Державний комітет зв′язку та інформатизації України
Одеська національна академія зв′язку ім. О.С. Попова

Кафедра вищої математики

ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

Методичний посібник

Одеса 2004

Автори: Паскаленко В.М., Стрелковська І.В.

Рецензент – Соколов Л.І.

Редактор – Буслаєв А.Г.

1. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

1.1. Вектори. Загальні поняття

Означення. Вектором називається напрямний відрізок.

Вектори зображуються у вигляді відрізків зі стрілками, які показують напрям вектора.

Позначаються вектори, або $\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{EF}, ...$, або $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, ...$

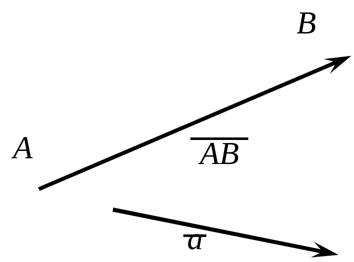


Рисунок 1.1

Означення. Довжина напрямленого відрізка називається модулем вектора.

Означення. Вектор, початок та кінець якого співпадають, називається нульовим вектором та позначається $\overline{0}$.

Означення. Вектор, модуль якого дорівнює одиниці довжини називається одиничним вектором або ортом.

Означення. Два вектора називаються рівними, якщо вони мають рівні модулі та однакові напрями.

Із означення рівності векторів виходить, що при паралельному перенесенні вектора отримують вектор, який дорівнює даному.

Означення. Два вектори називаються протилежними, якщо вони мають рівні модулі та протилежні напрями.

Означення. Вектори називаються колінеарними, якщо вони знаходяться на паралельних прямих.

Означення. Вектори називаються компланарними, якщо вони знаходяться на прямих, які паралельні одній площині.

Умовимося вважати, що:

1. нульовий вектор колінеарний будь якому вектору;
2. нульовий вектор та будь які два вектори компланарні;
3. нульовий вектор водночас є однаково та протилежно напрямленим будь якому іншому вектору.

1.2. Лінійні операції над векторами

1.2.1. Додавання векторів

Означення. Сумою векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ називається вектор $\overline{a}+\overline{b}$, початок якого співпадає з початком вектора $\overline{a}$, а кінець співпадає з кінцем вектора $\overline{b}$ (рис. 2.1,а).

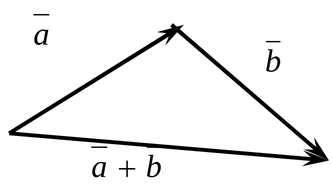


Рисунок 1.2,а

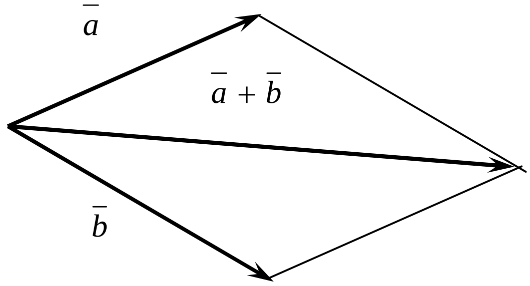


Рисунок 1.2,б

Означення. Сумою векторів $\bar{a}$ та $\bar{b}$, які мають спільний початок, називається вектор-діагональ $\bar{a} + \bar{b}$ паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}$ та $\bar{b}$, як на сторонах, і маючий з ними спільний початок (рис. 1.2,б).

Додавання векторів має такі властивості:

1. Комутативна властивість:

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}.$$

2. Властивість поглинання нульового вектора:

$$\bar{a} + \bar{0} = \bar{a}.$$

3. Властивість додавання протилежних векторів:

$$\bar{a} + \left(-\bar{a}\right) = \bar{0}.$$

4. Сполучна властивість:

$$\left(\bar{a} + \bar{b}\right) + \bar{c} = \bar{a} + \left(\bar{b} + \bar{c}\right).$$

Завдання. Довести влучність цих властивостей.

1.2.2. Віднімання векторів

Означення. Різницею $\bar{a} - \bar{b}$ двох векторів $\bar{a}$ та $\bar{b}$ називається такий вектор $\bar{c}$, який у сумі з вектором $\bar{b}$ дорівнює вектору $\bar{a}$.

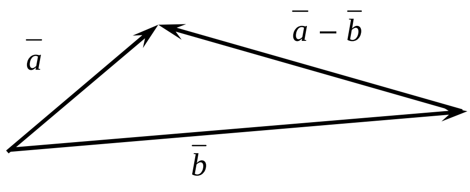


Рисунок 1.3,а

Означення. Різницею $\bar{a} - \bar{b}$ векторів $\bar{a}$ та $\bar{b}$ називається вектор $\bar{c}$, який з'єднує кінець від'ємника з кінцем зменшуваного та маючий напрям у сторону зменшуваного, при умові, що вектори $\bar{a}$ та $\bar{b}$ мають спільний початок (рис. 1.3,а).

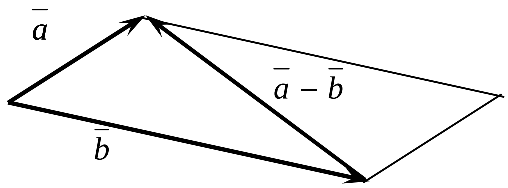


Рисунок 1.3,б

Означення. Різницею $\bar{a} - \bar{b}$ векторів $\bar{a}$ та $\bar{b}$, маючих спільний початок, називається вектор-діагональ $\bar{c}$ паралелограма, побудованого на цих векторах, як на сторонах, з'єднуюча їх кінці та маюча напрям у сторону зменшуваного (рис. 3б).

1.2.3. Множення вектора на число

Означення. Добутком вектора $\bar{a}$ на дійсне число λ називається такий вектор $\bar{b}$, який має той самий напрям, що й вектор $\bar{a}$, якщо $\lambda > 0$ та протилежний напрям, якщо $\lambda < 0$, до того ж

$$\left|\overline{b}\right| = |\lambda| \cdot |\overline{a}|.$$

Множення вектора на число має такі властивості:

1. Для будь якого λ слушна рівність

$$\lambda \cdot \overline{0} = \overline{0}.$$

2. Для будь якого вектора $\overline{a}$ слушна рівність

$$0 \cdot \overline{a} = \overline{0}.$$

3. Добуток вектора $\overline{a}$ на (-1) дорівнює протилежному вектору

$$(-1) \cdot \overline{a} = -\overline{a}.$$

4. Сполучна властивість числових множників

$$\lambda(\mu \cdot \overline{a}) = (\lambda \cdot \mu)\overline{a}.$$

5. Розподільна властивість векторного множника відносно суми чисел

$$(\lambda + \mu) \cdot \overline{a} = \lambda \cdot \overline{a} + \mu \cdot \overline{a}.$$

6. Розподільна властивість числового множника відносно суми векторів

$$\lambda(\overline{a} + \overline{b}) = \lambda\overline{a} + \lambda\overline{b}.$$

7. Необхідна та достатня умова колінеарності векторів.

Для того, щоб два вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$ були колінеарні необхідно та достатньо, щоб існувало таке дійсне число λ, що $\overline{b} = \lambda\overline{a}$.

Завдання. Довести слушність властивостей 1 – 7.

1.3. Проекція вектора на вісь та її властивості

Означення. Будь яка пряма, на якій указаний напрям, називається віссю.

Означення. Алгебраїчною прямокутною проекцією вектора $\overline{AB}$ на вісь *l* називається число, яке дорівнює довжині вектора $\overline{A_1B_1}$ цієї осі і міститься між основами перпендикулярів, опущених з точок *A* та *B* на вісь *l*; це число береться зі знаком плюс, якщо напрям вектора $\overline{A_1B_1}$ співпадає з напрямом осі *l* і зі знаком мінус у протилежному випадку (рис. 1.4).

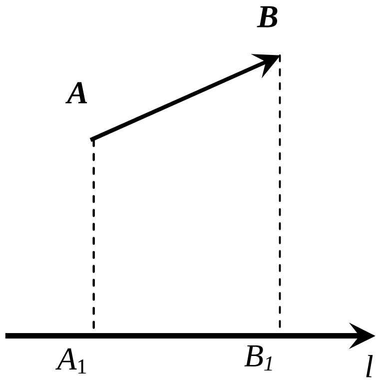


Рисунок 1.4

Позначення проекції:

$$\text{пр}_l\,\overline{AB} = \pm\left|\overline{A_1B_1}\right|. \qquad (1.1)$$

Теорема 1. Проекція вектора $\overline{a}$ на вісь *l* дорівнює добутку модуля вектора $\overline{a}$ на косинус кута нахилу $\overline{a}$ до осі *l*.

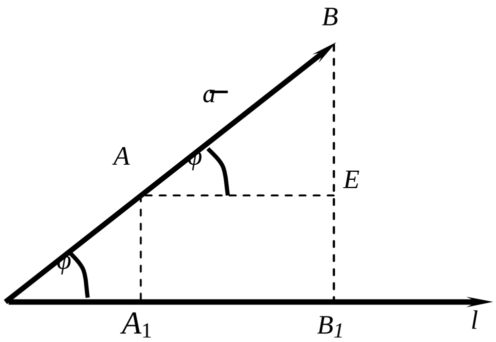


Рисунок 1.5

Доведення.

По умові, $\text{пр}_l \bar{a} = \text{пр}_l \overline{AB} = \pm\left|\overline{A_1B_1}\right|$ (рис. 1.5). Побудуємо пряму $AE \parallel l$. Із прямокутного трикутника ABE отримаємо: $\left|\overline{AE}\right| = \left|\bar{a}\right| \cdot \cos\varphi$.

Фігура A_1AEB_1 є прямокутник, тому $\left|\overline{AE}\right| = \left|\overline{A_1B_1}\right|$. Виходить, що

$$\text{пр}_l \bar{a} = \left|\bar{a}\right| \cdot \cos\varphi \qquad (1.2)$$

При цьому, $\text{пр}_l \bar{a} = \left|\overline{A_1B_1}\right| = \left|\bar{a}\right| \cdot \cos\varphi$, якщо $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$; $\text{пр}_l \bar{a} = -\left|\overline{A_1B_1}\right| = \left|\bar{a}\right| \cdot \cos\varphi$, якщо $\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi$.

Теорема 2. Якщо вектори рівні, то рівні між собою і їх проекції на одну вісь.

Доведення.

По умові, $\bar{a} = \bar{b}$, тому прямі AB та CD паралельні, а відрізки $\left|\overline{AB}\right|$ та $\left|\overline{CD}\right|$ рівні між собою (рис. 1.6).

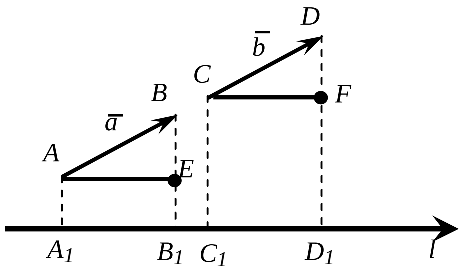


Рисунок 1.6

Побудуємо допоміжні прямі $AE \parallel CF$ паралельні вісі l тоді $\Delta ABE = \Delta CDF$, тому що $\left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{CD}\right|$, $\angle ABE = \angle DCF$, $\angle ABE = \angle CDF$. Виходить, що $\left|\overline{AE}\right| = \left|\overline{CF}\right|$.

Фігури A_1AEB_1 та C_1CFD_1 є прямокутники, значить, $\left|\overline{AE}\right| = \left|\overline{A_1B_1}\right|$; $\left|\overline{CF}\right| = \left|\overline{C_1D_1}\right|$, а тому $\left|\overline{A_1B_1}\right| = \left|\overline{C_1D_1}\right|$ або $\text{пр}_l \bar{a} = \text{пр}_l \bar{b}$.

Примітка. $\bar{a} = \bar{b}$, значить $\bar{a}$ та $\bar{b}$ співнаправлені і їх проекції на вісь l мають однакові знаки.

Теорема 3. Проекція суми векторів на вісь l дорівнює сумі проекцій векторів на вісь l.

Доведення.

По умові, $\text{пр}_l \bar{a} = \text{пр}_l \overline{AB} = \pm\left|\overline{A_1B_1}\right|$, $\text{пр}_l \bar{b} = \text{пр}_l \overline{BC} = \pm\left|\overline{B_1C_1}\right|$ (рис. 1.7). Побудуємо вектор $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$. Розглянемо

$$\text{пр}_l\left(\overline{AB} + \overline{BC}\right) = \pm\left|\overline{A_1B_1}\right| \text{ та } \text{пр}_l \overline{AB} + \text{пр}_l \overline{BC} = \pm\left|\overline{A_1B_1}\right| + \left(\pm\left|\overline{B_1C_1}\right|\right).$$

В залежності від взаємного розміщення точок A_1, B_1, C_1 можливі різні випадки, які зображені на рис. 1.7.

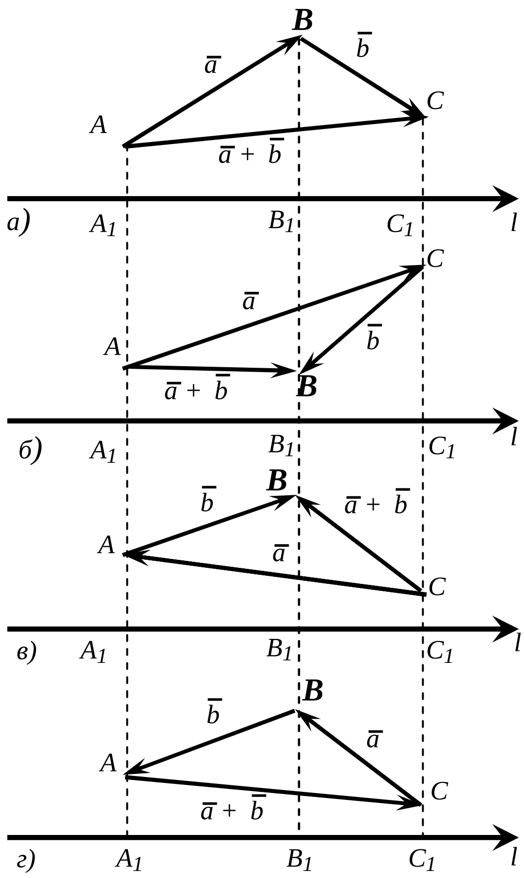


Рисунок 1.7

Для випадку 1.7,а маємо:

$$\text{пр}_1\overline{a}+\text{пр}_l\overline{b}=\text{пр}_l\overline{AB}+\text{пр}_l\overline{BC}=\left|\overline{A_1B_1}\right|+\left|\overline{B_1C_1}\right|=$$

$$=\left|\overline{A_1C_1}\right|=\text{пр}_l\overline{AC}=\text{пр}_l\left(\overline{a}+\overline{b}\right).$$

Для випадку 1.7,б маємо:

$$\text{пр}_l\overline{a}+\text{пр}_l\overline{b}=\left|\overline{A_1B_1}\right|-\left|\overline{B_1C_1}\right|=$$

$$=\left|\overline{A_1C_1}\right|=\text{пр}_l\overline{AC}=\text{пр}_l\left(\overline{a}+\overline{b}\right).$$

Для випадку 7,в маємо:

$$\text{пр}_l\overline{a}+\text{пр}_l\overline{b}=-\left|\overline{A_1B_1}\right|+\left|\overline{B_1C_1}\right|=-\left|\overline{A_1C_1}\right|=$$

$$=\text{пр}_l\overline{AC}=\text{пр}_l\left(\overline{a}+\overline{b}\right).$$

Для випадку 7,г маємо:

$$\text{пр}_l\overline{a}+\text{пр}_l\overline{b}=-\left|\overline{A_1B_1}\right|-\left|\overline{B_1C_1}\right|=-\left|\overline{A_1C_1}\right|=$$

$$=\text{пр}_l\overline{AC}=\text{пр}_l\left(\overline{a}+\overline{b}\right).$$

Таким чином, доведено що

$$\text{пр}_l\left(\overline{a}+\overline{b}\right)=\text{пр}_l\overline{a}+\text{пр}_l\overline{b}. \qquad (1.3)$$

Теорема 4. При множені вектора $\overline{a}$ на число λ його проекція на вісь l множиться на це саме число.

Доведення.

Побудуємо вектори $\overline{a}=\overline{AB}$ та $\lambda\overline{a}=\overline{AC}$ (рис. 1.8). Тоді $\text{пр}_l\overline{a}=\pm\left|\overline{A_1B_1}\right|$, $\text{пр}_l(\lambda\overline{a})=\pm\left|\overline{A_1C_1}\right|$. По умові $\dfrac{\pm\left|\overline{AC}\right|}{\pm\left|\overline{AB}\right|}=\lambda$. За теоремою Фалеса $\dfrac{\pm\left|\overline{A_1C_1}\right|}{\pm\left|\overline{A_1B_1}\right|}=\lambda$. Звідси, $\pm\left|\overline{A_1C_1}\right|=\pm\left|\overline{A_1B_1}\right|$ або

$$\text{пр}_l(\lambda\overline{a})=\lambda\text{пр}_l\overline{a}.$$

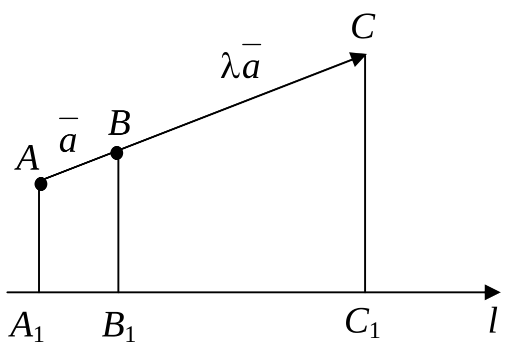


Рисунок 1.8

Приклад 1. Дано вектори $\bar{a}, \bar{b}$ та вісь *l*. Відомо, що $|a| = 5; |b| = 5\sqrt{3}$; $(l;\hat{\bar{a}}) = 30^\circ$; $(l;\hat{\bar{b}}) = 60^\circ$ і вектори $\bar{a}$ та $\bar{b}$ розміщені по різні сторони від осі *l*. Знайти величину кута між вектором $(\bar{a} + \bar{b})$ та віссю *l*.

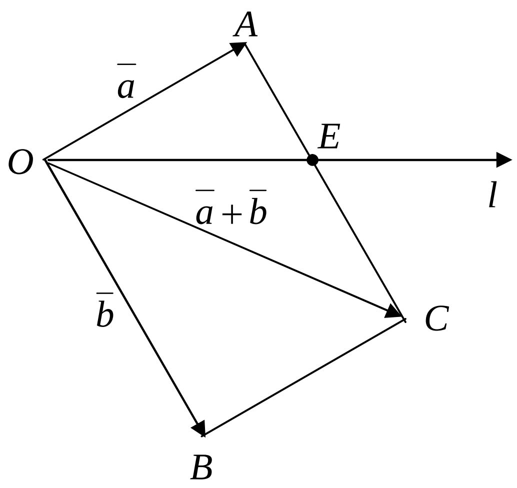


Рисунок 1.9

Розв'язання.

Використовуючи правило паралелограма для додавання векторів, побудуємо вектор $(\bar{a} + \bar{b})$ (рис. 1.9).

$$\text{пр}_l(\bar{a} + \bar{b}) = \text{пр}_l\bar{a} + \text{пр}_l\bar{b} = |\bar{a}|\cos(l;\bar{a}) + |\bar{b}|\cos(l;\bar{b}) =$$

$$= 5\cos 30^\circ + 5\sqrt{3}\cos 60^\circ = \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}.$$

У той же час, $\text{пр}_l(\bar{a} + \bar{b}) = |\bar{a} + \bar{b}|\cos(E\hat{O}C)$. Знайдемо $|\bar{a} + \bar{b}|$ як довжину діагоналі паралелограма *OACB*.

$A\hat{O}B = A\hat{O}E + E\hat{O}B =$ 30° + 60° = 90°, тому паралелограм *OACB* є прямокутником. Скористаємося теоремою Піфагора стосовно до ΔOBC.

$$|OC| = \sqrt{(OB)^2 + (BC)^2} = \sqrt{(5\sqrt{3})^2 + 5^2} = \sqrt{100} = 10.$$

Тоді,

$$\cos(l;\hat{(\bar{a} + \bar{b})}) = \frac{\text{пр}_l(\bar{a} + \bar{b})}{|\bar{a} + \bar{b}|} = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{1}{2}.$$

а сам кут ($E\hat{O}C$) = 60°.

Приклад 2. На векторах $\bar{a}, \bar{b}$ та $\bar{c}$, як на сторонах, побудовано паралелепіпед. Виразити через вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ діагоналі паралелепіпеда, бокових граней та основи, які мають спільний початок з векторами $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$.

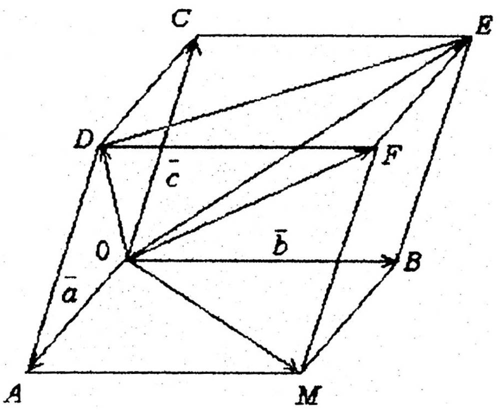


Рисунок 1.10

Розв'язання.

1) Розглянемо паралелограм *OBMA*, який лежить у основі паралелепіпеда (рис. 1.10). Тоді $\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB} = \bar{a} + \bar{b}$.

2) Бокові грані подані паралелограмами *OADC* та *OBEC*.

Значить, $\overline{OD} = \overline{OA} + \overline{OC} = \bar{a} + \bar{c}$; $\overline{OE} = \overline{OB} + \overline{OC} = \bar{b} + \bar{c}$.

1.4. Лінійна залежність та незалежність векторів

Означення. Лінійною комбінацією векторів $\overline{l_1}, \overline{l_2}, ..., \overline{l_n}$ називається вектор,

$$\lambda_1 \overline{l_1} + \lambda_2 \overline{l_2} + ... + \lambda_n \overline{l_n},$$

де $\lambda_k \, (k = 1, 2, ..., n)$ – дійсні числа, які називаються коефіцієнтами лінійної комбінації.

Означення. Вектори $\overline{l_1}, \overline{l_2}, ..., \overline{l_n}$ називаються лінійно залежними, якщо рівність нулю їх лінійної комбінації можлива лише при умові, що хоча б один з коефіцієнтів лінійної комбінації дорівнює нулю, тобто

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \overline{b}_k = \overline{0} \text{ при } \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \neq 0.$$

Означення. Вектори $\overline{l_1}, \overline{l_2}, ..., \overline{l_n}$ називаються лінійно незалежними, якщо рівність нулю їх лінійної комбінації можлива лише при умові, що усі коефіцієнти лінійної комбінації дорівнюють нулю, тобто

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \overline{l}_k = \overline{0} \text{ при } \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 = 0.$$

Теорема 1. Якщо хоча б один із векторів $\overline{l_1}, \overline{l_2}, ..., \overline{l_n}$ є нульовий вектор, то такі вектори лінійно залежні.

Доведення.

Нехай $\overline{l_1} = \overline{0}$. Складемо таку нульову лінійну комбінацію з коефіцієнтами $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = \lambda_3 = ... = \lambda_n = 0$:

$$\lambda_1 \overline{l_1} + 0\overline{l_2} + 0\overline{l_3} + ... + 0\overline{l_n} = \overline{0}.$$

У зв'язку з тим, що $\lambda_1 \neq 0$, вектори $\overline{l_1}, \overline{l_2}, ..., \overline{l_n}$ лінійно залежні.

Теорема 2. Якщо серед векторів $\overline{l_1}, \overline{l_2}, ..., \overline{l_n}$ є ρ лінійно залежних векторів, то вектори $\overline{l_1}, \overline{l_2}, ..., \overline{l_n}$ – лінійно залежні.

Доведення. Нехай вектори $\overline{l_1}, \overline{l_2}, ..., \overline{l_n}$ лінійно залежні, тобто $\lambda_1 \overline{l_1} + \lambda_2 \overline{l_2} + ... + \lambda_n \overline{l_n}$ при $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \neq 0$. Складемо нульову лінійну комбінацію:

$$\lambda_1 \overline{l_1} + \lambda_2 \overline{l_2} + ... + \lambda_p \overline{l_p} + 0\overline{l}_{p+1} + \lambda_2 \overline{l}_{p+2} + ... + 0\overline{l_n} = \overline{0}.$$

У цій лінійній комбінації згідно з умовою є хоча б один коефіцієнт, який відрізняється від нуля, виходить, вектори $\overline{l_1}, \overline{l_2}, ..., \overline{l_n}$ лінійно залежні.

Теорема 3. Для того, щоб два вектори були лінійно залежні необхідно та достатньо, щоб вони були колінеарні.

Доведення

1. Необхідність. Нехай $\overline{l_1}$ та $\overline{l_2}$ – лінійно залежні. Доведемо, що вони колінеарні. Згідно з умовою $\lambda_1\overline{l_1} + 0\overline{l_n} = \overline{0}$ де один з коефіцієнтів відрізняється від нуля. Нехай $\lambda_1 \neq 0$. Тоді, $\overline{l_1} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\overline{l_2}$.

Позначимо $\left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) = \overline{k}$, а $\overline{l_1} = k\overline{l_2}$, що і доводить колінеарність векторів $\overline{l_1}$ та $\overline{l_2}$.

2. Достатність. Нехай $\overline{l_1}$ та $\overline{l_2}$ колінеарні. Доведемо, що вони лінійно залежні. Згідно з умовою $\overline{l_1} \parallel \overline{l_2}$, значить, існує таке число *k*, що $\overline{l_1} = k\overline{l_2}$ або $1 \cdot \overline{l_1} + (-k)\overline{l_2} = \overline{0}$. Виходить, вектори $\overline{l_1}$ та $\overline{l_2}$ лінійно залежні.

Висновок. Для того, щоб два вектори були лінійно незалежні необхідно і достатньо, щоб вони були неколінеарні.

Теорема 4. Для того, щоб три вектори були лінійно залежні необхідно та достатньо, щоб вони були компланарні.

Доведення.

1. Необхідність. Нехай вектори $\overline{l_1}, \overline{l_2}, ..., \overline{l_n}$ лінійно залежні. Доведемо, що вони компланарні. Згідно з умовою $\lambda_1\overline{l_1} + \lambda_2\overline{l_2} + \lambda_3\overline{l_3} = \overline{0}$ при $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2 \neq 0$. Покладемо, що $\lambda_3 \neq 0$, тоді $\overline{l_3} = \frac{\lambda_1}{\lambda_3}\overline{l_3} - \frac{\lambda_2}{\lambda_3}\overline{l_2}$. Позначимо,

$$k_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_3};\ k_2 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_3}.\ \text{Тоді}\ \overline{l_3} = k_1\overline{l_1} + k_2\overline{l_2}.$$

Остання рівність говорить про те, що вектор $\overline{l_3}$, як сума векторів $k_1\overline{l_1}$ та $k_2\overline{l_2}$ співпадає з діагоналлю, побудованою на векторах $k_1\overline{l_1}$ та $k_2\overline{l_2}$. У зв’язку з тим, що вектори $k_1\overline{l_1}$ та $k_2\overline{l_2}$ колінеарні відповідно векторам $\overline{l_1}$ та $\overline{l_2}$, то вектори $\overline{l_1}, \overline{l_2}, \overline{l_3}$ належать одній площині, тобто, компланарні.

2. Достатність. Нехай вектори $\overline{l_1}, \overline{l_2}, \overline{l_3}$ компланарні. Доведемо, що вони лінійно залежні. Якщо серед векторів $\overline{l_1}, \overline{l_2}, \overline{l_3}$ є колоніарі, то по теоремі 2 вектори $\overline{l_1}, \overline{l_2}, \overline{l_3}$ лінійно залежні. Будемо тепер вважати, що серед векторів $\overline{l_1}, \overline{l_2}, \overline{l_3}$ немає колінеарних. Побудуємо ці вектори від одного початку (рис. 1.11). З кінця вектора $\overline{l_3}$ проведемо прямі, які паралельні відповідно векторам $\overline{l_1}$ та

$\overline{l_2}$. Внаслідок такої побудови отримаємо паралелограм OA_1EB_1. Вектор $OA_1 \| \overline{l_1}$, вектор $OB_1 \| \ \overline{l_2}$ тоді, вочевидь, існують такі числа k_1, k_2, що $\overline{OA_1} = k_0 \overline{l_1}$; $\overline{OB_1} = k_0 \overline{l_2}$; $\overline{l_3} = k_1 \overline{l_1} + k_2 \overline{l_2}$ або $k_1 \overline{l_1} + k_2 \overline{l_2} + (-1)\overline{l_3} = 0$, з чого і виходить лінійна залежність векторів.

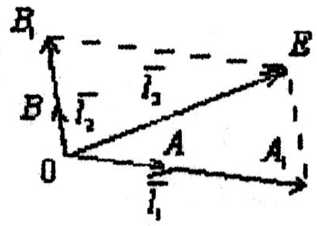


Рисунок 1.11

Висновок 1. Для того, щоб три вектори були лінійно-незалежні необхідно та достатньо, щоб вони некомпланарні.

Висновок 2. Серед трьох некомпланарних векторів не може бути двох колінеарних векторів.

Теорема 5. Будь-які чотири вектора лінійно-залежні.

Доведення. Нехай серед векторів $\overline{l_1}, \overline{l_2}, \overline{l_3}, \overline{l_4}$ є три компланарні вектора. Тоді по теоремам 2 та 3, вектори $\overline{l_1}, \overline{l_2}, \overline{l_3}, \overline{l_4}$ лінійно залежні. Тепер будемо вважати, що серед векторів $\overline{l_1}, \overline{l_2}, \overline{l_3}, \overline{l_4}$ немає компланарних. Побудуємо вектори $\overline{l_1}, \overline{l_2}, \overline{l_3}, \overline{l_4}$ від однієї точки O (рис. 1.12).

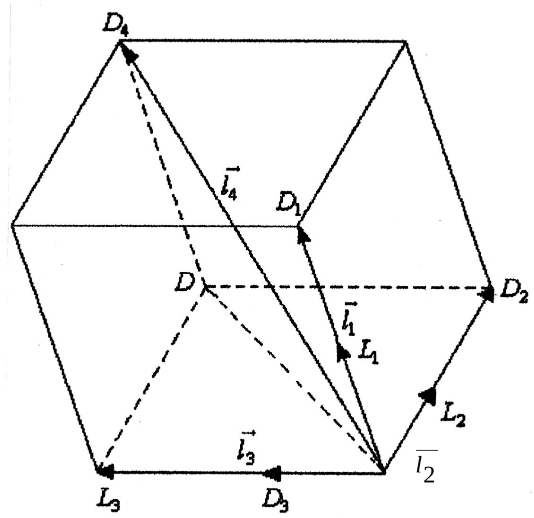


Рисунок 1.12

З кінця вектора проведемо пряму, паралельну вектору $\overline{l_4}$ до перетину з площиною, у якій лежать вектори $\overline{l_2}$ та $\overline{l_3}$. З отриманої внаслідок такого побудування точки D проведемо прямі, паралельні векторам $\overline{l_2}$ та $\overline{l_3}$. Точки їх перетину з прямими, на яких лежать вектори $\overline{l_2}$ та $\overline{l_3}$, позначимо відповідно D_2 та D_3. З кінця вектора $\overline{l_4}$ проведемо пряму, паралельну вектору $\overline{OD}$ до перетину з прямою, на якій лежить вектор $\overline{l_1}$. Точку їх перетину позначимо D_1. Тоді, якщо позначити $\overline{l_1} = \overline{Ol_1} \cdot \overline{l_2} = \overline{Ol_2} \cdot \overline{l_3} = \overline{Ol_3} \cdot \overline{l_4} = \overline{Ol_4}$, то, внаслідок колінеарності векторів, отримаємо: $\overline{OD_1} = \lambda_1 \overline{l_1}, \overline{OD_2} = \lambda_2 \overline{l_2}; \overline{OD_3} = \lambda_3 \overline{l_3}$. За правилом додавання векторів $\overline{OD_4} = \overline{OD} + \overline{Dl_4}$. Але якщо $\overline{OD} = \overline{OD_2} + \overline{OD_3}$, $\overline{Dl_4} = \overline{OD_1}$, то $\overline{OD_4} = \overline{OD_1} + \overline{OD_2} + \overline{OD_3}$. Значить, $\overline{l_4} = \lambda_1 \overline{l_1} + \lambda_2 \overline{l_2} + \lambda_3 \overline{l_3}$, або $\lambda_1 \overline{l_1} + \lambda_2 \overline{l_2} + (-1)\overline{l_3} = 0$, що і доводить лінійну залежність векторів $\overline{l_1}, \overline{l_2}, \overline{l_3}, \overline{l_4}$.

1.5. Базис на площині та у просторі

Означення. Базисом на площині називаються будь-які два лінійно незалежних вектори цієї площини, вибрані в означеному порядку.

Означення. Базисом у просторі називаються три лінійно-незалежні вектори, вибрані у означеному порядку.

Теорема 1. Якщо на площині вектори $\overline{l_1}$ та $\overline{l_2}$ утворюють базис, то будь який компланарний з ним вектор $\overline{a}$, можливо єдиним образом подати у вигляді лінійної комбінації базисних векторів.

Доведення. Можливість подати вектор $\overline{a}$ у вигляді

$$\overline{a} = \lambda_1 \overline{l_1} + \lambda_2 \overline{l_2} \tag{1.4}$$

була доведена у теоремі 4 п. 1.4. Доведемо тепер, що розкладання (1.4) єдине. Для цього покладемо, що має місце рівність

$$\overline{a} = \mu_1 \overline{l_1} + \mu_2 \overline{l_2} \,. \tag{5}$$

Почленно віднімаючи від рівності (1.5) рівність (1.4), отримаємо нульову лінійну комбінацію

$$\overline{0} = (\lambda_1 - \mu_1)\overline{l_1} + (\lambda_2 - \mu_2)\overline{l_2} \,. \tag{6}$$

За умовою вектори $\overline{l_1}$ та $\overline{l_2}$ лінійно незалежні, тому рівність (1.6) можлива лише у тому разі, коли

$$\lambda_1 - \mu_1 = 0 \text{ та } \lambda_2 - \mu_2 = 0,$$

це рівносильне рівнянням $\lambda_1 = \mu_1; \lambda_2 = \mu_2$, що і треба було довести.

Теорема 2. Якщо у просторі вектори $\overline{l_1}, \overline{l_2}, \overline{l_3}$ утворюють базис, то будь-який вектор $\overline{a}$ простору можливо єдиним образом подати у вигляді їх лінійної комбінації.

Доведення. Можливість подати вектор $\overline{a}$ у вигляді

$$\overline{a} = \lambda_1 \overline{l_1} + \lambda_2 \overline{l_2} + \lambda_3 \overline{l_3} \tag{1.7}$$

була доведена у теоремі 5 п. 1.4.

Доведемо тепер, що це розкладання єдине. Для цього покладемо, що має місце рівність

$$\overline{a} = \mu_1 \overline{l_1} + \mu_2 \overline{l_2} + \mu_3 \overline{l_3} \,. \tag{1.8}$$

Віднімаючи почленно рівність (1.8) від рівності (1.7), отримаємо нульову лінійну комбінацію

$$\overline{0} = (\lambda_1 - \mu_1)\overline{l_1} + (\lambda_2 - \mu_2)\overline{l_2} + (\lambda_3 - \mu_3)\overline{l_3} \,. \tag{1.9}$$

За умовою, вектори $\overline{l_1}, \overline{l_2}, \overline{l_3}$ лінійно незалежні, тому рівність (1.9) можлива лише у тому разі, коли $\lambda_1 - \mu_1 = 0, \lambda_2 - \mu_2 = 0, \lambda_3 - \mu_3 = 0$ або $\lambda_1 = \mu_1, \lambda_2 = \mu_2, \lambda_3 = \mu_3$. Таким чином, доведемо, що розкладання (1.7) єдине.

Означення. Якщо вектори $\overline{l_1}$ та $\overline{l_2}$ утворюють базис, а вектор $\overline{a} = \lambda_1 \overline{l_1} + \lambda_2 \overline{l_2}$, то числа $\lambda_1; \lambda_2$ називаються координатами вектора $\overline{a}$ у базисі $\overline{l_1}, \overline{l_2}$; при цьому використовують позначення

$$\overline{a}=\{\lambda_1;\lambda_2\} \text{ або } \overline{a}=\begin{Bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{Bmatrix}.$$

Означення. Якщо вектори $\overline{l_1},\overline{l_2},\overline{l_3}$ утворюють базис, а вектор $\overline{a}=\lambda_1\overline{l_1}+\lambda_2\overline{l_2}+\lambda_3\overline{l_3}$, то числа $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ називаються координатами вектора $\overline{a}$ у базисі $\overline{l_1},\overline{l_2},\overline{l_3}$ при цьому використовується позначення

$$\overline{a}=\{\lambda_1;\lambda_2;\lambda_3\} \text{ або } \overline{a}=\begin{Bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{Bmatrix}.$$

Базисів на площині і у просторі існує нескінченна множина. Один і той самий вектор у різних базисах має різні координати.

Означення. Два вектори у одному базисі називаються рівними, якщо рівні їх відповідні координати.

Для зручності умовимося використовувати базис, який називається ортонормованим базисом.

Означення. Базис, утворений одиничними, взаємно перпендикулярними векторами, називається ортонормованим базисом.

Ортономовані базиси у просторі бувають лівоорієнтованими та правоорієнтованими. Якщо при спостереженні з кінця вектора $\overline{k}$ найкоротший поворот від вектора $\overline{i}$ до вектора $\overline{j}$ відбувається у напрямі проти годинникової стрілки, то базис називається правоорієнтованим, а якщо за годинниковою стрілкою – то лівоорієнтованим (рис. 1.13)

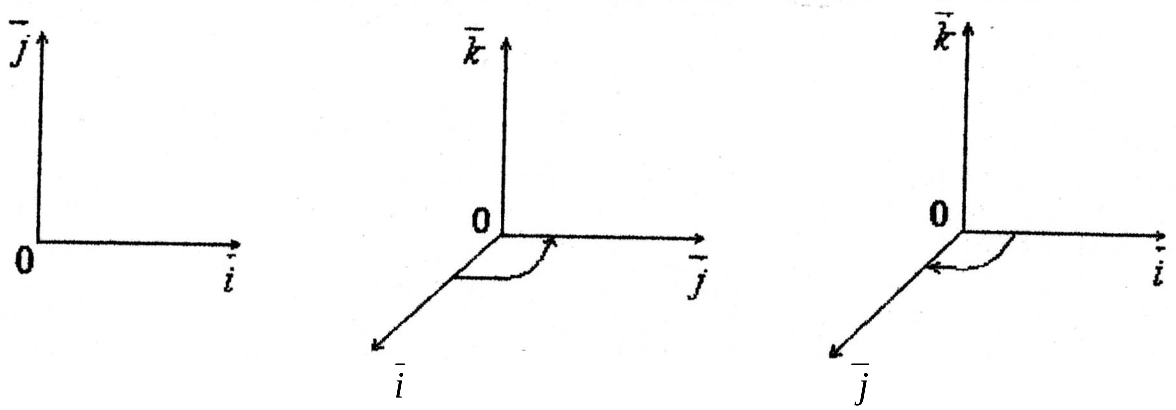


Рисунок 1.13

Координати вектора у ортонормованому базисі дорівнюють проекціям вектора на напрям базисних векторів.

1.6. Лінійні операції над векторами, які подані у координатній формі

Теорема 1. При множенні вектора на число усі його координати множаться на це число.

Доведення. Нехай у базисі $\overline{l_1}, \overline{l_2}, \overline{l_3}$ вектор $\overline{a} = \{\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3\}$. Це означає, що $\overline{a} = \lambda_1 \overline{l_1} + \lambda_2 \overline{l_2} + \lambda_3 \overline{l_3}$. Помножимо обидві частини цієї рівності на λ. Тоді

$$\lambda \overline{a} = \lambda\lambda_1 \overline{l_1} + \lambda\lambda_2 \overline{l_2} + \lambda\lambda_3 \overline{l_3} = \{\lambda\lambda_1, \lambda\lambda_2, \lambda\lambda_3\},$$

що і треба було довести.

Висновок. Для того, щоб два вектори були колінеарні необхідно та достатньо, щоб їх координати були пропорційні.

Доведення.

1. Необхідність. Нехай $\overline{a} = \{a_1, a_2, a_3\}, \overline{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ та $\overline{a} \parallel \overline{b}$. Доведемо, що $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$ Вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$ колінеарні, тому існує таке число λ, що $\overline{a} = \lambda \overline{b}$. Значить, відповідні координати векторів $\overline{a}$ та $\lambda \overline{b}$ рівні між собою, тобто $a_1 = \lambda b_1,\ a_2 = \lambda b_2,\ a_3 = \lambda b_3$ або $\lambda = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$

2. Достатність. Нехай $\overline{a} = \{a_1, a_2, a_3\}, \overline{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$, причому $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \lambda$. Доведемо, що вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$ колінеарні. За умовою, $a_1 = \lambda b_1,\ a_2 = \lambda b_2,\ a_3 = \lambda b_3$. Значить,

$$\overline{a} = \{a_1, a_2, a_3\} = \{\lambda b_1, \lambda b_2, \lambda b_3\} = \lambda\{b_1, b_2, b_3\} = \lambda \overline{b},$$

що і доводить колінеарність векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$.

Теорема 2. При додаванні векторів додаються їх відповідні координати.

Доведення. Нехай $\overline{a} = \{a_1, a_2, a_3\}, \overline{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ або

$$\overline{a} = a_1 \overline{i} + a_2 \overline{j} + a_3 \overline{k}, \tag{1.10}$$

$$\overline{b} = b_1 \overline{i} + b_2 \overline{j} + b_3 \overline{k}. \tag{1.11}$$

Складемо почленно рівності (1.10) та (1.11)

$$\overline{a} + \overline{b} = (a_1 + b_1)\overline{i} + (a_2 + b_2)\overline{j} + (a_3 + b_3)\overline{k}$$

або

$$\overline{a} + \overline{b} = \{a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3\},$$

що і треба було довести.

Висновок. При відніманні векторів віднімаються їх відповідні координати.

1.7. Декартова прямокутна система координат. Формули ділення відрізка у заданному відношенні

1.7.1. Декартова прямокутна система координат

Означення. Сукупність точки *O* та ортонормованого базиса називається прямокутною декартовою системою координат. Осі *OX*, *OY*, *OZ* називаються відповідно віссю абсцис, ординат та аплікат, а точка *O* називається початком координат (рис. 1.14,а).

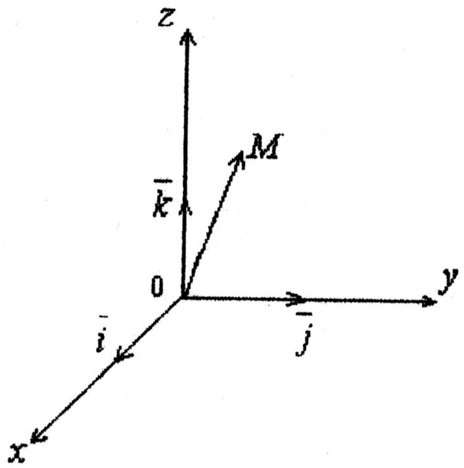


Рисунок 1.14,а

Розглянемо довільну точку *M* Вектор $\overline{OM}$ називається радіус-вектором точки *M* по відношенню до точки *O*.

Означення. Координати радіус-вектора точки *M* по відношенню до точки *O* називаються декартовими координатами точки *M* у декартовій системі координат та позначаються *M*(*x*, *y*, *z*). Аналогічно позначаються декартові координати точки на площині: *M*(*x*, *y*).

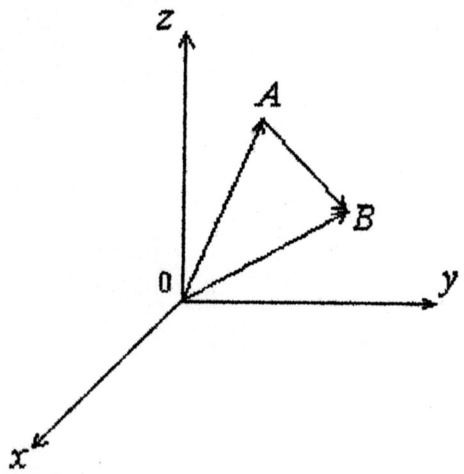


Рисунок 1.14,б

Розглянемо тепер вектор $\overline{AB}$, заданий точками $A(x_1, y_1, z_1)$ та $B(x_1, y_1, z_1)$. Знайдемо його координати. Для цього побудуємо вектори $\overline{OA} = \{x_1, y_1, z_1\}$ та $\overline{OB} = \{x_2, y_2, z_2\}$ (рис. 14,б).

Вектор $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$, тому по висновку з теореми 2 п. 1.6 $\overline{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$. Таким чином, для того, щоб знайти координати вектора, знаючи координати його початку та кінця, треба від координат кінця відняти відповідні координати початку.

Приклад 3. Дано вектори $\overline{a}$ = {4; -3; 2} та $\overline{b}$ = {5; 1; -6}. Знайти координати вектора $\overline{c} = 3\overline{a} - 4\overline{b}$ та координати вектора $\overline{d}$, який має протилежний напрямок по відношенню до вектора $\overline{c}$ і в п'ять разів довше за вектор $\overline{c}$.

Розв'язання. Знайдемо координати векторів $3\overline{a}$ та $4\overline{b}$

$$3\overline{a} = \{3 \cdot 4; 3 \cdot (-3); 3 \cdot 2\} = \{12; -9; 6\},$$

$$3\overline{b} = \{4 \cdot 5; 4 \cdot 1; 4 \cdot (-6)\} = \{20; 4; -24\}.$$

Тоді

$$\bar{c} = 3\bar{a} - 4\bar{b} = \{12 - 20; -9 - 4; 6 - (-24)\} = \{-8; -13; 30\},$$

$$\bar{d} = -5\bar{c} = \{(-5)\cdot(-8); (-5)\cdot(-13); (-5)\cdot(-30)\} = \{40; 65; -150\}.$$

1.7.2.Формули ділення відрізка у заданому відношенні

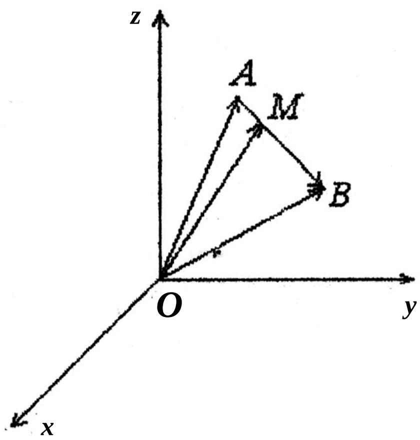


Рисунок 1.15

Нехай дано відрізок *AB*, де $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ (рис. 1.15). Знайдемо на відрізку таку точку $M(x; y; z)$, яка поділяє відрізок *AB* у відношенні λ, тобто $AM : MB = \lambda$. Розглянемо вектори $\overline{OA} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\overline{OB} = \{x_2, y_2, z_2\}$, $\overline{OM} = \{x, y, z\}$ та вектори $\overline{AM}, \overline{MB}$. Вочевидь, що $\overline{AM} = \overline{OM} - \overline{OA}$; $\overline{MB} = \overline{OB} - \overline{OM}$.

За умовою, $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \lambda$ або $\overline{AM} = \overline{MB}\cdot\lambda$. Тоді, $\overline{OM} - \overline{OA} = \lambda(\overline{OB} - \overline{OA})$; $\overline{OM} - \overline{OA} = \lambda\overline{OB} - \lambda\overline{OA}$, $\overline{OM}(1+\lambda) = \overline{AO} + \lambda\overline{OB}$, $\overline{OM} = \dfrac{\overline{OA} + \lambda\overline{OB}}{1+\lambda}$.

Оскільки лінійні операції над векторами переносяться і на їх координати, одержуєм формули:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}, \qquad (1.12)$$

які називаються формулами ділення відрізка у даному відношенні. Зокрема, коли відрізок точкою *M* поділяється навпіл, то λ = 1, а формули набувають вигляду:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \qquad (1.13)$$

Зауваження. Число λ може бути будь-яким, окрім λ = -1. Якщо λ – число від′ємне, то це означає, що точка *M* знаходиться на прямій *AB*, але поза відрізком *AB*.

1.8. Скалярний добуток двох векторів

1.8.1. Означення скалярного добутку

Означення. Кутом між векторами $\bar{a}, \bar{b}$ називається найменший з кутів φ, на який треба повернути промінь, який проходить через вектор $\bar{a}$ до зустрічі з променем, який проходить через вектор $\bar{b}$, якщо обидва вектори мають спільний початок ($0 \le \varphi \le \pi$).

Означення 1. Скалярним добутком $\overline{a} \cdot \overline{b}$ двох векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ називається число, яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними, тобто

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cos\varphi. \tag{1.14}$$

Означення 2. Скалярним добутком $\overline{a} \cdot \overline{b}$ двох векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ називається число, яке дорівнює добутку модуля одного з векторів на проекцію іншого вектора на вісь, що визначається першим з указаних векторів, тобто

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot \text{пр}_{\overline{a}} \overline{b}. \tag{1.15}$$

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{b}| \cdot \text{пр}_{\overline{b}} \overline{a}. \tag{1.16}$$

Зауваження. Означення 1 та 2 еквівалентні.

1.8.2. Геометричні властивості скалярного добутку

Теорема. Для того, щоб два ненульових вектори були перпендикулярні необхідно та достатньо, щоб їх скалярний добуток дорівнював нулю.

Доведення.

1. Необхідність. Нехай вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$*b* перпендикулярні. Доведемо, що $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$ за означенням $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}| \cos 90^\circ = 0$.

2. Достатність. Нехай $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$. Доведемо, що $\overline{a}$ та $\overline{b}$ перпендикулярні. За умовою, $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}| \cos\varphi = 0$. Але у зв'язку з тим, що $|a| \neq 0, |b| \neq 0$, вочевидь, $\cos\varphi = 0$, а значить, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

1.8.2. Алгебраїчні властивості скалярного добутку

1. Комутативна властивість. Для будь-яких векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ слушна рівність

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}.$$

2. Сполучна властивість відносно числового множника. Для будь-яких векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ і дійсного числа λ слушна рівність

$$(\lambda \cdot \overline{a})\overline{b} = \lambda(\overline{a} \cdot \overline{b}).$$

3. Розподільна властивість відносно суми векторів. Для будь яких векторів $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ слушна рівність

$$(\overline{a} + \overline{b})\overline{c} = \overline{a} \cdot \overline{c} + \overline{b} \cdot \overline{c}.$$

4. Скалярний добуток ненульового вектора самого на себе завжди додатній, тобто

$$\overline{a} \cdot \overline{a} = |\overline{a}|^2 > 0.$$

1.9. Скалярний добуток векторів, який виражається через координати векторів множників

1.9.1. Скалярний добуток векторів у координатній формі

Теорема. Якщо вектори задані декартовими прямокутними координатами, то їх скалярний добуток дорівнює сумі добутків однойменних координат.

Доведення. Нехай маємо вектори

$$\overline{a}=\{a_x;a_y;a_z\}=a_x\overline{i}+a_y\overline{j}+a_z\overline{k} \text{ та } \overline{b}=\{b_x;b_y;b_z\}=b_x\overline{i}+b_y\overline{j}+b_z\overline{k} \ .$$

Тоді

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=(a_x\overline{i}+a_y\overline{j}+a_z\overline{k})(b_x\overline{i}+b_y\overline{j}+b_z\overline{k})=a_xb_x\overline{i}\cdot\overline{i}+a_xb_y\overline{i\cdot j}+a_xb_z\overline{i}\cdot\overline{k}+$$
$$+a_yb_x\overline{j}\cdot\overline{i}+a_yb_y\overline{j\cdot j}+a_yb_z\overline{j}\cdot\overline{k}+a_zb_x\overline{k}\cdot\overline{i}+a_zb_y\overline{k\cdot j}+a_zb_z\overline{k}\cdot\overline{k}.$$

Приймаючи до уваги, що

$\overline{i}\cdot\overline{i}=|\overline{i}|^2=1$, $\quad \overline{i}\cdot\overline{j}=0$, $\quad \overline{j}\cdot\overline{i}=0$,

$\overline{j}\cdot\overline{j}=|\overline{j}|^2=1$, $\quad \overline{i}\cdot\overline{k}=0$, $\quad \overline{k}\cdot\overline{i}=0$,

$\overline{k}\cdot\overline{k}=|\overline{k}|^2=1$, $\quad \overline{j}\cdot\overline{k}=0$, $\quad \overline{k}\cdot\overline{j}=0$,

отримаємо

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \tag{1.17}$$

1.9.2. Необхідна та достатня умова перпендикулярності двох векторів у координатній формі.

Теорема. Для того, щоб два ненульових вектори були перпендикулярні необхідно та достатньо, щоб сума добутків їх однойменних координат дорівнювала нулю.

Доведення.

1. Необхідність. Нехай вектори $\overline{a}=\{a_x;a_y;a_z\}$ та $\overline{b}=\{b_x;b_y;b_z\}$ перпендикулярні. Доведемо, що $a_xb_x+a_xb_y+a_xb_z=0$. За умовою $\overline{a}\perp\overline{b}$, значить, $\overline{a}\cdot\overline{b}=0$, тобто

$$a_xb_x+a_xb_y+a_xb_z=0.$$

2. Достатність. Нехай $a_xb_x+a_xb_y+a_xb_z=0$. Доведемо, що $\overline{a}\perp\overline{b}$. За умовою, $a_xb_x+a_xb_y+a_xb_z=0$, тобто, $\overline{a}\cdot\overline{b}=0$. Внаслідок геометричних властивостей скалярного добутку маємо $\overline{a}\perp\overline{b}$.

1.9.3. Формула для визначення кута між двома векторами

Відомо, що $\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cos\varphi$. Звідси,

$$\cos\varphi=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}$$

або

$$\cos\varphi=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}. \qquad (1.18)$$

1.9.4. Напрямні косинуси вектора та їх загальна властивість

Означення. Якщо вектор $\bar{a}$ утворює з осями OX, OY, OZ кути, відповідно дорівнюють α, β, γ, то числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ називаються напрямними косинусами вектора $\bar{a}$.

Вочевидь, що кути, які вектор $\bar{a}$ утворює з осями координат, це кути, які вектор $\bar{a}$ утворює з базисними векторами $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$. Вектори $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ можна задати за допомогою координат:

$$\bar{i}=\{1;0;0\},\ \bar{j}=\{0;1;0\},\ \bar{k}=\{0;0;1\}.$$

Тоді

$$\cos a=\cos(\widehat{\bar{a},\bar{i}})=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\beta=\cos(\widehat{\bar{a},\bar{j}})=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\gamma=\cos(\widehat{\bar{a},\bar{k}})=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}.$$

Звідси,

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\frac{a_x^2}{\left(\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\right)^2}+\frac{a_y^2}{\left(\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\right)^2}+\frac{a_z^2}{\left(\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\right)}=$$

$$=\frac{a_x^2+a_y^2+a_z^2}{\left(\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\right)^2}=1.$$

Таким чином, отримана формула

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1. \qquad (1.19)$$

Це і є загальна властивість напрямних косинусів.

1.9.5. Проекція вектора на вісь

За означенням, скалярного добутку виходить, що $\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b} = \dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|}$ або

$$\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}. \qquad (1.20)$$

1.9.6. Механічний зміст скалярного добутку

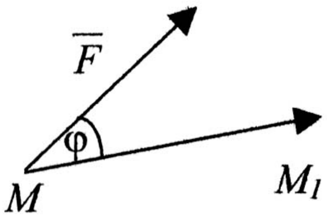


Рисунок 1.16

Нехай матеріальна точка переміщується із стану M у стан M_1 під дією сили $\overline{F_c}$ (рис. 1.16). Тоді, якщо модуль вектора $\left|\overline{MM_1}\right| = S$, а кут між векторами $\bar{F}$ та $\overline{MM_1}$ дорівнює φ, то, як відомо, робота, яку виконує сила $\bar{F}$, знаходиться за формулою:

$$A = |\bar{F}|\cdot S\cdot\cos\varphi,$$

або

$$A = \bar{F}\cdot\bar{S}. \qquad (1.21)$$

Таким чином, робота A дорівнює скалярному добутку вектора сили на вектор переміщення.

1.11. Векторний добуток двох векторів

1.11.1. Означення векторного добутку векторів

Означення. Векторним добутком $\bar{a}\times\bar{b}$ двох векторів $\bar{a}$ та $\bar{b}$ називається такий вектор $\bar{L}$, який задовольняє умовам:

1) вектор $\bar{L}$ перпендикулярний до векторів $\bar{a}$ та $\bar{b}$;

2) вектор $\bar{L}$ має такий напрямок, що при спостереженні з кінця вектора $\bar{L}$, найкоротший поворот від вектора $\bar{a}$ до вектора $\bar{b}$ відбувається у напрямку проти годинникової стрілки;

3) модуль вектора $\bar{L}$ дорівнює добутку модулів векторів-співмножників на синус кута між ними, тобто,

$$|\bar{L}| = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\sin\varphi.$$

1.11.2. Геометричні властивості векторного добутку

1) Необхідна та достатня умова колінеарності двох векторів у векторній формі.

Теорема. Для того, щоб два ненульових вектори були колінеарні необхідно та достатньо, щоб їх векторний добуток дорівнював нулю.

1. Необхідність

Дано: $\overline{a} \| \overline{b}$.

Довести: $\overline{a} \times \overline{b} = \overline{0}$.

Доведення

За умовою, $\overline{a} \| \overline{b}$, тому кут між ними φ = 0° або φ = 180°, тоді,

$$\overline{a} \times \overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|\sin\varphi = 0; \quad \overline{a} \times \overline{b} = \overline{0}.$$

2. Достатність. Дано: $\overline{a} \times \overline{b} = \overline{0}$,

Довести: $\overline{a} \| \overline{b}$.

Доведення.

За умовою $\overline{a} \times \overline{b} = \overline{0}$. Значить, $|\overline{a} \times \overline{b}| = 0$, тобто, $|\overline{a}||\overline{b}|\sin\varphi = 0$. Але $|\overline{a}| \neq 0, |\overline{b}| \neq 0$, тому sinφ = 0, а φ = 0° або φ = 180°.

2) Модуль векторного добутку $\overline{a} \times \overline{b} = \overline{0}$ *чисельно дорівнює площі S паралелограма, побудованого на векторах* $\overline{a}$ та $\overline{b}$, *що виходять з однієї точки, на сторонах.*

Доведення.

Із означення векторного добутку виходить, що $|\overline{L}| = |\overline{a}||\overline{b}|\sin\varphi$ (рис. 1.17).

Відомо також, що площа паралелограма *OACB* знаходиться по формулі $S = |\overline{a}||\overline{b}|\sin\varphi$. Тому виходить, що $S = |\overline{a} \times \overline{b}|$ (од. кв.).

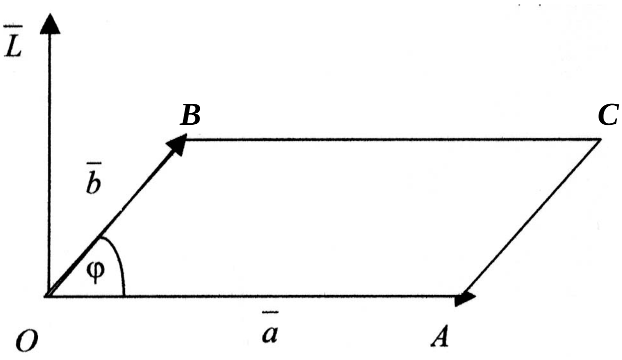


Рисунок 1.17

1.11.3. Алгебраїчні властивості векторного добутку

1) Антиперестановочна властивість.

Для будь-яких векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ слушна рівність:

$$\overline{a} \times \overline{b} = -(\overline{a} \times \overline{b}).$$

2) Сполучна властивість чисельного множника.

Для будь-яких векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ і дійсного числа λ слушна рівність:

$$(\lambda\overline{a}) \times \overline{b} = \lambda(\overline{a} \times \overline{b}).$$

3) Розподільна властивість відносно суми векторів.

Для будь-яких векторів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ слушна рівність:

$$(\bar{a}+\bar{b})\times\bar{c}=\bar{a}\times\bar{c}+\bar{b}\times\bar{c}\,.$$

4) Векторний добуток будь-якого вектора на самого себе дорівнює нульовому вектору, тобто,

$$\bar{a}\times\bar{a}=\bar{0}\,.$$

1.12. Векторний добуток векторів, який виражається через координати векторів множників

Теорема. Якщо вектори $\bar{a}$ та $\bar{b}$ задані декартовими прямокутними координатами $\bar{a}=\{a_x, a_y, a_z\}, \bar{b}\{b_x, b_y, b_z\}$, то їх векторний добуток знаходиться за формулою

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}. \qquad (1.22)$$

Доведення.

Користуючись означенням векторного добутку, знайдемо векторні добутки базисних векторів.

$$\bar{i}\times\bar{i}=\bar{0}; \qquad \bar{j}\times\bar{i}=-\bar{k}; \qquad \bar{k}\times\bar{i}=\bar{j};$$

$$\bar{i}\times\bar{j}=\bar{k}; \qquad \bar{j}\times\bar{j}=\bar{0}; \qquad \bar{k}\times\bar{j}=-\bar{i};$$

$$\bar{i}\times\bar{k}=-\bar{j}; \qquad \bar{j}\times\bar{k}=\bar{i}; \qquad \bar{k}\times\bar{k}=\bar{0}.$$

Подамо вектори $\bar{a}$ та $\bar{b}$ розкладеними по базису

$$\bar{a}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_x\bar{k}, \quad \bar{b}=b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_x\bar{k}\,.$$

Тоді,

$$\bar{a}\times\bar{b}=(a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_x\bar{k})\times(b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_x\bar{k})=a_xb_x\bar{i}\times\bar{i}+a_xb_y\bar{i}\times\bar{j}+a_xb_z\bar{i}\times\bar{k}+$$

$$+a_yb_y\bar{j}\times\bar{i}+a_yb_y\bar{j}\times\bar{j}+a_yb_z\bar{j}\times\bar{k}+a_zb_x\bar{k}\times\bar{i}+a_zb_y\bar{k}\times\bar{j}+a_zb_z\bar{k}\times\bar{k}=$$

$$=a_xb_y\bar{k}-a_xb_z\bar{j}-a_yb_x\bar{k}+a_yb_z\bar{i}+a_zb_x\bar{j}-a_zb_y\bar{i}=(a_yb_z-a_zb_y)\bar{i}+$$

$$+(a_zb_x-a_xb_z)\bar{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\bar{k}.$$

Використовуючи символ визначника, останній результат подамо у вигляді:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\bar{i}-\begin{vmatrix}a_z & a_z\\ b_z & b_z\end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\bar{k}.$$

Розглядаючи праву частину цієї рівності як розкладання визначника III порядку по елементам I рядка, отримаємо формулу:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}. \qquad (1.23)$$

1.13. Застосування векторного добутку векторів у геометрії, фізиці

1. Якщо вектори $\bar{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$ та $\bar{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$ задані декартовими прямокутними координатами, то площа паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}$ та $\bar{b}$, що мають спільний початок, як на сторонах, знаходиться за формулою

$$S=\sqrt{\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}^2}. \qquad (1.24)$$

Дійсно, відомо, що $S=|\bar{a}\times\bar{b}|$ і що

$$\bar{a}\times\bar{b}=\left\{\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\right\},$$

тому

$$S=|\bar{a}\times\bar{b}|=\sqrt{\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}^2}.$$

2. Якщо вектори $\bar{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$ та $\bar{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$ задані декартовими прямокутними координатами, то площа трикутника, побудованого на маючих спільний початок векторах, як на сторонах, знаходиться за формулою:

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}^2}. \qquad (1.25)$$

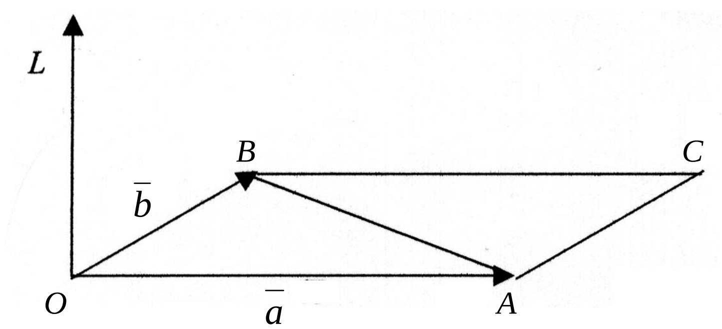


Рисунок 1.18

Слушність цієї формули виходить з того, що площа трикутника *OAB* дорівнює половині площі паралелограма *OACB* (рис. 1.18).

3. Момент сили відносно точки. Нехай у деякій точці *B* прикладена сила $\bar{F}$. Моментом сили $\bar{F}$, прикладеної у точці *B*,

відносно довільної точки A (рис. 1.19,а) називається вектор, який дорівнює добутку радіуса-вектора AB на вектор сили $\overline{F}$:

$$\overline{M}_A(\overline{F}) = \overline{r}_B \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix},$$

якщо $\overline{r} = \{r_x; r_y; r_z\}$, $\overline{F} = \{F_x; F_y; F_z\}$.

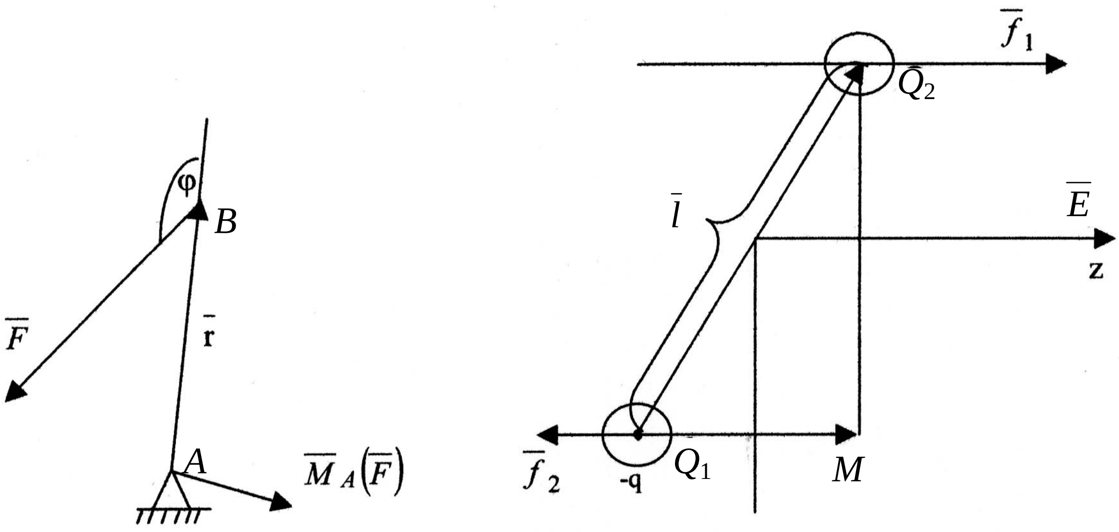


Рисунок 1.19

Приклад 4. Сила $\overline{F}$ = {1; 2; 3} прикладена у точці B(3;4;5). Знайти момент сили $\overline{F}$ відносно точки A(1;2;3)

Розв'язання. $\overline{r_B} = \overline{AB}$ = {2;2;2}. Тоді,

$$\overline{M_A}(\overline{F}) = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2\overline{i} - 2\overline{j} + 4\overline{k}.$$

4. Момент сил, які діють на диполь,

Момент сил, які діють на диполь (рис. 1.19,б) у однорідному зовнішньому електричному полі, позначається у фізиці, електротехніці за допомогою векторного добутку таким чином:

$$\overline{M_Д} = \overline{P} \times \overline{E};\ \left|\overline{M_D}\right| = \left|\overline{P}\right| \cdot \left|\overline{E}\right| \sin \varphi,,$$

де $\overline{P} = q\overline{l}$ – вектор електричного моменту диполя, вектор $\overline{l} = \overline{Q_1 Q_2}$ прямує від від'ємного до додатного заряду диполя, $\overline{E}$ – вектор напруженості електричного поля. Цей момент можна записати і інакше, у відповідності з його механічним змістом, як момент пари сил $\overline{f_1}$ та $\overline{f_2}$ взаємодії точкових зарядів q_1 та q_2 із зовнішнім електричним полем

$$\overline{M_D} = \bar{l} \times \overline{f_k}, \; k = 1, 2.$$

Вектор $\bar{l}$ прямує до точки прикладання сили $\overline{f_k} = q_k \overline{E}, q_k$ – заряд зі своїм знаком.

5. Сила, що діє на провідник зі струмом у магнітному полі. Ця сила дорівнює

$$\overline{F}_{(l)} = I(\bar{l} \times \overline{H}) \cdot \frac{1}{c^2} \text{ або } \overline{F_{(l)}} = \frac{\bar{I} \times \overline{H}}{c^2},$$

де c – електродинамічна стала; I – вектор сили струму, що проходить у провіднику; $\overline{H}$ – вектор напруженості магнітного поля, у якому рухається провідник; довжиною l напрямок вектора $\bar{l}$; співпадає з напрямком струму); $F_{(l)}$ – сила, що діє на провідник одиночної довжини (рис. 1.20).

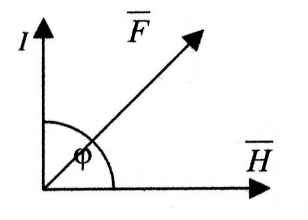


Рисунок 1.20

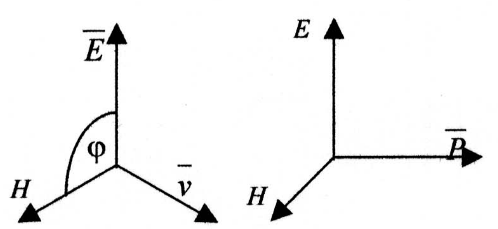
6. Деякі характеристики електромагнітних полів. У ході вивчення закономірностей розповсюдження електромагнітних хвиль у однорідній ізотропній середі можна за допомогою векторного добутку визначити такі векторні величини, як швидкість $\bar{v}$ розповсюдження хвилі

$$\bar{v} = \overline{E} \times \overline{H},$$

де $\overline{E}$ та $\overline{H}$ – вектори напруженості відповідно електричного та магнітного полів; вектор щільності потоку енергії, переносимої полем (вектор Пойтинга):

$$\overline{P} = \frac{c}{4\pi}(\overline{E} \times \overline{H}) = \frac{c}{4\pi}\bar{v},$$

де c – швидкість розповсюдження електромагнітних хвиль у порожнині (рис. 1.21,б) Формула слушна у змішаній або гаусовій системі одиниць.



а) б)

Рисунок 1.21

7. Швидкість довільної точки обертаючогося тіла. Якщо тіло обертається відносно нерухомої точки O (рис. 1.22), то у будь-який час вектор $\bar{\omega}$ кутової швидкості обертання співпадає по напрямку із миттєвою віссю обертання M, яка проходить через нерухому точку O. У цьому випадку лінійну швидкість довільної точки М тіла, яка розміщується поза віссю l, можна визначити за допомогою векторного добутку векторів $\bar{\omega}$ та $\bar{r}(M)$:

$$\overline{\nu_m} = \bar{\omega} \times \bar{r}, \left|\overline{v_m}\right| = |\bar{\omega}||\bar{r}|\sin\varphi.$$

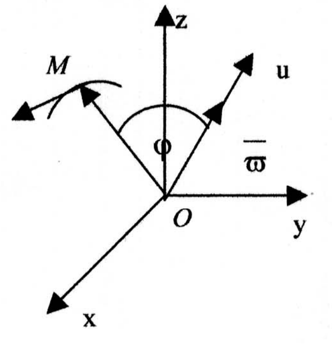


Рисунок 1.22

1.14. Мішаний добуток трьох векторів

1.14.1. Означення мішаного добутку

Означення. Мішаним добутком $(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}$ трьох векторів називається число, що дорівнює скалярному добутку вектора $(\overline{a}\times\overline{b})$ на вектор $\overline{c}$.

1.14.2. Геометричні властивості мішаного добутку

1. Мішаний добуток $(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}$ трьох некомпланарних векторів дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ зі спільним початком з точністю до знака.

Доведення

$(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}=|\overline{a}\times\overline{b}|\cdot|\overline{c}|\cdot\cos\varphi$, де φ – кут між векторами $\overline{L}=\overline{a}\times\overline{b}$ та вектором $\overline{c}$. Розглянемо тепер паралелепіпед, побудований на векторах $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$, як на сторонах (рис. 1.23, рис. 1.24).

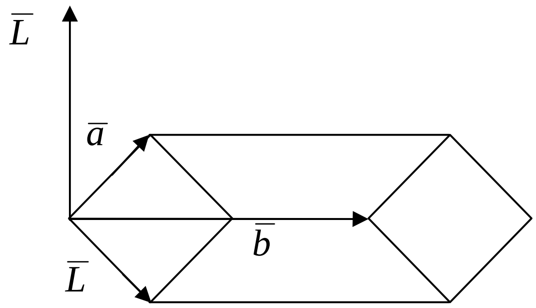


Рисунок 1.23

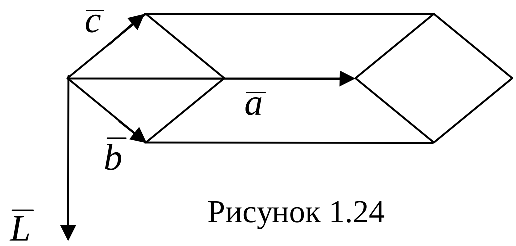


Рисунок 1.24

Площа основи визначається за допомогою векторного добутку

$$S=|\overline{a}\times\overline{b}|.$$

Побудуємо вектор $\overline{L}=\overline{a}\times\overline{b}$.

Вочевидь, що для правої трійки векторів (рис. 1.23).

$$|\overline{c}|\cdot\cos(\overline{c},\overline{L})=\text{пр}_{\overline{L}}\,\overline{c}=h,$$

а для лівої трійки векторів (рис. 1.24)

$$|\overline{c}|\cdot\cos(\overline{c},\overline{L})=\text{пр}_{\overline{L}}\,\overline{c}=-h$$

Об'єм паралелепіпеда знаходиться за формулою $V=S\cdot h$, тому

$$V=\pm(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c} \qquad (1.26)$$

2. Об’єм тетраедра, побудованого на трьох векторах $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$, які мають спільний початок, як на сторонах, визначається за формулою

$$V = \pm\frac{1}{6}\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}. \qquad (1.27)$$

Слушність властивості виходить із того, що паралелепіпед, побудований на векторах $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$, як на сторонах, рівновеликий з шістьма тетраедрами, побудованими на векторах $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$, як на сторонах, якщо ці вектори мають спільний початок.

3. Необхідна та достатня умова компланарності трьох векторів.

Для того, щоб три вектори були компланарні необхідно та достатньо, щоб їх мішаний добуток дорівнював нулю.

Доведення

1. Необхідність. Нехай вектори $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ компланарні. Доведемо, що $\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}=0$. Вектори компланарні, якщо серед них є нульовий вектор. Але у цьому разі $\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}=0$. Вектори також компланарні, якщо серед них є колінеарні вектори. Наприклад, якщо $\bar{a}\parallel\bar{b}$, то $\bar{a}\times\bar{b}=\bar{0}$ і тоді $\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}=0$. Якщо ж $\bar{a}\parallel\bar{c}$, то $\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)=\bar{L}\perp\bar{c}$ і тому $\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}=0$.

У загальному випадку, якщо вектори $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ компланарні, то $\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)=\bar{L}$, вектор $\bar{L}$ перпендикулярний площині, яка містить вектори $\bar{a}$ та $\bar{b}$, але так як вектор $\bar{c}$ паралельний тій же площині, що $\bar{L}\perp\bar{c}$ і тому $\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}=0$.Таким чином, якщо вектори компланарні, то мішаний добуток векторів дорівнює нулю.

2. Достатність. Нехай мішаний добуток векторів дорівнює нулю. Виходить, що

$$\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}=\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|\cdot\left|\bar{c}\right|\cdot\cos\left(\bar{L},\bar{c}\right)=\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|\cdot\sin\left(\bar{a},\bar{b}\right)\cdot\left|\bar{c}\right|\cdot\cos\left(\bar{L},\bar{c}\right)=0 \qquad (1.28)$$

де $\bar{L}=\bar{a}\times\bar{b}$. Рівність (1.22) можлива у таких випадках:

а) хоча б один з векторів є нульовий вектор, але тоді усі вектори компланарні;

б) $\sin\left(\bar{a},\hat{\ }\bar{b}\right)=0$, тоді $\bar{a}\parallel\bar{b}$ і виходить $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ – компланарні;

в) $\cos\left(\bar{L},\hat{\ }\bar{c}\right)=0$, тоді $\bar{L}\perp\bar{c}$, але ж $\bar{a}\perp\bar{L}$, $\bar{b}\perp\bar{L}$ за означенням векторного добутку тому $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ – компланарні.

1.14.3. Алгебраїчні властивості мішаного добутку

1. Для будь яких векторів $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ слушна рівність $\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)$.

Доведення

Виходячи з геометричного змісту мішаного добутку, маємо

$$\left|\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}\right| = \left|\left(\overline{b}\times\overline{c}\right)\cdot\overline{a}\right|.$$

Обидві трійки векторів $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ та $\overline{b},\overline{c},\overline{a}$ правоорієнтовані, тому $\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c} = \left(\overline{b}\times\overline{c}\right)\cdot\overline{a}$.

Але тоді у відповідності із перестановочною властивістю скалярного добутку слушна рівність $\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c} = \overline{a}\cdot\left(\overline{b}\times\overline{c}\right)$.

2. Розподільна відносно сум векторів властивість.

Для будь-яких векторів $\overline{a},\overline{b},\overline{c},\overline{d}$ слушна рівність:

$$\left(\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\times\overline{c}\right)\cdot\overline{d} = \left(\overline{a}\times\overline{c}\right)\cdot\overline{d} + \left(\overline{b}\times\overline{c}\right)\cdot\overline{d}.$$

3. Сполучна відносно скалярного множника властивість:

$$\left(\left(\lambda\overline{a}\right)\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c} = \lambda\left(\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}\right)$$

1.15. Мішаний добуток векторів, який виражається через координати векторів множників

Теорема. Якщо вектори $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ задані декартовими координатами $\overline{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$, $\overline{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$, $\overline{c}=\{c_x,c_y,c_z\}$, то змішаний добуток векторів знаходиться за формулою

$$\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (1.29)$$

Доведення.

Відомо, що $\overline{L}=\overline{a}\times\overline{b}=\left\{\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\right\}$, тоді, $\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=\overline{L}\cdot\overline{c}=$

$$= c_x\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} + c_y\begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} + c_z\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = c_x\left(a_yb_z - a_zb_y\right) + c_y\left(a_zb_x - a_xb_z\right) +$$

$$+ c_z\left(a_xb_y - a_yb_x\right) = a_yb_zc_x - a_zb_yc_x + a_zb_xc_y - a_xb_zc_y + a_xb_yc_z - a_yb_xc_z =$$

$$= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

1.16. Застосування мішаного добутку векторів у геометрії

Теорема. Для того, щоб три вектори були компланарні необхідно та достатньо, щоб визначник, складений з їх координат, дорівнював нулю.

1. Необхідність. Нехай вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – компланарні $\bar{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$; $\bar{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$; $\bar{c} = \{c_x; c_y; c_z\}$.

Довести:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

Доведення.

За умовою $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – компланарні вектори, виходить, $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = 0$, але тоді

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

2. Достатність. Дано:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

Довести, що $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – компланарні. За умовою $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = 0$, значить, $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – компланарні.

Висновок. Для того, щоб три вектори були лінійно залежними, необхідно та достатньо, щоб визначник, складений із їх координат, дорівнював нулю.

Об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах $\bar{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$; $\bar{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$; $\bar{c} = \{c_x; c_y; c_z\}$, які мають спільний початок, як на сторонах, знаходиться за формулою:

$$V = \pm \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{1.30}$$

Об'єм тетраедра, побудованого на векторах $\bar{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$; $\bar{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$; $\bar{c} = \{c_x; c_y; c_z\}$, які мають спільний початок, як на сторонах, знаходиться за формулою:

$$V = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{1.31}$$

Приклад 5. Задані вектори $\overline{a}=\{1;-4;2\}$; $\overline{b}=\{3;5;-3\}$; $\overline{c}=\{2;7;-1\}$.
Знайти:
1. $(2\overline{a})\cdot(\overline{b}-\overline{a})$.
2. $(3\overline{b})\times(\overline{a}+\overline{b})$.
3. $((3\overline{a})\times(2\overline{b}))\cdot(\overline{b}+4\overline{c})$.

Розв'язання
1. Знайдемо вектори $2\overline{a}$ та $\overline{b}-\overline{a}$.

$$2\overline{a}=\{2;-8;4\};\ \overline{b}-\overline{a}=\{2;9;-5\}.$$

Тоді, $(2\overline{a})\cdot(\overline{b}-\overline{a})=2\cdot 2+(-8)\cdot 9+4\cdot(-5)=-88$.
2. Знайдемо вектори $3\overline{b}$ та $\overline{a}+\overline{b}$.

$$3\overline{b}=\{9;15;-9\};\ \overline{a}+\overline{b}=\{4;1;-1\}.$$

$$(3\overline{b})\times(\overline{a}+\overline{b})=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 9 & 15 & -9\\ 4 & 1 & -1\end{vmatrix}=\{-6;-27;51\}.$$

3. Знайдемо вектори $3\overline{a}$, $2\overline{b}$, $\overline{b}+4\overline{c}$.

$$3\overline{a}=\{3;-12;6\},\ 2\overline{b}=\{6;10;-6\},\ \overline{b}+4\overline{c}=\{11;33;-7\}.$$

$$((3\overline{a})\times(2\overline{b}))\cdot(\overline{b}+4\overline{c})=\begin{vmatrix}3 & -12 & 6\\ 6 & 10 & -6\\ 11 & 33 & -7\end{vmatrix}=-3336.$$

2. МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО РОЗВ′ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ТА ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ′ЯЗАННЯ

2.1. Загальні поняття векторної алгебри

Приклад 1

На точку діють три сили: $\overline{F_1} = \{1; -5; 0\}$, $\overline{F_2} = \{-4; 0; 5\}$, $\overline{F_3} = \{2; 1; ; 7\}$.

Знайти рівнодіючу цих сил.

Розв'язання

Нехай $\overline{R}$ – рівнодіюча, тоді $\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \overline{F_3} = \{R_x; R_y; R_z\}$.

$$R_x = 1 - 4 + 2 = -1;\ R_y = -5 + 0 + 1 = -4;\ R_z = 0 + 5 + 7 = 12.$$

Значить, $\overline{R} = \{-1; -4; 12\}$.

Приклад 2

Знайти координати вектора $\overline{AB}$, якщо задані точки $A(1;4;5)$; $B(-2;3;7)$.

Розв'язання

Для того, щоб знайти координати вектора, потрібно від координат кінця відняти відповідні координати початку вектора.

$$\overline{AB} = \{-2 - 1; 3 - 4; 7 - 5\} = \{-3; -1; 2\}.$$

Приклад 3

Дани координати вектора $\overline{EF} = \{4; 5; -3\}$, також відомі координати точки $E(2; 1; 5)$. Визначити координати точки F.

Розв'язання

$4 = X_f - X_e$; $4 = Y_f - Y_e$; $4 = Z_f - Z_e$;

$4 = X_f - 2$; $5 = Y_f - 1$; $-3 = Z_f - 5$.

Виходить, $F = \{6; 6; 2\}$.

Приклад 4

Дані вершини трикутника ABC: A (8; 5; 6); B(2; 3; 3); C(4; 2; 6). Знайти довжину ламаної BAC.

Розв'язання

Довжина ламаної ВАС складається із суми довжин відрізків BA та AC. Скористаємося формулою відстані між двома точками.

$$BA = \sqrt{(2-8)^2 + (3-5)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{36+4+9} = \sqrt{49} = 7;$$

$$AC = \sqrt{(4-8)^2 + (2-5)^2 + (6-6)^2} = \sqrt{16+9+0} = \sqrt{25=5};$$

$$BA + AC = 7 + 5 = 12.$$

Приклад 5

Дані вектори $\overline{a} = \{5;1;4\}$ та $\overline{b} = \{2;-1;5\}$. Знайти вектор $\overline{c} = 4\overline{a} - 2\overline{b}$.

Розв'язання

Відомо, що лінійні операції над векторами переносяться на їх координати:

$$\overline{c} = 4\overline{a} + 2\overline{b};\ 4\overline{a} = \{20; 4; 16\};\ 2\overline{b} = \{4; -2; 10\};$$

$$\overline{c} = \{20 - 4; 4 - (-2); 16 - 10\} = \{16; 6; 6\}.$$

Приклад 6

Серед векторів $\overline{a} = \{5;1;-4\}$, $\overline{b} = \{5;1;-3\}$ та $\overline{c} = \{-20;-4;16\}$ знайти колінеарні.

Розв'язання

Якщо вектори колінеарні, то їх координати пропорційні. Перевіримо колінеарність векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$.

$$\frac{5}{5} = \frac{4}{1} \neq \frac{-4}{-3}.$$

Значить, вектори не колинеарні.

Далі перевіримо колінеарність векторів $\overline{a}$ і $\overline{c}$.

$$\frac{5}{-20} = \frac{1}{-4} = \frac{-4}{16} = -\frac{1}{4}.$$

Значить вектори $\overline{a}$ та $\overline{c}$ колінеарні.

Приклад 7

Знайти такі значення α та β при яких колінеарні вектори $\overline{a} = \alpha\overline{i} - 3\overline{j} + 5\overline{k}$ та $\overline{b} = 7\overline{i} - 42\overline{j} + \beta\overline{k}$.

Розв'язання

Вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$ задані у вигляді $\overline{a} = \{\alpha;-3;5\}$ та $\overline{b} = \{7;-42;\beta\}$. Для того, щоб вектори були колінеарні, повинна виконуватись рівність:

$$\frac{\alpha}{7} = \frac{-3}{-42} = \frac{5}{\beta}.$$

Із відношення $\frac{\alpha}{7} = \frac{-3}{-42}$ знаходимо $\alpha = \frac{7(-3)}{-42} = \frac{1}{2}$. Тоді знаходимо β.

$\frac{-3}{-42} = \frac{5}{\beta}$, $\beta = \frac{-42 \cdot 5}{-3} = 70$.

Приклад 8

Чи може вектор утворювати з вісями *OX*, *OY*, *OZ* кути, що дорівнюють відповідно 30°; 45°; 90°?

Розв'язання

Знаходимо направляючі косинуси: $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 90^\circ = 0$.

Перевіряємо, чи виконується основна властивість направляючих косинусів

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (0)^2 = \frac{3}{4} + \frac{2}{4} + 0 = \frac{5}{4} \neq 1.$$

Значить, вектора який з висями координат утворює задані кути, не існує.

Приклад 9

Надані вектори $\bar{a} = \{1;5;7\}$; $\bar{b} = \{-1;0;1\}$; $\bar{c} = \{2;1;-2\}$; $\bar{d} = \{-3;4;11\}$. Покладаючи, що вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ утворюють базис, знайти координати $\bar{d}$ у базисі $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$.

Розв'язання

Якщо $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – базисні вектори, то існують такі числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, що слушна рівність:

$$\bar{d} = \lambda_1 \bar{a} + \lambda_2 \bar{b} + \lambda_3 \bar{c}.$$

Залежність між векторами розповсюджується на їх координати

$$\begin{cases} -3 = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 (-1) + \lambda_3 \cdot 2; \\ 4 = \lambda_1 \cdot 5 + \lambda_2 \cdot 0 + \lambda_3 \cdot 1; \\ 11 = \lambda_1 \cdot 7 + \lambda_2 \cdot 1 + \lambda_3 (-2). \end{cases}$$

Розв'яжемо отриману систему лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою правила Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -8; \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 11 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -8; \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 7 & 11 & -2 \end{vmatrix} = -16; \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 5 & 0 & 4 \\ 7 & 1 & 11 \end{vmatrix} = 8.$$

$$\lambda_1 = \frac{-8}{-8} = 1; \ \lambda_2 = \frac{-16}{-8} = 2; \ \lambda_3 = \frac{8}{-8} = -1.$$

Таким чином,

$$\bar{d} = \bar{a} + 2\bar{b} - \bar{c}.$$

2.2. Задачі для самостійного розв'язання

1. По заданим векторам $\bar{a}$ та $\bar{b}$ побудувати вектори:

a) $\bar{a} + 2\bar{b}$;
b) $-2\bar{a} - \bar{b}$;
c) $3\bar{a} - \bar{b}$;
d) $\frac{1}{3}\bar{a} + 3\bar{b}$;
e) $3\bar{b} - 2\bar{a}$;
f) $\frac{1}{4}\bar{b} + 4\bar{a}$.

2. Знайти проекцію вектора $\overline{a}$ на вісь OX, якщо відомі модуль $\overline{a}$ та кут φ нахилу до вісі OX:

a) $\left|\overline{a}\right| = 4; \varphi = \frac{\pi}{3};$ b) $\left|\overline{a}\right| = 6; \varphi = \frac{\pi}{4};$

c) $\left|\overline{a}\right| = 5; \varphi = \frac{5\pi}{6};$ d) $\left|\overline{a}\right| = 9; \varphi = -\frac{\pi}{6}.$

3. Зобразити у прямокутній декартовій системі координат на площині вектори, що виходять з початку координат, якщо відомі їх координати

1. $x = 2; y = 3;$ 2. $x = -2; y = 4;$
3. $x = 4; y = -3;$ 4. $x = -1; y = -5.$

4. Знайти координат векторів $\overline{AB}$ та $\overline{BA}$.

a) A (1;4;0); *B* (5;1;3);
b) *A* (-1;0;-2); *B* (1;2;3);
c) *A* (7;11;-12); *B* (4;5;7).

5. Знайти координати точки *B*, якщо відомі координати вектора $\overline{AB}$ та його початок:

a) $\overline{AB} = \{4;-1;3\}; A(7;2;1);$
b) $\overline{AB} = \{5;2;7\}; A(7;2;5);$
c) $\overline{AB} = \{5;2;7\}; A(1;4;0).$

6. Знайти модуль вектора $\overline{AB}$, якщо:

a) $\overline{AB} = \{3;1;2\};$
b) $\overline{BA} = \{4;0;-1\};$
c) *A*(7;1;11); *B*(2;5;4);
d) *A*(3;1;8); *B*(-1;-11;-1).

7. Дано модуль вектора $\overline{a}$ та його кути з вісями координат. Знайти координати вектора $\overline{a}$.

a) $\left|\overline{a}\right| = 2; \beta = 45^\circ; \beta = 60^\circ; \gamma = 120^\circ;$

b) $\left|\overline{a}\right| = 4; \alpha = \frac{3\pi}{4}; \beta = -\frac{\pi}{3}; \gamma = \frac{2\pi}{3};$

c) $\left|\overline{a}\right| = \frac{1}{3}; \alpha = -\frac{3\pi}{4}; \beta = \frac{\pi}{4}; \gamma = \frac{\pi}{2};$

d) $|\bar{a}| = 3; \lambda = -\frac{\pi}{4}; \beta = \frac{\pi}{2}; \gamma = \frac{3\pi}{4}$.

8. Знайти направляючі косинуси вектора

a) $\bar{a}$ = {1;3;-1};

b) $\bar{a} = \left\{2; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right\}$;

c) $\bar{a}$ = {5;-5;1};

d) $\bar{a}$ = {-1;4;5}.

9. Знайти координати вектора $\bar{a}$, якщо:

a) $\bar{a} = 4\bar{b} - 3\bar{c}; \bar{b} = \{1;7;2\}; \bar{c} = \{-1;0;2\}$;

b) $\bar{a} = \overline{2b} + \frac{1}{2}\bar{c}; \bar{b} = \{1;0;5\}; \bar{c} = \{2;1;7\}$;

c) $\bar{a} = \bar{b} + 2\bar{c} + 3\bar{d}; \bar{b} = \{1;0;5\}; \bar{c} = \{2;1;7\}; \bar{d} = \{-1;0;-2\}$;

d) $\bar{a} = \overline{9b} + 9\bar{c}; \bar{b} = \{1;2;0\}; \bar{c} = \{2;1;7\}$.

10. Перевірити, чи колінеарні вектори $\bar{a}$ та $\bar{b}$

a) $\bar{a} = \{1;7;4\}; \bar{b} = \{-3;-21;-12\}$;

b) $\bar{a} = \{2;4;5\}; \bar{b} = \{4;8;9\}$;

c) $\bar{a} = \{0;5;6\}; \bar{b} = \{1;10;12\}$;

d) $\bar{a} = \{2;-1;0\}; \bar{b} = \{2;-1;-1\}$?

11. Перевірити, чи можуть точки *A*, *B*, *C*, *D* бути вершинами трапеції

a) *A* (1;4;5); *B* (3;7;5); *C* (9;8;5); *D* (13;14;5);

b) *A* (8;3;7); *B* (9;4;0); *C* (5;1;8); *D* (16;4;5);

c) *A* (5;-1;0); *B* (3;5;2); *C* (1;2;3); *D* (-9;28;13)?

12. Визначити при яких α та β вектора $\bar{a}$ та $\bar{b}$ колінеарні.

a) $\bar{a} = 3\bar{i} + 4\bar{j} + \beta\bar{k}$; $\bar{b} = 6\bar{i} + \alpha\bar{j} + 9\bar{k}$.

b) $\bar{a} = \beta\bar{i} - 7\bar{j} + 8\bar{k}$; $\bar{b} = 7\bar{i} + 35\bar{j} + \alpha\bar{k}$.

13. Дані точки *A* (-1;5;-10), *B* (5;-7;8), *C* (2;2;-7) та *D* (5;-4;2). Перевірити, чи колінеарні вектори $\overline{AB}$ та $\overline{CD}$? З'ясувати, який із них довший та у скільки разів, співнапрямлені вектори чи протилежно напрямлені?

14. Надані вектори $\overline{a}=\{3;-5;8\}$ та $\overline{b}=\{-1;1;-4\}$. Знайти модулі векторів $\overline{c}=\overline{a}+\overline{b}; \overline{d}=\overline{a}-\overline{b}; \overline{e}=3\overline{a}; \overline{f}=5\overline{b}.$

15. Вектори $\overline{AB}=\{2;6;-4\}$ та $\overline{AC}=\{4;2;-2\}$ співпадають зі сторонами трикутника *ABC*. Визначити координати векторів, прикладених до вершин трикутника і співпадаючих з його медіанами *AM*, *BN*, *CP*.

16. Знайти розкладання вектора $\overline{d}=\{1;-5\}$ по базисним векторам $\overline{a}=\{3;7\}, \overline{b}=\{-4;5\}$.

17. Знайти розкладання $\overline{d}$ по базису, утвореному векторами $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$.

a) $\overline{a}=\{1;4;0\}$; $\overline{b}=\{-1;0;-4\}$; $\overline{c}=\{2;1;3\}$; $\overline{d}=\{9;-1;4\}$.

b) $\overline{a}=\{2;7;5\}$; $\overline{b}=\{-3;1;5\}$; $\overline{c}=\{2;7;1\}$; $\overline{d}=\{16;6;8\}$.

c) $\overline{a}=\{3;-2;1\}$; $\overline{b}=\{-1;1;-2\}$; $\overline{c}=\{2;1;-3\}$; $\overline{d}=\{11;-6;5\}$.

2.3. Скалярний, векторний, мішаний добутки векторів

Приклад 1

Знайти скалярний добуток векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$, знаючи що

a) $|\overline{a}|=2; |\overline{b}|=3; (\overline{a},\overline{b})=\dfrac{\pi}{3}$;

b) $|\overline{p}|=1; |\overline{q}|=1; (\overline{p},\overline{q})=\dfrac{\pi}{3}; \overline{a}=2\overline{p}-3\overline{q}; \overline{b}=4\overline{p}+2\overline{q}$

Розв'язання

a) $\overline{a}\cdot\overline{b}=2\cdot 3\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=2\cdot 3\cdot\dfrac{1}{2}=3$

b) $\overline{a}\cdot\overline{b}=(2\overline{p}-3\overline{q})\cdot(4\overline{p}+2\overline{q})=8\overline{p}\cdot\overline{p}-12\overline{q}\cdot\overline{p}+4\overline{p}\cdot\overline{q}-6\overline{q}\cdot\overline{q}=$

$=8|\overline{p}|^2-12|\overline{q}||\overline{p}|\cos\dfrac{\pi}{3}+4|\overline{p}||\overline{q}|\cos\dfrac{\pi}{3}-6|\overline{q}|^2=8-12\cdot\dfrac{1}{2}+4\cdot\dfrac{1}{2}-6=-2.$

Приклад 2

Знайти скалярний добуток векторів, знаючи що

a) $\overline{a}=\{4;3;2\}; \overline{b}=\{0;-1;3\}$;

b) $\overline{p}=\{5;-1;1\}; \overline{q}=\{0;-5;2\}; \overline{a}=2\overline{p}-3\overline{q}; \overline{b}=4\overline{p}+5\overline{q}$.

Розв'язання

a) $\bar{a}\cdot\bar{b}=4\cdot 0+3\cdot(-1)+2\cdot 3=3$;

b) $\bar{a}\cdot\bar{b}=(2\bar{p}-3\bar{q})\cdot(4\bar{p}+5\bar{q})=8\overline{p\cdot p}-12\overline{q\cdot p}+10\bar{p}\cdot\bar{q}-15\overline{q\cdot q}=$

$=8|\bar{p}|^2-2\overline{p\cdot q}-15|\bar{q}|^2=8\cdot(5^2+(-1)^2+1^2)-2\cdot(5\cdot 0+(-1)\cdot(-5)+1\cdot 2)-$

$-15\cdot(0^2+(-5)^2+2^2)=8\cdot 27-2\cdot 7-15\cdot 29=-233.$

Приклад 3

Дано чотири сили:

$\overline{F_1}=\{4;3;2\}$, $\overline{F_2}=\{3;5;-1\}$, $\overline{F_3}=\{-1;-4;3\}$, $\overline{F_4}=\{-2;1;2\}$, які прикладені у одній точці. Обчислити роботу рівнодіючої цих сил, якщо точка прикладання її, двигаючись прямолінійно, пересувається з початку координат у точку $M(3;-2;1)$.

Розв'язання

Визначимо рівнодіючу сил $\overline{F_1},\overline{F_2},\overline{F_3},\overline{F_4}$.

$$\overline{R}=\{4+3-1-2;3+5-4+1;2-1+3+2\}=\{4;5;6\}.$$

Роботу A, яку виконує сила $\overline{R}$ по переміщенню точки вздовж вектора $\overline{OM}=\{3;-2;1\}$, знайдемо за формулою

$$A=\overline{R}\cdot\overline{OM}=4\cdot 3+5\cdot(-2)+6\cdot 1=8.$$

Приклад 4

Визначити, при якому значені α вектори $\bar{a}=\alpha\bar{i}-4\bar{j}+19\bar{k}$ та $\bar{b}=3\bar{i}-22\bar{j}+\alpha\bar{k}$ будуть перпендикулярні.

Розв'язання

З умови перпендикулярності векторів маємо:

$$\alpha\cdot 3+(-4)\cdot(-22)+19\cdot\alpha=0;\ 22\alpha=-88;\ \alpha=-4.$$

Приклад 5

Знайти модуль векторного добутку векторів $\bar{a}$ та $\bar{b}$, знаючи що:

a) $|\bar{a}|=5;\ |\bar{b}|=4;\ (\bar{a},\bar{b})=\frac{\pi}{6}$;

b) $|\bar{p}|=2; |\bar{q}|=7; (\bar{p},\bar{q})=\frac{\pi}{4}; \bar{a}=2\bar{p}-\bar{q}; \bar{b}=3\bar{p}+2\bar{q}.$

Розв'язання

a) $|\bar{a}\times\bar{b}|=5\cdot 4\cdot\sin\frac{\pi}{6}=5\cdot 4\cdot\frac{1}{2}=10$;

b) $|\bar{a}\times\bar{b}|=|(2\bar{p}-\bar{q})\times(3\bar{p}+2\bar{q})|=|6\bar{p}\times\bar{p}-3\bar{q}\times\bar{p}+4\bar{p}\times\bar{q}-2\bar{q}\times\bar{q}|=$

$$=\left|6\cdot\bar{0}+7\bar{p}\times\bar{q}-2\cdot\bar{0}\right|=7\left|\bar{p}\times\bar{q}\right|=7\cdot 2\cdot 7\sin\frac{\pi}{4}=49\sqrt{2}.$$

Приклад 6

Знайти векторний добуток векторів $\bar{a}\times\bar{b}$ та $\bar{b}\times\bar{a}$, а також їх модулі, якщо

a) $\bar{a}=\{3;-2;1\};\bar{b}=\{4;0;-5\}$;

b) $\bar{p}=\{2;1;7\};\bar{q}=\{0;-1;4\};\bar{a}=3\bar{p}-2\bar{q};\bar{b}=5\bar{p}+\bar{q}$.

Розв'язання

a) $\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 3 & -2 & 1\\ 4 & 0 & -5\end{vmatrix}=10\bar{i}+19\bar{j}+8\bar{k}$.

Значить,

$\bar{b}\times\bar{a}=-10\bar{i}-19\bar{j}-8\bar{k}$; $\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|=\left|\bar{b}\times\bar{a}\right|=\sqrt{10^2+19^2+8^2}=\sqrt{525}=22{,}9.$

b) $\bar{a}\times\bar{b}=\left(3\bar{p}-2\bar{q}\right)\times\left(5\bar{p}+\bar{q}\right)=15\bar{p}\times\bar{p}-10\bar{q}\times\bar{p}+3\bar{p}\times\bar{q}-2\bar{q}\times\bar{q}=$

$$=15\cdot 0+13\bar{p}\times\bar{q}-20\cdot 0=13\bar{p}\times\bar{q}=13\cdot\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & 1 & 7\\ 0 & -1 & 4\end{vmatrix}=$$

$$=13\left(11\bar{i}-8\bar{j}-2\bar{k}\right)=143\bar{i}-104\bar{j}-26\bar{k}.$$

Значить,

$$\bar{b}\times\bar{a}=-143\bar{i}+104\bar{j}+26\bar{k}.$$

$$\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|=\sqrt{143^2+\left(-104\right)^2+\left(-26\right)^2}=13\sqrt{11^2+\left(-8\right)^2+\left(-2\right)^2}=$$

$$=13\sqrt{121+64+4}=13\sqrt{189}=13\cdot 13{,}7=178{,}7.$$

Приклад 7

Обчислити засобами векторної алгебри синус та косинус кута φ між векторами $\bar{a}=\{2;-2;1\}$ і $\bar{b}=\{2;3;6\}$.

Розв'язання

$$\sin\varphi=\frac{\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|}{\left|\bar{a}\right|\left|\bar{b}\right|};\cos\varphi=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\left|\bar{a}\right|\left|\bar{b}\right|};$$

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & -2 & 1\\ 2 & 3 & 6\end{vmatrix}=-15\bar{i}-10\bar{j}+10\bar{k};$$

$$\left|\bar{a}\times\bar{b}\right| = \sqrt{225+100+100} = \sqrt{425};\ \left|\bar{a}\right| = \sqrt{4+4+1} = 3;\ \left|\bar{b}\right| = \sqrt{4+9+36} = 7;$$

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = 2\cdot 2 + (-2)\cdot 3 + 1\cdot 6 = 4;$$

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{425}}{21};\cos\varphi = \frac{4}{21}.$$

Перевіримо правильність розрахунків, використовуючи основну тригонометричну тотожність.

$$\left(\frac{\sqrt{425}}{21}\right)^2 + \left(\frac{4}{21}\right)^2 = \frac{425+16}{21^2} = \frac{441}{441} = 1.$$

Приклад 8

Дано точки $M_1(2; -1; 1)$, $M_2(5; 5; 4)$, $M_3(3; 2; -1)$ та $M_4(4; 1; 3)$. Перевірити, чи належать ці точки одній площині та у разі заперечної відповіді знайти:

1) площину трикутника $M_1M_2M_3$;

2) довжину висоти $\Delta M_1M_2M_3$, яка опущена з вершини M_1 на сторону M_2M_3;

3) об'єм тетраедра, що побудований на векторах $\overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}$, $\overline{M_1M_4}$, як на сторонах;

4) довжину висоти тетраедра, яка опущена з вершини M_4 на основу $M_1M_2M_3$.

Розв'язання

Якщо точки M_1, M_2, M_3, M_4 належать одній площині, то вектори $\overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_4}, \overline{M_1M_3}$ компланарні, визначник складений з їх координат дорівнює 0.

$$\overline{M_1M_2} = \{3;6;3\};\ \overline{M_1M_3} = \{1;3;-2\};\ \overline{M_1M_4} = \{2;2;2\}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -18 \neq 0$$

Значить, вектори не компланарні.

1) Трикутник $M_1M_2M_3$ побудований на векторах $\overline{M_1M_2}$ та $\overline{M_1M_3}$, як на сторонах (рис. 2.1).

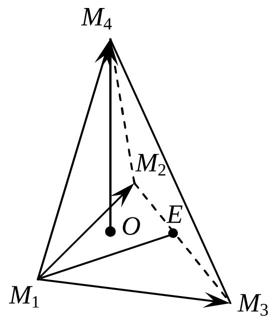


Рисунок 2.1

$$S_{\Delta M_1M_2M_3}=\frac{1}{2}\left|\overline{M_1M_2}\times\overline{M_1M_3}\right|;$$

$$\overline{M_1M_2}=\{3;6;3\};\ \overline{M_1M_3}=\{1;3;-2\};$$

$$\overline{M_1M_2}\times\overline{M_1M_3}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 3 & 6 & 3\\ 1 & 3 & -2\end{vmatrix}=-21\bar{i}+9\bar{j}+3\bar{k};$$

$$\left|\overline{M_1M_2}\times\overline{M_1M_3}\right|=\sqrt{(-21)^2+9^2+3^2}=\sqrt{531}\approx 23;$$

$$S_{\Delta M_1M_2M_3}=11{,}5\ (\text{ед.кв.}).$$

2) Нехай M_1E – висота трикутника, що опущена на сторону M_2M_3.

$$S_{\Delta M_1M_2M_3}=\frac{1}{2}M_1E\cdot M_2M_3.$$

Звідси,

$$M_1E=\frac{2S_{\Delta M_1M_2M_3}}{M_2M_3};\ M_2M_3=\left|\overline{M_2M_3}\right|;\ \overline{M_2M_3}=\{-2;-3;-5\};$$

$$\left|\overline{M_2M_3}\right|=\sqrt{4+9+25}=\sqrt{38}\approx 6{,}2;\ M_2M_3=\frac{23}{6{,}2}=7{,}4.$$

3) Об'єм піраміди визначаємо за допомогою мішаного добутка.

$$\overline{M_1M_4}=\{2;2;2\};$$

$$\left(\overline{M_1M_2}\times\overline{M_1M_3}\right)\cdot\overline{M_1M_4}=\begin{vmatrix}3 & 6 & 3\\ 1 & 3 & -2\\ 2 & 2 & 2\end{vmatrix}=-18;$$

$$V_{пір}=\frac{1}{6}\left|\left(\overline{M_1M_2}\times\overline{M_1M_3}\right)\cdot\overline{M_1M_4}\right|=3.$$

4) Нехай M_4O – висота піраміди

$$V_{пір}=\frac{1}{3}S_{\Delta M_1M_2M_3}\cdot M_4O;\ M_4O=\frac{3V_{пир}}{S_{\Delta M_1M_2M_3}};\ M_4O=\frac{3\cdot 3}{11{,}5}=0{,}8.$$

Задачі для самостійного розв'язання

1. Знайти $\bar{a}\cdot\bar{b}$, якщо:

a) $|\bar{a}|=4;\ |\bar{b}|=3;\ (\bar{a},\bar{b})=\frac{\pi}{4};$ c) $|\bar{a}|=1;\ |\bar{b}|=2;\ (\bar{a},\bar{b})=\frac{\pi}{3};$

b) $|\bar{a}|=8;\ |\bar{b}|=5;\ (\bar{a},\bar{b})=\frac{\pi}{2};$ d) $|\bar{a}|=2;\ |\bar{b}|=3;\ (\bar{a},\bar{b})=\frac{2\pi}{3}$..

2. Знайти $\bar{a}\cdot\bar{b}$, якщо:

a) $\bar{a}=\{1;2;1\}$; $\bar{b}=\{1;4;5\}$; b) $\bar{a}=\{7;3;8\}$; $\bar{b}=\{2;7;5\}$.

3. Знайти $\bar{a}\cdot\bar{b}$, якщо:

a) $|\bar{a}|=8$; $\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b}=9$; b) $|\bar{b}|=7$; $\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}=11$.

4. Перевірити, чи перпендикулярні вектори $\bar{a}$ та $\bar{b}$, якщо:

a) $\bar{a}=\{4;3;2\}$; $\bar{b}=\{1;7;9\}$; b) $\bar{a}=\{2;2;2\}$; $\bar{b}=\{3;-9;6\}$;

c) $\bar{a}=\{5;1;-3\}$; $\bar{b}=\{3;-3;4\}$.

5. При якому значенні α вектори $\bar{a}$ та $\bar{b}$ перпендикулярні, якщо:

a) $\bar{a}=\{2;-5;-5\}$; $\bar{b}=\{2;1;\alpha\}$; b) $\bar{a}=\{5;5;5\}$; $\bar{b}=\{2;\alpha;3\}$;

c) $\bar{a}=\{\alpha;2;2\}$; $\bar{b}=\{7;-2;-5\}$.

6. Знайти внутрішні кути трикутника *ABC*, визначити тип трикутника, якщо:

a) *A*(1;2;1); *B*(3;-1;7); *C*(7;4;-2);

b) *A*(-1;-2;4); *B*(-4;-2;0); *C*(3;-2;1).

7. Знайти роботу, яку виконує сила $\bar{F}$ по переміщеню матеріальної точки вздовж вектора $\bar{S}$, якщо:

a) $\bar{F}=\{1;5;7\}$; $\bar{S}=\{9;11;-1\}$; b) $\bar{F}=\{1;0;9\}$; $\bar{S}=\{5;7;6\}$.

8. Відомі вершини трикутника *A*(2;3;-5); *B*(-1;4;-6); *C*(5;-3;1). Знайти площу трикутника та довжину висоти, що опущена з вершини *B* на сторону *AC*.

9. Знайти площу ΔABC, об'єм піраміди $ABCD$, довжину висоти AE трикутника ABC та довжину висоти DO піраміди $ABCD$, якщо

a) *A*(1;0;-1); *B*(4;1;-4); *C*(-3;1;0); *D*(2;1;0);

b) *A*(0;0;l); *B*(2;1;0); *C*(-3;3;3); *D*(1;4;2);

c) *A*(1;-1;2); *B*(1;2;3); *C*(1;-4;2); *D*(1;5;0);

d) *A*(1;7;0); *B*(-2;2;2); *C*(3;-3;3); *D*(0;0;1).

10. Перевірити, чи компланарні вектора:

a) $\bar{a}=\{2;3;-1\}$; $\bar{b}=\{1;-1;3\}$; $\bar{c}=\{1;9;-11\}$;

b) $\bar{a}=\{3;-2;1\}$; $\bar{b}=\{2;1;2\}$; $\bar{c}=\{3;-1;-2\}$;

c) $\bar{a}=\{4;-5;1\}$; $\bar{b}=\{0;3;7\}$; $\bar{c}=\{8;-7;9\}$.

11. Знайти об’єм паралелепіпеда та об’єм трикутної призми піраміди, які побудовані на векторах $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ зі спільним початком:

a) $\overline{a} = \{1;3;5\}$; $\overline{b} = \{1;3;6\}$; $\overline{c} = \{1;3;7\}$;

b) $\overline{a} = \{2;5;-1\}$; $\overline{b} = \{4;1;2\}$; $\overline{c} = \{-1;0;1\}$;

c) $\overline{a} = \{-1;0;4\}$; $\overline{b} = \{2;1;0\}$; $\overline{c} = \{3;2;5\}$;

d) $\overline{a} = \{4;0;1\}$; $\overline{b} = \{2;-1;4\}$; $\overline{c} = \{3;7;5\}$.

12. Знайти синус та косинус кута, що утворений векторами $\overline{a} = \{2;-2;1\}$; $\overline{b} = \{2;3;6\}$.

13. При якому значені α компланарні вектори:

$$\overline{a} = \{\alpha;5;1\};\ \overline{b} = \{-3;4;0\};\ \overline{c} = \{1;14;\alpha\}\ ?$$

14. Дані вектори $\overline{a} = \{1;2;3\}$; $\overline{b} = \{-1;3;-2\}$; $\overline{c} = \{4;0;5\}$. Знайти: $(\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c}$; $(\overline{b} \times \overline{c}) \cdot \overline{a}$; $(\overline{c} \times \overline{a}) \cdot \overline{b}$. Порівняти результати.

15. Дані вектори $\overline{a} = \{-1;0;2\}$; $\overline{b} = \{3;1;4\}$; $\overline{c} = \{0;2;-2\}$. Знайти: $(\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c}$; $(\overline{b} \times \overline{a}) \cdot \overline{c}$; $\overline{c} \cdot (\overline{b} \times \overline{a})$. Порівняти результати.