(\sqrt{5}+\sqrt{6}i)$.

Приклад 7. Обчислити значення виразу $A=5i^7-4i^{11}+9i^{17}$.

Розв'язання.

$$A=5\cdot i^{4+3}-4\cdot i^{2\cdot 4+3}+9\cdot i^{4\cdot 4+1}=5\cdot i^3-4\cdot i^3+9\cdot i=5\cdot(-i)-4\cdot(-i)+9\cdot i=-5i+9i=8i.$$

Приклад 8. Розв'язати рівняння $(1+i)x+(-2+5i)y=-4+17i$.

Розв'язання.

Розкриємо дужки зліва.

$$x+xi-2y+5yi=-4+17i.$$

Отримане комплексне число запишемо у стандартному вигляді.

$$(x-2y)+(x+5y)i=-4+17i.$$

Останнє рівняння розглянемо як рівність двох комплексних чисел. Тоді має місце система рівнянь:

$$\begin{cases} x-2y=-4; \\ x+5y=17. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему за правилом Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=7; \quad \Delta_1=\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 17 & 5 \end{vmatrix}=14; \quad \Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 17 \end{vmatrix}=21.$$

$$x=\frac{14}{7}=2; \quad y=\frac{21}{7}=3.$$

Приклад 9. Знайти дійсні числа *x* та *y* з рівняння

$$9+2ix+4iy=10i+5x-6y.$$

Розв'язання.

Дане рівняння можна розглядати як рівність двох комплексних чисел

$$9+(2x+4y)i=(5x-6y)+10i.$$

Виходячи із означення рівності комплексних чисел, отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 5x-6y=9, \\ 2x+4y=10, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 5x-6y=9, \\ x+2y=5. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему.

$$\begin{cases} x=5-2y, \\ 5(5-2y)-6y=9, \end{cases} \quad \begin{cases} x=5-2y, \\ 16y=16, \end{cases} \quad \begin{cases} y=1, \\ x=3. \end{cases}$$

Отже,
$x=3, \quad y=1.$

Приклад 10. Розв'язати квадратне рівняння $z^2-10z+34=0.$

Розв'язання.

Розв'яжемо це рівняння, скориставшись формулою для знаходження коренів квадратного рівняння $az^2+bz+c=0$.

$$z_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Підставимо значення *a, b, c* та отримаємо:

$$z_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{100-4\cdot1\cdot34}}{2\cdot1},\quad z_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{-36}}{2},\quad z_{1,2}=\frac{10\pm6i}{2},\quad z_1=5-3i,\quad z_2=5+3i.$$

Зауваження. Слід звернути увагу на те, що на множині комплексних чисел квадратне рівняння з дійсними коефіцієнтами завжди має два корені: якщо $D=b^2-4ac>0$, то коренями є два дійсних різних числа; якщо $D=b^2-4ac=0$, то коренями є дійсні рівні числа; якщо $D=b^2-4ac<0$, то коренями є два комплексно спряжених числа.

Приклад 11. Розв'язати рівняння

$$x^2+1=0. \qquad (*)$$

а) на множині дійсних чисел; б) на множині комплексних чисел.

Розв'язання.

а) Розв'язуючи рівняння $x^2+1=0$ на множині дійсних чисел, маємо: $x^2=-1, x=\pm i$. На множині дійсних чисел не існує $\pm i$ тому рівняння (∗) розв'язків не має.

б) Розв'язуючи рівняння на множині комплексних чисел, маємо:

$x^2=-1$, $x=\pm i$. Таким чином, $x_1=-i$; $x_2=i$.

3. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ’ЯЗУВАННЯ

3.1. Зобразити точками на комплексній площині такі комплексні числа:

1) $z=1+i$; 2) $z=1-i$; 3) $z=-2+3i$; 4) $z=-3-2i$; 5) $z=0+5i$; 6) $z=5+0i$; 7) $z=7$; 8) $z=-3i$.

3.2. Записати в алгебраїчній формі комплексні числа, що відповідають точкам на комплексній площині (рис. 3.1).

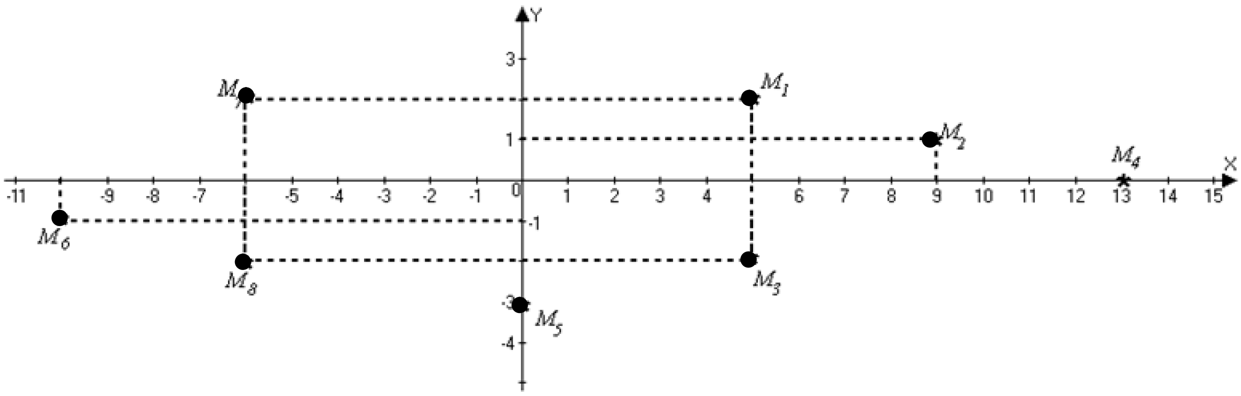

Рисунок 3.1

3.3. Записати афікси поданих комплексних чисел та побудувати відповідні їм радіуси - вектори:

1) $z=2-3i$; 2) $z=-2+3i$; 3) $z=-2-3i$; 4) $z=\sqrt{2}+i\sqrt{3}$; 5) $z=2i$; 6) $z=4$;

7) $z=2-i\sqrt{3}$; 8) $z=-6i$; 9) $z=3i-0{,}5$.

3.4. Якщо m та n натуральні числа, то на множині яких чисел має розв’язки кожне із поданих рівнянь:

1) $x-m=n$; 2) $x+m=n$; 3) $mx=n$; 4) $x/m=n$; 5) $mx^3=n$?

Привести числові приклади.

3.5. 1) Чи завжди має розв’язки на множині дійсних чисел рівняння $ax^2=b$, де a, b – будь-які дійсні числа?

2) Яка дія стає завжди здійсненою завдяки введенню уявної одиниці?

3.6. Перетворити вираз, скориставшись числом i:

1). $\sqrt{-3}+4\sqrt{27}$; 2). $\sqrt{-5}+4\sqrt{-125}-5\sqrt{-125}$.

3.7. Перевірити рівності: а) $\sqrt{4}=\pm 2i$; б) $\sqrt{-\frac{16}{25}}=\pm\frac{4}{5}i$; в) $\sqrt{0{,}25}=\pm 0{,}5i$.

3.8. Для поданих чисел назвати а) протилежне; б) спряжене; в) обернене число: 3; $\sqrt{2}$; $-4i$; $2-3i$; $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3.9. Дано числа: 1) $z=2-i$; 2) $z=i$; 3) $z=3+i$; 4) $z=-3+i$; 5) $z=-2-i$; 6) $z=3$; 7) $z=-i$; 8) $z=-5$. Назвіть числа, спряжені та протилежні даним.

3.10. Дано число $z = -3 + i$. Побудувати на комплексній площині точки, що зображують спряжене та протилежне числа для даного числа.

3.11. Дано точку, що відповідає числу $z = -2 + i\sqrt{2}$. Яким числам відповідають точки, симетричні даній відносно: 1) дійсної осі; 2) уявної осі; 3) початку координат?

3.12. Зобразити на комплексній площині множину точок, які задовольняють умові:

а) $\operatorname{Re} z = 3$; б) $\operatorname{Re} z - 4 = 0$; в) $\operatorname{Re} z < 2$; г) $\operatorname{Im} z = 5$; д) $5\operatorname{Im} z \geq 5$.

3.13. Знайти множину точок координатної площини, які задовольняють умові:

1) $\operatorname{Re} Z > 3$; 2) $\operatorname{Re} Z < 1$; 3) $\operatorname{Im} Z = -3$; 4) $\operatorname{Im} Z \geq -3$.

3.14. Застосовуючи правило додавання векторів, показати, що сума дійсного числа 2 та уявного $3i$ дає комплексне число $2 + 3i$, яке зображується вектором, а цей вектор, в свою чергу, дорівнює сумі векторів доданків.

3.15. Побудувати вектори, що зображують такі комплексні числа:

1) $z = 5 + 4i$; 2) $z = -3 + i$; 3) $z = 4 - 2i$; 4) $z = -1 - i$.

3.16. Побудувати суми чисел: 1) $(2 + 3i) + (1 + 4i)$; 2) $(2 + 5i) + (-7 + i)$.

3.17. Виконати додавання:

1). $(5+4i)+(3-7i)$; 2). $(2-8i)+(5-i)$; 3). $(2+5i)+(-2-2i)$;

4). $(4+3i)+(-4+3i)$; 5). $(2-4i)+(-2+4i)$; 6). $(1+i)+(2+i)+(3+i)$;

7). $(0{,}5-3{,}2i)+(1{,}5-0{,}8i)+(1-4i)$; 8). $2+(3+4i)+2i+(-6-7i)$;

9). $\left(1\frac{3}{4}+\frac{2}{3}i\right)+\left(1\frac{1}{2}-\frac{5}{3}i\right)+\left(-\frac{3}{4}-2i\right)$; 10). $(0{,}12-1{,}4i)+(1{,}08+0{,}4i)+(2{,}5-0{,}2i)$;

11). $(a+bi)+(c+di)$; 12). $(3x-4yi)+(-x+2yi)$.

3.18. Побудувати та обчислити різницю чисел: 1) $(5+3i)-(2+i)$;

2). $(-2+4i)-(2+i)$; 3). $(1+i)-(5+3i)$; 4). $(2-3i)-(2+3i)$.

3.19. Виконати дії:

1). $(5+4i)-(2-3i)$; 2). $(2+i)-(3-6i)-(1-i)$;

3). $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}i\right)-\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{3}i\right)+\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{6}i\right)$;

4). $(0{,}8-0{,}2i)+(0{,}1-1{,}3i)-(1{,}5+0{,}7i)-(2{,}3-0{,}6i)$;

5). $(2a-3bi)+(-a-bi)+(4a+2bi)-(2a-5bi)$;

6). $(5x-3yi)+(-2x+8yi)-\big((2x-yi)-(7x-2yi)\big)$;

7). $(2c-8di)-\big((5c-2di)+(c-di)-(-4c+3di)\big)$;

8). $(m-ni)+(3m-2ni)-\big((-m-ni)-(5m+10ni)\big)$.

3.20. Побудувати суми та показати, що для комплексних чисел справедливі:

а) комутативний закон додавання: 1) $5 + 4 = 4 + 5$; 2) $-2i + (-3i) = -3i + (-2i)$;

3) $2-3i = -3i + 2$; 4) $(3 + i) + (-2 - 3i) = (-2 - 3i) + (3 + i)$;

б) сполучний закон додавання: 1) (-2i + 3i) + 4i = -2 + (3i + 4i); 2) (1 + i) + + (-2 + 2i) + (3 - 4i) = (1 + i) + ((-2 + 2i) + (3 - 4i)).

3.21. 1) При якій умові сума двох комплексних чисел $a_1 + b_1 i$ та $a_2 + b_2 i$ є: а) дійсне число; б) уявне число ?

2) При якій умові різниця двох комплексних чисел $a_1 + b_1 i$ та $a_2 + b_2 i$ є: а) дійсне число; б) уявне число ? Привести приклади.

3.22. 1) Показати на малюнку, що множення числа 2 на 3 відповідає розтягненню вектора, який відповідає множнику 2, у три рази без зміни його напрямку.

2) Показати на малюнку, що множення числа 2 на -3 відповідає розтягненню вектора, який відповідає множнику 2, у три рази та його повертанню на 180°.

3.23. 1) Поширюючи правило множення дійсних чисел на уявні, показати, що множенню числа 2 на 3 і відповідає розтягнення вектора, який зображує множник 2 у три рази та його повертання на 90°.

2) Пояснити на малюнку множення таких чисел:

$(-2)\cdot 5i;\ 4\cdot(-2i);\ (-1)\cdot(-3{,}5i);\ i\cdot i;\ 2i\cdot 4i;\ (-6)\cdot(-0{,}5i);\ 4i\cdot(-i).$

3.24. Побудувати добуток таких чисел: 1). $(2+3i)\cdot 3$; 2). $(2+i)\cdot(-3)$;

3). $(-4-i)\cdot 2i$; 4). $(-1+i)\cdot(-3i)$.

3.25. Дано два уявних числа: $\alpha = 2 + i$ та $\beta = 3 + 4i$.

1) Побудувати у координатній площині вектори, які зображують ці числа.

2) Побудувати вектор, який зображує добуток двох комплексних чисел $\alpha\beta$, розтягуванням радіус-вектора комплексного числа α у відношенні $\frac{\beta}{\alpha}$ та повертанням його на кут, який дорівнює аргументу числа β.

3) Обчислити добуток $\alpha\beta$ за правилом множення комплексних чисел та показати, що довжина радіус-вектора, комплексного числа $\alpha\beta$ дорівнює добутку довжин радіус-векторів комплексних чисел α та β, а аргумент добутку дорівнює сумі аргументів множників.

3.26. Виконати множення:

1) $2i\cdot 3i$; 2) $4i\cdot 2i\sqrt{2}$; 3) $5i\cdot(-4i)$; 4) $2{,}5i\cdot 4i$; 5) $-ai\cdot 5i$; 6) $mi\cdot ni$.

3.27. Виконати множення:

1) $(3+5i)\cdot 2$; 2) $(1-i)(-4)$; 3) $(-2-3i)\cdot 5$; 4) $(-3+4i)\cdot 2i$; 5) $(-8-7i)(-3i)$.

3.28. Виконати множення:

1) $(2-3i)(4-i)$;

2) $(1-2i)(5-i)$; 3) $(0{,}5+0{,}2i)(2+3i)$;

4) $(\sqrt{2}-i)(\sqrt{3}+i\sqrt{2})$; 5) $(5+i)(5-i)$; 6) $(1-i)(1-i)$.

3.29. Виконати множення

1) $(-3i-4i)\cdot 2i$; 2) $(-8+7i)\cdot(-3i)$; 3) $(4-9i)0$; 4) $(1+i)(1-i)$;

5) $(a+bi)\cdot(a+bi)$; 6) $(2+3i)(-4+i)$; 7) $(3+5i)\cdot(5+3i)$;

8) $(0{,}5+0{,}2i)(2+3i)$; 9) $(\sqrt{3}-i)(\sqrt{2}+i\sqrt{3})$; 10) $(2-3i)(-1-i)(3+4i)$.

3.30. 1) При якій умові добуток двох чисел a_1+b_1i та a_2+b_2i буде:

а) дійсним числом; б) уявним числом ? Привести приклади.

2) Написати два комплексних числа, для яких сума та добуток – дійсні числа.

3.31. Користуючись комплексними числами, розкласти на множники:

1) a^2+b^2; 2) a^2+9b^2; 3) a^4+b^4; 4) $4m^2+25n^2$; 5) a^2+1; 6) $5a^2+b$;

7) $a^2+\dfrac{b^2}{9}$; 8) $a+b$.

3.32. Виконати ділення чисел:

1) $6i:2$; 2) $10i:(-4)$; 3) $6i:(-2i)$;

4) $10i:2i$; 5) $9i:(-0{,}5i)$; 6) $\dfrac{5}{3i}$; 7) $\dfrac{6}{1-2i}$; 8) $\dfrac{4}{1+2i}$.

3.33. Виконати ділення чисел:

1) $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$; 2) $\dfrac{4-i\sqrt{2}}{1+i\sqrt{2}}$; 3) $\dfrac{5-2i}{1-2i}$;

4) $\dfrac{4-3i}{1+3i}$; 5) $\dfrac{\sqrt{5}-i}{\sqrt{5}-2i}$; 6) $\dfrac{-\sqrt{3}+i\sqrt{6}}{-1+i\sqrt{3}}$; 7) $\dfrac{-3\sqrt{2}+i}{1+3i\sqrt{2}}$.

3.34. Виконати дії.

1) $(3+4i)+5(2-3i)-3(2-7i)$; 2) $(9+16i)\cdot(8-3i)+7(12-5i)$;

3) $(9+5i)(4-3i)+(6-i)(6+i)$; 4) $(3-7i)(5+6i)-(9-8i)(3+12i)$;

5) $\dfrac{11-8i}{2+3i}-(4+8i)(2-7i)$; 6) $\dfrac{12-5i}{12+5i}-\dfrac{4-i}{5+i}(8-i)(8+i)$;

7) $\dfrac{7-i}{3+i}\cdot\dfrac{1+i}{1-i}$; 8) $\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\cdot\dfrac{42+2i}{3+5i}$; 9) $\left(\dfrac{7-2i}{7+2i}\right)\cdot\dfrac{1+3i}{4-i}$; 10) $\left(\dfrac{2-5i}{4+i}\right)\cdot\left(\dfrac{6-7i}{4-i}\right)$.

3.35. Довести тотожність:

1) $(1+i)^2+(1-i)^2=0$; 2) $(1+i)^3-(1-i)^3=4i$;

3) $(a-1-i)(a+1+i)=a^2-2i$; 4) $\dfrac{1}{1+i}-\dfrac{1}{1-i}=-i$.

3.36. Виконати дії.

1) $\dfrac{1+i}{1-i}+\dfrac{1-i}{1+i}$; 2) $\dfrac{a+bi}{c+di}-\dfrac{a+bi}{c-di}$; 3) $\dfrac{\sqrt{1+m}+i\sqrt{1-m}}{\sqrt{1+m}-i\sqrt{1-m}}-\dfrac{\sqrt{1-m}+i\sqrt{1+m}}{\sqrt{1-m}-i\sqrt{1+m}}$;

4) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)^4+\left(\dfrac{1-i\sqrt{7}}{2}\right)^4$; 5) $\dfrac{(a+i)^3-(a-i)^3}{(a+i)^2-(a-i)^2}$.

3.37. Виконати дії.

1) $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$ 2) $\dfrac{5-i\sqrt{2}}{1+i\sqrt{2}}$; 3) $\dfrac{5+2i}{1-2i}$; 4) $\dfrac{7-3i}{1+3i}$; 5) $\dfrac{\sqrt{6}-i}{\sqrt{6}-2i}$; 6) $\dfrac{-\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{-1+i\sqrt{3}}$;

7) $\frac{-2\sqrt{3}+i}{1+2i\sqrt{3}}$; 8) $\frac{m}{i\sqrt{m}}$; 9) $\frac{a}{a+6i}$; 10) $\frac{\sqrt{a}}{a+2i\sqrt{a}}$; 11) $\frac{a+i\sqrt{n}}{a-i\sqrt{n}}$; 12) $\frac{a-bi}{b+ai}$.

3.38. 1) Дані числа: 2 - 3*i* та 4 + 5*i*. Знайти модуль їх а) суми; б) різниці; в) добутку; г) частки.

2) Знайти модуль частки від ділення будь-якого числа, що відрізняється від нуля, на спряжене.

3.39.1) Довести, що модуль добутку двох комплексних чисел дорівнює добутку модулів, тобто, $\left|(a_1+b_1i)\cdot(a_2+b_2i)\right| = |a_1+b_1i|\cdot|a_2+b_2i|$.

2) Довести, що модуль частки двох комплексних чисел дорівнює частці модулів, тобто, $\left|\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}\right| = \frac{|a_1+b_1i|}{|a_2+b_2i|}$, якщо $a_2+b_2i \neq 0+0i$.

3.40. Довести побудуванням та обчисленням, що:

1) модуль суми чисел 4 + 3*i* та 6-8*i* менший, ніж сума їх модулів;

2) модуль суми чисел 4-3*i* та (-8+6*i*) менший ніж, сума їх модулів (дорівнює різниці їх модулів);

Сформулювати висновок про модуль суми комплексних чисел. Як розміщуються вектори, що зображують два комплексних числа, якщо модуль суми цих чисел дорівнює сумі їх модулів або різниці їх модулів.

3.41. Обчислити:

1) $i^6+i^{20}+i^{30}+i^{36}+i^{54}$; 2) $i+i^2+i^3+i^4+i^5$; 3) $i+i^{11}+i^{21}+i^{31}+i^{41}$;

4) $i\cdot i^2\cdot i^3\cdot i^4$; 5) $\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^5}$; 6) $\frac{1}{i^{13}}+\frac{1}{i^{23}}+\frac{1}{i^{33}}$.

3.42. Обчислити:

1) $i^6+i^{16}+i^{26}+i^{36}+i^{46}+i^{58}$; 2) $i^3+i^{13}+i^{23}+i^{33}+i^{43}+i^{53}$;

3) $i+i^2+i^3+i^4+\ldots+i^n$ $(n>4)$; 4) $i\cdot i^2\cdot i^3\cdot i^4\cdot\ldots\cdot i^{100}$;

5) $\frac{1}{i^4}-\frac{1}{i^{41}}+\frac{1}{i^{75}}-\frac{1}{i^{1023}}$.

3.43. Обчислити (в алгебраїчній формі):

1) $(1-i)^{12}$; 2) $(1+i)^{17}$; 3) $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3$; 4) $\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3$; .

5) $(0{,}5\sqrt{2}+0{,}5i)^2$; 6) $(1+i)^{-2}$

3.44. Обчислити (в алгебраїчній формі):

1) $(i(2-i))^2$; 2) $(2i(3-4i))^2$; 3) $((3i-5)2i)^2$; 4) $((5-i)(5+i))^2$;

5) $((6-2i)(6+2i))^2(1+i)^2$; 6) $(3+i)^2(1-i)^3$; 7) $(2+ai)^2$; 8) $(a-3bi)^2$;

9) $(2c+3di))^2$; 10) $(1+i)^4$; 11) $(1-i)^4$; 12) $\left(\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2$; 13) $(1+i)^3$;

14) $(2-i\sqrt{3})^3$; 15) $(3-i\sqrt{3})^3$; 16) $(1+i)^3+(1-i)^3$; 17) $(1+i)^3-(1-i)^3$;

18) $(a+bi)^3-(a-bi)^3$;   19) $(x-1-i)(x+1+i)$;   20) $[(1+i)(1-i)]^6$;

21) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^4$;   22) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^6$;   23) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{4n+1}$;   24) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{4n+2}$.

3.45. Обчислити (в алгебраїчній формі):

1) $(1+i)^{-1}$;   2) $(1+i)^{-2}$;   3) $(25-17i)^0$;   4) $\left(\frac{2}{1-i\sqrt{7}}\right)^{-4}$;   5) $[(2+2i)(2-2i)]^{\frac{2}{3}}$;

6) $\left((\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)\right)^{-\frac{3}{2}}$.

3.46. Знайти дійсні числа x та y із рівнянь:

1) $(x+y)+(x-y)i=2+4i$;   2) $(x+y)+(x-y)i=4i$;

3) $(x+y)+(x-y)i=2$;   4) $(y+2x)+(2y+4x)i=0$;

5) $(x+1{,}5y)+(2x+3y)i=13i$;   6) $(x+2y)+(3x-y)=5+i$;

7) $(x+y)^2+6+xi=5(x+y)+(y+1)i$.

3.47. Знайти дійсні числа x та y з умови рівності комплексних чисел:

1) $9+2ix+4iy=10i+5x-6y$;   2) $2+5ix-3iy=14i+3x-5y$;

3) $(1+i)x+(1-i)y=3-i$;   4) $\frac{8i}{x}+iy-2=7i-\frac{10}{x}+y$;

5) $(4-i)x+(2+5i)y=8+9i$;   6) $(3+i)x-(1-2i)y=7$;

7) $2ix+3iy+17=3x+2y+18i$;   8) $5x-2y+(x+y)i=4+5i$;

9) $x^2-5(x-1)+4i=yi-1$;   10) $\frac{1}{x}-4iy=4$;

11) $(3x-iy)(12-8i)=(7+5i)(2y-5ix)$;   12) $\frac{y-ix}{x+iy}=\frac{4+i}{4i-1}$.

3.48. Знайти дійсні числа x та y, якщо:

1) $(1-i)x+(1+i)y=1-3i$;   2) $(2+3i)x^2-(3-2i)y=2x-3y+15i$;

3) $(4x^2+3xy)+(2xy-3x^2)i=4y^2-(1/2)x^2+(3xy-2y^2)i$.

3.49. Знайти дійсні значення x та y, при яких:

1) $\frac{x-1}{3+i}+\frac{y-1}{3-i}=i$;   2) $y^2+iy^2+6+i=2x+ix$;   3) $\sqrt{x^2-2x+8}+(x+4)i=y(2+i)$;

4) $(x-i)^2-(2y+i)^2=4(\sqrt{3}-1)i-2y^2-x$.

3.50. Знайти x та y із системи:

1) $\begin{cases} ix-2y=-i, \\ (1+i)x-2iy=3+i; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (1-i)x-(1+i)y=-1+i, \\ (-2+2i)x-2y=-4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4y-xi=i-8, \\ 2+iy-3x=5-2i \end{cases}$ 4) $\begin{cases} (3+i)x-(5+iy)=10+6i, \\ (3{,}5i-y)-3x=3{,}5i-14. \end{cases}$

3.51. З умови рівності комплексних чисел знайти дійсні числа x та y, якщо:

1) $2+5ix-3iy=14i+3x-5y$; 2) $(1+i)x+(1-i)y=3-i$; 3) $\frac{8i}{x}+iy-2=7i-\frac{10}{x}+y$;

4) $\frac{i}{x}+\frac{i}{y}+\frac{1}{6}=\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{5i}{y}$; 5) $aix+biy-a=i-a^2x-b^2y$.

3.52. Розв’язати рівняння.

1) $z^2+16=0$; 2) $z^2-2z+2=0$; 3) $z^2+2=0$; 4) $4z^2+4z+5=0$;

5) $3z^2+5=0$; 6) $z^2-14z+74=0$; 7) $z^2+2z+5=0$; 8) $4z^2-2z+1=0$;

9) $z^2+18z+81=0$; 10) $z^2+4z+3=0$.

3.53. Розв’язати систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x+y=6, \\ xy=45; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x-3y=1, \\ xy=1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y=10, \\ 2+iy-3x=5-2i. \end{cases}$

3.54. Скласти квадратне рівняння, якщо відомі його корені:

1) $z_1=2+i$; $z_2=2-i$; 2) $z_1=\frac{3-i}{4}$; $z_2=\frac{3+i}{4}$;

3) $z_1=5(4-i)$; $z_2=5(4+i)$; 4) $z_1=7+i$; $z_2=7-i$.

3.55. Скласти квадратне рівняння по його кореням:

1) $z_1=\frac{-1+4i\sqrt{5}}{3}$; $z_2=\frac{-1-4i\sqrt{5}}{3}$; 2) $z_1=3-\frac{1}{2}i$; $z_2=3+\frac{1}{2}i$;

3) $z_1=2-i$; $z_2=3-2i$; 4) $z_1=\frac{2-i}{1+i}$; $z_2=1+i$.

3.56. Розв’язати такі рівняння:

1) $(3x-8)^2+5(3x-8)-150=0$; 2) $(5x+4)^2-5(5x+4)-36=0$.

3.57. Скласти квадратне рівняння з дійсними коефіцієнтами, один з коренів якого дорівнює:

1) $z_1=5-i$; 2) $z_1=-3i$; 3) $z_1=(3-i)(2i-4)$; 4) $z_1=(4-i)^2$; 5) $z_1=\frac{32-i}{1-3i}$.

3.58. Розв’язати квадратні рівняння та перевірити властивість суми і добутку коренів для кожного з них:

1) $x^2-6x+13=0$; 2) $x^2-4x+6=0$; 3) $2x^2+(5-i)x+6=0$;

4) $x^2+(4-6i)x+10-20i=0$.

3.59. 1) При яких дійсних значеннях a корені квадратного рівняння $(a+5)x^2+2ax+(a-1)=0$ будуть комплексними ?

2) При якому значенні k корені квадратного рівняння $x+2(3+i)x+k=0$ будуть рівні між собою ?

3.1. Тригонометрична та показникова форми комплексного числа

Приклад 1. Записати у тригонометричній та показниковій формах комплексне число $z=-\sqrt{3}-i$ та зобразити відповідно йому радіус-вектор.

Розв'язання.

Комплексне число $z=-\sqrt{3}-i$ подано у алгебраїчній формі, значить, $a=-\sqrt{3};\ b=-1.$ Щоб записати комплексне число у тригонометричній або показниковій формах слід визначити модуль та аргумент комплексного числа.

$$|z|=r=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-1)^2}=\sqrt{4}=2.$$

Оскільки $a<0$, $b<0$, то за формулою $\arg z=-\pi+\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$ маємо

$$\arg z=-\pi+\operatorname{arctg}\left(\frac{-1}{-\sqrt{3}}\right)=-\pi+\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\pi+\frac{\pi}{6}=-\frac{5\pi}{6}.$$

Тоді,

$$z=-\sqrt{3}-i=\left(2\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)=2e^{\frac{-5\pi i}{6}}.$$

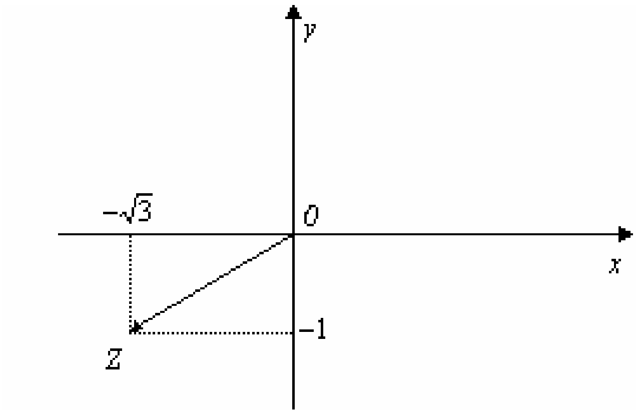

Рисунок 3.2

OZ – радіус-вектор числа $z=-\sqrt{3}-1$.

Приклад 2. Дано комплексні числа $z_1=-4-4i$, $z_2=3-3\sqrt{3}i$. Знайти: 1). $z_1\cdot z_2$; 2). $\frac{z_1}{z_2}$; 3). $z_1{}^4$; 4). $\sqrt[3]{z_2}$. Дії виконати у тригонометричній та показниковій формах.

Розв'язання.

Запишемо числа z_1 та z_2 у тригонометричній та показниковій формах.

$$z_1=-4-4i;\qquad a=-4;\qquad b=-4.\qquad r_1=\sqrt{(-4)^2+(-4)^2}=4\sqrt{2};$$

$$\varphi_1=\arg z_1=-\pi+\operatorname{arctg}\left(\frac{-4}{-4}\right)=-\pi+\operatorname{arctg}\,1=-\pi+\frac{\pi}{4}=-\frac{3\pi}{4};$$

$$z_1=4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)=4\sqrt{2}e^{\frac{-i3\pi}{4}}.$$

$$z_2=3-3\sqrt{3}i;\qquad a=3;\qquad b=-3\sqrt{3}.\qquad r_2=\sqrt{3^2+(-3\sqrt{3})^2}=6;$$

$$\varphi_2=\arg\ z_2=-\pi+\operatorname{arctg}\left(\frac{-3\sqrt{3}}{3}\right)=-\operatorname{arctg}\ \sqrt{3}=-\frac{\pi}{3};$$

$$z_2=6\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=6e^{-\frac{i\pi}{3}}.$$

Виконаємо задані дії у тригонометричній формі.

1) $$z_1z_2=4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+isin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)\cdot 6\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=$$

$$=24\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-3\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-3\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)\right)=24\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-13\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{-13\pi}{12}\right)\right)=$$

$$=24\sqrt{2}\left(\cos\left(2\pi-\frac{-13\pi}{12}\right)+i\sin\left(2\pi-\frac{-13\pi}{12}\right)\right)=24\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right).$$

2) $$\frac{z_1}{z_2}=\frac{4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)=4\sqrt{2}e^{-\frac{i3\pi}{4}}}{6\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\left(\cos\left(\frac{-3\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)+\right.$$

$$\left.+i\sin\left(\frac{-3\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\cos\left(\frac{-5\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{-5\pi}{12}\right)\right).$$

3) Для знаходження z_1^4 використаємо першу формулу Муавра.

$$\left(4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)\right)^4=(4\sqrt{2})^4\left(\cos\left(4\cdot\frac{(-3\pi)}{4}\right)+i\sin\left(4\cdot\frac{(-3\pi)}{4}\right)\right)=$$

$$=1024(\cos(-3\pi)+i\sin(-3\pi))=1024(\cos(-\pi)+i\sin(-\pi))=1024e^{-i3\pi}.$$

4) Для знаходження $\sqrt[3]{z_2}$ використаємо другу формулу Муавра.

$$w=\sqrt[3]{6\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)}=\sqrt[3]{6}\left(\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{3}+2\pi k}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{3}+2\pi k}{3}\right)\right),\quad k=0,1,2$$

$$w_0=\sqrt[3]{6}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{9}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{9}\right)\right)=\sqrt[3]{6}e^{i\left(-\frac{\pi}{9}\right)};$$

$$w_1=\sqrt[3]{6}\left(\cos\frac{5\pi}{9}+i\sin\frac{5\pi}{9}\right)=\sqrt[3]{6}e^{i\frac{5\pi}{9}};$$

$$w_2=\sqrt[3]{6}\left(\cos\frac{8\pi}{9}+i\sin\frac{8\pi}{9}\right)=\sqrt[3]{6}e^{i\frac{8\pi}{9}}.$$

Тепер виконаємо ті ж самі дії у показниковій формі.

1) $$z_1\cdot z_2=\left(4\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i}\right)\left(6e^{-\frac{\pi}{3}i}\right)=24\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i-\frac{\pi}{3}i}=24\sqrt{2}e^{-\frac{13\pi}{12}i}=24\sqrt{2}e^{\left(-\frac{13\pi}{12}+2\pi\right)i}=24\sqrt{2}e^{\frac{11\pi}{12}i}.$$

2) $$\frac{z_1}{z_2}=\frac{4\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i}}{6e^{-\frac{\pi}{3}i}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}e^{-\frac{5\pi}{12}i}.$$

3) $$z_1^4=\left(4\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i}\right)^4=1024e^{-3\pi i}.$$

4) $$\sqrt[3]{z_2}=\sqrt[3]{6e^{-\frac{\pi}{3}i}}=\sqrt[3]{6}e^{\frac{1}{3}\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)i}\quad k=0;1;2.$$

$$w_0=\sqrt[3]{6}e^{-\frac{\pi}{9}i};\quad w_1=\sqrt[3]{6}e^{\frac{5\pi}{9}i};\quad w_2=\sqrt[3]{6}e^{\frac{8\pi}{9}i}.$$

3.3. Задачі для самостійного розв’язування

3.60. Дані модулі та аргументи комплексних чисел. Побудувати на координатній площині вектори, що їм відповідають.

1) $r=3,\ \varphi=180^0$; 2) $r=3,\ \varphi=-90^0$; 3) $r=3, \varphi=300^0$.

3.61. 1. Порівняти по величині модулі та аргументи спряжених та протилежних комплексних чисел. 1) $|z|=3$; 2) $|z|=5$; 3) $\arg z=-\frac{\pi}{2}$;

4) $\arg z=-\frac{\pi}{2}$; 5) $\arg z=\pi$; 6) $\arg z=-\frac{2\pi}{3}$; $\frac{\pi}{6}<\arg z<\frac{2\pi}{3}$.

2. Знайти на комплексній площині геометричне місце точок, що відображує всі комплексні числа, для яких: 1) $|z|=4$; 2) $|z|<3$; 3) $|z|>4$; 4) $0<\arg\varphi<\frac{\pi}{4}$.

3.62. Знайти на комплексній площині множину точок, що зображують комплексні числа, про які відомо, що:

1) $r=1;\ \varphi=\frac{\pi}{4};$ 2) $r=2;$ 3) $r\le 3;$ 4) $r<3;$ 5) $2<r<3;$

6) $\varphi=\frac{\pi}{3};$ 7) $0<\varphi<\frac{\pi}{6}.$

3.63. 1. $z=x+iy;\ r=\sqrt{x^2+y^2}=\text{const}.$ Де містяться точки, для яких:

1) $|z|=2,$ 2) $1<|z|<2$?

2. Де містяться точки, що зображують комплексні числа, для яких:

1) $|z+i|\le 1,$ 2) $|z+2i|\le 4$?

3.64. Знайти множину точок комплексної площини, для яких виконуються співвідношення:

1) $\operatorname{Re} z>0;$ 2) $0\le \operatorname{Re} z\le 1;$ 3) $\operatorname{Im} z\le 1;$ 4) $|\operatorname{Im} z|\ge 2;$ 5) $|z|\le 1;$

6) $2\le |z|\le 5;$ 7) $|z-i|>1;$

8) $\begin{cases}1\le \operatorname{Re} z\le 2,\\ 0<\arg z\le \frac{\pi}{4};\end{cases}$ 9) $\begin{cases}1\le |z|\le 3,\\ \frac{\pi}{2}\le \arg z\le \frac{3\pi}{4};\end{cases}$ 10) $\begin{cases}2<|z-2|<3,\\ \arg z=\frac{\pi}{3};\end{cases}$ 11) $\begin{cases}2\le |z|\le 4,\\ \operatorname{Im} z\le 2;\end{cases}$

12) $\begin{cases}|z|\le 3,\\ \operatorname{Re} z\ge 2;\end{cases}$ 13) $\begin{cases}|z-i|\ge 1,\\ \operatorname{Re} z\le 3.\end{cases}$

3.65. Надати числа в тригонометричній та показниковій формах:

1) $3i;$ 2) $-1+i;$ 3) $1-i\sqrt{3};$ 4) $\sqrt{3}-i;$ 5) $(-3)+4i;$ 6) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2};$

7) $5-12i;$ 8) $-4-3i.$

3.66. Надати числа в тригонометричній та показниковій формах:

1) $3,\quad -5,\quad 6i,\quad 1,\quad i,\quad 1+i,\quad 0,\quad 1-i\sqrt{3},\quad -\sqrt{3}+i.$

2) $-2+2i,\quad -2-i2\sqrt{3},\quad 5+12i,\quad \sqrt{2}-i\sqrt{2},\quad -3+2i.$

3.67. Надати в алгебраїчній формі комплексні числа:

1) $2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right);$ 2) $5(\cos 0+i\sin 0);$ 3) $3\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right);$ 4) $\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ;$

5) $7e^{\frac{\pi}{3}i};$ 6) $9e^{\frac{\pi}{4}i};$ 7) $16e^{-\frac{\pi}{4}i}.$

3.68. З'ясувати, чи є дана форма комплексного числа тригонометричною? Якщо ні, то надати його в тригонометричній формі:

1) $5\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right);$ 2) $6(\cos 6\pi+i\sin 6\pi);$ 3) $11(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ).$

3.69. Знайти добуток і записати результат у показниковій формі:

1) $2(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)\cdot 3(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ);$

2) $\sqrt{2}(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)\cdot 2\sqrt{2}(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$;

3) $3(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})\cdot 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$;

4) $\sqrt{3}(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ)$.

3.70. Знайти добуток комплексних чисел, результат записати у показниковій формі.

1) $\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

2) $3\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{24} + i\sin\frac{5\pi}{24}\right)$;

3) $2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot 5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$;

4) $(\cos 50^\circ + i\sin 50^\circ)\cdot(\cos 40^\circ + i\sin 40^\circ)$;

5) $\sqrt{2}(\cos 85^\circ + i\sin 85^\circ)\cdot\sqrt{6}(\cos 95^\circ + i\sin 95^\circ)$;

6) $4(\cos 10^\circ + i\sin 10^\circ)\cdot 2(\cos 35^\circ + i\sin 35^\circ)$.

3.71. Виконати множення комплексних чисел у показниковій формі:

1) $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{i\sqrt{6}}{6}\right)$; 2) $(1 + i\sqrt{3})(-2 - 2i\sqrt{3})$; 3) $(1 + i)(3 + 3i\sqrt{3})$;

4) $(5 + 5i)(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ)$.

3.72. Виконати ділення комплексних чисел в тригонометричній формі:

1) $6\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) : 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$;

2) $3\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) : \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$;

3) $(\cos 210^\circ + i\sin 210^\circ) : (\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ)$;

4) $2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) : \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

5) $\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) : \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$;

6) $8(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ) : (4(\cos(-120^\circ) + i\sin(-120^\circ)))$.

3.73. Обчислити, користуючись першою формулою Муавра:

1) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^2$; 2) $\left(2\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)\right)^8$; 3) $(\cos 35^\circ + i\sin 35^\circ)^{-12}$; 4) $\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{10}$.

5) $\left(7e^{\pi i}\right)^6$; 6) $\left(3e^{-\frac{\pi}{3}i}\right)^9$.

3.74. Виконати дії, відповідь записати в алгебраїчній формі:

1) $\dfrac{2(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ)}{3(\cos 105^\circ + i\sin 105^\circ)}$;   2) $\dfrac{\cos 170^\circ + i\sin 170^\circ}{4(\cos 100^\circ + i\sin 100^\circ)}$;

3) $5(\cos 40^\circ + i\sin 40^\circ)\cdot 3(\cos 50^\circ + i\sin 50^\circ)$;

4) $2(\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ)\cdot 7(\cos 100^\circ + i\sin 100^\circ)$;

5) $\left(\cos\dfrac{8\pi}{15} + i\sin\dfrac{8\pi}{15}\right)\cdot\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)\cdot 2\left(\cos\dfrac{4\pi}{5} + i\sin\dfrac{4\pi}{5}\right)$;

6) $\dfrac{\cos 130^\circ + i\sin 130^\circ}{\cos 40^\circ + i\sin 40^\circ)}\cdot\dfrac{\cos 130^\circ - i\sin 130^\circ}{\cos 40^\circ + i\sin 40^\circ)}$;

7) $\dfrac{-\cos 100^\circ + i\sin 100^\circ}{\cos 40^\circ - i\sin 40^\circ}\cdot\dfrac{2(\cos 107^\circ + i\sin 107^\circ)}{5(\cos 47^\circ + i\sin 47^\circ)}$.

8) $\dfrac{7e^{\pi i}}{5e^{-\frac{\pi i}{2}}}$;   9) $\dfrac{12e^{\frac{\pi i}{7}}}{6e^{\frac{\pi i}{6}}}$;   10) $\dfrac{5e^{-\pi i}}{6e^{-0.3\pi i}}$.

3.75. Обчислити за першою формулою Муавра в тригонометричній та показниковій формах:

1) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}\right)^{100}$;   2) $(\sqrt{3} + i)^{50}$;   3) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)^{8}$;   4) $(3+\sqrt{3})^8 + (3-\sqrt{3})^8$;

5) $\dfrac{(5+5i)^5}{(4-4i)^3}$;   6) $\dfrac{(\sqrt{3}-i)^5}{(3+3i)^2}$.

3.76. Обчислити за першою формулою Муавра в тригонометричній та показниковій формах:

1) $\left(3(\cos 50^\circ + i\sin 50^\circ)\right)^6$;   2) $\left(2\left(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ\right)\right)^4$;   3) $(\cos 50^\circ + i\sin 50^\circ)^8$;

4) $\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)^{10}$;   5) $\left(2\left(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ\right)\right)^6$;   6) $\left(-\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)^{8}$.

3.77. Перевірити рівності:

1) $\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^6 + \left(\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^6 = 2$;   2) $\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^5 + \left(\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^5 = -1$.

3.78. Довести :

1) $\left(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ\right)^6 = 1$;   2) $\left(2\left(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ\right)\right)^4 = -16$;

3) $\left(\sqrt{3}\left(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ\right)\right)^6 = -27$;   4) $\left(\sqrt{2}\left(\cos 56^\circ 15' + i\sin 56^\circ 15'\right)\right)^8 = 16i$.

3.79. Обчислити:

1) $\sqrt[3]{-1}$; 2) $\sqrt[4]{-1}$; 3) $\sqrt[3]{i}$; 4) $\sqrt[6]{1}$; 5) $\sqrt[3]{-8}$; 6) $\sqrt[4]{-16}$; 7) $\sqrt[3]{-2+2i}$;

8) $\sqrt[4]{-7-24i}$; 9) $\sqrt[4]{-2-2i\sqrt{3}}$; 10) $\sqrt[3]{\cos 135^\circ + i\sin 135^\circ}$; 11) $\sqrt[4]{\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ}$;

12) $\sqrt[5]{\cos 225^\circ + i\sin 225^\circ}$; 13) $\sqrt[6]{\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ}$; 14) $\sqrt{7+i\sqrt{15}}$; 15) $\sqrt{1+i\sqrt{3}}$;

16) $\sqrt{5-i\sqrt{11}}$; 17) $\sqrt[5]{32e^{\frac{-\pi}{2}i}}$; 18) $\sqrt[4]{81e^{\frac{\pi}{3}i}}$; 19) $\sqrt{e^{0.1\pi i}}$; 20) $\sqrt[3]{27\mathrm{e}^{-0.25\pi \mathrm{i}}}$.

3.80. Знайти частку, переходячи до показникової форми:

1) $4(\cos 75^\circ + i\sin 75^\circ) : 0{,}4(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)$;

2) $3(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ) : 1{,}5(\cos 135^\circ + i\sin 135^\circ)$;

3) $4(\cos 240^\circ + i\sin 240^\circ) : 2(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$.

3.81. Обчислити усі значення кореня та побудувати їх геометричне зображення:

1) $\sqrt[3]{\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ}$; 2) $\sqrt[5]{16(\cos 240^\circ + i\sin 240^\circ)}$; 3) $\sqrt[5]{\cos 250^\circ + i\sin 250^\circ}$;

4) $\sqrt[6]{\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ}$; 5) $\sqrt[4]{16e^{\frac{1}{6}\pi i}}$

3.82. Обчислити:

1) $\left(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ\right)^{\frac{1}{2}}$; 2) $\left(8\,(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ)\right)^{\frac{2}{3}}$;

3) $\left(4\,(\cos 300^\circ + i\sin 300^\circ)\right)^{\frac{1}{2}}$; 4) $\left(3\,(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ)\right)^{-1}$.

3.83. Знайти усі значення кореня:

1) $\sqrt[4]{-625}$; 2) $\sqrt[6]{-1}$; 3) $\sqrt[4]{-24-8\sqrt{3}i}$.

3.84. За допомогою формули Ейлера

$$\mathrm{e}^{xi} = \cos x + i\sin x \qquad (*)$$

довести основну тригонометричну тотожність $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

3.85 За допомогою формули Ейлера (∗) та рівності $\mathrm{e}^{xi} \cdot \mathrm{e}^{yi} = \mathrm{e}^{(x+y)i}$ довести формули додавання аргументів для синуса і косинуса:

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \sin y\cos x,\ \cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y.$$

3.86 За допомогою формули Ейлера (∗) та рівності $(e^{xi})^2 = e^{2xi}$ отримати формули подвійного кута для синуса і косинуса:

$$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x,\ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

3.87 За допомогою формули Ейлера (∗) та рівності $(\mathrm{e}^{xi})^n = \mathrm{e}^{nxi}$ отримати першу формулу Муавра.

$$\left(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

3.3. Приклади застосування методу комплексних амплітуд

Приклад 3. В електричному колі протікає гармонічний струм $i(t) = I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_i) = 5\sqrt{2} \cdot \sin(10^3 t + 90^\circ), (A)$; на зажимах кола зафіксована напруга $u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_n) = 10\sqrt{2} \cdot \sin(10^3 t + 45^\circ), (B)$. Визначити опір кола.

Розв'язання.

Гармонічні функції $i(t)$ та $u(t)$ запишемо комплексними числами в показниковій формі:

$i(t) \Leftrightarrow \dot{I}$, $u(t) \Leftrightarrow \dot{U}$, де $\dot{I} = 5 \cdot e^{j90}\ (A); \dot{U} = 10e^{j45}, (B)$.*

На підставі закону Ома опір кола дорівнює

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = Z = \frac{10e^{j45^\circ}}{5e^{j90^\circ}} = 2e^{-j45^\circ} \approx (1{,}414 - 1{,}414j), (\text{Ом}).$$

****Примітка***. В електротехніці миттєве значення струму позначається $i(t)$, тому прийнято вважати $j^2 = -1$.

Приклад 4. Дано електричне коло рис. 3.3. Всі елементи цього кола включені між собою послідовно, R, L, C – пасивні елементи, $E(t)$ – джерело напруги.

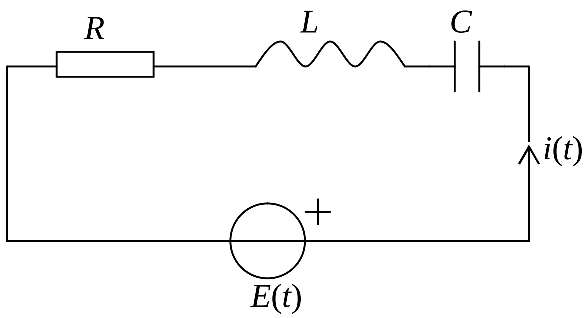

Рисунок 3.3

Визначити струм $i(t)$, що протікає в колі, напруги на кожному елементі $i(t)$, побудувати векторну діаграму напруг, перевірити баланс потужностей.

Вихідні дані: напруга джерела

$E(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi) = 10\sqrt{2} \cdot \sin(10^3 t + 60^\circ), (B)$;

величини елементів: R=10 Ом, L = 0,02 Гн, C =100 мкф = $100 \cdot 10^{-6}$ (Ф).

1. Гармонічну напругу джерела $E(t)$ перетворимо в комплексну форму: $\dot{E} = |E| \cdot e^{j\psi} = 10e^{60^\circ j}\ (B)$.

Напруга $\dot{U}$ являє собою вектори. Зобразимо їх у декартової системі координат (рис. 3.4).

Комплексний опір елементів кола:

$Z_R = R = 10$,

$Z_L = j\omega L = jX_L = j10^3 \cdot 0{,}02 = j20 = 20e^{j90^\circ}$,

$Z_C = \dfrac{1}{j\omega C} = -j\dfrac{1}{\omega C} = -jX_C = -j\dfrac{1}{10^3 \cdot 10^2 \cdot 10^{-6}} = -j10 = 10e^{-j90^\circ}$.

Комплексний опір усього ланцюга:

$Z = Z_R + Z_L + Z_C = R + jX_L - jX_C = 10 + j20 - j10 = 10 + j10 = 10\sqrt{2}e^{j45^\circ}$,

тобто,

$Z = |Z|e^{j\varphi}$, a $|z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{X_L - X_C}{R}$.

2. Знаючи напругу, що прикладена до кола й опір цього кола, на підставі закону Ома можемо визначити струм:

$\dot{I} = \dfrac{\dot{E}}{Z} = \dfrac{E \cdot e^{j\psi}}{z \cdot e^{j\varphi}} = \dfrac{E}{z}e^{j(\psi-\varphi)} = \dfrac{10e^{j60^\circ}}{10\sqrt{2}e^{j45^\circ}} \approx 0{,}707 \cdot e^{j15^\circ} \approx 0{,}6829 + 0{,}1829j$.

Комплексний струм $\dot{I}$ можемо записати у вигляді гармонійної функції, тобто, $\dot{I} \Leftrightarrow i(t)$: $i(t) \approx 0{,}707 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(10^3 t + 13^\circ), (A)$.

Знаючи струм, що протікає через елементи, можемо знайти напругу на кожному елементі:

$\dot{U}_R = \dot{I} \cdot R = 0{,}707 \cdot e^{j15} \cdot 10 = 7{,}07 \cdot e^{j45} \approx 6{,}829 + 1{,}830j$;

$\dot{U}_L = \dot{I} \cdot Z_L = 0{,}707 \cdot e^{j15} \cdot 20 \cdot e^{j90} = 14{,}14 \cdot e^{j105} \approx -3{,}660 + 13{,}658j$;

$\dot{U}_C = \dot{I} \cdot Z_C = 0{,}707 \cdot e^{j15} \cdot 10 \cdot e^{-j90} = 7{,}07 \cdot e^{-j75} \approx 1{,}830 - 6{,}829j$.

Перевірка:

$\dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C =$

$= 6{,}829 + 1{,}830j - 3{,}660 +$

$+ 13{,}658j + 1{,}830 - 6{,}829j =$

$= 5 + 8{,}659j = 10 \cdot e^{60j} = \dot{E}$.

Запишемо напругу на елементах у вигляді гармонічних функцій:

$u_R(t) \approx 7{,}07 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(10^3 t + 15^\circ), (B)$,

$u_L(t) \approx 14{,}14 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(10^3 t + 105^\circ), (B)$,

$u_C(t) \approx 7{,}07 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(10^3 t + 75^\circ), (B)$.

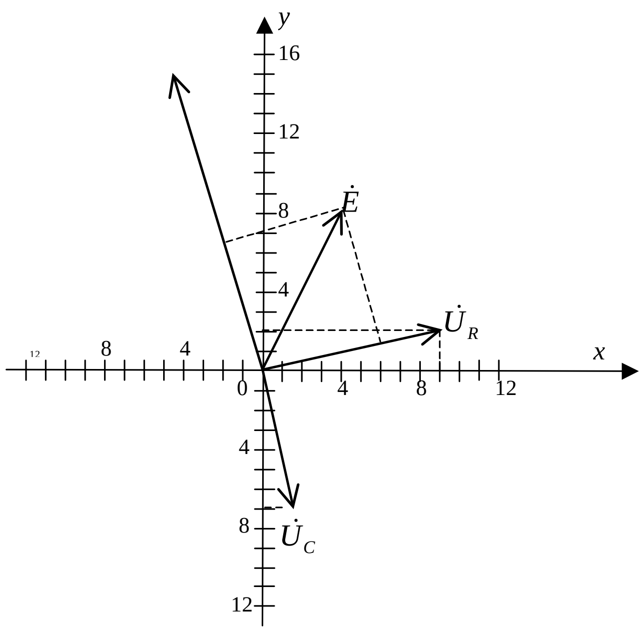

Рисунок 3.4

3. Баланс потужності полягає в тому, що потужність, вироблена джерелом, дорівнює потужності споживаного навантаження. Комплексна потужність джерела $\tilde{S}_и$: $\tilde{S}_и = \dot{E} \cdot Ô$, де $\dot{E}$ – напруга джерела, $\hat{I}$ – величина струму, спряжена знайденому, $Ô = 0{,}707 \cdot e^{-j15}$, $\tilde{S}_и = 10e^{j60} \cdot 0{,}707 \cdot e^{-j15} = 7{,}07 \cdot e^{j45} = 5 + j5 = P_п + jQ_п$, $P_и$ = 5 Вт, $Q_и$ = 5 ВАр.

Потужності, виділені на навантаженні $\tilde{S}_н = P_н + jQ_н$, де

$$P_н = I^2 \cdot R = 0{,}707^2 \cdot 10 = 5\,\text{Вт}.$$

$$Q_н = I^2 X_L - I^2 X_C = I^2 (X_L - X_C) = 0{,}707^2 \cdot (20 - 10) = 5 \text{ (ВАр)}.$$

Таким чином, $\tilde{S}_и = \tilde{S}_н$, тобто, $P_и = P_н$; $Q_и = P_н$.

Приклад 5. У колі рис. 3.5 діє гармонійне джерело струму $J(t)$. Всі елементи ланцюга включені паралельно. Між вузлами 1-2 має місце напруга $i_{12}(t)$.

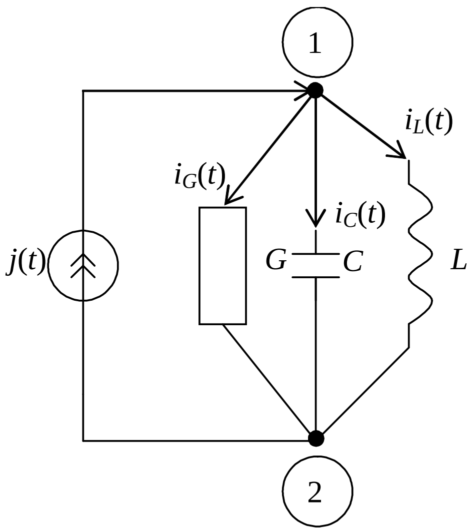

Рисунок 3.5

Визначити $i_{12}(t)$, струми, що протікають через елементи G, L, C, побудувати векторну діаграму струмів, перевірити баланс потужностей.

Вихідні дані: струм джерела, що задає

$$I(t) = I_m \cdot \sin(\omega t + \psi) = 1\sqrt{2} \cdot \sin(10^3 t + 30^\circ), \text{А}; \quad G = 0{,}1 \text{ См};$$

$$C = 200 \text{ мкФ} = 200 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}; \quad L = 0{,}01\,\text{Гн}.$$

Розв'язання.

1. Гармонійний струм джерела $i(t)$ перетворимо в комплексну форму:

$$\dot{I} = 1 \cdot e^{j90^\circ}, \text{ (А)}.$$

Визначимо комплексні провідності елементів кола:

$Y_G = G = 0.1,$

$Y_C = j\omega C = jB_C = j10^3 \cdot 200 \cdot 10^{-6} = j0{,}2 = 0{,}1 \cdot e^{j90°},$

$$Y_L = \frac{1}{j\omega L} = -jB_L = -j\frac{1}{10^3 \cdot 0{,}01} = -j0.1 = 0{,}1e^{-j90°}.$$

Комплексна провідність усього ланцюга:

$Y = Y_G + Y_C + Y_L = G + j(B_C - B_L) = 0.1 + j(0{,}2 - 0{,}1) = 0{,}1 + j0{,}1 = 0{,}1\sqrt{2} \cdot e^{j45}.$

Визначимо напругу між вузлами 1-2, на підставі закону Ома:

$$\dot{U}_{12} = \frac{\dot{I}}{Y} = \frac{1 \cdot e^{j90°}}{0{,}1\sqrt{2} \cdot e^{j45°}} = \frac{\omega}{\sqrt{2}} e^{j45°} = 5\sqrt{2}e^{j45°} = 5(1 + j).$$

Тимчасова форма цієї напруги

$u_{12}(t) = 5\sqrt{2} \cdot \sin(10^3 t + 45^\circ), (\text{B}).$

Знаючи напругу на елементах, за допомогою закону Ома визначимо струми:

$\dot{I}_G = \dot{U}_{12} \cdot G = 5\sqrt{2}e^{j45} \cdot 0{,}1 = 5\sqrt{2}e^{j45} = 0{,}5 + 0{,}5j.$

$$\left.\begin{aligned} \dot{I}_C &= \dot{U}_{12} \cdot Y_C = 5\sqrt{2}e^{j45} \cdot 0{,}2 \cdot e^{j90} = \sqrt{2}e^{j135} = -1 + j. \\ \dot{I}_L &= \dot{U}_{12} \cdot Y_L = 5\sqrt{2}e^{j45} \cdot 0.1 \cdot e^{-j90} = 0{,}5\sqrt{2}e^{-j45} = 0{,}5 - 0{,}5j. \end{aligned}\right\} \dot{I}_C + \dot{I}_L = -0.5 + j0.5.$$

Перевірка: $\dot{I}_G + \dot{I}_C + \dot{I}_L = 0{,}5 + 0{,}5j - 1 + 1j + 0{,}5 - 0{,}5j = +1j = 1 \cdot e^{j90} = \dot{I}.$

Струми запишемо у вигляді гармонічних функцій:

$i_G(t) \approx 0.707\sqrt{2} \cdot \sin(10^3 t + 45^\circ),\ A;$

$i_C(t) \approx 1.414\sqrt{2} \cdot \sin(10^3 t + 135^\circ),\ A;$

$i_L(t) \approx 0.707\sqrt{2} \cdot \sin(10^3 t - 45^\circ),\ A.$

Побудуємо векторну діаграму струмів (рис. 3.6).

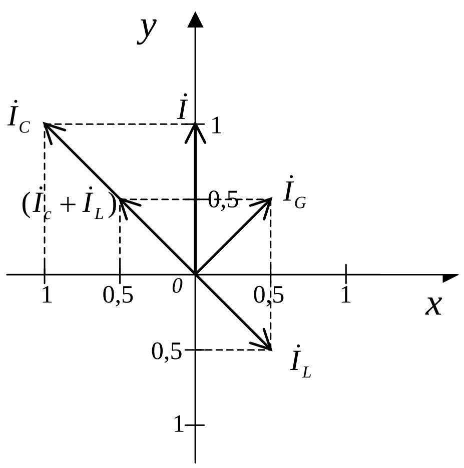

Рисунок 3.6

Перевіримо баланс потужностей.

Потужність джерела:

$\tilde{S}_u = \dot{U}_{12} \cdot O = 7.07 \cdot e^{j45} \cdot 1 \cdot e^{-j90} = 7.07 e^{-j45} = 5 - j5 = P_u + jQ_u$,

$P_u = 5$(Вт); $Q_u = 5$ (ВАр).

Потужність навантаження:

$P_н = U^2 \cdot G = 50 \cdot 0{,}1 = 5$(Вт);

$Q_н = +U^2 \cdot B_C = U^2 \cdot B_L = 7.07^2(0{,}2 - 0{,}1) = 5$ (ВАр).

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

3.88. Вирішити задачу за прикладом 1, якщо відомо, що

$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$, (В)

$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$, (А)

$U_m = (m + n)$, (В),

$I_m = 0{,}1 \cdot n(-1)^n$.

$\varphi_i^\circ = 5n$,

m-номер групи на потоці;

n-порядковий номер студента в групі.

3.89. Вирішити задачу за прикладом 4, якщо відомо що

$R = 2\,(Ом) \quad L = \dfrac{n \cdot 10^{-6}}{m+n}$ (Гн), $C = \dfrac{1}{2n(m+n)} 10^{-6} (Ф)$

$$\omega = (m+n)10^6 \left(\frac{р}{с}\right), \quad \varphi_i^\circ = 5n(-1)^n.$$

3. 90. Вирішити задачу за прикладом 4, якщо відомо що

$I_m = 0{,}1 \cdot n, (A), \quad \omega = (m+n)10^6 \left(\dfrac{p}{c}\right), \varphi^\circ = 5n(-1)^n$,

$G = \dfrac{1}{2n}(См), \quad C = \dfrac{10^{-6}}{2n(m+n)}(Ф), \quad L = \dfrac{n}{m+n} 10^{-6}(Гн).$