Міністерство транспорту та зв'язку України
Державний департамент з питань зв'язку та інформатизації
Одеська національна академія зв'язку ім. О.С. Попова

Кафедра вищої математики

ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Одеса 2004

Укладачі: ***Паскаленко В.М., Стрілковська І.В.***

Рецензент – ***Соколов Л.І.***

Редактор – ***Вишневська В.М.***

1. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

1.1. Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла

1.1.1. Площа криволінійної трапеції

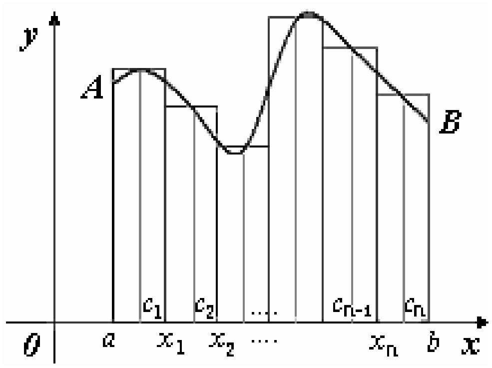


Рисунок 1

Нехай на сегменті [*a;b*] дана неперервна невід'ємна функція $y=f(x)$. Криволінійною трапецією називається фігура, яка утворена відрізком [*a;b*] на осі *OX*, прямими, що задані рівняннями $x=a$ та $x=b$ і графіком функції $y=f(x)$.

Знайдемо площу криволінійної трапеції ***aABв***. Площа такої фігури не може бути знайдена за допомогою відомих з елементарної геометрії формул. Отже, будемо шукати інший спосіб.

Відрізок [*a;b*] розіб'ємо на ***n*** сегментів за допомогою точок розподілу: $\boldsymbol{a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b}$. Довжини часткових сегментів будемо позначати так: $\boldsymbol{\Delta x_1 = x_1 - x_0;\ \Delta x_2 = x_2 - x_1;\ ...;\ \Delta x_n = x_n - x_{n-1}}$. Через точки розподілу проведемо вертикальні прямі, внаслідок чого уся криволінійна трапеція розбивається на ***n*** частинних криволінійних трапецій. У кожному частковому сегменті довільним чином виберемо проміжні точки $\boldsymbol{c_1, c_2, c_3, ..., c_n}$. Через них також проведемо вертикальні прямі. На кожному частковому сегменті побудуємо прямокутники, основою яких є часткові сегменти, а висоти дорівнюють значенню функції у проміжних точках. Площа ***k***-го прямокутника знаходиться за формулою $\boldsymbol{f(c_k)\Delta x_k}$, де ***k* = 1, 2, 3, …, *n***. Внаслідок такого побудування отримаємо ступенькову фігуру, площа якої $\boldsymbol{S_n}$ знаходиться як сума площ усіх прямокутників.

$$S_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\,\Delta x_n$$

або

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k .$$

Площа S_n цієї ступенькової фігури наближено дорівнює площі *S* криволінійної трапеції.

Будемо тепер збільшувати кількість часткових сегментів. Позначимо через **λ** довжину найбільшого часткового сегменту.

$$\lambda = \max_{1\le k\le n} \Delta x_k .$$

Якщо $\lambda \to 0$,то кількість часткових сегментів буде необмежено збільшуватись, а довжини усіх часткових сегментів будуть прямувати до нуля. Коли існує скінчена границя S площі ступенькової фігури за умови, що $\lambda \to 0$, то ця границя вважається площею криволінійної трапеції

$$S = \lim_{\lambda \to 0} S_n = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k .$$

Ця границя не повинна залежати від способу розбивання відрізка на часткові та від способу вибору проміжних точок.

Слід зауважити, що таким самим способом може бути розв’язано безліч задач геометричних, фізичних, хімічних і т. і. У зв’язку з цим, розглянутий спосіб розв’язування задач виділений як математичне поняття, вже незалежне від певного геометричного чи фізичного змісту.

1.2. Поняття визначеного інтеграла

Нехай функція *f(x)* неперервна на сегменті [*a;b*].

1. Розіб’ємо сегмент [*a;b*] на $\boldsymbol{n}$ часткових сегментів точками розподілу $\boldsymbol{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots x_n = b}$.
2. Довжини часткових сегментів будемо позначати $\boldsymbol{\Delta x_k}$, де $\boldsymbol{k = 1; 2; \ldots; n}$.
3. Довільним чином у кожному частковому сегменті вибираємо проміжні точки $\boldsymbol{c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n}$.
4. Складаємо суму S_n, яка називається ***n*-ю інтегральною сумою**

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k .$$

Припустимо, що $n \to \infty$ і при цьому $\lambda = \max_{1 \le k \le n} \Delta x_k \to 0$.

5. Розбиття сегменту [*a; b*] на часткові, а також вибір проміжних точок може відбуватись тим чи іншим чином.

Якщо для кожної інтегральної суми S_n існує скінченна границя S за умови, що довжина λ найбільшого часткового проміжку прямує до нуля, то така границя називається **визначеним інтегралом Рімана** від функції *f(x)* на сегменті [*a; b*] :

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx . \qquad (1.1)$$

Числа ***a*** та ***в*** називаються відповідно нижньою та верхньою межами інтеграла.

Примітка*:* Якщо **f(x) = 1**, то

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b - a.$$

1.3. Умови інтегрованості функції

Означення. Функція ***f(x),*** визначена на сегменті [$a;b$], називається **інтегрованою на сегменті [*a;b*],** якщо існує визначений інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Теорема. Якщо функція ***y = f(x)*** неперервна на сегменті [$a;b$], то вона інтегрована на сегменті [$a; b$].

Зауваження. Якщо функція ***y=f(x)*** інтегрована на сегменті [$a;b$], то вона не обов'язково неперервна на сегменті [$a;b$].

Теорема. Якщо функція ***y=f(x)*** визначена та монотонна на сегменті [$a;b$], то вона інтегрована на сегменті [$a;b$].

Теорема. Якщо функція ***y=f(x)*** обмежена на сегменті [$a;b$] та має на ньому скінчену кількість точок розриву, то вона інтегрована на сегменті [$a;b$].

Теорема. Якщо функція ***y=f(x)*** інтегрована на сегменті [$a;b$], то вона обмежена на сегменті [$a;b$].

1.4. Найпростіші властивості визначеного інтеграла

Теорема 1. Визначений інтеграл від алгебраїчної суми двох інтегрованих функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від цих функцій, тобто

$$\int\limits_a^b \left(f_1(x)\pm f_2(x)\right)dx=\int\limits_a^b f_1(x)dx\pm\int\limits_a^b f_2(x)dx. \qquad (1.2)$$

Доведення

$$\int\limits_a^b \left(f_1(x)\pm f_2(x)\right)dx=\lim_{\substack{\max\Delta x_k\to 0\\ 1\le k\le n}}\sum_{k=1}^{n}\left(f_1(c_k)\pm f_2(c_k)\right)\Delta x_k=$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f_1(c_k)\Delta x_k\pm\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f_2(c_k)\Delta x_k=\int\limits_a^b f_1(x)dx+\int\limits_a^b f_2(x)dx$$

Теорема 2. Сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла, тобто,

$$\int\limits_a^b kf(x)dx=k\int\limits_a^b f(x)dx. \qquad (1.3)$$

Доведення

$$\int_a^b kf(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} kf(c_k)\Delta x_k = k\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = k\int_a^b f(x)\,dx.$$

Теорема 3. Визначений інтеграл залежить від виду підінтегральної функції та меж інтегрування, а від того, якою буквою позначена змінна інтегрування, визначений інтеграл не залежить, тобто,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(z)\,dz. \tag{1.4}$$

Доведення

За означенням визначений інтеграл – це число, яке не залежить від позначення змінної інтегрування.

Теорема 4. Якщо у визначеному інтегралі поміняти місцями межі інтегрування, то знак інтеграла зміниться на протилежний, тобто,

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx. \tag{1.5}$$

Доведення

У процесі побудування інтегральної суми S_n ми виходили з умови, що $a<b$. Якщо ж припустити, що $a>b$, то це означає, що часткові сегменти у цьому разі будуть визначатись за формулою:

$$\Delta x_k = x_{k-1} - x_k = -(x_k - x_{k-1}).$$

Отже, інтегральна сума у цьому випадку протилежна по знаку побудованій раніше інтегральній сумі, коли $a<b$.

Значить,

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Теорема 5. Інтеграл, межі інтегрування у якому співпадають, дорівнює нулю, тобто,

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0. \tag{1.6}$$

Доведення

В інтегралі $\int_a^a f(x)\,dx$ межі інтегрування співпадають. Отже, при побудуванні інтегральної суми маємо:

$$a - a = 0;\ \Delta x_k = \frac{0}{n} = 0,\ S_n = f(c_k)0 = 0, \text{ а значить, } \int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Теорема 6. Для будь-яких чисел ***a, b, c*** є слушною рівність

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,. \qquad (1.7)$$

Доведення

1. Припустимо, що $a < c < b$.

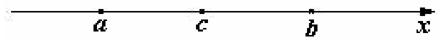


Рисунок 2

При побудуванні інтегральної суми вважалось, що границя інтегральної суми не залежить від того, яким чином сегмент [$a;\ b$] розбивається на часткові сегменти. Отже, ми можемо побудувати інтегральну суму так, щоб точка $\boldsymbol{c}$ ввійшла до складу точок розподілу:

$$\boldsymbol{a = x_0;\ x_1;\ x_2;\ x_3;...;\ x_i = c;\ x_{i+1};...;\ x_n = b.}$$

Тоді

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{i} f(c_k)\Delta x_k + \sum_{k=i+1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = S_n^* + S_n^{**}.$$

Інтегральна сума S_n побудована на сегменті [$a;b$]; S_n^* – на сегменті [$a;c$]; S_n^{**} – на сегменті [$c;b$]. Зробивши граничний перехід, отримаємо таку рівність:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

2. Припустимо, що $c < a < b$.

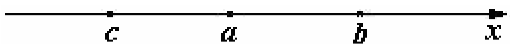


Рисунок 3

У відповідності з попереднім випадком виходить:

$$\int_c^b f(x)\,dx = \int_c^a f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx.$$

Звідси

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^b f(x)dx - \int_c^a f(x)dx..$$

Помінявши місцями межі інтегрування в останньому інтегралі, отримаємо знов рівність

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

3. Нехай тепер $a < b < c$.

Рекомендуємо довести теорему для цього випадку самостійно.

1.5. Теореми про оцінку визначеного інтеграла

Теорема 1. Якщо інтегрована на сегменті [$a;b$] функція ***f(x)*** є знакосталою на цьому сегменті, то $\int_a^b f(x)dx$ є число того ж знаку.

Доведення

Нехай ***f(x)*** ≥ **0** на [$a;b$].Тоді

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k \geq 0,$$

як сума невід'ємних чисел. Користуючись правилами граничного переходу в нерівностях, отримаємо шуканий результат :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\max \Delta x_k \to 0 \\ 1\leq k\leq n}} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k \geq 0.$$

Теорема 2. Якщо інтегровані на сегменті [$a;b$] функції ***f***(***x***) та ***φ***(***x***) задовільняють умові

$$0 \leq \varphi(x) \leq f(x),$$

то

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx,$$

тобто, нерівність можна почленно інтегрувати.

Доведення

Розглянемо допоміжну функцію ***ψ***(***x***) **=** ***f***(***x***) **–** ***φ***(***x***) **≥ 0.** З теореми ***1*** виходить, що

$$\int_a^b \psi(x)dx \geq 0$$

або

$$\int_a^b \left(f(x) - \varphi(x)\right)dx \geq 0.$$

Тоді

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,dx \geq 0.$$

Нарешті,

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Теорема 3. Якщо функція ***f***(***x***) інтегрована на сегменті [$a;b$], то її модуль є також інтегрованою функцією і при цьому є слушною нерівність

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{1.8}$$

Доведення

Із властивості модуля виходить:

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|.$$

Нерівності, як відомо, можна почленно інтегрувати. Тому

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx .$$

Це нерівність типу $-\ell \le m \le \ell$, вона еквівалентна нерівності $|m| \le \ell$. Стосовно нашого випадку виходить, що

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx .$$

Теорема 4. Якщо функція ***f*(*x*)** неперервна на сегменті [*a;b*], а ***m*** та ***M*** – відповідно її найменше і найбільше значення на [*a;b*], то є слушною нерівність

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a). \tag{1.9}$$

Доведення

За умовою ***m*** ≤ ***f*(*x*)** ≤ ***M*** на [*a;b*]. Відповідно теоремам 2 §4 та 2 §5

$$m\int_a^b dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le M\int_a^b dx .$$

Зважаючи на те, що $\int_a^b dx = b-a$, маємо таку оцінку інтеграла:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a).$$

Ця теорема називається **першою теоремою про середнє значення визначеного інтеграла**.

Теорема 5. Якщо функція ***f*(*x*)** неперервна на сегменті [*a;b*], то на цьому сегменті існує хоч одна така точка ***x* = *c*,** що

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c). \tag{1.10}$$

Доведення

З теореми ***4*** виходить, що

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a).$$

Усі частини цієї нерівності поділимо на *b – a >0.*

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M .$$

Позначимо $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \mu$, де $m \le \mu \le M$.

З властивості функцій, неперервних на сегменті, виходить, що на $[a;b]$ існує хоч одна така точка $c=x$, що $\boldsymbol{f(c)=\mu}$. Значить,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c). \qquad (1.11)$$

Помножимо обидві частини рівності на $b-a$. Тоді

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

Ця теорема називається **другою теоремою про середнє значення визначеного інтеграла**.

Число $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ називається **середнім значенням функції на сегменті [*a*; *b*].**

1.6. Обчислення визначеного інтеграла

Теорема 1. (Про похідну від інтеграла із змінною верхньою границею). Якщо функція ***f***(***x***) неперервна на сегменті $[a;b]$, то функція $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ диференційована у будь-якій точці сегмента $[a;b]$, до того ж є слушною рівність

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)'_x = f(x).$$

Доведення

Належить довести рівність $\Phi'(x)=f(x)$.

Використовуючи означення похідної та теорему ***6*** 1.2, маємо

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt\right)=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\int_a^x f(t)\,dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Далі,

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt\right).$$

До інтеграла застосуємо теорему ***5*** п. 1.6**,** тобто, ІІ теорему про середнє значення

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c)\cdot\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(c),\ \text{де } \boldsymbol{c\in(x;\,x+\Delta x)}.$$

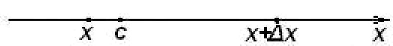


Рисунок 4

Коли $\Delta x \to 0$, то $(x + \Delta x) \to x$, а також $c \to x$. Тоді виходить, що $\Phi'(x) = f(x)$, x *є* [*a*;b].

Отриманий результат, до речі, говорить про те, що функція $\Phi(x)$ по відношенню до функції $f(x)$ є первісною. Отже, інтеграл $\int_a^x f(t)\,dt$ зі змінною верхньою границею x *є* [*a*;b] є первісною для функції $f(x)$ на сегменті $[a;b]$.

Теорема 2. Якщо функція $f(x)$ неперервна на сегменті $[a;b]$, а $F(x)$ – одна з первісних функції $f(x)$, то є слушною рівність

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{1.12}$$

Доведення

За умовою $F(x)$ – одна з первісних функції $f(x)$, а з теореми ***1*** ми знаємо, що $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ також первісна функції $f(x)$. Оскільки будь-які дві первісні однієї функції відрізняються лише на сталу, то, виходить, що

$$\Phi(x) = F(x) + c$$

або

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + c, \quad x \in [a;b].$$

Така рівність є слушною коли $x = a$.

$$\int_a^a f(t)\,dt = F(a) + c,$$

звідки

$$F(a) + c = 0 \text{ та } c = -F(a).$$

Тепер маємо рівність

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a), \quad x \in [a;b].$$

Нехай $x = b$, тоді

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Змінимо для зручності t на x.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Ми отримали формулу, яка називається **формулою Ньютона-Лейбніца**.

Теорема 3. Нехай функція ***f*(*x*)** неперервна на сегменті [*a;b*]. Якщо в інтегралі $\int_a^b f(x)dx$ покласти, що ***x*=φ(*t*),** де **φ(*t*)** задовольняє таким умовам:

1). **φ(*t*)** неперервна на сегменті [*a;b*];

2). коли ***t*** змінюється від ***α*** до ***β*,** то **φ(*t*)** змінюється від ***a*** до ***b*** таким чином, що **φ(*α*) = *a*; φ(β) = *b*;**

3). **φ(*t*)** диференційована, а її похідна $\varphi'(t)$ неперервна на сегменті [*α;β*].

Тоді є слушною формула

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt . \qquad (1.13)$$

Доведення

Нехай ***F*(*x*)** – одна з первісних функції ***f*(*x*)** на [*a;b*]. Тоді

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a). \qquad (*)$$

Тепер розглянемо таку допоміжну функцію

$$\Phi(t) = F(\varphi(t)),\ t \in [\alpha;\beta].$$

Знайдемо $\Phi'(t)$**,** користуючись теоремою про похідну складної функції:

$$\Phi'(t) = (F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

Оскільки $F'(x) = f(x)$, то $F'(\varphi(t)) = f(\varphi(t))$. Тоді

$$\Phi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

Остання рівність означає, що функція ***Φ*(*t*)** на сегменті [*α;β*] є первісною для функції $(f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t))$**.** З цього виходить, що

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha);$$

$$\Phi(\beta) = F(\varphi(\beta)) = F(b);\ \Phi(\alpha) = F(\varphi(\alpha)) = F(a).$$

Значить,

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(b) - F(a). \qquad (**)$$

Отже, порівнюючи рівності (*) та (**), впевнюємось у слушності рівності

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt .$$

Отримана формула називається формулою **заміни змінної інтегрування у визначеному інтегралі.**

Теорема 4. Якщо парна функція ***f*(*x*)** інтегрована на симетричному відносно початку координат проміжку [-*a;a*], то є слушним таке твердження

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx \,. \qquad (1.14)$$

Доведення

Згідно з властивістю (1.6)

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx \,.$$

Розглянемо окремо $\int_{-a}^{0} f(x)dx$ та зробимо заміну змінної інтегрування.

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \left[\begin{array}{l} x=-t \\ \\ dx=-dt \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline x & t \\ \hline 0 & 0 \\ \hline -a & a \\ \hline \end{array} \right] = -\int_{a}^{0} f(-t)dt \,.$$

За умовою ***f*(-*t*) = *f*(*t*),**оскільки функція парна. Згідно з властивістю ***4*** у отриманому інтегралі поміняємо межі інтегрування. Звідси виходить, що

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(t)dt$$

або

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx \,.$$

Тоді

$$\int_{a}^{-a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx \,.$$

Теорема 5. Якщо непарна функція ***f*(*x*)** інтегрована на симетричному відносно початку координат проміжку [-*a;a*], то є слушним таке твердження

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0. \qquad (1.15)$$

Доведення

Згідно з властивістю ***6***

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx \,.$$

Розглянемо окремо $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx$ та зробимо заміну змінної інтегрування.

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \left[\begin{array}{l} x=-t \\ \\ dx=-dt \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline x & t \\ \hline 0 & 0 \\ \hline -a & a \\ \hline \end{array} \right] = -\int_{a}^{0} f(-t)dt \,.$$

За умовою ***f*(-*t*) = -*f*(*t*),** тому що функція *f*(*t*) непарна. Тоді

$$-\int_{a}^{0} f(-t)dt = \int_{a}^{0} f(t)dt = -\int_{0}^{a} f(t)dt = -\int_{0}^{a} f(x)dx \,.$$

Остаточно маємо

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

або

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0\,.$$

Теорема 6. Нехай функції $\boldsymbol{U = U(x)}$ та $\boldsymbol{V = V(x)}$

1). визначені та неперервні на сегменті $[a;b]$;

2). диференційовані на сегменті $[a;b]$, а їх похідні $U' = U'(x)$ та $V' = V'(x)$ є неперервними функціями на сегменті $[a;b]$. Тоді є слушною рівність

$$\int_{a}^{b} U(x)\,dV = U(x)\,V(x)\Big|_a^b - \int_{a}^{b} V(x)\,dU\,. \qquad (1.16)$$

Доведення

У відповідності з умовою функції $U(x)$ та $V(x)$ диференційовані, отже,

$$\big(U(x)V(x)\big)' = U'(x)V(x) + U(x)V'(x)\,. \qquad (*)$$

Обидві частини рівності (*) проінтегруємо на проміжку $[a;b]$ по змінній $\boldsymbol{x}$

$$\int_{a}^{b} \big(U(x)V(x)\big)'\,dx = \int_{a}^{b} U'(x)V(x)\,dx + \int_{a}^{b} U(x)V'(x)dx\,.$$

Первісною функції $\big(U(x)V(x)\big)'$ є функція $U(x)V(x)$, отже,

$$\int_{a}^{b} \big(U(x)V(x)\big)'\,dx = U(x)V(x)\Big|_a^b = U(b)V(b) - U(a)V(a)\,.$$

Зважаючи на те, що $U'(x)dx = dU$, $V'(x)dx = dV$, отримаємо таку рівність:

$$U(x)V(x)\Big|_a^b = \int_{a}^{b} V(x)\,dU + \int_{a}^{b} U(x)\,dV$$

або

$$\int_{a}^{b} U(x)dV = U(x)V(x)\Big|_a^b - \int_{a}^{b} V(x)\,dU\,.$$

Ця формула називається **формулою інтегрування частинами у визначеному інтегралі.**

1.7. Методи обчислення визначеного інтеграла

***Приклад* 1.** На сегменті [0;1] задано функцію $\boldsymbol{f(x) = 3x^2 + 8}$. Скласти інтегральну суму S_n для $\boldsymbol{f(x)}$ на [0;1], коли $\boldsymbol{n = 5}$ та $\boldsymbol{n = 10}$. Обчислити інтеграл за допомогою формули Ньютона - Лейбніца. Результати порівняти.

Розв'язання

1) Нехай ***n* = 5**. Тоді $\Delta x_k = \frac{1-0}{5} = 0{,}2$. Зручно скласти таблицю. Домовимось проміжні точки вибирати посередині часткових сегментів.

i	x_k	c_k	c_k^2	$3c_k^2 + 8$	$f(c_k)\ \Delta x_k$
0	0				
1	0,2	0,1	0,01	8,03	1,606
2	0,4	0,3	0,09	8,28	1,654
3	0,6	0,5	0,25	8,75	1,75
4	0,8	0,7	0,49	9,47	1,894
5	1	0,9	0,81	10,43	2,086

$$S_5 = \sum_{k=1}^{5} f(c_k)\Delta x_k = 8{,}986.$$

2) Тепер ***n* = 10**. Тоді $\Delta x_k = \frac{1-0}{10} = 0{,}1$. Знов складемо таблицю.

i	x_k	c_k	c_k^2	$3c_k^2 + 8$	$f(c_k)\ \Delta x_k$
0	0				
1	0,1	0,05	0,0025	8,0075	0,80075
2	0,2	0,15	0,0225	8,0675	0,80675
3	0,3	0,25	0,0625	8,1875	0,81875
4	0,4	0,35	0,1225	8,3675	0,83675
5	0,5	0,45	0,2025	8,6075	0,86075
6	0,6	0,55	0,3025	8,9075	0,89075
7	0,7	0,65	0,4225	9,2675	0,92675
8	0,8	0,75	0,5627	9,6875	0,96875
9	0,9	0,85	0,7225	10,1675	1,01675
10	10	0,95	0,9025	10,7075	1,07075

$$S_{10} = \sum_{k=1}^{10} f(c_k)\Delta x_k = 8{,}9975.$$

3) Безпосередньо обчислимо інтеграл, користуючись формулою **Ньютона-Лейбніца.**

$$\int_0^1 \left(3x^2 + 8\right)dx = \int_0^1 \left(3x^2\right)dx + \int_0^1 8\,dx = 3\int_0^1 x^2 dx + 8\int_0^1 dx = 3\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 + 8\cdot x\Big|_0^1 = \left(1^3 - 0^3\right) + 8(1-0) =$$

$$= 1 + 8 = 9.$$

Ми бачимо, що $S_5 \approx \int_0^1 \left(3x^2 + 8\right)dx$. Похибка Δ = 0,014. $S_{10} \approx \int_0^1 \left(3x^2 + 8\right)dx$. Похибка Δ = 0,0025.

Отже, чим більше ***n*,** тим точніше інтегральна сума визначає інтеграл.

***Приклад* 2.** Не обчислюючи інтеграл, визначити, якій з нерівностей він задовольняє: $I \geq 0$ чи $I < 0$?

$$I = \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \left(998\sin^{27} x + 11^{52}\cos^{129} x - 18\right) dx.$$

Розв'язання

Оскільки інтеграл побудований на сегменті $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$, а на цьому проміжку функції ***sin x*** та ***cos x*** набувають лише від'ємних значень і у не парних степенях ці значення залишаються від'ємними, то $998\sin^{27} x + 11^{52}\cos^{129} x - 18 < 0$, а значить *$I < 0$ (§5; теорема 1).*

***Приклад* 3.** Не обчислюючи інтеграли $\boldsymbol{I_1}$ та $\boldsymbol{I_2}$, порівняти їх.

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^{129} x dx \quad , \; I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^{29} x dx .$$

Розв'язання

На проміжку $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$ є слушною нерівність $0 \leq \sin x \leq \frac{1}{2}$.

Отже,

$$\sin^{129} x \leq \sin^{29} x.$$

Тоді $I_1 \leq I_2$ (п. 1.5; теорема ***2***).

***Приклад* 4.** Оцінити інтеграл I.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4x^2 + 2\sin x\right) dx .$$

Розв'язання

Підінтегральна функція має вигляд $f(x) = 4x^2 + 2\sin x$.

Це неперервна функція на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, зростаюча. Отже, вона обмежена на цьому сегменті.

$$m = 0; \; M = \pi^2 + 2; \; b - a = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Спираючись на теорему ***4*** з п.1.5, можна стверджувати, що

$$0 \leq I \leq \left(\pi^2 + 2\right) \cdot \frac{\pi}{2}.$$

***Приклад* 5.** Обчислити інтеграл:

$$\int_2^3 \left(5x^2 - 4x + 11\right) dx .$$

Розв'язання

$$\int_2^3 (5x^2 - 4x + 11)dx = 5\int_2^3 x^2 dx - 4\int_2^3 xdx + 11\int_2^3 dx = \left(5\cdot\frac{x^3}{3} - 4\cdot\frac{x^2}{2} + 11x\right)\Bigg|_2^3 =$$

$$= \frac{5}{3}\left(3^3 - 2^3\right) - 2\left(3^2 - 2^2\right) + 11(3-2) = \frac{5}{3}\cdot 19 - 2\cdot 5 + 11\cdot 1 = \frac{98}{3} = 32,(6).$$

***Приклад* 6.** Обчислити інтеграл:

$$\int_{-2}^{2}\left(9x^5 - 3x^3 + 8x\right)dx.$$

Розв'язання .

Під знаком інтеграла знаходиться непарна функція, а межі інтегрування симетричні відносно початку координат, отже,

$$\int_{-2}^{2}\left(9x^5 - 3x^3 + 8x\right)dx = 0.$$

Приклад 7. Обчислити інтеграли:

$$1)\ \int_0^1 (3x+1)^7 dx;\quad 2)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(\frac{3\pi}{4} - 5x\right)dx;\quad 3)\ \int_1^3 \frac{1}{\sqrt[5]{(2x-1)^4}}dx;\quad 4)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 - \sin\frac{x}{4}}dx.$$

Розв'язання

При обчислені цих інтегралів зручно користуватись такою властивістю невизначених інтегралів:

$$\int f(x)dx = F(x) + c \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c,$$

де a, b,c – дійсні числа.

1)

$$\int_0^1 (3x+1)^7 dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x+1)^8}{8}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{24}\left((3\cdot 1+1)^8 - (3\cdot 0+1)^8\right) = \frac{1}{24}\left(4^8 - 1^8\right) = \frac{65535}{24} =$$

$$= 2730,625.$$

2)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(\frac{3\pi}{4} - 5x\right)dx = \frac{-1}{5}\cdot\left(-\cos\left(\frac{3\pi}{4} - 5x\right)\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{5}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{5\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{4} - 0\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{5}\left(0 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{10}.$$

3)

$$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt[5]{(2x-1)^4}}dx = \int_1^3 (2x-1)^{-\frac{4}{5}}dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-1)^{\frac{1}{5}}}{\frac{1}{5}}\Bigg|_1^3 = \frac{5}{2}\left((2\cdot 3-1)^{\frac{1}{5}} - (2\cdot 1-1)^{\frac{1}{5}}\right) =$$

$$= \frac{5}{2}\left(\sqrt[5]{5} - 1\right).$$

4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1-\sin\frac{x}{4}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{4}\right)}dx = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{8}\right)}dx$.

У процесі перетворення були використані формули зведення та формули зниження степеню:

$$\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right); \qquad 1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Отже,

$$I = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left|\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{8}\right)\right|dx.$$

Кут $\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{8}\right)$ належить до I чверті і, значить, синус набуває лише додатних значень, отже,

$$\left|\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{8}\right)\right| = \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{8}\right).$$

$$I = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{8}\right)dx = -\sqrt{2}\cdot(-8)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{8}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = 8\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{32}\right)-\cos\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= 8\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{32}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 8\sqrt{2}\cos\frac{7\pi}{32}-8.$$

Приклад 8. Обчислити інтеграли:

1) $\int_e^{e^2} \frac{\ln^3 x}{x}dx$; 2) $\int_2^{\sqrt{23}} x\sqrt[3]{x^2+4}dx$;

3) $\int_0^1 \frac{x+\operatorname{arctg}^7 x}{1+x^2}dx$; 4) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^5 x\cos x dx$.

Розв'язання

При розв'язанні цих прикладів будемо користуватись методом заміни змінної інтегрування. Необхідно звернути увагу на певну особливість цього методу стосовно визначеного інтеграла. Зробивши заміну змінної інтегрування, обов'язково слід знайти межі інтегрування по новій змінній.

1) $I = \int_e^{e^2} \frac{\ln^3 x}{x}dx = \left[\begin{array}{l} \ln x = t; \\ \frac{1}{x}dx = dt; \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline x & t \\ \hline e^2 & 2 \\ \hline e & 1 \\ \hline \end{array}\right] = \int_1^2 t^8 dt = \frac{t^9}{9}\Bigg|_1^2 =$

$$= \frac{1}{9}\left(2^9-1\right) = \frac{511}{9} = 56,(8)$$

2) $$I=\int\limits_{2}^{\sqrt{23}} x\sqrt[3]{x^2+4}\,dx=\left[\begin{array}{l} x^2+4=t^3;\\ 2xdx=3t^2dt;\\ xdx=\frac{3}{2}t^2dt; \end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline x & t\\ \hline \sqrt{23} & 3\\ \hline 2 & 2\\ \hline\end{array}\right]=\frac{3}{2}\int\limits_{2}^{3} t\cdot t^2dt=$$

$$=\frac{3}{2}\int\limits_{2}^{2} t^3dt=\frac{3}{2}\cdot\frac{t^4}{4}\Bigg|_2^3=\frac{3}{8}(3^4-2^4)=\frac{3}{8}(81-16)=\frac{195}{8}=24{,}375.$$

3) $$I=\int\limits_0^1\frac{x+arctg^7x}{1+x^2}dx=\int\limits_0^1\frac{x}{1+x^2}dx+\int\frac{arctg^7x}{1+x^2}dx.$$

Розглянемо окремо кожний з інтегралів.

$$\int\limits_0^1\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\frac{2x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}(\ln 2-\ln 1)=\frac{1}{2}\ln 2;$$

Була використана формула:

$$\int\frac{U'(x)}{U(x)}dx=\ln|U(x)|.$$

$$I=\int\limits_0^1\frac{arctg^7x}{1+x^2}dx=\left[\begin{array}{l} arctgx=t;\\ \frac{1}{1+x^2}dx=dt; \end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline x & t\\ \hline 1 & \frac{\pi}{4}\\ \hline 0 & 0\\ \hline\end{array}\right]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} t^7dt=\frac{t^8}{8}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{\pi^8}{65536}-0\right)=\frac{1}{524288}\pi^8=0{,}0000019\pi^8.$$

Остаточно, I= $\frac{1}{2}\ln 2+0{,}0000019\cdot\pi^8$.

4) $$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^5x\cos xdx=\left[\begin{array}{l} \sin x=t;\\ \cos xdx=dt; \end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline x & t\\ \hline \frac{\pi}{6} & \frac{1}{2}\\ \hline 0 & 0\\ \hline\end{array}\right]=\int\limits_0^{\frac{1}{2}} t^5dt=$$

$$=\frac{t^6}{6}=\frac{1}{6}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^6-0\right)=\frac{1}{384}=0{,}00026.$$

Приклад 9. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_{\frac{2}{\pi}}^{\frac{3}{\pi}}\frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)dx;$ 2) $\int\limits_0^{\pi}\cos^2\frac{x}{8}\sin^4\frac{x}{8}dx$;

3) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4\cos^2 x + 25\sin x\cos x + 1}dx$; 4) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4+5\cos x}dx$.

Розв'язання

1) $I = \int\limits_{\frac{2}{\pi}}^{\frac{3}{\pi}} \frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)dx = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{x} = t; \\ -\frac{1}{x^2}dx = dt; \end{array}\right.$

x	t
$\frac{3}{\pi}$	$\frac{\pi}{3}$
$\frac{2}{\pi}$	$\frac{\pi}{2}$

$\Bigg] =$

$$= -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \cos t dt = -\sin t \Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} = -(\sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{2}) = -(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2) $I = \int\limits_0^{\pi} \cos^2\frac{x}{8}\sin^4\frac{x}{8}dx = \int\limits_0^{\pi}\cos^2\frac{x}{8}\left(\sin^2\frac{x}{8}\right)^2 dx.$

Використовуємо формули зниження степеню:

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha); \qquad \cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha).$$

$$I = \frac{1}{8}\int\limits_0^{\pi}\left(1+\cos\frac{x}{4}\right)\left(1-\cos\frac{x}{4}\right)^2 dx = \frac{1}{8}\int\limits_0^{\pi}\left(1-\cos^2\frac{x}{4}\right)\left(1-\cos\frac{x}{4}\right)dx.$$

Використовуємо формулу:

$$\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha.$$

Тоді

$$I = \frac{1}{8}\int\limits_0^{\pi}\sin^2\frac{x}{4}\cdot\left(1-\cos\frac{x}{4}\right)dx = \frac{1}{8}\int\limits_0^{\pi}\sin^2\frac{x}{4}dx - \frac{1}{8}\int\limits_0^{\pi}\sin^2\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}dx.$$

$$I_1 = \int\limits_0^{\pi}\sin^2\frac{x}{4}dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}dx - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}dx = \frac{1}{2}x\Bigg|_0^{\pi} -$$

$$-\frac{1}{2}\cdot 2\sin\frac{x}{2}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{1}{2}\pi - \sin\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

$I_2 = \int\limits_0^{\pi}\sin^2\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}dx = \left[\begin{array}{l} \sin\frac{x}{4} = t; \\ \frac{1}{4}\cos\frac{x}{4}dx = dt; \end{array}\right.$

x	t
π	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
0	0

$\Bigg] =$

$$= 4\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} t^2 dt = \frac{4t^3}{3}\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Остаточно маємо :

$$I = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) - \frac{1}{8}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3+\sqrt{2}}{3}\right).$$

3) $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4\cos^2 x + 25\sin x\cos x + 1}dx$.

Підінтегральна функція це дріб, до складу якого входять тригонометричні функції, до того ж сума показників степеню при синусах та косинусах у кожному з доданків одна й та ж:

$\cos^2 x = \cos^2 x \cdot \sin^0 x$; $\sin x\cos x = \sin^1 x\cos^1 x$;

(2 + 0 = 2); (1 + 1 = 2).

У таких випадках добре діє заміна $\mathrm{tg}x = t$. Для того, щоб її було зручно зробити, спочатку зробимо перетворення підінтегральної функції, виділяючи у знаменнику множник $\cos^2 x$.

$$\frac{1}{4\cos^2 x + 25\sin x\cos x + 1} = \frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\frac{4\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{25\sin x\cos x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{4 + 25\,\mathrm{tg}\,x + 1 + tg^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{tg^2 x + 25tgx + 5};$$

Була використана формула $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$.

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4\cos^2 x + 25\sin x\cos x + 1}dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{tg^2 x + 25tgx + 5}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} tgx = t; \\ \frac{1}{\cos^2 x}dx = dt; \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline x & t \\ \hline \frac{\pi}{4} & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array}\right] = \int\limits_0^1 \frac{1}{t^2 + 25t + 5}dt.$$

У знаменнику квадратний тричлен, де a = 1, b = 25. Робимо відповідну для цього випадку заміну: $t + \frac{b}{2a} = z$.

$$I = \int\limits_0^1 \frac{1}{t^2 + 25t + 5}dt = \left[\begin{array}{l} t + \frac{25}{2} = z; \\ t = z - \frac{25}{2}; \\ dt = dz; \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline t & z \\ \hline 1 & \frac{27}{2} \\ \hline 0 & \frac{25}{2} \\ \hline \end{array}\right] =$$

$$=\int_{\frac{25}{2}}^{\frac{27}{2}}\frac{1}{z^2-25z+\frac{625}{4}+25z-\frac{625}{2}+5}dz=\int_{\frac{25}{2}}^{\frac{27}{2}}\frac{1}{z^2-\frac{605}{4}}dz=$$

$$=\int_{\frac{25}{2}}^{\frac{27}{2}}\frac{1}{z^2-\left(\sqrt{\frac{605}{4}}\right)^2}dz=\left(\frac{1\cdot 2}{2\cdot\sqrt{605}}\ln\left|\frac{z-\frac{\sqrt{605}}{2}}{z+\frac{\sqrt{605}}{2}}\right|\right)\Bigg|_{\frac{25}{2}}^{\frac{27}{2}}=\frac{1}{\sqrt{605}}\left(\ln\left|\frac{\frac{27-\sqrt{605}}{2}}{\frac{27+\sqrt{605}}{2}}\right|-\right.$$

$$\left.-\ln\left|\frac{\frac{25-\sqrt{605}}{2}}{\frac{25+\sqrt{605}}{2}}\right|\right)==\frac{1}{605}\ln\left|\frac{27-\sqrt{605}}{27+\sqrt{605}}\cdot\frac{25+\sqrt{605}}{25-\sqrt{605}}\right|=\frac{1}{605}\ln\frac{183+7\sqrt{605}}{62}\approx$$

$$\approx 0,002\ln 5,73=0,0029.$$

4) $$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4+5\cos x}dx.$$

Під інтегралом знов дріб, до складу якого входять тригонометричні функції. Зробимо універсальну тригонометричну підстановку.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4+5\cos x}dx=\left[\begin{array}{l|c|c} tg\frac{x}{2}=t; & x & t \\ dx=\frac{2}{1+t^2}dt; & \frac{\pi}{2} & 1 \\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} & 0 & 0 \end{array}\right]=\int_0^1\frac{1}{4+\frac{5(1-t^2)}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=$$

$$=2\int_0^1\frac{1}{4+4t^2+5-5t^2}dt=2\int_0^1\frac{1}{9-t^2}dt=2\cdot\frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{3+t}{3-t}\right|\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}\left(\ln 2-\ln 1\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\ln 2.$$

Приклад 10. Обчислити інтеграли:

1) $\int_0^4 x\sqrt{16-x^2}\,dx;$ 2) $\int_{\sqrt{7}}^4\frac{\sqrt{16-x^2}}{x}dx;$

3) $\int_2^4\frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2}dx,$ 4) $\int_{\frac{4}{\sqrt{3}}}^4\frac{\sqrt{16+x^2}}{x^2}dx.$

Отже,

$$I=\int\limits_{\frac{4}{\sqrt{3}}}^{4}\frac{\sqrt{16+x^2}}{x^2}dx=\left[\begin{matrix}x=4tgt;\\ dx=\dfrac{4}{\cos^2 t}dt;\end{matrix}\quad\begin{array}{|c|c|}\hline x & t\\\hline 4 & \frac{\pi}{4}\\\hline \frac{4}{\sqrt{3}} & \frac{\pi}{6}\\\hline\end{array}\right]=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{16+16tg^2t}}{16tg^2t}\times$$

$$\times\frac{4}{\cos^2 t}dt=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{1+tg^2t}}{tg^2t\cdot\cos^2 t}dt=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1\cdot\cos^2 t}{\cos t\cdot\sin^2 t\cdot\cos^2 t}dt=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos t}{\sin^2 t\cdot\cos^2 t}dt=$$

$$=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos t}{\sin^2 t\cdot(1-\sin^2 t)}dt=\left[\begin{matrix}\sin t=z;\\ \cos tdt=dz;\end{matrix}\quad\begin{array}{|c|c|}\hline t & z\\\hline \frac{\pi}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\\hline \frac{\pi}{6} & \frac{1}{2}\\\hline\end{array}\right]=$$

$$=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{z^2(1-z^2)}dz=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{z^2(1-z)(1+z)}dz.$$

Під знаком інтеграла вийшов раціональний дріб, його слід розкласти на найпростіші

$$\frac{1}{z^2(1-z)(1+z)}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z^2}+\frac{C}{1-z}+\frac{D}{1+z}=\frac{Az(1-z^2)+B(1-z^2)+Cz^2(1+z)+Dz^2(1-z)}{z^2(1-z)(1+z)}.$$

Порівняємо чисельники

$$1=Az(1-z^2)+B(1-z^2)+Cz^2(1+z)+Dz^2(1-z).$$

Невизначені коефіцієнти будемо шукати методом частинних значень

$$z=0\Rightarrow 1=B\Rightarrow B=1;$$

$$z=1\Rightarrow 1=2C\Rightarrow C=\frac{1}{2};$$

$$z=-1\Rightarrow 1=2D\Rightarrow D=\frac{1}{2};$$

$$z=2\Rightarrow 1=-6A-3B+12C-4D\Rightarrow 1=-6A-3+6-2\Rightarrow A=0.$$

Коефіцієнти знайдені, переходимо до інтегрування.

$$I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{z^2}dz+\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{1-z}dz+\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{1+z}dz=\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{2}\ln\left|1-z\right|+\frac{1}{2}\ln\left|1+z\right|\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=$$

$$=\left(\frac{2}{\sqrt{2}}-2\right)+\frac{1}{2}\left(\ln\left|1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|-\ln\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\ln\left|1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right|-\ln\frac{3}{2}\right)=$$

$$=\left(2-\sqrt{2}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{3}\right)=2-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\left(2-\sqrt{2}\right)}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}\left(2+\sqrt{2}\right)}\right|=$$

$$=2-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})}\cdot\frac{2}{3}\right).$$

Приклад 11. Обчислити інтеграли:

1) $\int\limits_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x\sin x^2 dx;$ 2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx;$

3) $\int\limits_0^1 \left(2x+5\right)e^{x^2+5x+6}dx;$ 4) $\int\limits_1^2 (2x+5)e^{5x+6}dx.$

Розв'язання

1) $$I=\int\limits_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x\sin x^2 dx=\left[\begin{array}{l|c|c} x^2=t; & x & t \\ & \sqrt{\frac{\pi}{2}} & \frac{\pi}{2} \\ 2xdx=dt; & 0 & 0\end{array}\right]=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t dt=-\frac{1}{2}\cos t\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0\right)=\frac{1}{2}.$$

2) $$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx.$$

Як відомо з теми «Невизначений інтеграл» інтеграли типу

$$\int P_n(x)\sin(ax+b)dx;\quad \int P_n(x)\cos(ax+b)dx;\quad \int P_n(x)\cdot k^{ax+b}dx,$$

де $P_n(x)$ – многочлен степеню n, можуть бути розв'язані методом інтегрування частинами. При цьому через U слід позначати многочлен $P_n(x)$. Отже, інтеграли п. 1.2 п. 1.4 належать до цього типу

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx=\begin{bmatrix} U=x; & dU=dx; \\ \sin xdx=dV; & V=-\cos x.\end{bmatrix}=-x\cos x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=$$

$$=-\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}-0\cos 0\right)+\sin x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1.$$

3)

$$\int_0^1 (2x+5)\,e^{x^2+5x+6}dx = \left[\begin{array}{l} x^2+5x+6=t; \\ (2x+5)dx=dt; \end{array}\right.$$

x	t
1	12
0	6

$$\left.\right] = \int_6^{12} e^t dt = e^t \Big|_6^{12} = e^{12}-e^6 .$$

4)

$$\int_1^2 (2x+5)e^{5x+6}dx \left[\begin{array}{l} 2x+5=U; \quad dU = 2dx \\ e^{5x+6}dx = dV; \quad V = \frac{1}{5}e^{5x+6} \end{array}\right] = \frac{1}{5}(2x+5)e^{5x+6}\Big|_1^2 -$$

$$-\frac{2}{5}\int_1^2 e^{5x+6}dx = \frac{1}{5}\left(9e^{16}-7e^{11}\right) - \frac{2}{25}e^{5x+6}\Big|_1^2 = \frac{1}{5}\left(9e^{16}-7e^{11}\right) - \frac{2}{25}\left(e^{16}-e^{11}\right).$$

Зауваження. Проаналізуйте методи розв’язання прикладів. Порівняйте умови прикладів 1 та 2, а також прикладів 3 та 4.

На перший погляд вони здаються схожими, але насправді ці приклади принципово відрізняються. Інтегрування частинами у випадках 1) та 3) на відміну від випадків 2) та 4) неможливо, тому, що пколи $dV = sinx^2 dx$ або $dV = e^{x^2+5x+6}dx$, ми не зможемо знайти *V*.

Приклад 12. Обчислити інтеграли:

1) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{(arctg\,3x)^8}{9+x^2}dx;$ 2) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} x\,arctg\,3x\,dx;$

3) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}\ln x^{10}dx;$ 4) $\displaystyle\int_1^e (5x^3-4x^2+8x)\ln x^{10}dx.$

Розв’язання

1)

$$I = \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{(arctg3x)^8}{9+x^2}dx = \left[\begin{array}{l} arctg3x = t; \\ \frac{3}{1+9x^2}dx = \end{array}\right.$$

x	t
$\frac{1}{3}$	$\frac{\pi}{4}$
0	0

$$\left.\right] = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} t^8 dt =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{t^9}{9}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{27}\cdot\left(\frac{\pi}{4}\right)^9 .$$

2) $I=\int_0^{\frac{1}{3}} x\,arctg 3x dx.$

Слід нагадати, що методом інтегрування частинами можуть бути знайдені такі інтеграли:

1) $\int P_n(x)\arcsin(ax)dx;$ 3) $\int P_n(x)\,\mathrm{arctg}(ax)dx;$ 5) $\int P_n(x)\ln x dx,$

2) $\int P_n(x)\arccos(ax)dx;$ 4) $\int P_n(x)\,\mathrm{arcctg}(ax)dx;$

при цьому через U в таких інтегралах позначають обернені тригонометричні чи логарифмічні функції. Отже інтеграли п. 1.2 та 1.4 можуть бути розв'язані методом інтегрування частинами

$$I=\int_0^{\frac{1}{3}} x\cdot \mathrm{arctg}\,3x dx=\left[\begin{array}{l}\mathrm{arctg}\,3x=U;\ \frac{3}{1+9x^2}dx=dU;\\ xdx=dV;\ V=\frac{1}{2}x^2.\end{array}\right]=\frac{1}{2}x^2\,\mathrm{arctg}\,3x\Big|_0^{\frac{1}{3}}-$$

$$-\frac{3}{2}\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{x^2}{1+9x^2}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}\mathrm{arctg}\ 1-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{9}\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{9x^2}{1+9x^2}dx=\frac{1}{18}\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{1}{6}\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{1+9x^2-1}{1+9x^2}dx=$$

$$=\frac{\pi}{72}-\frac{1}{6}\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{(1+9x^2)-1}{1+9x^2}dx=\frac{\pi}{72}-\frac{1}{6}\int_0^{\frac{1}{3}}\left(1-\frac{1}{1+9x^2}\right)dx=\frac{\pi}{72}-\frac{1}{6}x\Big|_0^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{9}\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{1}{\frac{1}{9}+x^2}dx=$$

$$=\frac{\pi}{72}-\frac{1}{6}x\Big|_0^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{54}\cdot 3\,\mathrm{arctg}\ 3x\Big|_0^{\frac{1}{3}}==\frac{\pi}{72}-\frac{1}{18}+\frac{1}{18}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{72}-\frac{1}{18}+\frac{\pi}{72}=-\frac{1}{18}+\frac{\pi}{36}.$$

3) $$\int_1^e\frac{1}{x}\ln x^{10}dx=10\int_1^e\frac{1}{x}\ln xdx=\left[\begin{array}{l}\ln x=t;\\ \frac{1}{x}dx=dt.\end{array}\ \begin{array}{|c|c|}\hline x & t\\ \hline e & 1\\ \hline 1 & 0\\ \hline\end{array}\right]=10\int_0^1 tdt=10\cdot\frac{t^2}{2}\Big|_0^1=5$$

4) $$\int_1^e(5x^3-4x^2+8x)\ln x^{10}dx=10\int_1^e(5x^3-4x^2+8x)\ln xdx=\left[\begin{array}{l}\ln x=U;\\ (5x^3-4x^2+8x)dx=dV;\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{x}dx = dU;\\ V = \frac{5}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 4x^2.\end{array}\right] = 10\left(\frac{5}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 4x^2\right)\ln x\,\Big|_1^e = \int_1^e\left(\frac{5}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 4x^2\right)\cdot\frac{1}{x}dx =$$

$$= 10\left(\frac{5}{4}e^4 - \frac{4}{3}e^3 + 4e^2\right) - \int_1^e\left(\frac{5}{4}x^3 - \frac{4}{3}x^2 + 4x\right)dx = 10\left(\frac{5}{4}e^2 - \frac{4}{3}e + 4\right)\cdot e^2 -$$

$$-\left(\frac{5}{16}x^4 - \frac{4}{9}x^3 + 2x^2\right)\Big|_1^e = 10\left(\frac{5}{4}e^2 - \frac{4}{3}e + 4\right)\cdot e^2 - \left(\frac{5}{16}e^2 - \frac{4}{3}e + 2\right)\cdot e^2 + \frac{269}{144} =$$

$$= \frac{269}{144} + \left(\frac{195}{16}e^2 - 12e + 38\right)e^2.$$

Приклад 13

1) $\int_0^1 (x^2 + 4x + 1)2^x dx;$ 2) $\int_0^1 e^{2x}\sin 3x dx;$

3) $\int_0^4 \sqrt{16 - x^2}dx;$ 4) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x}dx.$

Розв'язання

1) $$I = \int_0^1\left(x^2 + 4x + 1\right)\cdot 2^x dx = \left[\begin{array}{ll} x^2 + 4x + 1 = U; & (2x+4)dx = dU;\\ 2^x dx = dV; & V = \frac{1}{\ln 2}2^x.\end{array}\right] =$$

$$= \frac{2^x}{\ln 2}\cdot\left(x^2 + 4x + 1\right)\Big|_0^1 - \frac{2}{\ln 2}\int_0^1 (x+2)\cdot 2^x dx.$$

Розглянемо окремо $\int_0^1 (x+2)2^x dx$

$$\int_0^1 (x+2)\cdot 2^x dx = \left[\begin{array}{l} x + 2 = U;\ dx = dU;\\ 2^x dx = dV;\ V = \frac{1}{\ln 2}\cdot 2^x.\end{array}\right] = \frac{1}{\ln 2}\cdot 2^x\cdot(x+2)\Big|_0^1 - \frac{1}{\ln 2}\int_0^1 2^x dx =$$

$$= \frac{(6-2)}{\ln 2} - \frac{1}{(\ln 2)^2}\cdot 2^x\Big|_0^1 = \frac{4}{\ln 2} - \frac{1}{\ln^2 2}(2-1) == \frac{4}{\ln 2} - \frac{1}{\ln^2 2}.$$

Остаточно маємо:

$$I=\frac{1}{\ln 2}\cdot(12-1)-\frac{2}{\ln 2}\left(\frac{4}{\ln 2}-\frac{1}{\ln^2 2}\right)=\frac{11}{\ln 2}-\frac{8}{\ln^2 2}+\frac{2}{\ln^3 2}.$$

2) $$\int_0^1 e^{2x}\sin 3x dx=\begin{bmatrix} e^{2x}=U; & 2e^{2x}dx=dU; \\ \sin 3x dx=dV; & V=-\frac{1}{3}\cos 3x. \end{bmatrix}=-\frac{1}{3}\cdot e^{2x}\cos 3x\Big|_0^1+\frac{2}{3}\int_0^1 e^{2x}\cos 3x dx$$

Розглянемо останній інтеграл

$$\int_0^1 e^{2x}\cos 3x dx=\begin{bmatrix} e^{2x}=U; & 2e^{2x}dx=dU; \\ \cos 3x dx=dV; & V=\frac{1}{3}\sin 3x. \end{bmatrix}==\frac{1}{3}\cdot e^{2x}\sin 3x\Big|_0^1-\frac{2}{3}\int_0^1 e^{2x}\sin 3x dx=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot e^2\sin 3-\frac{2}{3}\int_0^1 e^{2x}\sin 3x dx.$$

Підставляючи отриманий результат у попередню рівність, отримаємо таке співвідношення

$$\int_0^1 e^{2x}\sin 3x dx=-\frac{1}{3}\left(e^2\cos 3-1\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}e^2\sin 3-\frac{2}{3}\int_0^1 e^{2x}\sin 3x\, dx\right).$$

$$\int_0^1 e^{2x}\sin 3x dx=-\frac{1}{3}\left(e^2\cos 3-1\right)+\frac{2}{9}e^2\sin 3-\frac{4}{9}\int_0^1 e^{2x}\sin 3x\, dx.$$

$$\int_0^1 e^{2x}\sin 3x dx+\frac{4}{9}\int_0^1 e^{2x}\sin 3x dx=-\frac{1}{3}\left(e^2\cos 3-1\right)+\frac{2}{9}e^2\sin 3.$$

$$\frac{13}{9}\int_0^1 e^{2x}\sin 3x dx=-\frac{1}{3}\left(e^2\cos 3-1\right)+\frac{2}{9}e^2\sin 3.$$

$$\int_0^1 e^{2x}\sin 3x dx=\frac{9}{13}\left(\frac{1}{3}\left(1-e^2\cos 3\right)+\frac{2}{9}e^2\sin 3\right).$$

$$\int_0^1 e^{2x}\sin 3x dx=\frac{3}{13}\left(1-e^2\cos 3\right)+\frac{2}{13}e^2\sin 3.$$

3) $$I=\int_0^{\sqrt{7}}\sqrt{16-x^2}\,dx.$$

Схожий інтеграл ми вже розв'язували методом заміни змінної інтегрування. Розв'яжемо його зараз методом інтегрування частинами

$$I=\int_0^{\sqrt{7}}\sqrt{16-x^2}dx=\int_0^{\sqrt{7}}\frac{\left(\sqrt{16-x^2}\right)^2}{\sqrt{16-x^2}}dx=\int_0^{\sqrt{7}}\frac{16-x^2}{\sqrt{16-x^2}}dx=16\int_0^{\sqrt{7}}\frac{1}{\sqrt{16-x^2}}dx-$$

$$-\int_0^{\sqrt{7}}\frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}dx==16\cdot\arcsin\frac{x}{4}\Big|_0^{\sqrt{7}}-\int_0^{\sqrt{7}}\frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}dx=16\cdot\arcsin\frac{\sqrt{7}}{4}-\int_0^{\sqrt{7}}\frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}dx.$$

Розглянемо останній інтеграл окремо

$$\int_0^{\sqrt7}\frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}dx=\int_0^{\sqrt7}\frac{x\cdot x}{\sqrt{16-x^2}}dx=\left[\begin{array}{ll} x=U; & dx=dU;\\ \dfrac{x}{\sqrt{16-x^2}}dx=dV; & V=-\sqrt{16-x^2}.\end{array}\right]=$$

$$=-x\sqrt{16-x^2}\Big|_0^{\sqrt7}+\int_0^{\sqrt7}\sqrt{16-x^2}dx=-3\sqrt7+\int_0^{\sqrt7}\sqrt{16-x^2}dx.$$

Тепер виходить,

$$\int_0^{\sqrt7}\sqrt{16-x^2}dx=16\cdot\arcsin\frac{\sqrt7}{4}-\left(-3\sqrt7+\int_0^{\sqrt7}\sqrt{16-x^2}dx\right).$$

$$\int_0^{\sqrt7}\sqrt{16-\mathrm{x}^2}\,\mathrm{dx}=16\cdot\arcsin\frac{\sqrt7}{4}+3\sqrt7-\int_0^{\sqrt7}\sqrt{16-\mathrm{x}^2}\,\mathrm{dx}.$$

$$2\int_0^{\sqrt7}\sqrt{16-\mathrm{x}^2}\,\mathrm{dx}=16\cdot\arcsin\frac{\sqrt7}{4}+3\sqrt7.$$

$$2\int_0^{\sqrt7}\sqrt{16-x^2}\,dx=8\cdot\arcsin\frac{\sqrt7}{4}+\frac{3}{2}\sqrt7.$$

4) $$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{\sin^2x}dx=\left[\begin{array}{ll} x=U; & dx=dU;\\ \dfrac{1}{\sin^2x}dx=dV; & V=-ctgx\end{array}\right]=-x\,\mathrm{ctg}\,x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{ctg}\,xdx=$$

$$=-\left(\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt3}{3}-\frac{\pi\sqrt3}{6}\right)+\ln|\sin x|\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=-\frac{\pi\sqrt3}{18}+\ln\frac{\sqrt3}{2}-\ln\frac{1}{2}=-\frac{\pi\sqrt3}{18}+\ln\sqrt3.$$

ЗАВДАННЯ НА САМОСТІЙНУ РОБОТУ

Обчислити інтеграли

а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m}x\cos^{2n}x\,dx;$ б) $\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}dx;$

в) $\int_0^{\pi}\cos^n x\cos nxdx;$ г) $\int_0^{\pi}\sin^n x\sin nxdx,$

користуючись формулами Ейлера

$$\cos x=\frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\text{ та }\sin x=\frac{1}{2i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right).$$

1.8. Невласні інтеграли I роду (Інтеграли з нескінченними межами інтегрування)

Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на нескінченному проміжку $[a; +\infty)$. Розглянемо тепер скінчений проміжок $[a; N]$, де $N > a$. Тоді можна говорити про визначений інтеграл від цієї функції $\int_a^N f(x)dx$. Тепер припустимо, що N – змінна. У цьому $\int_a^N f(x)dx$ є функцією від N, як інтеграл зі змінною верхньою границею, тобто $\int_a^N f(x)dx = \Phi(N)$.

Означення. Невласним інтегралом I роду або інтегралом з нескінченними межами інтегрування називається границя інтеграла

$\int_a^N f(x)dx$ коли $N \to \infty$ тобто,

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{N\to\infty} \int_a^N f(x)dx. \qquad (1.17)$$

При цьому, якщо названа границя існує, то інтеграл називається збіжним, а якщо не існує, то розбіжним. Аналогічно визначається інтеграл:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{N\to+\infty} \int_{-N}^{b} f(x)dx. \qquad (1.18)$$

для функції неперервної на $(-\infty; b]$. Якщо ж функція $f(x)$ неперервна на $(-\infty;+\infty)$, то можна розглядати такий невласний інтеграл:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx. \qquad (1.19)$$

Якщо обидва інтеграла у правій частині рівності (1.19) збіжні, то і інтеграл зліва також вважається збіжним.

Наведемо властивості збіжності невласних інтегралів.

Теорема 1. (Порівняння). Нехай функції $y = f(x)$ та $y = \varphi(x)$ неперервні на проміжку $[a; +\infty)$ і до того ж задовольняють умові $0 \le f(x) \le \varphi(x)$. Тоді:

1) якщо збігається інтеграл $\int_a^{\infty} \varphi(x)dx$, то збігається і інтеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$;

2) якщо розбігається інтеграл $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$, то розбігається і інтеграл $\int_a^{N} \varphi(x)\,dx$.

Слушність цієї властивості виходить з властивостей визначеного інтеграла та з властивостей границь.

Теорема 2. (Порівняння). Нехай на проміжку [a; +∞) визначені невід’ємні та неперервні функції $y = f(x)$ та $y = \varphi(x)$. До того ж $\varphi(x)$ відрізняється від 0, коли $x \to \infty$. Якщо при цьому існує скінчена границя відношення цих функцій при $x \to \infty$, відмінна від нуля, тобто:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = k \neq 0, \tag{1.20}$$

то обидва інтеграли $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ і $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ водночас збігаються або розбігаються.

Теорема 3. Нехай функція $y = f(x)$ визначена на проміжку [a ;+ ∞). Якщо для будь-якого як завгодно великого числа M > 0 існує таке число α, що є слушною нерівність

$$0 \le f(x) \le \frac{M}{x^{\alpha}}, \tag{1.21}$$

то інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається.

Теорема 4. Нехай функція $y = f(x)$ визначена на проміжку [a; + ∞). Якщо для будь-якого як завгодно великого числа M > 0 є слушною нерівність

$$f(x) \ge \frac{M}{x}, \tag{1.22}$$

то інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ розбігається.

Означення. Нехай функція $y = f(x)$ визначена на проміжку [a; + ∞) і інтегрована на будь-якому проміжку [$a;b$], де $b > a$. Тоді інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ називається абсолютно збіжним, якщо збігається інтеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$.

Якщо інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається, а $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ розбігається, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ називається умовно збіжним.

Теорема 5. Нехай функція $y = f(x)$ визначена на проміжку $[a; +\infty)$ і збігається інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$, тоді збігається і інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

Приклад 14. Дослідити на збіжність невласні інтеграли:

1) $\int\limits_2^{+\infty} x\cdot 3^{-x}\,dx;$ 2) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln^4 x}{x}\,dx;$

3) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx, (\alpha\in R);$ 4) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 4x}{x^8}dx.$

Розв'язання

1) $$\int\limits_2^{+\infty} x\cdot 3^{-x}\,dx = \lim_{N\to+\infty}\int\limits_2^{N} x\cdot 3^{-x}\,dx = \begin{bmatrix} x=U; & dx=dU; \\ 3^{-x}dx=dV; & -\frac{1}{\ln 3}3^{-x}=V. \end{bmatrix} =$$

$$= \lim_{N\to+\infty}\left(\left.\frac{-x}{3^x\cdot\ln 3}\right|_2^N + \frac{1}{3}\int\limits_2^N 3^{-x}dx\right) = \lim_{N\to\infty}\left(-\frac{N}{3^N\ln 3}+\frac{2}{9\ln 3}-\left.\frac{1}{3^x}\cdot\frac{1}{\ln^2 3}\right|_2^N\right) =$$

$$= \lim_{N\to+\infty}\left(-\frac{N}{3^N\ln 3}+\frac{2}{9\ln 3}-\frac{1}{3^N\ln^2 3}+\frac{1}{9\ln^2 3}\right) = -\frac{1}{\ln 3}\lim_{N\to+\infty}\frac{N}{3^N}-\frac{1}{\ln^2 3}\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{3^N}+$$

$$+\frac{2}{9\ln 3}+\frac{1}{9\ln^2 3} = \frac{2}{9\ln 3}+\frac{1}{9\ln^2 3} < \infty.$$

Інтеграл збігається.

Зауваження: Для знаходження границі першого доданка було використане правило Лопіталя

2) $$\int\limits_1^{+\infty}\frac{\ln^4 x}{x}dx = \lim_{N\to+\infty}\int\limits_1^N\frac{\ln^4 x}{x}dx = \left[\begin{array}{ll} \ln x = t; & \begin{array}{|c|c|}\hline x & t \\ \hline N & \ln N \\ \hline 1 & 0 \\ \hline\end{array} \\ \frac{1}{x}dx = dt & \end{array}\right] = \lim_{N\to+\infty}\int\limits_0^{\ln N} t^4 dt =$$

$$= \lim_{N\to+\infty}\left.\frac{t^5}{5}\right|_0^{\ln N} = \frac{1}{5}\lim_{N\to+\infty}\left(\ln^5 N\right) = \infty.$$

Інтеграл розбігається.

3) $$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx=\lim_{N\to+\infty}\int_1^N x^{-\alpha}dx=\lim_{N\to+\infty}\begin{cases}\left.\dfrac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_1^N, \alpha\neq 1;\\ \left.\ln|x|\right|_1^N, \alpha=1;\end{cases}=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\begin{cases}\dfrac{1}{-\alpha+1}\left(N^{-\alpha+1}-1\right), \alpha\neq 1;\\ \ln N-\ln 1, \quad \alpha=1\end{cases}=\lim_{N\to\infty}\begin{cases}\dfrac{1}{-\alpha+1}\left(N^{-\alpha+1}-1\right), \alpha<1;\\ \dfrac{1}{-\alpha+1}\left(\dfrac{1}{N^{\alpha+1}}-1\right), \alpha>1;\\ \ln N, \quad \alpha=1\end{cases}=\begin{cases}\infty, \quad \alpha<1;\\ \dfrac{1}{\alpha-1}, \alpha>1;\\ \infty, \quad \alpha=1.\end{cases}$$

Отже, інтеграл $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx$ збігається, коли $\alpha>1$, розбігається, коли $\alpha\le 1$.

4) $$\int_1^{+\infty}\frac{\cos 4x}{x^8}dx.$$

Безпосереднє дослідження на збіжність цього інтеграла неможливе, оскільки $\cos 4x$ при $x\to\infty$ не прямує до певного числа. Візьмемо до уваги той факт що $\left|\frac{\cos 4x}{x^8}\right|\le\frac{1}{x^8}$. Інтеграл $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^8}dx$ збігається, що виходить з попереднього приклада. На основі теореми ***3*** стверджуємо, що збігається інтеграл $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\cos 4x}{x^8}\right|dx$, а з теореми ***5*** виходить, що збігається і інтеграл $\int_1^{+\infty}\frac{\cos 4x}{x^8}dx$, до того ж, збігається абсолютно.

1.9. Невласні інтеграли II роду (Інтеграли від необмежених функцій)

Розглянемо функцію $y=f(x)$, неперервну на проміжку [*a; b*), яка в точці *b* має нескінченний розрив.

Означення: Невласним інтегралом II роду або інтегралом від функції, неперервної на проміжку [*a; b*) та не обмеженої у точці b називається границя інтеграла

$$\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx, \text{ коли } \varepsilon\to 0+0,$$

тобто,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \qquad (1.23)$$

При цьому, якщо названа границя має скінчене значення, то інтеграл називається збіжним, а коли границя не існує, то інтеграл називається розбіжним. Аналогічно визначається інтеграл

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx \qquad (1.24)$$

для функції $y = f(x)$, неперервної на проміжку $(a;\ b]$ з нескінченним розривом у точці a.

Нехай тепер функція неперервна на проміжку $[a;\ b]$ за винятком внутрішньої точки с, $(a < c < b)$. Тоді невласним інтегралом від необмеженої у внутрішній точці с функції називається така сума границь:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon_1\to 0+0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon_2\to 0+0} \int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)\,dx. \qquad (1.25)$$

Розглянемо властивості інтегралів від необмежних функцій.

Теорема 1. (Порівняння). Нехай функції $y = f(x)$ та $y=\varphi(x)$ неперервні на проміжку $[a;\ b)$, а у точці b мають нескінченний розрив і до того ж задовольняють умові $0 \le f(x) \le \varphi(x)$.Тоді:

1) якщо збігається інтеграл $\int_a^b \varphi(x)dx$, то збігається і інтеграл $\int_a^b f(x)dx$;

2) якщо розбігається інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, то розбігається і інтеграл $\int_a^b \varphi(x)dx$.

Теорема 2. (Порівняння). Нехай на проміжку $[a;\ b)$ визначені додатні та неперервні функції $y = f(x)$ та $y=\varphi(x)$, які у точці b мають нескінченний розрив. До того ж існує границя $\lim\limits_{x\to b-0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = k > 0$. Тоді обидва інтеграли $\int_a^b f(x)dx$ та $\int_a^b \varphi(x)dx$ водночас збігаються або розбігаються.

Означення. Невласний інтеграл II роду $\int_a^b f(x)dx$ називається абсолютно збіжним, якщо збігається інтеграл $\int_a^b |f(x)|dx$

Теорема 3. Якщо збігається інтеграл $\int_a^b |f(x)|dx$, то збігається і невласний інтеграл II роду $\int_a^b f(x)dx$.

Приклад 15. Дослідити на збіжність невласні інтеграли:

1) $\int_{-6}^{-2}\frac{1}{x+2}dx$; 2) $\int_0^1 \frac{1}{x^a}dx, \alpha \in R.$; 3) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)dx$.

Розв'язання

1) $I = \int_{-6}^{-2}\frac{1}{x+2}dx$.

Підінтегральна функція неперервна на проміжку [-6; -2). У точці $x = -2$ функція має нескінченний розрив. Отже, це невласний інтеграл II роду.

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0+0}\int_{-6}^{-2}\frac{1}{x+2}dx = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \ln|x+2|\Big|_{-6}^{-2-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0+0}(\ln\varepsilon - \ln 4) = -\infty .$$

Інтеграл розбігається.

2) $I = \int_0^1 \frac{1}{x^a}dx, \alpha \in R.$

Підінтегральна функція неперервна на проміжку (0; 1], а у точці $x = 0$ функція має нескінченний розрив. Отже, це невласний інтеграл другого роду.

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0+0}\int_{0+\varepsilon}^{1} x^{-a}dx = \begin{cases} \left.\dfrac{x^{-a+1}}{-a+1}\right|_{0+\varepsilon}^{1}, a \neq 1 \\ \ln|x| \Big|_{0+\varepsilon}^{1}, a = 1 \end{cases} = \frac{1}{1-a}\lim_{\varepsilon \to 0+0}\begin{cases} 1-\varepsilon^{-a-1}, & a<1; \\ 1-\dfrac{1}{\varepsilon^{a-1}}, & a>1; \\ -\ln\varepsilon, & a=1; \end{cases} =$$

$$= \frac{1}{1-a}\begin{cases} 1; & a<1; \\ \infty; & a>1; \\ \infty; & a=1. \end{cases}$$

Таким чином, цей інтеграл збігається, коли $\alpha < 1$ та розбігається, коли $\alpha \geq 1$.

3) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)dx$.

Підінтегральна функція неперервна на проміжку (0; 1], а у точці $x = 0$ функція має нескінченний розрив.

Досліджувати на збіжність цей інтеграл, виходячи з означення невласного інтеграла, не можна, оскільки $\cos\frac{1}{x}$ не прямує до певного значення.

Візьмемо до уваги очевидну нерівність:

$$0 \le \frac{1}{\sqrt{x}}\cos^2\left(\frac{1}{x}\right) \le \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Як уже відомо, збігається інтеграл $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$,отже, за теоремою порівняння збігається і інтеграл $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)dx$.

1.10. Головні значення невласних інтегралів

Розглянемо невласні інтеграли типу $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ з неперервною функцією *f(x)* та $\int_a^b f(x)dx$, де функція *f*(*x*) неперервна на проміжку [*a;b*], за винятком внутрішньої точки c, що є точкою нескінченного розриву. Як відомо, ці інтеграли можна подати у вигляді:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{N_1\to+\infty}\int_{-N_1}^{0} f(x)dx + \lim_{N_2\to+\infty}\int_{0}^{N_2} f(x)dx.$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1\to 0+0}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2\to 0+0}\int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx.$$

При цьому слід мати на увазі, що N_1 та N_2 змінюються незалежно одне від одного, а ε_1 та ε_2 також змінюються незалежно одне від одного. Розглянемо тепер частинні випадки цих інтегралів, припустивши, що $N_1 = N_2$ та $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Тоді

$$V.P. \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{N\to+\infty}\left(\int_{-N}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{N} f(x)dx\right). \qquad (1.26)$$

$$V.P. \quad \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right). \qquad (1.27)$$

Інтеграли, подані формулами (1.26) та (1.27), називаються головними значеннями невласних інтегралів відповідно I та II роду. Тут використані символи
V.P. – це перші букви слів valeur principal – головне значення.

Якщо невласний інтеграл збігається у звичайному розумінні, то він збігається і у розумінні головних значень. Буває так, що у звичайному розумінні інтеграл розбігається, а у розумінні головних значень збігається. Отже, із збіжності у розумінні головних значень не випливає збіжність у звичайному розумінні.

Приклад 16. Дослідити невласні інтеграли на збіжність у звичайному розумінні та на збіжність у розумінні головних значень.

1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{4+x^2}dx$; 2) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{4}\frac{1}{x\ln x}dx$.

Розв'язання.

1) $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{4+x^2}dx=\lim_{N_1\to+\infty}\int\limits_{N_1}^{0}\frac{x}{4+x^2}dx+\lim_{N_2\to+\infty}\int\limits_{0}^{N_2}\frac{x}{4+x^2}dx=\frac{1}{2}\lim_{N_1\to+\infty}\ln\left|4+x^2\right|\Big|_{-N_1}^{0}+$$

$$+\frac{1}{2}\lim_{N_2\to+\infty}\ln\left|4+x^2\right|\Big|_{0}^{N_2}=\frac{1}{2}\lim_{N_1\to+\infty}\ln 4-\ln\left(\left|4+N_1^2\right|\right)+\frac{1}{2}\lim_{N_2\to+\infty}\ln\left(\left|4+N_2^2\right|-\ln 4\right)=\infty.$$

Інтеграл у звичайному розумінні розбігається.

$$V.P.\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{4+x^2}dx=\lim_{N_1\to+\infty}\left(\int\limits_{-N}^{0}\frac{x}{4+x^2}dx+\lim_{N_2\to+\infty}\int\limits_{0}^{N}\frac{x}{4+x^2}dx\right)=\lim_{N\to+\infty}\left(\int\limits_{-N}^{N}\frac{x}{4+x^2}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{N\to+\infty}\ln\left|4+x^2\right|\Big|_{-N}^{N}=\frac{1}{2}\lim_{N\to+\infty}\left(\ln\left|4+N^2\right|-\ln\left|4+N^2\right|\right)=0.$$

Значить, у розумінні головних значень інтеграл збігається.

2) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{4}\frac{1}{x\ln x}dx$.

Підінтегральна функція неперервна на проміжку $\left[\frac{1}{2};4\right]$ за винятком внутрішньої точки $x=1$, у якій функція має нескінченний розрив.

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{4}\frac{1}{x\ln x}dx=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{x\ln x}dx+\int\limits_{1}^{4}\frac{1}{x\ln x}dx=\lim_{\varepsilon_1\to0+0}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon_1}\frac{1}{x\ln x}dx+\lim_{\varepsilon_2\to0+0}\int\limits_{1-\varepsilon_2}^{4}\frac{1}{x\ln x}dx=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\ln x=t;\\ \frac{1}{x}dx=dt;\end{array}\quad\begin{array}{|c|c|}\hline x & t\\ \hline 1-\varepsilon_1 & \ln(1-\varepsilon_1)\\ \hline \frac{1}{2} & \ln\frac{1}{2}\\ \hline\end{array}\quad\begin{array}{|c|c|}\hline x & t\\ \hline 4 & \ln 4\\ \hline 1+\varepsilon_1 & \ln(1+\varepsilon_2)\\ \hline\end{array}\right]=\lim_{\varepsilon_1\to0+0}\int\limits_{\ln\frac{1}{2}}^{\ln(1-\varepsilon_1)}\frac{1}{t}dt+$$

$$+\lim \int_{\ln(1+\varepsilon_2)}^{4} \frac{1}{t}dt = \lim_{\varepsilon_1\to 0+0}\left(\ln|t|\Big|_{\ln\frac{1}{2}}^{\ln(1-\varepsilon_1)}\right) + \lim_{\varepsilon_2\to 0+0}\left(\ln|t|\Big|_{\ln(1+\varepsilon_2)}^{\ln 4}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0+0}\left(\ln|\ln(1-\varepsilon_1)| - \ln\left|\ln\frac{1}{2}\right| + \lim_{\varepsilon_2\to 0+0}\ln|\ln 4| - \ln|\ln(1-\varepsilon_2)|\right) = \infty .$$

Інтеграл збігається у звичайному розумінні.

$$V.P. \int_{\frac{1}{2}}^{4}\frac{1}{x\ln x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon}\frac{1}{x\ln x}dx + \int_{1+\varepsilon}^{4}\frac{1}{x\ln x}dx\right) =$$

$$= \left[\begin{array}{l|cc|cc} \ln x = t; & x & t & x & t \\ & 1-\varepsilon & \ln(1-\varepsilon) & 4 & \ln 4 \\ \frac{1}{x}dx = dt; & \frac{1}{2} & \ln\frac{1}{2} & 1+\varepsilon & \ln(1+\varepsilon) \end{array}\right] = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{\ln(1-\varepsilon)}\frac{1}{t}dt + \right.$$

$$\left. + \int_{\ln(1+\varepsilon)}^{\ln 4}\frac{1}{t}dt\right) = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(\ln|\ln(1-\varepsilon)| - \ln\left|\ln\frac{1}{2}\right| + \ln|\ln 4| - \ln|\ln(1-\varepsilon)|\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(\ln|\ln 1| + \ln\left|\frac{\ln 4}{\ln 2^{-1}}\right| - \ln|\ln 1|\right) = \ln\left|\frac{2\ln 2}{-\ln 2}\right| = \ln 2.$$

Як бачимо, інтеграл збігається і у розумінні головних значень.

2. ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

2.1. Обчислення площі плоскої фігури у декартовій системі координат

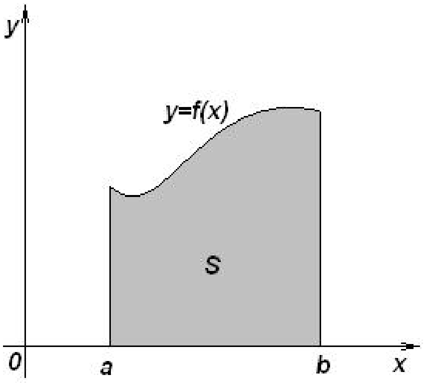


Рисунок 2.1

1. Площа криволінійної трапеції, обмеженої відрізком [*a;b*] на осі *OX*, прямими *x* = *a* та *x* = *b* і графіком неперервної, невід'ємної функції *y* = *f(x)*.

Раніше було доведено, що площа такої криволінійної трапеції може бути знайдена за допомогою визначеного інтеграла.

$$S = \int_a^b f(x)dx\,. \qquad (2.1)$$

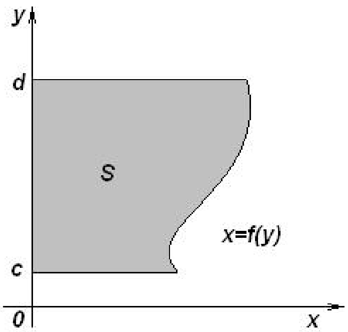


Рисунок 2.2

2. Площа криволінійної трапеції, обмеженої відрізком [c;d] на осі *OY*, прямими *y = c* та *y = d* і графіком неперервної, невід'ємної функції *x = f(y)*.

Площа криволінійної трапеції у цьому випадку може бути обчислена як і у випадку 1^0, якщо прийняти до уваги, що криволінійна трапеція прилягає не до осі *OX*, а до осі *OY*.

$$S = \int_c^d f(y)dy. \qquad (2.2)$$

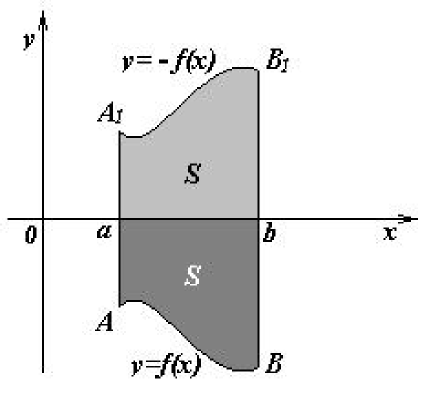


Рисунок 2.3

3. Площа криволінійної трапеції, обмеженої відрізком [*a;b*] на осі OX, прямими *x = a* та *x = b* і графіком неперервної, недодатньої функції *y = f(x)*.

Розглянемо допоміжну функцію *y=-f(x)*. Ця функція невід'ємна на [*a;b*], а площа криволінійної трапеції aA_1B_1b, обмеженої відрізком [*a;b*] осі *OX*, прямими *x=a* та *x=b* і графіком функції *y=-f(x)* дорівнює площі криволінійної трапеції *aABb*.

Таким чином ,

$$S = -\int_a^b f(x)dx \qquad (2.3)$$

або

$$S = \int_a^b |f(x)|\,dx. \qquad (2.3')$$

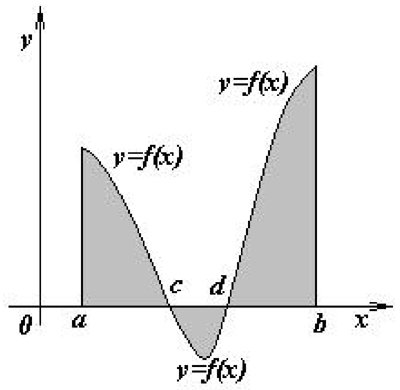


Рисунок 2.4

4. Площа плоскої фігури, обмеженої відрізком [*a;b*] на осі *OX*, прямими *x = a* та *x = b* і графіком неперервної функції *y = f(x)*.

Якщо на сегменті [*a;b*] функція *y= f(x)* зберігає певний знак, то площа криволінійної трапеції, обмеженої графіком цієї функції, визначається у відповідності з п. 1 або п. 3. Розглянемо тепер той випадок, коли знак функції на сегменті [*a;b*] змінюється. Тоді плоску фігуру слід розбити на суму криволінійних трапецій так, щоб кожна з них була обмежена функцією певного знака і скористатись результатами п. 1 та п. 3, або ж такою формулою

$$S = \int_a^b |f(x)|dx. \qquad (2.4)$$

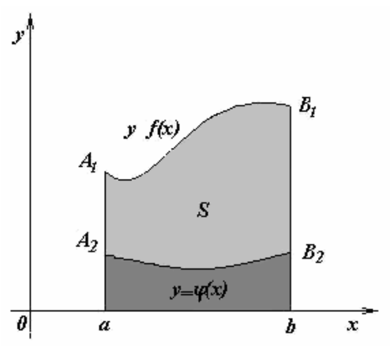


Рисунок 2.5

5. Площа плоскої фігури, обмеженої прямими *x=a* та *x=b* і графіками неперервних функцій *y = f(x)*, *y = φ(x)*, де $0 \le \varphi(x) \le f(x)$**.**

Площу S даної фігури можна розглядати як різницю площ двох криволінійних трапецій aA_1B_1b та aA_2B_2b, тобто,

$$S = \int_a^b (f(x) - \varphi(x))dx. \qquad (2.5)$$

Приклад 1. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = \cos x$; $y = \sin x$; $x = \frac{\pi}{6}$; $x = \frac{\pi}{3}$.

Розв'язання.

Як випливає з рисунка, задана фігура, площу якої слід знайти, складається з двох частин. У одній з частин $\cos x \ge \sin x$, а в іншій $\sin x \ge \cos x$. Тому $S = S_1 + S_2$, де

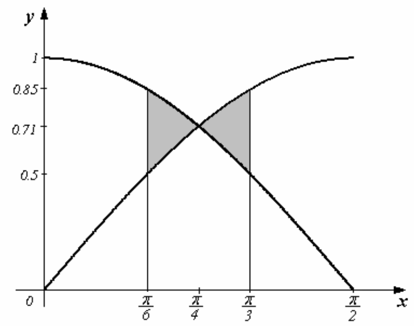


Рисунок 2.6

$$S_1 = \int_{\pi/6}^{\pi/4} (\cos x - \sin x)dx; \quad S_2 = \int_{\pi/4}^{\pi/3} (\sin x - \cos x)dx.$$

$$S_1 = (\sin x + \cos x)\Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) -$$

$$-\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2} - 1 - \sqrt{3}}{2} \text{ (од. кв.).}$$

$$S_2 = (-\cos x - \sin x)\ \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = -(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}) + (\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{2\sqrt{2} - 1 - \sqrt{3}}{2} \text{ (од. кв.).}$$

Таким чином,

$S = (2\sqrt{2} - 1 - \sqrt{3})$. (од. кв.).

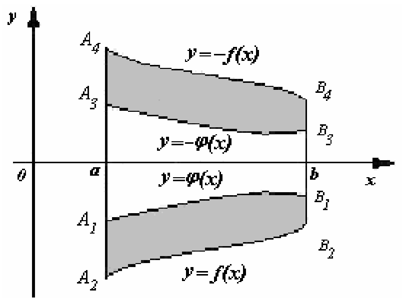


Рисунок 2.7

6. Площа плоскої фігури, обмеженої прямими *x = a* та *x = b* і графіками неперервних функцій *y = f(x)*, *y = φ(x)*, де $f(x) \le \varphi(x) \le 0$.

Розглянемо допоміжні функції $y = -f(x)$ та $y = -\varphi(x)$. Зрозуміло, що $(-f(x)) \ge 0$, $(-\varphi(x)) \ge 0$. Площа S плоскої фігури $A_1A_2B_2B_1$ дорівнює площі плоскої фігури $A_3A_4B_4B_3$ яка, у відповідності з п. 5, може бути знайдена за формулою (2.5), стосовно функцій *y= -f(x)*, $y = -\varphi(x)$**,** тобто,

$$S = \int_a^b (f(x) - \varphi(x))dx \qquad (2.5)$$

або у даному випадку

$$S = -\int_a^b (f(x) - \varphi(x))dx. \qquad (2.6)$$

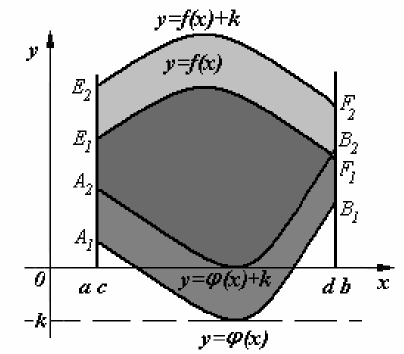


Рисунок 2.8

7. Площа плоскої фігури, обмеженої відрізком [*a;b*] на осі OX, прямими *x = a* та *x = b* і графіком функцій *y = f*(*x*), $y = \varphi(x)$, **(**$f(x) \ge \varphi(x)$**), які на сегменті [*a;b*] можуть приймати як додатні, так і від'ємні значення.**

Площу заданої фігури у цьому випадку можна розглядати як суму площин декількох фігур, кожна з яких відповідає якомусь з попередніх випадків. Але такий метод є досить громіздким.

Розглянемо допоміжні функції *y*=*f*(*x*)+*k* та $y = \varphi(x) + k$, де (-*k*) – найменше значення функції $y = \varphi(x)$ на сегменті [*a;b*].Графіки допоміжних функцій виходять з графіків заданих функцій паралельним переносом вздовж осі **OY** на величину *k*. Завдяки паралельному переносу утворюється фігура $E_1E_2F_2F_1$, що рівновелика заданій фігурі $A_1A_2B_2B_1$. Площу фігури $E_1E_2F_2F_1$, а отже, і площу фігури $A_1A_2B_2B_1$, можна знайти за формулою (2.5).

$$S = \int_a^b \left(f(x) - \varphi(x)\right)dx.$$

Приклад 2. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = -x^2 + 5x - 6$ та $x - y = 10$.

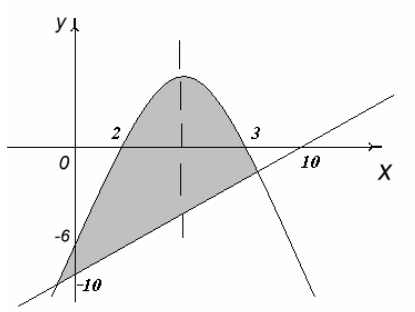


Рисунок 2.9

Розв'язання.

Побудуємо задану фігуру. Рівняння $y = -x^2 + 5x - 6$ визначає параболу, яка перетинає вісь OX у точках $x_1 = 2$; $x_2 = 3$; віссю симетрії цієї параболи є пряма $x = 2{,}5$; вітки параболи напрямлені вниз. Рівняння $x - y = 10$ визначає пряму, яка перетинає осі OX та OY відповідно у точках $x = 10$ та $y = -10$.

Площа фігури визначається за формулою $S = \int\limits_a^b \left(f(x) - \varphi(x) \right) dx$, де $f(x) = -x^2 + 5x - 6$, $\varphi(x) = x - 10$.

Для знаходження границь інтегрування a і b слід розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} y = -x^2 + 5x + 6; \\ y = x - 10. \end{cases}$$

Вирішуючи систему, приходимо до квадратного рівняння

$$-x^2 + 5x - 6 = x - 10 \text{ або } x^2 - 4x - 10 = 0.$$

Коренями цього рівняння є числа $x_1 = 2 - 2\sqrt{5}$; $x_2 = 2 + 2\sqrt{5}$. Тоді

$$S = \int\limits_{2-2\sqrt{5}}^{2+2\sqrt{5}} \left(-x^2 + 5x + 6 - x + 10 \right) dx = \int\limits_{2-2\sqrt{5}}^{2+2\sqrt{5}} \left(-x^2 + 4x + 16 \right) dx =$$

$$= \left(-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 16x \right) \Bigg|_{2-2\sqrt{5}}^{2+2\sqrt{5}} = -\frac{8}{3}(1 + 3\sqrt{5} + 15 + 5\sqrt{5} - 1 + 3\sqrt{5} - 15 +$$

$$+ 5\sqrt{5}) + 2 \cdot 4(1 + 2\sqrt{5} + 5 - 1 + 2\sqrt{5} - 5) + 16 \cdot 2(1 + \sqrt{5} - 1 + \sqrt{5}) =$$

$$= \frac{160\sqrt{5}}{3} (\text{од.кв}).$$

8. Площа плоскої фігури, симетричної щодо осі OY

Нехай плоска фігура, площу якої необхідно обчислити, є криволінійна трапеція, обмежена відрізком $[-a; a]$, прямими $x = -a$, $x = a$ і графіком функції $y = f(x)$, парної на $[-a; a]$.

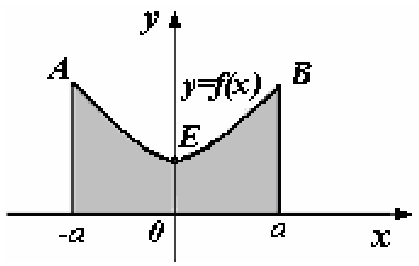


Рисунок 2.10

Оскільки функція $y = f(x)$ парна на відрізку $[-a; a]$, то її графік симетричний щодо осі OY. З цього виходить, що площі криволінійних трапецій $-aAE0$ і $0EBa$ рівні між собою, значить, для знаходження площі всієї криволінійної трапеції *–aABa* достатньо знайти площу криволінійної трапеції *0EBa*, тобто, $S = S_{-aABa} = 2S_{0EBa}$,

$$S = 2\int\limits_0^b f(x)dx. \tag{2.7}$$

Приклад 3. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = tgx$, $x = -\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4}$, $y = 0$.

Розв'язання

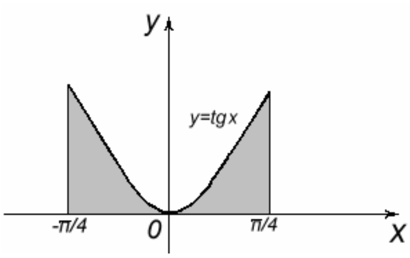


Рисунок 2.11

Так як функція $y = tgx$ на $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ є парною функцією, то за формулою (2.7) маємо

$$S = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} tgx\,dx = -2\ln\left|\cos x\right|\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = -2\left(\ln\frac{\sqrt{2}}{2} - \ln 1\right) =$$

$$= -2\cdot\left(-\frac{1}{2}\ln 2\right) = \ln 2 \text{ (од. кв)}.$$

2.2. Площа плоскої фігури, обмеженої лініями, рівняння яких задані в параметричній формі

Як вже наголошувалося, функціональна залежність між двома змінними x і y може бути задана в явному вигляді $y = f(x)$ або ж за допомогою параметра t:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta \qquad (2.8)$$

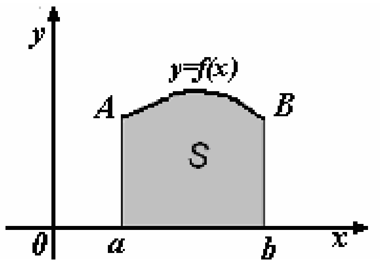


Рисунок 2.12

Нехай плоска фігура є криволінійною трапецією, обмеженою відрізком $[a;b]$ на осі OX, прямими $x = a$, $x = b$, а також графіком функції $y = f(x)$, заданої у вигляді (2.8), при умові, що $t \in [\alpha;\beta]$ і $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Площа крволінійної трапеції в цьому випадку знаходиться за формулою

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Але оскільки функція $y = f(x)$ в явному вигляді нам не задана, то формулу для знаходження S слід перетворити до більш зручного вигляду.

Будемо вважати, що функція $y = \psi(t)$ неперервна, а функція $x = \varphi(t)$ диференційована і її похідна неперервна на сегменті $[\alpha;\beta]$.Зробимо заміну змінної в інтегралі.

$$x = \varphi(t),\ dx = \varphi'(t)dt.$$

Визначимо нові межі інтеграла. Якщо $x = a$, то $\varphi(t) = a$, $t = \alpha$, якщо $x = b$, то $\varphi(t) = b$, $t = \beta$. Одержимо

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt . \qquad (2.9)$$

Але оскільки $f[\varphi(t)] = y$, а $y = \psi(t)$, то формула приймає вигляд

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\varphi'(t)dt . \qquad (2.10)$$

Якщо криволінійна трапеція прилягає до осі OY, то, як відомо,

$$S = \int_{c}^{d} f(y)dy .$$

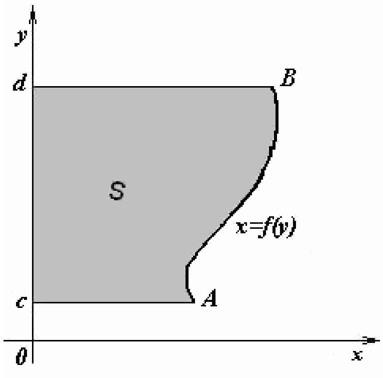


Рисунок 2.13

Нехай функціональна залежність $x = f(y)$ надана у вигляді

$$\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

де $\alpha \le t \le \beta$, $\psi(\alpha) = c$, $\psi(\beta) = d$, функція $x = \varphi(t)$ неперервна, а функція $y = \psi(t)$ диференційована та її похідна неперервна на сегменті $[\alpha;\beta]$. За допомогою заміни змінної інтегрування $y = \psi(t)$, одержуємо аналогічно попередньому випадку формулу

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t)\psi'(t)dt . \qquad (2.11)$$

Приклад 4. Складти параметричні рівнянні кіл, заданих рівняннями:

1) $x^2 + y^2 = r^2$; 2) $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.

Розв'язання

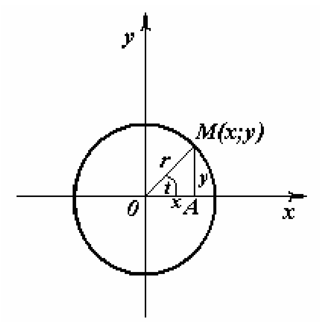


Рисунок 2.14

1)Нехай $M(x;y)$ – поточна точка кола. З трикутника *OAM* видно, що

$$\begin{cases} x = r\cos t; \\ y = r\sin t. \end{cases} \qquad (2.12)$$

Ці рівняння визначають задане коло, в чому легко переконатись, якщо піднести до квадрату обидві частини кожного рівняння і додати результати.

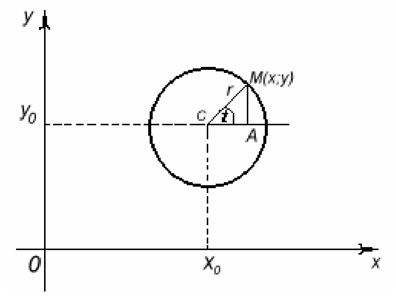


Рисунок 2.15

2) Нехай $M(x;y)$ - поточна точка кола. Розглянемо прямокутний трикутник CAM, беручи до уваги, що точка C має координати x_0 і y_0, одержимо

$$\begin{cases} x = x_0 + r\cos t; \\ y = y_0 + r\sin t. \end{cases} \qquad (2.13)$$

Рівняння (2.13) і визначають задане коло.

Приклад 5. Визначити форму кривої, заданої рівняннями:

$$\begin{cases} x = a\cos t; \\ y = b\sin t. \end{cases} \qquad (2.14)$$

Розв’язання

Перетворимо задані рівняння до такого вигляду

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} = \cos t; \\ \dfrac{y}{b} = \sin t. \end{cases}$$

Піднесемо обидві частини кожного рівняння до квадрату і почленно додамо одержані рівняння. Тоді

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t$$

або

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Останнє рівняння визначає еліпс.

Деякі важливі криві, рівняння яких задані у параметричній формі

1. Астроїда

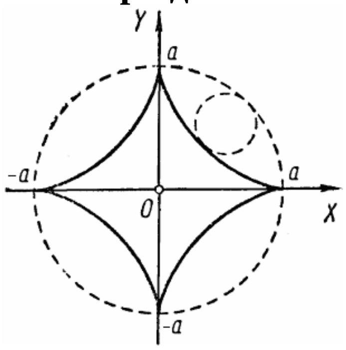


Рисунок 2.16

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t; \\ y = a\sin^3 t. \end{cases} \qquad (2.15)$$

або

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}. \qquad (2.15')$$

2. Циклоїда

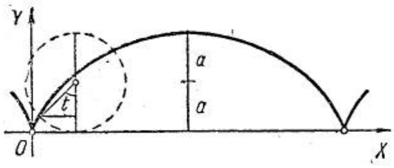


Рисунок 2.17

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t); \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases} \qquad (2.16)$$

3. Евольвента кола

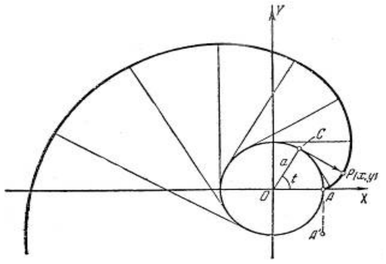


Рисунок 2.18

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t); \\ y = a(\sin t - t \cos t). \end{cases} \qquad (2.17)$$

Приклад 6. Обчислити площу фігури, обмеженої еліпсом

$$\begin{cases} x = a \cos t; \\ y = b \sin t. \end{cases}$$

Розв'язання

Еліпс – фігура, симетрична відносно OX і OY.Тому достатньо обчислити лише площу, розташовану в I чверті, враховуючи, що при цьому t змінюється від $\pi/2$ до 0.

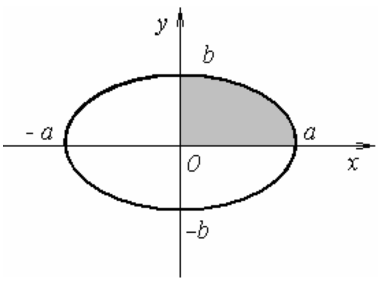


Рисунок 2.19

$$S = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (b \sin t)(a \cos t)' \, dt = 4ab \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin t(-\sin t) dt =$$

$$= -4ab \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2 t dt = -2ab \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (1 - \cos 2t) \, dt =$$

$$= -2ab\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{0} = 0 + 2ab \cdot \frac{\pi}{2} = \pi ab (\text{од.кв})$$

Приклад 7. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями, що задані рівняннями

$$\begin{cases} x = 4(t - \sin t); \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}$$

та

$$y = 6,$$

якщо $0 \le x \le 8\pi$; $y \ge 6$.

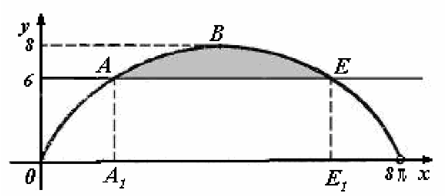


Рисунок 2.20

Розв'язання

Задана крива є циклоїдою; максимальне значення y дорівнює $4\cdot 2$, тобто 8. Оскільки $x\in[0;4\cdot 2\pi]$,то це означає, що задана лише одна арка циклоїди. Рівняння $y = 6$ задає пряму. Щоб знайти площу фігури $ABEE_1$, необхідно знайти t, при яких відбувається перетин прямої та циклоїди.

$$\begin{cases} y = 6; \\ y = 4(1-\cos t); \end{cases} \quad 6 = 4(1-\cos t);\ 1-\cos t = \frac{6}{4};\ \cos t = -\frac{1}{2};$$

$$t = \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{2}\right) + 2\pi n,\quad n\in Z; \qquad t = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi n, n\in Z .$$

Відповідно умові прикладу маємо такі корені:

$$t_1 = \frac{2\pi}{3},\quad t_2 = \frac{4\pi}{3}.$$

Площу фігури A_1ABEE_1 можна знайти за формулою (2.9).

$$S_{A_1ABEE_1} = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} 4(1-\cos t)\cdot 4(t-\sin t)'\,dt = 16\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}(1-\cos t)^2 dt = 16\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}\left(1-2\cos t+\cos^2 t\right)dt =$$

$$=16\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}\left(1-2\cos t+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt = 16\left(\frac{3}{2}\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}dt - 2\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}\cos t dt + \frac{1}{2}\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}\cos 2t dt\right) =$$

$$= 16\left(\frac{3}{2}t\Big|_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} - 2\sin t\Big|_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} + \frac{1}{4}\sin 2t\Big|_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}\right) = 16\left(\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}\right) - 2\cdot\left(\sin\frac{4\pi}{3}-\sin\frac{2\pi}{3}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}\cdot\left(\sin\frac{8\pi}{3}-\sin\frac{4\pi}{3}\right)\right) = 16\left(\pi - 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{1}{4}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = 16\pi + 36\sqrt{3}.$$

Тепер обчислимо площу прямокутника A_1AEE_1 за формулою (2.1). Спочатку знайдемо межі інтегрування.

$$x_1 = 4\left(\frac{2\pi}{3}-\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}; \qquad x_2 = 4\left(\frac{4\pi}{3}-\sin\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{16\pi}{3} + 2\sqrt{3}.$$

$$S_{A_1ABB_1} = \int_{\frac{8\pi}{3}-2\sqrt{3}}^{\frac{16\pi}{3}+2\sqrt{3}} 6dx = 6x\Big|_{\frac{8\pi}{3}-2\sqrt{3}}^{\frac{16\pi}{3}+2\sqrt{3}} = 6\left(\frac{16\pi}{3}+2\sqrt{3}-\frac{16\pi}{3}+2\sqrt{3}\right) = 16\pi + 24\sqrt{3}.$$

Остаточно,

$$S_{ABE} = \left(16\pi + 36\sqrt{3}\right) - \left(16\pi + 24\sqrt{3}\right) = 12\sqrt{3}\,(\text{од.кв.}).$$

Зауваження. Площу прямокутника

2.3. Полярна система координат на площині

Положення точки на площині може бути задане різними способами. Наприклад, в декартовій прямокутній системі координат *XOY* положення точки *M* можна описати за допомогою двох чисел *x* і *y*, які називаються її декартовими координатами. Відомо також, що за допомогою алгебраїчних рівнянь в декартовій системі координат описуються різні лінії. Разом з декартовою системою координат існують і інші системи координат.

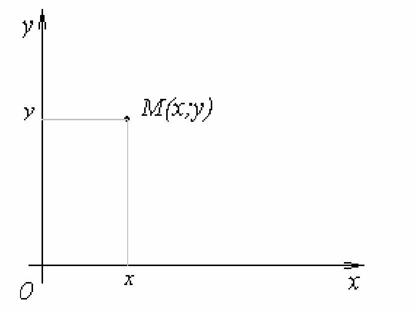


Рисунок 2.21

Зрозуміло, що одна і та ж лінія в різних системах координат має різні рівняння. Розглянемо систему координат, яка називається **полярною системою координат**.

На площині виберемо вісь, звану **полярною віссю**, на ній виберемо точку O, звану **полюсом** і визначимо одиницю вимірювання довжини. Сукупність полярної вісі і полюса утворюють полярну систему координат.

Положення будь-якої точки може бути описане за допомогою двох чисел, званих **полярними координатами на площині.** Перша полярна координата - **полярний радіус –** позначається **ρ** і є відстанню від даної точки *M* до полюса *0*. Друга полярна координата – **полярний кут** – позначається **φ** і є кутом, на який слід повернути вісь ***ρ*** в додатному або від'ємному напрямі, до збігу з промінем *OM*. Кожній парі **(ρ;φ)** полярних координат відповідає лише одна точка на площині, але будь-якій точці площини відповідає безліч пар значень полярних координат, в яких полярні кути відрізняються на число, кратне **2π.**

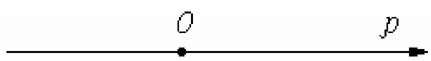


Рисунок 2.22

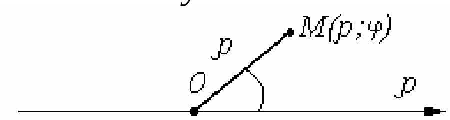


Рисунок 2.23

Для того, щоб між точками площини і їх полярними координатами існувала взаємнооднозначна відповідність, вважають, що полярний кут приймає значення, які належать проміжку (-**π**; **π**] або ж [*0*; **2π**). Таким чином, для полярних координат встановлені по домовленості обмеження:

$$0 \le \rho < \infty; \quad \text{або} \quad 0 \le \rho < \infty;$$
$$-\pi < \varphi \le \pi . \qquad\qquad 0 \le \varphi < 2\pi .$$

Зауваження 1. Полярний кут φ може приймати будь-які значення, тобто, $-\infty < \varphi < \infty$, але тільки при $\varphi \in (-\pi; \pi]$ або $\varphi \in [0; 2\pi)$ існує взаємно однозначна відповідність між точками площини і її полярними координатами. Значення $\varphi \in (-\pi; \pi]$ або $\varphi \in [0; 2\pi)$ називаються **головними значеннями полярного кута.**

Зауваження 2. Полярний радіус полюса дорівнює *0*, а полярний кут для цієї точки невизначений.

Іноді у процесі дослідження функцій, заданих рівняннями у полярних координатах, виявляється зручним полярному радіусу ***ρ*** приписувати знак. Полярна система координат, в якій полярний радіус приймає всі дійсні значення, називається **узагальненою полярною системою координат.** При цьому для побудови точки *M*(-***ρ;φ***) відрізок довжиною ***ρ*** відкладається від точки *O* не на промені, що проходить під кутом *φ*, а на продовженні цього променя з другого боку від полюса.

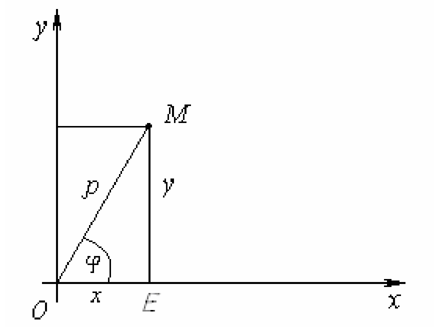


Рисунок 2.24

Встановимо зв'язок між декартовими і полярними координатами точки *M* на площині. Нехай в декартовій системі координат точка *M* визначається парою чисел (*x;y*), а в полярній системі координат парою чисел (***ρ;φ***). Поєднаємо прямокутну систему координат з полярною системою координат так, щоб вісь абсцис співпадала з полярною віссю координат, а початок координат *O* співпадав з полюсом *0*.

З прямокутного трикутника *OME* легко встановити наступні залежності:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi; \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \tag{2.18}$$

та

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases} \tag{2.19}$$

Останні дві формули в (2.19) можна записати як одну

$$tg\varphi = \frac{y}{x}, \tag{2.20}$$

але в цьому випадку значення аргументу визначається лише з точністю до доданків виду ***πk***, де ***k € Z.***

Приклад 8. Побудувати лінію, рівняння якої в полярній системі координат має вигляд:

$$\rho = \cos 2\varphi.$$

Розв'язання

Для побудови графіка складемо таблицю значень функції, надаючи аргументу *φ* значення, що належать проміжку $[0^0; 360^0)$ з кроком $h = 15^0$. При цьому користуватимемося узагальненою полярною системою координат.

φ^0	$2\varphi^0$	ρ
0	0	1
15	30	0,7
30	60	0,5
45	90	0
60	120	-0,5
75	150	0,7

φ^0	$2\varphi^0$	ρ
90	180	-1
105	210	-0,7
120	240	-0,5
135	270	0
150	300	0,5
165	330	0,7

φ^0	$2\varphi^0$	ρ
180	360	1
195	390	0,7
210	420	0,5
225	450	0
240	480	-0,5
255	510	-0,7

φ^0	$2\varphi^0$	ρ
270	540	-1
285	570	-0,7
300	600	-0,5
315	630	0
330	660	0,5
345	690	0,7

Відклавши одержані точки, з’єднаємо їх лінією.

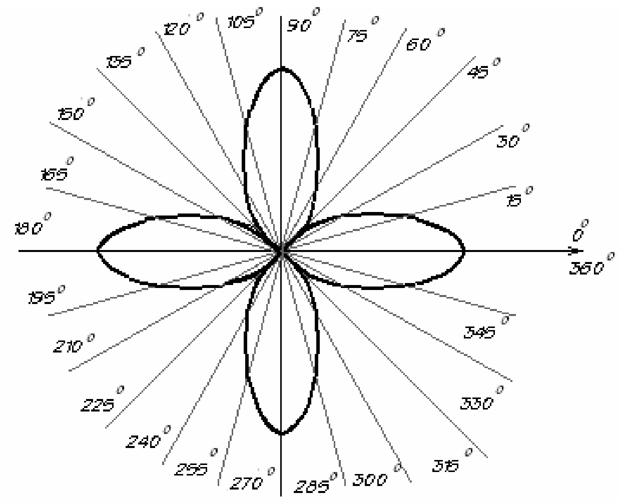


Рисунок 2.25

Одержано графік функції $\rho = \cos 2\varphi$**,** який називається **чотирипелюстковою трояндою.** Аналогічно можуть бути побудовані графіки функцій типу

$$\rho = a \sin k\varphi, \qquad (2.21)$$

$$\rho = a \cos k\varphi, \qquad (2.22)$$

де a і k **–** деякі додатні числа. Такі криві називаються **кривими Гвідо Гранді** або «трояндами». Причому, якщо k – ціле непарне число, то «троянда» складається з k пелюсток, а якщо k **–** ціле парне число, то троянда складається з $2k$ пелюсток.

Приклад 9. Скласти полярні рівняння кіл, заданих рівняннями:

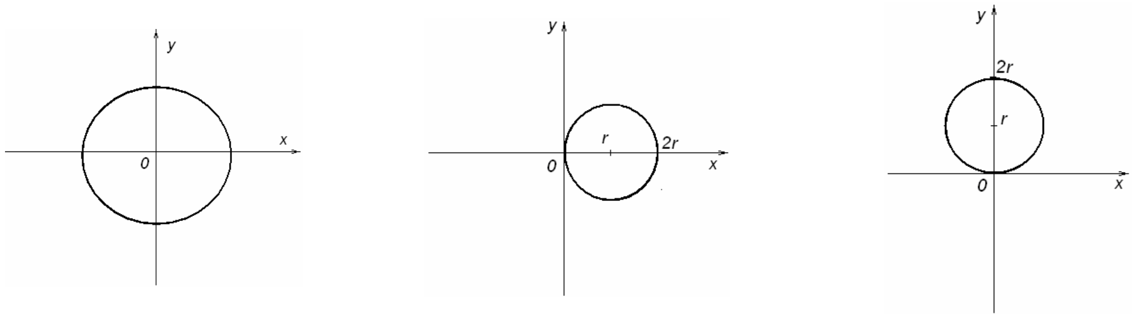
1) $x^2 + y^2 = r^2;$

2) $(x-r)^2 + y^2 = r^2;$

3) $x^2 + (y-r)^2 = r^2.$

Розв’язання

Зобразимо вказані кола.



1) 2) 3)

Рисунок 2.26

Скористаємося формулами переходу від декартових прямокутних координат до полярних координат.

1)
$$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow (\rho\cos\varphi)^2 + (\rho\sin\varphi)^2 = r^2 \Rightarrow$$
$$\rho = r, \quad \varphi \in [0;2\pi]. \qquad (2.23)$$

2)
$$(x-r)^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow (\rho\cos\varphi - r)^2 + (\rho\sin\varphi)^2 = r^2 \Rightarrow$$
$$\rho^2\cos^2\varphi - 2r\rho\cos\varphi + r^2 + \rho^2\sin^2\varphi = r^2 \Rightarrow$$
$$\rho^2 = 2r\rho\cos\varphi \Rightarrow$$
$$\rho = 2r\cos\varphi, \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]. \qquad (2.24)$$

3) Аналогічно,
$$x^2 + (y-r)^2 = r^2 \Rightarrow (\rho\cos\varphi)^2 + (\rho\sin\varphi - r)^2 = r^2 \Rightarrow$$
$$\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi - 2r\rho\sin\varphi + r^2 = r^2 \Rightarrow$$
$$\rho^2 = 2r\rho\sin\varphi \Rightarrow$$
$$\rho = 2r\sin\varphi, \quad \varphi \in [0;\pi]. \qquad (2.25)$$

Як бачимо, рівняння кіл в полярній системі координат простіші, ніж в декартовій системі координат.

При побудові графіків функції в полярній системі координат слід мати на увазі наступні властивості:

1. Графік функції **ρ = - *f*(φ)** симетричний графіку функції **ρ = *f*(φ)** щодо полюса.

2. Графік функції **ρ = *f*(-φ)** симетричний графіку функції **ρ = *f*(φ)** щодо полярної осі.

3. Графік функції **ρ =*m f*(φ),** *m* >0 – це розтягнутий або стислий уздовж полярної осі в *m* раз графік функції **ρ = *f*(φ).**

4. Графік функції **ρ = *f*(φ + *a*) –** це графік, одержаний з графіка функції **ρ = *f*(φ),** за допомогою повороту на полярний кут **α**.

5. Графік функції **ρ = *f*(φ) + *b*** – це графік функції **ρ = *f*(φ),** паралельно перенесений уздовж полярної осі на величину *b*.

Деякі важливі криві,
рівняння яких задані в полярній системі координат

1. **Гіперболічна спіраль** – це крива, задана рівнянням

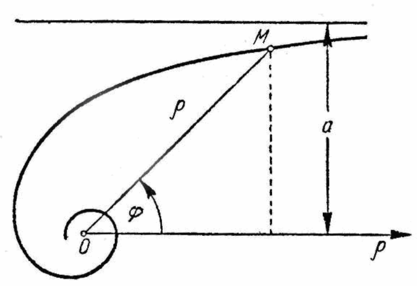


Рисунок 2.27

$$\rho = \frac{a}{\varphi}, \quad (\rho > 0), \tag{2.26}$$

де – a додатна стала величина, а полярний кут φ приймає всі додатні значення.

2. **Логарифмічна спіраль –** це крива, задана рівнянням

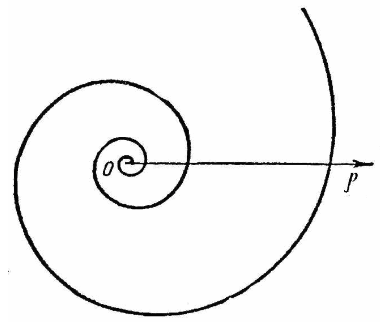


Рисунок 2.28

$$\rho = ae^{m\varphi}. \tag{2.27}$$

3. **Спіраль Архімеда** – це крива, задана рівнянням

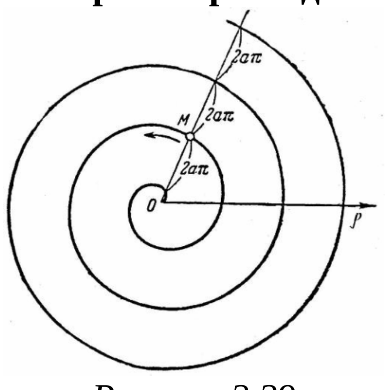


Рисунок 2.29

$$\rho = a\varphi, \; (\rho \geq 0). \tag{2.28}$$

4. **Кардіоіда** – це крива, задана рівнянням

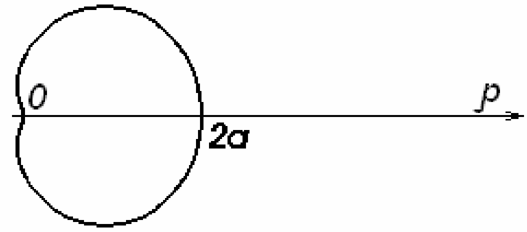


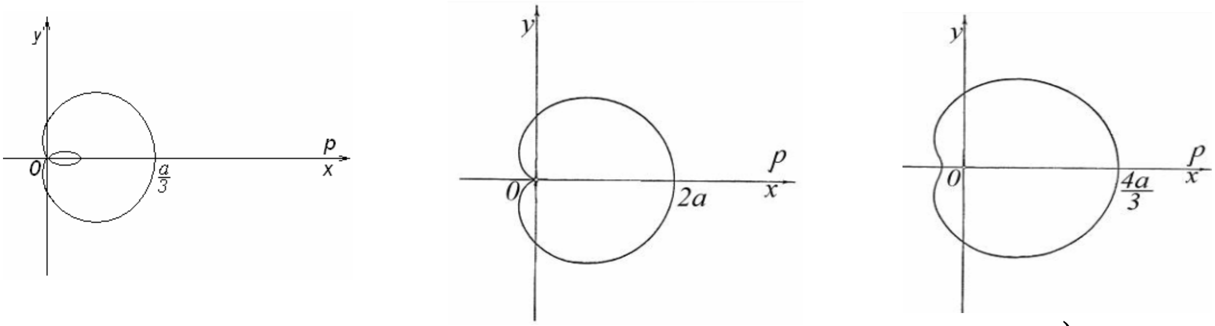
Рисунок 2.30

$$\rho = a(1 + \cos\varphi). \tag{2.29}$$

5. **Равлик Паскаля** – це крива, задана рівнянням

$$\rho = a\cos\varphi + \ell . \qquad (2.30)$$

Залежно від співвідношення між сталими a і ℓ визначається форма **равлика Паскаля.**



a) b) c)

Рисунок 2.31

У випадку *a)* $\ell : \alpha = 1:3$; у випадку *b)* $\ell : \alpha = 1$, а равлик Паскаля переходить у кардіоіду, що є частинним випадком равлика Паскаля; у випадку *c)* $1 < \ell : a < 2$.

Равлик Паскаля може бути заданий також і рівняннями у параметричній формі.

$$\begin{cases} x = a\cos^2\varphi + \ell\cos\varphi; \\ y = a\sin\varphi\cos\varphi + \ell\sin\varphi. \end{cases} \qquad (2.31)$$

6. **Лемніската Бернулі –** це крива, задана рівнянням

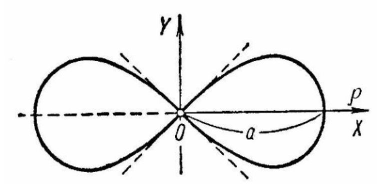


Рисунок 2.32

$$\rho^2 = a^2\cos 2\varphi \qquad (2.32)$$

або

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right). \qquad (2.33)$$

7. **Трипелюсткова „Троянда” –** це крива, задана рівнянням

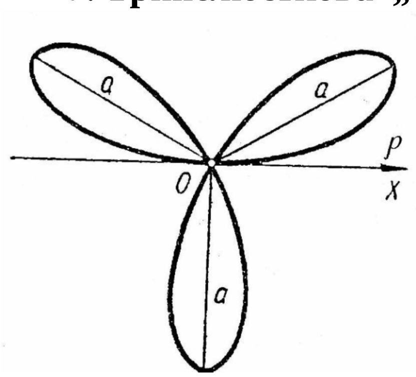


Рисунок 2.33

$$\rho = a\cos 3\varphi, \ (\rho \ge 0). \qquad (2.34)$$

2.4. Площа плоскої фігури в полярній системі координат

Нехай в полярній системі координат на відрізку $[\alpha\beta]$ задана неперервна функція **ρ= *f*(φ).** Потрібно визначити площу криволінійного сектора, обмеженого промінями $\varphi=\alpha;\varphi=\beta$ і графіком функції **ρ = *f*(φ).**

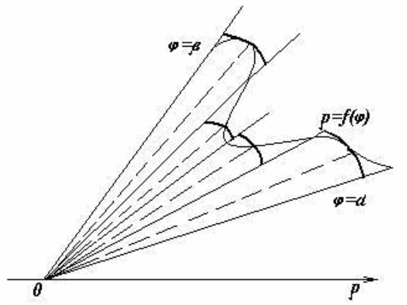


Рисунок 2.34

Сегмент $[\alpha;\beta]$ точками розподілу $\alpha=\varphi_0<\varphi_1<\varphi_2<...<\varphi_n=\beta$ розіб'ємо на частинні сегменти, довжини яких позначаються відповідно $\Delta\varphi_1,\Delta\varphi_2,...,\Delta\varphi_n$. Через точки розподілу проведемо проміні, внаслідок чого увесь криволінійний сектор буде поданий у вигляді суми часткових криволінійних секторів. У кожному частинному секторі виберемо будь-яким чином проміжні точки $c_1,c_2,...,c_n$, і обчислимо значення функції в цих точках: $f(c_1), f(c_2),..., f(c_n)$. Кожен криволінійний сектор замінимо круговим сектором з центральним кутом $\Delta\varphi_i$ і радіусом, що дорівнює значенню функції в проміжній точці. Тепер можна визначити суму S_n площ кругових секторів, яка приблизно дорівнює площі S криволінійного сектора.

$$S_n=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f^2(c_i)\Delta\varphi_i .$$

Дана сума є інтегральною сумою. Очевидно, що при необмеженому збільшенні числа точок розбиття і за умови, що величина кожного з частинних сегментів прагне до нуля є слушною рівність

$$S=\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f^2(c_i)\Delta\varphi_i=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi)d\varphi ,$$

де $\lambda=\max\Delta\varphi_i, 1\le i\le n$.

Таким чином, одержана формула

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi)\,d\varphi . \qquad (2.35)$$

Приклад 10. Обчислити площу фігури, обмеженої графіком функції **ρ = cos2φ.**

Розв'язання

Як вже було показано, графік функції **ρ= cos2φ** є чотирипелюстковою трояндою. При обчислені площі, обмеженої кривою Гвідо **ρ =*a* cos *k*φ** слід мати на увазі, що корисною є така формула: $S=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{k}}\rho^2(\varphi)d\varphi$. За цією формулою знаходимо площу одного пелюстка. В нашему випадку $k = 2$. З міркувань симетрії можна обчислити площу половини пелюстка, вважаючи, що $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

$$S = 8 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\varphi \; d\varphi = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 4\varphi) \; d\varphi = 2\left(\varphi + \frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2} \text{ (кв.од).}$$

Приклад 11. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $\rho = 8\sin\varphi$ та $\rho = 8\sqrt{3}\cos\varphi$.

Розв’язання

Задані рівняння у полярній системі координат визначають кола з радіусами, що відповідно дорівнюють 4 та $4\sqrt{3}$. Для кола, заданого рівнянням $\rho = 8\sin\varphi$, φ належить проміжку $[0; \pi]$, а для кола $\rho = 8\sqrt{3}\cos\varphi$, φ належить проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

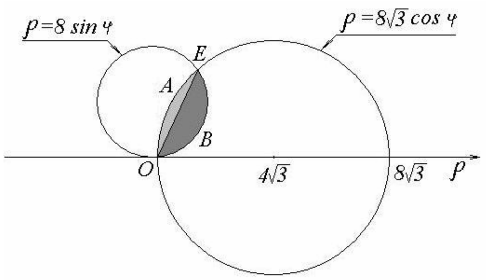


Рисунок 2.35

Зображуємо обидва кола на одному рисунку. Фігура, площу якої необхідно обчислити, є спільною частиною двох кругів. Проведемо допоміжну лінію *OE* і будемо тепер задану фігуру розглядати як суму двох фігур *OBE* та *OAE*. Спочатку дізнаємось, при якому значенні φ перетинаються два кола. Для цього розв’яжемо наступну систему рівнянь

$$\begin{cases} \rho = 8\sin\varphi; \\ \rho = 8\sqrt{3}\cos\varphi. \end{cases}$$

$$8\sin\varphi = 8\sqrt{3}\cos\varphi; \quad \sin\varphi = \sqrt{3}\cos\varphi;$$

Поділимо обидві частини рівності на $\cos\varphi \neq 0$.

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \sqrt{3}; \quad tg\varphi = \sqrt{3}.$$

Отримали найпростіше тригонометричне рівняння. З множини розв’язків цього рівняння

$$\varphi = \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in Z$$

нам підходить значення кореня $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Отже, фігура *OBE* є частиною круга, обмеженого колом $\rho = 8\sin\varphi$, коли $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$, а фігура *OAE*, то частина круга, обмеженого колом $\rho = 8\sqrt{3}\cos\varphi$, коли $\frac{\pi}{3} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

$$S_{ABE} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (8\sin\varphi)^2 dx = 32\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2\varphi\, d\varphi = 32\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1-\cos 2\varphi)d\varphi =$$

$$= 16\left(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} = 16\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 16\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

Аналогічно,

$$S_{OAE} = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(8\sqrt{3}\cos\varphi\right)^2 d\varphi = 96\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi d\varphi = 96\cdot\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\varphi)d\varphi =$$

$$= 48\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = 48\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 48\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

$$S_{OAEB} = S_{OBE} + S_{OAE} = 16\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + 48\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 16\left(\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}\right) \approx 14{,}18 \ \ (\text{од.кв.}).$$

Приклад 12. Обчисліти площу фігури, обмеженої лініями $\rho = 7$ та $\rho = 14\cos 3\varphi$.

Розв'язання

Перше з рівнянь визначає коло з центром у точці O(0;0) та радіусом r = 7. Друге рівняння задає трипелюсткову „троянду”.

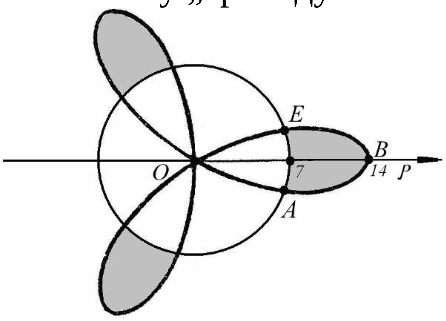


Рисунок 2.36

Знайдена фігура, площу S якої необхідно знайти, складається з трьох рівновеликих частин. Знайдемо площу S_1 однієї з цих частин, наприклад, *ABE*. Шукаємо точки перетину кривих

$$\begin{cases} \rho = 7; \\ \rho = 14\cos 3\varphi. \end{cases}$$

Знаходимо φ:

$$7 = 14\cos 3\varphi;\ \cos 3\varphi = \frac{1}{2};\ 3\varphi = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n,\quad n \in Z\,.$$

$$3\varphi=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\quad n\in Z;\ \ \varphi=\pm\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}\pi n,\ n\in Z.$$

Відповідно умові прикладу маємо значення коренів:

$$\varphi_1=-\frac{\pi}{9}\ \text{та}\ \varphi_2=\frac{\pi}{9},$$

тобто, φ змінюється у проміжку $\left[-\frac{\pi}{9};\frac{\pi}{9}\right]$. Тоді,

$$S_1=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}}\left((14\cos 3\varphi)^2-(7)^2\right)d\varphi=\frac{49}{2}\int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}}\left(4\cos^2 3\varphi-1\right)d\varphi=\frac{49}{2}\int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}}\left(2(1+\cos 6\varphi)-1\right)d\varphi=$$

$$=\frac{49}{2}\int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}}\left(2+2\cos 6\varphi-1\right)d\varphi=\frac{49}{2}\int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}}\left(1+2\cos 6\varphi\right)d\varphi=\frac{49}{2}\left(\varphi+\frac{1}{3}\sin 6\varphi\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}}=$$

$$=\frac{49}{2}\left(\frac{\pi}{9}+\frac{\pi}{9}+\frac{1}{3}\sin\frac{2\pi}{3}+\frac{1}{3}\sin\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{49}{2}\left(\frac{2\pi}{9}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)=49\left(\frac{\pi}{9}+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\ \ (\text{од.кв}.)$$

$$S=3S_1=49\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\ \ (\text{од.кв.}).$$

2.5. Довжина дуги плоскої кривої

2.5.1. Обчислення довжини дуги, що задана рівнянням у декартовій системі координат

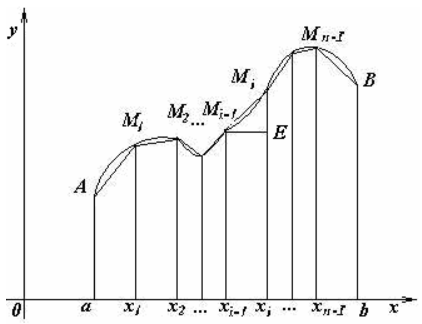


Рисунок 2.37

Нехай в прямокутних координатах на площині задана крива рівнянням $y=f(x)$, де $f(x)$ – на сегменті [$a;b$] має неперервну похідну. Розіб´ємо сегмент [$a;b$] на часткові сегменти точками розподілу $a=x_0<x_1<x_2<...<x_n=b$. Через ці точки проведемо вертикальні прямі і з їх допомогою дугу *AB* розіб’ємо на часткові дуги. У кожну дугу впишемо хорду, що сполучає кінці дуги, завдяки чому одержимо ламану $AM_1M_2...M_{n-1}B$. Позначимо довжини часткових дуг відповідно $\Delta\ell_1,\Delta\ell_2,...,\Delta\ell_n$. Тоді довжина ламаної

$$\ell_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta\ell_i\ .$$

Означення. Довжиною ℓ дуги *AB* називається границя, до якої прагне довжина вписаної в неї ламаної, якщо число ланок ламаної необмежено збільшується, а довжина її найбільшої ланки прагне до нуля, тобто,

$$\ell = \lim_{\Delta\ell \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta\ell_i, \ \ \Delta\ell = \max \Delta\ell_i, 1 \le i \le n$$

Розглянемо одну ланку ламаної. З точки M_{i-1} проведемо відрізок $M_{i-1}E$ паралельно осі ОХ. Введемо позначення: $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$, де i = 1,2,…,n. З прямокутного трикутника $M_{i-1}M_iE$ витікає, що

$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i .$$

Розглянемо відношення

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}.$$

Функція $y = f(x)$ на сегменті [$a;b$] задовольняє умовам теореми Лагранжа. Значить,

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f'(c_i)(x_i - x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(c_i) \quad \text{, де } c_i \in (x_{i-1}; x_i).$$

Тепер довжину ламаної можна подати у вигляді

$$\ell_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \Delta x_i .$$

Сума є інтегральною сумою. Отже, довжина дуги AB може бути знайдена як границя інтегральної суми.

$$\ell = \lim_{\Delta\ell \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx .$$

Таким чином, одержано формулу

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \qquad (2.36)$$

Приклад 13. Знайти довжину дуги ланцюгової лінії $y = \frac{5}{2}\left(e^{\frac{x}{5}} + e^{-\frac{x}{5}}\right)$ від точки M_1(0;5) до точки $M_1\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2e}\left(e^2 + 1\right)\right)$.

Розв'язання

Будемо користуватись формулою (2.33).

Знаходимо

$$y' = \frac{5}{2}\left(e^{\frac{x}{5}} \cdot \frac{1}{5} + e^{-\frac{x}{5}} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{5}} - e^{-\frac{x}{5}}\right), \ (y')^2 = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{5}} - 2 + e^{-\frac{2x}{5}}\right)$$

$$1+(y')^2=1+\frac{1}{4}e^{\frac{2x}{5}}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{-\frac{2x}{5}}=\frac{1}{4}e^{\frac{2x}{5}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{-\frac{2x}{5}}=\frac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{5}}+e^{-\frac{2x}{5}}\right)^2;$$

$$\sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{\frac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{5}}+e^{-\frac{2x}{5}}\right)^2}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{2x}{5}}+e^{-\frac{2x}{5}}\right);$$

Далі можна знайти довжину дуги

$$\ell=\int_0^5\frac{1}{2}\left(e^{\frac{2x}{5}}+e^{-\frac{2x}{5}}\right)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}e^{\frac{2x}{5}}-\frac{5}{2}e^{-\frac{2x}{5}}\right)\Bigg|_0^5=\frac{5}{4}\left(\left(e^2-e^{-2}\right)-(1-1)\right)=\frac{5}{4}\left(e^2-e^{-2}\right).$$

Приклад 14. Знайти довжину дуги кривої, заданої рівнянням $y=\ln(\cos x)$, де $x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$.

Розв'язання

Використовуючи формулу (2.33), знаходимо

$$y'=(\ln(\cos x))'=\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)=-tgx.\quad 1+(y')^2=1+tg^2x=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$\ell=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos x}dx=\ln tg\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}=\ln tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)-\ln tg\frac{\pi}{4}=\ln\left(tg\frac{7\pi}{12}\right)-\ln 1=\ln\left(tg\frac{7\pi}{12}\right).$$

Приклад 15. Знайти довжину дуги кривої, заданої рівнянням

$$y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x\text{, де } x\in[1;e].$$

Розв'язання

Використовуємо формулу (2.36).

$$y'=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2x}=\frac{x^2-1}{2x};\ (y')^2=\frac{x^4-2x^2+1}{4x^2};$$

$$1+(y')^2=1+\frac{x^4-2x^2+1}{4x^2}=\frac{4x^2+x^4-2x^2+1}{4x^2}=\frac{x^4+2x^2+1}{4x^2}=\left(\frac{x^2+1}{2x}\right)^2.$$

$$\ell=\int_1^e\frac{x^2+1}{2x}dx=\frac{1}{2}\int_1^e\left(x+\frac{1}{x}\right)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}+\ln|x|\right)\Bigg|_1^e=\frac{1}{4}\left(e^2-1\right)+\frac{1}{2}(\ln e-\ln 1)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(e^2-1\right)+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\left(e^2+1\right).$$

2.5.2. Обчислення довжини дуги, рівняння якої задане у параметричній формі

Нехай тепер дуга кривої задана рівнянням в параметричній формі

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \tag{2.37}$$

де $t \in [\alpha;\beta]$, $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ – функції, що диференціюються, причому $\varphi'(t)$ і $\psi'(t)$ є неперервними на $[\alpha;\beta]$, а $\varphi'(t)$ на $[\alpha;\beta]$ не дорівнює нулеві. За цих умов існує похідна $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$, що є також неперервною функцією. Виходитимемо з відомої вже формули

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx .$$

Перетворимо підінтегральний вираз, для чого внесимо dx під корінь.

$$\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx = \sqrt{(dx)^2 + \left(f'(x)dx\right)^2} .$$

Враховуючи, що $f'(x)\,dx = dy$, отримаємо

$$\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} .$$

Оскільки $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то $dx = \varphi'(t)dt$, $dy = \psi'(t)dt$. Тоді,

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt .$$

Отже, отримана формула

$$\ell = \int_a^b \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt . \tag{2.38}$$

Можна показати, що якщо крива не плоска, а просторова, задана рівняннями

$$\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t); \\ z = \xi(t), \end{cases} \tag{2.39}$$

де $t \in [\alpha;\beta]$, а функції $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\xi(t)$ мають неперервні похідні, то довжина дуги знаходиться за формулою

$$\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\xi'(t))^2}\, dt . \tag{2.40}$$

Приклад 16. Знайти довжину дуги однієї арки циклоїди

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t); \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases} \quad t \in [0;2\pi].$$

Розв'язання

Будемо користуватись формулою (2.38). Для цього знайдемо

$x' = a(1 - \cos t)$; $(x')^2 = a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t)$; $y' = a\sin t$; $(y')^2 = a^2 \sin^2 t$;

$$(x')^2 + (y')^2 = a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t) = 2a^2(1 - \cos t) = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2} .$$

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{4a^2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=2a\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt=4a\int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=-4a\frac{1}{\frac{1}{2}}\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi}=$$

$$=-8a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi}=-8a(0-1)=8a\ \text{(од. довж.)}.$$

Приклад 17. Знайти довжину дуги кривої, що задана рівняннями

$$\begin{cases} x=\sin t+2t\cos t; \\ y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t, \end{cases}\quad \text{де}\quad t\in[0;2\pi].$$

Розв'язання

Довжину дуги знаходимо за формулою (2.38). Маємо

$$x'=2t\sin t+(t^2-2)\cos t+2\cos t-2t\sin t=t^2\cos t-2\cos t+2\cos t=t^2\cos t.$$

$$y'=-2t\cos t-(2-t^2)\sin t+2\sin t+2t\cos t=-2\sin t+t^2\sin t+2\sin t=t^2\sin t.$$

$$(x')^2=t^4\cos^2 t;\quad (y')^2=t^4\sin^2 t;\quad (x')^2+(y')^2=t^4\cos^2 t+t^4\sin^2 t=t^4;$$

$$\sqrt{(x')^2+(y')^2}=\sqrt{t^4}=t^2;\ \ \ell=\int_0^{\pi}t^2dt=\frac{1}{3}t^3\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^3}{3}\ \text{(од. довж).}$$

2.5.3. Обчислення довжини дуги, рівняння якої задане у полярній системі координат

Розглянемо випадок, коли дуга кривої задана рівнянням $\rho=f(\varphi)$ у полярній системі координат, де $\varphi\in[\alpha;\beta]$.

Скористаємося формулами, що зв'язують декартові і полярні координати.

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi; \\ y=\rho\sin\varphi. \end{cases}$$

Запишемо їх у такому вигляді:

$$\begin{cases} x=f(\varphi)\cos\varphi; \\ y=f(\varphi)\sin\varphi. \end{cases}$$

Таку залежність між x,y,φ можна розглядати як параметричне завдання функції. Тоді, відповідно до п. 2.5.2, отримаємо

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left(\left(f(\varphi)\cos\varphi\right)'\right)^2+\left(\left(f(\varphi)\sin\varphi\right)'\right)^2}\,d\varphi.$$

Перетворимо підкорінний вираз наступним чином

$$\left(f(\varphi)\cos\varphi\right)'=f'(\varphi)\cos\varphi-f(\varphi)\sin\varphi;\quad \left(f(\varphi)\sin\varphi\right)'=f(\varphi)\cos\varphi+f'(\varphi)\sin\varphi;$$

$$\left(\left(f(\varphi)\cos\varphi\right)'\right)^2=\left(f'(\varphi)\right)^2\cos^2\varphi-2f'(\varphi)f(\varphi)\cos\varphi\sin\varphi+f^2(\varphi)\sin^2\varphi;$$

$$\left(\left(f(\varphi)\sin\varphi\right)'\right)^2=\left(f'(\varphi)\right)^2\sin^2\varphi+2f'(\varphi)f(\varphi)\cos\varphi\sin\varphi+f^2(\varphi)\cos^2\varphi;$$

$$\left(\left(f(\varphi)\cos\varphi\right)'\right)^2+\left(\left(f(\varphi)\sin\varphi\right)'\right)^2=\left(f'(\varphi)\right)^2+f^2(\varphi).$$

Остаточно, маємо формулу

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left(f'(\varphi)\right)^2+f^2(\varphi)}\,d\varphi. \qquad (2.41)$$

Приклад 18. Знайти довжину дуги логарифмічної спіралі $\rho=ae^{m\varphi}$ при зміні φ від 0 до 2π.

Розв'язання

Використовуємо формулу (2.38)

$$\rho=ae^{m\varphi};\ \rho^2=a^2e^{2m\varphi};\rho=mae^{m\varphi};\quad (\rho')^2=a^2m^2e^{2m\varphi};$$

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2e^{2m\varphi}\left(1+m^2\right)}d\varphi=a\sqrt{1+m^2}\int_0^{2\pi}e^{m\varphi}d\varphi=\frac{a\sqrt{1+m^2}}{m}e^{m\varphi}\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{a}{m}\sqrt{1+m^2}\left(e^{2\pi m}-1\right).$$

Приклад 19. Знайти довжину дуги, заданої рівнянням

$$\rho=a\sin^3\frac{\varphi}{3},\quad (a>0).$$

Розв'язання

Необхідно з'ясувати, яких значень набуває φ. Будемо виходити з припущення, що $\sin^3\frac{\varphi}{3}\ge 0$, тоді $\sin\frac{\varphi}{3}\ge 0$ а це означає, що

$$2\pi n\le\frac{\varphi}{3}\le\pi+2\pi n,\quad 6\pi n\le\varphi\le 3\pi+6\pi n.$$

Будемо розглядати $\varphi\in[0;3\pi]$.

Відповідно формулі (2.41),маємо

$$\rho=a\sin^3\frac{\varphi}{3};\quad \rho^2=a^2\sin^6\frac{\varphi}{3};$$

$$\rho'=a\sin^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3};\quad (\rho')^2=a^2\sin^4\frac{\varphi}{3}\cos^2\frac{\varphi}{3};$$

$$\rho^2+(\rho')^2=a^2\sin^4\frac{\varphi}{3}\cdot\left(\sin^2\frac{\varphi}{3}+\cos^2\frac{\varphi}{3}\right)=a^2\sin^4\frac{\varphi}{3};\ \sqrt{a^2\sin^4\frac{\varphi}{3}}=a\sin^2\frac{\varphi}{3}.$$

$$\ell=\int_0^{3\pi}a\sin^2\frac{\varphi}{3}d\varphi=\frac{a}{2}\int_0^{3\pi}\left(1-\cos\frac{2\varphi}{3}\right)d\varphi=\frac{a}{2}\left(\varphi-\frac{3}{2}\sin\frac{2\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{3\pi}=$$

$$=\frac{a}{2}\left(3\pi-\frac{3}{2}\left(\sin 2\pi-\sin 0\right)\right)=\frac{3\pi a}{2}\ (\text{од. довж.}).$$

2.6. Обчислення об'єму тіла за площею паралельних перетинів

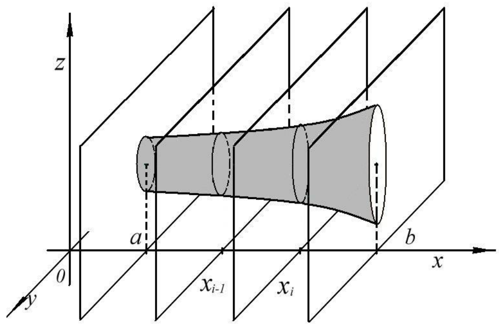


Рисунок 2.38

Нехай є деяке просторове тіло *V*. Задана неперервна на $[a;b]$ функція $S=S(x)$, що дозволяє обчислювати площі поперечних перетинів тіла паралельними між собою площинами, перпендикулярними осі *OX*. Необхідно визначити об'єм тіла *V*.

Розіб'ємо сегмент точками розподілу $a=x_0<x_1<x_2<...<x_n=b$ на часткові сегменти, і через точки розподілу проведемо січні площини, задані рівняннями $x=x_0; x=x_1;\dots;x=x_n$. Ці площини розбивають усе тіло *V* на частинні слої. У кожному з частинних сегментів $\Delta x_1, \Delta x_2,\dots,\Delta x_n$ виберемо довільним чином проміжні точки: $c_1, c_2,\dots,c_n$. Кожен частинний шар тіла довільної форми замінимо на циліндрове тіло, твірні якого паралельні осі *OX*, а направляюча співпадає з контуром перетину тіла площиною $x=c_i$ (*i* = 1, 2, ..., *n*). Об'єм такого тіла може бути знайдений за формулою $S(c_i)\Delta x_i$ (*i* = 1, 2, ..., *n*). Сума об'ємів усіх частинних циліндрових тіл знаходиться за формулою

$$V_n=\sum_{i=1}^{n}S(c_i)\Delta x_i .$$

Ця сума є інтегральною сумою. Очевидно, що коли n прямує до нескінченності, об'єм *V* заданого тіла *V* є границею інтегральної суми V_n.

$$V=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}S(c_i)\Delta x_i=\int_a^b S(x)dx ,\quad \text{де}\quad \lambda=\max\Delta x_i,\ 1\le i\le n$$

Остаточно,

$$V=\int_a^b S(x)dx . \qquad (2.42)$$

Приклад 20. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнею $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{16}=1$.

Розв'язання

Задана поверхня є еліпсоїдом. При перетині еліпсоїда площинами, перпендикулярними осі *OX*, маємо еліпси

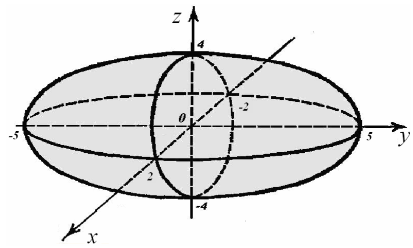


Рисунок 2.39

$$\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{16}=1-\frac{x^2}{4}$$

або

$$\frac{y^2}{\left(5\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right)^2}+\frac{z^2}{\left(4\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right)^2}=1.$$

Напіввісі еліпса дорівнюють відповідно

$$5\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} \text{ та } 4\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}.$$

Раніше було показано, що площа еліпса з напівосями a та b дорівнює πab. Отже, в даному випадку площа $S(x)$ поперечного перетину в точці x знаходиться за формулою

$$S(x)=5\pi(4-x^2), \quad \text{де} \quad x\in[-2;2].$$

Тоді шуканий об’єм V знаходимо за формулою:

$$V=5\pi\int_{-2}^{2}(4-x^2)\,dx=10\pi\int_{0}^{2}(4-x^2)\,dx=10\pi(4x-\frac{x^3}{3})\Big|_0^2=10\pi(8-\frac{8}{3})=\frac{160\pi}{3} \text{ (од. куб.)}$$

2.7. Об’єм тіла обертання

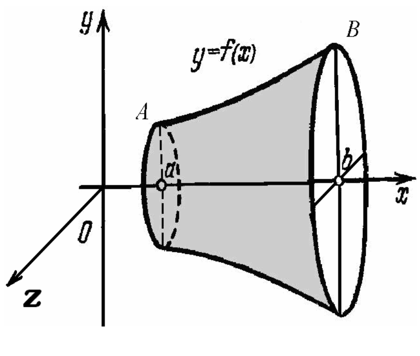


Рисунок 2.40

Нехай на сегменті $[a;b]$ задана неперервна функція $y=f(x)$. Криволінійна трапеція *aABb* обертається навколо вісі *OX* і при цьому утворюється просторове тіло. Необхідно визначити об’єм тіла обертання. Поперечний перетин цього тіла в точці площинами перпендикулярними осі *Ox* є кругом, радіус якого дорівнює значенню функції в точці, тобто, $S(x)=\pi\big(f(x)\big)^2$.

Знаючи площі поперечних перетинів, можемо знайти і об’єм тіла за формулою

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx \quad . \qquad (2.43)$$

Приклад 21. Знайти об’єм тіла, отриманого обертанням навколо осі *OX* плоскої фігури, обмеженої лініями $y=\sqrt{2px}$, $y=0$, $x=h$.

Розв’язання

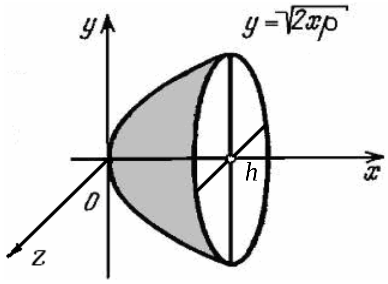


Рисунок 2.41

$$V=\pi\int_0^h\left(\sqrt{2px}\right)^2dx=2\pi p\int_0^h xdx=2p\pi\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^h=\pi ph^2 \text{ (од. куб.).}$$

2.8 Площа поверхні тіла обертання

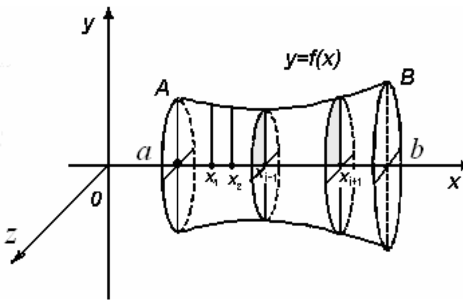


Рисунок 2.42

Нехай на сегменті $[a;b]$ задана функція $y=f(x)$, що має неперервну похідну. Крива обертається навколо вісі OX і при цьому утворюється тіло обертання. Необхідно визначити площу поверхні тіла обертання.

Сегмент $[a;b]$ точками розподілу $a<x_0<x_1<x_2<..<x_n=b$ розіб’ємо на частинні сегменти, довжини яких позначимо $\Delta x_1,\Delta x_2,...,\Delta x_n$.

Через точки розподілу проведемо прямі, паралельні осі OY,які дугу *AB* розіб’ють на частинні дуги.

У кожну частинну дугу впишемо хорду, що сполучає кінці дуги. Кожна хорда при обертанні утворює зрізаний конус, площу поверхні якого можна знайти за формулою:

$$\Delta S_i=2\pi\frac{y_{i-1}+y_i}{2}\Delta l_i,\quad (i=1,2,\dots,n)$$

де Δl_i – довжина частинної хорди.

Як було показано раніше

$$\Delta l_i=\sqrt{\Delta x_i^2+\Delta y_i^2}=\sqrt{1+\left(f'(c_i)\right)^2}\Delta x_i \text{, де } c_i\in[x_{i-1};x_i].$$

Площа поверхні, яку утворює при обертанні вся ламана, вписана в дугу *AB*, таким чином, дорівнює

$$S_n=\sum_{i=1}^n\Delta S_i=2\pi\sum_{i=1}^n\frac{y_{i-1}+y_i}{2}\sqrt{1+\left(f'(c_i)\right)^2}\Delta x_i\,.$$

Сума S_n є інтегральною сумою. Очевидно, що при необмеженому збільшенні числа n точок розбиття площа S_n необмежено наближатиметься до значення площі *S* поверхні тіла обертання

$$S=\lim_{\lambda\to0}S_n=\lim_{\lambda\to0}2\pi\sum_{i=1}^n\frac{y_{i-1}+y_i}{2}\sqrt{1+\left(f'(c_i)\right)^2}\Delta x_i=\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x_i)\right)^2}dx\,.$$

Остаточно, маємо формулу

$$S=\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x_i)\right)^2}\,dx\,. \qquad (2.44)$$

Приклад 22. Знайти площу поверхні тіла, утвореного обертанням навколо осі OX астроїди, заданої рівнянням $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

Розв'язання

Продиференцюємо по x рівність $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$, як неявно задану функцію. Тоді,

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\cdot y'=0;$$

$$y'=\frac{-x^{-\frac{1}{3}}}{y^{-\frac{1}{3}}}=-\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}};$$

$$(y')^2=\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}};\quad 1+(y')^2=1+\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}.$$

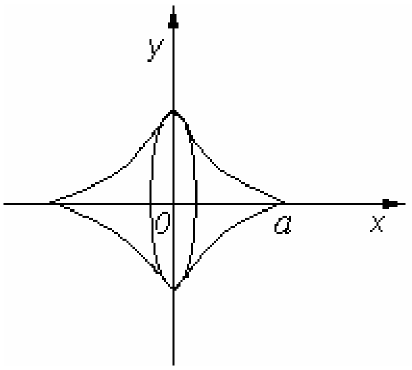


Рисунок 2.43

Поділимо обидві частини нерівності $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ на $x^{\frac{2}{3}}\neq 0$. Маємо $1+\dfrac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}=\dfrac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}$. Значить,

$$1+(y')^2=\frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}};\quad \sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{\frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}=\frac{a^{\frac{1}{3}}}{|x|^{\frac{1}{3}}}=a^{\frac{1}{3}}\cdot|x|^{-\frac{1}{3}}.$$

Тоді, враховуючи симетрію заданого тіла, знаходимо площу за формулою

$$S=2\pi\int_{-a}^{a}y\sqrt{1+(y')^2}\,dx\,.$$

Виходить

$$S=2\pi\cdot 2\int_0^a y\sqrt{1+(y')^2}\,dx\,.$$

Виразимо y через x: $y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}$. Тоді $y=\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$;

$$S=4\pi\int_0^a\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot a^{\frac{1}{3}}\cdot x^{-\frac{1}{3}}dx=4\pi a^{\frac{1}{3}}\int_0^a\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}x^{-\frac{1}{3}}dx\,.$$

Зробимо заміну $a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}=t^2$, тоді $\left(-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right)dx=2tdt.$

Знаходимо нові межі інтегрування: $x=0\Rightarrow t=a^{\frac{1}{3}}$; $x=a\Rightarrow t=0.$

$$S = 4\pi a^{\frac{1}{3}} \int_{a^{\frac{1}{3}}}^{0} t^3(-3t)dt = -12\pi a^{\frac{1}{3}} \int_{a^{\frac{1}{3}}}^{0} t^4 dt = -12\pi a^{\frac{1}{3}} \frac{t^5}{5} = \frac{12}{5}\pi a^2 \quad (\text{од.кв.}).$$

2.9 Загальна схема застосування визначеного інтеграла

Визначений інтеграл знаходить широке застосування при рішенні задач геометрії, механіки, фізики, техніки.

У попередніх параграфах було показано, що за допомогою визначеного інтеграла можуть бути знайдені деякі невідомі величини. При цьому застосовується метод складання інтегральної суми з подальшим граничним переходом.У ряді випадків зручніше користуватися іншою схемою застосування визначеного інтеграла. Нехай нас цікавить значення величини F на сегменті $[a;b]$. При цьому будемо вважати, що кожному частковому проміжку $[x; x+\Delta x] \in [a;b]$ відповідає така частина величини F_i, що коли проміжок $[a;b]$ розкладено на частинні проміжки, то і величина F розкладається на відповідні частини. Тоді можна вважати, що величина F є функцією проміжку $[x; x+\Delta x]$. Задача полягає у тому, щоб знайти значення функції на усьому проміжку $[a;b]$.

Розглянемо той елемент ΔF величини F, що відповідає проміжку $[x; x+\Delta x]$. Аналізуючи механічні чи фізичні властивості величини F, знаходимо для величини ΔF наближене значення типу $f(x)\Delta x$, яке є лінійним відносно Δx, а від ΔF відрізняється лише на нескінченно малу більш високого порядку, ніж Δx, коли $\Delta x \to 0$. Це означає, що з нескінченно малого при $\Delta x \to 0$ елемента ΔF виділяють його головну частину. Тоді відносна похибка наближеної рівності

$$\Delta F \approx f(x)\Delta x$$

буде прямувати до нуля разом з Δx. Далі, щоб знайти значення F на $[a;b]$, можна подати F у вигляді

$$F = \int_a^b f(x)dx$$

або, оскільки $f(x)dx = dF(x)$, то

$$F = \int_a^b dF(x) = F(b) - F(a).$$

Слід зазначити, перевага цього методу полягає у тому, що необов’язково знати функцію $F(x)$, а достатньо знати лише її диференціал або приріст.

Метод інтегральних сум зручніше застосовувати при рішенні геометричних задач, а метод складання диференціала частіше застосовується при рішенні фізичних задач.

Приклад 23. Судина циліндричної форми під атмосферним тиском, що дорівнює 10330 кг/м^2, заповнюється газом. Зверху судина закрита поршнем.

Визначити роботу, що витрачається на ізотермічне стиснення газу при переміщенні поршня на відстань $h = 1{,}2\ м$ за умови, що висота циліндра $H = 1{,}5\ м$, а радіус циліндра $R = 0{,}4\ м$.

Розв'язання

При ізотермічній зміні стану газу, коли його температура залишається незмінною, залежність між об'ємом V і тиском p газу виражається формулою $pV = c$ відповідно до закону Бойля-Маріотта.

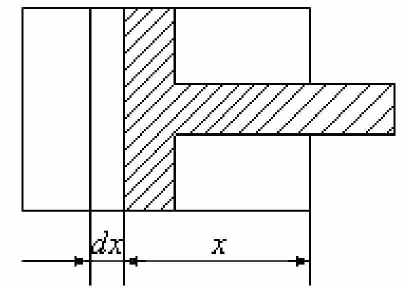


Рисунок 2.44

Якщо поршень висунути всередину циліндра на *x* м, то тиск газу на одиницю площі поршня можна визначити за формулою

$$P(x) = \frac{c}{V(x)} = \frac{c}{S \cdot (H - x)},$$

а тиск на всю площу поршня буде дорівнювати

$$P(x) = Sp(x) = \frac{c}{H - x}.$$

Вважаючи, що робота, яка витрачається на рух поршня на *x* м, є деяка функція $q(x)$, та вважаючи, що при подальнішому переміщені поршня на малу відстань dx тиск $P(x)$ залишається незмінним, знайдемо наближене значення приросту функції $q(x)$, тобто її диференціал.

$$\Delta q \approx P(x)dx = \frac{c}{H - x}dx = dq.$$

Тоді шукана робота A може бути знайдена за допомогою визначенного інтеграла.

$$A = c\int_0^h \frac{dx}{H - x} = (-c \cdot \ln|H - x|)\Big|_0^h = -c \cdot \ln\left|\frac{H - h}{H}\right| = c \cdot \ln\left|\frac{H}{H - h}\right|.$$

Визначимо

$$V_0 = \pi R^2 H = 0{,}24\pi\,(м^3);\quad c = p_0 V_0 = 2479{,}2\pi;\ A = 12533{,}3\,кГм = 122951{,}7\ Дж.$$

Приведемо без доказу ще деякі випадки застосування визначенного інтеграла.

1. Робота A, яку виконує деяка змінна сила $F(x)$ по переміщенню матеріальної точки уздовж відрізка $[a;b]$ осі OX визначається за формулою

$$A = \int_a^b F(x)dx. \tag{45}$$

2. Координати центра мас плоскої дуги, заданої рівнянням $y = f(x)$ на сегменті $[a;b]$, визначаються формулами

$$\begin{cases} x_c = \dfrac{\int\limits_a^b x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}{\int\limits_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}; \\ y_c = \dfrac{\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}{\int\limits_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}. \end{cases} \qquad (46)$$

3. Маса плоскої кривої L, що задана рівнянням $x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ t\in[\alpha;\beta]$, де $\rho(x;y)$ – лінійна густина маси у точці $(x;y)\in L$ визначається формулою
$$M=\int\limits_\alpha^\beta \rho(\varphi(t);\psi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt.$$
4. Маса плоскої кривої L, що задана рівнянням $y=f(x)$, де $\rho(x;y)$ – лінійна густина маси у точці $(x;y)\in L$ визначається формулою
$$M=\int\limits_\alpha^\beta \rho(x;f(x))\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$
5. Статичні моменти кривої L, що задана рівнянням $x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ t\in[\alpha;\beta]$, відносно осей OX, OY, якщо лінійна густина $\rho(x;y)\equiv 1$ мають вигляд
$$M_x=\int\limits_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt;$$
$$M_y=\int\limits_\alpha^\beta \varphi(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt.$$
6. Статичні моменти кривої L, що задана рівнянням $y=f(x),\ x\in[a;b]$, відносно осей OX, OY, якщо лінійна густина $\rho(x;y)\equiv 1$.
$$M_x=\int\limits_\alpha^\beta f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx;$$
$$M_y=\int\limits_\alpha^\beta x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

7. Моменти інерції кривої L, що задана рівнянням $x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ t\in[\alpha;\beta]$, відносно осей OX, OY, якщо лінійна густина $\rho(x;y)\equiv 1$, знаходяться за формулами
$$I_x=\int\limits_\alpha^\beta \psi^2(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt;$$
$$I_y=\int\limits_\alpha^\beta \varphi^2(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt.$$

8. Координати центра мас плоскої однорідної фігури, обмеженої неперервними лініями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$, $x = b$, знаходяться за формулами

$$\begin{cases} x_c = \dfrac{\int_a^b x\left(f_2(x) - f_1(x)\right)\,dx}{\int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)\,dx}; \\ \\ y_c = \dfrac{\frac{1}{2}\int_a^b \left(f_2^2(x) - f_1^2(x)\right)\,dx}{\int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)\,dx}. \end{cases} \qquad (2.47)$$

9. Статичні моменти відносно осей OX та OY плоскої фігури, обмеженої неперервними лініями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$, $x = b$, якщо поверхнева густина $\rho \equiv 1$, знаходяться за формулами

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b \left(f_2^2(x) - f_1^2(x)\right)\,dx;$$
$$M_y = \int_a^b x\left(f_2(x) - f_1(x)\right)\,dx. \qquad (2.48)$$

.

10. Моменти інерції відносно осей OX та OY плоскої фігури, обмеженої нерервними лініями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$, $x = b$, якщо поверхнева густина $\rho \equiv 1$, знаходяться за формулами

$$I_x = \frac{1}{3}\int_a^b \left(f_2^3(x) - f_1^3(x)\right)\,dx;$$
$$I_y = \int_a^b x^2\left(f_2(x) - f_1(x)\right)\,dx. \qquad (2.49)$$

ПЕРЕВІРОЧНІ ТЕСТИ ТА КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Нехай функція $F(x)$ задовільняє умові: $F'(x) = f(x)$. Які з приведенних нижче понять є числами, а які функціями?

а) $F(x)+c$;

б) $\int f(x)dx$;

в) $\int_a^b f(x)dx$;

г) $\int_a^x f(x)dx$;

д) $\left(\int_a^x f(x)dx\right)'_x$.

2. Порівняйте величини $\left(\int_a^x \sin^2 tdt\right)'_x$ та $1-\cos^2 x$.
3. Який з інтегралів більше:

а) $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{10}xdx$; $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^9 xdx$;

б) $I_1=\int_0^1 xdx$; $I_2=\int_0^1 x^2dx$;

в) $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx$; $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin xdx$;

г) $I_1=\int_0^1 e^x dx$; $I_2=\int_0^1 e^{x^3}dx$;

д) $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx$; $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}xdx$;

е) $I_1=\int_{-2}^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)^x dx$; $I_2=\int_{-2}^{-1}(3)^x dx$?

4. Чи інтегрована функція $f(x)=\frac{1}{x^2-4}$ на проміжку $[0;3]$?
5. Деяка функція $f(x)$ інтегрована на проміжку $[a;b]$. Чи можна стверджувати, що вона неперервна на цьому проміжку?
6. Деяка функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a;b]$. Чи можна стверджувати, що вона інтегрована на цьому проміжку?
7. Деяка функція $f(x)$ інтегрована на проміжку $[a;b]$. Чи можна стверджувати, що вона на цьому проміжку досягає найменшого значення m та найбільшого значення M?
8. Чи є слушною рівність:

$$\int_1^n f(x)dx = 0, \quad \text{де} \quad n = \sin^2 17^\circ + \cos^2 17^\circ ?$$

9. Чи є слушною рівність:

$$\int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^{tg\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx + \int_m^4 f(x)\,dx, \quad \text{де} \quad m = tg17^\circ ctg17^\circ ?$$

10. Відомо, що збігається інтеграл

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx .$$

Як при цій умові називається інтеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx ?$$

11. Якщо V.P. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 0$, то яке з тверджень відносно $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ є слушним:

а) збігається;
б) розбігається;
в) висновки зробити не можна?

12. Якщо $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ збігається, то що можна сказати про V.P. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$:

а) дорівнює певному числу;
б) дорівнює нескінченності;
в) висновки зробити не можна?

13. Знайти значення інтеграла

$$\int_{-17,(3)}^{17,(3)} \sin^{123} x dx ,$$

не виконуючи інтегрування.

14. Який з інтегралів більше:

$$I_1 = \int_0^1 \left(1 - x^2\right) dx \;\text{ чи }\; I_2 = \int_0^1 \left(1 - x^3\right) dx ?$$

15. Яким методом може бути обчислений інтеграл $\int_0^3 x\sqrt[3]{1 - x^2}\,dx$?

16. Яким методом може бути обчислений інтеграл $\int_0^1 x\sqrt{1 - x^2}\,dx$?

17. Яким методом може бути обчислений інтеграл $\int_0^1 x^2\sqrt{1 - x^2}\,dx$?

18. Яким методом може бути обчислений інтеграл $\int_0^1 x e^{x^2} dx$?

19. Яким методом може бути обчислений інтеграл $\int_0^1 x^2 e^{x^2} dx$?

20. Що більше $A = \int_a^b f(x)\,dx - S_{10}$ чи $B = \int_a^b f(x)\,dx - S_{20}$, де S_{10} та S_{20} – інтегральні суми при $n = 10$ та $n = 20$?

21. Довести, що

$$\frac{1}{6} < \int_0^2 \frac{1}{10+x}dx < \frac{1}{5}.$$

22. Довести, що

$$1 < \int_0^1 e^{x^2} dx < e.$$

23. Довести, що

$$\frac{2}{5} < \int_1^2 \frac{x}{x^2+1}dx < \frac{1}{2}$$

24. Довести, що

$$9 < \int_8^{18} \frac{x+1}{x+2}dx < 9{,}5.$$

25. Довести, що

$$2^{-q} < \int_8^{18} \frac{1}{\left(x^p+1\right)^q}dx < 1, \qquad (p > 0; q > 0).$$

26. Виходячи з нерівності $x \geq \sin x \geq \frac{2}{\pi}x$, де $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, довести, що

$$1 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}dx < \frac{\pi}{2}.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТЫЙНОЪ РОБОТИ

Обчислити подані інтеграли.

№ 1. $\int_{0}^{2} 3x^2 dx$.

№ 2. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$.

№ 3. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$.

№ 4. $\int_{1}^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

№ 5. $\int_{-5}^{-1} \frac{dx}{x}$.

№ 6. $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{4x^2-9}$.

№ 7. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{x}{2} dx$.

№ 8. $\int_{0}^{4} \frac{x^2}{x^2+1} dx$.

№ 9. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1} dx$.

№ 10. $\int_{2}^{3} \frac{2x^4-5x^2+3}{x^2-1} dx$.

№ 11. $\int_{1}^{2} x \ln x dx$.

№ 12. $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x dx$.

№ 13. $\int_{0}^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$.

№ 14. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx$.

№ 15. $\int_{0}^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

№ 16. $\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$.

№ 17. $\int_{0}^{\frac{a}{2}} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx$.

№ 18. $\int_{0}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.

№ 19. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx$.

№ 20. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^2 x dx$.

№ 21. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$.

№ 22. $\int_{0}^{\ln 2} \sqrt{e^x-1} dx$.

№ 23. $\int_{0}^{\pi} \sin^4 \frac{x}{2} dx$.

№ 24. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x}$.

№ 25. $\int_{0}^{4} \sqrt{x^2+9} dx$.

№ 26. $\int_{0}^{1} \sqrt{4-x^2} dx$.

№ 27. $\int_{0}^{a} \sqrt{a^2-x^2} dx$.

№ 28. $\int_{0}^{4} x^3 \sqrt{x^2+9} dx$.

№ 29. $\int_0^1 \arcsin x dx$.

№ 30. $\int_0^3 \ln(x+3)dx$.

№ 31. $\int_0^1 x\,arctg x dx$.

№ 32. $\int_0^1 xe^{-x} dx$.

№ 33. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$.

№ 34. $\int_0^{\pi} x^2 \cos x dx$.

№ 35. $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$.

№ 36. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$.

Обчислити невласні інтеграли.

№ 37. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3}$.

№ 38. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4}$.

№ 39. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^3}$.

№ 40. $\int_0^{\infty} xe^{-ax^2} dx \quad (a > 1)$.

№ 41. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(1+x)}$.

№ 42. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$.

№ 43. $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{(1+x)^3}$.

№ 44. $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}dx}{(1+x)^2}$.

Користуючись ознаками збіжності, з´ясувати, які з інтегралів збігаються?

№ 45. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

№ 46. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{5/3}}$.

№ 47. $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{c^2 + x^2}$.

№ 48. $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^3 + x + 1}$.

№ 49. $\int_1^{\infty} \frac{x^2 dx}{2x^4 - x^3 + 2x - 1}$.

№ 50. $\int_a^{\infty} \cos x dx$.

№ 51. $\int_a^{\infty} x \cos x dx$.

Дослідити на збіжність невласні інтеграли.

№ 52. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1 - x^4}} dx$.

№ 53. $\int_0^1 \frac{dx}{\ln x}$.

№ 54. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$.

№ 55. $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)\sqrt[3]{x-a}}$.

№ 56. $\int\limits_a^b \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

№ 57. $\int\limits_a^b \frac{dx}{x^2-a^2}$.

Знайти площі фігур, обмежених лініями.

№ 58. $y=x^2;\ y=0;\ x=a;\ \ x=b;\ (b>a)$.

№ 59. $y=6x-x^2;\ y=0$.

№ 60. $y=-x^2+7x-10;\ y=0$.

№ 61. $y=\sin x;\ y=0;\ x=0;\ \ x=\pi$.

№ 62. $xy=a;\ y=0;\ x=a;\ (a>1)$.

№ 63. $y=x^2;\ y=0;\ x=a;\ \ x=b;\ (b>a)$.

№ 64. $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right);\ y=0;\ x=a;\ \ x=0$.

№ 65. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;\ \ x=c;\ (c>a)$.

№ 66. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;\ y=0;\ y=c;\ (c>0)$.

№ 67. $y=\frac{1}{4a}x^2;\ y=b;\ (b>0)$.

№ 68. $y^2=2px;\ x-2y-1=0$.

№ 69. $y^2=2px;\ x^2=2py$.

№ 70. $x^2=4ay;\ \ y=\frac{8a^3}{x^2+4a^2};\ \ (a>0)$.

№ 71. $x^2+y^2=4px;\ y^2=2px$.

№ 72. $y=x^3;\ y=2x$.

№ 73. $y=x^2-3x;\ y+3x-4=0$.

№ 74. $y=x^2-x;\ \ y=2x$.

№ 75. $y^2=x;\ \ xy=8;\ \ x=8$.

№ 76. $y=\frac{1}{x\sqrt{x}};\ x=1;\ \ y=0$.

№ 77. $y=\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2}};\ x=-1;\ \ x=0$.

№ 78. $y=x^2\ln x;\ \ y=0$.

№ 79. $\rho(\varphi)=a\varphi,\ \ \varphi\in[0;2\pi]$.

№ 80. $\rho(\varphi)=a\sqrt{\cos 2\varphi}$ (лемніската).

№ 81. $\rho(\varphi)=a(\cos\varphi+1)$ (кардіоїда).

№ 82. $\rho(\varphi)=2a(2+\cos\varphi)$ (равлик Паскаля).

№ 83. $\begin{cases} x = a\cos t; \\ y = b\sin t \end{cases}$ (еліпс).

№ 84. $\begin{cases} x = a(t - \sin t); \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ та $y = 0,\ x \in [0;2\pi a]$ (циклоїда).

№ 85. $\begin{cases} x = a\cos^3 t; \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ (астроїда).

Знайти довжину дуги.

№ 86. $y = \dfrac{x^2}{2p}$ від точки $O(0;\,0)$ до точки $A\left(\sqrt{2p};\, p\right)$.

№ 87. $y^2 = x^3$ від точки $O(0;\,0)$ до точки $A(4;\,8)$.

№ 88. $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ (ланцюгова лінія) від точки $A(0;a)$ до точки $B(x;y)$.

№ 89. $y = \ln x$ від точки $A\left(\sqrt{3};\ln\sqrt{3}\right)$до точки $B\left(\sqrt{8};\ln\sqrt{8}\right)$.

№ 90. $y = 1 - \ln\cos x, \quad x \in \left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$.

№ 91. $y = \ln\dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}, \quad x \in [a;b],\ (b > a)$.

№ 92. $\rho = a\varphi$ (спіраль Архімеда), $\varphi \in [0;2\pi]$.

№ 93. $\begin{cases} x = a\cos^3 t; \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ (астроїда).

№ 94. $\rho = 2a\sin\varphi$ (коло).

Знайти об´єми тіл обертання навколо осі OX фігури, обмеженої лініями.

№ 95. $y = \dfrac{1}{x}; \quad x = a; \quad x = b;\ (b > a > 0)$.

№ 96. $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right), \quad x = c; \quad x = -c;\ (c > 0)$.

№ 97. $y = x^2;\ y^2 = x$.

№ 98. $y = -x^2 + 3;\ y = x^2 + 1$.

№ 99. $y^2 + x^2 = 1;\ y^2 = \dfrac{3}{2}x$.

№ 100. $y = \cos x;\ y = \dfrac{9}{2\pi^2}x^2$.

№ 101. $y = \sin x;\ y = \dfrac{2}{\pi}x$.

№ 102. $\begin{cases} x = a(t - \sin t); \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ (циклоїда).

№ 103. Знайти статичний момент відповідно вісі OX дуги косінусоїди $y = \cos x$, де $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$.

№ 104. Знайти центр ваги півкола $x^2 + y^2 = a^2 \ (y \geq 0)$.

№ 105. Знайти центр ваги дуги астроїди $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \ (y \geq 0)$.

№ 106. Знайти центр ваги однієї арки циклоїди $\begin{cases} x = a(t - \sin t); \\ y = a(1 - \cos t), \quad t \in [0; 2\pi]. \end{cases}$

№ 107. Знайти центр ваги плоскої фігури, обмеженої лініями $y = \cos x$; $y = 0$; $x = -\frac{\pi}{2}$; $x = \frac{\pi}{2}$.

ВІДПОВІДІ

№ 1. 8. **№ 2.** 1. **№ 3.** $\frac{\pi}{4}$. **№ 4.** 4. **№ 5.** $-ln5$. **№ 6.** $-\frac{1}{12}\ln 5$. **№ 7.** π.

№ 8. $\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{\pi}{4}$. **№ 9.** $\frac{\pi^2}{64}+\operatorname{arctg}\frac{\pi}{4}$. **№ 10.** $9\frac{2}{3}$. **№ 11.** $2\ln 2-\frac{3}{4}$. **№ 12.** 2π.

№ 13. $2-\ln 2$. **№ 14.** $\frac{1}{3}$. **№ 15.** $4-2\ln 3$. **№ 16.** $2\ln 2-1$. **№ 17.** $\left(\frac{\pi}{6}+1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a$.

№ 18. 1. **№ 19.** $\frac{1}{3}$. **№ 20.** $\frac{1}{3}$. **№ 21.** $\operatorname{arctg}-\frac{\pi}{4}$. **№ 22.** $2-\frac{\pi}{2}$. **№ 23.** $\frac{3}{8}\pi$.

№ 24. $\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}$. **№ 25.** $32\frac{2}{3}$. **№ 26.** $\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$. **№ 27.** $\frac{\pi a^2}{4}$. **№ 28.** $282\frac{2}{5}$.

№ 29. $\frac{\pi}{2}-1$. **№ 30.** $3(\ln 12-1)$. **№ 31.** $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$. **№ 32.** $1-\frac{2}{e}$. **№ 33.** 1. **№ 34.** -2π.

№ 35. $\frac{\pi}{4}$. **№ 36.** $\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}}+1\right)$. **№ 37.** $\frac{1}{2}$. **№ 38.** $\frac{\pi}{4}$. **№ 39.** $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. **№ 40.** $\frac{1}{2a}$.

№ 41. $1-\ln 2$. **№ 42.** $\frac{\pi}{2}$. **№ 43.** $\frac{1}{2}$. **№ 44.** $\frac{1}{4}(\pi+2)$. **№ 45.** Розбігаються.

№ 46. Збігається. **№ 47.** Розбігається. **№ 48.** Розбігається. **№ 49.** Збігається.
№ 50. Розбігається. **№ 51.** Розбігається. **№ 52.** Збігається. **№ 53.** Збігається.
№ 54. Збігається. **№ 55.** Розбігається. **№ 56.** Збігається. **№ 57.** Розбігається.

№ 58. $\frac{1}{3}\left(b^3-a^3\right)$. **№ 59.** 36. **№ 60.** 4,5. **№ 61.** 2. **№ 62.** $a\ln\frac{b}{a}$.

№ 63. $1+a(\ln a-1)$. **№ 64.** $\frac{1}{2}a^2\left(e-e^{-1}\right)$. **№ 65.** $ab\ln\frac{c-\sqrt{c^2-a^2}}{a}+\frac{bc}{a}\sqrt{c^2-a^2}$.

№ 66. $\frac{cb}{a}\sqrt{c^2-a^2}+ab\ln\frac{c-\sqrt{c^2-a^2}}{a}$. **№ 67.** $\frac{8}{3}b\sqrt{ab}$.

№ 68. $\frac{3}{2}\sqrt{16p^2+8p}+\frac{4}{3}p\sqrt{16p^2+8p}$. **№ 69.** $\frac{4}{3}p^2$. **№ 70.** $a^2\left(2\pi-\frac{4}{3}\right)$.

№ 71. $2\pi p^2+\frac{16}{3}p^2$ і $2\pi p^2-\frac{16}{3}p^2$. **№ 72.** 2. **№ 73.** $\frac{32}{3}$. **№ 74.** 2.

№ 75. $\frac{16}{3}\left(1+2\sqrt{2}+1{,}5\ln 2\right)$. **№ 76.** 2. **№ 77.** 6. **№ 78.** $\frac{1}{9}$. **№ 79.** $\frac{3}{4}\pi^3a^2$.

№ 80. a^2. **№ 81.** $1{,}5\pi a^2$. **№ 82.** $8\pi a^2$. **№ 83.** πab. **№ 84.** $3\pi a^2$. **№ 85.** $\frac{3}{8}\pi a^2$.

№ 86. $\frac{p}{2}\left[\sqrt{6}+\ln\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right]$. **№ 87.** $\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)$. **№ 88.** $\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)$.

№ 89. $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. **№ 90.** $\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$. **№ 91.** $\ln\frac{e^b-e^{-b}}{e^a-e^{-a}}$. **№ 92.** $a\pi\sqrt{1+4\pi^2}+$ $+\frac{a}{2}\ln\left(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right)$. **№ 93.** $8a$. **№ 94.** $2\pi a$. **№ 95.** $\pi\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$.

№ 96. $\frac{1}{4}\pi p\left(e^{\frac{2c}{a}}-e^{-\frac{2c}{a}}\right)+\pi a^2 c$. **№ 97.** $0{,}3\pi$. **№ 98.** $\frac{32}{3}\pi$. **№ 99.** $\frac{19}{48}\pi$.

№ 100. $\frac{\pi}{20}\left(6\pi+5\sqrt{3}\right)$. **№ 101.** $\frac{\pi^2}{6}$. **№ 102.** $5\pi^2a^2$. **№ 103.** $\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

№ 104. $\left(0;\frac{2a}{\pi}\right)$. **№ 105.** $\left(0;\frac{2}{5}a\right)$. **№ 106.** $\left(\pi a;\frac{4}{3}a\right)$. **№ 107.** $\left(0;\frac{\pi}{8}\right)$.