І. В. Стрелковська, А. Г. Буслаєв, В. М. Паскаленко

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ДЛЯ ФАХІВЦІВ В ГАЛУЗІ ЗВ'ЯЗКУ

Частина ІІ

Вступ до математичного аналізу
Диференціальне числення функцій однієї змінної
Диференціальне числення функцій кількох змінних

Затверджено Міністерством освіти і науки України
як підручник для студентів вищих навчальних закладів,
які навчаються за напрямом «Телекомунікації»

За загальною редакцією проф. **П. П. Воробієнка**

Одеса 2010

УДК 517/517.5
ББК 22.11я73
С 84

Затверджено Міністерством освіти і науки України як підручник для студентів вищих навчальних закладів, які навчаються за напрямом «Телекомунікації» (лист № 1.4/18-Г-75 від 10.01.2009 р.)

Автори:

Стрелковська І. В. Вища математика для фахівців в галузі зв'язку. Ч. II. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функцій однієї змінної. Диференціальне числення функцій кількох змінних: Підручник для студентів втузів / Стрелковська І. В., Буслаєв А. Г., Паскаленко В. М.; за заг. редакцією проф. П. П. Воробієнка. − Одеса: ВМВ, 2010. − 594 стор., іл.

Рецензенти:

Завідувач кафедри телекомунікаційних систем Харківського національного університету радіоелектроніки, д. т. н., професор **Поповський В. В.**;

Одеська державна академія будівництва та архітектури, доктор ф.-м. н., професор кафедри вищої математики **Черський Ю. Й.**;

завідувач кафедри морських перевезень Одеського національного морського університету д. т. н., професор **Шибаєв А. Г.**

При написанні підручника «Вища математика для фахівців в галузі зв'язку». Ч. II. авторами було використано багаторічний досвід викладання вищої математики в Одеській національній академії зв'язку ім. О. С. Попова. Були враховані рекомендації та вимоги щодо написання підручників для спеціалістів в галузі зв'язку. Підручник відповідає вимогам програми «Вища математика» для студентів вищих навчальних закладів (напрям «Телекомунікації»).

Кожний розділ містить тести для самоперевірки здобутих знань, тренувальні вправи, задачі для самостійного розв'язання. Подано довідкові відомості з таких розділів математики, як границі послідовностей; основні елементарні функції; окремі важливі криві, задані в параметричній формі та полярній системі координат; тригонометричні та гіперболічні функції, їхні графіки та формули перетворення.

Адресовано викладачам та студентам технічних спеціальностей, а також тим, хто цікавиться математикою і прагне вивчати її самостійно.

ISBN

ЗМІСТ

Глава 3. Неперервність функцій

Розділ II. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Глава 1. Похідні та диференціали функцій

Глава 2. Дослідження функцій за допомогою диференціального числення

Розділ III. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

Глава 1. Функції кількох змінних. Основні поняття

Глава 2. Похідні та диференціали функцій двох та кількох змінних

Глава 3. Дослідження функції двох змінних за допомогою диференціального числення

ПЕРЕДМОВА

Підручник містить осучаснений виклад трьох тем з курсу вищої математики: вступ до математичного аналізу, диференціальне числення функцій однієї змінної та диференціальне числення функцій кількох змінних – необхідних для кожного фахівця в галузі зв'язку. Без знання цих розділів вищої математики неможливе ефективне вивчання спеціальних дисциплін у вищому технічному закладі.

Виокремлення та узагальнення математичного матеріалу, необхідного для результативного засвоєння технічних навчальних курсів, узгоджено з вимогами, заувагами та рекомендаціями спеціальних кафедр, а багаторічний досвід співпраці у цій сфері дозволив авторам оптимально розподілити тематичне планування, котре забезпечує поетапність вивчення, взаємозв'язок фундаментальних математичних знань із фаховими знаннями. Матеріал запропонованого підручника є вступом до вивчення фахових дисциплін, не потребує додаткових поглиблених знань з вищої математики (достатнім є рівень засвоєння шкільних курсів з алгебри та геометрії).

Підручник має на меті допомогти студентам якісно засвоювати спеціальні розділи вищої математики для опанування професійною програмою в обсязі, зумовленому фаховими вимогами, а також сформувати загальне уявлення стосовно математичних навичок, потрібних для розв'язування нестандартних завдань.

Здобуті знання, поєднані із застосуванням персональних комп'ютерів, надаватимуть змогу заощаджувати інтелектуальні зусилля при розв'язанні переважної більшості математичних задач. Хоча такий спосіб є результативним та ощадливим для досягнення поставленої мети, але він не може замінити усвідомлення математичних засад, які впливають на загальну математичну культуру та універсальність знань.

Повнота засвоєння навчальної програми забезпечується доцільним вибором та розподілом тем, об'єднаних у три розділи: «Вступ до математичного аналізу», «Диференціальне числення функцій однієї змінної», «Диференціальне числення функцій кількох змінних», які складають другу частину пропонуємого курсу з вищої математики.

Розділ перший є вступом до математичного аналізу. Глава перша містить потрібну інформацію про послідовності та їхні границі. Глава друга містить визначення функцій однієї змінної, їхню класифікацію та основні властивості, визначення границі функції та властивості границь. Глава третя містить визначення неперервності функції, класифікацію точок розриву функцій, властивості неперервних функцій.

У другому розділі викладаються основні відомості з диференціального числення функції однієї змінної. В першій главі дано означення похідної, її геометричний та фізичний зміст, основні теореми та правила диференціювання функцій. В другій главі дано основні відомості про порядок і методи дослідження функцій однієї змінної за допомогою диференціального числення.

В третьому розділі здобуті знання з диференціального числення функції однієї змінної переносяться на функції двох і більше змінних. В першій главі вводяться поняття функції двох та кількох змінних. В другій главі визначається поняття похідної та диференціала функції кількох змінних та їх застосування. В третій главі дано відомості про дослідження функцій кількох змінних.

Наприкінці підручника в додатках міститься довідковий матеріал з елементарної та вищої математики.

Послідовність подавання структурних елементів зумовлено засадою взаємозалежності тем, що полегшує процес вивчення й забезпечує якісний рівень засвоєння матеріалу.

Викладений матеріал є достатнім для засвоєння тем підручника:

- враховано необхідність чіткого термінологічного визначення основних математичних понять;
- забезпечено доступний теоретичний виклад та пояснення до кожної теми, що ілюструється практичними прикладами, доповнюється графіками та кресленнями;
- відбір завдань та задач здійснено з урахуванням рівня складності, різних шляхів розв’язування, що сприятиме загальному розвиткові логічного мислення.

Зміст кожного з трьох розділів поділяється на блоки, наприкінці яких запропоновано методи розв’язування практичних завдань, сформульовано контрольні та тестові запитання для перевірки теоретичних та практичних знань студентів як при тестуванні, самоконтролі, так і на іспитах, наведено варіанти задач для самостійного розв’язування з відповідями до них. Достатня кількість прикладів та завдань даного підручника зорієнтована на електротехнічну спеціалізацію.

Призначено для студентів та викладачів вищих навчальних закладів освіти телекомунікаційного напряму та викладачів, також може бути корисним для всіх, хто цікавиться математикою у її практичному застосовуванні.

Р о з д і л І

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Г л а в а 1

ПОСЛІДОВНОСТІ. ГРАНИЦІ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

1.1 Числові послідовності

1.1.1 Послідовності. Основні поняття

В и з н а ч е н н я 1. Якщо задано закон, за яким кожному натуральному числу n відповідає певне дійсне число a_n, то множина дійсних чисел a_n називається ***числовою послідовністю***. Числа a_n називаються ***елементами*** або ***членами послідовності***.

Символічно послідовності позначаються так: $\{a_n\}$, де $n \in N$. Приміром, послідовність $\left\{\frac{n+1}{n^3}\right\}$ визначає множину чисел

$$2;\ \frac{3}{8};\ \frac{4}{27};\ \frac{5}{64};\ \frac{6}{125};\ \frac{7}{216};\ \ldots;\ \frac{n+1}{n^3};\ \ldots,$$

а послідовність $\left\{n+\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ – множину чисел

$$0;\ \frac{5}{2};\ \frac{8}{3};\ \frac{17}{4};\ \frac{24}{5};\ \ldots;\ n+\frac{(-1)^n}{n};\ \ldots$$

В и з н а ч е н н я 2. Послідовність $\{a_n\}$ називається ***зростаючою***, якщо кожний член послідовності, починаючи з другого, більше за попередній, тобто $a_{n+1} > a_n$ та ***неспадною***, якщо $a_{n+1} \geq a_n$ для будь-якого натурального числа n.

В и з н а ч е н н я 3. Послідовність $\{a_n\}$ називається ***спадною***, якщо кожний член послідовності, починаючи з другого, менше за попередній, тобто $a_{n+1} < a_n$ та ***незростаючою***, якщо $a_{n+1} \leq a_n$ для будь-якого натурального числа n. Зростаючі, спадні, незростаючі та неспадні послідовності називаються ***монотонними***. Зростаючі та спадні послідовності при цьому називаються ***строго монотонними***.

В и з н а ч е н н я 4. Послідовність $\{a_n\}$ називається ***обмеженою зверху***, якщо існує таке дійсне число M, що всі елементи послідовності задовольняють нерівність $a_n \leq M$.

В и з н а ч е н н я 5. Послідовність $\{a_n\}$ називається ***обмеженою знизу***, якщо існує таке дійсне число m, що всі елементи послідовності задовольняють нерівність $m \leq a_n$.

В и з н а ч е н н я 6. Послідовність $\{a_n\}$ називається ***обмеженою***, якщо вона обмежена і зверху, і знизу, тобто якщо існують такі дійсні числа m та M, що для всіх елементів послідовності є справедливою нерівність

$$m \le a_n \le M. \tag{1.1}$$

Позначимо через $A = \max\left(|m|, |M|\right)$. Тоді для обмеженої послідовності є справедливою нерівність

$$-A \le a_n \le A. \tag{1.2}$$

Нерівності (1.1) та (1.2) являють собою ***умови обмеженості послідовності***. Визначення обмеженої послідовності можна подати у іншому вигляді.

В и з н а ч е н н я 7. Послідовність $\{a_n\}$ називається ***обмеженою***, якщо існує таке додатне число A, що для всіх елементів послідовності є справедливою нерівність $|a_n| \le A$.

В и з н а ч е н н я 8. Послідовність $\{a_n\}$ називається ***необмеженою***, якщо для будь-якого як завгодно великого додатного числа A існує хоча б один елемент послідовності, який задовольняє умову $|a_n| > A$.

ЗАУВАЖЕННЯ. Послідовність, що обмежена лише зверху або лише знизу, також належить до необмежених послідовностей.

1.1.2 Арифметичні операції над послідовностями

Над послідовностями можна виконувати арифметичні операції. Якщо $\{a_n\}$ та $\{b_n\}$ – дві довільні послідовності, то ***сумою*** цих послідовностей називається послідовність $\{a_n + b_n\}$, ***різницею*** – послідовність $\{a_n - b_n\}$, ***добутком*** – послідовність $\{a_n b_n\}$, а ***часткою*** – послідовність $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$, якщо $b_n \ne 0$, де a_n та b_n – елементи відповідно послідовностей $\{a_n\}$ та $\{b_n\}$.

1.2 Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності

1.2.1 Поняття нескінченно малої та нескінченно великої послідовностей

В и з н а ч е н н я 1. Послідовність $\{a_n\}$ називається ***нескінченно малою***, якщо для будь-якого, як завгодно малого додатного числа ε існує такий номер N, залежний від ε, що всі елементи цієї послідовності з номером $n > N$ задовольняють умову $|a_n| < \varepsilon$.

В и з н а ч е н н я 2. Послідовність $\{a_n\}$ називається ***нескінченно великою***, якщо для будь-якого як завгодно великого числа A існує таке число N, залежне від A, що всі елементи цієї послідовності з номером $n > N$ задовольняють умову $|a_n| > A$.

ЗАУВАЖЕННЯ 1. Під номером N будемо розуміти натуральне число.

ЗАУВАЖЕННЯ 2. Кожна нескінченно велика послідовність є необмеженою, але не кожна необмежена послідовність є нескінченно великою.

1.2.2 Властивості нескінченно малих та нескінченно великих послідовностей

Розглянемо деякі властивості, притаманні нескінченно малим та нескінченно великим послідовностям.

Теорема 1. Сума двох нескінченно малих послідовностей також є нескінченно малою послідовністю.

Доведення

Нехай $\{\alpha_n\}$ та $\{\beta_n\}$ – нескінченно малі послідовності. Доведемо, що послідовність $\{\alpha_n + \beta_n\}$ – нескінченно мала послідовність.

Візьмемо деяке як завгодно мале додатне число ε_1. Тоді, згідно із визначенням 1, існує такий номер N_1, що для всіх $n > N_1$ є справедливою нерівність $|\alpha_n| < \varepsilon_1$. Візьмемо деяке як завгодно мале додатне число ε_2. Тоді існує такий номер N_2, що для всіх $n > N_2$ є справедливою нерівність $|\beta_n| < \varepsilon_2$.

Візьмемо тепер як завгодно мале додатне число ε. До того ж, покладемо, що $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2}$, $\varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon}{2}$. Нехай $N = \max\{N_1, N_2\}$. Розглянемо послідовність $\{\alpha_n + \beta_n\}$.

$$|\alpha_n + \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ для всіх } n > N.$$

З цього випливає, що послідовність $\{\alpha_n + \beta_n\}$ – нескінченно мала послідовність.

Наслідок. Алгебраїчна сума скінченної кількості нескінченно малих послідовностей є нескінченно малою послідовністю.

Теорема 2. Різниця двох нескінченно малих послідовностей є також нескінченно малою послідовністю.

Доведення

Нехай $\{\alpha_n\}$ та $\{\beta_n\}$ – нескінченно малі послідовності. Доведемо, що послідовність $\{\alpha_n - \beta_n\}$ також нескінченно мала послідовність. Вочевидь, що коли $\{\beta_n\}$ – нескінченно мала послідовність, то і $\{-\beta_n\}$ – нескінченно мала послідовність. Розглянемо послідовність

$$\{\alpha_n - \beta_n\} = \{\alpha_n + (-\beta_n)\}.$$

На підставі теореми 1 можна стверджувати, що послідовність $\{\alpha_n - \beta_n\}$ – нескінченно мала послідовність.

Теорема 3. Нескінченно мала послідовність є обмежена.

Доведення

Нехай $\{\alpha_n\}$ – нескінченно мала послідовність. Це означає, що для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує такий номер N, залежний від ε, що всі елементи послідовності з номером $n > N$ задовольняють умову $|\alpha_n| < \varepsilon$. Запишемо послідовність $\{\alpha_n\}$ у розгорнутому вигляді:

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3, \ldots, \alpha_{N-2},\ \alpha_{N-1},\ \alpha_N,\ \alpha_{N+1}, \alpha_{N+2}, \ldots .$$

Всі елементи послідовності, починаючи з α_{N+1}, за модулем менші ніж ε. Позначимо $A = \max\{\varepsilon, |\alpha_1|, |\alpha_2|, \ldots, |\alpha_N|\}$. Тоді можна стверджувати, що всі елементи послідовності задовольняють нерівність $|\alpha_n| < A$, що і доводить обмеженість послідовності $\{\alpha_n\}$.

Теорема 4. Добуток обмеженої послідовності на нескінченно малу послідовність є нескінченно малою послідовністю.

Доведення

Нехай $\{x_n\}$ – обмежена послідовність, а $\{\alpha_n\}$ – нескінченно мала послідовність. Отже, існує таке число $A > 0$, що для будь-якого номера n виконується умова $|x_n| < A$. Візьмемо будь-яке як завгодно мале додатне число ε і припустимо, що $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{A}$. Для обраного числа ε_1 існує такий номер N, залежний від ε_1, що усі елементи послідовності з номером $n > N$ задовольняють нерівність $|\alpha_n| < \varepsilon_1$. Розглянемо послідовність $\{x_n\alpha_n\}$. Візьмемо число $\varepsilon > 0$ та доведемо, що $|x_n\alpha_n| < \varepsilon$, починаючи з деякого номера.

$$|x_n\alpha_n| = |x_n| \cdot |\alpha_n| < A \cdot \varepsilon_1 = A \cdot \frac{\varepsilon}{A} = \varepsilon \text{ для } n > N.$$

З цього виходить, що послідовність $\{x_n\alpha_n\}$ – нескінченно мала послідовність.

Наслідок. Добуток скінченної кількості нескінченно малих послідовностей є також нескінченно мала послідовність.

Теорема 5. 1) Якщо $\{\sigma_n\}$ – нескінченно велика послідовність, то послідовність $\left\{\dfrac{1}{\sigma_n}\right\}$, починаючи з деякого номера n, є нескінченно малою послідовністю.

2) Якщо всі елементи нескінченно малої послідовності $\{\alpha_n\}$ відрізняються від нуля, то послідовність $\left\{\dfrac{1}{\alpha_n}\right\}$ є нескінченно великою послідовністю.

Д о в е д е н н я

1) За умовою $\{\sigma_n\}$ – нескінченно велика послідовність, тоді для будь-якого як завгодно великого додатного числа A існує такий номер N, що, починаючи з $n > N$, виконується нерівність $|\sigma_n| > A$. Візьмемо за A число $A = \dfrac{1}{\varepsilon}$, де ε – будь-яке як завгодно мале додатне число. Починаючи з деякого номера N, всі елементи послідовності $\{\sigma_n\}$ з номером $n > N$ задовольняють нерівність $|\sigma_n| > A = \dfrac{1}{\varepsilon}$. Вочевидь, що, оскільки всі елементи цієї послідовності, починаючи з номера $n > N$, відрізняються від нуля, можна говорити про послідовність $\left\{\dfrac{1}{\sigma_n}\right\}$ для будь-якого $n > N$. Доведемо, що ця послідовність є нескінченно малою. Візьмемо за ε додатне число $\varepsilon = \dfrac{1}{A}$. Вже відомо, що $|\sigma_n| > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Тоді $\left|\dfrac{1}{\sigma_n}\right| < \varepsilon$ для будь-якого $n > N$, а це означає, що послідовність $\left\{\dfrac{1}{\sigma_n}\right\}$ є нескінченно малою послідовністю.

Аналогічно доводиться і друге твердження теореми.

Завдання для самостійної роботи. Довести друге твердження теореми 5.

1.3 Збіжні послідовності та їхні властивості

1.3.1 Поняття збіжної послідовності

В и з н а ч е н н я 1. Послідовність $\{a_n\}$ називається ***збіжною до числа a***, якщо послідовність $\{a_n - a\}$ є нескінченно малою послідовністю.

В и з н а ч е н н я 2. Послідовність $\{a_n\}$ називається ***збіжною до числа a***, якщо для будь-якого як завгодно малого додатного числа ε існує такий номер N, залежний від ε, що всі елементи послідовності з номером $n > N$ задовольняють умову $|a_n - a| < \varepsilon$.

В и з н а ч е н н я 3. Послідовність $\{a_n\}$ називається ***збіжною до числа a***, якщо для будь-якого як завгодно малого додатного числа ε існує такий номер $N = N(\varepsilon)$, що всі елементи послідовності з номером $n > N$ перебувають у ε-околі числа a, тобто в інтервалі $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$.

Якщо послідовність $\{ a_n \}$ збігається до числа a, то число a називається ***границею послідовності***, коли $n \to \infty$, що символічно позначається так: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Н а с л і д о к. Визначення 1…3 збіжної послідовності є еквівалентні.

ЗАУВАЖЕННЯ. Для скорочення запису інколи використовують символи, звані кванторами. Так, символ $\forall$ означає "для будь-якого", "для кожного", а символ $\exists$ означає "існує".

1.3.2 Властивості збіжних послідовностей

Теорема 1. Для того, щоб послідовність $\{ a_n \}$ мала границю, що дорівнює a, необхідно та достатньо, щоб існувала така нескінченно мала послідовність $\{ \alpha_n \}$, що, починаючи з деякого номера N, всі елементи послідовності $\{ \alpha_n \}$ з номером n > N можна подати у вигляді

$$a_n = a + \alpha_n. \tag{1.3}$$

Д о в е д е н н я

Необхідність. Нехай послідовність $\{ a_n \}$ має границю, що дорівнює a, тобто

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a. \tag{1.4}$$

Доведемо, що $a_n = a + \alpha_n$, де α_n – елемент нескінченно малої послідовності $\{ \alpha_n \}$. Із визначення 1 збіжної послідовності виходить, що $\{ a_n - a \} = \{ \alpha_n \}$, де α_n – елемент нескінченно малої послідовності $\{ \alpha_n \}$. Отже, $a_n - a = \alpha_n$, тобто $a_n = a + \alpha_n$, починаючи з номера $n > N$.

Достатність. Нехай є справедливою рівність (1.3). Тоді $a_n - a = \alpha_n$. Отже, $\{ a_n - a \} = \{ \alpha_n \}$, згідно з визначенням 1 збіжної послідовності доходимо висновку, що

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Теорема 2. Будь-яка нескінченно мала послідовність збігається, а її границя дорівнює нулю.

Д о в е д е н н я

Нехай $\{ \alpha_n \}$ – нескінченно мала послідовність. Отже, для будь-якого як завгодно малого додатного числа $\varepsilon > 0$ існує номер N, залежний від ε, такий, що всі елементи послідовності з номером $n > N$ задовольняють умову $|\alpha_n| < \varepsilon$, з чого виходить, що $|\alpha_n - 0| < \varepsilon$. Тоді, згідно з визначенням 2 збіжної послідовності, можна стверджувати, що $\{ \alpha_n \}$ – збіжна послідовність і що $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

ЗАУВАЖЕННЯ. Якщо послідовність $\{ \sigma_n \}$ є нескінченно великою послідовністю, то символічно її границя позначається як $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \infty$.

Слід мати на увазі, що нескінченно велика послідовність не є збіжною і даний символічний запис засвідчує лише те, що послідовність $\{\sigma_n\}$ є нескінченно великою послідовністю, але це не означає, що вона має скінченну границю.

Якщо, починаючи з деякого номера N, елементи послідовності $\{\sigma_n\}$ є додатні, то записують $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n = +\infty$, а якщо ж елементи послідовності $\{\sigma_n\}$, починаючи з деякого номера N, є від'ємні, то записують $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n = -\infty$.

Теорема 3. Якщо послідовність збігається, то вона має лише одну границю.

Д о в е д е н н я

Нехай послідовність $\{a_n\}$ збігається та $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Припустимо, що існує ще одна границя, яка дорівнює b, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$. Тоді, згідно з теоремою 1, дістанемо такі рівності:

$a_n = a + \alpha_n$ для будь якого $n > N_1$ та $a_n = b + \beta_n$ для будь якого $n > N_2$,

де α_n та β_n – відповідно елементи нескінченно малих послідовностей $\{\alpha_n\}$ та $\{\beta_n\}$. Віднявши почленно ці рівності, дістанемо

$$0 = (a-b) + (\alpha_n - \beta_n),$$

звідки

$$a - b = \beta_n - \alpha_n.$$

Але, оскільки $\{b_n - \alpha_n\}$ – нескінченно мала послідовність, то виходить, що і $\{a-b\}$ – нескінченно мала послідовність, тобто $\lim\limits_{n\to\infty}(a-b) = 0$. Оскільки $a-b$ є стала величина, то для будь-якого n маємо $a - b \equiv 0$, звідки $a \equiv b$.

Отже, збіжна послідовність має лише одну границю.

Теорема 4. Збіжна послідовність є обмежена.

Д о в е д е н н я

Нехай $\{a_n\}$ – збіжна послідовність і $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. За теоремою 1 маємо

$$a_n = a + \alpha_n$$

де $\{\alpha_n\}$ – нескінченно мала послідовність.

Це означає, що a_n є сумою двох чисел, одне з яких є сталою, а друге – елемент нескінченно малої послідовності. Тоді можна стверджувати, що і послідовність $\{a_n\}$ – обмежена.

Теорема *5.* Сума, різниця, добуток та частка збіжних послідовностей є також збіжна послідовність. При цьому границя суми, різниці, добутку та частки відповідно дорівнюють сумі, різниці, добуткові та частці границь (останнє твердження є справедливе лише за умови, що границя знаменника відрізняється від нуля), тобто є справедливі такі рівності:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

Д о в е д е н н я

Нехай $\{a_n\}$ та $\{b_n\}$ – збіжні послідовності і $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Отже, справедливі рівності

$$a_n = a + \alpha_n, \quad \text{де } n > N_1 \tag{1.5}$$

та

$$a_n = b + \beta_n, \quad \text{де } n > N_2, \tag{1.6}$$

де α_n та β_n – відповідно елементи нескінченно малих послідовностей $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$.

1. Додамо почленно рівності (1.5) та (1.6): $a_n + b_n = (a+b) + (\alpha_n + \beta_n)$, де $\alpha_n + \beta_n$-елемент нескінченно малої послідовності, якщо $n > N = \max\{N_1; N_2\}$.

За теоремою 1 маємо

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n. \tag{1.7}$$

2. Від рівності (1.5) почленно віднімемо рівність (1.6): $a_n - b_n = (a-b) + (\alpha_n - \beta_n)$, де $\alpha_n - \beta_n$ – елемент нескінченно малої послідовності, якщо $n > N = \max\{N_1; N_2\}$.

За теоремою 1 маємо

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n. \tag{1.8}$$

3. Помножимо почленно рівність (1.5) на рівність (1.6):

$$a_n b_n = ab + (a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n \beta_n),$$

де $a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n \beta_n$ – елемент нескінченно малої послідовності та $n > N = \max\{N_1; N_2\}$.

За теоремою 1 маємо

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n b_n\right)=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n. \qquad (1.9)$$

4. Будемо вважати, що $\lim_{n\to\infty}b_n=b\neq 0$. Тоді

$\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{a+\alpha_n}{b+\beta_n}=\dfrac{a}{b}+\dfrac{a+\alpha_n}{b+\beta_n}-\dfrac{a}{b}=\dfrac{a}{b}+\dfrac{ab+b\alpha_n-ab-a\beta_n}{b\left(b+\beta_n\right)}=\dfrac{a}{b}+\dfrac{b\alpha_n-a\beta_n}{b^2+b\beta_n}$, де $n>N=\max\left\{N_1;N_2\right\}$.

Вочевидь, що $\left\{\dfrac{b\alpha_n-a\beta_n}{b^2+b\beta_n}\right\}$ – нескінченно мала послідовність, оскільки послідовність $\left\{b\alpha_n-a\beta_n\right\}$ є нескінченно малою, а послідовність $\left\{\dfrac{1}{b^2+b\beta_n}\right\}$ є обмеженою. За теоремою 1, маємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{a}{b}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n},\quad \text{де } \lim_{n\to\infty}b_n\neq 0. \qquad (1.10)$$

1.4 Граничний перехід у нерівностях

Теорема 1. Якщо послідовність $\left\{a_n\right\}$ збігається до числа a та всі її елементи a_n задовольняють нерівність $m<a_n$, то її границя a задовольняє нерівність $m\leq a$, тобто $m\leq\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

Д о в е д е н н я

Припустимо, що $m>a$, тоді $m-a>0$. Так як $\left\{a_n\right\}$ – збіжна послідовність, то для будь-якого як завгодно малого додатного числа $\varepsilon>0$ існує такий номер N, залежний від ε, що $\left|a_n-a\right|<\varepsilon$ для будь-якого $n>N$. Візьмемо за ε число $\varepsilon=m-a>0$. Отже, $-\varepsilon<a_n-a<\varepsilon$, тобто $a-m<a_n-a<m-a$. З нерівності $a_n-a<m-a$ виходить, що $a_n<m$ для $n>N$, а це суперечить умові, тобто нерівність $a<m$ є неможлива. Отже, $m<a$, тобто $m\leq\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

Теорема 2. Якщо послідовність $\left\{a_n\right\}$ збігається до числа a та всі її елементи a_n задовольняють нерівність $a_n<M$, то її границя a задовольняє нерівність $a\leq M$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\leq M$.

Завдання для самостійної роботи. Довести справедливість теореми 2.

Теорема 3. Якщо $\left\{a_n\right\}$ та $\left\{b_n\right\}$ – збіжні послідовності та, починаючи з деякого номера n, $a_n<b_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\leq\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

Завдання для самостійної роботи. Довести справедливість теореми 3.

Теорема 4 (теорема Гур'єва). Якщо послідовності $\{a_n\}$ та $\{c_n\}$ збігаються, причому $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = k$, то послідовність $\{b_n\}$, елементи якої задовольняють нерівність $a_n \le b_n \le c_n$, теж збігається, причому $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = k$.

Д о в е д е н н я

За умовою для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існують відповідно такі номери N_1 та N_2, залежні від ε, що виконуються нерівності

$$|a_n - k| < \varepsilon \text{ для будь-якого } n > N_1$$

та

$$|c_n - k| < \varepsilon \text{ для будь-якого } n > N_2.$$

Звідси

$$-\varepsilon < a_n - k < \varepsilon \text{ для будь-якого } n > N_1, \tag{1.11}$$

$$-\varepsilon < c_n - k < \varepsilon \text{ для будь-якого } n > N_2. \tag{1.12}$$

Розглянемо нерівність $a_n \le b_n \le c_n$. Ця нерівність є еквівалентна до нерівності $a_n - k \le b_n - k \le c_n - k$. З урахуванням нерівностей (1.11) та (1.12), маємо

$$-\varepsilon < a_n - k \le b_n - k \le c_n - k < \varepsilon \tag{1.13}$$

для будь-якого $n > N = \max\{N_1, N_2\}$.

З нерівності (1.13) виходить, що $-\varepsilon < b_n - k < \varepsilon$ для будь-якого $n > N$ чи $|b_n - k| < \varepsilon$ для будь-якого $n > N$. Це означає, що $\{b_n\}$ − збіжна послідовність, до того ж $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = k$.

1.5 Монотонні послідовності. Друга чудова границя

Теорема (достатня умова збіжності послідовності). Якщо послідовність обмежена і монотонна, то вона є збіжною.

Приймемо цю теорему без доведення.

Надалі нам доведеться користуватися границею послідовності

$$\{a_n\} = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}.$$

Покажемо, що існує $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. З цією метою доведемо, що послідовність $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ є монотонна та обмежена.

Розглянемо вираз $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ і перетворимо його за допомогою формули бінома Ньютона.

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{n}{1!}\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\left(\frac{1}{n}\right)^4+\ ...\ +\frac{n(n-1)(n-2)...1}{n!}\left(\frac{1}{n}\right)^n.$$

Після скорочення дістанемо

$$a_n=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \quad (1.14)$$

Аналогічно знайдемо

$$a_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\cdots+$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right). \quad (1.15)$$

Усі доданки у правих частинах рівностей (1.14) та (1.15) є додатні. Усі доданки правої частини рівності (1.14), починаючи з третього, є менше відповідних доданків у рівності (1.15). Виходить, $a_{n+1}\geq a_n$. Це свідчить про те, що послідовність $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ є зростаюча. До того ж, $a_1=2$, отже, послідовність $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ є обмежена знизу.

Тепер доведемо, що ця послідовність є обмежена і зверху за допомогою таких перетворень:

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+$$
$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Зважаючи на те, що вираз $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$ є сумою n членів геометричної прогресії, знаменник q якої дорівнює $\frac{1}{2}$, доходимо висновку, що за формулою суми n членів геометричної прогресії

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}<2.$$

Тоді $a_n < 1+2=3$. Отже, $2 \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$ для будь-якого n, тобто послідовність $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ є обмежена. З цього випливає, що ця послідовність, як монотонна та обмежена, має границю згідно з достатньою умовою збіжності послідовності. Цією границею є ірраціональне число, яке позначається символом **e** (на честь видатного математика Леонарда Ейлера): $\mathrm{e} = 2{,}71828182845904523...$

Отже, доведено рівність

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}, \tag{1.16}$$

яку називають другою чудовою границею.

Число e використовують у інженерних розрахунках. Логарифми, основою яких є число e, називають ***натуральними***. Вони позначаються символом $\ln b = \log_{\mathrm{e}} b$.

1.6 Невизначені вирази

Домовимось нескінченно малі послідовності (н. м. п.) та нескінченно великі послідовності (н. в. п.) символічно позначати відповідно 0 та ∞, а сталу величину позначатимемо *c*. Тоді з розглянутих раніше властивостей нескінченно малих та нескінченно великих послідовностей виходить, що є справедливими рівності

1. $0 + 0 = 0$;
2. $0 - 0 = 0$;
3. $c \cdot 0 = 0$;
4. $0 \cdot 0 = 0$;
5. $\frac{0}{c} = 0$;
6. $\frac{c}{0} = \infty$;
7. $\infty \cdot \infty = \infty$;
8. $c \cdot \infty = \infty$;
9. $\frac{\infty}{c} = \infty$;
10. $\frac{c}{\infty} = 0$;
11. $\infty + \infty = \infty$ (якщо обидві н. в. п. одного знака).

ЗАУВАЖЕННЯ. Всі ці вирази треба розуміти в граничному значенні.

Деякі випадки, які поєднують нескінченно малі послідовності, нескінченно великі послідовності або нескінченно малі та нескінченно великі послідовності, не ввійшли в цей перелік. Йдеться про вирази: $\left[\frac{0}{0}\right]$; $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$; $[0\cdot\infty]$; $[\infty^0]$; $[0^0]$; $\left[1^\infty\right]$ та $[\infty-\infty]$ (якщо обидві н. в. п. одного знака). Такі вирази називаються ***невизначеностями***. Відповісти, чому саме дорівнює та чи інша невизначеність взагалі складно. У кожному конкретному випадку доводиться з'ясовувати, чому саме дорівнює подана невизначеність. Цей процес називається ***розкриттям невизначеності***.

1.7 Приклади до глави 1

Властивості послідовностей

Приклад 1.1. Задано перші члени послідовності $\{x_n\}$: $x_1 = 2,\ \ x_2 = 7,$ $x_3 = 12, \ldots$. Знайти формулу загального члена послідовності.

Р о з в ’ я з а н н я

Члени послідовності утворюються за певним законом, а саме: кожен наступний член послідовності є більше за попередній на 5. Тобто маємо арифметичну прогресію, де перший член прогресії $a_1 = 2$, а різниця прогресії $d = 5$. Знайдемо n-й член прогресії a_n . Як відомо,

$$a_n = a_1 + d(n-1),$$

тобто

$$a_n = 2 + 5(n-1) = 5n - 3 \ .$$

Отже, маємо послідовність 2, 7, 12, 17, 22, …, $5n - 3$, …, тобто $\{5n-3\}$.

В і д п о в і д ь: $\{5n-3\}$.

Приклад 1.2. Довести, що послідовність $\left\{\dfrac{5+(-1)^n n}{\sqrt{n^2+4}}\right\}$ є обмежена.

Р о з в ’ я з а н н я

Будемо виходити з визначення обмеженої послідовності. Розглянемо загальний член заданої послідовності

$$a_n = \frac{5+(-1)^n n}{\sqrt{n^2+4}}$$

та оцінимо його модуль

$$|a_n| = \frac{\left|5+\left(-1\right)^n n\right|}{\sqrt{n^2+4}} \le \frac{5+n}{n} = 1 + \frac{5}{n} \le 6.$$

Отже, можна стверджувати, що $|a_n| \le 6$ для будь-якого n, тобто задана послідовність є обмежена.

Приклад 1.3. Довести, що послідовність $\left\{\left(-1\right)^{3n} n^3\right\}$ є необмежена.

Р о з в ’ я з а н н я

Будемо виходити з визначення необмеженої послідовності. Запишемо послідовність у вигляді: $-1,\ 2^3,\ -3^3,\ 4^3,\ -5^3,\ \ldots,\ (-1)^{3n} n^3,\ \ldots$.
Нехай M – будь-яке як завгодно велике додатне число. Чи можлива нерівність $\left|\left(-1\right)^{3n} n^3\right| > M$?

Вочевидь, що $\left|(-1)^{3n} n^3\right| = \left|n^3\right| = n^3$. Тоді, якщо $n^3 > M$, то, оскільки n – число натуральне, дістанемо розв'язок $n > \sqrt[3]{M}$. Отже, задана послідовність є необмежена.

Приклад 1.4. Перевірити, чи є необмеженою послідовність $\left\{ n + (-1)^n n \right\}$.

Р о з в ' я з а н н я

Запишемо послідовність у вигляді

$$0,\ 4,\ 0,\ 8,\ 0,\ 12,\ 0,\ \ldots,\ n + (-1)^n n,\ \ldots .$$

Нехай M – будь-яке як завгодно велике додатне число. Розглянемо нерівність $\left| n + (-1)^n n \right| > M$.

$$\left| n + (-1)^n n \right| = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n = 2k+1; \\ 2n, & \text{якщо } n = 2k, \end{cases} \qquad \text{де } k \in N.$$

У випадку, коли $n = 2k$ маємо

$$\left| n + (-1)^n n \right| = |\,4k\,| = 4k, \text{ де } k \in N.$$

Якщо $k > \dfrac{1}{4}M$, то $|\,4k\,| > M$. Звідси виходить, що послідовність необмежена.

В і д п о в і д ь: послідовність необмежена.

Приклад 1.5. З'ясувати, чи є обмеженими послідовності

$$1)\ \left\{ \frac{1}{n^2} \right\}; \quad 2)\ \left\{ \frac{1+(-1)^n}{2} n^2 \right\}.$$

Р о з в ' я з а н н я

1) Послідовність $\left\{ \dfrac{1}{n^2} \right\}$ є обмеженою, тому що

$$0 < \frac{1}{n^2} \le 1,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

2) Послідовність $\left\{ \dfrac{1+(-1)^n}{2} n^2 \right\}$ задає множину чисел:

$$0,\ 4,\ 0,\ 16,\ 0,\ 36,\ 0,\ 64,\ \ldots,\ \frac{1+(-1)^n}{2} n^2,\ \ldots .$$

Оберемо як завгодно велике додатне число A та з'ясуємо, чи можлива нерівність

$$\left| \frac{1+(-1)^n}{2} n^2 \right| > A.$$

Ця нерівність є тотожна до нерівності $\dfrac{1+(-1)^n}{2} n^2 > A$. Для непарних n дана нерівність розв'язків не має. Якщо ж n – парне число, то маємо нерівність $n^2 > A$, розв'язком якої в області натуральних чисел є значення $n > \sqrt{A}$, де $n = 2k$, $k \in N$. Цим доведено, що послідовність є необмежена. Взявши до уваги, що всі елементи послідовності задовольняють нерівність

$$\frac{1+(-1)^n}{2} n^2 \ge 0,$$

можна стверджувати, що ця послідовність обмежена знизу та необмежена зверху.

В і д п о в і д ь: 1) послідовність обмежена; 2) послідовність необмежена.

Приклад 1.6. Довести, що послідовність $\left\{ n^2 + (-1)^n n^2 \right\}$ не є монотонна.

Р о з в ' я з а н н я

Запишемо задану послідовність у розгорнутому вигляді.

$$0,\ 8,\ 0,\ 32,\ 0,\ \ldots$$

Вочевидь, що жодна з умов монотонності послідовності не виконується. Отже, задана послідовність не є монотонна.

Приклад 1.7. Довести, що послідовність $\left\{ \frac{5^{n+5}}{(n+5)!} \right\}$ є строго спадною.

Р о з в ' я з а н н я

Виходячи з визначення строго спадної послідовності, маємо довести нерівність: $a_{n+1} - a_n < 0$.

У даному разі

$$a_n = \frac{5^{n+5}}{(n+5)!}; \quad a_{n+1} = \frac{5^{n+6}}{(n+6)!}.$$

Тоді

$$a_{n+1} - a_n = \frac{5^{n+6}}{(n+6)!} - \frac{5^{n+5}}{(n+5)!} = \frac{5^{n+5} \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n+5)(n+6)} - \frac{5^{n+5}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n+5)} =$$

$$= \frac{5^{n+5}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n+5)} \left(\frac{5}{n+6} - 1 \right) = \frac{5^{n+5}}{(n+5)!} \cdot \frac{5-n-6}{n+6} = \frac{5^{n+5}}{(n+5)!} \cdot \frac{(-n-1)}{n+6} = -\frac{(1+n) \cdot 5^{n+5}}{(n+6)!} < 0.$$

Отже, задана послідовність дійсно є строго спадною.

Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності

Приклад 1.8. Скориставшись визначенням нескінченно малої послідовності, довести, що послідовність $\left\{\dfrac{7}{2-3n}\right\}$ є нескінченно малою.

Р о з в ' я з а н н я

Виходячи з визначення нескінченно малої послідовності $\{\alpha_n\}$, маємо довести, що для будь-якого як завгодно малого додатного числа ε існує такий номер $N = N(\varepsilon)$, що всі елементи послідовності з номером $n > N$ задовольняють умову $|\alpha_n| < \varepsilon$. Отже, оберемо число $\varepsilon > 0$ і розглянемо нерівність

$$\left|\frac{7}{2-3n}\right| < \varepsilon .$$

Для того, щоб розв'язати нерівність, позбудемось модуля. Оскільки n – число натуральне, то для будь-якого n маємо

$$\frac{7}{2-3n} < 0, \quad \text{звідки} \quad \left|\frac{7}{2-3n}\right| = -\frac{7}{2-3n} = \frac{7}{3n-2}.$$

Тоді

$$\frac{7}{3n-2} < \varepsilon, \quad \frac{3n-2}{7} > \frac{1}{\varepsilon},$$

$$3n - 2 > \frac{7}{\varepsilon}, \quad 3n > 2 + \frac{7}{\varepsilon} \quad \text{чи} \quad n > \frac{2}{3} + \frac{7}{3\varepsilon}.$$

Нерівність розв'язано.

Розглянемо число $N = \left[\dfrac{2}{3} + \dfrac{7}{3\varepsilon}\right]$, де символом $\left[\dfrac{2}{3} + \dfrac{7}{3\varepsilon}\right]$ позначено цілу частину числа $\dfrac{2}{3} + \dfrac{7}{3\varepsilon}$. Тоді виходить, що задана послідовність є нескінченно малою, оскільки для будь-якого як завгодно малого додатного числа ε існує такий номер $N = N(\varepsilon)$, що для будь-якого $n > N$ виконується нерівність $\left|\dfrac{7}{2-3n}\right| < \varepsilon$.

Математичною символікою, тобто за допомогою кванторів, останнє твердження можна записати у такий спосіб:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, N = N(\varepsilon) > 0:\ \forall n > N \Rightarrow \left|\frac{7}{2-3n}\right| < \varepsilon . \qquad (*)$$

Розглянемо частинні випадки ε.

Припустимо, що $\varepsilon = 0{,}1$, тоді

$$N = \left[\frac{7}{3\cdot 0{,}1} + \frac{2}{3}\right] = 24.$$

Якщо ж $\varepsilon = 0{,}01$, то

$$N = \left[\frac{7}{3\cdot 0{,}01} + \frac{2}{3}\right] = 234.$$

Отже, для кожного ε існує свій номер N, починаючи з якого, виконується нерівність (∗). Здобуті результати можна трактувати в такий спосіб: якщо ε = 0,1, то всі елементи послідовності, починаючи з 25-го, потрапляють до інтервалу (–0,1; 0,1), а якщо ε = 0,01, то всі елементи послідовності, починаючи з 235-го, перебувають в інтервалі (–0.01; 0.01).

Приклад 1.9. Користуючись визначенням нескінченно малої послідовності, довести, що послідовність $\left\{ \frac{4}{n+1} \right\}$ є нескінченно малою.

Р о з в ' я з а н н я

Оберемо будь-яке як завгодно мале додатне число ε. Розглянемо нерівність

$$\left| \frac{4}{n+1} \right| < \varepsilon .$$

Вочевидь, що $\frac{4}{n+1} \geq 0$. Тоді $\frac{4}{n+1} < \varepsilon$. Розв'яжемо цю нерівність відносно *n*. Маємо:

$$4 < \varepsilon(n+1); \quad 4 < \varepsilon n + \varepsilon; \quad \varepsilon n > 4 - \varepsilon; \quad n > \frac{4}{\varepsilon} - 1.$$

Отже, $N = \left[\frac{4}{\varepsilon} - 1 \right]$.

Зокрема, якщо $\varepsilon = 0{,}1$, то N = 39, якщо $\varepsilon = 0{,}01$, то N = 399. У такий спосіб показано, що для будь-якого ε можна знайти такий номер $N = N(\varepsilon)$, що всі елементи a_n з номером $n > N$ задовольняють умову $|a_n| < \varepsilon$. Виходить, що $\left\{ \frac{4}{n+1} \right\}$ – нескінченно мала послідовність.

Приклад 1.10. Користуючись визначенням нескінченно великої послідовності, довести, що послідовність $\left\{ (-1)^n n^2 \right\}$ є нескінченно великою.

Р о з в ' я з а н н я

Використуємо визначення нескінченно великої послідовності. Маємо довести, що для будь-якого як завгодно великого додатного числа *M* існує такий номер *N,* що всі елементи послідовності з номером $n > N$ задовольняють умову $\left| (-1)^n n^2 \right| > M$, тобто для будь-якого $M > 0$ існує такий номер *N*, що для будь-якого $n > N$

$$\left| (-1)^n n^2 \right| > M .$$

Отже, оберемо число $M > 0$ та розглянемо нерівність $\left| (-1)^n n^2 \right| > M$.

Тоді, оскільки n – число натуральне, дістанемо розв'язок $n^2 > M$, звідки $n > \sqrt{M}$. Нехай $N = \left[\sqrt{M}\right]$, звідси $\left|(-1)^n n^2\right| > M$, якщо $n > N$.

У такий спосіб дійшли висновку, що задана послідовність є нескінченно великою.

Слід зауважити, що для кожного M існує свій номер N. Припустимо, що $M = 100$, тоді $N = 10$, а якщо $M = 10000$, то $N = 100$. Отриманий результат можна трактувати у такий спосіб: якщо $M = 100$, то всі елементи послідовності, починаючи з 11-го, належать до одного з проміжків $(-\infty, -100)$ та $(100, +\infty)$, а коли $M = 10000$, то всі елементи послідовності, починаючи зі 101-го, належать до одного з проміжків $(-\infty, -10000)$ та $(10000, +\infty)$.

ЗАУВАЖЕННЯ. Слід звернути увагу на те, що послідовність $\left\{(-1)^n n^2\right\}$ як нескінченно велика послідовність водночас є і необмеженою.

Приклад 1.11. Перевірити, чи є нескінченно великою послідовність $\left\{n + (-1)^n n\right\}$.

Р о з в ' я з а н н я

Як і в попередньому прикладі будемо виходити з визначення нескінченно великої послідовності. Запишемо послідовність у такий спосіб:

$$\left\{n + (-1)^n n\right\} = \begin{cases} 2n, & \text{якщо } n = 2k; \\ 0, & \text{якщо } n = 2k+1, \end{cases} \quad \text{де } k \text{ натуральне число.}$$

Отже, для будь-якого $M > 0$ має існувати таке натуральне число $N = N(M)$, що всі елементи послідовності з парними номерами $n > N$ задовольняють нерівність

$$\left|n + (-1)^n n\right| > M .$$

Насправді, для $n = 2k$ маємо $\left|n + (-1)^n n\right| = \left|2k + (-1)^{2k} 2k\right| = \left|4k\right| = \left|2n\right| = 2n$, звідки $2n > M$, $n > \frac{1}{2}M$. Але елементи послідовності з непарними номерами цю умову не задовольняють:

$$\left|2k + 1 + (-1)^{2k+1}(2k+1)\right| = \left|2k + 1 - (2k+1)\right| = 0 < M ,$$

тобто задана послідовність не є нескінченно великою, але вона є необмеженою зверху послідовністю.

В і д п о в і д ь: послідовність не є нескінченно великою.

Приклад 1.12. Встановити, чи є а) необмеженими, б) нескінченно великими задані послідовності: 1) $\left\{n^3\right\}$; 2) $\left\{(-1)^n n^2\right\}$.

Р о з в ' я з а н н я

1) Розглянемо послідовність $\left\{n^3\right\}$. Ця послідовність визначає множину чисел 1, 8 , 27, 64 , 125, ..., n^3, ... Оберемо як завгодно велике додатне число M

та з'ясуємо, чи можлива нерівність $\left|n^3\right| > M$. Цю нерівність можна записати у вигляді $n^3 > M$. Оскільки n – натуральне число, то $n > \sqrt[3]{M}$. Візьмемо за $N = \left[\sqrt[3]{M}\right]$. Отже, якщо $n > N$, де $N = \left[\sqrt[3]{M}\right]$, то $n^3 > M$ та $\left|n^3\right| > M$. Тим самим доведено, що послідовність $\left\{n^3\right\}$ є нескінченно великою та необмеженою послідовністю. Беручі до уваги, що при будь-якому номері n є справедливою нерівність $1 \le n^3$, можна стверджувати, що ця послідовність є обмеженою знизу.

2) Послідовність $\left\{(-1)^n n^2\right\}$ визначає множину чисел –1, 4, –9, 16, –25, ..., $(-1)^n n^2$, ... Оберемо як завгодно велике додатне число M. З'ясуємо, чи можлива нерівність $\left|(-1)^n n^2\right| > M$. Ця нерівність є еквівалентна до нерівності $0 < M < n^2$ і в області натуральних чисел виконується, коли $n > \sqrt{M}$. Отже, всі елементи, номери яких $n > N$, де $N = \left[\sqrt{M}\right]$, задовольняють нерівність $\left|(-1)^n n^2\right| > M$, а це означає, що послідовність $\left\{(-1)^n n^2\right\}$ є нескінченно великою і при цьому необмеженою.

В і д п о в і д ь: 1) послідовність є необмеженою та нескінченно великою; 2) послідовність є необмеженою та нескінченно великою.

Границі послідовностей

Приклад 1.13. Користуючись визначенням границі послідовності, довести, що число $a = \dfrac{3}{5}$ є границею послідовності $\left\{a_n\right\} = \left\{\dfrac{3n-2}{4+5n}\right\}$.

Р о з в ' я з а н н я

Будемо спиратись на визначення 1 збіжної послідовності та спробуємо довести, що послідовність $\left\{a_n - a\right\}$ є нескінченно малою. Коли так, то це означає, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Отже, оберемо будь-яке як завгодно мале додатне число ε та оцінимо величину $\left|a_n - a\right|$.

$$\left|\frac{3n-2}{4+5n} - \frac{3}{5}\right| = \left|\frac{5(3n-2) - 3(4+5n)}{5(4+5n)}\right| = \left|\frac{-22}{5(4+5n)}\right| = \frac{22}{5(4+5n)}.$$

Далі розв'яжемо нерівність

$$\frac{22}{5(4+5n)} < \varepsilon.$$

Після певних перетворень дістанемо розв’язок:

$$4+5n>\frac{22}{5\varepsilon},\quad 5n>\frac{22}{5\varepsilon}-4,\quad n>\frac{22}{25\varepsilon}-\frac{4}{5}.$$

Нехай $N=\left[\frac{22}{25\varepsilon}-\frac{4}{5}\right]$. Отже, для обраного числа ε знайдено такий номер N, що коли $n>N$, то $|a_n-a|<\varepsilon$. Звідси виходить, що послідовність $\left\{\frac{3n-2}{4+5n}-\frac{3}{5}\right\}$ є нескінченно малою, а послідовність $\left\{\frac{3n-2}{4+5n}\right\}$ є збіжною і збігається до числа $a=\frac{3}{5}$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-2}{4+5n}=\frac{3}{5}$.

Проаналізуємо дістаний результат, користуючись визначенням 3 збіжної послідовності.

Якщо $\varepsilon=0{,}1$, то $N=\left[\frac{22}{2{,}5}-\frac{4}{5}\right]=8$, а якщо $\varepsilon=0{,}01$, то $N=\left[\frac{22}{0{,}25}-\frac{4}{5}\right]=87$. Отже, коли ε = 0.1, то усі елементи послідовності, починаючи з 9-го, належать до інтервалу (0,5; 0,7), а коли ε = 0,01, то усі елементи послідовності, починаючи з 88-го, належать до інтервалу (0,59; 0,61).

Завдання для самостійної роботи. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-2}{4+5n}=\frac{3}{5}$ та заповнити таблицю для послідовності $\left\{\frac{3n-2}{4+5n}\right\}$.

ε	$0{,}5$	$0{,}07$	$6\cdot10^{-5}$	$7\cdot10^{-8}$
N				
$(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$				

Приклад 1.14. Користуючись визначенням збіжної послідовності, довести, що послідовність $\left\{\frac{3n}{8n+4}\right\}$ збігається до числа $a=\frac{3}{8}$.

Р о з в ’ я з а н н я

Розглянемо послідовність $\left\{\frac{3n}{8n+4}-\frac{3}{8}\right\}$ та переконаємося у тому, що вона є нескінченно малою. Оберемо будь-яке як завгодно мале додатнє число ε та розглянемо нерівність

$$\left|\frac{3n}{8n+4}-\frac{3}{8}\right|<\varepsilon.$$

Виконаємо спрощення:

$$\left|\frac{24n-24n-12}{8(8n+4)}\right|<\varepsilon,\quad \frac{3}{2(8n+4)}<\varepsilon.$$

З'ясуємо, для якого n виконується нерівність $\frac{3}{2(8n+4)}<\varepsilon$. Дістанемо $\frac{3}{2\varepsilon}<8n+4$, звідки $n>\frac{3}{16\varepsilon}-\frac{1}{2}$. Вочевидь, що для обраного числа $\varepsilon>0$ існує такий номер $N=\left[\frac{3}{16\varepsilon}-\frac{1}{2}\right]$, за якого всі елементи послідовності з номером $n>N$ задовольняють нерівність $\left|\frac{3n}{8n+4}-\frac{3}{8}\right|<\varepsilon$.

Приміром, якщо $\varepsilon=0{,}1$, то $N=[1{,}375]=1$, а якщо $\varepsilon=0{,}01$, то $N=[18{,}25]=18$. За визначенням 2, задана послідовність збігається. Можна дійти до того ж висновку в інший спосіб. З останньої нерівності виходить, що послідовність $\left\{\frac{3n}{8n+4}-\frac{3}{8}\right\}$ є нескінченно малою. За визначенням 1 послідовність $\left\{\frac{3n}{8n+4}\right\}$ – є збіжна, при цьому $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n}{8n+4}=\frac{3}{8}$.

Приклад 1.15. Знайти границю послідовності

$$\left\{\frac{4n^2+3n-5}{5n^2+9n-7}\right\}.$$

Р о з в ' я з а н н я

За умовою маємо знайти

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+3n-5}{5n^2+9n-7}.$$

Для зручності позначимо границю заданої послідовності через A.

При знаходженні границі послідовності підставимо граничне значення n, тобто ∞, замість n у вираз $\frac{4n^2+3n-5}{5n^2+9n-7}$. Спираючись на властивості нескінченно великих послідовностей, доходимо висновку, що, коли n прямує до нескінченності, чисельник та знаменник також прямують до нескінченності. А вираз

$\dfrac{4n^2+3n-5}{5n^2+9n-7}$, коли $n \to \infty$, являє собою невизначеність типу $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Символічно це позначають у такий спосіб:

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+3n-5}{5n^2+9n-7} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Для кожного типу невизначеності існують спеціальні прийоми її розкриття. Приміром, невизначеність типу $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ можна розкрити у такий спосіб: чисельник та знаменник водночас поділити на n у найбільшому степені. У даному разі їх треба поділити на n^2.

Отже, маємо

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+3n-5}{5n^2+9n-7} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{4n^2+3n-5}{n^2}}{\dfrac{5n^2+9n-7}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{4n^2}{n^2}+\dfrac{3n}{n^2}-\dfrac{5}{n^2}}{\dfrac{5n^2}{n^2}+\dfrac{9n}{n^2}-\dfrac{7}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4+\dfrac{3}{n}-\dfrac{5}{n^2}}{5+\dfrac{9}{n}-\dfrac{7}{n^2}}.$$

Переходимо до аналізу здобутого результату. Згідно з теоремою 5 (п. 1.2.2), доходимо висновку, що послідовності $\left\{\dfrac{3}{n}\right\}$, $\left\{\dfrac{5}{n^2}\right\}$, $\left\{\dfrac{9}{n}\right\}$ та $\left\{\dfrac{7}{n^2}\right\}$ є нескінченно малими як обернені до нескінченно великих послідовностей. Отже, згідно з теоремою 2 (п. 1.3.2),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{9}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{7}{n^2} = 0.$$

Далі, спираючись на теорему 5 (п. 1.3.2), дістанемо такий результат:

$$A = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(4+\dfrac{3n}{n^2}-\dfrac{5}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+\dfrac{9n}{n^2}-\dfrac{7}{n^2}\right)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 4 + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{n} - \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 5 + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{9}{n} - \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7}{n^2}} = \frac{4}{5}.$$

Відповідь: $\dfrac{4}{5}$.

ЗАУВАЖЕННЯ 1. Інформацію про методи розкриття невизначеностей можна дістати у Додатку А.

ЗАУВАЖЕННЯ 2. Домовимось надалі арифметичні операції над границями послідовностей виконувати усно.

Приклад 1.16. Знайти границю послідовності

$$\left\{\frac{4n^5+3n-5}{5n^2+9n-7}\right\}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Позначимо границю заданої послідовності через

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^5 + 3n - 5}{5n^2 + 9n - 7}.$$

Підставивши граничне значення n до заданого виразу, доходимо висновку, що маємо справу з невизначеністю типу $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$:

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^5 + 3n - 5}{5n^2 + 9n - 7} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Поділимо чисельник та знаменник на n^5. Дістанемо

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{4 + \frac{3}{n^4} - \frac{5}{n^5}}{\frac{5}{n^3} + \frac{9}{n^4} - \frac{7}{n^5}}.$$

Нескладно помітити, що коли $n \to \infty$, то границя чисельника дорівнює 4, а границя знаменника дорівнює 0. Отже, здобуто послідовність, обернену до нескінченно малої. Згідно з теоремою 5 (п. 1.2.2), можна стверджувати, що отримано нескінченно велику послідовність, тобто $A = \infty$.

В і д п о в і д ь: ∞.

Приклад 1.17. Знайти границю послідовності

$$\left\{\frac{4n^2 + 3n - 5}{5n^7 + 9n - 7}\right\}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Позначимо границю заданої послідовності через

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2 + 3n - 5}{5n^7 + 9n - 7}.$$

Підставивши граничне значення n, доходимо висновку, що

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2 + 3n - 5}{5n^7 + 9n - 7} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Як і у попередніх прикладах, чисельник та знаменник поділимо водночас на n у найбільшому степені, тобто на n^7:

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4}{n^5} + \frac{3}{n^6} - \frac{5}{n^7}}{5 + \frac{9}{n^6} - \frac{7}{n^7}}.$$

Коли $n \to \infty$, границя знаменника дорівнює 5, а границя чисельника – 0. У відповідності з властивостями нескінченно малих послідовностей, дістанемо відповідь: $A = 0$.

Відповідь: 0.

ЗАУВАЖЕННЯ. Нехай загальний член послідовності являє собою відношення двох многочленів відповідно степенів k та r , тобто $a_n = \dfrac{P_k(n)}{Q_r(n)}$. Тоді: 1) якщо старші степені многочленів є рівні між собою, тобто $k = r$, то границя такої послідовності дорівнює відношенню коефіцієнтів при старших степенях (див. приклад 1.15); 2) якщо старший степінь чисельника більший, ніж у знаменника, тобто $k > r$, то границя такої послідовності дорівнює нескінченності (див. приклад 1.16); 3) якщо старший степінь чисельника менше, ніж у знаменника, то границя такої послідовності дорівнює 0 (див. приклад 1.17).

Приклад 1.18. Знайти границю послідовності

$$\sqrt{n}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+4}\right).$$

Розв'язання

Позначимо границю заданої послідовності через

$$A = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+4}\right).$$

Підставивши граничне значення n до заданого виразу, доходимо висновку, що маємо справу з невизначеністю типу $[\infty - \infty]$. Отже,

$$A = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+4}\right) = [\infty-\infty].$$

Таку невизначеність можна розкрити, помноживши та поділивши водночас поданий вираз на вираз $\sqrt{n+3}+\sqrt{n+4}$, що є спряженим до виразу $\sqrt{n+3}-\sqrt{n+4}$.

Виходить,

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+4}\right)\left(\sqrt{n+3}+\sqrt{n+4}\right)}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\left(\left(\sqrt{n+3}\right)^2-\left(\sqrt{n+4}\right)^2\right)}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+4}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\left(n+3-n-4\right)}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+4}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Від невизначеності типу $[\infty - \infty]$ прийшли до невизначеності типу $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Розкриємо цю невизначеність, для чого поділимо чисельник та знаменник на n у найбільшому степені, тобто на $n^{\frac{1}{2}}$ чи $\sqrt{n}$:

$$A=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}}{\frac{\sqrt{n+3}}{\sqrt{n}}-\frac{\sqrt{n+4}}{\sqrt{n}}}=-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{n+3}{n}}+\sqrt{\frac{n+4}{n}}}=-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1+\frac{4}{n}}}=-\frac{1}{2}.$$

Відповідь: $-\frac{1}{2}$

Приклад 1.19. Знайти границю послідовності

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-4}{3n-6}\right)^{7n-8}.$$

Р о з в ' я з а н н я

Позначимо задану границю послідовності через

$$A=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-4}{3n-6}\right)^{7n-8}.$$

Підставимо граничне значення n до заданого виразу. Виходить,

$$A=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-4}{3n-6}\right)^{7n-8}=[1^{\infty}],$$

тобто дістали невизначеність типу $[1^{\infty}]$. Слід мати на увазі, що часто таку невизначеність можна розкрити, спираючись на так звану другу чудову границю, тобто на формулу (1.16): $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$. Отже, виконаємо такі перетворення, які дозволяли б користуватися цією формулою. До виразу у дужках додамо та віднімемо одиницю. Маємо

$$A=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3n-4}{3n-6}-1\right)^{7n-8}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{3n-6}\right)^{7n-8}.$$

Внаслідок проведених перетворень, перший доданок дорівнюватиме одиниці, як і у формулі (1.16). Тепер звернемо увагу на те, що у формулі (1.16) другий доданок $\frac{1}{n}$ та показник степеня n є взаємно обернені, до того ж, другий доданок прямує до нуля, а показник степеня прямує до нескінченності. Зробимо таке тотожне перетворення: помножимо показник степеня на вираз $\frac{3n-6}{2}$, що є оберненим до другого доданка, а потім поділимо на цей самий вираз.

$$A=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{3n-6}\right)^{\frac{3n-6}{2}\cdot\frac{2(7n-8)}{3n-6}}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{3n-6}\right)^{\frac{3n-6}{2}}\right)^{\frac{14n-16}{3n-6}}.$$

Позначимо $3n-6=2t$. Тоді $n=\dfrac{2t+6}{3}$; $\dfrac{2}{3n-6}=\dfrac{1}{t}$; $\dfrac{3n-6}{2}=t$. Коли $n\to\infty$, то і $t\to\infty$. Окрім того,

$$\frac{14n-16}{3n-6}=\frac{2(7n-8)}{3n-6}=\frac{1}{t}\left(7\cdot\frac{2t+6}{3}-8\right)=\frac{14t-18}{3t}.$$

Тепер маємо

$$A=\lim_{t\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{\frac{14t-18}{3t}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{t\to\infty}\frac{14t-18}{3t}}=\mathrm{e}^{\frac{14}{3}}.$$

В і д п о в і д ь: $\mathrm{e}^{\frac{14}{3}}$.

Приклад 1.20. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}$.

Р о з в ’ я з а н н я

Позначимо задану границю послідовності через

$$A=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}.$$

Тоді

$$A=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}=[1^{\infty}]=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n\sqrt{n}}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}}=\mathrm{e}^{0}=1.$$

В і д п о в і д ь: 1.

ЗАУВАЖЕННЯ. Систематизувати методи розкриття невизначеностей при знаходженні границь послідовностей допоможе таблиця з Додатка А.

Глава 2

ФУНКЦІЇ. ГРАНИЦІ ФУНКЦІЙ

2.1 Функції. Основні поняття

2.1.1 Визначення функції. Класифікація функцій

Визначення 1. Множина X усіх значень, яких може набувати змінна x, називається ***областю змінювання*** цієї змінної.

Визначення 2. Якщо задано закон, за яким кожному значенню незалежної змінної $x \in X$ відповідає певне значення змінної $y \in Y$, то змінна y називається ***функцією змінної x***. При цьому використовується позначення $y = f(x)$. Множина X називається ***областю визначення функції*** $f(x)$, множина Y − ***областю значень функції*** $f(x)$, а символ f − характеристикою функції.

Визначення 3. Якщо кожному значенню змінної x з області визначення X відповідає одне значення змінної y з області значень Y, то функція $y = f(x)$ називається ***однозначною***, у противному разі – ***багатозначною***.

Надалі розглядатимемо лише однозначні функції.

ЗАУВАЖЕННЯ 1. Область визначення функції, яка містить усі значення незалежної змінної, за яких існує функція, іноді називається ***природною областю визначення функції*** або ***областю існування функції***. У низці випадків область визначення функції звужують і така область визначення вже не може називатися природною областю визначення функції.

Приміром, природною областю визначення функції $y = \left(\pi h x^2\right)/3$ є множина значень $x \in (-\infty; +\infty)$. Але, якщо вважати, що y – це значення об’єму конуса, який змінюється залежно від радіуса x, то тоді за область визначення функції слід вважати множину значень $x \in [0; +\infty)$.

ЗАУВАЖЕННЯ 2. Якщо областю визначення функції є множина цілих чисел, то функція називається ***функцією цілочисельного аргументу***.

ЗАУВАЖЕННЯ 3. Функція цілочисельного аргументу, областю визначення якої є множина натуральних чисел, являє собою послідовність.

Способи задавання функцій

1. *Табличний* спосіб задавання функції − це такий спосіб, коли за допомогою таблиці значенням аргументу ставлять у відповідність значення функції. Приміром, таблиці квадратів, таблиці логарифмів та ін.

2. *Графічний* спосіб задавання функції − це такий спосіб, коли функції зображуються за допомогою сукупності точок на площині xOy, абсциси яких відповідають значенням незалежної змінної, а ординати − відповідним значенням функції.

3. *Аналітичний* спосіб задавання функції − це такий спосіб, коли залежність між x і y задається за допомогою формули.

Приміром, аналітично заданими є такі функції:

$$y = 4x^2 + 5x - 6; \qquad y = \begin{cases} -x, & \text{якщо } x < 0; \\ x, & \text{якщо } x \ge 0; \end{cases} \qquad x + e^y = 3.$$

Функція, подана у вигляді $y = f(x)$, називається ***явно заданою функцією***, а функція $y = f(x)$, подана у вигляді $F(x, y) = 0$, називається ***неявно заданою функцією***.

В и з н а ч е н н я 1. ***Основними елементарними функціями*** називаються такі аналітично задані функції:

$$y = x^{\alpha},\ \alpha \in R; \qquad y = a^x,\ a > 0,\ a \ne 1; \qquad y = \log_a x,\ a > 0,\ a \ne 1;$$

$$y = \sin x; \qquad y = \cos x; \qquad y = \mathrm{tg}\ x; \qquad y = \mathrm{ctg}\ x;$$

$$y = \arcsin x; \qquad y = \arccos x; \qquad y = \mathrm{arctg}\ x; \qquad y = \mathrm{arcctg}\ x.$$

ЗАУВАЖЕННЯ 1. Частинним випадком функції $y = a^x$ є функція $y = \mathrm{e}^x$, яка називається ***експоненціальною функцією (експонентою)***. Для такої функції використовується позначення $y = \exp x$.

В и з н а ч е н н я 2. ***Елементарними функціями*** називаються функції, які можна отримати з основних елементарних функцій за допомогою чотирьох арифметичних операцій або скінченної кількості операцій знаходження функції від функції.

Приміром, функція $y = \sin^2 x + x^2 \cos 2x$ є елементарною функцією, а функція $y = \begin{cases} 3, \text{ якщо } x > 0; \\ -3 \text{ якщо } x < 0 \end{cases}$ не є елементарною функцією.

ЗАУВАЖЕННЯ 2. Додаткову інформацію про основні елементарні функції можна дістати у Додатку Б.

ЗАУВАЖЕННЯ 3. Додаткову інформацію про деякі елементарні функції можна дістати у Додатку В.

В и з н а ч е н н я 3. Функція $y = f(x)$ називається ***алгебраїчною функцією***, якщо її значення можна здобути, виконуючи над незалежною змінною скінченну кількість алгебраїчних дій, таких як додавання, віднімання, множення, ділення та піднесення до степеня з раціональним показником. Функція, що не є алгебраїчною, називається ***трансцендентною***.

В и з н а ч е н н я 4. Алгебраїчна функція називається ***раціональною***, якщо серед дій, які виконуються над незалежною змінною, відсутня операція знаходження кореня. Алгебраїчна функція називається ***ірраціональною***, якщо вона не є раціональною функцією.

В и з н а ч е н н я 5. Функція $y = f\left(\varphi(x)\right)$ називається ***складною***, якщо вона може бути утворена за допомогою функції $u = \varphi(x)$ з областю визначення $x \in X$ та областю значень $u \in U$ і функції $y = f(u)$ з областю визначення $u \in U$ та областю значень $y \in Y$. При цьому функція $u = \varphi(x)$ називається ***внутрішньою***, а функція $y = f(u)$ − ***зовнішньою***.

2.1.2 Парні, непарні функції та їхні властивості

В и з н а ч е н н я 1. Функція $y = f(x)$ називається ***парною***, якщо:

1) її область визначення X є симетрична відносно початку координат, тобто, якщо коли $x \in X$, то і $-x \in X$;
2) для будь-якого x з області визначення X є справедливою рівність
$$f(x) = f(-x).$$

Графік парної функції є симетричний відносно осі Oy.

В и з н а ч е н н я 2. Функція $y = f(x)$ називається ***непарною***, якщо:

1) її область визначення X є симетрична відносно початку координат, тобто, якщо коли $x \in X$, то і $-x \in X$;
2) для будь-якого x з області визначення X є справедливою рівність
$$f(-x) = -f(x).$$

Графік непарної функції є симетричний відносно початку координат.

Основні властивості парних та непарних функцій

1. Алгебраїчна сума двох парних функцій є парна функція.
2. Алгебраїчна сума двох непарних функцій є непарна функція.
3. Добуток двох парних функцій є парна функція.
4. Добуток двох непарних функцій є парна функція.
5. Добуток парної та непарної функцій є непарна функція.
6. Якщо $y = f(u)$ та $u = \varphi(x)$ − непарні функції, то складна функція $y = f\left(\varphi\left(x\right)\right)$ також є непарною.
7. Якщо $y = f(u)$ та $u = \varphi(x)$ − парні функції, то складна функція $y = f\left(\varphi\left(x\right)\right)$ також є парною.
8. Якщо $y = f(u)$ − парна функція, а $u = \varphi(x)$ − непарна функція, то складна функція $y = f\left(\varphi\left(x\right)\right)$ є парною.
9. Якщо $y = f(x)$ − парна функція та $f(x) \neq 0$, то функція $y = \dfrac{1}{f(x)}$ є парною.
10. Для парних та непарних функцій є справедливою умова
$$\left| f(x) \right| = \left| f(-x) \right|.$$
11. Кожну функцію $y = f(x)$, визначену на симетричній відносно початку координат множині, можна подати у вигляді суми парної та непарної функцій у такий спосіб:
$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$
де перший доданок – парна функція, а другий – непарна функція, причому таке подання є єдине.

Завдання для самостійної роботи. Довести справедливість властивостей парних та непарних функцій.

2.1.3 Періодичні функції та їхні властивості

В и з н а ч е н н я. Функція $y = f(x)$ називається ***періодичною***, якщо існує таке додатне число $T \neq 0$, що для будь-якого x з області визначення X є справедливою рівність $f(x + T) = f(x)$. При цьому число T називається ***періодом функції***, а найменший з додатних періодів − ***основним періодом***. Якщо число T є одним з періодів функції, то числа $\pm 2T, \pm 3T, \pm 4T, \ldots$ також є періодами цієї функції.

Графік періодичної функції повторюється на кожному проміжку довжиною T.

Основні властивості періодичних функцій

1. Сума та добуток двох функцій з періодом T є функціями з періодом T. При цьому, якщо число T було найменшим додатним періодом двох заданих функцій, то після їхнього додавання або множення T може більш не бути найменшим з додатних періодів. Період алгебраїчної суми періодичних функцій дорівнює найменшому спільному кратному періодів всіх додаваних функцій.

Інколи бувають корисними наведені нижче формули.

Період функції $f(x) = c_1 \sin\frac{\alpha_1}{\beta_1}x + c_2\cos\frac{\alpha_2}{\beta_2}x$ знаходиться за формулою

$$T = \frac{\text{НСК}\left(\beta_1;\ \beta_2\right)}{\text{НСД}\left(\alpha_1;\ \alpha_2\right)}\cdot 2\pi,$$

а період функції $f(x) = c_1 \operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{\beta_1}x + c_2 \operatorname{ctg}\frac{\alpha_2}{\beta_2}x$ − за формулою

$$T = \frac{\text{НСК}\left(\beta_1,\ \beta_2\right)}{\text{НСД}\left(\alpha_1,\ \alpha_2\right)}\pi,$$

де $\text{НСК}\left(\beta_1;\ \beta_2\right)$ – найменше спільне кратне чисел β_1, β_2; $\text{НСД}\left(\alpha_1,\ \alpha_2\right)$ – найбільший спільний дільник чисел α_1, α_2.

2. Якщо функція $u = \varphi(x)$ є періодична, то складна функція $y = f(\varphi(x))$ теж є періодичною. Якщо ж при цьому функція $y = f(x)$ є монотонна, то періоди функцій $u = \varphi(x)$ та $y = f(\varphi(x))$ збігаються.

3. Якщо $y = f(x)$ – періодична функція з періодом T, то функція $y = f(kx)$ теж є періодична з періодом $t = \frac{T}{k}$, де k – будь-яке дійсне число, що відрізняється від нуля, а значення x та kx входять до області визначення функції.

4. Якщо $y = f(x)$ – періодична функція з періодом T, то функція $y = f\left(kx + l\right)$ – також періодична функція з періодом $t = \frac{T}{k}$, де k та l – будь-які дійсні числа.

5. Якщо графік функції $y = f(x)$ з областю визначення $(-\infty, \infty)$ є симетричним відносно прямих $x = a$ та $x = b$, де $b > a$, то функція $y = f(x)$ є періодичною, а її період $T = 2(b-a)$.

6. Якщо графік функції $y = f(x)$ з областю визначення $(-\infty, \infty)$ є симетричним відносно двох точок $A(a, c)$ та $B(b, c)$, де $b > a$, то функція $y = f(x)$ є періодичною, а її період $T = 2(b-a)$.

Завдання для самостійної роботи. Довести справедливість властивостей періодичних функцій.

Серед періодичних функцій певний інтерес становить функція Діріхле:

$$D(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \ x - \text{раціональне;} \\ 0, \text{ якщо } \ x - \text{ірраціональне.} \end{cases}$$

Область визначення функції: $x \in (-\infty, +\infty)$.

Область значень функції: $y \in \{0, 1\}$.

Функція Діріхле є періодичною функцією з будь-яким ненульовим раціональним періодом.

2.1.4 Монотонні функції та їхні властивості

Визначення 1. Функція $y = f(x)$ називається ***зростаючою у точці*** x_0, якщо існує такий окіл точки x_0, що для будь-якого $x < x_0$ з цього околу справедлива нерівність

$$f(x) < f(x_0), \tag{1.17}$$

а для будь-якого $x > x_0$ з цього околу справедлива нерівність

$$f(x_0) < f(x), \tag{1.18}$$

та ***неспадною***, якщо нерівності (1.17) та (1.18) набувають відповідно вигляду

$$f(x) \le f(x_0) \tag{1.19}$$

та

$$f(x_0) \le f(x). \tag{1.20}$$

Визначення 2. Функція $y = f(x)$ називається ***спадною у точці*** x_0, якщо існує такий окіл точки x_0, що для будь-якого $x < x_0$ з цього околу справедлива нерівність

$$f(x) > f(x_0), \tag{1.21}$$

а для будь-якого $x > x_0$ з цього околу справедлива нерівність

$$f(x_0) > f(x), \tag{1.22}$$

та ***незростаючою***, якщо нерівності (1.21) та (1.22) набувають відповідно вигляду

$$f(x) \geq f(x_0) \tag{1.23}$$

та

$$f(x_0) \geq f(x). \tag{1.24}$$

В и з н а ч е н н я 3. Функція $y = f(x)$ називається ***зростаючою*** на проміжку *I*, якщо для будь-яких значень x_1 та x_2, що належать до даного проміжку *I*, таких, що $x_1 < x_2$, відповідні значення функції задовольняють нерівність $f(x_1) < f(x_2)$, та ***неспадною***, якщо $f(x_1) \leq f(x_2)$ для будь-яких значень x_1 та x_2 з проміжку I, таких, що $x_1 < x_2$.

В и з н а ч е н н я 4. Функція $y = f(x)$ називається **спадною** на проміжку *I*, якщо для будь-яких значень x_1 та x_2, що належать до даного проміжку, таких, що $x_1 < x_2$, відповідні значення функції задовольняють нерівність $f(x_1) > f(x_2)$ та ***незростаючою***, якщо $f(x_1) \geq f(x_2)$ для будь-яких значень x_1 та x_2 з проміжку I, таких, що $x_1 < x_2$.

В и з н а ч е н н я 5. Зростаючі, спадні, неспадні, незростаючі функції називаються ***монотонними***. При цьому зростаючі та спадні функції називаються ***строго монотонними***.

Основні властивості монотонних функцій

1. Сума двох зростаючих функцій є зростаюча функція.
2. Сума двох спадних функцій є спадна функція.
3. Добуток двох зростаючих функцій є зростаюча функція.
4. Добуток двох спадних функцій є спадна функція.
5. Якщо функція $y = f(x)$ є зростаюча і $f(x) \neq 0$, то функція $\dfrac{1}{f(x)}$ є спадною та навпаки.
6. Якщо функція $y = f(x)$ є зростаюча, то функція $y = -f(x)$ є спадною та навпаки.
7. Якщо функція $u = \varphi(x)$ зростає на сегменті $[a, b]$, а функція $y = f(u)$ зростає на сегменті $[\varphi(a), \varphi(b)]$, то і складна функція $y = f(\varphi(x))$ зростає на сегменті $[a, b]$.
8. Якщо функція $u = \varphi(x)$ спадає на сегменті $[a, b]$, а функція $y = f(u)$ спадає на сегменті $[\varphi(a), \varphi(b)]$, то і складна функція $y = f(\varphi(x))$ спадає на сегменті $[a, b]$.

9. Якщо функція $u = \varphi(x)$ зростає на сегменті $[a, b]$, а функція $y = f(u)$ спадає на сегменті $[\varphi(a), \varphi(b)]$, то і складна функція $y = f(\varphi(x))$ спадає на сегменті $[a, b]$.

Завдання для самостійної роботи. Довести властивості монотонних функцій.

2.1.5 Обмежені функції та їхні властивості

Визначення 1. Функція $y = f(x)$ називається ***обмеженою зверху***, якщо існує таке дійсне число M, що для всіх x з області визначення X функції $f(x)$ справедлива нерівність

$$f(x) \le M . \qquad (1.25)$$

Графік функції, обмеженої зверху, розміщується не вище прямої $y = M$.

Визначення 2. Функція $y = f(x)$ називається ***обмеженою знизу***, якщо існує таке дійсне число m, що для всіх x з області визначення X функції $f(x)$ справедлива нерівність

$$m \le f(x). \qquad (1.26)$$

Графік функції, обмеженої знизу, розміщується не нижче прямої $y = m$.

Визначення 3. Функція $y = f(x)$ називається ***обмеженою***, якщо існують такі числа m та M, що для всіх x з області визначення X функції $f(x)$ справедлива нерівність

$$m \le f(x) \le M . \qquad (1.27)$$

Графік обмеженої функції не виходить за межі горизонтальної смуги, обмеженої прямими $y = m$ та $y = M$.

Основні властивості обмежених функцій

1. Сума двох обмежених функцій є обмеженою функцією.
2. Різниця двох обмежених функцій є обмеженою функцією.
3. Добуток двох обмежених функцій є обмеженою функцією.

2.1.6 Обернені функції та їхні властивості

Визначення. Функція $x = f^{-1}(y)$ називається ***оберненою*** до функції $y = f(x)$, якщо:

1) область визначення функції $y = f(x)$ є областю значень функції $x = f^{-1}(y)$;

2) область значень функції $y = f(x)$ є областю визначення функції $x = f^{-1}(y)$;

3) одному значенню змінної y з області визначення відповідає одне й лише одне значення змінної x з області значень функції $x = f^{-1}(y)$.

ЗАУВАЖЕННЯ. Якщо функція $x = f^{-1}(y)$ є оберненою до функції $y = f(x)$, то і функція $y = f(x)$ є оберненою відносно функції $x = f^{-1}(y)$.

Функції $y = f(x)$ та $x = f^{-1}(y)$ називаються ***взаємно оберненими***, при цьому справедливі рівності: $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$ та $f^{-1}\left(f(x)\right) = x$.

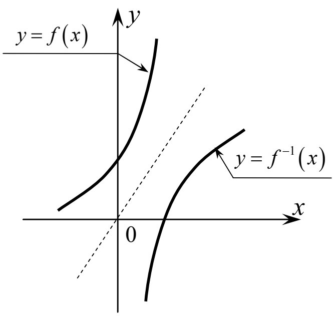


Рисунок 1.1

ЗАУВАЖЕННЯ 1. Якщо функція $y = f(x)$ є строго монотонна та неперервна, на деякому проміжку осі OX, то існує обернена функція $x = f^{-1}(y)$, яка є строго монотонною та неперервною на відповідному проміжку осі OY.

Графіки функцій $y = f(x)$ та $x = f^{-1}(y)$ збігаються.

ЗАУВАЖЕННЯ 2. Якщо для оберненої функції вважати, що незалежна змінна позначається через *x*, а сама функція через *y*, то графіки взаємно обернених функцій $y = f(x)$ та $y = f^{-1}(x)$ симетричні відносно бісектриси першого та третього координатних кутів, тобто відносно прямої $y = x$.

Основні властивості обернених функцій

1. Якщо функція $y = f(x)$ є строго зростаючою, то і функція $x = f^{-1}(y)$ є строго зростаючою.
2. Якщо функція $y = f(x)$ є строго спадною, то і функція $x = f^{-1}(y)$ є строго спадною.

2.1.7 Функції, задані у параметричній формі

Аналітично задані функції описуються формулою, яка встановлює безпосередній зв'язок між аргументом *x* та функцією *y*, тобто $y = y(x)$.

У деяких випадках аналітично задані функції описуються двома формулами, у такий спосіб, коли і *x* і *y* подані як функції змінної *t*, називаної параметром:

$$\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t), \end{cases} \text{ де } t \in T, \quad T\text{-будь-який проміжок.} \quad (1.28)$$

Тоді рівняння (1.28) називаються параметричними рівняннями кривої, яка є геометричним місцем точок $\left(x(t),\, y(t)\right)$. Спосіб завдання цієї кривої рівняннями (1.28) називається параметричним.

ЗАУВАЖЕННЯ. Якщо функція $x = y(t)$ має обернену функцію $t = y^{-1}(x)$, то функція $y = \psi\left(y^{-1}(x)\right)$ є функцією від x.

Таким чином рівняння (1.28) визначають функцію $y = y(x)$, яка називається параметрично заданою на проміжку T.

Приміром, рівняння $x^2 + y^2 = R^2$, що описує коло, може бути подано у параметричній формі у такий спосіб:

$$\begin{cases} x = R\cos t; \\ y = R\sin t, \end{cases} \text{ де } t \in R,$$

а рівняння $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, що описує еліпс, у параметричній формі може бути подано у вигляді

$$\begin{cases} x = a\cos t; \\ y = b\sin t, \end{cases} \text{ де } t \in R.$$

Для того, щоб від параметрично заданої функції перейти до функції, вираженої лише через декартові координати, необхідно з параметричних рівнянь функції вилучити параметр t.

Для однієї й тієї самої функції може існувати безліч її параметричних завдань. Форма цих завдань залежить від того, що саме обрано за параметр t.

Деякі криві у декартових координатах описуються за допомогою доволі складних функцій, а у параметричній формі ці криві описуються значно простіше.

ЗАУВАЖЕННЯ. З деякими важливими кривими, заданими у параметричній формі, можна ознайомитись у Додатку Г.

2.1.8 Полярна система координат

Розміщення кожної точки на площині можна задати за допомогою декартової прямокутної системи координат. Але поряд із зазначеною системою координат існують і інші, найбільш поширеною серед яких є ***полярна система координат***.

Задамо на площині вісь ρ, називану ***полярною віссю*** або ***полярою*** і на ній точку O, називану ***полюсом*** (рис. 1.2 а).

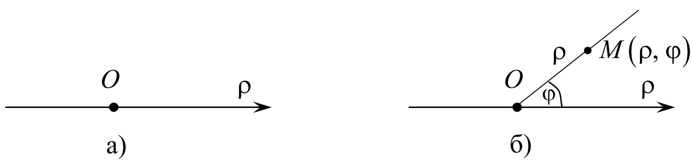


Рисунок 1.2

У такий спосіб на площині введено полярну систему координат.

Нехай M – довільна точка на площині, яка не збігається з полюсом O. Першою полярною координатою точки M або ***полярним радіусом*** називається відстань ρ від точки M до полюса O. Другою полярною координатою точки M або ***полярним кутом*** чи ***амплітудою*** називається кут φ між полярною віссю ρ та променем OM. Точку у полярній системі координат позначають як $M(\rho, \varphi)$(рис. 1.2 б). Для полюса O вважають, що $\rho = 0$, а φ – невизначено. Полярний радіус ρ вимірюється у заданих одиницях масштабу, а полярний кут – у радіанах або у градусах.

Полярний радіус як відстань може набувати лише невід'ємних значень, тобто $\rho \geq 0$. Полярний кут φ вважається за додатний, якщо він відраховується від полярної осі у напрямку проти годинникової стрілки, та за від'ємний, − якщо він відраховується від полярної осі у напрямку за годинниковою стрілкою. Полярний кут може набувати будь-яких значень, тобто $-\infty < \varphi < +\infty$.

Точкам (ρ, φ), $(\rho, \varphi + 2\pi)$, $(\rho, \varphi + 4\pi)$, …, $(\rho, \varphi + 2\pi k)$, де $k \in Z$, на площині відповідає одна й та сама точка $M(\rho, \varphi)$, де $0 \leq \varphi < 2\pi$ або $-\pi \leq \varphi < \pi$.

Значення полярного кута, які задовольняють умову $0 \leq \varphi < 2\pi$ або $-\pi \leq \varphi < \pi$ називаються ***головними значеннями*** полярного кута.

Якщо в полярній системі координат вважати, що на полярні координати точки чинять вплив обмеження

$$\begin{cases} \rho \geq 0; \\ 0 \leq \varphi < 2\pi \end{cases} \tag{1.29}$$

або

$$\begin{cases} \rho \geq 0; \\ -\pi \leq \varphi < \pi, \end{cases} \tag{1.30}$$

то між точками площини, за винятком полюса, та їхніми полярними координатами (ρ, φ) існує взаємнооднозначна відповідність.

Для побудови точки $M(\rho, \varphi)$ у полярній системі координат необхідно:

− провести під кутом φ до осі Ox промінь OM;

− на промені OM від точки O відкласти відрізок довжиною ρ, після чого дістанемо точку M.

Досить часто користуються іншою полярною системою координат, де відсутнє обмеження $\rho \geq 0$. У такому разі полярні координати задовольняють умови

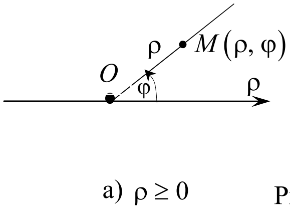
$$\begin{cases} -\infty < \rho < +\infty; \\ -\infty < \varphi < +\infty. \end{cases} \tag{1.31}$$

Полярна система координат, задана у такий спосіб, називається ***узагальненою полярною системою координат***.

Надалі будемо користуватись узагальненою полярною системою координат.

Побудова точок в узагальненій полярній системі координат має певні особливості. Якщо точка $M(\rho, \varphi)$ має додатну першу полярну координату, то відрізок довжиною ρ відкладаємо від точки O на промені, який виходить з полюса O під кутом φ, а якщо перша координата є від'ємною, то відрізок довжиною $|\rho|$

слід відкладати не на промені, що виходить з полюса O під кутом φ до осі ρ (рис. 1.3 а), а на промені, який виходить з полюса O у протилежному напрямку (рис. 1.3 б).



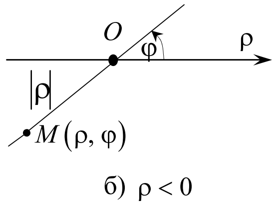


Рисунок 1.3

Отже, будь-яка точка $M(\rho, \varphi)$ може бути задана і в такий спосіб: $M(-\rho, \varphi + \pi)$.

2.1.9 Зв'язок між полярними та декартовими координатами точок

Розглянемо декартову прямокутну систему координат xOy. Побудуємо також полярну систему координат у такий спосіб, щоб полярна вісь ρ збігалась з віссю Ox, а полюс O − з початком декартової системи координат (рис. 1.4). При цьому промінь, який виходить з полюса O під кутом $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, має збігатись із додатним напрямком осі Oy.

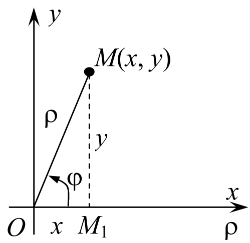


Рисунок 1.4

Одна й та сама точка M на площині може бути задана і у декартовій системі координат у вигляді $M(x, y)$ і у полярній системі координат у вигляді $M(\rho, \varphi)$.

Знайдемо зв'язок між декартовими та полярними координатами точки. Розглянемо прямокутний трикутник OM_1M (рис. 1.4). Залежність між сторонами та кутами трикутника дозволяє встановити формули

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi; \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases} \tag{1.32}$$

які подають декартові координати точки через її полярні координати.
Полярні координати через декартові координати подаються у такий спосіб:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases} \tag{1.33}$$

або

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}. \end{cases} \tag{1.34}$$

Кут φ вибирається залежно від знаків x та y.

Якщо полярна система координат є узагальненою, то маємо

$$\begin{cases} \rho = \pm\sqrt{x^2 + y^2}; \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\pm\sqrt{x^2 + y^2}}; \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\pm\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases} \tag{1.35}$$

та

$$\begin{cases} \rho = \pm\sqrt{x^2 + y^2}; \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}. \end{cases} \tag{1.36}$$

В формулі (1.36) кут φ вибирається залежно від знаків x та y.

Користуючись формулами (1.35), вибираємо будь-який з варіантів:

$$\rho = -\sqrt{x^2 + y^2} \text{ або } \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Знак, обраний перед радикалом, зберігаємо і в інших формулах (1.35).

2.1.10 Графік функції, заданої у полярній системі координат

Нехай у полярній системі координат задано функцію $\rho = f(\varphi)$, де $\varphi \in \Phi$. Множина точок площини з полярними координатами $(\rho,\ f(\varphi))$ називається ***графіком*** функції $\rho = f(\varphi)$ у полярних координатах.

Деякі функції у декартових координатах описуються більш громіздкими формулами ніж у полярній системі координат. Приміром, рівняння $x^2 + y^2 = R^2$ є рівнянням кола у декартовій системі координат. Переходячи до полярних координат, дістанемо рівняння кола у вигляді $(\rho\cos\varphi)^2 + (\rho\sin\varphi)^2 = R^2$, тобто $\rho = R$.

У низці випадків користуватися полярними координатами більш доцільно, ніж декартовими координатами.

ЗАУВАЖЕННЯ. З деякими важливими кривими, заданими у полярній системі координат, можна ознайомитись у Додатку Д.

Побудувати графік функції $\rho = f(\varphi)$ можна за допомогою таблиці, надаючи аргументові φ значення з області визначення функції.Над графіками функцій у полярній системі координат можна виконувати елементарні перетворення у відповідності з такими властивостями.

1. Графік функції $\rho = -f(\varphi)$ є симетричним відносно полюса O до графіка функції $\rho = f(\varphi)$.

2. Графік функції $\rho = f(-\varphi)$ є симетричним відносно полярної осі до графіка функції $\rho = f(\varphi)$.
3. Графік функції $\rho = k f(\varphi)$, де $k > 1$, виходить з графіка функції $\rho = f(\varphi)$ його розтягуванням вздовж полярної осі у k разів.
4. Графік функції $\rho = k f(\varphi)$, де $0 < k < 1$, виходить з графіка функції $\rho = f(\varphi)$ його стисканням вздовж полярної осі у k разів.
5. Графік функції $\rho = f(\varphi - \varphi_0)$ виходить з графіка функції $\rho = f(\varphi)$ повертанням його навколо полюса O на кут φ_0.
6. Графік функції $\rho = f(\varphi) + b$ виходить з графіка функції $\rho = f(\varphi)$ паралельним перенесенням цього графіка вздовж полярної осі на величину b.

2.2 Нескінченно малі та нескінченно великі функції

В и з н а ч е н н я 1 (за Коші). Нехай функцію $y = f(x)$ визначено в околі точки x_0, за винятком, можливо, самої точки x_0. Функція $y = f(x)$ називається ***нескінченно малою функцією*** або ***нескінченно малою величиною***, коли $x \to x_0$, якщо для будь-якого як завгодно малого додатного числа $\varepsilon > 0$ існує таке додатне число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для усіх x, які задовольняють умову $0 < |x - x_0| < \delta$, відповідні значення функції задовольняють нерівність $|f(x)| < \varepsilon$.

В и з н а ч е н н я 2 (за Гейне). Нехай функцію $y = f(x)$ визначено в околі точки x_0, за винятком, можливо, самої точки x_0. Функція $y = f(x)$ називається ***нескінченно малою функцією*** або ***нескінченно малою величиною***, коли $x \to x_0$, якщо для будь-якої послідовності $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$ значень аргументу x $(x \neq x_0)$, що збігається до числа x_0, відповідна послідовність значень функції $f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3),\ ...,\ f(x_n), ...$ є нескінченно малою.

В и з н а ч е н н я 3 (за Коші). Нехай функцію $y = f(x)$ визначено в околі точки x_0, за винятком, можливо, самої точки x_0. Функція $y = f(x)$ називається ***нескінченно великою функцією*** або ***нескінченно великою величиною***, коли $x \to x_0$, якщо для будь-якого як завгодно великого додатного числа M існує таке додатне число $\delta(M)$, що для усіх x, які задовольняють умову $0 < |x - x_0| < \delta$, відповідні значення функції задовольняють нерівність $|f(x)| > M$.

В и з н а ч е н н я 4 (за Гейне). Нехай функцію $y = f(x)$ визначено в околі точки x_0, за винятком, можливо, самої точки x_0. Функція $y = f(x)$ називається ***нескінченно великою функцією*** або ***нескінченно великою величиною***, коли $x \to x_0$, якщо для будь-якої послідовності $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$ значень аргументу x $(x \neq x_0)$, що збігається до числа $x_0 \left(x \neq x_0\right)$, відповідна послідовність значень функції $f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3),\ ...,\ f(x_n), ...$ є нескінченно великою.

Визначення 2 нескінченно малої величини та визначення 4 нескінченно великої величини встановлюють зв'язок між нескінченно малими або нескінченно великими функціями та послідовностями, у зв'язку з чим розглянуті раніше властивості нескінченно малих та нескінченно великих послідовностей можна перенести на нескінченно малі та нескінченно великі функції.

Основні теореми про нескінченно малі та нескінченно великі функції

Теорема 1. Сума двох функцій, що є нескінченно малими, коли $x \to x_0$, є також нескінченно малою функцією, коли $x \to x_0$.

Теорема 2. Різниця двох функцій, що є нескінченно малими, коли $x \to x_0$, є також нескінченно малою функцією, коли $x \to x_0$.

Теорема 3. Якщо $\alpha(x)$ – нескінченно мала функція, коли $x \to x_0$, то за x, досить близьких до x_0, функція $\alpha(x)$ є обмежена.

Теорема 4. Добуток обмеженої функції на нескінченно малу функцію, коли $x \to x_0$, також є нескінченно малою функцією, коли $x \to x_0$.

Н а с л і д о к. Добуток двох нескінченно малих функцій, коли $x \to x_0$, також є нескінченно малою функцією, коли $x \to x_0$.

Теорема 5. 1) Якщо функція $\alpha(x)$, коли $x \to x_0$, є нескінченно малою і при цьому $\alpha(x) \neq 0$ в околі точки x_0, то функція $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ є нескінченно великою функцією, коли $x \to x_0$;

2) якщо функція $\sigma(x)$, коли $x \to x_0$, є нескінченно великою, то функція $\dfrac{1}{\sigma(x)}$ є нескінченно малою, коли $x \to x_0$.

Завдання для самостійної роботи. Довести справедливість теорем 1…5.

2.3 Границя функції

2.3.1 Визначення границі функції за Коші

В и з н а ч е н н я 1. Нехай функцію $y = f(x)$ визначено в околі точки x_0, за винятком, можливо, самої точки x_0. Число A називається ***граничним значенням функції*** $y = f(x)$ у точці $x = x_0$ або ***границею функції,*** коли $x \to x_0$, якщо для будь-якого як завгодно малого додатного числа ε існує таке додатне число $\delta = \delta(\varepsilon)$, що для усіх значень x, які задовольняють умову $0 < |x - x_0| < \delta$, відповідні значення функції задовольняють нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. При цьому використовується позначення $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

ЗАУВАЖЕННЯ 1. Умова $0 < \left| x - x_0 \right|$ означає що $x \neq x_0$. Впровадження цієї умови потрібне для того, щоб охопити такі випадки, коли функцію $y = f(x)$ визначено в околі точки x_0, за винятком самої точки x_0.

ЗАУВАЖЕННЯ 2. Число A може бути як скінченним, так і нескінченним. Якщо $y = f(x)$, коли $x \to x_0$, є нескінченно малою функцією, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, а якщо $y = f(x)$, коли $x \to x_0$, є нескінченно великою функцією, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Знаходження границі функції, визначеної в околі точки x_0, за винятком, можливо, самої точки x_0, становить одне з найважливіших завдань теорії границь.

Визначення границі функції за Коші за допомогою кванторів можна записати у такий спосіб:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \quad \forall x : 0 < | x - x_0 | < \delta \;\Rightarrow\; | f(x) - A | < \varepsilon.$$

Наявність у функції $y = f\left(x\right)$, коли $x \to x_0$, границі, що дорівнює A, геометрично ілюструється в такий спосіб. Нехай на рис. 1.5 зображено графік функції $y = f\left(x\right)$. Відкладемо на осі Oy точку A. Оберемо будь-яке як завгодно мале число $\varepsilon > 0$. Побудуємо прямі $y = A$, $y = A - \varepsilon$, $y = A + \varepsilon$.

Дві останні прямі утворюють так звану ε-смугу. До цієї смуги потрапляє деяка частина графіка функції. Вочевидь, що всі точки графіка функції $y = f\left(x\right)$ у ε-смузі мають таку властивість, що всі їхні ординати відрізняються від значення A не більш ніж на ε, тобто є справедливою нерівність

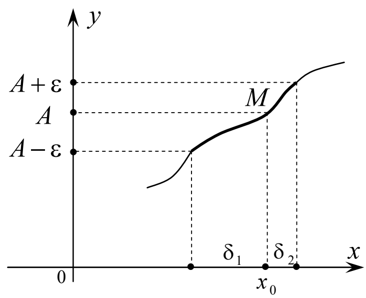


Рисунок 1.5

$$| f(x) - A | < \varepsilon.$$

Візьмемо за δ число $\delta = \min\left\{\delta_1, \delta_2\right\}$ і розглянемо інтервал, симетричний відносно x_0: $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, тобто $0 < \left| x - x_0 \right| < \delta$.

У такий спосіб виявлено, що для будь-якого як завгодно малого додатного числа ε існує таке додатнє число $\delta = \delta(\varepsilon)$, що за всіх x, які задовольняють умову $0 < \left| x - x_0 \right| < \delta$, відповідні значення функції задовольняють нерівність $\left| f(x) - A \right| < \varepsilon$, звідки виходить, що $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

В и з н а ч е н н я 2. Нехай функцію $y = f(x)$ визначено у лівому півоколі $(x_0 - \delta,\ x_0)$ точки x_0, за винятком, можливо, самої точки x_0. Число A називається ***лівобічною границею функції*** $y = f(x)$, коли $x \to x_0$ ліворуч, якщо для будь-якого як завгодно малого додатного числа ε існує таке додатне число $\delta = \delta(\varepsilon)$, що для всіх значень x, які задовольняють умову $0 < x_0 - x < \delta$, відповідні значення функції задовольняють нерівність $\left| f(x) - A \right| < \varepsilon$. При цьому використовується позначення $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$.

В и з н а ч е н н я 3. Нехай функцію $y = f(x)$ визначено у правому півоколі $(x_0,\ x_0 + \delta)$ точки x_0, за винятком, можливо, самої точки x_0. Число A називається ***правобічною границею функції*** $y = f(x)$, коли $x \to x_0$ праворуч, якщо для будь-якого як завгодно малого додатного числа ε існує таке додатне число $\delta = \delta(\varepsilon)$, що для всіх значень x, які задовольняють умову $0 < x - x_0 < \delta$, відповідні значення функції задовольняють нерівність $\left| f(x) - A \right| < \varepsilon$. При цьому використовується позначення $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$.

В и з н а ч е н н я 4. Нехай функцію $y = f(x)$ визначено в інтервалі $(a, +\infty)$. Число A називається ***границею функції*** $y = f(x)$, коли $x \to +\infty$, якщо для будь-якого як завгодно малого додатного числа ε існує таке додатне число $M = M(\varepsilon)$, що для тих x з області визначення функції $f(x)$, які задовольняють умову $x > M$, відповідні значення функції задовольняють нерівність $\left| f(x) - A \right| < \varepsilon$. При цьому використовується позначення $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$.

В и з н а ч е н н я 5. Нехай функцію $y = f(x)$ визначено в інтервалі $(-\infty;\ a)$. Число A називається ***границею функції*** $y = f(x)$, коли $x \to -\infty$, якщо для будь-якого як завгодно малого додатного числа ε існує таке додатне число $M = M(\varepsilon)$, що для тих x з області визначення функції $f(x)$, які задовольняють умову $x < -M$, відповідні значення функції задовольняють нерівність $\left| f(x) - A \right| < \varepsilon$. При цьому використовується позначення $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.

В и з н а ч е н н я 6. Нехай функцію $y = f(x)$ визначено в інтервалі $(-\infty, +\infty)$. Число A називається ***границею функції*** $y = f(x)$, коли $x \to \infty$, якщо для будь-якого як завгодно малого додатного числа ε існує таке додатне число $M = M(\varepsilon)$, що для тих x, які задовольняють умову $| x | > M$, відповідні значення функції задовольняють нерівність $| f(x) - A| < \varepsilon$. При цьому використовується позначення $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$.

Визначення 7. Нехай функцію $y=f(x)$ визначено в околі точки x_0, за винятком, можливо, самої точки x_0. Границя функції $y=f(x)$, коли $x\to x_0$, дорівнює нескінченності, якщо для будь-якого, як завгодно великого додатного числа M існує таке додатне число $\delta = \delta(M)$, що для усіх значень x, які задовольняють умову $0 < | x - x_0 | < \delta$, відповідні значення функції задовольняють нерівність $| f(x) | > M$. При цьому використовується позначення $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$.

2.3.2 Визначення границі функції за Гейне

Визначення 1. Нехай функцію $y=f(x)$ визначено у деякому околі точки x_0, за винятком, можливо, самої точки x_0. Число A називається ***граничним значенням функції*** $y=f(x)$ у точці x_0 або ***границею функції***, коли $x\to x_0$, якщо для будь-якої послідовності $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ значень аргументу x, що збігається до x_0, відповідна послідовність значень функції $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$, ..., $f(x_n)$, ... збігається до A, тобто $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

Визначення 2. Нехай функцію $y=f(x)$ визначено у лівому півоколі точки x_0, за винятком, можливо, самої точки x_0. Число A називається лівобічною границею функції $y=f(x)$, коли $x\to x_0$ ліворуч, якщо для будь-якої послідовності $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$ значень аргументу x, що збігається до x_0 ліворуч, відповідна послідовність значень функції $f(x_1), f(x_2), f(x_3), ..., f(x_n), ...$ збігається до A, тобто $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A$.

Визначення 3. Нехай функцію $y=f(x)$ визначено у правому півоколі точки x_0, за винятком, можливо, самої точки x_0. Число A називається правобічною границею функції $y=f(x)$, коли $x\to x_0$ праворуч, якщо для будь-якої послідовності $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$ значень аргументу x, що збігається до x_0 праворуч, відповідна послідовність значень функції $f(x_1), f(x_2), f(x_3), ..., f(x_n), ...$ збігається до A, тобто $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A$.

Визначення 4. Нехай функцію $y=f(x)$ визначено в інтервалі $(a;+\infty)$. Число А називається ***границею функції*** $y=f(x)$, коли $x\to+\infty$, якщо для будь-якої нескінченно великої послідовності $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$ значень аргументу x, елементи якої, починаючи з деякого номера, є додатними числами, відповідна послідовність значень функції $f(x_1), f(x_2), f(x_3), ..., f(x_n), ...$ збігається до A. При цьому використовується позначення $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$.

Визначення 5. Нехай функцію $y=f(x)$ визначено в інтервалі $(-\infty, a)$. Число A називається ***границею функції*** $y=f(x)$, коли $x\to-\infty$, якщо для будь-якої нескінченно великої послідовності $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$ значень аргументу x, елементи якої, починаючи з деякого номера, є від'ємними числами, відповідна послідовність значень функції $f(x_1), f(x_2), f(x_3), ..., f(x_n), ...$ збігається до A. При цьому використовується позначення $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$.

В и з н а ч е н н я 6. Нехай функцію $y = f(x)$ визначено в інтервалі $(-\infty, +\infty)$. Число A називається ***границею функції*** $y = f(x)$, коли $x\to\infty$, якщо для будь-якої нескінченно великої послідовності $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, …$ значень аргументу x відповідна послідовність значень функції $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$, …, $f(x_n)$, … збігається до A. При цьому використовується позначення $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.

В и з н а ч е н н я 7. Нехай функцію $y = f(x)$ визначено у деякому околі точки x_0, за винятком, можливо, самої точки x_0. Границя функції $y = f(x)$, коли $x\to x_0$, дорівнює нескінченності, якщо для будь-якої послідовності $x_1, x_2, x_3, …, x_n, …$ значень аргументу, що збігається до x_0, відповідна послідовність значень функції $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$, …, $f(x_n)$, … прямує до нескінченності, при цьому використовується позначення $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$.

Визначення границі функції за Коші та за Гейне еквівалентні. Визначення границі функції за Гейне встановлює зв'язок між границею послідовності та границею функції, внаслідок чого розглянуті раніше властивості границь послідовностей можна прийняти і для функцій.

2.3.3 Необхідна та достатня умова існування границі функції

Теорема 1. Для того, щоб функція $y = f(x)$, коли $x\to x_0$, мала границю A, необхідно та достатньо, щоб у точці x_0 існували однобічні границі функції, кожна з яких дорівнює A.

Д о в е д е н н я

Необхідність. Нехай існує $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, тобто для будь-якого як завгодно малого додатного числа ε існує таке додатне число $\delta = \delta(\varepsilon)$, що за будь-якого x, яке задовольняє умову $0 < |x - x_0| < \delta$, є справедлива нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. А з цього твердження виходить, що, оскільки x прямує до x_0 праворуч і ліворуч, то існують однобічні границі: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A$ та $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A$.

Достатність. Нехай існують однобічні рівні між собою границі функції: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A$ та $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A$. Це означає, що для будь-якого $x\to x_0$ та для будь-якого як завгодно малого додатного числа ε існують такі додатні числа $\delta_1(\varepsilon)$ та $\delta_2(\varepsilon)$, що коли $0 < x_0 - x < \delta_1(\varepsilon)$, то $|f(x) - A| < \varepsilon$, а коли

$0 < x - x_0 < \delta_2(\varepsilon)$, то також $\left| f(x) - A \right| < \varepsilon$. Нехай $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тоді нерівність $\left| f(x) - A \right| < \varepsilon$ виконується для таких x, які задовольняють умову $0 < \left| x_0 - x \right| < \delta$. Виходить, що існує границя функції: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

2.3.4 Властивості границь функцій

Основні теореми про границі функцій

Теорема 1. Для того, щоб функція $y = f(x)$, визначена у деякому околі точки x_0, за винятком, можливо, самої точки x_0, мала границю A, коли $x \to x_0$, необхідно та достатньо, щоб за значеннь аргументу х досить близьких до x_0, функцію $f(x)$ можна було подати у вигляді суми сталої A та нескінченно малої функції $\alpha(x)$, коли $x \to x_0$, тобто у вигляді $f(x) = A + \alpha(x)$.

Теорема 2. Границя будь-якої нескінченно малої функції $\alpha(x)$, коли $x \to x_0$, дорівнює нулю, тобто $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

ЗАУВАЖЕННЯ. Якщо функція $\sigma(x)$, коли $x \to x_0$, є нескінченно великою функцією, то символічно це записується у такий спосіб: $\lim\limits_{x \to x_0} \sigma(x) = \infty$.

Теорема 3. Якщо функція $f(x)$ має границю, коли $x \to x_0$, то ця границя є єдиною.

Теорема 4. Якщо функція $f(x)$ має скінченну границю, коли $x \to x_0$, то існує такий окіл точки x_0, у якому функція $f(x)$ є обмеженою.

Теорема 5. Якщо функції $f_1(x)$ та $f_2(x)$, коли $x \to x_0$, мають скінченні границі, то їхні сума, різниця, добуток та частка також мають границі і при цьому справедливі такі твердження:

$$\lim_{x \to x_0} \left(f_1(x) + f_2(x) \right) = \lim_{x \to x_0} f_1(x) + \lim_{x \to x_0} f_2(x); \tag{1.37}$$

$$\lim_{x \to x_0} \left(f_1(x) - f_2(x) \right) = \lim_{x \to x_0} f_1(x) - \lim_{x \to x_0} f_2(x); \tag{1.38}$$

$$\lim_{x \to x_0} \left(f_1(x) f_2(x) \right) = \lim_{x \to x_0} f_1(x) \lim_{x \to x_0} f_2(x); \tag{1.39}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} f_2(x)}, \text{ якщо } \lim_{x \to x_0} f_2(x) \neq 0. \tag{1.40}$$

Завдання для самостійної роботи. Довести справедливість теорем 1…5, спираючись на аналогічні теореми про границі послідовностей.

Теореми про граничний перехід у нерівностях

Теорема 1. Якщо у деякому околі точки x_0 функція $f(x) > 0$ та $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то $A \geq 0$.

Теорема 2. Якщо у деякому околі точки x_0 функція $f(x) < 0$ та $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то $A \leq 0$.

Теорема 3. Якщо у деякому околі точки x_0 функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ задовольняють умову $f(x) < \varphi(x)$ та мають скінченну границю, коли $x \to x_0$, то справедлива нерівність

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} \varphi(x).$$

Теорема 4 (теорема Гур'єва). Якщо у деякому околі точки x_0 функції $f(x)$, $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ задовольняють умову $f(x) \leq \varphi(x) \leq \psi(x)$ і при цьому функції $\varphi(x)$ та $\psi(x)$, коли $x \to x_0$, мають однакову скінченну границю A, тобто

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \psi(x) = A,$$

то і функція $\varphi(x)$, коли $x \to x_0$, має границю, яка дорівнює A, тобто

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = A.$$

Теорема 5. Нехай задано функції $u = \varphi(x)$, $y = f(u)$ та $y = f(\varphi(x))$, такі, що області визначення функцій $u = \varphi(x)$ та $y = f(\varphi(x))$ збігаються і збігаються області значень функцій $y = f(u)$ та $y = f(\varphi(x))$.

Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = b$, де x_0 належить до області визначення функцій $u = \varphi(x)$ та $y = f(\varphi(x))$, а b – належить до області значень функції $u = \varphi(x)$ та області визначення функції $y = f(u)$ і, до того ж, $f(b) = A$, то тоді складна функція $y = f(\varphi(x))$ також має границю, коли $x \to x_0$, і ця границя дорівнює A, тобто $\lim\limits_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = A$.

Завдання для самостійної роботи. Довести справедливість теорем 1…5.

2.4 Класифікація нескінченно малих та нескінченно великих функцій

2.4.1 Порівняння нескінченно малих функцій

В и з н а ч е н н я 1. Нескінченно малі функції $\alpha(x)$ та $\beta(x)$, коли $x \to x_0$, називаються ***порівнянними***, якщо існує та відрізняється від нуля та нескінченності принаймні одна з границь: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ або $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}$.

В и з н а ч е н н я 2. Нескінченно мала функція $\alpha(x)$, коли $x \to x_0$, називається ***нескінченно малою вищого порядку малості*** ніж нескінченно мала функція $\beta(x)$, коли $x \to x_0$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$. Нескінченно мала функція $\beta(x)$ при цьому називається ***нескінченно малою функцією нижчого порядку малості*** ніж $\alpha(x)$.

В и з н а ч е н н я 3. Нескінченно мала функція $\alpha(x)$, коли $x \to x_0$, називається ***нескінченно малою порядку малості r*** ($r > 0$) відносно $\beta(x)$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\left(\beta(x)\right)^r} = 0$.

Символічно це позначають у такий спосіб: $\alpha(x) = o(\beta(x))$, коли $x \to x_0$, ($\alpha(x)$ є „o мале" від $\beta(x)$, коли $x \to x_0$), де „o" називається ***символом Ландау***.

ЗАУВАЖЕННЯ. Рівності, які містять символ „o" є умовними. Приміром, рівність $x^3 = o(x)$, коли $x \to 0$, є правильна, але рівність $o(x) = x^3$, коли $x \to 0$, є помилкова, тому що символ $o(x)$ означає не якусь конкретну нескінченно малу функцію, а множину функцій, які, коли $x \to 0$, являють собою нескінченно малі вищого порядку малості ніж x. Отже, символічна рівність $\alpha(x) = o\left(\beta(x)\right)$, коли $x \to x_0$, читається лише в один бік.

В и з н а ч е н н я 4. Нескінченно малі функції $\alpha(x)$ та $\beta(x)$, коли $x \to x_0$, називаються ***нескінченно малими одного порядку малості***, якщо

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k,$$

де k – скінченне число, що відрізняється від нуля.

Символічно це позначають у такий спосіб: $\alpha(x) \asymp \beta(x)$, коли $x \to x_0$.

В и з н а ч е н н я 5. Нескінченно малі функції $\alpha(x)$ та $\beta(x)$, коли $x \to x_0$, називаються ***еквівалентними*** нескінченно малими, якщо

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

Символічно це позначають у такий спосіб: $\alpha(x) \sim \beta(x)$, коли $x \to x_0$.

Властивості символа Ландау „*o* мале"

1. Нехай $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ та $\beta(x)$ є нескінченно малі функції, коли $x \to x_0$, $c = \text{const}$. До того ж, $\alpha_1(x) = o\left(\beta(x)\right)$, $\alpha_2(x) = o\left(\beta(x)\right)$, коли $x \to x_0$. Тоді $\alpha_1(x) + \alpha_2(x) = o\left(\beta(x)\right)$, коли $x \to x_0$.
2. $o\left(\beta(x)\right) + o\left(\beta(x)\right) = o\left(\beta(x)\right)$, коли $x \to x_0$.
3. $o\left(\beta(x)\right) - o\left(\beta(x)\right) = o\left(\beta(x)\right)$, коли $x \to x_0$.
4. $o\left(c\beta(x)\right) = o\left(\beta(x)\right)$, $c \neq 0$, коли $x \to x_0$.
5. $c \cdot o\left(\beta(x)\right) = o\left(\beta(x)\right)$, $c \neq 0$, коли $x \to x_0$.

6. $o\left(\beta^n(x)\right)=o\left(\beta^k(x)\right)$, $n \ge 2$, де n – натуральне число, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, коли $x \to x_0$.
7. $\left(o(\beta(x))\right)^n = o\left(\beta^n(x)\right)$, де n – натуральне число, коли $x \to x_0$.
8. $\beta^n(x) \cdot o(\beta(x)) = o\left(\beta^{n+1}(x)\right)$, де n – натуральне число, коли $x \to x_0$.
9. $\dfrac{o\left(\beta^n(x)\right)}{\beta(x)} = o\left(\beta^{n-1}(x)\right)$, $n \ge 2$, де n – натуральне число, коли $x \to x_0$.
10. $o\left(o(\beta(x))\right) = o(\beta(x))$, коли $x \to x_0$.
11. $o\left(\beta(x) + o(\beta(x))\right) = o(\beta(x))$, коли $x \to x_0$.
12. $\alpha_1(x)\alpha_2(x) = o(\alpha_1(x))$ та $\alpha_1(x)\alpha_2(x) = o(\alpha_2(x))$, коли $x \to x_0$.
13. $\alpha_1(x) - \alpha_2(x) = o(\alpha_1(x))$ та $\alpha_1(x) - \alpha_2(x) = o(\alpha_2(x))$, коли $x \to x_0$, якщо $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x)$.
14. $o(\alpha_1(x)) \cdot o(\alpha_2(x)) = o(\alpha_1(x)\alpha_2(x))$, коли $x \to x_0$.
15. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\beta_1(x)}{\beta_2(x)}$, якщо $\alpha_1(x) \sim \beta_1(x)$, $\alpha_2(x) \sim \beta_2(x)$, коли $x \to x_0$.
16. Якщо $\alpha_1(x) \sim \beta(x)$, $\alpha_2(x) \sim \beta(x)$, то $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x)$, коли $x \to x_0$.

Формули типу $\alpha_1(x) = \alpha_2(x) + o(\alpha_1(x))$ або $\alpha_1(x) = \alpha_2(x) + o(\alpha_2(x))$ називаються ***асимптотичними формулами*** або ***асимптотичним розкладанням*** $\alpha_1(x)$ і при цьому $o(\alpha_1(x))$ та $o(\alpha_2(x))$ називаються ***остаточними членами асимптотичної формули***.

Завдання для самостійної роботи. Довести справедливість властивостей 1…16.

Таблиця еквівалентних нескінченно малих функцій

Нехай $\alpha(x)$ – нескінченно мала функція, коли $x \to x_0$. Тоді є справедливими такі наближені рівності:

1. $\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$.
2. $\mathrm{tg}\, \alpha(x) \sim \alpha(x)$.
3. $1 - \cos \alpha(x) \sim \dfrac{(\alpha(x))^2}{2}$.
4. $\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$.
5. $\mathrm{arctg}\, \alpha(x) \sim \alpha(x)$.
6. $\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x)$.
7. $a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \ln a$ $(a > 0)$.
8. $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$.
9. $1 - \dfrac{1}{1 + \alpha(x)} \sim \alpha(x)$.
10. $(1 + \alpha(x))^p - 1 \sim p \cdot \alpha(x)$.
11. $\sqrt[n]{1 + \alpha(x)} - 1 \sim \dfrac{\alpha(x)}{n}$.

ЗАУВАЖЕННЯ. Кожну з цих формул можна подати у вигляді асимптотичної формули у такий спосіб:

$$\alpha(x) = \beta(x) + o(\alpha(x)) \text{ або } \alpha(x) = \beta(x) + o(\beta(x)), \text{ коли } x \to x_0,$$

де $\alpha(x)$ – ліва частина формули, а $\beta(x)$ – права частина.

Приміром, формулу 1 можна подати у вигляді

$$\sin\alpha(x) = \alpha(x) + o(\alpha(x)),$$

коли $x \to x_0$.

Завдання для самостійної роботи. Довести справедливість формул 1…11.

Якщо існує окіл в якому $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ обмежене, то це позначається як $\alpha(x) = O(\beta(x))$ (читається $\alpha(x)$ є «O велике» від $\beta(x)$, коли $x \to x_0$, де «O»-символ Ландау.)

2.4.2. Порівняння нескінченно великих функцій

В и з н а ч е н н я 1. Нескінченно великі функції $\sigma(x)$ та $\theta(x)$, коли $x \to x_0$, називаються ***порівнянними***, якщо існує та відрізняється від нуля принаймні одна з границь: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sigma(x)}{\theta(x)}$ або $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\theta(x)}{\sigma(x)}$.

В и з н а ч е н н я 2. Нескінченно велика функція $\sigma(x)$, коли $x \to x_0$, називається ***нескінченно великою більш високого порядку зростання*** ніж нескінченно велика функція $\theta(x)$, коли $x \to x_0$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sigma(x)}{\theta(x)} = \infty$.

Нескінченно велика функція $\theta(x)$ при цьому називається ***нескінченно великою функцією нижчого порядку зростання*** ніж $\sigma(x)$.

В и з н а ч е н н я 3. Нескінченно велика функція $\sigma(x)$, коли $x \to x_0$, називається ***нескінченно великою функцією з порядком зростання r*** ($r > 0$) відносно нескінченно великої функції $\theta(x)$, коли $x \to x_0$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sigma(x)}{\theta^r(x)} = \infty$.

В и з н а ч е н н я 4. Нескінченно великі функції $\sigma(x)$ та $\theta(x)$, коли $x \to x_0$, називаються ***нескінченно великими функціями одного порядку зростання***, якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sigma(x)}{\theta(x)} = k$, де k – скінченне число, яке відрізняється від нуля.

В и з н а ч е н н я 5. Нескінченно великі функції $\sigma(x)$ та $\theta(x)$, коли $x \to x_0$, називаються ***еквівалентними нескінченно великими функціями***, якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sigma(x)}{\theta(x)} = 1$.

Символічно це позначають у такий спосіб: $\sigma(x) \sim \theta(x)$, коли $x \to x_0$.

2.5 Чудові границі

2.5.1 Перша чудова границя

Довести, що справедлива формула

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

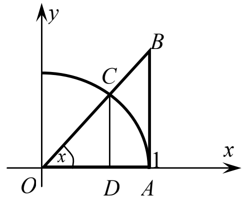


Рисунок 1.6

Функцію $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ визначено у проміжку $x\in(-\infty;\,0)\cup(0;\,+\infty)$, симетричному відносно початку координат, та, окрім того, є справедливою рівність $f(-x)=f(x)$, оскільки $\dfrac{\sin(-x)}{-x}=\dfrac{-\sin x}{-x}=\dfrac{\sin x}{x}$.

З наведеного виходить, що функція $f(x)$ є парна. Це означає, що коли у точці $x=0$ існують однобічні границі, то вони однакові, тобто

$$\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.$$

Розглянемо границю функції у точці $x=0$ праворуч та доведемо, що

$$\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Побудуємо у першій чверті системи координат xOy (рис. 1.6) дугу кола з центром у точці O та радіусом R = 1. Будемо вважати, що радіанна міра кута AOC дорівнює значенню аргументу функції x. Знаходимо площі $\Delta\,AOC$, сектора AOC, ΔOAB. Для цих площин є справедливе співвідношення:

$$S_{\Delta\ AOC}<S_{\text{сект.}\ AOC}<S_{\Delta\ AOB}.$$

Оскільки

$$S_{\Delta\ AOC}=\frac{1}{2}\,|OA|\,|OC|\,\sin x=\frac{1}{2}\sin x,$$

$$S_{\text{сект.}\ AOC}=\frac{1}{2}x|OA|^2=\frac{1}{2}x,\quad S_{\Delta\ OAB}=\frac{1}{2}\,|OA|\,|OB|=\frac{1}{2}\operatorname{tg}x,$$

то

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\operatorname{tg}x,$$

$$\sin x<x<\operatorname{tg}x,\quad \text{де}\quad 0<x<\frac{\pi}{2}.$$

Поділивши останню нерівність на $\sin x>0$, дістанемо нерівність

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x},\ \ 1>\frac{\sin x}{x}>\cos x\ \text{ чи }\ \cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

Припустимо, що $x\to 0$ праворуч та перейдемо до границі, коли $x\to+0$:

$$\lim_{x\to+0}\cos x\le\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}\le\lim_{x\to+0}1.$$

Звідси

$$1\le\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}\le 1.$$

За теоремою Гур’єва, маємо

$$\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Через парність функції $f(x)$ доходимо висновку, що $\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\sin x}{x} = 1.$

Отже,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1. \tag{1.41}$$

Рівність (1.41) називається ***першою чудовою границею***. З формули (1.41) можна дістати формули

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1; \tag{1.42}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1; \tag{1.43}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1. \tag{1.44}$$

Завдання для самостійної роботи. Довести справедливість формул (1.41)…(1.44).

Розглянемо ще деякі наслідки формули (1.41).

Знайдемо $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$. Позначимо arcsin x = t, тоді x = sin t. Коли $x \to 0$, то і $t \to 0$. Виходить, що

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t} = 1.$$

Отже, дістали формулу

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1. \tag{1.45}$$

З формули (1.45) випливає формула

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\arcsin x} = 1. \tag{1.46}$$

Аналогічно можна довести ще дві формули:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1; \tag{1.47}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{arctg} x} = 1, \tag{1.48}$$

що пропонуємо зробити самостійно.

2.5.2 Друга чудова границя

У п. 1.5 гл. 1 для послідовності $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ була доведена формула (1.16):

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e},$$

де n – натуральне число.

Покажемо, що для функції $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, коли $x\to\infty$, є справедлива аналогічна формула

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}. \tag{1.49}$$

Для будь-якого $x \geq 1$ маємо: $n\le x<n+1$, де n – натуральне число, $n=[x]$, та $\frac{1}{n}\ge\frac{1}{x}>\frac{1}{n+1}$. Отже, є справедлива нерівність

$$1+\frac{1}{n}\ge 1+\frac{1}{x}>1+\frac{1}{n+1}.$$

Врахувавши, що $n+1>x\ge n$, дістанемо залежність

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\ge\left(1+\frac{1}{x}\right)^x>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n.$$

Нехай n прямує до нескінченності. Тоді

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\mathrm{e}\cdot 1=\mathrm{e},$$

тобто

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\mathrm{e}. \tag{1.50}$$

Так як

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}=\mathrm{e}\cdot 1^{-1}=\mathrm{e},$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\mathrm{e}. \tag{1.51}$$

За теоремою Гур’єва, якщо справедливі рівності (1.50) та (1.51), то справедлива і рівність

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}. \tag{1.52}$$

Доведемо тепер, що

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}, \tag{1.53}$$

коли $x\to-\infty$ і при цьому $x<-1$.

Зробимо заміну $t=-(x+1)$. Оскільки $x<-1$, то $t>0$. Коли $x\to-\infty$, то $t\to+\infty$. Тоді

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-t-1}\right)^{-t-1}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{-(t+1)}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1}=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\cdot\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)=\mathrm{e}\cdot1=\mathrm{e}.$$

Отже, з рівностей (1.52) та (1.53) випливає рівність (1.49)

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}.$$

Н а с л і д о к 1. Коли $x\to\infty$ є справедлива формула

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}^{\alpha}. \tag{1.54}$$

Нехай $x=\alpha t$, тоді якщо $x\to\infty$, то і $t\to\infty$. Отже, маємо

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{x}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{\alpha t}\right)^{\alpha t}=\lim_{t\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{\alpha}=\mathrm{e}^{\alpha}.$$

Дістали формулу (1.54).

Н а с л і д о к 2. Коли $x\to0$, є справедлива формула

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}. \tag{1.55}$$

Скористаємося формулою (1.49) та припустимо, що $\dfrac{1}{x}=t$. Тоді, вочевидь, що коли $x\to\infty$, то $t\to0$. Маємо

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{t\to0}\left(1+t\right)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e}.$$

Позначивши t через x, дістанемо формулу (1.55).

ЗАУВАЖЕННЯ. Формули (1.49) та (1.55) мають назву ***другої чудової границі***.

Приклади до глави 2

Функції. Основні поняття

Приклад 1.21. Знайти область визначення функції

$$y = 4x - \frac{9}{x^2 + 11x - 12}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

До складу функції входить дріб, тому його знаменник не повинен дорівнювати нулю. Отже, маємо обмеження:

$$x^2 + 11x - 12 \neq 0,$$

звідки $x \neq 1$ та $x \neq -12$.

Область визначення функції:

$$x \in (-\infty, -12) \cup (-12, 1) \cup (1, +\infty).$$

В і д п о в і д ь: $x \in (-\infty, -12) \cup (-12, 1) \cup (1, +\infty)$.

Приклад 1.22. Знайти область визначення функції

$$y = 5x^2 + 6x - 2\sqrt[4]{1 + 2x - 3x^2}.$$

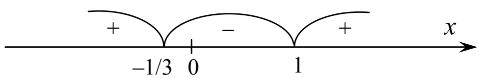
Р о з в ’ я з а н н я

До складу функції входить корінь парного степеня, тому підкореневий вираз не повинен бути від’ємним. Отже, маємо обмеження:

$$1 + 2x - 3x^2 \geq 0. \qquad (1.56)$$

Розв’яжемо квадратну нерівність (1.56) методом інтервалів. Оскільки коренями квадратного рівняння $1 + 2x - 3x^2 = 0$ чи $3x^2 - 2x - 1 = 0$ є числа $x_1 = -\frac{1}{3}$ та $x_2 = 1$, то нерівність (1.56) еквівалентна до нерівності

$$-3\left(x + \frac{1}{3}\right)(x - 1) \geq 0 \quad \text{чи} \quad \left(x + \frac{1}{3}\right)(x - 1) \leq 0.$$



Отже, область визначення функції є такою:

$$x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup [1, +\infty).$$

В і д п о в і д ь: $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup [1, +\infty)$.

Приклад 1.23. Знайти область визначення функції

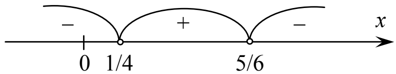
$$y = x^2 \ln \frac{4x - 1}{5 - 6x}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

До складу функції входить логарифм, а його аргумент має бути додатним. До того ж, не може дорівнювати нулю знаменник аргументу логарифмічної функції. Отже, маємо обмеження:

$$\begin{cases} \dfrac{4x-1}{5-6x} > 0; \\ 5-6x \neq 0. \end{cases}$$

Розв’яжемо нерівність методом інтервалів:



Область визначення функції: $x \in \left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{5}{6}\right)$.

В і д п о в і д ь: $x \in \left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{5}{6}\right)$.

Приклад 1.24. Знайти область визначення функції

$$y = \sqrt[6]{\sin^2 x - 3\sin x + 2}\,.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Для x має виконуватись умова $\sin^2 x - 3\sin x + 2 \geq 0$, оскільки цей вираз перебуває під коренем парного степеня. Позначимо $\sin x = t$, де $t \in [-1, 1]$. Розв’яжемо нерівність $t^2 - 3t + 2 \geq 0$. Оскільки коренями квадратного рівняння $t^2 - 3t + 2 = 0$ є числа $t_1 = 1$ та $t_2 = 2$, то дістанемо еквівалентну нерівність

$$(t-1)(t-2) \geq 0.$$

Розв’яжемо цю нерівність, зважаючи на те, що $t \in [-1, 1]$.

Виходить, що $t - 2 < 0$, звідки $t - 1 \leq 0$. Тоді $-1 \leq t \leq 1$. Звідси виходить, що $-1 \leq \sin x \leq 1$. Така нерівність виконується при будь-якому значенні x.

Область визначення функції є такою: $x \in (-\infty, +\infty)$.

В і д п о в і д ь: $x \in (-\infty, +\infty)$.

Приклад 1.25. Знайти область визначення функції

$$y = 5\mathrm{tg}\, 3x + 7\arccos 8x.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Кожен з доданків, що входять до складу функції, дає певні обмеження щодо області визначення функції. Так, аргумент тангенса має задовольняти умову $3x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, де $n \in Z$, а аргумент арккосинуса має задовольняти умову $-1 \leq 8x \leq 1$. Отже, маємо:

$$\begin{cases} 3x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \text{ де } n \in Z; \\ -1 \leq 8x \leq 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3}, \text{ де } n \in Z; \\ -\dfrac{1}{8} \leq x \leq \dfrac{1}{8}. \end{cases}$$

Оскільки до проміжку $\left[-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right]$ не входить жодне зі значень $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, де $n \in Z$, то розв'язком системи, а отже, і областю визначення функції є значення $x \in \left[-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right]$.

В і д п о в і д ь: $x \in \left[-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right]$.

Приклад 1.26. Знайти область визначення функції

$$y = \log_{0,5} \log_2 \log_9 x.$$

Р о з в ' я з а н н я

Будемо виходити з обмежень, яких потребує логарифмічна функція:

$$\begin{cases} x > 0; \\ \log_9 x > 0; \\ \log_2(\log_9 x) > 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему нерівностей, спираючись на властивості логарифмічної функції:

$$\begin{cases} x > 0; \\ x > 1; \\ \log_9 x > 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 1; \\ x > 9. \end{cases}$$

Виходить, що областю визначення функції є значення $x \in (9, +\infty)$.

В і д п о в і д ь: $x \in (9, +\infty)$.

Приклад 1.27. Знайти область визначення функції

$$y = x^2 + \sqrt{3x} + \operatorname{tg}^2 4x - \frac{2}{1+\cos 8x}.$$

Р о з в ' я з а н н я

Область визначення знайдемо, виходячи з того, що мають виконуватись умови: $3x \geq 0$; $4x \neq \frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in Z$; $1 + \cos 8x \neq 0$.

Отже, маємо:

$$\begin{cases} 3x \geq 0; \\ 4x \neq \dfrac{\pi}{2}+\pi n, \text{ де } n \in Z; \\ 1+\cos 8x \neq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0; \\ x \neq \dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{4}, \text{ де } n = Z; \\ 2\cos^2 4x \neq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0; \\ x \neq \dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{4}, \text{ де } n \in Z; \\ \cos 4x \neq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0; \\ x \neq \dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{4}, \text{ де } n \in Z; \\ x \neq \dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi k}{4}, \text{ де } k \in Z. \end{cases}$$

В і д п о в і д ь: $\begin{cases} x \ge 0; \\ x \ne \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{4}, \text{де}\, n \in Z. \end{cases}$

ЗАУВАЖЕННЯ. Задану функцію можна було спростити в такий спосіб:

$$y = x^2 + \sqrt{3x} + \mathrm{tg}^2 4x - \frac{2}{1+\cos 8x}; \qquad y = x^2 + \sqrt{3x} + \frac{1}{\cos^2 4x} - 1 - \frac{1}{\cos^2 4x};$$

$$y = x^2 + \sqrt{3x} - 1.$$

Областю визначення такої функції є значення $x \ge 0$. Незважаючи на те, що були виконані тотожні перетворення, області визначення заданої та спрощеної функцій не збігаються.

Приклад 1.28. Знайти область визначення функції $y = \sqrt{x-4}$ та область її значень.

Р о з в ’ я з а н н я

Область визначення дістанемо з умови $x - 4 \ge 0$. Отже $x \in [4, +\infty)$. Область значень: $y \in \left[0, +\infty\right)$.

В і д п о в і д ь: $x \in \left[4, +\infty\right)$; $y \in \left[0, +\infty\right)$.

Приклад 1.29. З’ясувати вид функції:

$$1)\ y = \frac{3x-2}{4x^2+5x-1};\ 2)\ y = x \cdot 2^x.$$

Р о з в ’ я з а н н я

1) Функція $y = \dfrac{3x-2}{4x^2+5x-1}$ становить результат таких алгебраїчних дій, як множення, піднесення до степеня з раціональним показником, додавання, віднімання, ділення, тобто ця функція є алгебраїчною.

2) Функцію $y = x \cdot 2^x$ здобуто внаслідок піднесення до будь-якого степеня (і до ірраціонального також) та множення. Це є трансцендентна функція.

В і д п о в і д ь: 1) функція є алгебраїчна; 2) функція є трансцендентна.

Приклад 1.30. Утворити складні функції: 1) $y = f(\varphi(x))$ та 2) $y = f(\varphi(x))$, якщо $\varphi(x) = 3x + 2$; $f(x) = x^2 - 1$.

Р о з в ’ я з а н н я

1) $y = f(\varphi(x)) = (3x+2)^2 - 1$.

2) $y = \varphi(f(x)) = 3(x^2-1) + 2$.

В і д п о в і д ь: 1) $y = (3x + 2)^2 - 1$; 2) $y = 3(x^2 - 1) + 2$.

Приклад 1.31. Складну функцію

$$y = \sqrt{\log_5^7\left(x^3 + 3x + 1\right)}$$

розкласти на складові.

Р о з в ’ я з а н н я

$$y = \sqrt{u}\,; \quad u = v^7; \quad v = \log_5 \theta; \quad \theta = x^3 + 3x + 1.$$

В і д п о в і д ь: $y = \sqrt{u}\,; \quad u = v^7; \quad v = \log_5 \theta; \quad \theta = x^3 + 3x + 1.$

Приклад 1.32. Складну функцію

$$y = \mathrm{e}^{\arcsin\left(5 - x^2\right)}$$

розкласти на складові.

Р о з в ’ я з а н н я

$$y = \mathrm{e}^u\,; \quad u = \arcsin v; \quad v = 5 - x^2.$$

В і д п о в і д ь: $y = \mathrm{e}^u\,; \quad u = \arcsin v; \quad v = 5 - x^2.$

Приклад 1.33. Довести, що функція $f(x) = x^2 - 5x \sin x$ є парною.

Р о з в ’ я з а н н я

Область визначення X функції $f(x)$: $x \in (-\infty, +\infty)$. Отже, якщо $x \in X$, то і $-x \in X$.

Маємо

$$f(-x) = (-x)^2 - (-5x)\sin(-x) = x^2 - 5x \sin x = f(x),$$

отже, задана функція є парною.

Приклад 1.34. З’ясувати, чи є парною або непарною функція

$$f(x) = 2^x - 3x + 1.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Областю визначення X функції $f(x)$ є проміжок $(-\infty, \infty)$, тому, якщо $x \in X$, то і $-x \in X$.

$$f(-x) = 2^{-x} - 3(-x) + 1 = 2^{-x} + 3x + 1.$$

Вочевидь, що $f(x) \neq f(-x)$ та $f(x) \neq -f(-x)$.

Отже, функція $f(x) = 2^x - 3x + 1$ є функцією загального виду.

В і д п о в і д ь: функція загального виду.

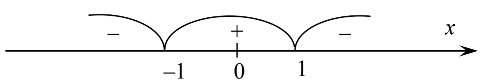
Приклад 1.35. Дослідити функцію

$$f(x) = x^5 \ln \frac{1+x}{1-x}$$

на парність та непарність.

Р о з в ’ я з а н н я

Знайдемо область визначення функції з умови $\frac{1+x}{1-x} > 0$. За методом інтервалів дістанемо: $x \in (-1, 1)$.



Отже, область визначення є симетричною відносно початку координат.

$$f(x)=x^5\ln\frac{1+x}{1-x};\quad f(-x)=(-x)^5\ln\frac{1+(-x)}{1-(-x)};\quad -x^5\ln\frac{1-x}{1+x}=-x^5\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1}=$$
$$=x^5\ln\frac{1+x}{1-x}=f(x).$$

Дійшли висновку, що $f(x)=f(-x)$, тобто задана функція є парною.

В і д п о в і д ь: функція є парною.

Приклад 1.36. Знайти таку функцію $u(x)$, щоб функція $f(x)$ стала: 1) парною; 2) непарною:

$$f(x)=\begin{cases}u(x), & \text{якщо } -\infty<x<0;\\ \exp\left(x^3+4x\right), & \text{якщо } 0<x<\infty.\end{cases}$$

Записати $f(x)$ у кожному з випадків.

Р о з в ' я з а н н я

1) За функцію $u(x)$ візьмемо $u(x)=\exp\left(-x^3-4x\right)$, тоді

$$f(x)=\begin{cases}\exp\left(-x^3-4x\right), & \text{якщо } -\infty<x<0;\\ \exp\left(x^3+4x\right), & \text{якщо } 0<x<\infty.\end{cases}$$

Перевіримо, чи є ця функція парною:

$$f(x)=\exp\left(x^3+4x\right),\ 0<x<\infty;$$
$$f(-x)=\exp\left(-(-x)^3-4(-x)\right)=\exp\left(x^3+4x\right),\ -\infty<x<0.$$

Виходить, що функція

$$f(x)=\begin{cases}\exp\left(-x^3-4x\right), & \text{якщо } -\infty<x<0;\\ \exp\left(x^3+4x\right), & \text{якщо } 0<x<\infty,\end{cases}$$

визначена на симетричному відносно точки O проміжку, є парною.

2) За функцію $u(x)$ візьмемо $u(x)=-\exp\left(-x^3-4x\right)$, тоді

$$f(x)=\begin{cases}-\exp\left(-x^3-4x\right), & \text{якщо } -\infty<x<0;\\ \exp\left(x^3+4x\right), & \text{якщо } 0<x<\infty.\end{cases}$$

Перевіримо, чи є така функція непарною:

$$f(x)=\exp\left(x^3+4x\right),\ \text{якщо}\ 0<x<\infty;$$
$$f(-x)=-\exp\left(-(-x)^3-4(-x)\right)=-\exp\left(x^3+4x\right),\ \text{якщо}\ -\infty<x<0.$$

Виходить, що функція

$$f(x)=\begin{cases} -\exp\left(-x^3-4x\right), & \text{якщо } -\infty<x<0; \\ \exp\left(x^3+4x\right), & \text{якщо } 0<x<\infty, \end{cases}$$

визначена на симетричному відносно початку координат проміжку, є непарною.

В і д п о в і д ь: 1) $f(x)=\begin{cases} \exp\left(-x^3-4x\right), & \text{якщо } \quad -\infty<x<0; \\ \exp\left(x^3+4x\right), & \text{якщо } \quad 0<x<\infty; \end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases} -\exp\left(-x^3-4x\right), & \text{якщо } \quad -\infty<x<0; \\ \exp\left(x^3+4x\right), & \text{якщо } \quad 0<x<\infty. \end{cases}$

Приклад 1.37. Функцію

$$f(x)=(3+x)^{26}$$

подати у вигляді суми парної та непарної функцій.

Р о з в ' я з а н н я

Областю визначення функції $f(x)$ є проміжок $\left(-\infty,\infty\right)$, тобто x та $-x$ належать до інтервалу $\left(-\infty;\infty\right)$. Подамо функцію $f(x)$ у вигляді

$$f(x)=\frac{\left(3+x\right)^{26}+(3-x)^{26}}{2}+\frac{\left(3+x\right)^{26}-(3-x)^{26}}{2}. \qquad (1.57)$$

Нехай $f_1(x)=\dfrac{\left(3+x\right)^{26}+\left(3-x\right)^{26}}{2}$; $f_2(x)=\dfrac{\left(3+x\right)^{26}-\left(3-x\right)^{26}}{2}$. Перевіримо, якими є функції $f_1(x)$ та $f_2(x)$.

Розглянемо $f_1(-x)$ та $f_2(-x)$.

$$f_1(-x)=\frac{\left(3-x\right)^{26}+\left(3+x\right)^{26}}{2}=f_1(x),$$

тобто функція $f_1(x)$ є парною.

$$f_2(-x)=\frac{\left(3-x\right)^{26}-\left(3+x\right)^{26}}{2}=-\frac{\left(3+x\right)^{26}-\left(3-x\right)^{26}}{2}=-f_2(-x),$$

тобто функція $f_2(x)$ є непарною.

Отже, дійсно, функція $f(x)$, записана у формі (1.57), є сумою парної та непарної функцій.

В і д п о в і д ь: $f(x)=\dfrac{\left(3+x\right)^{26}+(3-x)^{26}}{2}+\dfrac{\left(3+x\right)^{26}-(3-x)^{26}}{2}$.

Приклад 1.38. З'ясувати, чи є задана функція

$$f(x)=(8\sin 11x-5\sin 8x)^4\,\mathrm{tg}^5 6x.$$

парною або непарною.

Р о з в ' я з а н н я

Функція $\mathrm{tg}\,6x$ є непарною функцією, тоді функція $\mathrm{tg}^5 6x$ також є непарною функцією.

Функції sin $11x$, sin $8x$ – непарні функції, функція 8sin $11x$ – 5sin $8x$ також є непарною функцією, а функція $(8\sin 11x - 5\sin 8x)^4$ – парна функція.

Задана функція $f(x)$ є добутком непарної та парної функцій, отже $f(x)$ – непарна функція.

В і д п о в і д ь: функція є непарною.

Приклад 1.39. Довести, що функція $f(x) = \sin 3x$ є періодичною з періодом $T = \frac{2\pi}{3}$.

Р о з в ' я з а н н я

Маємо: $f(x) = \sin 3x$; $f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left[3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right] = \sin(3x + 2\pi) = \sin 3x$, звідки і випливає періодичність функції з періодом $T = \frac{2\pi}{3}$.

Приклад 1.40. Знайти найменший період функцій: 1) $f_1(x) = 3\sin x + 2$; 2) $f_2(x) = -3\sin x + 2$; 3) $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

Р о з в ' я з а н н я

Найменшим додатним періодом, тобто основним періодом функцій $f_1(x)$ та $f_2(x)$, є число $T = 2\pi$.

Функція $f(x) = f_1(x) + f_2(x) = (3\sin x + 2) + (-3\sin x + 2) = 4$ є періодичною функцією з будь-яким періодом $T \in R$, але найменшого періоду немає.

В і д п о в і д ь: 1) $T = 2\pi$; 2) $T = 2\pi$; 3) найменшого періоду немає.

Приклад 1.41. Визначити основний період функції

$$y = \operatorname{ctg}\left(16x + \frac{\pi}{7}\right).$$

Р о з в ' я з а н н я

Функція ctg x є періодичною з основним періодом $T = \pi$. Згідно з властивістю 4 періодичних функцій (п. 2.1.3), для функції $y = \operatorname{ctg}\left(16x + \frac{\pi}{7}\right)$

маємо $T = \frac{\pi}{16}$.

В і д п о в і д ь: $T = \frac{\pi}{16}$.

Приклад 1.42. Визначити основний період функції $f(x) = 4\operatorname{tg}^3 3x - 7\operatorname{ctg}^5 3x$.

Р о з в ' я з а н н я

Функції tg $3x$ та ctg $3x$, згідно з властивістю 3 (п. 2.1.3) періодичних функцій, мають основний період $T = \frac{\pi}{3}$. Кожна з цих функцій є періодичною, а отже, у відповідності з властивістю 2 (п. 2.1.3) періодичних функцій, періоди складних функцій $\operatorname{tg}^3 3x$ та $\operatorname{ctg}^5 3x$ також дорівнюватимуть $T = \frac{\pi}{3}$.

Період функції $f(x)$, згідно з властивістю 1 (п. 2.1.3) періодичних функцій, також дорівнює $T=\dfrac{\pi}{3}$.

В і д п о в і д ь: $T=\dfrac{\pi}{3}$.

Приклад 1.43. Знайти основний період функції

$$f(x)=4\operatorname{tg}\frac{3x}{2}+9\operatorname{ctg}\frac{9x}{8}-7\operatorname{ctg}\frac{27x}{4}.$$

Р о з в ' я з а н н я

Звернемось до властивості 1 (п. 2.1.3) періодичних функцій.

У даному випадку $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 8$, $\beta_3 = 4$; НСК(2, 8, 4) = 8; $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 9$, $\alpha_3 = 27$; НСД(3, 9, 27) = 3. Тоді $T=\dfrac{8}{3}\pi$.

В і д п о в і д ь: $T=\dfrac{8}{3}\pi$.

Приклад 1.44. З'ясувати, чи є монотонною функція $f(x) = 4^{\sqrt{x}}$.

Р о з в ' я з а н н я

Задану функцію визначено на проміжку $x \in [0, +\infty)$. Функція $f(x)$ є складною функцією і її можна розкласти на складові: $f(x) = 4^u$, $u=\sqrt{x}$.

Внутрішню функцію визначено на проміжку $x \in [0, +\infty)$, де вона є зростаючою. Її область значень $u\in[0;\ +\infty)$.

Зовнішня функція на проміжку $u \in [0, +\infty)$ є зростаючою.

Згідно з властивістю 7 (п. 2.1.4) монотонних функцій, задана функція має бути зростаючою функцією.

В і д п о в і д ь: функція зростає в області визначення.

Приклад 1.45. Знайти функцію, обернену до функції $y=\dfrac{x+2}{3}$, та побудувати графіки прямої і оберненої функцій.

Р о з в ' я з а н н я

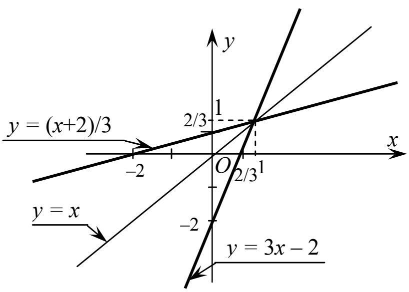


Рисунок 1.7

Якщо $y=\dfrac{x+2}{3}$, то $x=3y-2$ і обернена функція має вигляд $y=3x-2$.

Графіком прямої та оберненої функцій є прямі, задані рівняннями $y=\dfrac{x+2}{3}$ та $y=3x-2$ (рис. 1.7). Ці прямі є симетричні відносно бісектриси, заданої рівнянням $y=x$.

В і д п о в і д ь: $y=3x-2$.

Приклад 1.46. Знайти функцію, обернену до функції

$$y = \frac{x-1}{x}.$$

Побудувати графіки прямої та оберненої функцій.

Р о з в ’ я з а н н я

Область визначення заданої функції: $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Область значень функції: $y \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

Знайдемо x як функцію від y.

$$y = \frac{x-1}{x}; \quad xy = x - 1; \quad xy - x = -1; \quad x(1-y) = 1; \quad x = \frac{1}{1-y}.$$

Функція $x = \dfrac{1}{1-y}$ описує ту ж саму залежність, що і функція $y = \dfrac{x-1}{x}$. Якщо перейти до стандартних позначень аргументу та функції, то з функції $x = \dfrac{1}{1-y}$ дістанемо функцію $y = \dfrac{1}{1-x}$, яка є оберненою до функції $y = \dfrac{x-1}{x}$.

Областю визначення цієї функції є значення $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, а областю значень функції є значення $y \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Отже, функції $y = \dfrac{x-1}{x}$ та $y = \dfrac{1}{1-x}$ є взаємно оберненими. Побудуємо графіки цих функцій (рис. 1.8).

Запишемо функцію $y = \dfrac{x-1}{x}$ у такий спосіб: $y = 1 - \dfrac{1}{x}$ чи $y - 1 = -\dfrac{1}{x}$. Графіком такої функції є гіпербола з центром у точці $O_1(0, 1)$, а асимптотами цієї гіперболи є прямі $x = 0$ та $y = 1$.

Функцію $y = \dfrac{1}{1-x}$ запишемо у вигляді $y = -\dfrac{1}{x-1}$. Графіком такої функції є гіпербола, центр якої міститься у точці $O_2(1, 0)$, а асимптотами гіперболи є прямі $x = 1$ та $y = 0$.

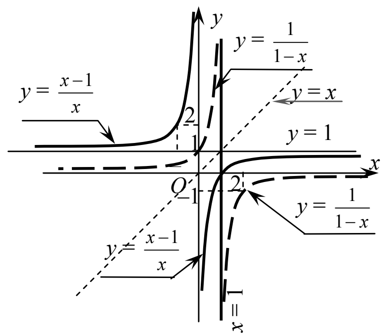


Рисунок 1.8

В і д п о в і д ь: $y = \dfrac{1}{1-x}$.

Приклад 1.47. З’ясувати, які з функцій

$$1)\ y = 9\sin 2x - 4; \quad 2)\ y = \mathrm{tg}\, 5x; \quad 3)\ y = 2 - \arcsin x; \quad 4)\ y = 2 \cdot 3^x$$

є обмеженими.

Р о з в ’ я з а н н я

1) $-13 \le 9\sin 2x - 4 \le 5$, тобто функція $y = 9\sin 2x - 4$ є обмеженою.

2) $-\infty < \operatorname{tg} 5x < +\infty$, тобто функція $y = \operatorname{tg} 5x$ є необмеженою.

3) $2 - \dfrac{\pi}{2} \le 2 - \arcsin x \le 2 + \dfrac{\pi}{2}$, тобто функція $y = 2 - \arcsin x$ є обмеженою.

4) $0 < 2 \cdot 3^x < \infty$, тобто функція $y = 2 \cdot 3^x$ є необмеженою (або обмеженою знизу).

В і д п о в і д ь: 1) функція обмежена; 2) функція необмежена; 3) функція обмежена; 4) функція необмежена.

Приклад 1.48. Побудувати графік функції $\rho = -4\cos 3\varphi$, виходячи з графіка функції $\rho = 4\cos 3\varphi$.

Р о з в ' я з а н н я

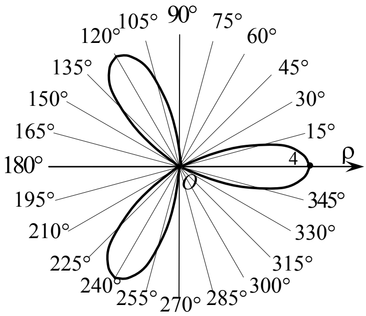
Побудуємо графік функції $\rho = 4\cos 3\varphi$. Задана функція визначає трипелюсткову розетку. Крива складається з трьох пелюсток, які описуються, коли аргумент φ набуває значень від 0 до 2π.

Складемо допоміжну таблицю:

№ п/п	φ (град.)	3φ (град.)	$\cos 3\varphi$	$\rho = 4\cos 3\varphi$	№ п/п	φ (град.)	3φ (град.)	$\cos 3\varphi$	$\rho = 4\cos 3\varphi$
1	0	0	1	4	14	195	585	−0,707	−2,828
2	15	45	0,707	2,828	15	210	630	0	0
3	30	90	0	0	16	225	675	0,707	2,828
4	45	135	−0,707	−2,828	17	240	720	1	4
5	60	180	−1	−4	18	255	765	0,707	2,828
6	75	225	−0,707	−2,828	19	270	810	0	0
7	90	270	0	0	20	285	855	−0,707	−2,828
8	105	315	0,707	2,828	21	300	900	−1	−4
9	120	360	1	4	22	315	945	−0,707	−2,828
10	135	405	0,707	2,828	23	330	990	0	0
11	150	450	0	0	24	345	1035	0,707	2,828
12	165	495	−0,707	−2,828	25	360	1080	1	4
13	180	540	−1	−4	–	–	–	–	–

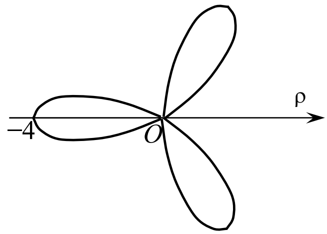
На підставі таблиці побудуємо криву (рис. 1.9).

Графік функції $\rho = -4\cos\varphi$ будуємо, виходячи з властивості 1 (п. 2.1.10), симетрично до графіка функції $\rho = 4\cos\varphi$ відносно полюса O (рис. 1.10).



$\rho = \mathbf{4}\cos\mathbf{3}\varphi$

Рисунок 1.9



$\rho = -\mathbf{4}\cos\mathbf{3}\varphi$

Рисунок 1.10

Приклад 1.49. Побудувати графік функції $\rho = 3\sin(-2\varphi)$, виходячи з графіка функції $\rho = 3\sin 2\varphi$.

Р о з в ’ я з а н н я

Побудуємо графік функції $\rho = 3\sin 2\varphi$. Задана функція визначає чотирипелюсткову розетку. Крива складається з чотирьох пелюсток, які описуються, коли аргумент φ набуває значень від 0 до 2π.

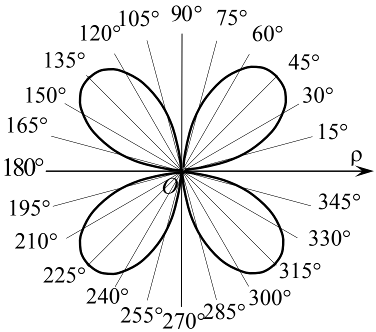
Складемо допоміжну таблицю:

№ п/п	φ (град.)	2φ (град.)	$\sin 2\varphi$	$\rho = 3\sin 2\varphi$	№ п/п	φ (град.)	2φ (град.)	$\sin 2\varphi$	$\rho = 3\sin 2\varphi$
1	0	0	0	0	14	195	390	0,5	1,5
2	15	30	0,5	1,5	15	210	420	0,866	2,598
3	30	60	0,866	2,598	16	225	450	1	3
4	45	90	1	3	17	240	480	0,866	2,598
5	60	120	0,866	2,598	18	255	510	0,5	1,5
6	75	150	0,5	1,5	19	270	540	0	0
7	90	180	0	0	20	285	570	−0,5	−1,5
8	105	210	−0,5	−1,5	21	300	600	−0,866	−2,598
9	120	240	−0,866	−2,598	22	315	630	−1	−3
10	135	270	−1	−3	23	330	660	−0,866	−2,598
11	150	300	−0,866	−2,598	24	345	690	−0,5	−1,5
12	165	330	−0,5	−1,5	25	360	720	0	0
13	180	360	0	0	–	–	–	–	–

Значення функцій в таблиці є наближені.

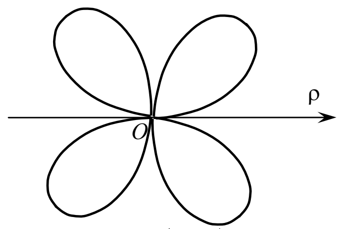
На підставі таблиці побудуємо криву (рис. 1.11).

Графік функції $\rho = 3\sin(-2\varphi)$ будуємо, виходячи з властивості 2 (п. 2.1.10), симетрично до графіка функції $\rho = 3\sin 2\varphi$ відносно полярної осі (рис. 1.12).



$\rho = 3\sin 2\varphi$

Рисунок1.11



$\rho = 3\sin(-2\varphi)$

Рисунок 1.12

Приклад 1.50. Побудувати графік функції $\rho = 4\cos\varphi$, виходячи з графіка функції $\rho = \cos\varphi$.

Р о з в ’ я з а н н я

Побудуємо графік функції $\rho = \cos\varphi$. Задана функція визначає коло, яке описується, коли аргумент φ набуває значень від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$.

Складемо допоміжну таблицю:

№ п/п	φ (град.)	$\rho = \cos\varphi$	№ п/п	φ (град.)	$\rho = \cos\varphi$
1	–90	0	8	15	0,966
2	–75	0,259	9	30	0,866
3	–60	0,5	10	45	0,707
4	–45	0,707	11	60	0,5
5	–30	0,866	12	75	0,259
6	–15	0,966	13	90	0
7	0	1	–	–	–

Значення функції в таблиці є наближені.

На підставі таблиці будуємо криву (рис. 1.13). Графік функції $\rho = 4\cos\varphi$ будуємо, виходячи з властивості 3 (п. 2.1.10), розтягуванням графіка функції $\rho = \cos\varphi$ у чотири рази вздовж полярної осі (рис. 1.14).

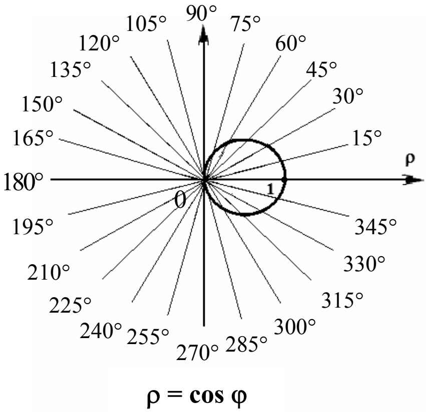


Рисунок 1.13

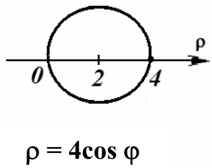


Рисунок 1.14

Приклад 1.51. Побудувати графік функції $\rho = \frac{1}{3}\sin\varphi$, виходячи з графіка функції $\rho = \sin\varphi$.

Р о з в ’ я з а н н я

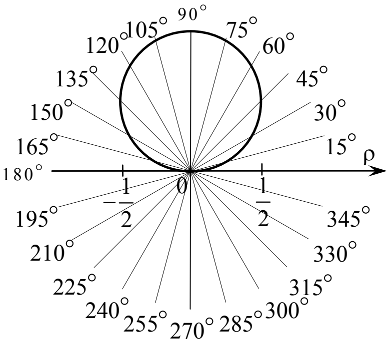
Побудуємо графік функції $\rho = \sin\varphi$. Задана функція визначає коло, яке описується, коли аргумент φ набуває значень від 0 до π.

Складемо допоміжну таблицю:

№ п/п	**φ (град.)**	**$\rho = \sin\varphi$**	**№ п/п**	**φ (град.)**	**$\rho = \sin\varphi$**
1	0	0	8	105	0,965
2	15	0,259	9	120	0,866
3	30	0,5	10	135	0,707
4	45	0,707	11	150	0,5
5	60	0,866	12	165	0,259
6	75	0,965	13	180	0
7	90	1	–	–	–

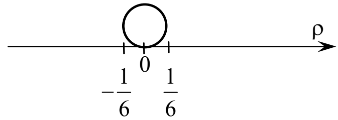
Значення функції в таблиці є наближені.

На підставі таблиці побудуємо криву (рис. 1.15). Графік функції $\rho = \frac{1}{3}\sin\varphi$ будуємо, виходячи з властивості 4 (п. 2.1.10), стисканням графіка функції $\rho = \sin\varphi$ втроє вздовж полярної осі (рис. 1.16).



$\rho = \sin\varphi$

Рисунок 1.15



$\rho = \frac{1}{3}\sin\varphi$

Рисунок 1.16

Приклад 1.52. Побудувати графік функції $\rho = 1 + 2\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)$, виходячи з графіка функції $\rho = 1 + 2\cos\varphi$.

Р о з в ’ я з а н н я

Побудуємо графік функції $\rho = 1 + 2\cos\varphi$. Задана функція визначає завиток Паскаля, який описується, коли аргумент φ набуває значень від 0 до 2π.

Складемо допоміжну таблицю:

№ п/п	φ (град.)	$\cos\varphi$	$2\cos\varphi$	$\rho=1+2\cos\varphi$	№ п/п	φ (град.)	$\cos\varphi$	$2\cos\varphi$	$\rho=1+2\cos\varphi$
1	0	1	2	3	14	195	−0,966	−1,932	−0,932
2	15	0,966	1,932	2,932	15	210	−0,866	−1,732	−0,732
3	30	0,866	1,732	2,732	16	225	−0,707	−1,414	−0,414
4	45	0,707	1,414	2,414	17	240	−0,5	−1	0
5	60	0,5	1	2	18	255	−0,259	−0,518	0,482
6	75	0,259	0,518	1,518	19	270	0	0	1
7	90	0	0	1	20	285	0,259	0,518	1,518
8	105	−0,259	−0,518	0,482	21	300	0,5	1	2
9	120	−0,5	−1	0	22	315	0,707	1,414	2,414
10	135	−0,707	−1,414	−0,414	23	330	0,866	1,732	2,732
11	150	−0,866	−1,732	−0,732	24	345	0,966	1,932	2,932
12	165	−0,966	−1,932	−0,932	25	360	1	2	3
13	180	−1	−2	−1	–	–	–	–	–

Значення функції в таблиці є наближені.

На підставі таблиці побудуємо криву (рис. 1.17).

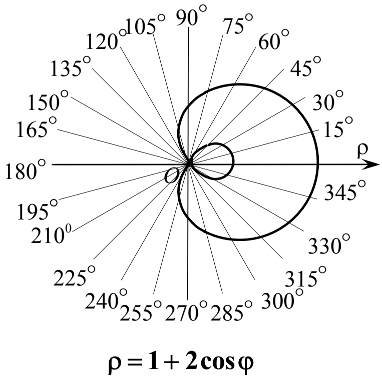


Рисунок 1.17

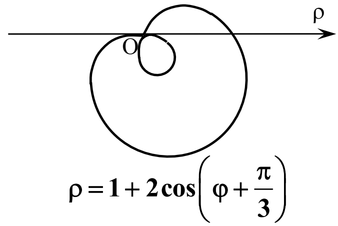


Рисунок 1.18

Графік функції $\rho = 1 + 2\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)$ будуємо, виходячи з властивості 5 (п. 2.1.10), обертанням графіка функції $\rho = 1 + 2\cos\varphi$, навколо полюса на кут $\frac{\pi}{3}$ (рис. 1.18).

Приклад 1.53. Побудувати графік функції $\rho = \frac{2}{\varphi} + 5$, виходячи з графіка функції $\rho = \frac{2}{\varphi}$.

Р о з в ’ я з а н н я

Побудуємо графік функції $\rho = \frac{2}{\varphi}$. Задана функція визначає гіперболічну спіраль, яка описується, коли аргумент φ набуває значень від 0 до ∞. Обмежимося тією частиною нескінченної гіперболічної спіралі, яка відповідає значенням φ від 0 до 2π.

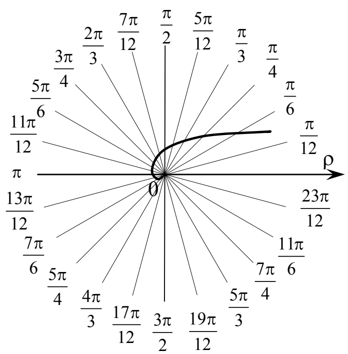
Складемо допоміжну таблицю, користуючись радіанною мірою кута:

№ п/п	**φ (рад.)**	$\mathbf{\frac{1}{\varphi}}$	$\mathbf{\frac{2}{\varphi}}$	**№ п/п**	**φ (рад.)**	$\mathbf{\frac{1}{\varphi}}$	$\mathbf{\frac{2}{\varphi}}$
1	0	–	–	14	$\frac{13\pi}{12}$	0,2936	0,587199
2	$\frac{\pi}{12}$	3,816794	7,633588	15	$\frac{7\pi}{6}$	0,272628	0,545256
3	$\frac{\pi}{6}$	1,908397	3,816794	16	$\frac{5\pi}{4}$	0,254453	0,508906

4	$\frac{\pi}{4}$	1,272265	2,544529	17	$\frac{4\pi}{3}$	0,23855	0,477099
5	$\frac{\pi}{3}$	0,954198	1,908397	18	$\frac{17\pi}{12}$	0,224517	0,449035
6	$\frac{5\pi}{12}$	0,763359	1,526718	19	$\frac{3\pi}{2}$	0,212044	0,424088
7	$\frac{\pi}{2}$	0,636132	1,272265	20	$\frac{19\pi}{12}$	0,200884	0,401768
8	$\frac{7\pi}{12}$	0,545256	1,090513	21	$\frac{5\pi}{3}$	0,19084	0,381679
9	$\frac{2\pi}{3}$	0,477099	0,954198	22	$\frac{7\pi}{4}$	0,181752	0,363504
10	$\frac{3\pi}{4}$	0,424088	0,848176	23	$\frac{11\pi}{6}$	0,173491	0,346981
11	$\frac{5\pi}{6}$	0,381679	0,763359	24	$\frac{23\pi}{12}$	0,165948	0,331895
12	$\frac{11\pi}{12}$	0,346981	0,693963	25	π	0,159033	0,318066
13	π	0,318066	0,636132				

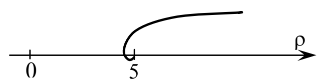
Значення функції в таблиці є наближені.

На підставі таблиці побудуємо криву (рис. 1.19).



$$\boldsymbol{\rho = \frac{2}{\varphi}}$$

Рисунок 1.19



$$\boldsymbol{\rho = \frac{2}{\varphi} + 5}$$

Рисунок 1.20

Графік функції $\rho = \frac{2}{\varphi} + 5$ будуємо, виходячи з властивості 6 (п. 2.1.10), паралельним перенесенням графіка функції $\rho = \frac{2}{\varphi}$ вздовж полярної осі на величину 5 (рис. 1.20).

Границя функції

Приклад 1.54. Записати за допомогою кванторів визначення 2 з п. 2.3.1.

Р о з в ' я з а н н я

$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0, \;\; \forall x\colon 0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |\, f(x) - A \,| < \varepsilon.$

В і д п о в і д ь: $\lim\limits_{x = x_0 - 0} f\left(x\right) = A, \; \forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0, \;\; \forall x\colon 0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow$ $|\, f(x) - A \,| < \varepsilon.$

Приклад 1.55. Довести, що граничне значення функції $y = 23x - 3$ в точці $x = 1$ дорівнює 20.

Р о з в ' я з а н н я

Візьмемо будь-яке як завгодно мале додатне число ε, та розглянемо нерівність $\left|\left(23x - 3\right) - 20\right| < \varepsilon$ чи $23\left|x - 1\right| < \varepsilon$. Вочевидь, що нерівність

$$\left|\left(23x - 3\right) - 20\right| < \varepsilon$$

виконується для тих значень x, які задовольняють умову $0 < \left|x - 1\right| < \dfrac{\varepsilon}{23}$, тобто можна вибрати $\delta = \dfrac{\varepsilon}{23}$. Тоді маємо:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta = \delta\left(\varepsilon\right) = \frac{\varepsilon}{23} > 0 \;\; \forall x\colon \; \left|x - 1\right| < \delta\left(\varepsilon\right) \;\Rightarrow\; \left|\left(23x - 3\right) - 20\right| < \varepsilon.$$

Приклад 1.56. Довести, що коли $x \to 4$, то границя функції $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 4x}$ дорівнює 2.

Р о з в ' я з а н н я

Будемо спиратись на визначення 1 границі функції за Коші (п. 2.3.1). Належить довести, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для тих x, які задовольняють умову $0 < |\, x - x_0 \,| < \delta$, відповідні значення функції задовольняють нерівність $|\, f(x) - A \,| < \varepsilon$, тобто, що $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

У даному випадку $x_0 = 4;\; f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 4x};\; A = 2$. Обираємо будь-яке додатне число ε. Знайдемо таке $\delta\left(\varepsilon\right) > 0,$ що буде виконуватись умова $\left|\dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 4x} - 2\right| < \varepsilon$.

Звідси маємо

$$\left|\frac{\left(x - 4\right)\left(x + 4\right)}{x\left(x - 4\right)} - 2\right| < \varepsilon, \;\; \left|\frac{\left(x + 4\right)}{x} - 2\right| < \varepsilon, \;\; \left|\frac{\left(x + 4\right) - 2x}{x}\right| < \varepsilon, \;\; \left|\frac{4 - x}{x}\right| < \varepsilon, \;\; \left|\frac{4}{x} - 1\right| < \varepsilon.$$

Тоді

$$-\varepsilon < \frac{4}{x} - 1 < \varepsilon, \;\; 1 - \varepsilon < \frac{4}{x} < 1 + \varepsilon, \;\; \frac{1 - \varepsilon}{4} < \frac{1}{x} < \frac{1 + \varepsilon}{4}. \qquad (*)$$

Ця умова має виконуватись для тих x, які задовольняють нерівність
$$0<|x-4|<\delta.$$
Звідси маємо
$$-\delta<x-4<\delta,\ \ 4-\delta<x<4+\delta.$$
Тоді
$$\frac{1}{4+\delta}<\frac{1}{x}<\frac{1}{4-\delta}. \qquad (**)$$
Порівнюючи нерівності (*) та (**) дістанемо обмеження для δ.
$$\begin{cases}\dfrac{1}{4-\delta}=\dfrac{1+\varepsilon}{4};\\ \dfrac{1}{4+\delta}=\dfrac{1-\varepsilon}{4},\end{cases} \qquad \begin{cases}4-\delta=\dfrac{4}{1+\varepsilon};\\ 4+\delta=\dfrac{4}{1-\varepsilon},\end{cases} \qquad \begin{cases}\delta_1=\dfrac{4\varepsilon}{1+\varepsilon};\\ \delta_2=\dfrac{4\varepsilon}{1-\varepsilon}.\end{cases}$$
Нехай $\delta=\min\{\delta_1;\delta_2\}=\dfrac{4\varepsilon}{1+\varepsilon}$.

Таким чином показано, що для обраного ε > 0 знайдено таке $\delta=\dfrac{4\varepsilon}{1+\varepsilon}$, що для тих x, які задовольняють умову $0<|x-4|<\dfrac{4\varepsilon}{1+\varepsilon}$, відповідні значення функції задовольняють умову $\left|\dfrac{x^2-16}{x^2-4x}-2\right|<\varepsilon$.

Приклад 1.57. З'ясувати, чи існує границя функції $y=4\,\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\,x)+5$, коли $x\to\dfrac{\pi}{2}$.

Р о з в ' я з а н н я

Нехай $x\to\dfrac{\pi}{2}$ ліворуч. У цьому випадку $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\mathrm{tg}\,x=\infty$,

тобто $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\mathrm{arctg}\,(\mathrm{tg}\,x)=\dfrac{\pi}{2}$, а $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(4\,\mathrm{arctg}\,(\mathrm{tg}\,x)+5\right)=2\pi+5$.

Якщо $x\to\dfrac{\pi}{2}$ праворуч, то $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\mathrm{tg}\,x=-\infty$. Тоді $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\,x)=-\dfrac{\pi}{2}$, а $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\left(4\,\mathrm{arctg}\,(\mathrm{tg}\,x)+5\right)=-2\pi+5$.

Отже, виходить, що однобічні границі функції хоч і існують, але вони не рівні між собою, тобто задана функція $y=4\,\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\,x)+5$ у точці $x=\dfrac{\pi}{2}$ границі не має.

В і д п о в і д ь: у точці $x=\dfrac{\pi}{2}$ границя не існує.

Розкриття невизначеностей типу $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

Приклад 1.58 Знайти границю функції

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3-2x^2+6x-7}{7x^3-3x^2-5x+4}.$$

Р о з в ' я з а н н я

Позначимо задану границю функції через A.

Розв'язання розпочинаємо з того, що граничне значення x, тобто ∞ , підставляємо до заданого виразу:

$$A=\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3-2x^2+6x-7}{7x^3-3x^2-5x+4}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Вочевидь, йдеться про невизначеність типу $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Варто пам'ятати про схожість властивостей нескінченно малих і нескінченно великих послідовностей та нескінченно малих і нескінченно великих функцій у заданій точці, про зв'язок між збіжними послідовностями та границями функцій. Методи розкривання невизначеностей для послідовностей можна поширити і на функції.

ЗАУВАЖЕННЯ. Інформація про методи розкривання невизначеностей при знаходженні границь функцій міститься у Додатку Е.

Для розкриття невизначеності $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ доцільно користуватись таким прийомом. Чисельник та знаменник водночас поділимо на x у найбільшому степені. У даному випадку треба ділити на x^3.Тоді

$$A=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x^3}{x^3}-\frac{2x^2}{x^3}+\frac{6x}{x^3}-\frac{7}{x^3}}{\frac{7x^3}{x^3}-\frac{3x^2}{x^3}-\frac{5x}{x^3}+\frac{4}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{2}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{7}{x^3}}{7-\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{4}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(5-\frac{2}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{7}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(7-\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}5-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{x^2}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\infty}7-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^3}}=\frac{5-2\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}+6\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}-7\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}}{7-3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}-5\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}+4\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}}.$$

За умовою $x\to\infty$. Це означає, що x є нескінченно великою величиною, а величина, обернена до неї, є нескінченно малою, тобто $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$. Остаточно виходить $A=\frac{5}{7}$.

В і д п о в і д ь: $\frac{5}{7}$.

Приклад 1.59. Знайти границю функції

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^7-2x^2+6x+8}{3x^4-2x^3+x-1}.$$

Р о з в ' я з а н н я

Позначимо задану границю функції через A.

При підстановці граничного значення x до функції з'ясовуємо, що знов маємо справу з невизначеністю $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

$$A=\lim_{x\to\infty}\frac{5x^7-2x^2+6x+8}{3x^4-2x^3+x-1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x^7}{x^7}-\frac{2x^2}{x^7}+\frac{6x}{x^7}+\frac{8}{x^7}}{\frac{3x^4}{x^7}-\frac{2x^3}{x^7}+\frac{x}{x^7}-\frac{1}{x^7}}=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{2}{x^5}+\frac{6}{x^6}+\frac{8}{x^7}}{\frac{3}{x^3}-\frac{2}{x^4}+\frac{1}{x^6}-\frac{1}{x^7}}=\infty.$$

Здобутий результат зумовлено тим, що коли $x\to\infty$ чисельник дорівнює 5, тобто є сталою, а знаменник є нескінченно малою величиною. Отже, дріб як величина, обернена до нескінченно малої, є нескінченно великою величиною, коли $x\to\infty$.

В і д п о в і д ь: ∞.

Приклад 1.60. Знайти границю функції

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-2x^2+3x+11}{9x^8-3x^3+8x^2-1}.$$

Р о з в ' я з а н н я

Позначимо задану границю функції через

$$A=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-2x^2+3x+11}{9x^8-3x^3+8x^2-1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x^3}{x^8}-\frac{2x^2}{x^8}+\frac{3x}{x^8}+\frac{11}{x^8}}{\frac{9x^8}{x^8}-\frac{3x^3}{x^8}+\frac{8x^2}{x^8}-\frac{1}{x^8}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{x^5}-\frac{2}{x^6}+\frac{3}{x^7}+\frac{11}{x^8}}{9-\frac{3}{x^5}+\frac{8}{x^6}-\frac{1}{x^8}}=0.$$

В і д п о в і д ь: 0.

ЗАУВАЖЕННЯ. Аналізуючи розглянуті приклади, можемо дійти висновку, що, якщо при знаходженні границі частки функцій, які являють собою многочлени, маємо невизначеність $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, то ця границя дорівнює:

1) відношенню коефіцієнтів при старших степенях, коли старші степені чисельника та знаменника є однакові;

2) 0, коли найбільший степінь чисельника є менший за найбільший степінь знаменника;
3) ∞ , коли старший степінь чисельника є більший за старший степінь знаменника.

Розкриття невизначеностей типу $[\infty-\infty]$

Приклад 1.61. Знайти границю функції

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+8x^2+3}-\sqrt{x^4+x^2}\right).$$

Р о з в ’ я з а н н я

Позначимо задану границю функції через

$$A=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+8x^2+3}-\sqrt{x^4+x^2}\right)=[\infty-\infty].$$

Доцільним у даному випадку є такий прийом. Для зручності помножимо та поділимо даний вираз на спряжений вираз:

$$A=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^4+8x^2+3}-\sqrt{x^4-x^2}\right)\left(\sqrt{x^4+8x^2+3}+\sqrt{x^4+x^2}\right)}{\sqrt{x^4+8x^2+3}+\sqrt{x^4+x^2}}.$$

Користуючись формулою різниці квадратів $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, дістанемо

$$A=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^4+8x^2+3}\right)^2-\left(\sqrt{x^4+x^2}\right)^2}{\sqrt{x^4+8x^2+3}+\sqrt{x^4+x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^4+8x^2+3\right)-\left(x^4+x^2\right)}{\sqrt{x^4+8x^2+3}+\sqrt{x^4+x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+8x^2+3-x^4-x^2}{\sqrt{x^4+8x^2+3}+\sqrt{x^4+x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{7x^2+3}{\sqrt{x^4+8x^2+3}+\sqrt{x^4+x^2}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Після проведених перетворень знову прийшли до невизначеності, але вже іншого типу. Відомо, що у такому разі можна чисельник та знаменник поділити на x у найбільшому степені. У чисельнику найбільший степінь дорівнює 2, у знаменнику корені з нескінченно великих величин.

Для того, щоб оцінити, чому дорівнює найбільший степінь x у знаменнику, знехтуємо доданками $8x^2$ та 3 у першому корені та x^2 – у другому, тоді $\sqrt{x^4}=x^2$. Отже, найбільший степінь x у знаменнику дорівнює 2. Спираючись на метод, використаний у попередніх прикладах, поділимо чисельник та знаменник на x^2. Виходить:

$$A=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{7x^2}{x^2}+\dfrac{3}{x^2}}{\dfrac{\sqrt{x^4+8x^2+3}}{x^2}+\dfrac{\sqrt{x^4+x^2}}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{7+\dfrac{3}{x^2}}{\sqrt{\dfrac{x^4+8x^2+3}{x^4}}+\sqrt{\dfrac{x^4+x^2}{x^4}}}=$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{7+\dfrac{3}{x^2}}{\sqrt{1+\dfrac{8}{x^2}+\dfrac{3}{x^4}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} = \frac{7}{2}.$$

В і д п о в і д ь: $\dfrac{7}{2}$.

Розкриття невизначеностей типу $\left[\dfrac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}\right]$

Приклад 1.62. Знайти границю функції

$$\lim_{x\to -2} \frac{5x^3+x^2+4x+44}{2x^3-x^2-3x+14}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Позначимо задану границю функції через A.

Як завжди, розв’язання розпочинається з підстановки граничного значення $x_0 = -2$ під знак границі.

Розглянемо

$$A = \lim_{x\to -2} \frac{5x^3+x^2+4x+44}{2x^3-x^2-3x+14} = \left[\frac{0}{0}\right].$$

Якщо змінна x прямує до скінченного значення x_0, а сама функція, границю якої треба знайти, є відношенням двох многочленів, які в точці x_0 дорівнюють нулю, то доцільно чисельник та знаменник розкласти на множники у певний спосіб. Зокрема, оскільки x_0 – корінь многочленів у чисельнику та знаменнику, то, як відомо, такі многочлени діляться націло на $x - x_0$. Ця інформація може допомогти у розкладанні многочленів на множники. Поділимо чисельник та знаменник на вираз $x+2$:

$$\begin{array}{r|l}
-\;5x^3+x^2+4x+44 & x+2 \\ \cline{2-2}
\underline{5x^3+10x^2} \qquad\qquad & 5x^2-9x+22 \\
-\;-9x^2+4x \qquad & \\
\underline{-9x^2-18x} \qquad & \\
-\;22x+44 & \\
\underline{22x+44} & \\
0 \quad &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
-\;2x^2-x^2-3x+14 & x+2 \\ \cline{2-2}
\underline{2x^3+4x^2} \qquad\qquad & 2x^2-5x+7 \\
-\;-5x^2-3x \qquad & \\
\underline{-5x^2-10x} \qquad & \\
-\;7x+14 & \\
\underline{7x+14} & \\
0 \quad &
\end{array}$$

Тоді

$$A=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)\left(5x^2-9x+22\right)}{(x+2)\left(2x^2-5x+7\right)}=\lim_{x\to-2}\frac{5x^2-9x+22}{2x^2-5x+7}=\lim_{x\to-2}\frac{5(-2)^2-9(-2)+22}{2(-2)^2-5(-2)+7}=\frac{60}{25}=\frac{12}{5}.$$

Відповідь: $\frac{12}{5}$.

Приклад 1.63. Знайти границю функції

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{10x-13}-\sqrt{2x+11}}{\sqrt{1+2x}-\sqrt{9x-20}}.$$

Розв'язання

Позначимо задану границю функції через

$$A=\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{10x-13}-\sqrt{2x+11}}{\sqrt{1+2x}-\sqrt{9x-20}}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Якщо змінна x прямує до скінченного значення x_0, а в чисельнику чи в знаменнику або і в чисельнику і в знаменнику змінна перебуває під коренем квадратним і до того ж має місце невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$, то доцільним є такий прийом. Чисельник та знаменник треба помножити на вираз, спряжений до заданого ірраціонального виразу:

$$A=\lim_{x\to3}\left(\frac{\sqrt{10x-13}-\sqrt{2x+11}}{\sqrt{1+2x}-\sqrt{9x-20}}\cdot\frac{\sqrt{10x-13}+\sqrt{2x+11}}{\sqrt{10x-13}+\sqrt{2x+11}}\cdot\frac{\sqrt{1+2x}+\sqrt{9x+20}}{\sqrt{1+2x}+\sqrt{9x+20}}\right).$$

Користуюсь формулою різниці квадратів $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, дістанемо

$$A=\lim_{x\to3}\left(\frac{\left(\sqrt{10x-13}\right)^2-\left(\sqrt{2x+11}\right)^2}{\left(\sqrt{1+2x}\right)^2-\left(\sqrt{9x-20}\right)^2}\cdot\frac{\sqrt{1+2x}+\sqrt{9x+20}}{\sqrt{10x-13}+\sqrt{2x+11}}\right).$$

Згідно з теоремою про границю добутку двох функцій, маємо

$$A=\lim_{x\to3}\frac{(10x-13)-(2x+11)}{(1+2x)-(9x-20)}\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{1+2x}+\sqrt{9x+20}}{\sqrt{10x-13}+\sqrt{2x+11}}=$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{10x-13-2x-11}{1+2x-9x+20}\cdot\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{7}+\sqrt{7}}{\sqrt{17}+\sqrt{17}}=\frac{2\sqrt{7}}{2\sqrt{17}}\lim_{x\to3}\frac{8x-24}{-7x+21}=$$

$$=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{17}}\lim_{x\to3}\frac{8(x-3)}{-7(x-3)}=-\frac{8}{7}\cdot\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{17}}=-\frac{8}{\sqrt{119}}.$$

Відповідь: $-\frac{8}{\sqrt{119}}$.

Приклад 1.64. Знайти границю функції

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{8x+11}-3}{\sqrt{3x+19}-\sqrt{49-12x}}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Позначимо задану границю функції через

$$A=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{8x+11}-3}{\sqrt{3x+19}-\sqrt{49-12x}}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Розвязання прикладу виконаємо двома способами.

I спосіб

До знаменника можна застосувати метод множення та ділення на спряжений до знаменика вираз $\sqrt{3x+19}+\sqrt{49-12x}$. Для спрощення чисельника буде доцільним помножити чисельник, а отже, і знаменник на неповний квадрат суми виразів $\sqrt[3]{8x+11}$ та 3, тобто на $\left(\left(\sqrt[3]{8x+11}\right)^2+3\sqrt[3]{8x+11}+3^2\right)$. Отже, виходить

$$A=\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt[3]{8x+11}-3}{\sqrt{3x+19}-\sqrt{49-12x}}\cdot\frac{\sqrt{3x+19}+\sqrt{49-12x}}{\sqrt{3x+19}+\sqrt{49-12x}}\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{8x+11}\right)^2+3\sqrt[3]{8x-11}+3^2}{\left(\sqrt[3]{8x+11}\right)^2+3\sqrt[3]{8x-11}+3^2}\right).$$

Згідно з формулою різниці кубів $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, дістанемо таке

$$A=\lim_{x\to 2}\left(\frac{\left(\sqrt[3]{8x+11}\right)^3-3^3}{\left(\sqrt{3x+19}\right)^2-\left(\sqrt{49-12x}\right)^2}\cdot\frac{\sqrt{3x+19}+\sqrt{49-12x}}{\left(\sqrt[3]{8x+11}\right)^2+3\sqrt[3]{8x+11}+9}\right).$$

Скориставшись теоремою про границю добутків, маємо

$$A=\lim_{x\to 2}\frac{8x-16}{15x-30}\cdot\frac{\sqrt{25}+\sqrt{25}}{\left(\sqrt[3]{27}\right)^2+3\sqrt[3]{27}+9}=\lim_{x\to 2}\frac{8(x-2)}{15(x-2)}\cdot\frac{10}{27}=\frac{8}{5}\cdot\frac{10}{27}=\frac{16}{81}.$$

II спосіб

Границю заданої функції було вже знайдено при розв’язуванні I способом. Розглянемо ще один спосіб позбутися кореня кубічного. Припустимо, що $8x+11=t^3$, тоді $x=\frac{1}{8}\left(t^3-11\right)$. Якщо $x\to 2$, то $t\to\sqrt[3]{27}$ чи $t\to 3$. Звідси

$$A=\lim_{t\to 3}\frac{\sqrt[3]{t^3}-3}{\sqrt{\frac{3}{8}\left(t^3-11\right)+19}-\sqrt{49-\frac{3}{2}\left(t^3-11\right)}}=\lim_{t\to 3}\frac{t-3}{\sqrt{\frac{3}{8}t^3-\frac{33}{8}+19}-\sqrt{49-\frac{3}{2}t^3+\frac{33}{2}}}=$$

$$=\lim_{t\to 3}\frac{t-3}{\sqrt{\frac{3t^3}{8}+\frac{119}{8}}-\sqrt{\frac{131}{2}-\frac{3t^3}{2}}}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{t\to 3}\left(\frac{t-3}{\sqrt{\frac{3t^3}{8}+\frac{119}{8}}-\sqrt{\frac{131}{2}-\frac{3t^3}{2}}}\cdot\frac{\sqrt{\frac{3t^3}{8}+\frac{119}{8}}+\sqrt{\frac{131}{2}-\frac{3t^3}{2}}}{\sqrt{\frac{3t^3}{8}+\frac{119}{8}}+\sqrt{\frac{131}{2}-\frac{3t^3}{2}}}\right)=$$

$$=\lim_{t\to 3}\frac{(t-3)\left(\sqrt{\frac{3t^3}{8}+\frac{119}{8}}+\sqrt{\frac{131}{2}-\frac{3t^3}{2}}\right)}{\frac{3t^3}{8}+\frac{119}{8}-\frac{131}{2}+\frac{3t^3}{2}}=\lim_{t\to 3}\frac{(t-3)\left(\sqrt{\frac{3t^3}{8}+\frac{119}{8}}+\sqrt{\frac{131}{2}-\frac{3t^3}{2}}\right)}{\frac{15}{8}t^3-\frac{405}{8}}=$$

$$=\frac{8}{15}\cdot\lim_{t\to 3}\frac{(t-3)\left(\sqrt{\frac{3t^3}{8}+\frac{119}{8}}+\sqrt{\frac{131}{2}-\frac{3t^3}{2}}\right)}{t^3-27}=$$

$$=\frac{8}{15}\cdot\lim_{t\to 3}\frac{(t-3)\left(\sqrt{\frac{3t^3}{8}+\frac{119}{8}}+\sqrt{\frac{131}{2}-\frac{3t^3}{2}}\right)}{(t-3)\left(t^2+3t+9\right)}=\frac{8}{15}\,\frac{\sqrt{25}+\sqrt{25}}{9+9+9}=\frac{16}{81}.$$

В і д п о в і д ь: $\frac{16}{81}$.

Знаходження границь функцій за допомогою першої чудової границі

Приклад 1.65. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{x}$, де α – деяке число.

Р о з в ’ я з а н н я

Позначимо задану границю функції через

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

При знаходженні границь функцій, до складу яких входять тригонометричні функції у разі невизначеності типу $\left[\frac{0}{0}\right]$, доцільно користуватися першою чудовою границею та наслідками з неї (формули 1.41 – 1.48).

Припустимо, що $\alpha x=t$. Тоді $x=\frac{1}{\alpha}t$. Якщо $x\to 0$, то і $t\to 0$.

$$A=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{\frac{1}{\alpha}t}=\alpha\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=\alpha.$$

В і д п о в і д ь: α.

ЗАУВАЖЕННЯ. Надалі будемо сприймати як наслідок першої чудової границі формулу

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{x}=\alpha. \tag{1.58}$$

Завдання для самостійної роботи. Довести справедливість формул:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}\alpha x}{x}=\alpha; \tag{1.59}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin\alpha x}{x}=\alpha; \tag{1.60}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}\alpha x}{x}=\alpha. \tag{1.61}$$

Приклад 1.66. Знайти границю функції

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{\operatorname{tg}7x}.$$

Р о з в ' я з а н н я

Позначимо задану границю функції через

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{\operatorname{tg}7x}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$ та наявність в умові тригонометричних функцій дозволяють зробити припущення щодо можливості застосування першої чудової границі або наслідків з неї.

$$A=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 8x}{x}\cdot\frac{x}{\operatorname{tg}7x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg}7x}=8\cdot\frac{1}{7}=\frac{8}{7}.$$

В і д п о в і д ь: $\frac{8}{7}$.

Приклад 1.67. Знайти границю функції

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin^3 14x\cdot(\sin 9x-\sin 5x)}{\operatorname{tg}^2 8x\cdot(1-\cos 12x)}.$$

Р о з в ' я з а н н я

Позначимо задану границю функції через

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin^3 14x\,(\sin 9x-\sin 5x)}{\operatorname{tg}^2 8x\cdot(1-\cos 12x)}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Для перетворення функції скористуємось тригонометричними формулами:

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\quad\text{та}\quad 1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Отже, маємо

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin^3 14x\cdot 2\sin 2x\cdot\cos 7x}{\mathrm{tg}^2 8x\cdot 2\sin^2 6x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{14x\arcsin 14x}{14x}\right)^3\cdot\frac{2x\sin 2x}{2x}\cdot\left(\frac{8x}{8x\ \mathrm{tg}8x}\right)^2\cdot\left(\frac{6x}{6x\sin 6x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\cos 7x=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(14x)^3\cdot 2x}{(8x)^2(6x)^2}=\frac{14^3\cdot 2}{64\cdot 36}=\frac{343}{144}.$$

В і д п о в і д ь: $\frac{343}{144}$.

ЗАУВАЖЕННЯ. Поновити інформацію про тригонометричні та гіперболічні функції допоможе Додаток Ж.

Приклад 1.68. Знайти границю функції

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\mathrm{ctg}\,2x\ \mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right).$$

Р о з в ’ я з а н н я

Позначимо задану границю функції через

$$A=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\mathrm{ctg}\,2x\ \mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{ctg}\,2x}{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Припустимо, що $x=\frac{\pi}{4}-y$. Тоді $y=\frac{\pi}{4}-x$. Якщо $x\to\frac{\pi}{4}$, то $y\to 0$.

$$A=\lim_{y\to 0}\frac{\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-2y\right)}{\mathrm{tg}\,y}=\lim_{y\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,2y}{\mathrm{tg}\,y}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{y\to 0}\left(\frac{2y\ \mathrm{tg}\,2y}{2y}\cdot\frac{y}{y\ \mathrm{tg}\,y}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{2y}{y}=2.$$

В і д п о в і д ь: 2.

Розкриття невизначеностей типу $\left[1^{\infty}\right]$

Приклад 1.69. Знайти границю функції $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{\beta x}\right)^x$, де α та $\beta-$ деякі числа.

Р о з в ’ я з а н н я

Позначимо задану границю функції через

$$A=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{\beta x}\right)^x=\left[1^{\infty}\right].$$

Невизначеність типу $\left[1^{\infty}\right]$ у багатьох випадках може бути розкрито за допомогою другої чудової границі. Будемо спиратись на формули (1.49) та (1.55).

Припустимо, що $x=\frac{\alpha y}{\beta}$. Тоді, якщо $x\to\infty$, то і $y\to\infty$.

$$A=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{\beta\alpha}{\beta\alpha y}\right)^{\frac{\alpha y}{\beta}}=\lim_{y\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}=\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

Отже,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{\beta x}\right)^{x}=\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{\beta}}. \qquad (1.62)$$

Отримали результат, який надалі можна сприймати за формулу.

Відповідь: $\mathrm{e}^{\frac{\alpha}{\beta}}$.

Приклад 1.70. Знайти границю функції

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log_a(1+x)}{x}.$$

Розв'язання

Позначимо задану границю функції через

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log_a(1+x)=[\infty\cdot 0]=\lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

$$A=\log_a\lim_{x\to 0}\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=\log_a\mathrm{e}=\frac{1}{\ln a}.$$

Отже,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a\mathrm{e}\,,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}. \qquad (1.63)$$

Зокрема, якщо $a=\mathrm{e}$, то

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}=1. \qquad (1.64)$$

Відповідь: $\frac{1}{\ln a}$.

Приклад 1.71. Знайти границю функції

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Позначимо задану границю функції через

$$A = \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Припустимо, що $a^x-1=y$. Тоді $a^x=1+y$ та $x=\log_a(1+y)$. Якщо $x\to 0$, то $y\to 0$. Маємо

$$A=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\log_a(1+y)}{y}}=\frac{1}{\dfrac{1}{\ln a}}=\ln a.$$

Отже,

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a. \tag{1.65}$$

Зокрема, якщо $a=\mathrm{e}$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1. \tag{1.66}$$

В і д п о в і д ь: $\ln a$.

ЗАУВАЖЕННЯ. Результати, здобуті у прикладах 1.70 та 1.71, є наслідками другої чудової границі. Надалі їх сприйматимемо за формули.

Приклад 1.72. Знайти границю функції

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2+3x+1}{4x^2+8x+3}\right)^{2x-1}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Позначимо задану границю функції через

$$A=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2+3x+1}{4x^2+8x+3}\right)^{2x-1}=\left[1^\infty\right].$$

Це випливає з того, що

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2+3x+1}{4x^2+8x+3}\right)=1,\quad \lim_{x\to\infty}(2x-1)=\infty.$$

Зробимо такі перетворення, які допоможуть скористатися другою чудовою границею.

$$A=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4x^2+3x+1}{4x^2+8x+3}-1\right)^{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4x^2+3x+1-(4x^2+8x+3)}{4x^2+8x+3}\right)^{2x-1}=$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-5x-2}{4x^2+8x+3}\right)^{\frac{4x^2+8x+3}{-5x-2}\cdot\frac{-5x-2}{4x^2+8x+3}\cdot\frac{2x-1}{1}} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-5x-2}{4x^2+8x+3}\right)^{\frac{4x^2+8x+3}{-5x-2}}\right)^{\frac{-(5x+2)(2x-1)}{4x^2+8x+3}} =$$

$$= \left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-5x-2}{4x^2+8x+3}\right)^{\frac{4x^2+8x+3}{-5x-2}}\right)^{\frac{-10x^2+x+2}{4x^2+8x+3}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-10x^2+x+2}{4x^2+8x+3}} = e^{-\frac{5}{2}}.$$

В і д п о в і д ь: $e^{-\frac{5}{2}}$.

Знаходження границь степенево-показникової функції

Приклад 1.73. Знайти границю функції

$$\lim_{x\to 0}\left(1-2x^3\right)^{\frac{1}{x^3}}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Позначимо задану границю функції через

$$A = \lim_{x\to 0}\left(1-2x^3\right)^{\frac{1}{x^3}} = \left[1^\infty\right].$$

Розглянемо рівність $A = \lim\limits_{x\to 0}\left(1-2x^3\right)^{\frac{1}{x^3}}$ та прологарифмуємо її за основою e.

$$\ln A = \ln\left(\lim_{x\to 0}\left(1-2x^3\right)^{\frac{1}{x^3}}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\ln\left(1-2x^3\right)^{\frac{1}{x^3}}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^3}\ln\left(1-2x^3\right)\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1-2x^3\right)}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right].$$

Нехай $y=-2x^3$. Тоді, якщо $x\to 0,$ то і $y\to 0$. Маємо

$$\ln A = \lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{-\frac{1}{2}y} = -2\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y} = -2$$

(див. формулу 1.64).

З того, що $\ln A = -2$, виходить, що $A = e^{-2}$.

Остаточно,

$$\lim_{x\to 0}\left(1-2x^3\right)^{\frac{1}{x^3}} = e^{-2}.$$

В і д п о в і д ь: e^{-2}.

Приклад 1.74. Знайти границю функції

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Позначимо задану границю функції через

$$A=\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\left[1^{\infty}\right].$$

Прологарифмуємо рівність $A=\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ за основою e. Тоді

$$\ln A=\ln\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\left(\ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\cos x-1)}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+(\cos x-1))}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+(\cos x-1))}{\cos x-1}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}.$$

Нехай $\cos x-1=y$, тоді, якщо $x\to 0$, то і $y\to 0$. За формулою (1.35) маємо

$$\ln A=\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=-1\cdot 2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\cdot\frac{x}{2}}\right)^2=-2\cdot\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}.$$

Остаточно:

$$\ln\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=-\frac{1}{2},\quad A=\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.$$

В і д п о в і д ь: $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

ЗАУВАЖЕННЯ. При розв’язуванні прикладів 1.78 та 1.74 можна замість логарифмування користуватись формулою $u(x)=\mathrm{e}^{\ln u(x)}$, де $u(x)>0$.

Знаходження границь функцій за допомогою порівняння нескінченно малих функцій

Приклад 1.75. Визначити порядок r нескінченно малої функції $\alpha(x)$, коли $x\to 0$: 1) $\alpha(x)=5\sin^4 x^3$; 2) $\alpha(x)=8x^6$.

Р о з в ’ я з а н н я

Будемо виходити з властивостей нескінченно малих функцій.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^4 x^3}{x}=0$, тоді $\sin^4 x^3=o(x)$, коли $x\to 0$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^4 x^3}{\left(x^{12}\right)}=1$, $\sin^4 x^3 \sim x^{12}$, коли $x \to 0$, тому $5\sin^4 x^3 \asymp x^{12}$, коли $x \to 0$, $r = 12$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^6}{x}=0$, тоді $x^6 = o(x)$, коли $x \to 0$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^6}{(x)^6}=1$, $x^6 \sim (x)^6$, коли $x \to 0$, тому $8x^6 \asymp x^6$, коли $x \to 0$, $r = 6$.

В і д п о в і д ь: 1) $r = 12$; 2) $r = 6$.

Приклад 1.76. Порівняти нескінченно малі функції $\alpha(x)=3x^2+x^3$ та $\beta(x)=2x^2$, коли $x\to 0$.

Р о з в ’ я з а н н я

Розглянемо

$$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\frac{3x^2+x^3}{2x^2}=\frac{3}{2}+\frac{x}{2}.$$

Тоді

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{2}+\frac{x}{2}\right)=\frac{3}{2}\neq 0.$$

Виходить, що $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ – нескінченно малі функції одного порядку малості.

В і д п о в і д ь: $3x^2 + x^3 \asymp 2x^2$, коли $x \to 0$.

Порівняння нескінченно малих функцій часто використовують для знаходження границь функцій.

Приклад 1.77. Знайти границю функції

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[8]{1+x+9x^2}-1\right)x}{1-\cos 7x}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Позначимо задану границю функції через

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[8]{1+x+9x^2}-1\right)x}{1-\cos 7x}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Чисельник та знаменник, коли $x\to 0$, є нескінченно малими функціями. З таблиці еквівалентності нескінченно малих (п. 2.4) виходить, що, коли $x\to 0$, нескінченно малу функцію $\sqrt[8]{1+x+9x^2}-1$ можна замінити на еквівалентну нескінченно малу функцію $\dfrac{x+9x^2}{8}$, а нескінченно малу функцію $1-\cos 7x$ – на еквівалентну нескінченно малу функцію $\dfrac{(7x)^2}{2}$.

Дістанемо:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[8]{1+x+9x^2}-1\right)x}{1-\cos 7x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{8}\left(x+9x^2\right)x}{\frac{1}{2}(7x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1+9x)}{196x^2}=\frac{1}{196}\lim_{x\to 0}\frac{1+9x}{1}=\frac{1}{196}.$$

Відповідь: $\frac{1}{196}$.

Приклад 1.78. Знайти границю функції

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\sin\left(\operatorname{tg}\frac{x^2}{2}\right)\right)}{\ln(\cos 3x)}.$$

Розв'язання

Позначимо задану границю функції через

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\sin\left(\operatorname{tg}\frac{x^2}{2}\right)\right)}{\ln(\cos 3x)}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Для розв'язання скористаємось асимптотичними формулами (п. 2.4):

$$\sin\left(\sin\left(\operatorname{tg}\frac{x^2}{2}\right)\right)=\sin\left(\sin\frac{x^2}{2}+o\left(\frac{x^2}{2}\right)\right)=\sin\left(\frac{x^2}{2}+o\left(\frac{x^2}{2}\right)+o\left(\frac{x^2}{2}+o\left(\frac{x^2}{2}\right)\right)\right)=$$

$$=\sin\left(\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)+o\left(x^2\right)\right)=\sin\left(\frac{x^2}{2}+2o\left(x^2\right)\right)=\sin\left(\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)=\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right);$$

$$\ln\cos 3x=\ln(1+\cos 3x-1)=\ln\left(1-\frac{(3x)^2}{2}+o\left((3x)^2\right)\right)=\ln\left(1+\left(\frac{-9x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)\right)=$$

$$=\left(\frac{-9x^2}{2}+o\left(x^2\right)+o\left(\frac{-9x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)\right)=\frac{-9x^2}{2}+o\left(x^2\right)+o\left(x^2\right)=$$

$$=\frac{-9x^2}{2}+2\,o\left(x^2\right)=\frac{-9x^2}{2}+o\left(x^2\right).$$

Тоді

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\sin\left(\operatorname{tg}\frac{x^2}{2}\right)\right)}{\ln(\cos 3x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)}{-\frac{9x^2}{2}+o\left(x^2\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}+\frac{o\left(x^2\right)}{x^2}}{-\frac{9}{2}+\frac{o\left(x^2\right)}{x^2}}=\frac{\frac{1}{2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{o\left(x^2\right)}{x^2}}{-\frac{9}{2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{o\left(x^2\right)}{x^2}}=-\frac{1}{9.}$$

Відповідь: $-\frac{1}{9}$.

Приклад 1.79. Знайти границю функції

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x + 2\operatorname{arctg}3x + 3x^2}{\ln\left(1+3x+\sin^2 x\right)+x\mathrm{e}^x}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Позначимо задану границю функції через

$$A = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x + 2\operatorname{arctg}3x + 3x^2}{\ln\left(1+3x+\sin^2 x\right)+x\mathrm{e}^x} = \left[\frac{0}{0}\right].$$

Будемо користуватись методом порівняння нескінченно малих (п. 2.4). Якщо $x\to 0$, то

1) $\sin x = x + o\,(x) \;\Rightarrow\; \sin 2x = 2x + o\left(2x\right)$;

2) $\operatorname{arctg}x = x + o\,(x) \;\Rightarrow\; \operatorname{arctg}3x = 3x + o\left(3x\right)$;

3) $\ln\left(1+x\right) = x + o\,(x) \;\Rightarrow\; \ln\left(1+\left(3x+\sin^2 x\right)\right) = 3x+\sin^2 x + o\left(3x+\sin^2 x\right) =$

$= 3x + \sin^2 x + o\,(x) = 3x + o\,(x).$

Виходить,

$$A = \lim_{x\to 0}\frac{2x+6x+3x^2+o\,(x)+o\left(2x\right)+o\left(3x\right)}{3x+x+o\,(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{8x+o\,(x)}{4x+o\,(x)} = 2.$$

В і д п о в і д ь: 2.

Приклад 1.80. Знайти границю функції

$$\lim_{x\to 0}\left(1+3x^2\right)^{\operatorname{ctg}4x}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Позначимо задану границю функції через

$$A = \lim_{x\to 0}\left(1+3x^2\right)^{\operatorname{ctg}4x} = \left[1^\infty\right].$$

$$A = \lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\ln\left(1+3x^2\right)^{\operatorname{ctg}4x}} = \lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\operatorname{ctg}4x\cdot\ln\left(1+3x^2\right)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+3x^2\right)}{\operatorname{tg}4x}}.$$

Зважаючи на те, що $\ln(1+3x^2) = 3x^2 + o\left(3x^2\right)$, $\operatorname{tg}4x = 4x + o\left(4x\right)$, здобудемо

$$A = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2+o\left(3x^2\right)}{4x+o\,(4x)}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x+\frac{o\left(3x^2\right)}{x}}{4+\frac{o\,(4x)}{x}}} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

В і д п о в і д ь: 1.

Г л а в а 3

НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЙ

3.1 Визначення неперервної функції

В и з н а ч е н н я 1 (за Коші). Функція $y = f(x)$, що визначена у точці x_0 та деякому її околі, називається ***неперервною у точці*** x_0, якщо для будь-якого як завгодно малого додатного числа ε існує таке додатне число $\delta = \delta(\varepsilon)$, що для усіх значень *x*, які задовольняють умову $|x - x_0| < \delta$, відповідні значення функції задовольняють нерівність $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

В и з н а ч е н н я 2. Функція $y = f(x)$, що визначена у точці x_0 та деякому її околі, називається ***неперервною у точці*** x_0, якщо її граничне значення у цій точці дорівнює $f(x_0)$, тобто

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Н а с л і д о к. Якщо функція неперервна, то знак границі та знак функції можна поміняти місцями.

Дійсно, $x_0 = \lim\limits_{x \to x_0} x$, тоді $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = f\left(\lim\limits_{x \to x_0} x\right)$.

В и з н а ч е н н я 3. ***Приростом*** $\boldsymbol{\Delta y}$ функції $y = f(x)$ у точці x_0 називається різниця між значенням функції у точці $x_0 + \Delta x$ та значенням функції у точці x_0, тобто $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Величина Δx при цьому називається ***приростом аргументу***.

В и з н а ч е н н я 4. Функція $y = f(x)$, що визначена у точці x_0 та деякому її околі, називається ***неперервною у точці*** x_0, якщо нескінченно малому приросту Δx аргументу *x* відповідає нескінченно малий приріст Δy функції *y*, тобто, якщо $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

В и з н а ч е н н я 5 (за Гейне). Функція $y = f(x)$, що визначена у точці x_0 та деякому її околі, називається ***неперервною у точці*** x_0, якщо для будь-якої послідовності $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ значень аргументу *x*, збіжної до числа x_0, відповідна послідовність значень функції $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), ...$ збігається до $f(x_0)$.

В и з н а ч е н н я 6. Функція $y = f(x)$, що визначена у точці x_0 та її лівому півоколі, називається ***неперервною у точці*** $\boldsymbol{x_0}$ ***ліворуч***, якщо відповідна лівобічна границя функції дорівнює значенню функції у точці x_0, тобто, якщо $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$.

В и з н а ч е н н я 7. Функція $y=f(x)$, що визначена у точці x_0 та її правому півоколі, називається ***неперервною у точці*** $\boldsymbol{x_0}$ ***праворуч***, якщо відповідна правобічна границя функції дорівнює значенню функції у точці x_0, тобто, якщо $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$.

3.2 Властивості функцій, неперервних у точці

Теорема 1. Сума, різниця, добуток та частка неперервних у точці x_0 функцій є також функція, неперервна у точці x_0 (для частки теорема є справедливою, якщо знаменник відрізняється від нуля).

Д о в е д е н н я

Нехай функції $y=f_1(x)$ та $y=f_2(x)$ неперервні у точці x_0, тобто

$$\lim_{x\to x_0} f_1(x)=f_1(x_0),\quad \lim_{x\to x_0} f_2(x)=f_2(x_0).$$

Тепер розглянемо функцію $y=f_1(x)+f_2(x)$. Тоді

$$\lim_{x\to x_0}\left(f_1(x)+f_2(x)\right)=\lim_{x\to x_0} f_1(x)+\lim_{x\to x_0} f_2(x)=f_1(x_0)+f_2(x_0),$$

що свідчить про неперервність функції $y=f_1(x)+f_2(x)$ у точці x_0.

Завдання для самостійної роботи. Довести справедливість теореми 1 для різниці, добутку та частки неперервних функцій.

Теорема 2. Якщо функція $u=\varphi(x)$ неперервна у точці x_0, а функція $y=f(u)$ – неперервна у точці $u_0=\varphi(x_0)$, то складна функція $y=f(\varphi(x))$ неперервна у точці x_0.

Д о в е д е н н я

З неперервності функцій $u=\varphi(x)$ та $y=f(u)$ виходять рівності

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0) \quad \text{та} \quad \lim_{u\to u_0} f(u)=f(u_0).$$

Тоді $\lim\limits_{x\to x_0} f(\varphi(x))=f\left(\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\right)=f(\varphi(x_0))$, звідки витікає неперервність функції $y=f(\varphi(x))$ у точці x_0.

3.3 Властивості функцій, неперервних в інтервалі

В и з н а ч е н н я 1. Функція $y=f(x)$ називається ***неперервною в інтервалі*** $(a,\ b)$, якщо вона є неперервна у кожній точці цього інтервалу.

Теорема 1. Основні елементарні функції є неперервні у своїй області визначення.

Д о в е д е н н я

Доведемо, приміром, неперервність функції $y = \sin x$ у будь-якій точці x. Знайдемо приріст функції у точці x.

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{x + \Delta x - x}{2}\cos\frac{x + \Delta x + x}{2} = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Припустимо, що $\Delta x \to 0$, та перейдемо до границі за $\Delta x \to 0$.

$$\lim_{\Delta x \to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 0.$$

У відповідності з визначенням 4 неперервної функції можна стверджувати, що функція $y = \sin x$ є неперервна у своїй області визначення.

Завдання для самостійної роботи. Довести неперервність інших основних елементарних функцій.

Теорема 2 (про зберігання знака неперервної функції). Якщо функція $y = f(x)$ є неперервна у точці x_0 та значення $f(x_0)$ відрізняється від нуля, то існує такий окіл точки x_0, в якому функція $f(x)$ має той самий знак, що і в точці x_0.

Д о в е д е н н я

Припустимо для визначеності, що $f(x_0) < 0$. За умовою теореми $f(x)$ у точці x_0 – неперервна функція. Візьмемо будь-яке додатне число ε. Тоді знайдеться таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх $x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ відповідні значення функції задовольняють нерівність

$$\left| f(x) - f(x_0) \right| < \varepsilon,$$

тобто

$$-\varepsilon < f(x) - f(x_0) < \varepsilon,$$

звідки

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon. \tag{1.67}$$

Оскільки ε ми обирали як будь-яке додатне число, то припустимо, що $0 < \varepsilon < -\dfrac{f(x_0)}{2}$ $\left(\text{за умовою } f(x_0) < 0, \text{ отже, } \left(-\dfrac{f(x_0)}{2}\right) > 0\right)$. З нерівності (1.67) виходить, що

$$f(x) < f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2}, \text{ тобто } f(x) < \frac{f(x_0)}{2}.$$

Оскільки $\dfrac{f(x_0)}{2} < 0$, то і $f(x) < 0$. Значить, функція $f(x)$, коли $x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$, зберігає від'ємний знак.

Завдання для самостійної роботи. Довести теорему 2 у припущенні, що $f(x_0) > 0$.

Теорема 3 (про неперервність монотонної функції). Якщо функція $y = f(x)$ з областю визначення (a, b) та областю значень (c, d) є строго монотонна і значення функції скрізь заповнюють інтервал (c, d), то функція $y = f(x)$ є неперервна в інтервалі (a, b).

Теорема 4 (про неперервність оберненої функції). Якщо функція $y = f(x)$ з областю визначення (a, b) та областю значень (c, d) є строго монотонна, то існує строго монотонна обернена функція $x = f^{-1}(y)$, визначена та неперервна в інтервалі (c, d) з областю значень (a, b).

Приймемо теореми 3 та 4 без доведення.

3.4 Точки розриву функції та їхня класифікація

В и з н а ч е н н я 1. Точка x_0 називається точкою ***розриву функції*** $f(x)$, якщо у цій точці не виконуються умови неперервності функції.

В и з н а ч е н н я 2. Точка x_0 називається точкою ***усувного розриву*** функції $y = f(x)$, якщо існують та рівні між собою однобічні границі функції у точці x_0, але ці границі відрізняються від значення функції у точці x_0, якщо воно існує, тобто $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq f(x_0)$.

В и з н а ч е н н я 3. ***Стрибком h функції*** $y = f(x)$ у точці x_0 називається різниця між однобічними границями функції у цій точці, тобто величина

$$h = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) - \lim_{x \to x_0 - 0} f(x).$$

В и з н а ч е н н я 4. Точка x_0 називається ***точкою розриву I роду*** функції $y = f(x)$ або ***точкою скінченного розриву***, якщо її стрибок у точці x_0 є скінченна величина, яка відрізняється від нуля, тобто якщо $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = h$, де $h \neq 0$.

В и з н а ч е н н я 5. Точка x_0 називається ***точкою розриву II роду*** функції $y = f(x)$ або ***точкою нескінченного розриву***, якщо принаймні одна з однобічних границь функції $y = f(x)$ у точці x_0 не існує або дорівнює нескінченності.

3.5 Властивості функцій, неперервних на сегменті

В и з н а ч е н н я 1. Функція $y = f(x)$ називається ***неперервною на сегменті*** $[a, b]$, якщо вона неперервна в усіх його внутрішніх точках, неперервна праворуч у точці a та неперервна ліворуч у точці b.

Теорема 1 (про обмеженість функції). Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на сегменті $[a, b]$, то вона обмежена на цьому сегменті.

Приймемо теорему 1 без доведення.

В и з н а ч е н н я 2. ***Коливанням неперервної функції на сегменті*** називається різниця між її найменшим та найбільшим значеннями.

Теорема 2 (про корінь функції). Якщо функція $y = f(x)$ є неперервна на сегменті $[a, b]$ і на кінцях цього сегмента має протилежні за знаком значення, то на сегменті $[a, b]$ існує принаймні одна точка $x = c$, в якій значення функції дорівнює нулю.

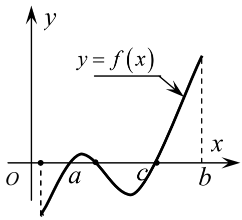


Рисунок 1.21

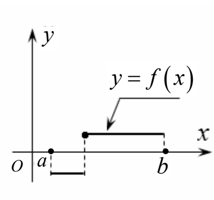


Рисунок 1.22

Рис. 1.21 ілюструє теорему 2 для неперервної функції. Для розривної функції (рис. 1.22) теорема 2 не завжди виконується.

Приймемо теорему 2 без доведення.

Теорема 3 (про проміжне значення функції). Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на сегменті $[a, b]$, m та M – відповідно її найменше та найбільше значення, а μ − деяке число, що задовольняє умову $m \le \mu \le M$, то на сегменті $[a, b]$ існує принаймні одна точка $x = c$, в якій значення функції дорівнює μ.

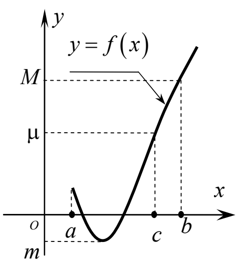


Рисунок 1.23

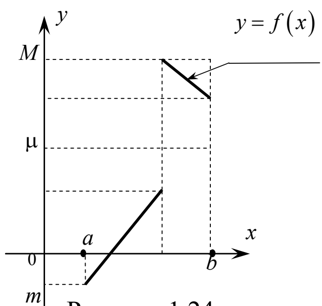


Рисунок 1.24

Рис 1.23 ілюструє теорему 3. Для розривної функції (рис. 1.24) теорема 3 не завжди виконується.

Приймемо теорему 3 без доведення.

Теорема 4 (про найменше та найбільше значення функції). Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на сегменті $[a, b]$, то вона досягає на цьому сегменті найменшого на найбільшого значень.

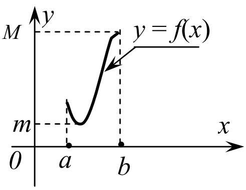


Рисунок 1.25

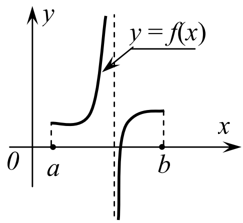


Рисунок 1.26

Рис. 1.25 ілюструє теорему 4. Для розривної функції (рис. 1.26) теорема 4 не завжди виконується.

Приймемо теорему 4 без доведення.

3.6 Рівномірна неперервність функцій

Нехай функція $y = f(x)$ є неперервною в деякому інтервалі (a, b). Така функція є неперервною у кожній внутрішній точці цього інтервалу. Розглянемо будь-які дві точки $x_1 \in (a, b)$ та $x_2 \in (a, b)$. Візьмемо будь-яке як завгодно мале додатне число ε. Тоді, внаслідок неперервності функції у точках x_1 та x_2, можна стверджувати, що існує таке додатне число $\delta = \delta(\varepsilon, x_1, x_2)$, залежне від ε, від x_1, та від x_2, які задовольняють умову $|x_1 - x_2| < \delta$, а відповідні значення функції задовольняють нерівність $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Але є такі функції, що для будь-якого як завгодно малого додатного числа ε існує таке додатне число δ, яке залежить лише від ε, та не залежить від точок інтервалу.

В и з н а ч е н н я. Функція $y = f(x)$ називається ***рівномірно неперервною*** в інтервалі (a, b), якщо для будь-якого як завгодно малого додатного числа ε існує таке додатне число $\delta = \delta(\varepsilon)$ залежне лише від ε, що для будь-яких значень x_1 та x_2 з інтервалу (a, b), які задовольняють умову $|x_2 - x_1| < \delta$, відповідні значення функції задовольняють нерівність $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$.

Якщо функція є рівномірно неперервна в інтервалі (a, b), то вона і неперервна в цьому інтервалі. Але з неперервності функції в інтервалі не випливає її рівномірна неперервність в цьому інтервалі.

Теорема (Кантора). Якщо функція є неперервна на сегменті $[a, b]$, то вона і рівномірно неперервна на цьому сегменті.

3.7 Деякі спеціальні функції, які використовуються у теорії аналогових та дискретних кіл

Сигнал, математичною моделлю якого є функція неперервного аргументу, називають ***аналоговим*** сигналом.

Сигнал, математичною моделлю якого є функція дискретного аргументу, називають ***дискретним*** сигналом.

Дослідження дискретних сигналів є простішим порівняно з дослідженням аналогових сигналів. Через це аналогові сигнали інколи переводять у дискретні сигнали, тобто у той чи інший спосіб здійснюють так звану ***дискретизацію*** сигналу.

Аналогові та дискретні сигнали розглядаються відповідно у теорії аналогових кіл та у теорії дискретних кіл.

За аналогові кола вважають які завгодно пристрої, що аналоговий сигнал $x(t)$ переводять у аналоговий сигнал $y(t)$, а дискретні кола – пристрої, які дискретний сигнал $x(n)$ переводять у дискретний сигнал $y(n)$. За математичну модель таких кіл можна вважати певні оператори

$$y(t) = A(x(t)) \quad \text{або} \quad y(n) = A(x(n)).$$

При дослідженні аналогових та дискретних сигналів значну роль відіграють певні спеціальні функції. Розглянемо кілька таких функцій.

Дельта-функція Дірака

Розглянемо функцію неперервного аргументу:

$$\delta_h(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } -\infty < t < 0; \\ \dfrac{1}{h}, & \text{якщо } \quad 0 \le t < h; \\ 0, & \text{якщо } \quad h < t < +\infty. \end{cases}$$

Якщо $h \to 0$, дістанемо функцію

$$\delta(t) = \lim_{h \to 0} \delta_h(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } -\infty < t < 0; \\ +\infty, & \text{якщо } \quad t = 0; \\ 0, & \text{якщо } \quad 0 < t < +\infty. \end{cases}$$

Функція $\delta(t)$ називається ***імпульсною функцією нульового порядку*** або ***δ-функцією Дірака***.

Ця функція використовується при дослідженні тих чи інших короткочасних, але потужних впливів. Через короткочасність впливів у перебігу досліджувань їх можна вважати за миттєві та нескінченно великі.

Сумарний ефект від дії δ-функції у своїй області визначення дорівнює одиниці, що буде показано при подальшому вивченні вищої математики. Така функція використовується для дослідження аналогових сигналів.

Одиничний імпульс

Одиничним імпульсом називається функція цілочисельного аргументу

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } n = 0; \\ 0, \text{ якщо } n \neq 0, \end{cases} \text{ де } n \in Z .$$

Функція $\delta(n)$ є дискретним аналогом функції $\delta(t)$. Графічне зображення функції $\delta(n)$ подано на рис. 1.27.

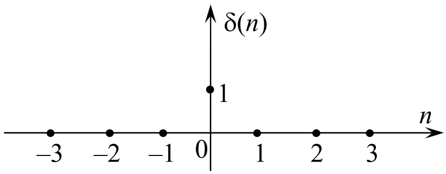


Рисунок 1.27

Поряд з функцією $\delta(n)$ використовується функція $\delta(n - i)$, графік якої виходить з графіка функції $\delta(n)$ внаслідок паралельного перенесення вздовж осі n на i одиниць у додатному напрямку:

$$\delta(n - i) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } n = i; \\ 0, \text{ якщо } n \neq i, \end{cases} \text{ де } n \in Z .$$

Графічне зображення функції $\delta(n - i)$ подано на рис. 1.28.

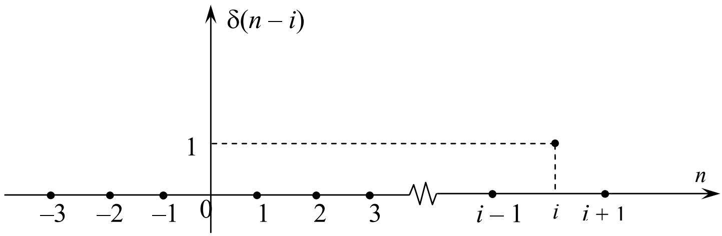


Рисунок 1.28

Одна з властивостей функції $\delta(n - i)$ полягає у тому, що за її допомогою можна описувати дискретні сигнали. Приміром, якщо $x(n)$ – певний дискретний сигнал, то його можна подати у вигляді

$$x(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i)\, \delta(n-i),$$

де

$$x(i)\, \delta(n-i) = \begin{cases} x(n), \text{ якщо } n = i; \\ 0, \quad\ \text{ якщо } n \neq i. \end{cases}$$

Одинична функція неперервного аргументу

Одиничною функцією неперервного аргументу називається функція

$$u(t) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } -\infty < t < 0; \\ \dfrac{1}{2}, \text{ якщо } \quad t = 0; \\ 1, \text{ якщо } \quad 0 < t < +\infty. \end{cases}$$

Така одинична функція є ***симетричною*** одиничною функцією.

Нарівні з симетричною функцією розглядаються також ***асиметричні*** одиничні функції

$$u_{-}(t) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } -\infty < t < 0; \\ 1, \text{ якщо } \quad 0 \le t < +\infty \end{cases} \quad \text{та} \quad u_{+}(t) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } -\infty < t \le 0; \\ 1, \text{ якщо } \quad 0 < t < +\infty. \end{cases}$$

Графіки згаданих функцій наведено на рис. 1.29.

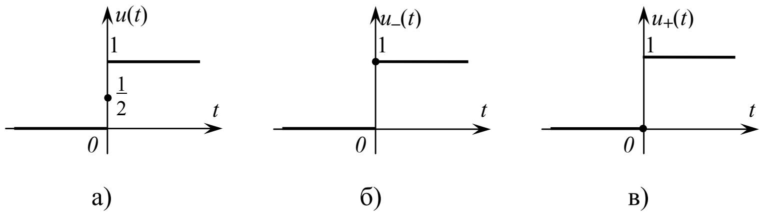


Рисунок 1.29

Розглянуті функції використовуються у математиці, фізиці, у теоретичній радіотехніці, теорії електричних кіл для дослідження аналогових сигналів.

Приміром, за допомогою функції $u(t)$ зручно описувати вмикання електричного кола зі сталою напругою у момент $t = 0$.

Одинична функція дискретного аргументу

Одиничною функцією дискретного аргументу називається функція

$$u(n) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } n < 0; \\ 1, \text{ якщо } n \ge 0, \end{cases} \quad \text{де } n \in Z.$$

Графічне зображення функції $u(n)$ подано на рис. 1.30.

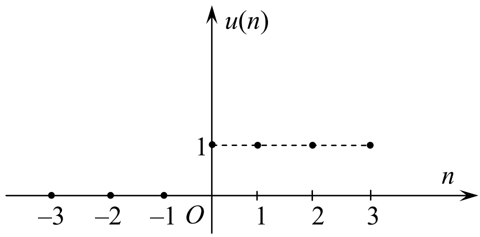


Рисунок 1.30

Поряд з функцією $u(n)$ використовується функція $u(n-i)$, графік якої виходить з графіка функції $u(n)$ внаслідок паралельного перенесення вздовж осі n на i одиниць праворуч:

$$u(n-i)=\begin{cases}0, \text{ якщо } n<i;\\ 1, \text{ якщо } n\ge i.\end{cases}$$

Графічне зображення функції $u(n-i)$ подано на рис. 1.31.

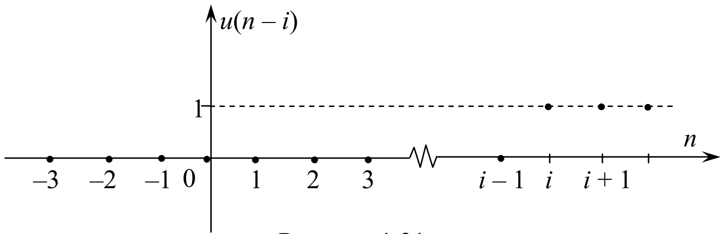


Рисунок 1.31

За допомогою одиничних функцій дискретного аргументу зручно досліджувати дискретні сигнали.

Синусоїдні функції неперервного аргументу

Розглянемо такі функції неперервного аргументу як $x(t)=\sin\omega t$; $x(t)=\cos\omega t$, де $x(t)$ – певний аналоговий сигнал, ω – кутова частота.

Графік функції $x(t)=\sin\omega t$ подано на рис. 1.32 а), а графік функції $x(t)=\cos\omega t$ подано на рис. 1.32 б).

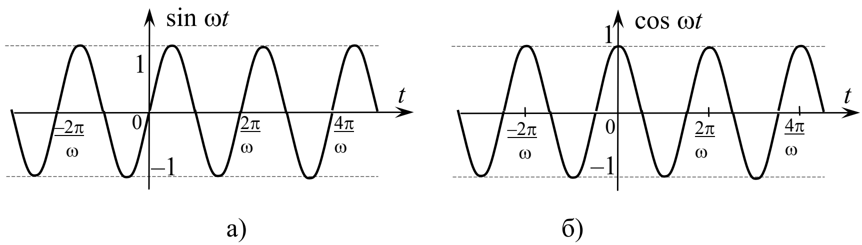


Рисунок 1.32

За допомогою поданих функцій досліджують певні характеристики електричних кіл.

Синусоїдні функції дискретного аргументу

Синусоїдними функціями дискретного аргументу є функції

$$x(n)=\sin n;\ \ x(n)=\cos n,$$

де $x(n)$ – деякий дискретний сигнал.

Дискретні синусоїдні функції отримують з аналогових синусоїдних функцій шляхом дискретизації останніх.

За спеціального добору кроку дискретизації дискретні синусоїдні функції можуть бути періодичними.

Приклади до глави 3

Приклад 1.81. Записати визначення 1 неперервної функції (п. 3.1) за допомогою кванторів.

Р о з в ’ я з а н н я

Функція $y = f(x)$ неперервна у точці x_0, якщо:

$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0,\ \ \forall x\colon\ |x - x_0| < \delta\ \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$

В і д п о в і д ь: $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0,\ \ \forall x\colon\ |x - x_0| < \delta\ \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$

Приклад 1.82 Знайти точки розриву функції

$$f(x) = \begin{cases} -1, \text{ якщо } x < 0, \\ \ \ 1, \text{ якщо } x > 0. \end{cases}$$

та визначити їх тип.

Р о з в ’ я з а н н я

1. Функцію $f(x) = \begin{cases} -1, \text{ якщо } x < 0\ ; \\ \ \ 1, \text{ якщо } x > 0 \end{cases}$ не визначено у точці $x = 0$.
2. $\lim\limits_{x \to -0} f(x) = -1$, а $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = 1$. Точка $x = 0$ є точкою розриву I роду.

В і д п о в і д ь: $x = 0$ – точка розриву першого роду.

ЗАУВАЖЕННЯ. Розглянуту функцію часто позначають $\operatorname{sign} x$ (знак x).

Приклад 1.83. Знайти точки розриву функції

$$f(x) = \frac{\sin 3x}{x}$$

та визначити їх тип.

Р о з в ’ я з а н н я

Функцію $f(x) = \dfrac{\sin 3x}{x}$ не визначено у точці $x = 0$. Оскільки

$$\lim_{x \to -0} f(x) = \lim_{x \to +0} f(x) = 3,$$

то $x = 0$ є точкою усувного розриву.

Розглянемо функцію $f(x)$, припускаючи, що вона визначена у точці $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 3x}{x}, \text{ якщо } x \neq 0; \\ 3, \qquad \text{якщо } x = 0. \end{cases}$$

Дістана функція є неперервною у точці $x = 0$. Така процедура доозначення функції називається ***подовженням за неперервністю***.

В і д п о в і д ь: $x = 0$ − точка усувного розриву.

Приклад 1.84. Знайти точки розриву функції

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

та визначити їх тип.

Р о з в ' я з а н н я

Функцію $f(x)=\frac{1}{x}$ не визначено у точці $x=0$. Оскільки $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=\infty$, а $\lim\limits_{x\to-0} f(x)=-\infty$, то $x=0$ є точкою розриву II роду.

В і д п о в і д ь: $x = 0$ – точка розриву II роду.

Приклад 1.85. Дослідити на неперервність функцію

$$f(x)=\begin{cases} x+10, \text{ якщо } x\in(-\infty,-9); \\ 1, \quad \text{якщо } x\in[-9,-1]; \\ x^2, \quad \text{якщо } x\in(-1,0); \\ \sin x, \quad \text{якщо } x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right); \\ 4, \quad \text{якщо } x\in\left[\frac{\pi}{2},+\infty\right). \end{cases}$$

Побудувати графік функції.

Р о з в ' я з а н н я

На кожному з проміжків задано елементарну функцію, що є неперервною. Якщо функція $f(x)$ має точки розриву, то ними можуть бути лише ті точки, в яких одна функція змінюється на іншу.

Отже, перевіримо, чи є неперервна задана функція у точках $x = -9$; $x = -1$; $x = 0$; $x = \pi/2$.

Будемо виходити з твердження: якщо функція $f(x)$ є неперервна у точці x_0, то $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f\left(x_0\right)$.

$\lim\limits_{x\to-9-0} f(x)=\lim\limits_{x\to-9-0}\left(x+10\right)=1;\qquad \lim\limits_{x\to-9+0} f(x)=\lim\limits_{x\to-9+0} 1=1;\qquad f(-9)=1;$

$\lim\limits_{x\to-1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to-1-0} 1=1;\qquad \lim\limits_{x\to-1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to-1+0} x^2=1;\qquad f(-1)=1;$

$\lim\limits_{x\to-0} f(x)=\lim\limits_{x\to-0} x^2=0;\qquad \lim\limits_{x\to+0} f(x)=\lim\limits_{x\to+0}\sin x=0;\qquad f(0)=0;$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\sin x=1;\qquad \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0} 4=4.$

Виходить, що у точках $x=-9,\ x=-1,\ x=0$ функція є неперервна, а у точці $x=\frac{\pi}{2}$ функція є розривна і точка $x=\frac{\pi}{2}$ є точкою розриву I роду.

Графік функції $f(x)$ подано на рисунку 1.33.

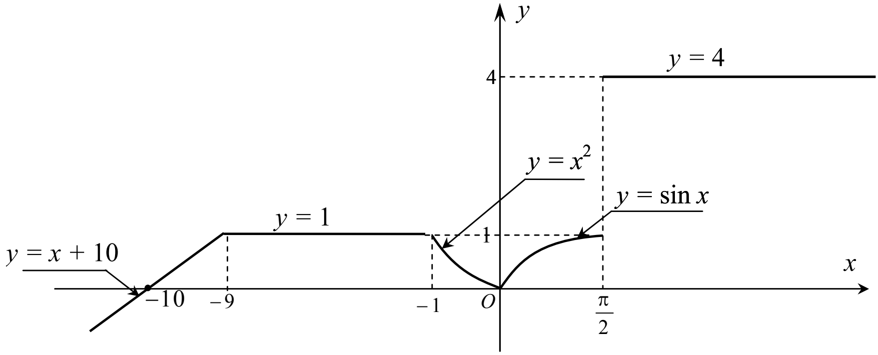


Рисунок 1.33

В і д п о в і д ь: $x=\frac{\pi}{2}$ – точка розриву I роду.

Приклад 1.86. Побудувати графік функції $\varphi(x)=\sqrt[3]{x}-3$, виходячи з графіка функції $f(x)=\sqrt[3]{x}$.

Р о з в ' я з а н н я

Області визначення функцій $f(x)$ та $\varphi(x)$ збігаються. В обох випадках $x\in(-\infty,+\infty)$. Відповідні ординати функції $\varphi(x)$ є на три одиниці менше за ординати функції $f(x)$. Отже, графік функції $\varphi(x)$ дістанемо з графіка функції $f(x)$ його паралельним перенесенням вздовж осі Oy.

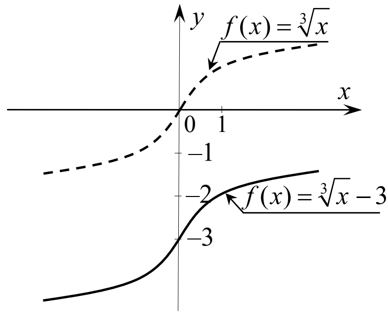


Рисунок 1.34

Графіки функцій $f(x)$ та $\varphi(x)$ подано на рисунку 1.34.

В і д п о в і д ь: рисунок 1.34.

ЗАУВАЖЕННЯ. Додаткову інформацію щодо побудови графіків функцій за допомогою елементарних перетворень можна дістати у Додатку И.

Приклад 1.87. Побудувати графік функції $\varphi(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}-3$, виходячи з графіка функції $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$.

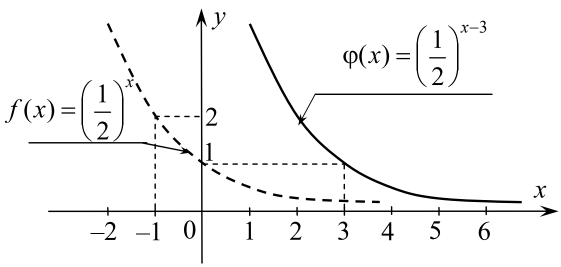


Рисунок 1.35

Р о з в ’ я з а н н я

Область визначення функцій $f(x)$ та $\varphi(x)$: $x \in (-\infty, +\infty)$. Графік функції $\varphi(x)$ можна дістати з графіка функції $f(x)$ паралельним переносом її графіка вправо на 3 одиниці. Графіки функцій $f(x)$ та $\varphi(x)$ подано на рисунку 1.35.

В і д п о в і д ь: рисунок 1.35.

Приклад 1.88. Побудувати графік функції $\varphi(x)=\frac{1}{2}\log_3 x$, виходячи з графіка функції $f(x)=\log_3 x$.

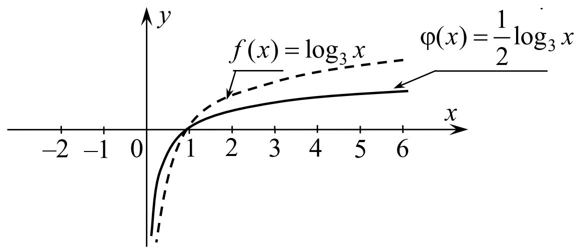


Рисунок 1.36

Р о з в ’ я з а н н я

Область визначення функцій $f(x)$ та $\varphi(x)$: $x \in (0, \infty)$. Графік функції $\varphi(x)$ можна дістати з графіка функції $f(x)$ зменшенням модулів його ординат удвічі.

Графіки функцій $f(x)$ та $\varphi(x)$ подано на рисунку 1.36.

В і д п о в і д ь: рисунок 1.36.

Приклад 1.89. Побудувати графік функції $\varphi(x)=\log_3(-x)$, виходячи з графіка функції $f(x)=\log_3 x$.

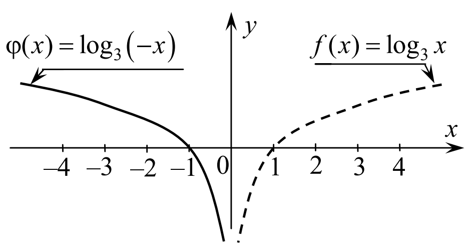


Рисунок 1.37

Р о з в ’ я з а н н я

Область визначення функції $f(x)$: $x \in (0, +\infty)$. Область визначення функції $\varphi(x)$: $x \in (-\infty, 0)$.

Графік функції $\varphi(x)$ виходить з графіка функції $f(x)$ як дзеркальне відображення відносно осі Oy.

Графіки функцій $f(x)$ та $\varphi(x)$ подано на рисунку 1.37.

В і д п о в і д ь: рисунок 1.37.

Приклад 1.90. Побудувати графік функції $\varphi(x) = -\sin x$, виходячи з графіка функції $f(x) = \sin x$.

Р о з в ' я з а н н я

Області визначення функцій $f(x)$ та $\varphi(x)$: $x \in (-\infty, +\infty)$. Графік функції $\varphi(x)$ виходить з графіка функції $f(x)$ як дзеркальне відображення відносно осі Ox.

Графіки функцій $f(x)$ та $\varphi(x)$ подано на рисунку 1.38

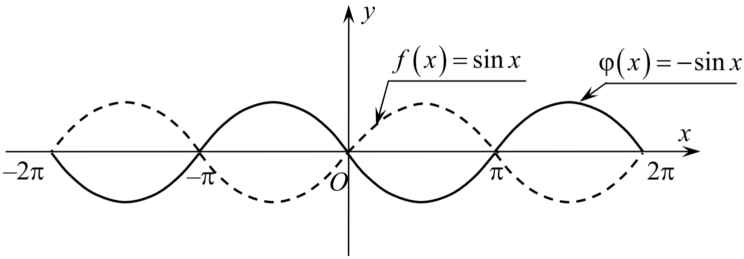


Рисунок 1.38

В і д п о в і д ь: рисунок 1.38.

Приклад 1.91. Побудувати графік функції $\varphi(x) = \cos 3x$, виходячи з графіка функції $f(x) = \cos x$.

Р о з в ' я з а н н я

Області визначення функцій $f(x)$ та $\varphi(x)$: $x \in (-\infty, +\infty)$. Графік функції $\varphi(x)$ виходить з графіка функції $f(x)$ його стисканням утричі вздовж осі Ox, тому що основний період функції $f(x)$ дорівнює 2π, а основний період функції $\varphi(x)$ дорівнює $\frac{2\pi}{3}$.

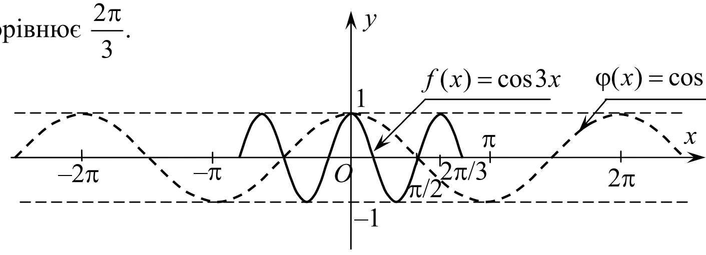


Рисунок 1.39

Графіки функцій $f(x)$ та $\varphi(x)$ подано на рисунку 1.39.

В і д п о в і д ь: рисунок 1.39.

Приклад 1.92. Побудувати графік функції $\varphi(x) = |\operatorname{arctg} x|$, виходячи з графіка функції $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Р о з в ’ я з а н н я

Область визначення функцій $f(x)$ та $\varphi(x)$: $x \in (-\infty, +\infty)$. Графік функції $\varphi(x)$ виходить з графіка функції $f(x)$ як дзеркальне відображення відносно осі Ox тієї частини графіка, яка знаходиться під віссю Ox. Графіки функцій $f(x)$ та $\varphi(x)$ подано на рисунках 1.40. та 1.41.

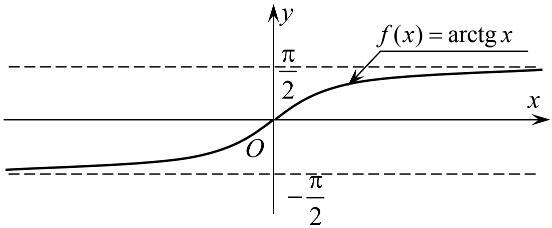


Рисунок 1.40

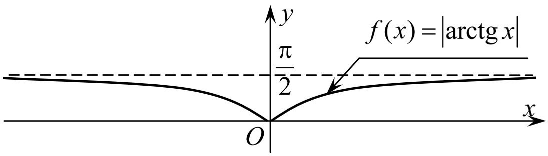


Рисунок 1.41

В і д п о в і д ь: рисунок 1.41.

Приклад 1.93. Побудувати графік функції $\varphi(x) = \operatorname{tg}|x|$, виходячи з графіка функції $f(x) = \operatorname{tg} x$.

Р о з в ’ я з а н н я

Область визначення функцій $f(x)$ та $\varphi(x)$: $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k,\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, де $k \in Z$.

Графік функції $\varphi(x)$ виходить з графіка функції $f(x)$ як дзеркальне відображення відносно осі Oy тієї частини графіка, що її розміщено праворуч від осі Oy замість тієї частини графіка, що її розміщено ліворуч від осі Oy.

Графіки функцій $f(x)$ та $\varphi(x)$ подано на рисунках 1.42. та 1.43.

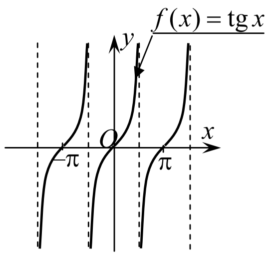


Рисунок 1.42

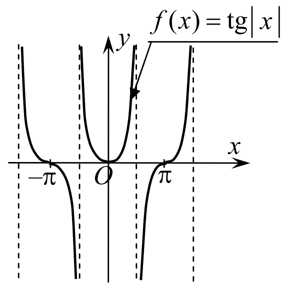


Рисунок 1.43

В і д п о в і д ь: рисунок 1.43.

Приклад 1.94. Побудувати графік функції $\varphi(x)=x^2-4x+3$, виходячи з графіка функції $f(x)=x^2$.

Р о з в ' я з а н н я

Області визначення функцій $f(x)$ та $\varphi(x)$: $x\in(-\infty,+\infty)$

Запишемо функцію $\varphi(x)$ у вигляді $\varphi(x)=x^2-4x+4-1$ чи $\varphi(x)=(x-2)^2-1$.

Побудуємо графік функції $\varphi_1(x)=(x-2)^2$, виходячи з графіка функції $f(x)=x^2$ його паралельним перенесенням на дві одиниці праворуч вздовж осі *Ox*. Графік функції $\varphi(x)=(x-2)^2-1$ дістанемо з графіка функції $\varphi_1(x)=(x-2)^2$ його паралельним перенесенням вздовж осі *Oy* на одну одиницю донизу.

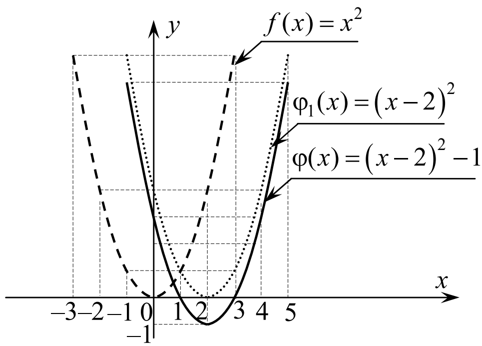


Рисунок 1.44

Графіки функцій $f(x)$, $\varphi_1(x)$ та $\varphi(x)$ подано на рисунку 1.44.

В і д п о в і д ь: рисунок 1.44.

Приклад 1.95. Побудувати графік функції $\varphi(x)=|x^2-4x+3|$, виходячи з графіка функції $f(x)=x^2-4x+3$.

Р о з в ' я з а н н я

Область визначення функцій $f(x)$ та $\varphi(x)$: $x\in(-\infty,+\infty)$. Графік функції $\varphi(x)$ виходить з графіка функції $f(x)$ як дзеркальне відображення відносно осі *Ox* тієї частини графіка функції $f(x)$, яку розміщено під віссю *Ox*.

Графіки функцій $f(x)$ та $\varphi(x)$ подано на рисунках 1.45 та 1.46.

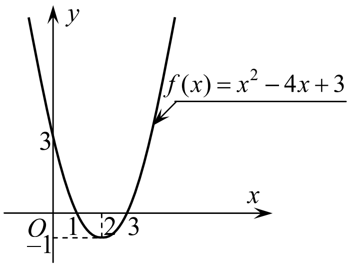


Рисунок 1.45

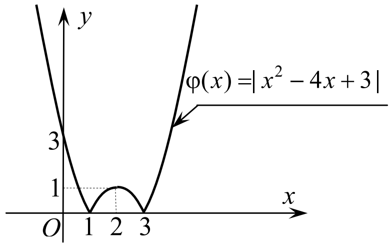


Рисунок 1.46

В і д п о в і д ь: рисунок 1.46.

Приклад 1.96. Побудувати в одній системі координат графіки функцій $f_1(x)=x$, $f_2(x)=\cos x$, $f_3(x)=x+\cos x$.

Р о з в ’ я з а н н я

Області визначення функцій $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$: $x\in(-\infty,+\infty)$. Області значень функцій $f_1(x)$, $f_3(x)$: $y\in(-\infty,+\infty)$. Область значень функції $f_2(x)$: $y\in[-1,1]$.

Побудуємо графіки функцій $f_1(x)=x$ та $f_2(x)=\cos x$. Для побудови графіка функції $f_3(x)=x+\cos x$ доцільно знайти кілька точок, що належать до графіка функції $f_3(x)$. Ординати цих точок дорівнюють сумі ординат точок, які належать до графіків функцій $f_1(x)$ та $f_2(x)$ за одного й того самого значення x.

Знайденні значення функцій наведено у таблицях:

x	−6	−5	−4	−3	−2	−1
$f_1(x)$	−6	−5	−4	−3	−2	−1
$f_2(x)$	0,96	0,28	−0,65	−0,98	−0,41	0,54
$f_3(x)$	−5,04	−4,72	−4,65	−3,98	−2,41	−0,46

x	0	1	2	3	4	5	6
$f_1(x)$	0	1	2	3	4	5	6
$f_2(x)$	1	0,54	−0,41	−0,98	−0,65	0,28	0,96
$f_3(x)$	1	1,54	1,59	2,02	3,35	5,28	6,96

Значення функцій в таблиці є наближеними.

Графік функції зображено на рисунку 1.47.

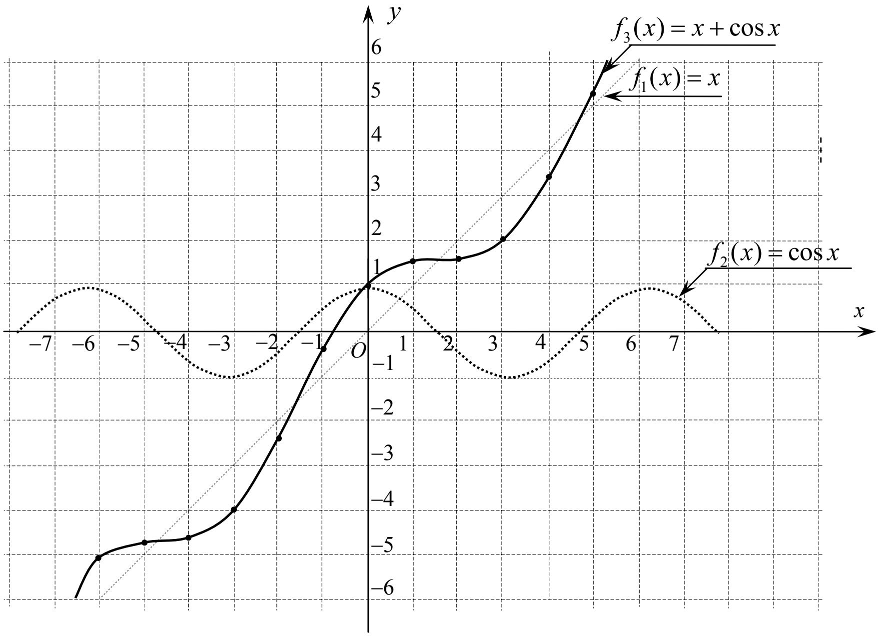


Рисунок 1.47

В і д п о в і д ь: рисунок 1.47.

ЗАУВАЖЕННЯ. Графік функції $f_3(x)$ можна побудувати, не складаючи допоміжну таблицю. Достатньо побудувати графіки функцій $f_1(x)$ та $f_2(x)$. За допомогою цих графіків геометрично будується графік функції $f_3(x)$, ординатам точок графіка якої відповідають відрізки, що дорівнюють сумі відрізків, які відповідають ординатам точок графіка функції $f_1(x)$ та $f_2(x)$, якщо ці ординати одного знаку, та їх різниці у протилежному випадку.

Приклад 1.97. Побудувати в одній системі координат графіки функцій

$$f_1(x) = x,\ f_2(x) = \cos x,\ f_3(x) = x - \cos x.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Область визначення функцій $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$: $x \in (-\infty, +\infty)$. Області значень функцій $f_1(x)$, $f_3(x)$: $y \in (-\infty, +\infty)$. Область значень функції $f_2(x)$: $y \in [-1, 1]$.

Побудуємо графіки функцій $f_1(x) = x$ та $f_2(x) = \cos x$. Для побудови графіка функції $f_3(x) = x - \cos x$ складемо допоміжну таблицю:

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1
$f_1(x)$	-6	-5	-4	-3	-2	-1
$f_2(x)$	0,96	0,28	−0,65	−0,98	−0,41	0,54
$f_3(x)$	−6,96	−5,28	−3,35	−2,02	−1,59	−1,54

x	0	1	2	3	4	5	6
$f_1(x)$	0	1	2	3	4	5	6
$f_2(x)$	1	0,54	−0,41	−0,98	−0,65	0,28	0,96
$f_3(x)$	−1	0,46	2,41	3,98	4,65	4,72	5,04

Значення функцій в таблиці є наближеними.

Графік функції зображено на рис. 1.48.

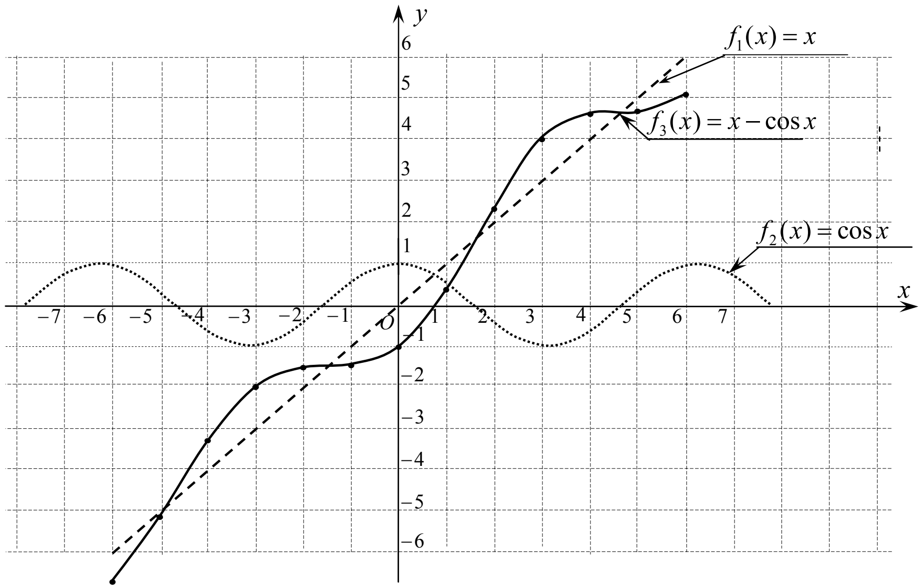


Рисунок 1.48

В і д п о в і д ь: рисунок 1. 48.

ЗАУВАЖЕННЯ. Графік функції $f_3(x)$ можна побудувати, не складаючи допоміжну таблицю. Достатньо побудувати графіки функцій $f_1(x)$ та $f_2(x)$. За допомогою цих графіків геометрично будується графік функції $f_3(x)$, ординатам точок графіка якої відповідають відрізки, що дорівнюють різниці відрізків, які відповідають ординатам точок графіка функції $f_1(x)$ та $f_2(x)$, якщо ці ординати одного знаку, та їх сумі у протилежному випадку.

Приклад 1.98. Побудувати в одній системі координат графіки функцій $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \cos x$, $f_3(x) = x\cos x$.

Р о з в ’ я з а н н я

Область визначення функцій $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$: $x \in (-\infty, +\infty)$. Область значень функцій $f_1(x)$, $f_3(x)$: $y \in (-\infty, +\infty)$. Область значень функції $f_2(x)$: $y \in [-1, 1]$.

Побудуємо графіки функцій $f_1(x) = x$ та $f_2(x) = \cos x$. Для побудови графіка функції $f_3(x) = x\cos x$ складемо допоміжну таблицю:

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1
$f_1(x)$	-6	-5	-4	-3	-2	-1
$f_2(x)$	0,96	0,28	−0,65	−0,98	−0,41	0,54
$f_3(x)$	−5,76	−1,4	−2,6	−2,94	−0,82	−0,54

x	0	1	2	3	4	5	6
$f_1(x)$	0	1	2	3	4	5	6
$f_2(x)$	1	0,54	−0,41	−0,98	−0,65	0,28	0,96
$f_3(x)$	0	0,54	−0,82	−2,94	−2,6	1,4	5,76

Значення функцій в таблиці є наближеними.
Графік функції зображено на рисунку 1.49.

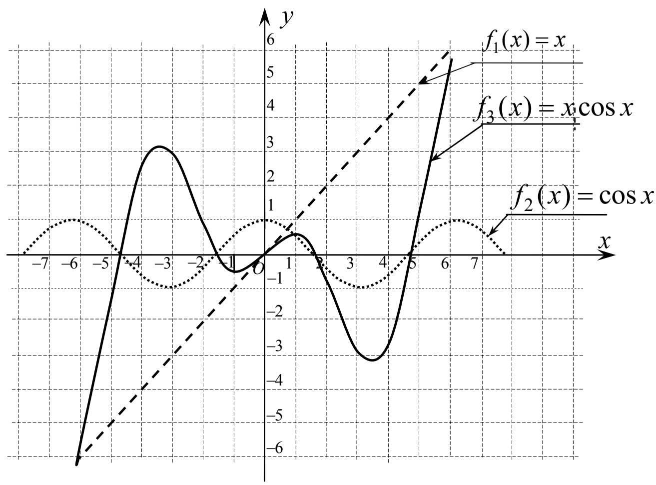


Рисунок 1.49

В і д п о в і д ь: рисунок 1.49.

ЗАУВАЖЕННЯ. Графік функції $f_3(x)$ можна побудувати, не складаючи допоміжну таблицю. Достатньо побудувати графіки функцій $f_1(x)$ та $f_2(x)$. За допомогою цих графіків геометрично будується графік функції $f_3(x)$, ординатам точок графіка якої відповідають відрізки, величини яких дорівнюють добутку величин відрізків, що відповідають ординатам функцій $f_1(x)$ та $f_2(x)$. При цьому, якщо ординати точок графіка функцій $f_1(x)$ та $f_2(x)$ одного знаку, то відповідний відрізок, що визначає ординати точок графіка $f_3(x)$, розміщується над віссю Ox та під віссю Ox у протилежному випадку.

Приклад 1.99. Побудувати графік функції $y=\left[\frac{1}{4}x^2\right]$ та дослідити цю функцію на неперервність.

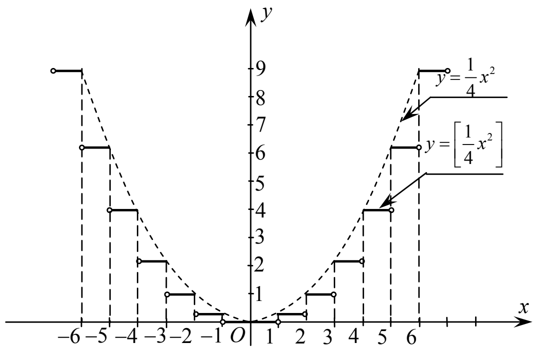


Рисунок 1.50

Р о з в ' я з а н н я

Область визначення функції: $x\in(-\infty, +\infty)$.

Область значень функції: $y\in[0, +\infty)$. Інтервали неперервності: $x\in([x], [x]+1)$.

Точки розриву функції: $x=k$, де $k\in Z$. Усі точки розриву є точками скінченного розриву.

Графік функції $y=\left[\frac{1}{4}x^2\right]$ подано на рисунку 1.50.

ЗАУВАЖЕННЯ. Функція $y=[x]$ називається ***антьє x*** і визначає цілу частину від *x*, де $x\in(-\infty, +\infty)$. Відповідно функція $y=[f(x)]$ називається ***антьє*** $f(x)$. Інколи для цієї функції використовують таке позначення: $y=E(x)$.

Функція $y=\{x\}$ визначає ***дробову частину*** *x,* де: $x\in(-\infty, +\infty)$. При цьому $\{x\}=x-E(x)$.

В і д п о в і д ь: $x=k$, де $k\in Z$ − точки розриву I роду, рисунок 1.50.

Завдання для самостійної роботи. Побудувати графік функції $y=\{x\}$.

Приклад 1.100. Функцією $f(t)=\begin{cases}0, & \text{якщо } |t|>\frac{\tau}{2};\\ h\cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right), & \text{якщо } |t|\le\frac{\tau}{2}\end{cases}$ задано імпульс, називаний косинусоїдним імпульсом. Цей імпульс характеризується функцією

$$S(\omega)=\frac{2\pi h}{\tau}\cdot\frac{\cos\frac{\omega\tau}{2}}{\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2-\omega^2},$$

яка називається ***спектральною щільністю***, а її модуль $\left|S(\omega)\right|$ – ***спектром сигналу***. Побудувати графіки функцій $f(t)$ та $\left|S(\omega)\right|$.

Р о з в ’ я з а н н я

За $h=2$ та $\tau=1$ графік функції $f(t)$ подано на рисунку 1.51.

Для побудови графіка функції $\left|S(\omega)\right|$ знаходимо допоміжні точки

$$S(0)=\frac{2\pi h}{\tau}\frac{1}{\frac{\pi^2}{\tau^2}}=\frac{2h\tau}{\pi}.$$

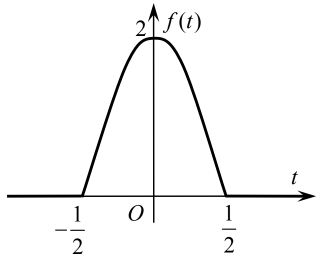


Рисунок 1.51

Знайдемо нулі функції:

$$\frac{2\pi h}{\tau}\cdot\frac{\cos\frac{\omega\tau}{2}}{\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2-\omega^2}=0.$$

Тоді $\cos\frac{\omega\tau}{2}=0$, звідки $\frac{\omega\tau}{2}=\pm\frac{\pi}{2}+2\pi n$, де $n\in Z$.

Якщо $n=0$, то $\frac{\omega\tau}{2}=-\frac{\pi}{2}$ та $\frac{\omega\tau}{2}=\frac{\pi}{2}$, звідки $\omega=-\frac{\pi}{\tau}$ та $\omega=\frac{\pi}{\tau}$.

Якщо $n=1$, то $\frac{\omega\tau}{2}=\frac{3\pi}{2}$ та $\frac{\omega\tau}{2}=\frac{5\pi}{2}$, звідки $\omega=\frac{3\pi}{\tau}$ та $\omega=\frac{5\pi}{\tau}$.

Якщо $n=-1$, то $\frac{\omega\tau}{2}=-\frac{3\pi}{2}$ та $\frac{\omega\tau}{2}=-\frac{5\pi}{2}$, звідки $\omega=-\frac{3\pi}{\tau}$ та $\omega=-\frac{5\pi}{\tau}$, тощо.

Знаменник функції $\left|S(\omega)\right|$ дорівнює нулю у точках $\omega=-\frac{\pi}{\tau}$ та $\omega=\frac{\pi}{\tau}$, отже, знайдені раніш такі нулі функції $\cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$, як $\omega=-\frac{\pi}{\tau}$ та $\omega=\frac{\pi}{\tau}$, не можна вважати за нулі функції $\left|S(\omega)\right|$. Решта нулів цієї функції з коренями знаменника не збігаються.

Знайдемо значення функції $S(\omega)$ у точках $\omega=-\frac{\pi}{\tau}$ та $\omega=\frac{\pi}{\tau}$.

$S(\omega)=\frac{2\pi h}{\tau}\cdot\frac{\cos\frac{\omega\tau}{2}}{\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2-\omega^2}$. Позначимо $\Phi(\omega)=\frac{\cos\frac{\omega\tau}{2}}{\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2-\omega^2}$. Тоді $S(\omega)=\frac{2\pi h}{\tau}\Phi(\omega)$.

Нехай

$$A=\lim_{\omega\to\frac{\pi}{\tau}}\Phi(\omega)=\lim_{\omega\to\frac{\pi}{\tau}}\frac{\cos\frac{\omega\tau}{2}}{\left(\frac{\pi}{\tau}-\omega\right)\left(\frac{\pi}{\tau}+\omega\right)}=\frac{\tau}{2\pi}\lim_{\omega\to\frac{\pi}{\tau}}\frac{\cos\frac{\omega\tau}{2}}{\left(\frac{\pi}{\tau}-\omega\right)}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Зробимо заміну $\frac{\pi}{\tau}-\omega=z$, тоді $\omega=\frac{\pi}{\tau}-z$, $\frac{\omega\tau}{2}=\frac{\tau}{2}\left(\frac{\pi}{\tau}-z\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\tau z}{2}$.

$$\cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\tau z}{2}\right)=\sin\left(\frac{\tau z}{2}\right).$$

Якщо $\omega\to\frac{\pi}{\tau}$, то $z\to 0$. Тоді $A=\frac{\tau}{2\pi}\lim_{z\to 0}\frac{\sin\frac{\tau z}{2}}{z}=\frac{\tau}{2\pi}\cdot\frac{\tau}{2}=\frac{\tau^2}{4\pi}$.

Тепер маємо

$$\lim_{\omega\to\frac{\pi}{\tau}}S(\omega)=\frac{2\pi h}{\tau}\cdot\frac{\tau^2}{4\pi}=\frac{h\tau}{2}.$$

Зважаючи на те, що функція $S(\omega)$ є парною функцією відносно ω, дістанемо графіки функцій $S(\omega)$ та $\left|S(\omega)\right|$ (за $h=2$, $\tau=1$) (рисунки 1.52 та 1.53).

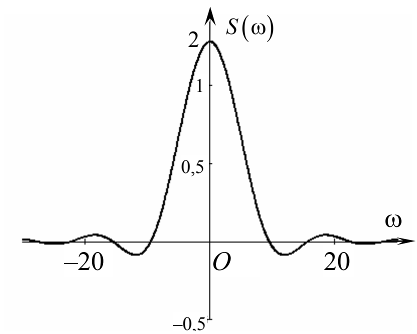


Рисунок 1.52

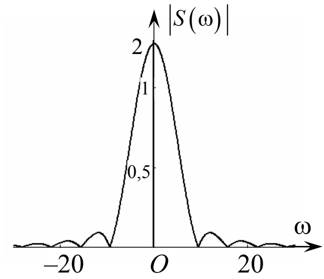


Рисунок1.53

В і д п о в і д ь: рисунки 1.52; 1.53.

Приклад 1.101. Довести, що функція $y=\sin x$ є рівномірно неперервною у своїй області визначення.

Д о в е д е н н я

Область визначення функції $y = \sin x$: $x \in (-\infty, +\infty)$.

Візьмемо які завгодно значення x_1 і x_2 та оцінимо модуль різниці:

$$\left|\sin x_2 - \sin x_1\right| = 2\left|\sin\frac{x_2 - x_1}{2}\cos\frac{x_2 + x_1}{2}\right| \le 2\left|\frac{x_2 - x_1}{2}\right| \cdot 1 = \left|x_2 - x_1\right|.$$

Оберемо будь-яке як завгодно мале додатне число ε. Припустимо, що $\delta = \varepsilon$. Тоді з умови $\left|x_2 - x_1\right| < \delta$ виходить, що $\left|\sin x_2 - \sin x_1\right| < \varepsilon$. Отже, функція $y = \sin x$ є рівномірно неперервною у своїй області визначення.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що називається послідовністю?
2. Яка послідовність називається зростаючою?
3. Яка послідовність називається обмеженою?
4. Яка послідовність називається нескінченно малою?
5. Яка послідовність називається нескінченно великою?
6. Які властивості притаманні нескінченно малим послідовностям?
7. Які властивості притаманні нескінченно великим послідовностям?
8. Чи існує зв'язок між необмеженою та нескінченно великою послідовностями?
9. Яка послідовність називається збіжною?
10. Сформулюйте властивості збіжних послідовностей.
11. Сформулюйте теорему Гур'єва для послідовностей.
12. Сформулюйте визначення границі функції за Коші.
13. Сформулюйте визначення границі функції за Гейне.
14. Що називається однобічною границею функції?
15. Сформулюйте арифметичні теореми про границі функцій.
16. Запишіть формулу, називану першою чудовою границею, та наслідки з цієї формули.
17. У якому випадку нескінченно малі функції називаються порівнянними?
18. Що називається порядком малості нескінченно малої функції?
19. Чи неперервна функція $f(x)=\begin{cases} x^2, \text{ якщо } x\in(-\infty, 0]; \\ 0, \text{ якщо } x\in(0, +\infty)? \end{cases}$
20. Чи неперервна функція $f(x)=\dfrac{x}{x}$?
21. Чи неперервна функція $f(x)=[x]$?
22. Чи може графік функції бути колом?
23. Чи може функція бути неперервною у точці, в якій її не визначено?
24. Чи може функція бути неперервною у точці $x=x_0$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ не існує?
25. Якщо функція $f(x)$ визначена у точці $x = x_0$ та існує $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, то чи обов'язково ця функція є неперервною у точці x_0?

ПЕРЕВІРНІ ТЕСТИ

1. Задано послідовність $\left\{n+\dfrac{4}{n}\right\}$. Яке з тверджень є справедливим:

1) послідовність є обмежена знизу;
2) послідовність є обмежена зверху;
3) послідовність є необмежена;
4) інша відповідь?

2. Задано послідовність $\left\{n+\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$. Яке з тверджень є справедливим:

1) послідовність є зростаючою;
2) послідовність є незростаючою;
3) послідовність є неспадною;
4) інша відповідь?

3. Задано послідовність $\left\{\dfrac{4n+1}{5n^2-1}\right\}$. Яке з тверджень є справедливим:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n+1}{5n^2-1}=\dfrac{4}{5}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n+1}{5n^2-1}=0$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n+1}{5n^2-1}=\infty$;
4) інша відповідь?

4. Задано послідовність $\left\{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$. Яке з тверджень є справедливим:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n=-\mathrm{e}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$;
4) інша відповідь?

5. Задано функцію $y = 5x - 7$. Яке з тверджень є справедливим:

1) функцією, оберненою до заданої, є функція $x = 5y - 7$;
2) функцією, оберненою до заданої, є функція $y=\dfrac{1}{5x-7}$;
3) функцією, оберненою до заданої, є функція $x=\dfrac{1}{5}(y+7)$;
4) інша відповідь?

6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+2x+1}{5x^2-x-1}=A$. Яке з тверджень є справедливим:

1) $A=\dfrac{1}{5}$; 2) $A = 0$; 3) $A=\dfrac{16}{41}$; 4) інша відповідь?

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x+1}{5x^2-x-1}=A$. Яке з тверджень є справедливим:

1) $A=\dfrac{1}{5}$; 2) $A = 0$; 3) $A=\dfrac{16}{41}$; 4) інша відповідь?

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\sin 5x}=A$. Яке з тверджень є справедливим:

1) $A=\dfrac{4}{5}$; 2) $A=\dfrac{5}{4}$; 3) $A=0$; 4) інша відповідь?

9. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{4x}{\sin 5x}=A$. Яке з тверджень є справедливим:

1) $A=\dfrac{4}{5}$; 2) $A=\dfrac{5}{4}$; 3) $A=0$; 4) інша відповідь?

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\mathrm{tg}4x}=A$. Яке з тверджень є справедливим:

1) $A=\dfrac{3}{4}$; 2) $A=\dfrac{4}{3}$; 3) $A=0$; 4) інша відповідь?

11. $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{tg}\,2x\ \mathrm{ctg}\,3x=A$. Яке з тверджень є справедливим:

1) $A=\dfrac{2}{3}$; 2) $A=\dfrac{3}{2}$; 3) $A=0$; 4) інша відповідь?

12. Задано функції $y=\sin^3 5x$; $y=x$. Яке з тверджень є справедливим:
1) $\sin^3 5x=o\,(x)$, коли $x\to 0$; 2) $\sin^3 5x=O(x)$, коли $x\to 0$;
3) $x=o\,(\sin^3 5x)$, коли $x\to 0$; 4) інша відповідь?

13. Задано функцію $y=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{1}{x-1}}$. Яке з тверджень є справедливим:

1) функція є неперервна у точці $x=1$;
2) функція має усувний розрив у точці $x=1$;
3) функція має розрив I роду у точці $x=1$;
4) інша відповідь?

14. $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$. Яке з тверджень є справедливим:
1) функція у точці $x=x_0$ є неперервна;
2) функція у точці $x=x_0$ має усувний розрив;
3) не вистачає інформації;
4) інша відповідь?

15. Задано функцію $f(x)=\mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{x}$. Яке з тверджень є справедливим:

1) функція у точці $x=0$ є неперервною;
2) функція у точці $x=0$ має усувний розрив;
3) функція у точці $x=0$ має розрив I роду;
4) інша відповідь?

16. Задано функцію $f(x)=\dfrac{|2x-5|}{2x-5}$. Яке з тверджень є справедливим:

1) стрибок функції у точці $x_0=\dfrac{5}{2}$ дорівнює 0;

2) стрибок функції у точці $x_0=\dfrac{5}{2}$ дорівнює 1;

3) стрибок функції у точці $x_0 = \dfrac{5}{2}$ дорівнює -1;

4) інша відповідь?

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_kx^k} = A$. Яке з тверджень є справедливим:

1) $A = \dfrac{a_0}{b_0}$, якщо $n > k$; 2) $A = \dfrac{a_n}{b_k}$, якщо $n > k$;

3) $A = \infty$, якщо $n > k$; 4) інша відповідь?

18. Задано нескінченно малі функції $f_1(x) = \arcsin x^2$ та $f_2(x) = \operatorname{arctg}^2 x$, коли $x \to 0$. Яке з тверджень є справедливим:

1) $f_1(x)$ та $f_2(x)$ є непорівнянні нескінченно малі;

2) $f_1(x)$ та $f_2(x)$ є еквівалентні нескінченно малі;

3) $\arcsin x^2 = o\,(\operatorname{arctg}^2 x)$;

4) інша відповідь?

19 $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = 4$; $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) = +\infty$. Яке з тверджень є справедливим:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) - \lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) = +\infty$; 2) $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) - \lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) = -\infty$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) - \lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) = 4$; 4) інша відповідь?

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x + \sin 3x}{3x - \sin 3x} = A$. Яке з тверджень є справедливим:

1) $A = 3$; 2) $A = 1$; 3) $A = \infty$; 4) інша відповідь?

21. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^8 - 8}{x^6 - 6} = A$. Яке з тверджень є справедливим:

1) $A = \dfrac{4}{3}$; 2) $A = \dfrac{3}{4}$; 3) $A = 0$; 4) інша відповідь?

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1 - \cos 6x}{\cos 7x - 1} = A$. Яке з тверджень є справедливим:

1) $A = -\dfrac{6}{7}$; 2) $A = -\dfrac{36}{49}$; 3) $A = 0$; 4) інша відповідь?

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2 - \sqrt{x+4}}{\sin 6x} = A$. Яке з тверджень є справедливим:

1) $A = \dfrac{2}{3}$; 2) $A = -\dfrac{1}{24}$; 3) $A = -24$; 4) інша відповідь?

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\sin 9x - \sin 8x} = A$. Яке з тверджень є справедливим:

1) $A = 7$; 2) $A = \dfrac{1}{7}$; 3) $A = \infty$; 4) інша відповідь?

25. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^4 - 8x^2 + 16} = A$. Яке з тверджень є справедливим:

1) $A = \infty$; 2) $A = 3$; 3) $A = \dfrac{1}{4}$; 4) інша відповідь?

ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ

1. Користуючись визначенням збіжної послідовності, довести справедливість заданих рівностей.

1.01. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n+9}{4n+132}=\dfrac{5}{4}$. **1.02.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-40+11n}{7n-27\,648}=\dfrac{11}{7}$. **1.03.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n+10}{4n+143}=\dfrac{5}{4}$.

1.04. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-42+11n}{7n-30\,000}=\dfrac{11}{7}$. **1.05.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n+11}{4n+154}=\dfrac{5}{4}$. **1.06.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{19n+56}{59-19n}=-1$.

1.07. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n+12}{4n+165}=\dfrac{5}{4}$. **1.08.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{19n+58}{61-19n}=-1$. **1.09.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{60n+900}{n}=60$.

1.10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{19n+60}{63-19n}=-1$. **1.11.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{35+4n}{4\,096+96n}=\dfrac{1}{24}$. **1.12.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{19n+62}{65-19n}=-1$.

1.13. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{37+4n}{4\,624+102n}=\dfrac{2}{51}$. **1.14.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{52n+676}{n}=52$. **1.15.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{39+4n}{4\,900+108n}=\dfrac{1}{27}$.

1.16. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{54n+739}{n}=54$. **1.17.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{41+4n}{5\,776+114n}=\dfrac{2}{57}$. **1.18.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{56n+784}{n}=56$.

1.19. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{43+4n}{6\,400+120n}=\dfrac{1}{30}$. **1.20.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{58n+841}{n}=58$. **1.21.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-34+11n}{7n-21\,168}=\dfrac{11}{7}$.

1.22. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{62n+961}{n}=62$. **1.23.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-36+11n}{7n-23\,232}=\dfrac{11}{7}$. **1.24.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{36+4n}{4\,356+99n}=\dfrac{4}{99}$.

1.25. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-38+11n}{7n-25\,392}=\dfrac{11}{7}$.

2. Знайти границі функцій при заданих значеннях α і β.

2.01. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^{\alpha}+4x^2+7x-11}{3x^{\beta}-5x^2+x-7}$

1) $\alpha=3;\ \beta=3;$

2) $\alpha=7;\ \beta=3;$

3) $\alpha=5;\ \beta=7.$

2.02. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^{\alpha}+4x^2-21}{3x^{\beta}-5x^2+2x+4}$

1) $\alpha=3;\ \beta=3;$

2) $\alpha=5;\ \beta=4;$

3) $\alpha=8;\ \beta=10.$

2.03. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{\alpha}+x^{2}+x+9}{6x^{\beta}-3x^{2}+15x-3}$

1) $\alpha=3;\ \beta=3;$

2) $\alpha=10;\ \beta=5;$

3) $\alpha=3;\ \beta=9.$

2.04. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^{\alpha}+3x^{2}+2x-7}{3x^{\beta}-x^{2}+7x+11}$

1) $\alpha=3;\ \beta=3;$

2) $\alpha=10;\ \beta=6;$

3) $\alpha=7;\ \beta=10.$

2.05. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{\alpha}+x^{2}+x+24}{x^{\beta}-x^{2}+3x-25}$

1) $\alpha=3;\ \beta=3;$

2) $\alpha=4;\ \beta=3;$

3) $\alpha=4;\ \beta=5.$

2.06. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^{\alpha}+8x^{2}+2x-11}{5x^{\beta}-3x^{2}+2x+3}$

1) $\alpha=3;\ \beta=3;$

2) $\alpha=5;\ \beta=4;$

3) $\alpha=9;\ \beta=10.$

2.07. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{14x^{\alpha}+x^{2}+35}{x^{\beta}-14x^{2}+15x-13}$

1) $\alpha=3;\ \beta=3;$

2) $\alpha=8;\ \beta=4;$

3) $\alpha=3;\ \beta=8.$

2.08. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^{\alpha}+4x^{2}+2x-3}{2x^{\beta}-5x^{2}+x-7}$

1) $\alpha=3;\ \beta=3;$

2) $\alpha=10;\ \beta=6;$

3) $\alpha=4;\ \beta=5.$

2.09. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^{\alpha}+6x^{2}+x-7}{x^{\beta}-x^{2}+x-1}$

1) $\alpha=3;\ \beta=3;$

2) $\alpha=7;\ \beta=6;$

3) $\alpha=6;\ \beta=9.$

2.10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^{\alpha}+3x^{2}+7x-3}{4x^{\beta}-6x^{2}+2x+7}$

1) $\alpha=3;\ \beta=3;$

2) $\alpha=9;\ \beta=8;$

3) $\alpha=3;\ \beta=10.$

2.11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^{\alpha}+15x^{2}+10x-12}{8x^{\beta}-9x^{2}+7x+13}$

1) $\alpha=3;\ \beta=3;$

2) $\alpha=9;\ \beta=4;$

3) $\alpha=8;\ \beta=9.$

2.12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^{\alpha}+5x^{2}+7x+2}{7x^{\beta}-7x^{2}+x-6}$

1) $\alpha=3;\ \beta=3;$

2) $\alpha=8;\ \beta=3;$

3) $\alpha=5;\ \beta=6.$

2.13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{\alpha}+2x^{2}+7x-11}{3x^{\beta}-11x^{2}+x+6}$

1) $\alpha=3;\ \beta=3;$

2) $\alpha=10;\ \beta=6;$

3) $\alpha=7;\ \beta=8.$

2.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^{\alpha}+3x^{2}+x-3}{9x^{\beta}-4x^{2}+9x+7}$

1) $\alpha=3;\ \beta=3;$

2) $\alpha=10;\ \beta=8;$

3) $\alpha=3;\ \beta=4.$

2.15. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^{\alpha} + x^{2} + 4x + 3}{5x^{\beta} - 3x^{2} + 8x - 4}$

1) $\alpha = 3;\ \beta = 3;$

2) $\alpha = 9;\ \beta = 5;$

3) $\alpha = 3;\ \beta = 7.$

2.16. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^{\alpha} - 9x^{2} + 3x + 1}{2x^{\beta} - 4x^{2} + 2x + 1}$

1) $\alpha = 3;\ \beta = 3;$

2) $\alpha = 8;\ \beta = 3;$

3) $\alpha = 5;\ \beta = 9.$

2.17. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^{\alpha} + 9x^{2} - 5x - 4}{4x^{\beta} + 2x^{2} - 9x + 1}$

1) $\alpha = 3;\ \beta = 3;$

2) $\alpha = 8;\ \beta = 5;$

3) $\alpha = 4;\ \beta = 8.$

2.18. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^{\alpha} + 4x^{2} + 4x - 2}{4x^{\beta} - 4x^{2} + 2x - 3}$

1) $\alpha = 3;\ \beta = 3;$

2) $\alpha = 5;\ \beta = 3;$

3) $\alpha = 9;\ \beta = 10.$

2.19. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^{\alpha} - 3x^{2} + 9x + 2}{2x^{\beta} + 3x^{2} + x - 8}$

1) $\alpha = 3;\ \beta = 3;$

2) $\alpha = 8;\ \beta = 7;$

3) $\alpha = 5;\ \beta = 6.$

2.20. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8x^{\alpha} + 3x^{2} + 5x + 5}{7x^{\beta} - 11x^{2} + 5x - 9}$

1) $\alpha = 3;\ \beta = 3;$

2) $\alpha = 5;\ \beta = 4;$

3) $\alpha = 7;\ \beta = 10.$

2.21. $\lim \dfrac{2x + 9x + 4x - 2}{x - 5x + x + 6}$

1) $\alpha = 3;\ \beta = 3;$

2) $\alpha = 6;\ \beta = 4;$

3) $\alpha = 5;\ \beta = 7.$

2.22. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^{\alpha} + 11x^{2} + 7x + 4}{3x^{\beta} - 5x^{2} + 4x - 5}$

1) $\alpha = 3;\ \beta = 3;$

2) $\alpha = 8;\ \beta = 3;$

3) $\alpha = 8;\ \beta = 10.$

2.23. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^{\alpha} + x^{2} - 7x + 2}{11x^{\beta} - x^{2} + x - 4}$

1) $\alpha = 3;\ \beta = 3;$

2) $\alpha = 10;\ \beta = 8;$

3) $\alpha = 6;\ \beta = 9.$

2.24. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^{\alpha} + 7x^{2} + 11x + 7}{5x^{\beta} - 7x^{2} + 7x - 5}$

1) $\alpha = 3;\ \beta = 3;$

2) $\alpha = 10;\ \beta = 5;$

3) $\alpha = 3;\ \beta = 8.$

2.25. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8x^{\alpha} + 8x^{2} + 3x + 5}{6x^{\beta} - 5x^{2} + 8x + 7}$

1) $\alpha = 3;\ \beta = 3;$

2) $\alpha = 5;\ \beta = 4;$

3) $\alpha = 4;\ \beta = 6.$

3. Знайти границі послідовностей.

3.01. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{5+n^2}+\sqrt{4n+12}}{\sqrt[6]{9n^5+4}}$.

3.02. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{7+4n^4}+n\sqrt{n}}{\sqrt[8]{n^9+2}}$.

3.03. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[6]{n^7+5}}{\sqrt[6]{n^6+9}+\sqrt[3]{n^2+24}}$.

3.04. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{16+n+\sqrt{16n^2+1}}{\sqrt[4]{4+n^5}}$.

3.05. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[7]{15+n^7+4n^6+n}}{n^2+\sqrt{n^2+25}}$.

3.06. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{36+n^2}+\sqrt{n^2+36}}{\sqrt[6]{n^6+6n^5+12n^4}}$.

3.07. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[8]{8n^8+7n^7+6n^6+5n^5+4n^4+3n^3+2n^2+n}}{\sqrt[4]{2401+n^4}+\sqrt{n^3+343}}$.

3.08. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{3n^3+2n^2+n+1}}{\sqrt{64+n^2}+\sqrt[6]{n^6+1}}$.

3.09. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[5]{59049n^5+1}}{\sqrt[6]{9n^3+729}+\sqrt[3]{n^6+1}}$.

3.10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n^2+2}+\sqrt[4]{n^3+3}}{\sqrt[5]{n^4+10}}$.

3.11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{6+n^4}+n\sqrt{n}}{\sqrt[8]{n^9+1}}$.

3.12. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[6]{n^7+7}}{\sqrt[6]{n^6+4}+\sqrt[3]{n^2+16}}$.

3.13. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{12+n+\sqrt{9n^2+1}}{\sqrt[4]{3+n^5}}$.

3.14. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[7]{12+n^7+4n^6+n}}{n^2+\sqrt{n^2+16}}$.

3.15. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{25+n^2}+\sqrt{25+n^2}}{\sqrt[6]{n^6+5n^5+10n^4}}$.

3.16. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[8]{8n^8+7n^7+6n^6+5n^5+4n^4+3n^3+2n^2+n}}{\sqrt[4]{1296+n^4}+\sqrt{n^3+216}}$.

3.17. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{3n^3+2n^2+n+1}}{\sqrt{49+n^2}+\sqrt[6]{n^6+1}}$.

3.18. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[5]{32768n^5+1}}{\sqrt[6]{n^3+512}+\sqrt[3]{n^6+1}}$.

3.19. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt[3]{n^2+2}+\sqrt[4]{n^3+3}}{\sqrt[5]{n^4+9}}$.

3.20. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{50+n^2}+\sqrt{40n+21}}{\sqrt[6]{9n^5+13}}$.

3.21. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[6]{n^7+3}}{\sqrt[6]{n^6+1}+\sqrt[3]{n^2+8}}$.

3.22. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8+n+\sqrt{4n^2+1}}{\sqrt[4]{2+n^5}}$.

3.23. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[7]{9+n^7+4n^6+n}}{n^2+\sqrt{n^2+9}}$.

3.24. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{16+n^2}+\sqrt[3]{16+n^2}}{\sqrt[6]{n^6+4n^5+8n^4}}$.

3.25. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[8]{8n^8+7n^7+6n^6+5n^5+4n^4+3n^3+2n^2+n}}{\sqrt[4]{625+n^4}+\sqrt{n^3+125}}$

4. Знайти граничне значення функції у точці x_0.

4.1. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{4x^3+3x^2-3x-4}{4x^3-3x^2+9x-10}$

$1)\ x_0=-2;\ \ 2)\ x_0=0;$

$3)\ x_0=2;\ \ 4)\ x_0=1.$

4.2. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{6x^3+9x^2-3x-12}{7x^3-3x^2+3x-7}$

$1)\ x_0=-2;\ \ 2)\ x_0=0;$

$3)\ x_0=2;\ \ 4)\ x_0=1.$

4.3. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{9x^3+3x^2-4x+2}{2x^3+x^2+x+2}$

$1)\ x_0=-2;\ \ 2)\ x_0=0;$

$3)\ x_0=2;\ \ 4)\ x_0=-1.$

4.4. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{12x^3+x^2+x+12}$

$1)\ x_0=-2;\ \ 2)\ x_0=0;$

$3)\ x_0=2;\ \ 4)\ x_0=-1.$

4.5. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{6x^3+5x^2+10x-21}{8x^3+x^2+7x-16}$

$1)\ x_0=-2;\ \ 2)\ x_0=0;$

$3)\ x_0=2;\ \ 4)\ x_0=1.$

4.6. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^3+2x^2-4x-3}{2x^3-3x^2-4x+1}$

$1)\ x_0=-2;\ \ 2)\ x_0=0;$

$3)\ x_0=2;\ \ 4)\ x_0=-1.$

4.7. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{14x^3-3x^2+2x+19}{3x^3-x^2+4x+8}$

$1)\ x_0=-2;\ \ 2)\ x_0=0;$

$3)\ x_0=2;\ \ 4)\ x_0=-1.$

4.8. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^3-5x^2-7x+10}{5x^3-2x^2+3x-6}$

$1)\ x_0=-2;\ \ 2)\ x_0=0;$

$3)\ x_0=2;\ \ 4)\ x_0=1.$

4.9. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^3+2x^2+x+12}{x^3-3x^2-x+51}$

$1)\ x_0=-2;\ \ 2)\ x_0=0;$

$3)\ x_0=2;\ \ 4)\ x_0=-3.$

4.10. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{10x^3+3x^2-x+6}{x^3-x^2-2x}$

$1)\ x_0=-2;\ \ 2)\ x_0=0;$

$3)\ x_0=2;\ \ 4)\ x_0=-1.$

4.11. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{7x^3-4x^2-5x+2}{3x^3-x^2-2x}$

$1)\ x_0=-2;\ \ 2)\ x_0=0;$

$3)\ x_0=2;\ \ 4)\ x_0=1.$

4.12. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{11x^3+9x^2-7x-13}{9x^3-7x^2+5x-7}$

$1)\ x_0=-2;\ \ 2)\ x_0=0;$

$3)\ x_0=2;\ \ 4)\ x_0=1.$

4.13. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^3+x^2-4x+2}{5x^3-4x^2+3x-4}$

1) $x_0=-2$; 2) $x_0=0$;

3) $x_0=2$; 4) $x_0=1$.

4.14. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^3+4x^2-2x-3}{7x^3-4x^2+5x+16}$

1) $x_0=-2$; 2) $x_0=0$;

3) $x_0=2$; 4) $x_0=-1$.

4.15. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{4x^3+7x^2-2x-9}{12x^3-8x^2+4x-8}$

1) $x_0=-2$; 2) $x_0=0$;

3) $x_0=2$; 4) $x_0=1$.

4.16. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^3+2x^2+x}{3x^3-11x^2+x+15}$

1) $x_0=-2$; 2) $x_0=0$;

3) $x_0=2$; 4) $x_0=-1$.

4.17. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^3+4x^2+7x+14}{3x^3-5x^2+x+46}$

1) $x_0=3$; 2) $x_0=0$;

3) $x_0=2$; 4) $x_0=-2$.

4.18. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{7x^3+4x^2+5x+8}{7x^3-5x^2-2x+10}$

1) $x_0=-2$; 2) $x_0=0$;

3) $x_0=2$; 4) $x_0=-1$.

4.19. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^3+x^2+x+6}{6x^3-3x^2+15x+90}$

1) $x_0=3$; 2) $x_0=0$;

3) $x_0=2$; 4) $x_0=-2$.

4.20. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{4x^3+3x^2+2x-48}{3x^3-x^2+7x-34}$

1) $x_0=-2$; 2) $x_0=0$;

3) $x_0=3$; 4) $x_0=2$.

4.21. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^3-x^2-3x-1}$

1) $x_0=-2$; 2) $x_0=0$;

3) $x_0=2$; 4) $x_0=-1$.

4.22. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{5x^3+8x^2+2x-15}{5x^3-3x^2+2x-4}$

1) $x_0=-2$; 2) $x_0=0$;

3) $x_0=2$; 4) $x_0=1$.

4.23. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{4x^3+x^2+3}{x^3-3x^2+15x+19}$

1) $x_0=-2$; 2) $x_0=0$;

3) $x_0=2$; 4) $x_0=-1$.

4.24. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{6x^3+4x^2+2x-12}{2x^3-5x^2+x+2}$

1) $x_0=-2$; 2) $x_0=0$;

3) $x_0=2$; 4) $x_0=1$.

4.25. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^3+6x^2+x-10}{x^3-x^2+x-1}$

1) $x_0=-2$; 2) $x_0=0$;

3) $x_0=2$; 4) $x_0=1$.

5. Знайти граничне значення функції у точці x_0.

5.01. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt{4x+14}-\sqrt{12+3x}}{\sqrt{20x+47}-\sqrt{3-2x}}$

1) $x_0=0$; 2) $x_0=1$; 3) $x_0=-2$.

5.02. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt{10x+28}-\sqrt{26+11x}}{\sqrt{20x+9}-\sqrt{11+19x}}$

1) $x_0=0$; 2) $x_0=2$; 3) $x_0=4$.

5.03. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt{4x+15}-\sqrt{13+3x}}{\sqrt{20x+47}-\sqrt{3-2x}}$

1) $x_0=0$; 2) $x_0=1$; 3) $x_0=-2$.

5.04. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt{11x+28}-\sqrt{26+12x}}{\sqrt{30x+4}-\sqrt{26+19x}}$

1) $x_0=0$; 2) $x_0=1$; 3) $x_0=2$.

5.05. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt{6x+16}-\sqrt{14+5x}}{\sqrt{20x+47}-\sqrt{3-2x}}$

1) $x_0=0$; 2) $x_0=-1$; 3) $x_0=-2$.

5.06. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt{11x+30}-\sqrt{28+12x}}{\sqrt{30x+10}-\sqrt{32+19x}}$

1) $x_0=0$; 2) $x_0=2$; 3) $x_0=6$.

5.07. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt{5x+20}-\sqrt{18+4x}}{\sqrt{1-5x}-\sqrt{3-4x}}$

1) $x_0=0$; 2) $x_0=-2$; 3) $x_0=-1$.

5.08. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt{11x+30}-\sqrt{26+12x}}{\sqrt{30x+10}-\sqrt{54+19x}}$

1) $x_0=0$; 2) $x_0=1$; 3) $x_0=4$.

5.09. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt{6x+20}-\sqrt{18+5x}}{\sqrt{35x+72}-\sqrt{6+2x}}$

1) $x_0=0$; 2) $x_0=2$; 3) $x_0=-2$.

5.10. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt{21x+30}-\sqrt{66+12x}}{\sqrt{30x+10}-\sqrt{54+19x}}$

1) $x_0=0$; 2) $x_0=2$; 3) $x_0=4$.

5.11. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt{5x+26}-\sqrt{28+6x}}{\sqrt{10x+40}-\sqrt{15x+50}}$

1) $x_0=0$; 2) $x_0=-2$; 3) $x_0=2$.

5.12. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt{31x+30}-\sqrt{106+12x}}{\sqrt{20x+10}-\sqrt{14+19x}}$

1) $x_0=0$; 2) $x_0=3$; 3) $x_0=4$.

5.13. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\sqrt{10x+28}-\sqrt{26+11x}}{\sqrt{10x+16}-\sqrt{15x+6}}$
1) $x_0=0$; 2) $x_0=1$; 3) $x_0=2$.

5.14. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\sqrt{41x+30}-\sqrt{146+12x}}{\sqrt{10x+10}-\sqrt{6+11x}}$
1) $x_0=0$; 2) $x_0=4$; 3) $x_0=5$.

5.15. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\sqrt{51x+30}-\sqrt{186+12x}}{\sqrt{15x+10}-\sqrt{26+11x}}$
1) $x_0=0$; 2) $x_0=3$; 3) $x_0=4$.

5.16. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\sqrt{4x+6}-\sqrt{9+3x}}{\sqrt{10x+50}-\sqrt{59+7x}}$
1) $x_0=0$; 2) $x_0=1$; 3) $x_0=3$.

5.17. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\sqrt{5x+40}-\sqrt{16+8x}}{\sqrt{15x+10}-\sqrt{18+14x}}$
1) $x_0=0$; 2) $x_0=1$; 3) $x_0=8$.

5.18. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\sqrt{6x+12}-\sqrt{9+7x}}{\sqrt{10x+55}-\sqrt{64+7x}}$
1) $x_0=0$; 2) $x_0=2$; 3) $x_0=3$.

5.19. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\sqrt{2x+44}-\sqrt{4+7x}}{\sqrt{15x+10}-\sqrt{18+14x}}$
1) $x_0=0$; 2) $x_0=2$; 3) $x_0=8$.

5.20. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\sqrt{7x+12}-\sqrt{9+8x}}{\sqrt{10x+60}-\sqrt{69+7x}}$
1) $x_0=0$; 2) $x_0=3$; 3) $x_0=4$.

5.21. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\sqrt{3x+36}-\sqrt{4+7x}}{\sqrt{15x+20}-\sqrt{28+14x}}$
1) $x_0=0$; 2) $x_0=2$; 3) $x_0=8$.

5.22. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\sqrt{12x+17}-\sqrt{14+13x}}{\sqrt{15x+60}-\sqrt{69+12x}}$
1) $x_0=0$; 2) $x_0=3$; 3) $x_0=5$.

5.23. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\sqrt{36x+36}-\sqrt{4+40x}}{\sqrt{18x+20}-\sqrt{28+17x}}$
1) $x_0=0$; 2) $x_0=4$; 3) $x_0=8$.

5.24. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\sqrt{12x+28}-\sqrt{22+13x}}{\sqrt{15x+10}-\sqrt{46+9x}}$
1) $x_0=0$; 2) $x_0=3$; 3) $x_0=6$.

5.25. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\sqrt{36x+56}-\sqrt{24+40x}}{\sqrt{18x+40}-\sqrt{48+17x}}$
1) $x_0=0$; 2) $x_0=5$; 3) $x_0=8$.

6. Знайти границі функцій.

6.01. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x\ \operatorname{arctg} 3x}{\sin 4x\ \operatorname{tg} 4x}.$

6.02. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x\ \operatorname{tg} x}{x\cos x}.$

6.03. $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg} 7x.$

6.04. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\sin 5x}{2-\sqrt{4-x^2}}.$

6.05. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 5x\ \operatorname{arctg} x}{x\ \operatorname{tg}^2 3x}.$

6.06. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x+\sin x}{2x}.$

6.07. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arcsin 3x\ \arccos 4x}{\operatorname{arctg} 5x}.$

6.08. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x-\sin 7x}{\cos 8x-\cos 9x}.$

6.09. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}.$

6.10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{ctg} x\ \sin^2 x}{\operatorname{tg} x}.$

6.11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 7x}{x\sin 5x}.$

6.12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\operatorname{tg} 2x)^2}{x\sin 5x}.$

6.13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\operatorname{arctg} x}{7(\arcsin x)^2}.$

6.14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x-\sin 8x}{3-\sqrt{9-x^2}}.$

6.15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos 9x}{\sin 5x-\sin 9x}.$

6.16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\cos x-\cos 11x)^2}{1-\cos 11x}.$

6.17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x\ \arcsin 7x}{\sin 6x\ \operatorname{arctg} 8x}.$

6.18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 5x-\sin 5x}{x\sin^2 5x}.$

6.19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{ctg} x\ \cos x\ \operatorname{arctg} 2x}{\sin x}.$

6.20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 5x\ \operatorname{tg}^3 6x}{\arcsin^5 7x}.$

6.21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos 25x}{\left(7-\sqrt{49-x^2}\right)}.$

6.22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 7x}{7x\sin x}.$

6.23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 \dfrac{x}{4}}{11-\sqrt{121-x^2}}.$

6.24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x\ \cos 5x\ \cos 6x}{x\operatorname{ctg} 3x}.$

6.25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cdot\operatorname{ctg} 2x}{\sin 3x}.$

7. Знайти границі послідовностей та функцій.

7.01. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+12}{n^2-2}\right)^{2n+1}$.

7.02. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+3}{3n^2+8n-12}\right)^{4n+2}$.

7.03. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n^2+4n+3}{5n^2+21n+1}\right)^{9n^2+4n+3}$.

7.04. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{8n+11}{8n+18}\right)^{n^2+8n+4}$.

7.05. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7n+12}{7n+5}\right)^{n^2-25}$.

7.06. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{9n-42n^2}{96-42n^2}\right)^{4n^2+36}$.

7.07. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{49-n^2}{3-n^2+n}\right)^{2n+7}$.

7.08. $\lim\limits_{x\to 0}\left(8x+9x^2+1\right)^{\frac{8}{x^3+4x}}$

7.09. $\lim\limits_{x\to 0}\left(9x^2+14x+1\right)^{\frac{7(x+9)}{x^2+8x}}$

7.10. $\lim\limits_{x\to 0}\left(80x^2+9x+1\right)^{\frac{16(10-3x)}{5x+4x^2}}$

7.11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2-4}{3n^2+8n-12}\right)^{4n+1}$.

7.12. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n^2+4n+2}{5n^2+14n+1}\right)^{9n^2+4n+2}$.

7.13. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6n+11}{6n+18}\right)^{n^2+8n+3}$.

7.14. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7n+12}{7n+4}\right)^{n^2-16}$.

7.15. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{9n-35n^2}{80-35n^2}\right)^{4n^2+5}$.

7.16. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{36+5n^2}{3+n+5n^2}\right)^{2n+6}$.

7.17. $\lim\limits_{x\to 0}\left(7x+9x^2+1\right)^{\frac{7}{x^3-5x}}$

7.18. $\lim\limits_{x\to 0}\left(8x^2+14x+1\right)^{\frac{7(x+8)}{9x^2}}$

7.19. $\lim\limits_{x\to 0}\left(72x^2+9x+1\right)^{\frac{16\left(9+3x^2\right)}{5+x}}$.

7.20. $\lim\limits_{x\to 0}\left(5x^2-9x+7\right)^{\frac{15(9-13x)}{5+8x+30x^2}}$.

7.21. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n^2+4n+1}{5n^2+7n+1}\right)^{9n^2+4n+1}$.

7.22. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n+11}{4n+18}\right)^{n^2+8n+2}$.

7.23. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7n+12}{7n+3}\right)^{n^2-9}$.

7.24. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{9n-28n^2}{64-28n^2}\right)^{4n^2+16}$.

7.25. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{25-n^2}{3+n-n^2}\right)^{2n+5}$.

8. Знайти границі функцій.

8.01. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos \pi x)^{\frac{1}{x\sin \pi x}}$.

8.02. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)^{\operatorname{ctg} x}$.

8.03. $\lim\limits_{x\to 0}\left(6-\frac{5}{\cos x}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

8.04. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\sin x\cos 2x}{1+\sin x\cos 3x}\right)^{\frac{1}{\sin x^3}}$.

8.05. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

8.06. $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$.

8.07. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{5}{\operatorname{tg} 5x\,\sin 2x}}$.

8.08. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{\sin x}{\sin 3}\right)^{\frac{1}{x-3}}$.

8.09. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\cos x}}$.

8.10. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{6-x}{3}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{6}}$.

8.11. $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$.

8.12. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{\cos x}{\cos 2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$.

8.13. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\sin x)^{6\operatorname{tg} x\,\operatorname{tg} 3x}$.

8.14. $\lim\limits_{x\to 0}(2-\cos 3x)^{-\frac{1}{\sin^2 x}}$.

8.15. $\lim\limits_{x\to 0}\left(5-\frac{4}{\cos x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 3x}}$.

8.16. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x^2]{2-\cos x}$.

8.17. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg} x\cos 2x}{1+\operatorname{tg}\cos 5x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

8.18. $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$.

8.19. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}}$.

8.20. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$.

8.21. $\lim\limits_{x\to 2}(5-2x)^{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}$.

8.22. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{3x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}}$.

8.23. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{9-2x}{3}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{6}}$.

8.24. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 3x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

8.25. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{18\sin x}{\operatorname{ctg} x}}$.

9. Дослідити на неперервність функцію $f\left(x\right)$ та визначити тип точок розриву. Побудувати схематично графік функції $f\left(x\right)$.

9.01. а) $f(x)=\begin{cases}-1, & \text{якщо } x<0;\\ -\cos x, & \text{якщо } 0\le x\le \dfrac{\pi}{2};\\ \dfrac{\pi}{2}+x, & \text{якщо } x>\dfrac{\pi}{2};\end{cases}$ б) $f(x)=\dfrac{1}{5+3^{\frac{1}{x}}}.$

9.02. а) $f(x)=\begin{cases}x+2, & \text{якщо } x\le -2;\\ 2-x, & \text{якщо } -2<x<0;\\ x^2+2, & \text{якщо } x\ge 0;\end{cases}$ б) $f(x)=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}.$

9.03. а) $f(x)=\begin{cases}x, & \text{якщо } x\le -1;\\ \dfrac{1}{2}, & \text{якщо } -1<x\le \dfrac{\pi}{6};\\ \sin x, & \text{якщо } x>\dfrac{\pi}{6};\end{cases}$ б) $f(x)=\dfrac{1}{3+5^{\frac{1}{x+2}}}.$

9.04. а) $f(x)=\begin{cases}x^2-4, & \text{якщо } x<-1;\\ 3x, & \text{якщо } -1\le x\le 3;\\ 5, & \text{якщо } x>3;\end{cases}$ б) $f(x)=1-2^{\frac{1}{x}}.$

9.05. а) $f(x)=\begin{cases}2, & \text{якщо } x<-1;\\ 2-2x, & \text{якщо } -1\le x\le 1;\\ \ln x, & \text{якщо } x>1;\end{cases}$ б) $f(x)=4^{\frac{1}{3-x}}+1.$

9.06. а) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{x}, & \text{якщо } x<-2;\\ x, & \text{якщо } -2\le x<0;\\ 1-x, & \text{якщо } x\ge 0;\end{cases}$ б) $f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x-1}}+1}{2^{\frac{1}{x-1}}-1}.$

9.07. а) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\sqrt{4-x}, & \text{якщо } x<0;\\ \cos 2x, & \text{якщо } 0\le x\le \dfrac{\pi}{4};\\ -x, & \text{якщо } x>\dfrac{\pi}{4};\end{cases}$ б) $f(x)=\dfrac{x^3-x^2}{2\left|x-1\right|}.$

9.08. а) $f(x)=\begin{cases}\cos x, & \text{якщо } x\le -\pi;\\ -1, & \text{якщо } -\pi<x\le 0;\\ \sqrt{x+1}, & \text{якщо } x>0;\end{cases}$ б) $f(x)=3^{\frac{1}{4-x}}+1.$

9.09. а) $f(x)=\begin{cases}x+\pi, & \text{якщо } x<-\pi;\\ \sin x, & \text{якщо } -\pi\le x<0;\\ 3-2x, & \text{якщо } x\ge 0;\end{cases}$ б) $f(x)=7^{\frac{1}{2-x}}-2.$

9.10. а) $f(x)=\begin{cases} x^2-4, & \text{якщо } x<-2; \\ 3x+2, & \text{якщо } -2\le x\le 2; \\ 12-x^2, & \text{якщо } x>2; \end{cases}$ б) $f(x)=\dfrac{2}{3+6^{\frac{1}{x+2}}}$.

9.11. а) $f(x)=\begin{cases} 2^x, & \text{якщо } -1\le x<1; \\ 1, & \text{якщо } x=1; \\ x-1, & \text{якщо } 1<x\le 4; \end{cases}$ б) $f(x)=2-\dfrac{|x|}{x}$.

9.12. а) $f(x)=\begin{cases} 2\sqrt{x}, & \text{якщо } 0\le x\le 1; \\ 4-2x, & \text{якщо } 1<x<2{,}5; \\ 2x-7, & \text{якщо } 2{,}5\le x\le 4; \end{cases}$ б) $f(x)=3^{\frac{1}{4-x}}+1$.

9.13. а) $f(x)=\begin{cases} \cos x, & \text{якщо } -\dfrac{\pi}{2}\le x<\dfrac{\pi}{4}; \\ 1, & \text{якщо } x=\dfrac{\pi}{4}; \\ x^2-\dfrac{\pi^2}{16}, & \text{якщо } \dfrac{\pi}{4}<x\le\pi; \end{cases}$ б) $f(x)=\dfrac{1}{2^{\frac{1}{2-x}}+1}$.

9.14. а) $f(x)=\begin{cases} 2-x, & \text{якщо } x\le 0; \\ \cos x, & \text{якщо } 0<x\le\dfrac{\pi}{2}; \\ 0, & \text{якщо } x>\dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$ б) $f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}+2$.

9.15. а) $f(x)=\begin{cases} 0{,}5x^2, & \text{якщо } |x|<2; \\ 2{,}5, & \text{якщо } |x|=2; \\ 3, & \text{якщо } |x|>2; \end{cases}$ б) $f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}+2}{2^{\frac{1}{x}}+1}$.

9.16. а) $f(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^x, & \text{якщо } x<-1; \\ 3-x, & \text{якщо } x\ge -1; \end{cases}$ б) $f(x)=2^{\frac{1}{x-2}}+1$.

9.17. а) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{якщо } x\ne 0; \\ 2, & \text{якщо } x=0; \end{cases}$ б) $f(x)=\dfrac{5}{2+7^{\frac{4}{5-x}}}$.

9.18. а) $f(x)=\begin{cases} -2x, & \text{якщо } x\le 0 \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } 0<x<4 \\ 1, & \text{якщо } x\ge 4 \end{cases}$ б) $f(x)=1+3^{\frac{1}{x}}$.

9.19. а) $f(x)=\begin{cases} -x^2, & \text{якщо } x\le 0; \\ \operatorname{tg} x, & \text{якщо } 0<x\le\dfrac{\pi}{4}; \\ 2, & \text{якщо } x>\dfrac{\pi}{4}; \end{cases}$ б) $f(x)=\dfrac{3^{\frac{1}{x}}-1}{3^{\frac{1}{x}}+1}$.

9.20. а) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}, & \text{якщо } x<1;\\ 3x, & \text{якщо } x\ge 1;\end{cases}$ б) $f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}.$

9.21. а) $f(x)=\begin{cases}2^{-x}, & \text{якщо } x<2;\\ x+1, & \text{якщо } x\ge 2;\end{cases}$ б) $f(x)=\dfrac{3}{2^{x}-1}.$

9.22. а) $f(x)=\begin{cases}-x, & \text{якщо } x\le 0;\\ \sin x, & \text{якщо } 0<x\le \pi;\\ x-2, & \text{якщо } x>\pi;\end{cases}$ б) $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}-1.$

9.23. а) $f(x)=\begin{cases}\cos x, & \text{якщо } x\le 0;\\ x^2+1, & \text{якщо } 0<x<1;\\ x, & \text{якщо } x\ge 1;\end{cases}$ б) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}.$

9.24. а) $f(x)=\begin{cases}x+4, & \text{якщо } x<-1;\\ x^2+2, & \text{якщо } -1\le x<1;\\ 2x, & \text{якщо } x\ge 1;\end{cases}$ б) $f(x)=8^{\frac{1}{5-x}}-2.$

9.25. а) $f(x)=\begin{cases}4-x^2, & \text{якщо } |x|\le 2;\\ 4, & \text{якщо } |x|>2;\end{cases}$ б) $f(x)=\dfrac{x^3+x}{2|x|}.$

ВІДПОВІДІ ДО ТРЕНУВАЛЬНИХ ВПРАВ

Вправи 2

2.01. 1) $\frac{2}{3}$; 2) ∞; 3) 0. **2.02.** 1) $\frac{7}{3}$; 2) ∞; 3) 0. **2.03.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) ∞; 3) 0.

2.04. 1) $\frac{4}{3}$; 2) ∞; 3) 0. **2.05.** 1) 1; 2) ∞; 3) 0. **2.06.** 1) 1; 2) ∞; 3) 0.

2.07. 1) 14; 2) ∞; 3) 0. **2.08.** 1) 3; 2) ∞; 3) 0. **2.09.** 1) 3; 2) ∞; 3) 0.

2.10. 1) $\frac{1}{2}$; 2) ∞; 3) 0. **2.11.** 1) $\frac{3}{4}$; 2) ∞; 3) 0. **2.12.** 1) $\frac{8}{7}$; 2) ∞; 3) 0.

2.13. 1) $\frac{1}{3}$; 2) ∞; 3) 0. **2.14.** 1) $\frac{4}{9}$; 2) ∞; 3) 0. **2.15.** 1) 1; 2) ∞; 3) 0.

2.16. 1) 2; 2) ∞; 3) 0. **2.17.** 1) $\frac{3}{4}$; 2) ∞; 3) 0. **2.18.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) ∞; 3) 0.

2.19. 1) 3; 2) ∞; 3) 0. **2.20.** 1) $\frac{8}{7}$; 2) ∞; 3) 0. **2.21.** 1) 2; 2) ∞; 3) 0.

2.22. 1) 1; 2) ∞; 3) 0. **2.23.** 1) $\frac{3}{11}$; 2) ∞; 3) 0. **2.24.** 1) $\frac{7}{5}$; 2) ∞; 3) 0.

2.25. 1) $\frac{4}{3}$; 2) ∞; 3) 0.

Вправи 3

3.01. 0. **3.02.** ∞. **3.03.** ∞. **3.04.** 0. **3.05.** 0. **3.06.** 1. **3.07.** 0. **3.08.** $\frac{3^{\frac{1}{3}}}{2}$. **3.09.** 0. **3.10.** 0. **3.11.** ∞. **3.12.** ∞. **3.13.** 0. **3.14.** 0. **3.15.** 1. **3.16.** 0. **3.17.** $\frac{3^{\frac{1}{3}}}{2}$. **3.18.** 0. **3.19.** 0. **3.20.** 0. **3.21.** ∞. **3.22.** 0. **3.23.** 0. **3.24.** 1. **3.25.** 0.

Вправи 4

4.01. 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{2}{5}$; 3) $\frac{17}{14}$; 4) $\left[\frac{0}{0}\right]=1$. **4.02.** 1) $\frac{2}{9}$; 2) $\frac{12}{7}$; 3) $\frac{66}{43}$; 4) $\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{11}{6}$.

4.03. 1) $\frac{25}{6}$; 2) 1; 3) $\frac{13}{4}$; 4) $\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{17}{5}$. **4.04.** 1) $\frac{9}{82}$; 2) $\frac{1}{12}$; 3) $\frac{1}{38}$; 4) $\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{4}{35}$.

4.05. 1) $\frac{23}{30}$; 2) $\frac{21}{16}$; 3) $\frac{67}{66}$; 4) $\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{38}{33}$. **4.06.** 1) $\frac{11}{19}$; 2) -3; 3) -7; 4) $\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{1}{8}$.

4.07. 1) $\frac{109}{28}$; 2) $\frac{19}{8}$; 3) $\frac{41}{12}$; 4) $\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{10}{3}$. **4.08.** 1) $\frac{1}{5}$; 2) $-\frac{5}{3}$; 3) $-\frac{1}{4}$; 4) $\left[\frac{0}{0}\right]=-\frac{11}{14}$.

4.09. 1) $\frac{10}{33}$; 2) $\frac{4}{17}$; 3) $\frac{2}{3}$; 4) $\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{4}{11}$. **4.10.** 1) $\frac{15}{2}$; 2) $-$; 3) $-$; 4) $\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{23}{3}$.

4.11. 1) $\frac{5}{2}$; 2) $-$; 3) 2; 4) $\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{8}{5}$.

4.12. 1) $\frac{17}{39}$; 2) $\frac{13}{7}$; 3) $\frac{97}{47}$; 4) $\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{22}{9}$.

4.13. 1) $-\frac{1}{11}$; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $\frac{3}{13}$; 4) $\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{1}{10}$.

4.14. 1) $\frac{7}{66}$; 2) $-\frac{3}{16}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\left[\frac{0}{0}\right]=-\frac{1}{34}$.

4.15. 1) $\frac{1}{16}$; 2) $\frac{9}{8}$; 3) $\frac{47}{64}$; 4) $\left[\frac{0}{0}\right]=1$.

4.16. 1) $\frac{2}{55}$; 2) 0; 3) -6; 4) $\left[\frac{0}{0}\right]=0$.

4.17. 1) $\frac{25}{17}$; 2) $\frac{7}{23}$; 3) $\frac{15}{13}$; 4) $\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{5}{19}$.

4.18. 1) $\frac{21}{31}$; 2) $\frac{4}{5}$; 3) $\frac{15}{7}$; 4) $\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{18}{29}$.

4.19. 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{15}$; 3) $\frac{5}{39}$; 4) $\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{1}{11}$.

4.20. 1) $\frac{18}{19}$; 2) $\frac{24}{17}$; 3) $\frac{93}{59}$; 4) $\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{62}{39}$.

4.21. 1) 0; 2) 0; 3) -8; 4) $\left[\frac{0}{0}\right]=-\frac{1}{2}$.

4.22. 1) $\frac{9}{20}$; 2) $\frac{15}{4}$; 3) $\frac{61}{28}$; 4) $\left[\frac{0}{0}\right]=3$.

4.23. 1) $\frac{25}{31}$; 2) $\frac{3}{19}$; 3) $\frac{13}{15}$; 4) $\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{5}{12}$.

4.24. 1) $\frac{4}{3}$; 2) -6; 3) ∞; 4) $\left[\frac{0}{0}\right]=-\frac{28}{3}$.

4.25. 1) $\frac{4}{5}$; 2) 10; 3) 8; 4) $\left[\frac{0}{0}\right]=11$.

Вправи 5

5.01.

1) $\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}\sqrt{7}}{\sqrt{3}-\sqrt{47}}\approx 0{,}0542$; 2) $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{67}-\sqrt{1}}\approx 0{,}0514$; 3) $\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{7}}{132}\approx 0{,}0491$.

5.02.

1) $-\frac{\sqrt{2}\sqrt{14}-\sqrt{26}}{\sqrt{11}-3}\approx -0{,}6079$; 2) $\left[\frac{0}{0}\right]=-\frac{7\sqrt{3}}{12}\approx -1{,}0104$; 3) $-\frac{\sqrt{2}\sqrt{34}-\sqrt{70}}{\sqrt{87}-\sqrt{89}}\approx -1{,}1293$.

5.03.

1) $\frac{\sqrt{2}\sqrt{14}-\sqrt{26}}{2\sqrt{2}-\sqrt{10}}\approx -0{,}5766$; 2) $\frac{\sqrt{19}-4}{\sqrt{67}-1}\approx 0{,}0499$; 3) $\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{1}{22}\approx 0{,}0455$.

5.04.

1) $\frac{\sqrt{2}\sqrt{13}-\sqrt{28}}{\sqrt{26}-2}\approx -0{,}0621$; 2) $-\frac{\sqrt{2}\sqrt{19}-\sqrt{39}}{\sqrt{2}\sqrt{17}-\sqrt{45}}\approx -0{,}0919$; 3) $\left[\frac{0}{0}\right]=-\frac{4\sqrt{2}}{55}\approx -0{,}1029$.

5.05.

1) $-\frac{\sqrt{2}\sqrt{8}-\sqrt{14}}{\sqrt{3}-\sqrt{47}}\approx 0{,}0504$; 2) $-\frac{\sqrt{2}\sqrt{5}-3}{\sqrt{5}-\sqrt{27}}\approx 0{,}0548$; 3) $\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{\sqrt{7}}{44}\approx 0{,}0601$.

5.06.

1) $-\frac{2\sqrt{7}-\sqrt{30}}{\sqrt{10}-\sqrt{32}}\approx -0{,}0745$; 2) $\left[\frac{0}{0}\right]=-\frac{\sqrt{910}}{286}\approx -0{,}1055$; 3) $\frac{\sqrt{96}-10}{\sqrt{10}\sqrt{19}-\sqrt{146}}\approx -0{,}1188$.

5.07.

1) $\dfrac{3\sqrt{2}-2\sqrt{5}}{\sqrt{3}-1}\approx -0{,}3135$; 2) $\left[\dfrac{0}{0}\right]=-\dfrac{\sqrt{110}}{10}\approx -1{,}0488$; 3) $\dfrac{\sqrt{3}\sqrt{5}-\sqrt{2}\sqrt{7}}{\sqrt{6}-\sqrt{7}}\approx -0{,}6691$.

5.08.

1) $-\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{13}-\sqrt{30}}{\sqrt{10}-\sqrt{54}}\approx -0{,}0903$; 2) $-\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{19}-\sqrt{41}}{2\sqrt{10}-\sqrt{73}}\approx -0{,}1076$; 3) $\left[\dfrac{0}{0}\right]=-\dfrac{\sqrt{2405}}{407}\approx -0{,}1205$.

5.09.

1) $-\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{10}-\sqrt{18}}{\sqrt{2}\sqrt{3}-\sqrt{72}}\approx 0{,}0380$; 2) $-\dfrac{4\sqrt{2}-\sqrt{28}}{\sqrt{2}\sqrt{5}-\sqrt{142}}\approx 0{,}0417$; 3) $\left[\dfrac{0}{0}\right]=\dfrac{1}{66}\approx 0{,}0152$.

5.10.

1) $\dfrac{\sqrt{3}\sqrt{10}-\sqrt{6}\sqrt{11}}{\sqrt{10}-\sqrt{54}}\approx 0{,}6323$; 2) $\dfrac{\sqrt{6}\sqrt{15}-\sqrt{3}\sqrt{24}}{\sqrt{7}\sqrt{10}-\sqrt{92}}\approx 0{,}8176$; 3) $\left[\dfrac{0}{0}\right]=\dfrac{3\sqrt{3705}}{209}\approx 0{,}8737$.

5.11.

1) $-\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{14}-\sqrt{26}}{2\sqrt{10}-\sqrt{5}\sqrt{10}}\approx 0{,}2578$; 2) $\left[\dfrac{0}{0}\right]=\dfrac{\sqrt{5}}{10}\approx 0{,}2236$; 3) $\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{20}-6}{4\sqrt{5}-\sqrt{6}\sqrt{10}}\approx 0{,}2708$.

5.12.

1) $-\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{53}-\sqrt{30}}{\sqrt{10}-\sqrt{14}}\approx 8{,}3165$; 2) $-\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{71}-\sqrt{123}}{\sqrt{7}\sqrt{10}-\sqrt{71}}\approx 13{,}8681$; 3) $\left[\dfrac{0}{0}\right]=\dfrac{57\sqrt{385}}{77}\approx 14{,}5249$.

5.13

1) $-\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{14}-\sqrt{26}}{\sqrt{2}\sqrt{3}-\sqrt{2}\sqrt{8}}\approx 0{,}1241$; 2) $-\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{19}-\sqrt{37}}{\sqrt{3}\sqrt{7}-\sqrt{2}\sqrt{13}}\approx 0{,}1581$; 3) $\left[\dfrac{0}{0}\right]=\dfrac{\sqrt{3}}{10}\approx 0{,}1732$.

5.14.

1) $\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{73}-\sqrt{30}}{\sqrt{6}-\sqrt{10}}\approx -9{,}2676$; 2) $\left[\dfrac{0}{0}\right]=-\dfrac{145\sqrt{97}}{97}\approx -14{,}7225$; 3) $-\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{103}-\sqrt{235}}{\sqrt{6}\sqrt{10}-\sqrt{61}}\approx -15{,}1986$.

5.15.

1) $\dfrac{\sqrt{3}\sqrt{10}-\sqrt{6}\sqrt{31}}{\sqrt{2}\sqrt{5}-\sqrt{26}}\approx 4{,}2138$; 2) $-\dfrac{\sqrt{6}\sqrt{37}-\sqrt{3}\sqrt{61}}{\sqrt{5}\sqrt{11}-\sqrt{59}}\approx 5{,}1781$; 3) $\left[\dfrac{0}{0}\right]=\dfrac{\sqrt{455}}{4}\approx 5{,}3327$.

5.16.

1) $\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{3}-3}{\sqrt{5}\sqrt{10}-\sqrt{59}}\approx 0{,}9024$; 2) $-\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}\sqrt{5}}{\sqrt{6}\sqrt{10}-\sqrt{66}}\approx 0{,}7983$; 3) $\left[\dfrac{0}{0}\right]=\dfrac{2\sqrt{10}}{9}\approx 0{,}7027$.

5.17.

1) $-\dfrac{\sqrt{5}\sqrt{8}-4}{3\sqrt{2}-\sqrt{2}\sqrt{5}}\approx -2{,}\ 1516$; 2) $-\dfrac{3\sqrt{5}-\sqrt{2}\sqrt{3}}{4\sqrt{2}\ 4-5}\approx -2{,}7544$; 3) $\left[\dfrac{0}{0}\right]=-\dfrac{3\sqrt{26}}{4}\approx -3{,}8243$.

5.18.

1) $\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{6}-3}{\sqrt{5}\sqrt{11}--8}\approx -0{,}7950$; 2) $\dfrac{2\sqrt{6}-\sqrt{23}}{\sqrt{5}\sqrt{15}-\sqrt{78}}\approx -0{,}6014$; 3) $\left[\dfrac{0}{0}\right]=-\dfrac{\sqrt{102}}{18}\approx -0{,}5611$.

5.19.

1) $-\frac{\sqrt{7}-\sqrt{37}}{\sqrt{2}\,\sqrt{5}-\sqrt{2}\,\sqrt{8}}\approx-4{,}1028$; 2) $-\frac{\sqrt{3}\,\sqrt{7}-\sqrt{41}}{\sqrt{5}\,\sqrt{8}-\sqrt{2}\,\sqrt{22}}\approx-5{,}8976$; 3) $\left[\frac{0}{0}\right]=-\frac{50}{7}\approx-7{,}1429$.

5.20.

1) $\frac{\sqrt{12}-3}{\sqrt{6}\,\sqrt{10}-\sqrt{69}}\approx-0{,}8278$; 2) $\left[\frac{0}{0}\right]=-\frac{\sqrt{330}}{33}\approx-0{,}5505$; 3) $-\frac{\sqrt{40}-\sqrt{41}}{\sqrt{97}-10}\approx-0{,}5198$.

5.21.

1) $\frac{\sqrt{3}\,\sqrt{12}-2}{2\sqrt{5}-\sqrt{2}\,\sqrt{14}}\approx-4{,}8818$; 2) $-\frac{\sqrt{3}\,\sqrt{14}-\sqrt{18}}{2\sqrt{14}-\sqrt{5}\,\sqrt{10}}\approx-5{,}4290$; 3) $\left[\frac{0}{0}\right]=-\frac{4\sqrt{21}}{3}\approx-6{,}1101$.

5.22.

1) $-\frac{\sqrt{14}-\sqrt{17}}{2\sqrt{15}-\sqrt{3}\,\sqrt{23}}\approx-0{,}6804$; 2) $\left[\frac{0}{0}\right]=-\frac{\sqrt{5565}}{159}\approx-0{,}4692$; 3) $\frac{\sqrt{77}-\sqrt{79}}{3\sqrt{15}-\sqrt{3}\,\sqrt{43}}\approx-0{,}4336$.

5.23.

1) $\frac{4}{\sqrt{2}\,\sqrt{10}-\sqrt{28}}\approx-4{,}8818$; 2) $\frac{6\sqrt{5}-2\sqrt{41}}{\sqrt{2}\,\sqrt{46}-\sqrt{96}}\approx-2{,}9577$; 3) $\left[\frac{0}{0}\right]=-\frac{4\sqrt{41}}{9}\approx-2.845$.

5.24.

1) $\frac{2\sqrt{7}-\sqrt{22}}{\sqrt{2}\,\sqrt{5}-\sqrt{46}}\approx-0{,}166$; 2) $-\frac{\sqrt{61}-8}{\sqrt{5}\,\sqrt{11}-\sqrt{73}}\approx-0{,}1682$; 3) $\left[\frac{0}{0}\right]=-\frac{1}{6}\approx-0{,}01667$.

5.25.

1) $\frac{2\sqrt{14}-2\sqrt{2}\,\sqrt{3}}{\sqrt{2}\,\sqrt{20}-\sqrt{48}}\approx-4{,}2812$; 2) $\frac{2\sqrt{59}-2\sqrt{2}\,\sqrt{28}}{\sqrt{2}\,\sqrt{65}-\sqrt{133}}\approx-3{,}0247$; 3) $\left[\frac{0}{0}\right]=-\frac{4\sqrt{989}}{43}\approx-2{,}9254$.

Вправи 6

6.01. $\frac{9}{16}$. **6.02** 0. **6.03.** $\frac{1}{7}$. **6.04.** ∞. **6.05.** $\frac{25}{9}$. **6.06.** 1. **6.07.** $\frac{3\pi}{5}$. **6.08.** ∞. **6.09.** $\frac{1}{2}$. **6.10** 0. **6.11.** $\frac{49}{10}$. **6.12** $\frac{4}{5}$. **6.13.** $\frac{2}{7}$. **6.14.** ∞. **6.15.** 0. **6.16.** 0. **6.17.** $\frac{35}{48}$.**6.18.** $\frac{5}{2}$. **6.19.** 2. **6.20.** $\frac{5400}{16807}$. **6.21.** 4200. **6.22.** $\frac{7}{2}$. **6.23.** $\frac{11}{8}$. **6.24.** 3. **6.25.** $\frac{1}{6}$.

Вправи 7

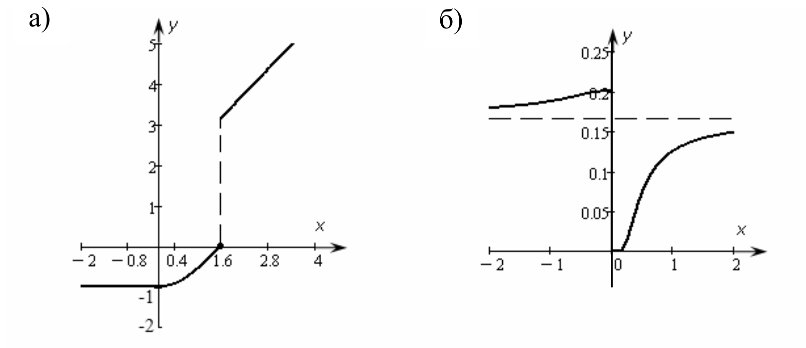
7.01. 1 **7.02.** $e^{-\frac{32}{3}}$. **7.03.** 0. **7.04.** 0. **7.05.** ∞. **7.06.** 0. **7.07.** e^2. **7.08.** e^2. **7.09.** $e^{\frac{441}{4}}$. **7.10.** 288. **7.11.** $e^{-\frac{32}{3}}$. **7.12.** 0. **7.13.** 0. **7.14.** ∞. **7.15.** 0. **7.16.** $e^{-\frac{2}{5}}$. **7.17.** $e^{-\frac{49}{5}}$. **7.18.** ∞. **7.19.** 1. **7.20.** 16807. **7.21.** 0. **7.22.** 0. **7.23.** ∞. **7.24.** 0. **7.25.** e^2.

Вправи 8

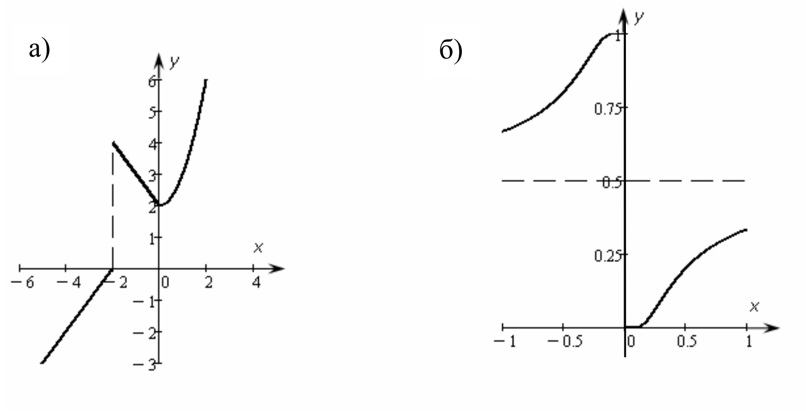
8.01. $e^{-\frac{\pi}{2}}$. **8.02.** e^{-2}. **8.03.** $e^{-\frac{5}{2}}$. **8.04.** $e^{\frac{5}{2}}$. **8.05.** $e^{-\frac{1}{2}}$. **8.06.** $e^{\operatorname{ctg} a}$. **8.07.** $e^{-\frac{1}{4}}$. **8.08.** $e^{\operatorname{ctg} 3}$. **8.09.** e. **8.10.** $e^{\frac{2}{\pi}}$. **8.11.** $e^{\frac{4}{\pi}}$. **8.12.** $e^{-\operatorname{tg} 2}$. **8.13.** $1/e$. **8.14.** $e^{-\frac{9}{2}}$. **8.15.** $e^{-\frac{2}{9}}$. **8.16.** $\sqrt{e}$. **8.17.** 0. **8.18.** 1. **8.19.** e. **8.20.** $\frac{1}{e}$. **8.21.** $e^{-\frac{4}{\pi}}$. **8.22.** $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}-1}} \approx 3.4323$. **8.23.** $e^{\frac{4}{\pi}}$. **8.24.** e^{3}. **8.25.** 1.

Вправи 9

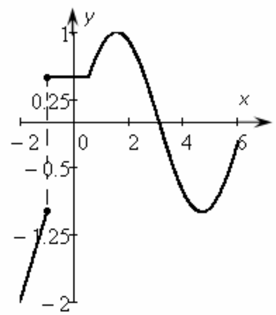
9.01.



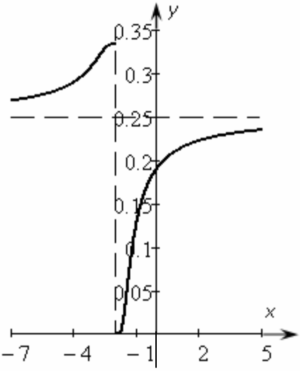
9.02.



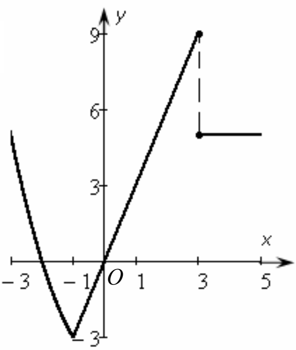
9.03. а)



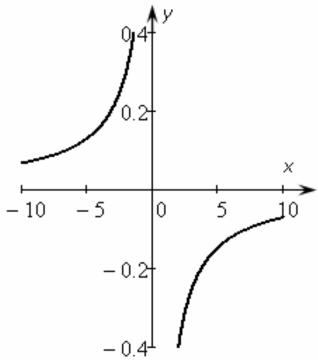
б)



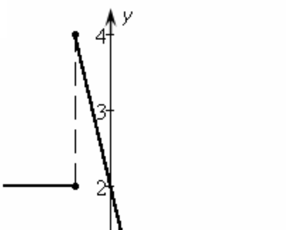
9.04. а)



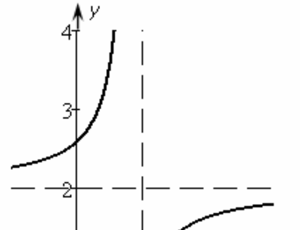
б)



9.05. а)

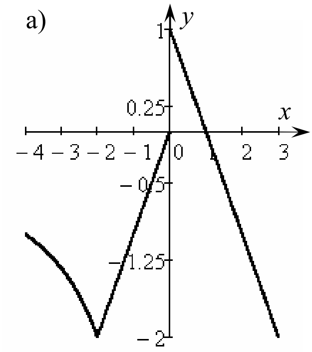


б)

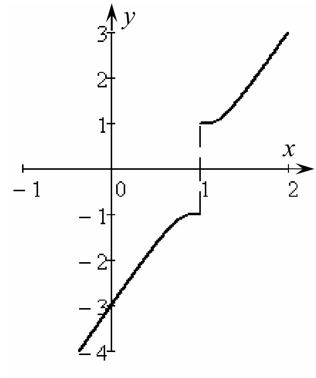


9.06.

а)

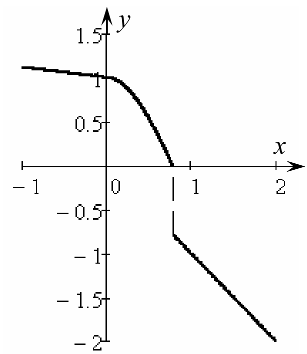


б)

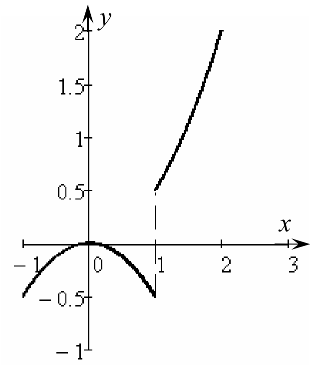


9.07.

а)

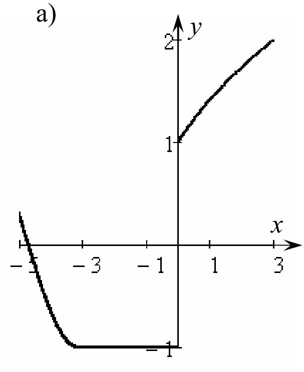


б)

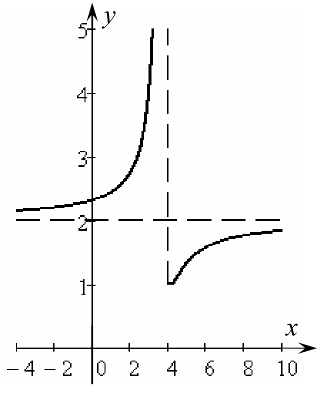


9.08.

а)

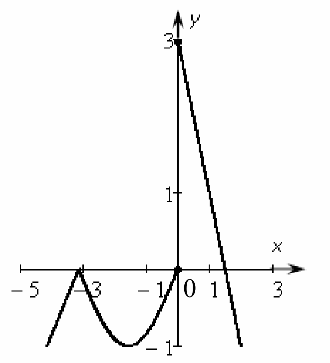


б)

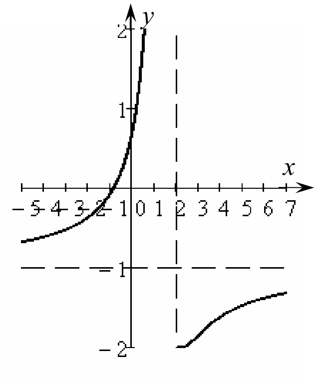


9.09.

а)

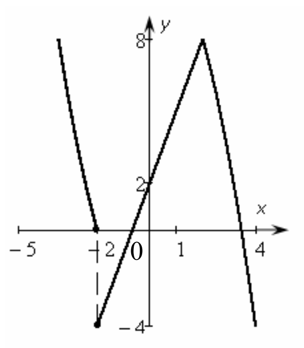


б)

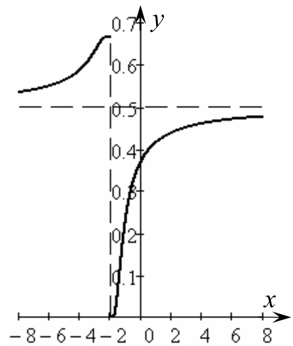


9.10.

а)

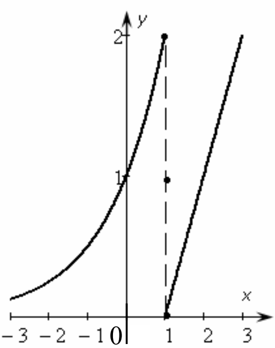


б)

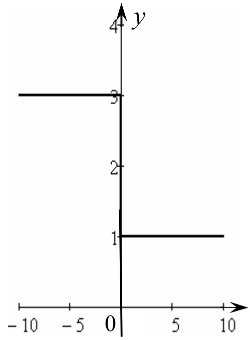


9.11.

а)

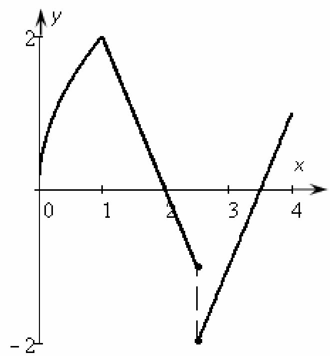


б)

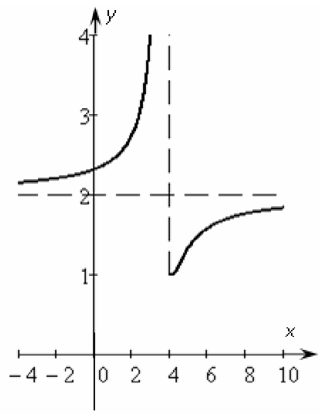


9.12.

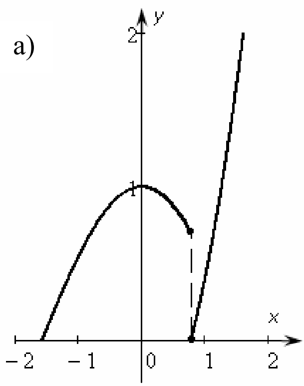
а)



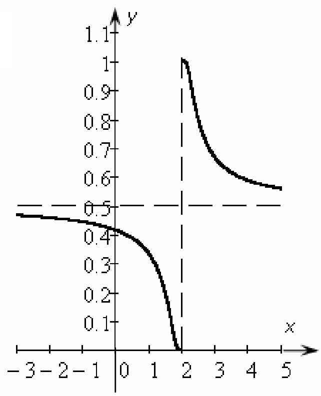
б)



9.13. а)

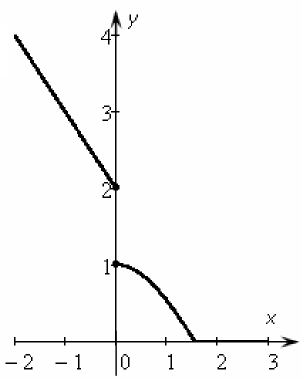


б)

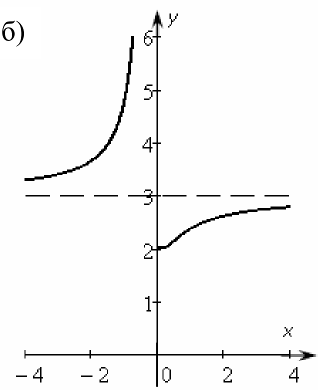


9.14.

а)

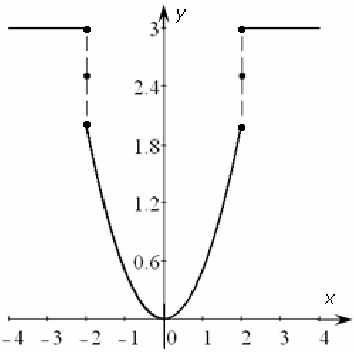


б)

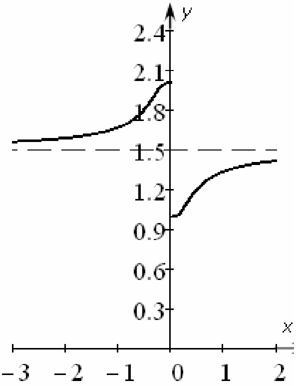


9.15.

а)

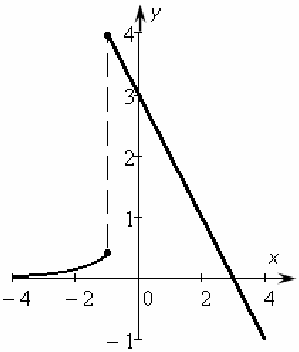


б)

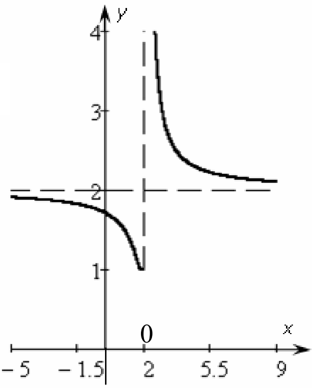


9.16.

а)

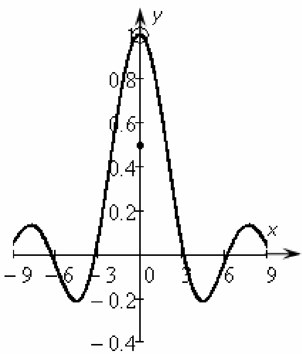


б)

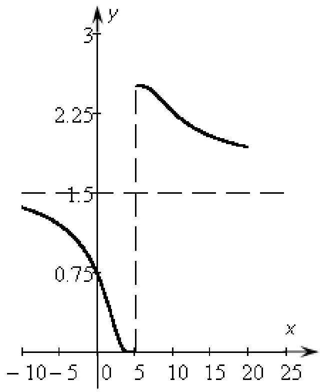


9.17.

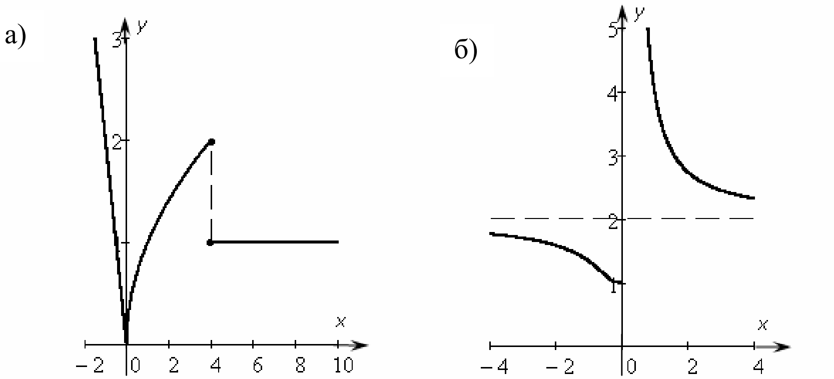
а)



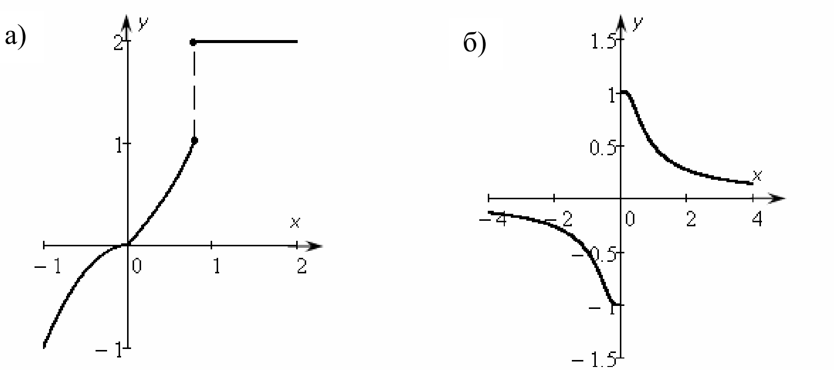
б)



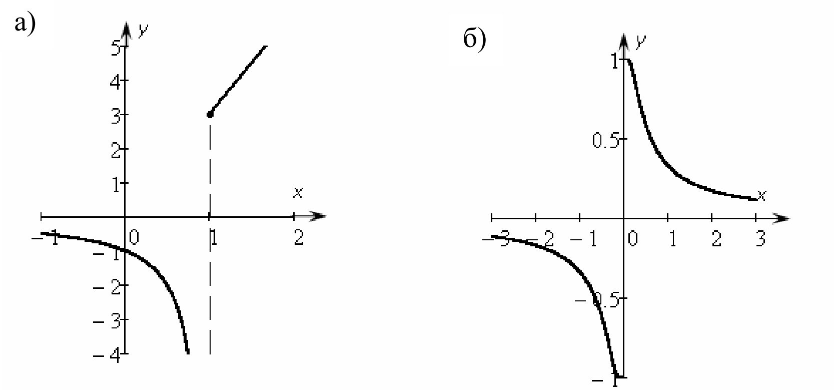
9.18.



9.19.

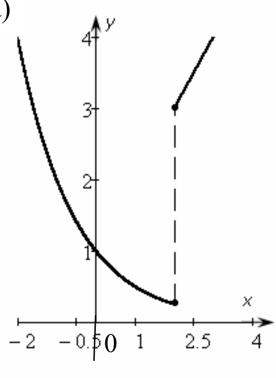


9.20 .

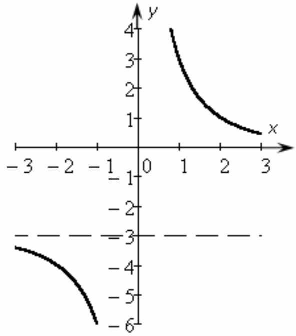


9.21.

а)

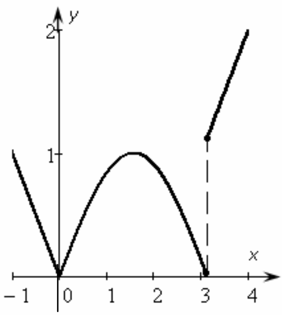


б)

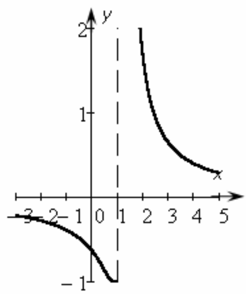


9.22.

а)

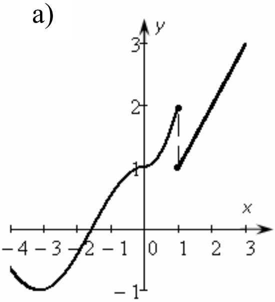


б)

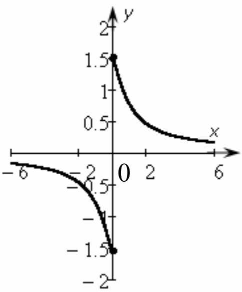


9.23.

а)

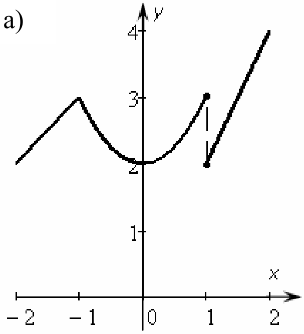


б)

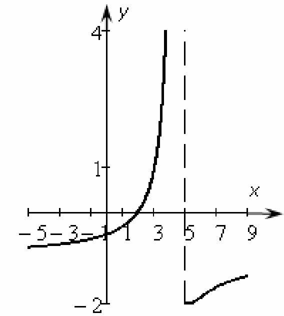


9.24.

а)

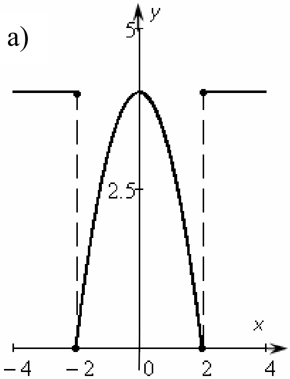


б)

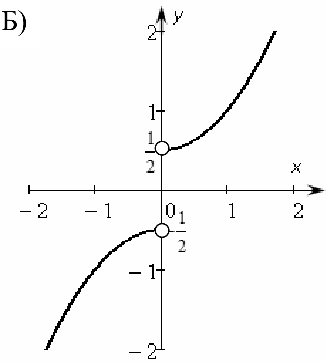


9.25.

а)



Б)



ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Задача 1. Задано послідовність $\{a_n\} = \left\{ \dfrac{3-(-1)^n}{n^2+1} \right\}$. Знайти $A = a_5 + a_6$.

Задача 2. Довести, що послідовність $\{a_n\} = \left\{ 4 + \dfrac{2}{n^2} \right\}$ є обмеженою.

Задача 3. Довести, що послідовність $\{a_n\} = \left\{ \dfrac{5+n}{n^2} \right\}$ є спадною.

Задача 4. Довести, що послідовність $\{a_n\} = \left\{ \dfrac{n^3+1}{n} \right\}$ є монотонною.

Задача 5. Користуючись визначенням нескінченно малої послідовності, довести, що послідовність $\{\alpha_n\} = \left\{ \dfrac{n+4}{n^2} \right\}$ є нескінченно малою.

Задача 6. Користуючись визначенням нескінченно великої послідовності, довести, що послідовність $\{\sigma_n\} = \left\{ (-1)^n n \right\}$ є нескінченно великою.

Задача 7. Користуючись визначенням нескінченно малої послідовності, довести, що послідовність $\{a_n\} = \left\{ \dfrac{n+1}{n+2} \right\}$ не є нескінченно малою.

Задача 8. Користуючись визначенням нескінченно великої послідовності, довести, що послідовність $\{a_n\} = \left\{ \dfrac{n+1}{n+2} \right\}$ не є нескінченно великою.

Задача 9. Записати текст визначення, поданого мовою кванторів: послідовність $\{\sigma_n\}$ називається нескінченно великою послідовністю, якщо $\forall M > 0$ $\exists N = N(\varepsilon),\ \forall n > N\colon |\ \sigma_n\ | > M$.

Задача 10. Користуючись визначенням збіжної послідовності, довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n+2} = 1$.

Задача 11. Користуючись визначенням збіжної послідовності, довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-8}{6-5n} = -\dfrac{3}{5}$.

Задача 12. Знайти границю послідовності $\{a_n\} = \left\{ \dfrac{5n^2+4n+1}{6n^2-4n+1} \right\}$.

Задача 13. Знайти границю послідовності $\{a_n\} = \left\{ \dfrac{5n^3+4n+1}{6n^2-4n+1} \right\}$.

Задача 14. Знайти границю послідовності $\{a_n\} = \left\{ \dfrac{5n^2+4n+1}{6n^3-4n+1} \right\}$.

Задача 15. Знайти границю послідовності $\{a_n\} = \left\{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\right\}$.

Задача 16. Знайти границю послідовності $\{a_n\} = \left\{\left(\dfrac{n+3}{n-4}\right)^n\right\}$.

Задача 17. Знайти границю послідовності $\{a_n\} = \left\{\left(\dfrac{n^3+3n+4}{n^2-5n+2}\right)^n\right\}$.

Задача 18. Знайти область визначення функції $f(x) = \dfrac{x+4}{x^2-8x+7}$.

Задача 19. Знайти область визначення функції $f(x) = \sqrt{x^2-8x+7}$.

Задача 20. Знайти область визначення функції $f(x) = \sqrt{8x-7-x^2}$.

Задача 21. Знайти область визначення функції $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{8x-7-x^2}}$.

Задача 22. Знайти область визначення функції $f(x) = \ln\left(x^2-8x+7\right)$.

Задача 23. Знайти область визначення функції $f(x) = \ln\left(8x-7-x^2\right)$.

Задача 24. Знайти область визначення функції $f(x) = \arcsin^2 \dfrac{x}{x+1}$.

Задача 25. Знайти область визначення функції $f(x) = \left(5\operatorname{ctg} x + 8\arccos\dfrac{x-1}{6}\right)^4$.

Задача 26. Знайти область визначення функції $f(x) = \sqrt[3]{x^2-8x+7}$.
Задача 27. Знайти область визначення функції $f(x) = 5\sin x + 4$.
Задача 28. Знайти область визначення функції $f(x) = 5|\sin x| + 4$.

Задача 29. Знайти область визначення функції $f(x) = 8\arcsin\dfrac{x}{5}$.

Задача 30. Знайти область визначення функції $f(x) = 5\arccos 3x$.

Задача 31. Знайти область визначення функції $f(x) = 8\operatorname{tg}\dfrac{x}{3}$.

Задача 32. Знайти область визначення функції $f(x) = 8\operatorname{arctg}(x+1)$.

Задача 33. Перевірити на парність або непарність функцію
$f(x) = 5\arccos^4 x$.
Задача 34. Перевірити на парність або непарність функцію
$f(x) = 5\arcsin^4 x$.
Задача 35. Перевірити на парність або непарність функцію
$f(x) = 5\arcsin^3 x$.
Задача 36. Перевірити на парність або непарність функцію
$f(x) = 5\arcsin|x|$.

Задача 37. Перевірити на парність або непарність функцію $f(x) = 5|\arcsin x|$.

Задача 38. Перевірити на парність або непарність функцію $f(x) = 5|\arcsin|x||$.

Задача 39. Перевірити на парність або непарність функцію $f(x) = 5\ln^7 x$.

Задача 40. Перевірити на парність або непарність функцію $f(x) = 5\ln|x|$.

Задача 41. Перевірити на парність або непарність функцію $f(x) = 5|\ln x|$.

Задача 42. Перевірити на парність або непарність функцію

$$f(x) = 9x^8 + \frac{5\sin^3 x\cos^3 2x}{\sin^7 x} + 16.$$

Задача 43. Перевірити на парність або непарність функцію

$$f(x) = 9x^7 + \frac{5\sin^4 x\cos^3 2x}{\sin^7 x} + 16x.$$

Задача 44. Знайти основний період функції $f(x) = 6\sin\left(\frac{2}{5}x - 1\right) + 8$, якщо він існує.

Задача 45. Знайти основний період функції $f(x) = 9 - 7\text{tg}\,11x$, якщо він існує.

Задача 46. Знайти основний період функції $f(x) = \text{ctg}\,4x + \text{tg}\,3x + \cos 2x$, якщо він існує.

Задача 47. Знайти основний період функції $f(x) = 5\sin^6 x - 9\cos^4 x$, якщо він існує.

Задача 48. Знайти основний період функції $f(x) = 8^{|\sin 4x|}$, якщо він існує.

Задача 49. Знайти основний період функції $f(x) = \dfrac{\cos x \ \sin x}{\cos 5x \ \sin 3x}$, якщо він існує.

Задача 50. Знайти основний період функції $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$, якщо він існує.

Задача 51. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3 + 4x^2 + 7x - 11}{3x^3 - 5x^2 + x - 7}$.

Задача 52. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^7 + 4x^2 + 7x - 11}{3x^3 - 5x^2 + x - 7}$.

Задача 53. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3 + 4x^2 + 7x - 11}{3x^6 - 5x^2 + x - 7}$.

Задача 54. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{6 + x^2} + \sqrt{4x + 8}}{\sqrt[7]{9x^5 + 11}}$.

Задача 55. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+3} - \sqrt{x+4}\right)$.

Задача 56. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4x^3+3x^2-3x-4}{4x^3-3x^2+9x-10}$.

Задача 57. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3+3x^2-3x-4}{4x^3-3x^2+9x-10}$.

Задача 58. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^3+3x^2-3x-4}{4x^3-3x^2+9x-10}$.

Задача 59. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^3+3x^2-3x-4}{4x^3-3x^2+9x-10}$.

Задача 60. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{4x+14}-\sqrt{12+3x}}{\sqrt{20x+47}-\sqrt{3-2x}}$.

Задача 61. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{3x+4}-\sqrt{8+2x}}{x^2-9x+20}$.

Задача 62. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\ \cos 2x\ \operatorname{tg} 5x}{\arcsin 6x\ \arccos 7x\ \operatorname{actg} 8x}$.

Задача 63. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4\arccos 8x}{(1-\cos 12x)\left(1-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-4x\right)\right)}$.

Задача 64. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to \varphi}\dfrac{x-4}{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg}\varphi}$.

Задача 65. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{7}\right)-2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{7}\right)+\sin\dfrac{\pi}{7}}{x^2}$.

Задача 66. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 x}{\operatorname{tg} x-\sin x}$.

Задача 67. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

Задача 68. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}$.

Задача 69. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$.

Задача 70. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

Задача 71. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$.

Задача 72. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\ln\left(x+1\right)-\ln x\right)$.

Задача 73. Знайти границю функції

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\cos x\right)}{\operatorname{tg}\left(x^2\right)}$$

за допомогою порівняння нескінченно малих функцій.

Задача 74. Знайти границю функції

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\left(\ln\left(\frac{x}{2}+1\right)-\ln\frac{x}{2}\right)\right)$$

за допомогою порівняння нескінченно малих функцій.

Задача 75. Знайти інтервали неперервності функції $f(x)=\dfrac{x+4}{x^2-9x+8}$.

Задача 76. Знайти точки розриву функції

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{якщо } -\infty<x\le -3;\\ 5, & \text{якщо } -3<x\le 0;\\ \dfrac{1}{x}, & \text{якщо } 0<x<+\infty\end{cases}$$

та визначити, до якого типу вони належать.

Задача 77. Знайти точки розриву функції $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x-3}}$ та визначити їх тип.

Задача 78. Знайти точки розриву функції $f(x)=\dfrac{4^{\frac{1}{x^2}}}{x+7}$ та визначити їх тип.

Задача 79. Знайти точки розриву функції $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ та визначити їх тип.

Задача 80. Знайти точки розриву функції $f(x)=\dfrac{x}{\sin x}$ та визначити їх тип.

Задача 81. У коло радіуса R вписано правильний n-кутник. За умови, що його периметр P_n визначається за формулою $P_n=2nR\sin\dfrac{\pi}{n}$, а площа S_n – за формулою $S_n=\dfrac{1}{2}nR^2\sin\dfrac{2\pi}{n}$, довести, що довжина кола C визначається за формулою $C=2\pi R$, а площа S круга, обмеженого цим колом, – за формулою $S=\pi R^2$.

Задача 82. Побудувати графіки функцій $f(t)$ та $|S(\omega)|$, які задають відповідно імпульс та його спектр:

1) прямокутний імпульс

$$f(t)=\begin{cases}0, & |t|>\dfrac{\tau}{2};\\ h, & |t|\le\dfrac{\tau}{2};\end{cases} \qquad S(\omega)=\frac{2h}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2}.$$

2) експоненційний імпульс

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ B\mathrm{e}^{-\beta t}, & t\ge 0;\end{cases} \qquad S(\omega)=\frac{B}{\sqrt{\beta^2+\omega^2}}.$$

3) одиничний імпульс

$$\sigma(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ 1, & t\ge 0;\end{cases} \qquad S(\omega)=\frac{1}{\omega}.$$

4) дзвоноподібний імпульс

$$f(t)=\mathrm{e}^{-\beta^2t^2}; \qquad S(\omega)=\frac{\sqrt{\pi}}{\beta}\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4\beta^2}}.$$

5) хвильовий цуг

$$f(t)=\begin{cases}h\sin\omega_0 t, & |t|\le\dfrac{\pi}{\omega_0};\\ 0, & |t|>\dfrac{\pi}{\omega_0};\end{cases} \qquad S(\omega)=\frac{2h}{\omega_0^2-\omega^2}\sin\frac{\pi\omega}{\omega_0}.$$

6)

$$f(t)=\begin{cases}\cos\pi t, & |t|\le\dfrac{1}{2};\\ 0, & |t|>\dfrac{1}{2};\end{cases} \qquad S(\omega)=\frac{2\cos\pi\omega}{\pi\left(1-4\omega^2\right)}.$$

7) трикутний імпульс

$$f(t)=\begin{cases}1+t, & -1\le t<0;\\ 1-t, & 0\le t\le 1;\\ 0, & |t|>1;\end{cases} \qquad S(\omega)=\frac{\sin^2\pi\omega}{\pi\omega^2}.$$

8) Прямокутний імпульс

$$f(t)=\begin{cases}2, & 0\le t\le 2;\\ 0, & t\in(-\infty,0)\cup(2,\infty);\end{cases}\qquad S(\omega)=\frac{2\sin 2\pi\omega}{\pi\omega}.$$

9) трапецеїдальний імпульс

$$f(t)=\begin{cases}t+2{,}5, & -2{,}5\le t\le -1{,}5;\\ 1, & -1{,}5\le t\le 1{,}5;\\ 2.5-t, & 1{,}5\le t\le 2{,}5;\\ 0, & |t|>2{,}5;\end{cases}\qquad S(\omega)=\frac{4\sin 2\omega\,\sin\frac{\omega}{2}}{\omega^2}.$$

10)

$$f(t)=\begin{cases}1, & 0<t\le 1;\\ 0, & t\in(-\infty,0]\cup(1,\infty);\end{cases}\qquad S(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{\omega}\sin\frac{\omega}{2}\,e^{-\frac{j\omega}{2}}.$$

Задача 83. Динамічна самоіндукція антени при подовженні хвилі здобувається за формулою

$$L=L_0\,\frac{\lambda}{2\pi l}\,\mathrm{tg}\frac{\pi l}{\lambda},$$

де L_0 − статистична самоіндукція; l − чинна довжина антени; λ − довжина хвилі. Знайти $\lim\limits_{\lambda\to\infty}L$, якщо $L_0=\lim\limits_{x\to\infty}N^{\frac{x}{2x+N}}$, де N – деяке задане число, $N>1$.

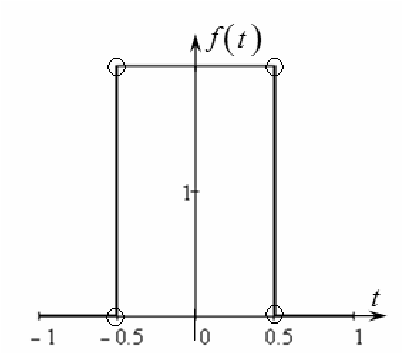
Задача 84. В теорії лампових генераторів доводиться, що коефіцієнт ς корисної дії генератора визначається формулою $\varsigma=\xi\,\dfrac{2\theta-\sin 2\theta}{4(\sin\theta-\theta\cos\theta)}$, де ξ − коефіцієнт використовування напруги. Знайти $\lim\limits_{\theta\to0}\varsigma$, якщо $\xi=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^N-1}{x^{2N-1}-1}$, де N – деяке задане число, $N>1$.

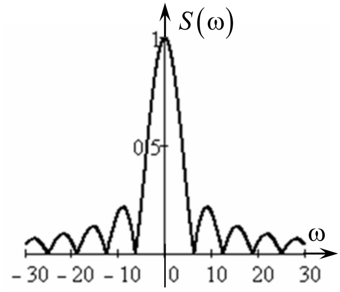
ВІДПОВІДІ ДО ЗАДАЧ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Задача 1. $\frac{137}{481}$. **Задача 9.** Послідовність $\{\sigma_n\}$ називається нескінченно великою, якщо для будь-якого як завгодно великого додатного числа M існує такий номер $N = N(\varepsilon)$, що для усіх елементів послідовності з номером $n > N$ виконується нерівність $|\sigma_n| > M_0$. **Задача 12.** $\frac{5}{6}$. **Задача 13.** ∞. **Задача 14.** 0. **Задача 15.** ∞. **Задача 16.** e^7. **Задача 17.** e^8. **Задача 18.** $x \in (-\infty, 1) \cup (1, 7) \cup (7, +\infty)$. **Задача 19.**
$x \in (-\infty, 1] \cup [7, +\infty)$. **Задача 20.** $x \in [1, 7]$. **Задача 21.** $x \in (1, 7)$. **Задача 22.** $x \in (-\infty, 1) \cup (7, +\infty)$. **Задача 23.** $x \in (1, 7)$. **Задача 24.** $x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$. **Задача 25.** $x \in \{-5, -\pi) \cup (-\pi, 0) \cup (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi) \cup (2\pi, 7]$. **Задача 26.** $x \in (-\infty, +\infty)$.
Задача 27. $y \in [-1, 9]$. **Задача 28.** $y \in [4, 9]$. **Задача 29.** $y \in [-4\pi, 4\pi]$. **Задача 30.** $y \in [0, 5\pi]$. **Задача 31.** $y \in (-\infty, +\infty)$. **Задача 32.** $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. **Задача 33.** Функція не є парною, не є непарною. **Задача 34.** Функція є парною. **Задача 35.** Функція є непарною. **Задача 36.** Функція є парною. **Задача 37.** Функція є парною. **Задача 38.** Функція є парною. **Задача 39.** Функція не є парною, не є непарною. **Задача 40.** Функція є парною. **Задача 41.** Функція не є парною, не є непарною. **Задача 42.** Функція є парною. **Задача 43.** Функція є непарною. **Задача 44.** $T = 5\pi$. **Задача 45.** $T = 11\pi$. **Задача 46.** $T = \pi$. **Задача 47.** $T = \pi$. **Задача 48.** $T = \frac{\pi}{2}$. **Задача 49.** $T = \pi$. **Задача 50.** Функція є неперіодичною. **Задача 51.** $\frac{2}{3}$. **Задача 52.** ∞. **Задача 53.** 0. **Задача 54.** 0. **Задача 55.** 0. **Задача 56.** $\frac{1}{4}$. **Задача 57.** $\frac{2}{5}$. **Задача 58.** 1. **Задача 59.** 1. **Задача 60.** $\frac{\sqrt{42}}{108}$. **Задача 61.** $-\frac{1}{8}$. **Задача 62.** $\frac{5}{24\pi}$. **Задача 63.** $\frac{\pi}{288}$. **Задача 64.** $\cos^2\varphi$. **Задача 65.** $-\sin\frac{\pi}{7}$. **Задача 66.** 2. **Задача 67.** $\frac{2}{\pi}$. **Задача 68.** 0. **Задача 69.** 1. **Задача 70.** 1. **Задача 71.** $\frac{1}{e^2}$. **Задача 72.** 1. **Задача 73.** $-\frac{1}{2}$. **Задача 74.** 2. **Задача 75.** $x \in (-\infty, 1) \cup (1, 8) \cup (8, +\infty)$.
Задача 76. $x = -3$ – точка розриву I роду; $x = 0$ – точка розриву II роду. **Задача 77.** $x = 3$ – точка розриву II роду. **Задача 78** $x = 0$ та $x = -7$ – точки розриву II роду. **Задача 79.** $x = 0$ – точка розриву II роду. **Задача 80.** $x = \pi n$, де $n \in Z$ – точки розриву II роду.

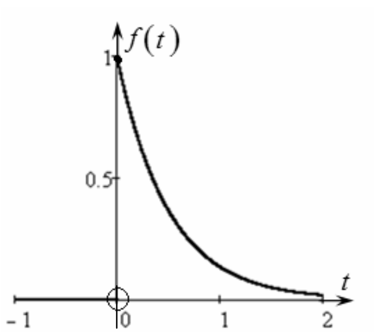
Задача 82.

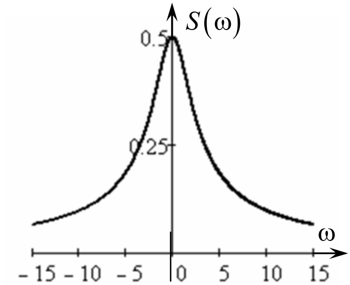
1) $h = 2$, $\tau = 1$



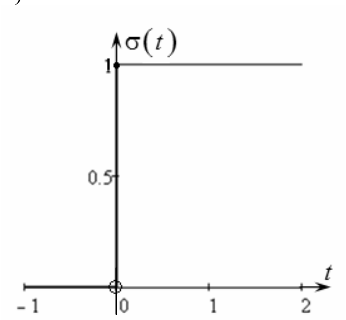


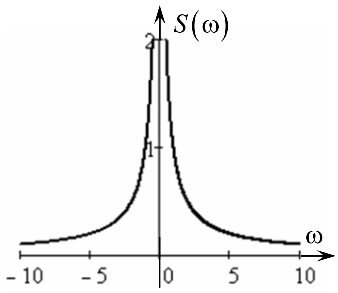
2) $B = 1$, $\beta = 2$



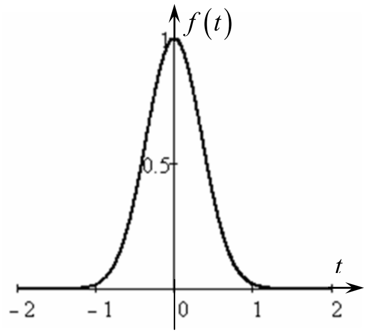


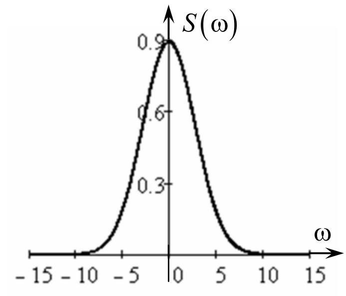
3)



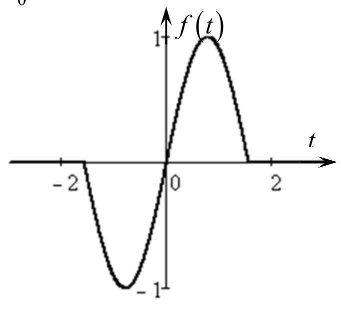


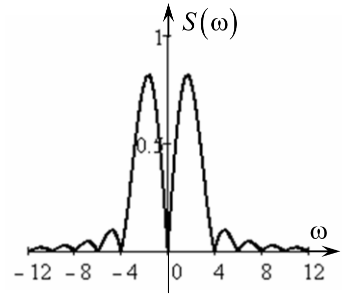
4) $\beta = 2$



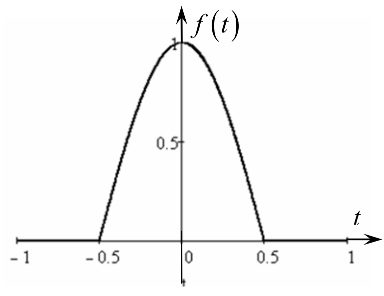


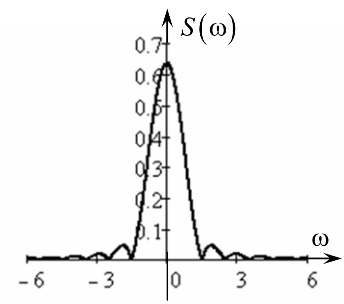
5) $h = 1$, $\omega_0 = 2$



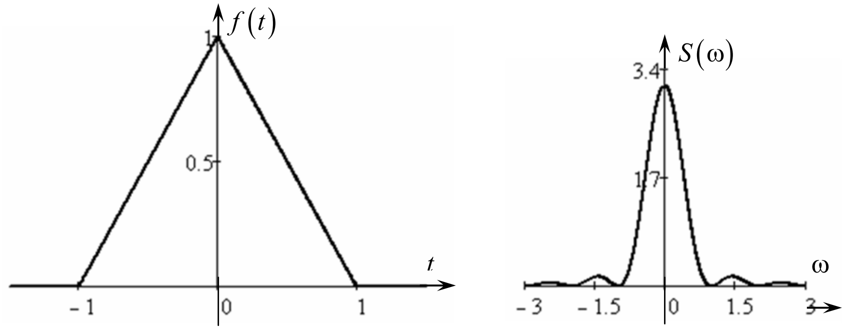


6) $h = 1$

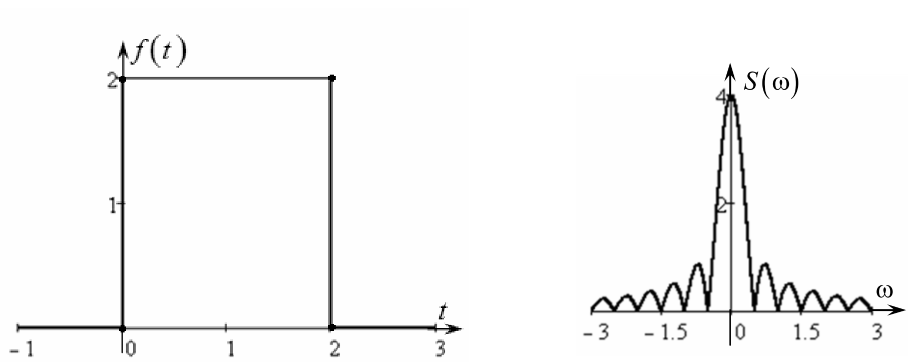




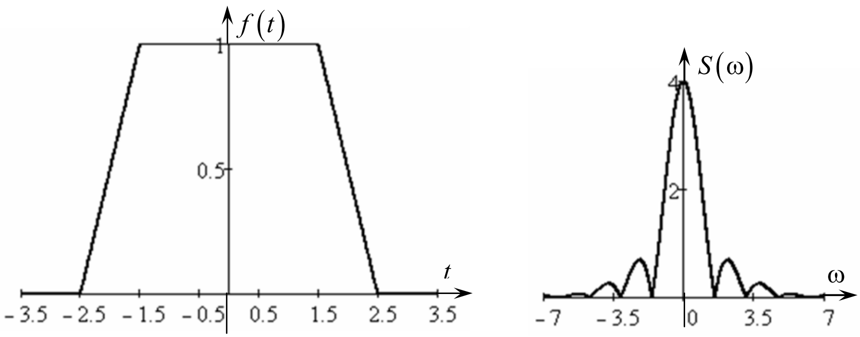
7)


f(t)
1
0.5
t
– 1
0
1
S(ω)
3.4
1.7
ω
– 3
– 1.5
0
1.5
3

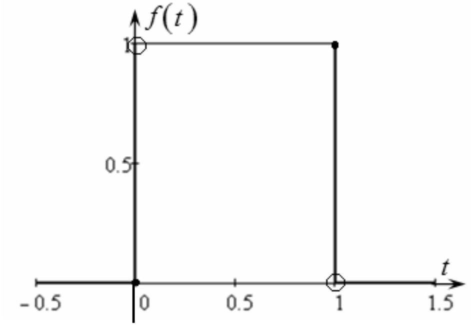
8)

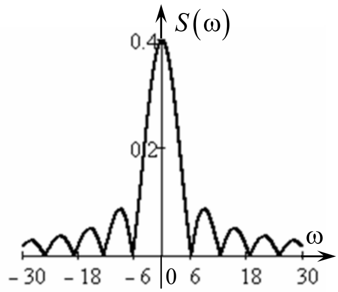

f(t)
2
1
t
– 1
0
1
2
3
S(ω)
4
2
ω
– 3
– 1.5
0
1.5
3

9)


f(t)
1
0.5
t
– 3.5
– 2.5
– 1.5
– 0.5
0.5
1.5
2.5
3.5
S(ω)
4
2
ω
– 7
– 3.5
0
3.5
7

10)





Задача 83. $\frac{\sqrt{N}}{2}$. **Задача 84.** $\frac{N}{2N-1}$.

Р о з д і л II

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Г л а в а 1

ПОХІДНІ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛИ ФУНКЦІЙ

1.1 Похідна функції, її геометричний та фізичний зміст

1.1.1 Поняття похідної функції

Нехай функцію $y = f(x)$ визначено в інтервалі (a, b), що містить точку x, а також точку $x + \Delta x$, де Δx – приріст аргументу x.

В и з н а ч е н н я. Якщо існує границя відношення приросту Δy функції $y = f(x)$ у точці x до приросту Δx аргументу x за умови, що приріст аргументу прямує до нуля, то ця границя називається ***похідною функції*** $y = f(x)$ у точці x. При цьому використовуються позначення:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{або} \quad y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

де $\Delta y = f\left(x + \Delta x\right) - f\left(x\right)$.

ЗАУВАЖЕННЯ. Символи y' та $f'\left(x\right)$ називаються ***символами Лагранжа***. Нарівні з цими символами для позначення похідної використовуються символи $\dfrac{dy}{dx}$ та $\dfrac{df\left(x\right)}{dx}$, називані ***символами Лейбніца***. У механіці, в теорії коливань, де аргументом функції є час, для позначення похідної використовують ***символи Ньютона***: $\dot{y}$, $\dot{f}\left(t\right)$.

1.1.2 Однобічні похідні

Як зазначалось у розділі I, існують такі поняття, як границя функції у певній точці, а також лівобічна границя функції у певній точці та правобічна границя. Аналогічно, при знаходженні похідної може статися так, що існує границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли $\Delta x \to 0$, а може статися, що існує лише лівобічна $\left(\Delta x \to -0\right)$ або лише правобічна $\left(\Delta x \to +0\right)$ границя цього відношення.

В и з н а ч е н н я. ***Лівобічною похідною функції*** $y = f(x)$ у точці x називається лівобічна границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли $\Delta x \to -0$, а ***правобічною похідною функції*** $y = f(x)$ у точці x – правобічна границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли $\Delta x \to +0$.

При цьому використовуються позначення:

$$f'(x-0)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{або} \quad f'_{-}(x)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x};$$

$$f'(x+0)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{або} \quad f'_{+}(x)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

ЗАУВАЖЕННЯ. Якщо функція $y=f(x)$, що визначена у точці x_0 та деякому її околі, у точці x_0 має рівні між собою однобічні похідні, то тоді у точці x_0 існує похідна $f'(x_0)$ і при цьому $f'(x_0-0)=f'(x_0+0)=f'(x_0)$. Якщо функція $f(x)$ у точці x_0 має похідну $f'(x_0)$, то тоді існують і однобічні похідні $f'(x_0-0)$, $f'(x_0+0)$ і при цьому $f'(x_0-0)=f'(x_0+0)=$ $=f'(x_0)$.

Якщо ж у точці x_0 існують односторонні похідні, але $f'(x_0-0)\neq f'(x_0+0)$, то у точці x_0 похідна $f'(x_0)$ не існує.

Приміром, покажемо, що функція $f(x)=|x|$ у точці $x=0$ не має похідної.

Функцію визначено на всій числовій осі. Значенню аргументу $x=0$ надамо приріст Δx. Знайдемо відповідний приріст Δy функції $f(x)=|x|$. Оскільки $f(x+\Delta x)=|x+\Delta x|$, то $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=|x+\Delta x|-|x|$.

У точці $x=0$ маємо: $\Delta y=f(0+\Delta x)-f(0)=|\Delta x|$.

Так як

$$f'(-0)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1,\ f'(+0)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=-1, \text{ але}$$

$f'(-0)\neq f'(+0)$, то похідна $f'(0)$ не існує.

1.1.3 Нескінченні похідні

Похідною функції $y=f(x)$ називається границя функції $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, коли $\Delta x\to 0$. Відомо, що границі функцій бувають як скінченними, так і нескінченними.

Якщо $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-\infty$ або $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=+\infty$, або $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\infty$, то похідна $f'(x)$ у такому разі називається відповідно ***нескінченною від'ємною похідною*** або ***нескінченною додатною похідною***, або ***нескінченною похідною***.

Серед нескінченних похідних можуть бути лівобічні та правобічні нескінченні похідні.

Приміром, розглянемо функцію $f(x)=\sqrt{x-1}$, визначену за $x\geq 1$. Знайдемо похідну $f'(x)$, користуючись визначенням похідної.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x-1}-\sqrt{x-1}}{\Delta x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x-1}-\sqrt{x-1}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x+\Delta x-1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+\Delta x-1}+\sqrt{x-1}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x+\Delta x-1}\right)^2-\left(\sqrt{x-1}\right)^2}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x-1}+\sqrt{x-1}\right)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x+\Delta x-1-x+1}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x-1}+\sqrt{x-1}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x-1}+\sqrt{x-1}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}.$$

Похідну $f'(x)$ визначено за $x > 1$, тобто за $x \to 1 + 0$ можна розглядати лише правобічну похідну $f'(1+0) = +\infty$. Отже, у точці $x = 1$ задана функція має нескінченну додатну правобічну похідну.

1.1.4 Геометричний зміст похідної

В и з н а ч е н н я. ***Дотичною*** M_0T до графіка функції $y = f(x)$ у точці x_0 називається граничне положення січної M_0M, якщо точка $M(x, y)$, неперервно переміщуючись по графіку функції, необмежено наближається до точки $M_0(x_0, y_0)$ (рис. 2.1).

Теорема. Якщо значення похідної $f'(x)$ функції $y = f(x)$ у точці x_0 дорівнює $f'(x_0)$, то пряма, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ з кутовим коефіцієнтом $f'(x_0)$, є дотичною до графіка функції $y = f(x)$ у точці $M_0(x_0, y_0)$, де $y_0 = f(x_0)$.

Д о в е д е н н я

Нехай точки $M_0(x_0, y_0)$ та $M(x, y)$ належать до графіка функції $y = f(x)$ (рис. 2.2). З точки M_0 проводимо відрізок M_0R паралельно осі Ox, а з точки M – відрізок MR паралельно осі Oy.

Розглянемо прямокутний трикутник M_0RM. Позначимо його катети: $M_0R = x - x_0 = \Delta x$; $MR = y - y_0 = \Delta y$.

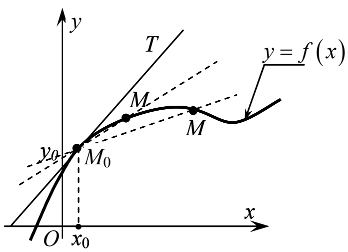


Рисунок 2.1

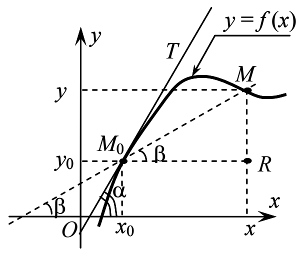


Рисунок 2.2

Пряма M_0M є січною графіка функції $y = f(x)$. Позначимо її кут між додатним напрямком осі Ox через β. Тоді і $\angle MM_0R = \beta$. Кутовий коефіцієнт січної

$$k_{\text{січн}} = \operatorname{tg}\beta = \frac{MR}{M_0R} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Припустимо, що $\Delta x \to 0$. У цьому випадку точка $M(x, y)$ починає неперервно переміщуватись по графіку функції $y = f(x)$, необмежено наближаючись до точки M_0. Коли точка M збігається з точкою M_0, січна M_0M переходить у дотичну M_0T. Кут нахилу до додатного напрямку осі Ox дотичної позначимо через α. Зрозуміло, що $k_{\text{дот}} = \operatorname{tg}\alpha = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'\left(x_0\right)$.

Рівняння дотичної до графіка неперервної функції $y = f(x)$ у точці x_0 має вигляд

$$y - f\left(x_0\right) = f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right). \tag{2.1}$$

Дійсно, дотична проходить через точку $M_0\left(x_0, y_0\right)$ і має кутовий коефіцієнт $k = f'\left(x_0\right)$. Рівняння (2.1) виходить з рівняння прямої, що проходить через дану точку із заданим кутовим коефіцієнтом:

$$y - y_0 = k\left(x - x_0\right). \tag{2.2}$$

В и з н а ч е н н я. ***Нормаллю*** до графіка функції $y = f(x)$ у точці $M_0\left(x_0, y_0\right)$ називається пряма, що проходить через точку $M_0\left(x_0, y_0\right)$ перпендикулярно до дотичної, проведеної до графіка функції у цій точці.

Оскільки нормаль та дотична є перпендикулярні, то їхні кутові коефіцієнти, як відомо, задовольняють умову

$$k_{\text{норм}} = -\frac{1}{k_{\text{дот}}}.$$

Знов користуючись рівнянням (2.2), дістанемо рівняння нормалі у вигляді

$$y - f\left(x_0\right) = -\frac{1}{f'\left(x_0\right)}\left(x - x_0\right). \tag{2.3}$$

Якщо у точці x_0 існують однобічні похідні $f'(x_0 - 0)$, $f'(x_0 + 0)$ та $f'(x_0 - 0) \neq f'(x_0 + 0)$, то у точці x_0 існує дві дотичні до графіка функції, одна з яких має кутовий коефіцієнт $f'(x_0 - 0)$, а друга − $f'(x_0 + 0)$. Лівобічна та правобічна дотичні утворюють між собою кут з вершиною у точці $M_0\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$, а точка M_0 називається ***кутовою точкою*** графіка функції.

Розглянемо випадок, коли функція $y = f(x)$ є неперервна у точці x_0, а

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)}{\Delta x} = \infty.$$

Така функція у точці $M_0(x_0, f(x_0))$ має дотичну, рівняння якої $x = x_0$, та нормаль з рівнянням $y = y_0$. При цьому графік функції в околі точки x_0 схематично може бути зображено так, як на рисунку 2.3 а), б), в), г).

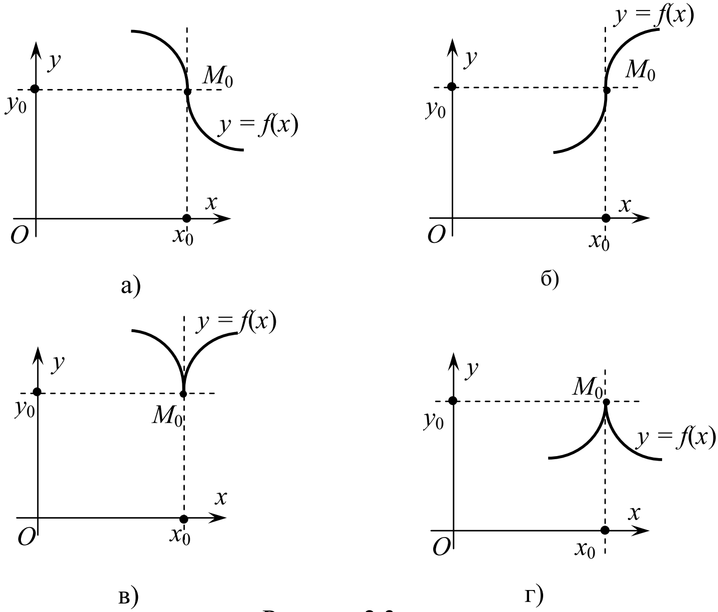


Рисунок 2.3

Нехай тепер функцію задано у полярній системі координат: $\rho = f(\varphi)$. Розглянемо геометричний зміст похідної $\rho' = f'(\varphi)$.

Теорема. Значення похідної $\rho' = f'(\varphi)$ у точці $M_0(\rho_0, \varphi_0)$ дорівнює величині полярного радіуса ρ_0, що відповідає точці M_0, помноженій на $\mathrm{ctg}\,\theta$, де θ − кут між променем $\varphi = \varphi_0$ та дотичною до графіка функції $\rho = f(\varphi)$ з точкою дотику $M_0(\rho_0, \varphi_0)$ (рис. 2.4), тобто $\rho'(\varphi_0) = \rho_0 \mathrm{ctg}\,\theta$.

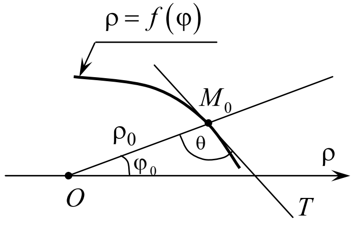


Рисунок 2.4

Приймемо цю теорему без доведення.

1.1.5 Фізичний зміст похідної

Нехай функція $S = S(t)$ визначає шлях *S*, який пройшло тіло впродовж часу *t*. Оберемо деяке значення аргументу *t* та надамо йому приріст Δt. Тоді функція *S* дістане приріст ΔS. Це надає можливість знайти середню швидкість $V_{\text{сер}}$ руху впродовж часу Δt:

$$V_{\text{сер}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Якщо припустити, що $\Delta t \to 0$, то можна визначити швидкість руху саме в момент часу *t*, тобто ***миттєву швидкість***. Отже, можна зробити висновок, що миттєва швидкість $V(t)$ руху тіла у момент часу *t* дорівнює границі, до якої прямує середня швидкість руху тіла в інтервалі $(t,\, t + \Delta t)$, коли $\Delta t \to 0$, тобто

$$V(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t). \tag{2.4}$$

Аналогічно можна навести чимало інших трактувань похідної.

Похідна функції $V(t)$, що являє собою миттєву швидкість руху тіла у момент часу *t*, дорівнює дотичному ***прискоренню***, з яким тіло рухається у момент часу *t*, тобто

$$a(t) = V'(t). \tag{2.5}$$

Якщо $W(\theta)$ – функція, що визначає кількість тепла залежно від температури θ, то похідна функції $W(\theta)$ є ***теплоємністю***, тобто

$$C(\theta) = W'(\theta). \tag{2.6}$$

Якщо функція $Q(t)$ визначає кількість електрики у момент часу *t*, то похідна функції $Q(t)$ являє собою ***силу електричного струму*** $I(t)$ у момент часу *t*, тобто

$$I(t) = Q'(t).$$

Взагалі, якщо функція $y = f(x)$ описує певні фізичні, хімічні, біологічні і т. п. процеси, то похідна $f'(x)$ описує швидкість, з якою змінюються ці процеси у точці *x*.

Приклади до пункту 1.1

Приклад 2.1. Користуючись визначенням похідної, знайти похідну та обчислити $f'(5)$, якщо $f(x) = 5x^2 - 3x + 4$.

Р о з в ’ я з а н н я

Областю визначення функції $f(x)$ є проміжок (–∞, +∞).

Нехай *x* – будь-яке значення з інтервалу (–∞, +∞). Надамо аргументу *x* приріст Δx і знайдемо відповідний приріст Δy функції $f(x) = 5x^2 - 3x + 4$.

Тоді $f\left(x+\Delta x\right)=5\left(x+\Delta x\right)^2-3\left(x+\Delta x\right)+4=5x^2+10x\Delta x+5\left(\Delta x\right)^2-3x-3\Delta x+4.$

$\Delta y=f\left(x+\Delta x\right)-f(x)=10x\,\Delta x+5\left(\Delta x\right)^2-3\Delta x$, тобто $\Delta y=\left(10x+5\Delta x-3\right)\Delta x$.

Розглянемо границю відношення

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(10x+5\Delta x-3\right)\Delta x}{\Delta x}=10x-3.$$

Отже, $f'(x)=10x-3$. Тоді $f'\left(5\right)=47$.

В і д п о в і д ь: $f'\left(5\right)=47$.

Приклад 2.2 З'ясувати, чи має похідну функція $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ у точці $x=0$.

Р о з в ' я з а н н я

Оскільки $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$, $f\left(x+\Delta x\right)=\left(x+\Delta x\right)\sin\frac{1}{x+\Delta x}$, то приріст функції буде таким: $\Delta y=f\left(x+\Delta x\right)-f(x)=\left(x+\Delta x\right)\sin\frac{1}{x+\Delta x}-x\sin\frac{1}{x}$.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(x+\Delta x\right)\sin\frac{1}{x+\Delta x}-x\sin\frac{1}{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x+\Delta x}-x\sin\frac{1}{x}+\Delta x\sin\frac{1}{x+\Delta x}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\cos\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+\Delta x}+\frac{1}{x}\right)\right)\sin\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}\right)\right)+\Delta x\sin\frac{1}{x+\Delta x}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2x\cos\frac{2x+\Delta x}{2x\left(x+\Delta x\right)}\cdot\sin\frac{\Delta x}{2x\left(x+\Delta x\right)}+\Delta x\sin\frac{1}{x+\Delta x}}{\Delta x}=$$

$$=-2x\lim_{\Delta x\to 0}\cos\frac{2x+\Delta x}{2x\left(x+\Delta x\right)}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2x(x+\Delta x)}}{\frac{\Delta x}{2x(x+\Delta x)}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{2x\left(x+\Delta x\right)}+\lim_{\Delta x\to 0}\sin\frac{1}{x+\Delta x}=$$

$$=-2x\left(\cos\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{2x^2}+\sin\frac{1}{x}=-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}=\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}.$$

Отже, похідна існує для будь-яких $x\in\left(-\infty;0\right)\cup\left(0;+\infty\right)$. У точці $x=0$ похідна не існує.

В і д п о в і д ь: похідна функції у точці $x=0$ не існує.

Приклад 2.3. З'ясувати, чи існує похідна функції $f(x)=\sqrt[5]{x}$ у точці $x = 0$.

Р о з в ' я з а н н я

$$f(x)=\sqrt[5]{x}\,;\quad f\left(x+\Delta x\right)=\sqrt[5]{x+\Delta x}\,;\quad \Delta y=f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)=\sqrt[5]{x+\Delta x}-\sqrt[5]{x}\,.$$

Якщо $x = 0$, то $\Delta y=\sqrt[5]{\Delta x}$. Тоді $f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{\Delta x}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\left(\Delta x\right)^{4/5}}=\infty$.

Отже, задана функція у точці $x = 0$ має нескінченну похідну.

В і д п о в і д ь: похідна у точці $x = 0$ є нескінченною.

Приклад 2.4. З'ясувати, чи існує похідна функції $f(x)=\sqrt[5]{x^2}$ у точці $x = 0$.

Р о з в ' я з а н н я

$$f(x)=\sqrt[5]{x^2}\,;\ f\left(x+\Delta x\right)=\sqrt[5]{\left(x+\Delta x\right)^2}\,;\ \Delta y=f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)=\sqrt[5]{\left(x+\Delta x\right)^2}-\sqrt[5]{x^2}\,.$$

Якщо $x = 0$, то $\Delta y=\sqrt[5]{\left(\Delta x\right)^2}$, тоді $f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{\left(\Delta x\right)^2}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt[5]{\left(\Delta x\right)^3}}$.

Така границя залежить від знака Δx. Отже, слід розглядати два випадки, що приводять до однобічних похідних:

$$f'\left(-0\right)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{1}{\sqrt[5]{\left(\Delta x\right)^3}}=-\infty \quad \text{та} \quad f'\left(+0\right)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{1}{\sqrt[5]{\left(\Delta x\right)^3}}=+\infty.$$

В і д п о в і д ь: у точці $x = 0$ існують лише однобічні нескінченні похідні.

Приклад 2.5. Знайти однобічні похідні функції $f(x)=\left|\,\mathrm{tg}\,7x\,\right|$ у точці $x=0$.

Р о з в ' я з а н н я

$$f'(x-0)=-\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\mathrm{tg}\left(7\left(x+\Delta x\right)\right)-\mathrm{tg}\left(7x\right)}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\sin\left(7\Delta x\right)}{\Delta x\cos\left(7\left(x+\Delta x\right)\right)\cos\left(7x\right)}=$$

$$=-\lim_{\Delta x\to -0}\frac{7}{\cos\left(7\left(x+\Delta x\right)\right)\cos\left(7x\right)}\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\sin\left(7\Delta x\right)}{7\Delta x}=-\frac{7}{\cos^2\left(7x\right)};$$

$f'\left(-0\right)=-7;$

$$f'(x+0)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\mathrm{tg}\left(7\left(x+\Delta x\right)\right)-\mathrm{tg}\left(7x\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\sin\left(7\Delta x\right)}{\Delta x\cos\left(7\left(x+\Delta x\right)\right)\cos\left(7x\right)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{7}{\cos\left(7(x+\Delta x)\right)\cos\left(7x\right)}\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\sin\left(7\Delta x\right)}{7\Delta x}=\frac{7}{\cos^2\left(7x\right)};$$

$f'(+0)=7.$

В і д п о в і д ь: $f'(-0)=-7$; $f'(+0)=7$.

Приклад 2.6. Тіло падає за законом $S(t)=\frac{1}{2}gt^2$, де g – прискорення вільного падіння. Знайти:

1) середню швидкість падіння впродовж часу $\Delta t = t_2 - t_1$;

2) миттєву швидкість падіння за $t=0$.

Р о з в ’ я з а н н я

1) Знайдемо середню швидкість падіння тіла впродовж часу $\Delta t = t_2 - t_1$. Тіло падає за законом $S(t)=\frac{1}{2}gt^2$. Надамо аргументу t приріст Δt. Тоді

$$S(t+\Delta t)=\frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2; \qquad \Delta S = S(t+\Delta t)-S(t)=\frac{1}{2}g\left((t+\Delta t)^2-t^2\right);$$

$$\Delta S=\frac{1}{2}g\left(t^2+2t\Delta t+(\Delta t)^2-t^2\right)=\frac{1}{2}g(2t+\Delta t)\Delta t.$$

Середню швидкість падіння впродовж часу Δt знаходимо за формулою

$$V_{\text{сер}}=\frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Отже,

$$V_{\text{сер}}=\frac{\frac{1}{2}g(2t+\Delta t)\Delta t}{\Delta t}=\frac{1}{2}g(2t+\Delta t).$$

2) Знайдемо миттєву швидкість падіння та її значення, коли $t=0$, за формулою:

$$V(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}; \quad V(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{2}g(2t+\Delta t)=gt.$$

Тоді $V(0)=0$, а це означає, що тіло починає рухатись, коли воно перебуває у стані спокою.

В і д п о в і д ь: 1) $V_{\text{сер}}=\frac{1}{2}g(2t+\Delta t)$; 2) $V(0)=0$.

Приклад 2.7. Кількість електрики, що проходить через будь-який переріз провідника, починаючи з деякого початкового моменту, є функцією часу $Q=Q(t)$. Визначити середнє значення струму за проміжок часу Δt, а також величину струму у момент часу t для змінного струму.

Р о з в ’ я з а н н я

Знайдемо приріст функції $Q(t)$: $\Delta Q = Q(t+\Delta t)-Q(t)$. Тоді $I_{\text{сер}}=\frac{\Delta Q}{\Delta t}$.

Значення струму у момент t для змінного струму $I(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta t}=Q'(t)$.

В і д п о в і д ь: $I_{\text{сер}}=\frac{\Delta Q}{\Delta t}$; $I(t)=Q'(t)$.

Приклад 2.8. Знайти однобічні похідні функції $f(x) = |x + 5|$ у точці $x = –3$. З'ясувати, чи існує $f'(–3)$.

Р о з в ' я з а н н я

$$f'(-3-0)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{|-3+\Delta x+5|-|-3+5|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{2+\Delta x-2}{\Delta x}=1;$$

$$f'(-3+0)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{|-3+\Delta x+5|-|-3+5|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{2+\Delta x-2}{\Delta x}=1.$$

Однобічні похідні у точці $x = –3$ існують та збігаються, отже, існує похідна $f'(–3)$.

В і д п о в і д ь: $f'(–3 – 0) = 1$; $f'(–3 + 0) = 1$; $f'(–3) = 1$.

Приклад 2.9. Знайти однобічні похідні функції $f(x) = |x + 3|$ у точці $x = –3$. З'ясувати, чи існує $f'(–3)$.

Р о з в ' я з а н н я

$$f'(-3-0)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{|-3+\Delta x+3|-|-3+3|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1;$$

$$f'(-3+0)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{|-3+\Delta x+3|-|-3+3|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1.$$

Однобічні похідні у точці $x = –3$ існують, але не збігаються, тобто похідна $f'(–3)$ не існує.

В і д п о в і д ь: $f'(–3 – 0) = –1$; $f'(–3 + 0) = 1$; $f'(–3)$ не існує.

1.2 Диференційовність функцій

1.2.1 Поняття диференційовної функції

Нехай функцію $y = f(x)$ визначено у точці x та деякому її околі, що утримує точку $x+\Delta x$.

В и з н а ч е н н я 1. Функція $y = f(x)$ називається ***диференційовною у точці x***, якщо приріст Δy цієї функції, що відповідає приросту аргументу Δx, може бути поданий у вигляді

$$\Delta y = A(x)\Delta x + \alpha(x, \Delta x)\cdot \Delta x, \tag{2.7}$$

де $A(x)$ –не залежить від Δx, а α – така функція аргументу Δx при фіксованому значенні x, що стає нескінченно малою функцією, коли $\Delta x \to 0$, тобто $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(x, \Delta x)=0$.

Оскільки добуток двох нескінченно малих $\alpha(x, \Delta x)$ та Δx є нескінченно малою функцією більш високого порядку малості ніж Δx, то рівність (2.7) можна подати у вигляді

$$\Delta y = A(x)\cdot\Delta x + o(\Delta x). \tag{2.8}$$

В и з н а ч е н н я 2. Функція $y = f(x)$ називається ***диференційовною в інтервалі (a, b)***, якщо вона диференційовна у кожній точці цього інтервалу.

В и з н а ч е н н я 3. Функція $y = f(x)$ називається ***диференційовною на сегменті*** $[a, b]$, якщо вона диференційовна в інтервалі (a, b), у точці a має правобічну похідну та у точці b має лівобічну похідну.

1.2.2 Умови диференційовності функції

Теорема 1 (необхідна умова диференційовності функції). Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна у точці х, то вона є і неперервною у цій точці.

Д о в е д е н н я

Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна у точці x. Тоді є справедливою рівність (2.7)

$$\Delta y = A(x)\Delta x + \alpha(x, \Delta x)\Delta x.$$

Зробимо граничний перехід, якщо $\Delta x \to 0$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left(A(x)\Delta x + \alpha(x, \Delta x)\Delta x \right).$$

Звідси

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} A(x)\Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(x, \Delta x)\Delta x,$$

тобто

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Остання рівність дозволяє, спираючись на визначення неперервної функції, стверджувати, що функція $y = f(x)$ неперервна.

ЗАУВАЖЕННЯ. Наведена теорема є необхідною, але не є достатньою умовою диференційовності функції. З неперервності функції ще не випливавє її диференційовність. Приміром, функція $y = |x|$ неперервна в області визначення, у тому числі і у точці $x = 0$, але не є диференційовною у точці $x = 0$.

Теорема 2 (необхідна та достатня умова диференційовності функції). Для того, щоб функція $y = f(x)$ була диференційовною у точці x, необхідно та достатньо, щоб вона мала у цій точці скінченну похідну.

Д о в е д е н н я

Необхідність. Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна у точці x, тоді $\Delta y = A(x)\Delta x + \alpha(x, \Delta x)\Delta x$. Поділимо обидві частини цієї рівності на $\Delta x \neq 0$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A(x) + \alpha(x, \Delta x).$$

Припустимо, що $\Delta x \to 0$. Тоді

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(A(x) + \alpha(x, \Delta x) \right), \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} A(x) + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(x, \Delta x) = A(x).$$

Звідси

$$f'(x) = A(x).$$

Достатність. Нехай у точці x існує скінченна похідна функції $y = f(x)$:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

З визначення границі функції виходить, що

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x)=\alpha\left(x,\Delta x\right),$$

де $\alpha\left(x,\Delta x\right)$ – нескінченно мала функція, коли $\Delta x\to 0$, тобто $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha\left(x,\Delta x\right)=0$.

Помножимо обидві частини останньої рівності на $\Delta x\neq 0$. Тоді

$$\Delta y=f'(x)\,\Delta x+\alpha\left(x,\Delta x\right)\Delta x\,. \qquad (2.9)$$

Здобутий результат свідчить про те, що функція $y=f\,(x)$ диференційовна у точці x. Роль $A\,(x)$ в умові (2.7) диференційовності функції відіграє $f'(x)$. Надалі умову (2.7) диференційовності функції будемо записувати у формі (2.9).

Доведена теорема дозволяє ототожнювати поняття диференційовності функції з поняттям існування похідної. Через це операцію знаходження похідної функції називають ***диференціюванням*** функції.

1.2.3 Основні теореми про диференційовні функції

Теорема (про похідну складної функції). Якщо функція $u=\varphi(x)$ диференційовна у деякій точці x, а функція $y=f(u)$ – диференційовна у відповідній точці $u=\varphi(x)$, то складна функція $y=f\left(\varphi(x)\right)$ диференційовна у точці x і справедлива формула

$$\left(f\left(u(x)\right)\right)'=f'(u)\,\varphi'(x).$$

Д о в е д е н н я

З диференційовності функції $y=f(u)$ виходить, що

$$\Delta y=f'(u)\Delta u+\alpha\left(u,\Delta u\right)\Delta u, \qquad (2.10)$$

де $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\alpha\left(u,\Delta u\right)=0$.

Обидві частини рівності (2.10) поділимо на $\Delta x\neq 0$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\left(u,\Delta u\right)\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Здійснимо граничний перехід, коли $\Delta x\to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(f'(u)\,\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\left(u,\Delta u\right)\frac{\Delta u}{\Delta x}\right).$$

Отриману рівність можна спростити.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(u)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\alpha(u,\Delta u)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x},\tag{2.11}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\left(f'(u)+\lim_{\Delta x\to 0}\alpha(u,\Delta u)\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Функція $u=\varphi(x)$ диференційовна, а отже, й неперервна. З неперервності функції виходить, що $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta u=0$, тобто якщо $\Delta x\to 0$, то і $\Delta u\to 0$. З того, що $\Delta u\to 0$, виходить, що величина $\alpha(u,\Delta u)$ є нескінченно малою, тобто $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(u,\Delta u)=\lim\limits_{\Delta u\to 0}\alpha(u,\Delta u)=0$. До того ж, з диференційовності функції $u=\varphi(x)$ виходить, що $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}=\varphi'(x)$. Оскільки існують границі у правій частині рівності (2.11), то, вочевидь, існує границя і лівої частини, а саме

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\left(f\left(\varphi(x)\right)\right)'.$$

Остаточно маємо

$$\left(f\left(\varphi(x)\right)\right)'=f'(u)\,\varphi'(x).\tag{2.12}$$

Фізичний зміст похідної складної функції

Функція $u=\varphi(x)$ характеризує швидкість, з якою змінюється функція u відносно змінної *x*. Функція $y=f(u)$ характеризує швидкість, з якою змінюється функція y відносно змінної u. Тоді похідна складної функції $\left(f\left(\varphi(x)\right)\right)'$ дорівнює добутку швидкостей $f'(u)$ та $\varphi'(x)$.

Теорема (про похідну оберненої функції). Якщо функція $y=f(x)$ у точці x та деякому її околі є строго монотонна і неперервна і у точці x має похідну $f'(x)$, що відрізняється від нуля, то у відповідній точці та деякому її околі існує обернена функція $x=f^{-1}(y)$, яка є диференційовною у точці y, а її похідна знаходиться за формулою

$$\left(f^{-1}(y)\right)'=\frac{1}{f'(x)}.$$

Д о в е д е н н я

Оскільки функція $y=f(x)$ у точці *x* та деякому її околі є строго монотонна та неперервна, то така функція, як відомо, має обернену функцію $x=f^{-1}(y)$ у відповідній точці $y=f(x)$ та деякому її околі.

Функція $y=f(x)$ диференційовна у точці *x*, тобто існує границя

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x),$$

яку можна подати у вигляді

$$f'(x) = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta y}}.$$

Оскільки функція $y = f(x)$ диференційовна у точці x, то вона і неперервна у точці x, а отже,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0,$$

тобто якщо $\Delta x \to 0$, то і $\Delta y \to 0$.

Тоді,

$$y' = f'(x) = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\left(f^{-1}(y)\right)'} = \frac{1}{x'},$$

звідки

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)}, \text{ тобто } \quad x'_y = \frac{1}{y'_x}. \tag{2.13}$$

ЗАУВАЖЕННЯ. Нехай функція $y = f(x)$ задовольняє усі вимоги теореми про похідну оберненої функції, за винятком того, що $f'(x)$ може у точці x дорівнювати нулю. Тоді теорема залишається справедливою і при цьому $\left(f^{-1}(y)\right)'$ буде нескінченною похідною.

Геометричний зміст похідної оберненої функції.

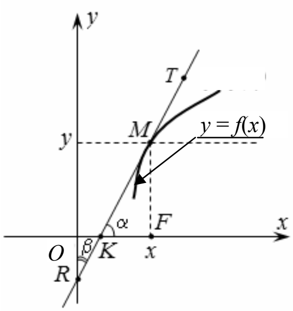


Рисунок 2.5

Нехай точка $M(x,\ y)$ належіть до графіка функції $y = f(x)$, MT – дотична до графіка функції $y = f(x)$ у точці x (рис. 2.5). Дотична MT утворює з додатними напрямками осей Ox та Oy відповідно кути α та β. Кути $\angle MKF$ та $\angle OKR$ є рівні між собою як вертикальні. Кути $\angle OKR$ та $\angle ORK$ у сумі дорівнюють $\frac{\pi}{2}$ як гострі кути прямокутного трикутника, тобто $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, звідки $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$. Тоді $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$ або $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta$ чи $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}$. Функції $y = f(x)$ та $x = f^{-1}(y)$ мають один і той же самий графік, але незалежною змінною у функції $y = f(x)$ є змінна x, а у функції $x = f^{-1}(y)$ є змінна y. Звідси виходить, що кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції

$y = f(x)$ дорівнює $\text{tg}\,\alpha$, де $\alpha = \angle MKF$, а кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $x = f^{-1}(y)$ дорівнює $\text{tg}\,\beta$, де $\beta = \angle ORK$.

Тоді, оскільки $x' = \dfrac{1}{y'}$, то $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{tg}\,\beta}$, де $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$.

Фізичний зміст похідної оберненої функції.

Похідна $y' = f'(x)$ визначає швидкість, з якою змінюється функція y відносно змінної x, а похідна $x' = \left(f^{-1}(y)\right)'$ – швидкість, з якою змінюється функція x відносно змінної y.

Приклади до пункту 1.2

Приклад 2.10. Знайти такі значення α та β, при яких задана функція буде диференційовною:

$$1)\ f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta, & \text{якщо } x < 0; \\ \alpha x^2 + \beta x + 1, & \text{якщо } x \ge 0, \end{cases} \qquad 2)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+\alpha}{e^{\beta x}}, & \text{якщо } x < 0; \\ \alpha x^2 + \beta x + 1, & \text{якщо } x \ge 0. \end{cases}$$

Р о з в ’ я з а н н я

1) а) Нехай $-\infty < x < 0$.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\alpha\left(x + \Delta x\right) + \beta\right) - \left(\alpha x + \beta\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha x + \alpha \Delta x + \beta - \alpha x - \beta}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \Delta x}{\Delta x} = \alpha.$$

Отже, на проміжку $(-\infty, 0)$ функція є диференційовною.

б) Нехай $0 < x < +\infty$.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\alpha\left(x + \Delta x\right)^2 + \beta\left(x + \Delta x\right) + 1\right) - \left(\alpha x^2 + \beta x + 1\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha x^2 + 2\alpha x \Delta x + \alpha\left(\Delta x\right)^2 + \beta x + \beta \Delta x + 1 - \alpha x^2 - \beta x - 1}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\alpha x \Delta x + \alpha\left(\Delta x\right)^2 + \beta \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(2\alpha x + \beta\right) + \alpha \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 2\alpha x + \beta.$$

Отже, і на проміжку $(0, +\infty)$ функція є диференційовною.

в) Нехай $x = 0$.

Оскільки по різні боки точки $x = 0$ функцію задано різними формулами, то треба знайти однобічні похідні у точці $x = 0$.

$$f'(-0)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\left(\alpha\left(0+\Delta x\right)+\beta\right)-\left(\alpha\cdot 0+\beta\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\alpha\Delta x}{\Delta x}=\alpha.$$

$$f'(+0)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\left(\alpha\left(0+\Delta x\right)^2+\beta\left(0+\Delta x\right)+1\right)-\left(\alpha\cdot 0^2+\beta\cdot 0+1\right)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\alpha\left(\Delta x\right)^2+\beta\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to +0}\left(\beta+\alpha\Delta x\right)=\beta.$$

Рівність $f'(-0)=f'(+0)$ виконується лише при $\alpha=\beta$. Тому при $\alpha=\beta$ задана функція буде диференційовна у точці 0.

Оскільки функція є диференційовною у точці $x=0$, коли $\alpha=\beta$, то ця функція у точці $x=0$ має бути і неперервною.

$f(-0)=\beta$, $f(+0)=1$. Отже, $\beta=1$, а тоді і $\alpha=1$.

2) а) Нехай $-\infty<x<0$.

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(x+\Delta x+\alpha\right)e^{-\beta x}e^{-\beta\Delta x}-\left(x+\alpha\right)e^{-\beta x}}{\Delta x}=$$

$$=e^{-\beta x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{xe^{-\beta\Delta x}+\Delta xe^{-\beta\Delta x}+\alpha e^{-\beta\Delta x}-x-\alpha}{\Delta x}=$$

$$=e^{-\beta x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x\left(e^{-\beta\Delta x}-1\right)+\alpha\left(e^{-\beta\Delta x}-1\right)+e^{-\beta\Delta x}\cdot\Delta x}{\Delta x}=$$

$$=e^{-\beta x}\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(e^{-\beta\Delta x}-1\right)(x+\alpha)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{-\beta\Delta x}\cdot\Delta x}{\Delta x}\right)=$$

$$=e^{-\beta x}\left(1+(x+\alpha)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{-\beta\Delta x}-1}{\Delta x}\right)=e^{-\beta x}\left(1-\beta\left(x+\alpha\right)\right).$$

Для знаходження границі була використана формула 1.66 з розділу І.

Отже, на проміжку $-\infty<x<0$ задана функція є диференційовною.

б) Оскільки на проміжку $0<x<+\infty$ задана функція збігається з функцією, що задана у випадку 1), то можна стверджувати, що вона також диференційовна і на цьому проміжку.

$$y'=2\alpha x+\beta.$$

в) Нехай $x=0$.

Оскільки по різні боки точки $x=0$ функцію задано різними формулами, то треба знайти однобічні похідні у точці $x=0$.

$$f'(-0)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{(\Delta x+\alpha)e^{-\beta\Delta x}-\alpha}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{e^{-\beta\Delta x}\Delta x+\alpha\left(e^{-\beta\Delta x}-1\right)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to -0}\left(e^{-\beta\Delta x}-\alpha\beta\frac{e^{-\beta\Delta x}-1}{-\beta\Delta x}\right)=1-\alpha\beta\lim_{-\beta\Delta x\to 0}\left(\frac{e^{-\beta\Delta x}-1}{-\beta\Delta x}\right)=1-\alpha\beta.$$

Знов була використана формула 1.66 з розділу I.

Як було показано у випадку 1) $f'(+0)=\beta.$

У загальному випадку функція диференційовна в усіх точках, за винятком точки $x=0,$ оскільки у цій точці однобічні похідні не збігаються.

З'ясуємо, чи можна підібрати такі значення α та β за яких функція буде диференційовною у точці $x=0.$ У першу чергу перевіримо, чи може бути функція неперервною у точці $x=0.$ Для цього знайдемо однобічні границі функції, коли $x\to 0.$

$$\lim_{x\to -0}\frac{x+\alpha}{e^{\beta x}}=\alpha;\qquad \lim_{x\to +0}\left(\alpha x^2+\beta x+1\right)=1.$$

$\lim\limits_{x\to -0}f(x)=\lim\limits_{x\to +0}f(x)=f(0)=1,$ якщо $\alpha=1.$

Значить, задана функція є неперервною у точці $x=0$, коли $\alpha=1,$ а β може набувати будь-яких значень.

Для диференційовності функції у точці $x=0$ необхідно, щоб у цій точці збігались однобічні похідні, тобто має виконуватись рівність $1-\alpha\beta=\beta.$ Оскільки для забезпечення неперервності заданої функції у точці $x=0$ α має дорівнювати 1, то β має задовольняти умову $1-\beta=\beta,$ звідки $\beta=\dfrac{1}{2}.$

Отже, якщо $\alpha=1,$ $\beta=\dfrac{1}{2},$ то задана функція є неперервною в усій області визначення.

В і д п о в і д ь: 1) $\alpha=\beta=1$; 2) $\alpha=1,$ $\beta=\dfrac{1}{2}$.

Приклад 2.11. Точка $M_0(x_0,\ y_0)$ належить до графіка функції $y=f(x)$.

Дотична, проведена до графіка функції у точці M_0 з віссю *Oy,* утворює кут 30°. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної.

Р о з в ' я з а н н я

З геометричного змісту теореми про похідну оберненої функції виходить, що кутовий коефіцієнт k дотичної можна знайти як

$$k=\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}=\frac{1}{\operatorname{tg}30^\circ}=\sqrt{3}.$$

В і д п о в і д ь: $\sqrt{3}$.

1.3 Основні правила диференціювання

1.3.1 Похідна функції $y = c$, де c – const

Нехай задано функцію $y = c$, де c – const. Знайдемо похідну цієї функції. Оскільки стала c не змінюється за будь-якого значення x, то $\Delta y \equiv 0$ яким би не було Δx. Тоді

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

Отже,

$$(c)' = 0. \tag{2.14}$$

1.3.2 Похідна функції $y = x$

Нехай задано функцію $y = x$. Знайдемо похідну цієї функції. Маємо $y = x$; приріст функції $\Delta y = \Delta x.$ Тоді

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Отже,

$$(x)' = 1. \tag{2.15}$$

1.3.3 Похідна суми та різниці функцій

Нехай $u(x)$ та $v(x)$– диференційовні функції. Знайдемо похідну функції $y = u(x) \pm v(x)$. Аргументу x надамо приріст Δx. Приріст функції y має вигляд

$$\Delta y = \big(u(x + \Delta x) \pm v(x + \Delta x)\big) - \big(u(x) \pm v(x)\big),$$
$$\Delta y = \big(u(x + \Delta x) - u(x)\big) \pm \big(v(x + \Delta x) - v(x)\big),$$
$$\Delta y = \Delta u \pm \Delta v.$$

Тоді

$$\big(u(x) \pm v(x)\big)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u \pm \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u'(x) \pm v'(x).$$

Дістали формулу

$$\big(u(x) \pm v(x)\big)' = u'(x) \pm v'(x). \tag{2.16}$$

1.3.4 Похідна добутку двох функцій

Нехай $u(x)$ та $v(x)$ – диференційовні функції. Знайдемо похідну функції $y = u(x)\, v(x)$. Аргументу x надамо приріст Δx. Тоді приріст функції має вигляд

$$\Delta y = u(x+\Delta x)\, v(x+\Delta x) - u(x)\, v(x).$$

Запишемо Δy у вигляді

$$\Delta y = u(x+\Delta x)\, v(x+\Delta x) - u(x)\, v(x) + u(x+\Delta x)\, v(x) - u(x+\Delta x)\, v(x),$$

звідки

$$\Delta y = \big(u(x+\Delta x)\, v(x+\Delta x) - u(x+\Delta x)\, v(x)\big) + \big(u(x+\Delta x)\, v(x) - u(x)\, v(x)\big).$$

Поділимо на $\Delta x \neq 0$ обидві частини останньої рівності:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x)\, v(x+\Delta x) - u(x+\Delta x)\, v(x)}{\Delta x} + \frac{u(x+\Delta x)\, v(x) - u(x)\, v(x)}{\Delta x};$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u(x+\Delta x)\, \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} + v(x)\, \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}.$$

Здійснимо граничний перехід, коли $\Delta x \to 0$. Здобудемо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(u(x+\Delta x) \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} + v(x)\, \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} u(x+\Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} + v(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}.$$

Тоді

$$y'(x) = u(x)\, v'(x) + u'(x)\, v(x),$$

тобто

$$\big(u(x)\, v(x)\big)' = u'(x)\, v(x) + u(x)\, v'(x). \tag{2.17}$$

Якщо $v(x) = c$, де c – const, то маємо частинний випадок формули (2.17):

$$\big(c u(x)\big)' = c' u(x) + c u'(x) = c u'(x),$$

тобто

$$\big(c u(x)\big)' = c u'(x). \tag{2.18}$$

1.3.5 Похідна частки двох функцій

Розглянемо функцію $y = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, де $u(x)$ та $v(x)$ – диференційовні функції та $v(x) \neq 0$. Знайдемо похідну цієї функції. Аргументу x надамо приріст Δx. Тоді приріст функції y має вигляд

$$\Delta y = \frac{u\left(x+\Delta x\right)}{v\left(x+\Delta x\right)} - \frac{u\left(x\right)}{v\left(x\right)}.$$

Оскільки $\Delta u = u(x + \Delta x) - u(x)$, а $\Delta v = v(x + \Delta x) - v(x)$, то

$$u(x + \Delta x) = u + \Delta u, \quad v(x + \Delta x) = v + \Delta v.$$

Звідси здобудемо

$$\Delta y = \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{uv + v\Delta u - uv - u\Delta v}{v\left(v+\Delta v\right)},$$

$$\Delta y = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{u\left(v+\Delta v\right)}.$$

Поділимо обидві частини останньої рівності на $\Delta x \neq 0$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v\left(v+\Delta v\right)}.$$

Здійснимо граничний перехід, коли $\Delta x \to 0$.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v\left(v+\Delta v\right)} = \frac{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(v+\Delta v\right)}.$$

Звідси виходить, що

$$y' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2},$$

тобто

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{v^2(x)}. \tag{2.19}$$

Частинні випадки формули (2.19):

1) $y = \dfrac{u(x)}{c}$, де $c = \text{const}$, $c \neq 0$, тоді, згідно з формулою (2.18), маємо

$$y' = \left(\frac{u(x)}{c}\right)' = \frac{1}{c}u'(x),$$

тобто

$$\left(\frac{u(x)}{c}\right)' = \frac{u'(x)}{c}. \tag{2.20}$$

2) $y = \dfrac{c}{v(x)}$, де $c = \text{const}$.

$$y' = \left(\frac{c}{v(x)}\right)' = \frac{c'\,v(x) - c\,v'(x)}{v^2(x)} = -\frac{c\,v'(x)}{v^2(x)},$$

тобто

$$\left(\frac{c}{v(x)}\right)' = -\frac{c\,v'(x)}{v^2(x)}. \tag{2.21}$$

1.4 Похідні основних елементарних функцій

1.4.1 Похідні тригонометричних функцій

1. Похідна функції $\boldsymbol{y = \sin x}$.

Аргументу x надамо приріст Δx. Тоді приріст функції y має вигляд

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x,$$

звідки

$$\Delta y = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\lim_{\Delta x \to 0}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

До першої з границь можна застосувати формулу $\lim\limits_{\alpha \to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha} = 1,$ друга границя дорівнює $\cos x$. Тоді

$$y' = \cos x.$$

Дістали формулу

$$(\sin x)' = \cos x. \tag{2.22}$$

2. Похідна функції $\boldsymbol{y = \cos x}$.

За допомогою формул зведення цю функцію можна подати у вигляді $y = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$. Скориставшись теоремою про похідну складної функції та формулою (2.22), маємо

$$y' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cdot(0 - 1) = -\sin x.$$

Остаточно виходить, що

$$(\cos x)' = -\sin x. \tag{2.23}$$

3. Похідна функції $\boldsymbol{y = \mathrm{tg}\, x}$:

Скориставшись формулою (2.19), маємо

$$y' = (tg\,x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x\cos x - \sin x\,(-\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Отже,

$$\left(\operatorname{tg} x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}. \tag{2.24}$$

4. Похідна функції $y = \operatorname{ctg} x$.

Оскільки $\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, то

$$y' = \left(\operatorname{ctg} x\right)' = \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = \frac{1}{\sin^2 x}\left(0 - 1\right) = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Отже,

$$\left(\operatorname{ctg} x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \tag{2.25}$$

1.4.2 Похідні обернених тригонометричних функцій

1. Похідна функції $y = \arcsin x$, де $-1 \le x \le 1$; $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$.

Розглянемо функцію $x = \sin y$, де $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$; $-1 \le x \le 1$. Така функція є оберненою до функції $y = \arcsin x$. Функція $x = \sin y$ є диференційовна на сегменті $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, а в інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ця функція задовольняє умови теореми про похідну оберненої функції, тобто в інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ існує похідна функції $y = \arcsin x$.

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{\cos y}.$$

Оскільки, виходячи з основної тригонометричної тотожності $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\cos y$ можна подати вигляді $\sqrt{1 - \sin^2 y}$, то

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}}.$$

Так як $\sin y = x$, то

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Отже,

$$\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{2.26}$$

2. Похідна функції $y = \arccos x$, де $-1 \le x \le 1$; $0 \le y \le \pi$.

Функція $x = \cos y$, де $0 \le y \le \pi$, $-1 \le x \le 1$ є оберненою до функції $y = \arccos x$. В інтервалі $(0, \pi)$ виконано умови теореми про похідну оберненої функції. Отже, в цьому інтервалі існує похідна функції $y = \arccos x$. Використаємо тотожність

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},$$

звідки

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x.$$

Тоді

$$(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)',$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{2.27}$$

3. Похідна функції $y = \operatorname{arctg} x$, де $x \in (-\infty, \infty)$, $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Функція $x = \operatorname{tg} y$, де $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $x \in (-\infty, \infty)$ є оберненою до функції $y = \operatorname{arctg} x$. Така функція в інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ задовольняє умови теореми про похідну оберненої функції. Тоді

$$y' = \frac{1}{x'} = \cos^2 y$$

Із співвідношення $1 + \operatorname{tg}^2 y = \frac{1}{\cos^2 y}$ виходить, що $y' = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y}$. Оскільки $\operatorname{tg} y = x$, то

$$y' = \frac{1}{1+x^2},$$

тобто

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}. \tag{2.28}$$

4. Похідна функції $y = \operatorname{arcctg} x$, $x \in (-\infty, \infty)$, $y \in (0, \pi)$.

Функція $x = \operatorname{ctg} y$, де $y \in (0, \pi)$, $x \in (-\infty, \infty)$ є оберненою до функції $y = \operatorname{arcctg} x$. Ця функція в інтервалі $(0, \pi)$ задовольняє умови теореми про похідну оберненої функції. Знайдемо цю похідну, спираючись на співвідношення $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$. Тоді

$$\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x; \qquad (\operatorname{arcctg} x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)',$$

тобто

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}. \tag{2.29}$$

1.4.3 Похідні логарифмічної та показникової функцій

1 Похідна функції $y = \log_a x$, де $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$.

Будемо шукати похідну, виходячи з визначення похідної:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a (x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x},$$

де $\Delta x > 0$.

Відомо, що різниця логарифмів дорівнює логарифмові частки, тобто

$$\log_a b_1 - \log_a b_2 = \log_a \frac{b_1}{b_2}, \quad \text{де } b_1 > 0,\ b_2 > 0.$$

Тоді

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{1}{\Delta x}\log_a \frac{x+\Delta x}{x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right].$$

Здобутий вираз помножимо та поділимо на x, який за умовою є числом додатним:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{x}{x\,\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right) = \frac{1}{x}\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{x}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right).$$

Згідно з формулою $p \log_a b = \log_a b^p$, дістанемо

$$y' = \frac{1}{x}\lim_{\Delta x \to 0}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}.$$

Внаслідок того, що логарифмічна функція неперервна в своїй області визначення, маємо можливість знак границі та знак функції зміняти місцями.

$$y' = \frac{1}{x}\log_a\left(\lim_{\Delta x \to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right).$$

Зважаючи на другу чудову границю

$$\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e},$$

приходимо до такого результату

$$y' = \frac{1}{x}\log_a \mathrm{e}.$$

Здобутий результат можна записати інакше, скориставшись формулою

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

Виходить, що

$$y' = \frac{1}{x\ln a},$$

тобто

$$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x\ln a}. \tag{2.30}$$

Якщо $y = \ln x$, то

$$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}. \tag{2.31}$$

2. Похідна функції $y = a^x$, де $0 < a \neq 1;\ -\infty < x < +\infty;\ 0 < y < +\infty$;

Щоб знайти похідну функції $y = a^x$, розглянемо обернену до неї функцію $x = \log_a y$, де $0 < a \neq 1$; $0 < y < +\infty$; $-\infty < x < +\infty$. Ця функція задовольняє умову теореми про похідну оберненої функції

$$y' = \frac{1}{x'} = y\ln a = a^x \ln a.$$

Отже,

$$\left(a^x\right)' = a^x \ln a. \tag{2.32}$$

Якщо $y = \mathrm{e}^x$, то

$$\left(\mathrm{e}^x\right)' = \mathrm{e}^x. \tag{2.33}$$

1.4.4 Логарифмічне диференціювання

Розглянемо функцію $y = \ln|x|$, визначену при $x \in (-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$. Запишемо задану функцію у такий спосіб:

$$y = \begin{cases} \ln(-x), \text{ якщо } -\infty < x < 0; \\ \ln x, \quad \text{якщо } \quad 0 < x < +\infty. \end{cases}$$

Звідси, оскільки $\left(\ln(-x)\right)' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$, $\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$, маємо

$$y' = \begin{cases} \frac{1}{x}, \text{ якщо } -\infty < x < 0; \\ \frac{1}{x}, \text{ якщо } 0 < x < +\infty. \end{cases}$$

Отже, дійшли висновку, що

$$\left(\ln|x|\right)' = \frac{1}{x} \quad \text{при} \quad x \in (-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty).$$

Слід звернути увагу на те, що до складу похідної x входить без модуля.

Тепер розглянемо функцію $y = \ln|f(x)|$, де функція $f(x) \neq 0$ і є диференційовною функцією у точці x $(x \in R)$.

Знайдемо похідну функції $y = \ln|f(x)|$. Враховуючі попередній результат та теорему про похідну складної функції, маємо

$$y' = \left(\ln|f(x)|\right)' = \frac{1}{f(x)}\left(f(x)\right)',$$

тобто

$$\left(\ln|f(x)|\right)' = \frac{f'(x)}{f(x)}, \tag{2.34}$$

де $f(x) \neq 0$.

Вираз $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ називається ***логарифмічною похідною функції*** $f(x)$. Формулу (2.34) можна записати у такий спосіб:

$$f'(x) = f(x)\left(\ln|f(x)|\right)'. \tag{2.35}$$

Знаходження похідної $f'(x)$ за формулою (2.35) називається ***методом логарифмічного диференціювання***. Знаходити похідні методом логарифмічного диференціювання зручно тоді, коли функція $f(x)$ є результатом множення, ділення, піднесення до степеня чи добування кореня.

1.4.5 Похідна степенево-показникової функції $y = \left(u(x)\right)^{v(x)}$

Нехай $y = \left(u(x)\right)^{v(x)}$, де $u(x) > 0$; $u(x)$ та $v(x)$ – функції, диференційовні у точці x та деякому її околі. Прологарифмуємо рівність $y = \left(u(x)\right)^{v(x)}$. Здобудемо

$$\ln y = \ln u(x)^{v(x)},$$

звідки

$$\ln y = v(x)\ln u(x).$$

Продиференцюємо цю рівність. Дістанемо

$$\left(\ln y\right)' = \left(v(x)\ln u(x)\right)',$$

звідки

$$\frac{1}{y}\,y' = v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{1}{u(x)}\,u'(x).$$

Якщо обидві частини останньої рівності помножити на y, то дістанемо таку рівність

$$y' = y\left(v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{1}{u(x)}\,u'(x)\right),$$

тобто

$$\left(\left(u(x)\right)^{v(x)}\right)' = \left(u(x)\right)^{v(x)}\left(v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right). \tag{2.36}$$

Запишемо цю формулу у вигляді

$$\left((u(x))^{v(x)}\right)' = (u(x))^{v(x)}\ln v(x)v'(x) + v(x)(u(x))v^{(x)-1}u'(x).$$

Звідси виходить правило диференціювання степенево-показникової функції.

Похідна степенево-показникової функції дорівнює сумі похідної показникової функції, знайденої у припущенні, що $u(x)=\text{const}$, та похідної степеневої функції, знайденої у припущенні, що $v(x)=\text{const}$.

При знаходженні похідної використано метод логарифмічного диференціювання.

1.4.6 Похідна степеневої функції $y = x^{\alpha}$.

Нехай $\boldsymbol{y = x^{\alpha}}$, де $\boldsymbol{\alpha \in R,\ x > 0}$. Для знаходження похідної звернемось до методу логарифмічного диференціювання:

$$\ln y = \ln x^{\alpha}; \qquad \ln y = \alpha \ln x,$$

звідки

$$(\ln y)' = (\alpha \ln x)'; \qquad \frac{y'}{y} = \frac{\alpha}{x}$$

та

$$y' = \alpha\, y\, \frac{1}{x}.$$

Тоді

$$y' = \alpha\, x^{\alpha}\, \frac{1}{x} = \alpha\, x^{\alpha-1}.$$

Отже,

$$\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha\, x^{\alpha-1}. \tag{2.37}$$

Окремі випадки формули (2.37):

1. Якщо, $\boldsymbol{y = x}$, то $(x)' = 1\cdot x^{1-1} = x^{0} = 1,$

тобто

$$(x)' = 1.$$

2. Якщо $\boldsymbol{y = \sqrt{x}}$, то $\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$

тобто

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \tag{2.38}$$

3. Якщо $\boldsymbol{y}=\dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}$, то $y'=\left(\dfrac{1}{x}\right)'=\left(x^{-1}\right)'=-x^{-2}=-\dfrac{1}{x^2}$,

тобто

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}. \tag{2.39}$$

1.4.7 Похідні гіперболічних функцій

Гіперболічним синусом називається функція

$$y=\operatorname{sh}\,x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

При цьому $x\in(-\infty,+\infty)$; $y\in(-\infty,+\infty)$.

Гіперболічним косинусом називається функція

$$y=\operatorname{ch}\,x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}.$$

При цьому $x\in(-\infty,+\infty)$; $y\in[1,+\infty)$.

Гіперболічним тангенсом називається функція

$$y=\operatorname{th}\,x=\frac{\operatorname{sh}\,x}{\operatorname{ch}\,x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}.$$

При цьому $x\in(-\infty,\infty)$; $y\in(-1,1)$.

Гіперболічним котангенсом називається функція

$$y=\operatorname{cth}\,x=\frac{\operatorname{ch}\,x}{\operatorname{sh}\,x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}.$$

При цьому $x\in(-\infty,0)\cup(0,\infty)$; $y\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$.

ЗАУВАЖЕННЯ. Додаткову інформацію про гіперболічні функції можна дістати у Додатках В та Ж.

Знайдемо похідні цих функцій:

1. $$(\operatorname{sh}x)'=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)'=\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)'=\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}(-x)'\right)=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)=\operatorname{ch}x.$$

Отже,

$$(\operatorname{sh}\,x)'=\operatorname{ch}\,x. \tag{2.40}$$

2. $$(\operatorname{ch}\,x)'=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)'=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)'=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}(-x)'\right)=\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)=\operatorname{sh}x.$$

Отже,

$$\left(\operatorname{ch} x\right)' = \operatorname{sh} x. \tag{2.41}$$

3. $\left(\operatorname{th} x\right)' = \left(\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \dfrac{\left(\operatorname{sh} x\right)' \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \left(\operatorname{ch} x\right)'}{\left(\operatorname{ch} x\right)^2} = \dfrac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x}.$

Для гіперболічних функцій є справедливою формула

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

Тоді

$$\left(\operatorname{th} x\right)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}. \tag{2.42}$$

4. $\left(\operatorname{cth} x\right)' = \left(\dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)' = \dfrac{\left(\operatorname{ch} x\right)' \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x \left(\operatorname{sh} x\right)'}{\operatorname{sh}^2 x} = \dfrac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} =$

$$= -\frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Тоді

$$\left(\operatorname{cth} x\right)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}. \tag{2.43}$$

1.4.8 Таблиця похідних

Основні правила диференціювання та основні формули похідних зручно подати у вигляді таблиці похідних. Позначимо через $u(x)$ та $v x)$ – диференційовні функції, а через c – довільну сталу.

Таблиця 1. Правила диференціювання та формули похідних

№ п/п	Формули	№ п/п	Формули
1	$(c)' = 0$	2	$(x)' = 1$
3	$\left(u \pm v\right)' = u' \pm v'$	4	$\left(u\, v\right)' = u'\, v + u\, v'$
5	$\left(c u\right)' = c u'$	6	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\, v - u\, v'}{v^2}$, $v \neq 0$
7	$\left(\dfrac{u}{c}\right)' = \dfrac{u'}{c}$, де $c \neq 0$	8	$\left(\dfrac{c}{v}\right)' = -\dfrac{c\, v'}{v^2}$, де $v \neq 0$
9	$\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha\, x^{\alpha - 1}$	9′	$\left(u^{\alpha}(x)\right)' = \alpha\, u^{\alpha-1}(x) \cdot u'(x)$
10	$\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, де $x \neq 0$	10′	$\left(\sqrt{u(x)}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u(x)}}\, u'(x)$, де $u\left(x\right) \neq 0$

11	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ де $x \neq 0$	11′	$\left(\frac{1}{u(x)}\right)' = -\frac{1}{u^2(x)} u'(x)$, де $u(x) \neq 0$
12	$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$	12′	$\left(a^{u(x)}\right)' = a^{u(x)} \ln a \cdot u'(x)$
13	$\left(\mathrm{e}^x\right)' = \mathrm{e}^x$	13′	$\left(\mathrm{e}^{u(x)}\right)' = \mathrm{e}^{u(x)}\ u'(x)$
14	$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a}$	14′	$\left(\log_a u(x)\right)' = \frac{1}{u(x) \ln a} u'(x)$
15	$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$	15′	$\left(\ln u(x)\right)' = \frac{1}{u(x)} u'(x)$
16	$\left(\sin x\right)' = \cos x$	16′	$\left(\sin u(x)\right)' = \cos u(x) \cdot u'(x)$
17	$\left(\cos x\right)' = -\sin x$	17′	$\left(\cos u(x)\right)' = -\sin u(x) \cdot u'(x)$
18	$\left(\mathrm{tg}\, x'\right) = \frac{1}{\cos^2 x}$	18′	$\left(\mathrm{tg}\, u(x)\right)' = \frac{1}{\cos^2 u(x)} u'(x)$
19	$\left(\mathrm{ctg}\, x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	19′	$\left(\mathrm{ctg}\, u(x)\right)' = -\frac{1}{\sin^2 u(x)} u'(x)$
20	$\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	20′	$\left(\arcsin u(x)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2(x)}} u'(x)$
21	$\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	21′	$\left(\arccos u(x)\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2(x)}} u'(x)$
22	$\left(\mathrm{arctg}\, x\right)' = \frac{1}{1+x^2}$	22′	$\left(\mathrm{arctg}\, u(x)\right)' = \frac{1}{1+u^2(x)} u'(x)$
23	$\left(\mathrm{arcctg}\, x\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$	23′	$\left(\mathrm{arcctg}\, u(x)\right)' = -\frac{1}{1+u^2(x)} u'(x)$
24	$\left(\mathrm{sh}\, x\right)' = \mathrm{ch}\, x$	24′	$\left(\mathrm{sh}\, u(x)\right)' = \mathrm{ch}\, u(x) \cdot u'(x)$
25	$\left(\mathrm{ch}\, x\right)' = \mathrm{sh}\, x$	25′	$\left(\mathrm{ch}\, u(x)\right)' = \mathrm{sh}\, u(x) \cdot u'(x)$
26	$\left(\mathrm{th}\, x\right)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$	26′	$\left(\mathrm{th}\, u(x)\right)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 u(x)} u'(x)$
27	$\left(\mathrm{cth}\, x\right)' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$	27′	$\left(\mathrm{cth}\, u(x)\right)' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2 u(x)} u'(x)$

Формулами 1…8 подано основні правила диференціювання; формулами 9…27 подано похідні основних елементарних функцій; формулами 9′…27′ подано похідні відповідних складних функцій.

Приклади до пункту 1.4

Похідні основних елементарних функцій та правила диференціювання

Звернемось до таблиці 1. Розглянемо, як користуватися наведеними вище формулами та правилами диференціювання.

Будемо розглядати функцію $y = f(x)$ як результат певних послідовних дій над аргументом x. При диференціюванні функцій важливо визначити, якою була остання дія при утворенні цієї функції. Далі у відповідності з останньою дією треба підібрати відповідну формулу чи правило диференціювання.

Похідна алгебраїчної суми

Приклад 2.12. Знайти похідну функції
$$f(x) = 4 - x^7 + 7^x - \ln x.$$

Р о з в ' я з а н н я

Задана функція $f(x)$ являє собою алгебраїчну суму елементарних функцій. У відповідності з формулою 3 таблиці 1, маємо
$$f'(x) = \left(4 - x^7 + 7^x - \ln x\right)' = (4)' - \left(x^7\right)' + \left(7^x\right)' - (\ln x)'.$$

Для кожного з чотирьох доданків треба підібрати свою формулу диференціювання. Це формули
$$(c)' = 0; \quad \left(x^{\alpha}\right)' = \alpha\, x^{\alpha-1}; \quad \left(a^x\right)' = a^x \ln a; \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Тоді
$$f'(x) = -\,7x^6 + 7^x \ln 7 - \frac{1}{x}.$$

В і д п о в і д ь: $f'(x) = -\,7x^6 + 7^x \ln 7 - \dfrac{1}{x}$.

ЗАУВАЖЕННЯ. При диференціюванні функцій зручно записувати потрібні формули перед кожною дією.

Приклад 2.13. Знайти похідну функції
$$f(x) = \operatorname{arctg} x - \operatorname{tg} x - \frac{1}{x} + e^x.$$

Р о з в ' я з а н н я

Будемо користуватися формулою $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

$$f'(x) = (\operatorname{arctg} x)' - (\operatorname{tg} x)' - \left(\frac{1}{x}\right)' + \left(e^x\right)'.$$

Підбираємо необхідні формули:
$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}; \quad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}; \quad \left(e^x\right)' = e^x.$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{x^2} + e^x.$$

В і д п о в і д ь: $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{x^2} + e^x.$

ЗАУВАЖЕННЯ. Надалі, у процесі диференціювання суми, можна не записувати кожен з доданків під знаком похідної, а одразу переходити до знаходження похідних доданків.

Приклад 2.14. Знайти похідну функції

$$f(x) = \cos x - \sqrt{x} + 19.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Слід скористатися формулами

$$(u \pm v)' = u' \pm v'; \quad (\cos x)' = -\sin x; \quad \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \quad (c)' = 0.$$

Тоді

$$f'(x) = -\sin x - \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

В і д п о в і д ь: $f'(x) = -\sin x - \frac{1}{2\sqrt{x}}.$

Похідна добутку сталої на функцію

Приклад 2.15. Знайти похідну функції

$$f(x) = 9 \ln x.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Згідно з формулами $(cu)' = cu'$ та $(\ln x)' = \frac{1}{x}$,

маємо

$$f'(x) = 9(\ln x)' = \frac{9}{x}.$$

В і д п о в і д ь: $f'(x) = \frac{9}{x}.$

Похідна добутку двох функцій

Приклад 2.16. Знайти похідну функції

$$f(x) = \sin x \arcsin x.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Оскільки задана функція є добутком двох елементарних функцій, то слід скористуватися формулою $(uv)' = u'v + uv'$, де $u(x) = \sin x$, $v(x) = \arcsin x$.

$$f'(x) = (\sin x)' \cdot \arcsin x + \sin x \cdot (\arcsin x)'.$$

Далі потрібні формули

$$(\sin x)' = \cos x; \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Отже,

$$f'(x) = \cos x \arcsin x + \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

В і д п о в і д ь: $f'(x) = \cos x \arcsin x + \sin x \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Приклад 2.17. Знайти похідну функції

$$f(x) = (x^3 - 4x + 3)\, 9^x.$$

Р о з в ' я з а н н я

Використаємо формулу $(uv)' = u'v + uv'$, де $u(x) = x^3 - 4x + 3$; $v(x) = 9^x$. Тоді

$$f'(x) = (x^3 - 4x + 3)' \cdot 9^x + (x^3 - 4x + 3)\,(9^x)'.$$

Далі звернемось до формул:

$$(u \pm v)' = u' \pm v'; \quad \left(x^\alpha\right)' = \alpha x^{\alpha-1}; \quad (cu)' = cu'; \quad (c)' = 0; \quad (a^x)' = a^x \ln a.$$

$$f'(x) = (3x^2 - 4)\, 9^x + (x^3 - 4x + 3)\, 9^x \ln 9.$$

В і д п о в і д ь: $f'(x) = (3x^2 - 4)\, 9^x + (x^3 - 4x + 3)\, 9^x \ln 9$.

Похідна частки від ділення функції на сталу

Приклад 2.18. Знайти похідну функції

$$f(x) = \frac{4x^3 - 9}{16}.$$

Р о з в ' я з а н н я

Згідно з формулою $\left(\dfrac{u}{c}\right)' = \dfrac{u'}{c}$, де $u(x) = 4x^3 - 9$, маємо

$$f'(x) = \left(\frac{4x^3 - 9}{16}\right)' = \frac{1}{16}\left(4x^3 - 9\right)'.$$

Використємо формули

$$(u \pm v)' = u' \pm v'; \quad (cu)' = cu'; \quad \left(x^\alpha\right)' = \alpha x^{\alpha-1}; \quad (c)' = 0.$$

Тоді

$$f'(x) = \frac{12x^2}{16} = \frac{3x^2}{4}.$$

В і д п о в і д ь: $f'(x) = \dfrac{3x^2}{4}$.

Приклад 2.19. Знайти похідну функції

$$f(x) = \frac{\text{ctg } x}{7}.$$

Р о з в ' я з а н н я

За формулою $\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c}$, де $u(x) = \text{ctg } x$, маємо

$$f'(x) = \frac{(\text{ctg } x)'}{7}.$$

Оскільки

$$(\text{ctg } x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

то

$$f'(x) = -\frac{1}{7\sin^2 x}.$$

В і д п о в і д ь: $f'(x) = -\frac{1}{7\sin^2 x}$.

Похідна частки від ділення сталої на функцію

Приклад 2.20. Знайти похідну функції

$$f(x) = \frac{19}{5\sin x - 6\cos x}.$$

Р о з в ' я з а н н я

Скористаємось формулою $\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{c\,v'}{v^2}$, де $v(x) = 5\sin x - 6\cos x$.

$$f'(x) = -\frac{19(5\sin x - 6\cos x)'}{(5\sin x - 6\cos x)^2}.$$

Далі використаємо формули

$$(u - v)' = u' - v'; \quad (cu)' = cu'; \quad (\sin x)' = \cos x; \quad (\cos x)' = -\sin x.$$

$$f'(x) = -\frac{19\,(5\cos x + 6\sin x)}{(5\sin x - 6\cos x)^2}.$$

В і д п о в і д ь: $f'(x) = -\frac{19\,(5\cos x + 6\sin x)}{(5\sin x - 6\cos x)^2}$.

Похідна частки від ділення двох функцій

Приклад 2.21. Знайти похідну функції

$$f(x) = \frac{x^5 - 9x^2 + 1}{x^2 + 5}.$$

Р о з в ' я з а н н я

Скористаємось формулою $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$. Будемо вважати, що $u = x^5 - 9x^2 + 1$, $v = x^2 + 5$. Тоді

$$f'(x) = \frac{\left(x^5 - 9x^2 + 1\right)'\left(x^2 + 5\right) - \left(x^5 - 9x^2 + 1\right)\left(x^2 + 5\right)'}{\left(x^2 + 5\right)^2}.$$

Далі використаємо формули

$$\left(u + v\right)' = u' + v'; \quad \left(cu\right)' = cu'; \quad \left(x^{\alpha}\right)' = \alpha\, x^{\alpha - 1}, \quad (c)' = 0.$$

$$f'(x) = \frac{\left(5x^4 - 18x\right)\left(x^2 + 5\right) - \left(x^5 - 9x^2 + 1\right)2x}{\left(x^2 + 5\right)^2} =$$

$$= \frac{5x^6 + 25x^4 - 18x^3 - 90x - 2x^6 + 18x^3 - 2x}{\left(x^2 + 5\right)^2} = \frac{3x^6 + 25x^4 - 92x}{\left(x^2 + 5\right)^2} = \frac{x\left(3x^5 + 25x^3 - 92\right)}{\left(x^2 + 5\right)^2}.$$

В і д п о в і д ь: $f'(x) = \frac{x\left(3x^5 + 25x^3 - 92\right)}{\left(x^2 + 5\right)^2}$.

Приклад 2.22. Знайти похідну функції

$$f(x) = x^3 \ln x - \frac{\sin x}{x^2 + 1} + \frac{9}{e^x} - 4x^2\sqrt[3]{x^2}.$$

Р о з в ' я з а н н я

Починаємо з формули $\left(u \pm v\right)' = u' \pm v'$.

Далі нам потрібні формули

$$\left(uv\right)' = u'v + uv'; \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}; \quad \left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv'}{v^2}; \quad \left(cu\right)' = cu'.$$

Тоді

$$f'(x) = \left(x^3\right)' \ln x + x^3\left(\ln x\right)' - \frac{\left(\sin x\right)'\left(x^2 + 1\right) - \sin x\left(x^2 + 1\right)'}{\left(x^2 + 1\right)^2} - \frac{9\left(e^x\right)'}{e^{2x}} - 4\left(x^{\frac{8}{3}}\right)'.$$

Скориставшись формулами

$$\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha\, x^{\alpha-1}; \quad \left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}; \quad (\sin x)' = \cos x; \quad \left(u \pm v\right)' = u' \pm v'; \quad \left(\mathrm{e}^{x}\right)' = \mathrm{e}^{x},$$

$\left(c\right)' = 0$, знайдемо

$$f'(x) = 3x^2 \ln x + x^3\,\frac{1}{x} - \frac{\left(x^2+1\right)\cos x - 2x\sin x}{\left(x^2+1\right)^2} - \frac{9\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{2x}} - 4\cdot\frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}},$$

тобто

$$f'(x) = x^2\left(3\ln x + 1\right) - \frac{\left(x^2+1\right)\cos x - 2x\sin x}{\left(x^2+1\right)^2} - \frac{9}{\mathrm{e}^{x}} - \frac{32}{3}\, x\sqrt[3]{x^2}\,.$$

В і д п о в і д ь: $f'(x) = x^2\left(3\ln x + 1\right) - \dfrac{\left(x^2+1\right)\cos x - 2x\sin x}{\left(x^2+1\right)^2} - \dfrac{9}{\mathrm{e}^{x}} - \dfrac{32}{3}\, x\sqrt[3]{x^2}$.

Приклад 2.23 Знайти похідну функції

$$f(x) = 9\,\mathrm{tg}\,x + \left(x^4 - \sqrt[5]{x}\right)\frac{x^2}{2^x}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Скористаємось формулами $\left(u \pm v\right)' = u' \pm v'$,

$$\left(cu\right)' = cu'; \quad \left(u\,v\right)' = u'\,v + u\,v'.$$

$$(\mathrm{tg}\,x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad \left(u \pm v\right)' = u' \pm v'; \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}, \;\; v \neq 0.$$

Тоді

$$f'(x) = 9\left(\mathrm{tg}\,x\right)' + \left(x^4 - x^{\frac{1}{5}}\right)'\frac{x^2}{2^x} + \left(x^4 - x^{\frac{1}{5}}\right)\left(\frac{x^2}{2^x}\right)' =$$

$$= \frac{9}{\cos^2 x} + \left(\left(x^4\right)' - \left(x^{\frac{1}{5}}\right)'\right)\frac{x^2}{2^x} + \left(x^4 - x^{\frac{1}{5}}\right)\frac{\left(x^2\right)' 2^x - x^2\left(2^x\right)'}{\left(2^x\right)^2}.$$

За допомогою формул

$$\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha\, x^{\alpha-1}; \quad (a^x)' = a^x \ln a$$

маємо

$$f'(x) = \frac{9}{\cos^2 x} + \left(4x^3 - \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}\right)\frac{x^2}{2^x} + \left(x^4 - x^{\frac{1}{5}}\right)\frac{2x\,2^x - x^2\,2^x \ln 2}{\left(2^x\right)^2},$$

$$f'(x)=\frac{9}{\cos^2 x}+\frac{x^2}{2^x}\left(4x^3-\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}\right)+\left(x^4-\sqrt[5]{x}\right)\frac{2x-x^2\ln 2}{2^x}.$$

В і д п о в і д ь: $f'(x)=\frac{9}{\cos^2 x}+\frac{x^2}{2^x}\left(4x^3-\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}\right)+\left(x^4-\sqrt[5]{x}\right)\frac{2x-x^2\ln 2}{2^x}$.

Похідна складної функції

Приклад 2.24. Знайти похідну функції

$$y=\left(17x^3-4x^2+11x-7\right)^{25}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Для даної функції остання дія – піднесення до степеня. Отже потрібна формула

$$\left(u^{\alpha}(x)\right)'=\alpha u^{\alpha-1}(x)\,u'(x),\ \text{де}\quad u(x)=17x^3-4x^2+11x-7.$$

Тоді

$$y'=\left(\left(17x^3-4x^2+11x-7\right)^{25}\right)'=25\left(17x^3-4x^2+11x-7\right)^{24}\left(17x^3-4x^2+11x-7\right)';$$

$$y'=25\left(17x^3-4x^2+11x-7\right)^{24}\left(51x^2-8x+11\right).$$

В і д п о в і д ь: $y'=25\left(17x^3-4x^2+11x-7\right)^{24}\left(51x^2-8x+11\right)$.

Приклад 2.25. Знайти похідну функції

$$y=\sqrt{8e^x+\sin x-x^3}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Останньою дією є знаходження квадратного кореня з виразу

$$u(x)=8e^x+\sin x-x^3.$$

Користуємось формулою

$$\left(\sqrt{u(x)}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{u(x)}}\,u'(x),\ \text{де}\ u(x)=8e^x+\sin x-x^3,$$

звідки

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{8e^x+\sin x-x^3}}\left(8e^x+\sin x-x^3\right)',$$

тобто

$$y'=\frac{8e^x+\cos x-3x^2}{2\sqrt{8e^x+\sin x-x^3}}.$$

В і д п о в і д ь: $y' = \dfrac{8e^x + \cos x - 3x^2}{2\sqrt{8e^x + \sin x - x^3}}$.

Приклад 2.26. Знайти похідну функції

$$y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}\ .$$

Р о з в ’ я з а н н я

Оскільки останньою дією є знаходження квадратного кореня, то звернемось до формули

$$\left(\sqrt{u(x)}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u(x)}}\, u'(x),\ \text{де}\ u(x) = x + \sqrt{x + \sqrt{x}}\ .$$

Маємо

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \left(x + \sqrt{x + \sqrt{x}}\right)'.$$

Користуємось формулою $\left(u \pm v\right)' = u' \pm v'$, де $u(x) = x$; $v(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$.
Виходить:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \left(x' + \left(\sqrt{x + \sqrt{x}}\right)'\right).$$

Застосувавши формули $x' = 1$ та $\left(\sqrt{u(x)}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u(x)}}\, u'(x)$, де $u(x) = x + \sqrt{x}$, дістанемо

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \left(x + \sqrt{x}\right)'\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right).$$

Спрощуємо y' .

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}\, \frac{4\sqrt{x}\sqrt{x + \sqrt{x}} + 2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x}\sqrt{x + \sqrt{x}}}.$$

В і д п о в і д ь: $y' = \dfrac{1}{8\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}\, \dfrac{4\sqrt{x}\sqrt{x + \sqrt{x}} + 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}\sqrt{x + \sqrt{x}}}$.

Приклад 2.27. Знайти похідну функції

$$y = \frac{1}{4\sqrt{x} + 9^x - \ln x}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Останньою дією є ділення сталої на функцію. Користуємось формулою

$$\left(\frac{1}{u(x)}\right)' = -\frac{1}{u^2(x)}\,u'(x), \text{ де } \quad u(x) = 4\sqrt{x} + 9^x - \ln x.$$

Тоді

$$y' = \frac{-1}{\left(4\sqrt{x} + 9^x - \ln x\right)^2}\left(4\sqrt{x} + 9^x - \ln x\right)',$$

$$y' = \frac{-1}{\left(4\sqrt{x} + 9^x - \ln x\right)^2}\left(\frac{2}{\sqrt{x}} + 9^x \ln 9 - \frac{1}{x}\right).$$

В і д п о в і д ь: $y' = \dfrac{-1}{\left(4\sqrt{x} + 9^x - \ln x\right)^2}\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}} + 9^x \ln 9 - \dfrac{1}{x}\right).$

Приклад 2.28. Знайти похідну функції

$$y = 181^{5\sin x - x^2}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Оскільки основа степеня є числом сталим, а показник степеня – змінний, то маємо показникову складну функцію. Користуємось формулою

$$\left(a^{u(x)}\right)' = a^{u(x)} \ln a \cdot u'(x).$$

Роль основи a відіграє число 181, а роль $u(x)$ – функція $u(x) = 5\sin x - x^2$. Тоді

$$y' = 181^{5\sin x - x^2} \ln 181 \cdot \left(5\sin x - x^2\right)', \quad y' = 181^{5\sin x - x^2}\left(5\cos x - 2x\right)\ln 181.$$

В і д п о в і д ь: $y' = 181^{5\sin x - x^2}\left(5\cos x - 2x\right)\ln 181.$

Приклад 2.29. Знайти похідну функції

$$y = \mathrm{e}^{x^2 + \mathrm{arctg} x}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Маємо частинний випадок показникової складної функції. Користуємось формулою $\left(\mathrm{e}^{u(x)}\right)' = \mathrm{e}^{u(x)}\,u'(x)$, де $u(x) = x^2 + \mathrm{arctg}\,x$.

Тоді

$$y' = \mathrm{e}^{x^2 + \mathrm{arctg} x}\left(x^2 + \mathrm{arctg} x\right)' = \mathrm{e}^{x^2 + \mathrm{arctg} x}\left(2x + \frac{1}{1 + x^2}\right).$$

В і д п о в і д ь: $y' = \mathrm{e}^{x^2 + \mathrm{arctg} x}\left(2x + \dfrac{1}{1 + x^2}\right).$

Приклад 2.30. Знайти похідну функції

$$y = \sin x + \sin 3x + \sin x^3 + \sin^3 x.$$

Р о з в ’ я з а н н я

За формулою $(u \pm v)' = u' \pm v'$ та за формулами

$$(\sin x)' = \cos x; \quad (\sin u(x))' = \cos u(x)\, u'(x); \quad \left(u^{\alpha}(x)\right)' = \alpha u^{\alpha - 1}(x)\, u'(x),$$

дістанемо

$$y' = \cos x + \cos 3x \cdot (3x)' + \cos x^3 \cdot \left(x^3\right)' + 3\sin^2 x \cdot (\sin x)'.$$

За допомогою формул $(cu)' = cu'$; $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha - 1}$; $(\sin x)' = \cos x$ дістанемо

$$y' = \cos x + 3\cos 3x + 3x^2 \cos x^3 + 3\sin^2 x \cos x.$$

В і д п о в і д ь: $y' = \cos x + 3\cos 3x + 3x^2 \cos x^3 + 3\sin^2 x \cos x$.

Приклад 2.31. Знайти похідну функції

$$y = \ln \sin\left(3x^4 - 5\right).$$

Р о з в ’ я з а н н я

Задана функція є складною функцією

$$y = \ln \sin\left(3x^4 - 5\right).$$

Оскільки останньою дією було знаходження логарифма, звертаємось до формули $(\ln u(x))' = \dfrac{1}{u(x)} u'(x)$, де $u(x) = \sin\left(3x^4 - 5\right)$.

Тоді

$$y' = \frac{1}{\sin\left(3x^4 - 5\right)} \left(\sin\left(3x^4 - 5\right)\right)'.$$

Далі звернемося до формули

$$(\sin u(x))' = \cos u(x) \cdot u'(x), \text{ де } u(x) = 3x^4 - 5.$$

$$y' = \frac{1}{\sin\left(3x^4 - 5\right)} \cos\left(3x^4 - 5\right) \cdot \left(3x^4 - 5\right)'.$$

Остаточно маємо

$$y' = \frac{\cos\left(3x^4 - 5\right)}{\sin\left(3x^4 - 5\right)} 12x^3,$$

тобто

$$y' = 12x^3 \operatorname{ctg}\left(3x^4 - 5\right).$$

В і д п о в і д ь: $y' = 12x^3 \operatorname{ctg}\left(3x^4 - 5\right)$.

Приклад 2.32. Знайти похідну функції

$$y = \log_9\left(\sqrt[3]{x^2} + 4^{\sin x}\right).$$

Р о з в ’ я з а н н я

Задана функція є логарифмічною складною функцією. Слід скористуватись формулою $\left(\log_a u(x)\right)' = \dfrac{1}{u(x)\ln a}u'(x)$, де $u(x) = \sqrt[3]{x^2} + 4^{\sin x}$. Тоді

$$y' = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{x^2} + 4^{\sin x}\right)\ln 9}\left(x^{\frac{2}{3}} + 4^{\sin x}\right)',$$

$$y' = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{x^2} + 4^{\sin x}\right)\ln 9}\left(\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + 4^{\sin x}\cos x \ln 4\right) = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{x^2} + 4^{\sin x}\right)\ln 9}\left(\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + 4^{\sin x}\cos x \ln 4\right).$$

В і д п о в і д ь: $y' = \dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{x^2} + 4^{\sin x}\right)\ln 9}\left(\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}} + 4^{\sin x}\cos x \ln 4\right)$.

Приклад 2.33. Знайти похідну функції

$$y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right).$$

Р о з в ’ я з а н н я

Задана функція є логарифмічною складною функцією. Використаємо формулу $\left(\ln u(x)\right)' = \dfrac{1}{u(x)}u'(x)$, де $u(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$.

$$y' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)'.$$

Далі нам потрібні формули

$$\left(u + v\right)' = u' + v', \quad (x)' = 1, \quad \left(\sqrt{u(x)}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u(x)}}u'(x).$$

Тоді

$$y' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}}\left(x^2 + 1\right)'\right).$$

Остаточно маємо

$$y' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right), \quad y' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\,\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

В і д п о в і д ь: $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Приклад 2.34. Знайти похідну функції

$$y = \sin\left(x^7 + \sqrt[7]{x}\right).$$

Р о з в ' я з а н н я

Останньою дією є знаходження синуса. Отже, слід скористатися формулою $(\sin u(x))' = \cos u(x) \cdot u'(x)$, де $u(x) = x^7 + \sqrt[7]{x}$. Отже,

$$y' = \cos\left(x^7 + \sqrt[7]{x}\right)\cdot\left(x^7 + x^{\frac{1}{7}}\right)' = \cos\left(x^7 + \sqrt[7]{x}\right)\cdot\left(7x^6 + \frac{1}{7}x^{-\frac{6}{7}}\right) = \left(7x^6 + \frac{1}{7\sqrt[7]{x^6}}\right)\cdot\cos\left(x^7 + \sqrt[7]{x}\right).$$

В і д п о в і д ь: $y' = \left(7x^6 + \dfrac{1}{7\sqrt[7]{x^6}}\right)\cdot\cos\left(x^7 + \sqrt[7]{x}\right)$.

Приклад 2.35. Знайти похідну функції

$$y = \operatorname{tg}\left(\sqrt{x} + 4\right).$$

Р о з в ' я з а н н я

Остання дія – знаходження тангенса. Користуємось формулою

$$(\operatorname{tg} u(x))' = \frac{1}{\cos^2 u(x)}\,u'(x), \text{ де } u(x) = \sqrt{x} + 4.$$

Тоді

$$y' = \frac{1}{\cos^2\left(\sqrt{x}+4\right)}\left(\sqrt{x}+4\right)'.$$

Тепер звернемось до формул

$$(u+v)' = u' + v'; \quad \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \quad (c)' = 0.$$

Тоді

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}\cos^2\left(\sqrt{x}+4\right)}.$$

В і д п о в і д ь: $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\left(\sqrt{x}+4\right)}$.

Приклад 2.36. Знайти похідну функції

$$y = \operatorname{arctg}^2(\ln x).$$

Р о з в ' я з а н н я

Зважаючи, що останньою дією є піднесення до степеня, звернемось до формули $\left(u^{\alpha}(x)\right)' = \alpha u^{\alpha-1}(x)\, u'(x)$, де $u(x) = \operatorname{arctg}(\ln x)$.

Тоді

$$y' = 2\operatorname{arctg}(\ln x) \cdot \left(\operatorname{arctg}(\ln x)\right)'.$$

Згідно з формулою

$$\left(\operatorname{arctg} u(x)\right)' = \frac{1}{1+u^2(x)}\, u'(x), \text{ де } u(x) = \ln x,$$

Дістанемо $y' = 2\operatorname{arctg}(\ln x) \cdot \dfrac{1}{1+\ln^2 x} \cdot (\ln x)'$.

Оскільки $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, то

$$y' = \frac{2\operatorname{arctg}(\ln x)}{x\left(1+\ln^2 x\right)}.$$

В і д п о в і д ь: $y' = \dfrac{2\operatorname{arctg}(\ln x)}{x\left(1+\ln^2 x\right)}$.

Приклад 2.37. Знайти похідну функції

$$y = \arccos\left(4e^x + \sin 3x\right).$$

Р о з в ' я з а н н я

У цієї функції останньою дією є знаходження арккосинуса. Користуємось формулою $\left(\arccos u(x)\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2(x)}}\, u'(x)$, де $u(x) = 4e^x + \sin 3x$.

Тоді

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(4e^x+\sin 3x\right)^2}}\left(4e^x+\sin 3x\right)'$$

Користуємось формулами

$$(u+v)' = u' + v'; \ (cu)' = cu'; \ \left(e^x\right)' = e^x; \ \left(\sin u(x)\right)' = \cos u(x)\, u'(x); \ (x)' = 1.$$

Отже,

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(4e^x+\sin 3x\right)^2}}\left(4e^x+3\cos 3x\right).$$

В і д п о в і д ь: $y' = -\dfrac{4e^x + 3\cos 3x}{\sqrt{1-\left(4e^x + \sin 3x\right)^2}}$.

Приклад 2.38. Знайти похідну функції

$$y = \operatorname{arctg}\left(5^x + \ln x^3\right).$$

Р о з в ’ я з а н н я

Остання дія – знаходження арктангенса, що приводить до необхідності користуватись формулою $\left(\operatorname{arctg} u(x)\right)' = \dfrac{1}{1+u^2(x)}u'(x)$, де $u(x) = 5^x + \ln x^3$.

Тоді

$$y' = \frac{1}{1+\left(5^x + \ln x^3\right)^2}\left(5^x + 3\ln x\right)'.$$

За допомогою формул

$$\left(u+v\right)' = u' + v', \quad \left(a^x\right)' = a^x \ln a, \quad \left(cu\right)' = cu', \quad \left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$$

знайдемо y'.

$$y' = \frac{1}{1+\left(5^x + \ln x^3\right)^2}\left(5^x \ln 5 + \frac{3}{x}\right).$$

В і д п о в і д ь: $y' = \dfrac{5^x \ln 5 + \frac{3}{x}}{1+\left(5^x + \ln x^3\right)^2}$.

Приклад 2.39. Знайти похідну функції

$$y = \operatorname{cth}\left(\sin x + \cos x\right).$$

Р о з в ’ я з а н н я

Скористаємось формулою

$$\left(\operatorname{cth} u(x)\right)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u(x)}u'(x), \text{ де } u(x) = \sin x + \cos x.$$

Тоді

$$y' = \frac{-1}{\operatorname{sh}^2\left(\sin x + \cos x\right)}\left(\sin x + \cos x\right)'.$$

Далі застосовуємо формули

$$\left(u+v\right)' = u' + v'; \quad (\sin x)' = \cos x; \quad (\cos x)' = -\sin x.$$

Дістанемо

$$y' = \frac{-1}{\mathrm{sh}^2\left(\sin x + \cos x\right)}\left(\cos x - \sin x\right).$$

В і д п о в і д ь: $y' = \dfrac{\sin x - \cos x}{\mathrm{sh}^2\left(\sin x + \cos x\right)}$.

Для більш глибокого засвоєння теми розглянемо ще кілька прикладів, вже не записуючи потрібні формули.

Приклад 2.40. Знайти похідну функції

$$y = \frac{\mathrm{tg}^2\, x}{\mathrm{tg}\; x^2}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

$$y' = \left(\frac{\mathrm{tg}^2 x}{\mathrm{tg}\, x^2}\right)' = \frac{\left(\mathrm{tg}^2 x\right)' \mathrm{tg}\, x^2 - \mathrm{tg}^2 x \cdot \left(\mathrm{tg}\, x^2\right)'}{\mathrm{tg}^2 x^2} = \frac{2\,\mathrm{tg}\, x \cdot \left(\mathrm{tg}\, x\right)' \,\mathrm{tg}\, x^2 - \mathrm{tg}^2 x \dfrac{1}{\cos^2 x^2}\left(x^2\right)'}{\mathrm{tg}^2 x^2} =$$

$$= \frac{2\,\mathrm{tg}\, x \dfrac{1}{\cos^2 x}\, \mathrm{tg}\, x^2 - \mathrm{tg}^2 x \dfrac{1}{\cos^2 x^2}\, 2x}{\mathrm{tg}^2 x^2} = 2\frac{\dfrac{\mathrm{tg}\, x \cdot \mathrm{tg}\, x^2}{\cos^2 x} - \dfrac{x \cdot \mathrm{tg}^2 x}{\cos^2 x^2}}{\mathrm{tg}^2 x^2} =$$

$$= 2\frac{\mathrm{tg}\, x \cdot \mathrm{tg}\, x^2 \cdot \cos^2 x^2 - x\cos^2 x \cdot \mathrm{tg}^2 x}{\mathrm{tg}^2 x^2 \cdot \cos^2 x \cdot \cos^2 x^2} = 2\frac{\mathrm{tg}\, x \cdot \left(\mathrm{tg}\, x^2 \cdot \cos^2 x^2 - x\cos^2 x \cdot \mathrm{tg}\, x\right)}{\sin^2 x^2 \cdot \cos^2 x} =$$

$$= \frac{2\,\mathrm{tg}\, x}{\sin^2 x^2 \cdot \cos^2 x}\left(\sin x^2 \cdot \cos x^2 - x \sin x \cdot \cos x\right) = \frac{\mathrm{tg}\, x}{\sin^2 x^2 \cdot \cos^2 x}\left(\sin 2x^2 - x\sin 2x\right).$$

В і д п о в і д ь: $y' = \dfrac{\mathrm{tg}\, x \cdot \left(\sin 2x^2 - x\sin 2x\right)}{\sin^2 x^2 \,\cos^2 x}$.

Приклад 2.41. Знайти похідну функції

$$y = \left(8\sin x + \sin 8x + \sin^8 x + \sin x^8\right)^{25}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

$$y' = 25\left(8\sin x + \sin 8x + \sin^8 x + \sin x^8\right)^{24} \left(8\sin x + \sin 8x + \sin^8 x + \sin x^8\right)' =$$

$$= 25\left(8\sin x + \sin 8x + \sin^8 x + \sin x^8\right)^{24} \left(8\cos x + 8\cos 8x + 8\sin^7 x \cos x + 8x^7 \cos x^8\right) =$$

$$= 200\left(8\sin x + \sin 8x + \sin^8 x + \sin x^8\right)^{24} \left(\cos x + \cos 8x + \sin^7 x \cos x + x^7 \cos x^8\right).$$

В і д п о в і д ь:

$$y' = 200\left(8\sin x + \sin 8x + \sin^8 x + \sin x^8\right)^{24} \left(\cos x + \cos 8x + \sin^7 x \cos x + x^7 \cos x^8\right).$$

Приклад 2.42. Знайти похідну функції

$$y = \log_2\left(\log_3\left(\log_5 x\right)\right).$$

Р о з в ' я з а н н я

$$y' = \frac{1}{\log_3\left(\log_5 x\right)}\frac{1}{\ln 2}\left(\log_3\left(\log_5 x\right)\right)' = \frac{1}{\log_3\left(\log_5 x\right)}\frac{1}{\ln 2}\frac{1}{\log_5 x}\frac{1}{\ln 3}\left(\log_5 x\right)' =$$

$$= \frac{1}{\log_3(\log_5 x)}\frac{1}{\ln 2}\frac{1}{\log_5 x}\frac{1}{\ln 3}\frac{1}{x}\frac{1}{\ln 5} = \frac{1}{\ln 2\ln 3\ln 5\; x\log_5 x\log_3\left(\log_5 x\right)}.$$

В і д п о в і д ь: $y' = \dfrac{1}{\ln 2\ln 3\ln 5\; x\log_5 x\log_3\left(\log_5 x\right)}$.

Приклад 2.43. Знайти похідну функції

$$y = x + \operatorname{ctg} x \cdot \ln\left(1+\sin x\right) - \ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right).$$

Р о з в ' я з а н н я

$$y' = 1 + \left(\operatorname{ctg} x\right)'\ln\left(1+\sin x\right) + \operatorname{ctg} x\cdot\left(\ln\left(1+\sin x\right)\right)' - \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)' =$$

$$= 1 - \frac{1}{\sin^2 x}\ln\left(1+\sin x\right) + \operatorname{ctg} x\,\frac{1}{1+\sin x}\left(1+\sin x\right)' - \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)' =$$

$$= 1 - \frac{\ln\left(1+\sin x\right)}{\sin^2 x} + \frac{\cos x\cos x}{\sin x\left(1+\sin x\right)} - \frac{1}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\frac{1}{2} = 1 - \frac{\ln\left(1+\sin x\right)}{\sin^2 x} +$$

$$+ \frac{\cos^2 x}{\sin x\left(1+\sin x\right)} - \frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x - 1 - \sin x}{\sin x\left(1+\sin x\right)} - \frac{\ln\left(1+\sin x\right)}{\sin^2 x} =$$

$$= -\frac{\ln\left(1+\sin x\right)}{\sin^2 x}.$$

В і д п о в і д ь: $y' = -\dfrac{\ln\left(1+\sin x\right)}{\sin^2 x}$.

Приклад 2.44. Знайти похідну функції

$$y = \arccos\left(\sin^4 x - \cos^4 x\right).$$

Р о з в ' я з а н н я

У тих випадках, коли задану функцію можна спростити, краще це зробити до початку диференціювання.

$$y = \arccos\left(\sin^4 x - \cos^4 x\right) = \arccos\left(\left(\sin^2 x - \cos^2 x\right)\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)\right) =$$

$$= \arccos\left(\sin^2 x - \cos^2 x\right) = \arccos\left(-\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)\right) =$$

$$= \pi - \arccos\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) = \pi - \arccos\left(\cos 2x\right) = \pi - 2x.$$

Тоді

$$y' = \left(\pi - 2x\right)' = -2\,.$$

В і д п о в і д ь: $y' = -2$.

Приклад 2.45. Знайти похідну функції

$$y = \mathrm{e}^x \arcsin\sqrt{\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}} + \mathrm{arctg}\sqrt{\mathrm{e}^x} - \sqrt{\mathrm{e}^x}\,.$$

Р о з в ’ я з а н н я

$$y' = \left(\mathrm{e}^x\right)' \arcsin\sqrt{\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}} + \mathrm{e}^x\left(\arcsin\sqrt{\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}}\right)' + \frac{1}{1+\left(\sqrt{\mathrm{e}^x}\right)^2}\left(\sqrt{\mathrm{e}^x}\right)' - \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}^x}}\left(\mathrm{e}^x\right)' =$$

$$= \mathrm{e}^x \arcsin\sqrt{\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}} + \mathrm{e}^x \frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}}\right)^2}}\left(\sqrt{\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}}\right)' + \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}^x}}\left(\mathrm{e}^x\right)' - \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}^x}}\,\mathrm{e}^x =$$

$$= \mathrm{e}^x \arcsin\sqrt{\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}} + \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}}}\frac{1}{2\sqrt{\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}}}\left(\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\right)' + \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\frac{\mathrm{e}^x}{2\sqrt{\mathrm{e}^x}} - \frac{\sqrt{\mathrm{e}^x}}{2} =$$

$$= \mathrm{e}^x \arcsin\sqrt{\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}} + \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{\frac{\mathrm{e}^x+1-\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}}}\frac{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}{2\sqrt{\mathrm{e}^x}}\frac{\left(\mathrm{e}^x\right)'\left(\mathrm{e}^x+1\right) - \mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x+1\right)'}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2} +$$

$$+ \frac{\sqrt{\mathrm{e}^x}}{2\left(1+\mathrm{e}^x\right)} - \frac{\sqrt{\mathrm{e}^x}}{2} = \mathrm{e}^x \arcsin\sqrt{\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}} + \frac{\sqrt{\mathrm{e}^x}\cdot\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}{2\sqrt{\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}}}\frac{\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x+1\right) - \mathrm{e}^x\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2} + \frac{\sqrt{\mathrm{e}^x}}{2\left(1+\mathrm{e}^x\right)} - \frac{\sqrt{\mathrm{e}^x}}{2}.$$

Здобутий вираз можна спростити.

$$y' = \mathrm{e}^x \arcsin\sqrt{\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}} + \sqrt{\mathrm{e}^x}\left(\mathrm{e}^x+1\right)\frac{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{2x}}{2\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2} + \frac{\sqrt{\mathrm{e}^x}}{2\left(1+\mathrm{e}^x\right)} - \frac{\sqrt{\mathrm{e}^x}}{2} =$$

$$= \mathrm{e}^x \arcsin\sqrt{\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}} + \frac{\mathrm{e}^x\sqrt{\mathrm{e}^x}}{2\left(\mathrm{e}^x+1\right)} + \frac{\sqrt{\mathrm{e}^x}}{2\left(\mathrm{e}^x+1\right)} - \frac{\sqrt{\mathrm{e}^x}}{2} =$$

$$= \mathrm{e}^x \arcsin\sqrt{\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}} + \frac{\mathrm{e}^x\sqrt{\mathrm{e}^x} + \sqrt{\mathrm{e}^x} - \sqrt{\mathrm{e}^x} - \mathrm{e}^x\sqrt{\mathrm{e}^x}}{2\left(1+\mathrm{e}^x\right)} = \mathrm{e}^x \arcsin\sqrt{\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}}.$$

В і д п о в і д ь: $y' = \mathrm{e}^x \arcsin\sqrt{\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}}\,.$

Логарифмічне диференціювання

Приклад 2.46. Знайти похідну функції

$$y=\left(\sin^2 4x+1\right)^{x^4}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Задана функція є степенево-показниковою. Область визначення цієї функції є $x\in(-\infty,+\infty)$, а область значень $y\in[1,+\infty)$. Для знаходження похідної слід безпосередньо виконати логарифмічне диференціювання або застосувати формулу (2.36). Виконаємо логарифмічне диференціювання.

$$y=\left(\sin^2 4x+1\right)^{x^4};\qquad \ln y=\ln\left(\sin^2 4x+1\right)^{x^4};\qquad \ln y=x^4\ln\left(\sin^2 4x+1\right);$$

$$\left(\ln y\right)'=\left(x^4\ln\left(\sin^2 4x+1\right)\right)';\qquad \frac{1}{y}\,y'=4x^3\ln\left(\sin^2 4x+1\right)+x^4\,\frac{8\sin 4x\cos 4x}{\sin^2 4x+1};$$

$$y'=y\left(4x^3\ln\left(\sin^2 4x+1\right)+\frac{4x^4\sin 8x}{\sin^2 4x+1}\right);$$

$$y'=4\left(\sin^2 4x+1\right)^{x^4}x^3\left(\ln\left(\sin^2 4x+1\right)+\frac{x\sin 8x}{\sin^2 4x+1}\right).$$

В і д п о в і д ь: $y'=4\left(\sin^2 4x+1\right)^{x^4}x^3\left(\ln\left(\sin^2 4x+1\right)+\dfrac{x\sin 8x}{\sin^2 4x+1}\right).$

Приклад 2.47. Знайти похідну функції

$$y=\left(\frac{x^2+4}{x^2+9}\right)^{\sqrt{x}}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Область визначення цієї функції є $x\in[0;\infty)$.

Задана функція є степенево-показниковою. Отже, виконаємо покроково логарифмічне диференціювання, зважаючи на те, що y є величиною невід’ємною.

$$\ln y=\ln\left(\frac{x^2+4}{x^2+9}\right)^{\sqrt{x}};\quad \ln y=\sqrt{x}\ln\left(\frac{x^2+4}{x^2+9}\right);\quad \left(\ln y\right)'=\left(\sqrt{x}\left(\ln\left(x^2+4\right)-\ln\left(x^2+9\right)\right)\right)';$$

$$\frac{1}{y}\,y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\ln\left(x^2+4\right)-\ln\left(x^2+9\right)\right)+\sqrt{x}\left(\frac{2x}{x^2+4}-\frac{2x}{x^2+9}\right);$$

$$y'=y\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln\frac{x^2+4}{x^2+9}+2x\sqrt{x}\,\frac{5}{\left(x^2+4\right)\left(x^2+9\right)}\right).$$

Остаточно маємо

$$y'=\left(\frac{x^2+4}{x^2+9}\right)^{\sqrt{x}}\left(\ln\left(\frac{x^2+4}{x^2+9}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}+\frac{10x\sqrt{x}}{\left(x^2+4\right)\left(x^2+9\right)}\right).$$

В і д п о в і д ь: $y'=\left(\frac{x^2+4}{x^2+9}\right)^{\sqrt{x}}\left(\ln\left(\frac{x^2+4}{x^2+9}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}+\frac{10x\sqrt{x}}{\left(x^2+4\right)\left(x^2+9\right)}\right).$

ЗАУВАЖЕННЯ. Цей результат можна отримати і за допомогою формули (2.36).

Приклад 2.48. Знайти похідну функції

$$y=\left(x^2+1\right)\sqrt{x^4+1}\;4^{3x-9}\,\mathrm{e}^{\sin x}.$$

Р о з в ' я з а н н я

Областю значень заданої функції є $x\in(-\infty;+\infty)$.

Логарифмічне диференціювання зручно застосовувати і тоді, коли задана функція являє собою результат множення, ділення, піднесення до степеня і при цьому є громіздкою функцією. Отже, для заданої функції доцільно користуватися методом логарифмічного диференціювання,зважаючи на те, що y є величиною невід'ємною.

$$\ln y=\ln\left(\left(x^2+1\right)\sqrt{x^4+1}\;4^{3x-9}\;\mathrm{e}^{\sin x}\right).$$

Згідно з властивостями логарифма дістанемо

$$\ln y=\ln\left(x^2+1\right)+\ln\sqrt{x^4+1}+\ln 4^{3x-9}+\ln \mathrm{e}^{\sin x}.$$

Після спрощення матимемо

$$\ln y=\ln\left(x^2+1\right)+\frac{1}{2}\ln\left(x^4+1\right)+(3x-9)\ln 4+\sin x.$$

Диференціюємо ліву та праву частини цієї рівності:

$$(\ln y)'=\left(\ln\left(x^2+1\right)+\frac{1}{2}\ln\left(x^4+1\right)+(3x-9)\ln 4+\sin x\right)';$$

$$\frac{1}{y}y'=\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\,\frac{4x^3}{x^4+1}+3\ln 4+\cos x;\qquad y'=y\left(\frac{2x}{x^2+1}+\frac{2x^3}{x^4+1}+3\ln 4+\cos x\right);$$

$$y'=\left(x^2+1\right)\sqrt{x^4+1}\cdot 4^{3x-9}\;\mathrm{e}^{\sin x}\left(\frac{2x}{x^2+1}+\frac{2x^3}{x^4+1}+3\ln 4+\cos x\right).$$

В і д п о в і д ь: $y'=\left(x^2+1\right)\sqrt{x^4+1}\cdot 4^{3x-9}\;\mathrm{e}^{\sin x}\left(\frac{2x}{x^2+1}+\frac{2x^3}{x^4+1}+3\ln 4+\cos x\right).$

Приклад 2.49. Знайти похідну функції

$$y=\frac{(x+8)^6(3+5x)^4\sqrt[6]{(2+5x)^5}}{\left(x^2+1\right)^3\left(4+x^2\right)^5}.$$

Р о з в ' я з а н н я

Задана функція є складною. Область визначення цієї функції є $x\in\left[-\frac{2}{5};+\infty\right)$. Її похідну можна знайти, послідовно використовуючи формули похідної добутку та частки функцій. Але у даному разі більш раціонально застосувати метод логарифмічного диференціювання.

$$\ln y=\ln\frac{(x+8)^6(3+5x)^4\sqrt[6]{(2+5x)^5}}{\left(x^2+1\right)^3\left(4+x^2\right)^5}.$$

Спростимо вираз згідно з властивостями логарифмів:

$$\ln y=6\ln|x+8|+4\ln|3+5x|+\frac{5}{6}\ln|2+5x|-3\ln\left(x^2+1\right)-5\ln\left(4+x^2\right).$$

Продиференціюємо обидві частини останньої рівності, скориставшись формулою (2.34):

$$\frac{1}{y}y'=\frac{6}{x+8}+\frac{4\cdot5}{3+5x}+\frac{5\cdot5}{6(2+5x)}-\frac{3\cdot2x}{x^2+1}-\frac{5\cdot2x}{4+x^2}.$$

Остаточно здобудемо

$$y'=\frac{(x+8)^6(3+5x)^4\sqrt[6]{(2+5x)^5}}{\left(x^2+1\right)^3\left(4+x^2\right)^5}\left(\frac{6}{x+8}+\frac{20}{3+5x}+\frac{25}{6(2+5x)}-\frac{6x}{x^2+1}-\frac{10x}{4+x^2}\right).$$

В і д п о в і д ь:

$$y'=\frac{(x+8)^6(3+5x)^4\sqrt[6]{(2+5x)^5}}{\left(x^2+1\right)^3\left(4+x^2\right)^5}\left(\frac{6}{x+8}+\frac{20}{3+5x}+\frac{25}{6(2+5x)}-\frac{6x}{x^2+1}-\frac{10x}{4+x^2}\right).$$

Приклад 2.50. Знайти похідну функції

$$y=\frac{(2+\sin4x)\left(3x^2+1\right)^2\sqrt{4+\cos x}}{2^x\sqrt{x^2+16}\sqrt[7]{\left(2x^4+3\right)^2}}.$$

Р о з в ' я з а н н я

У цьому випадку доцільно користуватися також методом логарифмічного диференціювання. Оскільки $y>0$, а також є додатним кожен з множників правої частини для будь-якого *x*, то модуль у процесі логарифмування використовувати не будемо.

$$\ln y=\ln\left(\frac{(2+\sin 4x)\left(3x^2+1\right)^2\sqrt{4+\cos x}}{2^x\sqrt{x^2+16}\sqrt[7]{\left(2x^4+3\right)^2}}\right).$$

Праву частину можна спростити:

$$\ln y=\ln(2+\sin 4x)+\ln\left(3x^2+1\right)^2+\ln\sqrt{4+\cos x}-\ln 2^x-\ln\sqrt{x^2+16}-\ln\sqrt[7]{\left(2x^4+3\right)^2},$$

$$\ln y=\ln(2+\sin 4x)+2\ln\left(3x^2+1\right)+\frac{1}{2}\ln(4+\cos x)-x\ln 2-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+16\right)-\frac{2}{7}\ln\left(2x^4+3\right).$$

Диференцюємо ліву та праву частини рівності:

$$(\ln y)'=\Big(\ln\,(2+\sin\,4x)+2\ln\left(3x^2+1\right)+\frac{1}{2}\ln\,(4+\cos\,x)-$$

$$-x\ln 2-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+16\right)-\frac{2}{7}\ln\left(2x^4+3\right)\Big)';$$

$$\frac{1}{y}y'=\frac{4\cos 4x}{2+\sin 4x}+\frac{12x}{3x^2+1}-\frac{\sin x}{2(4+\cos x)}-\ln 2-\frac{x}{x^2+16}-\frac{16x^3}{7\left(2x^3+3\right)},$$

звідки

$$y'=\frac{(2+\sin 4x)\left(3x^2+1\right)^2\sqrt{4+\cos x}}{2^x\sqrt{x^2+16}\sqrt[7]{\left(2x^4+3\right)^2}}\left(\frac{4\cos 4x}{2+\sin 4x}+\frac{12x}{3x^2+1}-\frac{\sin x}{2(4+\cos x)}-\ln 2-\frac{x}{x^2+16}-\frac{16x^3}{7\left(2x^3+3\right)}\right).$$

В і д п о в і д ь:

$$y'=\frac{(2+\sin 4x)\left(3x^2+1\right)^2\sqrt{4+\cos x}}{2^x\sqrt{x^2+16}\sqrt[7]{\left(2x^4+3\right)^2}}\left(\frac{4\cos 4x}{2+\sin 4x}+\frac{12x}{3x^2+1}-\frac{\sin x}{2(4+\cos x)}-\ln 2-\frac{x}{x^2+16}-\frac{16x^3}{7\left(2x^3+3\right)}\right).$$

Окремі застосовування похідних

Приклад 2.51. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = x^2 - 1$ з точкою дотику $M_0(1, 0)$.

Р о з в ’ я з а н н я

Скористаємось рівнянням дотичної до кривої $y = f(x)$ з точкою дотику $M_0(x_0, y_0)$:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)\,(x-x_0).$$

У даному разі $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, $f(x)=x^2-1$, тобто $f(1) = 0$. Знаходимо $f'(x) = 2x$ та $f'(1) = 2$.

Тоді рівняння дотичної матиме вигляд $y = 2\,(x - 1)$ або $2x - y - 2 = 0$.

В і д п о в і д ь: $2x - y - 2 = 0$.

Приклад 2.52. Скласти рівняння нормалі до кривої $y = \dfrac{3}{x}$ у точці $M_0(1, 3)$.

Р о з в ' я з а н н я

Скористаємось рівнянням нормалі до кривої у точці $M_0\left(x_0, y_0\right)$.

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'\left(x_0\right)}(x - x_0).$$

У даному разі $x_0 = 1$, $y_0 = 3$, $f\left(x\right) = \dfrac{3}{x}$, тобто $f(1) = 3$. Обчислимо $f'(x) = -\dfrac{3}{x^2}$; $f'(1) = -3$.

Тоді можна записати рівняння нормалі як

$$y - 3 = \frac{1}{3}(x - 1) \quad \text{або} \quad x - 3y + 8 = 0.$$

В і д п о в і д ь: $x - 3y + 8 = 0$.

Приклад 2.53. Скласти рівняння дотичної та нормалі до графіка функції

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

у точці з абсцисою $x = \sqrt{2}$.

Р о з в ' я з а н н я

$$f'(x) = \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)' = \frac{2\left(1+x^2\right) - 2x2x}{\left(1+x^2\right)^2} = 2\frac{1+x^2-2x^2}{\left(1+x^2\right)^2} = 2\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2},$$

$$f'\left(\sqrt{2}\right) = 2\frac{1-2}{\left(1+2\right)^2} = -\frac{2}{9},$$

$$f\left(\sqrt{2}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{1+2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Знаходимо рівняння дотичної

$$y - \frac{2\sqrt{2}}{3} = -\frac{2}{9}\left(x - \sqrt{2}\right), \quad \text{звідки} \quad y = -\frac{2}{9}x + \frac{8\sqrt{2}}{9}.$$

Знаходимо рівняння нормалі

$$y - \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{9}{2}\left(x - \sqrt{2}\right), \quad \text{звідки} \quad y = \frac{9}{2}x - \frac{23\sqrt{2}}{6}.$$

В і д п о в і д ь: $y = -\dfrac{2}{9}x + \dfrac{8\sqrt{2}}{9}$; $y = \dfrac{9}{2}x - \dfrac{23\sqrt{2}}{6}$.

Приклад 2.54. Під якими кутами синусоїда $y = \sin x$ перетинає вісь Ox?

Р о з в ' я з а н н я

Кутом між кривою та прямою вважається кут між заданою прямою та дотичною до кривої у точці перетину прямої та кривої.

Знайдемо точки перетину кривої $y = \sin x$ з прямою $y = 0$. Для цього розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} y = \sin x; \\ y = 0. \end{cases}$$

Звідси, $\sin x = 0;$ $x = \pi k,$ де $k \in Z.$

Зрозуміло, що існує дві множини дотичних. До кожної множини входять дотичні, паралельні між собою. До однієї множини входять дотичні, які проведено до синусоїди у точках $x = 2\pi k,$ де $k \in Z$, а до другої – у точках $x = \pi(2n+1),$ де $n \in Z$.

$$f'(x) = \cos x;$$

$$f'(2\pi k) = \cos 2\pi k = 1, \text{ де } k \in Z;$$

$$f'(\pi(2n+1)) = \cos(2\pi n + \pi) = \cos\pi = -1, \text{ де } n \in Z.$$

Отже, синусоїда перетинає вісь Ox у точках $x = 2\pi k$, де $k \in Z$, під таким кутом α, що $\operatorname{tg}\alpha = 1$, звідки $\alpha = \frac{\pi}{4}$, та у точках $x = \pi(2n+1)$, де $n \in Z$, під таким кутом α, що $\operatorname{tg}\alpha = -1$, тоді $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.

Відповідь: $\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}$.

Приклад 2.55. Знайти кути, під якими графік функції

$$y = (x-1)^3(x-2)^2(x-3)$$

перетинає вісь Ox.

Розв'язання

Точками перетину графіка функції з віссю Ox є точки $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Знайдемо похідну функції y.

$$y' = ((x-1)^3(x-2)^2(x-3))' = 3(x-1)^2(x-2)^2(x-3) +$$
$$+ 2(x-1)^3(x-2)(x-3) + (x-1)^3(x-2)^2.$$

Значення похідної функції у точці $M_0(x_0, y_0)$ дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до кривої у точці $M_0(x_0, y_0)$.

Знайдемо значення похідної у точках $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$:

$$f'(1) = 0, \quad f'(2) = 0, \quad f'(3) = 8.$$

Тим самим знайдено кутові коефіцієнти дотичних: $k_1 = 0$; $k_2 = 0$; $k_3 = 8$.

Оскільки $k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$, $k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$, $k_3 = \operatorname{tg}\alpha_3$, то виходить, що $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = \operatorname{arctg} 8 \approx 83°$. Отже, задана крива перетинає вісь Ox тричі під кутами $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = \operatorname{arctg} 8 \approx 83°$.

Відповідь: $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = \operatorname{arctg} 8 \approx 83°$.

Приклад 2.56. Знайти точки, у яких дотичні до графіка функції
$$y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$$
є паралельні осі Ox.

Р о з в ' я з а н н я

Якщо дотична паралельна осі Ох, то її кутовий коефіцієнт $k = 0$. Знайдемо
$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2).$$
Розв'яжемо рівняння $f'(x) = 0$, тобто $6(x^2 - x - 2) = 0$. Звідси $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. Отже, дотичні до графіка заданої функції $y = f(x)$ у точках $M_1(-1, 14)$ та $M_2(2, -13)$ є паралельні осі Ox.

В і д п о в і д ь: $M_1(-1, 14)$ та $M_2(2, -13)$.

Приклад 2.57. Визначити, в яких точках та під яким кутом перетинаються графіки функцій $f_1(x) = x - x^3$ та $f_2(x) = 5x$.

Р о з в ' я з а н н я

Знайдемо точки перетину графіків функцій з системи рівнянь
$$\begin{cases} y = x - x^3; \\ y = 5x, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 5x; \\ x - x^3 = 5x, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 5x; \\ x\left(1 - x^2 - 5\right) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 5x; \\ \left[\begin{array}{l} x = 0; \\ x^2 + 4 = 0. \end{array}\right. \end{cases}$$
Звідси $x = 0$; $y = 0$. Отже, графіки перетинаються у точці $O(0, 0)$.

Знайдемо похідні функцій $f_1(x)$ та $f_2(x)$:
$$f_1'(x) = 1 - 3x^2; \quad f_2'(x) = 5.$$
Знайдемо кутові коефіцієнти дотичних до графіків функцій $f_1(x)$ та $f_2(x)$ у точці $O(0, 0)$:
$$k_1 = f_1'(0) = 1; \quad k_2 = f_2'(0) = 5.$$
Знайдемо кути між дотичними у точці O за формулою
$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right|.$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{1-5}{1+1\cdot 5}\right| = \left|\frac{-4}{6}\right| = \frac{2}{3}.$$
Отже, $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{2}{3} \approx 34°$.

В і д п о в і д ь: $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{2}{3} \approx 34°$.

Приклад 2.58. Скласти рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y = \sqrt[3]{x-1}$ у точці з абсцисою $x = 1$.

Р о з в ' я з а н н я

Знайдемо похідну
$$f'(x) = \left(\left(x-1\right)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}\left(x-1\right)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{\left(x-1\right)^2}}.$$

Функція $f(x)$ у точці $x = 1$ є неперервною, а

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(1+\Delta x\right)-f\left(1\right)}{\Delta x} = f'\left(1\right) = \infty .$$

Ріівняння дотичної у точці $x = 1$ має вигляд $x = 1$, а рівняння нормалі є $y = 0$.

В і д п о в і д ь: $x=1$; $y=0$.

Тепер розглянемо випадок, коли функція $y = f(x)$ є неперервна у точці x_0, а $f'(x) = 0$. Тоді рівняння нормалі має вигляд $x = x_0$.

Приклад 2.59. Скласти рівняння нормалі до графіка функції $y = \dfrac{x^3}{\left(2-x\right)^2}$ у точці з абсцисою $x = 6$.

Р о з в ’ я з а н н я

Знайдемо похідну

$$f'(x) = \frac{3x^2\left(2-x\right)^2 + 2\left(2-x\right)x^3}{\left(2-x\right)^4},$$

$$f'(x) = \frac{x^2\left(6-x\right)}{\left(2-x\right)^3} \quad \text{та} \quad f'(6) = 0 .$$

Тоді рівняння нормалі буде $x = 6$.

В і д п о в і д ь: $x=6$.

Приклад 2.60. Знайти похідну функції, що є оберненою до функції $f(x) = 9x^3 + 5x$ на проміжку $x \in \left(-\infty, +\infty\right)$.

Р о з в ’ я з а н н я

Задана функція неперервна в області визначення і є зростаючою.

$$y' = f'(x) = 27x^2 + 5 \neq 0.$$

Отже, на цю функцію поширюється теорема про похідну оберненої функції:

$$x' = \left(\frac{1}{y'}\right)' = \frac{1}{27x^2+5}.$$

В і д п о в і д ь: $x' = \dfrac{1}{27x^2+5}$.

Приклад 2.61. Кількість електрики Q (в кулонах), що проходить через поперечний переріз провідника, змінюється за законом $Q = 3t^2 + 2t$ (t – сек). Знайти силу струму наприкінці п’ятої секунди.

Р о з в ’ я з а н н я

Сила струму I в момент t дорівнює миттєвій швидкості, з якою змінюється кількість електрики, що протікає через поперечний переріз провідника. Отже,

$$I\left(t\right) = Q'\left(t\right) = 6t + 2, \qquad I(5) = 6\cdot 5 + 2 = 32,$$

тобто сила струму наприкінці п’ятої секунди дорівнює 32 (А).

В і д п о в і д ь: 32 (А).

Приклад 2.62. Матеріальна точка переміщується за законом

$$S(t) = \frac{4-t}{2-3t} \text{ (м).}$$

Визначити швидкість точки в момент $t = 7$ (с).

Р о з в ’ я з а н н я

Знайти швидкість, з якою переміщується матеріальна точка, можна за допомогою похідної. Відомо, що

$$V(t) = S'(t).$$

Отже,

$$V(t) = \left(\frac{4-t}{2-3t}\right)' = \frac{(4-t)'(2-3t)-(4-t)(2-3t)'}{(2-3t)^2} = \frac{-2+3t+12-3t}{(2-3t)^2} = \frac{10}{(2-3t)^2} \text{ (м/с)};$$

$$V(7) = \frac{10}{361} \approx 0{,}0277 \text{ (м/с).}$$

В і д п о в і д ь: $V(7) \approx 0{,}0277$ м/с.

Приклад 2.63. Матеріальна точка переміщується прямолінійно за законом $S(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 - 8t + 1$ (м). У який момент швидкість буде найбільшою?

Р о з в ’ я з а н н я

Визначимо швидкість $V(t) = S'(t)$.

$$V(t) = \left(-t^2 + 6t - 8\right) \text{ (м/с).}$$

Дістали квадратичну функцію. Графіком цієї функції є парабола, яка перетинає вісь Ot, коли $t = 2$ та коли $t = 4$. Вітки параболи напрямлені донизу, а вершиною параболи є точка C (3, 1). Отже, коли $t = 3$ (с) швидкість досягає найбільшого значення $V(3) = 1$ м/с.

В і д п о в і д ь: $t = 3$ с.

1.5 Параметрично задані функції та їхнє диференціювання

1.5.1 Параметрично задані функції

Інколи функціональну залежність між змінними x та y задають за допомогою проміжкової змінної, називаної параметром (п.2.1.7, гл. 2, розділ I).

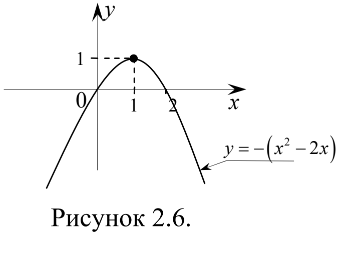


Рисунок 2.6.

Приміром, функція $y = -\left(x^2 - 2x\right)$ (рис.2.6) може бути задана у параметричній формі таким чином

$$\begin{cases} x = 1 - t; \\ y = 1 - t^2, \end{cases} \quad \text{де} \quad t \in R.$$

Дійсно, якщо $x=1-t$, то $t=1-x$.Тоді $y=1-(1-x)^2$, $y=1-1+2x-x^2$, тобто $y=-\left(x^2-2x\right)$.

Над функціями, заданими у параметричній формі, доводиться виконувати ті чи інші операції, зокрема, диференціювання. Для того, щоб знайти похідну $y'=f'(x)$ функції $y=f(x)$, яка задана у параметричній формі

$$\begin{cases} x=\varphi(t); \\ y=\psi(t), \end{cases}$$

де $t\in[\alpha;\beta]$, можна, виконавши певні перетворення, дістати функцію $y=f(x)$ та знайти її похідну. Але у більшості випадків знаходження функції у явно заданій формі потребує багато зусиль. Про те, як можна знайти похідну $y'=f'(x)$, користуючись лише параметричним завданням функції, йдеться далі.

1.5.2 Похідна параметрично заданої функції

Розглянемо функцію $y=f(x)$, задану параметрично.

$$\begin{cases} x=\varphi(t); \\ y=\psi(t), \end{cases} \tag{2.44}$$

де t – параметр, $t\in[\alpha,\beta]$.

Нехай функція $x=\varphi(t)$ задовольняє умови теореми про похідну оберненої функції, а функція $y=\psi(t)$ є диференційовною в інтервалі (α,β).

Наявність функції $t=\varphi^{-1}(x)$ дозволяє стверджувати, що від параметрично заданої функції можна перейти до явно заданої функції $y=y(x)$. Поставимо за мету знайти похідну функції y по змінній x, користуючись лише параметричним заданням цієї функції. Позначимо шукану похідну $y'=f'(x)$ через y'_x.

Оскільки $t=\varphi^{-1}(x)$, то функцію $y=\psi(t)$ можна записати у вигляді $y=\psi\left(\varphi^{-1}(x)\right)$. У такий спосіб дістали складну функцію, яка утворена з диференційовних функцій і, згідно з теоремою про похідну складної функції, сама є диференційовною функцією.

$$y'_x=\psi'(t)\left(\varphi^{-1}(x)\right)'.$$

Якщо застосувати теорему про похідну оберненої функції, то здобудемо похідну

$$y'_x=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

яку можна записати у вигляді

$$y'_x=\frac{y'(t)}{x'(t)}. \tag{2.45}$$

Приклади до пункту 1.5

Приклад 2.64. Знайти похідну параметрично заданої функції
$$\begin{cases} x = \operatorname{arctg}(2t+1); \\ y = \arcsin(2t+1), \end{cases} \quad \text{де } t \in (-1,\, 0).$$

Р о з в ' я з а н н я

Задані функції $x(t)$ та $y(t)$ є диференційовні. Знайдемо їхні похідні:
$$x_t' = \left(\operatorname{arctg}(2t+1)\right)' = \frac{1}{1+(2t+1)^2} \cdot 2; \qquad y_t' = \frac{1}{\sqrt{1-(2t+1)^2}} \cdot 2.$$

Перевіримо умову $x_t' \neq 0$. Дійсно, $\dfrac{2}{1+(2t+1)^2} \neq 0$. Отже, можна користуватись формулою (2.45). Тоді
$$y_x' = \frac{2}{\sqrt{1-(2t+1)^2}} \cdot \frac{1+(2t+1)^2}{2} = \frac{4t^2+4t+2}{\sqrt{-4t(t+1)}} = \frac{2t^2+2t+1}{\sqrt{-t(t+1)}}.$$

В і д п о в і д ь: $y_x' = \dfrac{2t^2+2t+1}{\sqrt{-t(t+1)}}$.

Приклад 2.65. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої у точці, що відповідає значенню параметра $t_0 = 1$, якщо
$$\begin{cases} x = \ln\left(1+t^2\right); \\ y = t - \operatorname{arctg} t, \end{cases} \quad \text{де } t \in (-\infty,\, \infty).$$

Р о з в ' я з а н н я

Знайдемо координати точки $M_0(x_0,\, y_0)$, яка є точкою дотику та через яку проходить нормаль. Якщо $t_0 = 1$, то
$$x_0 = \ln(1+1) = \ln 2; \quad y_0 = 1 - \operatorname{arctg} 1 = 1 - \frac{\pi}{4}; \quad M_0\left(\ln 2,\, 1-\frac{\pi}{4}\right).$$

Задані функції $x(t)$ та $y(t)$ є диференційовні. Знайдемо похідну y_x' за формулою (2.45).
$$x'(t) = \frac{2t}{1+t^2}; \quad y'(t) = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Тоді
$$y_x' = \frac{t^2}{1+t^2} : \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{або} \quad y_x' = \frac{t}{2}.$$

Якщо $t = 1$, то $y_x'(1) = \dfrac{1}{2}$.

Рівняння дотичної та рівняння нормалі будемо шукати у вигляді

$$y - y_0 = k\,(x - x_0).$$

Для дотичної $k = \dfrac{1}{2}$. Для нормалі $k = -\dfrac{1}{\frac{1}{2}} = -2.$

Отже дістанемо

$y - \left(1 - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}\left(x - \ln 2\right)$, тобто $y = \dfrac{1}{2}x + \left(1 - \dfrac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}\right)$ – рівняння дотичної;

$y - \left(1 - \dfrac{\pi}{4}\right) = -2\left(x - \ln 2\right)$, тобто $y = -2x + \left(1 - \dfrac{\pi}{4} + \ln 4\right)$ – рівняння нормалі.

В і д п о в і д ь: $y = \dfrac{1}{2}x + \left(1 - \dfrac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}\right)$; $y = -2x + \left(1 - \dfrac{\pi}{4} + \ln 4\right)$.

Приклад 2.66. Знайти похідну y'_x функції, заданої у параметричній формі

$$\begin{cases} x = e^{e^t}; \\ y = e^{-e^t}, \end{cases} \quad \text{де } t \in (-\infty, +\infty).$$

Р о з в ' я з а н н я

Задані функції $x(t)$ та $y(t)$ є диференційовні. Тоді

$$x'_t = e^{e^t} e^t; \qquad y'_t = -e^{-e^t} e^t.$$

Оскільки, $x'_t \neq 0$, то можна користуватись формулою (2.45).

$$y'_x = \frac{-e^{-e^t} e^t}{e^{e^t} e^t} = -e^{-2e^t}.$$

В і д п о в і д ь: $y'_x = -e^{-2e^t}$.

Приклад 2.67 Знайти похідну y'_x функції, заданої у параметричній формі

$$\begin{cases} x = \ln \sin\dfrac{t}{2}; \\ y = \ln \sin t, \end{cases} \quad \text{де } t \in (0, \pi).$$

Р о з в ' я з а н н я

Задані функції є диференційовні.

$$x'_t = \frac{1}{\sin\frac{t}{2}} \cos\frac{t}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}; \qquad y'_t = \frac{1}{\sin t}\cos t = \operatorname{ctg} t.$$

В інтервалі $(0, \pi)$ $x'_t \neq 0$. Тоді

$$y'_x = \frac{\operatorname{ctg} t}{\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}} = 2\,\frac{\cos t}{\sin t}\,\frac{\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}} = 2\frac{\cos t\,\sin\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}} = \frac{\cos t}{\cos^2\frac{t}{2}} = \frac{\cos t}{\frac{1}{2}\left(1 + \cos t\right)} = \frac{2\cos t}{1 + \cos t}.$$

В і д п о в і д ь: $y'_x = \dfrac{2\cos t}{1+\cos t}$.

Приклад 2.68. Знайти похідну y'_x функції, заданої у параметричній формі

$$\begin{cases} x = \left(t^3 - 2t^2 + 3t - 4\right)\mathrm{e}^t; \\ y = \left(t^3 - 2t^2 + 4t - 4\right)\mathrm{e}^t, \end{cases} \quad \text{де } t \in (1, +\infty).$$

Р о з в ' я з а н н я

Задані функції є диференційовні. Тоді

$$x'_t = \left(3t^2 - 4t + 3\right)\mathrm{e}^t + \left(t^3 - 2t^2 + 3t - 4\right)\mathrm{e}^t, \qquad x'_t = \mathrm{e}^t\left(t^3 + t^2 - t - 1\right);$$

$$y'_x = \left(3t^2 - 4t + 4\right)\mathrm{e}^t + \left(t^3 - 2t^2 + 4t - 4\right)\mathrm{e}^t, \qquad y'_t = \mathrm{e}^t\left(t^3 + t^2\right).$$

Перевіримо, чи виконується умова $x'_t \neq 0$. З цією метою розв'яжемо таке рівняння:

$$\mathrm{e}^t\left(t^3 + t^2 - t - 1\right) = 0.$$

$t^3 + t^2 - t - 1 = 0, \quad t^2(t+1) - (t+1) = 0, \quad (t^2 - 1)(t+1) = 0, \quad (t-1)(t+1)^2 = 0.$

Маємо корені $t = -1$; $t = 1$, які не належать до заданого проміжку $(1, +\infty)$. Отже, $x'_t \neq 0$. Тоді

$$y'_x = \frac{\mathrm{e}^t\left(t^3 + t^2\right)}{\mathrm{e}^t\left(t^2 - 1\right)\left(t + 1\right)} = \frac{t^2\left(t + 1\right)}{\left(t^2 - 1\right)\left(t + 1\right)} = \frac{t^2}{t^2 - 1}.$$

В і д п о в і д ь: $y'_x = \dfrac{t^2}{t^2 - 1}$.

ЗАУВАЖЕННЯ. Слід мати на увазі, що формулу (2.45) можна застосовувати лише у випадку, коли функції $\varphi(t)$ та $\psi(t)$ задовольняють умови, сформульовані у п. 1.5.2.

1.6 Диференціал функції

1.6.1 Поняття диференціала функції

Поряд з похідною існує ще одне фундаментальне поняття диференціального числення – диференціал функції.

Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна у точці x та деякому її околі. Як відомо, приріст функції у цій точці може бути подано у вигляді

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(x, \Delta x)\Delta x,$$

де $\alpha(x, \Delta x)$ є нескінченно малою, коли $\Delta x \to 0$.

Права частина цієї рівності складається з двох доданків. Якщо $\Delta x \to 0$, то обидва доданки стають нескінченно малими. При цьому перший доданок $f'(x)\Delta x$ та Δx є нескінченно малими одного порядку малості. Другий доданок, як добуток двох нескінченно малих, є нескінченно малою більш високого порядку ніж перший доданок. Внаслідок цього можна стверджувати, що перший доданок є головною частиною приросту функції, якщо $f'(x)\neq 0$. До того ж, вираз $f'(x)\Delta x$ є лінійною відносно Δx функцією.

В и з н а ч е н н я. ***Диференціалом функції*** $y=f(x)$ у точці x, який відповідає приросту аргументу Δx, називається головна, лінійна відносно Δx, частина приросту функції у точці x, якщо $f'(x)\neq 0$. При цьому використовується позначення

$$dy=f'(x)\Delta x. \tag{2.46}$$

У випадку, коли $f'(x)=0$, перший доданок перестає бути головною частиною приросту функції, оскільки тоді перший доданок дорівнює нулю, а другий – лише прямує до нуля. За домовленістю вважається, що і в цьому випадку диференціал функції визначається формулою (2.46) і дорівнює нулю.

1.6.2 Геометричний та фізичний зміст диференціала

Звернемось до рис. 2.7. Точка $M(x, y)$ належить до графіка функції $y=f(x)$, MT – дотична до графіка функції у точці x з точкою дотику $M(x, y)$.

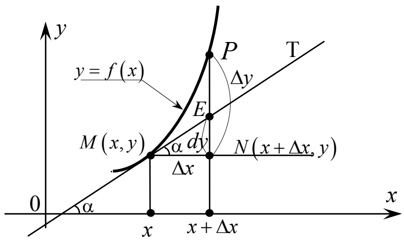


Рисунок 2.7

Відрізок MN паралельний осі Ox, відрізок PN – паралельний осі Oy. Кутовий коефіцієнт дотичної $k=\operatorname{tg}\alpha=f'(x)$; $|MN|=\Delta x$; $|NP|=\Delta y$. З прямокутного трикутника MNE маємо: $|NE|=|MN|\operatorname{tg}\alpha$, $|NE|=f'(x)\,\Delta x$. Тоді з формули (2.46) випливає, що $|NE|=dy$. Отже, ***геометричний зміст*** диференціала функції полягає у тому, що диференціал функції дорівнює приростові ординати точки на дотичній, яка відповідає значенню аргументу $x+\Delta x$.

Розглянемо ***фізичний*** зміст диференціала.

Нехай аргумент x визначає час, а $y=f(x)$ є ординатою точки з аргументом x на графіку функції. Тоді відрізок $|NP|=\Delta y$ показує, наскільки змінилась ордината точки $M(x, y)$ впродовж часу Δx. Відрізок $|NE|=f'(x)\,\Delta x=dy$ показує, наскільки має змінитись ордината точки $M(x, y)$, якщо впродовж часу Δx на відрізку $[x, x+\Delta x]$ точка рухається з незмінною швидкістю $f'(x)$.

1.6.3 Диференціал незалежної змінної

Розглянемо функцію $y=x$. З формули (2.46) випливає, що $dy=x'\Delta x$, тобто $dy=\Delta x$, звідки $dx=\Delta x$. Надалі будемо вважати, що диференціал dx незалежної змінної визначається формулою

$$dx = \Delta x. \qquad (2.47)$$

Тоді диференціал dy функції $y = f(x)$ можна подати у вигляді:

$$dy = f'(x)dx. \qquad (2.48)$$

ЗАУВАЖЕННЯ. З формули (2.48) виходить, що

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}. \qquad (2.49)$$

Тому похідну функції y за змінною x можна позначати символом $\frac{dy}{dx}$ (читається „де ігрек за де ікс“).

1.6.4 Інваріантність форми диференціала

Нехай $y = f(x)$ – функція незалежної змінної x. Тоді, згідно з формулою (2.48),

$$dy = f'(x)dx.$$

Тепер розглянемо випадок, коли $x = \varphi(t)$ – диференційовна функція незалежної змінної t, а $y = f(\varphi(t))$ – складна функція аргументу t, де x виконує роль проміжної змінної. У такому разі $y' = f'(x)\varphi'(t)$, а $dy = f'(x)\varphi'(t)dt$. Оскільки для функції $x = \varphi(t)$ диференціал $dx = \varphi'(t)dt$, то для функції $y = f(x)$, де $x = \varphi(t)$, диференціал dy знаходиться за формулою

$$dy = f'(x)dx.$$

Для диференційовної функції $y = f(x)$, у випадку, коли x незалежна змінна, і у випадку, коли x є залежною змінною від t, є справедливою одна і та сама формула $dy = f'(x)dx$. Така властивість диференціала називається ***інваріантністю форми першого диференціала.***

Незалежно від того, простою чи складною є функція $y = f(x)$, завжди похідна $f'(x)$ є відношенням диференціала функції dy до диференціала аргументу dx, тобто

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Звідси нескладно в інший спосіб отримати правило диференціювання складної функції, а саме

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dx}{dx} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt},$$

тобто

$$\left(f\left(\varphi(t)\right)\right)' = f'(x)\varphi'(t),$$

а також правило диференціювання оберненої функції

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}},$$

тобто

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}.$$

1.6.5 Правила та формули знаходження диференціалів

Будемо вважати, що $u(x), v(x)$ – диференційовні функції, а c – довільна стала.

Таблиця 2. Правила та формули знаходження диференціалів

№ п/п	Функція	Формула	№ п/п	Функція	Формула
1	$y=c$	$dy=0$	2	$y=x$	$dy=dx$
3	$y=u(x)\pm v(x)$	$dy=du(x)\pm dv(x)$	4	$y=u(x)v(x)$	$dy=v(x)du(x)+u(x)dv(x)$
5	$y=cu(x)$	$dy=c\,du(x)$	6	$y=\frac{u(x)}{v(x)}$	$dy=\frac{v(x)du(x)-u(x)dv(x)}{v^2(x)}$, де $v(x)\neq 0$.
7	$y=\frac{u(x)}{c}$	$dy=\frac{du(x)}{c}$, де $c\neq 0$	8	$y=\frac{c}{v(x)}$	$dy=-\frac{c}{v^2(x)}d\,v(x)$, де $v(x)\neq 0$.
9	$y=x^{\alpha}$	$dy=\alpha x^{\alpha-1}dx$	10	$y=\sqrt{x}$	$dy=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$
11	$y=\frac{1}{x}$	$dy=-\frac{1}{x^2}dx$	12	$y=a^x$	$dy=a^x\ln a\,dx$
13	$y=\mathrm{e}^x$	$dy=\mathrm{e}^x dx$	14	$y=\log_a x$	$dy=\frac{1}{x\ln a}dx$
15	$y=\ln x$	$dy=\frac{1}{x}dx$	16	$y=\sin x$	$dy=\cos x\,dx$
17	$y=\cos x$	$dy=-\sin x\,dx$	18	$y=\mathrm{tg}\,x$	$dy=\frac{1}{\cos^2 x}dx$
19	$y=\mathrm{ctg}\,x$	$dy=-\frac{1}{\sin^2 x}dx$	20	$y=\arcsin x$	$dy=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
21	$y=\arccos x$	$dy=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$	22	$y=\mathrm{arctg}\,x$	$dy=\frac{1}{1+x^2}dx$
23	$y=\mathrm{arcctg}\,x$	$dy=-\frac{1}{1+x^2}dx$	24	$y=\mathrm{sh}\,x$	$dy=\mathrm{ch}\,x\,dx$
25	$y=\mathrm{ch}\,x$	$dy=\mathrm{sh}\,x\,d\,x$	26	$y=\mathrm{th}\,x$	$dy=\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}dx$
27	$y=\mathrm{cth}\,x$	$dy=-\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}dx$			

1.6.6 Застосовування диференціала до наближених обчислень

Як зазначалось раніше, приріст функції у точці та її диференціал у цій точці відрізняються лише на нескінченно малу більш високого порядку малості ніж Δx, тобто

$$\Delta y \approx d\,y\,. \qquad (2.50)$$

Зважаючи на те, що $\Delta y = f\left(x+\Delta x\right) - f\left(x\right)$, а $dy = f'(x)\Delta x$, маємо наближену рівність

$$f\left(x+\Delta x\right) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$$

чи

$$f\left(x+\Delta x\right) \approx f\left(x\right) + f'\left(x\right)\Delta x\,. \qquad (2.51)$$

Для того, щоб підкреслити, що при користуванні цією формулою x є деяким фіксованим значенням x_0, запишемо формулу у вигляді

$$f\left(x_0+\Delta x\right) \approx f\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right)\Delta x\,. \qquad (2.52)$$

На підставі формули (2.52) можна знаходити значення функції у точках $x_0+\Delta x$, близьких до точки x_0, якщо Δx достатньо мале. Якщо припустити, що $x_0+\Delta x = x$, то формулу (2.52) можна записати у такий спосіб

$$f\left(x\right) \approx f\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right). \qquad (2.53)$$

Зокрема, якщо $x_0 = 0$, то маємо частинний випадок формули (2.53):

$$f\left(x\right) \approx f\left(0\right) + f'\left(0\right)\cdot x\,. \qquad (2.54)$$

Тепер нескладно побачити, що при користуванні формулою (2.53) функція $f(x)$ наближено замінюється лінійною функцією. Геометрично це означає, що ділянка кривої $y=f(x)$, яка дотикається до точки $\left(x_0,\, f\left(x_0\right)\right)$, замінюється на відрізок дотичної $y = f\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)$, проведеної до кривої у цій точці.

Розглянемо деякі частинні випадки формули (2.54).

1) $f(x) = \left(1+x\right)^{\frac{1}{n}}$; $\quad f\left(x+\Delta x\right) = \left(1+x+\Delta x\right)^{\frac{1}{n}}$; $\quad f'(x) = \dfrac{1}{n}\left(1+x\right)^{\frac{1}{n}-1}$.

$f\left(0\right)=1$; $\; f\left(0+\Delta x\right) = \left(1+\Delta x\right)^{\frac{1}{n}}$; $\; f'\left(0\right) = \dfrac{1}{n}$.

Звідси за формулою (2.54) здобудемо

$$\left(1+\Delta x\right)^{\frac{1}{n}} \approx 1 + \frac{\Delta x}{n}. \qquad (2.55)$$

2) $f(x) = \sin x$; $\quad f\left(x+\Delta x\right) = \sin\left(x+\Delta x\right)$; $\quad f'(x) = \cos x$.

$f\left(0\right) = 0$; $\quad f\left(0+\Delta x\right) = \sin\Delta x$; $\quad f'\left(0\right) = 1$.

Тоді

$$\sin\Delta x \approx \Delta x. \qquad (2.56)$$

3) $f(x) = \mathrm{e}^x$; $\quad f\left(x+\Delta x\right) = \mathrm{e}^{x+\Delta x}$; $\quad f'(x) = \mathrm{e}^x$.

$$f(0)=1; \quad f(0+\Delta x)=\mathrm{e}^{\Delta x}; \quad f'(0)=1.$$

Тоді

$$\mathrm{e}^{\Delta x} \approx 1+\Delta x. \tag{2.57}$$

4) $f(x)=\ln(1+x)$; $\quad f(x+\Delta x)=\ln(1+x+\Delta x)$; $\quad f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$.

$$f(0)=\ln 1=0; \quad f(0+\Delta x)=\ln(1+\Delta x); \quad f'(0)=1.$$

Тоді

$$\ln(1+\Delta x) \approx \Delta x. \tag{2.58}$$

1.6.7 Застосовування диференціала до оцінювання похибок

Припустимо, що величина x вимірюється тим чи іншим інструментом або прибором, який має шкалу. Зрозуміло, що в такому разі результат вимірювання величини x матиме похибку Δx (найбільше значення похибки дорівнює одній поділці шкали).

Якщо величина x є аргументом деякої функції $y=f(x)$, то похибка Δx, припущена при вимірюванні величини x, спричинює похибку Δy величини y. Оскільки похибка Δx вельми незначна, то можна вважати, що наближено $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$, тобто $\Delta y \approx dy$.

Позначимо через δx найбільше за модулем значення похибки Δx:

$$\delta x = \max|\Delta x|.$$

Через δy позначимо модуль максимальної похибки функції $y=f(x)$. Тоді

$$\delta y = |f'(x)|\delta x. \tag{2.59}$$

Приклади до пункту 1.6

Приклад 2.69. Знайти диференціал функції

$$y=5x^7-4x^2+1.$$

Р о з в ’ я з а н н я

З формули (2.48) маємо

$$dy=f'(x)dx,$$

тобто

$$dy=\left(35x^6-8x\right)dx.$$

В і д п о в і д ь: $dy=\left(35x^6-8x\right)dx$.

Приклад 2.70. Знайти диференціал функції

$$y=x^2\sin x.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Користуючись формулою $dy = v(x)\, d\,u(x) + u(x)\, d\; v(x)$, де $y = u(x)\, v(x)$, маємо

$$dy = \sin x\; d\left(x^2\right) + x^2 d\left(\sin x\right), \qquad dy = 2x\sin x\,dx + x^2\cos x\,dx,$$

$$dy = \left(2x\sin x + x^2\cos x\right) dx.$$

В і д п о в і д ь: $dy = \left(2x\sin x + x^2\cos x\right) dx$.

Приклад 2.71. Знайти диференціал функції $y = \mathrm{e}^{\cos x}$.

Р о з в ’ я з а н н я

$$dy = \left(\mathrm{e}^{\cos x}\right)' dx, \quad dy = \mathrm{e}^{\cos x}(\cos x)'\,dx, \quad dy = -\mathrm{e}^{\cos x}\sin x\; dx.$$

В і д п о в і д ь: $dy = -\mathrm{e}^{\cos x}\sin x\; dx$.

Приклад 2.72. Знайти диференціал функції

$$y = \operatorname{arctg}\left(\frac{\ln x}{x}\right)$$

та обчислити значення диференціала у точці $x = \mathrm{e}$ та у точці $x = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Р о з в ’ я з а н н я

Знайдемо диференціал за формулою (2.48):

$$dy = \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{\ln x}{x}\right)\right)' dx = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2}\left(\frac{\ln x}{x}\right)' dx = \frac{x^2}{x^2 + \ln^2 x}\,\frac{\dfrac{1}{x}\,x - \ln x}{x^2}\,dx = \frac{1 - \ln x}{x^2 + \ln^2 x}\,dx.$$

Отже,

$$dy(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2 + \ln^2 x}\,dx;$$

$$dy(\mathrm{e}) = \frac{1 - \ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}^2 + 1}\,dx = 0, \qquad dy\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = \frac{1 + \ln \mathrm{e}}{\dfrac{1}{\mathrm{e}^2} + \ln^2\dfrac{1}{\mathrm{e}}}\,dx = \frac{2}{\dfrac{1}{\mathrm{e}^2} + 1}\,dx = \frac{2\mathrm{e}^2}{1 + \mathrm{e}^2}\,dx.$$

В і д п о в і д ь: 0; $\dfrac{2\mathrm{e}^2}{1 + \mathrm{e}^2}\,dx$.

Приклад 2.73. Знайти наближене значення функції

$$y = \ln\left(\operatorname{tg} x\right)$$

за $x = 47^\circ 15'$.

Р о з в ’ я з а н н я

Знайдемо наближене значення функції у точці $x = 47^\circ 15'$

$$y\left(47^\circ 15'\right) = \ln\left(\operatorname{tg} 47^\circ 15'\right).$$

Для цього скористаємось формулою (2.52), тобто

$$f\left(x_0 + \Delta x\right) \approx f\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right)\Delta x,$$

де $x_0 + \Delta x = 47^\circ 15'$; $x_0 = 45^\circ$; $\Delta x = 2^\circ 15'$.

Тепер обчислимо

$$f\left(45^\circ\right) = \ln\left(\operatorname{tg} 45^\circ\right) = \ln 1 = 0.$$

$$f'(x) = \left(\ln\left(\operatorname{tg} x\right)\right)' = \frac{1}{\operatorname{tg} x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos x}{\sin x \cos^2 x} = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{2}{2\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}.$$

$$f'\left(45^\circ\right) = \frac{2}{\sin 90^\circ} = 2.$$

З урахуванням формули (2.52) здобудемо

$$\ln\left(\operatorname{tg} 47^\circ 15'\right) \approx \frac{2\cdot 2^\circ 15'}{180^\circ} = 0{,}0785.$$

В і д п о в і д ь: 0,0785.

Приклад 2.74. Знайти приріст та диференціал функції $y = x^3 - x$ у точці $x = 100$, якщо x набуває приросту $\Delta x = 1$.

Р о з в ’ я з а н н я

Якщо $y = x^3 - x$, то

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^3 - (x + \Delta x) - (x^3 - x),$$

$$\Delta y = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x - \Delta x - x^3 + x,$$

звідки

$$\Delta y = 3x^2\,\Delta x + 3x\cdot(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - \Delta x.$$

Якщо $x = 100$, $\Delta x = 1$, то виходить, що $\Delta y = 30300$.

Тепер знайдемо диференціал dy.

$$dy = (3x^2 - 1)\;dx;$$

$$f'(100) = 29999; \quad dx = \Delta x = 1,$$

звідси

$$dy(100) = 29999\cdot 1 = 29999.$$

Приріст функції та диференціал функції відрізняються на величину

$$\Delta y - dy = 30300 - 29999 = 301.$$

Це свідчить про те, що відносна похибка дорівнює $\frac{301}{30300} \approx 0{,}01$.

Отже, приріст функції та диференціал функції відрізняються несуттєво.

В і д п о в і д ь: $\Delta y = 30300$; $dy(100) = 29999$.

Приклад 2.75. Обчислити наближено за допомогою диференціала значення виразу $\sqrt{\dfrac{(2,037)^2-3}{(2,037)^2+5}}$.

Р о з в ’ я з а н н я

Розглянемо функцію

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^2-3}{x^2+5}}.$$

Нам треба знайти значення цієї функції за $x=2,037$. Припустимо, що $x_0+\Delta x=2,037$. Позначимо $x_0=2$, $\Delta x=0,037$. Тепер знайдемо $f(x_0)$, де $x_0=2$

$$f(2)=\sqrt{\frac{2^2-3}{2^2+5}}=\sqrt{\frac{4-3}{4+5}}=\frac{1}{3}.$$

Далі здобудемо

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2-3}{x^2+5}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{x^2-3}{x^2+5}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x^2-3}{x^2+5}}}\frac{\left(x^2-3\right)'\left(x^2+5\right)-\left(x^2-3\right)\left(x^2+5\right)'}{\left(x^2+5\right)^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+5}}{2\sqrt{x^2-3}}\frac{2x\left(x^2+5\right)-2x\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+5\right)^2}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2-3}}\frac{x^2+5-x^2+3}{\left(x^2+5\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{8x}{\sqrt{x^2-3}\cdot\left(\sqrt{x^2+5}\right)^3}.$$

Обчислимо $f'(x_0)$, де $x_0=2$.

$$f'(2)=\frac{16}{\sqrt{4-3}\left(\sqrt{4+5}\right)^3}=\frac{16}{27}.$$

За формулою (2.53) маємо

$$\sqrt{\frac{(2,037)^2-3}{(2,037)^2+5}}\approx\frac{1}{3}+\frac{16}{27}\cdot\frac{37}{1000}=\frac{1199}{3375}\approx 0,355.$$

В і д п о в і д ь: $\sqrt{\dfrac{(2,037)^2-3}{(2,037)^2+5}}\approx 0,355.$

Приклад 2.76. Нехай маємо коло радіуса R з центром у точці O. На осі OA перебуває магнітний заряд на відстані x від центра кола. Довжина магніта AB дорівнює Δx. При цьому полюс B має позитивний заряд q, а полюс A – негативний заряд $(-q)$. Знайти силу F, з якою круговий струм впливає на магніт AB довжиною Δx (рис. 2.8).

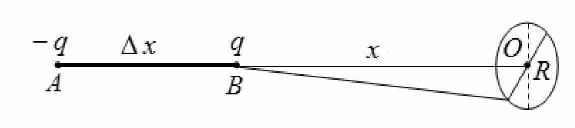


Рисунок 2.8

Р о з в ’ я з а н н я

З курсу фізики відомо, що круговий струм впливає на одиницю магнітного заряду, розміщеного на осі AO на відстані x, з силою

$$F_1(x) = \frac{k}{\left(R^2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

де k – коефіцієнт пропорційності. Ми ж маємо знайти силу F, з якою круговий струм впливає на магніт AB довжиною Δx. Це буде сила F, яку можна подати формулою

$$F(x) = \frac{kq}{\left(R^2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{kq}{\left(R^2 + \left(x + \Delta x\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

$$F = -kq\left(\frac{1}{\left(R^2 + (x+\Delta x)^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\left(R^2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right) = -kq\left(F_1\left(x + \Delta x\right) - F_1\left(x\right)\right) = -kq\,\Delta F_1\left(x\right).$$

Оскільки $\Delta F_1(x) \approx d\,F_1(x)$, можна вважати, що

$$F(x) \approx -kq\,d\left(\frac{1}{\left(R^2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right) = -kq\left(\left(R^2 + x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right)' \Delta x = \frac{3}{2}kq\left(R^2 + x^2\right)^{-\frac{5}{2}} 2x\,\Delta x.$$

Отже,

$$F(x) \approx 3kq\frac{x}{\left(R^2 + x^2\right)^{\frac{5}{2}}}\Delta x.$$

В і д п о в і д ь: $F(x) \approx 3kq\dfrac{x}{\left(R^2 + x^2\right)^{\frac{5}{2}}}\Delta x.$

Приклад 2.77. Період коливання маятника визначається формулою

$$T = \frac{2\pi\sqrt{l}}{\sqrt{980}} \text{ с},$$

де $l = 20$ см – довжина маятника.

Наскільки має змінитись довжина маятника, щоб період коливання зменшився на 0,1 с.

Р о з в ' я з а н н я

Знайдемо диференціал dT, вважаючи T за функцію від l:

$$dT = \frac{\pi}{\sqrt{980l}}\,dl.$$

Звідси

$$dl = \frac{\sqrt{980l}}{\pi}\,dT.$$

За умовою $l = 20$, $dT = -0{,}1$ (знак мінус вказує на те, що період коливання має зменшитись). Тепер виходить

$$dl = -\frac{\sqrt{980\cdot 20}}{\pi}\cdot 0.1 \approx -4{,}46 \ \ (\text{см}).$$

Отже, щоб зменшити на 0,1 с період коливання маятника, слід зменшити його довжину на 4,46 см.

В і д п о в і д ь: довжину маятника слід зменшити на 4,46 см.

Приклад 1.78. На рисунку 2.9 зображено місток Уітстона – прилад, який використовується для вимірювання невідомого опору *y*. Тут *AC* – проградуйована лінійка, *D* – пересувний контакт, *G* – гальванометр зі шкалою. Пересувний контакт переміщується шкалою *AC* до того моменту, коли гальванометр розпочне показувати відсутність струму. При цьому опір *y* є функцією від *x* і обчислюється за формулою

$$y = \frac{Rx}{l-x},$$

де l – довжина лінійки AC; $x = AD$; R – заданий опір вітки BC.

Треба визначити похибку при вимірюванні опору *y*.

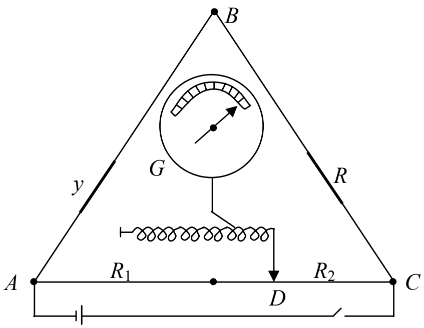


Рисунок 2.9

Р о з в ' я з а н н я

За формулою $\delta y = \left| f'(x) \right| \delta x$ (2.59) виходить

$$\delta y = \left| \left(\frac{Rx}{l-x} \right)' \right| \delta x = \left| R\left(x(l-x)^{-1} \right)' \right| \delta x =$$

$$= R\left| \left(\frac{1}{l-x} + \frac{x}{(l-x)^2} \right) \right| \delta x.$$

Після приведення до спільного знаменника дістанемо

$$\delta y = \frac{Rl}{(l-x)^2}\,\delta x.$$

Це є значення абсолютної похибки при вимірюванні невідомого опору *y*.

Тепер поділимо на *y* обидві частини останньої рівності. Виходить

$$\frac{\delta y}{y} = \frac{Rl}{y(l-x)^2}\,\delta x\,.$$

Праворуч замість y підставимо $\dfrac{Rx}{l-x}$. Тоді

$$\frac{\delta y}{y} = \frac{Rl(l-x)}{Rx(l-x)^2}\,\delta x,$$

$$\frac{\delta y}{y} = \frac{l\delta x}{x(l-x)}. \tag{2.60}$$

Отже, ми здобули оцінку для відносної похибки при вимірюванні опору y.

Розглянемо вираз $x\left(l-x\right)$ та запишемо його у іншому вигляді.

$$x(l-x) = -x^2 + lx = -\left(x^2 - lx\right) = -\left(x^2 - 2x\frac{l}{2} + \frac{l^2}{4} - \frac{l^2}{4}\right) = -\left(\left(x - \frac{l}{2}\right)^2 - \frac{l^2}{4}\right) = \frac{l^2}{4} - \left(x - \frac{l}{2}\right)^2.$$

Тепер зробимо таке оцінювання: $\left(x-\dfrac{l}{2}\right)^2 \geq 0$; $-\left(x-\dfrac{l}{2}\right)^2 \leq 0$; $\dfrac{l^2}{4} - \left(x-\dfrac{l}{2}\right)^2 \leq \dfrac{l^2}{4}$,

тобто $x(l-x) \leq \dfrac{l^2}{4}$. Оскільки остання нерівність свідчить про те, що

$$\left|x(l-x)\right| \leq \frac{l^2}{4},$$

то можна стверджувати, що найменшого значення відносна похибка $\dfrac{\delta y}{y}$ досягає за $x = \dfrac{l}{2}$. Через це, для того, щоб здобути найбільш точного результату при вимірюванні опору y обирають такий опір R, щоб струм зникав при розміщенні пересувного контакту D щонайближче до середини лінійки AC.

В і д п о в і д ь: струм має зникати при положенні контакту D щонайближче до середини лінійки.

1.7 Похідні та диференціали вищих порядків

1.7.1 Поняття похідної *n*-го порядку

Розглянемо функцію, визначену та диференційовну у точці x. Похідна цієї функції своєю чергою є функцією:

$$y' = f'(x) = \varphi(x).$$

Може статись, що ця функція також є диференційовною функцією у точці x, тобто існує похідна

$$\varphi'(x) = \left(f'(x)\right)'.$$

Така похідна називається похідною другого порядку відносно функції $y = f(x)$. При цьому використовуються такі позначення:

$$y''; \quad f''(x); \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right); \quad \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Останній вираз читається так: „де два ігрек за де ікс двічі“.

Аналогічно можна ввести послідовно поняття третьої, четвертої і т. д. похідних. Якщо припустити, що вже введено поняття $(n-1)$-ї похідної та що $(n-1)$ – похідна, диференційовна у точці *x*, то існує похідна, яку називають *n*-ю похідною або похідною *n*-го порядку функції $y = f(x)$ у точці *x*. Для позначення *n*-ї похідної використовуються символи $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $\dfrac{d^n y}{dx^n}$.

Функція, яка має похідну *n*-го порядку в точці *x*, називається *n* разів диференційовною у цій точці.

1.7.2 Фізичний зміст похідної другого порядку

Якщо функція $S = S(t)$ описує шлях, пройдений тілом, то, як відомо, $S' = S'(t) = V(t)$ описує миттєву швидкість, з якою рухається тіло в момент t. Тоді виходить, що $S''(t) = V'(t)$ – це функція, що описує швидкість, з якою змінюється функція $V(t)$, тобто прискорення $a(t)$ у момент t:

$$a(t) = V'(t) = S''(t).$$

Покажемо, що між переміщенням $S(t)$, швидкістю V та прискоренням a згасаючого гармонічного коливання

$$S(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\left(A\cos kt + B\sin kt\right)$$

існує такий зв'язок:

$$a + 2\lambda V + \left(k^2 + \lambda^2\right)S = 0. \tag{2.61}$$

Знайдемо швидкість V та прискорення a.

$$V(t) = S'(t) = -\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\left(A\cos kt + B\sin kt\right) + \mathrm{e}^{-\lambda t}\left(-A\,k\sin kt + B\,k\cos kt\right) =$$

$$= \mathrm{e}^{-\lambda t}\left(-\lambda\,A\cos kt - \lambda\,B\sin kt - A\,k\sin kt + B\,k\cos kt\right),$$

$$V(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\left(\left(Bk - \lambda A\right)\cos kt - \left(Ak + \lambda B\right)\sin kt\right).$$

$$a(t) = V'(t) = S''(t) = -\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\left(\left(Bk - \lambda A\right)\cos kt - \left(Ak + \lambda B\right)\sin kt\right) +$$

$$+\mathrm{e}^{-\lambda t}\left(-k\left(Bk - \lambda A\right)\sin kt - k\left(Ak + \lambda B\right)\cos kt\right) =$$

$$= \mathrm{e}^{-\lambda t}\left(\left(-\lambda Bk + \lambda^2 A\right)\cos kt + \left(\lambda Ak + \lambda^2 B\right)\sin kt - \left(Bk^2 - \lambda kA\right)\sin kt - \left(Ak^2 + \lambda kB\right)\cos kt\right).$$

Після спрощення дістанемо

$$a(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\left(\left(-2\lambda kB + \lambda^2 A - k^2 A\right)\cos kt + \left(2\lambda kA + \lambda^2 B - k^2 B\right)\sin kt\right).$$

Вирази для $S(t)$, $V(t)$ та $a(t)$ підставимо до рівності (2.61) та винесемо $\mathrm{e}^{-\lambda t}$ за дужки, внаслідок чого здобудемо

$$\mathrm{e}^{-\lambda t}\left(\left(-2\lambda kB + \lambda^2 A - k^2 A\right)\cos kt + \left(2\lambda kA + \lambda^2 B - k^2 B\right)\sin kt +\right.$$

$$\left. +\left(2\lambda Bk - 2\lambda^2 A\right)\cos kt - \left(2\lambda kA + 2\lambda^2 B\right)\sin kt + \left(k^2 + \lambda^2\right)A\cos kt + \left(k^2 + \lambda^2\right)B\sin kt\right) = 0.$$

Спростимо здобуту рівність

$$\left(-2\lambda k B+\lambda^2 A-k^2 A+2\lambda k B-2\lambda^2 A+k^2 A+\lambda^2 A\right)\cos kt+$$
$$+\left(2\lambda k A+\lambda^2 B-k^2 B-2\lambda k A-2\lambda^2 B+k^2 B+\lambda^2 B\right)\sin kt=0.$$

Виходить, $0=0$. Отже, залежність (2.61) існує.

1.7.3. Похідні *n*-го порядку окремих функцій

1. $\boldsymbol{y=x^{\alpha}}$**, де** $\boldsymbol{\alpha\in R,\ \ x>0}$**.**

Знаходимо послідовно похідні $y',\ y'',\ldots$:

$$y'=\alpha x^{\alpha-1},\quad y''=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2},\quad y'''=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3},\ \ldots\ .$$

Продовжуючи цей процес, маємо

$$\left(x^{\alpha}\right)^{(n)}=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}, \tag{2.62}$$

де $n\in N$.

Зокрема, якщо $\alpha=n$, то

$$\left(x^{n}\right)^{(n)}=n! \tag{2.63}$$

Якщо $\alpha=m$ та m – натуральне число, таке що $m<n$, то

$$\left(x^{m}\right)^{(n)}=0. \tag{2.64}$$

2. $\boldsymbol{y=a^{x},\ a>0,\ a\neq 1}$**.**

Знаходимо похідні $y',\ y'',\ldots$:

$$y'=a^x\ln a;\quad y''=a^x\ln^2 a;\quad y'''=a^x\ln^3 a.$$

Продовжуючи цей процес, маємо

$$\left(a^{x}\right)^{n}=a^x\ln^n a. \tag{2.65}$$

3. $\boldsymbol{y=\sin x}$.

Послідовно диференціюючи, маємо

$$y'=\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right);\quad y''=-\sin x=\sin(\pi+x);\quad y'''=-\cos x=\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right).$$

Можна помітити, що при диференціюванні функції $y=\sin x$ виходить та сама функція, аргумент якої за кожного диференціювання збільшується на $\frac{\pi}{2}$.

Отже,

$$\left(\sin x\right)^{(n)}=\sin\left(\frac{n\pi}{2}+x\right),\quad \text{де } n\in N. \tag{2.66}$$

4. $\boldsymbol{y=\cos x}$.

Виконуючи ту ж саму послідовність дій, що і в попередньому випадку, маємо

$$\left(\cos x\right)^{(n)} = \cos\left(\frac{n\pi}{2} + x\right), \quad \text{де } n \in N. \tag{2.67}$$

5. $\boldsymbol{y = \dfrac{ax+b}{cx+d}}$ – дробово-лінійна функція, де a, b, c, d – певні сталі, $x \neq -\dfrac{d}{c}$.

Знаходимо послідовно похідні $y', y'', \ldots$:

$$y' = \frac{a(cx+d) - c(ax+b)}{(cx+d)^2} = \frac{acx + ad - acx - bc}{(cx+d)^2} = \frac{ad - bc}{(cx+d)^2} = (ad - bc)(cx+d)^{-2};$$

$$y'' = (ad-bc)(-2)(cx+d)^{-3}(cx+d)' = -2c(ad-bc)(cx+d)^{-3};$$

$$y''' = -2c(ad-bc)(-3)(cx+d)^{-4}(cx+d)' = -2(-3)c^2(ad-bc)(cx+d)^{-4}.$$

Продовжуючи цей процес, маємо

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{(n)} = (-1)^{n-1} n!\, c^{n-1}(ad-bc)(cx+d)^{-(n+1)}, \quad \text{де } n \in Z. \tag{2.68}$$

6. Формула Лейбніца для похідної *n*-го порядку добутку двох функцій.

Нехай $u(x), v(x)$ – n разів диференційовні функції. Тоді є справедливою формула, називана формулою Лейбніца.

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + \frac{n!}{(n-1)!\,1!}u^{(n-1)}v' + \frac{n!}{(n-2)!\,2!}u^{(n-2)}v'' +$$

$$+\frac{n!}{(n-3)!\,3!}u^{(n-3)}v''' + \ldots + \frac{n!}{1!\,(n-1)!}u'v^{(n-1)} + uv^{(n)}. \tag{2.69}$$

Завдання для самостійної роботи. Формулу Лейбніца довести методом математичної індукції.

ЗАУВАЖЕННЯ. Формулу Лейбніца можна записати у формі

$$(uv)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!\,k!}\, u^{(n-k)}v^{(k)}. \tag{2.70}$$

1.7.4 Похідна другого порядку параметрично заданої функції

Нехай функцію $y = f(x)$ задано у параметричній формі

$$\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

де $\varphi(t)$ − строго монотонна функція, двічі диференційовна, до того ж $\varphi'(t) \neq 0$; функція $\psi(t)$ – двічі диференційовна.

Як було зазначено раніше, є справедливою формула

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Використовуючи цю формулу, маємо

$$y''_{xx} = \left(y'_x\right)'_x = \frac{d}{dx}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right).$$

Вираз $\frac{d}{dx}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)$ будемо розглядати як похідну складної функції. Тоді

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right) = \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'_t \cdot t'_x .$$

Згідно з теоремою про похідну оберненої функції, $t'_x = \frac{1}{x'_t}$, тобто $t'_x = \frac{1}{\varphi'_t(t)}$.

Отже,

$$y''_{xx} = \frac{\psi''_{tt}(t)\,\varphi'_t(t) - \varphi''_{tt}(t)\,\psi'_t(t)}{\left(\varphi'_t(t)\right)^2}\,\frac{1}{\varphi'_t(t)}.$$

Остаточно виходить:

$$y''_{xx} = \frac{y''_{tt}(t)\,x'_t(t) - y'_t(t)\,x''_{tt}(t)}{\left(x'_t(t)\right)^3}. \qquad (2.71)$$

1.7.5 Диференціали вищих порядків

Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна n разів у точці x та деякому її околі. Як вже відомо, диференціалом першого порядку функції $y = f(x)$ у точці x називається величина

$$dy = f'(x)\,dx,$$

де dx – число, називане диференціалом незалежної змінної, незалежне від x.

Диференціалом ***другого порядку*** функції $y = f(x)$ у точці x називається диференціал від диференціала першого порядку у цій точці. При цьому використовується позначення

$$d^2y = d(dy).$$

Знайдемо d^2y за формулою (2.48)

$$d^2y = d(dy) = (dy)'\,dx = \left(f'(x)dx\right)'\,dx = f''(x)\,dx^2.$$

Остаточний результат запишемо у такий спосіб:

$$d^2y = f''(x)\,dx^2. \qquad (2.72)$$

Читається: „де два ігрек дорівнює еф два штрих на де ікс двічі“.

ЗАУВАЖЕННЯ. При знаходженні $\left(f'(x)\,dx\right)'$ вважається, що dx – це число, яке не залежить від x, отже $\left(f'(x)\,dx\right)' = \left(f'(x)\right)'\,dx = f''(x)\,dx$.

Аналогічно можна ввести поняття диференціалів більш високих порядків

$$d^3y = f'''(x)\,dx^3, \qquad (2.73)$$

$$d^4y = f^{(\mathrm{IV})}(x)\,dx^4 \qquad (2.74)$$

тощо.

Диференціалом n-го порядку функції $y = f(x)$ у точці x називається диференціал від $(n-1)$ диференціала у цій точці, тобто

$$d^n y = d\left(d^{n-1}y\right)$$

Знаходиться цей диференціал за формулою

$$d^n y = f^{(n)}(x)\,dx^n. \qquad (2.75)$$

ЗАУВАЖЕННЯ. Відомо, що першу похідну функції $y = f(x)$ можна позначати символом $\frac{dy}{dx}$. Якщо звернутись до формул (2.73)…(2.75), то стає зрозумілим походження таких символів для позначення похідних вищих порядків:

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2};\quad f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3};\quad f^{IV}(x) = \frac{d^4y}{dx^4};\ \ldots,\ f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

З'ясуємо тепер, чи притаманна диференціалам вищих порядків інваріантність форми диференціала. Нехай $y = f(x)$, де $x = \varphi(t)$ і функція $f(x)$ є двічі диференційовна у точці x та деякому її околі, а функція $x = \varphi(t)$ – двічі диференційовна у відповідній точці t та деякому її околі. За визначенням диференціала

$$dy = f'(x)\,dx, \text{ де } dx = \varphi'(t)\,dt,$$

тоді

$$dy = f'(x)\,\varphi'(t)\,dt.$$

Знайдемо

$$d^2y = d(dy) = d\left(f'(x)dx\right) = d\left(f'(x)\right)dx + f'(x)\,d(dx) =$$
$$= d\left(f'(x)\right)dx + f'(x)d^2x = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x.$$

Отже,

$$d^2y = f''(x)\,dx^2 + f'(x)\,d^2x. \qquad (2.76)$$

Якщо порівняти здобутий результат з формулою (2.72), побачимо суттєву розбіжність. Отже, на диференціали порядку n, де $n > 1$, не поширюється інваріантність форми диференціала.

Приклади до пункту 1.7

Похідні вищих порядків явно заданих функцій

Приклад 2.79. Знайти похідну другого порядку функції

$$f(x) = \cos^2 x.$$

Р о з в ’ я з а н н я

$$f'(x) = (\cos^2 x)' = 2\cos x\,(\cos x)' = -2\cos x \sin x = -\sin 2x.$$

У даному разі для знаходження $f'(x)$ можна було спростити функцію $f(x)$:

$$f'(x) = \left(\cos^2 x\right)' = \left(\frac{1}{2}\left(1+\cos 2x\right)\right)' = -\frac{1}{2}\cdot 2\sin 2x = -\sin 2x\,.$$

Далі знаходимо

$$f''(x) = \left(-\sin 2x\right)' = -2\cos 2x\,.$$

В і д п о в і д ь: $f''(x) = -2\cos 2x$.

Приклад 2.80. Знайти $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$, якщо

$$y = \operatorname{arctg}\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

Р о з в ’ я з а н н я

$$\frac{dy}{dx} = \left(\operatorname{arctg}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)' = \frac{1}{1+\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)' =$$

$$= \frac{1}{1+x^2+2x\sqrt{x^2+1}+x^2+1}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{2\left(1+x^2+x\sqrt{x^2+1}\right)}\,\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}\,\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2\left(x^2+1\right)}.$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)^{-1}\right)' = -\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)^{-2}\,2x = -\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}\,.$$

В і д п о в і д ь: $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = -\dfrac{x}{\left(x^2+1\right)^2}$.

Приклад 2.81. Знайти похідну другого порядку функції

$$y = 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{x^4+1}}{x} - \ln\frac{\sqrt[4]{x^4+1}+x}{\sqrt[4]{x^4+1}-x}\,.$$

Р о з в ’ я з а н н я

$$\frac{dy}{dx} = \left(2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{x^4+1}}{x} - \ln\left(\sqrt[4]{x^4+1}+x\right) + \ln\left(\sqrt[4]{x^4+1}-x\right)\right)' =$$

$$= 2\frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt[4]{x^4+1}}{x}\right)^2}\left(\frac{\sqrt[4]{x^4+1}}{x}\right)' - \frac{1}{\sqrt[4]{x^4+1}+x}\left(\sqrt[4]{x^4+1}+x\right)' + \frac{1}{\sqrt[4]{x^4+1}-x}\left(\sqrt[4]{x^4+1}-x\right)' =$$

$$= \frac{2x^2}{x^2+\sqrt{x^4+1}}\,\frac{\left(\left(x^4+1\right)^{\frac{1}{4}}\right)'x-\left(x^4+1\right)^{\frac{1}{4}}}{x^2} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^4+1}+x}\left(\left(\left(1+x^4\right)^{\frac{1}{4}}\right)'+1\right) + \frac{1}{\sqrt[4]{x^4+1}-x}\left(\left(\left(1+x^4\right)^{\frac{1}{4}}\right)'-1\right) =$$

$$= \frac{2x^2}{x^2+\sqrt{x^4+1}}\,\frac{\frac{1}{4}\left(x^4+1\right)^{-\frac{3}{4}}4x^4-\left(x^4+1\right)^{\frac{1}{4}}}{x^2} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^4+1}+x}\left(\frac{1}{4}\left(x^4+1\right)^{-\frac{3}{4}}4x^3+1\right) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt[4]{x^4+1}-x}\left(\frac{1}{4}\left(1+x^4\right)^{-\frac{3}{4}}4x^3-1\right) = \frac{2}{x^2+\sqrt{x^4+1}}\left(\frac{x^4}{\sqrt[4]{\left(x^4+1\right)^3}}-\sqrt[4]{x^4+1}\right) -$$

$$- \frac{1}{\sqrt[4]{x^4+1}+x}\left(\frac{x^3}{\sqrt[4]{\left(x^4+1\right)^3}}+1\right) + \frac{1}{\sqrt[4]{x^4+1}-x}\left(\frac{x^3}{\sqrt[4]{\left(x^4+1\right)^3}}-1\right) =$$

$$= \frac{2}{\left(x^2+\sqrt{x^4+1}\right)\left(\sqrt[4]{x^4+1}\right)^3}\left(x^4-x^4-1\right) - \frac{1}{\left(\sqrt[4]{x^4+1}+x\right)\left(\sqrt[4]{x^4+1}\right)^3}\left(x^3+\left(\sqrt[4]{x^4+1}\right)^3\right) +$$

$$+ \frac{1}{\left(\sqrt[4]{x^4+1}-x\right)\left(\sqrt[4]{x^4+1}\right)^3}\left(x^3-\left(\sqrt[4]{x^4+1}\right)^3\right) = \frac{-2}{\left(x^2+\sqrt{x^4+1}\right)\left(\sqrt[4]{x^4+1}\right)^3} -$$

$$- \frac{\left(x+\sqrt[4]{1+x^4}\right)\left(x^2-x\sqrt[4]{1+x^4}+\sqrt{1+x^4}\right)}{\left(\sqrt[4]{1+x^4}+x\right)\left(\sqrt[4]{x^4+1}\right)^3} - \frac{\left(\sqrt[4]{1+x^4}-x\right)\left(\sqrt{1+x^4}+x\sqrt[4]{1+x^4}+x^2\right)}{\left(\sqrt[4]{1+x^4}-x\right)\left(\sqrt[4]{x^4+1}\right)^3} =$$

$$= \frac{-1}{\left(\sqrt[4]{x^4+1}\right)^3}\left(\frac{2}{x^2+\sqrt{x^4+1}}+x^2-x\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt{1+x^4}+\sqrt{1+x^4}+x\sqrt[4]{1+x^4}+x^2\right) =$$

$$= \frac{-2}{\left(\sqrt[4]{x^4+1}\right)^3}\left(\frac{1}{x^2+\sqrt{x^4+1}}+x^2+\sqrt{1+x^4}\right) = \frac{-2}{\left(\sqrt[4]{x^4+1}\right)^3}\,\frac{1+x^4+2x^2\sqrt{1+x^4}+1+x^4}{x^2+\sqrt{x^4+1}} =$$

$$=-\frac{2}{\left(\sqrt[4]{x^4+1}\right)^3}\,\frac{2\left(x^4+1+x^2\sqrt{1+x^4}\right)}{x^2+\sqrt{x^4+1}}=\frac{-4\sqrt{1+x^4}\left(\sqrt{1+x^4}+x^2\right)}{\left(\sqrt[4]{x^4+1}\right)^3\left(x^2+\sqrt{x^4+1}\right)}=\frac{-4}{\sqrt[4]{x^4+1}}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{-4}{\sqrt[4]{x^4+1}}\right)'=-4\left(\left(x^4+1\right)^{-\frac{1}{4}}\right)'=-4\left(-\frac{1}{4}\right)\left(x^4+1\right)^{-\frac{5}{4}}4x^3=\frac{4x^3}{\sqrt[4]{\left(x^4+1\right)^5}}.$$

В і д п о в і д ь: $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{4x^3}{\sqrt[4]{\left(x^4+1\right)^5}}$.

Приклад 2.82. Знайти похідну другого порядку функції

$$y=x\left(\cos\left(\ln x\right)+\sin\left(\ln x\right)\right).$$

Р о з в ’ я з а н н я

$$y'=x'\left(\cos(\ln x)+\sin(\ln x)\right)+x\left(\cos(\ln x)+\sin(\ln x)\right)'=$$

$$=\cos(\ln x)+\sin(\ln x)+x\left(-\sin\left(\ln x\right)\cdot\frac{1}{x}+\cos\left(\ln x\right)\cdot\frac{1}{x}\right)=$$

$$=\cos\left(\ln x\right)+\sin\left(\ln x\right)-\sin\left(\ln x\right)+\cos\left(\ln x\right)=2\cos\left(\ln x\right).$$

$$y''=-2\sin\left(\ln x\right)\cdot\frac{1}{x},\quad y''=-\frac{2}{x}\sin\left(\ln x\right).$$

В і д п о в і д ь: $y''=-\dfrac{2}{x}\sin\left(\ln x\right)$.

Приклад 2.83. Знайти похідну другого порядку функції

$$f(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

та обчислити $f''(0)$.

Р о з в ’ я з а н н я

$$f'(x)=\frac{\left(\arcsin x\right)'\sqrt{1-x^2}-\arcsin x\left(\sqrt{1-x^2}\right)'}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}=\frac{\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{(-2x)\arcsin x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=$$

$$=\frac{1+\dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=\frac{\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3};$$

$$f''(x)=\frac{\left(\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}+\arcsin x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3-\left(\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x\right)\frac{3}{2}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}(-2x)}{\left(1-x^2\right)^3}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3\arcsin x+3x\left(1-x^2\right)+3x^2\sqrt{1-x^2}\arcsin x}{\left(1-x^2\right)^3}.$$

Обчислимо

$$f''(0)=0.$$

В і д п о в і д ь: $f''(0)=0$.

Приклад 2.84. Знайти похідну $y^{(n)}$, якщо

$$y=(2x-1)2^{3x}3^{2x}.$$

Р о з в ' я з а н н я

Запишемо задану функцію у вигляді

$$y=(2x-1)\,8^x\,9^x,$$

тобто

$$y=(2x-1)\,72^x.$$

Для знаходження похідної $y^{(n)}$ можна користуватись формулою Лейбніца. Нехай $u=2x-1$; $v=72^x$. Тоді $u'=2$, $u''=0$. Отже, у формулі Лейбніца ненульовими будуть лише два останніх доданки. До їхнього складу входять $v^{(n-1)}$ та $v^{(n)}$. Згідно з формулою (2.69), треба знайти

$$v^{(n-1)}=\left(72^x\right)^{(n-1)}=72^x\ln^{n-1}72;$$

$$v^{(n)}=\left(72^x\right)^{(n)}=72^x\ln^{n}72.$$

Тоді маємо

$$y^{(n)}=\frac{n!}{1!\,(n-1)!}\cdot 2\cdot 72^x\ln^{n-1}72+(2x-1)\cdot 72^x\ln^n 72,$$

тобто

$$y^{(n)}=72^x\left(2n+(2x-1)\ln 72\right)\ln^{n-1}72.$$

В і д п о в і д ь: $y^{(n)}=72^x\left(2n+(2x-1)\ln 72\right)\ln^{n-1}72$.

Приклад 2.85. Знайти похідну $y^{(100)}$ та обчислити її значення у точці $x=1$, якщо $y=x^2\ln x$.

Р о з в ' я з а н н я

Знову скористаємося формулою Лейбніца. Нехай $u=x^2$, $v=\ln x$. Тоді $u'=2x$, $u''=2$, $u'''=0$. Виходить, що у формулі Лейбніца ненульовими будуть лише три останніх доданки, до складу яких входять $v^{(100)}, v^{(99)}, v^{(98)}$. Знайдемо ці похідні:

$$v=\ln x, \quad v'=\frac{1}{x}=x^{-1}, \quad v''=x^{-2}, \quad v'''=2x^{-3}, \quad v^{\mathrm{IV}}=-2\cdot 3x^{-4}, \quad v^{\mathrm{V}}=2\cdot 3\cdot 4x^{-5}, \quad ...,$$

$$v^{(98)}=97!\,x^{-98}, \quad v^{(99)}=98!\,x^{-99}, \quad v^{(100)}=-99!\,x^{-100}.$$

Далі за формулою (2.69) маємо

$$y^{(100)}=-\frac{100!}{2!98!}\cdot 2\cdot 97!\,x^{-98}+\frac{100!}{1!\,99!}\cdot 2\cdot 98!\,x\cdot x^{-99}-99!\,x^2\cdot x^{-100},$$

$$y^{(100)}=-97!\,x^{-98}\left(\frac{2\cdot 99\cdot 100}{2}-\frac{2\cdot 98\cdot 100}{1}+98\cdot 99\right)=-\frac{97!\,2}{x^{98}}.$$

В і д п о в і д ь: $y^{(100)}=-\dfrac{97!\,2}{x^{98}}$.

Приклад 2.86. Знайти похідну n-го порядку функції

$$f(x)=\frac{1}{x^2+x-6}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Задану функцію можна подати у вигляді, більш зручному для диференціювання:

$$f(x)=\frac{1}{(x-2)(x+3)}, \qquad \frac{1}{(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3}.$$

Знайдемо невизначені коефіцієнти A та B у такий спосіб:

$$\frac{1}{(x-2)(x+3)}=\frac{A(x+3)+B(x-2)}{(x-2)(x+3)}, \text{ звідки } A(x+3)+B(x-2)=1.$$

Якщо припустити, що x = 2, то A дістанемо з рівності $5A$ = 1, звідки $A=\dfrac{1}{5}$. Якщо ж припустити, що x = –3, то B дістанемо з рівності B: $-5B$ = 1, звідки $B=-\dfrac{1}{5}$. Знайдемо похідні функції $f(x)$, записаної у вигляді

$$f(x)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x+3}.$$

$$f'(x)=\frac{1}{5}\left((x-2)^{-1}-(x+3)^{-1}\right)'; \quad f'(x)=\frac{1}{5}\left(-(x-2)^{-2}+(x+3)^{-2}\right);$$

$$f''(x)=\frac{1}{5}\left(2\,(x-2)^{-3}-2(x+3)^{-3}\right); \quad f'''(x)=\frac{1}{5}\left(-2\cdot 3\,(x-2)^{-4}+2\cdot 3\,(x+3)^{-4}\right).$$

Виходить, що

$$f^{(n)}(x)=\frac{1}{5}\left((-1)^n\,n!\,(x-2)^{-(n+1)}+(-1)^{n+1}\,n!\,(x+3)^{-(n+1)}\right),$$

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{5}\left(\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x+3)^{n+1}}\right).$$

В і д п о в і д ь: $f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n n!}{5}\left(\dfrac{1}{(x-2)^{n+1}}-\dfrac{1}{(x+3)^{n+1}}\right).$

Приклад 2.87. Знайти похідну n-го порядку функції

$$y=x^3\sin x.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Скористаємось формулою Лейбніца. Вважатимемо, що $u=x^3$, $v=\sin x$. Знайдемо похідні множників:

$$\left(x^3\right)'=3x^2;\ \left(x^3\right)''=\left(3x^2\right)'=6x;\ \left(x^3\right)'''=(6x)'=6;\ \left(x^3\right)^{(\mathrm{IV})}=(6)'=0;$$

$$(\sin x)'=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right);\ (\sin x)''=\sin\left(\frac{2\pi}{2}+x\right);\ (\sin x)'''=\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right),\ \ldots,(\sin x)^{(n)}=\sin\left(\frac{n\pi}{2}+x\right).$$

Підставимо знайдені похідні до формули Лейбніца:

$$\left(x^3\sin x\right)^{(n)}=\left(x^3\right)^{(n)}\sin x+\frac{n!}{(n-1)!}\left(x^3\right)^{(n-1)}(\sin x)'+\ldots+\frac{n!\left(x^3\right)'''}{(n-3)!\,3!}(\sin x)^{(n-3)}+$$

$$+\frac{n!}{(n-2)!2!}\left(x^3\right)''(\sin x)^{(n-2)}+\frac{n!}{(n-1)!}\left(x^3\right)'(\sin x)^{(n-1)}+x^3(\sin x)^{(n)};$$

$$\left(x^3\sin x\right)^{(n)}=\frac{6(n-3)!\,(n-2)(n-1)n}{6(n-3)!}\sin\left(\frac{(n-3)\pi}{2}+x\right)+$$

$$+\frac{6(n-2)!\,(n-1)n\,x}{(n-2)!\,2!}\sin\left(\frac{(n-2)\pi}{2}+x\right)+$$

$$+\frac{3(n-1)!\,n\,x^2}{(n-1)!}\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2}+x\right)+x^3\sin\left(\frac{n\pi}{2}+x\right).$$

Після спрощення дістанемо:

$$\left(x^3\sin x\right)^{(n)}=(n-2)(n-1)\,n\sin\left(\frac{(n-3)\pi}{2}+x\right)+3(n-1)\,n\,x\sin\left(\frac{(n-2)\pi}{2}+x\right)+$$

$$+3nx^2\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2}+x\right)+x^3\sin\left(\frac{n\pi}{2}+x\right).$$

В і д п о в і д ь:

$$\left(x^3\sin x\right)^{(n)}=(n-2)(n-1)\,n\sin\left(\frac{(n-3)\pi}{2}+x\right)+3(n-1)\,n\,x\sin\left(\frac{(n-2)\pi}{2}+x\right)+$$

$$+3nx^2\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2}+x\right)+x^3\sin\left(\frac{n\pi}{2}+x\right).$$

Приклад 2.88. З’ясувати, чи задовольняє функція $y = 1 + \cos e^x + \sin e^x$ рівняння

$$y'' - y' + e^{2x} y = 0.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Знайдемо похідні y' та y'':

$$y' = -e^x \sin e^x + e^x \cos e^x = e^x \left(\cos e^x - \sin e^x\right);$$

$$y'' = e^x \left(\cos e^x - \sin e^x\right) + e^{2x} \left(-\sin e^x - \cos e^x\right).$$

Підставимо y, y' та y'' у задане рівняння, маємо

$$e^x \cos e^x - e^x \sin e^x - e^{2x} \sin e^x - e^{2x} \cos e^x - e^x \cos e^x + e^x \sin e^x + e^{2x} + e^{2x} \cos e^x + e^{2x} \sin e^x = 0,$$

тобто 0 = 0.

Отже, задана функція задовольняє задане рівняння.

В і д п о в і д ь: задана функція задовольняє задане рівняння.

Похідні вищих порядків параметрично заданих функцій

Приклад 2.89. Знайти похідну $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ функції

$$\begin{cases} x = \ln \cos t; \\ y = \ln \cos 2t, \end{cases} \quad \text{де } t \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right),$$

заданої параметрично.

Р о з в ’ я з а н н я

Функції $x(t)$ та $y(t)$ диференційовні. Знайдемо їхні похідні:

$$x'_t = \frac{1}{\cos t}\left(-\sin t\right) = -\operatorname{tg} t; \quad y'_t = \frac{1}{\cos 2t}\left(-2 \sin 2t\right) = -2 \operatorname{tg} 2t.$$

В інтервалі $\left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$ виконується умова $x'_t \neq 0$.

Щоб знайти похідну другого порядку $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ знайдемо похідні другого порядку x''_{tt}, y''_{tt} та звернемось до формули (2.71).

$$x''_{tt} = -\frac{1}{\cos^2 t}; \quad y''_{tt} = -\frac{4}{\cos^2 2t}.$$

Тоді

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\dfrac{4}{\cos^2 2t}\left(-\operatorname{tg} t\right) - \left(-\dfrac{1}{\cos^2 t}\right)\left(-2\operatorname{tg} 2t\right)}{-\operatorname{tg}^3 t}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dfrac{4\sin t}{\cos t \cos^2 2t} - \dfrac{2\sin 2t}{\cos 2t \cos^2 t}}{-\operatorname{tg}^3 t};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\dfrac{4\sin t}{\cos t \cos^2 2t} - \dfrac{4\sin t \cos t}{\cos^2 t \cos 2t}}{\operatorname{tg}^3 t} = -\frac{4\sin t \cos^3 t}{\cos t \cos 2t \sin^3 t}\left(\frac{1}{\cos 2t} - 1\right) = -\frac{4\cos^2 t\left(1 - \cos 2t\right)}{\cos^2 2t \sin^2 t} =$$

$$=-\frac{8\cos^2 t\sin^2 t}{\cos^2 2t\sin^2 t}=-\frac{8\cos^2 t}{\cos^2 2t}.$$

В і д п о в і д ь: $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{8\cos^2 t}{\cos^2 2t}$.

Приклад 2.90. Знайти похідні $\frac{dy}{dx}$ та $\frac{d^2y}{dx^2}$ параметрично заданої функції:

$$\begin{cases} x=2^{\cos^2 t}; \\ y=2^{\sin^2 t}, \end{cases} \text{ де } t\in(-\infty,+\infty).$$

Р о з в ' я з а н н я

Задану функцію можна дещо спростити:

$$\begin{cases} x=2^{\frac{1}{2}(1+\cos 2t)}; \\ y=2^{\frac{1}{2}(1-\cos 2t)}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\sqrt{2}\sqrt{2}^{\cos 2t}; \\ y=\sqrt{2}\sqrt{2}^{-\cos 2x}. \end{cases}$$

Знайдемо похідні першого порядку x'_t та y'_t.

$$x'_t=-\sqrt{2}\sqrt{2}^{\cos 2t}2\sin 2t\cdot\ln\sqrt{2}=-\sqrt{2}\sin 2t\cdot\sqrt{2}^{\cos 2t}\ln 2;$$

$$y'_t=\sqrt{2}\sqrt{2}^{-\cos 2t}2\sin 2t\cdot\ln\sqrt{2}=\sqrt{2}\sin 2t\cdot\sqrt{2}^{-\cos 2t}\ln 2.$$

Тепер можна знайти $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{2}\sin 2t\cdot\sqrt{2}^{-\cos 2t}\ln 2}{-\sqrt{2}\sin 2t\cdot\sqrt{2}^{\cos 2t}\ln 2}=-\sqrt{2}^{-2\cos 2t};$$

$$\frac{dy}{dx}=-\sqrt{2}^{-2\cos 2t}.$$

Знайдемо похідні другого порядку x''_{tt} та y''_{tt}.

$$x''_{tt}=-\sqrt{2}\,\sqrt{2}^{\cos 2t}\ln 2\left(-2\sin^2 2t\cdot\ln\sqrt{2}+2\cos 2t\right);$$

$$x''_{tt}=-\sqrt{2}\,\sqrt{2}^{\cos 2t}\ln 2\left(-\sin^2 2t\cdot\ln 2+2\cos 2t\right);$$

$$y''_{tt}=\sqrt{2}\,\sqrt{2}^{-\cos 2t}\ln 2\left(-2\sin^2 2t\cdot\ln\sqrt{2}+2\cos 2t\right);$$

$$y''_{tt}=\sqrt{2}\,\sqrt{2}^{-\cos 2t}\ln 2\left(\sin^2 2t\cdot\ln 2+2\cos 2t\right).$$

Тоді, за формулою (2.71), виходить

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-\sqrt{2}^2\sin 2t\cdot\sqrt{2}^{\cos 2t-\cos 2t}\ln^2 2\left(\sin^2 2t\cdot\ln 2+2\cos 2t\right)}{\left(-\sqrt{2}\sin 2t\cdot\sqrt{2}^{\cos 2t}\ln 2\right)^3}+$$

$$+\frac{\sqrt{2}^2 \sin 2t \cdot \sqrt{2}^{-\cos 2t + \cos 2t} \ln^2 2 \left(-\sin^2 2t \cdot \ln 2 + 2\cos 2t\right)}{\left(-\sqrt{2}\sin 2t \cdot \sqrt{2}^{\cos 2t} \ln 2\right)^3};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2\sin 2t \cdot \ln^2 2 \left(-\sin^2 2t \cdot \ln 2 - 2\cos 2t - \sin^2 2t \cdot \ln 2 + 2\cos 2t\right)}{-2\sqrt{2}\sin^3 2t \cdot \sqrt{2}^{3\cos 2t} \ln^3 2} =$$

$$= \sqrt{2}\ \sqrt{2}^{-3\cos 2t} = \sqrt{2}\ 2^{-\frac{3}{2}\cos 2t} = 2^{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\cos 2t}.$$

ЗАУВАЖЕННЯ. В деяких випадках похідну другого порядку простіше знаходити в інший спосіб. Розглянемо як це робиться на цьому ж прикладі.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}\,\frac{dt}{dx} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}\,\frac{1}{\frac{dx}{dt}}.$$

Отже,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(-2^{-\cos 2t}\right)}{dt}\,\frac{1}{-\sqrt{2}\sin 2t \cdot \ln 2 \left(\sqrt{2}\right)^{\cos 2t}}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2^{-\cos 2t}\ 2\sin 2t \cdot \ln 2}{-\sqrt{2}\ \sin 2t \cdot \ln 2 \left(\sqrt{2}\right)^{\cos 2t}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{2}\,2^{-\cos 2t}\left(\sqrt{2}\right)^{-\cos 2t} = 2^{\frac{1}{2} - \cos 2t - \frac{1}{2}\cos 2t} = 2^{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\cos 2t}.$$

В і д п о в і д ь: $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 2^{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\cos 2t}$.

Приклад 2.91. Знайти похідні $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ параметрично заданої функції

$$\begin{cases} x = \mathrm{e}^{-t}\cos t; \\ y = \mathrm{e}^{-t}\sin t, \end{cases} \quad \text{де } t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Р о з в ’ я з а н н я

Функції $x(t)$ та $y(t)$ диференційовні. Знайдемо їхні похідні:

$$x'_t = -\mathrm{e}^{-t}\cos t - \mathrm{e}^{-t}\sin t = -\mathrm{e}^{-t}\left(\sin t + \cos t\right);$$

$$y'_t = -\mathrm{e}^{-t}\sin t + \mathrm{e}^{-t}\cos t = -\mathrm{e}^{-t}\left(\sin t - \cos t\right).$$

Оскільки $x'_t \neq 0$, якщо $t \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, то існує похідна

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\mathrm{e}^{-t}\left(\sin t - \cos t\right)}{-\mathrm{e}^{-t}\left(\sin t + \cos t\right)} = \frac{\sin t - \cos t}{\sin t + \cos t}.$$

Здобутий вираз можна спростити:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t - \cos t}{\sin t + \cos t}\,\frac{\sin t - \cos t}{\sin t - \cos t} = \frac{\sin^2 t - 2\sin t\cos t + \cos^2 t}{\sin^2 t - \cos^2 t} = \frac{1 - \sin 2t}{-\cos 2t} = -\frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2t\right)}{\cos 2t} =$$

$$=-\frac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-t\right)}{\cos 2t}.$$

Обчислимо $\frac{d^2y}{dx^2}$.

$$x''_{tt}=\mathrm{e}^{-t}\left(\sin t+\cos t\right)-\mathrm{e}^{-t}\left(\cos t-\sin t\right)=2\mathrm{e}^{-t}\sin t,$$

$$y''_{tt}=\mathrm{e}^{-t}\left(\sin t-\cos t\right)-\mathrm{e}^{-t}\left(\cos t+\sin t\right)=-2\mathrm{e}^{-t}\cos t.$$

Скористаємось формулою (2.71):

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-2\mathrm{e}^{-t}\cos t\left(-\mathrm{e}^{-t}\right)\left(\sin t+\cos t\right)-2\mathrm{e}^{-t}\left(-\mathrm{e}^{-t}\right)\left(\sin t-\cos t\right)\sin t}{-\mathrm{e}^{-3t}\left(\sin t+\cos t\right)^3}.$$

Спростимо здобутий результат:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-2\mathrm{e}^{-2t}}{\mathrm{e}^{-3t}\left(\sin t+\cos t\right)^3}\left(\sin t\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t-\sin t\cos t\right)=-\frac{2\mathrm{e}^{t}}{\left(\sin t+\cos t\right)^3}.$$

Для знаходження $\frac{d^3y}{dx^3}$ спеціальної формули немає, тому, будемо безпосередньо диференціювати. Тоді

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(-\frac{2\mathrm{e}^{t}}{\left(\sin t+\cos t\right)^3}\right)=\frac{d}{dt}\left(-\frac{2\mathrm{e}^{t}}{\left(\sin t+\cos t\right)^3}\right)\frac{dt}{dx}=$$

$$=-\frac{2\mathrm{e}^{t}\left(\sin t+\cos t\right)^3-2\mathrm{e}^{t}\cdot 3\left(\sin t+\cos t\right)^2\left(\cos t-\sin t\right)}{\left(\sin t+\cos t\right)^6}\,\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=$$

$$=-\frac{2\mathrm{e}^{t}\left(\sin t+\cos t-3\cos t+3\sin t\right)}{\left(\sin t+\cos t\right)^4}\,\frac{1}{-\mathrm{e}^{-t}\left(\sin t+\cos t\right)}=$$

$$=\frac{2\mathrm{e}^{2t}\left(4\sin t-2\cos t\right)}{\left(\sin t+\cos t\right)^5}=\frac{4\mathrm{e}^{2t}\left(2\sin t-\cos t\right)}{\left(\sin t+\cos t\right)^5}.$$

В і д п о в і д ь: $\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{4\mathrm{e}^{2t}\left(2\sin t-\cos t\right)}{\left(\sin t+\cos t\right)^5}$.

Приклад 2.92. Довести, що функція $y=f(x)$, яка задана у параметричній формі

$$\begin{cases} x=t^3+t; \\ y=\frac{3}{4}t^4+\frac{1}{2}t^2+1, \end{cases} \quad \text{де } t\in(-\infty,+\infty),$$

задовольняє рівняння

$$y''\left(1+3\left(y'\right)^2\right)=1.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Функції $x(t)$ та $y(t)$ диференційовні. Знайдемо їхні похідні:

$$x'_t = 3t^2 + 1\,; \quad y'_t = 3t^3 + t\,.$$

Оскільки $x'_t \neq 0$, коли $t \in (-\infty, +\infty)$, то існує похідна

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{3t^3 + t}{3t^2 + 1} = \frac{t\left(3t^2 + 1\right)}{3t^2 + 1} = t\,.$$

Знайдемо $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$. Так як $x''_{tt} = 6t$; $y''_{tt} = 9t^2 + 1$, то

$$y''_{xx} = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\left(9t^2 + 1\right)\left(3t^2 + 1\right) - 6t\left(3t^2 + 1\right)}{\left(3t^2 + 1\right)^3} = \frac{27t^4 + 3t^2 + 9t^2 + 1 - 18t^4 - 6t^2}{\left(3t^2 + 1\right)^3} =$$

$$= \frac{9t^4 + 6t^2 + 1}{\left(3t^2 + 1\right)^3} = \frac{\left(3t^2 + 1\right)^2}{\left(3t^2 + 1\right)^3} = \frac{1}{3t^2 + 1}.$$

Підставимо знайдені похідні y'_x та y''_{xx} в задане рівняння. Маємо

$$\frac{1}{3t^2 + 1}\left(1 + 3t^2\right) = 1, \quad \text{тобто} \quad 1 = 1.$$

Отже, задана функція задовольняє задане рівняння.

Диференціали вищих порядків

Нехай $y = f(x)$ – n разів диференційовна функція, де x – незалежна змінна. Для такої функції існують диференціали першого, другого, ..., n-го порядків.

$$dy = f'(x)\,dx\,; \;\; d^2 y = f''(x)\,dx^2\,; \;\; ...; \;\; d^n y = f^{(n)}(x)\,dx^n\,.$$

Приклад 2.93. Знайти диференціали першого, другого та третього порядку функції $y = x^3 + 4\sin x$, де x – незалежна змінна.

Р о з в ’ я з а н н я

Задана функція є нескінченно диференційовна. Знайдемо її похідні y', y'', y'''.

$$y' = 3x^2 + 4\cos x\,; \quad y'' = 6x - 4\sin x\,; \quad y''' = 6 - 4\cos x\,.$$

Тоді

$$dy = \left(3x^2 + 4\cos x\right)dx\,; \quad d^2 y = \left(6x - 4\sin x\right)dx^2\,; \quad d^3 y = \left(6 - 4\cos x\right)dx^3\,.$$

Ці диференціали були дістані за формулами (2.48), (2.72), (2.73). Однак, $d^2 y$ та $d^3 y$ можна було знайти не за зазначеними формулами, а виходячи з визначення диференціала. Знайдемо $d^2 y$ та $d^3 y$ у такий спосіб:

$$d^2 y = d\left(dy\right) = d\left(\left(3x^2 + 4\cos x\right)dx\right) = \left(\left(3x^2 + 4\cos x\right)dx\right)'dx\,.$$

Диференціал незалежної змінної вважаємо за сталу, тому dx можна винести за знак похідної. Тоді

$$d^2y = \left(3x^2 + 4\cos x\right)' dx^2 = \left(6x - 4\sin x\right) dx^2 .$$

Аналогічно,

$$d^3y = d\left(d^2y\right) = d\left(\left(6x - 4\sin x\right) dx^2\right)' dx = \left(6 - 4\cos x\right) dx^3 .$$

В і д п о в і д ь: $dy = \left(3x^2 + 4\cos x\right) dx$; $d^2y = \left(6x - 4\sin x\right) dx^2$; $d^3y = \left(6 - 4\cos x\right) dx^3$.

Приклад 2.94. Задано функцію $y = x\mathrm{e}^{-x}$, де x – незалежна змінна. Знайти диференціал другого порядку.

Р о з в ’ я з а н н я

$$d^2y = f''(x)\, dx^2;$$

$$y' = \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}\left(1 - x\right); \quad y'' = -\mathrm{e}^{-x}\left(1 - x\right) + \mathrm{e}^{-x}\left(-1\right) = \mathrm{e}^{-x}\left(-1 + x - 1\right) = \mathrm{e}^{-x}\left(x - 2\right).$$

Значить, $d^2y = \left(x - 2\right)\mathrm{e}^{-x} dx^2$.

В і д п о в і д ь: $d^2y = \left(x - 2\right)\mathrm{e}^{-x} dx^2$.

Приклад 2.95. Знайти диференціали першого та другого порядку функції $y = \sin x^2$, якщо: *а*) x – незалежна змінна; б) x – функція певної незалежної змінної.

Р о з в ’ я з а н н я

а) $y' = 2x\cos x^2$; $y'' = 2\cos x^2 - \left(2x\right)^2 \sin x^2$, тоді

$$dy = 2x\cos x^2\, dx, \quad d^2y = \left(2\cos x^2 - 4x^2 \sin x^2\right) dx^2 .$$

б) x не є незалежною змінною, тому внаслідок інваріантності форми першого диференціала, для знаходження dy використовуємо формулу (2.48). Тоді

$$dy = 2x\cos x^2 dx .$$

Для знаходження d^2y користуємось формулою (2.76). Тоді

$$d^2y = \left(\sin x^2\right)'' dx^2 + \left(\sin x^2\right)' d^2x .$$

$$d^2y = \left(2\cos x^2 - 4x^2 \sin x^2\right) dx^2 + 2x\cos x^2\, d^2x .$$

В і д п о в і д ь: *а*) $dy = 2x\cos x^2 dx$; $d^2y = \left(2\cos x^2 - 4x^2\sin x^2\right) dx^2$;

б) $dy = 2x\cos x^2\, dx$; $d^2y = \left(2\cos x^2 - 4x^2\sin x^2\right) dx^2 + 2x\cos x^2\, d^2x$.

Г л а в а 2

ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

2.1 Основні теореми диференціального числення

2.1.1 Теорема Ролля

Теорема (про нулі похідної). Нехай функція $y = f(x)$ задовольняє умови:

1) неперервна на сегменті $[a, b]$;

2) диференційовна в інтервалі (a, b);

3) на кінцях сегмента набуває однакових значень, тобто $f(a) = f(b)$.

Тоді в інтервалі (a, b) існує хоч би одна така точка $x = c$, в якій похідна функції задовольняє умову $f'(x) = 0$.

Д о в е д е н н я

Оскільки функція $y = f(x)$ є неперервна на сегменті $[a, b]$, то вона на цьому сегменті досягає найменшого значення m та найбільшого значення M.

Якщо $m = M$, то це означає, що функція є сталою, тобто $y = \text{const}$, а тоді $y' = 0$ на $[a, b]$. Для випадку $m = M$ теорему доведено.

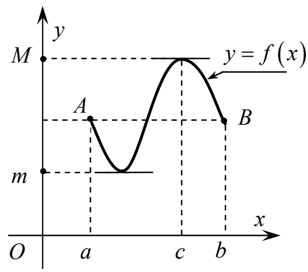


Рисунок 2.10

Нехай тепер $m \neq M$. Оскільки $f(a) = f(b)$, то принаймні одного зі значень m та M функція досягає у внутрішніх точках сегмента $[a, b]$. Нехай c – внутрішня точка сегмента $[a, b]$, в якій функція $y = f(x)$ набуває, приміром, найбільшого значення M (рис. 2.10):

$$f(c) = M.$$

Надамо значенню $x = c$ приріст $\Delta_1 x > 0$ та приріст $\Delta_2 x > 0$. Знайдемо прирости функції у точках $c - \Delta_1 x$ та $c + \Delta_2 x$.

$$f(c - \Delta_1 x) - f(c) \le 0, \text{ де } \Delta_1 x > 0; \; f(c + \Delta x) - f(c) \le 0, \text{ де } \Delta_2 x > 0.$$

Ці нерівності поділимо відповідно на $(-\Delta_1 x)$ та $\Delta_2 x$.

$$\frac{f(c - \Delta x) - f(c)}{-\Delta_1 x} \ge 0, \text{ де } \Delta_1 x > 0; \quad \frac{f(c + \Delta_2 x) - f(c)}{\Delta_2 x} \le 0, \text{ де } \Delta_2 x > 0.$$

Припустимо, що $\Delta_1 x \to 0$ та $\Delta_2 x \to 0$ і зробимо граничний перехід:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c - \Delta x) - f(c)}{-\Delta_1 x} \ge 0, \text{ де } \Delta_1 x > 0; \; \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta_2 x) - f(c)}{\Delta_2 x} \le 0, \text{ де } \Delta_2 x > 0.$$

Звідси маємо: $f'(c) \ge 0$ та $f'(c) \le 0$.

Обидві нерівності разом виконуються лише у випадку, коли $f'(c)=0$.

Отже, теорему доведено.

Н а с л і д о к. Нехай функція $y=f(x)$ на сегменті $[a,b]$ задовольняє умови теореми Ролля, але при цьому $f(a)=f(b)=0$, тоді між двома дійсними коренями функції існує хоч би один дійсний корінь похідної.

Геометричний зміст теореми Ролля

Якщо функція $y=f(x)$ задовольняє умови теореми Ролля на сегменті $[a,b]$, то в інтервалі (a,b) існує хоч би одна така точка, що дотична, проведена у цій точці до кривої, є паралельна осі *Ox*.

Дійсно, згідно з теоремою Ролля, існує хоч би одна така точка $x=c$, в якій $f'(c)=0$. Це означає, що у цій точці кутовий коефіцієнт дотичної $k=\operatorname{tg}\alpha=0$, звідки виходить, що $\alpha=0$ (рис. 2.10).

2.1.2 Теорема Лагранжа

Теорема (про скінченні прирости). Нехай функція $y=f(x)$ задовольняє умови:

1) неперервна на сегменті $[a,b]$;
2) диференційовна в інтервалі (a,b).

Тоді в інтервалі (a,b) існує хоч би одна така точка $x=c$, в якій похідна функції задовольняє умову

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Д о в е д е н н я

Введемо допоміжну функцію $F(x)=f(x)+\lambda x$, де λ – деякий сталий множник. Знайдемо таке значення λ, за якого функція $F(x)$ задовольняє умови теореми Ролля.

Функція $F(x)$ є сумою функцій $f(x)$ та λx, які задовольняють першу та другу умови теореми Ролля, отже, і функція $F(x)$ ці умови задовольняє.

Підберемо таке λ, щоб виконувалася третя умова теореми Ролля:

$$F(a)=f(a)+\lambda a;\quad F(b)=f(b)+\lambda b,$$

отже, $F(a)=F(b)$ тоді, коли

$$f(a)+\lambda a=f(b)+\lambda b.$$

Звідси

$$f(b)-f(a)=-\lambda(b-a);\quad \lambda=-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Тепер $F(x)$ можна записати у вигляді

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x.$$

Знайдемо похідну функції $F(x)$.

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Згідно з теоремою Ролля, існує хоч би одна така точка $x = c$, що $F'(c) = 0$.

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

звідки

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \text{ де } c \in (a, b), \tag{2.77}$$

що і необхідно було довести.

Запишемо формулу (2.77) у вигляді

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a), \text{де } c \in (a, b). \tag{2.78}$$

Формула (2.78) називається ***формулою Лагранжа*** або ***формулою скінченних приростів***.

Якщо теорему Лагранжа розглянути на сегменті $[x, x + \Delta x]$, то формула (2.78) набуває вигляд

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(c)\Delta x, \text{ де } c \in (x, x + \Delta x). \tag{2.79}$$

Геометричний зміст теореми Лагранжа

На рис. 2.11 подано графік функції, яка задовольняє умови теореми Лагранжа на сегменті $[a, b]$. На графіку функції маємо точки $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$, $M(c, f(c))$. Відрізок AB – хорда, що поєднує точки A та B; KM – дотична до графіка функції $y = f(x)$ з точкою дотику M; відрізки AE та BE паралельні відповідно осям Ox та Oy (за побудовою).

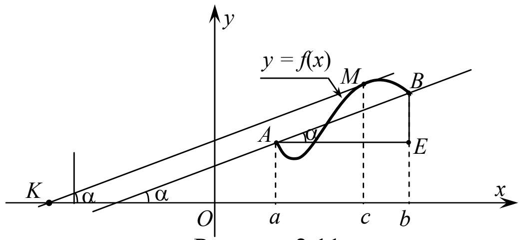


Рисунок 2.11

Розглянемо прямокутний трикутник AEB. Позначимо $\angle BAE = \alpha$. Тоді

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|BE|}{|AE|}, \text{тобто}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Отже, кутовий коефіцієнт хорди AB буде таким

$$k_{AB} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Тепер розглянемо дотичну KM.

$$k_{KM} = f'(c), \quad \text{але ж} \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \text{ тоді } k_{KM} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

В и с н о в о к. Якщо функція $y = f(x)$ на сегменті $[a, b]$ задовольняє умови теореми Лагранжа, то в інтервалі (a, b) знайдеться хоч би одна така точка $x=c$, що дотична, проведена до графіка функції з точкою дотику $M\left(c, f\left(c\right)\right)$, є паралельною хорді AB, яка з'єднує точки $A\left(a, f\left(a\right)\right)$ та $B\left(b, f\left(b\right)\right)$.

ЗАУВАЖЕННЯ. Теорема Ролля є частинним випадком теореми Лагранжа.

2.1.3 Теорема Коші

Теорема Коші (про відношення приростів двох функцій).
Нехай функції $y=f(x)$ та $y=\varphi(x)$ задовольняють умови:

1) неперервні на сегменті $\left[a, b\right]$;
2) диференційовні в інтервалі $\left(a, b\right)$;
3) похідна $\varphi'(x)$ відрізняється від нуля в інтервалі $\left(a, b\right)$.

Тоді в інтервалі (a, b) існує хоч би одна така точка $x=c$, що буде справедливою рівність

$$\frac{f\left(b\right)-f\left(a\right)}{\varphi\left(b\right)-\varphi\left(a\right)}=\frac{f'\left(c\right)}{\varphi'\left(c\right)}.$$

Д о в е д е н н я

Розглянемо вираз $\varphi(b)-\varphi(a)$ і покажемо, що на сегменті $\left[a, b\right]$ цей вираз відрізняється від нуля. Дійсно, функція $\varphi(x)$ задовольняє перші дві умови теореми Ролля. Якщо припустити, що $\varphi(b)-\varphi(a)=0$, то тоді $\varphi(b)=\varphi(a)$. Третя умова теореми Ролля за такого припущення також виконується, а значить, в інтервалі $\left(a, b\right)$ має існувати хоч би одна така точка $x=c$, що $\varphi'(c)=0$. Але це суперечить третій умові даної теореми. Отже, $\varphi(b)-\varphi(a)\neq 0$.

Введемо допоміжну функцію $F(x)=f(x)+\lambda\varphi(x)$, де λ – деякий сталий множник. Функція $F(x)$ є сумою функцій $f(x)$ та $\lambda\varphi(x)$, які на сегменті $\left[a, b\right]$ задовольняють перші дві умови теореми Ролля. Знайдемо таке значення λ, за якого функція $F(x)$ задовольняє і третю умову теореми Ролля:

$$F(a)=f(a)+\lambda\varphi(a), \quad F(b)=f(b)+\lambda\varphi(b)$$

Для виконання третьої умови теореми Ролля треба, щоб виконувалась рівність

$$f(a)+\lambda\varphi(a)=f(b)+\lambda\varphi(b).$$

Звідси

$$\lambda=-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}.$$

Тоді

$$F(x)=f(x)-\frac{f\left(b\right)-f\left(a\right)}{\varphi\left(b\right)-\varphi\left(a\right)}\varphi(x).$$

За теоремою Ролля можна стверджувати, що в інтервалі (a, b) існує хоч би одна точка $x = c$, в якій $F'(c) = 0$.

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}\varphi'(x), \qquad f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}\varphi'(c) = 0,$$

звідки

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}. \tag{2.80}$$

Рівність (2.80) називається ***формулою Коші***.

Рівність (2.80) можна трактувати в такий спосіб: відношення приростів функцій на заданому інтервалі дорівнює відношенню їхніх похідних у деякій точці цього інтервалу.

ЗАУВАЖЕННЯ. Якщо за функцію $\varphi(x)$ прийняти функцію $\varphi(x) = x$, то рівність (2.80) набуває такої форми:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

А це свідчить про те, що теорема Лагранжа є частинним випадком теореми Коші.

Приклади до пункту 2.1

Приклад 2.96. Перевірити, чи задовольняє умови теореми Ролля функція $f(x) = x\left(x^2 - 1\right)$ на проміжку: 1) $x \in [-1, 1]$; 2) $x \in [0, 1]$.

Р о з в ’ я з а н н я

Задана функція $f(x) = x^3 - x$ є різницею двох основних елементарних функцій: $y_1 = x^3$; $y_2 = x$. Відомо, що ці функції неперервні у своїй області визначення, а, отже, і в кожному із заданих проміжків. В усій області визначення і, зокрема, у заданих проміжках функція є диференційовна. Знайдемо значення функції на кінцях проміжків:

$$f(-1) = 0; \;\; f(0) = 0; \;\; f(1) = 0.$$

Виходить, що $f(-1) = f(1)$ та $f(0) = f(1)$. Отже, на кожному із заданих проміжків функція задовольняє умови теореми Ролля.

В і д п о в і д ь: 1) умови теореми Ролля виконуються; 2) умови теореми Ролля виконуються.

Приклад 2.97. В інтервалах $(-1, 1)$ та $(1, 2)$ знайти такі точки, в яких дотична до графіка функції

$$f(x) = \left(x^2 - 1\right)(x - 2)$$

є горизонтальною.

Р о з в ' я з а н н я

Перевіримо, чи задовольняє функція $f(x)=\left(x^2-1\right)\left(x-2\right)$ умови теореми Ролля. Задана функція є добутком двох неперервних та диференційовних на сегментах $\left[-1,1\right]$ та $\left[1,2\right]$ функцій. Знайдемо значення функції на кінцях проміжків:

$$f\left(-1\right)=0;\ f\left(1\right)=0;\ f\left(2\right)=0.$$

Отже, і в інтервалі $\left(-1,1\right)$, і в інтервалі $\left(1,2\right)$ існують такі точки, похідна в яких дорівнює нулю. Знайдемо ці точки з умови $f'(x)=0$.

$$f'(x)=2x\left(x-2\right)+\left(x^2-1\right),\quad \text{тобто}\quad f'(x)=3x^2-4x-1;$$

$$f'(x)=0,\ \text{коли}\ x=\frac{2\pm\sqrt{7}}{3}.$$

$$x_1=\frac{2-\sqrt{7}}{3}\approx-0,2\in(-1,\ 1);\qquad x_2=\frac{2+\sqrt{7}}{3}\approx1,6\in(1,\ 2).$$

Отже, точки, у яких дотична до графіка функції паралельна осі Ox – це точки $x_1\approx-0,2$ в інтервалі (–1, 1) та $x_2\approx 1,6$ в інтервалі (1, 2).

В і д п о в і д ь: $x_1\approx-0,2$; $x_2\approx 1,6$.

Приклад 2.98. Довести, що між двома дійсними коренями многочлена з дійсними коефіцієнтами є корінь його похідної.

Р о з в ' я з а н н я

Нехай $P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$ – многочлен з дійсними коефіцієнтами. Припустимо, що x_1 та x_2 ($x_1 < x_2$) – два будь-яких кореня многочлена. Розглянемо сегмент [x_1, x_2]. $P_n(x)$ є неперервною та диференційовною функцією на сегменті [x_1, x_2]. До того ж, $P_n(x_1)=0$, $P_n(x_2)=0$, тобто $P_n(x_1)=P_n(x_2)$. Отже, ми впевнились, що на сегменті [x_1, x_2] функція $P_n(x)$ задовольняє умови теореми Ролля, а це означає, що в інтервалі (x_1, x_2) знайдеться принаймні одна точка $x=c$, в якій $P_n'(x)=0$, тобто доведено, що $x=c$ – корінь похідної.

Приклад 2.99. Довести, що похідна многочлена

$$P_5(x)=x\left(x-1\right)\left(x-2\right)\left(x-3\right)\left(x-4\right)$$

має чотири простих дійсних кореня, які належать відповідно до інтервалів (0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4).

Р о з в ' я з а н н я

Функція $P_5(x)$ є диференційовна, а отже, і неперервна в усій області визначення. Цей многочлен має п'ять коренів: $x_0=0$; $x_1=1$; $x_2=2$; $x_3=3$; $x_4=4$, звідки $P_5(0)=P_5(1)=P_5(2)=P_5(3)=P_5(4)=0$.

Значить, на кожному з проміжків [0, 1], [1, 2], [2, 3], [3, 4] функція $P_5(x)$ задовольняє умови теореми Ролля. Звідси виходить, що в кожному з інтервалів (0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4) є хоч би одна така точка $x=c_i$ ($i=1;2;3;4$), в якій

$P_5'(x) = 0$. При цьому $c_1 \neq c_2 \neq c_3 \neq c_4$, тобто c_1, c_2, c_3, c_4 – дійсні і, до того ж, прості корені похідної.

Приклад 2.100. Чи застосовна теорема Ролля до функції $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ на проміжку $[-1, 1]$?

Р о з в ’ я з а н н я

Задана функція визначена та неперервна в інтервалі $(-\infty, +\infty)$, а отже, і на сегменті $[-1, 1]$. Знайдемо похідну

$$f'(x) = \left(1 - \sqrt[3]{x^2}\right)' = \left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)' = -\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Похідну визначено за всіх дійсних значень x, за винятком значення $x = 0 \in [-1, 1]$. Отже, на проміжку $[-1, 1]$ теорема Ролля не застосовна.

В і д п о в і д ь: умови теореми Ролля не виконано.

Приклад 2.101. В інтервалі $(0, 1)$ знайти таку точку $x = c$, що дотична до графіка функції $y = x^3$ у точці (c, c^3) буде паралельна хорді графіка, яка сполучує точки $(0, 0)$ та $(1, 1)$.

Р о з в ’ я з а н н я

Перевіримо, чи задовольняє задана функція умови теореми Лагранжа в інтервалі $(0, 1)$. Функція $y = x^3$ неперервна та диференційовна на сегменті $[0, 1]$.

Визначимо кутовий коефіцієнт хорди OA (рис. 2.12).

$$k = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{1^3 - 0^3}{1 - 0} = 1 = \operatorname{tg}\alpha.$$

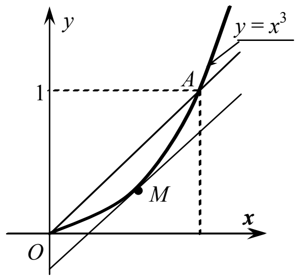


Рисунок 2.12

Хорда проходить під кутом $\alpha = \frac{\pi}{4}$ до осі Ox.

$$f'(x) = 3x^2.$$

З іншого боку, $f'(x) = k = 1$. Тоді $3x^2 = 1$.

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \notin (0, 1); \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \in (0, 1).$$

Отже, дотична, яка проходить через точку $M\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$, паралельна хорді OA.

В і д п о в і д ь: $c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Приклад 2.102. Застосовуючи формулу Лагранжа до функції $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$ на проміжку [1, 3], визначити точку $x = c$, в якій

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}.$$

Р о з в ' я з а н н я

Функція $f(x)$ неперервна та диференційовна в усій області визначення, а отже, і на сегменті [1, 3]. Тоді є справедливою формула

$$f(3) - f(1) = f'(c)\,(3 - 1),$$

тобто

$$(3^3 - 3 \cdot 3^2 + 3 + 1) - (1 - 3 + 1 + 1) = 2f'(c).$$

Звідси $4 = 2f'(c)$ і $f'(c) = 2$. Оскільки $f'(x) = 3x^3 - 6x + 1$, то шукана точка c є коренем рівняння $3x^3 - 6x + 1 = 2$. Розв'яжемо це рівняння:

$$3x^2 - 6x - 1 = 0; \quad x_1 = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \approx -0{,}15; \quad x_2 = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 2{,}15.$$

Перший корінь до заданого проміжка [1, 3] не належить. Виходить, що $c = 1 + \dfrac{2}{\sqrt{3}} \approx 2{,}15.$

В і д п о в і д ь: $c = 1 + \dfrac{2}{\sqrt{3}} \approx 2{,}15.$

Приклад 2.103. На кривій $y = 5x^3 - 1$ знайти точку, в якій дотична паралельна хорді, що сполучує точки $A(0, -1)$ та $B(1, 4)$.

Р о з в ' я з а н н я

Складемо рівняння хорди AB як рівняння прямої, що проходить через дві задані точки – $A(0, -1)$ та $B(1, 4)$:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Дістанемо

$$\frac{y + 1}{4 + 1} = \frac{x - 0}{1 - 0}, \quad y + 1 = 5x.$$

Остаточно рівняння набуває вигляду

$$y = 5x - 1.$$

З цього рівняння виходить, що кутовий коефіцієнт k хорди AB дорівнює 5.

З геометричного змісту теореми Лагранжа виходить, що, оскільки задана функція задовольняє умови теореми Лагранжа на сегменті [0, 1], то в інтервалі (0, 1) неодмінно знайдеться принаймні одна така точка $x = c$, в якій дотична, проведена до графіка заданої функції з точкою дотику $(c,\ f(c))$, буде паралельна хорді AB. Отже, має виконуватись рівність $f'(c) = 5$.

Знайдемо $f'(x)$.

$$f'(x) = 15x^2.$$

З рівняння $15x^2 = 5$ виходить, що $x^2 = \frac{1}{3}$, а $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. До проміжка (0, 1) належить значення $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, яке і є шуканим значенням x. Отже, дотична до кривої $y = 5x^3 - 1$ з точкою дотику $M_0\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{3\sqrt{3}} - 1\right)$ паралельна хорді AB.

Відповідь: $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Приклад 2.104. За допомогою теореми Лагранжа довести справедливість нерівності

$$\frac{b-a}{b} \le \ln\frac{b}{a} \le \frac{b-a}{a}, \text{ де } 0 < a < b.$$

Розв'язання

Розглянемо функцію $f(x) = \ln x$. На сегменті $[a, b]$ функція неперервна та диференційовна, тобто задовольняє умови теореми Лагранжа. Знайдемо похідну функції $y = \ln x$.

$$f'(x) = \frac{1}{x}.$$

Тоді, згідно з формулою Лагранжа, маємо: $\ln b - \ln a = (b - a)\ f'(c)$, де $c \in (a, b)$.

Функція $y = \ln x$ є зростаючою функцією на сегменті $[a, b]$, а похідна $f(x) = \frac{1}{x}$ на цьому ж сегменті є спадною функцією, отже,

$$\frac{1}{b} \le f'(x) \le \frac{1}{a}.$$

Помножимо останню нерівність на число $b - a > 0$. Тоді маємо

$$\frac{b-a}{b} \le (b-a)f'(x) \le \frac{b-a}{a}.$$

Оскільки, згідно з формулою Лагранжа, $(b - a)\ f'(c) = \ln b - \ln a$, то

$$\frac{b-a}{b} \le \ln b - \ln a \le \frac{b-a}{a},$$

$$\frac{b-a}{b} \le \ln\frac{b}{a} \le \frac{b-a}{a}.$$

Приклад 2.105. На сегменті $[-2, 2]$ задано дві диференційовні функції $f(x) = 4x^3 - 1$ та $\varphi(x) = 4x - 1$. Чи є справедливою теорема Коші для цих функцій?

Розв'язання

Функції диференційовні на сегменті $[-2, 2]$. Тоді, згідно з необхідною умовою диференційовності, ці функції на сегменті $[-2, 2]$ є неперервні. На заданому сегменті $\varphi'(x) = 4 \neq 0$. Умови теореми Коші виконуються. Отже, теорема Коші є справедливою для заданих функцій на сегменті $[-2, 2]$.

В і д п о в і д ь: функції задовольняють умови теореми Коші.

Приклад 2.106. На сегменті $[-2, 2]$ задано функції $f(x) = x^2 - 4$ та $\varphi(x) = x^4$. Чи задовольняють ці функції умови теореми Коші?

Р о з в ' я з а н н я

Функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ неперервні на сегменті $[-2, 2]$. Похідні $f'(x) = 2x$ та $\varphi'(x) = 4x^3$ визначено на проміжку $[-2, 2]$. Похідна $\varphi'(x) = 4x^3$ у точці $x = 0$ дорівнює нулю. Отже, задані функції умови теореми Коші не задовольняють.

В і д п о в і д ь: функції не задовольняють умови теореми Коші.

2.2 Розкриття невизначеностей

2.2.1 Перша та друга теореми Лопіталя

Теорема Лопіталя (про розкриття невизначеності типу $\left[\frac{0}{0}\right]$). Нехай функції $y = f(x)$ та $y = \varphi(x)$ задовольняють умови:

1) диференційовні в околі точки x_0;
2) $\varphi'(x) \neq 0$ в околі точки x_0;
3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$;
4) існує скінченна або нескінченна границя відношення похідних $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Тоді існує і границя відношення функцій $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ та є справедливою рівність

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \tag{2.81}$$

Д о в е д е н н я

Згідно з умовою, функції $y = f(x)$ та $y = \varphi(x)$ у околі точки x_0 визначені, але, чому конкретно дорівнюють $f(x_0)$ та $\varphi(x_0)$, у теоремі не йдеться. Отже, розглянемо два випадки.

1) $f(x_0) = \varphi(x_0) = 0$.

Відповідно до теореми Коші, існує хоч би одна точка $c \in (x_0, x)$, така, що буде справедливою рівність

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}, \text{ де } c \in (x_0, x).$$

Оскільки $f(x_0) = \varphi(x_0) = 0$, то виходить, що

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Нехай $x\to x_0$. Тоді

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Точка *c* перебуває між точками x_0 та x. Коли *x* прямує до x_0, точка *c* збігається з точкою x, а тоді

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

2) Тепер припустимо, що $f\left(x_0\right)\neq 0$ та $\varphi\left(x_0\right)\neq 0$. Вводимо допоміжні функції

$$f^*(x)=\begin{cases}f(x), & \text{коли } x\neq x_0;\\ 0, & \text{коли } x=x_0\end{cases}\quad \text{та}\quad \varphi^*(x)=\begin{cases}\varphi(x), & \text{коли } x\neq x_0;\\ 0, & \text{коли } x=x_0.\end{cases}$$

До таких функцій підходить розглянутий вище випадок 1:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f^*(x)}{\varphi^*(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\left(f^*(x)\right)'}{\left(\varphi^*(x)\right)'}.$$

Остання рівність є справедливою в околі точки x_0, а отже, допоміжні функції можна замінити на задані функції і, таким чином, знову приходимо до рівності

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Теорема Лопіталя (про розкриття невизначеності типу $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$). Якщо функції $y=f(x)$ та $y=\varphi(x)$ задовольняють умови:

1) диференційовні в околі точки x_0;
2) $\varphi'(x)\neq 0$ у околі точки x_0;
3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$; $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$;
4) існує скінченна або нескінченна границя відношення похідних $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Тоді існує границя відношення функцій $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ та є справедливою рівність

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Доведення

У попередній теоремі досліджувалась границя відношення функцій $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, яка являла собою невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$. Тепер же маємо справу з границею відношення $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, яка являє собою невизначеність типу $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Запишемо відношення $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ в іншому вигляді:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\dfrac{1}{\varphi(x)}}{\dfrac{1}{f(x)}}.$$

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$ та якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{\varphi(x)}=0$. Тобто, на функції $\dfrac{1}{f(x)}$ та $\dfrac{1}{\varphi(x)}$ поширюється перша теорема Лопіталя про розкриття невизначеності типу $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\dfrac{1}{\varphi(x)}}{\dfrac{1}{f(x)}}=\lim_{x\to x_0}\frac{\left(\dfrac{1}{\varphi(x)}\right)'}{\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)'}=\lim_{x\to x_0}\frac{-\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}}{-\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}}=\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi'(x)}{f'(x)}\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right)^2.$$

Після перетворень маємо

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi'(x)}{f'(x)}\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right)^2,$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}\left(1-\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi'(x)}{f'(x)}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right)=0.$$

Припустивши, що $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}\neq 0$, маємо $1-\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\varphi'(x)}{f'(x)}\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=0$, звідки

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi'(x)}{f'(x)}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=1,\qquad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\varphi'(x)}{f'(x)}},$$

тобто

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

ЗАУВАЖЕННЯ 1. Теореми Лопіталя про розкриття невизначеностей типу $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ та $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ залишаються справедливими і тоді, коли точка x_0 є нескінченно віддаленою точкою, тобто

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

ЗАУВАЖЕННЯ 2. Якщо похідні $f'(x)$ та $\varphi'(x)$ своєю чергою є функціями, що задовольняють умови теорем Лопіталя, то є справедливою рівність

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}. \tag{2.82}$$

ЗАУВАЖЕННЯ 3 Якщо функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ задовольняють умови теорем Лопіталя, та виконується додаткова умова, яка полягає у неперервності функцій $f'(x)$ та $\varphi'(x)$ у точці x_0, то тоді є справедливою рівність

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f'(x_0)}{\varphi'(x_0)}. \tag{2.83}$$

Зміст теорем Лопіталя можно подати у формі правила, називаного правилом Лопіталя.

Правило Лопіталя. Якщо границя відношення двох функцій $f(x)$ та $y=\varphi(x)$, коли $x\to x_0$, дає невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, то границя відношення функцій дорівнює границі відношення їхніх похідних, коли $x\to x_0$.

Після певних перетворень правило Лопіталя можна використовувати і для розкриття невизначеностей типу $[0\cdot\infty]$; $[\infty-\infty]$; $\left[0^0\right]$; $\left[\infty^0\right]$; $\left[1^\infty\right]$.

Розкриття деяких інших видів невизначеностей

Розкриття невизначеності типу $[0\cdot\infty]$

Нехай $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, а $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$. Розглянемо, у який спосіб можна знайти границю функції $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\,\varphi(x)=[0\cdot\infty]$.

Позначимо задану границю через A і запишемо цю границю у такий спосіб

$$A=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\dfrac{1}{\varphi(x)}}=\left[\frac{0}{0}\right] \quad \text{або} \quad A=\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

У обох випадках можна користуватися правилом Лопіталя.

Розкриття невизначеності типу $[\infty-\infty]$

Нехай $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$. Розглянемо, як можна знайти границю функції $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-\varphi(x)\right)=[\infty-\infty]$. Інколи, таке спрощення як приведення до спільного знаменника виразу, $f(x)-\varphi(x)$ може призвести до невизначеностей типу $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Розкриття невизначеності типу $\left[0^0\right]$

Нехай $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$. Розглянемо як можна знайти границю функції $y = \left(f(x)\right)^{\varphi(x)}$, коли $x \to x_0$. Позначимо цю границю через

$$A = \lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{\varphi(x)} = \left[0^0\right].$$

Прологарифмуємо обидві частини рівності $y = \left(f(x)\right)^{\varphi(x)}$, припускаючи, що $f(x) > 0$.

$$\ln y = \ln\left(f(x)\right)^{\varphi(x)},$$

звідки дістанемо таку рівність

$$\ln y = \varphi(x)\ln f(x).$$

Зробимо граничний перехід, коли $x \to x_0$.

$$\lim_{x\to x_0}\ln y = \lim_{x\to x_0}\varphi(x)\ln f(x) = \left[0\cdot\infty\right] = \lim_{x\to x_0}\frac{\ln f(x)}{\dfrac{1}{\varphi(x)}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to x_0}\frac{\dfrac{f'(x)}{f(x)}}{-\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}} = -\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\,\frac{\varphi^2(x)}{f(x)}.$$

Границю знайдемо за правилом Лопіталя.
Тоді

$$\ln A = \lim_{x\to x_0}\ln y = -\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\,\frac{\varphi^2(x)}{f(x)}, \quad \text{звідки} \quad A = \lim_{x\to x_0} y = \mathrm{e}^{-\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\frac{\varphi^2(x)}{f(x)}}.$$

Розкриття невизначеності типу $\left[\infty^0\right]$

Нехай $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$. Розглянемо, як можна знайти границю функції $y = \left(f(x)\right)^{\varphi(x)}$, коли $x \to x_0$. Позначимо цю границю через

$$A = \lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{\varphi(x)} = \left[\infty^0\right].$$

Прологарифмуємо обидві частини рівності $y = \left(f(x)\right)^{\varphi(x)}$, припускаючи, що $f(x) > 0$:

$$\ln y = \ln\left(f(x)\right)^{\varphi(x)},$$

звідки дістанемо рівність

$$\ln y = \varphi(x)\,\ln f(x).$$

Зробимо граничний перехід, коли $x \to x_0$:

$$\ln A = \lim_{x\to x_0}\ln y = \lim_{x\to x_0}\varphi(x)\,\ln f(x) = \left[0\cdot\infty\right] = \lim_{x\to x_0}\frac{\ln f(x)}{\dfrac{1}{\varphi(x)}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = -\lim_{x\to x_0}\frac{\dfrac{f'(x)}{f(x)}}{-\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}} =$$

$$= -\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\,\frac{\varphi^2(x)}{f(x)}.$$

Тоді

$$\ln A = \lim_{x\to x_0} \ln y = -\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \frac{\varphi^2(x)}{f(x)}, \quad \text{звідки} \quad A = \lim_{x\to x_0} y = e^{-\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \frac{\varphi^2(x)}{f(x)}}.$$

Розкриття невизначеності типу $\left[1^{\infty}\right]$

Нехай $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \infty$. Розглянемо, як можна знайти границю функції $y = \left(f(x)\right)^{\varphi(x)}$, коли $x \to x_0$. Позначимо цю границю через

$$A = \lim_{x\to x_0} \left(f(x)\right)^{\varphi(x)} = \left[1^{\infty}\right].$$

Прологарфимуємо обидві частини рівності $y = \left(f(x)\right)^{\varphi(x)}$, припускаючи, що $f(x) > 0$:

$$\ln y = \ln\left(f(x)\right)^{\varphi(x)},$$

звідки дістанемо рівність

$$\ln y = \varphi(x) \ln f(x).$$

Виконаємо граничний перехід, коли $x \to x_0$.

$$\ln A = \lim_{x\to x_0} \ln y = \lim_{x\to x_0} \varphi(x) \ln f(x) = \left[\infty \cdot 0\right] = \lim_{x\to x_0} \frac{\ln f(x)}{\dfrac{1}{\varphi(x)}} = \left[\frac{0}{0}\right] = -\lim_{x\to x_0} \frac{\dfrac{f'(x)}{f(x)}}{\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}} =$$

$$= -\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \cdot \frac{\varphi^2(x)}{f(x)}.$$

Тоді

$$\ln A = \lim_{x\to x_0} \ln y = -\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \frac{\varphi^2(x)}{f(x)}, \quad \text{звідки} \quad A = \lim_{x\to x_0} y = e^{-\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \frac{\varphi^2(x)}{f(x)}}.$$

Приклади до пункту 2.2

Розкриття невизначеності типу $\left[\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}\right]$

Приклад 2.107. Знайти границю функції

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Р о з в ' я з а н н я

Позначимо границю функції через

$$A = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right].$$

За правилом Лопіталя маємо

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln(1+x))'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1+0}=1.$$

Відповідь: 1.

Приклад 2.108 Знайти границю функції

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x-\sin x}.$$

Розв'язання

Позначимо границю функції через

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{x}-e^{-x}-2x\right)'}{\left(x-\sin x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Перше застосування правила Лопіталя результатів не надало. Оскільки знову маємо ту саму невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$, то можна знову застосувати правило Лопіталя:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{x}+e^{-x}-2\right)'}{\left(1-\cos x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Застосуємо втретє правило Лопіталя:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}}{\cos x}=\frac{1+1}{1}=2.$$

Відповідь: 2.

Приклад 2.109. Знайти границю функції

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^{3}}.$$

Розв'язання

Позначимо границю функції через

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^{3}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos x+x\sin x}{3x^{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{3x^{2}}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{3}.$$

Відповідь: $\frac{1}{3}$.

Приклад 2.110. Знайти границю функції

$$\lim_{x\to 2}\frac{4x+2x^{2}+5x^{3}-56}{17x^{3}-9x^{2}-100}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Позначимо границю функції через

$$A=\lim_{x\to 2}\frac{4x+2x^2+5x^3-56}{17x^3-9x^2-100}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Далі застосовуємо правило Лопіталя.

$$A=\lim_{x\to 2}\frac{\left(4x+2x^2+5x^3-56\right)'}{\left(17x^3-9x^2-100\right)'}=\lim_{x\to 2}\frac{4+4x+15x^2}{51x^2-18x}=\frac{3}{7}.$$

В і д п о в і д ь: $\frac{3}{7}$.

Приклад 2.111. Знайти границю функції

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-7x+6}{\left(x-2\right)^3}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Позначимо границю функції через

$$A=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-7x+6}{\left(x-2\right)^3}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

За правилом Лопіталя маємо

$$A=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^3-7x+6\right)'}{\left(\left(x-2\right)^3\right)'}=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-7}{3\left(x-2\right)^2}=\infty .$$

В і д п о в і д ь: ∞.

Приклад 2.112. Знайти границю функції

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-5x^2+7x-3}{x^3-2x^2+x}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Позначимо границю функції через

$$A=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-5x^2+7x-3}{x^3-2x^2+x}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

За правилом Лопіталя маємо

$$A=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^3-5x^2+7x-3\right)'}{\left(x^3-2x^2+x\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-10x+7}{3x^2-4x+1}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Знов здобули невизначеність, яка дозволяє повторне застосовування правила Лопіталя. Тоді

$$A=\lim_{x\to 1}\frac{\left(3x^2-10x+7\right)'}{\left(3x^2-4x+1\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{6x-10}{6x-4}=\frac{-4}{2}=-2.$$

В і д п о в і д ь: –2.

Приклад 2.113. Знайти границю функції:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\ln\cos 3x}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Позначимо задану границю через

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\ln\cos 3x}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

За правилом Лопіталя виходить

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\ln\cos x\right)'}{\left(\ln\cos 3x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{\sin x}{\cos x}}{-\dfrac{3\sin 3x}{\cos 3x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x}{3\cos x}\frac{\sin x}{\sin 3x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x}{\cos x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin 3x}=$$

$$.=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin 3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sin x\right)'}{\left(\sin 3x\right)'}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{3\cos 3x}=\frac{1}{9}.$$

В і д п о в і д ь: $\frac{1}{9}$.

Приклад 2.114 Знайти границю функції

$$\lim_{x\to a}\frac{x^a-a^x}{x^a-a^a},\ a>0.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Позначимо границю функції через

$$A=\lim_{x\to a}\frac{x^a-a^x}{x^a-a^a}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to a}\frac{\left(x^a-a^x\right)'}{\left(x^a-a^a\right)'}=\lim_{x\to a}\frac{ax^{a-1}-a^x\ln a}{ax^{a-1}}=\frac{a^a\left(1-\ln a\right)}{a^a}=1-\ln a.$$

В і д п о в і д ь: $1-\ln a$.

Приклад 2.115. Знайти границю функції

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x\right)-x}{\operatorname{tg}^2 x}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Позначимо границю функції через

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{\mathrm{tg}^2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\ln(1+x)-x\right)'}{\left(\mathrm{tg}^2x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2\mathrm{tg}x\cdot\frac{1}{\cos^2x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-x}{1+x}}{\frac{2\mathrm{tg}\,x}{\cos^2x}}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x\cos^2x}{\mathrm{tg}\,x\cdot(1+x)}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x}{\mathrm{tg}\,x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2x}{1+x}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x}{\mathrm{tg}\,x}\cdot 1=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(x)'}{\left(\mathrm{tg}\,x\right)'}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1}{\cos^2x}}=-\frac{1}{2}.$$

В і д п о в і д ь: $-\frac{1}{2}$.

Приклад 2.116. Знайти границю функції

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\mathrm{tg}\ x-x}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Позначимо границю функції через

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\mathrm{tg}x-x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(\mathrm{tg}x-x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{1}{\cos^2x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{1-\cos^2x}{\cos^2x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\cos^2x}{1-\cos^2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\cos^2x}{(1-\cos x)(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2x}{1+\cos x}=\frac{1}{2}.$$

В і д п о в і д ь: $\frac{1}{2}$.

Приклад 2.117. Знайти границю функції

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x-3x}{\ln^3(1+x)}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Позначимо границю функції через

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x-3x}{\ln^3(1+x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 3x-3x)'}{\left(\ln^3(1+x)\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos 3x-3}{3\ln^2(1+x)\,\frac{1}{1+x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos 3x-1)(1+x)}{\ln^2(1+x)}=\lim_{x\to 0}(1+x)\,\lim_{x\to 0}\frac{(\cos 3x-1)}{\ln^2(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-1}{\ln^2(1+x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos 3x-1)'}{\left(\ln^2(1+x)\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-3\sin 3x}{2\ln(1+x)\,\frac{1}{1+x}}=-\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)\sin 3x}{\ln(1+x)}=$$

$$=-\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}(1+x)\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\ln(1+x)}=-\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\ln(1+x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=-\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 3x)'}{(\ln(1+x))'}=$$

$$=-\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{3\cos 3x}{\frac{1}{1+x}}=-\frac{9}{2}\lim_{x\to 0}(1+x)\cos 3x=-\frac{9}{2}.$$

В і д п о в і д ь: $-\frac{9}{2}$.

Розкриття невизначеності типу $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

Приклад 2.118. Знайти границю функції

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-3x+1}{9x^2+8x-5}.$$

Р о з в ' я з а н н я

Позначимо границю функції через

$$A=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-3x+1}{9x^2+8x-5}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(4x^2-3x+1\right)'}{\left(9x^2+8x-5\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{8x-3}{18x+8}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\frac{8}{18}=\frac{4}{9}.$$

В і д п о в і д ь: $\frac{4}{9}$.

Приклад 2.119. Знайти границю функції

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}\ (\alpha>0).$$

Р о з в ' я з а н н я

Позначимо границю функції через

$$A=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{\left(x^\alpha\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\frac{1}{\alpha}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^\alpha}=0.$$

В і д п о в і д ь: 0.

Приклад 2.120. Знайти границю функції

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{5^x}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Позначимо границю функції через

$$A=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{5^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3}{5^x\ln 5}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Застосовуючі декілька разів правило Лопіталя, маємо

$$A=\lim_{x\to+\infty}\frac{12x^2}{5^x\ln^2 5}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{24x}{5^x\ln^3 5}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{24}{5^x\ln^4 5}=0.$$

В і д п о в і д ь: 0.

Приклад 2.121. Знайти границю функції

$$\lim_{x\to+0}\frac{3+\ln x}{2-3\ln(\sin x)}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Позначимо границю функції через

$$A=\lim_{x\to+0}\frac{3+\ln x}{2-3\ln(\sin x)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+0}\frac{(3+\ln x)'}{(2-3\ln(\sin x))'}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-3\,\frac{1}{\sin x}\cos x}=$$

$$=-\frac{1}{3}\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]=-\frac{1}{3}\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to+0}\frac{1}{\cos x}=-\frac{1}{3}.$$

В і д п о в і д ь: $-\frac{1}{3}$.

ЗАУВАЖЕННЯ **.** Невизначеність типу $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ у процесі розв’язування перейшла у невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$. Такі та аналогічні ситуації доволі часто зустрічаються при знаходженні границь функцій.

Приклад 2.122. Знайти границю функції

$$\lim_{x\to1-0}\frac{\ln(1-x)+\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}}{\mathrm{ctg}\,\pi x}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Позначимо границю функції через

$$A=\lim_{x\to1-0}\frac{\ln(1-x)+\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}}{\mathrm{ctg}\,\pi x}=\lim_{x\to1-0}\frac{\ln(1-x)}{\mathrm{ctg}\,\pi x}+\lim_{x\to1-0}\frac{\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}}{\mathrm{ctg}\,\pi x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]+\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 1-0}\frac{\frac{-1}{1-x}}{-\frac{\pi}{\sin^2\pi x}}+\lim_{x\to 1-0}\frac{\frac{1}{\cos^2\frac{\pi x}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}}{-\frac{\pi}{\sin^2\pi x}}=\lim_{x\to 1-0}\frac{\sin^2\pi x}{\pi(1-x)}+\lim_{x\to 1-0}\frac{-\sin^2\pi x}{2\cos^2\frac{\pi x}{2}}=$$

$$=\left[\frac{0}{0}\right]+\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1-0}\frac{2\pi\sin\pi x\cos\pi x}{-\pi}+\lim_{x\to 1-0}\frac{-2\pi\sin\pi x\cos\pi x}{-\frac{4\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}\sin\frac{\pi x}{2}}=$$

$$=-\lim_{x\to 1-0}\sin 2\pi x+\lim_{x\to 1}\frac{\sin 2\pi x}{\sin\pi x}=0+\lim_{x\to 1-0}\frac{2\pi\cos 2\pi x}{\pi\cos\pi x}=-2.$$

В і д п о в і д ь: –2.

Приклад 2.123. Знайти границю функції

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\frac{\ln\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{tg}x}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Позначимо границю функції через

$$A=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\frac{\ln\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{tg}x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\frac{\left(\ln\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)'}{(\operatorname{tg}x)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\frac{\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}}{\frac{1}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\frac{\cos^2 x}{x-\frac{\pi}{2}}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\frac{1+\cos 2x}{x-\frac{\pi}{2}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{1}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\frac{(1+\cos 2x)'}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)'}=\frac{-1}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\frac{2\sin 2x}{1}=0.$$

В і д п о в і д ь: 0.

Приклад 2.124 Знайти границю функції

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x}\ln(\ln x)}{\sqrt[3]{2x+3}\sqrt{\ln x}}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Позначимо границю функції через

$$A=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x}\ln(\ln x)}{\sqrt[3]{2x+3}\sqrt{\ln x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{2x+3}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{\sqrt{\ln x}}=$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{\dfrac{x}{x}}}{\sqrt[3]{\dfrac{2x}{x}+\dfrac{3}{x}}}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln\left(\ln x\right)\right)'}{\left(\sqrt{\ln x}\right)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{2+\dfrac{3}{x}}}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{x\ln x}}{\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x}}} =$$

$$=\frac{2}{\sqrt[3]{2}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\ln x}}{\ln x}=\sqrt[3]{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\ln x}}=0.$$

В і д п о в і д ь: 0.

Приклад 2.125. Знайти границю функції

$$\lim_{x\to1-0}\frac{\ln\left(1-x\right)+\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}}{\operatorname{ctg}\pi x}$$

Р о з в ' я з а н н я

Позначимо границю функції через

$$A=\lim_{x\to1-0}\frac{\ln(1-x)+\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}}{\operatorname{ctg}\pi x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to1-0}\frac{\left(\ln(1-x)+\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}\right)'}{\left(\operatorname{ctg}\pi x\right)'}=\lim_{x\to1-0}\frac{-\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{\pi}{2\cos^2\dfrac{\pi x}{2}}}{-\dfrac{\pi}{\sin^2\pi x}}=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\lim_{x\to1-0}\sin^2\pi x\cdot\left(\frac{\pi}{1+\cos\pi x}-\frac{1}{1-x}\right)=-\frac{1}{2\pi}\lim_{x\to1-0}\frac{\left(-1-\cos\pi x+\pi-\pi x\right)\left(1-\cos2\pi x\right)}{\left(1-x\right)\left(1+\cos\pi x\right)}=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\lim_{x\to1-0}\frac{1-\cos2\pi x}{1+\cos\pi x}\cdot\lim_{x\to1-0}\frac{-1-\cos\pi x+\pi-\pi x}{1-x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\lim_{x\to1-0}\frac{\left(1-\cos2\pi x\right)'}{\left(1+\cos\pi x\right)'}\cdot\lim_{x\to1-0}\frac{\left(-1-\cos\pi x+\pi-\pi x\right)'}{\left(1-x\right)'}=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\lim_{x\to1-0}\frac{2\pi\sin2\pi x}{\left(-\pi\sin\pi x\right)}\cdot\lim_{x\to1-0}\frac{\pi\sin\pi x-\pi}{\left(-1\right)}=-\lim_{x\to1-0}\frac{2\sin\pi x\,\cos\pi x}{\left(-\sin\pi x\right)}\cdot\lim_{x\to1-0}\frac{\sin\pi x-\pi}{\left(-1\right)}=-2.$$

В і д п о в і д ь: –2.

Розкриття невизначеності типу [0·∞]

Приклад 2.126. Знайти границю функції

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\pi-2\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)\sqrt{x}.$$

Р о з в ' я з а н н я

Позначимо границю функції через

$$A=\lim_{x\to+\infty}\left(\pi-2\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)\sqrt{x}=\left[0\cdot\infty\right].$$

Запишемо границю в інший спосіб

$$A=\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi-2\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\pi-2\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)'}{\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{2}{1+x}\frac{1}{2\sqrt{x}}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}}=$$

$$=2\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x}\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x'}{(1+x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1}=1.$$

Відповідь: 1.

Приклад 2.127. Знайти границю функції

$$\lim_{x\to+\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right).$$

Розв’язання

Позначимо границю функції через

$$A=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=[\infty\cdot 0]=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{-e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}=1.$$

Відповідь: 1.

Приклад 2.128. Знайти границю функції

$$\lim_{x\to+\infty}x\sin\frac{7}{x}.$$

Розв’язаня

Позначимо границю функції через

$$A=\lim_{x\to+\infty}x\sin\frac{7}{x}=[\infty\cdot 0]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{7}{x}}{\frac{1}{x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sin\frac{7}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{7}{x^2}\cos\frac{7}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=$$

$$=7\lim_{x\to+\infty}\cos\frac{7}{x}=7.$$

Відповідь: 7.

Розкриття невизначеності типу [∞ – ∞]

Приклад 2.129. Знайти границю функції

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\mathrm{ctg}^2 x\right).$$

Р о з в ’ я з а н я

Позначимо границю функції через

$$A=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\mathrm{ctg}^2 x\right)=\left[\infty-\infty\right]=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}\right)=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Тепер можна вже безпосередньо користуватись правилом Лопіталя, але доцільніше даний вираз спростити

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x-x\cos x)(\sin x+x\cos x)}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x+x\cos x)}{x}\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x-x\cos x)}{x\sin^2 x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+\cos x-x\sin x}{1}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos x+x\sin x}{2x\sin x\cos x+\sin^2 x}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\sin x(2x\cos x+\sin x)}=2\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x\cos x+\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos x-2x\sin x+\cos x}=\frac{2}{3}.$$

В і д п о в і д ь: $\frac{2}{3}$.

Приклад 2.130. Знайти границю функції

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right).$$

Р о з в ’ я з а н н я

Позначимо границю функції через

$$A=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\left[\infty-\infty\right].$$

Виконаємо тотожні перетворення функції, яка перебуває під знаком границі.

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(\sin x+x\cos x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x-x\sin x}=0.$$

В і д п о в і д ь: 0.

Приклад 2.131. Знайти границю функції

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right).$$

Р о з в ’ я з а н н я

Позначимо границю функції через

$$A=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\left[\infty-\infty\right].$$

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x\left(e^x-1\right)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1-x\right)'}{\left(x\left(e^x-1\right)\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1\right)'}{\left(e^x-1+xe^x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x\left(2+x\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}.$$

В і д п о в і д ь: $\frac{1}{2}$.

Розкриття невизначеності типу $[0^0]$

Приклад 2.132. Знайти границю функції:

$$\lim_{x\to +0}\left(\arcsin x\right)^{\operatorname{tg} x}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Позначимо границю функції через

$$A=\lim_{x\to +0}\left(\arcsin x\right)^{\operatorname{tg} x}=\left[0^0\right].$$

Нехай $y=(\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}$. Коли $x\to +0$, то $y>0$. Тоді

$$\ln y=\ln\left(\arcsin x\right)^{\operatorname{tg} x},$$

$$\ln A=\lim_{x\to +0}\left(\ln y\right)=\lim_{x\to +0}\left(\operatorname{tg} x\,\ln\left(\arcsin x\right)\right)=\left[0\cdot\infty\right]=$$

$$=\lim_{x\to +0}\frac{\ln(\arcsin x)}{\operatorname{ctg} x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to +0}\frac{\left(\ln\left(\arcsin x\right)\right)'}{\left(\operatorname{ctg} x\right)'}=\lim_{x\to +0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\,\arcsin x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}=$$

$$=-\lim_{x\to +0}\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1-x^2}\,\arcsin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to +0}\frac{\frac{1}{2}\left(1-\cos 2x\right)'}{\left(\sqrt{1-x^2}\,\arcsin x\right)'}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to+0}\frac{2\sin 2x}{\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\arcsin x+\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}}=\lim_{x\to+0}\frac{\sin 2x\cdot\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}-x\arcsin x}=0.$$

Виходить, що $\ln A=\lim\limits_{x\to+0}\ln y=0$, тобто $A=\lim\limits_{x\to+0}y=\mathrm{e}^0=1$.

Отже, $A=1$.

Відповідь: 1.

Приклад 2.133. Знайти границю функції

$$\lim_{x\to 2+0}(x-2)^{\frac{1}{\ln\left(3^{x-2}-1\right)}}.$$

Розв'язання

Позначимо задану границю через

$$A=\lim_{x\to 2+0}(x-2)^{\frac{1}{\ln\left(3^{x-2}-1\right)}}=\left[0^0\right].$$

Нехай $y=(x-2)^{\frac{1}{\ln\left(3^{x-2}-1\right)}}$, тоді

$\ln y=\ln(x-2)^{\frac{1}{\ln\left(3^{x-2}-1\right)}}$, звідки $\ln y=\dfrac{1}{\ln\left(3^{x-2}-1\right)}\ln(x-2)$ та $\lim\limits_{x\to 2+0}\ln y=\ln A$.

$$\ln A=\lim_{x\to 2+0}\ln y=\lim_{x\to 2+0}\frac{\ln(x-2)}{\ln\left(3^{x-2}-1\right)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to 2+0}\frac{\left(\ln(x-2)\right)'}{\left(\ln\left(3^{x-2}-1\right)\right)'}=\lim_{x\to 2+0}\frac{\dfrac{1}{x-2}}{\dfrac{3^{x-2}\ln 3}{3^{x-2}-1}}=$$

$$=\frac{1}{\ln 3}\lim_{x\to 2+0}\frac{3^{x-2}-1}{(x-2)3^{x-2}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{1}{\ln 3}\lim_{x\to 2+0}\frac{1}{3^{x-2}}\cdot\lim_{x\to 2+0}\frac{3^{x-2}-1}{(x-2)}=\frac{1}{\ln 3}\lim_{x\to 2+0}\frac{\left(3^{x-2}-1\right)'}{(x-2)'}=$$

$$=\frac{1}{\ln 3}\lim_{x\to 2+0}\frac{3^{x-2}\ln 3}{1}=1.$$

Тоді маємо

$\ln A=\lim\limits_{x\to 2+0}\ln y=1$, звідки $A=\lim\limits_{x\to 2}y=\mathrm{e}^1=\mathrm{e}$. Отже, $A=\mathrm{e}$.

Відповідь: e.

Приклад 2.134. Знайти границю функції

$$\lim_{x\to+0}x^{\sin x}.$$

Р о з в ' я з а н н я

Позначимо границю функції через

$$A=\lim_{x\to+0}x^{\sin x}=[0^0],\quad y=x^{\sin x},\quad \ln y=\ln x^{\sin x}=\sin x\ln x \text{ та } \lim_{x\to+0}\ln y=\ln A.$$

Звідси

$$\ln A=\lim_{x\to+0}\ln y=\lim_{x\to+0}\sin x\ln x=[0\cdot\infty];\qquad \ln A=\lim_{x\to+0}\ln y=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}}=-\lim_{x\to+0}\frac{\sin^2 x}{x\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]=-\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{\cos x}=-1\cdot 0=0.$$

$$\lim_{x\to+0}\ln y=0,\quad A=\lim_{x\to+0}y=\mathrm{e}^0,\quad A=1.$$

В і д п о в і д ь: 1.

Розкриття невизначеності типу $[\infty^0]$

Приклад 2.135. Знайти границю функції

$$\lim_{x\to5+0}\left(\frac{1}{x-5}\right)^{\mathrm{tg}(x-5)}.$$

Р о з в ' я з а н н я

Позначимо границю функції через

$$A=\lim_{x\to5+0}\left(\frac{1}{x-5}\right)^{\mathrm{tg}(x-5)}=\left[\infty^0\right].$$

Нехай $y=\left(\frac{1}{x-5}\right)^{\mathrm{tg}(x-5)}$, тоді $\ln y=\ln\left(\frac{1}{x-5}\right)^{\mathrm{tg}(x-5)}=\mathrm{tg}(x-5)\cdot\ln\left(\frac{1}{x-5}\right)$ та $\lim\limits_{x\to5+0}\ln y=\ln A.$

Звідси

$$\ln A=\lim_{x\to5+0}\ln y=\lim_{x\to5+0}\frac{\ln\frac{1}{x-5}}{\mathrm{ctg}(x-5)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=-\lim_{x\to5+0}\frac{\ln(x-5)}{\mathrm{ctg}(x-5)}=-\lim_{x\to5+0}\frac{\left(\ln(x-5)\right)'}{\left(\mathrm{ctg}(x-5)\right)'}=$$

$$=-\lim_{x\to5+0}\frac{\frac{1}{x-5}}{-\frac{1}{\sin^2(x-5)}}=\lim_{x\to5+0}\frac{\sin^2(x-5)}{x-5}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to5+0}\frac{\left(\sin^2(x-5)\right)'}{(x-5)'}=$$

$$=\lim_{x\to5+0}\frac{2\sin(x-5)\cos(x-5)}{1}=0,\text{ звідки } A=\lim_{x\to5+0}y=\mathrm{e}^0=1.$$

В і д п о в і д ь: 1.

Приклад 2.136. Знайти границю функції

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{\frac{1}{\ln x}}.$$

Р о з в ' я з а н н я

Позначимо границю функції через

$$A=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{\frac{1}{\ln x}}=\left[\infty^0\right].$$

Нехай $y=\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$, тоді

$$\ln y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{\frac{1}{\ln x}}=\frac{1}{\ln x}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \text{ та } \lim_{x\to+\infty}\ln y=\ln A.$$

Отже,

$$\ln A=\lim_{x\to+\infty}\ln y=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\ln x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}=$$

$$=\sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+1}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\sqrt{\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2x}}=1.$$

Тоді $\ln A=\lim_{x\to+\infty}\ln y=1$; $A=\lim_{x\to+\infty}y=\mathrm{e}^1=\mathrm{e}$.

В і д п о в і д ь: е.

Розкриття невизначеності типу $[1^\infty]$

Приклад 2.137. Знайти границю функції

$$\lim_{x\to 3}(4-x)^{\frac{1}{x-3}}.$$

Р о з в ' я з а н н я

Позначимо задану границю через

$$A=\lim_{x\to 3}(4-x)^{\frac{1}{x-3}}=\left[1^\infty\right].$$

Нехай $y=(4-x)^{\frac{1}{x-3}}$, тоді $\ln y=\ln(4-x)^{\frac{1}{x-3}}=\dfrac{1}{x-3}\ln(4-x)$ та $\lim\limits_{x\to 3}\ln y=\ln A$.

Отже,

$$\ln\ A=\lim_{x\to 3}\ln y=\lim_{x\to 3}\frac{\ln(4-x)}{x-3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\ln(4-x)\right)'}{(x-3)'}=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{-1}{4-x}}{1}=-\lim_{x\to 3}\frac{1}{4-x}=-1.$$

$$\ln\ A=\lim_{x\to 3}\ln y=-1,\ \text{звідки}\ A=\lim_{x\to 3}y=\mathrm{e}^{-1}.$$

В і д п о в і д ь: e^{-1}.

Приклад 2.138. Знайти границю функції

$$\lim_{x\to b}\left(3-\frac{2x}{b}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2b}}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Позначимо задану границю через

$$A=\lim_{x\to b}\left(3-\frac{2x}{b}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2b}}=\left[1^{\infty}\right].$$

Нехай $y=\left(3-\dfrac{2x}{b}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2b}}$, тоді

$$\ln y=\ln\left(3-\frac{2x}{b}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2b}}=\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2b}\ln\left(3-\frac{2x}{b}\right)\ \text{та}\ \lim_{x\to b}\ln y=\ln A.$$

Отже,

$$\ln\ A=\lim_{x\to b}\ln y=\lim_{x\to b}\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2b}\ln\left(3-\frac{2x}{b}\right)=[\infty\cdot 0]=\lim_{x\to b}\frac{\ln\left(3-\frac{2x}{b}\right)}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2b}}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to b}\frac{\left(\ln\left(3-\frac{2x}{b}\right)\right)'}{\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2b}\right)'}=\lim_{x\to b}\frac{-\dfrac{2}{b\left(3-\frac{2x}{b}\right)}}{-\dfrac{\pi}{2b\sin^2\frac{\pi x}{2b}}}=\frac{2\cdot 2b}{b\pi}\lim_{x\to b}\frac{\sin^2\frac{\pi x}{2b}}{3-\frac{2x}{b}}=\frac{4}{\pi}.$$

Отже, $\ln\ A=\lim\limits_{x\to b}\ln y=\dfrac{4}{\pi}$, звідки $A=\lim\limits_{x\to b}y=\mathrm{e}^{\frac{4}{\pi}}$.

В і д п о в і д ь: $\mathrm{e}^{\frac{4}{\pi}}$.

ЗАУВАЖЕННЯ. До прикладів, де відбувається логарифмування, можна застосувати і інший метод розв’язання. Цей метод розглянемо на прикладі 2.139.

Приклад 2.139. Знайти границю функції

$$\lim_{x\to b}\left(3-\frac{2x}{b}\right)^{\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2b}}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Позначимо границю функції через

$$A=\lim_{x\to b}\left(3-\frac{2x}{6}\right)^{\mathrm{tg}\frac{\pi}{2b}}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to b}\exp\left(\ln\left(3-\frac{2x}{b}\right)^{\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2b}}\right).$$

Останнє перетворення виконано на підставі основної логарифмічної тотожності

$$a^{\log_a b}=b.$$

Отже, далі маємо

$$A=\lim_{x\to b}\exp\left(\ln\left(3-\frac{2x}{b}\right)^{\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2b}}\right)=\lim_{x\to b}\exp\left(\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2b}\ln\left(3-\frac{2x}{b}\right)\right)=\exp\left(\lim_{x\to b}\frac{\ln\left(3-\frac{2x}{b}\right)}{\mathrm{ctg}\frac{\pi x}{2b}}\right)=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\exp\left(\lim_{x\to b}\frac{\left(\ln\left(3-\frac{2x}{b}\right)\right)'}{\left(\mathrm{ctg}\frac{\pi x}{2b}\right)'}\right)=\left[\frac{0}{0}\right]=\exp\left(\frac{4}{\pi}\lim_{x\to b}\frac{\sin^2\frac{\pi x}{2b}}{3-\frac{2x}{b}}\right)=\exp\left(\frac{4}{\pi}\right)=e^{\frac{4}{\pi}}.$$

В і д п о в і д ь: $e^{\frac{4}{\pi}}$.

2.3 Інтервали монотонності функції

2.3.1 Необхідні та достатні умови монотонності функції

Теорема 1 (необхідна та достатня умова сталості функції). Нехай функція $y=f(x)$ задовольняє умови:

1) неперервна на сегменті $[a,b]$;

2) диференційовна в інтервалі (a,b).

Для того, щоб функція $f(x)$ була сталою в інтервалі (a,b), необхідно та достатньо, щоб похідна $f'(x)$ в інтервалі (a,b) задовольняла умову $f'(x)\equiv 0$.

Д о в е д е н н я

Необхідність. Нехай в інтервалі (a,b) $f(x)=c$, тоді $f'(x)\equiv 0$ в інтервалі (a,b).

Достатність. Нехай $f'(x) \equiv 0$ в інтервалі (a, b). Розглянемо будь-який сегмент $[x_1, x_2] \subset (a, b)$. На сегменті $[x_1, x_2]$ виконуються умови теореми Лагранжа. Отже,

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), \text{ де } c \in (x_1, x_2).$$

Беручи до уваги, що $f'(c) = 0$, маємо $f(x_2) - f(x_1) = 0$, звідки $f(x_2) = f(x_1)$ для будь-яких x_1 та x_2 з інтервалу (a, b). Отже, $f(x) = \text{const}$ в інтервалі (a, b).

Теорема 2 (необхідна та достатня умова зростання функції). Нехай функція $y = f(x)$ задовольняє умови:

1) неперервна на сегменті $[a, b]$;

2) диференційовна в інтервалі (a, b).

Для того, щоб функція $f(x)$ була зростаючою в інтервалі (a, b), необхідно та достатньо, щоб похідна $f'(x)$ в інтервалі (a, b) задовольняла умову $f'(x) \geq 0$.

Доведення

Необхідність. Припустимо, що функція $f(x)$ зростає в інтервалі (a, b). З умови теореми виходить, що функція $f(x)$ задовольняє умови теореми Лагранжа на сегменті $[a, b]$. Візьмемо з інтервалу (a, b) будь-які x_1 та x_2, де $x_1 < x_2$. На сегменті $[x_1, x_2]$, згідно з теоремою Лагранжа, маємо:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), \tag{2.84}$$

де $c \in (x_1, x_2)$.

За припущенням $f(x)$ – зростаюча функція, тобто ліва частина рівності (2.84) є невід'ємною, а отже, і права частина рівності (2.84) має бути невід'ємною. Оскільки $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, $x_2 - x_1 > 0$, то похідна $f'(c)$ має бути невід'ємною, тобто $f'(c) \geq 0$. Оскільки x_1 та x_2 було вибрано довільно, то можна стверджувати, що для будь-якого x є справедливою умова $f'(x) \geq 0$.

Достатність. Припустимо, що $f'(x) \geq 0$ в інтервалі (a, b). Візьмемо з інтервалу (a, b) будь-які x_1 та x_2, де $x_1 < x_2$. У такому разі права частина рівності (2.84) є невід'ємною, а значить, $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ та $f(x_2) \geq f(x_1)$ для будь-яких x_1 та x_2. Виходить, що функція $y = f(x)$ є зростаючою на інтервалі (a, b).

Теорема 3 (необхідна та достатня умова спадання функції). Нехай функція $y = f(x)$ задовольняє умови:

1) неперервна на сегменті $[a, b]$;

2) диференційовна в інтервалі (a, b).

Для того, щоб функція $f(x)$ була спадною в інтервалі (a, b), необхідно та достатньо, щоб похідна $f'(x)$ в інтервалі (a, b) задовольняла умову $f'(x) \leq 0$.

Д о в е д е н н я

Необхідність. Нехай функція $y = f(x)$ спадає в інтервалі (a, b). Розглянемо допоміжну функцію $y = \varphi(x)$, де $\varphi(x) = -f(x)$. Згідно з властивостями монотонних функцій, можна стверджувати, що $\varphi(x)$ – зростаюча функція в інтервалі (a, b). За теоремою 2, $\varphi'(x) \geq 0$. Тоді $f'(x) \leq 0$.

Достатність. Припустимо, що в інтервалі (a, b) виконується нерівність $f'(x) \leq 0$. Розглянемо допоміжну функцію $y = \varphi(x)$, де $\varphi(x) = -f(x)$. Тоді $-\varphi'(x) \leq 0$, а $\varphi'(x) \geq 0$, звідки виходить, що $\varphi(x)$ є зростаючою функцією, а $f(x)$ – спадною функцією в інтервалі (a, b).

ЗАУВАЖЕННЯ. Теореми 2 та 3 є необхідними та достатніми умовами монотонності функції. Якщо при цьому в інтервалі (a, b) не існує жодного проміжку $(a_1, b_1) \subset (a, b)$, де функція зберігає сталі значення, то тоді теореми 2 та 3 можна вважати за необхідні та достатні умови строгої монотонності функції.

В и з н а ч е н н я. Інтервали, в яких функція лише зростає або лише спадає, називаються **інтервалами монотонності** функції.

2.3.2 Критичні точки 1-го роду функції

Серед безлічі функцій є такі, що у своїй області визначення лише зростають, або такі, що лише спадають, але є й такі функції, які у деяких інтервалах області визначення зростають, а у деяких – спадають.

Якщо функція $y = f(x)$ в інтервалі (a, b) така, що її похідна у цьому інтервалі також неперервна, то інтервали зростання функції від інтервалів спадання у межах інтервалу (a, b) відокремлюються такими точками, де $f'(x) = 0$.

Якщо функція $y = f(x)$ в інтервалі (a, b) неперервна, а її похідна в деяких точках не існує або є нескінченною, то інтервали зростання від інтервалів спадання в межах інтервалу (a, b) відокремлюються такими точками, де $f'(x) = 0$ або не існує, або є нескінченною.

В и з н а ч е н н я. **Критичними точками 1-го роду функції** $f(x)$ називаються такі точки, в яких похідна першого порядку $f'(x)$ дорівнює нулю або не існує, або є нескінченною.

ЗАУВАЖЕННЯ 1. Критичні точки функції називаються ***стаціонарними точками***, якщо вони знаходяться з рівняння $f'(x) = 0$.

ЗАУВАЖЕННЯ 2 Відомо, що значення похідної у точці x дорівнює швидкості змінювання процесу, який описується функцією $f(x)$. У критичних точках, де $f'(x) = 0$, швидкість змінювання процесу призупиняється.

Схема дослідження функцій на монотонність

1. Знаходимо область визначення функції $f(x)$.
2. Знаходимо похідну першого порядку $f'(x)$.
3. Знаходимо критичні точки 1-го роду функції $f(x)$.
4. Наносимо на числову вісь критичні точки 1-го роду та розбиваємо область визначення функції на інтервали.
5. Визначаємо знак похідної першого порядку в кожному інтервалі.
6. Визначаємо характер монотонності функції в кожному інтервалі.

Приклади до пункту 2.3

Приклад 2.140. Знайти інтервали монотонності функції

$$f(x) = x^3 - 30x^2 + 225x + 1.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Скористаємось схемою дослідження функцій на монотонність.

1. Область визначення функції: $x \in (-\infty, +\infty)$.

2. Знаходимо похідну першого порядку.

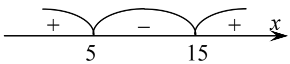
$$f'(x) = 3x^2 - 60x + 225; \quad f'(x) = 3\left(x^2 - 20x + 75\right).$$

3. Знаходимо критичні точки 1-го роду функції. Для цього розв’яжемо рівняння $f'(x) = 0$, тобто $3\left(x^2 - 20x + 75\right) = 0$, звідки $x_1 = 5;\ x_2 = 15$.

Критичні точки, в яких похідна $f'(x)$ не існує або дорівнює нескінченності, відсутні.

4. Наносимо на числову вісь критичні точки та розбиваємо область визначення функції на інтервали: $(-\infty, 5)$, $(5, 15)$, $(15, +\infty)$.

5. Визначаємо знак похідної першого порядку в кожному інтервалі. Запишемо похідну у вигляді $f'(x) = 3(x-5)(x-15)$, що спрощує визначення знаків похідної.



6. Визначаємо характер монотонності функції.

В інтервалі $(-\infty, 5)$ $f'(x) > 0$, функція $f(x)$ зростає.

В інтервалі $(5, 15)$ $f'(x) < 0$, функція $f(x)$ спадає.

В інтервалі $(15, +\infty)$ $f'(x) > 0$, функція $f(x)$ зростає.

В і д п о в і д ь: в інтервалі $(-\infty, 5)$ функція $f(x)$ зростає; в інтервалі $(5, 15)$ функція $f(x)$ спадає; в інтервалі $(15, +\infty)$ функція $f(x)$ зростає.

Приклад 2.141. Знайти інтервали монотонності функції

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\mathrm{e}}, & \text{коли} \quad x<\mathrm{e};\\ \dfrac{\ln x}{x}, & \text{коли} \quad x\geq \mathrm{e}.\end{cases}$$

Р о з в ' я з а н н я

1. Область визначення функції: $x\in(-\infty,+\infty)$.

2. Знаходимо похідну першого порядку.

$$f'(x)=\begin{cases}0, & \text{коли} \quad x<\mathrm{e};\\ \dfrac{1-\ln x}{x^2}, & \text{коли} \quad x\geq \mathrm{e}.\end{cases}$$

3. За будь-якого x з області визначення $f'(x)\leq 0$, отже, задана функція є сталою в інтервалі $(-\infty,\mathrm{e})$ та спадною в інтервалі $(\mathrm{e},\ +\infty)$.

В і д п о в і д ь: $f(x)$ – стала в інтервалі $(-\infty,\mathrm{e})$ та спадна в інтервалі $(\mathrm{e},\ +\infty)$.

Приклад 2.142. Залежність величини виробленої продукції y від часу t подається функцією

$$y=\frac{1}{3}t^3-\frac{5}{2}t^2+6t,$$

де t вимірюється в годинах, y – в тисячах гривень. Дослідити економічний процес виробництва продукції.

Р о з в ' я з а н н я

1. Область визначення функції: $t\in[0,+\infty)$.

2. Знаходимо похідну першого порядку.

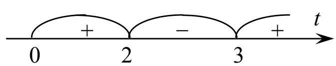
$$y'=t^2-5t+6.$$

3. Знаходимо критичні точки 1-го роду функції з рівняння $f'(x)=0$, тобто $t^2-5t+6=0$, звідки $t_1=2;\ t_2=3$.

Критичні точки 1-го роду функції , в яких похідна $f'(x)$ не існує або дорівнює нескінченності, відсутні.

4. Наносимо на числову вісь критичні точки та розбиваємо область визначення функції на інтервали: $(0,2)$, $(2,3)$, $(3,\infty)$.

5. Визначаємо знак похідної першого порядку в кожному з інтервалів, для чого запишемо похідну y' у вигляді $y'=(t-2)(t-3)$.



6. Визначаємо характер монотонності функції в кожному інтервалі.

На проміжку [0, 2] $f'(x) > 0$, функція $f(x)$ зростає.

На проміжку [2, 3] $f'(x) < 0$, функція $f(x)$ спадає.

На проміжку $[3, +\infty)$ $f'(x) > 0$, функція $f(x)$ зростає.

Отже, з моменту початку виробництва впродовж часу $t \in [0, 2]$ обсяг продукції зростає. У період $t \in (2, 3)$ обсяг продукції спадає. При продовженні процесу виробництва, тобто, коли $t \in (3, +\infty)$, обсяг продукції знову зростає.

В і д п о в і д ь: обсяг продукції зростає, коли $t \in [0, 2]$ та $[3, +\infty)$ і спадає, коли $t \in [2, 3]$.

Приклад 2.143. Сила дії колового електричного струму на невеликий магніт, вісь якого розміщується на перпендикулярі до площини круга, що проходить через його центр, подається формулою

$$F(x) = \frac{x}{\sqrt{\left(a^2 + x^2\right)^3}},$$

де a – радіус кола, x – відстань від центра кола до магніту. За яких значень x сила $F(x)$ буде зростати?

Р о з в ' я з а н н я

1. Область визначення функції: $x \in [0, +\infty)$.

2. Знаходимо похідну першого порядку.

$$F'(x) = \frac{\left(a^2 + x^2\right)^{3/2} - \frac{3}{2}\left(a^2 + x^2\right)^{1/2} \cdot 2x^2}{\left(a^2 + x^2\right)^3} = \frac{\left(a^2 + x^2\right)^{1/2}\left(a^2 + x^2 - 3x^2\right)}{\left(a^2 + x^2\right)^3};$$

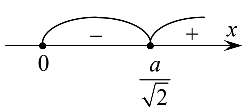
$$F'(x) = \frac{a^2 - 2x^2}{\left(a^2 + x^2\right)^{5/2}}.$$

3. Оскільки треба знайти лише інтервали зростання функції, то достатньо розв'язати нерівність

$$F'(x) > 0; \quad \frac{\left(a^2 - 2x^2\right)}{\left(a^2 + x^2\right)^{5/2}} > 0, \quad \text{звідки} \quad a^2 - 2x^2 > 0.$$

Розв'яжемо цю нерівність методом інтервалів.

$$2\left(x^2 - \frac{a^2}{2}\right) < 0; \quad \left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{a}{\sqrt{2}}\right) < 0.$$



В інтервалі $\left(0, \dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)$ $F'(x) > 0,$ функція $F(x)$ зростає.

В і д п о в і д ь: $x \in \left(0, \dfrac{a}{\sqrt{2}}\right).$

2.4 Екстремум функції

2.4.1 Поняття локального екстремуму функції

В и з н а ч е н н я 1. Точка x_0 називається ***точкою локального максимуму функції*** $f(x)$, якщо в області визначення функції $f(x)$ існує такий окіл $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ точки x_0, що для будь-якого $x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ $(x \neq x_0)$ виконується умова $f(x_0) > f(x)$, при цьому значення функції $f(x_0)$ називається ***локальним максимумом функції***.

В и з н а ч е н н я 2. Точка x_0 називається ***точкою локального мінімуму*** функції $f(x)$, якщо в області визначення функції $f(x)$ існує такий окіл $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ точки x_0, що для будь-якого $x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ $(x \neq x_0)$ виконується умова $f(x_0) < f(x)$, при цьому значення функції $f(x_0)$ називається ***локальним мінімумом функції***.

В и з н а ч е н н я 3. Точки локального максимуму та локального мінімуму називаються ***точками локального екстремуму*** функції, а значення функції у точках локального екстремуму називаються ***локальними екстремумами функції***.

ЗАУВАЖЕННЯ. Визначення 1 та 2 є визначеннями строгого локального максимуму або мінімуму. Якщо умови $f(x_0) > f(x)$ та $f(x_0) < f(x)$ замінити відповідно на умови $f(x_0) \geq f(x)$ та $f(x_0) \leq f(x)$, то в такому разі матимемо визначення нестрогого локального максимуму або мінімуму. Далі без особливої потреби не будемо зосереджуватись на згаданих відмінах.

З визначень точок локального максимуму або мінімуму виходить, що це такі точки, в яких функція досягає максимального або мінімального значення порівняно з точками деякого окола $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ точки x_0, а поза цим околом функція може досягати ще більшого або ще меншого значень. Далі будемо опускати термін "локальний", якщо в цьому не виникає особливої потреби.

2.4.2 Необхідна умова існування екстремуму функції

Теорема 1. Нехай функція $y = f(x)$ задовольняє умови:

1) неперервна у точці x_0 та деякому її околі;

2) у точці x_0 та зазначеному околі має неперервну похідну першого порядку;

3) у точці x_0 має екстремум,

тоді похідна $f'(x_0)=0$.

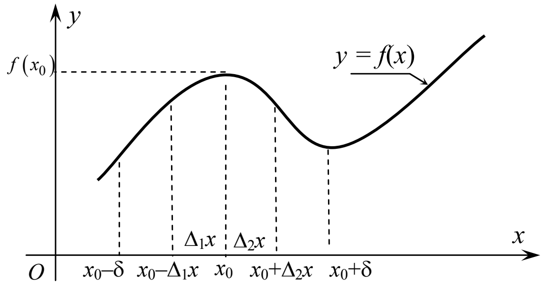


Рисунок 2.14

Д о в е д е н н я

Припустимо, що у точці x_0 функція має максимум. З визначення точки максимуму виходить, що існує такий окіл $(x_0-\delta,\,x_0+\delta)$ точки x_0, в якому $f(x_0)>f(x)$ (рис. 2.14).

Зрозуміло, що в цьому околі знайдуться такі точки $x_0-\Delta_1 x$ та $x_0+\Delta_2 x$, де $\Delta_1 x>0,\ \Delta_2 x>0$, що $(x_0-\Delta_1 x,\ x_0+\Delta_2 x)\subset(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$. Тоді для $\Delta_1 x>0$ маємо

$$f(x_0-\Delta_1 x)-f(x_0)<0;\quad \frac{f(x_0-\Delta_1 x)-f(x_0)}{-\Delta_1 x}>0;\quad \lim_{\Delta_1 x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta_1 x)-f(x_0)}{-\Delta_1 x}\ge 0,$$

звідки

$$f'(x_0)\ge 0. \tag{2.85}$$

Для $\Delta_2 x>0$ маємо

$$f(x_0+\Delta_2 x)-f(x_0)<0;\quad \frac{f(x_0+\Delta_2 x)-f(x_0)}{\Delta_2 x}<0,\quad \lim_{\Delta_2 x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta_2 x)-f(x_0)}{\Delta_2 x}\le 0,$$

звідки

$$f'(x_0)\le 0. \tag{2.86}$$

Якщо тепер звернутись до нерівностей (2.85) та (2.86), то виходить, що обидві нерівності сумісні лише тоді, коли

$$f'(x)=0. \tag{2.87}$$

ЗАУВАЖЕННЯ 1. Якщо функція неперервна у точці x_0 та диференційовна і має неперервну похідну першого порядку в деякому околі точки x_0, яка є точкою екстремуму, за винятком точки x_0, то тоді похідна першого порядку або є нескінченою у точці екстремуму, або взагалі не існує у цій точці.

Наприклад, $f(x)=|x|$; $f(x)=-|x-3|$.

ЗАУВАЖЕННЯ 2. Слід мати на увазі, що доведена теорема не може бути достатньою умовою існування екстремуму функції.

ЗАУВАЖЕННЯ 3. Усі точки екстремуму є водночас і критичними точками 1-го роду функції, але не кожна критична точка є точкою екстремуму.

Про те, як розпізнати, яка саме критична точка 1-го роду є водночас і точкою екстремуму йде мова далі.

2.4.3 Перша достатня умова існування екстремуму функції

Теорема 2. Нехай функція $y=f(x)$ задовольняє умови:

1) неперервна у точці x_0 та деякому її околі;
2) диференційовна у зазначеному околі точки x_0, за винятком, можливо, самої точки x_0;
3) точка x_0 є критичною точкою 1-го роду функції $f(x)$.

Тоді, якщо при переході через точку x_0 зліва направо похідна $f'(x)$ змінює знак на протилежний, то у точці x_0 функція $f(x)$ має екстремум, а саме: мінімум, коли знак похідної змінюється з мінуса на плюс, та максимум, коли знак похідної змінюється з плюса на мінус.

Доведення

Розглянемо випадок, коли знак $f'(x)$ змінюється з мінуса на плюс.

Нехай x перебуває у правому півколі точки x_0. Тоді на сегменті $[x_0, x]$ функція $f(x)$ задовольняє умови теореми Лагранжа, тобто

$$f(x)-f(x_0)=f'(c_1)(x-x_0),\ \text{де } c_1\in(x_0, x). \tag{2.88}$$

Оскільки за припущенням у правому півоколі $f'(x)>0$, $x-x_0>0$, то з рівності (2.88) виходить, що $f(x)-f(x_0)>0$, тобто $f(x)>f(x_0)$.

Тепер припустимо, що x належить лівому півоколу точки x_0. Аналогічно, на сегменті $[x, x_0]$ маємо

$$f(x)-f(x_0)=f'(c_1)(x-x_0),\ \text{де } c_2\in(x, x_0). \tag{2.89}$$

У лівому півоколі $f'(x)<0, x_0-x>0$, отже, виходить, що $f(x_0)-f(x)<0$, тобто $f(x)>f(x_0)$.

Отже, доведено, що x_0 – точка мінімуму.

Аналогічно доводиться і друге твердження теореми.

Завдання для самостійної роботи. Довести теорему за умови, коли знак похідної змінюється з плюса на мінус.

Схема дослідження функції на екстремум за першою достатньою умовою існування екстремуму

1. Знаходимо область визначення функції.
2. Знаходимо похідну першого порядку $f'(x)$.
3. Знаходимо критичні точки 1-го роду функції $f(x)$.
4. Наносимо на числову вісь критичні точки та розбиваємо область визначення функції на інтервали.
5. Визначаємо знак похідної першого порядку в кожному інтервалі.
6. Знаходимо точки екстремуму функції за першою достатньою умовою існування екстремуму функції.
7. Знаходимо значення функції у точках екстремуму.

2.4.4 Друга достатня умова існування екстремуму функції

Теорема 3. Нехай функція $y = f(x)$ задовольняє умови:

1) неперервна у точці x_0 та деякому її околі;

2) має неперервну похідну другого порядку $f''(x)$ у точці x_0 та зазначеному околі;

3) $f'(x_0) = 0$;

4) $f''(x_0) \neq 0$.

Тоді функція $y = f(x)$ у точці x_0 має екстремум, а саме: мінімум, коли $f''(x_0) > 0$ та максимум, коли $f''(x_0) < 0$.

Д о в е д е н н я

За умовою функція $f''(x)$ неперервна у точці x_0 та деякому її околі. Згідно з теоремою про зберігання знака неперервної функції можна стверджувати, що існує такий окіл точки x_0, у межах якого $f''(x)$ зберігає свій знак.

Припустимо для визначеності, що $f''(x_0) > 0$. Тоді і в зазначеному околі точки x_0 виконується нерівність $f''(x) > 0$. Похідна $f''(x)$ є похідною від першої похідної, тобто $f''(x) = \left(f'(x)\right)'$. Оскільки в деякому околі точки x_0 $f''(x) > 0$,то це означає, що функція $f'(x)$ в цьому околі зростає. А з того, що $f'(x_0) = 0$ виходить, що $f'(x) < 0$, якщо $x < x_0$ та $f'(x) > 0$, якщо $x > x_0$. Згідно з теоремою 2 (п. 2.4.3) можна стверджувати, що у точці x_0 функція має мінімум.

Аналогічно доводиться і друге твердження теореми.

Схема дослідження функції на екстремум за другою достатньою умовою існування екстремуму функції

1. Знаходимо область визначення функції.
2. Знаходимо похідну першого порядку $f'(x)$.
3. Знаходимо критичні точки 1-го роду функції $f(x)$.
4. Знаходимо похідну другого порядку $f''(x)$.
5. Визначаємо знак похідної другого порядку $f''(x)$ у критичних точках, де $f'(x)=0$, якщо вони належать до області визначення функції.
6. Знаходимо точки екстремуму функції за другою достатньою умовою існування екстремуму функції.
7. Знаходимо значення функції у точках екстремуму.

2.4.5 Третя достатня умова існування екстремуму функції

Теорема 4. Нехай функція $y=f(x)$ задовольняє умови:

1) неперервна у точці x_0 та деякому її околі;
2) має неперервну похідну *n*-го порядку $f^{(n)}(x)$ у точці x_0 та зазначеному околі;
3) $f'\left(x_0\right)=0;\ f''\left(x_0\right)=0;\ \ldots;\ f^{(n-1)}\left(x_0\right)=0;\ f^{(n)}\left(x_0\right)\neq 0$.

Тоді, якщо число n парне, то функція має екстремум у точці x_0, а саме: мінімум, коли $f^{(n)}\left(x_0\right)>0$ та максимум, коли $f^{(n)}\left(x_0\right)<0$. Якщо ж n – число непарне, то екстремуму у точці x_0 функція не має.

Приймемо цю теорему без доведення.

Схема дослідження функції на екстремум за третьою достатньою умовою існування екстремуму функції

1. Знаходимо область визначення функції.
2. Знаходимо похідну першого порядку $f'(x)$.
3. Знаходимо критичні точки 1-го роду функції $f(x)$.
4. Знаходимо похідну другого порядку $f''(x)$.
5. Визначаємо значення похідної $f''(x)$ у критичних точках, де $f'(x)=0$.

6. Якщо у критичній точці x_0 похідна $f''\left(x_0\right)\neq 0$, то користуємось другою достатньою умовою існування екстремуму функції. Якщо похідна $f''\left(x_0\right) = 0$, то знаходимо похідну третього порядку $f'''(x)$.

7. Знаходимо значення похідної $f'''(x)$ у критичній точці x_0.

8. Якщо похідна $f'''(x_0)\neq 0$, то функція у точці x_0 екстремуму не має. Якщо похідна $f'''(x_0) = 0$, то знаходимо похідну четвертого порядку $f^{\mathrm{IV}}(x)$.

9. Знаходимо значення похідної $f^{\mathrm{IV}}(x)$ у критичній точці x_0.

10. Якщо похідна $f^{\mathrm{IV}}\left(x_0\right) \neq 0$, то функція у точці x_0 має екстремум, а саме: мінімум, коли $f^{\mathrm{IV}}\left(x_0\right) > 0$, та максимум, коли $f^{\mathrm{IV}}\left(x_0\right) < 0$. Якщо похідна $f^{\mathrm{IV}}\left(x_0\right) = 0$, то знаходимо похідну п'ятого порядку $f^{\mathrm{V}}(x)$.

11. Продовжуємо процес дослідження доти, поки наступна похідна у точці x_0 стане відмінною від нуля. Якщо це буде похідна парного порядку, то точка x_0 буде точкою екстремуму, якщо ж зазначена похідна буде непарного порядку, то точка x_0 не буде точкою екстремуму.

12. Знаходимо значення функції у точках екстремуму.

ЗАУВАЖЕННЯ. Друга та третя достатні умови існування екстремуму функції дозволяють досліджувати на екстремум лише ті критичні точки 1-го роду функції $f(x)$, що задовольняють умову $f'(x)=0$. На критичні точки, в яких похідна $f'(x)$ не існує або є нескінченною, зазначені умови не поширюються.

2.4.6 Найменше та найбільше значення функції на сегменті

Нехай функція $y=f(x)$ визначена та диференційовна на сегменті $[a, b]$. З диференційовності функції виходить її неперервність. Згідно з властивостями функції, неперервної на сегменті, функція $y = f(x)$ на сегменті $[a, b]$ досягає найменшого m та найбільшого M значень.

Визначення. Точки, в яких функція досягає найменшого або найбільшого значень на сегменті $[a, b]$, називаються ***точками внутрішнього екстремуму*** функції на сегменті $[a, b]$ (якщо точка є внутрішньою) ***або граничним екстремумом*** (якщо точка є граничною точкою сегмента), а найменше та найбільше значення функції на сегменті $[a;b]$ називаються абсолютним екстремумом (абсолютним мінімумом та абсолютним максимумом відповідно).

Схема дослідження функції на найменше та найбільше значення на сегменті [*a*, *b*].

1. Знаходимо область визначення функції та впевнюємось в тому, що сегмент $\left[a,b\right]$ належить до області визначення функції.
2. Знаходимо похідну першого порядку $f'(x)$.
3. Знаходимо критичні точки 1-го роду функції $f(x)$.
4. Визначаємо значення функції у критичних точках, які належать до заданого сегмента.
5. Визначаємо значення функції на кінцях сегмента, тобто $f(a), f(b)$.
6. Порівнюємо значення функції у критичних точках та на кінцях сегмента, знаходимо серед них найменше та найбільше.

ЗАУВАЖЕННЯ. Оскільки найменшого та найбільшого значень на сегменті функція може досягати або у точках локального екстремуму, або на кінцях сегмента, то для спрощення дослідження функції критичні точки можна не перевіряти за достатньою умовою існування екстремуму, а просто обчислити значення функції у критичних точках.

Приклади до пункту 2.4

Приклад 2.144. Знайти точки екстремуму функції
$$f(x) = 3\sin 2x + 1.$$

Р о з в ’ я з а н н я

1. Область визначення функції: $x \in (-\infty, +\infty)$.

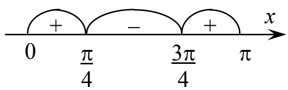
2. Знаходимо похідну першого порядку $f'(x)$.
$$f'(x) = 6\cos 2x.$$

3. Знаходимо критичні точки 1-го роду функції з рівняння $f'(x) = 0$, тобто
$$\cos 2x = 0, \text{ звідки } x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi n, \ n \in Z.$$

Критичні точки, в яких похідна не існує або дорівнює нескінченності, відсутні.

4. Наносимо на числову вісь критичні точки. Оскільки задана функція є періодичною з періодом π, то обмежимось лише проміжком $[0, \pi]$. До цього проміжку належать критичні точки $x_1 = \frac{\pi}{4}$ та $x_2 = \frac{3\pi}{4}$. Розбиваємо проміжок $[0, \pi]$ критичними точками на інтервали.

5. Визначаємо знак похідної першого порядку в кожному з інтервалів $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$.



6. Знаходимо точки екстремуму за першою достатньою умовою існування екстремуму. Обидві критичні точки входять до області визначення функції. Точка $x = \frac{\pi}{4}$ є точкою максимуму, а точка $x = \frac{3\pi}{4}$ – точкою мінімуму.

Враховуючи періодичність функції, можна стверджувати, що точками максимуму є точки $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, де $n \in Z$, та точками мінімуму є точки $x = \frac{3\pi}{4} + \pi k$, де $k \in Z$.

7. Знаходимо значення функції у точках екстремуму.
$$y_{\max} = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{\pi}{4} + \pi n\right) = 3\sin\frac{\pi}{2} + 1 = 4;$$
$$y_{\min} = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = f\left(\frac{3\pi}{4} + \pi k\right) = 3\sin\frac{3\pi}{2} + 1 = -2.$$

В і д п о в і д ь: $y_{\max} = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4$; $y_{\min} = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -2$.

Приклад 2.145. Знайти інтервали монотонності та точки екстремуму функції

$$f(x)=\frac{x^2}{1+x}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

1. Область визначення функції: $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.

2. Знаходимо похідну першого порядку $f'(x)$.

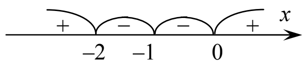
$$f'(x)=\frac{2x(1+x)-x^2}{(1+x)^2}=\frac{2x+2x^2-x^2}{(1+x)^2};\qquad f'(x)=\frac{x(x+2)}{(1+x)^2}.$$

3. Знаходимо критичні точки 1-го роду функції $f(x)$ з рівняння $f'(x)=0$, тобто $\frac{x(x+2)}{(1+x)^2}=0$, звідки $x_1=-2;\ x_1=0$.

Критичні точки, в яких похідна $f'(x)$ дорівнює нескінченності знаходимо з припущення, що $f'(x)=\infty$, тоді $(1+x)^2=0$, звідки $x=-1$.

4. Наносимо критичні точки на числову вісь та розбиваємо область визначення функції на інтервали: $(-\infty,-2)$, $(-2,-1)$, $(-1,0)$, $(0,\infty)$.

5. Визначаємо знак похідної першого порядку в кожному інтервалі.



6. Визначаємо характер монотонності функції в кожному інтервалі.

В інтервалі $(-\infty,-2)$ $f'(x)>0$, функція $f(x)$ зростає.

В інтервалі $(-2,-1)$ $f'(x)<0$, функція $f(x)$ спадає.

В інтервалі $(-1,0)$ $f'(x)<0$, функція $f(x)$ спадає.

В інтервалі $(0,+\infty)$ $f'(x)>0$, функція $f(x)$ зростає.

7. Знаходимо точки екстремуму за першою достатньою умовою існування екстремуму функції.

Точка $x=-1$ не входить до області визначення функції, отже, не може бути точкою екстремуму.

Точка $x=-2$ є точкою максимуму, а точка $x=0$ – точкою мінімуму функції.

8. Знаходимо значення функції у точках екстремуму.

$$y_{\max}=f(-2)=-4;\quad y_{\min}=f(0)=0.$$

В і д п о в і д ь: функція зростає в інтервалах $(-\infty,-2)$ та $(0,+\infty)$; функція спадає в інтервалах $(-2,-1)$ та $(-1,0)$; $y_{\max}=f(-2)=-4;$ $y_{\min}=f(0)=0.$

Приклад 2.146. Знайти інтервали монотонності та точки екстремуму функції

$$f(x)=\frac{(x+3)^3}{(x+1)^2}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

1. Область визначення функції: $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

2. Знаходимо похідну першого порядку $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{3(x+3)^2(x+1)^2 - 2(x+1)(x+3)^3}{(x+1)^4}.$$

Після спрощення маємо

$$f'(x) = \frac{(x+3)^2(x-3)}{(x+1)^3}.$$

3. Знаходимо критичні точки 1-го роду функції $f(x)$ з рівняння $f'(x) = 0$, тобто

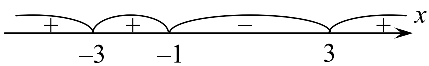
$$\frac{(x+3)^2(x-3)}{(x+1)^3} = 0, \text{ звідки } x = -3,\ x = 3.$$

Критичні точки, в яких похідна $f'(x)$ дорівнює нескінченності знаходимо з рівняння

$$(x+1)^3 = 0, \quad x+1 = 0, \quad x = -1.$$

4. Наносимо на числову вісь критичні точки та розбиваємо область визначення функції на інтервали: $(-\infty, -3)$, $(-3, -1)$, $(-1, 3)$, $(3, +\infty)$.

5. Визначаємо знак похідної першого порядку в кожному інтервалі.



6. Визначаємо характер монотонності функції в кожному інтервалі:

В інтервалі $(-\infty, -3)$ $f'(x) > 0$, функція $f(x)$ зростає.

В інтервалі $(-3, -1)$ $f'(x) > 0$, , функція $f(x)$ зростає.

В інтервалі $(-1, 3)$ $f'(x) < 0$, функція $f(x)$ спадає.

В інтервалі $(3, +\infty)$ $f'(x) > 0$, функція $f(x)$ зростає.

7. Знаходимо точки екстремуму за першою достатньою умовою існування екстремуму функції.

При переході через критичну точку $x = -3$ похідна не змінює знак на протилежний, тобто точка $x = -3$ не може бути точкою екстремуму. Точка $x = -1$ не входить до області визначення функції, тобто $x = -1$ не може бути точкою екстремуму. Точка $x = 3$ входить до області визначення функції, а похідна $f'(x)$ при переході через цю точку змінює знак з "–" на "+". Отже, точка $x = 3$ є точкою мінімуму.

9. Знаходимо значення функції у точці мінімуму.

$$y_{\min} = f(3) = \frac{27}{2} = 13{,}5.$$

В і д п о в і д ь: функція зростає в інтервалах $(-\infty, -3)$, $(-3, -1)$ та $(3, +\infty)$; функція спадає в інтервалі $(-1, 3)$; $y_{\min} = f(3) = 13{,}5$.

Приклад 2.147. Знайти інтервали монотонності та точки екстремуму функції

$$f(x) = x^2 - 10\ln x.$$

Р о з в ’ я з а н н я

1. Область визначення функції: $x \in (0, +\infty)$.

2. Знаходимо похідну першого порядку $f'(x)$.

$$f'(x) = 2x - \frac{10}{x} = 2\frac{x^2 - 5}{x}.$$

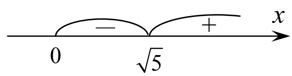
3. Знаходимо критичні точки 1-го роду функції $f(x)$ з рівняння $f'(x) = 0$, тобто $x^2 - 5 = 0$, звідки $x_1 = -\sqrt{5}$, $x_2 = \sqrt{5}$.

В точці $x = 0$ похідна $f'(x)$ дорівнює нескінченності.

4. Наносимо на числову вісь критичні точки та розбиваємо область визначення функції на інтервали: $(0, \sqrt{5})$, $(\sqrt{5}, +\infty)$. Точку $x = -\sqrt{5}$ не враховуємо, оскільки до області визначення вона не входить.

5. Визначаємо знак похідної першого порядку в кожному інтервалі. Запишемо похідну $f'(x)$ у вигляді

$$f'(x) = 2\frac{\left(x - \sqrt{5}\right)\left(x + \sqrt{5}\right)}{x}.$$



6. Визначаємо характер монотонності функції в кожному інтервалі.

В інтервалі $(0, \sqrt{5})$ $f'(x) < 0$, функція $f(x)$ спадає.

В інтервалі $(\sqrt{5}, +\infty)$ $f'(x) > 0$, функція $f(x)$ зростає.

7. Знаходимо точки екстремуму за першою достатньою умовою існування екстремуму функції.

Точка $x = \sqrt{5}$ задовольняє вимоги першої достатньої умови існування екстремуму і є точкою екстремуму, а саме, точкою мінімуму.

8. Знаходимо значення функції у точці мінімуму $x = \sqrt{5}$

$$y_{\min} = f\left(\sqrt{5}\right) = 5 - 10\ln\sqrt{5} = 5 - 10\ln 5^{\frac{1}{2}} = 5 - 5\ln 5 = 5(1 - \ln 5).$$

В і д п о в і д ь: функція спадає в інтервалі $(0, \sqrt{5})$, функція зростає в інтервалі $(\sqrt{5}, +\infty)$; $y_{\min} = f\left(\sqrt{5}\right) = 5(1 - \ln 5)$.

Приклад 2.148. Знайти точки екстремуму функції

$$f(x) = (x-1)^4 (x+1).$$

Р о з в ’ я з а н н я

1. Область визначення функції: $x \in (-\infty, +\infty)$.

2. Знаходимо похідну першого порядку $f'(x)$.

$$f'(x)=4(x-1)^3(x+1)+(x-1)^4; \qquad f'(x)=(x-1)^3(5x+3).$$

3. Знаходимо критичні точки 1-го роду функції $f(x)$ з рівняння $f'(x)=0$, тобто $(x-1)^3(5x+3)=0$, звідки $x_1=-\dfrac{3}{5}$; $x_2=1$.

Критичні точки, в яких похідна $f'(x)$ не існує або дорівнює нескінченності відсутні.

4. Оскільки за умовою слід знайти лише точки екстремуму функції, а похідна $f'(x)$ в критичних точках дорівнює нулю, то будемо користуватись другою достатньою умовою існування екстремуму функції.

Знаходимо похідну другого порядку $f''(x)$.

$$f''(x)=3(x-1)^2(5x+3)+5(x-1)^3=(x-1)^2(20x+4)=4(x-1)^2(5x+1).$$

5. Визначаємо знак похідної $f''(x)$ у критичних точках, де $f'(x)=0$.

$$f''\left(-\frac{3}{5}\right)<0, \quad f''(1)=0$$

6. Знаходимо точки екстремуму за другою достатньою умовою існування екстремуму функції. Оскільки $f''\left(-\dfrac{3}{5}\right)<0$, то точка $x=-\dfrac{3}{5}$ є точкою максимуму. У точці $x=1$ $f''(1)=0$, а це свідчить про те, що друга достатня умова існування екстремуму у цьому випадку не дає відповіді. Тоді переходимо до третьої достатньої умови існування екстремуму.

7. Знаходимо похідну третього порядку $f'''(x)$.

$$f'''(x)=8(x-1)(5x+1)+20(x-1)^2=4(x-1)(10x+2+5x-5)=$$
$$=4(x-1)(15x-3)=12(x-1)(5x-1).$$

8. Визначаємо знак похідної $f'''(x)$ у точці $x=1$. $f'''(x)=0$.

9. Знаходимо похідну IV порядку $f^{\text{IV}}(x)$.

$$f^{\text{IV}}(x)=12(5x-1)+60(x-1)=12(5x-1+5x-5)=12(10x-6)=24(5x-3).$$

10. Визначаємо знак похідної $f^{\text{IV}}(x)$ у точці $x=1$. Оскільки $f^{\text{IV}}(1)>0$, то точка $x=1$ є точкою мінімуму.

11. Знаходимо значення функції у точках екстремуму.

Знаходимо максимальне значення функції у точці $x=-\dfrac{3}{5}$.

$$y_{\max}=f\left(-\frac{3}{5}\right)=\left(-\frac{3}{5}-1\right)^4\left(-\frac{3}{5}+1\right)=\left(-\frac{8}{5}\right)^4\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{2^{13}}{5^5}\approx 2{,}6.$$

Знаходимо мінімальне значення функції у точці $x=1$: $y_{\min}=f(1)=0$.

В і д п о в і д ь: $y_{\max}=f\left(-\dfrac{3}{5}\right)\approx 2{,}6$; $y_{\min}=f(1)=0$.

Приклад 2.149. Знайти точки екстремуму функції

$$f(x)=(x-1)^3(2x+3)^2.$$

Р о з в ’ я з а н н я

1. Область визначення функції: $x\in(-\infty,+\infty)$.

2. Знаходимо похідну першого порядку $f'(x)$.

$$f'(x)=3(x-1)^2(2x+3)^2+4(x-1)^3(2x+3)=5(x-1)^2(2x+3)(2x+1).$$

3. Знаходимо критичні точки 1-го роду функції $f(x)$ з рівняння $f'(x)=0$, тобто $5(x-1)^2(2x+3)(2x+1)=0$, звідки $x_1=-\dfrac{3}{2};\;\; x_2=-\dfrac{1}{2};\;\; x_3=1$.

Критичні точки, в яких похідна $f'(x)$ не існує або дорівнює нескінченності відсутні. Отже, можна користуватись другою достатньою умовою існування екстремуму.

4. Знаходимо похідну другого порядку $f''(x)$.

$$f''(x)=10(x-1)\left(4x^2+8x+3\right)+5(x-1)^2(8x+8)=$$

$$=10(x-1)\left(4x^2+8x+3+4x^2-4\right)=10(x-1)\left(8x^2+8x-1\right).$$

5. Визначаємо знак похідної $f''(x)$ у критичних точках.

$$f''(1)=0,\quad f''\left(-\frac{3}{2}\right)<0,\;\; f''\left(-\frac{1}{2}\right)>0.$$

6. Знаходимо точки екстремуму за другою достатньою умовою існування екстремуму функції. У точці $x=-\dfrac{3}{2}$ функція має максимум, у точці $x=-\dfrac{1}{2}$ – мінімум.

Залишається відкритим питання щодо існування екстремуму у точці $x=1$.

У таких випадках слушною стає третя достатня умова існування екстремуму функції. Щоб дослідити на екстремум точку $x=1$, маємо знайти $f'''(x)$. Для цього $f''(x)$ краще подати у вигляді

$$f''(x)=10\left(8x^3-9x+1\right).$$

7. Знаходимо похідну третього порядку $f'''(x)$.

$$f'''(x)=10\left(24x^2-9\right);\qquad f'''(1)=50\neq 0.$$

8. Досліджуємо на екстремум точку x = 1 за третьою достатньою умовою існування екстремуму функції. Оскільки $n=3$ – число непарне, то у точці $x=1$ функція екстремуму не має.

9. Обчислюємо значення функції у точках екстремуму.

$$y_{\max} = f\left(-\frac{3}{2}\right) = 0; \quad y_{\min} = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{27}{2}.$$

В і д п о в і д ь: $y_{\min} = -\dfrac{27}{2}$; $y_{\max} = 0$.

Приклад 2.150. Залізна серцевина, яка заповнює порожнину циліндричної котушки радіусом R у трансформаторі змінного струму, має хрестоподібний переріз у формі квадрата з вирізаними при вершинах квадратиками. Визначити кут φ (рис. 2.15) в такий спосіб, щоб площа перерізу була максимальною.

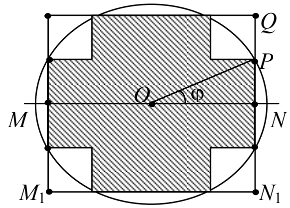


Рисунок 2.15

Р о з в ’ я з а н н я

Площу S перерізу серцевини знайдемо як різницю площ квадрата зі стороною MN та чотирьох квадратиків зі стороною PQ: $S = |MN|^2 - 4|PQ|^2$.

Нехай точка O – центр симетрії квадрата. Тоді $|MN| = 2|NO|$.
З прямокутного трикутника ONP маємо

$$|ON| = |OP|\cos\varphi, \text{ тобто } |ON| = R\cos\varphi.$$

Тоді $|MN| = 2R\cos\varphi$, $|NP| = R\sin\varphi$, $|PQ| = R\cos\varphi - R\sin\varphi$, звідки

$$S = \left(2R\cos\varphi\right)^2 - 4\left(R\cos\varphi - R\sin\varphi\right)^2.$$

Після спрощення дістанемо

$$S = S(\varphi) = 2R^2\left(2\sin 2\varphi + \cos 2\varphi - 1\right).$$

Зробимо дослідження функції $S(\varphi)$ на екстремум.

1. Областю визначення функції є проміжок $\varphi \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right)$, оскільки за змістом задачі $\varphi \ge 0$.

2. Знаходимо похідну першого порядку.

$$S'(\varphi) = 2R^2\left(4\cos 2\varphi - 2\sin 2\varphi\right).$$

3. Знаходимо критичні точки 1-го роду функції $S(\varphi)$ з рівняння $S'(\varphi) = 0$, тобто

$$4R^2\left(2\cos 2\varphi - \sin 2\varphi\right) = 0, \quad \text{звідки} \quad 2\cos 2\varphi = \sin 2\varphi.$$

Поділимо обидві частини останньої рівності на $\cos 2\varphi \ne 0$. Тоді

$$\operatorname{tg} 2\varphi = 2, \quad \text{звідки} \quad \varphi = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2 \approx 31^\circ 43'.$$

Критичні точки, в яких похідна $S'(\varphi)$ не існує або дорівнює нескінченності, відсутні.

4. Знаходимо похідну другого порядку $S''(\varphi)$.

$$S''(\varphi) = 4R^2\left(-4\sin 2\varphi - 2\cos 2\varphi\right),$$

$$S''(\varphi) = -8R^2\left(2\sin 2\varphi + \cos 2\varphi\right).$$

5. Визначаємо значення похідної $S''(\varphi)$ у точці $\varphi = \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} 2 \approx 31^{\circ}43'$:

$$S''\left(31^{\circ}43'\right) = -8R^2\left(2\sin 63^{\circ}26' + \cos 63^{\circ}26'\right) < 0.$$

6. Знаходимо точки екстремуму за другою достатньою умовою існування екстремуму функції: критична точка $\varphi \approx 31^{\circ}43'$ є точкою максимуму.

7. Знаходимо значення функції у точці екстремуму.

$$S_{\max} = S\left(31^{\circ}43'\right) \approx 2R^2\left(2\sin 63^{\circ}26' + \cos 63^{\circ}26'\right) = 2{,}472R^2 \text{ (од. кв.)}.$$

В і д п о в і д ь: $\varphi \approx 31^{\circ}43'$; $S_{\max} \approx 2{,}472R^2$ (од. кв.).

ЗАУВАЖЕННЯ. Наприкінці слід зауважити, що у розглянутих прикладах було знайдено точки локального екстремуму, тобто такі точки, в яких функція досягає найменшого або найбільшого значення порівняно зі значеннями функції у як завгодно малому околі точки екстремуму.

Ці значення не можна вважати за найменші чи найбільші значення функції у замкненому проміжку або взагалі в області визначення функції.

Розглянемо як знаходиться найменше та найбільше значення функції, ***заданої на сегменті***.

Приклад 2.151. Знайти найменше та найбільше значення функції $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ на сегменті [–1, 2].

Р о з в ' я з а н н я

Слід звернутись до відповідної схеми (п. 2.4.6).

1. Областю визначення функції є проміжок $\left(-\infty, +\infty\right)$, до якого входить і заданий сегмент [–1, 2].

2. Знаходимо похідну першого порядку $f'(x)$.

$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 5x^2\left(x^2 - 4x + 3\right).$$

3. Знаходимо критичні точки 1-го роду функції $f(x)$ з рівняння $f'(x) = 0$, тобто $x^2\left(x^2 - 4x + 3\right) = 0$, звідки $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 3$.

Критичні точки, в яких похідна $f'(x)$ не існує або дорівнює нескінченості, відсутні.

Серед здобутих критичних точок

$$x_1 = 0 \in [-1, 2];\ x_2 = 1 \in [-1, 2];\ x_3 = 3 \notin [-1, 2].$$

4. Визначаємо значення функції у точках $x_1 = 0$ та $x_2 = 1$.

$$f(0) = 1;\quad f(1) = 2.$$

5. Визначаємо значення функції на кінцях сегмента [–1, 2].

$$f(-1) = -10;\ f(2) = -7.$$

6. Знаходимо найменше та найбільше значення функції на сегменті.

$$\max_{x\in[-1,\,2]} f(x) = f(1) = 2; \qquad \min_{x\in[-1,\,2]} f(x) = f(-1) = -10.$$

В і д п о в і д ь: $\max\limits_{x\in[-1,\,2]} f(x) = f(1) = 2$; $\min\limits_{x\in[-1,\,2]} f(x) = f(-1) = -10$.

Приклад 2.152. Знайти найменше та найбільше значення функції

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 120x + 100$$

на проміжку (–4, 5].

Р о з в ’ я з а н н я

1. Областю визначення функції є проміжок $(-\infty, +\infty)$, до якого входить проміжок (–4;5].

2. Знаходимо похідну першого порядку $f'(x)$.

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 120 = 6\left(x^2 + x - 20\right).$$

3. Знаходимо критичні точки 1-го роду функції $f(x)$ з рівняння $f'(x) = 0$, тобто $x^2 + x - 20 = 0$, звідки $x_1 = -5$; $x_2 = 4$.

$x_1 = -5 \notin (-4; 5]$; $\quad x_2 = 4 \in (-4; 5]$.

Критичні точки, в яких похідна $f'(x)$ не існує або дорівнює нескінченості, відсутні.

4. Знаходимо значення функції у критичній точці $x = 4$, тобто $f(4) = -204$.

5. Знаходимо значення функції на кінцях заданого проміжку, тобто $f(5) = -169$.

Точка $x = -4$ не належить до заданого проміжку, але, щоб з’ясувати характер поводження функції, знайдемо $f(-4)$: $f(-4) = 500$.

6 Знаходимо найменше та найбільше значення функції на заданому проміжку. Не важко впевнитись, що на проміжку (–4, 4) функція спадає і якби $x = -4$ належало до заданого проміжку, то $f(-4) = 500$ вважалось би за найбільше значення функції на заданому проміжку. Але в даному випадку найбільшого значення функція не досягає, а найменше її значення дорівнює –204, тобто

$$\underset{x\in(-4;\,5]}{f_{\text{найм}}}(x) = f(4) = -204.$$

В і д п о в і д ь: $\underset{x\in(-4;\,5]}{f_{\text{найм}}}(x) = f(4) = -204$.

ЗАУВАЖЕННЯ. Інколи доводиться знаходити найменше та найбільше значення функції на проміжках типу $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b). Тоді не обчислюються і не беруть участі у порівнянні значення функції у тих точках, що не входять до заданого проміжку. Але для встановлення повної картини слід проаналізувати характер поведінки функції на кінцях заданого проміжку, якщо це можливо.

Приклад 2.153. Знайти найменше та найбільше значення функції

$$f(x) = \cos^2 x + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \cos x \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$$

в її області визначення.

Р о з в ’ я з а н н я

1. Областю визначення функції є проміжок $x \in (-\infty, +\infty)$.

2. Знаходимо похідну першого порядку $f'(x)$.

$$f'(x) = -2\cos x\,\sin x - 2\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\sin x\,\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\cos x\,\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=$$

$$=-\sin 2x-\sin\left(\frac{2\pi}{3}+2x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}+2x\right)=-\sin 2x-\sin\frac{2\pi}{3}\cos 2x-$$

$$-\sin 2x\,\cos\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\,\cos 2x+\sin 2x\,\cos\frac{\pi}{3},$$

$$f'(x)=-\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x=0.$$

Оскільки $f'(x)=0$, то $f(x)=\text{const}$.

Знайдемо $f(x)$ в будь-якій точці x з області визначення функції, наприклад, $f(0)$.

$$f(0)=1+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{3}{4}.$$

Отже,

$$\underset{x\in(-\infty,\,+\infty)}{f_{\text{найм}}}(x)=\underset{x\in(-\infty,\,+\infty)}{f_{\text{найб}}}(x)=\frac{3}{4}.$$

В і д п о в і д ь: $\underset{x\in(-\infty,\,+\infty)}{f_{\text{найм}}}(x)=\underset{x\in(-\infty,\,+\infty)}{f_{\text{найб}}}(x)=\frac{3}{4}.$

Приклад 2.154. Знайти найменше та найбільше значення функції

$$f(x) = x + \cos 2x \quad \text{на сегменті } \left[0,\ \frac{\pi}{3}\right].$$

Р о з в ’ я з а н н я

1. Областю визначення функції є проміжок $(-\infty, +\infty)$, до якого входить сегмент $\left[0,\ \frac{\pi}{3}\right]$.

2. Знаходимо похідну першого порядку $f'(x)$.

$$f'(x)=1-2\sin 2x.$$

3. Знаходимо критичні точки 1-го роду функції $f(x)$ з рівняння $f'(x) = 0$, тобто

$$1-2\sin 2x=0;\quad \sin 2x=\frac{1}{2};\quad 2x=(-1)^n\arcsin\frac{1}{2}+\pi n,\ n\in Z,$$

$$2x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ \text{де}\ n\in Z;\qquad x=(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2},\ \text{де}\ n\in Z.$$

Критичні точки, в яких похідна $f'(x)$ не існує або дорівнює нескінченості, відсутні.

Серед множини критичних точок до сегменту $\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$ належить лише одна точка, а саме, $x = \dfrac{\pi}{12}$.

4. Визначаємо значення функції у критичній точці $x = \dfrac{\pi}{12}$.

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1{,}127.$$

5. Визначаємо значення функції на кінцях сегмента.

$$f(0) = 0 + \cos 0 = 1; \quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} + \cos\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \approx 0{,}54.$$

6. Знаходимо найменше та найбільше значення функції на сегменті.

$$\underset{x\in\left[0,\,\frac{\pi}{3}\right]}{f_{\text{найм}}}(x) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}, \quad \underset{x\in\left[0,\,\frac{\pi}{3}\right]}{f_{\text{найб}}}(x) = f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

В і д п о в і д ь: $\underset{x\in\left[0,\,\frac{\pi}{3}\right]}{f_{\text{найм}}}(x) = f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{1}{2}, \quad \underset{x\in\left[0,\,\frac{\pi}{3}\right]}{f_{\text{найб}}}(x) = f\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

Приклад 2.155. Джерело електрорушійної сили ε з внутрішнім опором r підімкнено до навантаження з опором R. Знайти найбільше значення потужності $P_r(R)$ у навантаженні, якщо опір R змінюється у межах $[0, 2r]$.

Р о з в ' я з а н н я

1. З курсу елементарної фізики відомо, що потужність $P_r(R)$ може бути визначена формулою

$$P_r(R) = \frac{\varepsilon^2 r}{(R+r)^2}.$$

Областю визначення функції є проміжок $R \in [0, \infty)$, до якого входить заданий сегмент $[0, 2r]$.

2. Знаходимо похідну першого порядку $P_r'(R)$.

$$P_r'(R) = -\frac{2\varepsilon^2 r}{(R+r)^3}.$$

3. Знаходимо критичні точки 1-го роду функції $f(x)$ з припущення, що $P_r'(R) = \infty$, звідки $R = -r \notin [0, 2r]$.

4. Визначаємо значення функції на кінцях сегмента.

$$P_r(0) = \frac{\varepsilon^2}{r}; \quad P_r(2r) = \frac{\varepsilon^2}{9r}.$$

5. Знаходимо найменше та найбільше значення функції на сегменті.

$$P_{\text{найм}}\left(R\right)=P\left(2r\right)=\frac{\varepsilon^2}{9r}\text{ (Вт)},\ \ P_{\text{найб}}\left(R\right)=P\left(0\right)=\frac{\varepsilon^2}{r}\text{ (Вт)}.$$

Таким чином, найбільшого значення функція досягає у точці $R = 0$ і це значення дорівнює $\frac{\varepsilon^2}{r}$ (Вт).

В і д п о в і д ь: $\frac{\varepsilon^2}{r}$ (Вт).

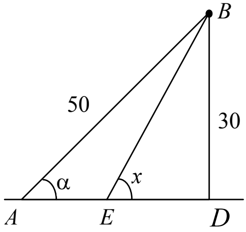


Рисунок 2.16

Приклад 2.156. Заготівельну базу B, призначену для тривалого зберігання продуктів, розміщено на відстані 50 км від райцентру A та в 30 км від магістралі, що проходить через райцентр. Під яким кутом до магістралі треба прокласти під'їзний шлях з B, щоб вартість перевезень вантажу з B до A та з A до E була найменшою, якщо відомо, що вартість перевезень магістраллю коштує вдвічі дешевше, ніж під'їзним шляхом?

Р о з в ' я з а н н я

Нехай під'їзний шлях BE примикає до магістралі AD під кутом x, BD – це шлях від бази (рис. 2.16).

$$|BE| = \frac{30}{\sin x};\quad |DE| = 30\cdot\operatorname{ctg} x;\quad |AD| = 40; |AE| = |AD| - |DE|.$$

Позначимо вартість перевезення однієї тонни вантажу на один кілометр по магістралі через P копійок. Вартість $T(x)$ перевезення однієї тонни вантажу від A до E чи навпаки є такою:

$$T(x) = P\cdot|AE| + 2P\cdot|BE|,$$

тобто

$$T(x) = P\left(\frac{60}{\sin x} - 30\operatorname{ctg} x + 40\right) = P\left(\frac{30\left(2-\cos x\right)}{\sin x} + 40\right).$$

Вартість перевезень $T(x)$ є функцією аргументу x.

Якщо позначити через α величину кута ΔADB, то виходить, що

$$\alpha \le x \le \frac{\pi}{2}.$$

Величину α можна визначити з $\angle ADB$:

$$\sin\alpha = \frac{|BD|}{|BA|},\quad \text{тобто}\quad \sin\alpha = \frac{3}{5},\quad \text{звідки } \alpha = \arcsin\frac{3}{5} \approx 37°.$$

Знайдемо найменше значення функції $T(x)$ на сегменті $\left[\arcsin\frac{3}{5},\ \frac{\pi}{2}\right]$. Знаходимо похідну першого порядку $T'(x)$:

$$T'(x)=30P\frac{\sin^2 x-(2-\cos x)\cos x}{\sin^2 x}=\frac{30P\left(\sin^2 x-2\cos x+\cos^2 x\right)}{\sin^2 x}=\frac{30P(1-2\cos x)}{\sin^2 x}.$$

Знаходимо критичні точки 1-го роду функції $f(x)$ з рівняння $T'(x) = 0$, тобто з рівняння $30P(1-2\cos x)=0$, звідки $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, де $k\in Z$; одна з точок, а саме, $x=\frac{\pi}{3}$, належить до сегмента $\left[\arcsin\frac{3}{5},\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Знаходимо критичні точки 1-го роду з припущення, що $T'(x) = \infty$, тобто з рівняння $\sin^2 x=0$, звідки $x=n\pi$, де $n\in Z$ і ці точки не належать до сегмента $\left[\arcsin\frac{3}{5},\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Визначаємо значення функції у критичній точці $x = \frac{\pi}{3}$.

$$T\left(\frac{\pi}{3}\right)=10P\left(4+3\sqrt{3}\right).$$

Знаходимо значення функції на кінцях сегмента $\left[\arcsin\frac{3}{5},\ \frac{\pi}{2}\right]$.

$$T\left(\arcsin\frac{3}{5}\right) = 2P\,|AB| = 100P;\quad T\left(\frac{\pi}{2}\right)=P\,|AD|+2P\,|BD|=100P.$$

Знаходимо найменше значення функції на сегменті.

$$\underset{x\in\left[\arcsin\frac{3}{5},\ \frac{\pi}{2}\right]}{T_{\text{найм}}(x)}=T\left(\frac{\pi}{3}\right)=10P\left(4+3\sqrt{3}\right).$$

В і д п о в і д ь: $10P\left(4+3\sqrt{3}\right)$.

2.5 Інтервали опуклості та угнутості графіка функції

2.5.1 Опуклість та угнутість графіка функції. Основні поняття

В и з н а ч е н н я 1. Крива, що є графіком неперервної функції $y=f(x)$, називається ***опуклою у точці*** $\boldsymbol{x_0}$, якщо існує такий окіл точки x_0, у межах якого усі точки кривої $y=f(x)$ перебувають не вище за відповідні точки з тією самою абсцисою на дотичній (рис. 2.17).

В и з н а ч е н н я 2. Крива, що є графіком неперервної функції $y=f(x)$, називається ***угнутою у точці*** $\boldsymbol{x_0}$, якщо існує такий окіл точки x_0, у межах якого усі точки

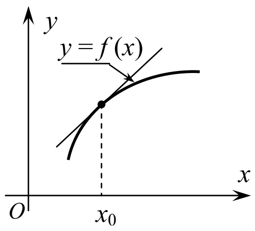


Рисунок 2.17

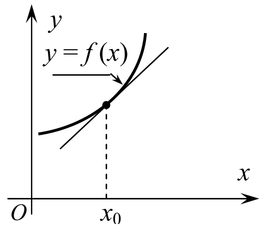


Рисунок 2.18

кривої $y = f(x)$ перебувають не нижче за відповідні точки з тією самою абсцисою на дотичній (рис. 2.18).

В и з н а ч е н н я 3. Крива, що є графіком неперервної функції $y = f(x)$, називається ***опуклою*** або ***угнутою в інтервалі***, якщо вона є відповідно опуклою чи угнутою у кожній точці цього інтервалу.

2.5.2 Властивості опуклих та угнутих функцій

1. Добуток опуклої функції на додатну сталу також є опуклою функцією.
2. Добуток опуклої функції на від'ємну сталу є угнутою функцією.
3. Сума двох опуклих функцій також є опуклою функцією.
4. Сума двох угнутих функцій також є угнутою функцією.
5. Якщо функція $y = f(u)$ є опуклою та зростаючою функцією, а функція $u = \varphi(x)$ є також опукла, то складна функція $f(\varphi(x))$ також є опуклою.
6. Якщо функція $y = f(u)$ є опуклою та спадною функцією, а функція $u = \varphi(x)$ є угнутою, то складна функція $f(\varphi(x))$ є опуклою.
7. Якщо функція $y = f(u)$ є угнутою та зростаючою функцією, а функція $u = \varphi(x)$ є угнутою, то складна функція $f(\varphi(x))$ є угнутою.
8. Якщо функція $y = f(u)$ є угнутою та спадною функцією, а функція $u = \varphi(x)$ є опуклою, то складна функція $f(\varphi(x))$ є угнутою.
9. Якщо функція $y = f(x)$ є опуклою та зростаючою функцією, то обернена функція $x = g(y)$ є угнутою та зростаючою.
10. Якщо функція $y = f(x)$ є опуклою та спадною функцією, то обернена до неї функція $x = g(y)$ є угнутою та спадною.
11. Якщо функція $y = f(x)$ є угнутою та спадною функцією, то обернена до неї функція $x = g(y)$ є опуклою та спадною.
12. Якщо функція $y = f(x)$ є опуклою функцією, то функція $y = -f(x)$ є угнутою, й навпаки.

Завдання для самостійної роботи. Навести приклади функцій, які характеризують кожну з властивостей.

2.5.3 Дослідження функції на опуклість та угнутість

Теорема 1 (необхідна та достатня умова угнутості графіка функції в інтервалі). Нехай функція $y = f(x)$ задовольняє умови:

1) двічі диференційовна в інтервалі (a, b);

2) похідна другого порядку $f''(x)$ є неперервною функцією в інтервалі (a, b).

Для того, щоб графік функції був угнутим в інтервалі (a, b), необхідно та достатньо, щоб для будь-якого x з інтервалу (a, b) виконувалась умова $f''(x) \geq 0$.

Доведення

Нехай $x \in (a, b)$. Рівняння дотичної до графіка функції $f(x)$ з точкою дотику $M_0\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ має вигляд

$$y_{д} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{2.90}$$

Функцію запишемо як

$$y_{ф} = f(x). \tag{2.91}$$

Від рівності (2.91) почленно віднімемо рівність (2.90). Виходить

$$y_{ф} - y_{д} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0). \tag{2.92}$$

За умовою функція $f(x)$ диференційовна в інтервалі (a, b), а отже, і неперервна в інтервалі (a, b). Тоді на будь-якому сегменті $[x_0, x] \subset (a, b)$, де $x_0 < x$, функція $f(x)$ задовольняє умови теореми Лагранжа. Звідси

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0), \text{ де } c \in (x_0, x).$$

Рівність (2.92) можна записати у формі

$$y_{ф} - y_{д} = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0),$$

чи

$$y_{ф} - y_{д} = \left(f'(c) - f'(x_0)\right)(x - x_0). \tag{2.93}$$

Згідно з умовою теореми функція $y = f'(x)$ також диференційовна на інтервалі (a, b), а отже, і неперервна. На сегменті $[x_0, c]$ функція $f'(x)$ задовольняє умови теореми Лагранжа. Тоді

$$f'(c) - f'(x_0) = f''(k)(c - x_0), \text{ де } k \in (x_0, c). \tag{2.94}$$

З урахуванням рівності (2.94) рівність (2.93) можна записати у вигляді:

$$y_{ф} - y_{д} = f''(k)(c - x_0)(x - x_0). \tag{2.95}$$

Множники $(c - x_0)$ та $(x - x_0)$ невід'ємні, а значить, з рівності (2.95) виходить, що $(y_{ф} - y_{д})$ та $f''(k)$ мають однакові знаки. Якщо розглядати сегмент $[x, x_0]$, де $x_0 < x$, то $(c - x_0)\,(x - x_0) > 0$, тому отримаємо той же результат.

Необхідність. Припустимо, що графік функції $y = f(x)$ є угнутим. Тоді в інтервалі (x_0, x) $(y_{ф} - y_{д}) \geq 0$, але звідси виходить, що $f''(k) \geq 0$. Оскільки x_0 та x обирались довільно, то з нерівності $f''(k) \geq 0$ виходить, що $f''(x) \geq 0$ в інтервалі (a, b).

Достатність. Нехай в інтервалі (a, b) $f''(x) \geq 0$ для будь-якого x. З рівності (2.95) виходить, що в інтервалі (x_0, x) і $(y_{ф} - y_{д}) \geq 0$ та $y_{ф} \geq y_{д}$. Остання нерівність показує, що в інтервалі (x_0, x) графік функції є угнутим. Через довільний вибір x_0 та x зроблений висновок поширюється і на інтервал (a, b).

Теорема 2 (необхідна та достатня умова опуклості графіка функції).

Нехай функція $y = f(x)$ задовольняє умови:

1) двічі диференційовна в інтервалі (a, b);
2) похідна другого порядку $f''(x)$ є неперервною функцією в інтервалі (a, b).

Для того, щоб графік функції був опуклим в інтервалі (a, b), необхідно та достатньо, щоб для будь-якого x з інтервалу (a, b) виконувалась умова $f''(x) \le 0$.

Д о в е д е н н я

Розглянемо допоміжну функцію $y = \varphi(x)$, де $\varphi(x) = -f(x)$ в інтервалі (a, b). Зрозуміло, що функція $\varphi(x)$ задовольняє умови теореми 1, оскільки графік функції $\varphi(x)$ є угнутим. Тобто необхідна та достатня умова угнутості графіка функції $\varphi(x)$ є необхідною та достатньою умовою опуклості графіка функції $f(x)$. Отже, з нерівності $\varphi''(x) \ge 0$ виходить, що $f''(x) \le 0$.

ЗАУВАЖЕННЯ. Якщо в теоремах 1 та 2 нерівності $f''(x) \ge 0$ та $f''(x) \le 0$ замінити відповідно на нерівності $f''(x) > 0$ та $f''(x) < 0$, то тоді теореми 1 та 2 можна вважати відповідно за необхідну та достатню умови строгої угнутості чи опуклості.

В и з н а ч е н н я 1. Інтервали, в яких графік функції є опуклим, називаються ***інтервалами опуклості графіка*** функції.

В и з н а ч е н н я 2. Інтервали, в яких графік функції є угнутим, називаються ***інтервалами угнутості графіка*** функції.

ЗАУВАЖЕННЯ. Досить часто в літературі замість терміну *опуклість* чи *угнутість графіка функції* використовують термін *опуклість* чи *угнутість функції*.

2.5.4 Критичні точки 2-го роду функції

Серед функцій зустрічаються такі функції, що у своїй області визначення мають лише опуклий графік або такі, які мають лише угнутий графік, але є й такі функції, які у деяких інтервалах області визначення мають опуклий графік, а у деяких – угнутий.

Якщо функція $y = f(x)$ в інтервалі (a, b) є неперервною, а її похідна другого порядку неперервна або в деяких точках не існує, або є нескінченною, то інтервали опуклості відокремлюється від інтервалів угнутості графіка функції такими точками, в яких $f''(x) = 0$ або не існує, або є нескінченною.

В и з н а ч е н н я. ***Критичними точками 2-го роду функції $f(x)$*** називаються такі точки, в яких похідна другого порядку $f''(x)$ дорівнює нулю або не існує, або є нескінченною.

Схема дослідження функцій на опуклість та угнутість

1. Знаходимо область визначення функції.
2. Знаходимо похідну першого порядку $f'(x)$.
3. Знаходимо похідну другого порядку $f''(x)$.
4. Знаходимо критичні точки 2-го роду функції $f(x)$.

5. Наносимо на числову вісь критичні точки та розбиваємо область визначення функції на інтервали.
6. Визначаємо знак похідної другого порядку в кожному інтервалі.
7. Визначаємо інтервали опуклості та угнутості функції.

Приклади до пункту 2.5

Приклад 2.157. Знайти інтервали опуклості та угнутості графіка функції

$$f(x) = \left(x^2 - 2\right)^2 + 1.$$

Р о з в ' я з а н н я

1. Область визначення функції: $x \in (-\infty, +\infty)$.
2. Знаходимо похідну першого порядку $f'(x)$.

$$f'(x) = 4x\left(x^2 - 2\right) = 4x^3 - 8x.$$

3. Знаходимо похідну другого порядку $f''(x)$.

$$f''(x) = 12x^2 - 8; \qquad f''(x) = 4\left(3x^2 - 2\right).$$

4. Знаходимо критичні точки 2-го роду функції $f(x)$ з рівняння $f''(x) = 0$, тобто

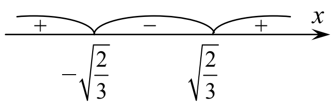
$$3x^2 - 2 = 0, \quad \text{звідки} \quad x^2 = \frac{2}{3}; \quad x_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}}; \quad x_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Критичні точки, в яких похідна $f''(x)$ не існує або дорівнює нескінченності, відсутні.

5. Наносимо на числову вісь критичні точки та розбиваємо область визначення функції на інтервали: $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$; $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$; $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty\right)$.

6. Визначаємо знак похідної другого порядку в кожному інтервалі. Для зручності запишемо $f''(x)$ у вигляді

$$f''(x) = 12\left(x + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)\left(x - \sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$



7. Визначаємо інтервали опуклості та угнутості функції.

В інтервалі $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ $f''(x) > 0$, графік функції угнутий.

В інтервалі $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ $f''(x) < 0$, графік функції опуклий.

В інтервалі $\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}, +\infty\right)$ $f''(x) > 0$, графік функції угнутий.

В і д п о в і д ь: графік функції угнутий в інтервалах $\left(-\infty, -\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$ та $\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}, +\infty\right)$; графік функції опуклий в інтервалі $\left(-\sqrt{\dfrac{2}{3}}, \sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$.

Приклад 2.158. Знайти інтервали опуклості та угнутості графіка функції

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 5x + 8.$$

Р о з в ' я з а н н я

1. Область визначення функції: $x \in (-\infty, +\infty)$.
2. Знаходимо похідну першого порядку $f'(x)$.

$$f'(x) = x^3 - 5.$$

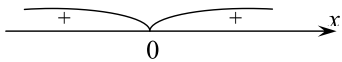
3. Знаходимо похідну другого порядку $f''(x)$.

$$f''(x) = 3x^2.$$

4. Знаходимо критичні точки 2-го роду функції $f(x)$ з рівняння $f''(x) = 0$, тобто $3x^2 = 0$, звідки $x = 0$.

Критичні точки, в яких $f''(x)$ дорівнює нескінченності або не існує, відсутні.

5. Наносимо на числову вісь критичні точки та розбиваємо область визначення функції на інтервали: $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$.
6. Визначаємо знак похідної $f''(x)$ в кожному інтервалі.



7. Визначаємо інтервали опуклості та угнутості функції.

В інтервалі $(-\infty, 0)$ $f''(x) > 0$, графік функції угнутий.

В інтервалі $(0, +\infty)$ $f''(x) > 0$, графік функції угнутий.

В і д п о в і д ь: графік функції угнутий в інтервалах $(-\infty, 0)$ та $(0, +\infty)$.

Приклад 2.159. Знайти інтервали опуклості та угнутості графіка функції

$$f(x) = \sqrt[5]{x^6}.$$

Р о з в ' я з а н н я

1. Область визначення функції: $x \in (-\infty, +\infty)$.
2. Знаходимо похідну першого порядку $f'(x)$.

$$f'(x) = \left(x^{\frac{6}{5}}\right)' = \frac{6}{5}x^{\frac{1}{5}}.$$

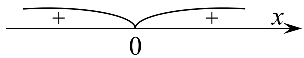
3. Знаходимо похідну другого порядку $f''(x)$.

$$f''(x) = \frac{6}{25} x^{-\frac{4}{5}} = \frac{6}{25} \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}.$$

4.Знаходимо критичні точки 2-го роду функції $f(x)$ з припущення, що $f''(x) = \infty$, тоді $x = 0$.

5. Наносимо на числову вісь критичні точки та розбиваємо область визначення функції на інтервали: $(-\infty, 0)$; $(0, +\infty)$.

6. Визначаємо знак похідної другого порядку в кожному інтервалі.



7. Визначаємо інтервали опуклості та угнутості функції.

В інтервалі $(-\infty, 0)$ $f''(x) > 0$, графік функції угнутий.

В інтервалі $(0, +\infty)$ $f''(x) > 0$, графік функції угнутий.

В і д п о в і д ь: графік функції угнутий в інтервалах $(-\infty, 0)$ та $(0, +\infty)$.

2.6 Точки перегину графіка функції

2.6.1 Необхідна умова існування точки перегину графіка функції

В и з н а ч е н н я. Нехай функцію $y = f(x)$ визначено у точці x_0 та деякому її околі. Точка x_0 називається ***точкою перегину графіка*** функції $y = f(x)$, якщо графік функції у відповідній точці $M_0(x_0, y_0)$ змінює опуклість на угнутість чи навпаки (рис. 2.19). При цьому точка $M_0(x_0, y_0)$ називається ***точкою перегину графіка функції***.

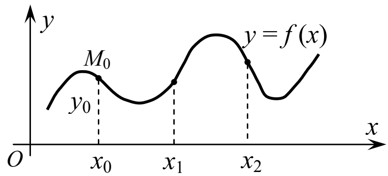


Рисунок 2.19

Теорема 1 (необхідна умова існування точки перегину графіка функції). Нехай функція $y = f(x)$ задовольняє умови:

1) неперервна у точці x_0 та деякому її околі;

2) має неперервну похідну другого порядку $f''(x)$ у точці x_0 та зазначеному околі;

3) точка x_0 є точкою перегину.

Тоді похідна $f''(x_0) = 0$.

Д о в е д е н н я

З означення точки перегину виходить, що у цій точці опуклість графіка функції змінюється на угнутість чи навпаки. У зв'язку з цим при переході через точку x_0 похідна $f''(x)$ змінює знак на протилежний. Це означає, що при переході через точку x_0 похідна $f'(x)$ змінює характер монотонності, на підставі чого можна стверджувати, що функція $f'(x)$ у точці x_0 має екстремум. Згідно з необхідною умовою існування екстремуму функції доходимо висновку, що $\left(f'\left(x_0\right)\right)' = 0$, тобто $f''(x_0) = 0$.

ЗАУВАЖЕННЯ 1. Якщо функція неперервна у точці x_0 та двічі диференційовна і має неперервну похідну другого порядку лише в деякому околі точки x_0, яка є точкою перегину, за винятком точки x_0, то тоді похідна другого порядку або є нескінченною у точці перегину, або взагалі не існує у цій точці.

ЗАУВАЖЕННЯ 2. Слід мати на увазі, що доведена теорема не може бути достатньою умовою існування точки перегину функції.

ЗАУВАЖЕННЯ 3. Усі точки перегину є водночас і критичними точками 2-го роду функції $f\left(x\right)$, але не кожна критична точка є точкою перегину.

2.6.2 Перша достатня умова існування точки перегину графіка функції

Теорема 2. Нехай функція $y = f(x)$ задовольняє умови:

1) неперервна у точці x_0 та деякому її околі;

2) двічі диференційовна у зазначеному околі точки x_0 за винятком, можливо, самої точки x_0;

3) точка x_0 є критичною точкою 2-го роду функції $f(x)$.

Тоді, якщо похідна другого порядку при переході через точку x_0 змінює знак на протилежний, то точка x_0 є точкою перегину графіка функції.

Д о в е д е н н я

Згідно з умовою теореми, похідна $f''(x)$ при переході через точку x_0 змінює знак на протилежний, а це означає, що в деякому околі точки x_0 функція поводить себе неоднаково, тобто з одного боку графік функції є опуклий, а з другого – угнутий чи навпаки. Отже, x_0 – точка перегину графіка функції.

Схема дослідження функції на наявність точок перегину графіка функції за першою достатньою умовою

1. Знаходимо область визначення функції.
2. Знаходимо похідну першого порядку.
3. Знаходимо похідну другого порядку.
4. Знаходимо критичні точки 2-го роду функції $f(x)$.
5. Наносимо на числову вісь критичні точки та розбиваємо область визначення функції на інтервали.
6. Визначаємо знак похідної другого порядку в кожному інтервалі.
7. Знаходимо точки перегину графіка функції за першою достатньою умовою існування точки перегину графіка функцій.
8. Знаходимо значення функції у точках перегину графіка функції.

2.6.3 Друга достатня умова існування точки перегину графіка функції

Теорема 3. Нехай функція $y = f(x)$ задовольняє умови:

1) неперервна у точці x_0 та деякому її околі;

2) має неперервну похідну третього порядку $f'''(x)$ у точці x_0 та зазначеному околі;

3) $f''(x_0) = 0$; $f'''(x_0) \neq 0$.

Тоді точка x_0 є точкою перегину графіка функції $y = f(x)$.

Д о в е д е н н я

Функція $f'''(x)$ є неперервною функцією. Згідно з теоремою про збереження знака неперервної функції, можна стверджувати, що існує такий окіл точки x_0, в якому похідна $f'''(x)$ зберігає свій знак. Припустимо для визначеності, що $f'''(x_0) > 0$. Тоді і в зазначеному околі точки x_0 виконуватиметься нерівність $f'''(x) > 0$. Розглянемо $f'''(x)$ як похідну функції $f''(x)$, тобто

$$f'''(x) = \left(f''(x)\right)'.$$

Оскільки з обох боків від точки x_0 $f'''(x) > 0$, то це означає, що функція $f''(x)$ у зазначеному околі зростає. А з того, що $f''(x_0) = 0$, виходить, що $f''(x_0) < 0$, якщо $x < x_0$ та $f''(x) > 0$, якщо $x > x_0$. Згідно з теоремою 2 п. 2.6.2 можна стверджувати, що точка x_0 є точкою перегину графіка функції $f(x)$.

Схема дослідження функції на наявність точок перегину графіка функції за другою достатньою умовою

1. Знаходимо область визначення функції.
2. Знаходимо похідну першого порядку $f'(x)$.
3. Знаходимо похідну другого порядку $f''(x)$.
4. Знаходимо критичні точки 2-го роду функції $f(x)$.
5. Знаходимо похідну третього порядку $f'''(x)$.
6. Визначаємо знак похідної третього порядку $f'''(x)$ у критичних точках, де $f''(x) = 0$, якщо вони належать до області визначення функції.
7. Знаходимо точки перегину графіка функції за другою достатньою умовою існування точки перегину графіка функції.
8. Знаходимо значення функції у точках перегину графіка функції.

2.6.4 Третя достатня умова існування точки перегину графіка функції

Теорема 4. Нехай функція $y = f(x)$ задовольняє умови:

1) неперервна у точці x_0 та деякому її околі;

2) має неперервну похідну *n*-го порядку $f^{(n)}(x)$ у точці x_0 та зазначеному околі;

3) $f'(x_0)=0$; $f''(x_0)=0$; ...; $f^{(n-1)}(x_0)=0$; $f^{(n)}(x_0)\neq 0$.

Тоді, якщо число *n* непарне, то точка x_0 є точкою перегину графіка функції. Якщо ж число *n* парне, то точка x_0 не є точкою перегину графіка функції.

Приймемо цю теорему без доведення.

Схема дослідження функції на наявність точок перегину графіка функції за третьою достатньою умовою:

1. Знаходимо область визначення функції.
2. Знаходимо похідну першого порядку $f'(x)$.
3. Знаходимо похідну другого порядку $f''(x)$.
4. Знаходимо критичні точки 2-го роду функції $f(x)$.
5. Знаходимо похідну третього порядку $f'''(x)$.
6. Знаходимо значення похідної $f'''(x)$ у критичних точках, де $f''(x)=0$.
7. Якщо у критичній точці x_0 похідна $f'''(x_0)\neq 0$, то користуємось другою достатньою умовою існування точки перегину графіка функції. Якщо похідна $f'''(x_0)=0$, то знаходимо похідну четвертого порядку $f^{\mathrm{IV}}(x)$.
8. Знаходимо значення похідної $f^{\mathrm{IV}}(x)$ у критичній точці x_0.
9. Якщо значення похідної $f^{\mathrm{IV}}(x_0)\neq 0$, то точка x_0 не є точкою перегину графіка функції. Якщо похідна $f^{\mathrm{IV}}(x_0)=0$, то знаходимо похідну V порядку $f^{\mathrm{V}}(x)$.
10. Знаходимо значення похідної $f^{\mathrm{V}}(x)$ у критичній точці x_0.
11. Якщо похідна $f^{\mathrm{V}}(x_0)\neq 0$, то точка x_0 є точкою перегину графіка функції. Якщо похідна $f^{\mathrm{V}}(x_0)=0$, то знаходимо похідну VI порядку $f^{\mathrm{VI}}(x)$.
12. Продовжуємо процес дослідження доти, поки наступна похідна у точці x_0 стане відмінною від нуля. Якщо це буде похідна непарного порядку, то точка x_0 буде точкою перегину графіка функції, якщо ж зазначена похідна буде парного порядку, то точка x_0 не буде точкою перегину графіка функції.

ЗАУВАЖЕННЯ. Друга та третя достатні умови існування точок перегину графіка функції дозволяють досліджувати на належність до точок перегину графіка функції лише ті критичні точки 2-го роду функції $f(x)$, в яких похідна $f''(x)=0$. На критичні точки, в яких похідна $f''(x)$ не існує або є нескінченною, зазначені умови не поширюються.

Приклади до пункту 2.6

Приклад 2.160. Знайти інтервали опуклості, угнутості та точки перегину графіка функції

$$f\ (x) = 2x^4 - 3x^2 + x - 1.$$

Р о з в ’ я з а н н я

1. Область визначення функції: $x \in (-\infty, +\infty)$.
2. Знаходимо похідну першого порядку $f'(x)$.

$$f'(x) = 8x^3 - 6x + 1.$$

3. Знаходимо похідну другого порядку $f''(x)$.

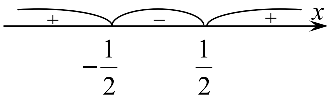
$$f''(x) = 24x^2 - 6 = 6\left(4x^2 - 1\right) = 6(2x - 1)(2x + 1).$$

4. Знаходимо критичні точки 2-го роду функції $f\left(x\right)$ з рівняння $f''(x) = 0$, тобто

$$6\ (2x - 1)\ (2x + 1) = 0,\ \text{звідки}\ x = -\frac{1}{2}\ \text{та}\ x = \frac{1}{2}.$$

Критичні точки, в яких похідна $f''(x)$ не існує або дорівнює нескінченності, відсутні.

5. Наносимо на числову вісь критичні точки та розбиваємо область визначення функції на інтервали: $(-\infty, -1/2)$, $(-1/2, 1/2)$, $(1/2, +\infty)$.
6. Визначаємо знак похідної другого порядку в кожному інтервалі.



7. Визначаємо інтервали опуклості та угнутості функції.

В інтервалі $\left(-\infty, -1/2\right)$ $f''(x) > 0$, графік функції угнутий.

В інтервалі $\left(-1/2, 1/2\right)$ $f''(x) < 0$, графік функції опуклий.

В інтервалі $\left(1/2, +\infty\right)$ $f''(x) > 0$, графік функції угнутий.

8. Знаходимо точки перегину за першою достатньою умовою існування точки перегину графіка функції.

$$x = -1/2 \quad \text{та} \quad x = 1/2.$$

9. Знаходимо значення функції у точках перегину графіка функції.

$$y_{\text{пер}} = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{17}{8}; \quad y_{\text{пер}} = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{8}.$$

В і д п о в і д ь: графік функції угнутий в інтервалах $\left(-\infty, -1/2\right)$ та $\left(1/2, +\infty\right)$, графік функції опуклий в інтервалі $(-1/2, 1/2)$; $y_{\text{пер}} = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{17}{8}$; $y_{\text{пер}} = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{8}$.

Приклад 2.161. Знайти інтервали опуклості, угнутості та точки перегину графіка функції

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

Р о з в ' я з а н н я

1. Область визначення функції: $x \in (0, +\infty)$.

2. Знаходимо похідну першого порядку $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{\dfrac{\sqrt{x}}{x} - \dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}.$$

3. Знаходимо похідну другого порядку $f''(x)$.

$$f''(x) = \left(\frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\ln x\right)' = \frac{1}{4x^{5/2}}\left(3\ln x - 8\right).$$

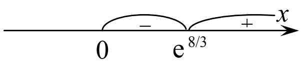
4. Знаходимо критичні точки 2-го роду функції $f(x)$ з рівняння

$f''(x) = 0$, тобто $3 \ln x - 8 = 0$, $\ln x = \dfrac{8}{3}$, звідки $x = \mathrm{e}^{8/3}$.

Критичні точки, в яких похідна $f''(x)$ дорівнює нескінченності, знаходимо з припущення $f''(x) = \infty$, тоді $x = 0 \notin (0, \infty)$

5. Наносимо на числову вісь критичні точки та розбиваємо область визначення функції на інтервали: $(0,\ \mathrm{e}^{8/3})$, $(\mathrm{e}^{8/3}, +\infty)$.

6. Визначаємо знак похідної другого порядку $f''(x)$ в кожному інтервалі.



7. Визначаємо інтервали опуклості та угнутості функції.

В інтервалі $(0,\ \mathrm{e}^{8/3})$ $f''(x) < 0$, графік функції опуклий.

В інтервалі $(\mathrm{e}^{8/3}, +\infty)$ $f''(x) > 0$, графік функції угнутий.

8. Знаходимо точки перегину за першою достатньою умовою існування точки перегину графіка функції.

Точка $x = 0$ не належить до області визначення функції, а отже, не може бути точкою перегину графіка функції. Точка $x = \mathrm{e}^{8/3}$ є точкою перегину графіка функції.

9. Знаходимо значення функції у точці перегину.

$$y_{\text{пер}} = f\left(\mathrm{e}^{\frac{8}{3}}\right) = \frac{\ln \mathrm{e}^{\frac{8}{3}}}{\sqrt{\mathrm{e}^{\frac{8}{3}}}} = \frac{8}{3\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}}.$$

В і д п о в і д ь: графік функції опуклий в інтервалі $\left(0,\ \mathrm{e}^{8/3}\right)$, графік функції угнутий в інтервалі $\left(\mathrm{e}^{8/3},\ +\infty\right)$; $y_{\text{пер}} = f\left(\mathrm{e}^{\frac{8}{3}}\right) = \dfrac{8}{3\mathrm{e}^{4/3}}$.

Приклад 2.162. Знайти інтервали опуклості, угнутості та точки перегину графіка функції

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{6}{x}, & \text{якщо } x \neq 0; \\ 0, & \text{якщо } x = 0. \end{cases}$$

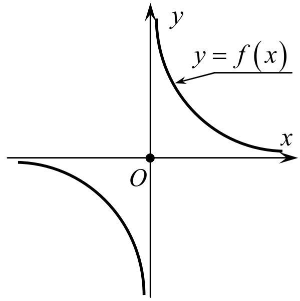


Рисунок 2.20

Р о з в ' я з а н н я

1. Область визначення функції: $x \in (-\infty, +\infty)$.

2. Знаходимо похідну першого порядку. $f'(x) = -\dfrac{6}{x^2}$, де $x \neq 0$. Якщо $x = 0$, то необхідно знайти однобічні похідні $f'(-0)$ та $f'(+0)$:

$f'(-0) = \lim\limits_{x\to -0}\left(-\dfrac{6}{x^2}\right) = -\infty$,

$f'(+0) = \lim\limits_{x\to +0}\left(-\dfrac{6}{x^2}\right) = -\infty$, значить, $f'(x)$ дорівнює $-\infty$, коли $x \to 0$.

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{6}{x^2}, & \text{якщо } x \neq 0, \\ -\infty, & \text{якщо } x = 0. \end{cases}$$

3. Знаходимо похідну другого порядку.

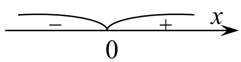
$$f''(x) = \frac{12}{x^3}, \text{ якщо } x \neq 0,$$

а у точці $x = 0$ $f''(x)$ не існує, так як $f''(-0) = \lim\limits_{x\to -0}\dfrac{12}{x^3} = -\infty$, $f''(+0) = \lim\limits_{x\to +0}\dfrac{12}{x^3} = \infty$, тобто $f''(-0) \neq f''(+0)$.

4. Знаходимо критичні точки 2-го роду функції $f(x)$ з припущення, що $f''(x) = \infty$, тоді точка $x = 0$ є критичною точкою другого роду.

5. Наносимо на числову вісь критичну точку та розбиваємо область визначення функції на інтервали: $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$.

6. Визначаємо знак похідної другого порядку $f''(x)$ в кожному інтервалі.



7. Визначаємо інтервали опуклості та угнутості функції.

В інтервалі $(-\infty, 0)$ $f''(x) < 0$, графік функції опуклий.

В інтервалі $(0, +\infty)$ $f''(x) > 0$, графік функції угнутий.

8. Знаходимо точки перегину за першою достатньою умовою існування точки перегину графіка функції.

Точок перегину не існує через те, що хоч при переході через точку $x = 0$ похідна $f''(x)$ і змінює знак на протилежний, але у цій точці функція є розривною.

В і д п о в і д ь: графік функції опуклий в інтервалі $(-\infty, 0)$; графік функції угнутий в інтервалі $(0, +\infty)$; точок перегину не існує (рис. 2.20).

Приклад 2.163. Знайти інтервали опуклості, угнутості та точки перегину графіка функції

$$f(x) = \sqrt[5]{|x|}.$$

Р о з в ' я з а н н я

1. Область визначення функції: $x \in (-\infty, +\infty)$.
2. Знаходимо похідну першого порядку $f'(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} x^{1/5}, & \text{якщо } x \ge 0; \\ -x^{1/5}, & \text{якщо } x < 0, \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{1}{x^{4/5}}, & \text{якщо } x > 0; \\ -\dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{1}{x^{4/5}}, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

у точці $x = 0$ похідна $f'(x)$ не існує так як $f'(-0) = -\lim\limits_{x \to -0} \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{1}{x^{\frac{4}{5}}} = -\infty$, а

$f'(+0) = \lim\limits_{x \to +0} \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{1}{x^{\frac{4}{5}}} = \infty$, тобто $f''(-0) \ne f''(+0)$.

3. Знаходимо похідну другого порядку $f''(x)$.

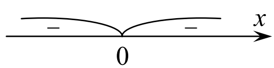
$$f''(x) = \begin{cases} -\dfrac{4}{25} \cdot \dfrac{1}{x^{9/5}}, & \text{якщо } x > 0; \\ \dfrac{4}{25} \cdot \dfrac{1}{x^{9/5}}, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

4. Знаходимо критичні точки 2-го роду функції $f(x)$ з припущення, що $f''(x) = \infty$ не існує.

Точка $x = 0$ є критичною точкою 2-го роду функції, оскільки похідна $f''(x)$ у точці $x = 0$ не існує, так як у цій точці не існує похідна $f'(x)$.

5. Наносимо на числову вісь критичну точку та розбиваємо область визначення функції на інтервали $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$.

6. Визначаємо знак похідної $f''(x)$ в кожному інтервалі.



7. Визначаємо інтервали опуклості та угнутості функції.

В інтервалі $(-\infty, 0)$ $f''(x) < 0$, графік функції опуклий.

В інтервалі $(0, +\infty)$ $f''(x) < 0$, графік функції опуклий.

8. Знаходимо точки перегину за першою достатньою умовою існування точки перегину графіка функції.

Похідна другого порядку при переході через точку $x = 0$ знаки не змінює. Отже, точка $x = 0$ не може бути точкою перегину. Такі точки називаються точками ***звороту*** (рис. 2.21).

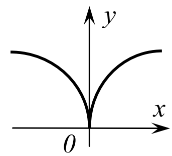


Рисунок 2.21

В і д п о в і д ь: графік функції опуклий в інтервалах $(-\infty, 0)$ та $(0, +\infty)$, точок перегину не існує.

Приклад 2.164. Знайти інтервали опуклості, угнутості та точки перегину графіка заданої функції

$$f(x) = \begin{cases} 3\sin 2x, \text{ якщо } 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}; \\ \dfrac{1}{2}x^4, \quad \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

Р о з в ' я з а н н я

1. Область визначення функції: $x \in \left(-\infty, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

2. Знаходимо похідну першого порядку $f'(x)$.

$$f'(x) = \begin{cases} 6\cos 2x, \text{ якщо } 0 < x \le \dfrac{\pi}{2}; \\ 2x^3, \quad \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

У точці $x = 0$ існують лише однобічні похідні $f'(0 + 0) = 6$; $f'(0 - 0) = 0$;

$$f'(0 - 0) \ne f'(0 + 0),$$

отже, похідна $f'(x)$ у точці $x = 0$ не існує.

3. Знаходимо похідну другого порядку $f''(x)$.

$$f''(x) = \begin{cases} -12\sin 2x, \text{ якщо } 0 < x \le \dfrac{\pi}{2}; \\ 6x^2, \quad \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

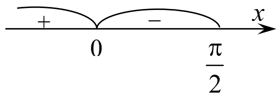
Похідна $f''(x)$ не диференційовна у точці $x = 0$, оскільки у цій точці не існує $f'(x)$.

4. Знаходимо критичні точки 2-го роду функції $f(x)$ з рівняння $f'(x) = 0$, тобто $\sin 2x = 0$, $x = \dfrac{\pi n}{2}$, де $n \in Z$; до області визначення функції належить лише точка $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Критична точка, в якій $f''(x)$ не існує - це точка $x=0$.

5. Наносимо на числову вісь критичні точки та розбиваємо область визначення функції на інтервали: $(-\infty, 0)$, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

6. Визначаємо знак похідної другого порядку в кожному інтервалі.



7. Визначаємо інтервали опуклості та угнутості функції.
В інтервалі $(-\infty, 0)$ $f''(x) > 0$, графік функції угнутий.
В інтервалі $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ $f''(x) < 0$, графік функції опуклий.

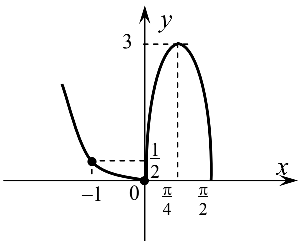


Рисунок 2.22

8. За першою достатньою умовою існування точки перегину графіка функції, точка (0;0) є точкою перегину графіка функції.

ЗАУВАЖЕННЯ. В точці $x = 0$ не існує скінченої похідної $f''(x)$. Такі точки називаються ***кутовими*** (рис. 2.22).

В і д п о в і д ь: графік функції угнутий в інтервалі $(-\infty, 0)$; графік функції опуклий в інтервалі $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; (0;0)–точка перегину.

Приклад 2.165. Знайти точки перегину графіка функції

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x\sqrt{x}}.$$

Р о з в ' я з а н н я

1. Область визначення функції: $x \in (0, +\infty)$.
2. Знаходимо похідну першого порядку $f'(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x-1}{x^{3/2}}, \text{ якщо } 0<x<1; \\ 0, \quad \text{якщо } x=1; \\ \dfrac{x-1}{x^{3/2}}, \quad \text{якщо } x>1, \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{3-x}{2x^{5/2}}, \text{ якщо } 0<x<1; \\ \dfrac{3-x}{2x^{5/2}}, \text{ якщо } x>1. \end{cases}$$

Похідну $f'(x)$ визначено, коли $x \in (0, 1)$ та $(1, +\infty)$. У точці $x = 1$ функція не диференційовна через множник $|x - 1|$, оскільки $f'(1-0) \neq f(1+0)$.

3. Знаходимо похідну другого порядку $f''(x)$.

$$f''(x)=\begin{cases}-\dfrac{3(x-5)}{4x^{7/2}}, & \text{якщо } 0<x<1;\\ \dfrac{3(x-5)}{4x^{7/2}}, & \text{якщо } x>1.\end{cases}$$

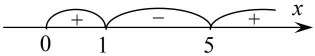
Похідна $f''(x)$ не існує у точці $x = 1$, оскільки у цій точці не існує $f'(x)$.

4. Знаходимо критичні точки 2-го роду функції $f(x)$ з рівняння $f''(x) = 0$ тобто $x - 5 = 0$, звідки $x = 5$.

Критична точка, в якій похідна $f''(x)$ не існує – це $x = 1$.

5. Наносимо на числову вісь критичні точки та розбиваємо область визначення функції на інтервали: $(0, 1)$, $(1, 5)$, $(5, +\infty)$.

6. Визначаємо знак похідної $f''(x)$ в кожному інтервалі.



7. Знаходимо точки перегину за першою достатньою умовою існування точки перегину графіка функції.

Точки з абсцисами $x = 1$ та $x = 5$ є точками перегину.

8. Знаходимо значення функції у точках перегину

$$f_{\text{пер.}}(1)=0\;;\qquad f_{\text{пер.}}(5)=\frac{|5-1|}{5\sqrt{5}}=\frac{4}{5\sqrt{5}}.$$

В і д п о в і д ь: $(1,0)$; $\left(5,\dfrac{4}{5\sqrt{5}}\right)$ – точки перегину.

Приклад 2.166. Знайти точки перегину графіка функції

$$f(x) = x^4 - 6x^2 - 6x + 1.$$

Р о з в ’ я з а н н я

1. Область визначення функції: $x \in (-\infty, +\infty)$.
2. Знаходимо похідну першого порядку $f'(x)$.

$$f'(x) = 4x^3 - 12x - 6.$$

3. Знаходимо похідну другого порядку $f''(x)$.

$$f''(x) = 12x^2 - 12;\qquad f''(x) = 12(x^2 - 1).$$

5. Знаходимо критичні точки 2-го роду функції $f(x)$ з рівняння $f'(x) = 0$, тобто

$$12(x^2 - 1) = 0;\;\; x_1 = -1;\;\; x_2 = 1.$$

Критичні точки, в яких похідна $f''(x)$ не існує або дорівнює нескінченності, відсутні.

Доцільно звернутись до другої достатньої умови існування точки перегину графіка функції.

5. Знаходимо похідну третього порядку $f'''(x)$.

$$f'''(x) = 24x.$$

6. Визначаємо значення похідної третього порядку у критичних точках.

$$f'''(-1) = -24 < 0; \qquad f'''(1) = 24 > 0.$$

7. Знаходимо точки перегину серед критичних точок, у яких $f''(x) = 0$.

За другою достатньою умовою існування точки перегину виходить, що точки $x = -1$ та $x = 1$ є точками перегину.

8. Знаходимо значення функції у точках перегину.

$$y_{\text{пер}} = f(-1) = 2; \quad y_{\text{пер}} = f(1) = -10.$$

В і д п о в і д ь: (–1 , 2); (1,–10) – точки перегину.

Приклад 2.167. Знайти точки перегину графіка функції

$$f(x) = \left(x^2 - 1\right)^3.$$

Р о з в ' я з а н н я

1. Область визначення функції: $x \in (-\infty, +\infty)$.
2. Знаходимо похідну першого порядку $f'(x)$.

$$f'(x) = 6x\left(x^2 - 1\right)^2.$$

3. Знаходимо похідну другого порядку $f''(x)$.

$$f''(x) = 6\left(x^2 - 1\right)^2 + 24x^2\left(x^2 - 1\right) = 6\left(x^2 - 1\right)\left(5x^2 - 1\right).$$

4. Знаходимо критичні точки 2-го роду функції $f(x)$ з рівняння $f''(x) = 0$, тобто $6\left(x^2 - 1\right)\left(5x^2 - 1\right) = 0$, звідки $x^2 - 1 = 0$; $x = -1$, $x = 1$; $5x^2 - 1 = 0$; $x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Критичні точки, в яких похідна $f''(x)$ не існує або дорівнює нескінченності, відсутні.

Знайдені критичні точки перевіримо за допомогою другої достатньої умови існування точки перегину.

5. Знаходимо похідну третього порядку $f'''(x)$.

$$f'''(x) = \left(6\left(x^2 - 1\right)\left(5x^2 - 1\right)\right)' = 6\left(5x^4 - 6x^2 + 1\right)' = 6\left(20x^3 - 12x\right) = 24x\left(5x^2 - 3\right).$$

6. Визначаємо значення похідної $f'''(x)$ у критичних точках.

$$f'''(-1) = -24 \cdot 2 = -48 \neq 0; \quad f'''(1) = 24 \cdot 2 = 48 \neq 0;$$

$$f'''\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{24}{\sqrt{5}}(-2) = \frac{48}{\sqrt{5}} \neq 0; \quad f'''\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{24}{\sqrt{5}}(-2) = -\frac{48}{\sqrt{5}} \neq 0.$$

7. Знаходимо точки перегину за третьою достатньою умовою існування точки перегину.

Точки $x = -1$, $x = 1$, $x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ є точками перегину.

8. Знаходимо значення функції у точках перегину.

$$y_{\text{пер}} = f(-1) = 0; \quad y_{\text{пер}} = f(1) = 0; \quad y_{\text{пер}} = f\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{64}{125}; \quad y_{\text{пер}} = f\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{-64}{125}.$$

В і д п о в і д ь: $(-1,0)$; $(1,0)$; $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}; -\frac{64}{125}\right)$; $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{-64}{125}\right)$ – точки перегину.

Приклад 2.168. Знайти точки перегину графіка функції

$$f(x) = \frac{(2x-3)^5}{2304}.$$

Р о з в ' я з а н н я

1. Область визначення функції: $x \in (-\infty, +\infty)$.

2. Знаходимо похідну першого порядку $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{10}{2304}(2x-3)^4 = \frac{5}{1152}(2x-3)^4.$$

3. Знаходимо похідну другого порядку $f''(x)$.

$$f''(x) = \frac{40}{1152}(2x-3)^3 = \frac{5}{144}(2x-3)^3.$$

4. Знаходимо критичні точки 2-го роду функції $f(x)$ з рівняння $f''(x) = 0$, тобто $2x - 3 = 0$, звідки $x = \frac{3}{2}$.

Критичні точки 2-го роду, в яких похідна $f''(x)$ не існує або дорівнює нескінченності, відсутні.

5. Знаходимо похідну третього порядку $f'''(x)$.

$$f'''(x) = \frac{30}{144}(2x-3)^2 = \frac{5}{24}(2x-3)^2.$$

6. Визначаємо значення похідної $f'''(x)$ у критичній точці $x = \frac{3}{2}$.

$$f'''\left(\frac{3}{2}\right) = 0.$$

7. Знаходимо похідну четвертого порядку $f^{\text{IV}}(x)$.

$$f^{\text{IV}}(x) = \frac{20}{24}(2x-3) = \frac{5}{6}(2x-3).$$

8. Визначаємо значення похідної $f^{\text{IV}}(x)$ у критичній точці $x = \frac{3}{2}$.

$$f^{\text{IV}}\left(\frac{3}{2}\right) = 0.$$

9. Знаходимо похідну п'ятого порядку $f^{\text{V}}(x)$.

$$f^{\text{V}}(x) = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}.$$

Визначаємо значення похідної $f^{V}(x)$ у критичній точці $x=\dfrac{3}{2}$.

$$f^{V}\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{5}{3}\neq 0.$$

Порядок похідної, яка відрізняється від нуля є число непарне, отже, згідно з третьою достатньою умовою існування точки перегину, точка $x=\dfrac{3}{2}$ є точкою перегину графіка функції.

Знаходимо значення функції у точці перегину

$$y_{\text{пер}}=f\left(\frac{3}{2}\right)=0.$$

В і д п о в і д ь: $\left(\dfrac{3}{2},0\right)$ – точка перегину.

2.7 Асимптоти графіка функції

2.7.1 Основні поняття

В и з н а ч е н н я. ***Асимптотою*** графіка функції називається така пряма, до якої нескінченно наближається графік функції при необмеженому віддаленні від початку координат.

Асимптоти бувають ***вертикальні, горизонтальні*** та ***похилі***. Так, приміром, графік функції y=tg$x$ має вертикальні асимптоти, рівняння яких є $x=\pm\dfrac{2k+1}{2}\pi$, де $k\in Z$ (рис.2.23)

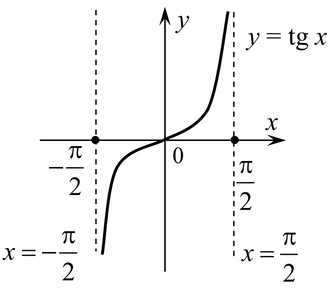


Рисунок 2.23

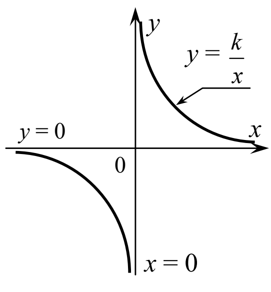


Рисунок 2.24

Графік функції $y=\dfrac{k}{x}$ має як вертикальні, так і горизонтальні асимптоти, рівняння яких відповідно є $x=0$ та $y=0$ (рис. 2.24)

2.7.2 Вертикальні асимптоти

В и з н а ч е н н я. Пряма, що описується рівнянням $x = x_0$, називається ***вертикальною асимптотою*** графіка функції $y = f(x)$, якщо одне з граничних значень $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ або $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ дорівнює $+\infty$ або $-\infty$.

Правило знаходження вертикальних асимптот

Якщо існує таке x_0, що є справедлива одна з рівностей

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \infty, \tag{2.96}$$

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = \infty, \tag{2.97}$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty, \tag{2.98}$$

то пряма з рівнянням $x = x_0$ є вертикальною асимптотою графіка функції $y = f(x)$.

2.7.3 Похилі асимптоти

В и з н а ч е н н я. Пряма $y = kx + b$ називається ***похилою асимптотою*** графіка функції $y = f(x)$, якщо, коли $x \to \infty$, функцію можна подати у вигляді $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, де $\lim\limits_{x\to\infty} \alpha(x) = 0$. При цьому, якщо $\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha(x) = 0$, то асимптота називається лівобічною, а якщо $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0$, то – правобічною.

Теорема 1 (необхідна та достатня умова існування похилої асимптоти графіка функції). Для того, щоб графік функції $y = f(x)$, коли $x \to \infty$, мав похилу асимптоту $y = kx + b$, необхідно та достатньо, щоб існували граничні значення

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \tag{2.99}$$

$$\lim_{x\to\infty} \big(f(x) - kx\big) = b. \tag{2.100}$$

Д о в е д е н н я

Необхідність. Нехай $y = kx + b$, коли $x \to \infty$, є похилою асимптотою графіка функції $y = f(x)$. Тоді

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{kx + b + \alpha(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}\right) = k.$$

$$\lim_{x\to\infty}\big(f(x) - kx\big) = \lim_{x\to\infty}\big(kx + b + \alpha(x) - kx\big) = \lim_{x\to\infty}\big(b + \alpha(x)\big) = b.$$

Вочевидь, що граничні значення (2.99) та (2.100) існують.

Достатність. Нехай існують граничні значення (2.99) та (2.100).
Тоді з рівності (2.100) маємо:

$$\lim_{x\to\infty}\big(f(x) - kx\big) - b = 0, \qquad \lim_{x\to\infty}\big(f(x) - kx - b\big) = 0,$$

звідки $f(x) - kx - b = \alpha(x)$, де $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x) = 0$.

$$f(x) = kx + b + \alpha(x).$$

Отже, доведено, що пряма $y = kx + b$ є похилою асимптотою.

Теорема 2. Для того, щоб графік функції $y = f(x)$, коли $x \to -\infty$, мав лівобічну похилу асимптоту $y = kx + b,$ необхідно та достатньо, щоб існували граничні значення

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = k, \tag{2.101}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x) - kx\right) = b. \tag{2.102}$$

Теорема 3. Для того, щоб графік функції $y = f(x),$ коли $x \to +\infty$, мав правобічну похилу асимптоту $y = kx + b,$ необхідно та достатньо, щоб існували граничні значення

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = k, \tag{2.103}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - kx\right) = b. \tag{2.104}$$

Доведення теорем 2 та 3 аналогічне доведенню теореми 1.

2.7.4 Горизонтальні асимптоти

В и з н а ч е н н я. Пряма $y = b$ називається ***горизонтальною асимптотою графіка*** функції $y = f(x)$, якщо, коли $x \to \infty$, функцію можна подати у вигляді $f(x) = b + \alpha(x)$, де $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x) = 0$. Якщо $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha(x) = 0$, то асимптота називається лівобічною, а якщо $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha(x) = 0$, то – правобічною.

Теорема 4 (необхідна та достатня умова існування горизонтальної асимптоти графіка функції). Для того, щоб графік функції $y = f(x)$, коли $x \to \infty$ мав горизонтальну асимптоту $y = b$, необхідно та достатньо, щоб існувало граничне значення

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b. \tag{2.105}$$

Д о в е д е н н я

Необхідність. Нехай пряма $y = b$, коли $x \to \infty$, є горизонтальною асимптотою графіка функції $y = f(x)$. Тоді

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(b + \alpha(x)\right) = b, \text{ тобто } \lim_{x\to\infty} f(x) = b.$$

Достатність. Нехай справедлива рівність $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$. Тоді

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x) - b\right) = 0$, звідки $f(x) - b = \alpha(x)$, де $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$, тобто $f(x) = b + \alpha(x)$.

Отже, пряма $y = b$ є горизонтальною асимптотою.

Теорема 5. Для того, щоб графік функції $y = f(x)$, коли $x \to -\infty$, мав лівобічну горизонтальну асимптоту $y = b$, необхідно та достатньо, щоб існувало граничне значення

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b. \tag{2.106}$$

Теорема 6. Для того, щоб графік функції $y = f(x)$, коли $x \to +\infty$, мав правобічну горизонтальну асимптоту $y = b$, необхідно та достатньо, щоб існувало граничне значення

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b. \tag{2.107}$$

Доведення теорем 5 та 6 аналогічне доведенню теореми 4.

ЗАУВАЖЕННЯ. Горизонтальна асимптота є частинним випадком похилої асимптоти, якщо $k = 0$.

Приклади до пункту 2.7

Приклад 2.169. З'ясувати, чи існують вертикальні асимптоти графіка функції

$$f(x) = \frac{3x - 9}{5x^3 + 4x^2 - 9x}.$$

Р о з в ' я з а н н я

Розглянемо рівність

$$\lim_{x \to x_0} \frac{3x - 9}{5x^3 + 4x^2 - 9x} = \infty.$$

Зрозуміло, що ця рівність справедлива лише у тому разі, коли знаменник дорівнює нулю у точці x_0.

Знайдемо корені знаменника.

$$5x^3 + 4x^2 - 9x = 0; \quad x(5x^2 + 4x - 9) = 0; \quad x_1 = 0; \; x_2 = 1; \; x_3 = -\frac{9}{5}.$$

Отже,

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x - 9}{5x^3 + 4x^2 - 9x} = \infty; \quad \lim_{x \to 1} \frac{3x - 9}{5x^3 + 4x^2 - 9x} = \infty; \quad \lim_{x \to -\frac{9}{5}} \frac{3x - 9}{5x^3 + 4x^2 - 9x} = \infty.$$

В і д п о в і д ь: графік функції має три вертикальні асимптоти, рівняння яких $x = 0$; $x = 1$; $x = -\frac{9}{5}$.

Приклад 2.170. Знайти асимптоти графіка функції

$$y = \frac{12x^2 + x - 5}{4x + 11}.$$

Р о з в ' я з а н н я

Знаходимо вертикальні асимптоти.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{12x^2+x-5}{4x+11}=\infty, \quad \text{якщо} \quad x_0=-\frac{11}{4}.$$

Отже, вертикальна асимптота існує, а її рівняння має вигляд $x=-\dfrac{11}{4}$.

Знаходимо похилі асимптоти.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{12x^2+x-5}{(4x+11)x}=3;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{12x^2+x-5}{4x+11}-3x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{12x^2+x-5-12x^2-33x}{4x+11}=\lim_{x\to\infty}\frac{-32x-5}{4x+11}=-8.$$

Тоді графік функції має похилу асимптоту з рівнянням $y = 3x - 8$. Зазначена пряма водночас є і правобічною, і лівобічної асимптотою.

Оскільки $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^2+x-5}{4x+11}=\infty$, то це означає, що горизонтальних асимптот графік функції не має.

В і д п о в і д ь: $x=-\dfrac{11}{4}$ – вертикальна асимптота; $y = 3x - 8$ – похила асимптота.

Приклад 2.171. Знайти асимптоти графіка функції

$$f(x)=\frac{\sqrt{9x^4-4}}{|x|}.$$

Р о з в ' я з а н н я

Знайдемо вертикальні асимптоти. Для цього обчислимо

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{9x^4-4}}{|x|}=\infty, \quad \text{якщо} \ x_0=0.$$

Отже, пряма $x = 0$ є вертикальною асимптотою графіка функції.

Знайдемо похилі асимптоти, для цього обчислимо

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{9x^4-4}}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{9-\frac{4}{x^4}}=3;$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{9x^4-4}}{|x|}-3x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{9x^4-4}-3x^2}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{9x^4-4}-3x^2}{x}\,\frac{\sqrt{9x^4-4}+3x^2}{\sqrt{9x^4-4}+3x^2}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x^4-4-9x^4}{x\left(\sqrt{9x^4-4}+3x^2\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{x\left(\sqrt{9x^4-4}+3x^2\right)}=0.$$

Знайдено правобічну похилу асимптоту: $y = 3x$. Шукаємо лівобічну похилу асимптоту.

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{9x^4-4}}{-x^2}=-\lim_{x\to-\infty}\sqrt{9-\frac{4}{x^4}}=-3;$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{9x^4-4}}{-x}+3x\right)=-\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{9x^4-4}-3x^2}{x}\,\frac{\sqrt{9x^4-4}+3x^2}{\sqrt{9x^4-4}+3x^2}=-\lim_{x\to-\infty}\frac{9x^4-4-9x^4}{x\left(\sqrt{9x^4-4}+3x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x\left(\sqrt{9x^4-4}+3x^2\right)}=0.$$

Отже, існує і лівобічна похила асимптота $y=-3x$.

Горизонтальних асимптот графік функції не має, оскільки $k\neq 0$.

В і д п о в і д ь: $x=0$ – вертикальна асимптота; $y=3x$ та $y=-3x$ – похилі асимптоти.

Приклад 2.172. Знайти асимптоти графіка функції

$$f(x)=\frac{48\left(x^2-16\right)}{3x^2+25}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Шукаємо вертикальні асимптоти. Рівність

$$\lim_{x\to x_0}\frac{48\left(x^2-16\right)}{3x^2+25}=\infty$$

є неможлива за жодного x_0, оскільки знаменник $3x^2+25\neq 0$. Отже, вертикальних асимптот графік функції не має.

Шукаємо похилі асимптоти. Оскільки функція є парною, то її правобічна та лівобічна похилі асимптоти, якщо вони існують, мають бути симетричні відносно осі Oy.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{48\left(x^2-16\right)}{\left(3x^2+25\right)x}=0; \qquad b=\lim_{x\to\infty}\frac{48\left(x^2-16\right)}{3x^2+25}=16.$$

Виходить, що пряма $y=16$ є асимптотою графіка функції. Це горизонтальна асимптота і вона є частинним випадком похилої асимптоти, оскільки $k=0$.

В і д п о в і д ь: $y=16$ – горизонтальна асимптота.

2.8 Дослідження функцій та побудова їхніх графіків

Загальна схема дослідження функції

I. Основні відомості про функцію

1. Область визначення функції.
2. Інтервали неперервності функції, точки розриву та їх тип.
3. Парність та непарність функції.
4. Періодичність функції.
5. Точки перетину графіка функції з осями координат.

II. Інтервали монотонності, точки екстремуму функції

1. Знаходимо похідну першого порядку $f'(x)$.
2. Знаходимо критичні точки 1-го роду функції $f(x)$.
3. Наносимо на числову вісь критичні точки та розбиваємо область визначення функції на інтервали.
4. Визначаємо знак похідної першого порядку в кожному інтервалі.
5. Визначаємо характер монотонності функції в кожному інтервалі.
6. Знаходимо точки екстремуму за достатньою умовою існування екстремуму.
7. Знаходимо значення функції у точках екстремуму.

III. Інтервали опуклості та угнутості, точки перегину графіка функції

1. Знаходимо похідну другого порядку $f''(x)$.
2. Знаходимо критичні точки 2-го роду функції.
3. Наносимо на числову вісь критичні точки та розбиваємо область визначення функції на інтервали.
4. Визначаємо знак похідної другого порядку в кожному інтервалі.
5. Визначаємо інтервали опуклості та угнутості функції.
6. Знаходимо точки перегину за допомогою достатньої умови існування точок перегину графіка функції.
7. Знаходимо значення функції у точках перегину графіка функції.

IV. Асимптоти графіка функції

1. Вертикальні асимптоти.
2. Похилі асимптоти.
3. Горизонтальні асимптоти.

V. Побудова графіка функції.

Приклади до пункту 2.8

Приклад 2.173. Дослідити функцію та побудувати її графік

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

I. Основні відомості про функцію

1. Область визначення функції: $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

2. Інтервали неперервності функції: $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$. Точка $x = -1$ є точкою нескінченного розриву.

3. Функція не є парною і не є непарною, оскільки її область визначення не симетрична відносно початку координат.

4. Функція не є періодичною, оскільки не існує такого числа $T \neq 0$, щоб була справедливою рівність

$$\forall\, x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)\colon f(x+T) = f(x).$$

5. Знаходимо точки перетину графіка функції з осями координат.

а) Точки перетину з віссю Ox. Нехай $y = 0$, звідки $\dfrac{x^2}{1-x} = 0$, $x = 0$. Отже, точка $O(0, 0)$ належить до графіка функції.

б) Точки перетину з віссю Oy. Нехай $x = 0$, звідки $y = 0$. Дістали ту ж саму точку.

II. Інтервали монотонності, точки екстремуму функції

1. Знаходимо похідну першого порядку $f'(x)$.

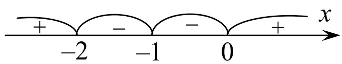
$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{1+x}\right)' = \frac{2x(1+x) - x^2}{(1+x)^2}; \quad f'(x) = \frac{x(x+2)}{(1+x)^2}.$$

2. Знаходимо критичні точки 1-го роду функції $f(x)$ з рівняння $f'(x) = 0$, тобто $\dfrac{x(x+2)}{(1+x)^2} = 0$, звідки $x_1 = 0$; $x_2 = -2$.

Критичні точки I-го роду функції, в яких похідна $f'(x) = \infty$, знаходимо з рівняння $x + 1 = 0$, $x_3 = -1$.

3. Наносимо на числову вісь критичні точки та розбиваємо область визначення функції на інтервали: $(-\infty, -2)$, $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, +\infty)$.

4. Визначаємо знак похідної першого порядку в кожному інтервалі.



5. Визначаємо характер монотонності функції в кожному інтервалі.

В інтервалі $(-\infty, -2)$ $f'(x) > 0$, функція $f(x)$ зростає.

В інтервалі $(-2, -1)$ $f'(x) < 0$, функція $f(x)$ спадає.

В інтервалі $(-1, 0)$ $f'(x) < 0$, функція $f(x)$ спадає.

В інтервалі $(0, +\infty)$ $f'(x) > 0$, функція $f(x)$ зростає.

6. Знаходимо точки екстремуму функції. До точок можливого екстремуму належать критичні точки $x = -2$; $x = -1$; $x = 0$.

Оскільки точка $x = -1$ не належить до області визначення функції, то вона не може бути точкою екстремуму.

Точки $x = -2$, $x = 0$ перевіряємо за першою достатньою умовою існування точки екстремуму. При переході через точку $x = -2$ похідна $f'(x)$ змінила знак з "+" на "–". Отже, $x = -2$ – точка максимуму. При переході через точку $x = 0$ похідна $f'(x)$ змінила знак з "–" на "+", отже, точка $x = 0$ – точка мінімуму.

7. Знаходимо значення функції у точках екстремуму.

$$y_{\max} = f(-2) = -4, \qquad y_{\min} = f(0) = 0.$$

Отже, маємо точку $A(-2,\ -4)$ та точку $O(0,\ 0)$, які є відповідно точками максимуму та мінімуму.

III. Інтервали опуклості та угнутості графіка функції, точки перегину графіка функції

1. Знаходимо похідну другого порядку $f''(x)$.

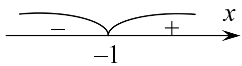
$$f''(x)=\left(\frac{x(x+2)}{(1+x)^2}\right)'=\frac{(2x+2)(1+x)^2-2\left(x^2+2x\right)(1+x)}{(1+x)^4}=\frac{2(1+x)^3-2(1+x)\left(x^2+2x\right)}{(1+x)^4}=$$

$$=\frac{2\left(x^2+2x+1-x^2-2x\right)}{(1+x)^3},\ \text{тобто}\ \ f''(x)=\frac{2}{(1+x)^3}.$$

2. Критичні точки 2-го роду функції $f(x)$, в яких похідна $f''(x)=\infty$ знаходимо з рівняння $1+x=0$, тоді $x=-1$.

3. Наносимо на числову вісь критичну точку та розбиваємо область визначення функції на інтервали: $(-\infty,\ -1)$, $(-1,\ +\infty)$.

4. Визначаємо знаки похідної другого порядку в кожному інтервалі:



5. Визначаємо інтервали опуклості та угнутості функції.

В інтервалі $(-\infty,\ -1)$ $f''(x)<0$, графік функції $f(x)$ опуклий.

В інтервалі $(-1,\ +\infty)$ $f''(x)>0$, графік функції $f(x)$ угнутий.

6. Знаходимо точки перегину. Точок перегину графік функції не має, оскільки єдина критична точка $x=-1$ не належить до області визначення функції.

IV. Асимптоти графіка функції

1. Знаходимо вертикальні асимптоти.

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2}{1+x}=\infty.$$

Отже, пряма, рівняння якої $x=-1$, є вертикальною асимптотою графіка функції.

2.Знаходимо похилі асимптоти.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{(1+x)x}=1;\qquad b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{1+x}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-x-x^2}{1+x}=-\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{1+x}=-1.$$

Пряма $y=x-1$ є водночас і лівобічною і правобічної похилою асимптотою, оскільки значення k та b не залежать від того, прямує x до $-\infty$ чи до $+\infty$.

3. Оскільки $k\neq 0$, то графік функції горизонтальних асимптот не має.

V. Побудова графіка функції

По результатам дослідження дістанемо графік функції, зображений на рис. 2.25.

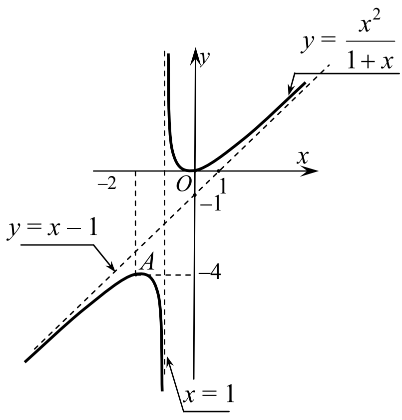


Рисунок 2.25

Приклад 2.174. Дослідити функцію $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ та побудувати її графік.

Р о з в ' я з а н н я

I. Основні відомості про функцію

1. Область визначення функції: $x \in (-\infty, \infty)$.

2. Функція неперервна в інтервалі $(-\infty, +\infty)$.

3. Парність та непарність функції.

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{(-x)^2 + 1} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = f(x).$$

Область визначення функції симетрична відносно початку координат. Отже, $f(x)$ – парна функція.

4. Функція неперіодична.

5. Точки перетину графіка функції з осями координат.

а) Точки перетину з віссю Oy. Нехай $x = 0$, звідки $y = -1$, отже, маємо точку $A(0, -1)$

б) Точки перетину з віссю Ox. Нехай $y = 0$, звідки $x^2 - 1 = 0$, тобто $x = -1$ та $x = 1$, отже, маємо точки $B(-1, 0)$ та $E(1, 0)$.

II. Інтервали монотонності та точки екстремуму функції

1. Знаходимо похідну першого порядку $f'(x)$.

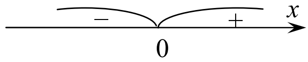
$$f'(x) = \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)' = \frac{2x\left(x^2 + 1\right) - 2x\left(x^2 - 1\right)}{\left(x^2 + 1\right)^2}, \quad f'(x) = \frac{4x}{\left(x^2 + 1\right)^2}.$$

2. Критичні точки 1-го роду функції $f(x)$ знаходимо з рівняння $f'(x) = 0$, тобто $\frac{4x}{\left(x^2 + 1\right)^2} = 0$, тоді $x = 0$.

Критичні точки, в яких похідна $f'(x)$ не існує або дорівнює нескінченності, відсутні.

3. Наносимо на числову вісь критичну точку та розбиваємо область визначення функції на інтервали: $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$.

4. Визначаємо знак похідної першого порядку в кожному інтервалі.



5. Визначаємо характер монотонності функції в кожному інтервалі.

В інтервалі $(-\infty, 0)$ $f'(x) < 0$, функція $f(x)$ спадає.

В інтервалі $(0, +\infty)$ $f'(x) > 0$, функція $f(x)$ зростає.

6. Знаходимо точки екстремуму функції за першою достатньою умовою існування екстремуму функції. Критична точка $x = 0$ є точкою мінімуму.

7. Знаходимо значення функції у точці мінімуму:

$$y_{\min} = f(0) = -1 .$$

Дістали точку $A(0, -1)$ – точку мінімуму.

III. Інтервали опуклості та угнутості, точки перегину графіка функції

1. Знаходимо похідну другого порядку $f''(x)$.

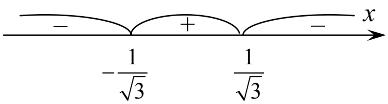
$$f''(x) = \left(\frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2} \right)' = \frac{4\left(x^2+1\right)^2 - 4x \cdot 2\left(x^2+1\right) \cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^4}, \quad f''(x) = \frac{4\left(1-3x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^3} .$$

2.Знаходимо критичні точки 2-го роду функції $f(x)$ з рівняння $f''(x) = 0$, тобто $\dfrac{4\left(1-3x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^3} = 0$, тоді $1 - 3x^2 = 0$, звідки $x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Критичні точки, в яких похідна $f''(x)$ не існує або дорівнює нескінченності, відсутні.

3. Наносимо на числову вісь критичні точки та розбиваємо область визначення функції на інтервали: $\left(-\infty, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$.

4. Визначаємо знак похідної другого порядку в кожному інтервалі.



5. Визначаємо інтервали опуклості та угнутості функції.

В інтервалі $\left(-\infty, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ $f''(x) < 0$, графік функції $f(x)$ опуклий.

В інтервалі $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ $f''(x) > 0$, графік функції $f(x)$ угнутий.

В інтервалі $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$ $f''(x) < 0$, графік функції $f(x)$ опуклий.

6. Знаходимо точки перегину графіка функції за першою достатньою умовою існування точки перегину графіка функції. Точки $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ та $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ є точками перегину графіка функції.

7. Знаходимо значення функції у точках перегину графіка функції.

$$y_{\text{пер}} = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{2}; \qquad y_{\text{пер}} = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Маємо точки перегину: $D\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{2}\right)$, $F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{2}\right)$.

IV. Асимптоти графіка функції

1. Знаходимо вертикальні асимптоти. Оскільки рівність $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{x^2-1}{x^2+1} = \infty$ неможлива при жодному x_0, то вертикальних асимптот графік функції не має.

2. Знаходимо похилі асимптоти. Рівняння похилої асимптоти має вигляд

$$y = kx + b, \quad \text{де } k = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2-1}{\left(x^2+1\right)x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2-1}{x^3+x} = 0, \qquad b = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1} - 0 \cdot x\right) = 1.$$

Графік функції має асимптоту, що описується рівнянням $y = 1$, яка є горизонтальною асимптотою, оскільки $k = 0$.

V. Побудова графіка функції

За результатами дослідження побудуємо графік функції, зображений на рисунку 2.26.

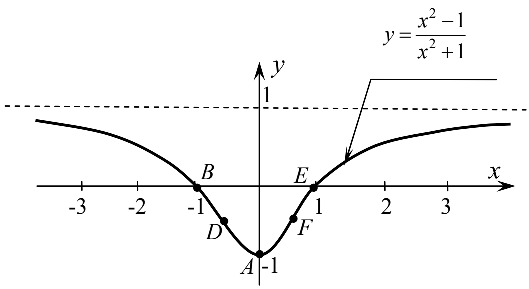


Рисунок 2.26

ЗАУВАЖЕННЯ. Процес дослідження функції можна було дещо скоротити, якщо взяти до уваги, що функція парна.

Приклад 2.175. Дослідити функцію

$$f(x) = \frac{\sqrt{(1+x)^3}}{\sqrt{x}}$$

та побудувати її графік.

Р о з в ' я з а н н я

I. Основні відомості про функцію

1. Область визначення функції:

$$\begin{cases} x > 0; \\ 1 + x \ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0; \\ x \ge -1, \end{cases} \quad \text{тобто } x \in (0, +\infty).$$

2. Функція неперервна в інтервалі $(0, +\infty)$.

3. Парність та непарність функції. Область визначення функції – це проміжок, несиметричний відносно початку координат. Функція з такою областю визначення не може бути парною або непарною. Задана функція є функцією загального виду.

4. Функція неперіодична.

5. Точки перетину графіка функції з осями координат.

а) Точки перетину з віссю Oy. Оскільки $x = 0$ не входить до області визначення функції, то графік функції вісь Oy не перетинає.

б) Точки перетину з віссю Ox. Якщо $y = 0$, то $\sqrt{(1+x)^3} = 0$; $1 + x = 0$, $x = -1$, але $x = -1$ не належить до області визначення функції.

II. Інтервали монотонності та точки екстремуму функції

1. Знаходимо похідну першого порядку $f'(x)$.

$$f'(x) = \left(\frac{(1+x)^{3/2}}{x^{1/2}}\right)' = \left((1+x)^{3/2}x^{-1/2}\right)' = \frac{3}{2}(1+x)^{1/2}x^{-1/2} - \frac{1}{2}(1+x)^{3/2}x^{-3/2} =$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1+x}{x}} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1+x}{x}\right)^3} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\left(3 - \frac{1+x}{x}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\left(\frac{3x-1-x}{x}\right),$$

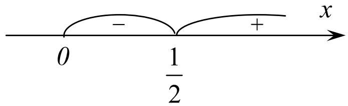
$$f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{x^3}}(2x-1).$$

2. Знаходимо критичні точки 1-го роду функції $f(x)$ з рівняння $f'(x) = 0$, тобто $\sqrt{\frac{1+x}{x^3}}(2x-1) = 0$, звідки $1 + x = 0$, $2x - 1 = 0$, $x = -1$ та $2x - 1 = 0$, $x = \frac{1}{2}$.

Критичні точки, в яких похідна $f'(x) = \infty$, знаходимо з рівняння $x = 0$.

3. Наносимо на числову вісь критичні точки $x = 0$ та $x = \frac{1}{2}$. Критичну точку $x = -1$ на числову вісь не наносимо, оскільки вона не входить до області визначення функції. Розбиваємо область визначення функції на інтервали: $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

4. Визначаємо знак похідної першого порядку в кожному інтервалі:



5. Визначаємо характер монотонності функції в кожному інтервалі.

В інтервалі $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ $f'(x) < 0$, функція $f(x)$ спадає;

В інтервалі $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ $f'(x) > 0$, функція $f(x)$ зростає.

6. Знаходимо точки екстремуму функції.

Точка $x = 0$ до області визначення функції не входить, а отже, не може бути точкою екстремуму.

За першою достатньою умовою екстремуму у точці $x = \frac{1}{2}$ функція має мінімум.

7. Знаходимо значення функції у точці екстремуму.

$$y_{\min} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Маємо точку $B\left(\frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ – точку мінімуму.

ІІІ. Інтервали опуклості та угнутості, точки перегину графіка функції

1. Знаходимо похідну другого порядку $f''(x)$.

$$f''(x) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{x^3}}\left(2x-1\right)\right)' = \sqrt{\frac{1+x}{x^3}} + \frac{2x-1}{2}\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^3}{1+x}}\,\frac{x^3-3x^2\left(1+x\right)}{x^6} =$$

$$= \sqrt{\frac{1+x}{x^3}} + \frac{2x-1}{4}\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,\frac{x-3-3x}{x^3} = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}} - \frac{2x-1}{4}\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,\frac{3+2x}{x^3} =$$

$$= \frac{4\left(1+x\right)x-\left(2x-1\right)\left(3+2x\right)}{4x^2\sqrt{x}\sqrt{1+x}} = \frac{4x+4x^2-6x+3-4x^2+2x}{4x^2\sqrt{x}\sqrt{1+x}},$$

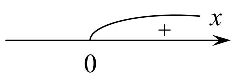
$$f''(x) = \frac{3}{4x^2\sqrt{x}\sqrt{1+x}}.$$

2. Знаходимо критичну точку $x = 0$ функції $f(x)$ з припущення, що $f''(x) = \infty$, тоді $x = 0$, $x = -1$.

3. Наносимо на числову вісь критичну точку $x = 0$ та розбиваємо область визначення функції на інтервали.

Критична точка 2-го роду $x = -1$ не належить до області визначення функції, тому її на числову вісь не наносимо. Розглядаємо інтервал $(0, +\infty)$.

4. Визначаємо знак похідної другого порядку в інтервалі $(0, +\infty)$.



5. Визначаємо характер опуклості чи угнутості графіка функції в інтервалі $(0, +\infty)$.

В інтервалі $(0, +\infty)$ $f''(x) > 0$, графік функції $f(x)$ угнутий.

6. Знаходимо точки перегину за першою достатньою умовою існування точок перегину графіка функції. Оскільки точки перегину знаходяться з числа критичних точок 2-го роду функції $f(x)$, а у нас є єдина критична точка $x = 0$ і ця точка не входить до області визначення функції, то це означає, що точок перегину графік функції не має.

IV. Асимптоти графіка функції

1. Знаходимо вертикальні асимптоти.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{3/2}}{x^{1/2}} = \infty .$$

Отже, пряма з рівнянням $x = 0$, тобто вісь Oy, є вертикальною асимптотою графіка функції.

2. Знаходимо похилі асимптоти. Рівняння похилої асимптоти має вигляд

$$y = kx + b,$$

де

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{(1+x)^3}}{x\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\left(\frac{1+x}{x}\right)^3} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{(1+x)^3}}{\sqrt{x}} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{\left(\frac{1+x}{x}\right)^3} - 1\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3/2} - 1}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{3}{2}\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/2} = \frac{3}{2}.$$

Отже, маємо правобічну похилу асимптоту

$$y = x + \frac{3}{2}.$$

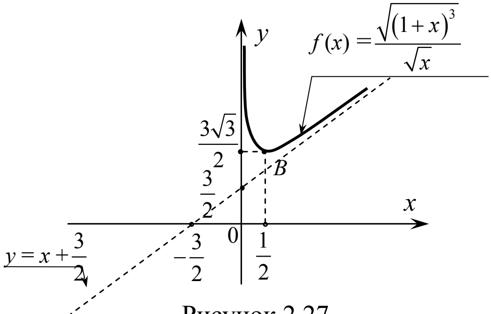


Рисунок 2.27

V. Побудова графіка функції

За результатами дослідження побудуємо графік функції, зображений на рисунку 2.27.

Приклад 2.176. Дослідити функцію

$$f(x)=\frac{x^3}{4(2-x)^2}$$

та побудувати її графік.

Р о з в ’ я з а н н я

I. Основні відомості про функцію

1. Область визначення функції: $x\in(-\infty, 2)\cup(2, +\infty)$.

2. Функція неперервна в інтервалах $(-\infty, 2)$, $(2, +\infty)$. Точка $x = 2$ є точкою нескінченного розриву.

3. Область визначення функції несиметрична відносно початку координат. Отже, ця функція не може бути парною чи непарною. Задана функція є функцією загального виду.

4. Функція неперіодична.

5. Точки перетину графіка функції з осями координат.

а) Точки перетину з віссю Oy. Якщо $x = 0$, то $y = 0$. Маємо точку $O(0, 0)$.

б) Точки перетину з віссю Ox. Якщо $y = 0$, то $x = 0$. Маємо ту ж саму точку $O(0, 0)$.

II. Інтервали монотонності та точки екстремуму функції

1. Знаходимо похідну першого порядку $f'(x)$.

$$f'(x)=\left(\frac{x^3}{4(2-x)^2}\right)'=\frac{1}{4}\left(x^3(2-x)^{-2}\right)'=\frac{1}{4}\left(3x^2(2-x)^{-2}-2x^3(2-x)^{-3}(-1)\right)=$$

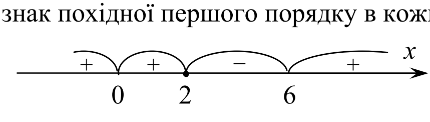
$$=\frac{x^2}{4}\frac{1}{(2-x)^2}\left(3+\frac{2x}{2-x}\right)=\frac{x^2}{4(2-x)^2}\frac{6-3x+2x}{2-x},\qquad f'(x)=\frac{x^2(6-x)}{4(2-x)^3}.$$

2. Знаходимо критичні точки 1-го роду функції $f(x)$ з рівняння $f'(x)=0$, тобто $\frac{x^2(6-x)}{4(2-x)^3}=0$, тоді $x^2(6-x)=0$, звідки $x = 0$; $x = 6$.

Критичні точки, в яких похідна $f'(x)=\infty$, знаходимо з рівняння $2-x=0$, тоді $x=2$.

3. Наносимо на числову вісь критичні точки та розбиваємо область визначення функції на інтервали: $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 6)$, $(6, +\infty)$.

4. Визначаємо знак похідної першого порядку в кожному інтервалі:



5. Визначаємо характер монотонності функції в кожному інтервалі.

В інтервалі $(-\infty, 0)$ $f'(x) > 0$, функція $f(x)$ зростає.

В інтервалі $(0, 2)$ $f'(x) > 0$, функція $f(x)$ зростає.

В інтервалі (2, 6) $f'(x) < 0$, функція $f(x)$ спадає.

В інтервалі $(6, +\infty)$ $f'(x) > 0$, функція $f(x)$ зростає.

6. Знаходимо точки екстремуму функції. Перевіряємо на екстремум критичні точки.

Точка $x = 2$ не входить до області визначення функції і, отже, не може бути точкою екстремуму. Точка $x = 0$ не може бути точкою екстремуму, оскільки похідна $f'(x)$ при переході через цю точку не змінює знак на протилежний. Точка $x = 6$ є точкою екстремуму, а саме, точкою мінімуму.

7. Знаходимо значення функції у точці екстремуму.

$$y_{\min} = f(6) = \frac{27}{8}.$$

Маємо точку $A\left(6, \dfrac{27}{8}\right)$ – точку мінімуму функції.

III. Інтервали опуклості та угнутості, точки перегину графіка функції

1. Знаходимо похідну другого порядку $f''(x)$.

$$f''(x) = \left(\frac{x^2(6-x)}{4(2-x)^3}\right)' = \frac{1}{4}\left(\frac{6x^2 - x^3}{(2-x)^3}\right)' = \frac{1}{4}\cdot\frac{\left(12x - 3x^2\right)(2-x)^3 + 3\left(6x^2 - x^3\right)(2-x)^2}{(2-x)^6} =$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{(2-x)^2}{(2-x)^6}\left(3x(4-x)(2-x) + 3x^2(6-x)\right) = \frac{1}{4}\,\frac{3x}{(2-x)^4}\left(8 - 6x + x^2 + 6x - x^2\right),$$

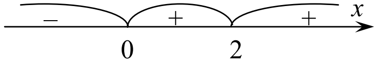
$$f''(x) = \frac{6x}{(2-x)^4}.$$

2. Знаходимо критичні точки 2-го роду функції $f(x)$ з рівняння $f''(x) = 0$, тобто $\dfrac{6x}{(2-x)^4} = 0$, тоді $x = 0$.

Критичні точки, в яких похідна $f''(x) = \infty$ є нескінченною, знаходимо з рівняння $2 - x = 0$, $x = 2$.

3. Наносимо на числову вісь критичні точки та розбиваємо на інтервали область визначення функції: $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$; $(2, +\infty)$.

4. Визначаємо знак похідної другого порядку в кожному з інтервалів.



5. Визначаємо інтервали опуклості та угнутості функції.

В інтервалі $(-\infty, 0)$ $f''(x) < 0$, графік функції $f(x)$ опуклий.

В інтервалі (0, 2) $f''(x) > 0$, графік функції $f(x)$ угнутий.

В інтервалі $(2, +\infty)$ $f''(x) > 0$, графік функції $f(x)$ угнутий.

6. Знаходимо точки перегину за першою достатньою умовою існування точок перегину графіка функції. Точка $x = 2$ не може бути точкою перегину, оскільки вона не входить в область визначення функції. Точка $x = 0$ є точкою перегину графіка функції.

7. Знаходимо значення функції у точці перегину.

$$y_{\text{пер}} = f(0) = 0.$$

Точка $O(0, 0)$ є точкою перегину графіка функції.

IV. Асимптоти графіка функції

1. Знаходимо вертикальні асимптоти. Оскільки $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3}{4(2-x)^2} = \infty$, то пряма з рівнянням $x = 2$ є вертикальною асимптотою графіка функції.

2. Знаходимо похилі асимптоти графіка функції. Рівняння похилої асимптоти графіка функції має вигляд

$$y = kx + b,$$

де

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{4x(2-x)^2} = \frac{1}{4}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{(2-x)^2} = \frac{1}{4};$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{4(2-x)^2} - \frac{1}{4}x\right) = \frac{1}{4}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3 - x(2-x)^2}{(2-x)^2} = \frac{1}{4}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3 - 4x + 4x^2 - x^3}{(2-x)^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x(x-1)}{(2-x)^2} = 1.$$

Графік функції має похилу асимптоту з рівнянням

$$y = \frac{1}{4}x + 1.$$

3. Горизонтальних асимптот графік функції не має.

V. Побудова графіка функції

За результатами дослідження побудуємо графік функції, зображений на рисунку 2.28.

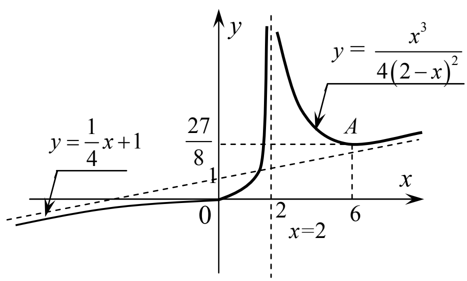


Рисунок 2.28

Приклад 2.177. Дослідити функцію

$$f(x) = 5x\sqrt[3]{(x+2)^2}$$

та побудувати її графік.

Р о з в ' я з а н н я

І. Основні відомості про функцію

1. Область визначення функції: $x \in (-\infty, +\infty)$.
2. Функція неперервна в інтервалі $(-\infty, +\infty)$.
3. Парність та непарність функції.

$$f(-x) = -5x\sqrt[3]{(-x+2)^2} \neq \pm f(x).$$

Функція загального виду.

4. Функція неперіодична.
5. Точки перетину графіка функції з осями координат.
   а) Точки перетину з віссю Oy. Якщо $x = 0$, то $y = 0$. Маємо точку $O(0, 0)$.
   б) Точки перетину з віссю Ox. Якщо $y = 0$, то $x = 0$ або $x = -2$. Маємо ще одну точку $A(-2, 0)$.

ІІ. Інтервали монотонності та точки екстремуму функції

1. Знаходимо похідну першого порядку $f'(x)$.

$$f'(x) = \left(5x\sqrt[3]{(x+2)^2}\right)' = 5\left(x(x+2)^{2/3}\right)' = 5\left((x+2)^{2/3} + \frac{2}{3}x(x+2)^{-1/3}\right) =$$

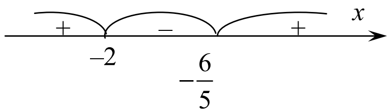
$$= 5\left(\sqrt[3]{(x+2)^2} + \frac{2x}{3\sqrt[3]{x+2}}\right) = .5\left(\frac{3x+6+2x}{3\sqrt[3]{x+2}}\right); \quad f'(x) = \frac{5(5x+6)}{3\sqrt[3]{x+2}}.$$

2. Знаходимо критичні точки 1-го роду функції $f(x)$ з рівняння $f'(x) = 0$, тобто $\dfrac{5(5x+6)}{3\sqrt[3]{x+2}} = 0$, тоді $5x + 6 = 0$, тобто $x = -\dfrac{6}{5}$.

Критичні точки , в яких похідна $f'(x) = \infty$, знаходимо з рівняння $x + 2 = 0$, тоді $x = -2$.

3. Наносимо на числову вісь критичні точки та розбиваємо область визначення функції на інтервали: $(-\infty, -2)$, $\left(-2, -\dfrac{6}{5}\right)$, $\left(-\dfrac{6}{5}, +\infty\right)$.

4. Визначаємо знак похідної $f'(x)$ в кожному інтервалі.



5. Визначаємо характер монотонності функції в кожному інтервалі.

   В інтервалі $(-\infty, -2)$ $f'(x) > 0$, функція $f(x)$ зростає.

   В інтервалі $\left(-2, -\dfrac{6}{5}\right)$ $f'(x) < 0$, функція $f(x)$ спадає.

В інтервалі $\left(-\frac{6}{5}, +\infty\right)$ $f'(x) > 0$, функція $f(x)$ зростає.

6. Знаходимо точки екстремуму функції за першою достатньою умовою існування екстремуму. Точка $x = -2$ є точкою максимуму, а точка $x = -\frac{6}{5}$ – точкою мінімуму.

7. Знаходимо значення функції у точках екстремуму.

$$y_{\max} = f(-2) = 0; \qquad y_{\min} = f\left(-\frac{6}{5}\right) = -6 \cdot \sqrt[3]{\frac{16}{25}}.$$

Окрім вже відомої точки $A(-2,\ 0)$, здобули ще одну точку – $B\left(-\frac{6}{5}, -6\cdot\sqrt[3]{\frac{16}{25}}\right)$, тобто $B(-1{,}2;\ -5{,}17)$.

III. Інтервали опуклості та угнутості, точки перегину графіка функції

1. Знаходимо похідну другого порядку $f''(x)$.

$$f''(x) = \left(\frac{5(5x+6)}{3\sqrt[3]{x+2}}\right)' = \frac{5}{3}\cdot\frac{5\sqrt[3]{x+2} - \frac{1}{3}(5x+6)(x+2)^{-2/3}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}} = \frac{5}{3}\cdot\frac{5\sqrt[3]{x+2} - \dfrac{5x+6}{3\cdot\sqrt[3]{(x+2)^2}}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}} =$$

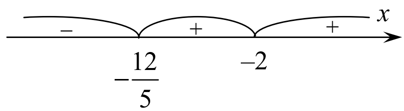
$$= \frac{5}{9}\cdot\frac{15(x+2)-(5x+6)}{\sqrt[3]{(x+2)^4}}, \qquad f''(x) = \frac{10}{9}\,\frac{5x+12}{\sqrt[3]{(x+2)^4}}.$$

2. Знаходимо критичні точки 2-го роду функції $f(x)$ з рівняння $f''(x) = 0$, тобто $\frac{5x+12}{\sqrt[3]{(x+2)^4}} = 0$, тоді $5x + 12 = 0$, тобто $x = -\frac{12}{5}$.

Знаходимо критичні точки з припущення, що $f''(x) = \infty$, тоді $x + 2 = 0$, тобто $x = -2$.

3. Наносимо на числову вісь критичні точки та розбиваємо область визначення функції на інтервали: $\left(-\infty, -\frac{12}{5}\right)$; $\left(-\frac{12}{5}, -2\right)$; $(-2, +\infty)$.

4. Визначаємо знак похідної другого порядку $f''(x)$ в кожному інтервалі.



5. Визначаємо інтервали опуклості та угнутості функції.

В інтервалі $\left(-\infty, -\frac{12}{5}\right)$ $f''(x) < 0$, графік функції $f(x)$ опуклий.

В інтервалі $\left(-\dfrac{12}{5}, -2\right)$ $f''(x) > 0$, графік функції $f(x)$ угнутий.

В інтервалі $\left(-2, +\infty\right)$ $f''(x) > 0$, графік функції $f(x)$ угнутий.

6. Знаходимо точки перегину графіка функції за першою достатньою умовою існування точок перегину графіка функції.

Точка $x = -2$ не може бути точкою перегину, оскільки знак $f''(x)$ при переході через цю точку не змінюється.

Точка $x = -\dfrac{12}{5}$ є точкою перегину графіка функції.

7. Знаходимо значення функції у точці перегину.

$$y_{\text{пер}} = f\left(-\frac{12}{5}\right) = -12 \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{25}}\,.$$

Здобули точку $E\left(-\dfrac{12}{5}, -12 \cdot \sqrt[3]{\dfrac{4}{25}}\right)$, тобто $\varepsilon\left(-2{,}4,\ -6{,}5\right)$ – точку перегину графіка функції.

IV. Асимптоти графіка функції

1. Знаходимо вертикальні асимптоти. Оскільки $\lim\limits_{x \to x_0} 5x \cdot \sqrt[3]{\left(x+2\right)^2}$ не дорівнює нескінченності за жодного значення x_0, то вертикальних асимптот графік функції не має.

2. Знаходимо похилі асимптоти. Рівняння похилої асимптоти має вигляд

$$y = kx + b, \quad \text{де} \quad k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{5x \cdot \sqrt[3]{\left(x+2\right)^2}}{x} = \infty\,.$$

Отже, похилих асимптот графік функції не має.

V. Побудова графіка функції

За результатами дослідження дістанемо графік функції, зображений на рисунку 2.29.

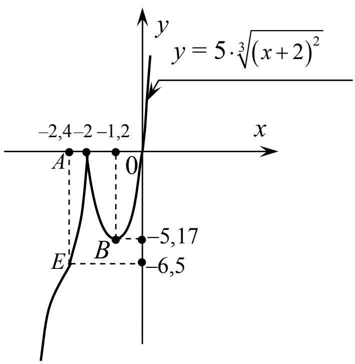


Рисунок 2.29

2.9 Деякі застосування похідної

Ті чи інші процеси, як то фізичні, хімічні, економічні і т. д. описуються функціями.

Якщо функція $f(x)$ описує деякий процес, то її похідна $f'(x)$ характеризує швидкість, з якою цей процес змінюється. Розглянемо деякі окремі застосування похідної.

2.9.1 Застосування похідної при розв'язуванні задач з механіки

Якщо функція $S(t)$ описує шлях, пройдений тілом впродовж часу t, то похідна $S'(t)$ дає можливість обчислити миттєву швидкість $V(t)$ у момент часу t з якою рухається тіло.

$$V(t) = S'(t).$$

Похідна $V'(t)$ дає можливість обчислити прискорення $a(t)$ у момент часу t.

$$a(t) = V'(t)$$

Приклади до пункту 2.9.1

Приклад 2.178. Тіло рухається прямою у такий спосіб, що його відстань S від початкового пункту через t секунд визначається за формулою

$$S(t) = \frac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 16t^2.$$

Знайти швидкість руху тіла та з'ясувати, за яких умов тіло рухається у зворотному напрямку.

Р о з в ' я з а н н я

1. Область визначення функції $S(t)$. Відомо, що швидкість руху $V(t)$ визначається формулою

$$V(t) = S'(t),$$

де $t \in [0, \infty)$, оскільки час t не може бути від'ємним.

2. Знаходимо похідну першого порядку $S'(t)$:

$$V(t) = S'(t) = t^3 - 12t^2 + 32t.$$

Запишемо $V(t)$ у вигляді

$$V(t) = t(t-4)(t-8).$$

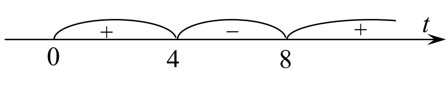
3. Знаходимо критичні точки 1-го роду функції $S(t)$ з рівняння

$S'(t) = V(t) = 0$, тобто $t^3 - 12t^2 + 32t = 0$, звідки $t_1 = 0$; $t_2 = 4$; $t_3 = 8$.

Критичні точки, в яких похідна $f'(x)$ не існує або є нескінченною, відсутні.

4. Наносимо на числову вісь критичні точки та розбиваємо область визначення функції $S(t)$ на інтервали: $(0, 4)$, $(4, 8)$, $(8, +\infty)$.

5. Визначаємо знак похідної $S'(t) = V(t)$ в кожному інтервалі.



6. Визначаємо напрямок руху в кожному проміжку.
   На проміжку [0, 4] функція $V(t) > 0$, тіло рухається вперед.
   На проміжку [4, 8] функція $V(t) < 0$, тіло рухається у зворотному напрямку.
   На інтервалі $[8, +\infty)$ функція $V(t) > 0$, тіло рухається вперед.

В і д п о в і д ь: $V(t) = t^3 - 12t^2 + 32t$ (м/сек.); тіло рухається у зворотному напрямку, якщо $t \in [4;8]$.

Приклад 2.179. Довести, що коли тіло рухається за законом $S(t) = ae^t + be^{-t}$, то його прискорення кількісно дорівнює пройденому шляху.

Р о з в ' я з а н н я

Знайдемо швидкість руху тіла.

$$V(t) = S'(t) = ae^t - be^{-t}.$$

Прискорення – це похідна швидкості, з якою рухається тіло, отже,

$$a(t) = V'(t) = ae^t + be^{-t} = S(t),$$

що й треба було довести.

Приклад 2.180. Одна матеріальна точка рухається за законом $S_1(t) = t^3 + \frac{1}{2}t^2 + t + \frac{1}{2}$, а інша – за законом $S_2(t) = \frac{2}{3}t^3 + 3t^2 - 5t$ (S_1, S_2 вимірюються у метрах; t – у секундах). Знайти прискорення точок у момент часу, коли їхні швидкості однакові.

Р о з в ' я з а н н я

Знаходимо швидкості, з якими рухаються матеріальні точки.

$$V_1(t) = 3t^2 + t + 1; \quad V_2(t) = 2t^2 + 6t - 5.$$

Знаходимо такі значення t, за яких швидкості точок збігаються. Якщо $V_1(t) = V_2(t)$, то $3t^2 + t + 1 = 2t^2 + 6t - 5$, звідки $t^2 - 5t + 6 = 0$, тоді $t_1 = 2$; $t_2 = 3$.
Знаходимо прискорення у цих точках:

$$a_1(t) = V_1'(t) = 6t + 1; \quad a_2(t) = V_2'(t) = 4t + 6.$$

$$a_1(2) = 13 \text{ м/с}^2, \quad a_2(2) = 14 \text{ м/с}^2; \quad a_1(3) = 19 \text{ м/с}^2; \quad a_2(3) = 18 \text{ м/с}^2.$$

В і д п о в і д ь: $a_1(2) = 13$ м/с^2, $a_2(2) = 14$ м/с^2; $a_1(3) = 19$ м/с^2; $a_2(3) = 18$ м/с^2.

2.9.2 Застосовування похідної в теорії електричних кіл

Основними поняттями у теорії електричних кіл є електричний ***струм***, ***напруга***, ***потужність***. Найпростіша задача аналізу електричного кола – це аналіз його усталеного режиму. Такий аналіз можна проводити шляхом прямого дослідження або ж моделюванням процесів на підґрунті фізичних, математичних моделей. Розглянемо найпростіші математичні моделі.

Якщо функція $q = q(t)$ описує електричний заряд, що пробігає через провідник впродовж часу t, то електричний струм i – це функція, що описує швидкість, з якою змінюється заряд q у момент часу t, отже,

$$i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt} = q'(t).$$

Електрична напруга u між двома точками електричного кола математично описується у такий спосіб:

$$u = \lim_{\Delta q \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta q} = \frac{dW}{dq},$$

де W – енергія електричного кола.

Потужність у момент часу t, яку поглинає певна ланка електричного кола, – це функція P, що визначається як

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}.$$

Елементи електричних кіл у розрахунках замінюють на ідеалізовані елементи.

До найпростіших ідеалізованих елементів належать незалежні та залежні джерела, називані ***активними елементами***, а також елементи резистивного опору, індуктивності та ємнісні елементи, називані ***пасивними елементами***.

Система рівнянь, яка описує модель електричного кола, називається ***математичною моделлю електричного кола***.

Приклади до пункту 2.9.2

Приклад 2.181. Розглядається джерело електричної енергії, що передає цю енергію на навантаження. Потужність розсіювання у навантаженні, визначається за формулою

$$P(R) = \frac{\varepsilon^2 R}{(R + R_{л} + r)^2},$$

де $R_{л}$ – опір дроту лінії передавання; r – внутрішній опір джерела; R – опір навантаження. Величини ε, $R_{л}$, r – сталі.

Знайти значення потужності P у точках екстремуму.

Р о з в ' я з а н н я

1. Область визначення функції: опір не може бути від'ємним, тому областю визначення функції є проміжок $R \in [0, +\infty]$.

2. Знаходимо похідну першого порядку $P'(R)$:

$$P'(R)=\varepsilon^2\left(\frac{R}{(R+R_л+r)^2}\right)'=\varepsilon^2\frac{(R+R_л+r)^2-2R(R+R_л+r)}{(R+R_л+r)^4};$$

$$P'(R)=\varepsilon^2\frac{R_л+r-R}{(R+R_л+r)^3}.$$

3. Знаходимо критичні точки1-го роду функції $f(x)$ з рівняння $P'(R)=0$, тобто $\frac{R_л+r-R}{(R+R_л+r)^3}=0$, тоді $R_л+r-R=0$, $R=R_л+r$.

Критичні точки I роду, в яких похідна не існує або є нескінченною, відсутні.

4. Знаходимо похідну другого порядку $P''(R)$.

$$P''(R)=\varepsilon^2\left(\frac{R_л+r-R}{(R+R_л+r)^3}\right)'=\varepsilon^2\frac{-(R+R_л+r)^3-3(R_л+r-R)(R+R_л+r)^2}{(R+R_л+r)^6};$$

$$P''(R)=-2\varepsilon^2\frac{2(R_л+r)-R}{(R+R_л+r)^4}.$$

5. Визначаємо знак похідної другого порядку у критичній точці.

$$P''(R_л+r)=-2\varepsilon^2\frac{2(R_л+r)-(R_л+r)}{(R_л+r+R_л+r)^4}=\frac{-\varepsilon^2(R_л+r)}{8(R_л+r)^4}<0.$$

6. Знаходимо точку екстремуму функції за другою достатньою умовою існування екстремуму. Точка $R=R_л+r$ є точкою максимуму функції.

7. Знаходимо максимальне значення функції $P(R)$.

$$P_{\max}=P(R_л+r)=\frac{\varepsilon^2(R_л+r)}{4(R_л+r)^2}=\frac{\varepsilon^2}{4(R_л+r)}.$$

В і д п о в і д ь: $P_{\max}=P(R_л+r)=\frac{\varepsilon^2}{4(R_л+r)}.$

Приклад 2.182. Ємнісний елемент (конденсатор) ємністю *C*, заряджений до напруги u_0, розряджається на індуктивну котушку з втратами (*R*, *L*). Між параметрами електричного кола існує зв'язок $R=2\sqrt{L/C}$, а струм у електричному колі визначається функцією

$$i(t)=(u_0/L)\,t\,e^{(-Rt)/(2L)}.$$

Дослідити функцію *i*(*t*) та побудувати її графік.

Р о з в ' я з а н н я

I. Основні відомості про функцію

1. Область визначення функції *i*(*t*): $t\in[0,+\infty)$, оскільки змінна t визначає час.

2. Функція неперервна на проміжку $[0,+\infty)$.

3. Парність та непарність функції. Область визначення функції несиметрична відносно початку координат. Значить, функція $i(t)$ не може бути парною чи непарною. Функція є загального виду.

4. Функція неперіодична.

5. Точки перетину графіка функції з осями координат. Якщо $t = 0$, то $i(0) = 0$; якщо $i(t) = 0$, то $t = 0$. Отже, знайшли точку $O(0, 0)$.

II. Інтервали монотонності та точки екстремуму

1. Знаходимо похідну першого порядку $i'(t)$.

$$i'(t) = \frac{u_0}{L}\left(t\,\mathrm{e}^{-\frac{Rt}{2L}}\right)' = \frac{u_0}{L}\left(\mathrm{e}^{-\frac{Rt}{2L}} + t\,\mathrm{e}^{-\frac{Rt}{2L}}\left(-\frac{R}{2L}\right)\right); \quad i'(t) = \frac{u_0}{L}\mathrm{e}^{-\frac{Rt}{2L}}\left(1 - \frac{Rt}{2L}\right).$$

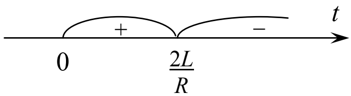
2. Знаходимо критичні точки 1-го роду функції $f(x)$ з рівняння $i'(t) = 0$, тобто

$$\mathrm{e}^{-\frac{Rt}{2L}}\left(1 - \frac{Rt}{2L}\right) = 0, \text{ тоді } 1 - \frac{Rt}{2L} = 0, \;\; t = \frac{2L}{R}.$$

Критичні точки, в яких похідна $f''(x)$ не існує або є нескінченною, відсутні.

3. Наносимо на числову вісь критичну точку та розбиваємо область визначення функції на інтервали: $\left(0, \frac{2L}{R}\right)$, $\left(\frac{2L}{R}, +\infty\right)$.

4. Визначаємо знак похідної $i'(t)$ в кожному з інтервалів.



5. Визначаємо характер монотонності функції в кожному інтервалів.

В інтервалі $\left(0; \frac{2L}{R}\right)$ $i'(t) > 0$, функція $i'(t)$ зростає.

В інтервалі $\left(\frac{2L}{R}; +\infty\right)$ $i'(t) < 0$, функція $i'(t)$ спадає.

6. Знаходимо точки екстремуму за першою достатньою умовою існування екстремуму функції. В точці $t = \frac{2L}{R}$ функція має екстремум, а саме, максимум.

7. Знаходимо значення функції у точці екстремуму.

$$i_{\max} = i\left(\frac{2L}{R}\right) = \frac{u_0}{L}\cdot\frac{2L}{R}\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}\cdot\frac{2L}{R}} = \frac{2u_0}{R\mathrm{e}}.$$

Здобули точку максимуму $A\left(\frac{2L}{R}, \frac{2u_0}{R\mathrm{e}}\right)$.

ІІІ. Інтервали опуклості та угнутості, точки перегину графіка функції

1. Знаходимо похідну другого порядку $i''(t)$.

$$i''(t)=\frac{u_0}{L}\left(\mathrm{e}^{-\frac{Rt}{2L}}\left(1-\frac{Rt}{2L}\right)\right)'=\frac{u_0}{L}\left(-\frac{R}{2L}\mathrm{e}^{-\frac{Rt}{2L}}\left(1-\frac{Rt}{2L}\right)+\mathrm{e}^{-\frac{Rt}{2L}}\left(-\frac{R}{2L}\right)\right)=-\frac{u_0}{L}\mathrm{e}^{-\frac{Rt}{2L}}\frac{R}{2L}\left(2-\frac{Rt}{2L}\right).$$

$$i''(t)=-\frac{u_0R}{2L^2}\mathrm{e}^{-\frac{Rt}{2L}}\left(2-\frac{Rt}{2L}\right).$$

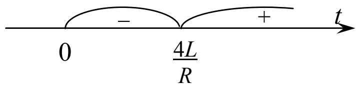
2. Знаходимо критичні точки 2-го роду функції $f'(t)$ з рівняння $i''(t)=0$, тобто

$$-\frac{u_0R}{2L^2}\mathrm{e}^{-\frac{Rt}{2L}}\left(2-\frac{Rt}{2L}\right)=0,\ \text{тоді}\ 2-\frac{Rt}{2L}=0,\ \ t=\frac{4L}{R}.$$

Критичні точки, в яких $i''(t)$ не існує або є нескінченною, відсутні.

3. Наносимо на числову вісь критичну точку та розбиваємо область визначення функції на інтервали: $\left(0,\frac{4L}{R}\right)$, $\left(\frac{4L}{R},+\infty\right)$.

4. Визначаємо знак похідної $i''(t)$ в кожному інтервалі:



5. Визначаємо інтервали опуклості та угнутості графіка функції в кожному інтервалі.

В інтервалі $\left(0,\frac{4L}{R}\right)$ $i''(t)<0$, графік функції $i(t)$ опуклий.

В інтервалі $\left(\frac{4L}{R},+\infty\right)$ $i''(t)>0$, графік функції $i(t)$ угнутий.

6. Знаходимо точки перегину за першою достатньою умовою існування точок перегину графіка функції. Точка $t=\frac{4L}{R}$ для графіка функції є точкою перегину.

7. Знаходимо значення функції у точці перегину.

$$i_{\text{пер}}=i\left(\frac{4L}{R}\right)=\frac{u_0}{L}\cdot\frac{4L}{R}\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}\cdot\frac{4L}{R}}=\frac{4u_0}{R\mathrm{e}^2}.$$

Здобули точку $B\left(\frac{4L}{R},\ \frac{4u_0}{R\mathrm{e}^2}\right)$ – точку перегину графіка функції $i(t)$.

ІV. Асимптоти графіка функції

1. Знаходимо вертикальні асимптоти.

$$\lim_{t\to t_0}\frac{u_0 t}{L\mathrm{e}^{\frac{Rt}{2L}}}\neq\infty\,.$$

Вертикальних асимптот не існує.

2. Знаходимо похилі асимптоти. Рівняння похилої асимптоти графіка функції має вигляд

$$y = kx + b, \qquad \text{де} \qquad k=\lim_{t\to\infty}\frac{u_0}{L}\frac{t}{t\mathrm{e}^{\frac{Rt}{2L}}}=\lim_{t\to\infty}\frac{u_0}{L\mathrm{e}^{\frac{Rt}{2L}}}=0\,,\quad b=\lim_{t\to\infty}\frac{u_0}{L}\frac{t}{\mathrm{e}^{\frac{Rt}{2L}}}=0\,.$$

Графік функції має асимптоту з рівнянням $y = 0$, що є горизонтальною асимптотою.

V. Побудова графіка функції

За результатами дослідження побудуємо графік функції, зображений на рис. 2.30.

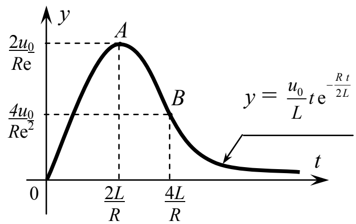


Рисунок 2.30

Приклад 2.183. У момент часу $t = 0$ до джерела сталої напруги u_0 підімкнено індуктивну котушку з втратами (R, L) (рис. 2.31). Залежність між часом t та струмом i у котушці має вигляд

$$i(t)=\frac{u_0}{R}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

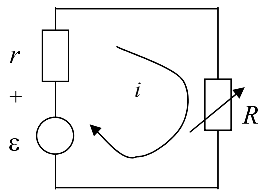


Рисунок 2.31

Провести повне дослідження функції $i(t)$.

Р о з в ’ я з а н н я

I. Основні відомості про функцію

1. Область визначення функції: $t \in [0, +\infty)$.
2. Функція неперервна в області визначення.
3. Функція не є парною чи непарною.
4. Функція не є періодичною.
5. Точки перетину графіка функції з осями координат. Якщо $t = 0$, то $i(0) = 0$. Дістали точку $O(0, 0)$.

II. Інтервали монотонності, точки екстремуму

1. Знаходимо похідну першого порядку $i'(t)$.

$$i'(t)=\frac{u_0}{L}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\,.$$

2. Критичні точки 1-го роду функції $i(t)$ відсутні.

3. Знаходимо інтервали монотонності. Оскільки $i'(t)>0$ в області визначення функції, то функція $i(t)$ є зростаючою функцією у своїй області визначення. Точок екстремуму функції у такому разі немає.

III. Інтервали опуклості та угнутості, точки перегину графіка функції

1. Знаходимо похідну другого порядку $i''(t)$.

$$i''(t) = -\frac{u_0 R}{L^2} \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}.$$

2. Критичні точки 2-го роду функції $i(t)$ відсутні.

3. Знаходимо інтервали опуклості, угнутості графіка функції. Оскільки $i''(t) < 0$ в області визначення функції, то графік функції $i(t)$ є опуклим у своїй області визначення. Точок перегину графіка функції у такому разі немає.

IV. Асимптоти графіка функції

1. Знаходимо вертикальні асимптоти. Рівність

$$\lim_{t \to t_0} \frac{u_0}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right) = \infty$$

неможлива за жодного t з області визначення функції. Отже, вертикальних асимптот графік функції не має.

2. Знаходимо похилі асимптоти. Рівняння похилої асимптоти має вигляд $i = kt + b$. Знайдемо k та b.

$$k = \lim_{t \to \infty} \frac{u_0}{tR}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right) = \frac{u_0}{R} \lim_{t \to \infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t} - 1}{t\,\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \frac{u_0}{R} \lim_{t \to \infty} \frac{\frac{R}{L}\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}}{\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t} + \frac{R}{L}\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t} \cdot t} = \frac{u_0}{L} \lim_{t \to \infty} \frac{1}{1 + \frac{R}{L}t} = 0.$$

$$b = \lim_{t \to \infty} \frac{u_0}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right) = \frac{u_0}{R}.$$

Отже, дістали рівняння асимптоти $i = \dfrac{u_0}{R}$, яка є горизонтальною.

V. Побудова графіка функції

За результатами дослідження побудуємо графік функції, зображений на рисунку 2.32.

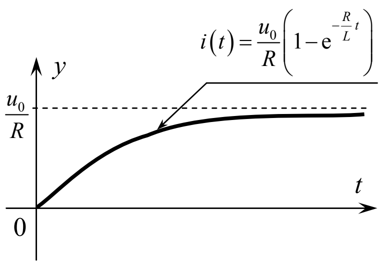


Рисунок 2.32

Виходячи з фізичного змісту задачі, можна дістати деяку додаткову інформацію про задану функцію. Запишемо функцію $i(t)$ у формі

$$i(t)=\frac{u_0}{R}-\frac{u_0}{R\,\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}}.$$

При підмиканні електричного кола до джерела сталої напруги саме за цією формулою визначається $i(t)$. Задана формула описує перехідний процес у електричному колі. Впродовж певного часу другий доданок у формулі зменшується. Зрештою у електричному колі настає стаціонарний процес і тоді струм $i(t)$ визначається вже як

$$i(t)=\frac{u_0}{R}.$$

Приклад 2.184. До навантаження, опір R якого змінюється у межах $[0, +\infty)$, підімкнено джерело електрорушійної сили з внутрішнім опором r. Дослідити залежність напруги $u(R)$ на затискачах навантаження від опору R, якщо $u(R)=\dfrac{\varepsilon R}{r+R}$, де r та ε – сталі.

Р о з в ' я з а н н я

I. Основні відомості про функцію

1. Область визначення функції: $R \in [0, +\infty)$.

2. Оскільки $R \geq 0$, $r > 0$, функція $u(R)$ – неперервна у своїй області визначення.

3. Функція $u(R)$ не є парною чи непарною.

4. Функція не є періодичною.

5. Точки перетину графіка функції з осями координат. Якщо $R = 0$, то $u(0) = 0$. Дістали точку $O(0, 0)$.

II. Інтервали монотонності, точки екстремуму функції

1. Знаходимо похідну першого порядку $u'(R)$.

$$u'(R)=\frac{\varepsilon r}{(r+R)^2}.$$

2. Критичні точки 1-го роду функції $U(R)$ відсутні.

3. Знаходимо інтервали монотонності. Оскільки $u'(R)>0$ в області визначення функції, то функція $u(R)$ є зростаючою функцією у своїй області визначення. Точок екстремуму у такому разі немає.

III. Інтервали опуклості та угнутості, точки перегину графіка функції

1. Знаходимо похідну другого порядку $u''(R)$.

$$u''(R)=-\frac{2\varepsilon r}{(r+R)^3}.$$

2. Критичні точки 2-го роду функції $u(R)$.

Оскільки за фізичним змістом ε, $r > 0$, то $u''(R) < 0$ в усій області визначення функції, з чого виходить, що графік функції у своїй області визначення є опуклим. Точок перегину графіка функції у такому разі немає.

IV. Асимптоти графіка функції

1. Знаходимо вертикальні асимптоти. Рівність

$$\lim_{R\to R_0} \frac{\varepsilon R}{4+R} = \infty$$

неможлива при жодному R з області визначення функції. Отже, вертикальних асимптот графік функції не має.

2. Знаходимо похилі асимптоти. Рівняння похилої асимптоти має вигляд $i = kR + b$. Знайдемо k та b.

$$k = \varepsilon \lim_{R\to\infty} \frac{R}{R(r+R)} = \varepsilon \lim_{R\to\infty} \frac{1}{r+R} = 0, \qquad b = \varepsilon \lim_{R\to\infty} \frac{R}{r+R} = \varepsilon.$$

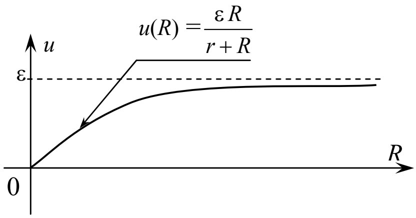


Рисунок 2.33

Отже, дістали рівняння асимптоти $u = \varepsilon$, яка є горизонтальною.

V. Побудова графіка функції

За результатами дослідження побудуємо графік функції, зображений на рисунку 2.33.

ЗАУВАЖЕННЯ. Задана функція $u(R) = \frac{\varepsilon R}{r+R}$ належить до дробово-лінійних функцій. Такі функції визначають рівнобічні гіперболи з осями, паралельними осям координат. Отже, графік функції $u(R)$ являє собою частину рівнобічної гіперболи. Звідси виходить, що різниця потенціалів $u(R)$ на затискачах навантаження визначається тією частиною гіперболи, яка асимптотично наближається до прямої $u = \varepsilon$.

Приклад 2.185. До електричного кола синусоїдного струму

$$i(t) = I_m \sin \omega t$$

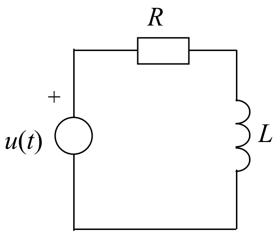


Рисунок 2.34

увімкнено індуктивну котушку з втратами (R, L) (рис. 2.34). Середня потужність, розвинута джерелом, визначається за формулою

$$P(x) = \frac{u^2 R}{R^2 + x^2},$$

де R – активний опір, $x = \omega$, L – індуктивний опір, $\sqrt{R^2 + x^2} = Z$ – повний опір кола. Дослідити функцію $P(x)$, вважаючи u та R за додатні.

Р о з в ’ я з а н н я

I. Основні відомості про функцію

1. Область визначення функції: $x \in [0, +\infty)$.
2. Інтервали неперервності функції: $x \in [0, +\infty)$.
3. Функція не є парною чи непарною.
4. Функція не є періодичною.
5. Точки перетину графіка функції з осями координат. Якщо $x = 0$, то $P(0) = \dfrac{u^2}{R}$, якщо $P(x) = 0$, то $x \in \varnothing$. Дістали точку $A\left(0, \dfrac{u^2}{R}\right)$.

II. Інтервали монотонності, точки екстремуму

1. Знаходимо похідну першого порядку $P'(x)$.

$$P'(x) = -\frac{2u^2 Rx}{\left(R^2 + x^2\right)^2}.$$

2. Знаходимо критичні точки 1-го роду функції $P(x)$ з рівняння $P'(x) = 0$, тобто $\dfrac{-2u^2 Rx}{\left(R^2 + x^2\right)^2} = 0$, звідси $x = 0$.

Критичні точки, в яких похідна $P'(x)$ не існує або дорівнює нескінченності, відсутні.

Похідна $P'(x) < 0$ в інтервалі $(0, +\infty)$. Значить, функція $P(x)$ спадає в усій області визначення.

III. Інтервали опуклості та угнутості, точки перегину графіка функції

1. Знаходимо похідну другого порядку $P''(x)$.

$$P''(x) = \frac{2u^2 R\left(3x^2 - R^2\right)}{\left(R^2 + x^2\right)^3}.$$

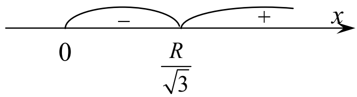
2. Знаходимо критичні точки 2-го роду функції $P(x)$ з рівняння $P''(x) = 0$, звідки

$$2u^2 R\left(3x^2 - R^2\right) = 0; \; x_1 = -\frac{R}{\sqrt{3}}, \; x_2 = \frac{R}{\sqrt{3}}.$$

Критичні точки, в яких похідна $P''(x)$ не існує або є нескінченною, відсутні.

3. Наносимо на числову вісь критичну точку $x = \dfrac{R}{\sqrt{3}}$, а критична точка $x = -\dfrac{R}{\sqrt{3}}$ до області визначення функції не ввходить. Розбиваємо область визначення функції на інтервали. Оскільки x величина невід'ємна, то маємо лише одну критичну точку $x = \dfrac{R}{\sqrt{3}}$ та інтервали $\left(0, \dfrac{R}{\sqrt{3}}\right)$ та $\left(\dfrac{R}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$.

4. Визначаємо знаки похідної $P''(x)$ в кожному з інтервалів:



5. Визначаємо інтервали опуклості та угнутості графіка функції.

В інтервалі $\left(0, \dfrac{R}{\sqrt{3}}\right)$ $P''(x) < 0$, графік функції $P(x)$ опуклий.

В інтервалі $\left(\dfrac{R}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$ $P''(x) > 0$, графік функції $P(x)$ угнутий.

6. Точки перегину графіка функції. Точка $x = \dfrac{R}{\sqrt{3}}$ є точкою перегину.

7. Знаходимо значення функції у точці перегину.

$$P_{\text{пер}} = P\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3u^2}{4R}.$$

Дістали точку $B\left(\dfrac{R}{\sqrt{3}}, \dfrac{3u^2}{4R}\right)$, яка є точкою перегину графіка функції.

IV. Асимптоти графіка функції

1. Знаходимо вертикальні асимптоти. Оскільки рівність

$$\lim_{x \to x_0} \frac{u^2 R}{R^2 + x^2} = \infty$$

неможлива при жодному значенні x з області визначення функції, то вертикальних асимптот графік функції не має.

2. Знаходимо похилі асимптоти. Похилі асимптоти шукаємо у вигляді $P = kx + b$. Знайдемо k та b:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{u^2 R}{x\left(R^2 + x^2\right)} = 0, \quad b = \lim_{x \to \infty} \frac{u^2 R}{R^2 + x^2} = 0.$$

Отже, дістали рівняння асимптоти $P = 0$, яка є горизонтальною.

V. Побудова графіка функції

За результатами дослідження побудуємо графік функції, зображений на рисунку 2.35.

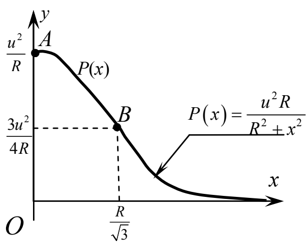


Рисунок 2.35

2.9.3 Застосування похідної в економіці

Економічний зміст похідної полягає у тому, що похідна функції, яка описує той чи інший економічний процес, дорівнює швидкості, з якою змінюється економічний процес протягом часу.

Продуктивність праці

Розглянемо функцію $u=u(t)$, де u дорівнює кількості продукції, виготовленої впродовж часу t.

Знайдемо продуктивність праці у момент часу t_0.

Кількість виготовленої продукції протягом часу від t_0 до $t_0+\Delta t$ змінюється від $u(t_0)$ до $u(t_0+\Delta t)$.

Середній приріст кількості виготовленої продукції впродовж часу Δt визначається як $\frac{\Delta u}{\Delta t}$. Якщо припустити, що $\Delta t\to 0$, то знайдемо граничне значення середнього приросту кількості виробленої продукції, яке визначає продуктивність праці у момент t_0.

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta t}=u'(t_0).$$

Таким чином встановлено залежність між кількістю виробленої продукції та продуктивністю праці у будь-який момент часу t.

$$z(t)=u'(t).$$

Швидкість $v(t)$, з якою змінюється продуктивність праці у момент часу t, знаходиться за формулою $v(t)=z'(t)$.

Таке економічне поняття як темп $T_z(t)$ змінення продуктивності праці може бути знайдено за формулою $T_z(t)=(\ln z(t))'$.

Взагалі для будь-якої функції $y=f(x)$, яка описує той чи інший економічний процес, темп змінення цієї функції дорівнює її логарифмічній похідній $T_y(x)=(\ln y)'=\frac{y'}{y}$.

Витрати природних ресурсів

Розглянемо функцію $Q=Q(t)$, де Q дорівнює кількості природних ресурсів, витрачених впродовж часу t. Кількість витрат природних ресурсів впродовж часу від t_0 до $t_0+\Delta t$ змінюється від $Q(t_0)$ до $Q(t_0+\Delta t)$. Середній приріст кількості природних ресурсів впродовж часу Δt знаходиться як відношення $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$.

Якщо припустити, що $\Delta t_0 \to 0$, то знайдемо граничне значення середнього приросту кількості природних ресурсів, яке визначає швидкість, з якою змінюється кількість витрачених природних ресурсів у момент часу t_0.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = Q'(t_0).$$

Тоді швидкість, з якою змінюється кількість витрачених природних ресурсів у будь-який момент t, визначається за формулою

$$Q'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}.$$

Застосування похідної оберненої функції до дослідження витрат ресурсів

Розглянемо функцію $y = f(x)$, яка є функцією випуску продукції на основі єдиного ресурсу. Якщо ця функція неперервно диференційовна і при цьому $f(0) = 0$, $f'(x) > 0$, коли $x > 0$, то згідно з теоремою про похідну оберненої функції, існує неперервно диференційовна обернена функція $x = f(y)$. **Це функція витрат**, яка визначена для усіх $x \geq 0$. Оскільки $f'(x) > 0$, то $f^{-1}(y)' = \dfrac{1}{f'(x)} > 0$, тоді, очевидно, що зі зростанням випуску продукції витрати ресурсів збільшуються. Функція $\left(f^{-1}(y)\right)'$ називається ***функцією граничних витрат ресурсів***.

У такий же спосіб можна дійти до поданих нижче висновків.

Якщо функція $N = N(t)$ описує ***зростання чисельності населення*** впродовж часу t, то швидкість $v(t)$ зростання населення у момент часу t визначається за формулою $V(t) = N'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta N}{\Delta t}$.

Якщо функція $T = T(t)$ описує процес ***вибування з ладу масового устаткування***, то швидкість $V(t)$ зносу механізмів у момент часу t визначається за формулою $V(t) = T'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta T}{\Delta t}$.

Розглянуті приклади знаходження такого економічного поняття як продуктивність праці за допомогою похідної функції, яка описує кількість виробленої продукції математичним апаратом, не відрізняються від багатьох інших задач фізичного, хімічного і т. п. характеру, де доводиться визначити швидкість, з якою змінюється досліджувана функція протягом часу.

Специфікою економічних досліджень є те, що досить часто доводиться досліджувати функції, які описують змінювання того чи іншого економічного об'єкту не протягом часу, а відносно іншого економічного об'єкту. До того ж, функція, яка описує залежність між економічними об'єктами, досить часто є функцією дискретного аргументу. У багатьох таких випадках можна припустити, що означена функція є функцією неперервного аргументу та за допомогою диференціального числення провести певні дослідження. Розглянемо декілька таких прикладів.

Витрати виробництва

Витрати виробництва являють собою функцією $y = k(x)$ кількості виробленої продукції x. Якщо Δx – приріст продукції, то тоді Δk – приріст витрат виробництва. Відношення $\frac{\Delta k}{\Delta x}$ у такому разі можна розглядати як середній приріст витрат виробництва на одиницю продукції.

Граничні витрати виробництва визначаються за формулою

$$k'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta k}{\Delta x}.$$

З економічної точки зору граничні витрати виробництва означають додаткові витрати на виробництво одиниці додаткової продукції. В економіці нарівні з граничними значеннями функції розглядаються також функції середніх значень. Функція ***середніх витрат виробництва*** на одиницю виробленої продукції визначається за формулою $k_{сер} = \frac{y}{x}$.

Виручка від продажу товару

Розглянемо функцію $w = w(x)$, де x – обсяг проданого товару, а w – виручка від його продажу.

Якщо кількість проданого товару змінюється від x_0 до $x_0 + \Delta x$, то виручка від його продажу змінюється від $w(x_0)$ до $w(x_0 + \Delta x)$. Середній приріст виручки від продажу товару визначається відношенням $\frac{\Delta w}{\Delta x}$. Припустимо, що $\Delta x \to 0$. Тоді дістанемо граничне значення виручки, коли $x = x_0$.

$$w'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x}.$$

Отже, для будь-якого значення x граничне значення $w'(x)$ виручки означає швидкість, з якою змінюється виручка в залежності від кількості проданого товару.

Функція середньої виручки на одиницю проданого товару визначається за формулою $w_{сер} = \frac{w}{x}$.

Еластичність функції

Еластичністю функції $y=f(x)$ називається функція $E_x(y)$, яка дорівнює граничному значенню відношення відносного приросту функції y до відносного приросту аргументу x, коли $\Delta x \to 0$:

$$E_x(y)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{y}:\frac{\Delta x}{x}\right),$$

тобто

$$E_x(y)=\frac{x}{y}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

звідки

$$E_x(y)=\frac{x}{y}y'.$$

Еластичність функції використовується для дослідження економічних процесів. За допомогою еластичності можна дістати інформацію про те, на скільки процентів зміниться функція $y=f(x)$, якщо її аргумент x змінюється на 1 %.

Еластичність функції $y(x)=u(x)v(x)$ визначається формулою

$$E_x(uv)=E_x(u)+E_x(v).$$

Еластичність функції $y(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ визначається формулою

$$E_x\left(\frac{u}{v}\right)=E_x(u)-E_x(v).$$

Еластичність функції $x=f^{-1}(y)$, яка є оберненою до функції $y=f(x)$, визначається формулою

$$E_y(x)=\frac{1}{E_x(y)}.$$

Еластичність функції $y=f(x)$ дорівнює добутку незалежної змінної x на темп змінювання T_y цієї функції, тобто

$$E_x(y)=xT_y.$$

Значну роль відіграє еластичність функцій при дослідженні взаємозв'язку між попитом та споживанням.

Якщо, приміром, функція $y=f(x)$ встановлює залежність між попитом y та ціною x, то еластичність $E_x(y)$ наближено показує на скільки процентів зміниться попит, якщо ціна зміниться на 1%.

Якщо функція $y=f(x)$ встановлює залежність між об'ємом споживання y та прибутком x, то еластичність $E_x(y)$ наближено показує на скільки процентів зміниться об'єм споживання, якщо прибуток зміниться на 1 %.

Якщо $E_x(y)$ – еластичність попиту, то попит називається ***еластичним***, якщо $|E_x(y)|>1$, ***нееластичним***, якщо $|E_x(y)|<1$ відносно ціни або прибутку. Якщо $|E_x(y)|=1$, то попит називається ***нейтральним***.

Нехай функція $S=S(p)$ являє собою пропозицію, тобто кількість товару, запропонованого на продаж в одиницю часу, а p – ціна за одиницю товару. Зрозуміло, якщо підвищується ціна p, то підвищується і пропозиція S. Отже, функція $S=S(t)$ є зростаючою функцією, а значить, $S'(p)\geq 0$. Тоді еластичність $E_p(S)$ є величиною невід'ємною.

Нехай функція $q=q(p)$ являє собою попит, тобто кількість товару, проданого в одиницю часу, а p – ціна за одиницю товару. Якщо підвищується ціна p, то зменшується попит q. Отже, функція $q=q(p)$ є спадною функцією, а значить $q'(p)\leq 0$. У такому разі еластичність $E_p(q)$ є величиною недодатною.

Приклади до пункту 2.9.3

Приклад 2.186. Функція $k(x)=5x+x^2+x^3$ описує залежність між витратами виробництва $k(x)$ та обсягом виробленої продукції x. Знайти середні та граничні витрати виробництва, якщо обсяг виробленої продукції складає 25 одиниць.

Р о з в ' я з а н н я

Знаходимо середні витрати на одиницю продукції.

$$k_{сер}=\frac{k(x)}{x}=5+x+x^2.$$

Якщо $x=25$, то $k_{сер}=k(25)=655$ (грош. од.).

Знаходимо граничні витрати виробництва.

$$k'(x)=5+2x+3x^2.$$

Якщо $x=25$, то $k'(x)=130$ (грош. од.).

Отже, середні витрати на виробництво одиниці продукції складають 655 (грош. од.), а додаткові витрати на виробництво додаткової одиниці продукції, якщо обсяг виробленої продукції дорівнює 25 одиниць, складає 130 (грош. од.).

В і д п о в і д ь: 655 (грош. од.); 130 (грош. од.).

Приклад 2.187. Функція повних витрат k має вигляд $k=x^3+2x^2+x$, де x – обсяг виробництва. Дослідити характер змінювання цієї функції, а також функції середніх витрат. Побудувати графіки цих функцій.

Р о з в ’ я з а н н я

а) Дослідження функції повних витрат *k*

I. Основні відомості про функцію.

1 Область визначення функції: $x \in [0, +\infty)$.

2 Інтервали неперервності: $x \in [0, +\infty)$.

3 Функція не є парною і не є непарною.

4 Функція неперіодична.

5 Точки перетину графіка функції з осями координат.

а) Точки перетину з віссю *Oy*. Якщо $x = 0$, то $k = 0$. Точка *O*(0, 0) належить графіку функції.

б) Точки перетину з віссю *Ox*. Якщо $k = 0$, то $x = 0$ та $x = -1$, але точка $x = -1$ не належить до області визначення функції.

II. Інтервали монотонності та точки екстремуму

1. Знаходимо похідну першого порядку $k'(x)$.

$$k'(x) = 3x^2 + 4x + 1.$$

2. Знаходимо критичні точки 1-го роду функції $k(x)$ з рівняння $k'(x) = 0$, тобто $3x^2 + 4x + 1 = 0$, звідки $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{1}{3}$, але ці точки не належать області визначення функції.

Критичні точки, в яких похідна $k''(x)$ не існує або дорівнює нескінченності, відсутні.

3. Визначаємо знак похідної першого порядку в області визначення функції.

$$k'(x) \geq 0, \text{ якщо } x \in [0, +\infty).$$

4. Визначаємо характер монотонності функції.

В інтервалі $[0, +\infty)$ $k'(x) > 0$, функція $k(x)$ зростає.

5. Точки екстремуму відсутні.

III. Інтервали опуклості та угнутості, точки перегину графіка функції

1. Знаходимо похідну другого порядку $k''(x)$.

$$k''(x) = 6x + 4 = 2(3x + 2).$$

2. Знаходимо критичні точки 2-го роду функції $k(x)$ з рівняння $k''(x) = 0$, тобто $2(3x + 2) = 0$, звідки $x = -\frac{2}{3}$, але це значення x не належить до області визначення функції.

Критичні точки, в яких похідна $k''(x)$ не існує або дорівнює нескінченності, відсутні.

3. Визначаємо знак похідної другого порядку.

$$k''(x) > 0, \text{ якщо } x \in [0, +\infty).$$

4. Визначаємо характер опуклості та угнутості графіка функції.
   В інтервалі $[0, +\infty)$ $k''(x) > 0$, графік функції $k(x)$ угнутий.

5. Точки перегину відсутні.

IV. Асимптоти графіка функції

Графік функції асимптот не має.

Побудова графіка функції

За результатами дослідження функції будуємо графік, зображений на рис. 2.36.

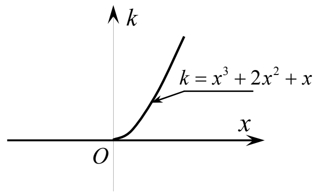


Рисунок 2.36

б) Дослідження функції середніх витрат

$$f(x) = \frac{k(x)}{x} = \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x} = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2.$$

І.Основні відомості про функцію

1. Область визначення функції: $x \in [0, +\infty)$.
2. Інтервали неперервності: $x \in [0, +\infty)$.
3. Функція не є парною чи непарною.
4. Функція неперіодична.
5. Точки перетину графіка функції з осями координат.
   а) Якщо $x = 0$, то $f(x) = 1$; маємо точку $A(0, 1)$.
   б) Якщо $y = 0$, то $x = -1$, але значення $x = -1$ не входить до області визначення функції.

ІІ. Інтервали монотонності, точки екстремуму

1. Знаходимо похідну першого порядку $f'(x)$.

$$f'(x) = 2(x+1).$$

2. Знаходимо критичні точки 1-го роду функції $f(x)$ з рівняння $f'(x) = 0$, тобто $2(x+1) = 0$, тоді $x = -1$, але $x = -1$ не належить до області визначення функції.

Критичні точки, в яких похідна $f'(x)$ не існує або є нескінченною, відсутні.

3. Визначаємо знак похідної $f'(x)$.

$$f'(x) > 0.$$

4. Визначаємо характер монотонності функції.

На проміжку $\left[0, +\infty\right)$ $f'(x) > 0$, функція $f(x)$ зростає.

5. Точки екстремуму відсутні.

III. Інтервали опуклості та угнутості, точки перегину графіка функції

1. Знаходимо похідну другого порядку $f''(x)$.

$$f''(x) = 2.$$

2. Критичні точки 2-го роду функції $f(x)$ відсутні.
3. В усій області визначення $f''(x)$ зберігає додатний знак.
4. Графік функції в усій області визначення є угнутий.
5. Точок перегину немає.

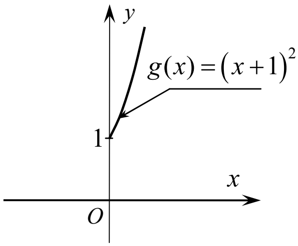


Рисунок 2.37

IV. Асимптоти графіка функції

Асимптоти відсутні.

V. Побудова графіка функції

За результатами дослідження побудуємо графік функції зображений на рисунку 2.37.

Приклад 2.188. Знайти еластичність функції $y = x\mathrm{e}^{-x^2}$ при $x = 1$ та при $x = 2$.

Р о з в ’ я з а н н я

Знайдемо $\varepsilon_x(y)$.

$$\varepsilon_x\left(y\right) = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x\mathrm{e}^{-x^2}}\left(\mathrm{e}^{-x^2} - 2x^2\mathrm{e}^{-x^2}\right) = 1 - 2x^2;$$

$$\varepsilon_x\left(y\right)|_{x=1} = -1.$$

Це означає, що при збільшенні x на 1 % y зменшиться на 1 %.

При $x = 2$ $\varepsilon_x\left(y\right)|_{x=2} = -7$, тобто при збільшенні x на 1 % y зменшиться на 7 %.

В і д п о в і д ь: $\varepsilon_x\left(1\right) = -1$; $\varepsilon_x\left(2\right) = -7$.

Приклад 2.189. Знайти еластичність попиту q відносно ціни p за умови, що попит q залежить від ціни, тобто $q = q\left(p\right)$.

Р о з в ’ я з а н н я

Величина $\varepsilon_p\left(q\right) = \dfrac{p}{q}\dfrac{dq}{dp}$ показує, як зміниться попит на товар, якщо ціна зросте на 1 %.

Зрозуміло, що коли ціни зростають, то попит зменшується, отже, $q(p)$ – спадна функція, а звідси виходить, що $\frac{dq}{dp}<0$. Тому $\varepsilon_p(q)$ є величиною недодатною.

Розглянемо частинний випадок.

Нехай $q=-2p^2+3p+8$. Знайдемо $\varepsilon_p(q)|_{p=1}$.

$$\varepsilon_p(q)=\frac{p}{q}(-4p+3)=\frac{-p(3-4p)}{-2p^2+3p+8}=\frac{p(4p-3)}{2p^2-3p-8};$$

$$\varepsilon_p(q)|_{p=1}=-\frac{1}{9},$$

тобто при зростанні ціни на 1 % попит зменшується на $\frac{1}{9}$ %.

В і д п о в і д ь: $\varepsilon_p(q)=-\frac{1}{9}$.

Приклад 2.190. Експериментально знайдені функція попиту $q=\frac{47+p}{5+p}$ та функція пропозиції $S=4p+2$, де q − кількість купленого товару за одиницю часу, S − кількість товару, запропонованого до продажу за одиницю часу, p − ціна за одиницю товару.

Знайти: 1) рівноважну ціну p, за якої попит дорівнює пропозиції; 2) еластичність попиту; 3) еластичність пропозиції.

Р о з в ’ я з а н н я

1. Рівноважну ціну p знайдемо з рівняння $q(p)=S(p)$, а саме $\frac{47+p}{5+p}=4p+2$, звідки $47+p=(4p+2)(5+1)$, $23p=46$, а $p=2$, тобто рівноважна ціна дорівнює 2 (грош. од.).

2. Знаходимо еластичність попиту

$$E_p(q)=\frac{p}{q}q', \text{ тобто } E_p(q)=\frac{p(5+p)}{(47+p)}\cdot\frac{5+p-47-p}{(5+p)^2}, \quad E_p(q)=\frac{-42}{(47+p)(5+p)}.$$

Для рівноважної ціни $p=2$ маємо

$$E_p(q)\Big|_{p=2}=-0.12.$$

Оскільки $\left|E_p(q)\Big|_{p=2}\right|<1$, то попит q за рівноважної ціни $p=2$ є нееластичним по відношенню до ціни. Якщо ціну змінити на 1 %, то попит зміниться на 0,12 %.

3. Знаходимо еластичність пропозиції.

$$E_p(S) = \frac{p}{S}S', \text{ тобто } E_p(S) = \frac{p}{4p+2}\cdot 4; \quad E_p(S) = \frac{2p}{2p+1}.$$

Для рівноважної ціни $p = 2$ маємо

$$E_p(S)\Big|_{p=2} = 0.8\,.$$

Оскільки $\left|E_p(S)\Big|_{p=2}\right| < 1$, то пропозиція S за рівноважної ціни $p = 2$ є нееластичною по відношенню до ціни. Якщо ціну змінити на 1 %, то попит зміниться на 0,8 %.

В і д п о в і д ь: 1) $p = 2$; 2) $E_p(q)\Big|_{p=2} = -0{,}12$; 3) $E_p(S)\Big|_{p=2} = 0{,}8$.

Приклад 2.191. Зростання чисельності населення певної області (1964 – 1973 рр.) описується функцією $N(t) = 35\,825t + 2\,026\,993$, а зростання (літрів) обсягу продуктування молочних продуктів описується функцією $M(t) = 15\,829t + 89\,976$, де $1 \le t \le 10$ – час у роках. Знайти швидкість зростання обсягу продуктування молочних продуктів (л) на душу населення через п’ять років.

Р о з в ’ я з а н н я

Обсяг продуктування молочних продуктів на душу населення визначається співвідношенням

$$y(t) = \frac{M(t)}{N(t)} = \frac{15\,829t + 89\,976}{35\,825t + 2\,026\,993},$$

а швидкість зростання обсягу продуктування молочних продуктів на душу населення – функцією

$$y'(t) = \left(\frac{15\,829t + 89\,976}{35\,825t + 2\,026\,993}\right)' = \frac{28\,861\,881\,997}{(35\,825t + 2\,026\,993)^2},$$

звідки $y'(5) \approx 0{,}006$ (л/люд.)

В і д п о в і д ь: 0,006 (л/люд.)

Приклад 2.192. Попит на певний товар визначається функцією

$$q = \frac{600}{p+20},$$

де p – ціна, q – попит. Дослідити, в який спосіб змінюється виручка залежно від попиту, якщо виручка $u = qp$.

Р о з в ’ я з а н н я

Виручка

$$u(p) = qp = \frac{600p}{p+20},$$

звідки

$$u'(p) = \frac{1200}{(p+20)^2} > 0, \quad u''(p) = \frac{-2400}{(p+20)^3} < 0.$$

З того, що $u'(p) > 0$, виходить, що виручка збільшується. З того, що $u''(p) < 0$, виходить, що при зростанні попиту швидкість зростання виручки зменшується (рис. 2.38).

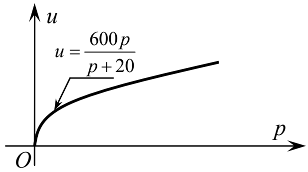


Рисунок 2.38

В і д п о в і д ь: виручка збільшується; швидкість зростання виручки зменшується.

Застосування похідної складної функції

Приклад 2.193. Залежність врожаю від кількості x внесених добрив подається функцією $z = 5 + 0,2x + 3\sqrt{x}$, $4 \le x \le 6$. Незмінні витрати на кожен гектар (незалежні від врожайності) становлять 3 гривні, пропорційні – 50 гривень на гектар. Знайти залежність собівартості одного центнера врожаю з кожного гектара від кількості внесених добрив у кілограмах.

Р о з в ’ я з а н н я

За врожайності z собівартість центнера становить $y = 3 + \frac{50}{z}$.

Знайдемо похідні y'_z та z'_x.

$$y'_z = -\frac{50}{z^2}; \quad z'_x = 0,2 + \frac{3}{2\sqrt{x}}.$$

Згідно з теоремою про похідну складної функції маємо

$$y'_x = y'_z \cdot z'_x = -\frac{50}{z^2}\left(0,2 + \frac{3}{2\sqrt{x}}\right).$$

Коли $x = 4$, то $z = 11,8$, а $z'_x = 0,95$, а це означає збільшення врожаю на 0,95 ц з гектара при збільшенні кількості добрив на 1ц. З іншого боку, $z = 11,8$, $y \approx 7,24$, а $y'_z \approx -0,36$, тобто збільшення кількості добрив на 1 ц з гектара зменшує собівартість на 0,36 грив.

Отже, збільшення кількості добрив на 1 ц. зменшує собівартість врожаю на величину $36 \cdot 0,95 = 34,2$ коп. з гектара.

В і д п о в і д ь: збільшення кількості добрив зменшує собівартість на 34.2 коп. з га.

Застосовування диференціала функції

Приклад 2.194. Нехай 50 тис. робітників працюють в середньому з продуктивністю 30 одиниць продукції кожен щорічно. Зростання числа робітників становить 4 тис. на рік, зростання продукції – 10 одиниць в рік. Визначити обсяг випуску продукції за такого зростання.

Р о з в ’ я з а н н я

Нехай u – кількість робітників, v – продуктивність праці на одного робітника; u' – швидкість зростання кількості робітників; v' – швидкість зростання продуктивності. Тоді обсяг продукції, що випускається з урахуванням зростання продуктивності та чисельності робітників, є таким

$$Q = u\,v + d\left(u\,v\right),$$

де

$$d\left(u\,v\right) = u\,d\,v + v\,d\,u \quad \text{або} \quad d\left(u v\right) = \left(u' v + u v'\right) d\,t\,.$$

Припустимо, що $d\,t = \Delta t = 1$ (рік). Тоді обсяг продукції, що випускається

$$Q = 50 \cdot 30 + 4 \cdot 30 + 10 \cdot 50 = 2\,120 \text{ тис. одиниць продукції.}$$

В і д п о в і д ь: $Q = 2\,120$ (тис. од. прод.).

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що називається похідною функції?
2. Що називається однобічною похідною?
3. Яка похідна називається нескінченною? Наведіть приклади.
4. У чому полягає геометричний зміст похідної?
5. У чому полягає фізичний зміст похідної?
6. Що називається дотичною до графіка функції?
7. Що називається нормаллю до графіка функції?
8. Яка функція називається диференційовною?
9. У чому полягає необхідна та достатня умова диференційовності функції?
10. Функція $y = f(x)$ диференційовна у точці x_0. Чи можна стверджувати, що ця функція неперервна у точці x_0?
11. Функція $y = f(x)$ неперервна у точці x_0. Чи можна стверджувати, що ця функція диференційовна у точці x_0?
12. Сформулюйте теорему про похідну складної функції.
13. Сформулюйте теорему про похідну оберненої функції.
14. У чому полягає геометричний та фізичний зміст диференціала?
15. У чому полягає інваріантність форми диференціала?
16. Яку роль відіграє умова неперервності функції на сегменті $[a, b]$ у теоремі Ролля?
17. Чи буде справедливою теорема Ролля, якщо значення функції на кінцях сегмента не збігаються?
18. У чому полягає геометричний зміст теореми Ролля?
19. У чому полягає геометричний зміст теореми Лагранжа?
20. Сформулюйте теореми, для доведення яких було використано теорему Ролля.
21. Сформулюйте теореми, для доведення яких було використано теорему Лагранжа.
22. Сформулюйте теореми, для доведення яких було використано теорему Коші.
23. Сформулюйте першу та другу теореми Лопіталя.
24. Сформулюйте необхідну та достатню умову зростання функції.
25. Що називається локальним екстремумом функції?
26. Що називається глобальним екстремумом функції?
27. Який зв'язок існує між критичними точками графіка функції та точками екстремуму?
28. Сформулюйте необхідну та достатню умову опуклості графіка функції.
29. Сформулюйте достатню умову існування точки перегину графіка функції.
30. Що називається асимптотою графіка функції? Які бувають асимптоти графіка функції?

ПЕРЕВІРНІ ТЕСТИ

1. Задано функцію $y = \ln(5x - 7)$. Знайти область визначення похідної y'. Яке з тверджень є справедливим:

1) $x \in \left(\frac{7}{5}, +\infty\right)$; 2) $x \in \left(-\infty, \frac{7}{5}\right) \cup \left(\frac{7}{5}, +\infty\right)$; 3) $x \in \left[\frac{7}{5}, +\infty\right)$; 4) інша відповідь?

2. Задано функцію $f(x) = \arccos x \cdot \operatorname{arctg} x$. Знайти значення похідної $f'(x)$ у точці $x_0 = 0$. Яке з тверджень є справедливим:

1) 0; 2) π; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) інша відповідь?

3. Задано функцію $f(x) = \sin(\cos^2 x)$. Знайти значення похідної $f'(x)$ у точці $x_0 = \frac{\pi}{2}$. Яке з тверджень є справедливим:

1) 0; 2) 1; 3) –2; 4) інша відповідь?

4. Задано функцію $f(x) = x + \frac{1}{5}x^5$. Знайти похідну $\left(f^{-1}(x)\right)'$ у точці $x = \frac{6}{5}$. Яке з тверджень є справедливим:

1) $\frac{1}{2}$; 2) 2; 3) 6; 4) інша відповідь?

5. Задано функцію $\begin{cases} x = t + 2t^2 + t^3; \\ y = -2t + 3t - t^3, \end{cases}$ де $1 < t < +\infty$. Знайти похідну $\frac{dy}{dx}$ у точці $t = 5$. Яке з тверджень є справедливим:

1) $\frac{4}{3}$; 2) $\frac{3}{4}$; 3) $-\frac{3}{4}$; 4) інша відповідь?

6. Задано функцію $y = 4x^2 + 9x - 3$. До графіка цієї функції проведено дотичну в такий спосіб, що точка $M_0(1, 10)$ є точкою дотику. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної. Яке з тверджень є справедливим:

1) 13; 2) 10; 3) 17; 4) інша відповідь?

7. Тіло рухається траєкторією, яку можна описати рівнянням $S(t) = 9 \cdot 5^t + 4$, де t виміряється у секундах, а S – у метрах. Знайти швидкість, з якою рухається тіло у момент $t_0 = 2$ с з початку руху. Яке з тверджень є справедливим:

1) 45 м/с; 2) 229 м/с; 3) 49 м/с; 4) інша відповідь?

8. Задано функцію $y = \ln(3x - 1)$. Знайти похідну $y'''(x)$ цієї функції у точці $x = 1$. Яке з тверджень є справедливим:

1) $-\frac{36}{5}$; 2) $\frac{1}{8}$; 3) $-\frac{27}{4}$; 4) інша відповідь?

9. На сегменті $[a, b]$, де $0 < a < b$, функція $f(x) = x^3$ задовольняє умови теореми Лагранжа. Знайти число c, що входить до формули Лагранжа. Яке з тверджень є справедливим:

1) $b^3 - a^3$; 2) $\sqrt{b^3 - a^3}$; 3) $\sqrt{\frac{b^3 + ab + a^3}{3}}$; 4) інша відповідь?

10. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x - x}{x^3}$. Яке з тверджень є справедливим:

1) ∞; 2) 0; 3) $-\dfrac{1}{3}$; 4) інша відповідь?

11. Задано функцію $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Яке з тверджень є справедливим:

1) функція спадає на проміжку $(-\infty, 2)$;
2) функція спадає на проміжку $(2, +\infty)$;
3) функція спадає на проміжку $(1, 3)$;
4) інша відповідь?

12. Задано функцію $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$. Знайти суму значень функції у точках екстремуму. Яке з тверджень є справедливим:

1) 0; 2) 2; 3) –2; 4) інша відповідь?

13. Задано функцію $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$. Знайти її найменше значення на проміжку $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Яке з тверджень є справедливим:

1) 1; 2) $\dfrac{1}{2}$; 3) $\dfrac{3}{2}$; 4) інша відповідь?

14. Задано функцію $f(x) = x^3 - 6x + 2x + 37$. Яке з тверджень є справедливим:

1) графік функції є угнутим в інтервалі $(-\infty, -2)$;
2) графік функції є угнутим в інтервалі $(-2, +\infty)$;
3) графік функції є угнутим в інтервалі $(2, +\infty)$;
4) інша відповідь?

15. Задано функцію $f(x) = x + 36x^2 - 2x^3 - x^4$. Сума абсцис точок перегину графіка цієї функції дорівнює:

1) –1; 2) –3; 3) 2; 4) інша відповідь?

Яке з припущень є правильним?

16. Задано функцію $f(x) = \dfrac{2x}{(x+2)(x-3)}$. Знайти кількість вертикальних асимптот графіка функції. Яке з тверджень є справедливим:

1) немає вертикальних асимптот;
2) є одна вертикальна асимптота;
3) є дві вертикальні асимптоти;
4) інша відповідь?

17. Задано функцію $f(x) = 2x + \operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}$. Знайти кількість вертикальних асимптот графіка функції. Яке з тверджень є справедливим:

1) немає вертикальних асимптот;
2) є одна вертикальна асимптота;
3) є дві вертикальні асимптоти;
4) інша відповідь?

18. Задано функцію $f(x)=5x+\operatorname{arctg}\frac{x}{5}$. Знайти кількість похилих асимптот графіка функції. Яке з тверджень є справедливим:

1) немає похилих асимптот;
2) є одна похила асимптота;
3) є дві похилі асимптоти;
4) інша відповідь?

19. Задано функцію $y=x+\frac{x}{3x-1}$. Яке з тверджень є справедливим:

похила асимптота, яку має графік цієї функції,

1) паралельна прямій $y = 3x + 1$;
2) паралельна прямій $y = \frac{1}{3}x + 1$;
3) паралельна прямій $y = x + 3$;
4) інша відповідь?

20. Задано функцію $f(x)=4x^3-11$. Яке з тверджень є справедливим:

1) функція $f(x)$ досягає найменшого та найбільшого значення у проміжку $[-1, 4)$;
2) функція $f(x)$ досягає найменшого та найбільшого значення у проміжку $(-1, 4)$;
3) функція $f(x)$ досягає найменшого та найбільшого значення у проміжку $[-1, 4]$;
4) інша відповідь?

21. Задано функцію $y=\frac{1}{x^2}$ на проміжку $[1, 2)$. Яке з тверджень є справедливим:

1) функція має найменше значення $m=\frac{1}{4}$;
2) функція має найменше значення $m=1$;
3) функція не має найменшого значення;
4) інша відповідь?

22. Задано функцію $f(x)=(x+5)^2$. Яке з тверджень є справедливим:

1) її диференціал третього порядку у точці $x = 0$ дорівнює $60000dx^3$;
2) її диференціал третього порядку у точці $x = 0$ дорівнює $1500dx^3$;
3) її диференціал третього порядку у точці $x = 0$ дорівнює $125dx^3$;
3) інша відповідь?

23. Задано функцію $\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{1+t^3}; \\ y = \dfrac{t^3}{1+t^3}, \end{cases}$ де $t \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$. Знайти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Яке з тверджень є справедливим:

1) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{6}{t}\left(\dfrac{1+t^3}{2-t^3}\right)^3$; 2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{6}{t}\dfrac{\left(1+t^3\right)^3}{\left(2-t^3\right)^2}$; 3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 6\left(\dfrac{1+t^3}{2-t^3}\right)^3$;

4) інша відповідь?

24. Задано функцію $y = \dfrac{1+x}{1-x}$. Знайти $y^{(n)}(x)$. Яке з тверджень є справедливим:

1) $y^{(n)}(x) = \dfrac{(2n)!}{(1-x)^{n+1}}$; 2) $y^{(n)}(x) = \dfrac{2n!}{(1-x)^{n+1}}$; 3) $y^{(n)}(x) = \dfrac{(1+x)^{n+1}}{2n!}$;

4) інша відповідь?

25. Знайти границю $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$

Яке з тверджень є справедливим:

1) 3; 2) 1/3; 3) 0; 4) інша відповідь?

ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ

1. Знайти похідні функцій, що є результатами арифметичних операцій, та обчислити значення похідних в точці x_0.

1.01. $f(x)=\left(4\sin x-9\cos x\right)\left(\operatorname{tg} x+3\operatorname{ctg} x\right);$ $x_0=\dfrac{\pi}{6}.$

1.02. $f(x)=\dfrac{\arcsin x}{\arccos x}-\sin x\cos x;$ $x_0=\dfrac{1}{2}.$

1.03. $f(x)=\left(4x^3-2x^2+1\right)\left(\sqrt{x}-5\sqrt[5]{x}\right);$ $x_0=1.$

1.04. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-x^2\sqrt[3]{x}}{x\sqrt[8]{x}};$ $x_0=1.$

1.05. $f(x)=\left(4e^x+7\ln x\right)\left(x^2-1\right);$ $x_0=1.$

1.06. $f(x)=\dfrac{4^x+x^4}{\sqrt[4]{x}};$ $x_0=1.$

1.07. $f(x)=\operatorname{tg} x\operatorname{arctg} x-\dfrac{x^2+1}{2^x+1};$ $x_0=0.$

1.08. $f(x)=\dfrac{3^x x^3-1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{3}};$ $x_0=1.$

1.09. $f(x)=\left(4\ln x-9\lg x+6\log_5 x\right)\sqrt{x};$ $x_0=1.$

1.10. $f(x)=\left(7\sqrt{x}+4\sqrt[3]{x}\right)\left(x^3\sqrt[3]{x}-1\right);$ $x_0=1.$

1.11. $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg} x}{x^2+1}-\dfrac{x^2+1}{1-x^2};$ $x_0=0.$

1.12. $f(x)=x^4\left(x^2-2\right)-x^2\operatorname{ctg} x+5x;$ $x_0=\dfrac{\pi}{4}.$

1.13. $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3\ln x-\dfrac{1}{9}x^3+1;$ $x_0=1.$

1.14. $f(x)=2\cos x+2x\sin x-x^2\cos x;$ $x_0=0.$

1.15. $f(x)=\left(\dfrac{1}{4}\ln x+\dfrac{1}{2}\arcsin x\right)x;$ $x_0=\dfrac{1}{2}.$

1.16. $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{9}{\operatorname{arctg} x};$ $x_0=1.$

1.17. $f(x)=\left(4x^5-9x+6\right)\sqrt[5]{x};$ $x_0=1.$

1.18. $f(x)=\left(x^5-1\right)\left(x^3+1\right)-\dfrac{x^4-1}{x^4+1};$ $x_0=2.$

1.19. $f(x)=\operatorname{tg} x\operatorname{ctg} x\left(\sin^2 4x+\cos^2 4x\right)\sqrt[3]{x};$ $x_0=\dfrac{\pi}{4}.$

1.20. $f(x)=\left(\sin 3x\cos 2x-\sin 2x\cos 3x\right)\cos x$; $\quad x_0=\dfrac{\pi}{3}$.

1.21. $f(x)=\mathrm{e}^{\ln\left(x^{10}-x^{9}\right)}+\sqrt{\mathrm{e}^{\ln x^2}}$; $\quad x_0=1$.

1.22. $f(x)=\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 x}$; $\quad x_0=\dfrac{\pi}{4}$.

1.23. $f(x)=\sqrt{1-\cos 2x}\cdot x^2$; $\quad x_0=\dfrac{\pi}{6}$.

1.24. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}+x^2}$; $\quad x_0=1$.

1.25. $f(x)=\dfrac{3\sin x+4\cos x}{\sin^2 16^\circ+\cos^2 16^\circ}$; $\quad x_0=\dfrac{\pi}{3}$.

2. Знайти похідні складних функцій та обчислити значення похідних в точці x_0.

2.01. $f(x)=\sin 3x+\sin^3 x$; $\quad x_0=0$.

2.02. $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{3\sin^3 x}$; $\quad x_0=\dfrac{\pi}{6}$.

2.03. $f(x)=\dfrac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x+\mathrm{tg}\,x-1$; $\quad x_0=\dfrac{\pi}{4}$.

2.04. $f(x)=\dfrac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+\cos\dfrac{\pi}{4}$; $\quad x_0=\dfrac{\pi}{4}$.

2.05. $f(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left(\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2}\right)-\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}$; $\quad x_0=\dfrac{\pi}{2}$.

2.06. $f(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{tg}\,x}+3^{\sin^3 x}$; $\quad x_0=\dfrac{\pi}{4}$.

2.07. $f(x)=\left(9x^2-\sqrt[4]{x}\right)^{10}$; $\quad x_0=1$.

2.08. $f(x)=\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+x+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$; $\quad x_0=\dfrac{1}{2}$.

2.09. $f(x)=\ln\sqrt{x^2+2x+2}+\mathrm{arctg}(x+1)$; $\quad x_0=0$.

2.10. $f(x)=9\arccos\left(2\sqrt{x}\right)$; $\quad x_0=\dfrac{1}{16}$.

2.11. $f(x)=\dfrac{x}{4}\left(x^2-2\right)\sqrt{4-x^2}+2\arcsin\dfrac{x}{2}$; $\quad x_0=0$.

2.12. $f(x)=\dfrac{4}{\sqrt{6}}\mathrm{arctg}\dfrac{3x-1}{\sqrt{x}}$; $\quad x_0=1$.

2.13. $f(x)=\ln\left(\mathrm{tg}\left(4x+\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$; $\quad x_0=\dfrac{\pi}{16}$.

2.14. $f(x)=\ln(\arcsin x)$; $x_0=\dfrac{1}{2}$.

2.15. $f(x)=x\ln\left(x+\sqrt{x^2+16}\right)-\sqrt{x^2+16}$; $x_0=0$.

2.16. $f(x)=\ln\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}$; $x_0=1$.

2.17. $f(x)=\ln\left(x+\dfrac{3}{4}+\sqrt{x^2+\dfrac{3}{2}x}\right)$; $x_0=1$.

2.18. $f(x)=\mathrm{e}^{x^2+9x+1}$; $x_0=5$.

2.19. $f(x)=5^{\log_5\left(x^4\sin^4 x\right)}$; $x_0=\dfrac{\pi}{4}$.

2.20. $f(x)=\sqrt{\arcsin 9x}$; $x_0=\dfrac{1}{81}$.

2.21. $f(x)=\sqrt[3]{x^2-9x+\sqrt{x}}$; $x_0=4$.

2.22. $f(x)=\sqrt{x^2\mathrm{e}^x+\sin^2 x}$; $x_0=\dfrac{\pi}{2}$.

2.23. $f(x)=\ln\left(x\sin x+\sqrt{1-x^2}\right)$; $x_0=0$.

2.24. $f(x)=\mathrm{arctg}\,x^2-\mathrm{arctg}^2 x$; $x_0=0$.

2.25. $f(x)=\mathrm{ctg}^2\dfrac{x+\pi}{3}+\mathrm{ctg}\dfrac{x^2+\pi}{4}$; $x_0=0$.

3. Знайти похідні функцій, користуючись правилом логарифмічного диференціювання, та обчислити їхні значення в точці x_0.

3.01. $f(x)=\left(1+x^2+\sin x\right)^{x^4}$; $x_0=0$.

3.02. $f(x)=\left(\sqrt{5x^4+1}\right)^{\sin^2 x}$; $x_0=0$.

3.03. $f(x)=(\ln x)^x$; $x_0=\mathrm{e}^2$.

3.04. $f(x)=x^{\sin(x+1)}$; $x_0=0$.

3.05. $f(x)=\left(\dfrac{x^3+1}{x^3-1}\right)^{x^3}$; $x_0=2$.

3.06. $f(x)=(\cos x)^{\sin x}$; $x_0=\dfrac{\pi}{4}$.

3.07. $f(x)=\left(\sqrt{x}\right)^{x^2}$; $x_0=4$.

3.08. $f(x)=(\mathrm{arctg}\,x)^{\sqrt{x}}$; $x_0=1$.

3.09. $f(x)=(\mathrm{arctg}\,x)^{\mathrm{e}^x}$; $x_0=1$.

3.10. $f(x)=(\ln x)^{\ln x}$; $x_0=\mathrm{e}$.

3.11. $f(x)=\left(x^2+1\right)^{\frac{2}{x^2}}$; $x_0=1$.

3.12. $f(x)=(x\,\mathrm{tg}\,x)^{\mathrm{e}^x}$; $x_0=\dfrac{\pi}{4}$.

3.13. $f(x)=x^{\arccos x}$; $x_0=\dfrac{1}{2}$.

3.14. $f(x)=(5x+1)^{\sin^2 x}$; $x_0=1$.

3.15. $f(x)=\left(\operatorname{arctg} x\right)^{\operatorname{arctg} x}$; $x_0=1$. **3.16.** $f(x)=\left(\arcsin x\right)^{\arccos x}$; $x_0=\dfrac{1}{2}$.

3.17. $f(x)=\dfrac{\left(x^2+1\right)\left(x^3+2\right)\sqrt{x}}{\left(x^4+3\right)\left(x^5+5\right)\sqrt[3]{x}}$; $x_0=1$. **3.18.** $f(x)=x\sin x\cos^2 x\operatorname{tg}x\operatorname{ctg}^2 x$; $x_0=\dfrac{\pi}{6}$.

3.19. $f(x)=\sqrt[5]{x\sqrt[4]{x\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}}$; $x_0=1$. **3.20.** $f(x)=x^5\,\mathrm{e}^x\,2^{x^2}\,4^{x^3}\,5^{x^4}$; $x_0=1$.

3.21. $f(x)=\sqrt{\sin x\sqrt{\sin x\sqrt{\sin x}}}$; $x_0=\dfrac{\pi}{6}$. **3.22.** $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x}\sqrt{\sin x}}{\left(x^2+1\right)\operatorname{tg}^2 x\,4^x}$; $x_0=\dfrac{\pi}{4}$.

3.23. $f(x)=(2x-3)(3x-4)(4x-5)(5x-6)(6x-7)$; $x_0=1$.

3.24. $f(x)=\sqrt{x^2+1}\cdot\sqrt[3]{x^3+1}\cdot\sqrt[4]{x^4+1}\cdot\sqrt[5]{x^5+1}$; $x_0=1$.

3.25. $f(x)=\sin x\sin 2x\sin 3x\sin 4x\sin 5x$; $x_0=\dfrac{\pi}{6}$.

4. Знайти похідні функцій y'_x, заданих у параметричній формі, та обчислити їхні значення в точці t_0.

4.01. $\begin{cases}x=t^2;\\ y=\sqrt{t}+\sqrt[3]{t};\end{cases}$ $t_0=1$. **4.02.** $\begin{cases}x=\cos t;\\ y=4+\sin t;\end{cases}$ $t_0=\dfrac{\pi}{4}$.

4.03. $\begin{cases}x=9\cos t;\\ y=9\sin t;\end{cases}$ $t_0=\dfrac{\pi}{6}$. **4.04.** $\begin{cases}x=\cos^3 t;\\ y=\sin^3 t;\end{cases}$ $t_0=\dfrac{\pi}{6}$.

4.05. $\begin{cases}x=t(1-\sin t);\\ y=t\cos t;\end{cases}$ $t_0=\dfrac{\pi}{4}$. **4.06.** $\begin{cases}x=\mathrm{e}^t\sin t;\\ y=\mathrm{e}^t\cos t;\end{cases}$ $t_0=\dfrac{\pi}{6}$.

4.07. $\begin{cases}x=\arcsin t;\\ y=\arccos t;\end{cases}$ $t_0=\dfrac{1}{4}$. **4.08.** $\begin{cases}x=t^3+1;\\ y=\dfrac{1}{3}t^3-t;\end{cases}$ $t_0=1$.

4.09. $\begin{cases}x=\mathrm{e}^{2t};\\ y=2\mathrm{e}^{-t};\end{cases}$ $t_0=0$. **4.10.** $\begin{cases}x=5(\cos t+t\sin t);\\ y=5(\sin t-t\cos t);\end{cases}$ $t_0=\dfrac{\pi}{3}$.

4.11. $\begin{cases}x=\operatorname{ctg} t;\\ y=\dfrac{1}{\cos^2 t};\end{cases}$ $t_0=\dfrac{\pi}{6}$. **4.12.** $\begin{cases}x=\arcsin 3t;\\ y=\arccos 2t;\end{cases}$ $t_0=\dfrac{1}{10}$.

4.13. $\begin{cases}x=\dfrac{1}{3}t^3+\dfrac{1}{2}t^2+t;\\ y=\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{1}{2};\end{cases}$ $t_0=1$. **4.14.** $\begin{cases}x=t^5+2t;\\ y=t^3+8t-1;\end{cases}$ $t_0=1$.

4.15. $\begin{cases} x = t + \dfrac{1}{2}\sin 2t; \\ y = \cos^3 t; \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{6}.$

4.16. $\begin{cases} x = t + \ln(\cos t); \\ y = t - \ln(\sin t); \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{6}.$

4.17. $\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{1+t^3}; \\ y = \dfrac{t^3}{1+t^3}; \end{cases}$ $t_0 = 1.$

4.18. $\begin{cases} x = \left(1+\cos^2 t\right)\sin t; \\ y = \sin^2 t \cdot \cos t; \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{6}.$

4.19. $\begin{cases} x = t\,\mathrm{ch}\,t - \mathrm{sh}\,t; \\ y = t\,\mathrm{sh}\,t - \mathrm{ch}\,t; \end{cases}$ $t_0 = 1.$

4.20. $\begin{cases} x = \dfrac{e^t}{1+t}; \\ y = (t-1)e^t; \end{cases}$ $t_0 = 1.$

4.21. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{\cos t}; \\ y = \mathrm{tg}\,t - t; \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{6}.$

4.22. $\begin{cases} x = \sin\left(\log_2 t\right); \\ y = \mathrm{tg}\left(\log_2 t\right); \end{cases}$ $t_0 = 2^{\frac{\pi}{4}}.$

4.23. $\begin{cases} x = \log_5(\sin t); \\ y = \log_5(\cos t); \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{6}.$

4.24. $\begin{cases} x = \arcsin(\mathrm{tg}\,t); \\ y = \sqrt{\cos 2t}; \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{6}.$

4.25. $\begin{cases} x = \sin^2 t; \\ y = t^2 + 2t; \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{4}.$

5. Знайти похідні зазначеного порядку від заданих функцій та обчислити їхні значення в точці x_0.

5.01. $y = 1 + 10x + \dfrac{1}{x^{98}}.$ Знайти y'' в точці $x_0 = 1.$

5.02. $y = \dfrac{\sqrt{2x}\left(1+5\sqrt{5-x^2}\right)}{\sqrt[3]{1-x^2}}.$ Знайти y'' в точці $x_0 = 2.$

5.03. $y = \arcsin\dfrac{x^2-1}{x^2+1}.$ Знайти y'' в точці $x_0 = \sqrt{3}.$

5.04. $y = x^3 + x + e^{3x}.$ Знайти y'' в точці $x_0 = 1.$

5.05. $y = \dfrac{1+x}{1-x}.$ Знайти y'' в точці $x_0 = 2.$

5.06. $y = \sin^2 x.$ Знайти y'' в точці $x_0 = \dfrac{\pi}{4}.$

5.07. $y = \sin 2x \cdot \sin 3x.$ Знайти y'' в точці $x_0 = \dfrac{\pi}{6}.$

5.08. $y = \sin^4 x + \cos^4 x.$ Знайти y^{IV} в точці $x_0 = \dfrac{\pi}{2}.$

5.09. $y = \cos^4 x$. Знайти y^{V} в точці $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

5.10. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$. Знайти y^{VI} в точці $x_0 = \dfrac{1}{25}$.

5.11. $y = \dfrac{x}{x^2 - 4x - 12}$. Знайти y^{VI} в точці $x_0 = 1$.

5.12. $y = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$. Знайти y^{VII} в точці $x_0 = 0$.

5.13. $y = \dfrac{3-2x^2}{2x^2+3x-2}$. Знайти y^{V} в точці $x_0 = 0$.

5.14. $y = (x-1)\, 2^{x-1}$. Знайти y''' в точці $x_0 = 1$.

5.15. $y = (3-2x)^2 \cdot \mathrm{e}^{2-3x}$. Знайти y^{VIII} в точці $x_0 = \dfrac{3}{2}$.

5.16. $y = x\log_2(1-3x)$. Знайти y^{IX} в точці $x_0 = 0$.

5.17. $y = \ln(x-1)^{2x}$. Знайти y^{VI} в точці $x_0 = 3$.

5.18. $y = x\ln\dfrac{3+x}{3-x}$. Знайти $y^{(15)}$ в точці $x_0 = 0$.

5.19. $y = x\ln\left(x^2 - 3x + 2\right)$. Знайти $y^{(11)}$ в точці $x_0 = 0$.

5.20. $y = 2x\cos^2\left(\dfrac{x}{3}\right)^2$. Знайти $y^{(12)}$ в точці $x_0 = 0$.

5.21. $\begin{cases} x = 7\cos t; \\ y = 7\sin . \end{cases}$ Знайти y'' в точці $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$.

5.22. $\begin{cases} x = 9\operatorname{ch} t; \\ y = 9\operatorname{sh} t. \end{cases}$ Знайти y'' в точці $x_0 = 1$.

5.23. $\begin{cases} x = 8(t - \sin t); \\ y = 8(1 - \cos t). \end{cases}$ Знайти y'' в точці $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$.

5.24. $\begin{cases} x = \mathrm{e}^{-t}\cos t; \\ y = \mathrm{e}^{-t}\sin t. \end{cases}$ Знайти y'' в точці $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$.

5.25. $\begin{cases} x = \cos t - \ln\left(\operatorname{arctg}\dfrac{t}{2}\right); \\ y = \sin t. \end{cases}$ Знайти y'' в точці $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

6. Знайти диференціали заданих функцій та обчислити *dy* за заданими x_0 та *dx*

6.01. $y = \left(x^2 - x + 1\right)\operatorname{tg}^2 x$; $x_0 = 1$; $dx = 0{,}01$.

6.02. $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$; $x_0=2$; $dx=0{,}02$.

6.03. $y=\ln\left[\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{x}{4}\right)\right]$; $x_0=\pi$; $dx=0{,}01$.

6.04. $y=\sqrt{\arcsin 2x}+7^{-x}$; $x_0=\dfrac{1}{4}$; $dx=0{,}01$.

6.05. $y=91^{-\frac{\sin x}{\ln x}}$; $x_0=\mathrm{e}$; $dx=0{,}01$.

6.06. $y=3^{\sqrt{\operatorname{arctg} x^2}}$; $x_0=1$; $dx=0{,}01$.

6.07. $y=\dfrac{7x+1}{(3x-2)^2}$; $x_0=1$; $dx=0{,}01$.

6.08. $y=\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x-1}\right)^2$; $x_0=2$; $dx=0{,}01$.

6.09. $y=\sin x\cdot\sin 2x\cdot\cos 3x$; $x_0=\dfrac{\pi}{6}$; $dx=0{,}01$.

6.10. $y=\left(2x^2+1\right)\operatorname{sh}^2 x$; $x_0=0$; $dx=0{,}01$.

6.11. $y=\arcsin^2 x$; $x_0=\dfrac{1}{2}$; $dx=0{,}01$.

6.12. $y=\ln\left(\operatorname{ctg} 4x\right)$; $x_0=\dfrac{\pi}{16}$; $dx=0{,}01$.

6.13. $y=\sqrt[3]{\left(1-x^2\right)^2}$; $x_0=2$; $dx=0{,}02$.

6.14. $y=x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$; $x_0=1$; $dx=0{,}03$.

6.15. $y=\ln(\ln x)$; $x_0=\mathrm{e}$; $dx=0{,}01$.

6.16. $y=\mathrm{e}^{\operatorname{arctg} x}$; $x_0=1$; $dx=0{,}01$.

6.17. $y=\left(1+\operatorname{arctg} x^2\right)$; $x_0=1$; $dx=0{,}01$.

6.18. $y=\ln(\sin x)+\sin(\ln x)$; $x_0=\dfrac{\pi}{4}$; $dx=0{,}01$.

6.19. $y=\left(\sqrt{x}+x^2\right)^{25}$; $x_0=2$; $dx=0{,}01$.

6.20. $y=\operatorname{arctg}^2 x+\operatorname{arcctg}^2 x$; $x_0=1$; $dx=0{,}01$.

6.21. $y=\left(1+\operatorname{tg}^2 7x\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{5}}$; $x_0=\dfrac{\pi}{28}$; $dx=0{,}01$.

6.22. $y=\left(8x^3-21\right)\sqrt{\left(7+4x^3\right)^2}$; $x_0=1$; $dx=0{,}01$.

6.23. $y=\mathrm{e}^{-x^2}\cos^3 2x$; $x_0=\dfrac{\pi}{6}$; $dx=0{,}01$.

6.24. $y=\ln\left(x^2+\sqrt{x^4+1}\right)$; $x_0=1$; $dx=0{,}01$.

6.25. $y=\ln\left(e^{2x}+1\right)+2\operatorname{arctg}e^{2x}$; $x_0=0$; $dx=0{,}01$.

7. Знайти інтервали монотонності та точки екстремуму функції. Обчислити величину *A = m + k*, де *m* – кількість точок розриву, а *k* – кількість точок локального екстремуму.

7.01. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x$.

7.02. $f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^2+1$.

7.03. $f(x)=\ln x-x^2$.

7.04. $f(x)=\sqrt[3]{(2x-7)(7-x)^2}$.

7.05. $f(x)=x^3e^{-x}$.

7.06. $f(x)=\operatorname{arctg}x-\ln x$.

7.07. $f(x)=x\lg x$.

7.08. $f(x)=\dfrac{x^2+x-1}{x^2-x+1}$.

7.09. $f(x)=x-\sqrt{2}\sin x$.

7.10. $f(x)=\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)$.

7.11. $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$.

7.12. $f(x)=x^3-\dfrac{x^4}{4}$.

7.13. $f(x)=x^5+5x^4+5x^3-2$.

7.14. $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$.

7.15. $f(x)=xe^{-x^2}$.

7.16. $f(x)=\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$.

7.17. $f(x)=e^x\cos x$.

7.18. $f(x)=x\sqrt[3]{1-x}$.

7.19. $f(x)=(x-1)^4(x+2)^2$.

7.20. $f(x)=(x-5)^2\sqrt[3]{(x+1)^2}$.

7.21. $f(x)=\sin x+3\sin\dfrac{x}{3}$.

7.22. $f(x)=\dfrac{2}{4x^3-9x^2+6x}$.

7.23. $f(x)=x(1+x)^2(1-x)^3$.

7.24. $f(x)=\dfrac{2-4x^2}{1-4x^2}$.

7.25. $f(x)=\ln\dfrac{x-1}{x-2}$.

8. Знайти найменші ($y_{\text{найм}}$) та найбільші ($y_{\text{найб}}$) значення функції на зазначеному проміжку.

8.01. $f(x)=2\sin x+\cos 2x$; $[0, \pi]$

8.02. $f(x)=\ln(1+x)$; $(-1, 1]$.

8.03. $f(x)=\sqrt{9-x^2}$; $[-3, 3]$.

8.04. $f(x)=\frac{1}{4}x^3-x^3$; $[0, 4]$.

8.05. $f(x)=2x^3-15x^2+36x-18$; $[1,3]$.

8.06. $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$; $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

8.07. $f(x)=2x^3-x^2+3x-2$; $[0,2)$.

8.08. $f(x)=\mathrm{ctg}^2 x-2\,\mathrm{ctg}\,x$; $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$.

8.09. $f(x)=x-\mathrm{arctg}\,x$; $[0,1)$.

8.10. $f(x)=x-\ln(1+x)$; $\left[-\frac{1}{2},1\right]$.

8.11. $f(x)=\dfrac{x+6}{x^2+13}$; $[-5,5]$.

8.12. $f(x)=0{,}5x+\cos x$; $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

8.13. $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2+16}$; $[-5,5]$.

8.14. $f(x)=0{,}5x-\sin x$; $\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$.

8.15. $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2+7}$; $[-3,7]$.

8.16. $f(x)=\dfrac{x-5}{x^2+11}$; $[-3,7]$.

8.17. $f(x)=9x^{-1}+\dfrac{25}{1-x}$; $(0,1]$.

8.18. $f(x)=x-2\sqrt{x}$; $[0,5]$.

8.19. $f(x)=x-2\ln x$; $[1{,}5;\ e]$.

8.20. $f(x)=2\sin x+\sin 2x$; $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$.

8.21. $f(x)=\cos^2 x-\cos x\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$; $(-\infty,\infty)$.

8.22. $f(x)=4x+\dfrac{9\pi^2}{x}+\sin x$; $[\pi,2\pi]$.

8.23. $f(x)=\dfrac{x^4+1}{x^2+1}$; $[-1,1]$.

8.24. $f(x)=\dfrac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$; $[0,1]$.

8.25. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$; $(-\infty,+\infty)$.

9. Знайти інтервали опуклості, угнутості графіка функції та точки перегину. Обчислити величину *A = m + l*, де *m* – кількість точок розриву функції, а *l* – кількість точок перегину графіка функції.

9.01. $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 2x + 2$.

9.02. $f(x) = x^5 - 10x^2 + x + 3$.

9.03. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$.

9.04. $f(x) = x^4 + x^2 + \mathrm{e}^x$.

9.05. $f(x) = x \operatorname{arctg} x$.

9.06. $f(x) = \mathrm{e}^{\cos x}$.

9.07. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 3}$.

9.08. $f(x) = 2x^2 + \ln x$.

9.09. $f(x) = \ln\left(1 + x^3\right)$.

9.10. $f(x) = \mathrm{e}^{\operatorname{arctg} x}$.

9.11. $f(x) = \sqrt[3]{x+3}$.

9.12. $f(x) = \dfrac{x^3}{12 + x^2}$.

9.13. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$.

9.14. $f(x) = \sqrt[3]{4x^3 - 12x}$.

9.15. $f(x) = x + \sin x$.

9.16. $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.

9.17. $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.

9.18. $f(x) = \sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}$.

9.19. $f(x) = \left(x^2 + 1\right)\mathrm{e}^x$.

9.20. $f(x) = x^3\,\mathrm{e}^{-4x}$.

9.21. $f(x) = x^2 \ln x$.

9.22. $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

9.23. $f(x) = 36x(x-1)^3$.

9.24. $f(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+1}$.

9.25. $f(x) = \mathrm{e}^{2x - x^2}$.

10. Знайти асимптоти кривих, зробити схематичний рисунок. Обчислити величину *A = p + r + q*, де *p* – кількість вертикальних асимптот, *r* – кількість горизонтальних, *q* – кількість похилих асимптот

10.1. $f(x) = \dfrac{2x}{x+2}$.

10.2. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

10.3. $f(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$.

10.4. $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

10.5. $f(x) = \dfrac{2}{x^2 + 5x + 6}$.

10.6. $f(x) = x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

10.7. $f(x) = \dfrac{x^3}{14 - x}$.

10.8. $f(x) = 2x + \operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}$.

10.9. $f(x) = \dfrac{4x}{1 + x^2}$.

10.10. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}$.

10.11. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}$.

10.12. $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$.

10.13. $f(x)=x+\dfrac{x^2}{x^2+1}$.

10.14. $f(x)=\dfrac{x^2+8x-6}{x}$.

10.15. $f(x)=\dfrac{2x^4+x^3+1}{x^3}$.

10.16. $f(x)=\dfrac{x^5}{x^4+1}$.

10.17. $f(x)=\sqrt{x^2-4}$.

10.18. $f(x)=\sqrt{x^2+3x-1}$.

10.19. $f(x)=\sqrt[3]{x^3-6x}$.

10.20. $f(x)=\sqrt[3]{x^3+x^2}$.

10.21. $f(x)=\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)$.

10.22. $f(x)=2+\cos\dfrac{2}{x}$.

10.23. $f(x)=\arcsin\dfrac{1}{x^2}$.

10.24. $f(x)=\mathrm{arctg}\, x$.

10.25. $f(x)=\dfrac{1}{\mathrm{arctg}\frac{1}{x}}$.

11. Знайти асимптоти кривих, накреслити схематичний рисунок. Обчислити величину *A = p + r + q*, де *p* – кількість вертикальних асимптот, *r* – кількість горизонтальних асимптот, *q* – кількість похилих асимптот.

11.1. $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$.

11.2. $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$.

11.3. $f(x)=\sqrt[3]{x^2-x}$.

11.4. $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$.

11.5. $f(x)=\dfrac{2-4x^2}{1-4x^2}$.

11.6. $f(x)=\ln\dfrac{x-1}{x-2}$.

11.7. $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2}$.

11.8. $f(x)=\ln\left(x^2-1\right)$.

11.9. $f(x)=\sqrt[3]{\left(x^2-4\right)^2}$.

11.10. $f(x)=\dfrac{3x-2}{5x^2}$.

11.11. $f(x)=\sqrt[3]{x^2}-x$.

11.12. $f(x)=x\ln x$.

11.13. $f(x)=\ln\left(x^2+4\right)$.

11.14. $f(x)=x-\ln x$.

11.15. $f(x)=x\mathrm{e}^{-x^2}$.

11.16. $f(x)=\mathrm{e}^{2x-x^2}$.

11.17. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

11.18. $f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$.

11.19. $f(x)=\left(x-1\right)\mathrm{e}^{3x+1}$.

11.20. $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

11.21. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x-1)^2}$. **11.22.** $f(x)=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$.

11.23. $f(x)=\dfrac{1}{e^x-1}$. **11.24.** $f(x)=\dfrac{1}{e^{2x}-1}$.

11.25. $f(x)=e^{\frac{1}{x+2}}$.

12. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої $y=f(x)$ з точкою дотику $M_0\left(x_0,\ f\left(x_0\right)\right)$. Знайти величину $A = k_Д + k_н$, де $k_Д$ – кутовий коефіцієнт дотичної у точці x_0, $k_н$ – кутовий коефіцієнт нормалі в точці x_0.

12.1. $f(x)=\dfrac{3}{x}$; $x_0=1$. **12.2.** $f(x)=5x^3$; $x_0=-4$.

12.3. $f(x)=6e^{3x+1}$; $x_0=-1$. **12.4.** $f(x)=1+2^{x-3}$; $x_0=6$.

12.5. $f(x)=4+\ln(x+5)$; $x_0=e-5$. **12.6.** $f(x)=5x^2+6x-1$; $x_0=1$.

12.7. $f(x)=4-3x-7x^2$; $x_0=2$. **12.8.** $f(x)=x^3-2x^2+1$; $x_0=2$.

12.9. $f(x)=\dfrac{x^3}{14-x}$; $x_0=7$. **12.10.** $f(x)=-\sqrt{16-x^2}$; $x_0=\sqrt{7}$.

12.11. $f(x)=5(x-1)^3$; $x_0=2$. **12.12.** $f(x)=4\sin x-5$; $x_0=\dfrac{\pi}{2}$.

12.13. $f(x)=7-3\cos x$; $x_0=\dfrac{\pi}{3}$. **12.14.** $f(x)=\sqrt{6-2x-x^3}$; $x_0=-1$.

12.15. $f(x)=\operatorname{arctg}2x$; $x_0=0$. **12.16.** $f(x)=\ln\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+x+1}\right)$; $x_0=0$.

12.17. $f(x)=4\operatorname{ctg}x-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$; $x_0=\dfrac{\pi}{2}$. **12.18.** $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{x^2-2x+1}$; $x_0=-2$.

12.19. $f(x)=4\sqrt{1-\dfrac{x^2}{9}}$; $x_0=2$. **12.20.** $f(x)=4\sqrt{\dfrac{x^2}{9}-1}$; $x_0=5$.

12.21. $f(x)=7(x-5)^2$; $x_0=6$. **12.22.** $f(x)=5\operatorname{arcctg}x+\dfrac{\pi}{4}$; $x_0=1$.

12.23. $f(x)=9\arcsin x-\dfrac{\pi}{6}$; $x_0=\dfrac{1}{4}$. **12.24.** $f(x)=7+\dfrac{x-1}{x+3}$; $x_0=1$.

12.25. $f(x)=\dfrac{4x+1}{x-2}-3$; $x_0=3$.

ВІДПОВІДІ ДО ТРЕНУВАЛЬНИХ ВПРАВ

Вправи 1

1.01. $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=63\sqrt{3}-\frac{4}{3}\approx 107,7859$. **1.02.** $f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{\pi}-\cos 1\approx 1,1137$.

1.03. $f'(1)=-\frac{67}{2}=-33,5$. **1.04.** $f'(1)=-\frac{11}{6}\approx -1,8333$. **1.05.** $f'(1)=8e\approx 21,7463$.

1.06. $f'(16)=4\cdot\ln 4+\frac{11}{4}\approx 8,2952$. **1.07.** $f'(0)=\frac{\ln 2}{4}\approx 0,1733$.

1.08. $f'(1)=\dfrac{9\cdot 3^{\frac{1}{3}}\cdot\ln 3-9\ln 3+27\cdot 3^{\frac{1}{3}}-25}{3\cdot\left(3^{\frac{1}{3}}-1\right)^2}\approx -31,2115$.

1.09. $f'(1)=\dfrac{2\ln\frac{64}{125}+2\ln 10\ \ln 625}{2\ln 5\ \ln 10}\approx 3,8194$. **1.10.** $f'(1)=\frac{110}{3}\approx 36,6667$.

1.11. $f'(0)=1$. **1.12.** $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi^3}{8}+\frac{3\pi^5}{512}+5\approx 2,5802$.

1.13. $f'(1)=0$. **1.14.** $f'(0)=0$. **1.15.** $f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{12}-\frac{\ln 2}{4}+\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{4}\approx 0,6272$.

1.16. $f'(1)=\dfrac{72\sin^2 1-\pi^2\left(2\sin^2\frac{1}{2}-1\right)}{\pi^2\sin^2 1}\approx -0,80582$. **1.17.** $f'(1)=\frac{56}{5}=11,2$.

1.18. $f'(2)=\frac{315524}{289}\approx 1091,7785$. **1.19.** $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{3\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{2}{3}}}\approx 0,3916$.

1.20. $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-0,5$. **1.21.** $f'(1)=2$. **1.22.** $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{5\pi^9}{131\,072}-\frac{9\pi^8}{65\,536}+1\approx 0,8341$.

1.23. $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi\sqrt{2}}{6}+\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}\pi^2}{72}\approx 1,0763$. **1.24.** $f'(1)=-\frac{5}{8}=-0,625$.

1.25. $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}-2\sqrt{3}\approx -1,9641$.

Вправи 2

2.01. $f'(0)=3$. **2.02.** $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$. **2.03.** $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=4$. **2.04.** $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\approx 0,3536$.

2.05. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$. **2.06.** $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2e+\frac{3\sqrt{2}\cdot 3^{\frac{\sqrt{2}}{4}}\ln 3}{4}\approx 7{,}1549$. **2.07.** $f'(1)=2{,}3824\cdot 10^{10}$.

2.08. $f'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{4}{7}\approx -0{,}5714$. **2.09.** $f'(0)=1$. **2.10.** $f'\left(\frac{1}{16}\right)=-24\sqrt{3}\approx -41{,}5692$.

2.11. $f'(0)=0$. **2.12.** $f'(1)=\frac{4\sqrt{6}}{15}\approx 0{,}6532$. **2.13.** $f'\left(\frac{\pi}{16}\right)=-8$.

2.14. $f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4\sqrt{3}}{\pi}\approx 2{,}2053$. **2.15.** $f'(0)=\ln 4\approx 1{,}3863$. **2.16.** $f'(1)=\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0{,}7071$.

2.17. $f'(1)=\frac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{5}\approx 0{,}6325$. **2.18.** $f'(5)=19e^{71}\approx 1{,}2992\cdot 10^{32}$.

2.19. $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi^4\left(\frac{\pi}{4}+1\right)}{64}\approx 0{,}865$. **2.20.** $f'\left(\frac{1}{81}\right)=\frac{81\sqrt{80}}{160\sqrt{\arcsin\frac{1}{9}}}\approx 13{,}5701$.

2.21. $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt[3]{18}}{72}\approx -0{,}036$. **2.22.** $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}\left(\pi e^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi^2 e^{\frac{\pi}{2}}}{4}\right)}{2\sqrt{\frac{\pi^2 e^{\frac{\pi}{2}}}{2}+2}}\approx 3{,}7606$. **2.23.** $f'(0)=1$.

2.24. $f'(0)=\pi\approx 3{,}1416$. **2.25.** $f'(0)=-\frac{\pi}{8}-\frac{\pi\,\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi^2}{16}\right)^2}{8}-\frac{8\sqrt{3}}{27}\approx -1{,}6867$.

Вправи 3

3.01. $f'(0)=0$. **3.02** $f'(0)=0$. **3.03.** $f'\left(e^2\right)=2^{e^2-1}\cdot(2\ln 2+1)\approx 199{,}9961$.

3.04. $f'(1)=\sin 2\approx 0{,}9093$. **3.05.** $f'(2)=\frac{516\,560\,652\ln\frac{9}{7}}{5\,764\,801}-\frac{918\,330\,048}{40353\,607}\approx -0{,}2378$.

3.06. $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}-1}\left(\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)}{2}\approx -0{,}7452$. **3.07.** $f'(4)=262\,144\ln 4+131\,072\approx 494\,480{,}749$.

3.08. $f'(1)=\frac{\pi\ln\frac{\pi}{4}}{8}+\frac{1}{2}\approx 0{,}4051$. 3**.09.** $f'(1)=\frac{e\left(\frac{\pi\ln\frac{\pi}{4}}{2}+1\right)\left(\frac{\pi}{4}\right)^{e-1}}{2}\approx 0{,}5569$.

3.10. $f'(\mathrm{e})=\mathrm{e}^{-1}\approx 0,3679$. **3.11.** $f'(1)=8-16\ln 2\approx -3,0904$.

3.12. $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\dfrac{4\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi\cdot\ln\frac{\pi}{4}}{4}+1\right)}{\pi}\approx 3,9145$. **3.13.** $f'\left(\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}\ln 2}{3}\right)\approx 1,4008$.

3.14. $f'(1)=6^{\sin^2 1-1}\left(6\ln 6\sin 2+5\sin^2 1\right)\approx 7,8923$. **3.15.** $f'(1)=\dfrac{\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi\ln\frac{\pi}{4}}{4}\right)\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{\pi}{4}-1}}{2}\approx -0,5135$.

3.16. $f'\left(\frac{1}{2}\right)=\dfrac{2\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi\ln\frac{\pi}{6}}{6}\right)\left(\frac{\pi}{6}\right)^{\frac{\pi}{3}-1}}{2}\approx 1,5523$. **3.17.** $f'(1)=\frac{1}{12}\approx 0,0833$.

3.18. $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{8}-\frac{3\pi}{16}\approx 0,0605$. **3.19.** $f'(1)=\frac{11}{40}\approx 0,275$.

3.20. $f'(1)=40\mathrm{e}(8\ln 2+4\ln 5+6)\approx 1\,955,3068$. **3.21.** $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\dfrac{7\sqrt{3}\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{4}}}{16\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{4}}}{2}}}\approx 0,8264$.

3.22. $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\frac{7\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{4}-\frac{3\sqrt{\frac{\pi}{4}}}{4}+\frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{5}{2}}}{4}+\frac{7\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{7}{2}}}{4}+\frac{\ln 4\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{2}+\frac{\ln 4\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{7}{2}}}{2}}{2\cdot 4^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\frac{7}{2}}+\frac{4^{\frac{\pi}{4}}\pi^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\frac{7}{2}}}{4}+\frac{4^{\frac{\pi}{4}}\pi^4\frac{\sqrt{2}}{2}^{\frac{7}{2}}}{128}}\approx -0,4811$

3.23. $f'(1)=20$. **3.24.** $f'(1)=4\cdot 2^{\frac{17}{60}}\approx 0,4868$. **3.25.** $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{7\sqrt{3}}{8}\approx -1,5155$.

Вправи 4

4.01. $y'_x(1)=\frac{5}{12}\approx 0,4167$. **4.02.** $y'_x\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)\approx -2,4142$.

4.03. $y'_x\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}\approx -1,7321$. **4.04.** $y'_x\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}\approx -0,5774$.

4.05. $y'_x\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\pi\sqrt{2}}{8}}{\frac{\pi\sqrt{2}}{8}+\frac{\sqrt{2}}{2}-1}\approx-0,5782$. **4.06.** $y'_x\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{\frac{e^{\frac{\pi}{6}}}{2}-\frac{\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{6}}}{2}}{\frac{e^{\frac{\pi}{6}}}{2}+\frac{\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{6}}}{2}}\approx 0,2679$.

4.07. $y'_x\left(\frac{1}{4}\right)=-1$. **4.08.** $y'_x(1)=0$. **4.09.** $y'_x(0)=-1$. **4.10.** $y'_x\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\approx 1,7321$.

4.11. $y'_x\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{2\sqrt{3}}{9}\approx-0,3849$. **4.12.** $y'_x\left(\frac{1}{10}\right)=-\frac{\sqrt{24}\sqrt{91}}{72}\approx-0,6491$.

4.13. $y'_x(1)=\frac{1}{3}\approx 0,333$. **4.14.** $y'_x(1)=\frac{11}{7}\approx 1,5714$. **4.15.** $y'_x\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{3}{4}=-0,75$.

4.16. $y'_x\left(\frac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\frac{\sqrt{3}}{3}-1}\approx-1,7321$. **4.17.** $y'_x(1)=3$. **4.18.** $y'_x\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}\approx 0,5774$.

4.19. $y'_x(1)=\frac{\mathrm{ch}(1)}{\mathrm{sh}(1)}\approx 1,313$. **4.20.** $y'_x(1)=4$. **4.21.** $y'_x\left(\frac{\pi}{6}\right)=0,5$.

4.22. $y'_x\left(2^{\frac{\pi}{4}}\right)=\dfrac{\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}\right)+1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}\approx 2,8284$. **4.23.** $y'_x\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{3}\approx-0,3333$.

4.24. $y'_x\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{3}{4}=-0,75$. **4.25.** $y'_x\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}+2\approx 3,57$

Вправи 5

5.01. 9702. **5.02** $-\frac{51}{4}=-12,75$. **5.03.** $-\frac{\sqrt{3}}{4}\approx-0,4330$. **5.04.** $9e^3+6\approx 186,7698$.

5.05. −4. **5.06** 0. **5.07.** $-\frac{13\sqrt{3}}{2}\approx-11,2583$. **5.08.** 64. **5.09.** 0. **5.10.** 17873,2535.

5.11. 0,0754. **5.12.** 0. **5.13.** −3841,8750. **5.14.** $3\ln^2 2=1,4414$.

5.15. $163296e^{-\frac{5}{2}}\approx 13404,1519$. **5.16.** $-\frac{297\ 606\ 960}{\ln 2}\approx-429\ 356\ 085,326\ 0$.

5.17. $-\frac{9}{4}=-2,25$. **5.18.** 0. **5.19.** −3 995 578,125. **5.20.** 0. **5.21.** $-\frac{8}{7}\approx-1,1429$.

5.22. $-\frac{1}{9\mathrm{sh}^3 1}\approx-0,0685$. **5.23.** $-\frac{1}{2}$. **5.24.** $-\dfrac{4e^{\frac{\pi}{6}}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}}\approx-1,3245$.

5.25. $\dfrac{4\operatorname{arctg}^2\dfrac{\pi}{4}\cdot\left(\dfrac{\pi^2}{16}+1\right)^2}{\left(1+2\operatorname{arctg}\dfrac{\pi}{4}\cdot\left(\dfrac{\pi^2}{16}+1\right)\right)^2}\approx 0,466$.

Вправи 6

6.01. 0,131. **6.02.** −0,0178. **6.03.** −0,005. **6.04.** 0,0221. **6.05.** 0,0075. **6.06.** 0,0164. **6.07.** −0,41. **6.08.** 0,1626. **6.09.** $-0,0075\sqrt{3}\approx -0,013$. **6.10.** 0. **6.11.** 0,0121. **6.12.** −0,08. **6.13.** 0,037. **6.14.** 0. **6.15.** $0,01\mathrm{e}^{-1}=0,0037$. **6.16.** 0,011. **6.17.** 0,01. **6.18.** 0,0224. **6.19.** 438 160 336 568 969 600. **6.20.** 0. **6.21.** 0,2699. **6.22.** 1,08. **6.23.** −0,0109. **6.24.** 0,0141. **6.25.** 0,03.

Вправи 7

7.01. $(1,3)$ – спадає, $(-\infty,1),(3,\infty)$ – зростає, $x_{\max}=1$, $x_{\min}=3$, $A=2$.
7.02. $(-\infty,-2),(0,2)$ – спадає, $(-2,0),(2,\infty)$ – зростає, $x_{\min}=-2$, $x_{\max}=0$, $x_{\min}=2$, $A=3$. **7.03.** $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\infty\right)$ – спадає, $\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ – зростає, $x_{\max}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $A=1$.
7.04. $\left(\dfrac{14}{3},7\right)$ – спадає, $\left(-\infty,\dfrac{14}{3}\right),(7,\infty)$ – зростає, $x_{\max}=\dfrac{14}{3}$, $x_{\min}=7$, $A=2$.
7.05. $(3,\infty)$ – спадає, $(-\infty,0),(0,3)$ – зростає, $x_{\max}=3$, $A=1$. **7.06.** 2. $(0,\infty)$ – спадає, $A=0$. **7.07.** $\left(0,\mathrm{e}^{-1}\right)$ – спадає, $\left(\mathrm{e}^{-1},\infty\right)$ – зростає, $x_{\min}=\mathrm{e}^{-1}$, $A=1$.
7.08. $(-\infty,0),(2,\infty)$ – спадає, $(0,2)$ – зростає, $x_{\min}=0$, $x_{\max}=2$, $A=2$.
7.09. $\left(\dfrac{7\pi}{4}+2\pi k,\dfrac{\pi}{4}+2\pi(k+1)\right)$ – спадає, $\left(\dfrac{\pi}{4}+2\pi n,\dfrac{7\pi}{4}+2\pi n\right)$ – зростає, $n,k\in Z$, $x_{\min}=\dfrac{\pi}{4}+2\pi n$, $x_{\max}=\dfrac{7\pi}{4}+2\pi n$, $x_{\min}=2$, $A=\infty$. **7.10.** $(-\infty,\infty)$ – зростає, $A=0$.
7.11. $(-1,0),(0,1)$ – спадає, $(-\infty,-1),(1,\infty)$ – зростає, $x_{\max}=-1$, $x_{\min}=1$, $x=0$ – точка розриву, $A=3$. **7.12.** $(3,\infty)$ – спадає, $(-\infty,0),(0,3)$ – зростає, $x_{\max}=3$, $A=1$. **7.13.** $(-3,-1)$ – спадає, $(-\infty,-3),(-1,0),(0,\infty)$ – зростає, $x_{\max}=-3$, $x_{\min}=-1$, $A=2$. **7.14.** $(-\infty,-1),(0,1)$ – спадає, $(-1,0),(0,\infty)$ – зростає, $x_{\min}=-1$, $x_{\min}=1$, $x=0$ – точка розриву, $A=3$. **7.15.** $\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\infty\right)$ – спадає, $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ – зростає, $x_{\min}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $x_{\max}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $A=2$. **7.16.** $(1,\infty)$ – спадає,

$(-\infty, 1)$ – зростає, $x_{\max}=1$, A = 1. **7.17.** $\left(\frac{\pi}{4}+\pi k, \frac{\pi}{4}+\pi(k+1)\right)$ – спадає, $\left(\frac{\pi}{4}+\pi(n+1), \frac{\pi}{4}+\pi(n+2)\right)$ – зростає, $n, k \in Z$, $x_{\min}=\frac{5\pi}{4}+2\pi n$, $x_{\max}=\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $A = \infty$. **7.18.** $\left(\frac{3}{4}, \infty\right)$ – спадає, $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$ – зростає, $x_{\max}=\frac{3}{4}$, A = 1.

7.19. $(-\infty,-2),(-1,1)$ – спадає, $(-2,-1),(1,\infty)$ – зростає, $x_{\min}=-2$, $x_{\min}=1$, $x_{\max}=-1$, A = 3. **7.20.** $(-\infty,-1),\left(\frac{1}{2}, 5\right)$ – спадає, $\left(-1, \frac{1}{2}\right),(5, \infty)$ – зростає, $x_{\min}=-1$, $x_{\max}=\frac{1}{2}$, $x_{\min}=5$, A = 3. **7.21.** $x_{\min}=\frac{3\pi}{2}+6\pi n$, $x_{\min}=-\frac{9\pi}{4}+6\pi n$, $x_{\min}=-\frac{3\pi}{4}+6\pi n$, $x_{\max}=\frac{3\pi}{4}+6\pi n$, $x_{\max}=\frac{9\pi}{4}+6\pi n$, $x_{\max}=-\frac{3\pi}{2}+6\pi n$, $A = \infty$.

7.22. $(-\infty,0),\left(0,\frac{1}{2}\right),(1,\infty)$ – спадає, $\left(\frac{1}{2},1\right)$– зростає, $x_{\min}=\frac{1}{2}$, $x_{\max}=1$, $x=0$ – точка розриву, A = 3. **7.23.** $\left(-1,-\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{3},1\right),(1,\infty)$– спадає, $(-\infty,-1),\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$ – зростає, $x_{\max}=-1$, $x_{\min}=-\frac{1}{2}$, $x_{\max}=\frac{1}{3}$, A = 3. **7.24.** $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},1\right)$– спадає, $\left(0,\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},\infty\right)$ – зростає, $x_{\min}=0$, $x=-\frac{1}{2}$ та $x=\frac{1}{2}$ – точки розриву, A = 3.

7.25 $(-\infty, 1),(2, \infty)$– спадає, A = 0.

Вправи 8

8.01. $y_{\text{найм}}(0)=y_{\text{найм}}(\pi)=1$; $y_{\text{найб}}\left(\frac{\pi}{6}\right)=y_{\text{найб}}\left(\frac{5\pi}{6}\right)=1{,}5$. **8.02.** $y_{\text{найм}}$ не існує; $y_{\text{найб}}(1)\approx 0{,}6931$. **8.03.** $y_{\text{найм}}(-3)=y_{\text{найм}}(3)=0$; $y_{\text{найб}}(0)=3$. **8.04.** $y_{\text{найм}}\left(\frac{8}{3}\right)\approx -2{,}3704$; $y_{\text{найб}}(0)=y_{\text{найб}}(4)=0$. **8.05.** $y_{\text{найм}}(1)=5$; $y_{\text{найб}}(2)=10$. **8.06.** $y_{\text{найм}}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=y_{\text{найм}}\left(\frac{\pi}{4}\right)=0{,}5$; $y_{\text{найб}}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=y_{\text{найб}}(0)=y_{\text{найб}}\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$. **8.07.** $y_{\text{найм}}(0)=-2$; $y_{\text{найб}}$ не існує. **8.08.** $y_{\text{найм}}\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1$; $y_{\text{найб}}$ не існує. **8.09.** $y_{\text{найм}}(0)=0$; $y_{\text{найб}}$ не існує. **8.10.** $y_{\text{найм}}(0)=0$; $y_{\text{найб}}(1)\approx 0{,}307$. **8.11.** $y_{\text{найм}}(-5)\approx 0{,}026$; $y_{\text{найб}}(1)=0{,}5$. **8.12.** $y_{\text{найм}}(2{,}618)\approx 0{,}443$; $y_{\text{найб}}\left(\frac{\pi}{2}\right)\approx 0{,}785$. **8.13.** $y_{\text{найм}}(-2)=-0{,}25$; $y_{\text{найб}}(5)\approx 0{,}049$.

8.14. $y_{\text{найм}}(2\pi)\approx 3{,}142$; $y_{\text{найб}}(5{,}236)\approx 3{,}484$. **8.15.** $y_{\text{найм}}(-3)=0$; $y_{\text{найб}}(7)\approx 0{,}1786$.

8.16. $y_{\text{найм}}(-1)=-0{,}5$; $y_{\text{найб}}(7)\approx 0{,}0333$.

8.17. $y_{\text{найм}}\left(\frac{3}{8}\right)=64$; $y_{\text{найб}}$ не існує. **8.18.** $y_{\text{найм}}(1)=-1$; $y_{\text{найб}}(5)\approx 0{,}527$.

8.19. $y_{\text{найм}}(2)\approx 0{,}6137$; $y_{\text{найб}}(e)\approx 0{,}7183$. **8.20.** $y_{\text{найм}}\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-2$; $y_{\text{найб}}\left(\frac{\pi}{3}\right)\approx 2{,}5981$.

8.21. $y_{\text{найм}}\left(0{,}52359+\frac{\pi}{2}(2k-1)\right)\approx -0{,}25$;. $y_{\text{найб}}\left(0{,}52359+\frac{\pi}{2}2k\right)\approx 0{,}75$; $k\in Z$

8.22. $y_{\text{найм}}(4{,}7124)\approx 36{,}6991$; $y_{\text{найб}}(\pi)\approx 40{,}8407$. **8.23.** $y_{\text{найм}}(-0{,}6436)=$ $=y_{\text{найм}}(0{,}6436)\approx 0{,}8284$; $y_{\text{найб}}(-1)=y_{\text{найб}}(0)=y_{\text{найб}}(1)=1$. **8.24.** $y_{\text{найм}}\left(\frac{1}{2}\right)=0{,}6$; $y_{\text{найб}}(0)=y_{\text{найб}}(1)=1$. **8.25.** $y_{\text{найм}}(1)\approx 0{,}6667$; $y_{\text{найб}}(-1)=2$.

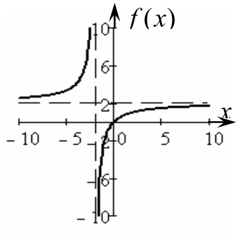
Вправи 9

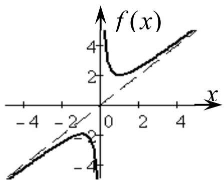
9.01. $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},\infty\right)$ – угнута, $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ – опукла, $x=-\frac{1}{2}$ та $x=\frac{1}{2}$ – точки перегину, A = 2. **9.02.** $(1,\infty)$ – угнута, $(-\infty,1)$ – опукла, $x=1$ та $x=\frac{1}{2}$ – точка перегину, A = 1. **9.03.** $(-\infty,-1),(1,\infty)$ – угнута, $(-1,1)$ – опукла, $x=-1$ та $x=1$ – точки перегину, A = 2. **9.04.** $(-\infty,\infty)$ – угнута, A = 0. **9.05.** $(-\infty,\infty)$ – угнута, A = 0. **9.06.** $\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}\right)+2\pi n,-\arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}\right)+2\pi(n+1)\right)$ – угнута, $\left(-\arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}\right)+2\pi n,\arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}\right)+2\pi n\right)$ – опукла, $n\in Z$, $x=\pm\arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}\right)+2\pi n$ – точка перегину, $A=\infty$. **9.07.** $(-\infty,-3),(0,3)$ – угнута, $(-3,0),(3,\infty)$ – опукла; $x=-3$, $x=0$ та $x=3$ – точки перегину, A = 3. **9.08.** $\left(-\frac{1}{2},\infty\right)$ – угнута, $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ – опукла, $x=-\frac{1}{2}$ – точка перегину, A = 1. **9.09.** $\left(0,2^{\frac{1}{3}}\right)$ – угнута, $(-1,0),\left(2^{\frac{1}{3}},\infty\right)$ – опукла, $x=0$ та $x=2^{\frac{1}{3}}$ – точки перегину, A = 2. **9.10.** $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ – угнута, $\left(\frac{1}{2},\infty\right)$ – опукла, $x=\frac{1}{2}$ – точка перегину, A = 1. **9.11.** $(-\infty,-3)$ – угнута, $(-3,\infty)$ – опукла, $x=-3$ – точка перегину, A = 1. **9.12.** $(-\infty,-6),(0,6)$ – угнута, $(-6,0),(6,\infty)$ – опукла; $x=-6$, $x=0$ та $x=6$ – точки перегину, A = 3. **9.13.** $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}+1,\infty\right)$ – угнута, $\left(0,\frac{2\sqrt{3}}{3}+1\right)$ – опукла,

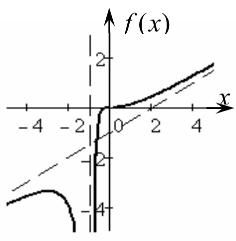
$x=\frac{2\sqrt{3}}{3}+1$ – точка перегину, A = 1. **9.14.** $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right),\left(0,\sqrt{3}\right)$ – угнута, $\left(-\sqrt{3},0\right),\left(\sqrt{3},\infty\right)$ – опукла; $x=-\sqrt{3}$, $x=0$ та $x=\sqrt{3}$ – точки перегину, A = 3. **9.15.** $\left(\pi(n+1),\,2\pi+n\pi\right)$ – угнута, $\left(\pi n,\,\pi(n+1)\right)$ – опукла, $n\in Z$, $x=\pi n$ – точки перегину, $A=\infty$. **9.16.** $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\infty\right)$ – угнута, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ – опукла, $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ та $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ – точки перегину, A = 2. **9.17.** $(0,\infty)$ – угнута, $(-\infty,0)$ – опукла, $x=0$ – точка розриву, A = 1. **9.18.** $(1,2),(2,\infty)$ – угнута, $(-\infty,1)$ – опукла, $x=1$ – точка перегину, A = 1. **9.19.** $(-\infty,-3),(-1,\infty)$ – угнута, $(-3,-1)$ – опукла, $x=-3$ та $x=-1$ – точки перегину, A = 2. **9.20.** $\left(0,\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right),\left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4},\infty\right)$ – угнута, $(-\infty,0),\left(\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ – опукла, $x=\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}$ та $x=\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}$ – точки перегину, A = 2. **9.21.** $\left(e^{-\frac{3}{2}},\infty\right)$ – угнута, $\left(0,e^{-\frac{3}{2}}\right)$ – опукла, $x=e^{-\frac{3}{2}}$ – точка перегину, A = 1. **9.22.** $\left(e^{\frac{8}{3}},\infty\right)$ – угнута, $\left(0,e^{\frac{8}{3}}\right)$ – опукла, $x=e^{\frac{8}{3}}$ – точка перегину, A = 1. **9.23.** $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right),(1,\infty)$ – угнута, $\left(\frac{1}{2},1\right)$ – опукла, $x=\frac{1}{2}$ та $x=1$ – точки перегину, A = 2. **9.24.** $(-1,0)$ – угнута, $(-\infty,-1),(0,\infty)$ – опукла, $x=-1$ та $x=0$ – точки перегину, A = 2. **9.25.** $\left(-\infty,1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2},\infty\right)$ – угнута, $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2},1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ – опукла, $x=1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ – точки перегину, A = 2.

Вправи 10

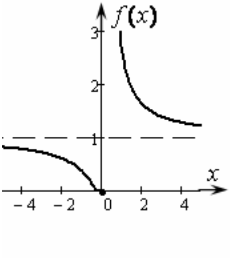
10.01. 2. $x=-2$, $y=2$, A = 2. **10.02.** $x=0$, $y=x$, A = 2. **10.03.** $x=-1$, $y=x$, A = 2.

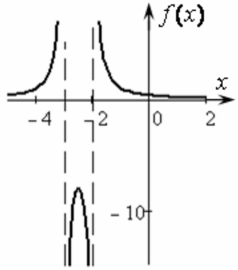


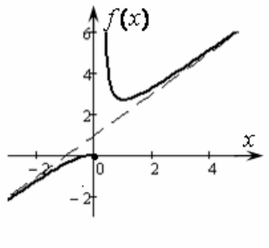




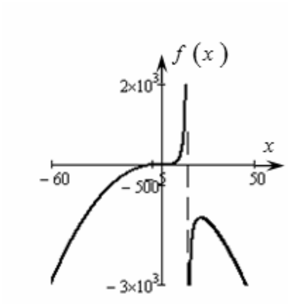
10.04. $x = 0$, $y = 1$, $A = 2$. **10.05.** $x = -3$, $x = -2$, $y = 0$, $A = 3$. **10.06.** $x = 0$, $y = x + 1$, $A = 2$.

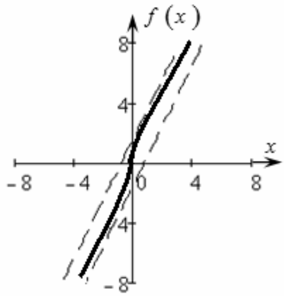


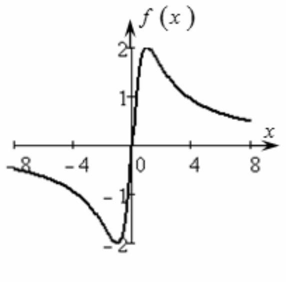




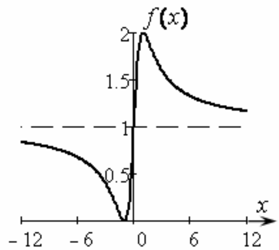
10.07 $x = 14$, $A = 1$. **10.08** $y = 2x + \dfrac{\pi}{2}$, $y = 2x - \dfrac{\pi}{2}$, $A = 2$. **10.09** $y = 0$, $A = 1$

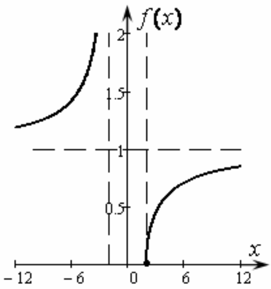


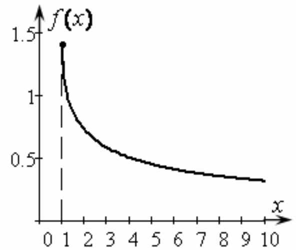




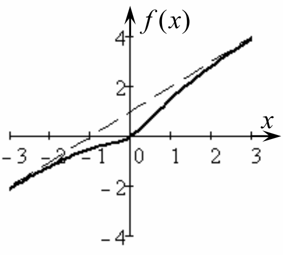
10.10 $y = 1$, $A = 1$. **10.11** $x = -2$, $y = 1$, $A = 2$. **10.12** $y = 0$, $A = 1$.

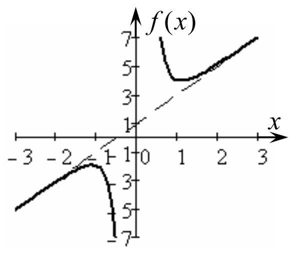


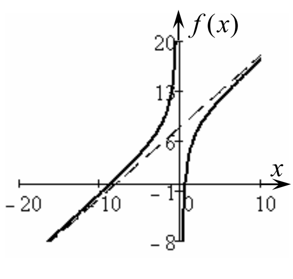




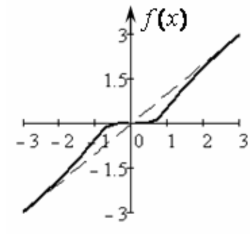
10.13. $y = x + 1$, $A = 1$. **10.14.** $x = 0$, $y = x + 8$, $A = 2$. **10.15.** $x = 0$, $y = 2x + 1$, $A = 2$.

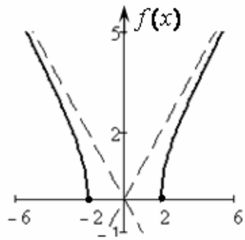


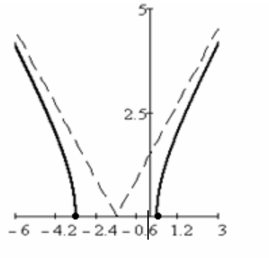




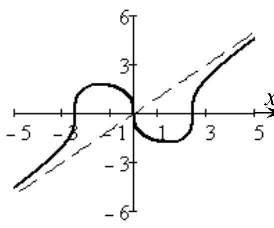
10.16. $y = x$, $A = 1$. **10.17.** $y = x$, $y = -x$, $A = 2$. **10.18.** $y = x + \dfrac{3}{2}$, $y = -x - \dfrac{3}{2}$, $A = 2$.

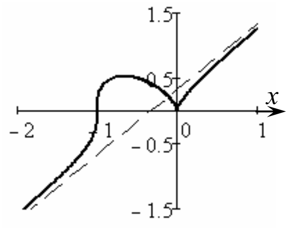


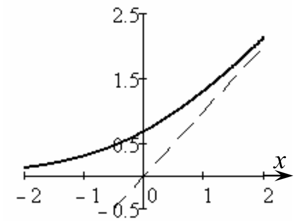




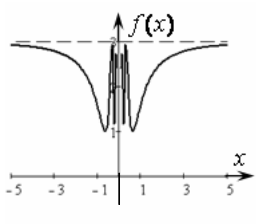
10.19. $y = x$, $A = 1$. **10.20.** $y = x + \dfrac{1}{3}$, $A = 1$. **10.21.** $y = 0$, $y = x$, $A = 2$.

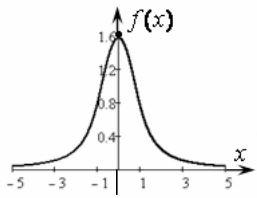


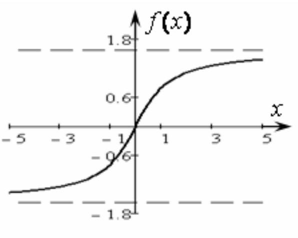




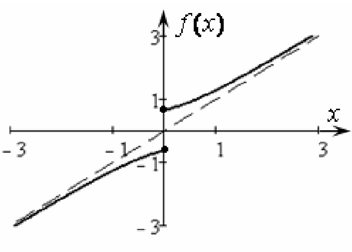
10.22. $y = 3$, $A = 1$. **10.23.** $y = 0$, $A = 1$. **10.24.** $y = \dfrac{\pi}{2}$, $y = -\dfrac{\pi}{2}$, $A = 2$.





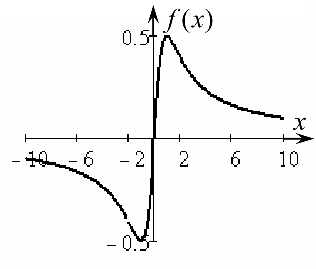


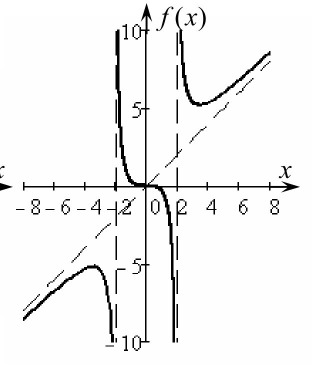
10.25. $y = x$, $A = 1$.

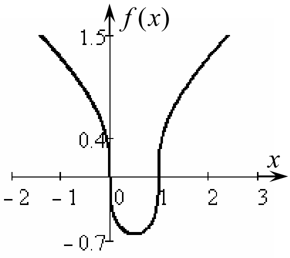


Вправи 11

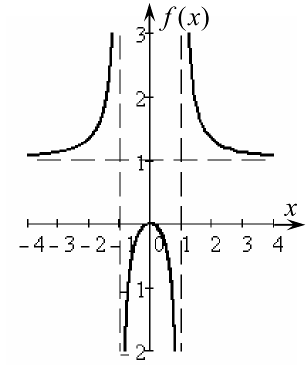
11.01. $y = 0$, $A = 1$. **11.02.** $x = -2$, $x = 2$, $y = x$, $A = 3$. **11.03.** $A = 0$.

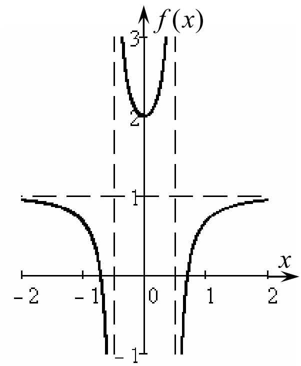


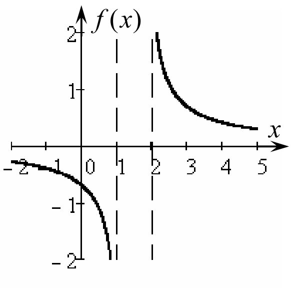




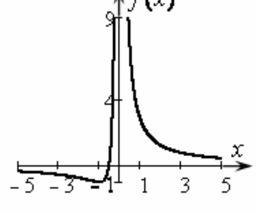
11.04. $x = -1, x = 1, y = 1, A = 3$. **11.05.** $x = -0.5, x = 0.5, y = 1, A = 3$. **11.06.** $x = 1, x = 2, y = 0, A = 3$.

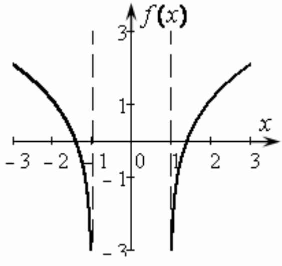


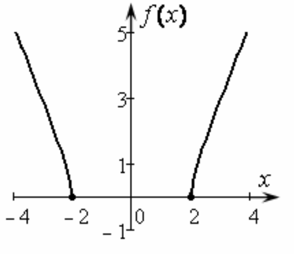




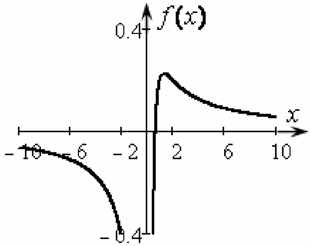
11.07. $x = 0$, $y = 0$, $A = 2$. **11.08.** $x = -1$, $x = 1$, $A = 2$. **11.09.** $A = 0$.



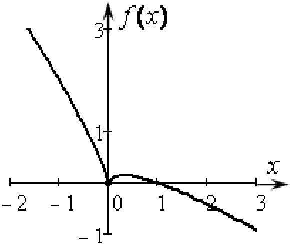




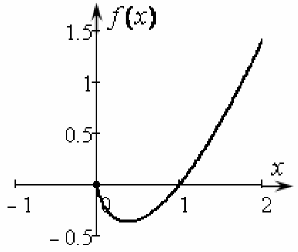
11.10. $x = 0$, $y = 0$, $A = 2$.



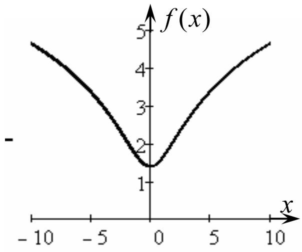
11.11. $A = 0$.



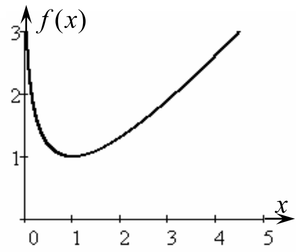
11.12. $A = 0$.



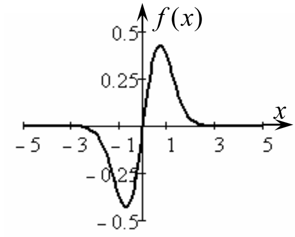
11.13. $A = 0$.



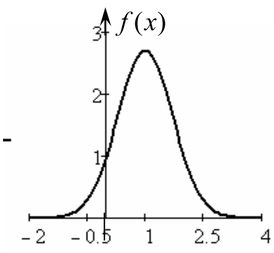
11.14. $A = 0$.



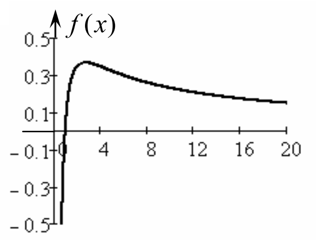
11.15. $y = 0$, $A = 1$.



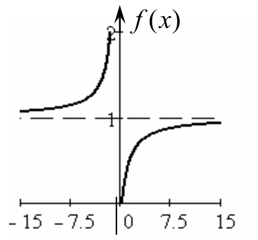
11.16. $y = 0$, $A = 1$.



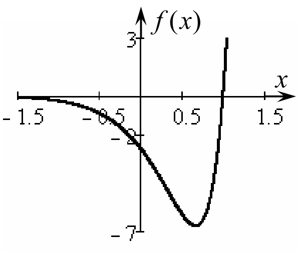
11.17. $x = 0$, $y = 0$, $A = 2$.



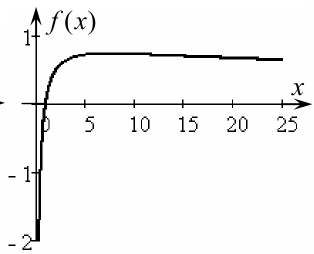
11.18. $x = 0$, $y = 1$, $A = 2$.



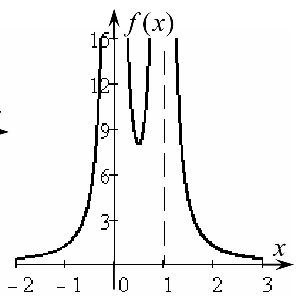
11.19. $x = 0$, $A = 1$.



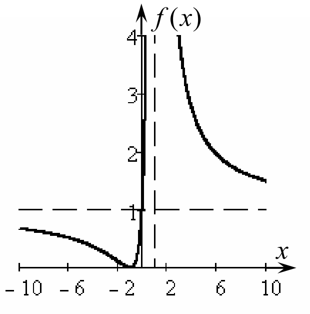
11.20. $x = 0$, $y = 0$, $A = 2$.

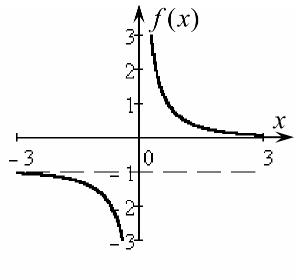


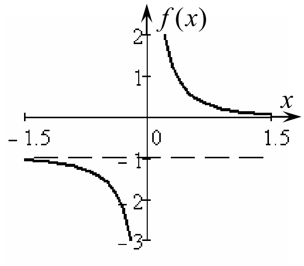
11.21. $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $A = 3$.



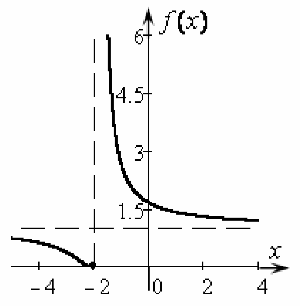
11.22. $x = 0$, $y = 1$, $A = 2$. **11.23.** $x = 0$, $y = -1$, $A = 3$ **11.24.** $x = 0$, $y = -1$, $A = 3$.







11.25 $x = -2$, $y = 1$, $A = 2$.



Вправи 12

12.01. $-\dfrac{8}{3} \approx -2,6667$. **12.02.** $\approx 239,9958$. **12.03.** $\approx 2,0255$. **12.04.** $\approx 5,3648$.

12.05. $\approx -2,3504$. **12.06.** $\dfrac{255}{16} \approx 15,9375$. **12.07.** $-\dfrac{960}{31} \approx -30,9677$. **12.08.** 3,75.

12.08. $\dfrac{783}{28} \approx 27,9643$. **12.10.** $-\dfrac{2\sqrt{7}}{21} \approx -0,252$. **12.11.** $\dfrac{224}{15} \approx 14,9333$.

12.12. $\dfrac{7\sqrt{2}}{4} \approx 2,4749$. **12.13.** $\dfrac{23\sqrt{3}}{18} \approx 2,2132$. **12.14.** $\dfrac{11}{30} \approx 0,3667$. **12.15.** 1,5.

12.16. $-\dfrac{8}{3} \approx -2,6667$. **12.17.** $-\dfrac{8}{3} \approx -2,6667$. **12.18.** $-\dfrac{65}{36} \approx -1,8056$.

12.19. $-\dfrac{19\sqrt{5}}{120} \approx -0,354$. **12.20.** $\dfrac{16}{15} \approx 1,0667$. **12.21.** $\dfrac{195}{14} \approx 13,9286$. **12.22.** 2,1.

12.23. $\dfrac{431\sqrt{3}}{36} \approx 20,7365$. **12.24.** $-3,75$. **12.25.** $-\dfrac{80}{9} \approx -8,8889$.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Задача 1. Користуючись визначенням похідної, знайти похідну функції $y = x|x|$ та обчислити її значення у точці x_0.

Задача 2. Знайти однобічні похідні функції $y = |x|\sin x$ та обчислити їхні значення у точці $x_0 = 0$.

Задача 3. Перевірити справедливість твердження: якщо функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ задовольняють умову $f(x) < \varphi(x)$, то їхні похідні $f'(x)$ та $\varphi'(x)$ задовольняють умову $f'(x) < \varphi'(x)$.

Задача 4. Задано функцію $f(x) = \arccos 3x$.

1) Знайти область визначення функції.
2) Знайти похідну $f'(x)$, користуючись визначенням похідної.
3) Знайти область визначення похідної.

Задача 5. Знайти похідну функції $f(x) = 2x\sin x - \left(x^2 - 2\right)\cos x$ та обчислити її значення у точці $x_0 = 0$.

Задача 6. Знайти похідну функції $f(x) = \ln\sqrt[3]{\dfrac{1+\cos x}{\mathrm{e}^x}}$ та обчислити її значення у точці $x_0 = 0$.

Задача 7. Знайти похідну функції $f(x) = \dfrac{3\pi x^3}{2} - 3x^3\arccos x + 2\sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^4 - x^6}$ та обчислити її значення у точці $x_0 = 0$.

Задача 8. Знайти похідну функції $f(x) = \dfrac{(x-3)^4\sqrt{2+x}}{(1+x)^5}$ та обчислити її значення у точці $x_0 = 2$.

Задача 9. Знайти похідну функції $f(x) = \left(\operatorname{arcctg}\sqrt[5]{\cos\left(\ln^3 x\right)}\right)^{\frac{1}{3}}$ та обчислити її значення у точці $x_0 = 1$.

Задача 10. Знайти похідну функції $f(x) = \left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^{-x}$ та обчислити її значення у точці $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

Задача 11. Знайти похідну параметрично заданої функції $\begin{cases} x = \ln\sin\dfrac{t}{2}; \\ y = \ln\sin t, \end{cases}$ де $t \in (0, \pi)$, та обчислити її значення у точці $t_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

Задача 12. Знайти диференціал функції $f\left(x\right)=\dfrac{\left(2x-1\right)^3}{\left(5x+4\right)^2}\sqrt[6]{\dfrac{\left(2+3x\right)^3}{\left(1-x\right)^2}}$ та обчислити його значення у точці $x_0 = 0$.

Задача 13. Знайти похідну четвертого порядку функції $f\left(x\right)=\ln x^{x^3}$ та обчислити її значення у точці $x_0 = 6$.

Задача 14. Скласти формулу для знаходження похідної n-го порядку функції $f\left(x\right)=\cos^4 x+\sin^4 x$.

Задача 15. Знайти похідну другого порядку параметрично заданої функції $\begin{cases} x=4\cos^3 t; \\ y=4\sin^3 t, \end{cases}$ де $t\in\left(-\infty, +\infty\right)$ та обчислити її значення у точці $t_0=\dfrac{\pi}{6}$.

Задача 16. Задано функцію $y=\left(\dfrac{x^2-10x+25}{x^2+x-6}\right)^{-1}$. Розв'язати рівняння $y'=0$.

Задача 17. Задано функцію $y=\sin \mathrm{e}^x+\cos \mathrm{e}^x+1$. З'ясувати, чи має розв'язки рівняння $y''-y'+\mathrm{e}^{2x}y=0$.

Задача 18. Задано функцію $y=2\mathrm{e}^{6x}+3\mathrm{e}^{-6x}+4\cos 6x+5\sin 6x$. Довести, що ця функція задовольняє рівняння $y^{\mathrm{IV}}=1296y$.

Задача 19. Користуючись правилом Лопіталя, знайти границю функції

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{arctg} 3x-3\operatorname{arctg} x}.$$

Задача 20. Користуючись правилом Лопіталя, знайти границю функції

$$\lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln \operatorname{sh} x}}.$$

Задача 21. Знайти суму найменшого та найбільшого значень функції $f\left(x\right)=2\left(1+\cos x\right)\sin x$ на проміжку $\left[0, \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Задача 22. Довести, що функція $f\left(x\right)=2x^3+3x^2-12x+24$ в інтервалі $\left(-2, 1\right)$ є спадною.

Задача 23. Знайти екстремуми функції $f\left(x\right)=\left(\dfrac{x^2+x+1}{3x^2+4x+4}\right)^{-1}$.

Задача 24. Перевірити, чи задовольняють умови теореми Коші функції $f\left(x\right)=\mathrm{e}^x+1$ та $\varphi\left(x\right)=\mathrm{e}^{2x}$. Якщо умови теореми Коші виконано, то скласти формулу Коші на проміжку $\left[1, 2\right]$.

Задача 25. Довести, що функція $f\left(x\right)=\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}\right)^{-1}$ має три точки перегину, які належать до однієї прямої.

ВІДПОВІДІ ДО ЗАДАЧ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1. 0. **2.** $f(0-0)=f(0+0)=0$. **3.** Твердження не є справедливе. **4.** 1) $0\le x\le\frac{\pi}{3}$; 2) $\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$; 3) $-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}$. **5.** 0. **6** $-\frac{1}{3}$. **7** 0. **8.** $-\frac{133}{2916}$. **9.** 0. **10.** $-\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{\pi}{2}}(1-\ln 2+\ln\pi)$. **11.** 0. **12.** $-\frac{89}{192}\sqrt{2}\,dx$. **13.** 1. **14.** $4^{n-1}\cos\left(\frac{n\pi}{2}+4x\right)$. **15.** $-\frac{16}{243\sqrt{3}}$. **16.** $\frac{7}{11}$.

17. Розв'язків немає. **19.** 1. **20.** e. **21.** $\frac{3}{2}\sqrt{3}-2$. **23.** $f_{\max}=f(0)=4$; $f_{\min}=f(-2)=\frac{8}{3}$. **24.** $\frac{1}{e(e-1)}=\frac{1}{2e^c}$, де $1<c<2$.

Р о з д і л III

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

Г л а в а 1

ФУНКЦІЇ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

1.1 Функції двох та кількох змінних

1.1.1 Поняття функції двох змінних

У розділах I та II розглянуто функції однієї змінної, тобто функції, значення яких залежать від значень однієї незалежної змінної.

На практиці часто доводиться мати справу з величинами, чисельні значення яких залежать від значень кількох фізичних, геометричних або іншого роду величин, що змінюються незалежно одна від одної. Вивчення залежності між такими величинами приводить до поняття функції кількох змінних.

Розглянемо найпростіший випадок, коли таких змінних є дві.

В и з н а ч е н н я . Якщо задано закон, за яким кожній парі (x, y) незалежних змінних x та y з множини D відповідає єдине значення змінної z з множини Z, то змінна z називається ***функцією змінних x*** та ***y.*** При цьому використовується позначення $z = f(x, y)$. Множина D називається ***областю визначення*** функції $f(x, y)$, множина Z − ***областю значень*** функції $f(x, y)$, а символ f – ***характеристикою*** функції.

В и з н а ч е н н я . Якщо кожній парі чисел (x, y) з області визначення функції відповідає одне значення z, то функція називається ***однозначною функцією***, у противному разі − ***багатозначною***.

ЗАУВАЖЕННЯ 1. Як і для функцій однієї змінної, якщо не обумовлене противне, будемо припускати, що розглянуті функції двох змінних однозначні.

ЗАУВАЖЕННЯ 2. Область визначення функції, яка містить усі пари (x, y) незалежних змінних x та y, за яких функція має сенс, інколи називається *природною областю визначення функції*. У низці випадків область визначення функції звужують і така область визначення вже не може називатися природною областю визначення функції.

Серед способів задання функцій двох змінних переважним є аналітичний спосіб задання функції.

Розглянемо деякі функції двох змінних.

Якщо x та y можуть набувати будь-яких числових значень, то змінні

$$z = x^2 + y^2, \quad z = 1 - x - y, \quad z = \ln\left(1 + x^4 + y^4\right)$$

і т. д. являють собою аналітично задані функції від x та y. Область визначення кожної з них є множина яких завгодно пар чисел (x, y).

Об’єм V конуса є функція його висоти H і радіуса R основи. Її аналітичне подання: $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 H.$ Область визначення – будь-які пари чисел (R, H), де

$R > 0$, $H > 0$, тобто область визначення цієї функції є звуженою, внаслідок геометричного змісту змінних. Природною областю визначення цієї функції є множина будь-яких пар (R, H) незалежних змінних.

Для функції $z = \ln\left(x^2 + y^2 - 1\right)$ природна область визначення складається зі всіх пар чисел (x, y), для яких $x^2 + y^2 - 1 > 0$, тобто $x^2 + y^2 > 1$ (рис. 3.1).

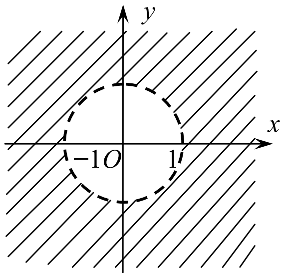


Рисунок 3.1

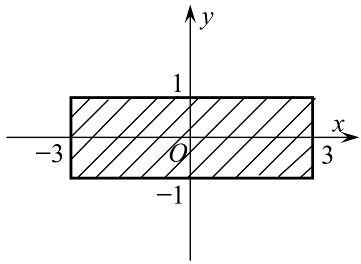


Рисунок 3.2

Для функції $z = \sqrt{9 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$ природна область визначення складається зі всіх пар чисел (x, y), для яких:

$$\begin{cases} 9 - x^2 \geq 0; \\ 1 - y^2 \geq 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} |x| \leq 3; \\ |y| \leq 1, \end{cases}, \quad \begin{cases} -3 \leq x \leq 3; \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

(рис. 3.2).

ЗАУВАЖЕННЯ. Надалі, якщо умовами задачі не накладаються додаткові обмеження на значення незалежних змінних, то під областю визначення аналітично заданої функції розумітимемо її природну область визначення.

Оберемо на площині прямокутну систему координат xOy і будемо зображувати пари чисел (x, y) точками площини з координатами x, y. Тоді область визначення функції $f(x, y)$ буде зображена певною множиною точок M площини, через що функцію двох змінних часто називають функцією точки M площини й позначають $z = f(M)$, а її область визначення зіставляють із множиною точок, що її зображують.

Для функцій $z = \ln\left(x^2 + y^2 - 1\right)$ та $z = \sqrt{9 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$ області визначення зображено штриховкою на рис. 3.1 та 3.2 відповідно.

1.1.2 Геометричне зображення функції двох змінних

Розглянемо у просторі прямокутну систему координат $Oxyz$. Нехай задано функцію $z = f(x, y)$, область визначення якої зображується певною множиною D точок площини xOy. Кожній точці $M_0(x_0, y_0)$ множини G поставимо у відповідність точку у просторі $N_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$, апліката якої дорівнює значенню функції в точці M_0: $z_0 = f\left(x_0, y_0\right)$. Сукупність всіх таких точок являє собою певну поверхню. Це і є графічне зображення функції $z = f\left(x,\ y\right)$ (рис. 3.3).

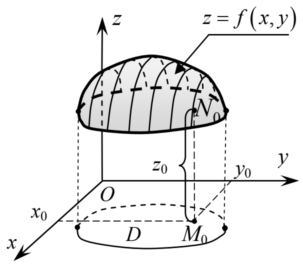


Рисунок 3.3

В и з н а ч е н н я. ***Графіком функції*** $z = f(x, y)$ у просторі *Oxyz* називається поверхня, що являє собою геометричне місце точок $(x, y, f(x, y))$, якщо точка (x, y) належить області визначення функції.

Наприклад, у функції $z = x^2 + y^2$ область визначення – вся площина *xOy*, а поверхня, що її зображує, – параболоїд обертання (рис. 3.4). Для функції $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ область визначення – круг $x^2 + y^2 \le 1$, а її поверхня зображується нижньою півсферою із центром $O\left(0, 0, 0\right)$ та радіусом $R = 1$ (рис. 3.5).

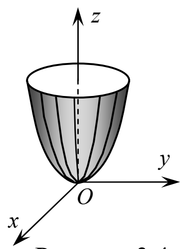


Рисунок 3.4

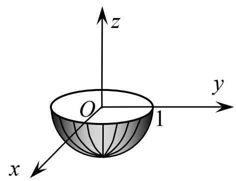


Рисунок 3.5

Розглянемо ще один спосіб геометричної ілюстрації функцій двох змінних.

В и з н а ч е н н я . Геометричне місце точок (x, y) площини, в яких функція набуває одного й того самого значення c, називається ***лінією рівня*** функції $z = f\left(x,\ y\right)$.

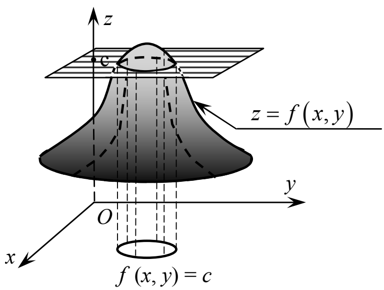


Рисунок 3.6

Лінію рівня можна побудувати, спроектувавши на площину *xOy* множину точок простору *Oxyz*, які лежать на перетині поверхні, що зображує функцію $z = f\left(x,\ y\right)$ та площини $z = c$ (рис. 3.6).

Рівняння лінії рівня має вигляд $f\left(x,\ y\right) = c$. Змінюючи c, будемо отримувати різні лінії рівня для даної функції, які усі разом називаються ***сім'єю ліній рівня***.

Якщо за c взяти $c_1, c_2, \ \ldots, c_n, \ldots$ обравши ці числа в арифметичній прогресії з різницею прогресії h, то дістанемо низку ліній рівня, за взаємним розміщенням яких можна зробити висновок щодо характеру змінювання функції (рис. 3.7).

Там, де лінії густіше, функція змінюється швидше (поверхня, що зображує функцію, іде крутіше), а там, де лінії рівня розміщуються рідше, функція змінюється повільніше (відповідна поверхня буде більш полога). Обираючи h вельми малим, можна в такий спосіб дістати доволі точне уявлення про поводження функції.

Приміром, для функції $z = x^2 + y^2$ рівняння сімейства ліній рівня має вигляд

$$x^2 + y^2 = c, \ \left(c \geq 0\right).$$

Надаючи c різні додатні значення, дістанемо концентричні кола з центром у початку координат радіуса $\sqrt{c}$. За $c = 0$ коло вироджується в точку (0, 0) (рис. 3.8).

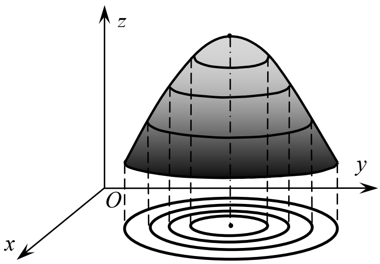


Рисунок 3.7

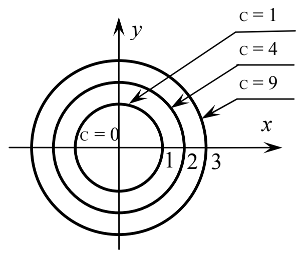


Рисунок 3.8

1.1.3 Поняття функції кількох змінних

В и з н а ч е н н я. Якщо задано закон f, за яким кожній трійці (x, y, z) незалежних змінних x, y та z з множини D відповідає єдине значення змінної u з множини U, то змінна u називається ***функцією змінних x, y* та *z***. При цьому використовується позначення $u = f\,(x, y, z)$. Множина D називається ***областю визначення*** функції, множина U − ***областю значень функції*** $f\,(x, y, z)$, а символ f − характеристикою функції.

Областю визначення функції $u = f\ (x,\ y,\ z)$ є певне просторове тіло або увесь тривимірний простір.

Зображуючи трійки чисел (x, y, z) точками простору $Oxyz$, можна розглядати функцію трьох змінних $u = f\,(x, y, z)$ як функцію точки $M(x, y, z)$ простору, а область визначення функції трьох змінних − як певну множину точок простору.

Наприклад, функцію $u = \dfrac{1}{\sqrt{16 - x^2 - y^2 - z^2}}$ визначено для тих точок простору, координати яких задовольняють нерівність $16 - x^2 - y^2 - z^2 > 0$, тобто для точок, обмежених сферою $x^2 + y^2 + z^2 = 16$; функцію $u = x + y + 5z$ визначено в усьому тривимірному просторі.

ЗАУВАЖЕННЯ. Зобразити функцію трьох змінних за допомогою графіка у тривимірному просторі неможливо.

Для вивчення функцій трьох змінних використовуються поверхні рівня функції.

В и з н а ч е н н я. ***Поверхнею рівня*** функції $u = f(x, y, z)$ називається геометричне місце точок простору, в яких функція набуває одного й того самого значення c.

Рівняння поверхні рівня має вигляд $f(x, y, z) = c$. Змінюючи c, будемо отримувати різні поверхні рівня, які усі разом називаються ***сім'єю поверхонь рівня.*** За їхнім взаємним розміщенням можна зробити висновок щодо характеру поводження функції.

Наприклад, поверхні рівня функції $u = x^2 + z^2 - y^2$ мають вигляд

$$x^2 + z^2 - y^2 = c.$$

Тоді:

якщо $c = 0$, маємо рівняння $x^2 + z^2 - y^2 = 0$, яке визначає конічну поверхню;

якщо $c > 0$, маємо рівняння $x^2 + z^2 - y^2 = c$, яке визначає сім'ю однопорожнинних гіперболоїдів;

якщо $c < 0$, маємо рівняння $x^2 + z^2 - y^2 = c$, яке визначає сім'ю двопорожнинних гіперболоїдів.

Поняття функції двох або трьох змінних може бути поширено і на функції n незалежних змінних.

В и з н а ч е н н я. Якщо задано закон f, за яким кожній сукупності $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n незалежних змінних з множини D відповідає одне значення змінної u з множини U, то змінна u називається ***функцією змінних*** $\boldsymbol{x_1, x_2, \dots, x_n}$. При цьому використовується позначення $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Множина D називається областю визначення функції, множина U − областю значень функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, а символ f − характеристикою функції.

Якщо $n > 3$, то область визначення функції та сама функція не мають геометричного зображення.

Надалі будемо розглядати функції двох змінних у зв'язку з тим, що властивості цих функцій поширюються і на функції n змінних.

1.2 Поняття границі функції двох та кількох змінних

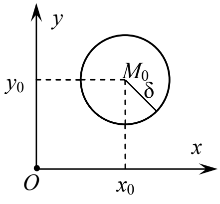


Рисунок 3.9

В и з н а ч е н н я. Сукупність точок площини, які перебувають від точки $M_0(x_0, y_0)$ на відстані менше за δ, тобто внутрішність кола з центром M_0 радіуса δ називається δ - ***околом точки*** $\boldsymbol{M_0}$ (рис. 3.9).

В и з н а ч е н н я (за Коші). Нехай функцію $z = f(x, y)$ задано в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$, за винятком, може бути, самої точки $M_0(x_0,\, y_0)$. Число A називається ***граничним значенням функції*** $z = f\ (x,\ y)$ у точці $M_0(x_0,\, y_0)$ або ***границею функції*** $z = f(x,\, y)$, коли точка $M(x,\, y)$ прямує до точки $M_0(x_0,\, y_0)$, якщо для будь-якого як завгодно малого додатного числа ε існує таке додатне число $\delta = \delta(\varepsilon)$, що для всіх точок $M(x, y)$, які задовольняють умову

$$0 < \rho(M, M_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta,$$

відповідні значення функції задовольняють нерівність

$$\left| f(x,\, y) - A \right| < \varepsilon.$$

При цьому використовуються позначення

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = A \quad \text{або} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,\, y) = A.$$

Геометрично це означає, що яке б не було число $\varepsilon > 0$, знайдеться настільки малий δ − окіл точки $M_0(x_0,\, y_0)$, що в усіх його точках $M(x, y)$, які відрізняються від M_0, аплікати відповідних точок поверхні, що зображує функцію $z = f(x, y)$, відрізняються від числа A за абсолютною величиною менше ніж на ε.

ЗАУВАЖЕННЯ: Визначення границі функції двох змінних за Коші може бути поширене на функції n змінних.

В и з н а ч е н н я (за Коші). Нехай функцію $u = f(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n)$ задано в деякому околі точки $M_0(x_1^0,\, x_2^0,\, \ldots,\, x_n^0)$, за винятком, можливо, самої точки $M_0(x_1^0,\, x_2^0,\, \ldots,\, x_n^0)$. Число A називається ***границею функції*** $u = f(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n)$, коли точка $M(x_1,\, x_2, \ldots,\, x_n)$ прямує до точки $M_0(x_1^0,\, x_2^0,\, \ldots,\, x_n^0)$, якщо для будь-якого як завгодно малого додатного числа ε існує таке додатне число $\delta = \delta(\varepsilon)$, що для усіх точок $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, які задовольняють умову

$$0 < \rho(M, M_0) = \sqrt{\left(x_1 - x_1^0\right)^2 + \left(x_2 - x_2^0\right)^2 + \ldots + \left(x_n - x_n^0\right)^2} < \delta,$$

відповідні значення функції задовольняють нерівність $\left| f(x_1,\, x_2, \ldots,\, x_n) - A \right| < \varepsilon$.

При цьому використовуються позначення

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = A \quad \text{або} \quad \lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ x_2 \to x_2^0 \\ \cdots \\ x_n \to x_n^0}} f(x_1,\, x_2, \ldots,\, x_n) = A.$$

В и з н а ч е н н я (за Гейне). Нехай функцію $z = f\,(x,\, y)$ задано в деякому околі точки $M_0(x_0,\, y_0)$ за винятком, може бути, самої точки $M_0(x_0,\, y_0)$. Число A називається ***граничним значенням функції*** $z = f(x,\, y)$ у точці $M_0(x_0,\, y_0)$ або ***границею функції*** $z = f(x,\, y)$, коли точка $M(x,\ y)$ прямує до точки $M_0(x_0,\, y_0)$, якщо для будь-яких послідовностей $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ та $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ значень аргументів x та y, що збігаються відповідно до x_0 та y_0, відповідна послідовність значень функції $f(x_1, y_1)$, $f(x_2, y_2)$, …, $f(x_n, y_n)$, …збігається до A, тобто

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = A \quad \text{або} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A.$$

ЗАУВАЖЕННЯ. Визначення границі функції двох змінних за Гейне може бути поширене на функції n змінних.

В и з н а ч е н н я (за Гейне). Нехай функцію $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задано в деякому околі точки $M_0\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ за винятком, можливо, самої точки $M_0\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$. Число A називається ***границею функції*** $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, коли точка $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ прямує до точки $M_0\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$, якщо для будь-яких послідовностей $x_1^1, x_2^1, ..., x_n^1, ..., x_1^2, x_2^2, ..., x_n^2, ..., x_1^n, x_2^n, ..., x_n^n ...$ значень аргументів $x_1, x_2, \ldots, x_n$, що збігаються відповідно до $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$, відповідна послідовність значень функції $f\left(x_1^1, x_2^1, ..., x_n^1 ...\right), f\left(x_1^2, x_2^2, ..., x_n^2, ...\right), ..., f\left(x_1^n, x_2^n, ..., x_n^n ...\right), ...$ збігається до A, тобто

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = A \quad \text{або} \quad \lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ x_2 \to x_2^0 \\ \cdots \\ x_n \to x_n^0}} f(x_1, x_2, ..., x_n) = A.$$

Для функцій багатьох змінних залишаються у силі всі властивості границь, розглянуті для функцій однієї змінної.

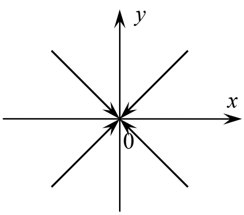


Рисунок 3.10

Розглянемо, наприклад, границю функції $z = \dfrac{x - y}{x + y}$, коли $x \to 0$ та $y \to 0$.

Нехай точка $M(x, y)$ прямує до точки $O(0,0)$ (прямування може бути яким завгодно – рис. 3.10) вздовж прямої $y = kx$. Тоді

$$\frac{x - y}{x + y} = \frac{x - kx}{x + kx} = \frac{1 - k}{1 + k}, \text{ звідки } \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x - y}{x + y} = \frac{1 - k}{1 + k}.$$

Дістаний результат має різні значення залежно від обраного k, і, внаслідок цього, границя функції, коли $x \to 0$ та $y \to 0$, не існує.

1.3 Неперервність функції двох та кількох змінних

В и з н а ч е н н я 1. Функція $z = f(x, y)$, визначена у точці $M_0(x_0, y_0)$ та деякому її околі, називається ***неперервною у точці*** $\boldsymbol{M_0(x_0, y_0)}$, якщо для будь-якого як завгодно малого додатного числа ε існує таке додатне число $\delta = \delta(\varepsilon)$, що для усіх точок $M(x, y)$, які задовольняють умову

$$0 < \rho(M, M_0) = \sqrt{\left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2} < \delta,$$

відповідні значення функції задовольняють нерівність $\left| f\left(x, y\right) - f\left(x_0, y_0\right) \right| < \varepsilon$.

Визначення 2. Функція $z = f(x, y)$, визначена у точці $M_0\left(x_0, y_0\right)$ та деякому її околі, називається ***неперервною у точці*** $\boldsymbol{M_0(x_0, y_0)}$, якщо її граничне значення у цій точці дорівнює $f(x_0, y_0)$, тобто якщо $\lim\limits_{M \to M_0} \left(x, y\right) = f\left(x_0, y_0\right)$.

Геометрично це означає, що при наближенні точки $M(x, y)$ за будь-якою послідовністю точок до точки $M_0(x_0, y_0)$ аплікати відповідних точок поверхні, що зображує функцію $z = f\left(x, y\right)$, прямують до аплікати точки M_0.

ЗАУВАЖЕННЯ. Користуючись визначенням неперервної функції у точці й теоремами щодо границь, можна довести, що для функцій двох змінних сума й добуток двох неперервних функцій є неперервна функція, частка двох неперервних функцій є неперервна функція у точках, в яких знаменник відрізняється від нуля, складна функція, утворена з неперервних функцій, є неперервна функція і т. д.

Завдання для самостійної роботи. Сформулювати і довести теореми про неперервність функцій, що є результатами арифметичних операцій над неперервними функціями.

Розглянемо функції

$$f\left(x, y\right) = x^2 + y^3, \quad \varphi\left(x, y\right) = \mathrm{e}^{x+y} \quad \text{та} \quad F\left(x, y\right) = \sin\left(x^2 y^3 + x - y + 5\right).$$

Це неперервні функції в усій області визначення.

Визначення. Нехай функцію $z = f\left(x, y\right)$ визначено в околі точки $M_0\left(x_0, y_0\right)$, за винятком, можливо, самої точки $M_0\left(x_0, y_0\right)$. Точка $M_0\left(x_0, y_0\right)$ називається ***точкою розриву функції*** $f\left(x, y\right)$, якщо у цій точці не виконуються умови неперервності функції.

Наприклад: 1) функція $f\left(x, y\right) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ є розривною у точці (0, 0), тому що її визначено всюди, за винятком цієї точки;

2) функція $f\left(x, y\right) = \begin{cases} x^2 + y^2, \text{ якщо } x \in R,\ y \in R,\ \ x \neq 1,\ y \neq 2; \\ 9, \qquad \text{якщо } x = 1, \ \ y = 2 \end{cases}$ у точці (1, 2) є розривна, тому що $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} f\left(x, y\right) = 5$, а $f\left(1, 2\right) = 9$;

3) функція $u = \dfrac{1 + xy}{3x + 2y - 5z + 1}$ має поверхнею розриву площину $3x + 2y - 5z + 1 = 0$.

Завдання для самостійної роботи. Записати визначення неперервної функції n змінних.

В и з н а ч е н н я. Множина точок площини називається ***зв'язною***, якщо будь-які дві точки цієї множини можна поєднати неперервною кривою, яка належить до цієї множини.

Наприклад, множина точок кільця $1 \le x^2 + y^2 \le 4$ (рис. 3.11) є зв'язною множиною, а множина точок, що належать до двох кругів: $x^2 + y^2 \le 1$ та $(x-3)^2 + y^2 \le 1$ (рис. 3.12) − не є зв'язною множиною.

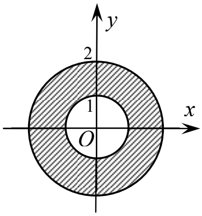


Рисунок 3.11

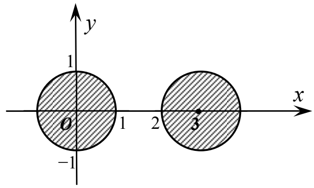


Рисунок 3.12

В и з н а ч е н н я. Точка M називається ***внутрішньою*** точкою деякої множини, якщо існує окіл цієї точки, що повністю складається з точок даної множини.

В и з н а ч е н н я. Множина, кожна точка якої є внутрішньою, називається ***відкритою.***

Наприклад: 1) множина точок, що лежать всередині кола, є відкритою множиною (рис. 3.13);

2) множина точок площини, які задовольняють нерівність $y > 1$, є відкритою множиною (рис. 3.14);

3) множина точок квадрата $-1 \le x \le 1$ та $-1 \le y \le 1$ не є відкритою, тому що точки множини, які лежать на прямих $x = \pm 1$ та $y = \pm 1$, не є внутрішніми (рис. 3.15).

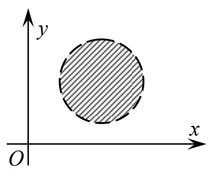


Рисунок 3.13

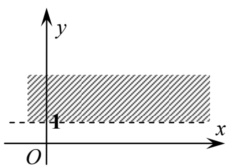


Рисунок 3.14

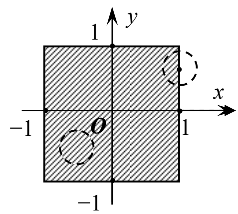


Рисунок 3.15

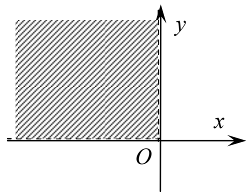


Рисунок 3.16

В и з н а ч е н н я Відкрита зв'язна множина точок площини називається ***областю.***

Наприклад: 1) множина точок (x, y) площини, для яких $x < 0$ та $y > 0$, є областю (рис. 3.16);

2) множина точок кільця $4 < x^2 + y^2 < 9$ є областю (рис. 3.17);

3) множина точок, які належать до круга є областю (рис. 3.18);

4) множина точок, які лежать у середині прямокутника є областю (рис. 3.19).

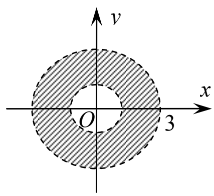


Рисунок 3.17

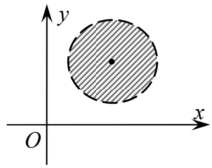


Рисунок 3.18

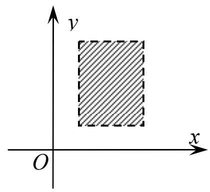


Рисунок 3.19

В и з н а ч е н н я. Точка M називається ***граничною точкою області***, якщо у будь-якому її околі є точки, які належать до цієї області, а також точки, які не належать до цієї області.

В и з н а ч е н н я. Сукупність усіх граничних точок області називається її ***границею.***

Наприклад: 1) для області, що складається з точок, які належать до круга, границею буде коло;

2) для області, що складається з точок, які обмежені еліпсом, границею буде сам еліпс.

В и з н а ч е н н я. Область D з долученою до неї границею Γ називається ***замкненою*** та позначається $\overline{D}$ тоді $\overline{D} = D \cup \Gamma$.

Замкненими областями є, наприклад, такі області:

1) коло: $x^2 + y^2 \le 1$;

2) прямокутник: $a \le x \le b$, $c \le y \le d$;

3) кільце: $4 \le x^2 + y^2 \le 9$;

В и з н а ч е н н я. Область називається ***обмеженою***, якщо існує коло, за межі якого задана область не виходить.

В и з н а ч е н н я. Нехай функцію $f(x, y)$ визначено у деякій області D. Функція $f(x, y)$ називається ***неперервною в області D***, якщо вона неперервна в кожній її точці.

Властивості функцій, неперервних у замкнених обмежених областях.

1) Функція $f(x, y)$, неперервна у замкненій обмеженій області, є обмеженою в цій області, тобто існує число A, за якого для всіх точок $M(x, y)$ області $|f(x, y)| \le A$.

2) Функція $f(x, y)$, неперервна у замкненій обмеженій області, досягає в цій області свого найменшого й найбільшого значень. Це означає, що існують такі числа m та M, що для всіх точок $M(x, y)$ області $m \le f(x, y) \le M$. Причому в області є точки (x_1, y_1) та (x_2, y_2), за яких $f(x_1, y_1) = m$, $f(x_2, y_2) = M$. Тут m – найменше, а M – найбільше значення функції $f(x, y)$ у даній області.

ЗАУВАЖЕННЯ 1 . Якщо $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$ − точки області, у якій функція $f(x, y)$ є неперервна, причому $f(x_1, y_1) < 0$, а $f(x_2, y_2) > 0$, то в області існує принаймні одна точка $M_0(x_0, y_0)$, в якій $f(x_0, y_0) = 0$.

ЗАУВАЖЕННЯ 2. Для функцій, неперервних в незамкнених або необмежених областях, властивості 1 та 2 можуть і не виконуватись.

ЗАУВАЖЕННЯ 3. Поняття неперервності функції у точці та в області і наведені властивості неперервних функцій двох змінних легко узагальнюються на функції трьох і більше змінних.

Завдання для самостійної роботи. Записати визначення неперервної функції n змінних.

1.4 Рівномірна неперервність функцій двох та кількох змінних

Нехай функція $z = f(x, y)$ є неперервною у деякій області D. Така функція є неперервною у кожній внутрішній точці цієї області.

Розглянемо будь-які дві точки $M_1(x_1, y_1) \in D$ та $M_2(x_2, y_2) \in D$. Візьмемо будь-яке як завгодно мале додатне число ε. Тоді, внаслідок неперервності функції в області D, можна стверджувати, що існує таке додатне число δ, залежне від ε, від точки $M_1(x_1, y_1)$ та від точки $M_2(x_2, y_2)$, які задовольняють умову $0 < \rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} < \delta$ що, відповідні значення функції задовольняють нерівність $|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)| < \varepsilon$.

Але є такі функції, для яких існує число δ, залежне лише від ε і не залежне від точок області.

В и з н а ч е н н я. Функція $z = f(x, y)$ називається ***рівномірно неперервною в області D*** , якщо для будь-якого як завгодно малого додатного числа ε існує таке додатне число δ, залежне лише від ε, що для будь-яких точок $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$ з області D, які задовольняють умову

$$0 < \rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \delta$$

відповідні значення функції задовольняють нерівність $|f(M_2) - f(M_1)| < \varepsilon$.

Якщо функція рівномірно неперервна в області D, то вона і неперервна в області D.

Якщо функція неперервна в замкненій області D, то вона і рівномірно неперервна в цій області.

Завдання для самостійної роботи. Записати визначення рівномірно неперервної функції n змінних.

Приклади до глави 1

Приклад 3.1. Подати площу S трикутника як функцію його сторін x, y та z.

Р о з в ’ я з а н н я

Скориставшись формулою Герона, дістанемо залежність

$$S = \sqrt{\frac{1}{2}(x+y+z)\left(\frac{1}{2}(x+y+z)-x\right)\left(\frac{1}{2}(x+y+z)-y\right)\frac{1}{2}((x+y+z)-z)}.$$

Після спрощення маємо

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}.$$

Це є функціональна залежність змінної S від трьох змінних – x, y та z.

В і д п о в і д ь: $S = \frac{1}{4}\sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}$ (од.кв).

Приклад 3.2. Знайти область визначення функції

$$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Для знаходження області визначення заданої функції будемо виходити з обмежень на корені парного степеня

$$x^2 + y^2 - 1 \geq 0, \quad x^2 + y^2 \geq 1.$$

Остання умова означає, що задану функцію визначено поза колом $x^2 + y^2 = 1$ та на самому колі (рис. 3.20).

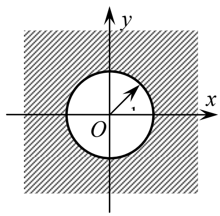


Рисунок 3.20

В і д п о в і д ь: $x^2 + y^2 \geq 1$.

Приклад 3.3. Знайти область визначення функції

$$z = \ln\left(y^2 - x + 2\right).$$

Р о з в ’ я з а н н я

Логарифмічну функцію, як відомо, визначено лише для додатних значень. Отже, маємо обмеження

$$y^2 - x + 2 > 0 \quad \text{чи} \quad x < y^2 + 2 .$$

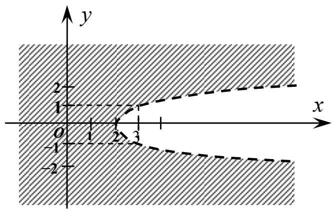


Рисунок 3.21

Розглянемо рівняння

$$x = y^2 + 2 .$$

Це є рівняння параболи, симетричної відносно осі Ox з вершиною у точці (2, 0). Ця парабола розділяє площину xOy на дві частини, одна з яких задовольняє умову

$$x < y^2 + 2 . \qquad (3.1)$$

Для того, щоб знайти саме цю частину площини xOy, підставимо координати будь-якої точки, наприклад, точки $O(0, 0)$ до нерівності (3.1). Виходить, $0 < 2$. Тобто, умову (3.1) задовольняє та частина площини xOy, що лежить поза параболою, не включаючи саму параболу (рис. 3.21).

В і д п о в і д ь : $x < y^2 + 2$.

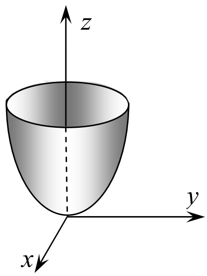


Рисунок 3.22

Приклад 3.4. Знайти область визначення функції

$$u = \sqrt[6]{x^2 + y^2 - 4z} .$$

Р о з в ’ я з а н н я

До складу функції входить корінь парного степеня, отже,

$$x^2 + y^2 - 4z \geq 0. \qquad (3.2)$$

Звідси

$$x^2 + y^2 \geq 4z.$$

Рівняння $x^2 + y^2 = 4z$ визначає параболоїд обертання. Цей параболоїд поділяє увесь тривимірний простір на дві частини. Нерівність (3.2) задовольняють точки, які лежать на параболоїді або поза параболоїдом (рис. 3.22).

В і д п о в і д ь : $x^2 + y^2 \geq 4z$.

Приклад 3.5. Знайти область визначення функції

$$u = \lg\left(1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25}\right).$$

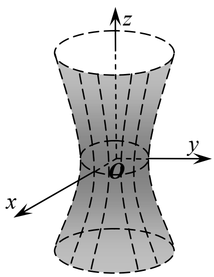


Рисунок 3.23

Р о з в ’ я з а н н я

Оскільки вираз, який знаходиться під знаком логарифма, має бути додатним, то приходимо до нерівності

$$1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} > 0 . \qquad (3.3)$$

Звідси випливає, що

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{25} < 1 .$$

Рівняння

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{25}=1$$

визначає однопорожнинний гіперболоїд. Цей гіперболоїд увесь тривимірний простір поділяє на дві частини. Нерівність (3.3) задовольняють внутрішні точки гіперболоїда (рис. 3.23).

В і д п о в і д ь: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{25}<1.$

Приклад 3.6. Знайти область визначення функції

$$z=\left(\ln x+\ln y\right)^{1/2}.$$

Р о з в ' я з а н н я

Запишемо функцію z у вигляді $z=\sqrt{\ln x+\ln y}$. Маємо обмеження

$$\begin{cases}\ln x+\ln y\ge 0;\\ x>0;\\ y>0,\end{cases}\qquad \begin{cases}\ln x\ge -\ln y;\\ x>0;\\ y>0.\end{cases}$$

Звідси виходить, що

$$\begin{cases}\ln x\ge \ln\dfrac{1}{y};\\ x>0;\\ y>0.\end{cases}$$

Остаточно маємо

$$\begin{cases}y>0;\\ x\ge\dfrac{1}{y}.\end{cases}$$

Розглянемо рівняння $y=\dfrac{1}{x}$. Таке рівняння визначає гіперболу. До області визначення входять усі точки, належні до правої вітки гіперболи, та усі точки, що розміщені над нею (рис. 3.24).

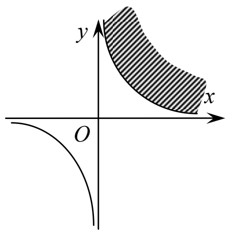


Рисунок 3.24

В і д п о в і д ь: $\begin{cases}y>0;\\ x\ge\dfrac{1}{y}.\end{cases}$

Приклад 3.7 Знайти область визначення функції

$$z=5\arccos\left(3x+4y\right).$$

Р о з в ' я з а н н я

Будемо виходити з обмежень на аргумент функції арккосинус.

$$|\,3x+4y\,|\le 1,\qquad -1\le 3x+4y\le 1,$$

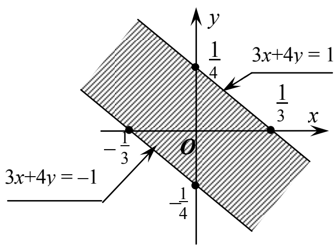


Рисунок 3.25

Звідси маємо

$$\begin{cases} 3x+4y \ge -1; \\ 3x+4y \le 1. \end{cases}$$

Розглянемо рівняння $3x + 4y = -1$ та $3x + 4y = 1$. Ці рівняння визначають паралельні прямі. Смуга між цими прямими та самі прямі становлять область визначення функції (рис. 3.25).

Відповідь: $\begin{cases} 3x+4y \ge -1; \\ 3x+4y \le \ \ 1. \end{cases}$

Приклад 3.8. Знайти область визначення функції

$$z = \arcsin\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-5\right).$$

Розв'язання

Будемо виходити з обмежень на аргумент функції арксинус.

$$\left|\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-5\right| \le 1, \qquad -1 \le \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-5 \le 1.$$

Звідси маємо

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}-5 \ge -1; \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}-5 \le \ \ 1. \end{cases}$$

Після спрощення дістанемо систему нерівностей

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9} \ge 4; \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9} \le 6, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{36} \ge 1; \\ \dfrac{x^2}{24}+\dfrac{y^2}{54} \le 1. \end{cases}$$

Розглянемо рівняння $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{36}=1$. Це рівняння визначає еліпс з півосями $a = 4$ та $b = 6$, а нерівність $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{36} \ge 1$ – точки, які лежать на еліпсі та поза еліпсом (рис. 3.26).

Аналогічно, рівняння $\dfrac{x^2}{24}+\dfrac{y^2}{54}=1$ визначає еліпс з півосями $a = \sqrt{24}$ та

$b = \sqrt{54}$, а нерівність $\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{54} \le 1$ – точки, які належать еліпсу або обмежені еліпсом (рис. 3.27).

Областю визначення заданої функції є множина точок, які лежать на цих

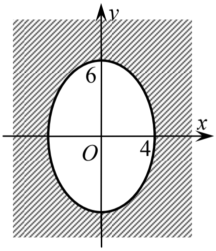


Рисунок 3.26

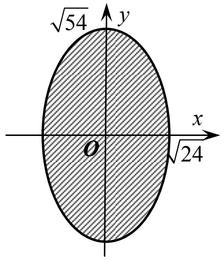


Рисунок 3.27

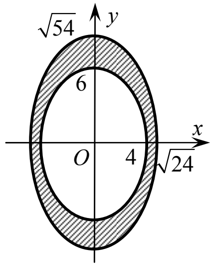


Рисунок 3.28

еліпсах або між ними (рис. 3.28).

В і д п о в і д ь: $\begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} \ge 1; \\ \frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{54} \le 1. \end{cases}$

Приклад 3.9. Знайти область визначення функції

$$u = \frac{4x + 5y - 6z + 7}{2x + 3y + 4z - 12} + \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Будемо виходити з обмежень на знаменник та на корені парного степеня

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z - 12 \ne 0; \\ x \ge 0; \\ y \ge 0; \\ z \ge 0. \end{cases}$$

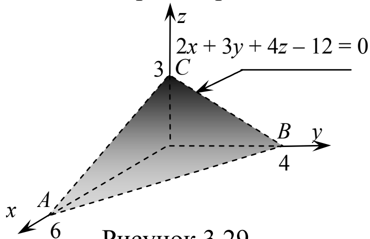


Рисунок 3.29

Розглянемо рівняння $2x + 3y + 4z - 12 = 0$. Таке рівняння визначає площину. А область визначення функції визначає множину точок з першого октанту, тобто множину точок, для яких $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$, за винятком тих точок, які лежать на сторонах ΔABC або в середині цього трикутника (рис. 3.29).

В і д п о в і д ь : $\begin{cases} 2x + 3y + 4z - 12 \ne 0; \\ x \ge 0; \\ y \ge 0; \\ z \ge 0. \end{cases}$

Приклад 3.10. Знайти область визначення функції

$$z = \sin\left(\arcsin\left(5x + 2y - 10\right)\right).$$

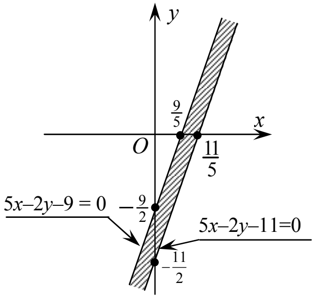


Рисунок 3.30

Р о з в ' я з а н н я

З обмежень на арксинус маємо:

$$|\, 5x - 2y - 10 \,| \le 1 \quad \text{або} \quad -1 \le 5x - 2y - 10 \le 1.$$

Тоді

$$\begin{cases} 5x - 2y - 10 \ge -1; \\ 5x - 2y - 10 \le 1. \end{cases}$$

Звідси маємо

$$\begin{cases} 5x - 2y \ge 9; \\ 5x - 2y \le 11. \end{cases}$$

Така система нерівностей визначає точки, які лежать на прямих $5x - 2y - 9 = 0$ та $5x - 2y - 11 = 0$, а також у смузі між цими прямими (рис. 3.30).

Доречно звернути увагу на те, що функція $z = 5x + 2y - 10$ має область визначення $\begin{bmatrix} x \in (-\infty, +\infty) \\ y \in (-\infty, +\infty) \end{bmatrix}$, але область визначення заданої функції звужується через обмеження області визначення функції арксинус.

В і д п о в і д ь: $\begin{cases} 5x - 2y \ge 9; \\ 5x - 2y \le 11. \end{cases}$

Приклад 3.11. Знайти область визначення функції

$$u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 1}} + 2^{\sqrt[8]{1 - \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{36}}}.$$

Р о з в ' я з а н н я

Наявність коренів парного степеня призводить до обмежень

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 1 > 0; \\ 1 - \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{25} - \dfrac{z^2}{36} \ge 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 > 1; \\ \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{25} + \dfrac{z^2}{36} \le 1. \end{cases}$$

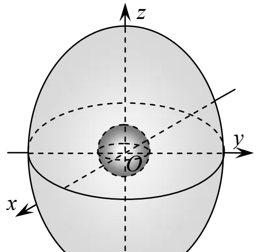


Рисунок 3.31

Рівняння $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ визначає сферу з центром у точці $O(0, 0)$ радіуса $R = 1$, а рівняння $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{25} + \dfrac{z^2}{36} = 1$ – еліпсоїд з центром у точці $O(0, 0, 0)$, піввісі якого $a = 4$, $b = 5$, $c = 6$.

Перша з нерівностей визначає множину точок поза сферою, а друга – множину точок, які лежать на еліпсоїді та всередині еліпсоїда.

Отже, функцію визначено в області, яка знаходиться між сферою та еліпсоїдом, включаючи точки еліпсоїда (рис. 3.31).

В і д п о в і д ь: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2>1; \\ \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}+\dfrac{z^2}{36}\le 1. \end{cases}$

Приклад 3.12. Знайти область визначення функції

$$u=\log_3\left(1-x^4-y^4-z^4\right)+\log_4\left(x^4+y^4+z^4-1\right).$$

Р о з в ’ я з а н н я

Наявність логарифмів зумовлює такі обмеження

$$\begin{cases} 1-x^4-y^4-z^4>0; \\ x^4+y^4+z^4-1>0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x^4+y^4+z^4<1; \\ x^4+y^4+z^4>1. \end{cases}$$

Оскільки остання система нерівностей є несумісною, то областю визначення заданої функції є порожня множина.

В і д п о в і д ь: $\varnothing$.

Приклад 3.13. Знайти лінії рівня функції

$$z = 3x + 4y.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Як виходить з визначення ліній рівня (п. 1.1.2), їхні рівняння мають вигляд

$$3x + 4y = c,$$

де c – стала, що може набувати будь-яких значень. Надаючи c конкретні значення, дістанемо рівняння паралельних між собою прямих. Таких прямих існує безліч. Вони утворюють сім’ю прямих (рис. 3.32).

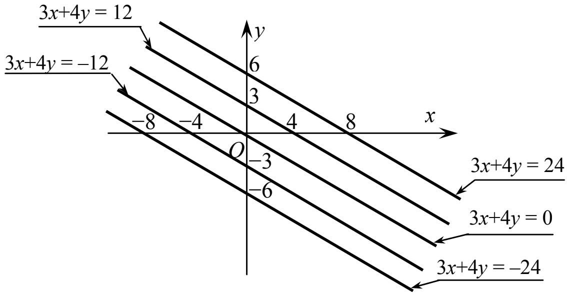


Рисунок 3.32

В і д п о в і д ь: сім’я прямих $3x + 4y = c$, де $c \in R$.

Приклад 3.14. Знайти лінії рівня функції

$$z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Рівняння ліній рівня має вигляд

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=c,$$

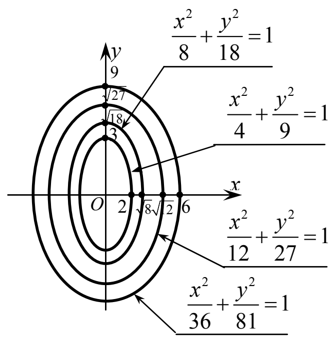


Рисунок 3.33

де c – стала, яка набуває будь-яких додатних значень. У кожному разі лінії рівня мають форму еліпса (рис. 3.33). Усі еліпси подібні. Таких еліпсів існує безліч.

В і д п о в і д ь: сім'я еліпсів $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=c$, де $c\in R$.

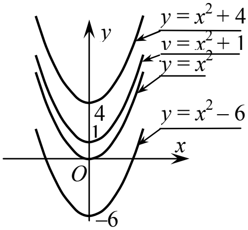


Рисунок 3.34

Приклад 3.15. Знайти лінії рівня функції

$$z=x^2-y.$$

Р о з в ' я з а н н я

Рівняння ліній рівня мають вигляд $x^2-y=c$ чи $y=x^2+c$, де c – стала, яка набуває будь-яких значень. У кожному разі маємо параболи (рис. 3.34).

Усі параболи подібні. Одна парабола виходить з іншої її паралельним перенесенням вздовж осі Oy. Таких парабол існує безліч.

В і д п о в і д ь: сім'я парабол $y=x^2+c$, де $c\in R$.

Приклад 3.16. Знайти поверхні рівня функції

$$u=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}.$$

Р о з в ' я з а н н я

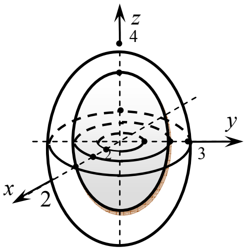


Рисунок 3.35

Як виходить з визначення поверхні рівня (п. 1.1.3), рівняння поверхонь рівня заданої функції мають вигляд

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=c,$$

де c – будь-яка стала, котра набуває додатних значень. Поверхнями рівня є подібні еліпсоїди, яких існує безліч (рис. 3.35).

В і д п о в і д ь: сім'я еліпсоїдів $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=c$, де $c\in R$.

Приклад 3.17. Знайти поверхні рівня функції

$$u=\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+z.$$

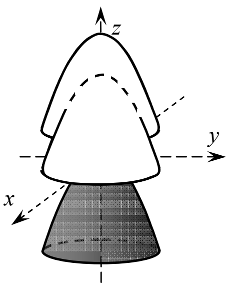


Рисунок 3.36

Р о з в ' я з а н н я

Поверхні рівня заданої функції мають вигляд

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+z=c \quad \text{або} \quad \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=c-z,$$

де c – стала, яка набуває будь-яких значень.

Поверхні рівня являють собою подібні еліптичні параболоїди, один параболоїд виходить з іншого його паралельним перенесенням вздовж осі Oz (рис. 3.36).

В і д п о в і д ь: сім'я еліптичних параболоїдів $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+z=c$, де $c\in R$.

Приклад 3.18. Знайти границю функції

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{3x-4y}{5x+6y}.$$

Р о з в ' я з а н н я

Позначимо границю функції через

$$A = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{5x-4y}{5x+6y} = \left[\frac{0}{0}\right].$$

Границя функції двох змінних передбачає послідовне знаходження границь цієї функції спочатку за однією змінною, а потім – за другою. При цьому границя функції не повинна залежати від порядку вибору змінних при знаходженні границі функції.

$$A = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{5x-4y}{5x+6y}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{-4y}{6y} = -\frac{2}{3}.$$

Будемо знаходити границю функції в іншому порядку:

$$A = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{5x-4y}{5x+6y}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{5x}{5x} = 1.$$

Вочевидь, границя функції залежить від порядку вибору змінних, тобто задана функція у точці (0, 0) границі не має.

В і д п о в і д ь: границя функції не існує.

Приклад 3.19. Знайти границю функції

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{7x+2y}{3x-5y}.$$

Р о з в ' я з а н н я

Позначимо границю функції через

$$A = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{7x+2y}{3x-5y} = \left[\frac{0}{0}\right].$$

Будемо знаходити границю функції, спираючись на визначення границі функції за Гейне.

Отже, візьмемо за послідовність значень аргументу x послідовність $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, а за послідовність значень аргументу y також візьмемо послідовність $\left\{\frac{1}{n}\right\}$. Ці послідовності збігаються до нуля. Тоді

$$A = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{7}{n}+\frac{2}{n}}{\frac{3}{n}-\frac{5}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{9}{n}}{-\frac{2}{n}} = -\frac{9}{2}.$$

Оскільки границя функції не повинна залежати від того, яку саме послідовність значень аргументу обрано, розглянемо інші послідовності значень аргументів. Нехай для x це буде послідовність $\left\{\frac{6}{n}\right\}$, а для y – $\left\{\frac{2}{n}\right\}$. Ці послідовності збігаються до нуля.

$$A=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{42}{n}+\frac{4}{n}}{\frac{18}{n}-\frac{10}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{46}{n}}{\frac{8}{n}}=\frac{23}{4}.$$

Виходить, що величина A залежить від вибору послідовностей, тобто виходить, що задана функція у точці (0, 0) границі не має.

В і д п о в і д ь: границя функції не існує.

Приклад 3.20. Знайти границю функції:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{4x^2+9y^2}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Позначимо границю функції через

$$A=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{4x^2+9y^2}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Вибираємо послідовності значень аргументів: $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ – для x та $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ – для y. Ці послідовності збігаються до нуля. Отже, маємо

$$A=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{4}{n^2}+\frac{9}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{13}{n^2}}=\frac{1}{13}.$$

Тепер обираємо інші послідовності: $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ – для x та $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ – для y. Ці послідовності також збігаються до нуля. Тоді

$$A=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{4}{n^2}+\frac{9}{n^4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{4n^2+9}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{4+\frac{9}{n^2}}=0.$$

Значення A не збігаються, отже у точці (0, 0) границі не існує.

В і д п о в і д ь: границя функції не існує.

Приклад 3.21. Знайти границю функції

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{5-\sqrt{25-3xy}}{xy}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Позначимо границю функції через

$$A=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{5-\sqrt{25-3xy}}{xy}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

$$A=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{5-\sqrt{25-3xy}}{xy}=\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{5-\sqrt{25-3xy}}{xy}\right)=\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{5-\sqrt{25-3xy}}{xy}\cdot\frac{5+\sqrt{25-3xy}}{5+\sqrt{25-3xy}}\right)=$$

$$=\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{25-25+3xy}{xy\left(5+\sqrt{25-3xy}\right)}\right)=\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{3xy}{xy\left(5+\sqrt{25-3xy}\right)}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{3}{10}=\frac{3}{10}.$$

Знайдемо границю функції в іншому порядку:

$$A=\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{5-\sqrt{25-3xy}}{xy}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{5-\sqrt{25-3xy}}{xy}\cdot\frac{5+\sqrt{25-3xy}}{5+\sqrt{25-3xy}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{25-25+3xy}{xy\left(5+\sqrt{25-3xy}\right)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{3xy}{xy\left(5+\sqrt{25-3xy}\right)}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{3}{10}=\frac{3}{10}.$$

В і д п о в і д ь: $\frac{3}{10}$.

Приклад 3.22. Знайти границю функції

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{\operatorname{tg}4xy}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Позначимо границю функції через

$$A=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{\operatorname{tg}4xy}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

$$A=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{\operatorname{tg}4xy}=\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{xy}{\operatorname{tg}4xy}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{1}{4}\left(\lim_{x\to 0}\frac{4xy}{\operatorname{tg}4xy}\right).$$

Скориставшись першою чудовою границею, маємо

$$A=\lim_{y\to 0}\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

Знайдемо границю функції в іншому порядку.

$$A=\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{xy}{\operatorname{tg}4xy}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{4}\left(\lim_{y\to 0}\frac{4xy}{\operatorname{tg}4xy}\right).$$

Скориставшись першою чудовою границею, дістанемо:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

Відповідь: $\frac{1}{4}$.

Приклад 3.23. Знайти границю функції

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\arcsin xy}{x}.$$

Розв'язання

Позначимо границю функції через

$$A=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\arcsin xy}{x}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

$$A=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\arcsin xy}{x}=\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin xy}{x}\right)=\lim_{y\to 0}y\left(\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin xy}{xy}\right)=\lim_{y\to 0}y=0.$$

Знаходимо границю функції в іншому порядку:

$$A=\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{\arcsin xy}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{y\cdot\arcsin xy}{xy}\right)=\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}y\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\arcsin xy}{xy}\right].$$

За першою чудовою границею виходить:

$$A=\lim_{y\to 0}y=0.$$

Відповідь: 0.

Приклад 3.24. Знайти границю функції

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(1+2x^2+3y^2\right)^{\frac{1}{2x^2+3y^2}}.$$

Розв'язання

Позначимо границю функції через

$$A=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(1+\left(2x^2+3y^2\right)\right)^{\frac{1}{2x^2+3y^2}}=\left[1^{\infty}\right].$$

Оскільки $\left(2x^2+3y^2\right)\to 0$, то можна дістати відповідь за другою чудовою границею. Маємо A = e.

Відповідь: e.

Приклад 3.25. Дослідити на неперервність функцію

$$u = \frac{4x + y}{5x + 6y + 15z - 30}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Задана функція є неперервною, якщо її знаменник відрізнюється від нуля, тобто, коли $5x + 6y + 15z - 30 \neq 0$.

Отже, усі точки, які належать до площини $5x + 6y + 15z - 30 = 0$, є точками розриву.

В і д п о в і д ь: $5x + 6y + 15z - 30 = 0$ – площина розриву.

Р о з д і л II

Г л а в а 2

ПОХІДНІ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛИ ФУНКЦІЙ ДВОХ ТА КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

2.1 Частинні похідні

2.1.1 Частинний та повний приріст функції

Нехай у деякій області задано функцію двох змінних $z = f(x, y)$. Розглянемо довільну точку $M(x, y)$ цієї області. Надамо змінній x приріст Δx, залишаючи значення y незмінним. Функція $f(x, y)$ також набуде приросту

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

Цей приріст називається ***частинним приростом*** функції $z = f(x, y)$ за змінною x.

Аналогічно, вважаючи x за сталу і надаючи змінній y приріст Δy, дістанемо частинний приріст функції $z = f(x, y)$ за y

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Надаючи x та y прирости Δx та Δy відповідно, одержимо повний приріст функції:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

ЗАУВАЖЕННЯ. Взагалі, $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$. Прикладом може служити функція $z = xy$. Дійсно,

$$\Delta_x z = (x + \Delta x) y - xy = y\Delta x, \qquad \Delta_y z = (y + \Delta y) x - xy = x\Delta y,$$

$$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x \Delta y,$$

тобто

$$\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z.$$

Використовуючи поняття повного приросту функції, можна сформулювати ще одне визначення неперервної функції у точці.

В и з н а ч е н н я. Функція $z = f(x, y)$, визначена у точці $M_0(x_0, y_0)$ та деякому її околі, називається ***неперервною у точці M_0***, якщо її повний приріст у цій точці є нескінченно малою величиною, коли $M \to M_0$, тобто

$$\lim_{M \to M_0} \Delta z = 0 \quad \text{або} \quad \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0.$$

2.1.2 Частинні похідні функції двох та кількох змінних

В и з н а ч е н н я. ***Частинною похідною першого порядку функції*** $\boldsymbol{z = f(x,\ y)}$ ***за змінною*** $\boldsymbol{x}$ називається границя відношення частинного приросту функції z за змінною x до приросту Δx, коли $\Delta x \to 0$.

Частинну похідну функції $z = f\left(x,\ y\right)$ за змінною x позначають символами: z'_x, $f'_x(x,\ y)$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f\left(x,\ y\right)}{\partial x}$. Таким чином,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x + \Delta x,\ y\right) - f\left(x,\ y\right)}{\Delta x}.$$

Похідна $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ характеризує швидкість змінювання функції $z = f(x,\ y)$ за змінною x в точці $M(x,\ y)$.

В и з н а ч е н н я. ***Частинною похідною першого порядку функції*** $\boldsymbol{z = f(x,\ y)}$ ***за змінною*** $\boldsymbol{y}$ називається границя відношення частинного приросту функції z за змінною y до приросту Δy, коли $\Delta y \to 0$.

Частинну похідну функції $z = f(x,\ y)$ за y позначають символами: z'_y, $f'_y(x, y)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f\left(x,\ y\right)}{\partial y}$. Таким чином,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f\left(x,\ y + \Delta y\right) - f\left(x,\ y\right)}{\Delta x}.$$

Похідна $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ характеризує швидкість змінювання функції $z = f\left(x,\ y\right)$ за змінною y в точці $M\left(x,\ y\right)$.

ЗАУВАЖЕННЯ. Обчислення частинних похідних за змінною x (за змінною y) від конкретних функцій виконується за відомими для функцій однієї змінної правилами, у припущенні, що змінна y (змінна x) є сталою.

Приміром, для функції $z = x^2 \sin y$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \sin y, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cos y;$$

для функції $z = x^y$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y x^{y-1}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x.$$

Аналогічно, для функцій трьох змінних $u = f\left(x,\ y,\ z\right)$ вводяться поняття частинних похідних за кожною змінною, а саме $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}$. Ці частинні похідні визначають швидкість, з якою змінюється функція $u = f\left(x,\ y,\ z\right)$ у напрямку відповідно осі Ox, Oy, Oz. Частинна похідна за однією зі змінних знаходиться у припущенні, що дві інші змінні є сталими. У такий спосіб поняття частинних похідних вводиться і для функції $u = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$.

2.1.3 Поняття диференційовної функції

В и з н а ч е н н я. Функція $z = f\left(x, y\right)$ називається диференційовною у точці $\left(x, y\right)$, якщо її повний приріст у цій точці можна подати у вигляді

$$\Delta z = A\left(x, y\right)\Delta x + B\left(x, y\right)\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y, \qquad (3.4)$$

де α_1 та α_2 такі функції аргументів Δx та Δy при фіксованих значеннях x та y, що є нескінченно малими, коли $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, тобто, коли

$$\rho = \sqrt{\left(\Delta x\right)^2 + \left(\Delta y\right)^2} \to 0.$$

2.1.4 Необхідні умови диференційовності функції

Теорема 1. Якщо функція $z = f\left(x, y\right)$ диференційовна у точці $\left(x, y\right)$, то вона неперервна у цій точці.

Д о в е д е н н я

Якщо функція $z = f\left(x, y\right)$ диференційовна у точці $\left(x, y\right)$, то виконується співвідношення (3.4), звідки виходить

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0,$$

а це означає, що функція $f(x, y)$ неперервна у точці $\left(x, y\right)$.

Теорема 2. Якщо функція $z = f\left(x, y\right)$ диференційовна у точці $\left(x, y\right)$, то вона має у цій точці частинні похідні $f'_x\left(x, y\right)$, $f'_y\left(x, y\right)$.

Д о в е д е н н я

Оскільки функція $z = f\left(x, y\right)$ диференційовна у точці $\left(x, y\right)$, то справедливе співвідношення (3.4). Припустимо, що $\Delta y = 0$, з (3.4) маємо $\Delta_x z = A\left(x, y\right)\Delta x + \alpha_1 \Delta x$, де α_1 − нескінченно мала, коли $\Delta x \to 0$.

Поділимо обидві частини рівності (3.4) на Δx та перейдемо до границі, коли $\Delta x \to 0$. Маємо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(A\left(x, y\right) + \alpha_1\right) = A\left(x, y\right).$$

Виходить, у точці (x, y) існує частинна похідна $f'_x\left(x, y\right)$, причому $f'_x\left(x, y\right) = A\left(x, y\right)$.

Аналогічно доводиться, що у точці $\left(x, y\right)$ існує частинна похідна $f'_y\left(x, y\right)$ і при цьому $f'_y(x, y) = B\left(x, y\right)$.

ЗАУВАЖЕННЯ Для функції однієї змінної справедливе і обернене твердження: якщо функція має похідну у точці, то вона диференційовна у цій точці. Для функцій двох змінних обернене твердження до теореми 2 не завжди є справедливе, тобто з існування частинних похідних ще не випливає диференційовність функції.

2.1.5 Достатня умова диференційовності функції

Теорема 3. Якщо в деякому околі точки (x, y) існують частинні похідні $f'_x(x,y)$ та $f'_y(x,y)$ функції $z = f(x, y)$ і ці похідні неперервні у точці (x, y), то функція $z = f(x,y)$ диференційовна у цій точці.

Д о в е д е н н я

Для будь-яких Δx та Δy, таких, що $x+\Delta x$, $y+\Delta y$ не виходять за межі зазначеного околу, маємо:

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y) =$$
$$= \big(f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)\big) + \big(f(x, y+\Delta y) - f(x, y)\big).$$

Різницю $f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)$ можна розглядати як приріст функції $f(x, y+\Delta y)$ однієї змінної x при переході від значення x до $x+\Delta x$. Тоді за теоремою Лагранжа, маємо

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) = f'_x(\overline{x}, y+\Delta y)\Delta x,$$

де $\overline{x} \in [x, x+\Delta x]$, якщо $\Delta x > 0$ або $\overline{x} \in [x+\Delta x, x]$, якщо $\Delta x < 0$.

Аналогічно, для другої різниці

$$f(x, y+\Delta y) - f(x, y) = f'_y(x; \overline{y})\,\Delta y,$$

де $\overline{y} \in [y, y+\Delta y]$, якщо $\Delta y > 0$, або $\overline{y} \in [y+\Delta y, y]$, якщо $\Delta y < 0$.

Таким чином,

$$\Delta z = f'_x(\overline{x}, y+\Delta y)\,\Delta x + f'_y(x, \overline{y})\,\Delta y, \qquad (*)$$

де $\overline{x}$ та $\overline{y}$ зазначено вище.

За умовою частинні похідні $f'_y(x, y)$ та $f'_x(x, y)$ неперервні у точці (x, y), отже,

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f'_x(\overline{x}, y+\Delta y) = f'_x(x, y), \qquad \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f'_y(x, \overline{y}) = f'_y(x, y),$$

тобто

$$f'_x(\overline{x}, y+\Delta y) = f'_x(x, y) + \alpha_1, \qquad f'_y(x, \overline{y}) = f'_y(x, y) + \alpha_2,$$

де α_1 і α_2 − нескінченно малі, коли відповідно $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$.

Підставивши ці значення у формулу (*) , дістанемо

$$\Delta z = f'_x(x, y)\,\Delta x + f'_y(x, y)\,\Delta y + \alpha_1\,\Delta x + \alpha_2\,\Delta y, \qquad (3.5)$$

де α_1 і α_2 — нескінченно малі, коли $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, а це означає, що функція $f(x, y)$ диференційовна у точці (x, y).

Надалі умову диференційовності функції $z = f(x; y)$ будемо записувати у формі (3.5).

ЗАУВАЖЕННЯ. Відзначимо, що неперервність частинних похідних у точці є достатньою умовою диференційовності функції у точці, але не є необхідною.

За допомогою доведеної теореми можна встановлювати диференційовність для широкого класу функцій. Приміром, функція $z = x^2 e^{x^2 y^3}$ у будь-якій точці (x, y) диференційовна, тому що її частинні похідні

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(2x + 2x^3 y^3\right) e^{x^2 y^3} \quad \text{і} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^4 y^2 e^{x^2 y^3}$$

неперервні, функція $z = \sqrt{x + y}$ диференційовна у кожній точці півплощини $x + y > 0$, тому що існують і неперервні її частинні похідні

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x + y}}.$$

ЗАУВАЖЕННЯ. Поняття диференційовності для функції трьох і більшого числа змінних упроваджується аналогічно до розглянутого вище випадку функції двох змінних.

В и з н а ч е н н я. Функція будь-якої кількості змінних, диференційовна у кожній точці деякої області, називається ***диференційовною в цій області***.

2.1.6 Похідні складної функції

В и з н а ч е н н я. Функція $z = f\left(u(x, y), v(x, y)\right)$ називається ***складною функцією двох змінних***, якщо вона може бути утворена за допомогою функцій $u(x, y)$ та $v(x, y)$, визначених в області D, де областю їхніх значень є область T, та за допомогою функції $z = f(u; v)$, областю визначення якої є область T. Функції $u(x, y)$ та $v(x, y)$ називаються ***внутрішніми функціями***, а функція $z = f(u, v)$ − ***зовнішньою функцією***.

Теорема. Якщо функції $u(x, y)$ та $v(x, y)$ диференційовні в деякій точці (x, y), а функція $z = f(u, v)$ диференціовна у відповідній точці $\left(u(x, y), v(x, y)\right)$, то складна функція $z = f\left(u(x, y), v(x, y)\right)$ диференційовна у точці (x, y) і при цьому є справедливими формули

$$\frac{\partial z(x; y)}{\partial x} = \frac{\partial f(u; v)}{\partial u}\frac{\partial u(x; y)}{\partial x} + \frac{\partial f(u; v)}{\partial v}\frac{\partial v(x; y)}{\partial x}; \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial z(x; y)}{\partial y} = \frac{\partial f(u; v)}{\partial u}\frac{\partial u(x; y)}{\partial y} + \frac{\partial f(u; v)}{\partial v}\frac{\partial v(x; y)}{\partial y}. \tag{3.7}$$

Д о в е д е н н я

Надамо аргументу x приріст Δx, зберігаючи при цьому значення y незмінним. Тоді функції $u(x, y)$ та $v(x, y)$ дістануть відповідно частинні прирости $\Delta_x u$ та $\Delta_x v$, а функція $z = f\left(u(x, y), v(x, y)\right)$ дістане частинний приріст $\Delta_x z$:

$$\Delta_x z = \frac{\partial f\left(u, v\right)}{\partial u}\,\Delta_x u\left(x, y\right) + \frac{\partial f\left(u, v\right)}{\partial v}\,\Delta_x v\left(x, y\right) + \alpha_1\,\Delta_x u\left(x, y\right) + \alpha_2\,\Delta_x v\left(x, y\right),$$

де α_1 та α_2 такі функції аргументів $\Delta_x u$ та $\Delta_x v$ при фіксованих значеннях u та v, що є нескінченно малими, коли $\Delta_x u \to 0$ та $\Delta_x v \to 0$, тобто коли $S = \sqrt{\Delta_x u^2 + \Delta_x v^2} \to 0$.

Поділивши обидві частини останньої рівності на $\Delta x \neq 0$, маємо

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial f\left(u, v\right)}{\partial u}\cdot\frac{\Delta_x u\left(x, y\right)}{\Delta x} + \frac{\partial f\left(u, v\right)}{\partial v}\cdot\frac{\Delta_x v\left(x, y\right)}{\Delta x} + \alpha_1\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \alpha_2\frac{\Delta_x v}{\Delta x}.$$

Припустимо, що $\Delta x \to 0$ і зробимо граничний перехід.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\partial f\left(u, v\right)}{\partial u}\cdot\frac{\Delta_x u\left(x, y\right)}{\Delta x} + \frac{\partial f\left(u, v\right)}{\partial v}\cdot\frac{\Delta_x v\left(x; y\right)}{\Delta x} + \alpha_1\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \alpha_2\frac{\Delta_x v}{\Delta x}\right),$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial f\left(u; v\right)}{\partial u}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u\left(x, y\right)}{\Delta x} + \frac{\partial f\left(u, v\right)}{\partial v}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x v\left(x, y\right)}{\Delta x} +$$

$$+\lim_{\Delta x\to 0}\alpha_1\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\alpha_2\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x v}{\Delta x}, \tag{3.8}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u\left(x, y\right)}{\Delta x} = \frac{\partial u\left(x, y\right)}{\partial x}, \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x v\left(x, y\right)}{\Delta x} = \frac{\partial v\left(x, y\right)}{\partial x}.$$

З диференційовності функцій $u(x, y)$ та $v(x, y)$ випливає їх неперервність. Тоді справедливі рівності

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u = 0 \quad \text{та} \quad \lim_{\Delta x\to 0}\Delta v = 0.$$

Отже, з умови $\Delta x \to 0$ випливають умови $\Delta u \to 0$ та $\Delta v \to 0$. Це надає змогу знайти дві останні границі у рівності (3.8):

$$\lim_{\Delta x\to 0}\alpha_1 = \lim_{\Delta u\to 0}\alpha_1 = 0 \quad \text{та} \quad \lim_{\Delta x\to 0}\alpha_2 = \lim_{\Delta v\to 0}\alpha_2 = 0,$$

внаслідок того, що α_1 та α_2, згідно з умовою диференційовності функції $z = f(u, v)$, прямують до нуля, коли $\Delta u \to 0$ та $\Delta v \to 0$.

Таким чином, встановлено, що границя правої частини рівності (3.8) існує, отже існує і границя лівої частини цієї рівності, а саме $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x z\left(x; y\right)}{\Delta x} = \dfrac{\partial z\left(x; y\right)}{\partial x}$.

Звідси маємо (3.6):

$$\frac{\partial z\left(x, y\right)}{\partial x} = \frac{\partial f\left(u, v\right)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u\left(x, y\right)}{\partial x} + \frac{\partial f\left(u, v\right)}{\partial v}\cdot\frac{\partial v\left(x, y\right)}{\partial x}.$$

Аналогічно доводиться і формула (3.7)

$$\frac{\partial z\left(x; y\right)}{\partial y} = \frac{\partial f\left(u; v\right)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u\left(x; y\right)}{\partial y} + \frac{\partial f\left(u; v\right)}{\partial v}\cdot\frac{\partial v\left(x; y\right)}{\partial y}.$$

Частинний випадок: $z = f(u, v)$, $u = u(t)$, $v = v(t)$. Тоді складна функція $z = f\left(u(t), v(t)\right)$ є функцією однієї змінної t. Знайдемо похідну $\dfrac{dz(t)}{dt}$. Така похідна називається ***повною похідною*** функції z за змінною t.

Формулу для знаходження $\dfrac{dz(t)}{dt}$ дістанемо як частинний випадок формул (3.7) або (3.8):

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{\partial f(u; v)}{\partial u} \cdot \frac{du(t)}{dt} + \frac{\partial f(u; v)}{\partial v} \cdot \frac{dv(t)}{dt}. \qquad (3.9)$$

2.2 Похідні функції, заданої неявно

Розглянемо неявно задану функцію

$$F(x, y) = 0, \qquad (3.10)$$

яка описує в неявній формі залежність між x та y. Інколи функція $F(x, y) = 0$ може бути подана у вигляді $y = f(x)$, в інших випадках явно заданої функції $y = f(x)$, що відповідає рівнянню $F(x, y) = 0$ може і не існувати. Умови, за яких рівняння $F(x, y) = 0$ можна вважати рівнянням, яке описує функціональну залежність між змінними x та y, тобто умови, за яких рівняння $F(x, y) = 0$ можна вважати неявно заданою функцією наведено у поданій далі теоремі.

Теорема (про існування неявно заданої функції однієї змінної). Нехай у точці $M_0(x_0, y_0)$ та деякому її околі

$$x_0 - \delta_1 < x < x_0 + \delta_1;$$
$$y_0 - \delta_2 < y < y_0 + \delta_2$$

визначено функцію $F(x, y) = 0$, яка є диференційовною, а її частинні похідні $F'_x(x, y)$ та $F'_y(x, y)$ є неперервними функціями. При цьому $F(x_0, y_0) = 0$, $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Тоді в околі точки x_0, який не виходить за межі проміжку $(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$, існує лише одна однозначна функція $y = f(x)$, така, що $y_0 = f(x_0)$ і при цьому функція $y = f(x)$ є диференційовною, а її похідна $y' = f'(x)$ – є неперервною функцією.

Приймемо цю теорему без доведення.

Як виходить з теореми, якщо функція $y = f(x)$, яку задано у неявній формі $F(x, y) = 0$, задовольняє умовам теореми про існування неявно заданої функції, то існує похідна y'. Розглянемо, в який спосіб можна знайти похідну y' за функцією $F(x, y) = 0$.

Функцію $F(x, y) = 0$ запишемо у вигляді $F(x,\ f(x)) = 0$ і продиференціюємо за x рівність (3.10), звідки повна похідна $\frac{dF\left(x,\ f(x)\right)}{dx} = 0$. Скориставшись формулою (3.9), дістанемо

$$\frac{\partial F\left(x,\ f(x)\right)}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F\left(x,\ f(x)\right)}{\partial f(x)} \cdot \frac{df(x)}{dx} = 0 \quad \text{або} \quad \frac{\partial F(x,\ y)}{\partial x} + \frac{\partial F(x,\ y)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

Звідси

$$\frac{\partial F(x,\ y)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F(x,\ y)}{\partial x},$$

а

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F(x,\ y)}{\partial x}}{\dfrac{\partial F(x,\ y)}{\partial y}}. \tag{3.11}$$

Розглянемо рівняння

$$F\left(x,\ y,\ z\right) = 0. \tag{3.12}$$

Якщо кожній парі чисел x та y відповідає одне або кілька значень z, які задовольняють рівняння (3.12), то це рівняння неявно задає одну або кілька однозначних функцій $z = f\left(x,\ y\right)$.

Приміром, рівняння $x^2 + y^2 + z^2 - 16 = 0$ задає z як неявно задану функцію x та y в області $x^2 + y^2 \le 16$. Ця функція є двозначна. Її явне подання є таким:

$$z = \pm\sqrt{16 - x^2 - y^2}\ .$$

Але рівняння $F\left(x,\ y,\ z\right) = 0$ не завжди визначає z як неявно задану функцію.

Теорема (про існування неявно заданої функції двох змінних). Нехай у точці $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ та деякому її околі

$$x_0 - \delta_1 < x < x_0 + \delta_1;$$
$$y_0 - \delta_2 < y < y_0 + \delta_2;$$
$$z_0 - \delta_3 < z < z_0 + \delta_3$$

визначено функцію $F(x, y, z) = 0$, яка є диференційовною функцією, а її частинні похідні $F'_x\left(x,\ y,\ z\right)$, $F'_y\left(x,\ y,\ z\right)$ та $F'_z\left(x,\ y,\ z\right)$ – є неперервними функціями. При цьому $F(x_0,\ y_0,\ z_0) = 0$, $F'_z\left(x_0,\ y_0,\ z_0\right) \ne 0$. Тоді у околі точки $\left(x_0,\ y_0\right)$, де x_0 не виходить за межі проміжку $\left(x_0 - \delta_1,\ x_0 + \delta_1\right)$, а y_0 – за межі проміжку $\left(y_0 - \delta_2,\ y_0 + \delta_2\right)$, існує лише одна однозначна функція $z = f\left(x,\ y\right)$ така, що $z_0 = f\left(x_0,\ y_0\right)$, і при цьому функція $z = f\left(x,\ y\right)$ є диференційовною, а її частинні похідні $z'_x\left(x,\ y\right)$ та $z'_y\left(x,\ y\right)$ є неперервними функціями.

Приймемо цю теорему без доведення.

Можна показати, що частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$ визначаються формулами

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}; \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}. \end{cases} \tag{3.13}$$

Приміром, для функції $z = f(x, y)$, заданої неявно рівнянням $x^2 + y^2 + z^2 - 16 = 0$, частинні похідні є такими

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{2z} = -\frac{y}{z}.$$

Завдання для самостійної роботи. Довести справедливість формул (3.12).

2.3 Частинні похідні вищих порядків

Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційовна, то вона має частинні похідні першого порядку. Якщо ці частинні похідні є диференційовними функціями, то вони також мають частинні похідні.

Визначення. ***Частинними похідними другого порядку*** функції $z = f(x, y)$ називають частинні похідні її частинних похідних першого порядку.

Позначаються частинні похідні другого порядку в такий спосіб:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y).$$

Частинні похідні другого порядку $f''_{xy}(x, y)$ та $f''_{yx}(x, y)$ називають ***мішаними*** похідними.

Аналогічно визначаються та позначаються частинні похідні третього та вищих порядків, наприклад:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z^2}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=f'''_{xxx}\left(x,\, y\right);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=f'''_{xxy}\left(x,\, y\right) \text{ тощо.}$$

Частинні похідні вищих порядків знаходяться за тими самими правилами, що і частинні похідні першого порядку.

Приміром, знайдемо частинні похідні другого порядку функції $z = y\ln x$.

Спочатку знаходимо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\ln x.$$

Внаслідок повторного диференціювання дістанемо

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right)=-\frac{y}{x^2}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\ln x\right)=0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{x}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln x\right)=\frac{1}{x}.$$

У наведеному прикладі $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

Відповідь на запитання, коли мішані похідні не залежать від порядку диференціювання, дає теорема, наведена нижче без доведення.

Теорема (Шварца). Якщо в деякому околі точки (x_0, y_0) функція $z = f\left(x,\, y\right)$ має мішані частинні похідні $F''_{xy}\left(x,\, y\right)$ та $F''_{yx}\left(x,\, y\right)$ і ці похідні неперервні у точці (x_0, y_0), то вони рівні між собою, тобто $F''_{xy}(x_0,\, y_0)=F''_{yx}(x_0,\, y_0)$.

Н а с л і д о к . Якщо функція $z = f\left(x,\, y\right)$ в деякій області має всі частинні похідні до *n*-го порядку включно і ці похідні є неперервні, то мішані похідні порядку *m*, $m \le n$, що відрізнюються лише послідовністю диференціювання, збігаються.

Приміром, якщо $n \ge 5$, то

$$f^{(\mathrm{V})}_{xxyxy}\left(x,\, y\right)=f^{(\mathrm{V})}_{xyxxy}\left(x,\, y\right).$$

Отже, якщо послідовність диференціювань для функції $f\left(x,\, y\right)$ не важлива, то будь-яку частинну похідну порядку *m* можна здобути, виконавши спочатку всі необхідні диференціювання за змінною *x*, а потім всі необхідні диференціювання за змінною *y*, тобто кожна частинна похідна порядку *m* такої функції може бути записана у вигляді:

$$\frac{\partial^m z}{\partial x^k \partial y^{m-k}},$$

де k набуває значення 0, 1, 2, 3, ..., m.

У даному прикладі $f^{(V)}_{xxyxy}(x, y) = f^{(V)}_{xyxxy}(x, y) = f^{(V)}_{xxxyy}$.

2.4 Диференціал функції

2.4.1 Поняття диференціала функції

Нехай функція $z = f(x, y)$ диференційовна у точці (x, y) та деякому її околі. Як відомо, повний приріст функції у цій точці можна подати у вигляді (3.4). Запишемо рівність (3.4) у такий спосіб:

$$\Delta z = \left(f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y\right) + \left(\alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y\right), \tag{3.14}$$

де α_1 та α_2 – нескінченно малі, коли $\Delta x \to 0$ та $\Delta y \to 0$, тобто, коли $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$.

Права частина рівності (3.14) складається з двох доданків. Коли $\Delta x \to 0$ та $\Delta y \to 0$, обидва доданки стають нескінченно малими, але другий доданок є нескінченно малим більш високого порядку малості, ніж перший доданок. У зв'язку з цим можна стверджувати, що перший доданок є головною частиною приросту функції, якщо $f'_x(x, y)$ та $f'_y(x, y)$ не дорівнюють нулю водночас. До того ж, перший доданок є лінійною відносно Δx та Δy функцією.

Визначення ***Повним диференціалом*** функції $z = f(x, y)$ у точці $M(x, y)$, який відповідає приростам Δx та Δy, називається головна лінійна відносно Δx та Δy частина приросту функції у точці $M(x, y)$, якщо $f'_x(x, y) \neq 0$ та $f'_y(x, y) \neq 0$. При цьому використовуються позначення

$$dz = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y \tag{3.15}$$

або

$$dz = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\Delta y. \tag{3.16}$$

У разі, коли $f'_x(x, y) = 0$ та $f'_y(x, y) = 0$, вираз $f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y$ перестає бути головною частиною приросту функції, оскільки тоді $f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y = 0$, а $\alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y$ лише прямує до нуля. За домовленістю вважається, що і в цьому разі повний диференціал функції визначається за формулою (3.11) і дорівнює нулю.

2.4.2 Інваріантність форми диференціала

Розглянемо функцію $z = x$, де x – незалежна змінна. Згідно з формулою (3.14)

$$dz = dx = 1 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y, \quad \text{тобто} \quad dz = \Delta x.$$

Оскільки $z = x$, то $dx = \Delta x$.

Аналогічно, розглядаючи функцію $z = y$, де y – незалежна змінна, дістанемо рівність $dz = dy = 0 \cdot \Delta x + 1 \cdot \Delta y$, тобто $dz = \Delta y$.

Оскільки $z = y_1$, то $dy = \Delta y$.

Отже, якщо $z = f(x, y)$, де x та y незалежні змінні, то повний диференціал функції можна записати як

$$dz = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy, \tag{3.17}$$

де dx та dy – диференціали незалежних змінних.

Розглянемо далі складну функцію $z = f\left(x(t_1, t_2), y(t,; t_2)\right)$. Знайдемо повний диференціал функції $z = f\left(x(t_1, t_2), y(t,; t_2)\right)$, де змінні x та y вже не є незалежними змінними. За формулою (3.17) в цьому разі маємо

$$dz = \frac{\partial f(t_1, t_2)}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial f(t_1, t)}{\partial t_2} dt_2. \tag{3.18}$$

За формулами (3.6) та (3.7) знаходимо частинні похідні

$$\frac{\partial f(t_1, t_2)}{\partial t_1} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \frac{\partial x(t_1, t_2)}{\partial t_1} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \frac{\partial y(t_1, t_2)}{\partial t_1}, \tag{3.19}$$

$$\frac{\partial f(t_1, t_2)}{\partial t_2} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \frac{\partial x(t_1, t_2)}{\partial t_2} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \frac{\partial y(t_1, t_2)}{\partial t_2}. \tag{3.20}$$

Підставимо праві частини рівностей (3.19) та (3.20) у рівність (3.18).

Маємо

$$dz = \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \frac{\partial x(t_1, t_2)}{\partial t_1} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \frac{\partial y(t_1, t_2)}{\partial t_1} \right) dt_1 + \\ + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \frac{\partial x(t_1, t_2)}{\partial t_2} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \frac{\partial y(t_1, t_2)}{\partial t_2} \right) dt_2,$$

звідки

$$dz = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \left(\frac{\partial x(t_1, t_2)}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial x(t_1, t_2)}{\partial t_2} dt_2 \right) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \left(\frac{\partial y(t_1, t_2)}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial y(t_1, t_2)}{\partial t_2} dt_2 \right).$$

Оскільки в дужках вийшли вирази, які дорівнюють відповідно dx та dy, то дістанемо формулу

$$dz = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy, \tag{3.21}$$

де x та y не є незалежними змінними.

Порівнюючи формули (3.17) та (3.21), доходимо висновку, що, незважаючи на те, якими є змінні x та y, залежними чи незалежними, повний диференціал функції виражається однією формулою.

Така властивість повного диференціала називається ***інваріантністю*** його форми, тобто форма запису повного диференціала є інваріантною.

Використовуючи визначення повного диференціала та інваріантність його форми, можна дістати деякі правила знаходження повного диференціала.

Нехай $u(x, y)$ та $v(x, y)$ − диференційовні функції двох незалежних або залежних змінних, c - будь-яка стала. Тоді є справедливі подані далі формули.

1. Якщо $z = c$, то $dz = 0$.
2. Якщо $z = u(x, y) \pm v(x, y)$, то $dz = du \pm dv$.
3. Якщо $z = u(x, y)v(x, y)$, то $dz = v(x,y)\,du + u(x,y)\,dv$.
4. Якщо $z = cu(x, y)$, то $dz = cdu$.
5. Якщо $z = \dfrac{u(x,y)}{v(x,y)}$, то $dz = \dfrac{v(x,y)\,du - u(x,y)\,dv}{v^2(x,y)}$, де $v(x,y) \neq 0$.
6. Якщо $z = \dfrac{u(x,y)}{c}$, то $dz = \dfrac{du}{c}$, де $c \neq 0$.
7. Якщо $z = \dfrac{c}{v(x,y)}$, то $dz = -\dfrac{cdv}{v^2(x,y)}$, де $v(x,y) \neq 0$.

2.4.3 Застосування повного диференціала до наближених обчислень

Повний диференціал функції $z = f(x, y)$ у точці (x, y) обчислюється за формулою (3.15):

$$dz = f'_x(x, y)\,\Delta x + f'_y(x, y)\,\Delta y,$$

а повний приріст функції $z = f(x, y)$ у точці (x, y) обчислюється за формулою (3.4)

$$\Delta z = f'_x(x;\, y)\Delta x + f'_y(x;\, y)\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y,$$

де α_1 та α_2 − нескінченно малі, коли $\Delta x \to 0$ та $\Delta y \to 0$.

Тоді $\Delta z = dz + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y$, де α_1 та α_2 – нескінченно малі, коли $\Delta x \to 0$ та $\Delta y \to 0$, тобто $\Delta z \approx dz$.

Замінивши $\Delta z = f(x + \Delta x,\, y + \Delta y) - (x,\, y)$ на диференціал dz, дістанемо

$$\Delta z = (x + \Delta x,\, y + \Delta y) - f(x,\, y) \approx f'_x(x,\, y)\,\Delta x + f'_y(x,\, y)\,\Delta y.$$

Отже,

$$f(x + \Delta x,\, y + \Delta y) \approx f(x,\, y) + f'_x(x,\, y)\,\Delta x + f'_y(x,\, y)\,\Delta y. \qquad (3.22)$$

Цю формулу застосовують у наближених обчисленнях.

2.5 Диференціали вищих порядків

Нехай $z = f(x,\, y)$ – диференційовна в області D функція двох незалежних змінних x та y. Її повний диференціал знаходиться за формулою (3.17)

$$dz = f'_x\left(x,\, y\right) dx + f'_y\left(x,\, y\right) dy\,. \tag{3.23}$$

При цьому dz називається ***диференціалом першого порядку***. Він залежить від значень x і y, dx і dy, тобто є функцією чотирьох змінних. У формулі (3.17) dx та dy вважатимемо за сталі, тоді виходить, що dz – функція двох змінних − x та y, визначених в області D. Диференціал цієї функції у будь-якій точці $(x,\, y)$ області D, якщо він існує, називається диференціалом другого порядку функції $z = f(x,\, y)$ у точці $(x,\, y)$ і позначається як $d^2 z$ або $d^2\left(x,\, y\right)$. Отже, $d^2 z = d\left(dz\right)$.

Аналогічно визначаються диференціали третього, четвертого, ..., n-го порядків. При цьому

$$d^n z = d\left(d^{n-1} z\right).$$

Якщо x і y – незалежні змінні, а функція $f\left(x,\, y\right)$ має неперервні частинні похідні, то диференціали вищих порядків обчислюються за формулами

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2\,,$$

$$d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dx^3\,.$$

Взагалі має місце символічна структура

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^n z,$$

яка формально розкривається за формулою бінома Ньютона.

ЗАУВАЖЕННЯ. Зазначені форми запису другого, третього і т. д. диференціалів не є інваріантними.

2.6 Знаходження функції за її повним диференціалом

Нехай x та y − незалежні змінні, $P(x,\, y)$ та $Q(x,\, y)$ − деякі функції цих змінних, що є диференційовними, а їхні частинні похідні другого порядку – неперервні функції у точці (x, y) та в деякому її околі.

Розглянемо вираз $P\left(x,\, y\right) dx + Q\left(x,\, y\right) dy$. Цей вираз можна вважати за повний диференціал, якщо існує така функція $u(x,\, y)$, що задовольняє умову

$$du = P\left(x,\, y\right) dx + Q\left(x,\, y\right) dy\,.$$

Відповідь на запитання, чи існує така функція, дає подана нижче теорема.

Теорема. Для того, щоб вираз

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy, \tag{3.24}$$

де $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ − диференційовні функції, частинні похідні першого порядку яких є неперервні, був повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$ необхідно та достатньо, щоб виконувалась умова

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}. \tag{3.25}$$

Наведемо аналогічну теорему і для функції трьох змінних.

Теорема. Для того, щоб вираз

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz, \tag{3.27}$$

де $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ − диференційовні функції, частинні похідні першого порядку яких є неперервні, був повним диференціалом деякої функції $u(x, y, z)$, необхідно та достатньо, щоб виконувались умови

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} = \dfrac{\partial Q(x, y, z)}{\partial x}; \\ \dfrac{\partial Q(x, y, z)}{\partial z} = \dfrac{\partial R(x, y, z)}{\partial y}; \\ \dfrac{\partial R(x, y, z)}{\partial x} = \dfrac{\partial P(x, y, z)}{\partial z}. \end{cases} \tag{3.28}$$

2.7 Дотична площина та нормаль до поверхні

Нехай рівнянням $z = f(x, y)$ задано деяку поверхню S, а $M_0(x_0, y_0, z_0)$ - точка на цій поверхні. При цьому функція $z = f(x, y)$ у точці M_0 та деякому її околі диференційовна, а її частинні похідні є неперервними функціями.

Визначення. ***Дотичною площиною*** до поверхні $z = f(x, y)$ у точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ називається така площина, яка являє собою граничне положення січної площини $M_0M_1M_2$, де точки $M_1(x_0 + \Delta x, y_0, z_0 + \Delta_x z)$ та $M_2(x_0, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta_y z)$ належать до поверхні $z = f(x, y)$ і, переміщуючись по поверхні, необмеженно наближаються до точки M_0, коли $\Delta x \to 0$ та $\Delta y \to 0$.

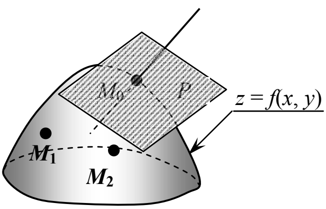


Рисунок 3.37

Визначення. ***Нормаллю*** до поверхні $z = f(x, y)$ у точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ називається така пряма, яка проходить через точку M_0 перпендикулярно до дотичної площини.

Знайдемо рівняння дотичної площини до поверхні $z = f(x, y)$ у точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Нехай точки $M_1(x_0 + \Delta x, y_0, z_0 + \Delta_x z)$ та $M_2(x_0, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta_y z)$ належать до поверхні

$z = f(x, y)$. Площина $M_0M_1M_2$ є січною відносно поверхні $z = f(x, y)$ (рис. 3.37), а її рівняння можна знайти як рівняння площини, що проходить через три задані точки, тобто

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \Delta x & 0 & \Delta_x z \\ 0 & \Delta y & \Delta_y z \end{vmatrix} = 0.$$

Спростивши це рівняння, дістанемо

$$\Delta x\, \Delta y\, (z - z_0) = \Delta y\, \Delta_x z\, (x - x_0) + \Delta x\, \Delta_y z\, (y - y_0),$$

$$z - z_0 = \frac{\Delta_x z}{\Delta x}(x - x_0) + \frac{\Delta_y z}{\Delta y}(y - y_0). \qquad (3.29)$$

Якщо припустити, що $\Delta x \to 0$ та $\Delta y \to 0$, то точки M_1 та M_2 прямують до точки M_0, а січна площина $M_0M_1M_2$ при цьому стане дотичною площиною.

Рівняння дотичної площини дістанемо з рівняння (3.29) граничним переходом, коли $\Delta x \to 0$ та $\Delta y \to 0$.

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} (z - z_0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \left(\frac{\Delta_x z}{\Delta x}(x - x_0) + \frac{\Delta_y z}{\Delta y}(y - y_0) \right),$$

звідки

$$z - z_0 = (x - x_0) \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} + (y - y_0) \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta_y z}{\Delta y},$$

$$z - z_0 = \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0). \qquad (3.30)$$

Рівняння (3.30) визначає шукану дотичну площину.

Рівняння нормалі до поверхні $z = f(x, y)$ у точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ можна дістати, виходячи з того, що пряма проходить через точку M_0 і є перпендикулярна до дотичної площини (3.30), нормальним вектором якої є вектор $\vec{n} = \left\{ \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y}, -1 \right\}$:

$$\frac{x - x_0}{\dfrac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{\dfrac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y}} = \frac{z - z_0}{-1}. \qquad (3.31)$$

Рівняння визначає нормаль до поверхні $z = f(x, y)$ у точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Нехай тепер поверхню S задано рівнянням $F(x, y, z) = 0$ і точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ належить до цієї поверхні. При цьому функція $F(x, y, z)$ задовольняє умови, за яких існує відповідна явно задана функція $z = f(x, y)$. Тоді можна показати, що коли рівняння поверхні задане у неявній формі

$$F(x, y, z) = 0, \tag{3.32}$$

то рівняння дотичної площини та нормалі до цієї поверхні у точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ мають відповідно вигляд

$$\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}(z - z_0) = 0 \tag{3.33}$$

та

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}}. \tag{3.34}$$

Приклади до глави 2

Приклад 3.26. Знайти частинні похідні першого порядку функції

$$z = x^2 + y - 4\sin y^3.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Для того, щоб знайти частинну похідну за однією змінною, слід припустити, що решта змінних є сталими.

Отже, для знаходження частинної похідної $\frac{\partial z(x, y)}{\partial x}$ маємо припустити, що y = const. Тоді маємо

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = 2x.$$

Для знаходження частинної похідної $\frac{\partial z(x, y)}{\partial y}$ припустимо, що x = const. Тоді маємо

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = 1 - 4\cos y^3 \cdot 3y^2 = 1 - 12y^2 \cos y^3.$$

В і д п о в і д ь: $\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = 1 - 12y^2 \cos y^3$.

Приклад 3.27. Знайти частинні похідні першого порядку функції

$$z = \frac{5x^2 - 4y^5}{2x - 3y} + \frac{x}{y}$$

та обчислити значення цих похідних у точці $M(2, 1)$.

Р о з в ’ я з а н н я

Нехай y = const. Тоді

$$\frac{\partial z(x,\,y)}{\partial x}=\frac{10x(2x-3y)-\left(5x^2-4y^5\right)\cdot 2}{(2x-3y)^2}+\frac{1}{y},\quad \frac{\partial z(2,1)}{\partial x}=\frac{20-32}{1}+1=-12+1=-11.$$

Нехай x = const. Тоді

$$\frac{\partial z(x,\,y)}{\partial y}=\frac{-20y^4(2x-3y)-\left(5x^2-4y^5\right)(-3)}{(2x-3y)^2}-\frac{x}{y^2},\quad \frac{\partial z(2,1)}{\partial y}=\frac{-20+48}{1}-2=28-2=26.$$

В і д п о в і д ь: $\dfrac{\partial z(2,1)}{\partial x}=-11,\ \dfrac{\partial z(2,1)}{\partial y}=26.$

Приклад 3.28. Знайти частинні похідні першого порядку функції

$$z=\mathrm{e}^{x\sqrt{y}}+\sin(\mathrm{arctg}\,4y)-\frac{\cos x^2}{\sin \pi y}+3x-5y$$

та обчислити їхні значення у точці $M\left(0,\,\dfrac{1}{4}\right)$.

Р о з в ' я з а н н я

Припустимо, що y = const. Тоді

$$\frac{\partial z(x,\,y)}{\partial x}=\mathrm{e}^{x\sqrt{y}}\cdot\sqrt{y}+\frac{2x\sin x^2}{\sin \pi y}+3,\qquad \frac{\partial z\left(0,\,\frac{1}{4}\right)}{\partial x}=\frac{1}{2}+3=\frac{7}{2}.$$

Якщо x = const, то

$$\frac{\partial z(x,\,y)}{\partial y}=\frac{\mathrm{e}^{x\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}}+\frac{4\cos(\mathrm{arctg}\,4y)}{1+16y^2}+\frac{\pi\cos x^2\,\cos \pi y}{\sin^2 \pi y}-5;$$

$$\frac{\partial z\left(0;\,\frac{1}{4}\right)}{\partial y}=\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}-\frac{4\cos(\mathrm{arctg}\,1)}{1+1}+\frac{\pi\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin^2\frac{\pi}{4}}-5=1-\frac{4\cos\frac{\pi}{4}}{2}+\frac{\pi\sqrt{2}}{2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}-5=$$

$$=1-\frac{4\sqrt{2}}{2\cdot 2}+\frac{\pi\sqrt{2}\cdot 4}{2\cdot 2}-5=1-\sqrt{2}+\pi\sqrt{2}-5=\pi\sqrt{2}-\sqrt{2}-4.$$

В і д п о в і д ь: $\dfrac{\partial z\left(0,\,\frac{1}{4}\right)}{\partial x}=\dfrac{7}{2};\ \dfrac{\partial z\left(0,\,\frac{1}{4}\right)}{\partial y}=\pi\sqrt{2}-\sqrt{2}-4.$

Приклад 3.29. Знайти частинні похідні першого порядку функції

$$u=\left(\frac{x^2}{y^3}\right)^{z^4}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Належить знайти частинні похідні функції трьох змінних. Отже, для того щоб знайти $\dfrac{\partial u(x, y, z)}{\partial x}$, припустимо, що y = const та z = const. Тоді

$$\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} = z^4\left(\frac{x^2}{y^3}\right)^{z^4-1}\cdot\frac{2x}{y^3} = \frac{2xz^4}{y^3}\left(\frac{x^2}{y^3}\right)^{z^4-1}.$$

Для заходження $\dfrac{\partial u(x, y, z)}{\partial y}$ припустимо, що x = const та z = const. Дістанемо

$$\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y} = z^4\left(\frac{x^2}{y^3}\right)^{z^4-1}\left(-\frac{3y^2x^2}{y^6}\right) = -\frac{3x^2z^4}{y^4}\left(\frac{x^2}{y^3}\right)^{z^4-1}.$$

Вважаючи, що x = const та y = const, дістанемо

$$\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} = \left(\frac{x^2}{y^3}\right)^{z^4}\cdot 4z^3\ln\frac{x^2}{y^3} = 4z^3\left(\frac{x^2}{y^3}\right)^{z^4}\ln\frac{x^2}{y^3}.$$

В і д п о в і д ь: $\dfrac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} = \dfrac{2xz^4}{y^3}\left(\dfrac{x^2}{y^3}\right)^{z^4-1}$; $\dfrac{\partial u(x, y, z)}{\partial y} = -\dfrac{3x^2z^4}{y^4}\left(\dfrac{x^2}{y^3}\right)^{z^4-1}$; $\dfrac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} = 4z^3\left(\dfrac{x^2}{y^3}\right)^{z^4}\ln\dfrac{x^2}{y^3}$.

Приклад 3.30. Знайти частинні похідні першого порядку складної функції

$$z = 4u^2 - 5v^2 + 16uv + 8,$$

де $u = xy^2$, $v = \sqrt{xy}$.

Р о з в ’ я з а н н я

Похідні складної функції знаходимо за формулами (3.6) та (3.7).

$$\frac{\partial z(u, v)}{\partial u} = 8u + 16v = 8(u + 2v); \qquad \frac{\partial z(u, v)}{\partial v} = -10v + 16u = 2(8u - 5v);$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = y^2; \qquad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = 2xy;$$

$$\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = \frac{y}{2\sqrt{xy}}; \qquad \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{xy}}.$$

Тоді

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = 8y^2(u + 2v) + \frac{y(8u - 5v)}{\sqrt{xy}}, \qquad \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = 16xy(u + 2v) + \frac{x(8u - 5v)}{\sqrt{xy}}.$$

Знайдемо частинні похідні $\frac{\partial z(x, y)}{\partial x}$ та $\frac{\partial z(x, y)}{\partial y}$. Замість u та v підставимо їхні вирази через x та y. Отже,

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = 8y^2\left(xy^2 + 2\sqrt{xy}\right) + \frac{y\left(8xy^2 - 5\sqrt{xy}\right)}{\sqrt{xy}};$$

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = 16xy\left(xy^2 + 2\sqrt{xy}\right) + \frac{x\left(8xy^2 - 5\sqrt{xy}\right)}{\sqrt{xy}}.$$

ЗАУВАЖЕННЯ. Той самий результат можна було дістати, підставивши замість змінних u та v їхні вирази через x та y ще до початку диференціювання. Але це призвело б до більш громіздкої роботи з диференціювання функції. Таким чином, формули (3.6) та (3.7) дозволяють дещо спростити процес диференціювання.

Відповідь: $$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = 8y^2\left(xy^2 + 2\sqrt{xy}\right) + \frac{y\left(8xy^2 - 5\sqrt{xy}\right)}{\sqrt{xy}};$$

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = 16xy\left(xy^2 + 2\sqrt{xy}\right) + \frac{x\left(8xy^2 - 5\sqrt{xy}\right)}{\sqrt{xy}}.$$

Приклад 3.31. Знайти частинні похідні першого порядку складної функції

$$z = \left(u^2 + 1\right)^{v^2+1},$$

де $u = \sin^2(x + y)$, $v = \cos(x^2 + y^2)$.

Розв'язання

$$\frac{\partial z(u, v)}{\partial u} = v^2\left(u^2 + 1\right) \cdot 2u = 2uv^2\left(u^2 + 1\right);$$

$$\frac{\partial z(u, v)}{\partial v} = \left(u^2 + 1\right)^{v^2+1} \cdot 2v\ln\left(u^2 + 1\right) = 2v\left(u^2 + 1\right)^{v^2+1}\ln\left(u^2 + 1\right);$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 2\sin(x + y)\cos(x + y) = \sin 2(x + y);$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = 2\sin(x + y)\cos(x + y) = \sin 2(x + y);$$

$$\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = -\sin\left(x^2 + y^2\right) \cdot 2x = -2x\sin\left(x^2 + y^2\right);$$

$$\frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = -\sin\left(x^2 + y^2\right) \cdot 2y = -2y\sin\left(x^2 + y^2\right).$$

Далі дістанемо

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}=2u(v^2+1)\left(u^2+1\right)^{v^2}\cdot\sin 2(x+y)-4v\left(u^2+1\right)^{v^2+1}x\ln(u^2+1)\sin\left(x^2+y^2\right);$$

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}=2u(v^2+1)\left(u^2+1\right)^{v^2}\cdot\sin 2(x+y)-4v\left(u^2+1\right)^{v^2+1}\ln\left(u^2+1\right)y\sin\left(x^2+y^2\right).$$

Тепер до дістаного результату підставляємо змінні u та v, виражені через x та y:

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}=2\sin^2(x+y)\cos^2(x+y)\left(1+\sin^4(x+y)\right)\sin 2(x+y)-$$

$$-4\cos\left(x^2+y^2\right)\left(1+\sin^4(x+y)\right)^{1+\cos\left(x^2+y^2\right)}\ln\left(1+\sin^4(x+y)\right)x\sin\left(x^2+y^2\right);$$

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}=2\sin^2(x+y)\cos^2\left(x^2+y^2\right)\left(1+\sin^4(x+y)\right)\sin 2(x+y)-$$

$$-4\cos\left(x^2+y^2\right)\left(1+\sin^4(x+y)\right)^{1+\cos\left(x^2+y^2\right)}\ln\left(1+\sin(x+y)\right)y\sin\left(x^2+y^2\right).$$

В і д п о в і д ь:

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}=2\sin^2(x+y)\left(\cos^2(x+y)+1\right)\left(1+\sin^4(x+y)\right)^{\cos^2(x^2+y^2)}\sin 2(x+y)-$$

$$-4\cos\left(x^2+y^2\right)\left(1+\sin^4(x+y)\right)^{1+\cos\left(x^2+y^2\right)}\ln\left(1+\sin^4(x+y)\right)x\sin\left(x^2+y^2\right);$$

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}=2\sin^2(x+y)\cos^2\left(x^2+y^2\right)\left(1+\sin^4(x+y)\right)^{\cos^2(x^2+y^2)}\sin 2(x+y)-$$

$$-4\cos\left(x^2+y^2\right)\left(1+\sin^4(x+y)\right)^{1+\cos\left(x^2+y^2\right)}\ln\left(1+\sin(x+y)\right)y\sin\left(x^2+y^2\right).$$

Приклад 3.32. Знайти частинні похідні першого порядку складної функції

$$\theta=\mathrm{e}^u+w\ln\left(1+\sqrt{v}\right),$$

де $u=x^4(y+1)$, $v=x^y$, $w=y^x$.

Р о з в ' я з а н н я

Маємо складну функцію трьох змінних. Частинні похідні знаходимо за формулами, аналогічними до формул (3.6) та (3.7):

$$\frac{\partial\theta(u,v,w)}{\partial u}=\mathrm{e}^u;$$

$$\frac{\partial\theta(u,v,w)}{\partial v}=\frac{w}{1+\sqrt{v}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{v}};$$

$$\frac{\partial\theta(u,v,w)}{\partial w}=\ln\left(1+\sqrt{v}\right);$$

$$\frac{\partial u(x,\, y)}{\partial x} = 4x^3\left(y+1\right); \qquad \frac{\partial u(x,\, y)}{\partial y} = x^4;$$

$$\frac{\partial v(x,\, y)}{\partial x} = yx^{y-1}; \qquad \frac{\partial v(x,\, y)}{\partial y} = x^y \ln x;$$

$$\frac{\partial w(x,\, y)}{\partial x} = y^x \ln y; \qquad \frac{\partial w(x,\, y)}{\partial y} = xy^{x-1};$$

$$\frac{\partial \theta(u,\, v,\, w)}{\partial x} = 4\mathrm{e}^u\, x^3\left(y+1\right) + \frac{w}{2\sqrt{v}\left(1+\sqrt{v}\right)}\, yx^{y-1} + y^x\, \ln\left(1+\sqrt{v}\right) \ln y;$$

$$\frac{\partial \theta(u,\, v,\, w)}{\partial y} = \mathrm{e}^u\, x^4 + \frac{w}{2\sqrt{v}\left(1+\sqrt{v}\right)}\, x^y \ln x + x^{x-1} y\, \ln\left(1+\sqrt{v}\right).$$

До дістаного результату замість змінних u та v підставимо їхні вирази через x та y:

$$\frac{\partial \theta(u,\, v,\, w)}{\partial x} = 4\mathrm{e}^{x^4(x+1)} x^3\left(y+1\right) + \frac{y^{x+1} x^{y-1}}{2\sqrt{x^y}\left(1+\sqrt{x^y}\right)} + y^x\, \ln\left(1+\sqrt{x^y}\right) \ln y;$$

$$\frac{\partial \theta(u,\, v,\, w)}{\partial y} = \mathrm{e}^{x^4(y+1)} x^4 + \frac{y^x x^y}{2\sqrt{x^y}\left(1+\sqrt{x^y}\right)} \ln x + xy^{x-1}\, \ln\left(1+\sqrt{x^y}\right).$$

В і д п о в і д ь:

$$\frac{\partial \theta(u,\, v,\, w)}{\partial x} = 4\mathrm{e}^{x^4(y+1)} x^3\left(y+1\right) + \frac{y^{x+1} x^{y-1}}{2\sqrt{x^y}\left(1+\sqrt{x^y}\right)} + y^x\, \ln\left(1+\sqrt{x^y}\right) \ln y;$$

$$\frac{\partial \theta(u,\, v,\, w)}{\partial y} = \mathrm{e}^{x^4(y+1)} x^4 + \frac{y^x x^y}{2\sqrt{x^y}\left(1+\sqrt{x^y}\right)} \ln x + xy^{x-1}\, \ln\left(1+\sqrt{x^y}\right).$$

Приклад 3.33. Знайти повну похідну функції

$$z = \operatorname{arctg} \frac{u}{v},$$

де $u = \ln(t^2 + 4t + 1)$, $v = \mathrm{e}^{5t-4}$.

Р о з в ' я з а н н я

Оскільки функції u та v залежать лише від однієї змінної t, то похідна $\frac{dz(t)}{dt}$ вважається за повну похідну й визначається за формулою (3.9). Отже, маємо

$$\frac{\partial z(u,\, v)}{\partial u} = \frac{1}{1+\left(\dfrac{u}{v}\right)^2}\, \frac{1}{v} = \frac{v}{u^2+v^2};$$

$$\frac{\partial z(u,v)}{\partial v}=\frac{1}{1+\left(\frac{u}{v}\right)^2}\left(-\frac{u}{v^2}\right)=-\frac{u}{u^2+v^2};$$

$$\frac{du(t)}{dt}=\frac{2t+4}{t^2+4t+1}=\frac{2(t+2)}{t^2+4t+1},\qquad \frac{dv(t)}{dt}=5\mathrm{e}^{5t-4}.$$

Тоді

$$\frac{dz(t)}{dt}=\frac{2v(t+2)}{\left(u^2+v^2\right)\left(t^2+4t+1\right)}-\frac{5u\mathrm{e}^{5t-4}}{u^2+v^2}.$$

До дістаного результату замість змінних u та v підставимо їхні вирази через t.

$$\frac{dz(t)}{dt}=\frac{2\mathrm{e}^{5t-4}(t+2)}{\left(\ln^2\left(t^2+4t+1\right)+\mathrm{e}^{10t-8}\right)\left(t^2+4t+1\right)}-\frac{5\ln\left(t^2+4t+1\right)\mathrm{e}^{5t-4}}{\ln^2\left(t^2+4t+1\right)+\mathrm{e}^{10t-8}}.$$

Відповідь:

$$\frac{dz(t)}{dt}=\frac{2\mathrm{e}^{5t-4}(t+2)}{\left(\ln^2\left(t^2+4t+1\right)+\mathrm{e}^{10t-8}\right)\left(t^2+4t+1\right)}-\frac{5\ln\left(t^2+4t+1\right)\mathrm{e}^{5t-4}}{\ln^2\left(t^2+4t+1\right)+\mathrm{e}^{10t-8}}.$$

Приклад 3.34. Знайти повну похідну функції

$$\theta=\frac{u^2+v^2}{\sqrt[5]{w^4}},$$

де $u=\arcsin t^2$, $v=\sin(4t^5-3t)$, $w=2^{6t}$.

Розв'язання

Повну похідну функції трьох змінних знайдемо за формулою (3.9):

$$\frac{\partial\theta(u,v,w)}{\partial u}=\frac{2u}{w^{4/5}};$$

$$\frac{\partial\theta(u,v,w)}{\partial v}=\frac{2u}{w^{4/5}};$$

$$\frac{\partial\theta(u,v,w)}{\partial w}=-\frac{4\left(u^2+v^2\right)}{5w^{9/5}};$$

$$\frac{du(t)}{dt}=\frac{2t}{\sqrt{1-t^4}},\quad \frac{dv(t)}{dt}=\left(20t^4-3\right)\cos\left(4t^5-3t\right),\quad \frac{dw(t)}{dt}=6\cdot 2^{6t}\ln 2,$$

$$\frac{d\theta(t)}{dt}=\frac{4ut}{w^{4/5}\sqrt{1+t^4}}+\frac{2v\left(20t^4-3\right)}{w^{4/5}}\cos\left(4t^5-3t\right)-\frac{24\left(u^2+v^2\right)\cdot 2^{6t}\ln 2}{5w^{9/5}}.$$

Замість змінних u, v та w до дістаного результату підставимо їхні вирази через t:

$$\frac{d\theta(t)}{dt}=\frac{4t\arcsin t^2}{2^{(24/5)t}\sqrt{1-t^4}}+\frac{2\sin\left(4t^5-3t\right)\left(20t^4-3\right)}{2^{(24/5)t}}-\frac{24\left(\sin^2\left(4t^5-3t\right)+\arcsin^2 t^2\right)\cdot 2^{6t}\ln 2}{5\cdot 2^{(24/5)t}}$$

В і д п о в і д ь:

$$\frac{d\theta(t)}{dt}=\frac{4t\arcsin t^2}{2^{(24/5)t}\sqrt{1-t^4}}+\frac{2\sin\left(4t^5-3t\right)\left(20t^4-3\right)}{2^{(24/5)t}}-\frac{24\left(\sin^2\left(4t^5-3t\right)+\arcsin^2 t^2\right)\cdot 2^{6t}\ln 2}{5\cdot 2^{(24/5)t}}.$$

Приклад 3.35. Показати, що функція

$$z=\sqrt{x}\,\sin\frac{y}{x}$$

задовольняє умову

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{2}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\frac{y}{x}+\sqrt{x}\,\cos\frac{y}{x}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\frac{y}{x}-\frac{y}{x\sqrt{x}}\cos\frac{y}{x}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\sqrt{x}\,\cos\frac{y}{x}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\sqrt{x}}\,\cos\frac{y}{x}.$$

Підставляємо знайдені частинні похідні до заданої умови:

$$x\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\frac{y}{x}-\frac{y}{x\sqrt{x}}\cos\frac{y}{x}\right)+y\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\cos\frac{y}{x}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{x}\sin\frac{y}{x}-\frac{y}{\sqrt{x}}\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{\sqrt{x}}\cos\frac{y}{x}=\frac{1}{2}\sqrt{x}\sin\frac{y}{x};$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{x}\,\sin\frac{y}{x}-\frac{y}{\sqrt{x}}\,\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{\sqrt{x}}\,\cos\frac{y}{x}=\frac{1}{2}\sqrt{x}\,\sin\frac{y}{x};$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{x}\sin\frac{y}{x}=\frac{1}{2}\sqrt{x}\sin\frac{y}{x}.$$

Приклад 3.36. Знайти похідну $\dfrac{dy}{dx}$, якщо функцію $y=f(x)$ задано у неявній формі

$$\left(x^2+y^2\right)-2\left(x^2-y^2\right)=0.$$

Р о з в ’ я з а н н я

Позначимо

$$F(x,\,y)=\left(x^2+y^2\right)^2-2\left(x^2-y^2\right).$$

Використавши формулу

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial F(x,\ y)}{\partial x}}{\dfrac{\partial F(x,\ y)}{\partial y}},$$

маємо

$$y'=-\frac{2\left(x^2+y^2\right)\cdot 2x-2\cdot 2x}{2\left(x^2+y^2\right)\cdot 2y-2\,(-2y)},$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x\left(x^2+y^2-1\right)}{y\left(x^2+y^2+1\right)}.$$

В і д п о в і д ь: $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x\left(x^2+y^2-1\right)}{y\left(x^2+y^2+1\right)}$.

Приклад 3.37. Знайти частинні похідні $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ неявно заданої функції

$$\sqrt{x}+\ln\left(y^2+z^2\right)-x^y=0.$$

Р о з в ' я з а н н я

Маємо неявно задану функцію трьох змінних $F(x,\ y,\ z)=0$. Для знаходження частинних похідних $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ будемо виходити з формул (3.13).

Знайдемо:

$$F'_x(x,\ y,\ z)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-yx^{y-1},\quad F'_y(x,\ y,\ z)=\frac{2y}{y^2+z^2}-x^y\ln x,\quad F'_z(x,\ y,\ z)=\frac{2z}{y^2+z^2}.$$

Тоді

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-yx^{y-1}}{\dfrac{2z}{y^2+z^2}};\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\dfrac{2y}{y^2+z^2}-x^y\ln x}{\dfrac{2z}{y^2+z^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\left(1-2x^{y-\frac{1}{2}}y\right)\left(y^2+z^2\right)}{4\sqrt{x}z};\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\left(2y-x^y\left(y^2+z^2\right)\ln x\right)}{2z}.$$

В і д п о в і д ь: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{\left(1-2x^{y-\frac{1}{2}}y\right)\left(y^2+z^2\right)}{4\sqrt{x}z}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{\left(2y-x^y\left(y^2+z^2\right)\ln x\right)}{2z}$.

Приклад 3.38. Знайти похідну $\frac{dy}{dx}$, якщо функція $y = f(x)$ задана у неявній формі

$$4^{xy} - \operatorname{arctg}\frac{x^2}{y^2} = 0.$$

Р о з в ’ я з а н н я

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y4^{xy} - \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x^2}{y^2}\right)^2}\dfrac{2x}{y^2}}{x4^{xy} - \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x^2}{y^2}\right)^2}\left(-\dfrac{2x^2}{y^3}\right)}.$$

Після спрощення, маємо

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y4^{xy}\left(x^4+y^4\right) - 2xy^2}{x4^{xy}\left(x^4+y^4\right)+2x^2y}.$$

В і д п о в і д ь: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y4^{xy}\left(x^4+y^4\right) - 2xy^2}{x4^{xy}\left(x^4+y^4\right)+2x^2y}$.

Приклад 3.39. Знайти частинні похідні першого та другого порядку функції

$$z = \sin\left(x^2+y^2\right).$$

Р о з в ’ я з а н н я

Знаходимо частинні похідні першого порядку.

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = 2x\cos\left(x^2+y^2\right), \qquad \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = 2y\cos\left(x^2+y^2\right).$$

Далі знаходимо частинні похідні другого порядку.

$$\frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z(x, y)}{\partial x}\right) = 2\cos\left(x^2+y^2\right) - 4x^2\sin\left(x^2+y^2\right);$$

$$\frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z(x, y)}{\partial y}\right) = 2\cos\left(x^2+y^2\right) - 4y^2\sin\left(x^2+y^2\right).$$

$$\frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z(x, y)}{\partial x}\right) = -4xy\sin\left(x^2+y^2\right);$$

$$\frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z(x, y)}{\partial y}\right) = -4xy\sin\left(x^2+y^2\right).$$

В і д п о в і д ь:

$$\frac{\partial z(x,\, y)}{\partial x} = 2x\cos\left(x^2 + y^2\right);\ \frac{\partial z(x,\, y)}{\partial y} = 2y\cos\left(x^2 + y^2\right);$$

$$\frac{\partial^2 z(x,\, y)}{\partial x^2} = 2\cos\left(x^2 + y^2\right) - 4x^2\sin\left(x^2 + y^2\right);$$

$$\frac{\partial^2 (x,\, y)}{\partial y^2} = 2\cos\left(x^2 + y^2\right) - 4y^2\sin\left(x^2 + y^2\right),$$

$$\frac{\partial^2 z(x,\, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z(x,\, y)}{\partial y \partial x} = -4xy\sin\left(x^2 + y^2\right).$$

Приклад 3.40. Знайти частинні похідні першого та другого порядку функції

$$z = \ln\left(x + \mathrm{e}^{xy}\right).$$

Р о з в ’ я з а н н я

Знаходимо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z(x,\, y)}{\partial x} = \frac{1 + y\mathrm{e}^{xy}}{x + \mathrm{e}^{xy}}, \qquad \frac{\partial z(x,\, y)}{\partial y} = \frac{x\mathrm{e}^{xy}}{x + \mathrm{e}^{xy}}.$$

Далі знаходимо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z(x,\, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z(x,\, y)}{\partial x}\right) = \frac{y^2\mathrm{e}^{xy}\left(x + \mathrm{e}^{xy}\right) - \left(1 + y\mathrm{e}^{xy}\right)\left(1 + y\mathrm{e}^{xy}\right)}{\left(x + \mathrm{e}^{xy}\right)^2} = \frac{y\mathrm{e}^{xy}(xy - 2) - 1}{\left(x + \mathrm{e}^{xy}\right)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z(x,\, y)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z(x,\, y)}{\partial y}\right) = \frac{x^2\mathrm{e}^{xy}\left(x + \mathrm{e}^{xy}\right) - x^2\mathrm{e}^{2xy}}{\left(x + \mathrm{e}^{xy}\right)^2} = \frac{x^3\mathrm{e}^{xy}}{\left(x + \mathrm{e}^{xy}\right)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z(x,\, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z(x,\, y)}{\partial x}\right) = \frac{\left(\mathrm{e}^{xy} + xy\mathrm{e}^{xy}\right)\left(x + \mathrm{e}^{xy}\right) - \left(1 + y\mathrm{e}^{xy}\right)\left(1 + y\mathrm{e}^{xy}\right)}{\left(x + \mathrm{e}^{xy}\right)^2} = \frac{\mathrm{e}^{xy}\left(x^2 y + \mathrm{e}^{xy}\right)}{\left(1 + \mathrm{e}^{xy}\right)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z(x,\, y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z(x,\, y)}{\partial y}\right) = \frac{\left(\mathrm{e}^{xy} + xy\mathrm{e}^{xy}\right)\left(x + \mathrm{e}^{xy}\right) - x\mathrm{e}^{xy}\left(1 + y\mathrm{e}^{xy}\right)}{\left(x + \mathrm{e}^{xy}\right)^2} = \frac{\mathrm{e}^{xy}\left(x^2 y + \mathrm{e}^{xy}\right)}{\left(1 + \mathrm{e}^{xy}\right)^2}.$$

В і д п о в і д ь:

$$\frac{\partial z(x,\, y)}{\partial x} = \frac{1 + y\mathrm{e}^{xy}}{x + \mathrm{e}^{xy}};\quad \frac{\partial z(x,\, y)}{\partial y} = \frac{x\mathrm{e}^{xy}}{x + \mathrm{e}^{xy}};\quad \frac{\partial^2 z(x,\, y)}{\partial x^2} = \frac{y\mathrm{e}^{xy}(xy - 2) - 1}{\left(x + \mathrm{e}^{xy}\right)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z(x,\, y)}{\partial y^2} = \frac{x^3\mathrm{e}^{xy}}{\left(x + \mathrm{e}^{xy}\right)^2};\quad \frac{\partial^2 z(x,\, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z(x,\, y)}{\partial y \partial x} = \frac{e^{xy}\left(x^2 y + \mathrm{e}^{xy}\right)}{\left(1 + \mathrm{e}^{xy}\right)^2}.$$

Приклад 3.41. Знайти усі частинні похідні до третього порядку включно функції

$$z = 4 + 5x^3y^2.$$

Р о з в ' я з а н н я

Знаходимо послідовно частинні похідні першого, другого, третього порядків.

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = 15x^2y^2; \qquad \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = 10x^3y;$$

$$\frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial x^2} = 30xy^2; \qquad \frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial y^2} = 10x^3;$$

$$\frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial x \partial y} = 30x^2y; \qquad \frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial y \partial x} = 30x^2y;$$

$$\frac{\partial^3 z(x, y)}{\partial x^3} = 30y^2; \qquad \frac{\partial^3 z(x, y)}{\partial y^3} = 0;$$

$$\frac{\partial^3 z(x, y)}{\partial y \partial x^2} = 60xy; \qquad \frac{\partial^3 z(x, y)}{\partial y^2 \partial x} = 30x^2;$$

$$\frac{\partial^3 z(x, y)}{\partial x^2 \partial y} = 60xy; \qquad \frac{\partial^3 z(x, y)}{\partial x \partial y^2} = 30x^2.$$

В і д п о в і д ь:

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = 15x^2y^2; \quad \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = 10x^3y; \quad \frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial x^2} = 30xy^2;$$

$$\frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial y^2} = 10x^3; \quad \frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial x \partial y} = 30x^2y; \quad \frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial y \partial x} = 30x^2y;$$

$$\frac{\partial^3 z(x, y)}{\partial x^3} = 30y^2; \quad \frac{\partial^3 z(x, y)}{\partial y^3} = 0; \quad \frac{\partial^3 z(x, y)}{\partial y \partial x^2} = 60xy;$$

$$\frac{\partial^3 z(x, y)}{\partial y^2 \partial x} = 30x^2; \quad \frac{\partial^3 z(x, y)}{\partial x^2 \partial y} = 60xy; \quad \frac{\partial^3 z(x, y)}{\partial x \partial y^2} = 30x^2.$$

Приклад 3.42. Довести, що для функції $z = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ є справедливою умова

$$\frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial y^2} = 0.$$

Р о з в ' я з а н н я

Знаходимо частинні похідні першого порядку.

$$\frac{\partial z(x,\, y)}{\partial x} = \frac{-y}{\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)x^2} = \frac{-y}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial z(x,\, y)}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\,\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Далі знаходимо частинні похідні другого порядку.

$$\frac{\partial^2 z(x,\, y)}{\partial x^2} = \frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}, \qquad \frac{\partial^2 z(x,\, y)}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Тоді маємо

$$\frac{\partial^2 z(x,\, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z(x,\, y)}{\partial y^2} = \frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} - \frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} = 0.$$

Приклад 3.43. Знайти повний диференціал функції

$$z = \left(x\sqrt{y} - 2^{y+3x}\right).$$

Р о з в ’ я з а н н я

Згідно з формулою (2.17) маємо

$$dz = \left(\sqrt{y} - 3\cdot 2^{y+3x}\ln 2\right)dx + \left(\frac{x}{2\sqrt{y}} - 2^{y+3x}\ln 2\right)dy.$$

В і д п о в і д ь: $dz = \left(\sqrt{y} - 3\cdot 2^{y+3x}\ln 2\right)dx + \left(\frac{x}{2\sqrt{y}} - 2^{y+3x}\ln 2\right)dy$.

Приклад 3.44. Знайти диференціал функції

$$u = \frac{z^2 - x}{y^2 - z}.$$

Р о з в ’ я з а н н я

За умовою задано функцію трьох змінних. Тоді

$$du = \frac{\partial u(x,\, y,\, z)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u(x,\, y,\, z)}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u(x,\, y,\, z)}{\partial z}\,dz.$$

Отже, маємо

$$du = -\frac{1}{y^2 - z}\,dx + \frac{2\left(z^2 - x\right)}{\left(y^2 - z\right)^2}\,dy + \frac{2zy^2 - z^2 - x)}{\left(y^2 - z\right)^2}\,dz.$$

В і д п о в і д ь : $du = -\dfrac{1}{y^2 - z}\,dx + \dfrac{2\left(z^2 - x\right)}{\left(y^2 - z\right)^2}\,dy + \dfrac{2zy^2 - z^2 - x)}{\left(y^2 - z\right)^2}\,dz$.

Приклад 3.45. Знайти диференціал функції

$$f\left(x,\, y\right) = x^2 \sin\left(3x + 4y\right) - 5y^3,$$

де $x = 4t_1^5 + 8t_2^2 + 3$; $y = 4^{t_1} + 6t_2^4 - 7$. Записати знайдений диференціал:

1) через проміжкові змінні t_1 та t_2;

2) через незалежні змінні x та y.

Р о з в ’ я з а н н я

Будемо виходити з формул (3.18) та (3.21).

Знаходимо $\dfrac{\partial f\left(t_1, t_2\right)}{\partial t_1}$ та $\dfrac{\partial f\left(t_1, t_2\right)}{\partial t_2}$, скориставшись формулами (3.6) та (3.7):

$$\frac{\partial f\left(t_1, t_2\right)}{\partial t_1} = \left(x^2\sin\left(3x+4y\right)-5y^3\right)'_x\left(4\,t_1^5+8\,t_2^2+3\right)'_{t_1} + \left(x^2\sin(3x+4y)-5y^3\right)'_y\left(4^{t_1}+6t_2^4-7\right)'_{t_1};$$

$$\frac{\partial f\left(t_1, t_2\right)}{\partial t_1} = \left(2x\sin\left(3x+4y\right)+3x^2\cos\left(3x+4y\right)\right)\cdot 20t_1^4 + \left(4x^2\cos\left(3x+4y\right)-15y^2\right)\cdot 4^{t_1}\ln 4.$$

$$\frac{\partial f\left(t_1, t_2\right)}{\partial t_2} = \left(x^2\sin\left(3x+4y\right)-5y^3\right)'_x\left(4t_1^5+8t_2^2+3\right)'_{t_2} + \left(x^2\sin\left(3x+4y\right)-5y^3\right)'_y\left(4^{t_1}+6t_2^4-7\right)'_{t_2};$$

$$\frac{\partial f\left(t_1, t_2\right)}{\partial t_2} = \left(2x\,\sin\left(3x+4y\right)+3x^2\cos\left(3x+4y\right)\right)16t_2 + \left(4x^2\cos\left(3x+4y\right)-15y^2\right)\cdot 24t_2^3$$

.

Тоді маємо

$$dz = \left(\left(2x\sin\left(3x+4y\right)+3x^2\cos\left(3x+4y\right)\right)\cdot 20t_1^4 + \left(4x^2\cos\left(3x+4y\right)-15y^2\right)\cdot 4^{t_1}\ln 4\right)dt_1 +$$

$$+\left(\left(2x\sin\left(3x+4y\right)+3x^2\cos\left(3x+4y\right)\right)\cdot 16t_2 + \left(4x^2\cos\left(3x+4y\right)-15y^2\right)\cdot 24t_2^3\right)dt_2;$$

$$dz = \left(2x\,\sin\left(3x+4y\right)+3x^2\cos\left(3x+4y\right)\right)\left(20t_1^4dt_1+16t_2dt_2\right)+$$

$$+\left(4x^2\cos(3x+4y)-15y^2\right)\left(4^{t_1}\ln 4dt_1+24t_2^3dt_2\right).$$

Оскільки $dx = 20t_1^4dt_1 + 16t_2dt_2$, а $dy = 4^{t_1}\ln 4dt_1 + 24t_2^3dt_2$, то

$$dz = \left(2x\sin\left(3x+4y\right)+3x^2\cos\left(3x+4y\right)\right)dx + \left(4x^2\cos\left(3x+4y\right)-15y^2\right)dy. \quad (3.35)$$

У такий спосіб здобули повний диференціал функції, поданий через проміжкові змінні.

Якщо у формулу (3.35) підставити x та y, виражені через t_1 та t_2, дістанемо повний диференціал функції у формі:

$$dz = \left(\left(2\left(4t_1^5+8t_2^2+3\right)\sin\left(12t_1^5+24t_2^2+9+4^{t_1+1}+24t_2^4-28\right)+\right.\right.$$

$$+3\left(4t_{t_1}^5+8t_2+3\right)^2\cos\left(12t_1^5+24t_2^2+9+4^{t_1+1}+24t_2^4-28\right)\Big)\cdot 20t_1^4+$$

$$+\left(4\left(4t_{t_1}^5+8t_2+3\right)^2\cos\left(12t_1^5+24t_2^2+9+4^{t_1+1}+24t_2^4-28\right)-15\left(4^{t_1}+6t_2^4-7\right)^2\right)\cdot 4^{t_1}\ln 4\Big)dt_1+$$

$$+\Big(\Big(2\left(4t_1^5+8t_2^2+3\right)\sin\left(12t_1^5+24t_2^2+9+4^{t_1+1}+24t_2^4-28\right)+$$

$$+3\left(4t_1^5+8t_2^2+3\right)^2\cos\left(12t_1^5+24t_2^2+9+4^{t_1+1}+24t_2^4-28\right)\Big)\cdot 16t_2+\Big(4\left(4t_1^5+8t_2^2+3\right)^2\times$$

$$\times\cos\left(12t_1^5+24t_2^2+9+4^{t_1+1}+24t_2^4-28\right)-15\left(4^{t_1}+6t_2^4-7\right)^2\Big)24t_2^3\Big)dt_2. \qquad (3.36)$$

Порівнюючи формули (3.35) та (3.36), бачимо, що формула (3.35) подає повний диференціал у більш скороченій формі. У цьому і полягає інваріантність форми диференціала.

В і д п о в і д ь:

$$dz=\left(2x\sin(3x+4y)+3x^2\cos(3x+4y)\right)dx+\left(4x^2\cos(3x+4y)-15y^2\right)dy;$$

$$dz=\Big(\Big(2\left(4t_1^5+8t_2^2+3\right)\Big)\sin\left(12t_1^5+24t_2^2+9+4^{t_1+1}+24t_2^4-28\right)+$$

$$+3\left(4t_1^5+8t_2^2+3\right)^2\cos\left(12t_1^5+24t_2^2+9+4^{t_1+1}+24t_2^4-28\right)\Big)\cdot 20t_1^4+\Big(4\left(4t_1^5+8t_2^2+3\right)^2\times$$

$$\times\cos\left(12t_1^5+24t_2^2+9+4^{t_1+1}+24t_2^4-28\right)-15\left(4^{t_1}+6t_2^4-7\right)^2\Big)\cdot 4^{t_1}\ln 4\Big)dt_1+$$

$$+\Big(\Big(2\left(4t_1^5+8t_2^2+3\right)\sin\left(12t_1^5+24t_2^2+9+4^{t_1+1}+24t_2^4-28\right)+$$

$$+3\left(4t_1^5+8t_2^2+3\right)^2\cos\left(12t_1^5+24t_2^2+9+4^{t_1+1}+24t_2^4-28\right)\Big)16t_2+\Big(4\left(4t_1^5+8t_2^2+3\right)^2\times$$

$$\times\cos\left(12t_1^5+24t_2^2+9+4^{t_1+1}+24t_2^4-28\right)-15\left(4^{t_1}+6t_2^4-7\right)^2\Big)24t_2^3\Big)dt_2.$$

Приклад 3.46 Задано функцію $z = 4x^2 + 3y^2 - 2xy + 8x - 5y + 6$. Знайти повний приріст та повний диференціал функції у точці $M_0(-2, 1)$, якщо $\Delta x = 0{,}01$; $\Delta y = -0{,}02$. Результати порівняти.

Р о з в ’ я з а н н я

Знаходимо повний приріст функції.

$$\Delta z = \left(4(x+\Delta x)^2 + 3(y+\Delta y)^2 - 2(x+\Delta x)(y+\Delta y) + 8(x+\Delta x) - 5(y+\Delta y) + 6\right) -$$
$$- \left(4x^2 + 3y^2 - 2xy + 8x - 5y + 6\right) = 4x^2 + 8x\Delta x + 4(\Delta x)^2 + 3y^2 + 6y\Delta y + 3(\Delta y)^2 -$$
$$- 2xy - 2x\Delta y - 2y\Delta x - 2\Delta x\Delta y + 8x + 8\Delta x - 5y - 5\Delta y + 6 - 4x^2 - 3y^2 + 2xy - 8x +$$
$$+ 5y - 6;$$

$$\Delta z = 8x\Delta x + 4(\Delta x)^2 + 6y\Delta y + 3(\Delta y)^2 - 2x\Delta y - 2y\Delta x - 2\Delta x\Delta y + 8\Delta x - 5\Delta y.$$

Запишемо знайдений приріст у такий спосіб:

$$\Delta z = (8x - 2y + 8)\Delta x + (6y - 2x - 5)\Delta y + \left(4(\Delta x)^2 + 3(\Delta y)^2 - 2\Delta x\Delta y\right). \qquad (3.37)$$

Вочевидь, що вираз $4(\Delta x)^2 + 3(\Delta y)^2 - 2\Delta x\Delta y$ являє собою нескінченно малу більш високого порядку малості по відношенню до інших доданків правої частини у рівності (3.37), якщо $\Delta x \to 0$ та $\Delta y \to 0$.

Далі знаходимо повний диференціал функції.

$$dz = (8x - 2y + 8)\Delta x + (6y - 2x - 5)\Delta y. \qquad (3.38)$$

Обчислимо повний приріст та повний диференціал функції у точці $M_0(-2, 1)$, якщо $\Delta x = 0{,}01$; $\Delta y = -0{,}02$.

$$\Delta z = (-16 - 2 + 8)\cdot 0{,}01 + (6 + 4 - 5)(-0{,}02) + \left(4(0{,}01)^2 + 3(-0{,}02)^2 - 2\cdot 0{,}01(-0{,}02)\right);$$

$$\Delta z = -0{,}1 - 0{,}1 + (0{,}0004 + 0{,}0012 + 0{,}0004);$$

$$\Delta z = -0{,}198.$$

$$dz = -0{,}1 - 0{,}1, \quad dz = -0{,}2.$$

Порівнявши Δz та dz, маємо

$$\Delta z - dz = 0{,}002.$$

Отже, якщо повний приріст заданої функції замінити на її повний диференціал, похибка становитиме 0,002.

Відповідь: $\Delta z = -0{,}198$; $dz = -0{,}2$.

Завдання для самостійної роботи. Знайти повний приріст та повний диференціал цієї ж функції у точці $M_0(-2, 1)$, але за умови, що $\Delta x = 0{,}0003$, $\Delta y = -0{,}0004$. Знайти похибку за заміни повного приросту функції на її повний диференціал. У який спосіб впливають прирости незалежних змінних на цю похибку?

Приклад 3.47. Знайти наближене значення величини

$$A = \sqrt{5{,}98^2 + 8{,}05^2}.$$

Розв'язання

Розглянемо функцію $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ та використуємо формулу (3.22). Нехай $M_0(6, 8)$, $\Delta x = -0{,}02$; $\Delta y = 0{,}05$.

$$f(6, 8) = \sqrt{36 + 64} = 10; \quad f'_x(x, y) = \left.\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right|_{\substack{x=6\\y=8}} = \frac{3}{5}; \quad f'_y(x, y) = \left.\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right|_{\substack{x=6\\y=8}} = \frac{4}{5}.$$

Тоді $A = \sqrt{5{,}98^2 + 8{,}05^2} \approx 10 + \dfrac{3}{5}(-0{,}02) + \dfrac{4}{5}\cdot 0{,}05 = 10{,}028.$

Відповідь: $A \approx 10{,}028$.

Приклад 3.48. Обчислити наближене значення величини

$$A = (1{,}02)^{2{,}04}.$$

Розв'язання

Розглянемо функцію $f(x, y) = x^y$ та звернемось до формул (3.22).

Нехай $M_0(1, 2)$, $\Delta x = 0{,}02$; $\Delta y = 0{,}04$.

$$f(1,2)=1^2=1,\quad f'_x(x,y)=y\,x^{y-1}\Big|_{\substack{x=1\\y=2}}=2,\quad f'_y(x,y)=xy\ln x\Big|_{\substack{x=1\\y=2}}=1\ln 1=0.$$

Тоді

$$A=(1{,}02)^{2{,}04}\approx 1+2\cdot 0{,}02+0\cdot 0{,}04=1{,}04.$$

В і д п о в і д ь: $A\approx 1{,}04$.

Приклад 3.49. Знайти повний диференціал другого порядку функції

$$z=x^4(y^2-4x).$$

Р о з в ' я з а н н я

Виходитимемо з формули:

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\,dx\,dy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2.$$

Знайдемо відповідні частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=4x^3(y^2-4x)-4x^4=4x^3y^2-20x^4;\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x^2y^2-80x^3;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2x^4y;\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2x^4;\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=8x^3y.$$

Тоді

$$d^2z=\left(12x^2y^2-80x^3\right)dx^2+16x^3y\,dx\,dy+2x^4dy^2.$$

В і д п о в і д ь: $d^2z=\left(12x^2y^2-80x^3\right)dx^2+16x^3y\,dx\,dy+2x^4dy^2$.

Приклад 3.50. Знайти повний диференціал третього порядку функції

$$z=\cos(8x-7y).$$

Р о з в ' я з а н н я

Будемо виходити з формули

$$d^3z=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\,dx^3+3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}\,dx^2\,dy+3\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}\,dx\,dy^2+\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\,dy^3.$$

Знайдемо відповідні частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-8\sin(8x-7y);\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-64\cos(8x-7y);\qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=512\sin(8x-7y);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=7\sin(8x-7y);\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-49\cos(8x-7y);\qquad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=-343\sin(8x-7y);$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=-448\sin(8x-7y);\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=56\cos(8x-7y);\qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=392\sin(8x-7y).$$

Тоді

$$d^3z=512\sin(8x-7y)\,dx^3-134\sin(8x-7y)\,dx^2dy+1176\sin(8x-7y)\,dxdy^2-$$
$$-343\sin(8x-7y)dy^3.$$

В і д п о в і д ь:

$d^3z = 512\sin(8x - 7y)\,dx^3 - 134\sin(8x - 7y)\,dx^2dy + 1176\sin(8x - 7y)\,dxdy^2 -$
$-343\sin(8x - 7y)\,dy^3$.

Приклад 3.51. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $z = 4x^2 + 3y^2$ у точці $M_0(1, -1, 7)$.

Р о з в ' я з а н н я

Поверхня описується явно заданою функцією. Отже дотична площина подана рівнянням (3.30), а нормаль до поверхні – рівнянням (3.31). Знайдемо відповідні частинні похідні:

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = 8x\Big|_{x=1} = 8; \qquad \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = 6y\Big|_{y=-1} = -6.$$

Тоді рівняння дотичної площини має вигляд

$$z - 7 = 8(x - 1) - 6(y + 1) \text{ чи } 8x - 6y - z = 0,$$

а рівняння нормалі до поверхні має вигляд

$$\frac{x-1}{8} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z-7}{-1}.$$

В і д п о в і д ь: $8x - 6y - z = 0$; $\dfrac{x-1}{8} = \dfrac{y+1}{-6} = \dfrac{z-7}{-1}$.

Приклад 3.52. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{36} = 0$ у точці $M_0(1, -2, -5)$.

Р о з в ' я з а н н я

Рівняння поверхні задано у неявній формі. Тому, рівняння дотичної площини будемо шукати у вигляді (3.33), а рівняння нормалі до поверхні у вигляді (3.34).

Знайдемо відповідні частинні похідні:

$$\frac{\partial z(x, y, z)}{\partial x} = \frac{x}{2}\Big|_{x=1} = \frac{1}{2}; \quad \frac{\partial z(x, y, z)}{\partial y} = \frac{2y}{9}\Big|_{y=-2} = -\frac{4}{9}; \quad \frac{\partial z(x, y, z)}{\partial z} = -\frac{z}{18}\Big|_{z=-5} = \frac{5}{18}.$$

Тоді рівняння дотичної площини буде мати вигляд

$$\frac{1}{2}(x-1) - \frac{4}{9}(y+2) + \frac{5}{18}(z+5) = 0 \quad \text{чи} \quad 9x - 8y + 5z = 0.$$

Рівняння нормалі до поверхні буде таким

$$\frac{x-1}{\frac{1}{2}} = \frac{y+2}{-\frac{4}{9}} = \frac{z+5}{\frac{5}{18}} \quad \text{або} \quad \frac{x-1}{9} = \frac{y+2}{-8} = \frac{z+5}{5}.$$

В і д п о в і д ь: $9x - 8y + 5z = 0$; $\dfrac{x-1}{8} = \dfrac{y+2}{-8} = \dfrac{z+5}{5}$.

Приклад 3.53. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні, заданої рівнянням

$$\left(z^2 - x^2\right)xyz - y^5 = 5$$

у точці $M_0(1, 1, 2)$.

Р о з в ' я з а н н я

Функцію задано у неявній формі:

$$F(x, y, z) = \left(z^2 - x^2\right)xyz - y^5 - 5$$

або

$$F(x, y, z) = xyz^3 - x^3yz - y^5 - 5.$$

Знайдемо частинні похідні функції $F(x, y, z)$.

$$\frac{\partial z(x, y, z)}{\partial x} = yz^3 - 3x^2yz; \quad \frac{\partial z(x, y, z)}{\partial y} = xz^3 - x^3z - 5y^4; \quad \frac{\partial z(x, y, z)}{\partial z} = 3xyz^2 - x^3y.$$

$$\frac{\partial z(1, 1, 2)}{\partial x} = 2; \quad \frac{\partial z(1, 1, 2)}{\partial y} = 1; \quad \frac{\partial z(1, 1, 2)}{\partial z} = 11.$$

Рівняння дотичної площини має вигляд

$$2(x-1) + (y-1) + 11(z-2) = 0,$$

$$2x + y + 11z - 25 = 0.$$

Рівняння нормалі має вигляд

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{11}.$$

В і д п о в і д ь: $2x + y + 11z - 25 = 0;\quad \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-2}{11}.$

Глава 3

ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ ЗА ДОПОМОГОЮ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

3.1 Поняття локального екстремуму функції

В и з н а ч е н н я. Точка (x_0, y_0) називається точкою ***локального максимуму*** функції $f(x, y)$, якщо в області визначення функції $f(x, y)$ існує такий окіл точки (x_0, y_0), що для будь-якої точки з цього околу виконується умова $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ (рис. 3.38).

В и з н а ч е н н я. Точка (x_0, y_0) називається точкою ***локального мінімуму*** функції $f(x, y)$, якщо в області визначення функції $f(x, y)$ існує такий окіл точки (x_0, y_0), що для будь-якої точки з цього околу виконується умова $f(x_0, y_0) < f(x, y)$ (рис. 3.39).

В и з н а ч е н н я. Точки локального мінімуму та максимуму називаються точками ***локального екстремуму*** функції.

Значення функції у точках локального екстремуму називаються ***локальними екстремумами*** функції. Значення функції у точках екстремуму порівняно зі значеннями функції у сусідніх точках не обов'язково є найменшим чи найбільшим в області визначення функції (рис. 3.40).

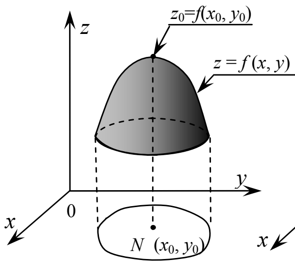


Рисунок 3.38

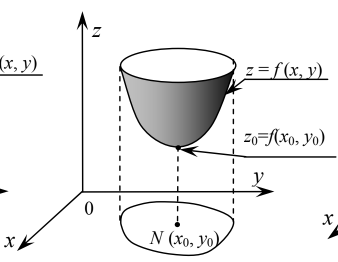


Рисунок. 3.39

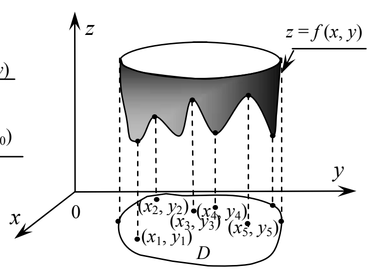


Рисунок 3.40

3.2 Необхідна умова існування екстремуму функції

Теорема 1. Нехай функція $z = f(x, y)$ задовольняє умови:

1) неперервна за змінними х та у у точці (x_0, y_0) та деякому її околі;

2) у точці (x_0, y_0) та зазначеному околі має неперервні частинні похідні першого порядку;

3) у точці (x_0, y_0) має екстремум.

Тоді частинні похідні у цій точці дорівнюють нулю, тобто

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f\left(x_0, y_0\right)}{\partial x}=0; \\ \dfrac{\partial f\left(x_0; y_0\right)}{\partial y}=0. \end{cases} \tag{3.39}$$

Д о в е д е н н я

Для визначеності припустимо, що функція $z = f(x, y)$ у точці $\left(x_0, y_0\right)$ має мінімум. З визначення точки мінімуму виходить, що існує такий окіл точки $\left(x_0, y_0\right)$, де $f\left(x_0, y_0\right)< f\left(x, y\right)$, зокрема, $f\left(x, y_0\right)< f\left(x_0, y_0\right)$. Ця умова має виконуватись в деякому околі точки x_0, тобто, коли $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. З цього виходить, що функція $f\left(x, y_0\right)$ може розглядатись як функція однієї змінної. Згідно з умовою теореми для функції $f\left(x, y_0\right)$ виконано усі умови, сформульовані у необхідній умові існування екстремуму функції однієї змінної. Виходить, що $f_x'\left(x_0, y_0\right)=0$, тобто $\dfrac{\partial f\left(x_0, y_0\right)}{\partial x}=0$.

Аналогічно можна довести, що і $\dfrac{\partial f\left(x_0, y_0\right)}{\partial y}=0$.

ЗАУВАЖЕННЯ 1. Інколи зустрічаються функції, неперервні у точці екстремуму, але при цьому одна чи дві частинні похідні або є нескінченними, або не існують.

В и з н а ч е н н я . Точка $\left(x_0, y_0\right)$ з області визначення функції $z = f(x, y)$ називається ***критичною точкою функції***, якщо частинні похідні у точці $\left(x_0, y_0\right)$ дорівнюють нулю або принаймні одна з частинних похідних дорівнює нескінченності або не існує.

ЗАУВАЖЕННЯ 2. Слід мати на увазі, що доведена теорема не може бути достатньою умовою існування екстремуму функції.

ЗАУВАЖЕННЯ 3. Як виходить з теореми, усі точки екстремуму є водночас і критичними точками функції, але не кожна критична точка є точкою екстремуму.

Про те, в який спосіб розпізнати, яка саме критична точка є точкою екстремуму, йдеться у поданій нижче теоремі.

3.3 Достатня умова існування екстремуму функції

Теорема. Нехай функція $z = f(x, y)$ задовольняє умови:

1) неперервна за змінними x та y у точці $\left(x_0, y_0\right)$ та деякому її околі;

2) у околі точки $\left(x_0, y_0\right)$ має неперервні частинні похідні до другого порядку включно;

3) точка $\left(x_0, y_0\right)$ є критичною точкою функції.

Тоді, якщо вираз

$$D(x,\, y) = \frac{\partial^2 f(x,\, y)}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 f(x,\, y)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x,\, y)}{\partial x\,\partial y}\right)^2, \qquad (3.42)$$

називаний дискримінантом, задовольняє умови: 1) $D(x_0,\ y_0) > 0$, то функція $z = f(x, y)$ у точці $(x_0,\, y_0)$ має екстремум; 2) $D(x_0, y_0) < 0$, то функція $z = f(x, y)$ у точці $(x_0,\, y_0)$ не має екстремуму; 3) $D(x_0, y_0) = 0$, то потрібні додаткові дослідження.

Приймемо цю теорему без доведення.

3.4 Найменше та найбільше значення функції в обмеженій області

Нехай у замкненій області D визначено неперервну функцію $z = f(x, y)$.

Згідно з властивостями неперервних в замкненій області функцій, можна стверджувати, що в цій області функція досягає найменшого та найбільшого значень.

Точки, в яких функція досягає найменшого та найбільшого значень, можуть бути внутрішніми точками області D або її граничними точками.

Схема дослідження функції двох змінних, заданої в обмеженій області на глобальний екстремум.

1. Знаходимо область визначення функції.
2. Знаходимо частинні похідні першого порядку.
3. Знаходимо критичні точки функції.
4. Знаходимо значення функції у критичних точках, які належать до заданої області.
5. Знаходимо найменше та найбільше значення функції на границі області.
6. Знаходимо найменше та найбільше значення функції у заданій області.

3.5 Умовний екстремум функції

Раніше була розглянута задача про знаходження максимумів та мінімумів функцій двох змінних. При цьому на незалежні змінні не накладалося жодних обмежень. Такі екстремуми називаються ***безумовними***.

На практиці часто доводиться мати справу з дослідженням на екстремум функцій двох змінних, на які накладаються певні умови. Такі умови називаються умовами зв'язку, а екстремуми − ***умовними***.

В и з н а ч е н н я. ***Умовним екстремумом*** функції $z = f(x,\, y)$ називають екстремум цієї функції, досягнутий за умови, що змінні x та y зв’язані рівнянням $\varphi(x, y) = 0$ (рівняння зв’язку).

Знайдемо екстремум функції

$$z = f\left(x,\, y\right) \tag{3.41}$$

за умови, що

$$\varphi\left(x,\, y\right) = 0\,. \tag{3.42}$$

Якщо з рівняння (3.42) знайдемо $y = y(x)$ та підставимо до (3.41), то здобудемо функцію $z = f\left(x,\, y(x)\right)$ однієї змінної, котру досліджуємо на екстремум.

Однак розв'язання рівняння (3.42) може бути ускладнене або взагалі неможливе.

Розглянемо один з методів знаходження умовних екстремумів – ***метод невизначених множників Лагранжа.***

Нехай $y\left(x\right)$ є розв'язком рівняння (3.42). Тоді $z = f\left(x,\, y\left(x\right)\right)$ та $\varphi\left(x,\, y\left(x\right)\right) = 0$. У точках екстремуму будуть виконуватися рівності:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dx} = 0; & (3.43) \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\dfrac{dy}{dx} = 0. & (3.44) \end{cases}$$

Помножимо рівність (3.44) на λ і додамо до рівності (3.43), тоді дістанемо

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \lambda\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) = 0\,,$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx} = 0\,. \tag{3.45}$$

Оберемо λ таким, щоб виконувалась умова

$$\frac{\partial z}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.\ \text{Тоді}\ \frac{\partial z}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0.$$

Отже, у точках екстремуму виконуються умови

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} + \lambda\dfrac{\partial y}{\partial x} = 0; \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0; \\ \varphi(x,\, y) = 0. \end{cases} \tag{3.46}$$

Нескладно побачити, що вирази в лівих частинах рівностей (3.46) є частинними похідними функції Лагранжа:

$$L\left(x,\, y, \lambda\right) = f\left(x,\, y\right) + \lambda\varphi\left(x,\, y\right). \tag{3.47}$$

Отже, необхідна умова умовного екстремуму функції $z = f\left(x,\, y\right)$ збігається з умовою екстремуму функції $L\left(x,\, y,\, \lambda\right)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0; \\ \varphi(x,\, y) = 0. \end{cases} \tag{3.48}$$

Точки, в яких виконуються умови (3.48), називаються ***критичними***. Для знаходження екстремумів функції кожну критичну точку досліджують додатково.

Нехай x_0, y_0, z_0, λ_0 – будь-який з розв'язків системи рівнянь (3.48). Розглянемо визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\partial\varphi(M_0)}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi(M_0)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\varphi(M_0)}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 L(M_0,\lambda_0)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 L(M_0,\lambda_0)}{\partial x\,\partial y} \\ \dfrac{\partial\varphi(M_0)}{\partial y} & \dfrac{\partial^2 L(M_0,\lambda_0)}{\partial x\,\partial y} & \dfrac{\partial^2 L(M_0,\lambda_0)}{\partial y^2} \end{vmatrix}. \tag{3.49}$$

Якщо $\Delta < 0$, то функція $z = f(x,\, y)$ має у точці $M_0(x_0,\, y_0)$ умовний максимум, якщо $\Delta > 0$ – умовний мінімум.

ЗАУВАЖЕННЯ. Метод Лагранжа справедливий і для функцій n змінних.

Нехай задана функція n змінних $u = f(x_1,\, ...,\, x_n)$ та рівняння зв'язку $\varphi_i(x_1,\, ...,\, x_n) = 0$, $i = \overline{1,m}$, $m \le n$. Тоді функція Лагранжа має вигляд

$$L = f + \lambda_1\,\varphi_1 + \lambda_2\,\varphi_2 + ... + \lambda_m\,\varphi_m\,,$$

а необхідну умову екстремуму задано системою рівнянь щодо $n+m$ невідомих $x_1,\, ...,\, x_n$, $\lambda_1,\, \ldots,\, \lambda_m$.

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0;\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0,\ ...,\ \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0; \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0,\ ...,\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_m} = 0.$$

Приклади до глави 3

Приклад 3.54. Дослідити на екстремум функцію $z = x^3 y^2 (6 - x - y)$.

Р о з в ' я з а н н я

Знайдемо критичні точки з умови

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z(x,\, y)}{\partial x} = 0; \\ \dfrac{\partial z(x,\, y)}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Запишемо z у вигляді

$$z = 6x^3y^2 - x^4y^2 - x^3y^3.$$

Тоді

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 18x^2y^2 - 4x^3y^2 - 3x^2y^3,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 12x^3y - 2x^4y - 3x^3y^2.$$

Розв’яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 18x^2y^2 - 4x^3y^2 - 3x^2y^3 = 0; \\ 12x^3y - 2x^4y - 3x^3y^2 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2y^2\left(18 - 4x - 3y\right) = 0; \\ x^3y\left(12 - 2x - 3y\right) = 0. \end{cases}$$

Маємо розв’язок $x = 0$, $y = 0$, а також систему рівнянь

$$\begin{cases} 4x + 3y = 18; \\ 2x + 3y = 12, \end{cases}$$

розв’язком якої є значення $x = 3$, $y = 2$.

Знайдено дві критичні точки: $M_1(0, 0)$ та $M_2(3, 2)$.

Знайдемо похідні другого порядку.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 36xy^2 - 12x^2y^2 - 6xy^3 = 6xy^2\left(6 - 2x - y\right);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12x^3 - 2x^4 - 6x^3y = 2x^3\left(6 - x - 3y\right);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 36x^2y - 8x^3y - 9x^2y^2 = x^2y\left(36 - 8x - 9y\right).$$

Дискримінант має вигляд

$$D\left(x,\, y\right) = 18x^4y^2\left(6 - 2x - y\right)\left(6 - x - 3y\right) - x^4y^2\left(36 - 8x - 9y\right)^2.$$

Знайдемо значення дискримінанта у критичних точках.

$$D\left(0,\, 0\right) = 0.$$

Це означає, що про наявність екстремуму у точці $M_1(0, 0)$ інформації ми не дістали.

$$D\left(3,\, 2\right) = 18 \cdot 3^4 \cdot 2^2\left(6 - 6 - 2\right)\left(6 - 3 - 6\right) - 3^4 \cdot 2^2\left(36 - 24 - 18\right)^2 =$$
$$= 3^7 \cdot 2^4 - 3^5 \cdot 2^3 > 0.$$

Задана функція у точці $M_2(3, 2)$ має екстремум.

Оскільки $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_2} = 6 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \left(-2\right) < 0$, то функція у точці $M_2(3, 2)$ має максимум.

$$z_{\max} = z\left(3,\, 2\right) = 3^3 \cdot 2^2\left(6 - 3 - 2\right) = 108.$$

В і д п о в і д ь: $z_{\max} = 108$.

Приклад 3.55. Дослідити функцію $z = xy - x^2 y - xy^2$ на екстремум.

Р о з в ’ я з а н н я

Функцію $z = xy - x^2 y - xy^2$ визначено за всіх значень x та y. Знаходимо частинні похідні

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y - 2xy - y^2 \text{ та } \frac{\partial z}{\partial y} = x - x^2 - 2xy.$$

Для визначення критичних точок розв’яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} y(1 - 2x - y) = 0, \\ x(1 - x - 2y) = 0, \end{cases}$$

що розбивається на чотири системи рівнянь, які мають розв’язки

$$x_1 = 0, \ y_1 = 0, \qquad x_2 = 1, \ y_2 = 0, \qquad x_3 = 0, \ y_3 = 1, \qquad x_4 = \frac{1}{3}, \ y_4 = \frac{1}{3}.$$

Отже, функція z має чотири критичні точки: $M_1(0,\ 0)$, $M_2(1,\ 0)$, $M_3(0,\ 1)$, $M_4\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Знаходимо похідні другого порядку

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2y; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2x; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1 - 2x - 2y.$$

Ці похідні є неперервними функціями, коли $x \in (-\infty, +\infty)$, $y \in (-\infty, +\infty)$.

Складемо $D(x,\ y) = 4xy - (1 - 2x - 2y)^2$.

Розглянемо точку $M_1(0,\ 0)$. $D(0,\ 0) = -1 < 0$. Отже, екстремуму у точці $M_1(0,\ 0)$ функція не має.

Розглянемо точку $M_2(1,\ 0)$. $D(1,\ 0) = -(1-2)^2 = -1 < 0$. Отже, екстремуму у точці $M_2(1,\ 0)$ функція не має.

Розглянемо точку $M_3(0,\ 1)$. $D(0,1) = -(1-2)^2 = -1 < 0$. Отже, екстремуму у точці $M_3(0,\ 1)$ функція не має.

Розглянемо точку $M_4\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. $D\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} - \left(1 - \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} > 0$.

Отже, у точці $M_4\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ екстремум існує.

Через те, що $\dfrac{\partial^2 z\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)}{\partial x^2} = -\dfrac{2}{3} < 0$, точка M_4 є точкою максимуму.

$$z_{\max} = f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}.$$

В і д п о в і д ь: $z_{\max} = \dfrac{1}{27}$.

Приклад 3.56. Знайти найменше та найбільше значення функції

$$z=\operatorname{arctg}\left(x^2-xy+y\right)$$

в області, обмеженій прямими $x=-2;\quad x=2;\quad y=-3;\quad y=3.$

Р о з в ' я з а н н я

Побудуємо задану область.

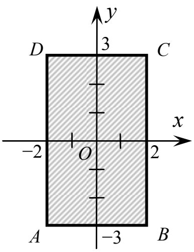


Рисунок 3.41

Знайдемо частинні похідні першого порядку

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x-y}{1+\left(x^2-xy+y\right)^2};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-x+1}{1+\left(x^2-xy+y\right)^2}.$$

Для знаходження критичних точок розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases}\dfrac{2x-y}{1+\left(x^2-xy+y\right)^2}=0;\\[2ex] \dfrac{-x+1}{1+\left(x^2-xy+y\right)^2}=0,\end{cases}\quad \text{тобто}\quad \begin{cases}2x-y=0;\\ -x+1=0.\end{cases}$$

Розв'язком системи рівнянь є значення $x=1,\ y=2$.

Знайшли одну критичну точку $M_1(1,\ 2)$, яка належить до області D. Обчислимо значення функції у цій точці.

$$z(1,\ 2)=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}\approx 0{,}785.$$

Тепер необхідно дослідити функцію на границі області, яка складається з чотирьох відрізків: $AB, BC, CD, DA.$ Розглянемо кожен з них.

1) $AB: y=-3;\quad -2\le x\le 2$.

$$z=\operatorname{arctg}\left(x^2+3x-3\right);\qquad z'=\frac{1\cdot(2x+3)}{1+\left(x^2+3x-3\right)^2}.$$

Критичну точку знаходимо з рівняння $z'=0$, тобто $\dfrac{2x+3}{1+\left(x^2+3x-3\right)^2}=0$, звідки

$$2x+3=0,\ x=-\frac{3}{2}.$$

$$z\left(-\frac{3}{2};-3\right)=\operatorname{arctg}\left(\frac{9}{4}-\frac{9}{2}-3\right)=\operatorname{arctg}\left(-\frac{21}{4}\right)=-\operatorname{arctg}\frac{21}{4}\approx -1{,}382.$$

2) $BC: x=2; -3\le y\le 3$.

$$z=\operatorname{arctg}\left(4-2y+y\right)=\operatorname{arctg}\left(4-y\right);\qquad z'=\frac{1\cdot(-1)}{1+\left(4-y^2\right)};\qquad z'\ne 0,$$

тобто, критичних точок на цьому відрізку немає.

3) $CD: y=3;\ -2\le x\le -2$.

$$z(x;\,3)=\operatorname{arctg}\left(x^2-3x+3\right),\qquad z'=\frac{1\cdot(2x-3)}{1+\left(x^2-3x+3\right)^2},$$

Критичну точку знаходимо з рівняння $z'=0$, тобто $\dfrac{2x-3}{1+\left(x^2-3x+3\right)^2}=0$, звідки

$$2x-3=0;\quad x=\frac{3}{2}.$$

$$z\left(\frac{3}{2},\,3\right)=\operatorname{arctg}\left(\frac{9}{4}-\frac{9}{2}+3\right)=\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{4}\right)\approx 0,643.$$

4) $DA: x=-2;\ -3\le y\le 3$.

$$z(-2,\,y)=\operatorname{arctg}\left(4+2y+y\right)=\operatorname{arctg}\left(4+3y\right);\qquad z'=\frac{1\cdot 3}{1+\left(4+3y\right)^2}.$$

Критичних точок немає, оскільки $z'\ne 0$.

Залишається обчислити значення функції у точках $A(-2,-3)$, $B(2,-3)$, $C(2,3)$, $D(-2,3)$:

$$z(-2,-3)=-\operatorname{arctg}5\approx -1,373;\quad z(2,-3)=\operatorname{arctg}7\approx 1,428;$$

$$z(2;\,3)=\operatorname{arctg}1\approx 0,785;\quad z(-2;\,3)=\operatorname{arctg}13\approx 1,494.$$

Порівнюючи знайдені значення, бачимо, що

$$\max_D z=z(-2;\,3)=\operatorname{arctg}13\approx 1,494.;\qquad \min_D z=z\left(-\frac{3}{2},-3\right)=-\operatorname{arctg}\frac{21}{4}\approx -1,382.$$

В і д п о в і д ь: $\max\limits_D z=z(-2;\,3)=\operatorname{arctg}13\approx 1,494;$

$\min\limits_D z=z\left(-\dfrac{3}{2},-3\right)=-\operatorname{arctg}\dfrac{21}{4}\approx -1,382.$

Приклад 3.57. Знайти найменше та найбільше значення функції $z=xy-x^2y-xy^2$ у замкненій області D, обмеженій прямими $x=0$, $x+y=2$, $y=0$.

Р о з в ' я з а н н я

Знайдемо критичні точки функції (див. приклад 3.55).

Їх чотири: $M_1(0,\ 0)$, $M_2(1,\ 0)$, $M_3(0,\ 1)$, $M_4\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$.

Лише одна точка $M_4\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$ належить до даної області. Було встановлено, що в цій точці функція має максимум,

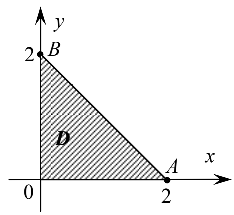


Рисунок 3.42

причому $z_{\max} = \dfrac{1}{27}$.

Знайдемо найменше та найбільше значення функції на границі області D:

1) $OA: y = 0;\ 0 \le x \le 2;\ \ z(x, 0) = 0;$

2) $OB: x = 0;\ 0 \le y \le 2;\ \ z(0, y) = 0;$

3) AB: $x + y = 2$, тобто $y = 2 - x;\ 0 \le x \le 2;\ z = x(x-2)$.

Знайдемо найменше та найбільше значення функції $z(x, 2 - x) = x(x - 2)$, $0 \le x \le 2$,

$$z' = 2x - 2.$$

Критичні точки знаходимо з рівняння $z' = 0$, тобто $2x - 2 = 0$, звідки x = 1. Тоді $z(1, 1) = -1$.

Знайдемо значення функції у точках $O(0, 0)$, $A(2, 0)$, $B(0, 2)$.

$$z(0, 0) = 0,\quad z(2, 0) = 0,\quad z(0, 2) = 0.$$

Тоді

$$\max_D z(x, y) = z\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27};\qquad \min_D z(x, y) = z(0, 0) = (2, 0) = z(0, 2) = 0.$$

Відповідь: $\max_D z(x, y) = z\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{27}$;

$$\min_D z(x, y) = z(0, 0) = (2, 0) = z(0, 2) = 0.$$

***Приклад* 3.58.** Знайти умовний екстремум функції $z = xy^2$, коли $x + 2y = 1$.

Розв'язання

Складемо функцію Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = xy^2 + \lambda(x + 2y - 1).$$

Маємо

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y^2 + \lambda;\qquad \frac{\partial L}{\partial y} = 2xy + 2\lambda.$$

Система рівнянь (3.46) набуває вигляду

$$\begin{cases} y^2 + \lambda = 0; \\ 2xy + 2\lambda = 0; \\ x + 2y = 1. \end{cases} \tag{3.50}$$

Розв'яжемо цю систему рівнянь.

$$\begin{cases}\lambda=-y^2;\\ xy+\lambda=0;\\ x+2y=1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy-y^2=0;\\ x+2y=1;\\ -\lambda=-y^2,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y(x-y)=0;\\ x+2y=1;\\ \lambda=-y^2,\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=0;\\ x+2y=1;\\ \lambda=-y^2,\end{cases}\\ \begin{cases}x-y=0;\\ x+2y=1;\\ \lambda=-y^2,\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=0;\\ x=1;\\ \lambda=0,\end{cases}\\ \begin{cases}y=x;\\ 3y=1;\\ \lambda=-y^2,\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1;\\ y=0;\\ \lambda=0,\end{cases}\\ \begin{cases}x=\frac{1}{3};\\ y=\frac{1}{3};\\ \lambda=-\frac{1}{9}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Дістали два розв’язки:

$$\begin{cases}x_1=1,\\ y_1=0,\\ \lambda_1=0\end{cases}\quad\text{та}\quad\begin{cases}x_2=\frac{1}{3},\\ y_2=\frac{1}{3},\\ \lambda_2=-\frac{1}{9}.\end{cases}$$

Оскільки

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=0;\ \frac{\partial^2 L}{\partial x\,\partial y}=2y;\ \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}=2x;\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}=1;\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}=2,$$

то у точці $M_1(1, 0)$:

$$\frac{\partial^2 L(M_1,\lambda_1)}{\partial x^2}=0;\quad \frac{\partial^2 L(M_1,\lambda_1)}{\partial x\,\partial y}=0;\quad \frac{\partial^2 L(M_1,\lambda_1)}{\partial y^2}=2;$$

$$\frac{\partial \varphi(M_1)}{\partial x}=1;\qquad \frac{\partial \varphi(M_1)}{\partial y}=2.$$

Складемо визначник

$$\Delta=\begin{vmatrix}0&1&2\\1&0&0\\2&0&2\end{vmatrix}=-2<0. \qquad (3.51).$$

Отже, функція має умовний мінімум у точці $M_1(1;0)$. При цьому

$$z_{\min}=1\cdot 0=0.$$

Аналогічно для точки $M_2\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$ маємо

$$\frac{\partial^2 L(M_2, \lambda_2)}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 L(M_2, \lambda_2)}{\partial x \partial y} = \frac{2}{3}; \quad \frac{\partial^2 L(M_2, \lambda_2)}{\partial y^2} = \frac{2}{3};$$

$$\frac{\partial \varphi(M_2)}{\partial x} = 1; \qquad \frac{\partial \varphi(M_2)}{\partial y} = 2;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 2 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = 2 > 0,$$

тобто функція має умовний максимум у точці $M_2\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. При цьому $z_{\max} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^2} = \frac{1}{27}$.

Відповідь: $z_{\min} = 0$, $z_{\max} = \frac{1}{27}$; $z_{\max} = \frac{1}{27}$.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Наведіть приклади геометричного змісту, які приводять до функції двох та трьох змінних.

2. Наведіть приклади фізичного змісту, які приводять до функції чотирьох та п’яти змінних.

3. Якщо у точці $A(x, y)$ на площині xOy розміщено джерело теплової енергії, то якими є лінії рівня функції, що визначає цю енергію?

4. Якщо у точці $A(x, y, z)$ тривимірного простору розміщено джерело теплової енергії, то якими будуть поверхні рівня функції, що визначає цю енергію?

5. Якщо металевий стрижень є джерелом теплової енергії, то якими будуть поверхні рівня функції, що визначає цю енергію?

6. Функція $z = f(x, y)$ є неперервною в області D і досягає у цій області найменшого та найбільшого значень. Чи можна, виходячи з цього, стверджувати, що область D є замкненою та обмеженою областю?

7. У замкненій області D задано неперервну функцію $z = f(x, y)$. Чи можна, виходячи з цього, стверджувати, що функція $z = f(x, y)$ є обмеженою в області D?

8. У замкненій обмеженій області D задано неперервну функцію $z = f(x, y)$. Точки $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$ належать до області D, при цьому $z(x_1, y_1) = 6{,}83$; $z(x_2, y_2) = 6{,}91$. Чи існує в області D така точка $M_3(x_3, y_3)$, що $z(x_3, y_3) = 6{,}9$?

9. У замкненій області D задано неперервну функцію $z = f(x, y)$. Чи можна, виходячи з цього, стверджувати, що функція $z = f(x, y)$ в області D є рівномірно неперервною?

10. У точці $M_0(x_0, y_0)$ та деякому її околі визначено функцію $z = f(x, y)$. Що можна сказати про цю функцію, якщо $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$?

11. У який спосіб можна дізнатись, з якою швидкістю функція $z = f(x, y)$ змінюється у напрямку осі Oy у точці $M(x, y)$?

12. Функція $z = f(x, y)$ неперервна у точці $M(x, y)$. Чи можна, виходячи з цього, стверджувати, що функція $z = f(x, y)$ диференційовна у точці $M(x, y)$?

13. Функція $z = f(x, y)$ диференційовна у точці $M(x, y)$. Чи можна, виходячи з цього, стверджувати, що функція $z = f(x, y)$ неперервна у точці $M(x, y)$?

14. У достатній умові диференційовності функції $z = f(x, y)$ йдеться про те, що частинні похідні $f'_x(x, y)$ та $f'_y(x, y)$ у точці $M(x, y)$ мають бути неперервними. Де саме використано цю умову в доведенні теореми?

15. Що називається повною похідною функції $z = f(x, y)$ та за якою формулою вона знаходиться?

16. Як знаходиться похідна $y = f'(x)$ функції $y = f(x)$, якщо ця функція задана у неявній формі?

17. Як знаходяться частинні похідні функції $z = f(x, y)$, якщо ця функція задана у неявній формі?

18. Скільки частинних похідних четвертого порядку має функція $z = f(x, y)$?

19. Функція $u = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ має десять неперервних мішаних похідних другого порядку. Чому дорівнює n?

20. За якою формулою знаходиться повний диференціал $d^5 z$ функції $z = f(x, y)$?

21. У чому полягає інваріантність форми диференціала?

22. У якому разі вираз $\frac{\partial P\left(x, y, z\right)}{\partial x}dx + \frac{\partial Q\left(x, y, z\right)}{\partial y}dy + \frac{\partial R\left(x, y, z\right)}{\partial z}dz$ є повним диференціалом функції $u(x, y, z)$?

23. Запишіть будь-який нормальний вектор дотичної площини до поверхні $F(x, y, z) = 0$ у точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

24. Запишіть будь-який напрямний вектор прямої, що є нормаллю до поверхні $z = f(x, y)$ у точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

25. У чому полягає необхідна умова існування екстремуму функції $z = f(x, y)$?

ПЕРЕВІРНІ ТЕСТИ

1. Задано функцію $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$.

Яке з тверджень є справедливим:

1) функцію визначено на колі $x^2 + y^2 = 1$;

2) функцію визначено поза колом $x^2 + y^2 = 1$;

3) функцію визначено в області $x^2 + y^2 \le 1$;

4) інша відповідь?

2. Задано функцію $z = \ln(-x - y)$.

Яке з тверджень є справедливим:

1) функцію визначено для будь-яких значень x та y;

2) функцію визначено для будь-яких значень x та y, за винятком значення $x = 0$, $y = 0$;

3) функцію визначено у півплощині $x + y < 0$;

4) інша відповідь?

3. Задано функцію

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

Яке з тверджень є справедливим:

1) функцію визначено, коли $x^2 + y^2 > z^2$;

2) функцію визначено, коли $x > 0$, $y < 0$, $z > 0$;

3) функцію визначено на усій площині XOY;

4) інша відповідь?

4. Задано функцію $z = x + y$.

Яке з тверджень є справедливим:

1) площина $3x + 3y = -1,4$ є поверхнею рівня функції;

2) площина $x + y = 0$ є поверхнею рівня функції;

3) площина $5 = x - y$ є поверхнею рівня функції;

4) інша відповідь?

5. Пряма L проходить через точку $M(7, -1)$ та є лінією рівня функції $z = x + y$.

Яке з тверджень є справедливим:

1) $x + y = 6$;

2) $7x - y = 0$;

3) $y = -x$;

4) інша відповідь?

6. Задано функцію $z = \dfrac{1}{3x - y + 4}$.

Яке з тверджень є справедливим:

1) точки розриву функції містяться на прямій $y = 3x + 4$;

2) точки розриву функції містяться на прямій $y = 4$;

3) точки розриву функції містяться на прямій $3x = 4$;

4) інша відповідь?

7. Задано функцію $z=\left(x+y\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x-3y}}$.

Яке з тверджень є справедливим:

1) точки розриву функції містяться на прямій $y = -x$,

2) точки розриву функції містяться на прямій $y = \dfrac{1}{3}x$;

3) точки розриву функції містяться на прямій $y = x$;

4) інша відповідь?

8. Поверхні задано функціями $z = x^2 + y^2$ та $z = 8 - x^2 - y^2$.

Яке з тверджень є справедливим:

1) поверхні перетинаються по лінії $x^2 + y^2 = 1$;

2) поверхні перетинаються по лінії $x^2 + y^2 = 4$;

3) поверхні перетинаються по лінії $x^2 + y^2 = 8$.

4) інша відповідь?

9. Задано функцію $z = \ln(9 - x^2 - y^2)$.

Яке з тверджень є справедливим:

1) точки розриву містяться на колі $x^2 + y^2 = 9$;

2) точки розриву містяться поза колом $x^2 + y^2 = 9$;

3) точки розриву містяться в області $x^2 + y^2 < 9$;

4) інша відповідь?

10. Задано пряму $y = x$.

Яке з тверджень є справедливим:

1) функція $z = \dfrac{1}{x-y}\cdot 2^{x-y}$ є неперервна на цій прямій;

2) функція $z = \left(x-y\right)\cdot 2^{\frac{1}{x-y}}$ є неперервна на цій прямій;

3) функція $z = \left(x-y\right)\cdot 2^{x-y}$ є неперервна на цій прямій;

4) інша відповідь?

11. Задано функцію $z = x^4 - 4x^2y^2$ та точку $M\left(3, 1\right)$.

Яке з тверджень є правильним:

1) $\dfrac{\partial^2 z\left(3,1\right)}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 z\left(3,1\right)}{\partial x\,\partial y} + 4$;

2) $\dfrac{\partial^2 z\left(3,1\right)}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 z\left(3,1\right)}{\partial x\,\partial y} - 5$;

3) $\dfrac{\partial^2 z\left(3,1\right)}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 z\left(3;1\right)}{\partial x\,\partial y}$;

4) інша відповідь?

12. Задано функцію $z = 2x^3 + 3y^2 - xy$ та точки $M_1(2, 5)$; $M_2(5, 2)$.

Яке з тверджень є справедливим:

1) $\dfrac{\partial^2 z(5, 2)}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 z(5, 2)}{\partial x^2} - 1$;

2) $\dfrac{\partial^2 z(5, 2)}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 z(5, 2)}{\partial x^2}$;

3) $\dfrac{\partial^2 z(5, 2)}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 z(5, 2)}{\partial x^2} + 6$;

4) інша відповідь?

13. Задано поверхню $z = 4x^2y + y^2$ та точку $M_0(1, 2, 12)$.

Яке з тверджень є справедливим:

1) рівняння дотичної площини у точці M_0 має вигляд $z - 12 = 16(x-1) + 8(y-2)$;

2) рівняння дотичної площини у точці M_0 має вигляд $z - 12 = 8(x-1) + 8(y-2)$;

3) рівняння дотичної площини у точці M_0 має вигляд $z - 3 = 16(x-1) + 8(y-2)$;

4) інша відповідь?

14. Задано поверхню $z = 4x^2y + y^2$ та точку $M_0(1, 2, 12)$.

Яке з тверджень є справедливим:

1) рівняння нормалі до поверхні має вигляд $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-12}{12}$;

2) рівняння нормалі до поверхні має вигляд $\dfrac{x-1}{12} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-12}{1}$;

3) рівняння нормалі до поверхні має вигляд $x + y - 15 = 0$;

4) інша відповідь?

15. Задано вираз $(2x - 3z)\,dx + 8y\,dy - 3x\,dz$, який є повним диференціалом функції $u(x, y, z)$.

Яке з тверджень є справедливим:

1) $u = x^3 + 3y^3 - 3\,xz$;

2) $u = x^2 + 3y^3 - 3\,xz$;

3) $u = x^2 + 4y^2 - 3\,xz$;

4) інша відповідь?

16. Задано функцію $z = 5 \cdot 2^x \cdot 3^y \cdot 5^{x+y}$.

Яке з тверджень є справедливим:

1) повний диференціал пятого порядку складається з п’яти доданків;

2) повний диференціал пятого порядку складається з шести доданків;

3) повний диференціал пятого порядку складається з чотирьох доданків;

4) інша відповідь?

17. Задано рівняння нормалі до поверхні $z = f(x, y)$ у точці $M_0(1, 3, -2)$

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{5} = \frac{z+2}{-1}.$$

Яке з тверджень є справедливим:

1) дотичною площиною до цієї поверхні у точці M_0 є площина $3x+5y-z-20=0$;

2) дотичною площиною до цієї поверхні у точці M_0 є площина $z+2=5(x-1)+3(y-3)$;

3) дотичною площиною до цієї поверхні у точці M_0 є площина $3x+5y+z-20=0$;

4) інша відповідь?

18. Задано функцію $z=9x^4+4y^9$ та точку $M_0\left(2^{900},\, 3^{800}\right)$.

Яке з тверджень є справедливим:

1) $\dfrac{\partial^{15} z\left(2^{900},\, 3^{800}\right)}{\partial x^{15}}=\dfrac{\partial^{14} z\left(2^{900},\, 3^{800}\right)}{\partial y^{14}}+1$;

2) $\dfrac{\partial^{15} z\left(2^{900},\, 3^{800}\right)}{\partial x^{15}}=\dfrac{\partial^{14} z\left(2^{900},\, 3^{800}\right)}{\partial y^{14}}-1$;

3) $\dfrac{\partial^{15} z\left(2^{900},\, 3^{800}\right)}{\partial x^{15}}=\dfrac{\partial^{14} z\left(2^{900},\, 3^{800}\right)}{\partial y^{14}}$;

4) інша відповідь?

19. Повний диференціал функції $z=f(x,\, y)$ може бути записано у вигляді

$$dz=\left(10xy^2+2x+2y\right)dx+Q(x,\, y)dy.$$

Яке з тверджень є справедливим:

1) $\dfrac{\partial Q(x,\, y)}{\partial x}=5xy^2+x+y$;

2) $\dfrac{\partial Q(x,\, y)}{\partial x}=2\left(x\left(5y^2+1\right)+y\right)$;

3) $\dfrac{\partial Q(x,\, y)}{\partial x}=5x^2y^2+x^2+y^2$;

4) інша відповідь?

20. Функцію задано у неявній формі

$$x^3+y^3+4x^2y^2-27=0.$$

Яке з тверджень є справедливим:

1) $y'_x=\dfrac{3x^2+8xy^2}{3y^2+8x^2y}$,

2) $y'_x=3y^2+8x^2y$;

3) $y'_x = \dfrac{3x^2 + 8xy^2}{-3y^2 - 8x^2 y}$;

4) інша відповідь?

21. Задано функцію $z = x^2 + y^2$. Знайти швидкість змінювання функції z у напрямку осі Оx у точці $M_0(1, 2)$.

Яке з тверджень є справедливим:

1) 1, 2) 4, 3) 5. 4) інша відповідь?

22. Задано функцію $z = x^2 + y^2 + xy - 2x - y$. Знайти точки екстремуму функції.

Яке з тверджень є справедливим:

1) $z_{\min} = z(1, 0) = -1$, 2) $z_{\max} = z(0, 1) = 0$;

3) $z_{\min} = z(0, 0) = 0$, 4) інша відповідь?

23. Задано функцію $z = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2$.

Яке з тверджень є справедливим:

1) функція має дві точки екстремуму,

2) функція має три точки екстремуму,

3) функція не має точок екстремуму;

4) інша відповідь?

24. Задано функцію $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$.

Яке з тверджень є справедливим:

1) функція не має точок екстремуму;

2) функція має одну точку екстремуму;

3) функція має дві точки екстремуму;

4) інша відповідь?

25. Задано функцію $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ та область D, що обмежена прямими $x = 0, x + y = -3;\ 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$.

Яке з тверджень є справедливим:

1) найбільше значення z в області D дорівнює 6;

2) найбільше значення z в області D дорівнює 0;

3) найбільше значення z в області D дорівнює –1;

4) інша відповідь?

ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ

1. Знайти область визначення функції та зобразити геометрично, якщо це можливо.

1.01. $z = 1 - 3y + 4x + \sqrt{1 - 3y + 4x}$.

1.02. $z = 5x - 2y + 7 + \dfrac{1}{(5x - 2y + 7)^5}$.

1.03. $z = \operatorname{arcctg}\left(x^2 + y^2 + 2x^3 + 2y^3 + 4\right)$.

1.04. $z = \sqrt{4 + \sin(3x - y)} + \sqrt[4]{\cos(3x - y)}$.

1.05. $z = \arcsin(1 - x - y) + \arccos(x - y - 1)$.

1.06. $u = \sqrt{\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{100} - 1} + \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{16}}$.

1.07. $u = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{100}} + \sqrt{\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} - 1}$

1.08. $u = \sqrt[8]{1 - \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2 - 10}}$.

1.09. $u = \dfrac{3x + 4y - 11}{x^2 + y^2 + 6z}$.

1.10. $u = \dfrac{\sin(x + y)}{3z - x^2 - y^2}$.

1.11. $u = \dfrac{4^{x+y}}{x^2 + y^2 - z^2}$.

1.12. $u = \dfrac{x\,y\,\mathrm{e}^{x+y}}{x^2 + y^2 - z^2 - 1}$.

1.13. $u = \mathrm{e}^{\frac{1}{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{49} - 1}}$.

1.14. $u = \mathrm{e}^{\ln\left(1 - x^2 - y^2\right)}$.

1.15. $u = \sqrt[6]{\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{25} + z - 4}$.

1.16. $u = \sqrt{\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} - \dfrac{z^2}{9} + 1} + \dfrac{1}{z}$.

1.17. $u = \cos\left(\arccos\left(x + y + z - 4\right)\right)$.

1.18. $u = \mathrm{e}^{\frac{1}{\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} - 1}} + \dfrac{4}{x} + \dfrac{5}{y} + \dfrac{6}{z}$.

1.19. $u = \ln\left|4 - x^2 - y^2 - z^2\right|$.

1.20. $u = \log_7\left(\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{9} - 1\right)$.

1.21. $u = 3\arcsin^5\left(\dfrac{x^2 + y^2}{2} - z\right)$.

1.22. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + 6x}$.

1.23. $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4x + 12y}}$.

1.24. $u = \ln\left(x^2 + y^2 + z^2 - 1\right) + \ln\left(49 - x^2 - y^2 - z^2\right)$.

1.25 $u = \sqrt[3]{xyz} + \sqrt{xyz}$.

2. Знайти лінії рівня заданої функції.

2.01. $z = \dfrac{(x - 2)^2}{25} - \dfrac{(y - 5)^2}{9}$.

2.02. $z = 5x + 4y - 1$.

2.03. $z = \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4}$.

2.04. $z = \dfrac{(x - 1)^2}{16} - \dfrac{(y + 2)^2}{49}$.

2.05. $z = y^2 + 4x - 1$.

Знайти поверхні рівня заданої функції.

2.06. $u = 2x + 6y + 10z + 8$.

2.07. $u = \frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{25} + \frac{(z+5)^2}{9}$.

2.08. $u = \frac{(x+3)^2}{49} - \frac{(y-2)^2}{16} + \frac{(z-1)^2}{4}$.

2.09. $u = z + 3 - \frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{64}$.

2.10. $u = z + \frac{x^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{16}$.

2.11. $u = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{121} - \frac{z^2}{64}$.

2.12. $u = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16}$.

2.13. $u = 5z - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25}$.

2.14. $u = (z-1)^2 - \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9}$.

2.15. $u = (x-1)^2 - y + (z+1)^2$.

2.16. $u = x + \frac{(y-1)^2}{4} + \frac{(z+1)^2}{9}$.

2.17. $u = (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-7)^2$.

2.18. $u = x^2 + y^2 + (z+5)^2$.

2.19. $u = x - \frac{y^2}{16} - \frac{(z+1)^2}{25}$.

2.20. $u = \frac{(x+4)^2}{4} + \frac{(y-4)^2}{4} + \frac{(z-1)^2}{9}$.

2.21. $u = 2y + \frac{(z-1)^2}{4} + \frac{(x-1)^2}{9}$.

2.22. $u = \frac{x}{4} + \frac{y}{5} + \frac{z}{6}$.

2.23. $u = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} + \frac{(z+1)^2}{25}$.

2.24. $u = \frac{(y+5)^2}{25} + \frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{16}$.

2.25. $u = y + \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(z+3)^2}{16}$.

3. Знайти границю функції, якщо вона існує.

3.01. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{x+2y}{x^2-2xy+4y^2}$.

3.02. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{9x^2-3xy+y^2}{3x+y}$.

3.03. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$.

3.04. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$.

3.05. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{4x^2+y^2}{16x^4+y^2}$.

3.06. $\lim\limits_{\substack{x\to0 \\ y\to5}} \frac{\sin xy}{x}$.

3.07. $\lim\limits_{\substack{x\to3 \\ y\to\infty}} \frac{\sin 5xy}{y}$.

3.08. $\lim\limits_{\substack{x\to0 \\ y\to6}} \frac{\sin 5xy}{3x}$.

3.09. $\lim\limits_{\substack{x\to0 \\ y\to9}} \frac{\sin 7xy}{\mathrm{tg} 8xy}$.

3.10. $\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ y\to0}} \frac{\ln\left(x+\mathrm{e}^7\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3.11. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} \left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right)^{x^2}$.

3.12. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{5x^3+4x^2y+3xy^3}{8y^3+7xy^2+6x^2y+5x^3}$

3.13. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\cdot$ **3.14.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(x^4+y^2+1\right)\cdot$ **3.15.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y^3}{25-\sqrt{x^2y^3+625}}\cdot$

3.16. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2y-3x}{5x}\cdot$ **3.17.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{5x+6y}{7x-8y}\cdot$ **3.18.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{(3x+6y)(5x+8y)}{(9x+11y)(10x-11y)}\cdot$

3.19. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\mathrm{e}^{\frac{x}{x-y}}\cdot$ **3.20.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{\frac{2x-y}{5x+2y}}\cdot$ **3.21.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\frac{5x-y}{5x+y}\right)^6\cdot$

3.22. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sin\frac{x-y}{x+y}\cdot$ **3.23.** $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +0}}\frac{x^y}{1+x^y}\cdot$ **3.24.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1-\sqrt{x^2+y^2+1}}{x^2+y^2}\cdot$

3.25. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\frac{x^2-y^2}{x^2+2x-xy-2y}\cdot$

4. Знайти частинні похідні першого та другого порядку заданої функції $z=f(x,\,y)$ та обчислити їхні значення у заданій точці $M_0(x_0,\,y_0)$.

4.01. $z=x^5 5^y-7\sin\left(x^2+8y\right)+9$; $M_0(0,0)$.

4.02. $z=9y\cos^2 x+18y$; $M_0(0,1)$.

4.03. $z=19x^2+18\cdot 2^y+x\sin y$; $M_0(1,0)$.

4.04. $z=\sin^2(3x-8y)+\sqrt{x}$; $M_0(1,0)$.

4.05. $z=x^2\ln\left(x^3+y^2\right)-11\mathrm{e}^x$; $M_0(1,0)$.

4.06. $z=18\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^3\sqrt{y}-11\mathrm{e}^x$; $M_0\left(\frac{\pi}{2},4\right)$.

4.07. $z=\left(x^2+\sqrt{y}-3\right)\left(\sqrt[3]{y}+y\sqrt{y}+8\right)$; $M_0(7,64)$.

4.08. $z=\left(x\sqrt{x}-12y\right)\cdot 2^{x^2+y^2}$; $M_0(9,5)$.

4.09. $z=x\,\mathrm{arctg}(3y)-\arcsin(4x)$; $M_0\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$.

4.10. $z=\left(14x^2\sqrt{x}-2^y\right)(x-1)^2$; $M_0(9,\,1)$.

4.11. $z=\left(x^2+\sqrt{\frac{6y}{\pi}}\right)\sin(5x-6y)$; $M_0\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$.

4.12. $z=x^{\sin y}$; $M_0\left(1,\frac{\pi}{4}\right)$.

4.13. $z=(x-5y)\left(2\sqrt{y}+6^x\right)$; $M_0(0,1)$.

4.14. $z = 5y \operatorname{arctg} x^3 - \ln(3x + 2y) + 11$; $M_0(1, 0)$.

4.15. $z = 5y^3 \arcsin x - 19x^3$; $M_0(0, 1)$.

4.16. $z = x^2 y^2 + 2\sqrt{y} - x\cos(x^3 y)$; $M_0(0, 1)$.

4.17 $z = x\, \mathrm{e}^{\sin y} + 11x + \sqrt[3]{8 + x^3 + y^3}$; $M_0(0, 0)$.

4.18. $z = 2^{x^2 + y^3} - x^2 + 4\sqrt{y}$; $M_0(0, 1)$.

4.19. $z = \sqrt{x^2 + y^2} + \sin 3y - 1$; $M_0(1, 0)$.

4.20. $z = (x^2 + y^3)(\sin \pi x + \cos \pi y)$; $M_0(1, 1)$.

4.21. $z = x^2 \ln(3x - 8y) + \sin 4y$; $M_0(1, 0)$.

4.22. $z = (19x\sqrt{x} - 3y)(2^x + 3^y)$; $M_0(4, 0)$.

4.23. $z = (15x\sqrt{y} + 8\sqrt[3]{y})(\sin x - \pi y)$; $M_0(0, 1)$.

4.24. $z = x^y + y^x + \sin(5\pi x + 8\pi y)$; $M_0(1, 1)$.

4.25. $z = \left(7x^2 + \sqrt{y}\right)^2$; $M_0(1, 1)$.

5. Перевірити, чи задовольняє задану умову функція $z = f(x, y)$.

5.01. $z = \dfrac{y}{\left(x^2 - y^2\right)^5}$; $\quad \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{y} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{y^2}$.

5.02. $z = \mathrm{e}^{xy}$; $\quad x^2 \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

5.03. $u = (x - y)(y - z)(z - x)$; $\quad \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$.

5.04. $z = \sqrt{x} \sin \dfrac{y}{x}$; $\quad 2x \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + 2y \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = z$.

5.05. $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$; $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

5.06. $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$; $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

5.07. $u = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}}$; $\quad \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

5.08. $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$; $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

5.09. $u = e^{\frac{x}{y}}$; $\qquad \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} + y \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$.

5.10. $z = y \ln x + x \ln y$; $\qquad x \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = x + y + z$.

5.11. $u = \sqrt{x^2 - 3y^2}$; $\qquad 3y \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + x \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

5.12. $z = \operatorname{tg}^3(2x - 3y)$; $\qquad 3\dfrac{\partial z}{\partial x} + 2\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

5.13. $z = \dfrac{xy}{x + y}$; $\qquad x \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = z$.

5.14. $z = \ln\left(x^2 - y^2\right)$; $\qquad \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2}{x + y}$.

5.15. $z = \sqrt[3]{2y^2 - x^2}$; $\qquad 2y \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + x \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

5.16. $z = \sin^2(y - ax)$; $\qquad a^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

5.17. $z = (2x + y)e^{-xy}$; $\qquad \dfrac{\partial z}{\partial x} - 2\dfrac{\partial z}{\partial y} = (2x - y)z$.

5.18. $z = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{y}}$; $\qquad \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x}{y} \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

5.19. $z = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{y}}$; $\qquad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{1}{y} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^5$.

5.20. $z = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{y}$; $\qquad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = 0$.

5.21. $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$; $\qquad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

5.22. $z = e^x \cos y$; $\qquad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

5.23. $z = \ln\sqrt{(x-4)^2 + (y+5)^2}$; $\qquad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

5.24. $z = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi y}} e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2 y}}$; $\qquad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y} = a^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

5.25. $u = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$; $\qquad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

6. Знайти повні диференціали першого та другого порядку заданої функції $z = f(x, y)$ та обчислити їхні значення у точці $M_0(x_0, y_0)$ при заданих dx та dy.

6.01. $z = \cos\dfrac{(9x-8y)\pi}{2} + 4^{x^2+y^3}$; $M_0(1, 1)$; $dx = -0{,}02$; $dy = 0{,}02$.

6.02. $z = 15(x^2+y^2) - 16(x+y)^2$; $M_0(2, 3)$; $dx = -0{,}02$; $dy = 0{,}02$.

6.03. $z = 2^x \ln(x^2+y^2) + \sqrt{y}$; $M_0(2, 4)$; $dx = -0{,}02$; $dy = 0{,}02$.

6.04. $z = \cos\dfrac{(x+3y)\pi}{3} + \ln(x^3+y^3)^{10}$; $M_0(-1, 2)$; $dx = -0{,}02$; $dy = 0{,}02$.

6.05. $z = \sin x \cos y + 2^{\frac{3x+4y}{\pi}}$; $M_0\left(\pi, \dfrac{\pi}{2}\right)$; $dx = -0{,}03$; $dy = 0{,}03$.

6.06. $z = \dfrac{x^2}{\pi^2}\operatorname{tg} y + \dfrac{y^3}{\pi^3}\operatorname{ctg} x$; $M_0\left(\dfrac{\pi}{4}, -\dfrac{\pi}{4}\right)$; $dx = 0{,}01$; $dy = 0{,}04$.

6.07. $z = \left(x + 2y + \sqrt{xy}\right)\left(2x - y^3\right)^2$; $M_0(1, 9)$; $dx = 0{,}01$; $dy = 0{,}04$.

6.08. $z = \sqrt{x + y^2 + xy} + y^x$; $M_0(0, 4)$; $dx = 0{,}01$; $dy = 0{,}04$.

6.09. $z = y^2 \arcsin x + x^2 \arccos y$; $M_0(0{,}5;\ 0{,}5)$; $dx = 0{,}01$; $dy = 0{,}04$.

6.10. $z = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} + y\sqrt{y}$; $M_0(1, 1)$; $dx = 0{,}01$; $dy = 0{,}04$.

6.11. $z = \left(x^2 + e^y\right)\operatorname{arctg} x$; $M_0(1, 1)$; $dx = 0{,}01$; $dy = 0{,}04$.

6.12. $z = \sin^2\left(\dfrac{x^2}{\pi} + y + 1\right)$; $M_0(\pi, \pi-1)$; $dx = 0{,}01$; $dy = 0{,}04$.

6.13. $z = \cos^2\left(\dfrac{x^2}{\pi} + \dfrac{y^3}{\pi^2}\right) + \sqrt{\dfrac{y}{\pi^2}}$; $M_0(\pi, \pi)$; $dx = -0{,}04$; $dy = 0{,}01$.

6.14. $z = \left(x^2 + \dfrac{8y^3}{\pi^2} + 1\right) + \cos y$; $M_0(0, \pi)$; $dx = -0{,}04$; $dy = 0{,}01$.

6.15. $z = 17\sqrt{y} - e^{x^2} + \cos\pi y$; $M_0(2, 1)$; $dx = 0{,}01$; $dy = -0{,}01$.

6.16. $z = 4^{x+y}\ln\left(x^2+y^2\right) + \sin\dfrac{\pi y}{2}$; $M_0(3, 1)$; $dx = 0{,}01$; $dy = 0{,}01$.

6.17. $z = \ln\left(\sin\dfrac{\pi x}{2} + \cos\dfrac{\pi y}{3}\right)$; $M_0(1, 1)$; $dx = 0{,}01$; $dy = 0{,}02$.

6.18. $z = e^{x+y^2} + \sin\left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi y^2}{3}\right)$; $M_0(1, 1)$; $dx = -0{,}01$; $dy = 0{,}01$.

6.19. $z = x \operatorname{arctg} y + y \arcsin x$; $M_0(0, 1)$; $dx = -0{,}01$; $dy = 0{,}01$.

6.20. $z = 4^x + x^4 + y\sqrt{y} \sin \pi x$; $M_0(1, 4)$; $dx = 0{,}03$; $dy = -0{,}01$.

6.21. $z = \left(19x^2 - y\right)^2 + \sqrt{xy}$, $M_0(1, 9)$; $dx = -0{,}03$; $dy = 0{,}02$.

6.22. $z = \left(4x + \sqrt{y}\right)e^{x+y} + 11y^2$, $M_0(1, 4)$; $dx = -0{,}03$; $dy = 0{,}02$.

6.23. $z = x^2 \sin\left(\pi\left(y + 4x\right)\right)$; $M_0(1, 1)$; $dx = -0{,}03$; $dy = 0{,}02$.

6.24. $z = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} y + \left(\frac{x}{y}\right)^2$; $M_0(1, 1)$; $dx = 0{,}02$; $dy = 0{,}01$.

6.25. $z = \sqrt{x + \sqrt{y}} + \cos\frac{\left(\sqrt{x} + y\right)\pi}{4}$; $M_0(1, 9)$; $dx = 0{,}02$; $dy = 0{,}01$.

7. Знайти похідну неявно заданої функції.

7.01. $3x\cos^2 y - 7x^5 \arccos y + \ln e^x = 0.$

7.02. $2\arcsin x - 4x^2 \lg^3 y + \ln\left(e^x - y^x\right) = 0.$

7.03. $3y^2 \sin\frac{\pi x}{6} + \sqrt{5x^3} \sin^2\frac{\pi y}{2} + \lg\left(5^x - 7^y\right) = 0.$

7.04. $2y\cos\frac{\pi x}{4} - 5^{3y}\sqrt{x} + 5\arccos(4xy) - 3xy = 0.$

7.05. $4x\log_2 8y - 5y^3 \sin^2\frac{\pi x}{2} + 4y\cos\frac{\pi x}{3} - 3x\sin\frac{\pi y}{4} = 0.$

7.06. $(7x)^2 \cos\frac{\pi y}{4} - 3y^3 \sin\frac{\pi x}{3} + e^x + \frac{6x}{4y} = 0.$

7.07. $4x\cos\frac{\pi y}{3} + 2y^2 \arcsin^3 x + \ln\frac{e^y}{e^x} = 0.$

7.08. $2y\ln x - 6x^2 \sin^3\frac{\pi y}{6} + 13\lg\left(10^x - 10^y\right) = 0.$

7.09. $4x\cos^3\frac{\pi y}{4} - (14x)^{5y} + \ln\left(e^{xy}\right) = 0.$

7.10. $5x^6 \lg^2 y - \sqrt{10x^5} \arcsin^3 y + x\,2^y = 0.$

7.11. $\dfrac{6\sin\pi y}{\arccos x}+9y^6\sin^2 x+x\,\mathrm{tg}\,\pi y+x y^3=0.$

7.12. $\sin(y-x)\pi-7y^2\sin^3(y+x)\pi+x^{\frac{1}{2}}\ln\left(2y^3+\dfrac{1}{32}\right)=0.$

7.13. $6x\cos\dfrac{\pi y^3}{4}-(10y)^2\,\mathrm{e}^{x^2}+\lg 5^{(x-y)}=0.$

7.14. $7x^4-2x y^3+y\lg x-2\arccos y=0.$

7.15. $3^x y+5x\arccos\dfrac{y}{2}-5y\,\mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{6}+\mathrm{tg}\dfrac{\pi y}{3}=0.$

7.16. $6^y\sin\dfrac{\pi x}{6}-2x^4\cos^2\dfrac{\pi x}{4}+\ln\left(\mathrm{e}^{5y}-\mathrm{e}^{3x}\right)-2\sqrt[6]{x^2\sqrt{y}}=0.$

7.17. $2y\cos\dfrac{\pi x}{6}+4y^2\arcsin^3\dfrac{x}{2}+\sqrt{\lg\left(10^x+y\right)}=0.$

7.18. $\dfrac{x}{3}y+2x\mathrm{e}^y-\dfrac{2x^5}{1+y}+y^3\ln x+4^y x=0.$

7.19. $x\log_2 y-2y^6\log_2 x+\dfrac{5\sin\frac{\pi y}{16}}{7x}=0.$

7.20. $4x^y-7y^2\arccos^3 x+y\lg 3^x-3^x y=0.$

7.21. $\sqrt{x^2+y^2}+x^{y^2}+y^{x^2}-\dfrac{2x}{3y}=0.$

7.22. $\left(x^3+y^3\right)\log_2\left(x^2+y^2\right)-\dfrac{1}{\sqrt{x^4+y^4}}=0.$

7.23. $\sqrt[3]{x^3+y^3}\,\mathrm{e}^{\sqrt{y}}-\dfrac{x-y^2}{y-x^2}=0.$

7.24. $\left(x^2+y^2\right)\sqrt[3]{x}+\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt[3]{y}}-\ln\dfrac{x^2}{y^3}=0.$

7.25. $\dfrac{\pi x}{\cos\frac{\pi y}{6}}-2x^4\cdot\sqrt{y}+\ln\left(2-\mathrm{e}^{3x-\frac{y}{2}}\right)-2\sqrt[6]{x^5 3^y}=0.$

8. Задано функцію $z=f(x,y)$ та точки $A\left(x_0,\ y_0\right)$ і $B\left(x_1,\ y_1\right)$.

1) Знайти значення $z_0=f(x_0,y_0)$.

2) Знайти значення $z_1=f(x_1,y_1)$.

3) Знайти наближене значення z_1^* **функції** z **у точці** B **за допомогою диференціала, якщо приріст функції при переході від точки** A **до точки** B **замінити на диференціал.**

4) Оцінити у відсотках похибку, яка виникає внаслідок заміни приросту функції на диференціал.

8.01. $z = x^2 + xy + y^2;$ $A(1,\ 2);$ $B(1{,}02;\ 1{,}96).$

8.02. $z = x^2 + 3xy + y^2;$ $A(1,\ 2);$ $B(1{,}03;\ 1{,}97).$

8.03. $z = 5x^2 - xy + 3y^2 + 5x + 2y - 1;$ $A(1,\ 2);$ $B(1{,}01;\ 2{,}02).$

8.04. $z = x^2 + 3xy - 6x + 5;$ $A(4,\ 1);$ $B(3{,}96;\ 1{,}03).$

8.05. $z = x^2 - y^2 + 6x + 3y - 1;$ $A(2,\ 3);$ $B(2{,}02;\ 2{,}97).$

8.06. $z = x^2 + 2xy + 3y^2 + 5;$ $A(2,\ 1);$ $B(1{,}96;\ 1{,}04).$

8.07. $z = x^2 + y^2 + 2x + y - 2;$ $A(2,\ 4);$ $B(1{,}98;\ 3{,}91).$

8.08. $z = x^2 - y^2 + 5x + 4y - 1;$ $A(3,\ 2);$ $B(3{,}02;\ 1{,}98).$

8.09. $z = (x+3)^2(x + y - 1);$ $A(-2,\ -3);$ $B(-2{,}01;\ -2{,}98).$

8.10. $z = \dfrac{4}{x^2 + y^2};$ $A(2,\ 2);$ $B(2{,}01;\ 1{,}96).$

8.11. $z = \left(x^2 - 2y^2\right)(3x - y - 5);$ $A(2,\ -1);$ $B(2{,}01;\ -0{,}97).$

8.12. $z = \dfrac{1}{\sqrt{4 + x^2 - y^2}};$ $A(-3,\ 3);$ $B(-3{,}04;\ 2{,}96).$

8.13. $z = \sqrt{4 + x^2 - y^2};$ $A(-3,\ 3);$ $B(-3{,}04;\ 2{,}96).$

8.14. $z = 5x^2 - 2xy^2;$ $A(2,\ -1);$ $B(1{,}99;\ -0{,}99).$

8.15. $z = 3x^2 + 2y^2 - 5xy + 11;$ $A(1,\ 2);$ $B(1{,}03;\ 1{,}97).$

8.16. $z = 4 - x^2 + 2xy^2;$ $A(-3,\ 1);$ $B(-3{,}02;\ 1{,}01).$

8.17. $z = x^2 + y^2 + 3;$ $A(4,\ 2);$ $B(4{,}03;\ 1{,}96).$

8.18. $z = \sqrt[3]{x^2 + y^3 + 3};$ $A(4,\ 2);$ $B(4{,}03;\ 1{,}96).$

8.19. $z = \dfrac{1}{x^2 + y^3};$ $A(2,\ 1);$ $B(2{,}03;\ 1{,}96).$

8.20. $z = 2x^2 + 3xy + 4y^2;$ $A(2,\ 1);$ $B(1{,}03;\ 1{,}94).$

8.21. $z = 2xy + 3x - 2y;$ $A(2,\ 2);$ $B(1{,}93;\ 2{,}05).$

8.22. $z = 2x^2 + 2xy - y^2$; $A(1, 3)$; $B(0{,}95; 2{,}94)$.

8.23. $z = 5x^2 + 6y^2 - 3xy - 2x - 3y - 1$; $A(1, 0)$; $B(1{,}01; 0{,}2)$.

8.24. $z = 6x^2 + 5y^2 - 2xy + 3x + 4y + 5$; $A(2, -1)$; $B(1{,}99; -0{,}9)$.

8.25. $z = 5x^2 + y^2 - 5xy + 2x - y + 8$; $A(-1, -2)$; $B(-1{,}01; -1{,}99)$.

9. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до заданої поверхні у точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$, дві координати якої задані.

9.01. $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 18$; $x_0 = 2$; $y_0 = -2$.

9.02. $(x+3)^2 + (y+4)^2 + (z+5)^2 = 33$; $x_0 = -1$; $z_0 = -3$.

9.03. $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-6)^2}{9} + \frac{(z-7)^2}{1} = \frac{61}{36}$; $x_0 = 1$; $y_0 = 4$.

9.04. $\frac{(x+5)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{9} + \frac{(z-7)^2}{4} = \frac{217}{144}$; $x_0 = -6$; $y_0 = -5$.

9.05. $\frac{(x+8)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} - \frac{(z+3)^2}{25} = \frac{4}{225}$; $x_0 = -3$; $z_0 = 10$.

9.06. $\frac{(x+3)^2}{1} - \frac{(y+5)^2}{9} + \frac{(z-7)^2}{16} = \frac{2}{9}$; $x_0 = -2$; $y_0 = -1$.

9.07. $\frac{(x+5)^2}{4} + \frac{(y-6)^2}{9} - \frac{(z+3)^2}{25} = -8$; $x_0 = 3$; $y_0 = 3$.

9.08. $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+6)^2}{1} - \frac{(z-5)^2}{9} = -1$; $x_0 = 1$; $y_0 = 0$.

9.09. $\frac{(x+1)^2}{1} + \frac{(y-2)^2}{4} = 8z$; $x_0 = 1$; $y_0 = 3$.

9.10. $\frac{(x-5)^2}{16} + \frac{(y+4)^2}{25} = 10z$; $x_0 = 1$; $y_0 = 5$.

9.11. $z = 16x^2 + 8y^2$; $x_0 = 1$; $y_0 = -1$.

9.12. $z = x^2 + 9x + y^2 - 8y$; $x_0 = 2$; $y_0 = 3$.

9.13. $z = 2x^2 + 3x + y^2 + 4$; $x_0 = 0$; $y_0 = 4$.

9.14. $z = 15x^2 + 6y^2 + 4x - 10$; $x_0 = -1$; $y_0 = 2$.

9.15. $z = x^2 + 3xy + y^2$; $x_0 = 6$; $y_0 = 5$.

9.16. $z = x^2 + y^2 + 3x + 1$; $x_0 = -1$; $y_0 = -2$.

9.17. $z = \sqrt{16 + x^2 + y^2}$; $x_0 = 0$; $y_0 = 3$.

9.18. $z = \sqrt{25 + x^2 - y^2}$; $x_0 = 0$; $y_0 = 4$.

9.19. $z = 2xy^2 + 3yx^2$; $x_0 = 3$; $y_0 = 4$.

9.20. $z = x^2 + y^2 + 4xy$; $x_0 = 1$; $y_0 = 2$.

9.21. $z=\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9};$ $\quad x_0=4;\quad y_0=3.$

9.22. $z=5x^2+6y^2;$ $\quad x_0=1;\quad y_0=1.$

9.23. $z=x^2+5xy+1;$ $\quad x_0=2;\quad z_0=1.$

9.24. $z=5+y^3-x^3;$ $\quad x_0=2;\quad y_0=2.$

9.25. $z-x^2+2x-y^2-1=0;$ $\quad x_0=1;\quad y_0=-2.$

10. Знайти найменше та найбільше значення функції $z=f(x,y)$ в області *D*, обмеженій заданими лініями.

10.01. $z=xy;$ $\quad x^2+y^2\le 1.$

10.02. $z=x^2+y^2-xy+x+y;$ $\quad x=0;\ y=0;\ x+y\ge -3.$

10.03. $z=\sin(x+y)+\sin x+\sin y;$ $\quad x=0;\ x=\dfrac{\pi}{2};\ y=0;\ y=\dfrac{\pi}{2}.$

10.04. $z=4x^2y-x^3y-x^2y^2;$ $\quad x=0;\ y=0;\ x+y\le 6.$

10.05. $z=\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\left(x^2-xy+y\right);$ $\quad x=-2;\ x=2;\ y=-3;\ y=3.$

10.06. $z=x^2+y^2-9xy+27;$ $\quad x=0;\ x=3;\ y=0;\ y=3.$

10.07. $z=x^2-xy+y^2-4x;$ $\quad x=0;\ y=0;\ 2x+3y-12=0.$

10.08. $z=x^2y(2-x-y);$ $\quad x=0;\ y=0;\ x+y=6.$

10.09. $z=x^3+y^3-3xy;$ $\quad x=0;\ x=2;\ y=-1;\ y=2.$

10.10. $z=x^2-2y^2+4xy-6x-1;$ $\quad x=0;\ y=0;\ x+y=3.$

10.11. $z=x+y;$ $\quad x^2+y^2\le 1.$

10.12. $z=5xy-y^2;$ $\quad x=4;\ y^2=5x+5.$

10.13. $z=2xy-3x^2-2y^2+5;$ $\quad x=-1;\ x=2;\ y=-1;\ y=2.$

10.14. $z=x^2+3y^2-5;$ $\quad x^2+y^2\le 9.$

10.15. $z=x^3+y^2-6xy-39x+18y+20;$ $\quad x=0;\ x=1;\ y=0;\ y=2.$

10.16. $z=x^3y^2(6-x-y);$ $\quad x=0;\ y=0;\ x=6;\ y=2.$

10.17. $z=2x^3-6xy+3y^2;$ $\quad x=y;\ y=2;\ y=\dfrac{1}{2}x^2;\ x\ge 0.$

10.18. $z=x^2+4xy-y^2-6x-2y;$ $\quad x=0;\ y=0;\ 2x+3y-6=0.$

10.19. $z=x^2+y^2+4xy-10x-8y+7;$ $\quad x=0;\ y=0;\ x+y\le 5.$

10.20. $z=x^2+4xy-y^2-6x-2y+10;$ $\quad x=0;\ y=0;\ 2x+3y\le 6.$

10.21. $z=x^2+y^2-xy+x+y;$ $\quad x=0;\ y=0;\ x+y\ge -3.$

10.22. $z = x^2 - 2xy + \frac{5}{2}y^2 - 2x;$ $\quad x = 0;\ x = 2;\ y = 0;\ y = 2$.

10.23. $z = x^2 + 2y^2 + 4x - 2y + 6;$ $\quad x = -3;\ x = -1;\ y = 0;\ y + x \le -1$.

10.24 $z = x^2 - xy + 2y;$ $\quad x = 0;\ y = 0;\ x + y \le 7$.

10.25 $z = 4x^2 + y^2 + 4x + 2y;$ $\quad x = 0;\ y = 0;\ x + y \ge -2$.

ВІДПОВІДІ ДО ТРЕНУВАЛЬНИХ ВПРАВ
Вправи 1

1.01. $y\le\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}$. Рис. 1. **1.02.** $y\ne\frac{5}{2}x+\frac{7}{2}$. Рис. 2. **1.03.** $x\in R;\ y\in R$. Рис. 3.

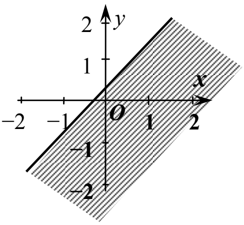


Рисунок 1

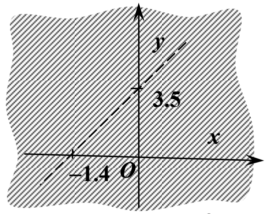


Рисунок 2

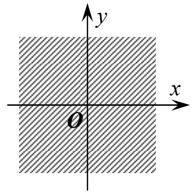


Рисунок 3

1.04 . $3x-\frac{\pi}{2}+2\pi n\le y\le 3x+\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z.$ **1.05 .** $\begin{cases}-x\le y\le 2-x;\\ x-2\le y\le x.\end{cases}$ **1.06.** $\begin{cases}\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{100}-1\ge 0;\\ 1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}\ge 0,\end{cases}$ $(x,y)\in\varnothing.$

Рис. 4. Рис. 5. Рис. 6.

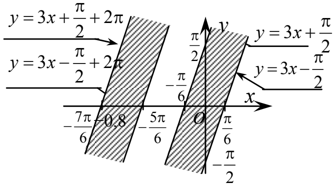


Рисунок 4

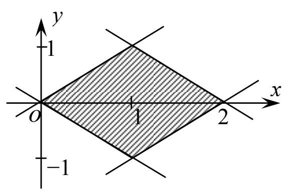


Рисунок 5

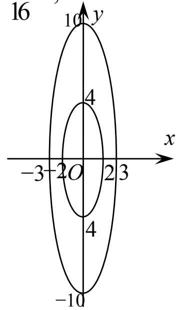


Рисунок 6

1.07. $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}-1\ge 0;\\ 1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{100}\ge 0.\end{cases}$ Рис. 7. **1.08.** $x^2+y^2+z^2\ge 11$. Рис 8. **1.09.** $z\ne\frac{-x^2-y^2}{6}$. Рис. 9.

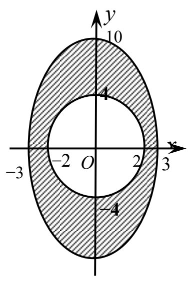


Рисунок 7

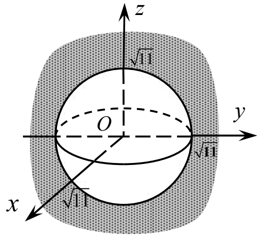


Рисунок 8

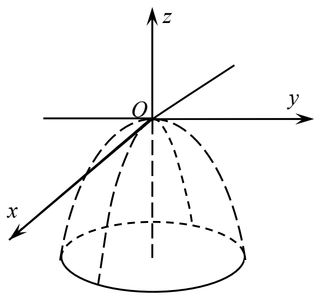


Рисунок 9

1.10. $z \neq \dfrac{x^2+y^2}{3}$. Рис. 10. **1.11.** $x^2+y^2-z^2 \neq 0$. Рис. 11. **1.12.** $x^2+y^2-z^2-1 \neq 0$. Рис. 12.

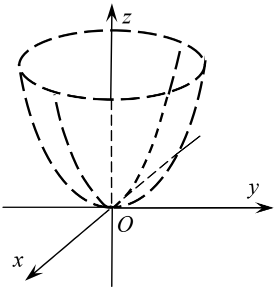


Рисунок 10

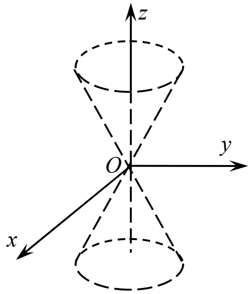


Рисунок 11

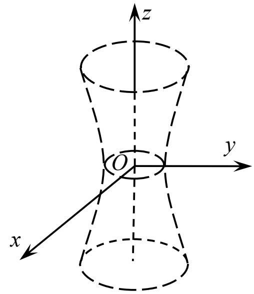


Рисунок 12

1.13. $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{49}-1 \neq 0$. Рис. 13. **1.14.** $1-x^2-y^2>0$. Рис. 14. **1.15.** $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}+z-4 \geq 0$. Рис. 15.

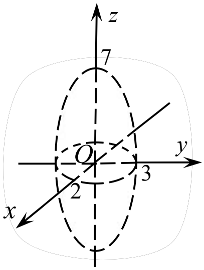


Рисунок 13

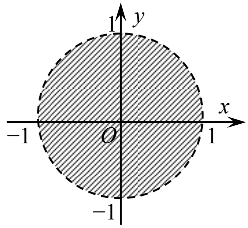


Рисунок 14

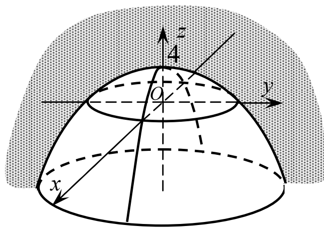


Рисунок 15

1.16. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}-\dfrac{z^2}{9}+1 \geq 0; \\ z \neq 0. \end{cases}$ **1.17.** $-1 \leq x+y+z-4 \leq 1$. **1.18.** $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{49}-1 \neq 0; \\ x \neq 0;\ y \neq 0;\ z \neq 0. \end{cases}$

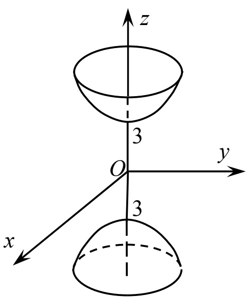


Рисунок 16

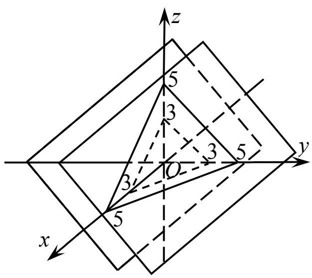


Рисунок 17

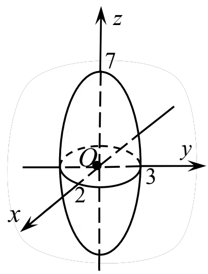


Рисунок 18

1.19. $4-x^2-y^2-z^2\neq 0$. Рис. 19. **1.20.** $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{z^2}{9}-1\geq 0$. Рис. 20. **1.21.** $-1\leq\dfrac{x^2+y^2}{2}-z\leq 1$. Рис. 21.

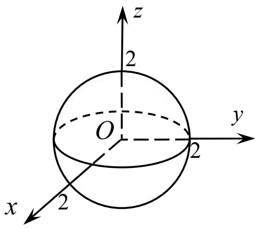


Рисунок 19

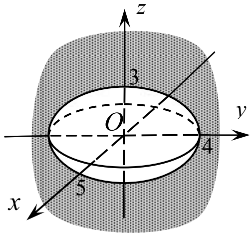


Рисунок 20

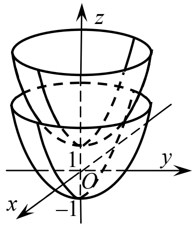


Рисунок 21

1.22. $x^2+y^2+6x\geq 0$. Рис. 22. **1.23.** $x^2+y^2+4x+12y>0$. Рис. 23. **1.24.** $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-1>0; \\ 49-x^2-y^2-z^2>0. \end{cases}$ Рис. 24.

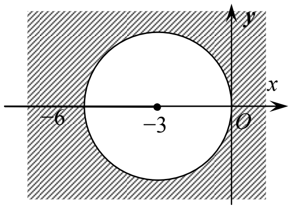


Рисунок 22

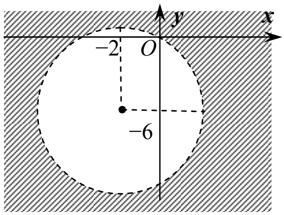


Рисунок 23

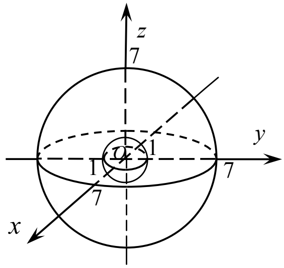


Рисунок 24

1.25. $xyz\geq 0$.

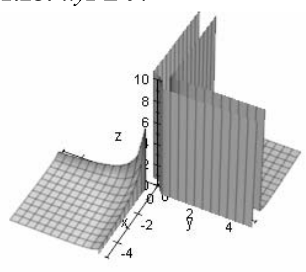


Рисунок 25

Вправи 2

2.01. Сімейство подібних гіпербол з центром у точці (2,5) $\frac{(x-2)^2}{25c}-\frac{(y-5)^2}{9c}=1$, де c = const, c >0 та сімейство подібних спряжених до них гіпербол з центром у точці (2, 5) $\frac{(y-5)^2}{9c}-\frac{(x-2)^2}{25c}=1$, де c = const, $c > 0$ або точка (2, 5), коли $c = 0$.

2.02. Сімейство паралельних площин $5x+4y-1=c$, де c = const.

2.03. Сімейство подібних гіпербол $\frac{x^2}{9c}-\frac{y^2}{4c}=1$, де $c=$ const, $c > 0$ та сімейство подібних спряжених до них гіпербол $\frac{y^2}{4c}-\frac{x^2}{9c}=1$, де $c=$ const, $c > 0$ або точка (0, 0), коли $c = 0$.

2.04. Сімейство подібних гіпербол з центром у точці (1, −2) $\frac{(x-1)^2}{16c}-\frac{(y+2)^2}{49c}=1$, де $c=$ const, $c > 0$ та сімейство подібних спряжених до них гіпербол з центром у точці (1, −2) $\frac{(y+2)^2}{49c}-\frac{(x-1)^2}{16c}=1$, де $c=$ const, $c > 0$ або точка (1, −2), коли $c = 0$.

2.05. Сімейство подібних парабол $x-\frac{1}{4}(1+c)=-\frac{1}{4}y^2$, де $c=$ const з вершиною у точці $\left(\frac{1}{4}(1+c),\ 0\right)$ з віссю симетрії $y=0$, вітки яких напрямлені вліво вздовж вісі Ox.

2.06. Сімейство паралельних площин $2x+6y+10z+(8-c)=0$, де $c=$ const.

2.07. Сімейство подібних еліпсоїдів $\frac{(x-1)^2}{16c}+\frac{(y-2)^2}{25c}+\frac{(z+5)^2}{9c}=1$, де $c=$ const, $c\neq 0$ або точка (1, 2, −5), якщо c=0.

2.08.Сімейство подібних однопорожнинних гіперболоїдів $\frac{(x+3)^2}{49c}-\frac{(y-2)^2}{16c}+\frac{(z-1)^2}{4c}=1$ з центром у точці (−3, 2, 1), де $c=$ const, $c > 0$ та сімейство двопорожнинних гіперболоїдів $\frac{(x+3)^2}{49c}-\frac{(y-2)^2}{16c}+\frac{(z-1)^2}{4c}=1$ з центром у точці (−3, 2, 1), де $c=$ const, $c < 0$ або конус другого порядку $\frac{(x+3)^2}{49}-\frac{(y-2)^2}{16}+\frac{(z-1)^2}{4}=0$, якщо $c = 0$.

2.09. Сімейство еліптичних параболоїдів $\frac{x^2}{49c}+\frac{y^2}{64c}=\frac{z}{c}+\frac{3}{c}-1$ з вершиною у точці $(0,\ 0,\ c-3)$ де $c=\text{const}$, $c\ \neq 0$ або еліптичний параболоїд $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{64}=z+3$ з вершиною у точці (0, 0, −3), якщо c = 0.

2.10. Сімейство еліптичних параболоїдів $\frac{x^2}{4c}+\frac{(y-1)^2}{16c}=-\frac{z}{c}+1$ з вершиною у точці (0, 1, c), де $c=\text{const}$, $c\neq 0$ та еліптичний параболоїд $\frac{x^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{16}=-z$, якщо c=0.

2.11. Сімейство однопорожнинних гіперболоїдів $\frac{x^2}{9c}+\frac{y^2}{121c}-\frac{z^2}{64c}=1$ з центром у точці (0, 0, 0), де $c=\text{const}$, $c>0$ або сімейство двопорожнинних гіперболоїдів $\frac{x^2}{9c}+\frac{y^2}{121c}-\frac{z^2}{64c}=1$ з центром у точці (0, 0, 0), якщо $c=\text{const}$, $c<0$ та конус другого порядку $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{121}-\frac{z^2}{64}=0$ з центром у точці (0, 0, 0), якщо c = 0.

2.12. Сімейство однопорожнинних гіперболоїдів $\frac{x^2}{4c}-\frac{y^2}{9c}+\frac{z^2}{16c}=1$ з центром у точці (0, 0,0), де $c=\text{const}$, $c>0$ або сімейство двопорожнинних гіперболоїдів $\frac{x^2}{4c}-\frac{y^2}{9c}+\frac{z^2}{16c}=1$ з центром у точці (0, 0,0), якщо $c=\text{const}$, $c<0$ та конус другого порядку $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=0$ з центром у точці
(0, 0, 0), якщо c = 0.

2.13. Сімейство еліптичних параболоїдів $\frac{x^2}{9c}+\frac{y^2}{25c}=\frac{5z}{c}-1$ з вершиною у точці $\left(0,0,\frac{c}{5}\right)$, де $c=\text{const}$, $c\neq 0$ та еліптичний параболоїд $\frac{x^2}{9c}+\frac{y^2}{25c}=5z$ з вершиною у точці $(0,0,0)$, якщо c = 0.

2.14. Сімейство однопорожнинних гіперболоїдів
$\frac{(z-1)^2}{c}-\frac{(x-2)^2}{4c}+\frac{(y-3)^2}{9c}=1$ з центром у точці (2, 3, 1), де $c=\text{const}$, $c>0$ або сімейство двопорожнинних гіперболоїдів $\frac{(z-1)^2}{c}-\frac{(x-2)^2}{4c}+\frac{(y-3)^2}{9c}=1$

з центром у точці (2, 3, 1), де $c = \text{const}$, $c < 0$ та конус другого порядку $\frac{(z-1)^2}{1} - \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 0$ з центром у точці (1, 2, 3), якщо $c = 0$.

2.15. Сімейство еліптичних параболоїдів $y + c = (x-1)^2 + (z+1)^2$ з вершиною у точці $(1, -c, -1)$, де $c = \text{const}$.

2.16. Сімейство еліптичних параболоїдів $-x + c = \frac{(y-1)^2}{4} + \frac{(z+1)^2}{9}$ з вершиною у точці $(c, 1, -1)$, де $c = \text{const}$.

2.17. Сімейство сферичних поверхонь $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-7)^2 = c$ з центром у точці (1, −1, 7), де $c = \text{const}$, $c > 0$ або точка (1, −1, 7), якщо $c = 0$.

2.18. Сімейство сферичних поверхонь $x^2 + y^2 + (z+5)^2 = c$ з центром у точці (0, 0, −5), де $c = \text{const}$, $c > 0$ або точка (0, 0, −5), якщо $c = 0$.

2.19. Сімейство еліптичних параболоїдів $x - c = \frac{y^2}{16} - \frac{(z+1)^2}{25}$ з вершиною у точці (c, 0, −1), де $c = \text{const}$.

2.20. Сімейство еліпсоїдів обертання навколо осі OZ $\frac{(x+4)^2}{4c} + \frac{(y-4)^2}{4c} + \frac{(z-1)^2}{9c} = 1$ з вершиною у точці (−4, 4, 1), де $c = \text{const}$, $c > 0$ або точка (−4, 4, 1), якщо $c = 0$.

2.21. Сімейство еліптичних параболоїдів $-2y + c = \frac{(z-1)^2}{4} + \frac{(x-1)^2}{9}$ з вершиною у точці $\left(1, \frac{c}{2}, 1\right)$, де $c = \text{const}$.

2.22. Сімейство паралельних площин $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} + \frac{z}{6} - c = 0$, де $c = \text{const}$.

2.23. Сімейство еліпсоїдів обертання навколо осі OZ $\frac{x^2}{9c} + \frac{y^2}{9c} + \frac{(z+1)^2}{25c} = 1$ з центром у точці (0, 0, −1), де $c = \text{const}$, $c > 0$ та точка (0, 0, −1), якщо $c = 0$.

2.24. Сімейство однопорожнинних гіперболоїдів $\frac{(y+5)^2}{25c} + \frac{x^2}{4c} - \frac{z^2}{16c} = 1$ з центром у точці (0, −5, 0), де $c = \text{const}$, $c > 0$ або сімейство двопорожнинних гіперболоїдів $\frac{(y+5)^2}{25c} + \frac{x^2}{4c} - \frac{z^2}{16c} = 1$ з центром у точці (0, −5, 0), де $c = \text{const}$, $c < 0$ та точка (0, −5, 0), якщо $c = 0$.

2.25. Сімейство еліптичних параболоїдів $-y+c=\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(z+3)^2}{16}$ з вершиною у точці (1, c, −3), де $c=\text{const}$.

Вправи 3

3.01. 0. **3.02.** ∞. **3.03.** ∞.**3.04.** 0. **3.05.** 0. **3.06.** 5. **3.07.** 0. **3.08.** 10. **3.09.** 7/9. **3.10.** $\ln 2 \approx 0{,}6961$. **3.11.** ∞. **3.12.** ∞. **3.13.** 1. **3.14.** 1. **3.15.** −50. **3.16.** Не існує. **3.17.** Не існує. **3.18.** 0,1667. **3.19.** Не існує. **3.20.** Не існує. **3.21.** Не існує. **3.22.** Не існує. **3.23.** 0,5. **3.24.** −0,5. **3.25.** 0.

Вправи 4

4.01.

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}=5\cdot 5^y x^4-14x\cos\left(x^2+8y\right); \qquad \frac{\partial z(0,0)}{\partial x}=0;$$

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}=5^y x^5\ln(5)-56\cos\left(x^2+8y\right); \qquad \frac{\partial z(0,0)}{\partial y}=-56;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x^2}=28x^2\sin\left(x^2+8y\right)-14\cos\left(x^2+8y\right)+20\cdot 5^y x^3; \qquad \frac{\partial^2 z(0,0)}{\partial x^2}=-14;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y^2}=448\sin\left(x^2+8y\right)+5^y x^5\ln^2(5); \qquad \frac{\partial^2 z(0,0)}{\partial y^2}=0;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y\partial x}=112x\sin\left(x^2+8y\right)+5\cdot 5^y x^4\ln(5); \qquad \frac{\partial^2 z(0,0)}{\partial x\,\partial y}=0.$$

4.02.

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}=-18y\cos x\,\sin x; \qquad \frac{\partial z(0,1)}{\partial x}=0;$$

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}=9\cos^2(x)+18; \qquad \frac{dz(x_0,y_0)}{dy}=0;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x^2}=18y\sin^2 x-18y\cos^2 x; \qquad \frac{\partial^2 z(0,1)}{\partial x^2}=-18;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y^2}=0; \qquad \frac{\partial^2 z(0,1)}{\partial x^2}=0;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y\,\partial x}=-18\cos x\,\sin x; \qquad \frac{\partial^2 z(0,1)}{\partial x\,\partial y}=0.$$

4.03.

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}=38x+\sin y; \qquad \frac{\partial z(1,0)}{\partial x}=38;$$

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}=18\cdot 2^{y}\ln(2)+x\cos y; \qquad \frac{\partial z(1,0)}{\partial y}=18\ln 2+1\approx 13,477;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x^2}=38; \qquad \frac{\partial^2 z(1,0)}{\partial x^2}=38;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y^2}=18\cdot 2^{y}\ln^2(2)-x\sin y; \qquad \frac{\partial^2 z(1,0)}{\partial y^2}=18(\ln 2)^2\cdot 8,648;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y\,\partial x}=\cos y; \qquad \frac{\partial^2 z(1,0)}{\partial x\,\partial y}=1.$$

4.04.

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}=6\cos(3x-8y)\sin(3x-8y)+\frac{1}{2\sqrt{x}}; \qquad \frac{\partial z(1,0)}{\partial x}=6\cos 3\sin 3\approx -0,838;$$

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}=-16\cos(3x-8y)\sin(3x-8y); \qquad \frac{\partial z(1,0)}{\partial y}=-16\cos 3\sin 3\approx 2,235;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x^2}=18\cos^2(3x-8y)-18\sin(3x-8y)^2-\frac{1}{4x^{3/2}}; \qquad \frac{\partial^2 z(1,0)}{\partial x^2}=18(\cos 3)^2-18(\sin 3)^2\approx 17,033;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y^2}=128\cos(3x-8y)^2-128\sin(3x-8y)^2; \qquad \frac{\partial^2 z(1,0)}{\partial y^2}=128(\cos 3)^2-128(\sin 3)^2\approx 122,90;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y\partial x}=48\sin(3x-8y)^2-48\cos(3x-8y)^2; \qquad \frac{\partial^2 z(1,0)}{\partial x\partial y}=48(\sin 3)^2-48(\cos 3)^2\approx -46,08.$$

4.05.

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}=\frac{3\cdot x^4}{x^3+y^2}-11e^{x}+2x\ln\left(x^3+y^2\right); \qquad \frac{\partial z(1,0)}{\partial x}=4\ln 17-11e^2+\frac{48}{17}\approx -67,12;$$

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}=\frac{2x^2y}{x^3+y^2}; \qquad \frac{\partial z(1,0)}{\partial y}=1,412;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x^2}=2\ln\left(x^3+y^2\right)-11e^{x}+\frac{18x^3}{x^3+y^2}-\frac{9x^6}{\left(x^3+y^2\right)^2}; \qquad \frac{\partial^2 z(1,0)}{\partial x^2}=2\ln 17-11e^2+\frac{1872}{289}\approx -69,13;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y^2}=\frac{2x^2}{x^3+y^2}-\frac{4x^2y^2}{\left(x^3+y^2\right)^2}; \qquad \frac{\partial^2 z(1,0)}{\partial y^2}=-0,028;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y\partial x}=\frac{4xy}{x^3+y^2}-\frac{6x^4y}{\left(x^3+y^2\right)^2};\qquad \frac{\partial^2 z(1,0)}{\partial x\partial y}=0,415.$$

4.06.

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}=2y\cos(xy)\sin(xy)-54\sqrt{y}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2;\qquad \frac{\partial z\left(\frac{\pi}{2},4\right)}{\partial x}=0;$$

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}=2x\cos(xy)\sin(xy)-\frac{9\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3}{\sqrt{y}};\qquad \frac{\partial z\left(\frac{\pi}{2},4\right)}{\partial y}=0;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x^2}=2y^2\cos^2(xy)-54\sqrt{y}(2x-\pi)-2y^2\sin^2(xy);\qquad \frac{\partial^2 z\left(\frac{\pi}{2},4\right)}{\partial x^2}=32;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y^2}=2x^2\cos^2(xy)-2x^2\sin^2(xy)+\frac{9\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3}{2y^{\frac{3}{2}}};\qquad \frac{\partial^2 z\left(\frac{\pi}{2},4\right)}{\partial y^2}=\frac{\pi^2}{2}\approx 4,935;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x\partial y}=2\cos(xy)\sin(xy)-\frac{27\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{\sqrt{y}}+2xy\cos^2(xy)-2xy\sin^2(xy);$$

$$\frac{\partial^2 z\left(\frac{\pi}{2},4\right)}{\partial x\partial y}=4\pi\approx 12,566.$$

4.07.

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}=2x\left(\sqrt[3]{y}+y^{\frac{3}{2}}+8\right);\qquad \frac{\partial z(7,64)}{\partial x}=7336;$$

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}=\frac{\sqrt[3]{y}+y^{\frac{3}{2}}+8}{2\sqrt{y}}+\left(\frac{3\sqrt{y}}{2}+\frac{\sqrt[3]{y}}{3y}\right)\left(x^2+\sqrt{y}-3\right);\qquad \frac{\partial z(7,64)}{\partial y}=681,875;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x^2}=2\sqrt[3]{y}+2y^{\frac{3}{2}}+16;\qquad \frac{\partial^2 z(7,64)}{\partial x^2}=1048;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y^2}=\left(\frac{3}{4\sqrt{y}}-\frac{2\sqrt[3]{y}}{9y^2}\right)\left(x^2+\sqrt{y}-3\right)-\frac{\sqrt[3]{y}+y^{\frac{3}{2}}+8}{4y^{\frac{3}{2}}}+\frac{\frac{3\sqrt{y}}{2}+\frac{\sqrt[3]{y}}{3y}}{\sqrt{y}};\qquad \frac{\partial^2 z(7,64)}{\partial y^2}=6,298;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,\,y)}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y\,\partial x}=2x\left(\frac{3\sqrt{y}}{2}+\frac{\sqrt[3]{y}}{3y}\right);\qquad \frac{\partial^2 z(7,\,64)}{\partial x\,\partial y}=168{,}292.$$

4.08.

$$\frac{\partial z(x,\,y)}{\partial x}=\frac{2^{x^2+y^2}\sqrt{x}\left(4x^2\ln 2-48\sqrt{x}\,y\ln 2+3\right)}{2};\qquad \frac{\partial z(9,\,5)}{\partial x}=-3{,}304\cdot 10^{34};$$

$$\frac{\partial z(x,\,y)}{\partial y}=-2^{x^2+y^2}\left(24y^2\ln 2-2x^{\frac{3}{2}}y\ln 2+12\right);\qquad \frac{\partial z(9,\,5)}{\partial y}=-1{,}953\cdot 10^{34};$$

$$\frac{\partial^2 z(x,\,y)}{\partial x^2}=\frac{2^{x^2+y^2}}{\sqrt{x}}\left(4x^4\ln^2 2+8x^2\ln 2-24\sqrt{x}\,y\ln 2-48x^{\frac{5}{2}}y\ln^2 2+\frac{3}{4}\right);$$

$$\frac{\partial^2 z(9,5)}{\partial x^2}=-4{,}113\cdot 10^{35};$$

$$\frac{\partial^2 z(x,\,y)}{\partial y^2}=-2^{x^2+y^2}\ln 4\left(36y-x^{\frac{3}{2}}+y^3\ln(16777216)-x^{\frac{3}{2}}y^2\ln 4\right);$$

$$\frac{\partial^2 z(9,\,5)}{\partial y^2}=-1{,}458\cdot 10^{35};$$

$$\frac{\partial^2 z(x,\,y)}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z(x,\,y)}{\partial y\,\partial x}=2^{x^2+y^2}\sqrt{y}\ln 2\left(3y-24\sqrt{x}+4x^2y\ln 2-48\sqrt{x}\,y^2\ln 2\right);$$

$$\frac{\partial^2 z(9,\,5)}{\partial x\,\partial y}=-2{,}412\cdot 10^{35}.$$

4.09.

$$\frac{\partial z(x,\,y)}{\partial x}=\operatorname{arctg}(3y)-\frac{4}{\sqrt{1-16x^2}};\qquad \frac{\partial z\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)}{\partial x}=\frac{\pi}{4}+\frac{4}{3}\sqrt{3}\,i;$$

$$\frac{\partial z(x,\,y)}{\partial y}=\frac{3x}{9y^2+1};\qquad \frac{\partial z\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)}{\partial y}=0{,}375;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,\,y)}{\partial x^2}=\frac{64x}{\left(1-16x^2\right)^{3/2}};\qquad \frac{\partial^2 z\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)}{\partial x^2}=-\frac{32\sqrt{3}}{9}i;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,\,y)}{\partial y^2}=-\frac{54x\,y}{\left(9y^2+1\right)^2};\qquad \frac{\partial^2 z\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)}{\partial y^2}=-1{,}125;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y\partial x}=\frac{3}{9y^2+1};\qquad \frac{\partial^2 z\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)}{\partial x\partial y}=1{,}5.$$

4.10.

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}=-(x-1)\left(2\cdot 2^y+35x^{\frac{3}{2}}-63x^{\frac{5}{2}}\right);\qquad \frac{\partial z(9,1)}{\partial x}=114880;$$

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}=-2^y\ln 2\cdot(x-1)^2;\qquad \frac{\partial z(9,1)}{\partial y}=-128\ln 2\approx -88{,}723;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x^2}=\frac{105\sqrt{x}}{2}-245x^{\frac{3}{2}}+\frac{441x^{\frac{5}{2}}}{2}-2^{y+1};\qquad \frac{\partial^2 z(9,1)}{\partial x^2}=47120;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y^2}=-2^y(\ln 2)^2(x-1)^2;\qquad \frac{\partial^2 z(9,1)}{\partial y^2}=-128(\ln 2)^2\approx -61{,}498;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y\partial x}=-2\cdot 2^y\ln 2\cdot(x-1);\qquad \frac{\partial^2 z(9,1)}{\partial x\partial y}=-32\ln 2\approx -22{,}181.$$

4.11.

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}=\frac{2\sqrt{\pi}x\sin(5x-6y)+5\sqrt{\pi}x^2\cos(5x-6y)+5\sqrt{6}\sqrt{y}\cos(5x-6y)}{\sqrt{\pi}};$$

$$\frac{\partial z\left(0,\frac{\pi}{6}\right)}{\partial x}=-\frac{5\sqrt{6}\sqrt{\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{5}}\simeq -5;$$

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}=\frac{\sqrt{6}\sin(5x-6y)+12\sqrt{6}y\left(2\left(\sin\left(\frac{5x}{2}-3y\right)\right)^2-1\right)+12\sqrt{\pi}x^2\sqrt{y}\left(2\left(\sin\left(\frac{5x}{2}-3y\right)\right)^2-1\right)}{2\sqrt{\pi}\sqrt{y}};$$

$$\frac{\partial z\left(0,\frac{\pi}{6}\right)}{\partial y}=\frac{\sqrt{6}\sqrt{\pi}}{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}\approx 6;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x^2}=\frac{2\sqrt{\pi}\sin(5x-6y)+20\sqrt{\pi}x\cos(5x-6y)-25\sqrt{\pi}x^2\sin(5x-6y)-25\sqrt{6}\sqrt{y}\sin(5x-6y)}{\sqrt{\pi}};$$

$$\frac{\partial^2 z\left(0,\frac{\pi}{6}\right)}{\partial x^2}=0;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y^2}=-\frac{\frac{\sqrt{6}\sin(5x-6y)}{4}+6\sqrt{6}y\cos(5x-6y)+36\sqrt{6}y^2\sin(5x-6y)+36\sqrt{\pi}x^2y^{3/2}\sin(5x-6y)}{\sqrt{\pi}y^{3/2}};$$

$$\frac{\partial^2 z\left(0,\frac{\pi}{6}\right)}{\partial y^2}=\frac{\sqrt{6}\sqrt{\pi}}{\left(\frac{\pi}{6}\right)^{3/2}}\approx 11{,}59;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y\partial x}=30\sin(5x-6y)\left(x^2+\frac{\sqrt{6}\sqrt{y}}{\sqrt{\pi}}\right)-12\cos(5x-6y)+\frac{5\sqrt{6}\cos(5x-6y)}{2\sqrt{\pi}\sqrt{y}};$$

$$\frac{\partial^2 z\left(0,\frac{\pi}{6}\right)}{\partial x\partial y}=\frac{5\sqrt{6}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{\pi}{6}}}\approx -4{,}775.$$

4.12.

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}=x^{\sin y-1}\sin y; \qquad \frac{\partial z\left(1,\frac{\pi}{4}\right)}{\partial x}=\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0{,}707;$$

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}=x^{\sin y}\ln x\cos y; \qquad \frac{\partial z\left(1,\frac{\pi}{4}\right)}{\partial y}=0;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x^2}=x^{\sin y-2}\sin y\,(\sin y-1); \qquad \frac{\partial^2 z\left(1,\frac{\pi}{4}\right)}{\partial x^2}=\frac{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)}{2}\approx -0{,}207;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y^2}=-x^{\sin y}\ln x\left(\ln x\,(\sin y)^2+\sin y-\ln x\right); \qquad \frac{\partial^2 z\left(1,\frac{\pi}{4}\right)}{\partial y^2}=0;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y\partial x}=\frac{2x^{\sin y}\cos y+x^{\sin y}\sin 2y\ln x}{2x}; \qquad \frac{\partial^2 z\left(1,\frac{\pi}{4}\right)}{\partial x\partial y}=\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0{,}707.$$

4.13.

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}=6^x+2\sqrt{y}+6^x x\ln 6-5\cdot 6^x y\ln 6; \qquad \frac{\partial z(0,1)}{\partial x}=3-5\ln 6\approx -5{,}95;$$

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}=\frac{x}{\sqrt{y}}-5\cdot 6^x-15\sqrt{y};\qquad \frac{\partial z(0,1)}{\partial y}=-20;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x^2}=6^x\ln 6\,(x\ln 6-5y\ln 6+2);\qquad \frac{\partial^2 z(0,1)}{\partial x^2}=-\ln 6(5\ln 6-2)\approx -12{,}46;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y^2}=-\frac{x+15y}{2y^{3/2}};\qquad \frac{\partial^2 z(0,1)}{\partial y^2}=-7{,}5;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y\partial x}=y^{-\frac{1}{2}}-5\cdot 6^x\ln 6;\qquad \frac{\partial^2 z(0,1)}{\partial x\partial y}=1-5\ln 6\approx -7{,}95.$$

4.14.

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}=-\frac{3\left(x^6-15x^3y-10x^2y^2+1\right)}{(3x+2y)\left(x^6+1\right)};\qquad \frac{\partial z(1,0)}{\partial x}=-1;$$

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}=5(\operatorname{arctg}x)^3-\frac{2}{3x+2y};\qquad \frac{\partial z(1,0)}{\partial y}=\frac{5\pi}{4}-\frac{2}{3}\approx 3{,}26;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x^2}=\frac{3\left(3x^{12}-180x^9y-240x^8y^2-80x^7y^3+6x^6+90x^3y+120x^2y^2+40xy^3+3\right)}{(3x+2y)^2\left(x^6+1\right)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z(1,0)}{\partial x^2}=1;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y^2}=\frac{4}{(3x+2y)^2};\qquad \frac{\partial^2 z(1,0)}{\partial y^2}=0{,}444;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y\partial x}=\frac{3\left(2x^6+45x^4+60x^3y+20x^2y^2+2\right)}{(3x+2y)^2\left(x^6+1\right)};\quad \frac{\partial^2 z(1,0)}{\partial x\partial y}=9.167.$$

4.15.

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}=\frac{5y^3}{\sqrt{1-x^2}}-57x^2;\qquad \frac{\partial z(0,1)}{\partial x}=5;$$

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}=15y^2\arcsin x;\qquad \frac{\partial z(0,1)}{\partial y}=0;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x^2}=x\left(\frac{5y^3}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}-114\right);\qquad \frac{\partial^2 z(0,1)}{\partial x^2}=0;$$

$$\frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial y^2} = 30y\sin x; \qquad \frac{\partial^2 z(0, 1)}{\partial y^2} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial y\,\partial x} = \frac{15y^2}{\sqrt{1-x^2}}; \qquad \frac{\partial^2 z(0, 1)}{\partial x\,\partial y} = 15.$$

4.16.

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = 2xy^2 - \cos\left(x^3y\right) + 3x^3y\sin\left(x^3y\right); \qquad \frac{\partial z(0, 1)}{\partial x} = -1;$$

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = 2xy^2 + x^4\sin\left(x^3y\right); \qquad \frac{\partial z(0, 1)}{\partial y} = 1;$$

$$\frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial x^2} = 2y^2 + 12x^2y\sin\left(x^3y\right) + 9x^5y^2\cos\left(x^3y\right); \qquad \frac{\partial^2 z(0, 1)}{\partial x^2} = 2;$$

$$\frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial y^2} = 2x^2 - \frac{1}{2y^{\frac{3}{2}}} + x^7\cos\left(x^3y\right); \qquad \frac{\partial^2 z(0, 1)}{\partial y^2} = -0{,}5;$$

$$\frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial y\partial x} = 4x^3\sin\left(x^3y\right) + 4xy + 3x^6y\cos\left(x^3y\right); \qquad \frac{\partial^2 z(0, 1)}{\partial x\,\partial y} = 0.$$

4.17.

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = e^{\sin(xy)} + \frac{x^2}{\left(x^3+y^3+8\right)^{\frac{2}{3}}} + xye^{\sin(xy)}\cos(xy) + 11; \qquad \frac{\partial z(0, 0)}{\partial x} = 12;$$

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = \frac{y^2}{\left(x^3+y^3+8\right)^{2/3}} + x^2e^{\sin(xy)}\cos(xy); \qquad \frac{\partial z(0, 0)}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial x^2} = \frac{2x}{\left(x^3+y^3+8\right)^{2/3}} - \frac{2x^4}{\left(x^3+y^3+8\right)^{5/3}} + 2ye^{\sin(xy)}\cos(xy) - xy^2e^{\sin(xy)}\sin(xy) +$$

$$+xy^2e^{\sin(xy)}\left(\cos(xy)\right)^2; \qquad \frac{\partial^2 z(0, 0)}{\partial x^2} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial y^2} = \frac{2y}{\left(x^3+y^3+8\right)^{\frac{2}{3}}} - \frac{2y^4}{\left(x^3+y^3+8\right)^{5/3}} + x^3e^{\sin(xy)}\left(\cos(xy)\right)^2 - x^3e^{\sin(xy)}\sin(xy);$$

$$\frac{\partial^2 z(0, 0)}{\partial y^2} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x dy}=\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y \partial x}=2xe^{\sin(xy)}\cos(xy)-\frac{2x^2y^2}{\left(x^3+y^3+8\right)^{5/3}}-x^2ye^{\sin(xy)}\sin(xy)+x^2ye^{\sin(xy)}\left(\cos(xy)\right)^2;$$

$$\frac{\partial^2 z(0,0)}{\partial x \partial y}=0.$$

4.18.

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}=2x\left(2^{x^2+y^2}\ln 2-1\right); \qquad \frac{\partial z(0,1)}{\partial x}=0;$$

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}=\frac{2}{\sqrt{y}}+2\cdot 2^{x^2}\cdot 2^{y^2}\,y\ln 2; \qquad \frac{\partial z(0,1)}{\partial y}=4\ln 2+2\approx 4,773;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x^2}=2\cdot 2^{x^2}\cdot 2^{y^2}\ln 2+4\cdot 2^{x^2}\cdot 2^{y^2}x^2\left(\ln 2\right)^2-2; \qquad \frac{\partial^2 z(0,1)}{\partial x^2}=4\ln 22-2\approx 0,773;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y^2}=2\cdot 2^{x^2}\cdot 2^{y^2}\ln 2-\frac{1}{y^{\frac{3}{2}}}+4\cdot 2^{x^2}\cdot 2^{y^2}y^2\left(\ln 2\right)^2; \qquad \frac{\partial^2 z(0,1)}{\partial y^2}=4\ln 2+8\left(\ln 2\right)^2-1\approx 5,616;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x \partial y}=4\cdot 2^{x^2}\cdot 2^{y^2}xy\left(\ln 2\right)^2; \qquad \frac{\partial^2 z(0,1)}{\partial x \partial y}=0.$$

4.19.

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; \qquad \frac{\partial z(1,0)}{\partial x}=1;$$

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}=3\cos(3y)+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}; \qquad \frac{\partial z(1,0)}{\partial y}=3;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x^2}=\frac{y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}; \qquad \frac{\partial^2 z(1,0)}{\partial x^2}=0;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y^2}=\frac{x^2}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}-9\sin(3y); \qquad \frac{\partial^2 z(1,0)}{\partial y^2}=1;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y \partial x}=-\frac{xy}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}; \qquad \frac{\partial^2 z(1,0)}{\partial x \partial y}=0.$$

4.20.

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}=\left(\pi\cos(\pi x)-\pi\sin(\pi x)\right)\left(x^2+y^2\right)+2x\left(\cos(\pi x)+\sin(\pi x)\right);$$

$$\frac{\partial z(1,1)}{\partial x}=-2\pi-2\approx-8,283;$$

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}=2y\left(\cos(\pi x)+\sin(\pi x)\right);\qquad \frac{\partial z(1,1)}{\partial y}=-2;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x^2}=2\cos(\pi x)+2\sin(\pi x)-\left(\pi^2\cos(\pi x)+\pi^2\sin(\pi x)\right)\left(x^2+y^2\right)+4x\left(\pi\cos(\pi x)-\pi\sin(\pi x)\right);$$

$$\frac{\partial^2 z(1,1)}{\partial x^2}=2\pi^2-4\pi-2\approx5,173;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y^2}=2\cos(\pi x)+2\sin(\pi x);\qquad \frac{\partial^2 z(1,1)}{\partial y^2}=-2;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x\partial y}=2\pi y\left(\cos(\pi x)-\sin(\pi x)\right);\qquad \frac{\partial^2 z(1,1)}{\partial x\partial y}=-2\pi\approx-6,283.$$

4.21.

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}=\frac{3x^2}{3x-8y}+2x\ln(3x-8y);\qquad \frac{\partial z(1,0)}{\partial x}=2\ln3+1\approx3,197;$$

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}=-\frac{8x^2-12\cos(4y)\cdot x+32y\cos(4y)}{3x-8y};\qquad \frac{\partial z(1,0)}{\partial y}=1,333;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x^2}=2\ln(3x-8y)+\frac{27x^2-96xy}{9x^2-48xy+64y^2};\qquad \frac{\partial^2 z(1,0)}{\partial x^2}=2\ln3+3\approx5,197;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y^2}=-\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}=-\frac{16\left(4x^2+9x^2\sin(4y)+64y^2\sin(4y)-48xy\sin(4y)\right)}{(3x-8y)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z(1,0)}{\partial y^2}\approx-7,111;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y\partial x}=\frac{512y^2}{3(3x-8y)^2}-\frac{8}{3};\qquad \frac{\partial^2 z(1,0)}{\partial x\partial y}\approx-2.667.$$

4.22.

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}=\frac{57}{2}\sqrt{x}\left(2^x+3^y\right)-3\cdot2^x y\ln2+19\cdot2^x x^{\frac{3}{2}}\ln2;\qquad \frac{\partial z(4,0)}{\partial x}=2432\ln2+969\approx2,655\cdot10^3;$$

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}=19\cdot3^y x^{\frac{3}{2}}\ln3-3\cdot3^y-3\cdot3^y y\ln3-3\cdot2^y;\qquad \frac{\partial z(4,0)}{\partial y}=152\ln3-51\approx115,989;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x^2}=\frac{57\cdot2^x+57\cdot3^y+76\cdot2^x x^2(\ln2)^2+228\cdot2^x x\ln2-12\cdot2^x\sqrt{x}\cdot y\cdot(\ln2)^2}{4\sqrt{x}};$$

$$\frac{\partial^2 z(4,0)}{\partial x^2}=1824\ln 2+2432(\ln 2)^2+\frac{969}{8}\approx 2{,}554\cdot 10^3;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y^2}=-3^y\ln 3\left(3y\ln 3-19x^{\frac{3}{2}}\ln 3+6\right);\qquad \frac{\partial^2 z(4,0)}{\partial y^2}=\ln 3(152\ln 3-6)\approx 176{,}865;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y\partial x}=\frac{57\cdot 3^y\sqrt{x}\cdot\ln 3}{2}-3\cdot 2^x\ln 2;\qquad \frac{\partial^2 z(4,0)}{\partial x\partial y}=57\ln 3-48\ln 2\approx 29{,}35.$$

4.23.

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}=8y^{\frac{1}{3}}\cos x+15\sqrt{y}\cdot\sin x-15\pi y^{\frac{3}{2}}+15x\sqrt{y}\cdot\cos x;\qquad \frac{\partial z(0,1)}{\partial x}=8-15\pi\approx -39{,}124;$$

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}=\frac{16\sin x-64\pi y-135\pi x y^{\frac{7}{6}}+45x y^{\frac{1}{6}}\sin x}{6y^{\frac{2}{3}}};\qquad \frac{\partial z(0,1)}{\partial y}=-\frac{32\pi}{3}\approx -33{,}51;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x^2}=30\sqrt{y}\cos x-8y^{\frac{1}{3}}\sin x-15x\sqrt{y}\sin x;\qquad \frac{\partial^2 z(0,1)}{\partial x^2}=30;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y^2}=-\frac{64\sin x+128\pi y+405\pi x y^{\frac{7}{6}}+135x y^{\frac{1}{6}}\sin x}{36y^{\frac{5}{3}}};\qquad \frac{\partial^2 z(0,1)}{\partial y^2}=-\frac{32\pi}{9}\approx -11{,}17;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y\partial x}=\frac{8\cos x}{3y^{\frac{2}{3}}}+\frac{15\sin x}{2\sqrt{y}}-\frac{45\pi\sqrt{y}}{2}+\frac{15x\cos x}{2\sqrt{y}};\qquad \frac{\partial^2 z(0,1)}{\partial x\partial y}=\frac{8}{3}-\frac{45\pi}{2}\approx -68{,}019.$$

4.24.

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}=\frac{x^y y+x\cdot y^x\ln y+5\pi x\cos(5\pi x+8\pi y)}{x};\qquad \frac{\partial z(1,1)}{\partial x}=1-5\pi\approx -14{,}708;$$

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}=\frac{xy^y+x^y\cdot y\ln x+8\pi y\cos(5\pi x+8\pi y)}{y};\qquad \frac{\partial z(1,1)}{\partial y}=1-8\pi\approx -24{,}133;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x^2}=y^x(\ln y)^2-x^{y-2}y-25\pi^2\sin(5\pi x+8\pi y)+x^{y-2}y^2;\qquad \frac{\partial^2 z(1,1)}{\partial x^2}=0;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y^2}=x^y(\ln x)^2-xy^{x-2}-64\pi^2\sin(5\pi x+8\pi y)+x^2y^{x-2};\qquad \frac{\partial^2 z(1,1)}{\partial y^2}=0;$$

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y\partial x}=\frac{xy^x+x^2\cdot y^x\ln y-40\pi^2 xy\sin(5\pi x+8\pi y)}{xy}+\frac{x^y\left(\ln x\cdot y^2+y\right)}{xy};$$

$$\frac{\partial^2 z(1,1)}{\partial x\partial y}=2.$$

4.25.

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = 28x\left(7x^2 + \sqrt{y}\right); \qquad \frac{\partial z(1, 1)}{\partial x} = 224;$$

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = \frac{7x^2}{\sqrt{y}} + 1; \qquad \frac{\partial z(1, 1)}{\partial y} = 8;$$

$$\frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial x^2} = 588x^2 + 28\sqrt{y}; \qquad \frac{\partial^2 z(1, 1)}{\partial x^2} = 616;$$

$$\frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial y^2} = -\frac{7x^2}{2y^{\frac{3}{2}}}; \qquad \frac{\partial^2 z(1, 1)}{\partial y^2} = -3.5;$$

$$\frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial y \partial x} = \frac{14x}{\sqrt{y}}; \qquad \frac{\partial^2 z(1, 1)}{\partial x \partial y} = 14.$$

Вправи 6

6.01. $dz \approx 0,5341$; $d^2z \approx 0,0355$. **6.02.** $dz \approx 0,6$; $d^2z \approx 0,024$.
6.03. $dz \approx -0,1451$; $d^2z \approx 2,1028 \cdot 10^{-3}$. **6.04.** $dz \approx 102,9041$; $d^2z \approx 10,9597$.
6.05. $dz \approx 0,2118$; $d^2z \approx -3,9801 \cdot 10^{-4}$. **6.06.** $dz \approx 6,1083 \cdot 10^{-3}$; $d^2z \approx -5,1053 \cdot 10^{-4}$.
6.07. $dz \approx 3,693 \cdot 10^{5}$; $d^2z \approx 1,0041 \cdot 10^{4}$. **6.08.** $dz \approx 0,0601$; $d^2z \approx 3,5742 \cdot 10^{-4}$.
6.09. $dz \approx 0,0228$; $d^2z \approx 1,5963 \cdot 10^{-3}$. **6.10.** $d^2z \approx 3 \cdot 10^{-3}$; $dz \approx 0,06$;.
6.11. $dz \approx 0,1197$; $d^2z \approx 4,6744 \cdot 10^{-3}$. **6.12.** $dz \approx 0$; $d^2z \approx 7,2 \cdot 10^{-3}$.
6.13. $dz \approx 8,9794 \cdot 10^{-4}$; $d^2z \approx -5,0014 \cdot 10^{-3}$. **6.14.** $dz \approx 0,24$; $d^2z \approx 4,8279 \cdot 10^{-3}$.
6.15. $dz \approx -2,2689$; $d^2z \approx -0,0977$. **6.16.** $dz \approx 18,3914$; $d^2z \approx 0,5603$.
6.17. $dz \approx -0,0121$; $d^2z \approx -4,5693 \cdot 10^{-4}$. **6.18.** $dz \approx 0,0694$; $d^2z \approx 2,0216 \cdot 10^{-3}$.
6.19. $dz \approx -0,0179$; $d^2z \approx -3 \cdot 10^{-4}$. **6.20.** $dz \approx -0,4676$; $d^2z \approx 0,0234$.
6.21. $dz \approx -23,2417$; $d^2z \approx 3,3744$. **6.22.** $dz \approx -24,2123$; $d^2z \approx 0,4373$.
6.23. $dz \approx 0,01$; $d^2z \approx 0,1973$. **6.24.** $dz \approx 0,025$; $d^2z \approx -3,5 \cdot 10^{-4}$.
6.25. $dz \approx -0,0103$; $d^2z \approx 6,3638 \cdot 10^{-5}$.

Вправи 7

7.01. $$\frac{dy}{dx} = -\frac{3\cos(y)^2 - 35\arccos(y)x^4 + 1}{\dfrac{7x^5}{\sqrt{1-y^2}} - 6x\cos(y)\sin(y)}.$$

7.02. $$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{e^x-y^x\ln y}{e^x-y^x}+\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{8x(\ln y)^3}{(\ln 10)^3}}{\dfrac{xy^{x-1}}{e^x-y^x}+\dfrac{12x^2(\ln y)^2}{y(\ln 10)^3}}.$$

7.03. $$\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\pi y^2\cos\left(\dfrac{\pi x}{6}\right)}{2}+\dfrac{3\sqrt{5}\cdot x^2\left(\sin\left(\dfrac{\pi y}{2}\right)\right)^2}{2\sqrt{x^3}}+\dfrac{5^x\ln 5}{(5^x-7^y)\ln 10}}{6y\sin\left(\dfrac{\pi x}{6}\right)-\dfrac{7^y\ln 7}{\ln 10\cdot(5^x-7^y)}+\pi\sqrt{5}\cos\left(\dfrac{\pi y}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\pi y}{2}\right)\sqrt{x^3}}.$$

7.04. $$\frac{dy}{dx}=-\frac{3y+\dfrac{5^{3y}}{2\sqrt{x}}+\dfrac{20y}{\sqrt{1-16x^2y^2}}+\dfrac{\pi y\sin\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)}{2}}{3x-2\cos\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)+\dfrac{20x}{\sqrt{1-16x^2y^2}}+3\cdot 5^{3y}\ln 5\sqrt{x}}.$$

7.05. $$\frac{dy}{dx}=\frac{3\sin\left(\dfrac{\pi y}{4}\right)-\dfrac{4\ln(8y)}{\ln 2}+\dfrac{4\pi y\sin\left(\dfrac{\pi x}{3}\right)}{3}+5\pi y^3\cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)}{4\cos\left(\dfrac{\pi x}{3}\right)-15y^2\left(\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)\right)^2-\dfrac{3\pi x\cos\left(\dfrac{\pi y}{4}\right)}{4}+\dfrac{4x}{y\ln 2}}.$$

7.06. $$\frac{dy}{dx}=\frac{e^x+98x\cos\left(\dfrac{\pi y}{4}\right)+\dfrac{3}{2y}-\pi y^3\cos\left(\dfrac{\pi x}{3}\right)}{\dfrac{3x}{2y^2}+9y^2\sin\left(\dfrac{\pi x}{3}\right)+\dfrac{49\pi x^2\sin\left(\dfrac{\pi y}{3}\right)}{4}}.$$

7.07. $$\frac{dy}{dx}=-\frac{4\cos\left(\dfrac{\pi y}{3}\right)+\dfrac{6y^2(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}-1}{4y(\arcsin x)^3-\dfrac{4\pi x\sin\left(\dfrac{\pi y}{3}\right)}{3}+1}.$$

7.08. $$\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{13\cdot 10^x}{10^x-10^y}+\dfrac{2y}{x}-12x\left(\sin\left(\dfrac{\pi y}{6}\right)\right)^3}{\dfrac{13\cdot 10^y}{10^x-10^y}-2\ln x+3\pi x^2\cos\left(\dfrac{\pi y}{6}\right)\left(\sin\left(\dfrac{\pi y}{6}\right)\right)^2}.$$

7.09. $$\frac{dy}{dx}=\frac{y-70y(14x)^{5y-1}+4\left(\cos\left(\frac{\pi y}{4}\right)\right)^3}{5\ln(14x)\,(14x)^{5y}-x+3\pi x\left(\cos\left(\frac{\pi y}{4}\right)\right)^2\sin\left(\frac{\pi y}{4}\right)}.$$

7.10. $$\frac{dy}{dx}=-\frac{2^y+\dfrac{30x^2(\ln y)^2}{(\ln 10)^2}-\dfrac{5\sqrt{10}x^4(\arcsin y)^3}{2\sqrt{x^5}}}{2^y x\ln 2-\dfrac{3\sqrt{10}(\arcsin y)^2\sqrt{x^5}}{\sqrt{1-y^2}}+\dfrac{10x^6\ln y}{y(\ln 10)^2}}.$$

7.11. $$\frac{dy}{dx}=-\frac{\operatorname{tg}(\pi y)+y^3+\dfrac{6\sin(\pi y)}{(\arccos x)^2\sqrt{1-x^2}}+18y^6\cos x\sin x}{3xy^2+54y^5(\sin x)^2+\dfrac{6\pi\cos(\pi y)}{\arccos(x)}+\pi x\left((\operatorname{tg}(\pi y))^2+1\right)}.$$

7.12. $$\frac{dy}{dx}=\frac{\pi\cos(y-x)-\dfrac{\ln\left(2y^3+\frac{1}{32}\right)}{2\sqrt{x}}+21\pi y^2\cos(x+y)(\sin(x+y))^2}{\pi\cos(y-x)+\dfrac{6y^2\sqrt{x}}{2y^3+\frac{1}{32}}-14\pi y(\sin(x-y))^3-21\pi y^2\cos(x+y)(\sin(x+y))^2}.$$

7.13. $$\frac{dy}{dx}=\frac{6\cos\left(\frac{\pi y^3}{4}\right)+\dfrac{\ln 5}{\ln 10}-200xy^2e^{x^2}}{200ye^{x^2}+\dfrac{\ln 5}{\ln 10}+\dfrac{9\pi xy^2\sin\left(\frac{\pi y^3}{4}\right)}{2}}.$$

7.14. $$\frac{dy}{dx}=-\frac{28x^3-2y^3+\dfrac{y}{x\ln 10}}{\dfrac{2}{\sqrt{1-y^2}}-6xy^2+\dfrac{\ln x}{\ln 10}}.$$

7.15. $$\frac{dy}{dx}=-\frac{5\arccos\left(\frac{y}{2}\right)-\dfrac{5\pi y\left(\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{6}\right)\right)^2+1\right)}{6}+3^x y\ln 3}{3^x-5\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{6}\right)-\dfrac{5x}{2\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}}+\dfrac{\pi\left(\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi y}{3}\right)\right)^2+1\right)}{3}}.$$

7.16. $$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{3e^{3x}}{e^{3x}-e^{5y}}-8x^3\left(\cos\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)\right)^2-\dfrac{2x\sqrt{y}}{3\left(x^2\sqrt{y}\right)^{\frac{5}{6}}}+\dfrac{\pi 6^y\cos\left(\dfrac{\pi x}{6}\right)}{6}+\pi x^4\cos\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)\sin\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)}{\dfrac{5e^{5y}}{e^{3x}-e^{5y}}+\dfrac{x^2}{6\sqrt{y}\left(x^2\sqrt{y}\right)^{\frac{5}{6}}}-6^y\sin\left(\dfrac{\pi x}{6}\right)\ln 6}.$$

7.17. $$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{6y^2\left(\arcsin\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)^2}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}}-\dfrac{\pi y\sin\left(\dfrac{\pi x}{6}\right)}{3}+\dfrac{10^x\sqrt{\ln 10}}{2\sqrt{\ln\left(y+10^x\right)}\cdot\left(y+10^x\right)}}{2\cos\left(\dfrac{\pi x}{6}\right)+8y\left(\arcsin\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)^3+\dfrac{1}{2\sqrt{\ln\left(y+10^x\right)}\cdot\sqrt{\ln 10}\cdot\left(y+10^x\right)}}.$$

7.18. $$\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{y}{3}+2e^y-\dfrac{10x^4}{y+1}+4^y+\dfrac{y^3}{x}}{\dfrac{x}{3}+\dfrac{2x^5}{(y+1)^2}+3y^2\ln x+2xe^y+4^y x\ln 4}.$$

7.19. $$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{5\sin\left(\dfrac{\pi y}{16}\right)}{7x^2}-\dfrac{\ln y}{\ln 2}+\dfrac{2y^6}{x\ln 2}}{\dfrac{5\pi\cos\left(\dfrac{\pi y}{16}\right)}{112x}+\dfrac{x}{y\ln 2}-\dfrac{12y^5\ln x}{\ln 2}}.$$

7.20. $$\frac{dy}{dx}=-\frac{4x^{y-1}y-3^x y\ln 3+\dfrac{21y^2(\arccos x)^2}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{y\ln 3}{\ln 10}}{\dfrac{\ln 3^x}{\ln 10}-3^x-14y(\arccos x)^3+4x^y\ln x}.$$

7.21. $$\frac{dy}{dx}=-\frac{x^{y^2-1}y^2+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{2}{3y}+2xy^{x^2}\ln y}{x^2y^{x^2-1}+\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{2x}{3y^2}+2x^{y^2}y\ln x}.$$

7.22. $$\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{2x^3}{\left(x^4+y^4\right)^{3/2}}+\dfrac{3x^2\ln\left(x^2+y^2\right)}{\ln 2}+\dfrac{2x\left(x^3+y^3\right)}{\ln 2\cdot\left(x^2+y^2\right)}}{\dfrac{2y^3}{\left(x^4+y^4\right)^{3/2}}+\dfrac{3y^2\ln\left(x^2+y^2\right)}{\ln 2}+\dfrac{2y\left(x^3+y^3\right)}{\ln 2\cdot\left(x^2+y^2\right)}}.$$

7.23. $$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{1}{y-x^2}+\dfrac{2x\left(x-y^2\right)}{\left(y-x^2\right)^2}-\dfrac{x^2 e^{\sqrt{y}}}{\left(x^3+y^3\right)^{3/2}}}{\dfrac{2y}{y-x^2}+\dfrac{x-y^2}{\left(y-x^2\right)^2}+\dfrac{y^2 e^{\sqrt{y}}}{\left(x^3+y^3\right)^{3/2}}+\dfrac{e^{\sqrt{y}}\left(x^3+y^3\right)^{1/3}}{2\sqrt{y}}}.$$

7.24. $$\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{x^2+y^2}{3x^{2/3}}+\dfrac{2x}{y^{1/3}}-\dfrac{2}{x}+2x^{4/3}}{2x^{1/3}y-\dfrac{x^2+y^2}{3y^{4/3}}+\dfrac{3}{y}+2y^{2/3}}.$$

7.25. $$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{\pi}{\cos\left(\dfrac{\pi y}{6}\right)}+\dfrac{3e^{3x-\frac{y}{2}}}{e^{3x-\frac{y}{2}}-2}-8x^3\cdot\sqrt{y}-\dfrac{5\cdot 3^y x^4}{3\left(3^y\cdot x^5\right)^{5/6}}}{\dfrac{e^{3x-\frac{y}{2}}}{2\left(e^{3x-\frac{y}{2}}-2\right)}+\dfrac{x^4}{\sqrt{y}}-\dfrac{\pi^2 x\sin\left(\dfrac{\pi y}{6}\right)}{6\left(\cos\left(\dfrac{\pi y}{6}\right)\right)^2}+\dfrac{3^y\cdot x^5\ln 3}{3\left(3^y x^5\right)^{5/6}}}.$$

Вправи 8

8.01. $z_0=7$; $z_1=6{,}8812$; $z_1^*=6{,}88$; $\delta\approx 1{,}7442\,\%$.
8.02. $z_0=11$; $z_1=11{,}0291$; $z_1^*=11{,}03$; $\delta\approx 0{,}272\,\%$.
8.03. $z_0=23$; $z_1=23{,}3915$; $z_1^*=23{,}39$; $\delta\approx 1{,}6674\,\%$.
8.04. $z_0=9$; $z_1=9{,}158$; $z_1^*=9{,}16$; $\delta\approx 1{,}7467\,\%$.
8.05. $z_0=15$; $z_1=15{,}2895$; $z_1^*=15{,}29$; $\delta\approx 1{,}8967\,\%$.
8.06. $z_0=16$; $z_1=16{,}1632$; $z_1^*=16{,}16$; $\delta\approx 0{,}9901\,\%$.
8.07. $z_0=26$; $z_1=25{,}0785$; $z_1^*=25{,}07$; $\delta\approx 3{,}7096\,\%$.
8.08. $z_0=27$; $z_1=27{,}22$; $z_1^*=27{,}22$; $\delta\approx 0{,}8082\,\%$.
8.09. $z_0=-6$; $z_1=-5{,}8708$; $z_1^*=-5{,}87$; $\delta\approx -2{,}2147\,\%$.
8.10. $z_0=-0{,}5$; $z_1=-0{,}5075$; $z_1^*=-0{,}5075$; $\delta\approx -1{,}4778\,\%$.
8.11. $z_0=4$; $z_1=4{,}3166$; $z_1^*=4{,}32$; $\delta\approx 7{,}4074\,\%$.
8.12. $z_0=0{,}5$; $z_1=0{,}4725$; $z_1^*=0{,}47$; $\delta\approx 6{,}383\,\%$.
8.13. $z_0=2$; $z_1=2{,}1166$; $z_1^*=2{,}12$; $\delta\approx 5{,}6604\,\%$.
8.14. $z_0=-3$; $z_1=-2{,}8609$; $z_1^*=-2{,}86$; $\delta\approx -4{,}8951\,\%$.
8.15. $z_0=12$; $z_1=11{,}799$; $z_1^*=11{,}79$; $\delta\approx 1{,}7812\,\%$.
8.16. $z_0=-11$; $z_1=-11{,}2818$; $z_1^*=-11{,}28$; $\delta\approx -2{,}4823\,\%$.
8.17. $z_0=23$; $z_1=23{,}0825$; $z_1^*=23{,}08$; $\delta\approx 0{,}3466\,\%$.
8.18. $z_0=3$; $z_1=2{,}9915$; $z_1^*=2{,}9911$; $\delta\approx 0{,}2972\,\%$.

8.19. $z_0 = 0,2;$ $z_1 = 0,0858;$ $z_1^* = 0,08;$ $\delta \approx 150\ \%$.
8.20. $z_0 = 18;$ $z_1 = 23,1708;$ $z_1^* = 20,49;$ $\delta \approx 12,1523\ \%$.
8.21. $z_0 = 10;$ $z_1 = 9,603;$ $z_1^* = 9,61;$ $\delta \approx 4,0583\ \%$.
8.22. $z_0 = -1;$ $z_1 = -1,2526;$ $z_1^* = -1,26;$ $\delta \approx -20,6349\ \%$.
8.23. $z_0 = 2;$ $z_1 = 1,1145;$ $z_1^* = 0,88;$ $\delta \approx 127,2727\ \%$.
8.24. $z_0 = 40;$ $z_1 = 38,7626;$ $z_1^* = 38,71;$ $\delta \approx 3,3325\ \%$.
8.25. $z_0 = 7;$ $z_1 = 6,9811;$ $z_1^* = 6,98;$ $\delta \approx 0,2865\ \%$.

Вправи 9

9.01. $x + y + 3z + 6 = 0;\ x + y + 11z - 66 = 0;$

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+2}{3};\ \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{11}.$$

9.02. $2x + 5y + 2z + 3 = 0;\ 2x - 5y + 2z - 37 = 0;$

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+3}{2};\ \frac{x+1}{2} = \frac{y+9}{-5} = \frac{z+3}{2}.$$

9.03. $3x + 8y + 12z - 107 = 0;\ 3x + 8y - 12z + 64 = 0;$

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-4}{8} = \frac{z-6}{12};\ \frac{x-1}{3} = \frac{y-4}{8} = \frac{z-8}{-12}.$$

9.04. $9x + 32y + 72z - 146 = 0;\ 9x + 32y - 72z + 862 = 0;$

$$\frac{x+6}{9} = \frac{y+5}{32} = \frac{z-5}{72};\ \frac{x+6}{9} = \frac{y+5}{32} = \frac{z-9}{-72}.$$

9.05. $125x - 225y - 117z + 870 = 0;\ 125x + 225y - 117z + 420 = 0;$

$$\frac{x+3}{125} = \frac{y+3}{-225} = \frac{z-10}{-117};\ \frac{x+3}{125} = \frac{y-5}{225} = \frac{z-10}{-117}.$$

9.06. $36x - 16y - 9z + 83 = 0;\ 36x - 16y + 9z - 43 = 0;$

$$\frac{x+2}{36} = \frac{y+1}{-16} = \frac{z-3}{-9};\ \frac{x+2}{36} = \frac{y+1}{-16} = \frac{z-11}{9}.$$

9.07. $6x - y + 3z + 69 = 0;\ 6x - y - 3z + 51 = 0;$

$$\frac{x-3}{6} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+28}{3};\ \frac{x-3}{6} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-22}{-3}.$$

9.08. $x - 24y + 2z - 20 = 0;\ x - 24y - 2z = 0;$

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-24} = \frac{z-\frac{19}{2}}{2};\ \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-24} = \frac{z-\frac{1}{2}}{-2}.$$

9.09. $16x + 2y - 32z - 5 = 0;\ \dfrac{x-1}{8} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z-\frac{17}{32}}{-16};$

9.10. $25x - 36y + 500z - 57 = 0;$

$$\frac{x-1}{25} = \frac{y-5}{-36} = \frac{z - \frac{53}{125}}{500}.$$

9.11. $32x - 16y - z - 24 = 0;$ $\frac{x-1}{32} = \frac{y+1}{-16} = \frac{z-24}{-1}.$

9.12. $13x - 2y - z - 13 = 0;$ $\frac{x-2}{13} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-7}{-1}.$

9.13. $3x + 8y - z - 12 = 0;$ $\frac{x}{3} = \frac{y-4}{8} = \frac{z-20}{-1}.$

9.14. $26x - 24y + z + 49 = 0;$ $\frac{x+1}{26} = \frac{y-2}{-24} = \frac{z-25}{1}.$

9.15. $27x + 28y - z - 151 = 0;$ $\frac{x-6}{27} = \frac{y-5}{28} = \frac{z-151}{-1}.$

9.16. $x - 4y - z - 4 = 0;$ $\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-3}{-1}.$

9.17. $3y - 5z + 16 = 0;$ $\frac{x}{0} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-5}{-5}.$

9.18. $4y + 3z - 25 = 0;$ $\frac{x}{0} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-3}{3}.$

9.19. $104x + 75y - z - 408 = 0;$ $\frac{x-3}{104} = \frac{y-4}{75} = \frac{z-204}{-1}..$

9.20. $10x + 8y - z - 13 = 0;$ $\frac{x-1}{10} = \frac{y-2}{8} = \frac{z-13}{-1}.$

9.21. $6x + 2y - 3z - 21 = 0;$ $\frac{x-4}{6} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-3}{-3}.$

9.22. $10x + 12y - z - 11 = 0;$ $\frac{x-1}{10} = \frac{y-1}{12} = \frac{z-15}{-1}.$

9.23. $9x + 10y - z - 13 = 0;$ $\frac{x-2}{9} = \frac{y-1}{12} = \frac{z-15}{-1}.$

9.24. $12x - 12y + z - 5 = 0;$ $\frac{x-2}{12} = \frac{y-2}{-12} = \frac{z-5}{1}.$

9.25. $4y + z + 4 = 0;$ $\frac{x-1}{0} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-4}{1}.$

Вправи 10

10.01. $\max f(x) = 0{,}497;$ $\min f(x) = -0{,}497.$

10.02. $\max f(x) = 5{,}975;$ $\min f(x) = -1.$

10.03. $\max f(x) = 2{,}5981;$ $\min f(x) = 0.$

10.04. $\max f(x) = 4$; $\min f(x) = -64$.
10.05. $\max f(x) = 2{,}9534$; $\min f(x) = 0{,}0768$.
10.06. $\max f(x) = 36$; $\min f(x) = -36$.
10.07. $\max f(x) = 16$; $\min f(x) = -5{,}3333$.
10.08. $\max f(x) = 0{,}25$; $\min f(x) = -128$.
10.09. $\max f(x) = 13$; $\min f(x) = -1$.
10.10. $\max f(x) = -1$; $\min f(x) = -19$.
10.11. $\max f(x) = 1{,}414$; $\min f(x) = -1{,}414$.
10.12. $\max f(x) = 75$; $\min f(x) = -125$.
10.13. $\max f(x) = 5$; $\min f(x) = -13$.
10.14. $\max f(x) = 4{,}4944$; $\min f(x) = -4{,}4944$.
10.15. $\max f(x) = 60$; $\min f(x) = -18$.
10.16. $\max f(x) = 108$; $\min f(x) = -1728$.
10.17. $\max f(x) = 4$; $\min f(x) = -1$.
10.18. $\max f(x) = 0$; $\min f(x) = -9$.
10.19. $\max f(x) = 7$; $\min f(x) = -18$.
10.20. $\max f(x) = 10$; $\min f(x) = 1$.
10.21. $\max f(x) = 5{,}975$; $\min f(x) = -1$.
10.22. $\max f(x) = 10$; $\min f(x) = -1{,}6667$.
10.23. $\max f(x) = 7$; $\min f(x) = 1{,}5$.
10.24. $\max f(x) = 49$; $\min f(x) = 0$.
10.25. $\max f(x) = 7{,}9401$; $\min f(x) = -2$.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Задача 1. Задано функцію $z=\sqrt{1-\lg\left(x^2+y^2\right)}$. Знайти площу фігури, яка є областю визначення цієї функції.

Задача 2. Задано функції $z=3x+4y$ та $z=4x-3y$. Знайти площу фігури, обмеженої лініями рівня першої функції, якщо c набуває значень 12 та 24, та лініями рівня другої функції, якщо c набуває значень -18 та 16.

Задача 3. Задано функцію $u=x^2+y^2+z^2-2x-6y+8z$. Знайти точку M_0, яка є центром поверхонь рівня цієї функції.

Задача 4. Знайти границю функції

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin^2\dfrac{x^2+y^2}{2}}{(xy)^2\left(x^2+y^2\right)},$$

якщо вона існує.

Задача 5. Побудувати лінії, на яких розривною є функція

$$z=\frac{\cos x+\sin 2y+4}{x^4-y^2}.$$

Задача 6. Знайти значення частинних похідних першого порядку функції

$$z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\frac{\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}-1}{2\left(\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+1\right)}-\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)$$

у точці $M_0(1,1)$.

Задача 7. Задано функцію $u=\ln\left(x+y^2+z^3+1\right)^2$. Знайти величину

$$A=\frac{\partial u(1,1,1)}{\partial x}+\frac{\partial u(1,1,1)}{\partial y}+\frac{\partial u(1,1,1)}{\partial z}.$$

Задача 8. Знайти значення частинних похідних другого порядку функції

$$z=\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

у точці $M_0\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$.

Задача 9. Задано функцію $z=x^2\ln y$, де $x=\dfrac{t_2}{t_1}$, $y=t_1^2+t_2^2$. Знайти значення частинних похідних $\dfrac{\partial z(t_1,t_2)}{\partial t_1}$ та $\dfrac{\partial z(t_1,t_2)}{\partial t_2}$, якщо $t_1=1,\ t_2=0$.

Задача 10. Задано функцію $z = x^3 e^{\frac{x}{y}}$, де $x = \ln t$, $y = \sqrt{t}$. Знайти значення повної похідної $\frac{dz}{dt}$, якщо $t = 1$.

Задача 11. Задано функцію $z = \frac{x^2 + \sqrt{y}}{x\,y}$, де $y = x^4$. Знайти значення повної похідної $\frac{dz}{dx}$, якщо $x = 2$.

Задача 12. Задано функцію $z = e^y \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos x$. Знайти диференціал третього порядку $\partial^3 z$.

Задача 13. Задано функцію $y = f(x)$ у неявній формі

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x + y\right) - e^{\ln y}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{3}\right)\cos\frac{2x}{3} + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2x}{3}\right)\cos x\right) = 0.$$

Знайти значення похідної $\frac{\partial y}{\partial x}$, якщо $x = \frac{\pi}{2}$, $y = \frac{\pi}{4}$.

Задача 14. Задано функцію $z = f(x, y)$ у неявній формі

$$\ln\left(\sin^2 z^3 + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + z^3\right)\right) - 10^{\lg(xyz)} + e^z = 0.$$

Знайти значення частинних похідних $\frac{\partial z(x, y)}{\partial x}$ та $\frac{\partial z(x, y)}{\partial y}$, якщо $x = 1$, $y = 3$, $z = 2$.

Задача 15. Задано функцію $9\left(x^4 + y^4\right) - x^3 y^3 = 6561$. Скласти рівняння дотичної та нормалі до графіка функції у точці $M_0(3, 6)$.

Задача 16. Задано рівняння поверхні

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - x - y - z + 4 = 0.$$

Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні у точці $M_0(2, 3, 6)$.

Задача 17. Задано рівняння поверхні $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 5$. Довести, що будь-яка дотична площина до цієї поверхні на осях координат відтинає такі відрізки a, b, c, що $a + b + c = 25$.

Задача 18. Задано функцію $z = \frac{2x^2 + y^2}{e^{x^2 + y^2}}$. Знайти величину A, яка дорівнює сумі екстремальних значень функції.

Задача 19. Задано функцію

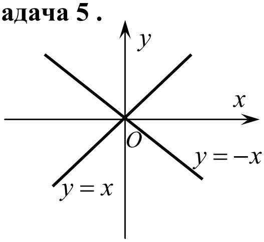
$$z = 2\sin\frac{x}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) + \sin\frac{y}{5}\cos\frac{4y}{5} + \sin\frac{4y}{5}\cos\frac{y}{5} + \sin(x + y).$$

Область D визначено нерівностями $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$; $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$. Знайти найменше та найбільше значення функції в області D.

Задача 20. Знайти мінімальне значення функції $u = 5x^2 + 7y^2 + 9z^2$, якщо змінні x, y, z задовольняють умову $x + y + z = 1$.

ВІДПОВІДІ ДО ЗАДАЧ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Задача 1. $S=\pi R^2=10\pi$. **Задача 2.** $S=16.32$ (од. кв.). **Задача 3.** $M_0(1;\,3;\,-4)$. **Задача 4.** Не існує. **Задача 5 .**



Задача 6. $\dfrac{\partial z(1,1)}{\partial x}=-\dfrac{(\pi^2+16)^2+8\pi^3}{2(\pi^2+16)(\pi+4)^2}$; $\dfrac{\partial z(1,1)}{\partial y}=-\dfrac{(\pi^2+16)^2+8\pi^3}{2(\pi^2+16)(\pi+4)^2}$.

Задача 7. 3. **Задача 8.** $\dfrac{\partial^2 z\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}{\partial x^2}=2$; $\dfrac{\partial^2 z\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}{\partial x\partial y}=0$; $\dfrac{\partial^2 z\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}{\partial y^2}=-2$.

Задача 9. $\dfrac{\partial z(1,0)}{\partial t_1}=0$; $\dfrac{\partial z(1,0)}{\partial t_2}=0$. **Задача 10.** $\dfrac{\partial z(0,1)}{\partial t}=0$. **Задача 11.** $\dfrac{\partial z(2)}{\partial x}=-\dfrac{3}{8}$.

Задача 12. $d^3z=\mathrm{e}^y\left(-\cos x\,dx^3-3\sin x\,dx^2dy+3\cos x\,dx\,dy^2+\sin x\,dy^3\right)$.

Задача 13. $\dfrac{\partial y\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)}{\partial x}=\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}$. **Задача 14.** $\dfrac{\partial z(1,3,2)}{\partial x}=2$; $\dfrac{\partial z(1,3,2)}{\partial y}=\dfrac{2}{3}$.

Задача 15. $x-y+3=0$; $x+y-9=0$. **Задача 16.** $5x+4y+z-28=0$; $\dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z-6}{1}$. **Задача 18.** $A=\dfrac{2}{\mathrm{e}}$. **Задача 19.** $\min\limits_D f(z)=f(0,0)=0$; $\max\limits_D f(z)=f\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. **Задача 20.** $z_{\min}=\dfrac{315}{143}$.

ДОДАТКИ

Д о д а т о к А

МЕТОДИ ЗНАХОДЖЕННЯ ГРАНИЦЬ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

Таблиця А.1

№	Тип невизначеності	Особливості умови	Методи розкриття невизначеності
1	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_0+a_1n+a_2n^2+\ldots+a_kn^k}{b_0+b_1n+b_2n^2+\ldots+b_rn^r}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$	$a_0+a_1n+a_2n^2+\ldots+a_kn^k$, $b_0+b_1n+b_2n^2+\ldots+b_rn^r$ – многочлени степеня k та r відповідно	Чисельник і знаменник водночас поділити на n^m, $m=\max\{k, r\}$; виконати спрощення.
2	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n}\right)=[\infty-\infty]$	$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ – послідовності	Заданий вираз водночас помножити та поділити на вираз $\left(\sqrt{a_n}+\sqrt{b_n}\right)$, спряжений до заданого, та спростити, користуючись формулою різниці квадратів $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.
3	$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{b_n}=\left[1^\infty\right]$	$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ – послідовності	Слід спробувати виконати такі тотожні перетворення, які дозволяють застосувати другу чудову границю.

Д о д а т о к Б

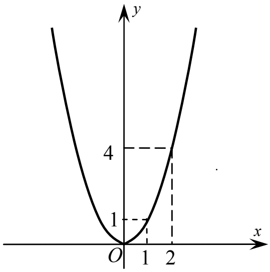
ОСНОВНІ ЕЛЕМЕНТАРНІ ФУНКЦІЇ

1. Степенева функція $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in R$

Таблиця Б.1

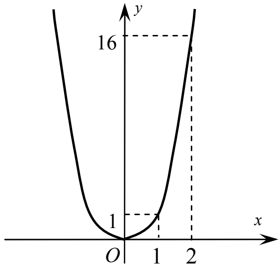
Значення α	**Область визначення функції**	**Область значень функції**
Натуральне парне число	$(-\infty, +\infty)$	$[0, +\infty)$
Натуральне непарне число	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
Ціле від'ємне парне число	$(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$
Ціле від'ємне непарне число	$(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$
$\alpha = \frac{1}{n}$, де n – натуральне парне число; $n > 1$	$[0, +\infty)$	$[0, +\infty)$
$\alpha = \frac{1}{n}$, де n – натуральне непарне число; $n > 1$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
$\alpha = \frac{m}{n}$, де m та n – взаємно прості натуральні числа; m – число парне, n – число непарне	$(-\infty, +\infty)$	$[0, +\infty)$
$\alpha = \frac{m}{n}$, де m та n – взаємно прості натуральні числа; m – число непарне, n – число непарне	$[0, +\infty)$	$[0, +\infty)$
$\alpha = \frac{m}{n}$, де m та n – взаємно прості натуральні числа; n – число непарне, m – число парне	$(-\infty, +\infty)$	$[0, +\infty)$
$\alpha = -\frac{m}{n}$, де m та n – взаємно прості натуральні числа; n – число парне	$(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$
$\alpha = -\frac{m}{n}$, де m та n – взаємно прості натуральні числа; n – число непарне, m – число парне	$(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$
$\alpha = -\frac{m}{n}$, де m та n – взаємно прості натуральні числа; n – число непарне, m – число непарне	$(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$

Графіки деяких степеневих функцій



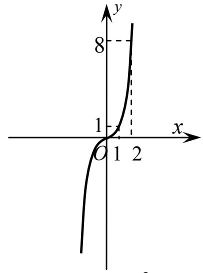
$\boldsymbol{y = x^2}$

Рисунок Б.1



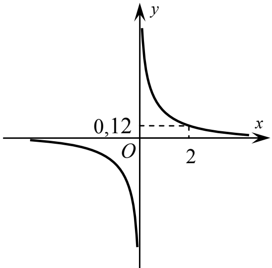
$\boldsymbol{y = x^4}$

Рисунок Б.2



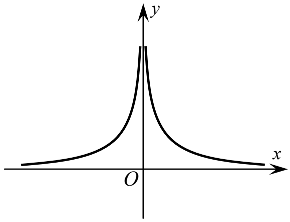
$\boldsymbol{y = x^3}$

Рисунок Б.3



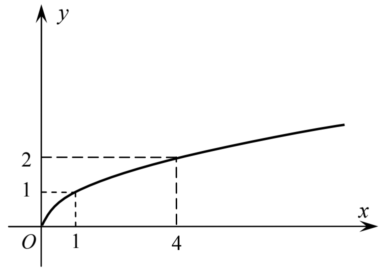
$\boldsymbol{y = \frac{1}{x^3}}$

Рисунок Б.4



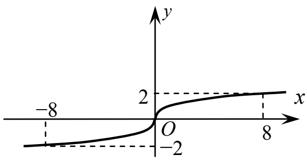
$\boldsymbol{y = \frac{1}{x^2}}$

Рисунок Б.5



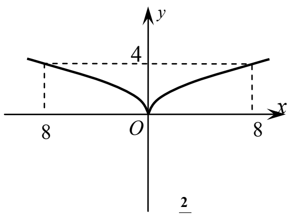
$\boldsymbol{y = \sqrt{x}}$

Рисунок Б.6



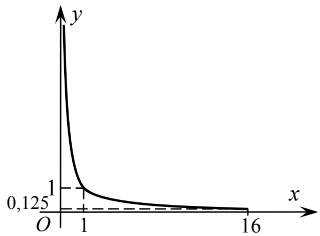
$\boldsymbol{y = \sqrt[3]{x}}$

Рисунок Б.7



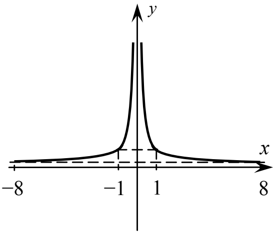
$\boldsymbol{y = x^{\frac{2}{3}}}$

Рисунок Б.8



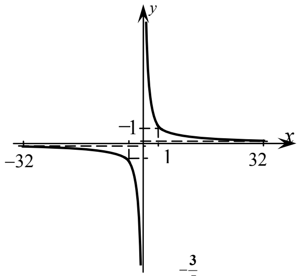
$\boldsymbol{y = x^{-\frac{3}{4}}}$

Рисунок Б.9



$y = x^{-\frac{2}{3}}$

Рисунок Б.10



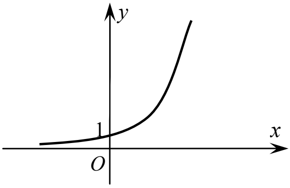
$y = x^{-\frac{3}{5}}$

Рисунок Б.11

2. Показникова функція $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$

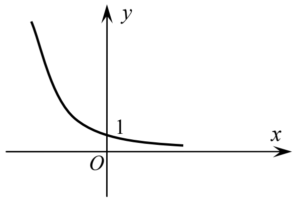
Область визначення функції: $x \in (-\infty, +\infty)$

Область значень функції: $y \in (0, +\infty)$ (рис. Б.12 та Б.13).



$y = a^x$, $a > 1$

Рисунок Б.12



$y = a^x$, $0 < a < 1$

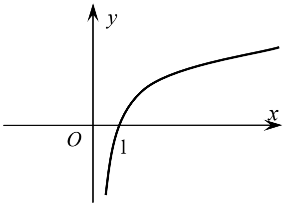
Рисунок Б.13

Частинним випадком показникової функції є експоненціальна функція $y = \mathrm{e}^x$.

3. Логарифмічна функція $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$

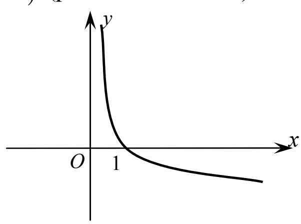
Область визначення функції: $x \in (0, +\infty)$.

Область значень функції: $y \in (-\infty, +\infty)$ (рис. Б.14 та Б.15).



$y = \log_a x$, $a > 1$

Рисунок Б.14



$y = \log_a x$, $0 < a < 1$

Рисунок Б.15

Частинним випадком логарифмічної функції є функція $y = \ln x$, де $\ln x = \log_e x$.

4. Тригонометричні функції

1. Функція $y = \sin x$

Область визначення функції:

$$x \in (-\infty, +\infty).$$

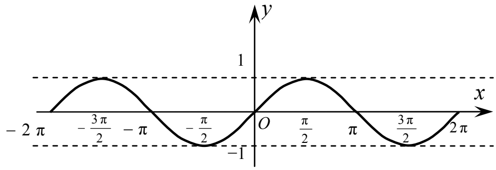
Область значень функції:

$$y \in [-1, 1].$$

Найменший додатний період функції:

$$T = 2\pi$$

(рис. Б.16).



$y = \sin x$

Рисунок Б.16

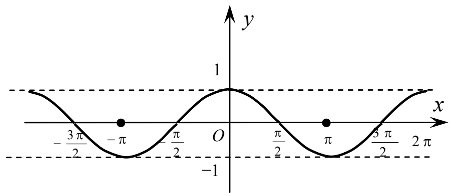
2. Функція $y = \cos x$

Область визначення функції:

$$x \in (-\infty, +\infty).$$

Область значень функції: $y \in [-1, 1]$.

Найменший додатний період функції: $T = 2\pi$ (рис. Б.17).



$\boldsymbol{y = \cos x}$

Рисунок Б.17

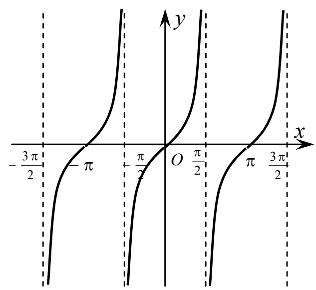
3. Функція $y = \operatorname{tg} x$

Область визначення функції:

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right), \text{ де } k \in Z.$$

Область значень функції: $y \in (-\infty, +\infty)$.

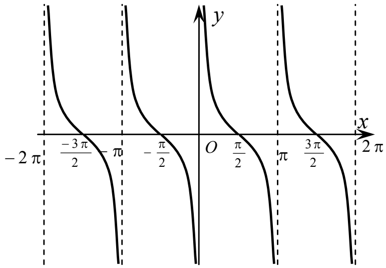
Найменший додатний період функції: $T = \pi$ (рис. Б.18).



$\boldsymbol{y = \operatorname{tg} x}$

Рисунок Б.18

4. Функція $\boldsymbol{y = \mathbf{ctg}\, x}$



Область визначення функції:

$$x \in (\pi k, \pi + \pi k), \text{ де } k \in Z.$$

Область значень функції: $y \in (-\infty, +\infty)$.

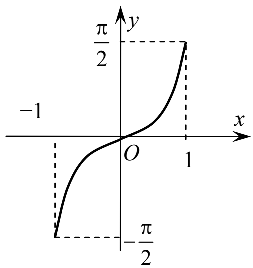
Найменший додатній період функції: $T = \pi$ (рис. Б.19).

$\boldsymbol{y = \mathbf{ctg}\, x}$

Рисунок Б.19

5. Обернені тригонометричні функції

1. Функція $\boldsymbol{y = \mathbf{arcsin}\, x}$



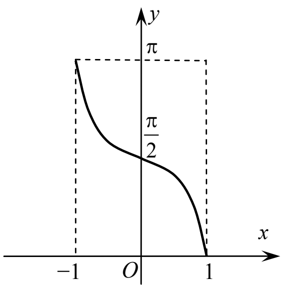
Область визначення функції: $x \in [-1, 1]$.

Область значень функції: $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (рис. Б.20).

$\boldsymbol{y = \mathbf{arcsin}\, x}$

Рисунок Б.20

2. Функція $\boldsymbol{y = \mathbf{arccos}\, x}$



Область визначення функції: $x \in [-1, 1]$.

Область значень функції: $y \in [0, \pi]$ (рис. Б.21).

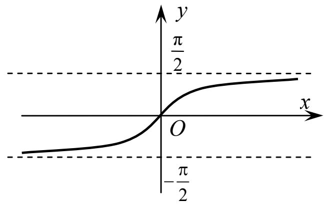
$\boldsymbol{y = \mathbf{arccos}\, x}$

Рисунок Б.21

3. Функція $\boldsymbol{y = \mathbf{arctg}\, x}$

Область визначення функції: $x \in (-\infty, +\infty)$.

Область значень функції: $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. Б.22).



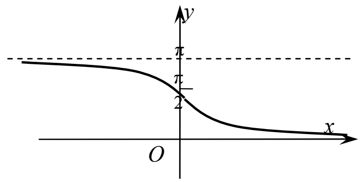
$\boldsymbol{y = \mathbf{arctg}\, x}$

Рисунок Б.22

4. Функція $\boldsymbol{y = \mathbf{arcctg}\, x}$

Область визначення функції: $x \in (-\infty, +\infty)$.

Область значень функції: $y \in (0, \pi)$ (рис. Б.23).



$\boldsymbol{y = \mathbf{arcctg}\, x}$

Рисунок Б.23

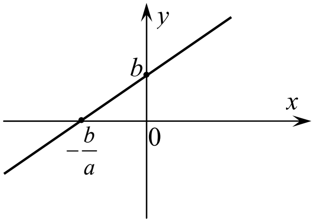
Д о д а т о к В

ДЕЯКІ ЕЛЕМЕНТАРНІ ФУНКЦІЇ

1. Лінійна функція $y = ax + b,\ a, b \in R$

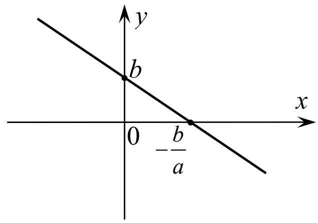
Область визначення функції: $x \in (-\infty, +\infty)$.

Область значень функції: $y \in (-\infty, +\infty)$, якщо $a \neq 0$. (рис. В.1 та В.2).



$y = ax + b, a > 0$

Рисунок В.1



$y = ax + b, a < 0$

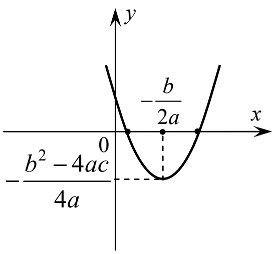
Рисунок В.2

2. Квадратична функція $y = ax^2 + bx + c,\quad a, b, c \in R,\ a \neq 0$

Область визначення функції: $x \in (-\infty, +\infty)$.

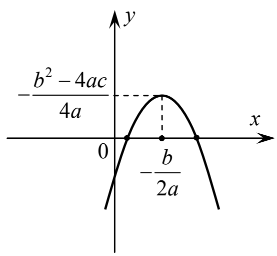
Область значень функції: $y \in \left[-\frac{b^2 - 4ac}{4a}, +\infty \right)$, якщо $a > 0$; $y \in \left(-\infty, -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right]$,

якщо $a < 0$ (рис. В.3 та В.4).



$y = ax^2 + bx + c, a > 0$

Рисунок В.3



$y = ax^2 + bx + c, a < 0$

Рисунок В.4

3. Ціла раціональна функція
$y = a_0 + a_1 x + a_2 x + ... + a_n x^n$, де n − натуральне число

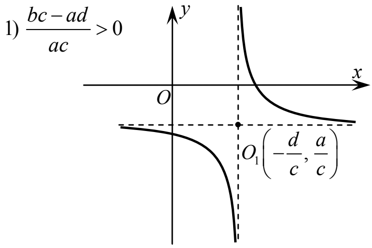
Область визначення функції: $x \in (-\infty, +\infty)$.

Область значень функції: $y \in (-\infty, +\infty)$, якщо n − число непарне.

4. Дробно-лінійна функція $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

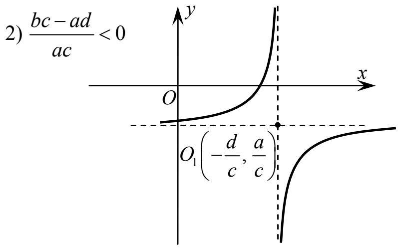
Область визначення функції: $x \in \left(-\infty, \dfrac{d}{c}\right) \cup \left(-\dfrac{d}{c}, +\infty\right)$.

Область значень функції: $y \in \left(-\infty, \dfrac{a}{c}\right) \cup \left(\dfrac{a}{c}, +\infty\right)$ (рис. В.5 та В.6).



$y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

Рисунок В.5



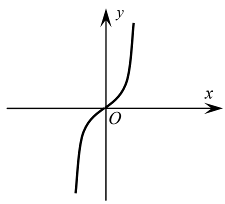
$y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

Рисунок В.6

5. Гіперболічні функції

1. Гіперболічний синус $y = \mathrm{sh}\, x = \dfrac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)$

Область визначення функції: $x \in (-\infty, +\infty)$.
Область значень функції: $y \in (-\infty, +\infty)$ (рис. В.7).

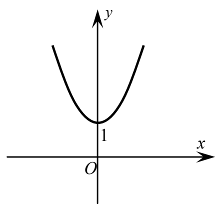


$y = \mathrm{sh}\, x$

Рисунок В.7

2. Гіперболічний косинус $y = \mathrm{ch}\, x = \dfrac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$

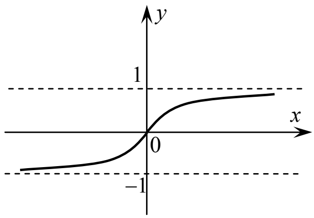
Область визначення функції: $x \in (-\infty, +\infty)$.
Область значень функції: $y \in [1, +\infty)$ (рис В.8).



$y = \mathrm{ch}\, x$

Рисунок В.8

3. Гіперболічний тангенс $y = \mathbf{th}\, x = \dfrac{\mathbf{e}^x - \mathbf{e}^{-x}}{\mathbf{e}^x + \mathbf{e}^{-x}}$

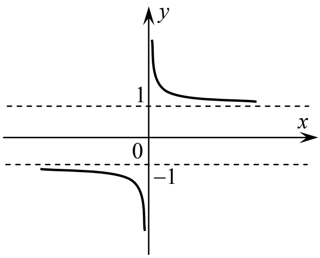


$y = \mathbf{th}\, x$

Рисунок В.9

Область визначення функції: $x \in (-\infty, +\infty)$.
Область значень функції: $y \in (-1, 1)$
(рис. В.9).

4. Гіперболічний котангенс $y = \mathbf{cth}\, x = \dfrac{\mathbf{e}^x + \mathbf{e}^{-x}}{\mathbf{e}^x - \mathbf{e}^{-x}}$



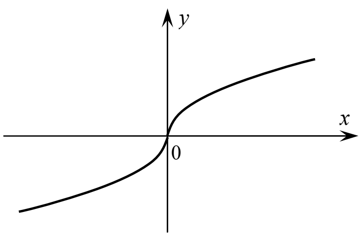
$y = \mathbf{cth}\, x$

Рисунок В.10

Область визначення функції:
$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
Область значень функції:
$y \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
(рис. В.10).

6. Обернені гіперболічні функції

1. Ареасинус $y = \mathbf{Arsh}\, x$



$y = \mathbf{Arsh}\, x$

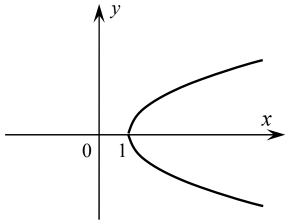
Рисунок В.11

Область визначення функції: $x \in (-\infty, +\infty)$.
Область значень функції: $y \in (-\infty, +\infty)$
(рис. В.11).

2. Ареакосинус $y = \mathrm{Arch}\, x$

Область визначення функції: $x \in [1, +\infty)$.

Область значень функції: $y \in [0, +\infty)$ або $y \in (-\infty, 0]$ (обирається лише одна вітка графіка) (рис. В.12).



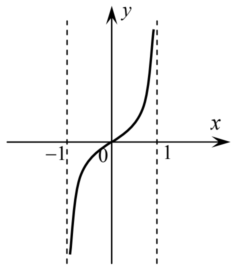
$y = \mathrm{Arch}\, x$

Рисунок В.12

3. Ареатангенс $y = \mathrm{Arth}\, x$

Область визначення функції: $x \in (-1, 1)$.

Область значень функції: $y \in (-\infty, +\infty)$ (рис. В.13).



$y = \mathrm{Arth}\, x$

Рисунок В.13

4. Ареакотангенс $y = \mathrm{Arcth}\, x$

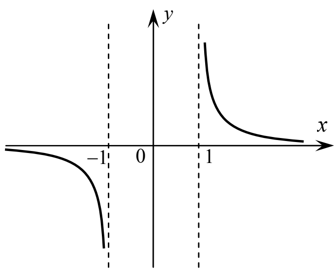
Область визначення функції:

$$y \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).$$

Область значень функції:

$y \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

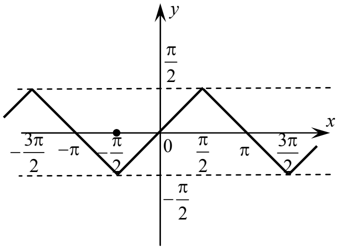
(рис. В.14).



$y = \mathrm{Arcth}\, x$

Рисунок В.14

5. Функція $y = \arcsin(\sin x)$



$y = \arcsin(\sin x)$

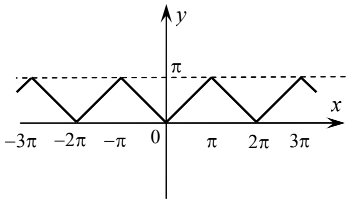
Рисунок В.15

Область визначення функції:
$x \in (-\infty, +\infty)$.

Область значень функції: $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

(рис. В.15).

6. Функція $y = \arccos(\cos x)$



$y = \arccos(\cos x)$

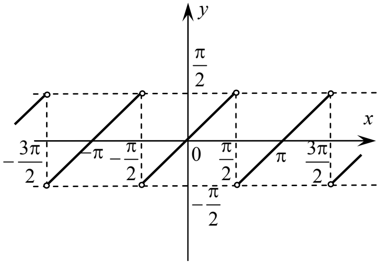
Рисунок В.16

Область визначення функції:
$x \in [-\infty, +\infty]$.

Область значень функції: $y \in [0, \pi]$

(рис. В.16).

7. Функція $y = \mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\, x)$



$y = \mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\, x)$

Рисунок В.17

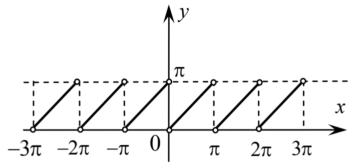
Область визначення функції:
$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, де $k \in Z$.

Область значень функції: $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

(рис. В.17).

8. Функція $y = \mathbf{arcctg}\ (\mathbf{ctg}\, x)$

Область визначення функції:
$x \in (\pi k,\ \pi + \pi k)$, де $k \in Z$.
Область значень функції: $y \in (0,\ \pi)$
(рис. В.18).

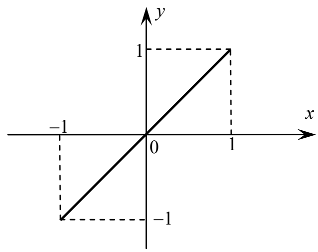


$y = \mathbf{arcctg}(\mathbf{ctg}\, x)$

Рисунок В.18

9. Функція $y = \sin\ (\arcsin x)$

Область визначення функції: $x \in [-1,\ 1]$
Область значень функції: $y \in [-1,\ 1]$
(рис. В.19).

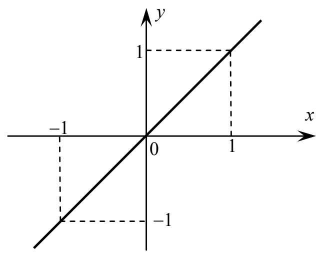


$y = \sin(\arcsin x)$

Рисунок В.19

10. Функція $y = \mathrm{tg}\ (\mathrm{arctg}\, x)$

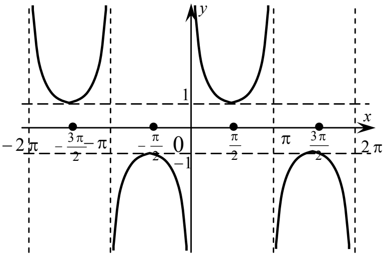
Область визначення функції: $x \in (-\infty,\ +\infty)$.
Область значень функції: $y \in (-\infty,\ +\infty)$
(рис. В.20).



$y = \mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\, x)$

Рисунок В.20

11. Функція $y = \mathbf{cosec}\, x = \dfrac{1}{\sin x}$

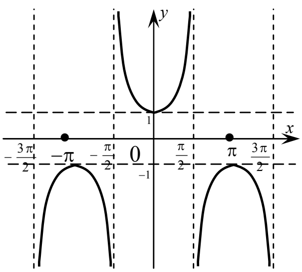


$y = \dfrac{1}{\sin x}$

Рисунок В.21

Область визначення функції:
$x \in (\pi k,\ \pi + \pi k)$, де $k \in Z$.
Область значень функції:
$y \in (-\infty,\ -1] \cup [1,\ +\infty)$
(рис. В.21).

12. Функція $y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

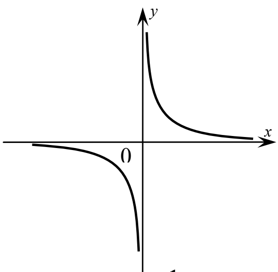


$y = \dfrac{1}{\cos x}$

Рисунок В.22

Область визначення функції:
$x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ \dfrac{\pi}{2} + \pi k\right)$, де $k \in Z$.
Область значень функції:
$y \in (-\infty,\ -1] \cup [1,\ +\infty)$
(рис. В.22).

13. Функція гіперболічний косеканс $y = \mathbf{csch}\, x = \dfrac{1}{\mathbf{sh}\, x}$



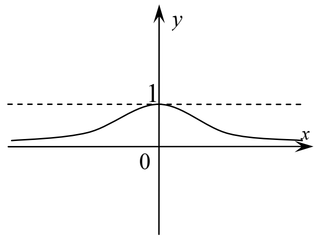
$y = \dfrac{1}{\mathbf{sh} x}$

Рисунок В.23

Область визначення функції:
$x \in (-\infty,\ 0) \cup (0,\ +\infty)$.
Область значень функції:
$y \in (-\infty,\ 0) \cup (0,\ +\infty)$
(рис. В.23).

14. Функція гіперболічний секанс $y = \operatorname{sch} x = \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$

Область визначення функції: $x \in \left(-\infty, +\infty\right)$.
Область значень функції: $y \in \left(0, 1\right]$
(рис. В.24).



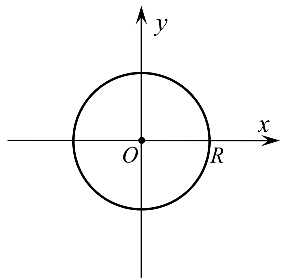
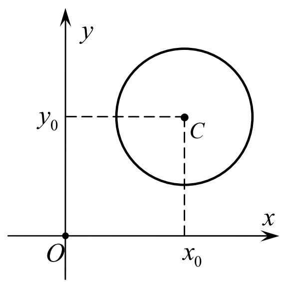
$$y = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$$

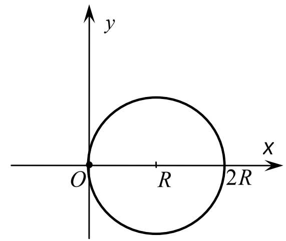
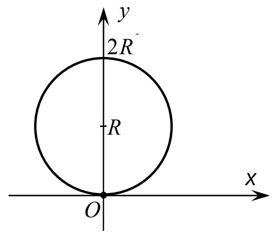
Рисунок В.24

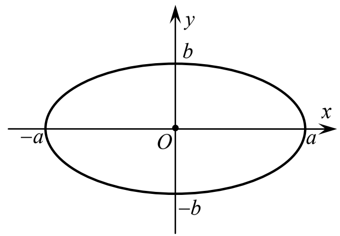
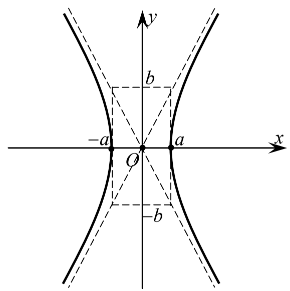
Д о д а т о к Г

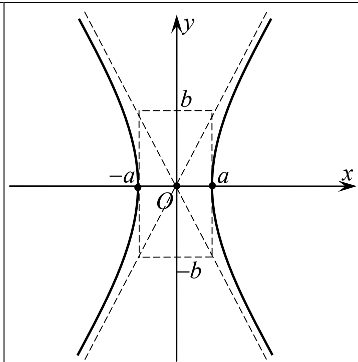
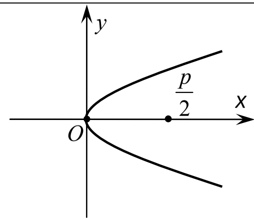
ОКРЕМІ ВАЖЛИВІ КРИВІ, ЗАДАНІ У ПАРАМЕТРИЧНІЙ ФОРМІ

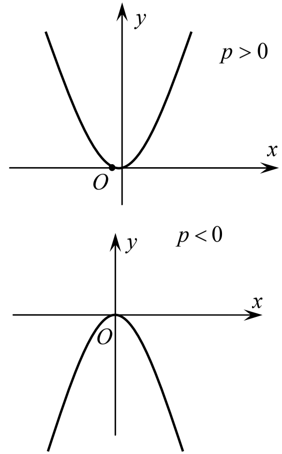
Таблиця Г.1 **Криві другого порядку**

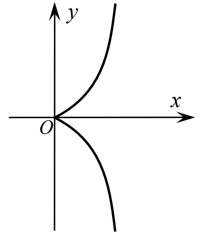
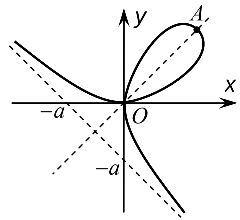
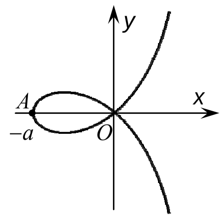
№	Назва кривої	Параметричне задання кривої	Зображення кривої	Примітка
1	Коло: $x^2 + y^2 = R^2$	$\begin{cases} x = R\cos t; \\ y = R\sin t, \end{cases}$ де $t \in [0,\ 2\pi)$		$O(0,\ 0)$ – центр кола; R – радіус кола.
2	Коло: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$	$\begin{cases} x = x_0 + R\cos t; \\ y = y_0 + R\sin t, \end{cases}$ де $t \in [0, 2\pi)$		$C(x_0,\ y_0)$ – центр кола; R – радіус кола.

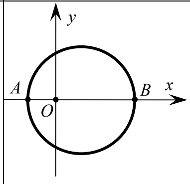
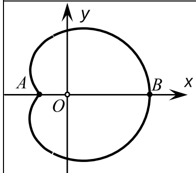
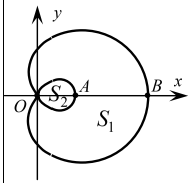
№	Назва кривої	Параметричне завдання кривої	Зображення кривої	Примітки
3	Коло: $(x-R)^2+y^2=R^2$	$\begin{cases} x=R+R\cos t; \\ y=R\sin t, \end{cases}$ де $t\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$		$(R, 0)$ – центр кола; R – радіус кола.
4	Коло: $x^2+(y-R)^2=R^2$	$\begin{cases} x=R\cos t; \\ y=R+R\sin t, \end{cases}$ де $t\in[0, \pi)$		$(0, R)$ – центр кола; R – радіус кола.

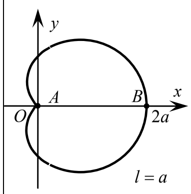
№	Назва кривої	Параметричне завдання кривої	Зображення кривої	Примітки
5	Еліпс: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\begin{cases} x = a\cos t; \\ y = b\sin t, \end{cases}$ де $t \in [0, 2\pi)$ або $x = \frac{ab\cos t}{\sqrt{b^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t}};$ $y = \frac{ab\sin t}{\sqrt{b^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t}}$ де $t \in [0, 2\pi)$		$O(0, 0)$ – центр еліпса; a – велика піввісь еліпса; b – мала піввісь еліпса.
6	Гіпербола: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\begin{cases} x = a\cdot\operatorname{ch} t; \\ y = b\cdot\operatorname{sh} t, \end{cases}$ де $t \in (-\infty;\infty)$ або $\begin{cases} x = a\frac{1}{\cos t}; \\ y = b\operatorname{tg}(t), \end{cases}$ де $t \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ для лівої вітки гіперболи; $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ для правої вітки гіперболи.		$O(0, 0)$ – центр гіперболи; a – дійсна піввісь гіперболи; b – уявна піввісь гіперболи.

7	Гіпербола: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$\begin{cases} \dfrac{ab\cos t}{\sqrt{b^2\cos^2 t-a^2\sin^2 t}}; \\ \dfrac{ab\sin t}{\sqrt{b^2\cos^2 t-a^2\sin^2 t}}, \end{cases}$ де $t\in\left(-\mathrm{arctg}\dfrac{b}{a};\ \mathrm{arctg}\dfrac{b}{a}\right)$ для правої вітки гіперболи; $t\in\left(\pi-\mathrm{arctg}\dfrac{b}{a};\ \pi+\mathrm{arctg}\dfrac{b}{a}\right)$ для лівої вітки гіперболи.		$O(0,0)$ – центр гіперболи; a – дійсна піввісь гіперболи; b – уявна піввісь гіперболи.
8	Парабола: $y^2=2px$	$\begin{cases} x=\dfrac{t^2}{2p}; \\ y=t, \end{cases}$ де $t\in(-\infty,\infty)$ або $\begin{cases} x=2p\cdot\mathrm{ctg}^2 t; \\ y=2p\cdot\mathrm{ctg}\ t, \end{cases}$ де $t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ для верхньої вітки; $t\in\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$ для нижньої вітки.		p – параметр параболи; $O(0,0)$ – вершина параболи.

№ п/п	Назва кривої	Параметричне завдання кривої	Зображення кривої	Примітки
9	Парабола: $x^2 = 2py$	$\begin{cases} x = 2p \cdot \mathrm{ctg}\,t; \\ y = 2p \cdot \mathrm{ctg}^2 t, \end{cases}$ де $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ для лівої вітки, $t \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ для правої вітки.		p – параметр параболи; $O(0, 0)$ – вершина параболи.

№	Назва кривої	Параметричне завдання кривої	Зображення кривої	Примітки
1	Циссоїда Діокла: $y^2 = \dfrac{x^3}{a-x}$, де $a>0$.	$\begin{cases} x = \dfrac{at^2}{1+t^2}; \\ y = \dfrac{at^3}{1+t^2}, \end{cases}$ де $t \in (-\infty, +\infty)$		
2	Декартів лист: $x^3+y^3-3axy=0$, де $a>0$.	$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3}; \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}, \end{cases}$ де $t \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$		$A\left(\dfrac{3a}{2}, \dfrac{3a}{2}\right)$ – вершина.
3.	Строфоїда: $y^2 = x^2\left(\dfrac{a+x}{a-x}\right)$, де $a>0$.	$\begin{cases} x = \dfrac{a(t^2-1)}{t^2+1}; \\ y = \dfrac{at(t^2-1)}{t^2+1}, \end{cases}$ де $t \in (-\infty, +\infty)$		$A(-a, 0)$ – вершина.

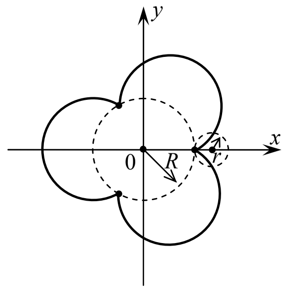
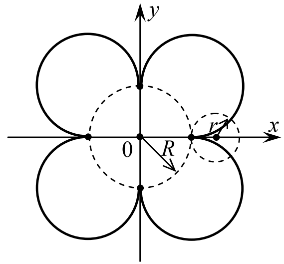
№	Назва кривої	Параметричне зображення кривої	Зображення кривої	Примітки
1	Завиток Паскаля $\left(x^2+y^2-ax\right)^2-l^2\left(x^2+y^2\right)=0,$ де $a>0,\ l>0.$	$\begin{cases} x=a\cos^2 t+l\cos t; \\ y=a\cos t\sin t+l\sin t, \end{cases}$ де $t\in[0,\ 2\pi)$	 $2a\le l$	$A(a-l,0)$ та $B(a+l,0)$; O – полюс; задане рівняння визначає сукупність кривої та полюса O.
			 $a<l<2a$	O - полюс, що є ізольованою точкою; $A(a-l,0)$ та $B(a+l,0)$ – вершини. У цьому випадку задане рівняння визначає лише криву без точки $O(0,0)$.
			 $l<a$	$A(a-l,0)$ та $B(a+l,0)$ - вершини. Задане рівняння визначає сукупність кривої та точки $O(0;0)$, що належіть кривій. Площа S фігури, обмеженої завитком Паскаля коли $l<a$ складається з суми площі S_1 фігури , обмеженої зовнішньою петлею завитка та площі та площі S_2 фігури, що обмежена внутрішньою петлею, тобто $S=S_1+S_2$.

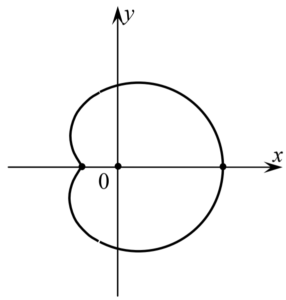
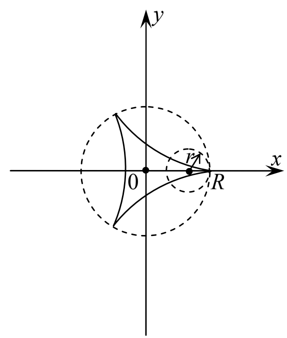
2	Кардіоїда (частинний випадок завитка Паскаля, коли $l = a$) $\left(x^2+y^2-ax\right)^2-a^2\left(x^2+y^2\right)=0$ або $\left(x^2+y^2-2ax\right)\left(x^2+y^2\right)-a^2y^2=0,$ де $a>0$.	$\begin{cases} x=a(1+\cos t)\cos t; \\ y=a(1+\cos t)\sin t, \end{cases}$ де $t\in[0,\,2\pi)$		$A(0,\,0)$, $B(2a,\,0)$ – вершини.

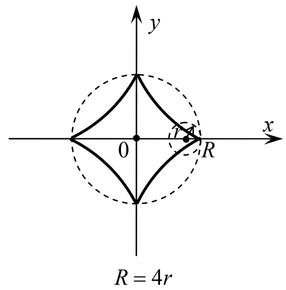
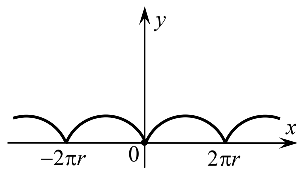
Циклоїдальні криві

Циклоїдальні криві − це такі криві, які описують траєкторію точки, що належить колу або полю круга радіуса r, яке без ковзання котиться вздовж другого нерухомого кола радіуса R. Форма кривої залежить від співвідношення між радіусами R та r та від взаємного розміщення кіл.

Таблиця Г4. **Циклоїдальні криві**

№ п/п	Назва кривої	Параметричне завдання кривої	Зображення кривої	Примітки
1	Епіциклоїда	$\begin{cases} x=(R+r)\cos t-r\cos\left(\dfrac{R+r}{r}t\right); \\ y=(R+r)\sin t-r\sin\left(\dfrac{R+r}{r}t\right), \end{cases}$ де $-\infty < t < +\infty$	 $R=3r$  $r=4r$	Коло радіуса r дотикається до кола радіуса R зовнішнім образом. Якщо $\dfrac{R}{r}=n$, де $n\in N$, то $t\in[0,\,2\pi)$. Якщо $\dfrac{R}{r}=\dfrac{m}{n}$, де $m\in N$, $n\in N$, та НСД$(m;\,n)=1$, то $t\in[0,\,2\pi n)$, де НСД$(m;\,n)$ – найбільший спільний дільник чисел m та n.

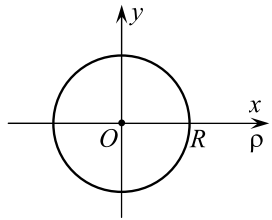
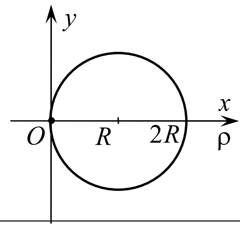
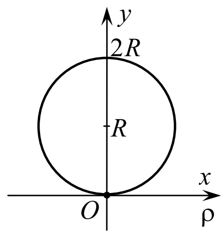
№	Назва кривої	Параметричне завдання кривої	Зображення кривої	Примітки
	Кардіоїда (частинний випадок еліциклоїди, коли $R=r$): $\left(x^2+y^2\right)^2-2rx\left(x^2+y^2\right)=r^2y^2$	$\begin{cases} x=2r\cos t-r\cos 2t; \\ y=2r\sin t-r\sin 2t, \end{cases}$ або $\begin{cases} x=r(1+\cos t)\cos t; \\ y=r(1+\cos t)\sin t, \end{cases}$ де $t\in[0,\,2\pi)$		$R=r$ − радіуси зовнішнього та внутрішнього кіл.
2	Гіпоциклоїда	$\begin{cases} x=(R-r)\cos t+r\cos\left(\dfrac{R-r}{r}t\right); \\ y=(R-r)\sin t-r\sin\left(\dfrac{R-r}{r}t\right), \end{cases}$ де $-\infty<t<+\infty$		Коло радіуса r дотикається до кола радіуса R в середині.

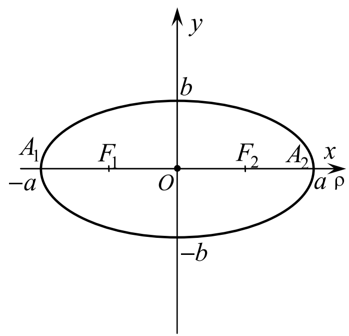
№ п/п	Назва кривої	Параметричне завдання кривої	Зображення кривої	Примітки
	Астроїда (частинний випадок гіпоциклоїди, коли $R=4r$): $$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=R^{\frac{2}{3}}$$ або $\left(x^2+y^2-R^2\right)^3+27x^2y^2R^2=0$	$\begin{cases} x=3r\cos t+3\cos 3t; \\ y=4r\sin t-r\sin 3t \end{cases}$ або $\begin{cases} x=R\cos^3 t; \\ y=R\sin^3 t, \end{cases}$ де $t\in[0,\,2\pi)$		
3	Циклоїда: $r\cos\left(x+\sqrt{\dfrac{y(2r-y)}{r}}\right)=r-x,$ де $r>0$	$\begin{cases} x=r(t-\sin t); \\ y=r(1-\cos t), \end{cases}$ де $t\in(-\infty,\,+\infty)$		Циклоїда – це траєкторія точки на колі радіуса r, яке без ковзання котиться вздовж осі Ox.

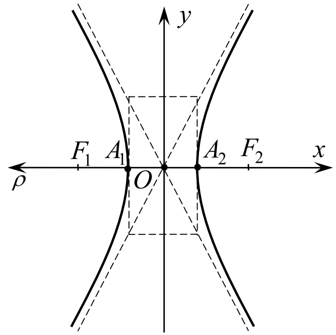
Д о д а т о к Д

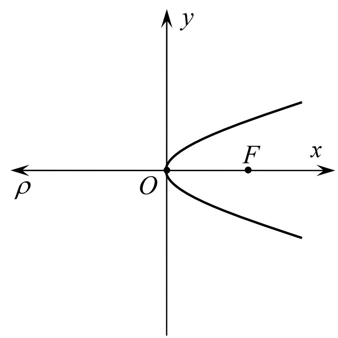
ОКРЕМІ КРИВІ, ЗАДАНІ У ПОЛЯРНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

Таблиця Д.1 **Криві другого порядку**

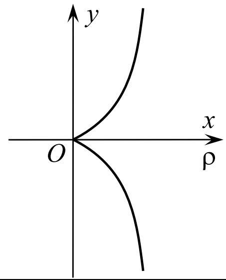
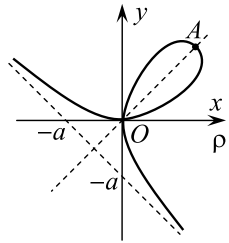
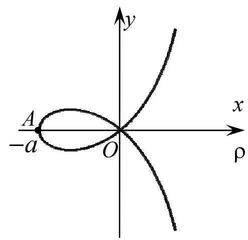
№	Назва кривої	Рівняння кривої у полярній системі координат	Зображення кривої	Примітка
1	Коло: $x^2 + y^2 = R^2$	$\rho = R$		$O(0,0)$ – центр кола та полюс; R – радіус кола.
2	Коло: $(x-R)^2 + y^2 = R^2$	$\rho = 2R\cos\varphi$, де $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$		$O(0,0)$ – центр кола та полюс; R – радіус кола.
3	Коло: $x^2 + (y-R)^2 = R^2$	$\rho = 2R\sin\varphi$, де $\varphi \in [0, \pi]$		$O(0,0)$ – центр кола та полюс; R – радіус кола.

№	Назва кривої	Рівняння кривої у полярній системі координат	Зображення кривої	Примітка
4	Еліпс: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\rho=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$; $0\le\varphi<2\pi$		A_1, A_2 – вершини еліпса; a – велика піввісь еліпса; b – мала піввісь еліпса; $c=\sqrt{a^2-b^2}$; $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ – фокуси еліпса; $F_2(c,0)$ – полюс; полярна вісь ρ напрямлена від фокуса F_2 до найближчої вершини A_2; p – параметр еліпса, $p=\frac{b^2}{a}$; ε – ексцентриситет еліпса, $\varepsilon=\frac{c}{a}<1$.

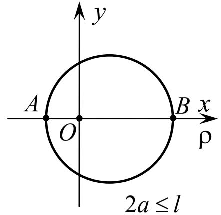
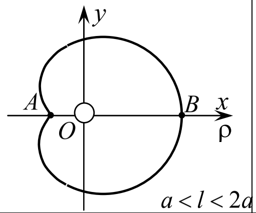
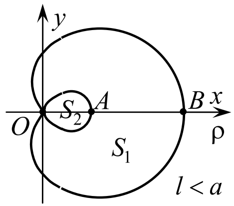
№	Назва кривої	Рівняння кривої у полярній системі координат	Зображення кривої	Примітка
5	Гіпербола: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$\rho=\dfrac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$. Для лівої вітки φ набуває таких значень, для яких $\cos\varphi<\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ або $\cos\varphi<\dfrac{1}{\varepsilon}$, або $\cos\varphi<\cos\alpha$, де α – гострий кут між асимптотою та фокальною віссю F_1F_2. Для правої вітки $0<\varphi<2\pi-\alpha$.		$A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$ – вершини гіперболи; a – дійсна піввісь гіперболи; b – уявна піввісь гіперболи; $c=\sqrt{a^2+b^2}$; $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ – фокуси; $F_2(c,0)$ – полюс; полярна вісь ρ напрямлена від фокуса F_2 до віддаленої вершини A_1; p – параметр гіперболи;, $p=\dfrac{b^2}{a}$; ε – ексцентриситет гіперболи, $\varepsilon=\dfrac{c}{a}>1$.

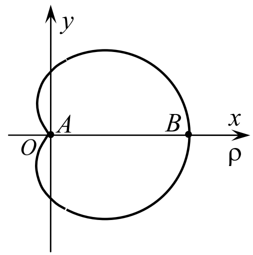
№	Назва кривої	Рівняння кривої у полярній системі координат	Зображення кривої	Примітка
6	Парабола $y^2 = 2px$	$\rho = \dfrac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$, або $\rho = \dfrac{p}{1-\cos\varphi}$, де $\varphi \in (0, 2\pi)$		$O(0, 0)$ – вершина параболи; $F\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$ – фокус параболи; $F\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$ – полюс; полярна вісь напрямлена від полюса до вершини параболи; $\varepsilon = 1$; p – параметр параболи.

Таблиця Д.2 **Криві третього порядку**

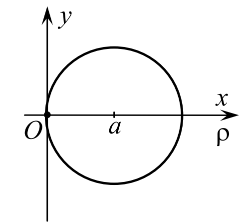
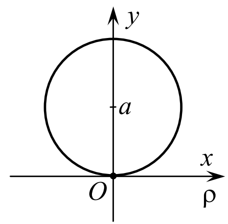
№	Назва кривої	Параметричне задання кривої	Зображення кривої	Примітка
1	Цисоїда Діокла: $y^2 = \dfrac{x^3}{a-x}$, де $a > 0$	$\rho = \dfrac{a\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$, де $\varphi \in (-\infty, +\infty)$		O − полюс.
2	Декартів лист: $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, де $a > 0$	$\rho = \dfrac{3a\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}$, де $\varphi \in (-\infty, +\infty)$		O − полюс; $A\left(\dfrac{3a}{2}, \dfrac{3a}{2}\right)$ − вершина.
3	Строфоїда: $y^2 = x^2\left(\dfrac{a+x}{a-x}\right)$, де $a > 0$	$\rho = \dfrac{a}{\cos 3\varphi,}$, де $\varphi \in (-\infty, +\infty)$		O − полюс; $A(-a, 0)$ − вершина.

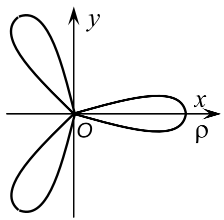
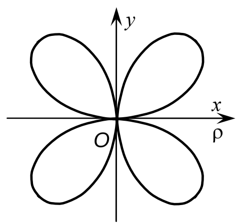
Таблиця Д.3 **Криві четвертого порядку**

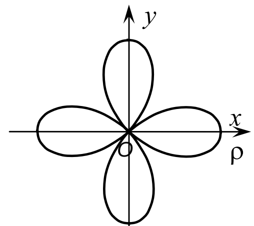
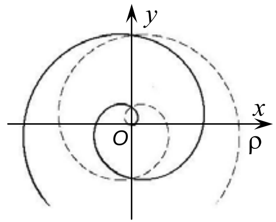
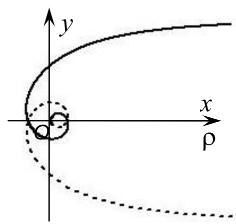
№	Назва кривої	Задання кривої у полярній системі координат	Зображення кривої	Примітка
1	Завиток Паскаля: $\left(x^2+y^2-ax\right)^2-l^2\left(x^2+y^2\right)=0$, де $a>0,\ l>0$	$\rho=a\cos\varphi+l$		$A(a-l,0),\ B(a+l,0)$; O − полюс. Задане рівняння визначає сукупність кривої та полюса O.
				O − полюс, що є ізольованою точкою; $A(a-l,0),\ B(a+l,0)$ − вершини. У цьому разі задане рівняння визначає лише криву без полюса O.
				O − полюс; $A(a-l,0),\ B(a+l,0)$ − вершини. Задане рівняння визначає сукупність кривої та полюса O. Площа S фігури, обмеженої завитком Паскаля, коли $l<a$ складається з суми площі S_1 фігури, обмеженої зовнішньою петлею завитка, та площі S_2 фігури, обмеженої внутрішньою петлею, тобто $S=S_1+S_2$.

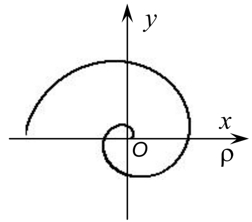
№	Назва кривої	Задання кривої у полярній системі координат	Зображення кривої	Примітка
2	Кардіоїда (частинний випадок завитка Паскаля, коли $l = a$) $\left(x^2 + y^2 - ax\right)^2 - a^2\left(x^2 + y^2\right) = 0$ або $\left(x^2 + y^2 - 2ax\right)\left(x^2 + y^2\right) - a^2 y^2 = 0$, де $a > 0$.	$\rho = a\left(1 + \cos\varphi\right)$, де $\varphi \in \left[0,\ 2\pi\right)$	 $l = a$	O − полюс; $B\left(2a,\ 0\right)$ – вершина.

Таблиця Д.4

№	Назва кривої	Задання кривої у полярній системі координат	Зображення кривої	Примітка
1	Синусоїдні спіралі	$\rho^k = a^k \sin k\varphi$ або $\rho^k = a^k \cos k\varphi$, де $\varphi \in (-\infty, +\infty)$		Якщо k – число непарне, то розетки складаються з k пелюсток, якщо k – парне, то розетки складаються з $2k$ пелюсток. Для однієї пелюстки $\rho \in \left[0, \frac{\pi}{k}\right]$.
	Частинні випадки: 1) $k=1$ Коло	$\rho = a\cos\varphi$, де $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$		O – полюс.
	Частинні випадки: 2) $k=1$ Коло	$\rho = a\sin\varphi$, де $\varphi \in [0, \pi]$		O – полюс.

№ пп.	Назва кривої		Задання кривої у полярній системі координат	Зображення кривої	Примітка
2	Розетки чи криві Гвідо		$\rho = a\sin k\varphi$, або $\rho = a\cos k\varphi$, де $\varphi \in [0, \pi]$		Якщо k – число непарне, то розетки складаються з k пелюсток, якщо k – парне, то розетка складається з $2k$ пелюсток. Для однієї пелюстки $\rho \in \left[0, \frac{\pi}{k}\right]$.
	Частинні випадки	1) $k = 3$	$\rho = a\cos 3\varphi$		O − полюс.
		2) $k = 2$	$\rho = a\sin 2\varphi$		O − полюс.

№ пп.	Назва кривої	Задання кривої у полярній системі координат	Зображення кривої	Примітка
2	Частинні випадки: 3) $k=2$	$\rho = a\cos 2\varphi$		O – полюс.
3	Архімедова спіраль	$\rho = a\varphi$, де $a>0,\ \varphi\in(-\infty,+\infty)$		Суцільна лінія відповідає значенням $\varphi\in[0,+\infty)$, пунктирна – значенням $\varphi\in(-\infty,0]$. O – полюс.
4	Гіперболічна спіраль	$\rho = \frac{a}{\lvert\varphi-\pi\rvert}$, де $\varphi\in(-\infty,\pi)$ та $\rho=\frac{a}{\varphi}$, для $\varphi\in(0,+\infty)$		Суцільна лінія відповідає значенням $\varphi\in(0,+\infty)$, пунктирна – значенням $\varphi\in(-\infty,\pi)$. O – полюс.

№ пп.	Назва кривої	Задання кривої у полярній системі координат	Зображення кривої	Примітка
5	Логарифмічна спіраль	$\rho = a\mathrm{e}^{k\varphi}$, де $a > 0,\ \varphi \in (-\infty, \infty)$		O − полюс.

Додаток Е

МЕТОДИ ЗНАХОДЖЕННЯ ГРАНИЦЬ ФУНКЦІЇ

Таблиця Е.1

№	Тип невизначеності	Особливості умови	Методи розкриття невизначеності
1	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_kx^k}{b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_rx^r}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$	$P_k(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k$, $Q_r(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_rx^r$ – многочлени степеня k та r відповідно	Чисельник та знаменник водночас поділити на x^m, $m = \max\{k; r\}$; виконати спрощення.
2	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{f_1(x)}-\sqrt{f_2(x)}\right)=[\infty-\infty]$	$f_1(x)$, $f_2(x)$ – функції	Заданий вираз водночас помножити та поділити на вираз $\left(\sqrt{f_1(x)}+\sqrt{f_2(x)}\right)\neq 0$, спряжений до заданого, та спростити, користуючись формулою різниці квадратів $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.
3	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_kx^k}{b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_rx^r}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$	$P_k(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k$, $Q_r(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_rx^r$ – многочлени степеня k та r відповідно	Многочлени $P_k(x)$ та $Q_r(x)$ розкласти на множники, поділивши їх на $x - x_0$; виконати спрощення.
4	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt{f_1(x)}-\sqrt{f_2(x)}}{b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_rx^r}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$	$f_1(x)$, $f_2(x)$ – функції; $Q_r(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_rx^r$ – многочлен	Чисельник та знаменник водночас помножити на вираз $\left(\sqrt{f_1(x)}+\sqrt{f_2(x)}\right)\neq 0$, спряжений до чисельника, а многочлен $Q_r(x)$ розкласти на множники, поділивши його на $x-x_0$.
5	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_kx^k}{\sqrt{f_1(x)}-\sqrt{f_2(x)}}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$	$f_1(x)$, $f_2(x)$ – функції; $P_k(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^r$ – многочлен степеня r	Многочлен $P_k(x)$ розкласти на множники, поділивши його на $x - x_0$, та чисельник і знаменник водночас помножити на вираз $\left(\sqrt{f_1(x)}+\sqrt{f_2(x)}\right)\neq 0$, спряжений до знаменника; виконати спрощення.

№	Тип невизначеності	Особливості умови	Методи розкриття невизначеності
6	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt{f_1(x)}-\sqrt{f_2(x)}}{\sqrt{f_3(x)}-\sqrt{f_4(x)}}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$	$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ f_4(x)$ – функції	Чисельник та знаменник водночас помножити на вираз $\left(\sqrt{f_1(x)}+\sqrt{f_2(x)}\right)\left(\sqrt{f_3(x)}+\sqrt{f_4(x)}\right)\neq 0$; виконати спрощення (див. пп. 4, 5).
7	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt[3]{f_1(x)}\pm\sqrt[3]{f_2(x)}}{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_rx^r}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$	$f_1(x),\ f_2(x)$ – функції; $Q_r(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_rx^r$ – многочлен степеня r	Чисельник та знаменник водночас помножити на вираз $\sqrt[3]{f_1^2(x)}\mp\sqrt[3]{f_1(x)}\sqrt[3]{f_2(x)}+\sqrt[3]{f_2^2(x)}\neq 0$ та спростити, користуючись відповідно формулою суми або різниці кубів: $(a\pm b)\left(a^2\pm ab+b^2\right)=a^3\pm b^3$; многочлен $Q_r(x)$ розкласти на множники, поділивши його на $x-x_0$; виконати спрощення.
8	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_kx^k}{\sqrt[3]{f_1(x)}\pm\sqrt[3]{f_2(x)}}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$	$f_1(x),\ f_2(x)$ – функції; $P_k(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_kx^k$ – многочлен степеня k	Многочлен $P_k(x)$ розкласти на множники, поділивши його на $x-x_0$, а чисельник та знаменник водночас помножити на вираз $\sqrt[3]{f_1^2(x)}\mp\sqrt[3]{f_1(x)}\sqrt[3]{f_2(x)}+\sqrt[3]{f_2^2(x)}\neq 0$ та спростити, користуючись відповідно формулою суми або різниці кубів: $(a\pm b)\left(a^2\pm ab+b^2\right)=a^3\pm b^3$; виконати спрощення.

№	Тип невизначеності	Особливості умови	Методи розкриття невизначеності
9	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sqrt[3]{f_1(x)}\pm\sqrt[3]{f_2(x)}}{\sqrt[3]{f_3(x)}\pm\sqrt[3]{f_4(x)}}=\left[\frac{0}{0}\right]$	$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ f_4(x)$ – функції	Чисельник та знаменник водночас помножити на вираз $\left(\sqrt[3]{f_1^2(x)}\mp\sqrt[3]{f_1(x)}\sqrt[3]{f_2(x)}+\sqrt[3]{f_2^2(x)}\right)\neq 0$ та $\left(\sqrt[3]{f_3^2(x)}\mp\sqrt[3]{f_3(x)}\sqrt[3]{f_4(x)}+\sqrt[3]{f_4^2(x)}\right)\neq 0$; та спростити, користуючись відповідно формулою суми або різниці кубів: $(a\pm b)\left(a^2\pm ab+b^2\right)=a^3\pm b^3$; виконати спрощення (див. пп. 7, 8).
10	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\left[\frac{0}{0}\right]$	$f_1(x),\ f_2(x)$ – функції, до складу хоча б однієї з яких входять тригонометричні функції або обернені тригонометричні функції	Спробувати спростити задані функції в такий спосіб, щоб можна було застосувати першу чудову границю або наслідки з неї.
11	$\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{\varphi(x)}=\left[1^{\infty}\right]$	$f(x),\ \varphi(x)$ – функції	Спробувати спростити задані функції в такий спосіб, щоб можна було застосувати другу чудову границю або наслідки з неї.

Д о д а т о к Ж

ОСНОВНІ ВІДОМОСТІ
ПРО ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ТА ГІПЕРБОЛІЧНІ ФУНКЦІЇ

I Тригонометричні функції

Знаки тригонометричних функцій по четвертях

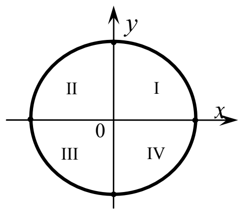


Рисунок Ж.1

Таблиця Ж.1 **Знаки тригонометричних функцій**

Чверть	**Величина кута**	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$
I	$0<\alpha<\frac{\pi}{2} \quad (0^\circ<\alpha<90^\circ)$	+	+	+	+
II	$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi \quad (90^\circ<\alpha<180^\circ)$	+	–	–	–
III	$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2} \quad (180^\circ<\alpha<270^\circ)$	–	–	+	+
IV	$\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi \quad (270^\circ<\alpha<360^\circ)$	–	+	–	–

Періодичність тригонометричних функцій

Таблиця Ж.2 **Періоди тригонометричних функцій**

Тригонометрична функція	**Період**
$\sin\alpha$	2π
$\cos\alpha$	2π
$\mathrm{tg}\,\alpha$	π
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	π

Парність та непарність тригонометричних функцій

1. Функція $\sin\alpha$ є непарна: $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$.
2. Функція $\cos\alpha$ є парна: $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$.
3. Функція $\mathrm{tg}\alpha$ є непарна: $\mathrm{tg}(-\alpha)=-\mathrm{tg}\,\alpha$.
4. Функція $\mathrm{ctg}\alpha$ є непарна: $\mathrm{ctg}(-\alpha)=-\mathrm{ctg}\,\alpha$.

Таблиця Ж.3 **Окремі значення тригонометричних функцій**

$\varphi°$	**0**	**30**	**45**	**60**	**90**	**120**	**135**	**150**	**180**	**210**	**225**	**240**	**270**	**300**	**315**	**330**	**360**
α рад.	**0**	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tg α	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
ctg α	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	$-\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	∞

Формули переходу від градусної міри φ кута до радіанної міри α кута та навпаки:

$$\alpha = \frac{\varphi}{180°}\pi; \qquad \varphi = \frac{\alpha}{\pi}\cdot 180°.$$

Основні тригонометричні тотожності між функціями одного аргументу

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. **2.** $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$.

3. $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$. **4.** $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \alpha \neq \dfrac{\pi}{2}(2n+1), \quad n \in Z.$

5. $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, \ n \in Z$. **6.** $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}, \quad \alpha \neq \dfrac{\pi}{2}(2n+1), \ n \in Z.$

7. $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, \ n \in Z.$ **8.** $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}, \quad \alpha \neq \dfrac{\pi}{2}n, \quad n \in Z.$

9. $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}, \quad \alpha \neq \dfrac{\pi}{2}n, \quad n \in Z.$ **10.** $\operatorname{tg}\alpha\,\operatorname{ctg}\alpha = 1, \quad \alpha \neq \dfrac{\pi}{2}n, \quad n \in Z.$

Таблиця Ж.4 **Зв'язок між тригонометричними функціями одного аргументу**

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\sin\alpha$	–	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$
$\cos\alpha$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	–	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\dfrac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	–	$\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\dfrac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$	–
У поданих формулах з двох можливих знаків "плюс" чи "мінус" перед радикалом обирається той, що відповідає знаку шуканої величини у відповідній чверті.				

Формули додавання та віднімання аргументів тригонометричних функцій

1. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$. **2.** $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.

3. $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$. **4.** $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.

5. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\,\operatorname{tg}\beta}; \ \alpha, \beta, \alpha+\beta \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in Z$.

6. $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\,\operatorname{tg}\beta}; \ \alpha, \beta, \alpha-\beta \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in Z$.

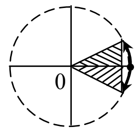
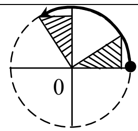
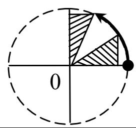
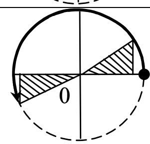
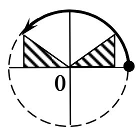
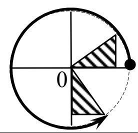
7. $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\,\operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}; \ \alpha, \ \beta, \ \alpha+\beta \neq \pi n, \ n \in Z$.

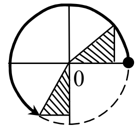
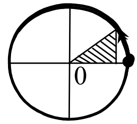
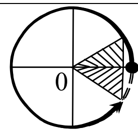
8. $\operatorname{ctg}(\alpha-\beta) = \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\,\operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta}; \ \alpha, \ \beta, \ \alpha-\beta \neq \pi n, \ n \in Z.$

Формули зведення

Формулами зведення називаються такі формули, що виражають тригонометричні функції від аргументів $-\alpha$; $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$; $\pi\pm\alpha$; $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$; $2\pi\pm\alpha$ через функції від аргумента α, де α – будь-яке допустиме значення аргументу.

Таблиця Ж.5 **Формули зведення**

№ пп.	Аргумент радіани (градуси)	Функції				Геометричне зображення
		sin	**cos**	**tg**	**ctg**	
1	$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	
2	$\frac{\pi}{2}+\alpha;\ (90^\circ+\alpha)$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	
3	$\frac{\pi}{2}-\alpha;\ (90^\circ-\alpha)$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	
4	$\pi+\alpha;\ (180^\circ+\alpha)$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	
5	$\pi-\alpha;\ (180^\circ-\alpha)$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	
6	$\frac{3}{2}\pi+\alpha;\ (270^\circ+\alpha)$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	

№	**Аргумент** радіани (градуси)	**Функції**				**Геометричне зображення**
		sin	**cos**	**tg**	**ctg**	
7	$\mathbf{\frac{3}{2}\pi-\alpha;\ \left(270^\circ-\alpha\right)}$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	
8	$\mathbf{2\pi+\alpha;\ \left(360^\circ+\alpha\right)}$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	
9	$\mathbf{2\pi-\alpha;\ \left(360^\circ-\alpha\right)}$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	

Формули зведення можна поширити на будь-який кут, поданий у вигляді $\frac{\pi n}{2}+\alpha.$

Будь-яка тригонометрична функція кута $\frac{\pi n}{2}+\alpha$ за модулем дорівнює тій самій функції кута α, якщо n – число парне, та кофункції, якщо n – число непарне. При цьому, якщо задана функція кута $\frac{\pi n}{2}+\alpha$ має додатне значення, то і здобута функція є додатною, а якщо задана функція кута $\frac{\pi n}{2}+\alpha$ має від'ємне значення, то перед здобутою функцією слід поставити знак „мінус“.

Таблиця Ж.6 **Кофункції**

Функція	**Кофункція**
$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$
$\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$

Можна також користуватись формулами:

1. $\sin\left(\frac{\pi n}{2}+\alpha\right)=\begin{cases}\sin\alpha, & \text{якщо } n=4k;\\ \cos\alpha, & \text{якщо } n=4k+1;\\ -\sin\alpha, & \text{якщо } n=4k+2;\\ -\cos\alpha, & \text{якщо } n=4k+3;\end{cases}$

2. $\cos\left(\frac{\pi n}{2}+\alpha\right)=\begin{cases}\cos\alpha, & \text{якщо } n=4k;\\ -\sin\alpha, & \text{якщо } n=4k+1;\\ -\cos\alpha, & \text{якщо } n=4k+2;\\ \sin\alpha, & \text{якщо } n=4k+3;\end{cases}$

3. $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi n}{2}+\alpha\right)=\begin{cases}\mathrm{tg}\,\alpha, & \text{якщо } n=2k;\\ -\mathrm{tg}\,\alpha, & \text{якщо } n=2k+1;\end{cases}$

4. $\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi n}{2}+\alpha\right)=\begin{cases}\mathrm{ctg}\,\alpha, & \text{якщо } n=2k;\\ -\mathrm{tg}\,\alpha, & \text{якщо } n=2k+1,\end{cases}$

де $k\in Z$.

Формули подвійного аргументу

1. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$. **2.** $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$.

3. $\mathrm{tg}2\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$, де $\alpha\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k,\ k\in Z,\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$.

4. $\mathrm{ctg}2\alpha=\frac{\mathrm{ctg}^2\alpha-1}{2\mathrm{ctg}\alpha}$, де $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z,\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}k,\ k\in Z$.

Формули потрійного аргументу

1. $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$. **2.** $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$.

3. $\mathrm{tg}3\alpha=\frac{3\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}^3\alpha}{1-3\mathrm{tg}^2\alpha}$, де $\alpha\neq\frac{\pi}{6}(2n+1),\ n\in Z,\ \alpha\neq\pm\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z.$

4. $\mathrm{ctg}3\alpha=\frac{3\mathrm{ctg}\alpha-\mathrm{ctg}^3\alpha}{1-3\mathrm{ctg}^2\alpha}$, де $\alpha\neq\frac{\pi n}{2},\ n\in Z,\ \alpha\neq\pm\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in Z.$

Формули половинного аргументу

1. $\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$. **2.** $\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$.

3. $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$, де $\alpha\neq\pi+2\pi n,\ n\in Z$. **4.** $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$, де $\alpha\neq\pi n,\ n\in Z$.

5. $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$, де $\alpha\neq\pi n,\ n\in Z$. **6.** $\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$, де $\alpha\neq 2\pi n,\ n\in Z$.

7. $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$, де $\alpha\neq\pi n, n\in Z$. **8.** $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$, де $\alpha\neq\pi n,\ n\in Z$.

Формули зниження степеня

1. $\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos2\alpha)$. **2.** $\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos2\alpha)$.

Формули перетворення суми тригонометричних функцій на добуток

1. $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$. **2.** $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$.

3. $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$. **4.** $\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$.

5. $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$. **6.** $\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\cos(45^\circ-\alpha)$.

7. $\cos\alpha-\sin\alpha=\sqrt{2}\sin(45^\circ-\alpha)$.

8. $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$, де $\alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}(2n-1),\ n\in Z$.

9. $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$, де $\alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}(2n-1),\ n\in Z$.

10. $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$, де $\alpha,\beta\neq\pi n,\ n\in Z$.

11. $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$, де $\alpha,\beta\neq\pi n,\ n\in Z$.

12. $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}$, де $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z,\ \beta\neq\pi n,\ n\in Z$.

13. $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=-\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}$, де $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z,\ \beta\neq\pi n,\ n\in Z$.

14. $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=2\frac{1}{\sin2\alpha}$, де $\alpha\neq\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$.

15. $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha=-2\operatorname{ctg}2\alpha$, де $\alpha\neq\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$.

16. $1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$. **17.** $1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

18. $1-\sin\alpha=2\sin^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$. **19.** $1+\sin\alpha=2\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$.

20. $1-\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{2}\sin(45^\circ-\alpha)}{\cos\alpha}$, де $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$.

21. $1+\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sqrt{2}\sin(45^\circ+\alpha)}{\cos\alpha}$, де $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$.

22. $1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$, де $\alpha,\beta\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$.

23. $1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$, де $\alpha,\beta\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$.

24. $\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1=\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$, де $\alpha,\beta\neq\pi n,\ n\in Z$.

25. $\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1=\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$, де $\alpha,\beta\neq\pi n,\ n\in Z$.

26. $1-\operatorname{ctg}^2\alpha=-\dfrac{\cos2\alpha}{\sin^2\alpha}$, де $\alpha\neq\pi n,\ n\in Z$.

27. $1-\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{\cos2\alpha}{\cos^2\alpha}$, де $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$.

28. $\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}$, де $\alpha,\beta\neq\pi n,\ n\in Z$.

29. $\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}$, де $\alpha,\beta\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$.

30. $\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha=\operatorname{ctg}^2\alpha\cos^2\alpha$, де $\alpha\neq\pi n,\ n\in Z$.

31. $\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha$, де $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$.

32. $a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$, де φ − кут, для якого $\cos\varphi=\dfrac{\alpha}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Формули перетворювання добутку тригонометричних функцій на суму

1. $\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big)$.

2. $\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\big(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\big)$.

3. $\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha-\beta)\big)$.

4. $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=\dfrac{1}{4}\big(\sin(\alpha+\beta-\gamma)+\sin(\beta+\gamma-\alpha)+\sin(\gamma+\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta+\gamma)\big)$.

5. $\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma=\frac{1}{4}\left(-\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\beta+\gamma-\alpha)+\cos(\gamma+\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta+\gamma)\right).$

6. $\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma=\frac{1}{4}\left(\sin(\alpha+\beta-\gamma)-\sin(\beta+\gamma-\alpha)+\sin(\gamma+\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta+\gamma)\right).$

7. $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=\frac{1}{4}\left(\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\beta+\gamma-\alpha)+\cos(\gamma+\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta+\gamma)\right).$

8. $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$, де $\alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}(2n-1),\ n\in Z;\ \alpha,\beta\neq\pi k,\ k\in Z;\ \alpha\neq-\beta.$

9. $\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta=\frac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}$, де $\alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}(2n-1),\ n\in Z;\ \alpha,\beta\neq\pi k,\ k\in Z;\ \alpha\neq-\beta.$

10. $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}$, де $\alpha,\beta\neq\frac{\pi}{2}(2n-1),\ n\in Z;\ \alpha,\beta\neq\pi k,\ k\in Z.$

Перетворювання степенів синуса та косинуса

1. $\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos2\alpha).$ **2.** $\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos2\alpha).$

3. $\cos^3\alpha=\frac{1}{4}(3\cos\alpha+\cos3\alpha).$ **4.** $\sin^3\alpha=\frac{1}{4}(3\sin\alpha-\sin3\alpha).$

5. $\sin^4\alpha=\frac{1}{8}(3-4\cos2\alpha+\cos4\alpha).$ **6.** $\cos^4\alpha=\frac{1}{8}(3+4\cos2\alpha+\cos4\alpha).$

Тригонометричні функції, виражені через тангенс половинного кута

1. $\sin\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$, де $\alpha\neq\pi(2n+1),\ n\in Z.$ **2.** $\cos\alpha=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$, де $\alpha\neq\pi(2n+1),\ n\in Z.$

3. $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$, де $\alpha,\ \frac{\alpha}{2}\neq\frac{\pi}{2}(2n+1),\ n\in Z.$ **4.** $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$, де $\alpha\neq\pi n,\ n\in Z.$

15. Тригонометричні функції числового аргументу

1. $\boldsymbol{y=\sin x}$

Область визначення: $x\in(-\infty,+\infty).$

Область значень: $y\in[-1,\ 1].$

2. $\boldsymbol{y=\cos x}$

Область визначення: $x\in(-\infty,+\infty).$

Область значень: $y\in[-1,\ 1].$

3. $\boldsymbol{y = \mathrm{tg}\, x}$

Область визначення: дійсні значення x, за винятком $\dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

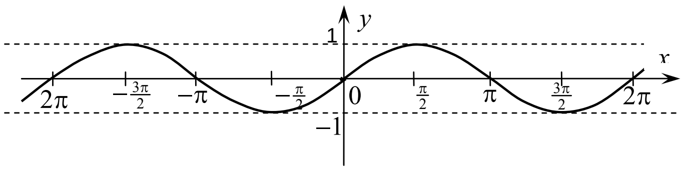
Область значень: $y \in (-\infty, +\infty)$.

4. $\boldsymbol{y = \mathrm{ctg}\, x}$

Область визначення: дійсні значення x, за винятком πn, $n \in Z$.

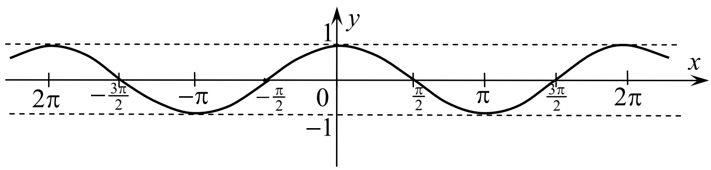
Область значень: $y \in (-\infty, +\infty)$.

Графічне зображення тригонометричних функцій



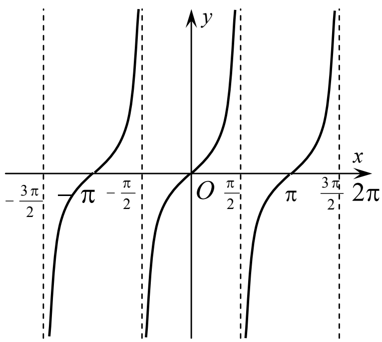
$\boldsymbol{y = \sin x}$

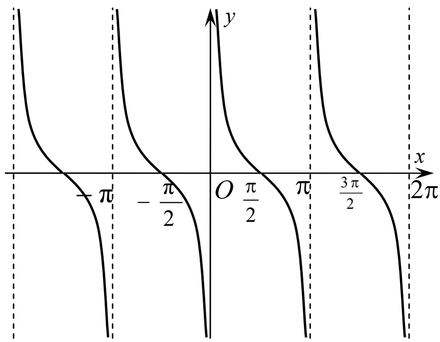
Рисунок Ж.2



$\boldsymbol{y = \cos x}$

Рисунок Ж.3





$\boldsymbol{y = \mathrm{tg}\, x}$

Рисунок Ж.4

$\boldsymbol{y = \mathrm{ctg}\, x}$

Рисунок Ж.5

Обернені тригонометричні функції

1. Функція $\boldsymbol{y}$ **=** **arcsin** $\boldsymbol{x}$ − обернена до функції $y=\sin x$, має область визначення $x\in[-1,1]$ та область значень $y\in(-\infty,+\infty)$ і є багатозначна.

Функція $\boldsymbol{y}$ **=** **arcsin** $\boldsymbol{x}$ − обернена до функції $y=\sin x$, має область визначення $x\in[-1,1]$ та область значень $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, є однозначною, називається ***головним значенням*** функції $y=\mathrm{Arc}\sin x$.

$$\mathrm{Arc}\sin\, x=(-1)^n \arcsin\, x+\pi n,\quad n\in Z.$$

2. Функція $\boldsymbol{y}$ **= Arccos** $\boldsymbol{x}$ − обернена до функції $y=\cos x$, має область визначення $x\in[-1,1]$ та область значень $y\in(-\infty,+\infty)$ і є багатозначною.

Функція $\boldsymbol{y}$ **= arcos** $\boldsymbol{x}$ обернена до функції $y=\cos x$, має область визначення $x\in[-1,1]$ та область значень $y\in[0,\pi]$, є однозначною, називається ***головним значенням*** функції $y=\mathrm{Arc}\cos\, x$.

$$\mathrm{Arc}\cos\, x=\pm\arccos\, x+2\pi n,\ \ n\in Z.$$

3. Функція $\boldsymbol{y}$ **= Arctg** $\boldsymbol{x}$ − обернена до функції $y=\mathrm{tg}\, x$, має область визначення $x\in(-\infty,+\infty)$ та область значень, що включає усі значення $y\in R$, за винятком значень $y=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \ n\in Z$, є багатозначною.

Функція $\boldsymbol{y}$ **= arctg** $\boldsymbol{x}$ обернена до функції $y=\mathrm{tg}\, x$, має область визначення $y\in(-\infty,+\infty)$ та область значень $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, є однозначною, називається ***головним значенням*** функції $y=\mathrm{Arctg}\ x$.

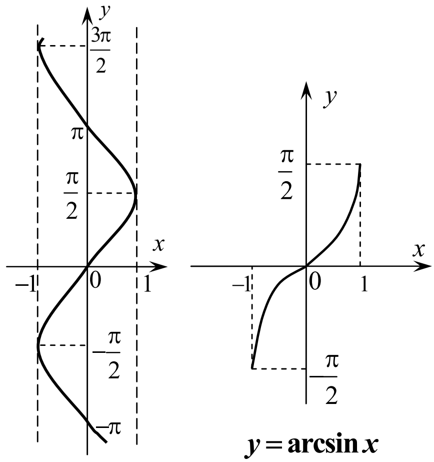
$$\mathrm{Arctg}\ x=\mathrm{arctg}\ x+\pi n,\ \ n\in Z.$$

4. Функція $\boldsymbol{y}$ **= Arcctg** $\boldsymbol{x}$ − обернена до функції $y=\mathrm{ctg}\, x$, має область визначення $x\in(-\infty,+\infty)$ та область значень, що включає усі значення $y\in R$, за винятком значень $y=\pi n,\quad n\in Z$, є багатозначною.

Функція $\boldsymbol{y}$ **= arcctg** $\boldsymbol{x}$ − обернена до функції $y=\mathrm{ctg}\, x$, має область визначення $x\in(-\infty,+\infty)$ та область значень $y\in[0,\pi]$, є однозначна, називається ***головним значенням*** функції $y=\mathrm{Arcctg}\ x$.

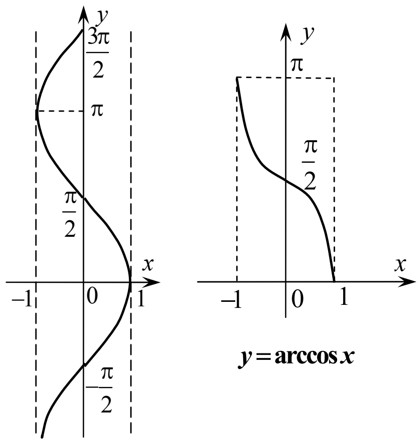
$$\mathrm{Arcctg}\ x=\mathrm{arcctg}\ x+\pi n,\ n\in Z\ .$$

Графічне зображення обернених тригонометричних функцій



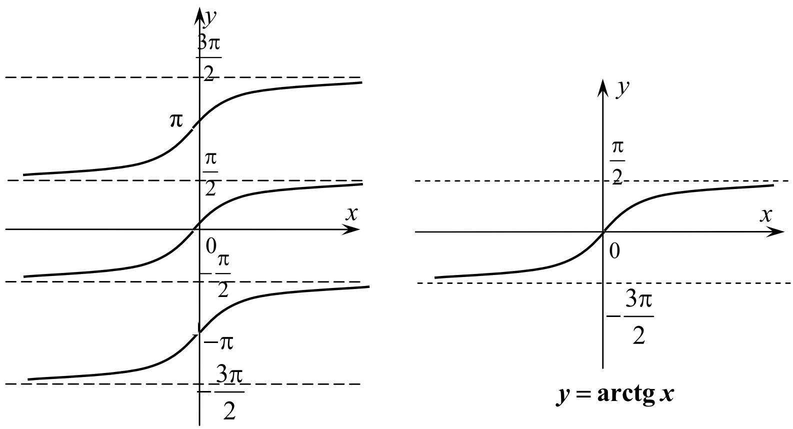
$y = \mathrm{Arcsin}\,x$ $\quad$ $y = \arcsin x$

Рисунок Ж.6



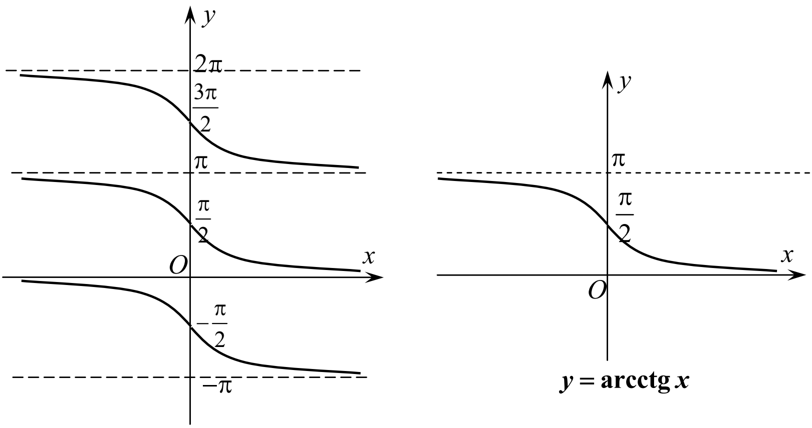
$y = \mathrm{Arccos}\,x$ $\quad$ $y = \arccos x$

Рисунок Ж.7



$y = \mathrm{Arctg}\,x$ $\quad$ $y = \mathrm{arctg}\,x$

Рисунок Ж.8



y* = Arcctg *x   ***y* = arcctg *x***

Рисунок Ж.9

Тригонометричні операції над оберненими тригонометричними функціями

1. $\sin(\arcsin x) = x,\ |x| \le 1,$ **2.** $\cos(\arccos x) = x,\ |x| \le 1,$

3. $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2},\ |x| \le 1,$ **4.** $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2},\ |x| \le 1,$

5. $\sin(\operatorname{arc\,tg} x) = \dfrac{x}{1 + x^2},\ |x| \le 1,$ **6.** $\cos(\operatorname{arc\,tg} x) = \dfrac{1}{1 + x^2},\ |x| \le 1,$

7. $\sin(\operatorname{arc\,ctg} x) = \dfrac{1}{1 + x^2},\ |x| \le 1,$ **8.** $\cos(\operatorname{arc\,ctg} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}},\ |x| \le 1,$

9. $\operatorname{tg}(\arcsin x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}},\ |x| \le 1,$ **10.** $\operatorname{ctg}(\arcsin x) = \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{x},\ |x| \le 1,$

11. $\operatorname{tg}(\arccos x) = \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{x},\ |x| \le 1,$ **12.** $\operatorname{ctg}(\arccos x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}},\ |x| \le 1,$

13. $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x) = x,\ |x| \le 1,$ **14.** $\operatorname{ctg}(\operatorname{arc\,tg} x) = \dfrac{1}{x},\ |x| \le 1,$

15. $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,ctg} x) = \dfrac{1}{x},\ |x| \le 1,$ **16.** $\operatorname{ctg}(\operatorname{arc\,ctg} x) = x,\ |x| \le 1.$

Обернені тригонометричні операції над тригонометричними функціями

1. $\arcsin(\sin x) = x - 2n\pi$, якщо $2n\pi - \frac{\pi}{2} \le x \le 2n\pi + \frac{\pi}{2}$, де $n \in Z$.
2. $\arcsin(\sin x) = -x + (2n+1)\pi$, якщо $(2n+1)\pi - \frac{\pi}{2} \le x \le (2n+1)\pi + \frac{\pi}{2}$, де $n \in Z$.
3. $\arccos(\cos x) = x - 2n\pi$, якщо $2n\pi \le x \le (2n+1)\pi$, де $n \in Z$.
4. $\arccos(\cos x) = -x + (2n+1)\pi$, якщо $(2n+1)\pi \le x \le 2(n+1)\pi$, де $n \in Z$.
5. $\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x) = x - n\pi$, якщо $n\pi - \frac{\pi}{2} < x < n\pi + \frac{\pi}{2}$, де $n \in Z$.
6. $\operatorname{arc\,ctg}(\operatorname{ctg} x) = x - n\pi$, якщо $n\pi < x < (n+1)\pi$, де $n \in Z$.

Парність та непарність обернених тригонометричних функцій

1. $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.
2. $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.
3. $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$.
4. $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$.

Зв'язок між оберненими тригонометричними функціями

1. $\arcsin x = \operatorname{sign} x \cdot \arccos\sqrt{1-x^2}$.

2. $\arcsin x = \operatorname{sign} x \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{1-x^2}\right)$.

3. $\arcsin x = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, якщо $-1 < x < 1$.

4. $\arcsin x = \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \pi$, якщо $-1 < x < 0$.

5. $\arcsin x = \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, якщо $0 < x < 1$.

6. $\arccos x = \pi - \arcsin\sqrt{1-x^2}$, якщо $-1 \le x \le 0$.

7. $\arccos x = \arcsin\sqrt{1-x^2}$, якщо $0 \le x \le 1$.

8. $\arccos x = \pi + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, якщо $-1 \le x \le 0$.

9. $\arccos x = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, якщо $0 < x < -1$.

10. $\arccos x = \operatorname{arcctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, якщо $-1 \le x \le 1$.

11. $\operatorname{arc\,tg} x = \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, якщо $-\infty \le x \le \infty$.

12. $\operatorname{arc\,tg} x = -\arccos \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, якщо $x \le 0$.

13. $\operatorname{arc\,tg} x = \arccos \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, якщо $x \ge 0$.

14. $\operatorname{arc\,tg} x = \operatorname{arcctg} \dfrac{1}{x} - \pi$, якщо $x < 0$.

15. $\operatorname{arc\,tg} x = \operatorname{arcctg} \dfrac{1}{x}$, якщо $x > 0$.

16. $\operatorname{arc\,tg} x = \operatorname{sign} x \left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{|x|} \right)$.

17. $\operatorname{arc\,ctg} x = \pi - \arcsin \dfrac{1}{1+x^2}$, якщо $x < 0$.

18. $\operatorname{arcctg} x = \arcsin \dfrac{1}{1+x^2}$, якщо $x > 0$.

19. $\operatorname{arcctg} x = \arccos \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

20. $\operatorname{arcctg} x = \pi + \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$, якщо $x < 0$.

21. $\operatorname{arcctg} x = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$, якщо $x > 0$.

22. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} = -\dfrac{\pi}{2}$, якщо $x < 0$.

23. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$, якщо $x > 0$.

24. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \dfrac{1-x}{1+x} = -\dfrac{3\pi}{4}$, якщо $x < -1$.

25. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \dfrac{1-x}{1+x} = \dfrac{\pi}{4}$, якщо $-1 < x$.

Формули додавання та віднімання обернених тригонометричних функцій

$$\textbf{1. } \arcsin x+\arcsin y=\begin{cases} \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right), & \text{якщо } xy\le 0 \text{ або } x^2+y^2\le 1;\\ \pi-\arcsin\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right), & \text{якщо } x>0,\ y>0 \text{ та } x^2+y^2>1;\\ -\pi-\arcsin\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right), & \text{якщо } x<0,\ y<0 \text{ та } x^2+y^2>1. \end{cases}$$

$$\textbf{2. } \arcsin x-\arcsin y=\begin{cases} \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}\right), & \text{якщо } xy\ge 0 \text{ або } x^2+y^2\le 1;\\ \pi-\arcsin\left(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}\right), & \text{якщо } x>0,\ y<0 \text{ та } x^2+y^2>1;\\ -\pi-\arcsin\left(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}\right), & \text{якщо } x<0,\ y>0 \text{ та } x^2+y^2>1. \end{cases}$$

$$\textbf{3. } \arccos x+\arccos y=\begin{cases} \arccos\left(xy-\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)}\right), & \text{якщо } x+y\ge 0;\\ 2\pi-\arccos\left(xy-\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)}\right), & \text{якщо } x+y<0. \end{cases}$$

$$\textbf{4. } \arccos x-\arccos y=\begin{cases} -\arccos\left(xy+\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)}\right), & \text{якщо } x\ge y;\\ \arccos\left(xy+\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)}\right), & \text{якщо } x<y. \end{cases}$$

$$\textbf{5. } \operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} y=\begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}, & \text{якщо } xy<1;\\ \pi+\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}, & \text{якщо } x>0 \text{ та } xy>1;\\ -\pi+\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}, & \text{якщо } x<0 \text{ та } xy>1. \end{cases}$$

$$\textbf{6. } \operatorname{arctg} x-\operatorname{arctg} y=\begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{1+xy}, & \text{якщо } xy>-1;\\ \pi+\operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{1+xy}, & \text{якщо } x>0 \text{ та } xy<-1;\\ -\pi+\operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{1+xy}, & \text{якщо } x<0 \text{ та } xy<-1. \end{cases}$$

Формули подвоєння аргументу для обернених тригонометричних функцій

1. $$2\arcsin x = \begin{cases} \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right), & \text{якщо } |x| \le \dfrac{\sqrt{2}}{2}; \\ \pi - \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right), & \text{якщо } \dfrac{\sqrt{2}}{2} < x \le 1; \\ -\pi - \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right), & \text{якщо } -1 < x < -\dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

2. $$2\arccos x = \begin{cases} 2\pi - \arccos\left(2x^2 - 1\right), & \text{якщо } -1 \le x < 0; \\ \arccos\left(2x^2 - 1\right), & \text{якщо } 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

3. $$2\operatorname{arctg} x = \begin{cases} \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}, & \text{якщо } x > 1; \\ -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}, & \text{якщо } x < -1; \\ \operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}, & \text{якщо } |x| < 1. \end{cases}$$

Формули ділення аргументу для обернених тригонометричних функцій

1. $$\frac{1}{2}\arcsin x = \begin{cases} -\arcsin\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}}, & \text{якщо } -1 \le x < 0; \\ \arcsin\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}}, & \text{якщо } 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

2. $$\frac{1}{2}\arccos x = \arccos\sqrt{\frac{1+x}{2}}, \text{ якщо } -1 \le x \le 1.$$

3. $$\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}, & \text{якщо } x \ne 0; \\ 0, & \text{якщо } x = 0. \end{cases}$$

Найпростіші тригонометричні рівняння

1. $\sin x = m$. $x = \begin{cases} (-1)^n \arcsin m + n\pi, & n \in Z, \quad |m| \le 1; \\ \varnothing, & |m| > 1. \end{cases}$

2. $\cos x = m$. $x = \begin{cases} \pm\arccos m + 2\pi n, & n \in Z, \quad |m| \le 1; \\ \varnothing, & |m| > 1. \end{cases}$

3. $\operatorname{tg} x = m$. $x = \operatorname{arctg} m + n\pi, \quad n \in Z.$

4. $\operatorname{ctg} x = m$. $x = \operatorname{arcctg} m + n\pi, \ n \in Z.$

Найпростіші тригонометричні нерівності

1. $\sin x > m$.
Якщо $m < -1$, то $x \in (-\infty, +\infty)$.
Якщо $-1 \le m < 1$, то

$$2\pi n + \arcsin m < x < \pi(2n+1) - \arcsin m, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

Якщо $m \ge 1$, то $x \in \varnothing$.

2. $\sin x < m$.
Якщо $m \le -1$, то $x \in \varnothing$.
Якщо $-1 < m \le 1$, то

$$\pi(2n+1) - \arcsin m < x < 2\pi(n+1) + \arcsin m, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

Якщо $m > 1$, то $x \in (-\infty, +\infty)$.

3. $\cos x > m$.
Якщо $m < -1$, то $x \in (-\infty, +\infty)$.
Якщо $-1 \le m < 1$, то

$$2\pi n - \arccos m < x < 2\pi n + \arccos m, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

Якщо $m \ge 1$, то $x \in \varnothing$.

4. $\cos x < m$.
Якщо $m \le -1$, то $x \in \varnothing$.
Якщо $-1 < m \le 1$, то

$$2\pi n + \arccos m < x < 2\pi(n+1) - \arccos m, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

Якщо $m > 1$, то $x \in (-\infty, +\infty)$.

5. $\operatorname{tg} x > m$.

$$2\pi n + \operatorname{arctg} m < x < \frac{\pi}{2}(2n+1) \text{ при будь-якому } m, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

6. $\mathbf{tg}\,\boldsymbol{x} < \boldsymbol{m}$.

$\frac{\pi}{2}(2n-1) < x < \operatorname{arctg} m + \pi n$ при будь-якому m, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

7. $\mathbf{ctg}\,\boldsymbol{x} > \boldsymbol{m}$.

$\pi n < x < \operatorname{arcctg} m + \pi n$ при будь-якому m, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

8. $\mathbf{ctg}\,\boldsymbol{x} < \boldsymbol{m}$.

$\pi n + \operatorname{arcctg} m < x < \pi(n+1)$ при будь-якому m, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

II. Гіперболічні функції

Визначення гіперболічних функцій

1. Гіперболічний синус: $\operatorname{sh}\alpha = \dfrac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}$.

2. Гіперболічний косинус: $\operatorname{ch}\alpha = \dfrac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}$.

3. Гіперболічний тангенс: $\operatorname{th}\alpha = \dfrac{\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha} = \dfrac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}$.

4. Гіперболічний котангенс: $\operatorname{cth}\alpha = \dfrac{\operatorname{ch}\alpha}{\operatorname{sh}\alpha} = \dfrac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}$.

5. Гіперболічний секанс: $\operatorname{sch}\alpha = \dfrac{2}{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}$.

6. Гіперболічний косеканс: $\operatorname{csch}\alpha = \dfrac{2}{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}$.

Парність та непарність гіперболічних функцій

1. Функція $\operatorname{sh}\alpha$ є непарна $\operatorname{sh}(-\alpha) = -\operatorname{sh}\alpha$.

2. Функція $\operatorname{ch}\alpha$ є непарна $\operatorname{ch}(-\alpha) = -\operatorname{sh}\alpha$.

3. Функція $\operatorname{th}\alpha$ є непарна $\operatorname{th}(-\alpha) = -\operatorname{sh}\alpha$.

4. Функція $\operatorname{cth}\alpha$ є непарна $\operatorname{cth}(-\alpha) = -\operatorname{sh}\alpha$.

Основні співвідношення між гіперболічними функціями

1. $\operatorname{ch}^2\alpha - \operatorname{sh}^2\alpha = 1$. **2.** $\operatorname{th}\alpha\,\operatorname{cth}\alpha = 1$.

3. $\mathrm{sh}\alpha=\dfrac{\mathrm{th}\alpha}{\sqrt{1-\mathrm{th}^2\alpha}}=\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{cth}^2\alpha-1}}$. **4.** $\mathrm{ch}\,\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{1-\mathrm{th}^2\alpha}}=\dfrac{\mathrm{cth}\,\alpha}{\sqrt{\mathrm{cth}^2\alpha-1}}$.

5. $\mathrm{th}\,\alpha=\dfrac{\mathrm{sh}\,\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{sh}^2\alpha}}=\dfrac{\sqrt{\mathrm{ch}^2\alpha-1}}{\mathrm{ch}\,\alpha}$. **6.** $\mathrm{cth}\,\alpha=\dfrac{\sqrt{1+\mathrm{sh}^2\alpha}}{\mathrm{sh}\,\alpha}=\dfrac{\mathrm{ch}\,\alpha}{\sqrt{\mathrm{ch}^2\alpha-1}}$.

7. $\mathrm{sch}\,\alpha=\dfrac{\mathrm{th}\,\alpha}{\mathrm{sh}\,\alpha}$. **8.** $\mathrm{csch}\,\alpha=\dfrac{\mathrm{cth}\,\alpha}{\mathrm{ch}\,\alpha}$.

9. $\mathrm{sch}^2\,\alpha+\mathrm{th}^2\,\alpha=1$. **10.** $\mathrm{sth}^2\,\alpha+\mathrm{csch}^2\,\alpha=1$.

Формули додавання аргументів

1. $\mathrm{sh}(\alpha+\beta)=\mathrm{sh}\,\alpha\;\mathrm{ch}\beta+\mathrm{ch}\,\alpha\;\mathrm{sh}\beta$. **2.** $\mathrm{sh}(\alpha-\beta)=\mathrm{sh}\,\alpha\;\mathrm{ch}\beta-\mathrm{ch}\,\alpha\;\mathrm{sh}\beta$.

3. $\mathrm{ch}(\alpha+\beta)=\mathrm{ch}\,\alpha\;\mathrm{ch}\beta+\mathrm{sh}\,\alpha\;\mathrm{sh}\beta$. **4.** $\mathrm{ch}(\alpha-\beta)=\mathrm{ch}\,\alpha\;\mathrm{ch}\beta-\mathrm{sh}\,\alpha\;\mathrm{sh}\beta$.

5. $\mathrm{th}(\alpha+\beta)=\dfrac{\mathrm{th}\,\alpha+\mathrm{th}\beta}{1+\mathrm{th}\,\alpha\;\mathrm{th}\beta}$. **6.** $\mathrm{th}(\alpha-\beta)=\dfrac{\mathrm{th}\,\alpha-\mathrm{th}\beta}{1-\mathrm{th}\,\alpha\;\mathrm{th}\beta}$.

7. $\mathrm{cth}(\alpha+\beta)=\dfrac{\mathrm{cth}\,\alpha\;\mathrm{cth}\beta+1}{\mathrm{cth}\beta+\mathrm{cth}\,\alpha}$. **8.** $\mathrm{cth}(\alpha-\beta)=\dfrac{\mathrm{cth}\,\alpha\;\mathrm{cth}\beta-1}{\mathrm{cth}\beta-\mathrm{cth}\,\alpha}$.

Формули подвійного кута

1. $\mathrm{sh}\,2\alpha=2\mathrm{sh}\,\alpha\;\mathrm{ch}\,\alpha$. **2.** $\mathrm{ch}\,2\alpha=\mathrm{ch}^2\alpha+\mathrm{sh}^2\alpha$.

3. $\mathrm{th}\,\alpha=\dfrac{2\mathrm{th}\,\alpha}{1+\mathrm{th}^2\alpha}$. **4.** $\mathrm{cth}\,2\alpha=\dfrac{\mathrm{cth}^2\alpha+1}{2\mathrm{cth}\,\alpha}$.

Формули половинного кута

1. $2\mathrm{sh}^2\dfrac{\alpha}{2}=\mathrm{ch}\,\alpha-1$. **2.** $2\mathrm{ch}^2\dfrac{\alpha}{2}=\mathrm{ch}\,\alpha+1$.

3. $\mathrm{th}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\mathrm{sh}\,\alpha}{\mathrm{ch}\,\alpha+1}=\dfrac{\mathrm{ch}\,\alpha-1}{\mathrm{sh}\,\alpha}$. **4.** $\mathrm{cth}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\mathrm{sh}\,\alpha}{\mathrm{ch}\,\alpha-1}=\dfrac{\mathrm{ch}\,\alpha+1}{\mathrm{sh}\,\alpha}$.

Формули перетворення суми гіперболічних функцій на добуток

1. $\mathrm{sh}\,\alpha+\mathrm{sh}\beta=2\,\mathrm{sh}\dfrac{\alpha+\beta}{2}\;\mathrm{ch}\dfrac{\alpha-\beta}{2}$. **2.** $\mathrm{sh}\,\alpha-\mathrm{sh}\beta=2\,\mathrm{sh}\dfrac{\alpha-\beta}{2}\;\mathrm{ch}\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

3. $\mathrm{ch}\,\alpha+\mathrm{ch}\beta=2\,\mathrm{ch}\dfrac{\alpha+\beta}{2}\;\mathrm{ch}\dfrac{\alpha-\beta}{2}$. **3.** $\mathrm{ch}\,\alpha-\mathrm{ch}\beta=2\,\mathrm{sh}\dfrac{\alpha+\beta}{2}\;\mathrm{sh}\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

4. $\mathrm{th}\,\alpha+\mathrm{th}\beta=\dfrac{\mathrm{sh}(\alpha+\beta)}{\mathrm{ch}\,\alpha\;\mathrm{ch}\beta}$. **5.** $\mathrm{th}\,\alpha-\mathrm{th}\beta=\dfrac{\mathrm{sh}(\alpha-\beta)}{\mathrm{ch}\,\alpha\;\mathrm{ch}\beta}$.

6. $\mathrm{cth}\,\alpha+\mathrm{th}\beta=\dfrac{\mathrm{sh}(\beta+\alpha)}{\mathrm{sh}\,\alpha\;\mathrm{sh}\beta}$. **7.** $\mathrm{tg}\,\alpha=-i\,\mathrm{th}\,i\alpha$.

Формули перетворення добутку гіперболічних функцій на суму

1. $2\operatorname{sh}\alpha\ \operatorname{sh}\beta = \operatorname{ch}(\alpha+\beta) - \operatorname{ch}(\alpha-\beta)$. **2.** $2\operatorname{ch}\alpha\operatorname{ch}\beta = \operatorname{ch}(\alpha+\beta) + \operatorname{ch}(\alpha-\beta)$.

3. $2\operatorname{sh}\alpha\ \operatorname{ch}\beta = \operatorname{sh}(\alpha+\beta) + \operatorname{sh}(\alpha-\beta)$.

Гіперболічні функції, подані через гіперболічний тангенс половинного кута

1. $\operatorname{sh}\alpha = \dfrac{2\operatorname{th}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{th}^2\frac{\alpha}{2}}$. **2.** $\operatorname{ch}\alpha = \dfrac{1+\operatorname{th}^2\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{th}^2\frac{\alpha}{2}}$. **3.** $\operatorname{th}\alpha = \dfrac{2\operatorname{th}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{th}^2\frac{\alpha}{2}}$.

Формули перетворювання степенів

1. $\operatorname{sh}^2\alpha = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}2\alpha - 1)$. **2.** $\operatorname{ch}^2\alpha = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}2\alpha + 1)$.

3. $\operatorname{th}^2\alpha = \dfrac{\operatorname{ch}2\alpha - 1}{\operatorname{ch}2\alpha + 1}$. **4.** $(\operatorname{sh}\alpha + \operatorname{ch}\alpha)^n = \operatorname{sh} n\alpha + \operatorname{ch} n\alpha$.

Співвідношення між тригонометричними та гіперболічними функціями

1. $\cos\alpha = \operatorname{ch} i\alpha$. **2.** $\sin\alpha = -i\operatorname{sh} i\alpha$. **3.** $\operatorname{tg}\alpha = -i\operatorname{th} i\alpha$. **4.** $\operatorname{ctg}\alpha = i\operatorname{cth} i\alpha$.

5. $\operatorname{ch}\alpha = \cos i\alpha$. **6.** $\operatorname{sh}\alpha = -i\sin i\alpha$. **7.** $\operatorname{th}\alpha = -i\operatorname{tg} i\alpha$. **8.** $\operatorname{cth}\alpha = i\operatorname{ctg} i\alpha$.

ЗАУВАЖЕННЯ. Символом *i* позначено уявну одиницю: $i = \sqrt{-1}$, якщо $i^2 = -1$.

Гіперболічні функції числового аргументу

1.Функція гіперболічний синус $y = \operatorname{sh} x$

Область визначення: $x \in (-\infty, +\infty)$.

Область значень: $y \in (-\infty, +\infty)$.

2. Функція гіперболічний косинус $y = \operatorname{ch} x$

Область визначення: $x \in (-\infty, +\infty)$.

Область значень: $y \in [1, +\infty)$.

3.Функція гіперболічний тангенс $y = \operatorname{th} x$

Область визначення: $x \in (-\infty, +\infty)$.

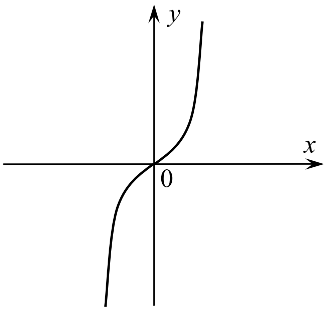
Область значень: $y \in (-1, 1)$.

4.Функція гіперболічний котангенс $y = \mathrm{cth}\,x$

Область визначення: $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

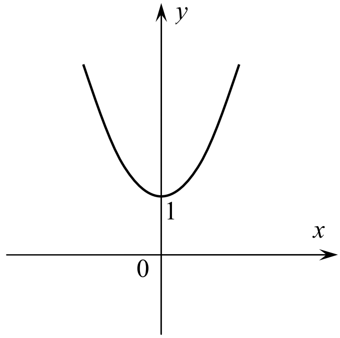
Область значень: $y \in (-\infty, -1) \cup (+1, +\infty)$.

Графічне зображення гіперболічних функцій числового аргументу



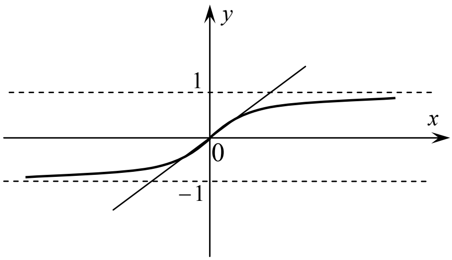
$y = \mathbf{sh}\,x$

Рисунок Ж.10



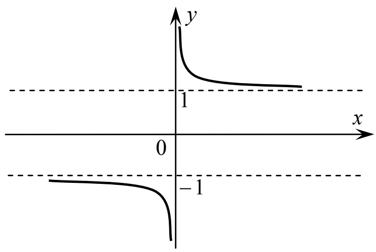
$y = \mathbf{ch}\,x$

Рисунок Ж.11



$y = \mathbf{th}\,x$

Рисунок Ж.12



$y = \mathbf{cth}\,x$

Рисунок Ж.13

Обернені гіперболічні функції

Функції, обернені до гіперболічних функцій, називаються ***Ареафункціями.***

1. **Функція Ареасинус $y = \mathrm{Arsh}\,x$**
   Область визначення $x \in (-\infty, +\infty)$.
   Область значень $y \in (-\infty, +\infty)$.

2. **Функція Ареакосинус $y = \mathrm{Arch}\,x$**
   Область визначення $x \in [1, +\infty)$.

Область значень: $y \in [-\infty, 0\ )$ або $0 \le y < +\infty$, оскільки обирається лише одна вітка графіка.

Функція $y = \operatorname{Arch} x$ двозначна, але зазвичай використовують лише одну з віток цієї функції, яка набуває лише невід’ємних значень. Таку вітку називають ***головною***. За таких умов функція $y = \operatorname{Arch} x$ стає однозначною з областю визначення $x \in [1, +\infty)$. та областю значень $y \in [0, \infty)$.

3. Функція Ареатангенс $y = \mathbf{Arth}\,x$

Область визначення: $x \in (-1, 1)$.

Область значень: $y(-\infty, \infty)$.

4. Функція Ареакотангенс $y = \mathbf{Arcth}\,x$

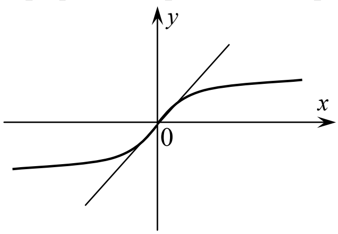
Область визначення: $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Область значень: $y \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Парність та непарність обернених гіперболічних функцій

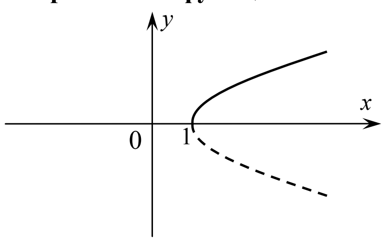
1. Функція $\operatorname{Arsh} x$ є непарна: $\operatorname{Arsh}(-x) = -\operatorname{Arsh} x$.
2. Функція $\operatorname{Arth} x$ є непарна: $\operatorname{Arth}(-x) = -\operatorname{Arth} x$.
3. Функція $\operatorname{Arcth} x$ є непарна: $\operatorname{Arcth}(-x) = -\operatorname{Arcth} x$.

Графічне зображення обернених гіперболічних функцій



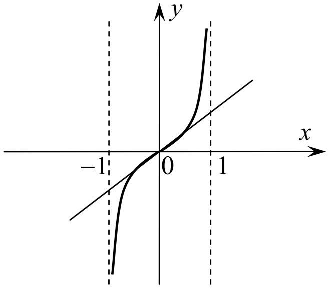
y*=Arsh *x

Рисунок Ж.14



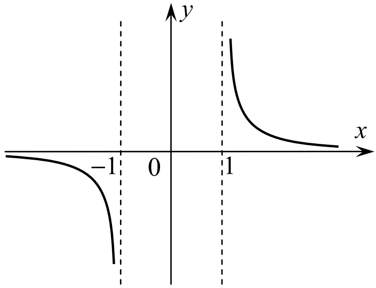
y* = Arch *x

Рисунок Ж.15



y* = Arth *x

Рисунок Ж.16



y* = Arcth *x

Рисунок Ж.17

Основні співвідношення між оберненими гіперболічними функціями

1. $\operatorname{Arsh}\alpha + \operatorname{Arsh}\beta = \operatorname{arsh}\left(\alpha\sqrt{\beta^2+1} + \beta\sqrt{\alpha^2+1}\right).$

2. $\operatorname{Arsh}\alpha + \operatorname{Arsh}\beta = \operatorname{arch}\left(\sqrt{\alpha^2+1}\sqrt{\beta^2+1} + \alpha\beta\right).$

3. $\operatorname{Arsh}\alpha - \operatorname{Arsh}\beta = \operatorname{arsh}\left(\alpha\sqrt{\beta^2+1} - \beta\sqrt{\alpha^2+1}\right).$

4. $\operatorname{Arsh}\alpha - \operatorname{Arsh}\beta = \operatorname{arch}\left(\sqrt{\alpha^2+1}\sqrt{\beta^2+1} - \alpha\beta\right).$

5. $\operatorname{Arch}\alpha + \operatorname{Arch}\beta = \operatorname{arch}\left(\alpha\beta + \sqrt{\alpha^2-1}\,\sqrt{\beta^2-1}\right).$

6. $\operatorname{Arch}\alpha + \operatorname{Arch}\beta = \operatorname{arsh}\left(\beta\sqrt{\alpha^2-1} + \alpha\sqrt{\beta^2-1}\right).$

7. $\operatorname{Arch}\alpha - \operatorname{Arch}\beta = \operatorname{arch}\left(\alpha\beta - \sqrt{\alpha^2-1}\,\sqrt{\beta^2-1}\right).$

8. $\operatorname{Arch}\alpha - \operatorname{Arch}\beta = \operatorname{arsh}\left(\beta\sqrt{\alpha^2-1} - \alpha\sqrt{\beta^2-1}\right).$

9. $\operatorname{Arth}\alpha + \operatorname{Arth}\beta = \operatorname{arth}\dfrac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta}.$

10. $\operatorname{Arth}\alpha - \operatorname{Arth}\beta = \operatorname{arth}\dfrac{\alpha-\beta}{1-\alpha\beta}.$

Зв’язок між оберненими гіперболічними та елементарними функціями

1. $\operatorname{Arsh}x = \left(\ln x + \sqrt{x^2+1}\right).$

2. $\operatorname{Arch}x = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2-1}\right),$ якщо $x \ge 1$ та $-\infty < y \le 0.$

3. $\operatorname{Arch}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right),$ якщо $x \ge 1$ та $-\infty \le y < 0.$

4. $\operatorname{Arth}x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x},\ |x| < 1.$

5. $\operatorname{Arcth}x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1},\ |x| > 1.$

ЗАУВАЖЕННЯ. Формула 3 відповідає головній вітці графіка функції $\operatorname{Arch}x$, а формула 4 − нижній вітці графіка функції $\operatorname{Arch}x$.

Співвідношення між оберненими тригонометричними та оберненими гіперболічними функціями

1. $\arccos\alpha = i\,\mathrm{Arch}\,\alpha.$ **2.** $\arcsin\alpha = -i\,\mathrm{Arsh}\,i\alpha.$

3. $\mathrm{arctg}\,\alpha = -i\,\mathrm{Arth}\,i\alpha.$ **4.** $\mathrm{arcctg}\,\alpha = i\,\mathrm{Arcth}\,i\alpha.$

5. $\mathrm{Arch}\,\alpha = i\arccos\alpha.$ **6.** $\mathrm{Arsh}\,\alpha = -i\arcsin i\alpha.$

7. $\mathrm{Arth}\,\alpha = -i\,\mathrm{arctg}\,i\alpha.$ **8.** $\mathrm{Arcth}\,\alpha = i\,\mathrm{arcctg}\,i\alpha.$

ЗАУВАЖЕННЯ. Символом i позначено уявну одиницю: $i = \sqrt{-1},$ якщо $i^2 = -1.$

Зв'язок між оберненими гіперболічними та оберненими тригонометричними функціями

1. $\mathrm{Arsh}\,x = \pm\mathrm{Arch}\sqrt{x^2+1}.$

2. $\mathrm{Arsh}\,x = \mathrm{Arth}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$

3. $\mathrm{Arsh}\,x = \mathrm{Arcth}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}.$

4. $\mathrm{Arch}\,x = \pm\mathrm{Arsh}\sqrt{x^2-1},$ де $1 < x < \infty.$

5. $\mathrm{Arch}\,x = \pm\mathrm{Arth}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x},$ де $1 < x < \infty.$

6. $\mathrm{Arch}\,x = \pm\mathrm{Arcth}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}},$ де $1 < x < \infty.$

7. $\mathrm{Arth}\,x = \mathrm{Arsh}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}},$ де $|x| < 1.$

8. $\mathrm{Arth}\,x = \pm\mathrm{Arch}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},$ де $|x| < 1.$

9. $\mathrm{Arth}\,x = \mathrm{Arcth}\dfrac{1}{x},$ де $-1 < x < 0$ та $0 < x < 1.$

10. $\mathrm{Arcth}\,x = \mathrm{Arsh}\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}},$ де $|x| > 1.$

11. $\mathrm{Arcth}\,x = \pm\mathrm{Arch}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}},$ де $|x| > 1.$

12. $\mathrm{Arcth}\,x = \mathrm{Arth}\dfrac{1}{x},$ де $|x| > 1.$

Д о д а т о к И

Побудова графіків функцій у декартовій системі координат за допомогою елементарних перетворювань

Позначення: $f(x)$ – функція, графік якої береться за основу*;* k – стала

№	Задана функція	Елементарні перетворювання графіка функції $f(x)$ до графіка заданої функції
1	$y = f(x) + k$	Виконується паралельне перенесення графіка функції $f(x)$ уздовж осі Oy на $\lvert k \rvert$ одиниць в додатному напрямку осі Oy, якщо $k > 0$ та на $\lvert k \rvert$ одиниць у від'ємному напрямку осі Oy, якщо $k < 0$.
2	$y = f(x + k)$	Виконується паралельне перенесення графіка функції $f(x)$ вздовж осі Ox на $\lvert k \rvert$ одиниць в додатному напрямку осі Ox, якщо $k < 0$ та на $\lvert k \rvert$ одиниць у від'ємному напрямку осі Ox, якщо $k > 0$.
3	$y = -f(x)$	Виконується дзеркальне відображення графіка функції $f(x)$ відносно осі Ox.
4	$y = k f(x)$, де $k > 1$	Виконується розтягування графіка $f(x)$ у k разів уздовж осі Oy.
5	$y = k f(x)$, де $0 < k < 1$	Виконується стискання графіка $f(x)$ у k разів уздовж осі Oy.
6	$y = k f(x)$, де $k < 0$	Виконуються послідовно перетворення 3 та 4, якщо $\lvert k \rvert > 1$ або перетворення 3 та 5, якщо $\lvert k \rvert < 1$.
7	$y = f(-x)$	Виконується дзеркальне відображення графіка функції $f(x)$ відносно осі Oy.
8	$y = f(k x)$, де $k > 1$	Виконується стискання графіка $f(x)$ у k разів уздовж осі Ox.
9	$y = f(k x)$, де $0 < k < 1$	Виконується розтягування графіка $f(x)$ у k разів уздовж осі Ox.
10	$y = f(k x)$, де $k < 0$	Виконуються послідовно перетворювання 7 та 8, якщо $\lvert k \rvert > 1$ або перетворення 7 та 9, якщо $\lvert k \rvert < 1$
11	$y = \lvert f(x) \rvert$	Залишаються без змін ті частини графіка, для яких $y \geq 0$, і виконується дзеркальне відображення відносно осі Ox тих частин графіка, для яких $y < 0$.
12	$y = f(\lvert x \rvert)$	Залишаються без змін ті частини графіка, для яких $x \geq 0$, а ті частини графіка, для яких $x < 0$, замінюються на дзеркальне відображення відносно осі Oy тих частин графіка, для яких $x \geq 0$.

СПИСОК ДОДАТКОВИХ ДЖЕРЕЛ

1. **Аксенов А.П.** Математический анализ: в 2-х частинах / А.П. Аксенов. – СПб.: Изд. СПбГПУ, 2004. – Ч.1. – 614 с.; – Ч.2. – 759 с.
2. **Баврин И.И.** Курс высшей математики / И.И. Баврин. – М.: Владос, 2004. – 560 с.
3. **Белько Н.В.** Высшая математика для экономистов / Н.В. Белько, К.К. Кузьмич. – М.: Новое знание, 2005. – 114 с.
4. **Берман Г.Н.** Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман. – М.: Гос. Изд-во физ.-мат. лит., 1963. – 443 с.
5. **Берман Г.Н.** Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман. – СПб.: Профессия, 2007. – 432 с.
6. **Бермант А.Ф.** Краткий курс математического анализа / А.Ф. Бермант, И.Г. Араманович. – М.: Наука, 1973. – 736 с.
7. **Богомолов М.В.** Практические занятия по математике / М.В. Богомолов. – [3-е изд.]. – перераб. и доп. – К.: Высш. шк., 1990. – 495 с.
8. **Богомолов М.В.** Практические занятия по математике / М.В. Богомолов. – М.: Высш. шк., 2008. – 495 с.
9. **Бутузов В.Ф.** Математический анализ в вопросах и задачах / В.Ф. Бутузов и др. – М.: Высш. шк., 1988. – 288 с.
10. **Виленкин Н.Я.** Задачник по курсу математического анализа / Н.Я. Виленкин и др. – М.: Просвещение, 1971. – Ч.1. – 350 с.
11. **Виноградова И.А.** Задачи и упражнения по математическому анализу / Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А.; под ред. В.А. Садовничего. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. – 416 с.
12. **Выгодский М.Я.** Справочник по высшей математике / М.Я. Выгодский. – М.: Наука, 1977. – 872 с.
13. **Глаголев А.А.** Курс высшей математики / А.А. Глаголев, Т.В. Солнцева. – М.: Высш. шк., 1971. – 650 с.
14. **Данко П.Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах / Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевников Т.Я. – М.: Высш. шк., 1986. – Ч.1. – 304 с.; Ч.2. – 416 с.
15. **Демидович Б.П.** Сборник задач по высшей математике / Б.П. Демидович. – М.: Наука, 1981. – 544 с.
16. **Демидович Б.П.** Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б.П. Демидович. – М.: Наука, 1990. – 624 с.
17. **Дороговцев А.Я.** Математический анализ / А.Я. Дороговцев. – К.: Лыбидь, 1993. – Ч.1. – 320 с.; – Ч.2. – 304 с.
18. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / под ред. **Б.П. Демидовича**. – М.: Изд-во: Астрель, АСТ, 2001. – 496 с.
19. **Запорожец Г.И.** Руководство к решению задач по математическому анализу / Г.И. Запорожец. – М.: Высш. шк., 1966. – 460 с.
20. **Зорич В.А.** Математический анализ. – М.: Наука, 1981. – Т.1. – 544 с.; 1984. – Т.2. – 640 с.

21. **Ильин В.А.** Математический анализ / Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. – М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1985. – Т.1. – 664 с.; 2007. – Т.2. – 353 с.
22. **Ильин В.А.** Основы математического анализа / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – М.: Наука, 1971. – Т.1. – 599 с.; 1973. – Т.2. – 447 с.
23. **Картавов С.А.** Математические термины / С.А. Картавов. – К.: Вища школа. 1988. – 295 с.
24. **Клепко В.Ю.** Вища математика в прикладах і задачах / В.Ю. Клепко, В.Л. Голець. – К.: Вид-во ЦУЛ, 2009. – 592 с.
25. **Кудрявцев В.А.** Курс математического анализа / В.А. Кудрявцев. – М.: Высш. шк., 1988. – 712 с.
26. **Кудрявцев В.А.** Краткий курс высшей математики / В.А. Кудрявцев, Б.П. Демидович. – М.: Наука, 1989. – 576 с.
27. **Кудрявцев Л.Д.** Курс математического анализа: в 3-х томах / Л.Д. Кудрявцев. – М.: Высш. шк., 2003. – Т.1. – 704 с.; 2004. – Т.2. – 720 с.; 2006. – Т.3. – 351 с.
28. **Кудрявцев Л.Д.** Краткий курс математического анализа: в 2-х томах / Л.Д. Кудрявцев. – М.: Наука, 2005. – Т.1. – 400 с.; Т.2. – 424 с.
29. **Литвин І.І.** Вища математика / Литвин І.І., Конанчук Г.О., Желєзняк Г.О. – К.: Вид-во ЦУЛ, 2009. – 368 с.
30. **Лунгу К.Н.** Сборник задач по высшей математике / К.Н. Лунгу и др. – М.: Абрис Пресс, 2004. – 591 с.
31. **Ляшко И.И.** Основы классического и современного математического анализа / Ляшко И.И., Емельянов В.Ф., Боярчук А.К. – К.: Вища школа, 1988. – 591 с.
32. **Никольский С.М.** Курс математического анализа / С.М. Никольский. – М.: Высш. шк., 2001. – 592 с.
33. **Пискунов Н.С.** Диффренециальное и интегральное исчисления: для втузов / Н.С. Пискунов. – М.: Наука, 2001. – Т.1. – 576 с.; – Т.2. – 544 с.
34. **Поддубный Г.В.** Математический анализ для радиоинженеров / Г.В. Поддубный, Р.К. Романовский. – М.: Воениздат, 1976. – 344 с.
35. **Решетняк Ю.Г.** Курс математического анализа / Ю.Г. Решетняк. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1999. – Ч.1, кн. 2. – 512 с.
36. Сборник задач по курсу высшей математике / [Кручкович Г.И., Гутарин Н.И., Дюбюк П.Е.]; под ред. Г.И. Кручковича. – М.: Высш. шк. – 1973. – 576 с.
37. Сборник задач по математике. Линейная алгебра и основы математического анализа / под ред. А.В. Ефимова. – М.: Наука, 1986. – 462 с.
38. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / [Ляшко С.И., Боярчук А.К., Александрович И.Н. и др.]. – Изд-во: Вильямс, 2001. – Ч.1. – 432 с.
39. Справочное пособие по математическому анализу / [И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Я.Г. Гай, Г.П. Головач]. – М.: Изд-во ЛКИ, 2007. – 224 с.
40. **Стрелковська І.В.** Вища математика в телекомунікаціях / Стрелковська І.В., Буслаєв А.Г., Паскаленко В.М. – Одеса: ВМВ, 2009. – 620 с.

41. **Стрелковська І.В.** Вища математика для фахівців в галузі зв’язку / Стрелковська І.В., Буслаєв А.Г., Паскаленко В.М. – Одеса: ВМВ, 2010. – 620 с.
42. **Толстов Г.П.** Элементы математического анализа / Г.П. Толстов. – М.: Наука, 1974. – Т.1. – 516 с.; 1976. – Т.2. – 464 с.
43. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г.М. Фихтенгольц. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – Т.1. – 616 с.; – Т.2. – 810 с.; – Т.3. – 662 с.
44. **Фролов С.В.** Курс высшей математики / С.В. Фролов, Р.Я. Шостак. – М.: Высш. шк., 1973. – 400 с.
45. **Шведов И.А.** Компактный курс математического анализа / И.А. Шведов; под ред. К.В. Сторожука. – Новосибирск: НГУ, 2001. – Ч.1. – 112 с.; 2003. – Ч.2. – 88 с.
46. **Шварц Л.** Анализ / Л. Шварц. – М.: Мир, 1972. – Т.1. – 824 с.; – Т.2. – 528 с.
47. **Шипачев В.С.** Курс высшей математики / В.С. Шипачев. – М.: Велби; Проспект, 2004. – 600 с.
48. **Шипачев В.С.** Высшая математика / В.С. Шипачев. – М.: Высш. шк., 1997. – 479 с.

Навчальне видання

Стрелковська Ірина Вікторівна
Буслаєв Анатолій Григорович
Паскаленко Вікторія Миколаївна

Вища математика для фахівців в галузі зв'язку

Ч. II
Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функцій однієї та кількох змінних

Підручник для студентів втузів

за заг. редакцією проф. П. П. Воробієнка

Здано до набору 22.07.2010
Підписано до друку 12.08.2010.
Формат 60/90/16. Гарнітура Таймс.
Друк офсетний. Ум. др. арк 37,25.
Наклад 1000 прим. Зам. № 01343.

Віддруковано з готового оригінал-макету
у друкарні видавництва „ВМВ"
м. Одеса, пр. Добровольського, 82-а, тел. 751-14-87