Міністерство транспорту та зв'язку України
Державний департамент з питань зв'язку та інформатизації
ОДЕСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ ЗВ'ЯЗКУ ім. О. С. ПОПОВА

Теорія поля.
Теорія функцій комплексної змінної

Навчально-методичний посібник
для студентів II-го курсу технічних спеціальностей

Одеса – 2008

Укладачі: доц. А. Г. Буслаєв, доц. Л. І. Соколов, доц. О. А. Василенко.

Теорія поля. Теорія функцій комплексної змінної: Навчально-методичний посібник для студентів ІІ-го курсу технічних спеціальностей.

У методичному посібнику в стислій формі викладено основні відомості та методичні розробки теоретичних та практичних занять з модуля „Теорія поля. Теорія функцій комплексної змінної”. З кожної теми представлено розв’язки типових завдань і прикладів, задачі для самостійного розв’язування.

Навчально-методичний посібник розглянуто і схвалено методичною радою факультету ТКС.

Протокол № 9 від 22 квітня 2008 р.

Розглянуто і схвалено на засіданні кафедри вищої математики.

Протокол № 8 від 6 березня 2008 р.

ЗМІСТ

Розподіл навчального часу з модуля:
„Теорія поля. Теорія функцій комплексної змінної”

Структура залікового модуля

Змістовні модулі	Лекції (год.)	Заняття		Самостійна та індивідуальна робота
		практичні	лабораторні	
1 Скалярні та векторні поля	18	18	-	40
2 Теорія функцій комплексної змінної	14	14	-	31
Разом	32	32	-	71

Зміст залікового модуля

1 Скалярні та векторні поля.
- 1.1 Скалярне поле. Похідна за напрямом. Градієнт.
- 1.2 Криволінійний інтеграл другого роду. Формула Гріна.
- 1.3 Поверхневий інтеграл другого роду. Формула Остроградського–Гауса. Формула Стокса.
- 1.4 Векторне поле. Векторні лінії. Потік векторного поля. Дивергенція векторного поля. Циркуляція. Ротор поля. Оператор Гамільтона.
- 1.5 Спеціальні векторні поля. Теорема Гельмгольца.

2 Теорія функцій комплексної змінної.
- 2.1 Границя і неперервність функції комплексної змінної (ФКЗ).
- 2.2 Похідна від функції комплексної змінної. Умови Коші – Рімана. Аналітичні функції.
- 2.3 Інтеграл від функції комплексної змінної, його зв'язок з криволінійним інтегралом другого роду. Теорема Коші. Інтегральна формула Коші. Інтеграл типу Коші.
- 2.4 Ряди в комплексній області. Ряд Тейлора.
- 2.5 Ряд Лорана. Класифікація ізольованих особливих точок.
- 2.6 Лишки. Основна теорема про лишки.

Перелік лекційних занять залікового модуля

№ пп.	Номер, теми лекцій	Год.
	1 Скалярні та векторні поля	
1	Л.1 Скалярне поле. Похідна за напрямком. Градієнт функції. Оператор Гамільтона.	2
2	Л.2 Векторне поле. Криволінійний інтеграл другого роду та його обчислення.	2

	СР1 Застосування криволінійного інтеграла другого роду.	
3	Л.3 Формула Гріна та її застосування.	2
4	Л.4 Поверхневий інтеграл другого роду. СР2 Обчислення поверхневого інтеграла другого роду.	2
5	Л.5 Дивергенція векторного поля. Формула Остроградського-Гауса.	2
6	Л.6 Ротор векторного поля. Формула Стокса. СР3 Обчислення циркуляції векторного поля.	2
7	Л.7 Властивості векторних полів.	2
8	Л.8 Робота в потенціальному полі. Теорема Гельмгольца. СР4 Знаходження потенціалу потенціального поля.	2
2 Теорія функцій комплексної змінної		
9	Л.9 Комплексні числа, дії над ними. Формули Ейлера.	2
10	Л.10 Функції комплексної змінної (ФКЗ). Основні означення. СР5 Застосування формул Ейлера.	2
11	Л.11 Похідна від функції комплексної змінної. Умови Коші-Рімана. СР6 Дослідження на аналітичність функції комплексної змінної.	2
12	Л.12 Інтеграл від функції комплексної змінної та його властивості.	2
13	Л.13 Інтегральна теорема Коші для однозв'язної і багатозв'язної областей.	2
14	Л.14 Інтегральна формула Коші. Похідні вищих порядків від аналітичної функції комплексної змінної.	2
15	Л.15 Ряди Тейлора і Лорана.	2
16	Л.16 Класифікація ізольованих особливих точок. Лишки та їх застосування. СР7 Обчислення невласних інтегралів від функції дійсної змінної за допомогою лишків.	2

Перелік практичних занять залікового модуля

№ пп.	Номер, теми занять	Год.
1 Скалярні та векторні поля		
1	Скалярні поля.	2
2	Характеристики скалярних полів. Похідна за напрямом. Градієнт.	2
3	Характеристики векторних полів.	2
4	Обчислення криволінійних інтегралів другого роду.	2
5	Обчислення поверхневих інтегралів другого роду.	2
6	Потік векторного поля.	2
7	Дивергенція.	2
8	Циркуляція. Ротор поля.	2
9	Спеціальні векторні поля.	2

2 Теорія функцій комплексної змінної		
10	Функція комплексної змінної. Основні елементарні функції комплексної змінної.	2
11	Похідна від функції комплексної змінної. Умови Коші-Рімана.	2
12	Інтеграл від функції комплексної змінної. Теорема Коші.	2
13	Інтегральна формула Коші. Інтеграл типу Коші.	2
14	Ряд Тейлора.	2
15	Ряд Лорана.	2
16	Лишки. Застосування лишків до обчислення інтегралів.	2

Перелік знань та вмінь

Студент повинен знати:

1 Поняття скалярного і векторного полів, їх характеристики.

2 Властивості векторних полів (соленоїдальність, потенціальність, безвихорність).

3 Поняття функції комплексної змінної. Поняття границі, похідної, інтеграла від функції комплексної змінної.

4 Означення похідної від функції комплексної змінної та умови диференційованості ФКЗ.

5 Поняття аналітичності функції комплексної змінної. Теорему Коші. Інтегральну формулу Коші.

6 Розклад функцій комплексної змінної в ряди Тейлора і Лорана.

7 Лишки. Основну теорему про лишки.

Студент повинен вміти:

1 Знаходити основні характеристики скалярного поля (поверхні (лінії) рівня, похідну за напрямом, градієнт).

2 Характеристики векторного поля (рівняння векторних ліній, потік, дивергенцію, циркуляцію, ротор, потенціал).

3 Виконувати дії над комплексними числами.

4 Знаходити дійсну та уявну частини функції комплексної змінної.

5 Перевіряти умови Коші-Рімана і знаходити похідну від функції комплексної змінної.

6 Застосовувати інтегральну формулу Коші для обчислення інтегралів і криволінійного інтеграла від аналітичної функції комплексної змінної.

7 Розкладати функції комплексної змінної в ряди Тейлора і Лорана, застосовувати їх на практиці.

8 Знаходити лишки і обчислювати інтеграли за допомогою лишків.

1 ТЕОРІЯ ПОЛЯ

1.1 Скалярне поле

Нехай G – деяка область на площині чи у просторі.

Означення. Якщо з кожною точкою M області G пов'язана скалярна величина u, то говорять, що задано скалярне поле цієї величини.

Приклад. Поле температур, поле тисків.

Скалярне поле задається скалярною функцією $u = f(M)$.

Означення. Множину точок, у яких скалярна функція приймає одне й теж саме значення $f(M) = \tilde{n}, (c = const)$, називають лінією рівня (поверхнею рівня).

$$c = f(M),\ c = f(x, y) \text{ або } c = f(x, y, z).$$

Приклад 1. Знайти лінії рівня функції $u = \dfrac{y}{x^2}$.

Розв'язання.

Так як функція має вигляд $u = \dfrac{y}{x^2}$, тоді лінії рівня: $c = \dfrac{y}{x^2}$, $y = cx^2$.

Отже, лініями рівня в даному випадку є сімейство парабол (рисунок 1.1).

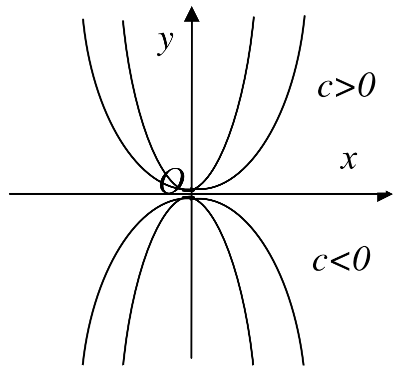


Рисунок 1.1

Приклад 2. Знайти поверхні рівня функції $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Розв'язання.

Так як функція $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, тоді поверхні рівня: $c = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$, тобто поверхнями рівня є сімейство (сукупність) концентричних сфер (рисунок 1.2).

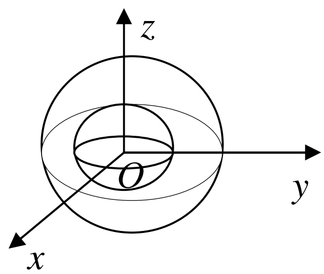


Рисунок 1.2

1.1.1 Похідна за напрямом

Розглянемо функцію скалярного поля $u = f(x, y)$, $M \in G$.

Означення. Похідною функції $u = f(x, y)$ в точці M за напрямом вектора $\bar{l}$ називається границя відношення $\dfrac{\Delta u}{\Delta l}$ при $\Delta l \to 0$ (якщо вона існує), і позначається символом $\dfrac{\partial u}{\partial l}$. Тоді за означенням

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l u}{\Delta l}. \qquad (1)$$

Розглянемо $\dfrac{\partial u}{\partial l} = \lim\limits_{\Delta l \to 0} \dfrac{\Delta_l u}{\Delta l} = \lim\limits_{\Delta l \to 0} \dfrac{f(N) - f(M)}{\Delta l}$, $\overline{MN} \parallel \bar{l}$ (рисунок 1.3).

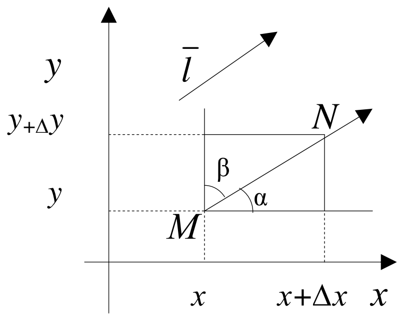


Рисунок 1.3

Нехай $MN = \Delta l$, тоді $\Delta x = \Delta l \cos\alpha$, $\Delta y = \Delta l \cos\beta$.

$$\bar{l}^{\circ} = \frac{\bar{l}}{|\bar{l}|} = \left(\frac{l_x}{\sqrt{l_x^{\,2} + l_y^{\,2}}} \ , \ \frac{l_y}{\sqrt{l_x^{\,2} + l_y^{\,2}}} \right) = (\cos\alpha \ , \cos\beta).$$

Отже, $\cos\alpha = \dfrac{l_x}{\sqrt{l_x^{\,2} + l_y^{\,2}}}$, $\cos\beta = \dfrac{l_y}{\sqrt{l_x^{\,2} + l_y^{\,2}}}$ і

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1.$$

Приріст: $\Delta_l u = f(N) - f(M) = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x,\ y)$. Перепишемо дану рівність як $\Delta_l u = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x,\ y + \Delta y) + f(x,\ y + \Delta y) - f(x,\ y)$, тому $\Delta_l u = \Delta_x u + \Delta_y u$. Підставивши останню рівність у формулу (1), матимемо:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \left(\frac{\Delta_x u}{\Delta l} + \frac{\Delta_y u}{\Delta l} \right) = \lim_{\Delta l \to 0} \left(\frac{\Delta_x u}{\Delta x} \cos\alpha + \frac{\Delta_y u}{\Delta y} \cos\beta \right).$$

Отже, похідна фунції скалярного поля *u=f(x, y)* за напрямом вектора $\bar{l}$ дорівнює:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta.$$

Аналогічно доводиться, що для функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$ похідна за напрямом обчислюється за формулою:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma,$$

де $\bar{l}^{\circ} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, а $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ називаються напрямними косинусами вектора $\bar{l}$.

Зауваження. Поняття похідної за напрямом є узагальненням поняття частинних похідних $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z}$, які можна розглядати як похідні від функції $u = f(x, y, z)$ за напрямом координатних осей Ox, Oy, Oz.

Приклад. Знайти похідну функції $u = x^2 - 4yz$ в точці $M(-2, 1, 0)$ в напрямку від цієї точки до точки $M_1(2, 1, 3)$.

Розв'язання. Знайдемо координати вектора $\overline{MM_1} = \bar{l}$ і його напрямні косинуси: $\overline{MM_1}(4, 0, 3)$, $\cos\alpha = \dfrac{4}{\sqrt{16+9}} = \dfrac{4}{5}$, $\cos\beta = 0$, $\cos\gamma = \dfrac{3}{\sqrt{16+9}} = \dfrac{3}{5}$.

Частинні похідні функції в точці M : $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_M = 2x|_M = -4$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_M = -4z|_M = 0$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_M = -4y|_M = -4$.

Отже, $\dfrac{\partial u}{\partial l} = -4\cdot\dfrac{4}{5} + 0 - 4\cdot\dfrac{3}{5} = -\dfrac{28}{5} = -5\dfrac{3}{5}$.

Так як $\dfrac{\partial u}{\partial l} < 0$, то задана функція у даному напрямку спадає.

Відповідь: $-5\dfrac{3}{5}$.

1.1.2 Градієнт функції

Означення. Градієнтом функції $u = f(x, y, z)$ називається вектор $\operatorname{grad} u = \dfrac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\bar{k}$ або $\operatorname{grad} u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z}\right)$.

Очевидно, що $\dfrac{\partial u}{\partial l} = \operatorname{grad} u \cdot \bar{l}^{\circ}$.

Градієнт функції вказує напрямок, у якому швидкість зміни функції найбільша.

Властивості:

1) $\operatorname{grad}(u + \upsilon) = \operatorname{grad} u + \operatorname{grad} \upsilon$;

2) $\operatorname{grad}(c \cdot u) = c \cdot \operatorname{grad} u$;

3) $\operatorname{grad}(u \cdot \upsilon) = \upsilon \cdot \operatorname{grad} u + u \cdot \operatorname{grad} \upsilon$.

1.2 Оператор Гамільтона

Основними диференціальними операціями над скалярним полем u і векторним полем $\overline{F}$ є: $\operatorname{grad} u$, $\operatorname{div}\vec{F}$, $\operatorname{rot}\overline{F}$ ($\operatorname{div}\vec{F}$, $\operatorname{rot}\overline{F}$ розглянемо дещо пізніше). Операції знаходження градієнта, дивергенції та ротора називають векторними операціями першого порядку (в них задіяні похідні перших порядків). Ці операції зручно записувати з допомогою оператора Гамільтона (символічного вектора «набла»):

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right).$$

Він набуває певного змісту лише в комбінації з скалярними або векторними функціями. Символічне множення вектора $\vec{\nabla}$ на скаляр u або вектор $\overline{F}$ виконується за правилами векторної алгебри, а „множення" символів $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ на величини u, P, Q, R розуміють як знаходження відповідної частинної похідної від цих величин.

Наприклад, $\mathrm{grad}\, u = \vec{\nabla} \cdot u$, де $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}$.

1.3 Векторне поле

Означення. Якщо з кожною точкою M області G пов'язана деяка векторна величина $\overline{F}$, то говорять, що задано векторне поле цієї величини.

Приклад. Поле швидкостей, поле електричної напруженості.

Якщо в просторі введена декартова система координат, то векторне поле задається векторною функцією

$$\overline{F}(M) = P(M)\bar{i} + Q(M)\bar{j} + R(M)\bar{k},$$

де $P(M) = P(x,y,z),\ Q(M) = Q(x,y,z),\ R(M) = R(x,y,z)$ – скалярні функції.

$\overline{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\bar{i} + Q(x,y,z)\bar{j} + R(x,y,z)\bar{k}$ – просторове векторне поле.

На площині векторне поле задається як $\overline{F}(x,y) = P(x,y)\bar{i} + Q(x,y)\bar{j}$ (плоске векторне поле).

Означення. Векторною лінією поля $\overline{F}(M)$ називається крива, у кожній точці якої її дотична збігається з напрямком вектора $\overline{F}(M)$.

Приклад. У полі швидкостей рідини, що розтікається, векторними лініями будуть лінії, по яких рухаються частинки рідини (лінії струму); для магнітного поля Землі векторними (силовими) лініями будуть лінії, які виходять із північного полюса та закінчуються у південному.

Сукупність усіх векторних ліній поля, які проходять через деяку замкнену криву, називається векторною трубкою.

Нехай векторне поле задається вектором $\overline{F} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$, де $P = P(x,y,z),\ Q = Q(x,y,z),\ R = R(x,y,z)$ – неперервні функції змінних x, y, z, які мають неперервні частинні похідні першого порядку.

Векторні лінії поля $\overline{F}(x,y,z)$ знаходяться з системи диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}$$ – для просторового векторного поля,

$$\frac{dx}{P(x,y)} = \frac{dy}{Q(x,y)}$$ – для плоского поля, рівняння якого можна ще записати так:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)} \to y' = f(x,y).$$

Ці рівняння рівняння виведені з умови колінеарності векторів $\overline{F}(P,Q,R)$ і $\overline{dr}(dx,dy,dz)$ (рисунок 1.4).

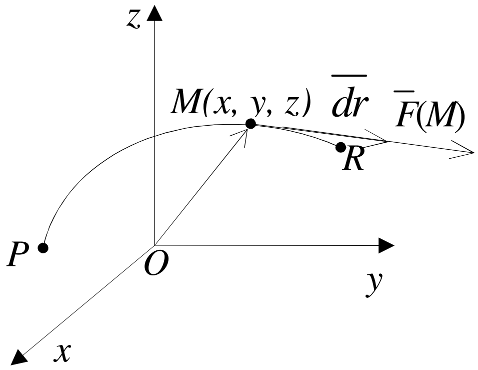


Рисунок 1.4

1.3.1 Інтеграл по області (другого роду)

У векторному полі будемо розглядати лише дві області: лінії і поверхні.

Означення. Лінія називається орієнтованою, якщо у кожній її точці задано напрям, що співпадає з напрямом дотичної до неї (рисунок 1.5).

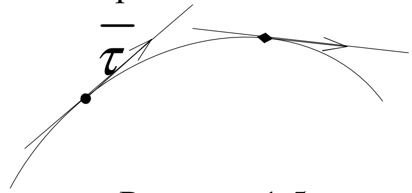


Рисунок 1.5

Означення. Поверхня вважається орієнтованою, якщо у кожній її точці задано напрям, що співпадає з напрямом нормалі до неї у цій точці (рисунок 1.6).

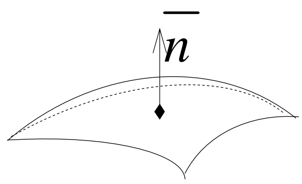


Рисунок 1.6

Орієнтовану область будемо позначати через G, а одиничний вектор, який задає напрям у довільній точці M будемо називати орієнтуючим вектором і позначати через $\bar{l}(M)$.

Нехай задано орієнтовану область G, орієнтуючий вектор $\bar{l}(M)$, і нехай у кожній точці цієї області визначена вектор-функція $\overline{F}(M)$. Розіб'ємо довільним чином область G на n частин: $G_1,..., G_n$ ($G_1 \cup G_2 \cup ... \cup G_n = G$). Міри областей G_i позначимо через $\Delta\mu_i$ і через $\lambda = \max_i |\Delta\mu_i|$. Довільно, у кожній області G_i виберемо по точці M_i і обчислимо значення вектор-функції $\overline{F}(M_i)$. Проведемо в точці M_i вектор $\overline{\Delta\mu_i}$, напрям якого співпадає з напрямом орієнтуючого вектора в точці M_i, а довжина дорівнює мірі області G_i, тобто $\overline{\Delta\mu_i} = \Delta\mu_i \cdot \bar{l}(M_i)$. Обчислимо скалярний добуток: $\overline{F}(M_i) \cdot \overline{\Delta\mu_i}$.

Розглянемо суму $\sum_{i=1}^{n} \overline{F}(M_i) \cdot \overline{\Delta\mu_i} = \sum_{i=1}^{n} \left(\overline{F}(M_i) \cdot \bar{l}(M_i)\right) \Delta\mu_i$. Ця сума називається інтегральною сумою для вектор-функції $\overline{F}(M_i)$ по орієнтованій області G.

Означення. Якщо при $\lambda = \max_i |\Delta\mu_i| \to 0$ інтегральна сума $\sum_{i=1}^{n} \overline{F}(M_i) \cdot \overline{\Delta\mu_i} = \sum_{i=1}^{n} \left(\overline{F}(M_i) \cdot \bar{l}(M_i)\right) \Delta\mu_i$ має границю, що не залежить ні від способу розбиття області G на частини, ні від вибору проміжних точок M_i, то вона називається інтегралом від вектор-функції $\overline{F}(M_i)$ по орієнтованій області G (інтегралом другого роду) і позначається

$$\int_G \overline{F}(M) \cdot \overline{d\mu} = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \overline{F}(M_i) \cdot \overline{\Delta\mu_i}.$$

1.3.2 Криволінійний інтеграл другого роду

Означення. Якщо область G це крива L, а її орієнтуючий вектор у довільній точці M – $\bar{l}(M)$, то інтеграл виду

$$\int_L \overline{F} \cdot \overline{dl} = \int_L P(x,\, y,\, z)dx + Q(x,\, y,\, z)dy + R(x,\, y,\, z)dz$$

називається криволінійним інтегралом ІІ-го роду по просторовій кривій L.

Задача (про обчислення роботи векторного поля).

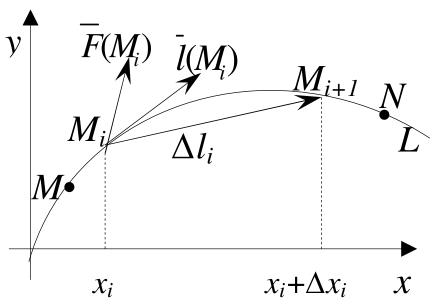


Рисунок 1.7

Нехай змінна сила $\overline{F}(M) = P(M)\bar{i} + Q(M)\bar{j}$ рухає матеріальну точку вздовж кривої L із точки M в точку N (рисунок 1.7). Необхідно обчислити роботу цієї сили на даному шляху. Для цього розіб'ємо криву L на n частин точками $M = M_0, M_1, M_2, ...,$ $M_n = N$, тоді $A_n = \sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}(M_i) \cdot \Delta\bar{l}_i$, де $\Delta\bar{l}_i = \Delta x_i \bar{i} + \Delta y_i \bar{j}$.

Робота дорівнює границі послідовності інтегральних сум при $\lambda = \max_i |\Delta l_i| \to 0$ і позначається через $A = \int_L \overline{F} \cdot \overline{dl}$, $d\bar{l} = dx\bar{i} + dy\bar{j}$, а це за означенням і є криволінійний інтеграл ІІ-го роду.

Так як $A_n = \sum_{i=1}^{n} P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i$, то $A = \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ – робота векторного поля $\overline{F}(M) = P(M)\bar{i} + Q(M)\bar{j}$ по дузі $\breve{MN}$.

Якщо поле просторове $\overline{F}(M) = P(M)\bar{i} + Q(M)\bar{j} + R(M)\bar{k}$, тоді роботу можна обчислити за формулою:

$$A = \int_L P(M)dx + Q(M)dy + R(M)dz\,.$$

Зауваження 1. Якщо крива L замкнена, то вона називається замкненим контуром. Інтеграл при цьому називають циркуляцією вектора $\overline{F}$ по замкненому контуру L і позначають $Ö = \oint_L \overline{F}(M)\cdot d\bar{l}$.

Зауваження 2. Криволінійний інтеграл другого роду залежить від напрямку обходу кривої, отже, $\int_{\breve{AB}} \overline{F}\cdot d\bar{l} = -\int_{\breve{BA}} \overline{F}\cdot d\bar{l}$.

Для замкненого контура L додатнім напрямом обходу вважається обхід контура проти годинникової стрілки.

1.3.3 Обчислення криволінійного інтеграла другого роду

Нехай крива L задана у просторі параметрично: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t_1 \le t \le t_2$, тоді

$$\int_{\breve{AB}} \overline{F}\cdot d\bar{l} = \int_{\breve{AB}} P(M)dx + Q(M)dy + R(M)dz =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} P\left[x(t), y(t), z(t)\right]x'(t)dt + Q\left[x(t), y(t), z(t)\right]y'(t)dt +$$

$$+R\left[x(t), y(t), z(t)\right]z'(t)dt\,.$$

Приклад. Обчислити $\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, де L – трикутник ABC з вершинами $A(1, 0)$, $B(1, 1)$, $C(0, 1)$.

Розв'язання.

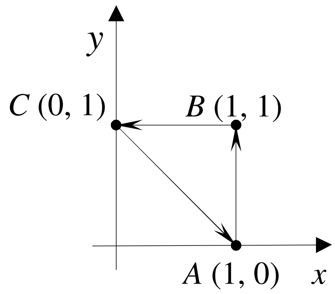
$$\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \int_{\breve{AB}} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} + \int_{\breve{BC}} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} + \int_{\breve{CA}} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}\,.$$

Запишемо рівняння прямих *AB, BC, CA* (рисунок 1.8) у параметричній формі:

$$AB\colon \begin{cases} x = 1, \\ y = t; \end{cases} \quad 0 \le t \le 1;$$

$$BC\colon \begin{cases} x = -t, \\ y = 1; \end{cases} \quad -1 \le t \le 0;$$

$$CA\colon \begin{cases} x = t, \\ y = 1 - t; \end{cases} \quad 0 \le t \le 1\,.$$



Тоді $\int\limits_{AB} \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = \left[\begin{matrix} AB: \begin{cases} x = 1, \\ y = t, \end{cases} \\ 0 \le t \le 1 \end{matrix} \right] = \int\limits_0^1 \frac{t \cdot 0 \cdot \mathrm{d\,t} - 1 \cdot \mathrm{d\,t}}{1 + t^2} =$

$$= -\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d\,t}}{1+t^2} = -\mathrm{arctg}\, t\Big|_0^1 = -\frac{\pi}{4};$$

Рисунок 1.8

$$\int\limits_{BC} \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = \left[\begin{matrix} BC: \begin{cases} x = -t, \\ y = 1, \end{cases} \\ -1 \le t \le 0 \end{matrix} \right] = \int\limits_{-1}^0 \frac{1 \cdot (-\mathrm{d\,t}) + t \cdot 0 \cdot \mathrm{d\,t}}{t^2 + 1} = -\int\limits_{-1}^0 \frac{\mathrm{d\,t}}{t^2 + 1} = -\mathrm{arctg}\, t\Big|_0^1 = -\frac{\pi}{4};$$

$$\int\limits_{CA} \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = \left[\begin{matrix} CA: \begin{cases} x = t, \\ y = 1 - t, \end{cases} \\ 0 \le t \le 1 \end{matrix} \right] = \int\limits_0^1 \frac{(1-t) \cdot \mathrm{d\,t} - t \cdot (-\mathrm{d\,t})}{t^2 + 1 - 2t + t^2} = \int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d\,t}}{2t^2 - 2t + 1} = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d\,t}}{t^2 - t + \frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d\,t}}{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} = \mathrm{arctg}\, 2\left(t - \frac{1}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Отже, $\oint\limits_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = 0$.

Відповідь: 0.

1.3.4 Обчислення площ плоских фігур за допомогою криволінійного інтеграла другого роду

Нехай задано правильну область D, таку, що $D: \begin{cases} a \le x \le b, \\ y_1(x) \le y \le y_2(x). \end{cases}$

(рисунок 1.9*а*) або $D: \begin{cases} c \le y \le d, \\ x_1(y) \le x \le x_2(y). \end{cases}$ (рисунок 1.9*б*).

Рисунок 1.9

Тоді

$$S_D=\int_a^b\left(y_2(x)-y_1(x)\right)dx=\int_a^b y_2(x)dx-\int_a^b y_1(x)dx=\int_{AB_2C} ydx-\int_{AB_1C} ydx=$$

$$=-\int_{AB_1C} ydx-\int_{CB_2A} ydx=-\oint_L ydx\,.$$

Отже,

$$S_D=-\oint_L ydx\,. \tag{2}$$

Аналогічно (рисунок 1.9*б*),

$$S_D=\int_c^d\left(x_2(y)-x_1(y)\right)dy=\int_c^d x_2(y)dy-\int_c^d x_1(y)dy=\int_{B_1CB_2} xdy+\int_{B_2AB_1} xdy=\oint_L xdy\;=\oint_L xdy\,.$$

$$S_D=\oint_L xdy\,. \tag{3}$$

Додавши (2) і (3), матимемо: $S_D=\dfrac{1}{2}\oint_L xdy-ydx\,.$ (4)

Приклад. Обчислити площу еліпса: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,.$

Розв'язування.

Запишемо рівняння еліпса в параметричній формі:

$$\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t,\end{cases}\quad 0\le t\le 2\pi.$$

Використовуючи формулу (4), обчислимо площу еліпса:

$$S=\frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a\cos t\; b\cos t\,dt+b\sin t\,a\sin t\,dt=\frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}dt=\pi ab\,.$$

Відповідь: πab.

1.3.5 Зв'язок криволінійного інтеграла другого роду з подвійним інтегралом (формула Гріна)

Якщо $\overline{F}$ плоске векторне поле й функції $P(x,y),\,Q(x,y),\,P_y^{'}(x,y),$ $Q_x^{'}(x,y)$ – неперервні в області D та на її границі L, то має місце формула Гріна:

$$\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy\,,$$

де обхід контура L виконується у додатньому напрямку.

Доведення.

$$\iint_D\frac{\partial P}{\partial y}dxdy=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\frac{\partial P}{\partial y}dy=\int_a^b P(x,y)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)}dx=\int_a^b P\left(x,y_2(x)\right)dx-\int_a^b P\left(x,y_1(x)\right)dx=$$

$$= \int\limits_{AB_2C} P(x,y)dx - \int\limits_{AB_1C} P(x,y)dx = -\int\limits_{CB_2A} P(x,y)dx - \int\limits_{AB_1C} P(x,y)dx = -\oint\limits_{L} P(x,y)dx . \quad (5)$$

Аналогічно, змінюючи порядок інтегрування, отримаємо:

$$\iint\limits_{D} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = \int\limits_{c}^{d} Q(x,y)\Big|_{x_1(y)}^{x_2(y)} dy = \int\limits_{c}^{d} Q\big(x_2(y),y\big)dy - \int\limits_{c}^{d} Q\big(x_1(y),y\big)dy =$$

$$= \int\limits_{B_1CB_2} Q(x,y)dy - \int\limits_{B_1AB_2} Q(x,y)dy = \int\limits_{B_1CB_2} Q(x,y)dy + \int\limits_{B_2AB_1} Q(x,y)dy = \oint\limits_{L} Q(x,y)dy . \quad (6)$$

Додавши (5) і (6), одержимо формулу Гріна.

1.3.6 Поверхневий інтеграл другого роду. Потік векторного поля

Розглянемо інтеграл по орієнтованій області $\int\limits_{G} \overline{F} \cdot \overline{d\mu}$ у випадку, коли область G – гладка двостороння поверхня σ (рисунок 1.10).

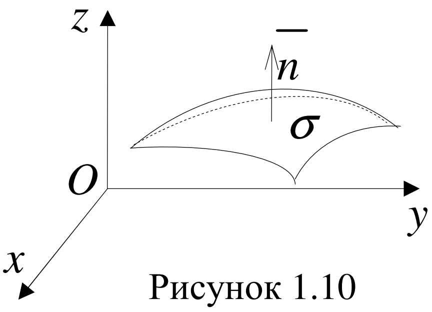


Рисунок 1.10

Означення. Поверхня σ називається гладкою, якщо в кожній її точці можна провести дотичну площину.

Означення. Поверхня σ називається двосторонньою, якщо нормаль до поверхні при обході по довільному замкненому контуру повертається у вихідне положення.

Передбачається, що у кожній точці поверхні σ задано векторне поле $\overline{F}(M)$.

Нехай область інтегрування вектор-функції $\overline{F}(M)$ є двосторонньою поверхнею σ, орієнтуючий вектор якої – це одиничний вектор $\overline{n}(M)$ до поверхні σ у точці *M*, напрям якого визначає одну із сторін поверхні.

Означення. Інтеграл по такій орієнтованій поверхні називається поверхневим інтегралом другого роду і позначається

$$\int\limits_{\sigma} \overline{F}(M) \cdot \overline{d\sigma},$$

де $\overline{d\sigma} = \overline{n}(M)d\sigma$ – вектор, довжина якого дорівнює площі $d\sigma$ елемента поверхні σ, а напрям співпадає з напрямом нормалі до цієї поверхні в точці *M*.

Отже,

$$\int\limits_{\sigma} \overline{F}(M) \cdot \overline{d\sigma} = \int\limits_{\sigma} \overline{F}(M) \cdot \overline{n}(M) d\sigma .$$

Означення. Потоком вектора швидкості через поверхню σ називається кількість рідини, що проходить через цю поверхню за одиницю часу.

Задача (про потік вектора через поверхню).

Розглянемо поле швидкостей $\overline{v}(M)$ рідини в просторі (рідина не стискається).

Обчислимо потік вектора $\overline{\upsilon}(M)$. Для цього розіб'ємо поверхню σ на n елементарних ділянок σ_i, площі яких позначимо через $\Delta\sigma_i$. На кожній виберемо довільну точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$. Вектор $\overline{n}_i$ – одиничний вектор нормалі до ділянки σ_i.

Кількість рідини, що пройшла через σ_i за одиницю часу приблизно дорівнює об'єму циліндра (циліндричного стовпчика), висота якого дорівнює

$$h_i = np_{\overline{n}_i}\overline{\upsilon}_i = \left|\overline{\upsilon}_i\right|\cos(\widehat{\overline{n}_i, \overline{\upsilon}_i}) = \overline{\upsilon}_i\overline{n}_i .$$

Потік вектора $\overline{\upsilon}_i$ через σ_i дорівнює: $\Pi_i \approx h_i\,\Delta\sigma_i = \overline{\upsilon}_i\,\overline{n}_i\,\Delta\sigma_i = \overline{\upsilon}_i\,\overline{\Delta\sigma_i}$.

Вектор $\overline{\Delta\sigma_i}$ направлений за нормаллю, довжина його дорівнює площі ділянки поверхні.

Тому потік вектора $\overline{\upsilon}$ через поверхню σ приблизно дорівнює:

$$\Pi = \sum_{i=1}^{n}\Pi_i \approx \sum_{i=1}^{n}\overline{\upsilon}_i\,\overline{\Delta\sigma_i} = \sum_{i=1}^{n}\overline{\upsilon}_i\overline{n}_i\Delta\sigma_i .$$

Означення. Границя цієї суми при $n\to\infty$, при умові, що $\lambda\to 0$ (λ – максимальний діаметр ділянок) називається потоком векторного поля $\overline{\upsilon}(M)$ через поверхню σ і позначається:

$$\Pi = \iint_{\sigma}\overline{\upsilon}(M)\cdot\overline{n}d\sigma = \iint_{\sigma}\overline{\upsilon}(M)\cdot\overline{d\sigma}.$$

Інтеграл справа за означенням є поверхневим інтегралом другого роду.

Таким чином, фізичний зміст поверхневого інтеграла по поверхні σ – це потік векторного поля $\overline{F}(M)$ через дану поверхню.

Поверхневий інтеграл має наступну властивість:

$$\Pi = \iint_{\sigma^+}\overline{F}(M)\cdot\overline{n}(M)d\sigma = -\iint_{\sigma^-}\overline{F}(M)\cdot\overline{n}(M)d\sigma ,$$

де σ^+, σ^- – різні сторони поверхні σ.

Зведемо обчислення поверхневого інтеграла другого роду до обчислення звичайного інтеграла. Для цього виразимо одиничний вектор нормалі до поверхні $\overline{n}$ через його напрямні косинуси:

$$\overline{n} = \cos(\widehat{\overline{n},\overline{i}})\overline{i} + \cos(\widehat{\overline{n},\overline{j}})\overline{j} + \cos(\widehat{\overline{n},\overline{k}})\overline{k} .$$

Позначимо $\alpha = (\widehat{\overline{n},\overline{i}}), \beta = (\widehat{\overline{n},\overline{j}}), \gamma = (\widehat{\overline{n},\overline{k}})$, тоді одиничний вектор можна записати так:

$$\overline{n} = \cos\alpha\overline{i} + \cos\beta\overline{j} + \cos\gamma\overline{k} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\} .$$

Якщо рівняння поверхні σ задано формулою $z = g(x, y)$, то $u = g(x, y) - z = 0$ є її поверхнею рівня при $c = 0$. Вектор $\operatorname{grad} u$ буде перпендикулярним до цієї поверхні. Так як $\operatorname{grad} u = \left\{g'_x, g'_y, -1\right\}$, то

$\overline{N} = \{g'_x, g'_y, -1\}$, $\quad \overline{n} = \dfrac{\overline{N}}{\left|\overline{N}\right|}$, $\quad \left|\overline{N}\right| = \sqrt{1 + g'^2_x + g'^2_y}$, $\quad \overline{n} = \left\{ \dfrac{g'_x}{\left|\overline{N}\right|}, \dfrac{g'_y}{\left|\overline{N}\right|}, \dfrac{-1}{\left|\overline{N}\right|} \right\}$ або

$\overline{n} = \left\{ \dfrac{-g'_x}{\left|\overline{N}\right|}, \dfrac{-g'_y}{\left|\overline{N}\right|}, \dfrac{1}{\left|\overline{N}\right|} \right\}$.

Додатнім напрямом вектора $\overline{n}$ вважається напрям, при якому кут між векторами $\overline{n}, \overline{k}$ – гострий, тобто $\cos\gamma > 0$.

Позначимо через $D_{x,y}$ проекцію σ на xOy, аналогічно $D_{x,z}$, $D_{y,z}$ – проекції σ на xOz і yOz, а їх міри відповідно: $\Delta S_{x,y}$, $\Delta S_{x,z}$, $\Delta S_{y,z}$.

Тоді,

$$\Delta S_{x,y} = \Delta\sigma \left|\cos\gamma\right| = \Delta\sigma \left|\cos(\overline{n}, z)\right|,$$

$$\Delta S_{x,z} = \Delta\sigma \left|\cos\beta\right| = \Delta\sigma \left|\cos(\overline{n}, y)\right|,$$

$$\Delta S_{y,z} = \Delta\sigma \left|\cos\alpha\right| = \Delta\sigma \left|\cos(\overline{n}, x)\right|.$$

Так як, $\Delta S_{x,y} \Rightarrow dx\,dy$, при $\Delta\sigma \to d\sigma$, то

$$d\sigma = \frac{dx\,dy}{\left|\cos\gamma\right|},$$

аналогічно

$$d\sigma = \frac{dx\,dz}{\left|\cos\beta\right|} \text{ і } d\sigma = \frac{dy\,dz}{\left|\cos\alpha\right|}.$$

Звідси, $\Pi = \iint\limits_{\sigma} \overline{F} \cdot \overline{n}\, d\sigma = \iint\limits_{\sigma} \left[P(M)dydz + Q(M)dxdz + R(M)dxdy \right] =$

$= \iint\limits_{D_{yz}} P\big(x(y,z), y, z\big) \operatorname{sign}(\cos\alpha)\, dydz + \iint\limits_{D_{xz}} Q\big(x, y(x,z), z\big) \operatorname{sign}(\cos\beta)\, dxdz +$

$+ \iint\limits_{D_{xy}} R\big(x, y, z(x,y)\big) \operatorname{sign}(\cos\gamma)\, dxdy$.

Означення. Під потоком вектора через замкнену поверхню розуміють різницю вихідного й вхідного потоків (наприклад, рідини).

Тобто, $\Pi = \Pi_{\text{âèõ}} - \Pi_{\text{âõ}}$, $\Pi = \oiint\limits_{\sigma} \overline{F}(M) \cdot \overline{n}(M)\, d\sigma$.

Якщо $\Pi = 0$ через замкнену поверхню, то говорять, що всередині поверхні, обмеженої σ, немає джерел.

Якщо $\Pi > 0$ через замкнену поверхню, то говорять, що всередині існують позитивні джерела векторного поля.

Якщо $\Pi < 0$, то всередині існують стоки, тобто негативні джерела.

Методи обчислення потоку векторного поля

1 Метод проектування на одну із координатних площин. Нехай незамкнена поверхня σ проектується взаємно однозначно на площину xOy в область D_{xy}. У такому випадку поверхню σ можна задати рівнянням $z = g(x, y)$, і так як елемент площі $d\sigma$ цієї поверхні дорівнює

$$d\sigma = \frac{dx\,dy}{|\cos\gamma|},$$

то обчислення потоку векторного поля $\overline{F}$ зводиться до обчислення подвійного інтеграла за формулою

$$\Pi = \iint_{\sigma} \overline{F}\cdot\overline{n}\,d\sigma = \iint_{D_{xy}} \left.\frac{\overline{F}\cdot\overline{n}}{|\cos\gamma|}\right|_{z=g(x,y)} dxdy\,. \qquad (7)$$

Орт нормалі $\overline{n}$ до вибраної сторони поверхні σ знаходимо за формулою

$$\overline{n} = \pm\frac{-g'_x\overline{i} - g'_y\overline{j} + \overline{k}}{\sqrt{g'^2_x + g'^2_y + 1}}, \qquad (8)$$

а $\cos\gamma$ дорівнює коефіцієнту при орті $\overline{k}$ в формулі (8):

$$\cos\gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{g'^2_x + g'^2_y + 1}}. \qquad (9)$$

Якщо кут γ між віссю Oz і нормаллю $\overline{n}$ гострий, то у формулах (8) і (9) необхідно брати знак „+”, якщо ж кут тупий – то „–”.

Якщо поверхню σ зручніше спроектувати на координатні площини yOz або xOz, то формули (7), (8), (9) у такому випадку, матимуть вигляд:

$$\Pi = \iint_{\sigma} \overline{F}\cdot\overline{n}\,d\sigma = \iint_{D_{yz}} \left.\frac{\overline{F}\cdot\overline{n}}{|\cos\alpha|}\right|_{x=\varphi(y,z)} dydz$$

або

$$\Pi = \iint_{\sigma} \overline{F}\cdot\overline{n}\,d\sigma = \iint_{D_{xz}} \left.\frac{\overline{F}\cdot\overline{n}}{|\cos\beta|}\right|_{y=\psi(x,z)} dxdz\,,$$

де вектори нормалі відповідно:

$$\overline{n} = \pm\frac{\overline{i} - \varphi'_y\overline{j} - \varphi'_z\overline{k}}{\sqrt{1 + \varphi'^2_y + \varphi'^2_z}}$$

або

$$\overline{n} = \pm\frac{-\psi'_x\overline{i} + \overline{j} - \psi'_z\overline{k}}{\sqrt{\psi'^2_x + 1 + \psi'^2_z}},$$

та напрямні косинуси:

$$\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\varphi_y'^2+\varphi_z'^2}},$$

$$\cos\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{\psi_x'^2+1+\psi_z'^2}}.$$

Зауваження. У випадку, коли поверхня σ задана неявно рівнянням $\Phi(x, y, z) = 0$, одиничний вектор нормалі знаходиться за формулою:

$$\overline{n} = \pm\frac{\Phi_x'\overline{i}+\Phi_y'\overline{j}+\Phi_z'\overline{k}}{\sqrt{\Phi_x'^2+\Phi_y'^2+\Phi_z'^2}}.$$

Приклад 1. Знайти потік векторного поля $\overline{F} = (x-3z)\overline{i} + (x+3y+z)\overline{j} + (5x+y)\overline{k}$ через верхню сторону трикутника ABC з вершинами у точках $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 2)$.

Розв'язання. Рівняння площини трикутника ABC має вигляд: $2x+2y+z=2$, звідси $z=2-2x-2y$. Трикутник ABC проектується взаємно однозначно на площину xOy в область D_{xy}, якою є трикутник OAB (рисунок 1.11).

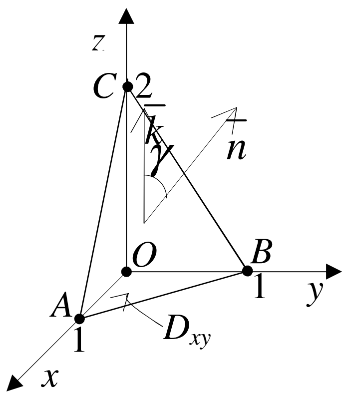


Рисунок 1.11

Кут γ гострий, тому в формулах (8) і (9) будемо брати знак „+”, отримаємо:

$$\overline{n} = \frac{2\overline{i}+2\overline{j}+\overline{k}}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{2}{3}\overline{i}+\frac{2}{3}\overline{j}+\frac{1}{3}\overline{k} \text{ та } \cos\gamma = \frac{1}{3}.$$

Знайдемо скалярний добуток

$$\overline{F}\cdot\overline{n} = (x-3z)\frac{2}{3}+(x+3y+z)\frac{2}{3}+(5x+y)\frac{1}{3} = \frac{9x+7y-4z}{3}.$$

Підставимо отримані результати у формулу (7) й обчислимо потік:

$$\Pi = \iint\limits_{D_{xy}} \left.\frac{\overline{F}\cdot\overline{n}}{|\cos\gamma|}\right|_{z=g(x,y)} dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} (9x+7y-4z)\big|_{z=2-2x-2y}\, dxdy = \int_0^1 dx\int_0^{1-x}(17x+15y-8)\,dy =$$

$$= \int_0^1\left(17x(1-x)+\frac{15}{2}(1-x)^2-8(1-x)\right)dx = -\frac{19}{6}+5-\frac{1}{2} = 1\frac{1}{3}.$$

Відповідь: $1\frac{1}{3}$.

2 Метод проектування на три координатні площини. Нехай поверхня σ взаємно однозначно проектується на три координатні площини. Позначимо через D_{xy}, D_{xz}, D_{yz} проекції σ відповідно на площини xOy, xOz, yOz.

Нехай рівняння $\Phi(x,y,z)=0$ поверхні σ розв'язується відносно кожної змінної $x=x(y,z),\ y=y(x,z),\ z=z(x,y)$. Тоді потік векторного поля $\overline{F}$ обчислюється за формулою

$$\Pi=\pm\iint\limits_{D_{yz}}P\big(x(y,z),y,z\big)dydz\pm\iint\limits_{D_{xz}}Q\big(x,y\big(x,z\big),z\big)dxdz\pm\iint\limits_{D_{xy}}R\big(x,y,z\big(x,y\big)\big)dxdy\,. \quad (10)$$

Знак перед кожним інтегралом залежить від знака відповідного напрямного косинуса вектора нормалі (значення косинуса гострого кута додатнє, значення тупого – від'ємне).

Приклад 2. Знайти потік векторного поля $\overline{F}=\{xy,\ yz,\ xz\}$ через частину зовнішньої сторони сфери $x^2+y^2+z^2=1$, розміщеної в першому октанті.

Розв'язання. Так як частина поверхні знаходиться у першому октанті (кути між вектором нормалі і координатними осями гострі), то у формулі (10) перед кожним інтегралом слід брати знак „+". Враховуючи, що $P=xy,\ Q=yz,\ R=xz$, і з рівнянь сфери

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2}\,,\ y=\sqrt{1-x^2-z^2}\,,\ x=\sqrt{1-z^2-y^2}\,,$$

отримаємо

$$\Pi=\iint\limits_{D_{yz}}xy\,dydz+\iint\limits_{D_{xz}}yz\,dxdz+\iint\limits_{D_{xy}}xz\,dxdy=$$

$$=\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{1-z^2-y^2}\,y\,dydz+\iint\limits_{D_{xz}}\sqrt{1-z^2-x^2}\,z\,dxdz+\iint\limits_{D_{xy}}x\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy\,.$$

Перейдемо до полярних координат і обчислимо третій інтеграл, що знаходиться у правій частині останньої рівності (перший і другий обчислюються аналогічно).

$$\iint\limits_{D_{xy}}x\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy=\left[\begin{cases}x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi,\end{cases}\text{ää}\begin{matrix}0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}, \\ 0\le\rho\le1.\end{matrix}\right]=\iint\limits_{D_{xy}}\rho^2\sqrt{1-\rho^2}\cos\varphi d\varphi d\rho=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi d\varphi\int\limits_0^1\rho^2\sqrt{1-\rho^2}d\rho=\int\limits_0^1\rho^2\sqrt{1-\rho^2}d\rho=\begin{bmatrix}\rho=\sin t, \\ d\rho=\cos tdt\end{bmatrix}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2t\cos^2tdt=$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2tdt=\frac{1}{8}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos4t)dt=\frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{16}.$$

Шуканий потік дорівнює $\Pi=\dfrac{\pi}{16}+\dfrac{\pi}{16}+\dfrac{\pi}{16}=\dfrac{3\pi}{16}$.

Відповідь: $\dfrac{3\pi}{16}$.

1.3.7 Дивергенція векторного поля

Означення. Дивергенція векторного поля $\overline{F}$ в точці M позначається символом $\operatorname{div}\overline{F}(M)$ й означається як:

$$\operatorname{div}\overline{F}(M) = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\(V\to M)}} \frac{\oiint\limits_{\sigma} \overline{F}(M)\overline{n}d\sigma}{V},$$

тобто, дивергенцією векторного поля називається границя відношення потоку векторного поля через замкнену поверхню σ до об'єму V, обмеженого цією поверхнею, за умови, що область стягується до точки M (λ – її діаметр).

Дивергенція характеризує густину потужності джерел векторного поля. Ця скалярна величина обчислюється за формулою

$$\operatorname{div}\overline{F}(M) = \overline{\nabla}\cdot\overline{F},$$

або

$$\operatorname{div}\overline{F}(M) = \frac{\partial P(M)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M)}{\partial y} + \frac{\partial R(M)}{\partial z}.$$

Властивості:

1) $\operatorname{div}\overline{c} = 0$, $\overline{c}$ – постійний вектор;

2) $\operatorname{div}(\alpha\overline{F}_1 + \beta\overline{F}_2) = \alpha\operatorname{div}\overline{F}_1 + \beta\operatorname{div}\overline{F}_2$, $\alpha, \beta - const$;

3) $\operatorname{div}\left(\varphi(M)\cdot\overline{F}(M)\right) = \operatorname{grad}\varphi\cdot\overline{F} + \varphi\cdot\operatorname{div}\overline{F}$, так як

$$(\varphi\cdot P)'_x + (\varphi\cdot Q)'_y + (\varphi\cdot R)'_z = \varphi'_x\cdot P + \varphi\cdot P'_x + \varphi'_y\cdot Q + \varphi\cdot Q'_y + \varphi'_z\cdot R + \varphi\cdot R'_z;$$

4) $\operatorname{div}(\varphi\cdot\overline{c}) = \operatorname{grad}\varphi\cdot\overline{c}$;

5) $\operatorname{div}\operatorname{grad}u = \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, де Δ – оператор Лапласа:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$ ($\Delta u = 0$ – рівняння Лапласа).

1.3.8 Формула Остроградського-Гауса

Теорема Остроградського-Гауса. Нехай векторне поле $\overline{F}(M)$ має неперервні частинні похідні P'_x, Q'_y, R'_z в деякій області V і на її границі, та нехай замкнена поверхня σ обмежує деяку область V. Тоді

$$\oiint\limits_{\sigma} \overline{F}\cdot\overline{n}d\sigma = \iiint\limits_{V} \operatorname{div}\overline{F}(M)dv,$$

тобто, потік вектора $\overline{F}$ через замкнену поверхню σ дорівнює потрійному інтегралу по області V від дивергенції цього вектора.

У координатній формі:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \oiint_\sigma \left(Pdydz + Qdxdz + Rdxdy \right). \qquad (11)$$

Доведення. Нехай область D є проекцією поверхні σ на площину xOy, а $z = z_1(x, y)$ і $z = z_2(x, y)$ – рівняння відповідних частин поверхні σ (нижньої частини σ_1 і верхньої – σ_2), причому z_1, z_2 – неперервні в D.

Позначимо $P = F_x, Q = F_y, R = F_z$.

Розглянемо

$$I = \iiint_V \frac{\partial F_z}{\partial z} dxdydz = \iint_D dxdy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \frac{\partial F_z}{\partial z} dz.$$

Обчислимо внутрішній інтеграл за формулою Ньютона-Лейбніца:

$$I = \iint_D \left[F_z(x, y, z_2(x, y)) - F_z(x, y, z_1(x, y)) \right] dxdy.$$

Виразимо подвійний інтеграл через поверхневий інтеграл ІІ-го роду (коли довільним точкам $M(x, y)$ області D відповідають точки (x, y, z), що описують поверхню σ як точки входу і виходу через поверхню)

$$I = \iint_{\sigma_2^+} F_z(x, y, z) dxdy - \iint_{\sigma_1^-} F_z(x, y, z) dxdy.$$

Замінюючи, у другому інтегралі внутрішню сторону поверхні на зовнішню, отримаємо:

$$I = \iint_{\sigma_2^+} F_z(x, y, z) dxdy + \iint_{\sigma_1^+} F_z(x, y, z) dxdy = \oiint_{\sigma^+} F_z(x, y, z) dxdy.$$

А отже, $I = \iiint_V \frac{\partial F_z}{\partial z} dxdydz = \oiint_{\sigma^+} F_z(x, y, z) dxdy$.

Аналогічно доводимо, що

$$\iiint_V \frac{\partial F_x}{\partial x} dxdydz = \oiint_{\sigma^+} F_x(x, y, z) dydz, \quad \iiint_V \frac{\partial F_y}{\partial y} dxdydz = \oiint_{\sigma^+} F_y(x, y, z) dxdz.$$

Сумуючи почленно ці рівності, одержимо:

$$\iiint_V \operatorname{div} \overline{F}(M) dv = \oiint_{\sigma^+} F_x dydz + \oiint_{\sigma^+} F_y dxdz + \oiint_{\sigma^+} F_z dxdy = \oiint_\sigma \overline{F} \cdot \overline{d\sigma}$$

Приклад. Знайти потік векторного поля $\overline{F} = \{x - 3z, x + 3y + z, 5x + y\}$ через зовнішню поверхню піраміди $CAOB$ з вершинами у точках $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 2)$.

Розв'язання. Так як $P = x - 3z, Q = x + 3y + z, R = 5x + y$, то, використовуючи формулу (11), отримаємо

$$\Pi = \iiint_V (1 + 3 + 0) dv = 4 \iiint_V dv = 4V_{CAOB} = 1\frac{1}{3}.$$

Відповідь: $1\frac{1}{3}$.

1.3.9 Ротор (вихор) векторного поля

Означення. Ротором векторного поля $\overline{F}(M)$ називається вектор $\operatorname{rot}\overline{F}(M)$, який означається наступним чином:

$$\operatorname{rot}\overline{F}(M)=\overline{\nabla}\times\overline{F}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix},$$

тобто

$$\operatorname{rot}\overline{F}(M)=\left\{R'_y-Q'_z;\ P'_z-R'_x;\ Q'_x-P'_y\right\}.$$

Напрям ротора – це напрям, навколо якого циркуляція має найбільше значення порівняно з циркуляцією навколо будь-якого напряму, що не співпадає з нормаллю до плоскої області, обмеженої замкненим контуром.

Властивості:

1) $\operatorname{rot}\overline{c}=0$;

2) $\operatorname{rot}(\alpha\overline{F}_1+\beta\overline{F}_2)=\alpha\operatorname{rot}\overline{F}_1+\beta\operatorname{rot}\overline{F}_2$;

3) $\operatorname{rot}\left(\varphi(M)\cdot\overline{F}(M)\right)=\operatorname{grad}\varphi\times\overline{F}+\varphi\cdot\operatorname{rot}\overline{F}$;

4) $\operatorname{rot}\left(\varphi(M)\cdot\overline{c}\right)=\operatorname{grad}\varphi\times\overline{c}$;

5) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi)=0$;

6) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\overline{F})=0$.

1.3.10 Формула Стокса

Теорема Стокса. Циркуляція векторного поля $\overline{F}(M)$ по замкненому контуру L дорівнює потоку ротора цього вектора через поверхню σ, натягнуту на контур L, тобто

$$Ö=\oint_L\overline{F}(M)\overline{dl}=\iint_\sigma\operatorname{rot}\overline{F}(M)\cdot\overline{n}(M)d\sigma=\iint_\sigma\operatorname{rot}\overline{F}\cdot\overline{d\sigma}.$$

В координатній формі

$$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint_\sigma(R'_y-Q'_z)dydz+(P'_z-R'_x)dxdz+\left(Q'_x-P'_y\right)dxdy.$$

Обхід по контуру L вибирається так, що якщо дивитись з кінця вектора нормалі на рух по контуру L, то напрям руху має бути протилежним напрямку руху годинникової стрілки.

Розглянемо окремий випадок формули Стокса, коли векторне поле є плоским, тоді $R\equiv 0$, $z=0$, $\overline{F}(M)=P(M)\overline{i}+Q(M)\overline{j}$, а формула Стокса матиме вигляд:

$$\oint_L Pdx+Qdy=\iint_D (Q_x^{'}-P_y^{'})dxdy,$$

тобто одержимо формулу Гріна.

Фізичним змістом формули Стокса є твердження, що потік векторного поля $\overline{F}$ дорівнює кількості рідини, що витікає (стікаючої) через поверхню σ за одиницю часу

$$\oint_L \overline{F}\cdot\overline{dl}=\iint_\sigma \operatorname{rot}\overline{F}\cdot\overline{d\sigma}.$$

1.3.11 Властивості векторних полів

1 Соленоїдальне векторне поле.

Векторне поле $\overline{F}=P\overline{i}+Q\overline{j}+R\overline{k}$ називається соленоїдальним в області V, якщо $\operatorname{div}\overline{F}(M)\equiv 0$ в кожній точці M цієї області V.

Тоді з формули Остроградского-Гаусса: $\Pi=\iiint_{V^{'}}\operatorname{div}\overline{F}dv\equiv 0$, тобто потік соленоїдального векторного поля через будь-яку замкнену поверхню $\sigma^{'}$, яка обмежує область $V^{'}\subset V$, дорівнює нулю.

2 Безвихрове векторне поле.

Векторне поле $\overline{F}(M)$ називається безвихровим в деякій області V, якщо в кожній її точці $\operatorname{rot}\overline{F}(M)=0$. Тоді з формули Стокса, $Ц=0$ по будь-якому замкненому контуру L, що повністю належить області V.

3 Потенціальне векторне поле.

Векторне поле називається потенціальним в деякій області V, якщо існує скалярна функція $u(M)$ або $u(x,y,z)$ така, що $\overline{F}(M)=\operatorname{grad}u(M)=\overline{\nabla}\cdot u$, $M\in V$.

Функція $u(M)$ називається потенціалом векторного поля.

Теорема 1. Для того, щоб векторне поле було потенціальним в деякій області V необхідно й достатньо, щоб його $\operatorname{rot}\overline{F}(M)=0$, $M\in V$.

Доведення.

Необхідність. Дано $\overline{F}(M)$ потенціальне поле в області V. Тоді

$$\overline{F}(M)=\operatorname{grad}u(M)=\overline{\nabla}\cdot u,\ \operatorname{rot}\overline{F}(M)=\overline{\nabla}\times\overline{F}.$$

Отже, $\operatorname{rot}\overline{F}(M)=\overline{\nabla}\times(\overline{\nabla}\cdot u)=0$ (так як $\overline{\nabla}$ і $\overline{\nabla}\cdot u$ – колінеарні вектори).

Достатність. Дано $\operatorname{rot}\overline{F}(M)=0$ в області V, тобто $\overline{F}(M)$ – безвихрове поле.

$\operatorname{rot}\overline{F}(M)=\left\{R'_y-Q'_z;\ P'_z-R'_x;\ Q'_x-P'_y\right\}=0$, якщо $R_y^{'}=Q_z^{'}; P_z^{'}=R_x^{'}; Q_x^{'}=P_y^{'}$.

Розглянемо наступну функцію:

$$u(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}P(x,y,z)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y,z)dy+\int_{z_0}^{z}R(x_0,y_0,z)dz.$$

Безпосередньо обчислюючи, отримаємо:

$u'_x=P(x,y,z)$;

$u'_y=\int_{x_0}^{x}P'_y dx+Q(x_0,y,z)+0=\int_{x_0}^{x}Q'_x dx+Q=Q$, так як $P'_y=Q'_x$;

$$u'_z=\int_{x_0}^{x}P'_z dx+\int_{y_0}^{y}Q'_z dy+R(x_0,y_0,z)=\int_{x_0}^{x}R'_x dx+\int_{y_0}^{y}R'_y(x_0,y,z)dy+R(x_0,y_0,z)=$$
$$=R(x,y,z)-R(x_0,y,z)+R(x_0,y,z)-R(x_0,y_0,z)+R(x_0,y_0,z)=R,$$

так як $P'_z=R'_x$ і $Q'_z=R'_y$.

Тобто,

$$\operatorname{grad}u(M)=\overline{F}(M).$$

Теорема 2. Якщо поле $\overline{F}(M)$ безвихрове в області V, то криволінійний інтеграл $\int_{AB}\overline{F}\cdot\overline{dl}$ (другого роду) не залежить від шляху інтегрування в області V.

Доведення.

$\overline{F}(M)$ безвихрове, тому $\operatorname{rot}\overline{F}(M)=0,\ M\in V$. Тоді згідно формули Стокса: $\oint_L\overline{F}\cdot\overline{dl}=0$.

Розглянемо $\oint_L\overline{F}\cdot\overline{dl}=\int_{AMB}\overline{F}\cdot\overline{dl}+\int_{BNA}\overline{F}\cdot\overline{dl}=\int_{AMB}\overline{F}\cdot\overline{dl}-\int_{ANB}\overline{F}\cdot\overline{dl}=0$,

тобто, $\int_{AMB}\overline{F}\cdot\overline{dl}=\int_{ANB}\overline{F}\cdot\overline{dl}$.

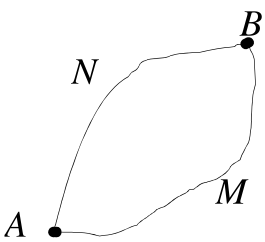


Рисунок 1.12

З теореми випливає, що для того, щоб криволінійний інтеграл другого роду не залежав від шляху інтегрування необхідно й достатньо, щоб поле було потенціальним.

Адже, якщо векторне поле $\overline{F}(M)$ потенціальне в області V, то $\oint_L\overline{F}\cdot\overline{dl}=\iint_\sigma\operatorname{rot}\overline{F}\cdot d\overline{\sigma}=\left[\begin{array}{l}\operatorname{rot}\overline{F}\equiv 0 \text{ â î áëàñò³ } V\\ \text{äëÿ ï î òåí ö³àëüí î ãî ï î ëÿ}\end{array}\right]=0$.

1.3.12 Робота в потенціальному полі

Фізичним змістом криволінійного інтеграла другого роду є робота, тому, якщо векторне поле $\overline{F}(M)$ потенціальне в області V, то

$$A=\int_L \overline{F}\cdot\overline{dl}=\int_L Pdx+Qdy+Rdz=\begin{bmatrix}\text{ï î ëå ï î òåí öiàëüí å}\\ P=u_x', \; Q=u_y', \; R=u_z'\end{bmatrix}=$$

$$=\int_L u_x'dx+u_y'dy+u_z'dz=\int_L du=u(B)-u(A),\ \text{де}\ AB=L\ \text{(незамкнена крива).}$$

Тобто, робота вектора $\overline{F}(M)$ в потенціальному полі дорівнює різниці потенціалів у кінцевій і початковій точках.

1.3.13 Теорема Гельмгольца

Теорема. Будь-яке векторне поле $\overline{F}(M)$ можна представити у вигляді суми двох полів, одне з яких є потенціальним, а інше соленоїдальним.

Доведення. Нехай $\overline{F}(M)$ – довільне векторне поле. Тоді $\operatorname{div}\overline{F}(M)=f(M)$ – скалярна функція. Знайдемо потенціальне поле $\overline{F}_1(M)=\operatorname{grad}u(M)$, потенціал u якого є розв'язанням неоднорідного рівняння Лапласа: $\Delta u=f(M)$.

Тобто, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f(M)$ або $\Delta u=\overline{\nabla}\cdot\overline{\nabla}u$.

Покажемо, що векторне поле $\overline{F_2}=\overline{F}-\overline{F}_1$ є соленоїдальним. Для цього знайдемо його дивергенцію:

$$\operatorname{div}\overline{F}_2=\operatorname{div}\overline{F}-\operatorname{div}\overline{F}_1=f(M)-\operatorname{div}(\overline{\nabla}u)=f(M)-\overline{\nabla}\cdot\overline{\nabla}u=$$
$$=f(M)-\Delta u=f(M)-f(M)\equiv 0,$$

тому $\overline{F_2}$ – соленоїдальне поле.

Отже, $\overline{F}(M)=\underset{\text{ï î òåí ö.}}{\overline{F}_1(M)}+\underset{\text{ñî ëåí î¿ä.}}{\overline{F}_2(M)}$.

1.4 Завдання для самостійної роботи

1.4.1 Дано скалярне поле $u(x,y,z)$, вектор $\bar{l}$ і точка M. Знайти:

1) похідну поля $u(x,y,z)$ в точці M за напрямом вектора $\bar{l}$;
2) градієнт поля $u(x,y,z)$ в точці M;
3) найбільшу швидкість зростання поля $u(x,y,z)$ в точці M.

1.01.	$u=x^2-y^2+z^3$,	$\bar{l}=2\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}$,	$M(1;2;-1)$.
1.02.	$u=xy+yz-xz$,	$\bar{l}=\bar{i}-2\bar{j}-2\bar{k}$,	$M(0;1;-1)$.
1.03.	$u=x^2y+y^2z+xz^2$,	$\bar{l}=3\bar{i}-4\bar{k}$,	$M(1;0;2)$.
1.04.	$u=xz+y^2x-yz^2$,	$\bar{l}=4\bar{i}+3\bar{j}$,	$M(2;1;0)$.
1.05.	$u=xyz^2+zy$,	$\bar{l}=-2\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k}$,	$M(-1;0;2)$.
1.06.	$u=3x^2+2y^2-4zx$,	$\bar{l}=\bar{i}-\bar{j}+\sqrt{2}\bar{k}$,	$M(2;1;-1)$.

1.07. $u = 2x^3 + xy^2 + 3z^2$, $\quad \bar{l} = 2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$, $\quad M(2;2;0)$.

1.08. $u = x^2 y^2 z^2$, $\quad \bar{l} = 4\bar{i} - 2\bar{j} + 4\bar{k}$, $\quad M(1;2;3)$.

1.09. $u = xyz - y^2 z^3$, $\quad \bar{l} = 4\bar{i} + 4\bar{j} - 2\bar{k}$, $\quad M(2;0;1)$.

1.10. $u = x^2 yz + y^2 + xyz^2$, $\quad \bar{l} = 2\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$, $\quad M(1;-1;0)$.

1.11. $u = xy^2 z^3$, $\quad \bar{l} = \bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$, $\quad M(0;1;2)$.

1.12. $u = 2xy + 3yz^3$, $\quad \bar{l} = 2\bar{i} - 2\bar{j} + \sqrt{8}\bar{k}$, $\quad M(-1;2;1)$.

1.13. $u = 3xy + 2yz^3$, $\quad \bar{l} = \bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$, $\quad M(2;0;2)$.

1.14. $u = 3x^2 + 2y^2 - 4z^2$, $\quad \bar{l} = 4\bar{j} - 3\bar{k}$, $\quad M(1;1;0)$.

1.15. $u = 2xz + 3xy + 4yz$, $\quad \bar{l} = \bar{i} - \bar{j} + \sqrt{2}\bar{k}$, $\quad M(1;2;-2)$.

1.16. $u = 3x^2 + yz - xz^2$, $\quad \bar{l} = 2\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$, $\quad M(0;-1;2)$.

1.17. $u = 3xy^2 + 2yz^3$, $\quad \bar{l} = 4\bar{i} - 3\bar{k}$, $\quad M(2;0;1)$.

1.18. $u = 2xy - 3yz^3$, $\quad \bar{l} = 2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$, $\quad M(1;1;0)$.

1.19. $u = x^2 y + xy^2 - yz^2$, $\quad \bar{l} = \bar{i} - \bar{j} + \sqrt{7}\bar{k}$, $\quad M(1;-1;1)$.

1.20. $u = 2xyz^2 - 3xzy^2$, $\quad \bar{l} = \bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}$, $\quad M(2;1;-1)$.

1.21. $u = xy^2 z + x^2 z^2$, $\quad \bar{l} = 2\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$, $\quad M(0;-1;3)$.

1.22. $u = 4xz + 3yz^2$, $\quad \bar{l} = \bar{i} - \bar{j} + \sqrt{7}\bar{k}$, $\quad M(1;0;-3)$.

1.23. $u = x^3 y^2 + yz^2$, $\quad \bar{l} = -\bar{i} + \bar{j} - 7\bar{k}$, $\quad M(2;1;-3)$.

1.24. $u = 4xz + 3yz^2$, $\quad \bar{l} = 2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$, $\quad M(3;0;1)$.

1.25. $u = 2xy - 3yz + 4xz$, $\quad \bar{l} = \bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$, $\quad M(1;3;-1)$.

1.26. $u = xy^2 z + 2x^2 z^2$, $\quad \bar{l} = 2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$, $\quad M(1;3;-2)$.

1.27. $u = 2xyz + 3x^2 z^2$, $\quad \bar{l} = 4\bar{i} + 3\bar{k}$, $\quad M(2;-3;-1)$.

1.28. $u = 3xy^2 + 4yz^2$, $\quad \bar{l} = -3\bar{i} - 4\bar{k}$, $\quad M(-2;0;3)$.

1.29. $u = 2xy - 3yz^3$, $\quad \bar{l} = 2\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$, $\quad M(-1;0;1)$.

1.30. $u = 3xy + yz^3$, $\quad \bar{l} = \bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$, $\quad M(2;0;2)$.

1.4.2 Дано векторне поле $\overline{F}(x, y, z)$ та замкнена поверхня $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$. Знайти:

1) потік векторного поля $\overline{F}$ через поверхню σ за означенням та за формулою Остроградського-Гауса;

2) циркуляцію поля $\overline{F}$ по замкненому контуру $L = \sigma_1 \cap \sigma_2$ за означенням та за теоремою Стокса.

2.01. $\overline{F} = (x - y)\bar{i} + (y + z)\bar{j} + (y - z)\bar{k}$; $\sigma_1 : x^2 - y^2 - z^2 = 1$; $\sigma_2 : x^2 + y^2 + z^2 = 3$ $(z > 0)$.

2.02. $\overline{F} = (x - y)\bar{i} + (y + z)\bar{j} - 2x\bar{k}$; $\sigma_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 9$; $\sigma_2 : z = 0$ $(z \geq 0)$.

2.03. $\overline{F} = yz\bar{i} + x\bar{j} - y\bar{k}$; $\sigma_1 : x^2 + y^2 = z^2$; $\sigma_2 : z = 1$ $(0 \leq z \leq 1)$.

2.04. $\overline{F}=(x-y)\overline{i}+(y-z)\overline{k}$; $\sigma_1: x^2-y^2-z^2=1$; $\sigma_2: x=\sqrt{5}$.

2.05. $\overline{F}=(2x-y)\overline{i}+(3x+y)\overline{j}+z\overline{k}$; $\sigma_1: y=x^2+z^2$; $\sigma_2: y=1$.

2.06. $\overline{F}=2x\overline{i}-y\overline{j}+z\overline{k}$; $\sigma_1: x^2+y^2+z^2=4$; $\sigma_2: 3z=x^2+y^2$.

2.07. $\overline{F}=-y\overline{i}+x\overline{j}+z\overline{k}$; $\sigma_1: x^2+y^2=z^2$; $\sigma_2: x^2+y^2+z^2=2\ (z>0)$.

2.08. $\overline{F}=x\overline{i}-y\overline{j}+z\overline{k}$; $\sigma_1: x^2+y^2=z$; $\sigma_2: z=3+2y\ (z\ge 0)$.

2.09. $\overline{F}=(x+z)\overline{i}+y\overline{j}$; $\sigma_1: z=8-x^2-y^2$; $\sigma_2: z=x^2+y^2$.

2.10. $\overline{F}=(x-y)\overline{i}+(x+z)\overline{j}+2y\overline{k}$; $\sigma_1: x=y^2+z^2$; $\sigma_2: x^2+y^2+z^2=2$.

2.11. $\overline{F}=x\overline{i}+(x+z)\overline{j}-2y\overline{k}$; $\sigma_1: x=y^2+z^2$; $\sigma_2: x^2+y^2+z^2=2$.

2.12. $\overline{F}=-3y\overline{i}+2x\overline{j}+(x+z)\overline{k}$; $\sigma_1: x^2-y^2-z^2=1$; $\sigma_2: x^2+y^2+z^2=3\ (z>0)$.

2.13. $\overline{F}=-2y\overline{i}+3z\overline{k}$; $\sigma_1: x^2=y^2+z^2$; $\sigma_2: x^2+y^2+z^2=8\ (x\ge 0)$.

2.14. $\overline{F}=(x-3y)\overline{i}+(y+5z)\overline{j}+2x\overline{k}$; $\sigma_1: x^2+y^2=z^2$; $\sigma_2: z=3$.

2.15. $\overline{F}=3x\overline{i}-z\overline{j}$; $\sigma_1: z=6-x^2-y^2$; $\sigma_2: x^2+y^2=z^2\ (z\ge 0)$.

2.16. $\overline{F}=x\overline{i}-(x+2y)\overline{j}+y\overline{k}$; $\sigma_1: z=x^2+y^2$; $\sigma_2: z=1$.

2.17. $\overline{F}=x\overline{i}+z\overline{j}-y\overline{k}$; $\sigma_1: z=4-2(x^2+y^2)$; $\sigma_2: z=2(x^2+y^2)$.

2.18. $\overline{F}=x\overline{i}-z\overline{j}+y\overline{k}$; $\sigma_1: x^2+y^2+z^2=1$; $\sigma_2: x^2+y^2=z^2\ (z\ge 0)$.

2.19. $\overline{F}=(x+z)\overline{i}+y\overline{j}$; $\sigma_1: z=8-x^2-y^2$; $\sigma_2: z=x^2+y^2$.

2.20. $\overline{F}=(x+y)\overline{i}-4y\overline{j}+2x\overline{k}$; $\sigma_1: z=x^2+y^2$; $\sigma_2: z=1$.

2.21. $\overline{F}=x\overline{i}-2z\overline{j}+3y\overline{k}$; $\sigma_1: x^2+y^2-z=0$; $\sigma_2: z-2x=0$.

2.22. $\overline{F}=x\overline{i}+\overline{j}+y\overline{k}$; $\sigma_1: z=4-x^2-y^2$; $\sigma_2: z=0\ (z>0)$.

2.23. $\overline{F}=3x\overline{i}-2y\overline{k}$; $\sigma_1: x^2-y^2-z^2=1$; $\sigma_2: x=2$.

2.24. $\overline{F}=(x-2y)\overline{i}+(z-x)\overline{j}+x\overline{k}$; $\sigma_1: x^2-y^2-z^2=1$; $\sigma_2: y=2$.

2.25. $\overline{F}=y\overline{i}+2x\overline{j}+z\overline{k}$; $\sigma_1: x^2+y^2+z^2=1$; $\sigma_2: z=0\ (z>0)$.

2.26. $\overline{F}=(x+z)\overline{i}+(y+z)\overline{k}$; $\sigma_1: z=x^2+y^2$; $\sigma_2: z=1$.

2.27. $\overline{F}=(x-z)\overline{i}+y\overline{j}$; $\sigma_1: z=1-x^2-y^2$; $\sigma_2: z=x^2+y^2$.

2.28. $\overline{F}=(x+y)\overline{i}+2x\overline{k}$; $\sigma_1: z=x^2+y^2$; $\sigma_2: z=4$.

2.29. $\overline{F}=x\overline{i}+z\overline{j}+3y\overline{k}$; $\sigma_1: x^2+y^2-z=0$; $\sigma_2: z-2y=0$.

2.30. $\overline{F}=x\overline{i}+\overline{j}+y\overline{k}$; $\sigma_1: z=9-x^2-y^2$; $\sigma_2: z=0\ (z>0)$.

1.4.3 Дано векторне поле $\overline{F}(x,y,z)$. Довести, що поле $\overline{F}(x,y,z)$ є потенціальним. Знайти потенціал поля $\overline{F}(x,y,z)$.

3.01. $\overline{F}=3x^2\overline{i}+2y\overline{j}-4\overline{k}$.

3.02. $\overline{F}=(2x+1)\overline{i}-4y^2\overline{j}-2z\overline{k}$.

3.03. $\overline{F}=(x^2+x)\overline{i}+4\overline{j}-2z\overline{k}$.

3.04. $\overline{F} = 4\overline{i} - (y^2 + 1)\overline{j} + 3z\overline{k}$.

3.05. $\overline{F} = 5x\overline{i} - (y + 2)\overline{j} + (z^2 + 1)\overline{k}$.

3.06. $\overline{F} = (2x^2 + x)\overline{i} + y^2\overline{j} - (3z + 2)\overline{k}$.

3.07. $\overline{F} = 5\overline{i} - (y + 3)\overline{j} - (z^2 - 1)\overline{k}$.

3.08. $\overline{F} = (1 - 3x)\overline{i} + 5\overline{j} + (3z^2 + 2)\overline{k}$.

3.09. $\overline{F} = (4x^2 + 1)\overline{i} + (3y - 2)\overline{j} + z\overline{k}$.

3.10. $\overline{F} = (3x + 4)\overline{i} + (y^2 - 2y)\overline{j} + 4\overline{k}$.

3.11. $\overline{F} = (2 - 3x)\overline{i} + (4y^2 + 3y)\overline{j} + (2z + 1)\overline{k}$.

3.12. $\overline{F} = (1 - 2x^2)\overline{i} + (3 - y)\overline{j} + (4z + 1)\overline{k}$.

3.13. $\overline{F} = 2x^2\overline{i} - y^2\overline{j} + \overline{k}$.

3.14. $\overline{F} = (5x + 2)\overline{i} - (3y + 1)\overline{j} + (2z - 1)\overline{k}$.

3.15. $\overline{F} = (2x^2 + x)\overline{i} + y^2\overline{j} - (3z + 2)\overline{k}$.

3.16. $\overline{F} = (1 + 3x)\overline{i} - 2y\overline{j} + (4 - 3z)\overline{k}$.

3.17. $\overline{F} = (3x - x^2)\overline{i} + (2 - 4y)\overline{j} + 3\overline{k}$.

3.18. $\overline{F} = (2x^2 + 4)\overline{i} + (3y - 1)\overline{j} + (z + 2)\overline{k}$.

3.19. $\overline{F} = 3x\overline{i} + (2 - 4y^2)\overline{j} + (3z - z^2)\overline{k}$.

3.20. $\overline{F} = (x^2 - 2)\overline{i} + (y - 2)\overline{j} + (z^2 + 2z)\overline{k}$.

3.21. $\overline{F} = (1 - 2x + x^2)\overline{i} + (4y - 1)\overline{j} - 2z\overline{k}$.

3.22. $\overline{F} = 2\overline{i} - (3y^2 + y)\overline{j} + (4 - 3z)\overline{k}$.

3.23. $\overline{F} = (2x - x^2)\overline{i} + (1 - 4y)\overline{j} + (z^2 + 1)\overline{k}$.

3.24. $\overline{F} = (4x^2 + 1)\overline{i} - (3y + 2)\overline{j} + (1 - z^2)\overline{k}$.

3.25. $\overline{F} = (1 + 2x^2)\overline{i} + (3y - 1)\overline{j} + 4z\overline{k}$.

3.26. $\overline{F} = 3\overline{i} + (4y^2 + 3y)\overline{j} + (2z + 3)\overline{k}$.

3.27. $\overline{F} = (4 - 3x^2)\overline{i} + (2y^2 - y)\overline{j} + (1 - 2z)\overline{k}$.

3.28. $\overline{F} = (x^2 + 1)\overline{i} + (3y - 2)\overline{j} + 4z^2\overline{k}$.

3.29. $\overline{F} = 2x^2\overline{i} - (3y^2 + 2y)\overline{j} + (z^2 - 3z)\overline{k}$.

3.30. $\overline{F} = (3x - 2)\overline{i} + (2y + 1)\overline{j} + (z - 1)\overline{k}$.

2 ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

2.1 Комплексні числа та дії над ними

Означення. Комплексними називаються числа виду
$$z = x + iy\,, \tag{1}$$
де x і y – дійсні числа, а i – уявна одиниця ($i^2 = -1$). Число x називається дійсною частиною комплексного числа і позначається $x = \operatorname{Re} z$, y – уявною частиною: $y = \operatorname{Im} z$.

Два комплексних числа рівні тоді й тільки тоді, коли рівні окремо їх дійсні й уявні частини.

Число $\bar{z} = x - iy$ називається спряженим до числа $z = x + iy$.

Запис комплексного числа у вигляді (1) називається його алгебраїчною формою.

Комплексне число $z = x + iy$ можна зобразити на площині точкою з координатами (x, y). Координатну площину в цьому випадку називають комплексною площиною.

Комплексне число можна представити у вигляді радіус-вектора. Довжина радіус-вектора:
$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$
називається модулем комплексного числа ($r \ge 0$). Кут φ, утворений радіусом-вектором oz з додатнім напрямом осі Ox називається аргументом комплексного числа й позначається

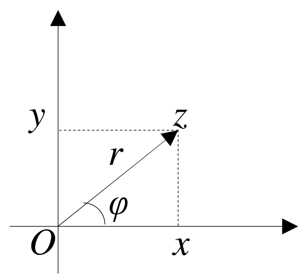


Рисунок 2.1

$$\varphi = \arg z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \ (x \ne 0).$$

Аргумент комплексного числа – величина багатозначна: $\operatorname{A rg} z = \arg z + 2\pi k \ (k = 0, -1, 1, \ \ -2, 2, ...)$, де $\arg z$ – головне значення аргумента, яке знаходиться в проміжку $(-\pi; \pi]$.

З рисунка 2.1 видно, що мають місце рівності:
$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}\ ,\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

Якщо в алгебраїчній формі x і y замінити на $x = r\cos\varphi$ та $y = r\sin\varphi$, то комплексне число $z = x + iy$ можна записати у вигляді:
$$z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right). \tag{2}$$
Такий запис комплексного числа називається його тригонометричною формою.

Ейлером була доведена рівність $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$, використовуючи яку, можна записати
$$z = re^{i\varphi}. \tag{3}$$
Це показникова форма комплексного числа.

Нехай задано два комплексних числа в алгебраїчній формі: $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$. Тоді

1) $z_1 \pm z_2 = \left(x_1 \pm x_2\right) + i\left(y_1 \pm y_2\right)$;

2) $z_1 \cdot z_2 = \left(x_1 + iy_1\right)\cdot\left(x_2 + iy_2\right) = \left(x_1x_2 - y_1y_2\right) + i\left(x_1y_2 + x_2y_1\right)$;

3) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}\cdot\dfrac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \dfrac{\left(x_1x_2 + y_1y_2\right) + i\left(x_2y_1 - x_1y_2\right)}{x_2^2 + y_2^2} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\dfrac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$.

Якщо ж комплексні числа задані в тригонометричній формі, тобто $z_1 = r_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)$ і $z_2 = r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)$, то

1) $z_1 \cdot z_2 = r_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)\cdot r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right) = r_1\cdot r_2\cdot\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)$;

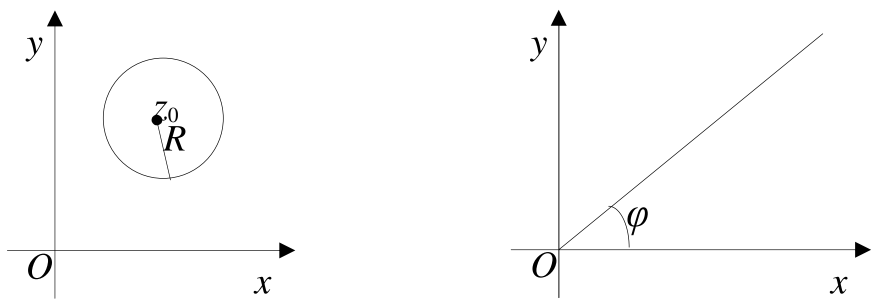
2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)}{r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)} = \dfrac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right]$;

3) $z^n = r^n\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)^n = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right)$, $n \in \mathbb{N}$ – формула Муавра;

4) $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$, $k = 0, 1, 2, ..., n-1$.

2.2 Поняття про функцію комплексної змінної

Надалі ми будемо розглядати різні множини комплексних чисел. Вони задаються за допомогою рівностей або нерівностей. Наприклад, умова $\left|z_0\right| = R,\ R = const$ визначає коло радіусом R із центром у точці z_0 (рисунок 2.2*а*); умова $\arg z = const$ – промінь, що виходить із початку координат під кутом $\varphi = \arg z$ (рисунок 2.2*б*).



а) *б*)

Рисунок 2.2

Означення 1. Якщо кожному комплексному числу z, що належить множині D, поставлено у відповідність деяке одне комплексне число або сукупність комплексних чисел ω, то говорять, що ω є функцією від z, визначеною на множині D і записують

$$\omega = f(z). \tag{4}$$

Якщо врахувати, що $z = x + iy$ й покласти $\omega = u + iv$, то для означення функції ω достатньо визначити дві функції дійсних змінних $u = u(x, y)$ і $v = v(x, y)$.

Отже,

$$\omega = u(x, y) + iv(x, y)\,. \qquad (5)$$

Від запису (4) можна перейти до запису вигляду (5). Такий перехід називається виділенням дійсної та уявної частин.

Приклад. Виділити дійсну та уявну частини функції: $\omega = z^2$.

Розв'язання. Так як $z = x + iy$, тоді $\omega = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$. Отже, $u(x, y) = x^2 - y^2$ та $v(x, y) = 2xy$.

Означення 2. Комплексне число $\omega_0 = u_0 + iv_0$ називається границею функції $\omega = u(x, y) + iv(x, y) = f(z)$ комплексної змінної $z = x + iy$ при $z \to z_0(x_0,\, y_0)$, якщо для кожного, як завгодно малого наперед заданого додатного числа ε можна вказати таке додатне число σ, що з нерівності $|z - z_0| < \sigma$ випливає нерівність $|f(z) - \omega_0| < \varepsilon$.

Дане означення записується: $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \omega_0$.

Із означення випливає, що якщо ω_0 є границею функції $\omega = f(z)$ при $z \to z_0$, то це значення ω_0 не залежить від шляху, яким z наближається до z_0. Із означення також слідує, що якщо границя функції існує, то існують і границі:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = u_0 \text{ та } \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = v_0\,.$$

Означення 3. Функція $f(z)$ називається неперервною функцією в точці z_0, якщо вона визначена в деякому околі цієї точки й $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$. Функція $f(z)$ неперервна в області D, якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.

Неперервні функції комплексної змінної мають аналогічні властивості, що й неперервні функції дійсної змінної. Зокрема, якщо функція $\omega = f(z)$ неперервна в замкненій області D, то вона:

1) обмежена за модулем в цій області, тобто $|f(z)| < M$;

2) досягає свого найбільшого й найменшого значення в замкненій області D.

2.3 Основні елементарні функції комплексної змінної

Визначимо основні елементарні функції комплексної змінної $z = x + iy$.

Показникова функція. Показникова функція $w = e^z$ задається формулою

$$w = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)\,.$$

Задавши у данній рівності $y = 0$, встановлюємо, що для дійсних значень $z = x$ показникова функція e^z співпадає з показниковою функцією дійсної змінної: $e^z = e^x$.

Логарифмічна функція. Логарифмічна функція визначається як функція, обернена до показникової: число w називається логарифмом числа

$z \neq 0$, якщо $e^w = z$ і позначається $w = \mathrm{Ln}\, z$. Так як значення показникової функції $e^w = z$ завжди відмінні від нуля, то логарифмічна функція $w = \mathrm{Ln}\, z$ визначена на всій площині z, крім точки $z = 0$.

Поклавши $z = re^{i\varphi}$, $w = u + iv$, отримаємо, згідно означення логарифмічної функції,

$$e^{u+iv} = r \cdot e^{i\varphi} \text{ або } e^u \cdot e^{iv} = r \cdot e^{i\varphi}.$$

Звідси маємо:

$$e^u = r,\ v = \varphi + 2k\pi, \text{ тобто } u = \ln r,\ v = \varphi + 2k\pi \ \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...).$$

Отже, $w = \mathrm{Ln}\, z = u + iv = \ln r + i(\varphi + 2k\pi) = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)$,

тобто

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)$$

або

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\mathrm{Arg}\, z,$$

де $\mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2k\pi$.

Остання формула показує, що логарифмічна функція комплексної змінної має нескінченну кількість значень, тобто $w = \mathrm{Ln}\, z$ – багатозначна функція.

Однозначну вітку цієї функції можна виділити, підставивши в останню формулу конкретне значення k. Поклавши $k = 0$, отримаємо однозначну функцію, яку називають головним значенням логарифма $\mathrm{Ln}\, z$ і позначають $\ln z$:

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z, \text{ де } -\pi < \arg z \leq \pi.$$

Якщо z – дійсне додатнє число, то $\arg z = 0$ і $\ln z = \ln|z|$, тобто головне значення логарифма дійсного додатного числа співпадає зі звичайним натуральним логарифмом цього числа.

Логарифмічну функцію комплексної змінної можна представити так:

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln z + 2k\pi i.$$

Степенева функція. Якщо n – натуральне число, то степенева функція визначається рівністю $w = z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$. Функція $w = z^n$ – однозначна функція. Якщо $n = \dfrac{1}{q}$ $(q \in \mathbb{N})$, то в такому випадку

$$w = z^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{z} = \sqrt[q]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z + 2k\pi}{q} + i\sin\frac{\arg z + 2k\pi}{q}\right), \text{ де } k = 0, 1, 2, ..., q - 1.$$

Тут функція $w = z^{\frac{1}{q}}$ є багатозначною (q-значною). Однозначну вітку цієї функції можна отримати, надаючи k відповідного значення, наприклад $k = 0$.

Якщо $n = \dfrac{p}{q}$ $(p, q \in \mathbb{N})$, то степенева функція визначається рівністю

$$w = z^{\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[q]{z}\right)^p = \sqrt[q]{|z|^p}\left(\cos\frac{p(\arg z + 2k\pi)}{q} + i\sin\frac{p(\arg z + 2k\pi)}{q}\right).$$

Функція $w = z^{\frac{p}{q}}$ – багатозначна.

Тригонометричні функції. Тригонометричні функції комплексного аргумента $z = x + iy$ визначаються рівностями:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},\ \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},\ \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z},\ \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Тригонометричні функції комплексної змінної зберігають властивості тригонометричних функцій дійсної змінної.

Гіперболічні функції. Гіперболічні функції визначаються рівностями:

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2},\ \operatorname{ch} z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2},\ \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z},\ \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Зв’язок між гіперболічними і тригонометричними функціями:

$$\operatorname{sh} iz = i \sin z,\ \sin z = -i \operatorname{sh} iz,\ \operatorname{ch} iz = \cos z.$$

Із означення гіперболічних функцій випливає, що функції $\operatorname{sh} z, \operatorname{ch} z$ періодичні з періодом $2\pi i$; функції $\operatorname{th} z, \operatorname{cth} z$ мають період πi.

2.4 Диференційованість і аналітичність функції комплексної змінної

Означення. Нехай функція $f(z)$ визначена в деякому околі точки z. Тоді, якщо існує границя

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{df(z)}{dz} = f'(z),$$

то вона називається похідною від функції $f(z)$ комплексної змінної z, а функція $f(z)$ – диференційованою в точці z.

Нагадаємо, що функція двох дійсних змінних $u(x, y)$ називається диференційованою, або тією, яка має повний диференціал у даній точці (x, y), якщо у повному прирості функції в цій точці може бути виділена головна лінійна частина й нескінченно мала частина з вищим порядком малості відносно $\Delta x, \Delta y$, тобто

$$u(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - u(x, y) = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y, \qquad (6)$$

$\alpha, \beta \to 0$ при $\Delta x, \Delta y \to 0$, причому $A = \frac{\partial u}{\partial x},\ B = \frac{\partial u}{\partial y}$.

Теорема. Якщо функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ визначена в деякому околі точки $z = x + iy$, то для того, щоб функція $f(z)$ мала похідну в точці $z(x, y)$, необхідно і достатньо, щоб функції u і v були диференційовані в точці (x, y) по x і по y та виконувались умови:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y};\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\ \text{(Умови Коші-Рімана).}$$

Доведення.

Необхідність. Нехай функція $f(z)$ диференційована в точці $z = x + iy$. Потрібно довести, що функції $u(x, y)$, $v(x, y)$ диференційовані в точці (x, y) і у цій точці виконуються умови Коші-Рімана.

Так як функція $f(z)$ диференційована в точці z, то її приріст можна представити у вигляді:

$$f(z+\Delta z) - f(z) = c\Delta z + \gamma\Delta z,$$

причому $\gamma \to 0$ при $\Delta z \to 0$, а $c = f'(z)$, тобто

$$f(z+\Delta z) - f(z) = f'(z)\Delta z + \gamma\Delta z.$$

За означенням: $z = x + iy$, $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$;

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y);$$

$$f(z+\Delta z) = u(x+\Delta x,\ y+\Delta y) + iv(x+\Delta x,\ y+\Delta y).$$

$$f'(z) = A + iB,\ \gamma = \alpha + i\beta.\ \alpha, \beta \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0.$$

Тоді

$$f(z+\Delta z) - f(z) = [u(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - u(x, y)] + i[v(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - v(x, y)] =$$
$$= (A + iB)(\Delta x + i\Delta y) + (\alpha + i\beta)(\Delta x + i\Delta y).$$

Звідси,

$$u(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - u(x, y) = A\Delta x - B\Delta y + \alpha\Delta x - \beta\Delta x, \quad (7)$$

$$v(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - v(x, y) = B\Delta x + A\Delta y + \alpha\Delta y + \beta\Delta x. \quad (8)$$

Вирази (7) і (8) мають той же вигляд, що й (6). Порівнюючи їх, помічаємо

$$A = \frac{\partial u}{\partial x} \text{ і } B = -\frac{\partial u}{\partial y};\ A = \frac{\partial \nu}{\partial y} \text{ і } B = \frac{\partial \nu}{\partial x}, \text{ бо } f'(z) = A + iB = u'_x + iv'_x.$$

Звідси,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \nu}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial \nu}{\partial x}. \quad (9)$$

Таким чином, доведено, що якщо функція $f(z)$ диференційована в точці $z = x + iy$, то її дійсна й уявна частини $u(x, y), v(x, y)$ диференційовані в точці (x, y) і задовольняють умовам (9).

Враховуючи умови Коші-Рімана, похідну функції $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ можна знайти за формулами:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x};$$

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y};$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y};$$

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Приклад. Перевірити умови Коші-Рімана та знайти похідну функцій:

$$w = f(z) = z^2 \text{ та } w = z\,\mathrm{Re}\,z.$$

Розв'язання.

1) $z = x + iy$, тоді $\omega = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$, тому $u(x,y) = x^2 - y^2$, $v(x,y) = 2xy$.

Так як $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \frac{\partial v}{\partial y} = 2x; \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \frac{\partial v}{\partial x} = 2y$, то видно, що умови Коші-Рімана $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ виконуються.

Отже, $\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 2x + i2y = 2(x+iy) = 2z$.

2) $\omega = z\,\mathrm{Re}\,z = (x+iy)x = x^2 + xyi$, тому $u(x,y) = x^2$, $v(x,y) = xy$. Знаходимо $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \frac{\partial v}{\partial y} = x; \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = y.$ Так як $\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial y} \neq \frac{\partial v}{\partial x}$, то умови Коші-Рімана не виконуються і для функції $\omega = z\,\mathrm{Re}\,z$ похідної не існує.

Означення. Якщо функція $f(z)$ диференційована не тільки в даній точці z_0, але й у деякому околі цієї точки, то вона називається аналітичною в точці z_0.

Означення. Функція $f(z)$, аналітична у всіх точках області D, називається аналітичною в області D.

2.5 Інтеграл від функції комплексної змінної. Теорема Коші

Нехай $f(z)$ – неперервна функція комплексної змінної, визначена в кожній точці деякої дуги *AB*.

Розіб'ємо дугу *AB* на *n* частин, довільно вибираючи точки поділу $A = z_0, z_1, z_2, ..., z_{n-1}, z_n = B$ (рисунок 2.3). На кожній частині виберемо довільну точку ξ_i і утворимо суму:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k \text{, де } \Delta z_k = z_{k+1} - z_k.$$

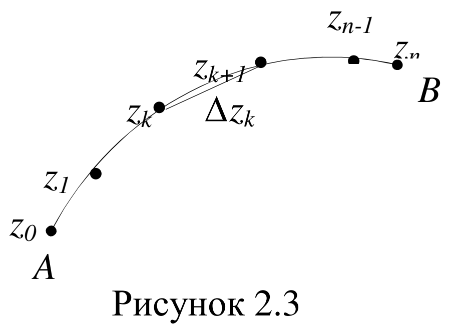


Рисунок 2.3

Границя цієї суми (при наближенні до нуля $\max|\Delta z_k|$) називається інтегралом від $f(z)$ уздовж дуги *AB* і позначається $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz$.

Тобто $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz = \lim\limits_{\max|\Delta z_k| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k$, де $|\Delta z_k|$ – довжина хорди, що стягує елементарну дугу $\overset{\frown}{z_k, z_{k+1}}$.

Властивості інтеграла. Із означення випливають наступні властивості:

1. $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} [f_1(z) \pm f_2(z)]dz = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f_1(z)dz \pm \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f_2(z)dz$.

2. $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} c\, f(z)dz = c\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz$, $c - const$.

3. $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz = -\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} f(z)dz$.

4. Якщо дуга AB розділена на частини точкою C, то

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz = \int\limits_{\overset{\frown}{AC}} f(z)dz + \int\limits_{\overset{\frown}{CB}} f(z)dz.$$

5. Оцінка модуля інтеграла.

Якщо на кривій $\overset{\frown}{AB}$, що має довжину L: $|f(z)| \le M$, то $\left|\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz\right| \le ML$.

Доведення.

$\left|\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k\right| \le \sum\limits_{k=1}^{n} |f(\xi_k)||\Delta z_k| \le M\sum\limits_{k=1}^{n}|\Delta z_k|$, $|\Delta z_k|$ – відстань між точками z_k і z_{k-1}, а $\sum\limits_{k=1}^{n}|\Delta z_k|$ – довжина ламаної, вписаної в дугу $\overset{\frown}{AB}$, тому $\sum\limits_{k=1}^{n}|\Delta z_k| \le L$.

Отже, $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k\right| \le ML$.

Переходячи до границі, одержимо $\left|\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz\right| \le ML$

6. Вираження інтеграла від функції комплексної змінної через криволінійні інтеграли ІІ-го роду.

Так як $f(z) = u(x,y) + i\upsilon(x,y)$ і $z_k = x_k + iy_k$, то

$$\sum_{k=1}^{n} f(z_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n}[u(x_k,y_k) + i\upsilon(x_k,y_k)](\Delta x_k + i\Delta y_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}[u(x_k,y_k)\Delta x_k - \upsilon(x_k,y_k)\Delta y_k] + i\sum_{k=1}^{n}[\upsilon(x_k,y_k)\Delta x_k + u(x_k,y_k)\Delta y_k].$$

Ці суми є інтегральними сумами криволінійних інтегралів ІІ-го роду. Тому граничний перехід за умови, що $\max\limits_k|\Delta z_k| \to 0$, тобто, $\max\limits_k|\Delta y_k| \to 0$ дозволяє записати формулу

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} u(x,y)dx - \upsilon(x,y)dy + i\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \upsilon(x,y)dx + u(x,y)dy.$$

Ця формула виділяє дійсну й уявну частини інтеграла.

7. Перетворення інтеграла функції комплексної змінної у звичайний інтеграл від комплексної функції дійсної змінної.

Якщо дуга *AB* задана параметричним рівнянням $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $t_1 \le t \le t_2$, то $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ – комплексне параметричне рівняння дуги *AB*. Тоді

$$\int\limits_{AB} f(z)dz = \int\limits_{t_1}^{t_2} f[x(t)+iy(t)]d[x(t)+iy(t)] =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} f[x(t)+iy(t)]\frac{d}{dt}[x(t)+iy(t)]dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} f[z(t)]z'(t)dt .$$

Дана формула зводить обчислення інтеграла від функції комплексної змінної до обчислення визначеного інтеграла дійсної змінної.

Приклад 1. Знайти $\oint\limits_{\gamma} \frac{dz}{z-z_0}$, де γ – коло радіуса R із центром у точці $z_0 = \alpha + i\beta$.

Розв’язання.

Рівняння кола: $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$ (рис. 2.4).
Нехай $x - \alpha = R\cos t$, $y - \beta = R\sin t$.

Рівняння $\begin{cases} x = \alpha + R\cos t, \\ y = \beta + R\sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$ є параметричним рівнянням кола, тоді його комплексне параметричне рівняння матиме вигляд:

$$z = x + iy = \alpha + i\beta + R(\cos t + i\sin t) = z_0 + Re^{it} .$$

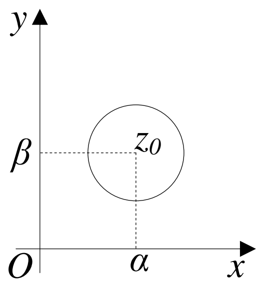


Рисунок 2.4

Продиференціювавши, отримаємо: $dz = d(z_0 + Re^{it}) = iRe^{it}dt$.

Тому $\oint\limits_{\gamma} \frac{dz}{z-z_0} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{iRe^{it}dt}{Re^{it}} = 2\pi i$.

Відповідь: $2\pi i$.

Основна теорема Коші. Якщо функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області D, обмеженій замкненим контуром $\tilde{A}$, а також у точках цього контуру, то інтеграл від цієї функції по контуру $\tilde{A}$ дорівнює нулю:

$$\oint\limits_{\tilde{A}} f(z)dz = 0 .$$

Доведення.

Нехай функція $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ аналітична в однозв'язній області D. Із аналітичності випливає існування неперервних частинних похідних від функцій $u(x,y)$, $v(x,y)$ в області D. Нехай $\tilde{A}$ – замкнений контур, що обмежує область D (рисунок 2.5).

Тоді $\oint\limits_{\tilde{A}} f(z)dz = \oint\limits_{\tilde{A}} u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\oint\limits_{\tilde{A}} v(x,y)dx + u(x,y)dy$.

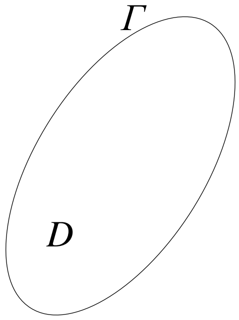


Рисунок 2.5

Використовуючи формулу Гріна

$$\oint_{\tilde{A}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy,$$

отримаємо

$$\oint_{\tilde{A}} f(z)dz = \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy + i \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy.$$

Так як функція $f(z)$ аналітична, то виконуються умови Коші-Рімана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Отже,

$$\oint_{\tilde{A}} f(z)dz = 0.$$

Приклад 2. Обчислити інтеграли:

1) $\oint_{\tilde{A}} (z^2 - 3z)dz$;

2) $I = \oint_{\tilde{A}} \frac{dz}{z - z_0}$, якщо *а*) $\tilde{A} : |z - z_0| = R$;

б) $\tilde{A}$ – контур, що не містить точки z_0.

Розв'язання.

1) Так як функція $f(z) = z^2 - 3z$ аналітична на всій площині, то $\oint_{\tilde{A}} (z^2 - 3z)dz = 0$ по будь-якому замкненому контуру.

2) $I = \oint_{\tilde{A}} \frac{dz}{z - z_0}$, якщо *а*) $\tilde{A} : |z - z_0| = R$.

Із вище доведеного (приклад 1) $I = \oint_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$. Відмітимо, що точка z_0 лежить усередині кола $|z - z_0| = R$ і функція $f(z)$ у цій точці не аналітична.

б) Якщо ж $\tilde{A}$ – контур, що не містить точки z_0, то $I = \oint_{\tilde{A}} \frac{dz}{z - z_0} = 0$.

Відповідь: 0; $2\pi i$, 0.

Теорема. Якщо функція $f(z)$ аналітична в багатозв'язній області D, обмеженій зовнішнім контуром $\tilde{A}$ і внутрішніми контурами $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, а також на контурах $\tilde{A}$, $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, то має місце формула

$$\oint_{\tilde{A}} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{\gamma_k} f(z)dz.$$

Доведення.

Доведемо теорему при n=2.

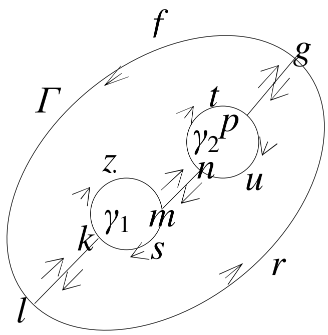


Рисунок 2.6

Нехай в області, обмеженій контуром $\tilde{A}$ є два контури γ_1, γ_2 і $f(z)$ функція, аналітична в області, що знаходиться між контурами $\tilde{A}$ та γ_1, γ_2, а також на всіх цих контурах.

Проведемо дуги: lk, mn, pg, що з'єднують контур Г з γ_1, γ_1 з γ_2, γ_2 з $\tilde{A}$ і позначимо через C_1 замкнений контур $lkzmntpgfl$, а через C_2 – $klrgpunmsk$ (рисунок 2.6). Тоді області всередині

всередині контурів C_1 і C_2 однозв'язні й для них справедлива основна теорема Коші:

$$\oint_{C_1} f(z)dz = 0, \ \oint_{C_2} f(z)dz = 0.$$

Додавши ці рівності й, використовуючи 3-тю властивість для інтегралів, можна помітити, що інтегрування по кожнійій з дуг lk, mn, pq відбувається двіччі в різних напрямках, а обхід контурів γ_1, γ_2 відбувається за годинниковою стрілкою (тобто, у від'ємному напрямку). Отже,

$$\oint_{\tilde{A}} f(z)dz - \oint_{\gamma_1} f(z)dz - \oint_{\gamma_2} f(z)dz = 0,$$

звідки випливає необхідне.

2.6 Інтеграл Коші. Інтегральна формула Коші

Теорема. Нехай функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області D, обмеженій замкненим контуром $\tilde{A}$, і на самому контурі. Тоді значення функції в будь-якій точці $z_0 \in D$ знаходиться за формулою

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\tilde{A}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Доведення.

Нехай $f(z)$ – аналітична функція в області, обмеженій замкненим контуром $\tilde{A}$ і на самому контурі. Зафіксуємо точку z_0 усередині контура $\tilde{A}$ і розглянемо функцію

$$\varphi(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Ця функція аналітична у всіх точках контура $\tilde{A}$ й на ньому, за винятком точки z_0. Тобто при $z = z_0$ одержимо невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$, яка розкривається, тому що, при $z \to z_0$ $\varphi(z) \to f'(z_0)$. Тому, якщо доозначити функцію $\varphi(z)$ у точці z_0 умовою $\varphi(z) = f'(z_0)$, то $\varphi(z)$ стане неперервною функцією у всій області, обмеженій замкненим контуром.

Отже, й сама функція буде обмеженою, тобто $\left|\varphi(z)\right| < M$, де M – деяке додатне число.

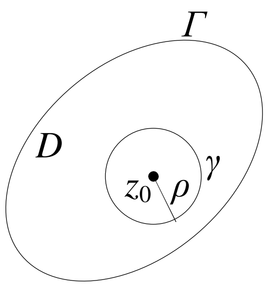


Рисунок 2.7

Нехай γ – коло радіусом ρ із центром у точці z_0, що лежить усередині $\tilde{A}$ (рисунок 2.7). В області, обмеженій контурами $\tilde{A}$ і γ функція $\varphi(z)$ – аналітична, так як точка $z = z_0$ (у якій аналітичність порушується) викинута з області.

Застосуємо теорему Коші для багатозв'язної області, тоді $\oint\limits_{\tilde{A}} \varphi(z)dz = \oint\limits_{\gamma} \varphi(z)dz$.

За правилом оцінки модуля інтеграла, матимемо:

$$\left|\oint\limits_{\gamma} \varphi(z)dz\right| \le ML_{\tilde{A}} = 2\pi\rho M \ .$$

Переходячи до границі при $\rho \to 0$ в останній рівності, одержимо

$$\oint\limits_{\tilde{A}} \varphi(z)dz = 0 \ ,$$

або

$$\oint\limits_{\tilde{A}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0 \ \Rightarrow \oint\limits_{\tilde{A}} \frac{f(z)dz}{z - z_0} - f(z_0) \oint\limits_{\tilde{A}} \frac{dz}{z - z_0} = 0 \ . \tag{10}$$

За теоремою Коші для багатозв'язного контура $\oint\limits_{\tilde{A}} \frac{dz}{z - z_0} = \oint\limits_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$. Тому рівність (10) набуває вигляду:

$$\oint\limits_{\tilde{A}} \frac{f(z)dz}{z - z_0} - 2\pi i f(z_0) = 0 \ .$$

Звідси,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\tilde{A}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Ця формула називається інтегральною формулою Коші, а інтеграл, що знаходиться у правій її частині називається інтегралом Коші. З формули бачимо, що значення аналітичної функції всередині $\tilde{A}$ цілком визначається значеннями цієї функції на границі C .

Приклад. Обчислити інтеграл $I = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\tilde{A}} \frac{z^2 dz}{z + 1}$, де $\tilde{A}$: 1) $\left|z\right| = 2$; 2) $\left|z\right| = \frac{1}{2}$.

Розв'язання.

1) З умови $I = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\tilde{A}} \frac{z^2 dz}{z + 1}$ функція $f(z) = z^2$ аналітична всюди. Точка $z_0 = -1$ лежить усередині круга $\left|z\right| < 2$, тому за формулою Коші $I = f(-1) = 1$.

2) точка $z_0 = -1$ лежить поза кругом $\left|z\right| \le \frac{1}{2}$, тому за теоремою Коші $I = 0$.

Відповідь: 1; 0.

2.8 Похідні вищих порядків від аналітичної функції

Теорема. Аналітична функція нескінченно раз диференційована, причому справедлива формула

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{\tilde{A}}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z)^{n+1}}.$$

Доведення.

Ми показали, що якщо функція $f(z)$ аналітична в області D, обмеженій контуром $\tilde{A}$ і на самому контурі, то значення функції в будь-якій точці z, що лежить в області D, знаходиться за інтегральною формулою Коші

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\tilde{A}}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi.$$

Яка б не була точка z завжди можна вибрати величину Δz таку, що нова точка $z+\Delta z$ теж буде лежати усередині області D. Будемо, наприклад, вважати $|\Delta z|$ меньшим найкоротшої відстані від точки z до границі області. Тоді для нової точки $z+\Delta z$, за формулою Коші

$$f(z+\Delta z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\tilde{A}}\frac{f(\xi)}{\xi-z-\Delta z}d\xi.$$

Розглянемо

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{1}{2\pi i\Delta z}\oint_{\tilde{A}}\left[\frac{f(\xi)}{\xi-z-\Delta z}-\frac{f(\xi)}{\xi-z}\right]d\xi.$$

Після перетворення,

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\tilde{A}}\frac{f(\xi)}{(\xi-z-\Delta z)(\xi-z)}d\xi.$$

При $\Delta z\to 0$, одержимо

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\tilde{A}}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}d\xi. \tag{11}$$

Отримали формулу для $n=1$. Замінюючи в формулі (11) z на $z+\Delta z$, можна скласти нове відношення: $\dfrac{f'(z+\Delta z)-f'(z)}{\Delta z}$ і одержати формулу для другої похідної:

$$f''(z)=\frac{2}{2\pi i}\oint_{\tilde{A}}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^3}d\xi \text{ і т.д.}$$

Отже, $f^{(n)}(z)=\dfrac{n!}{2\pi i}\oint_{\tilde{A}}\dfrac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}d\xi$.

З аналітичності функції в деякій точці випливає існування в околі цієї ж точки похідних будь-якого порядку, а, відповідно, і їх аналітичність.

2.8 Ряди аналітичних функцій

Означення. Степеневим рядом називається ряд виду $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n$, де C_n – сталі комплексні числа (коефіцієнти ряду). Для степеневих рядів справедливі наступні властивості:

1. Для степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n$, що має як точки збіжності, так і точки роззбіжності, завжди існує таке дійсне число $R \geq 0$, що усередині круга $|z-z_0|<R$ розглянутий ряд збігається, а поза цим кругом – роззбігається. Область $|z-z_0|<R$ називається областю збіжності, а число R – радіусом збіжності степеневого ряду.

2. Сума степеневого ряду є аналітичною функцією в області збіжності.

3. Степеневий ряд в крузі радіуса $\rho<R$ збігається рівномірно. Його можна почленно диференціювати й почленно інтегрувати по будь-якій дузі, що лежить в області збіжності. При цьому, радіус збіжності кожного отриманого ряду дорівнює радіусу збіжності вихідного ряду.

Приклад. Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1+i)^n}{2^n}$.

Розв'язання. Скористаємося ознакою Даламбера

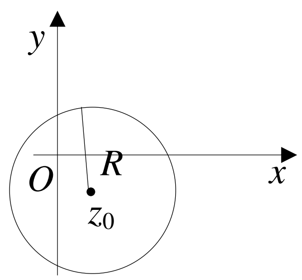


Рисунок 2.8

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(z-1+i\right)^{n+1}2^n}{2^{n+1}\left(z-1+i\right)^n}\right| = \frac{1}{2}|z-1+i|<1,$$ тоді $|z-1+i|<2$, де $z_0=1-i$ і $R=2$.

Так як $|z-1+i|=|x+iy-1+i|<2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{\left(x-1\right)^2+\left(y+1\right)^2}<2$, а остання нерівність визначає область, обмежену колом з центром в точці $z_0(1,-1)$ і радіусом $R=2$.

2.8.1 Ряд Тейлора

Степеневий ряд усередині своєї області збіжності визначає аналітичну функцію – суму ряду. Справедливе й обернене твердження.

Теорема. Будь-яка функція $f(z)$, аналітична усередині круга з центром в точці z_0, розкладається в цьому крузі в степеневий ряд виду:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n,$$

коефіцієнти якого обчислюються за формулою: $C_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, $n=0, 1, 2,.....$

Доведення.

Розглянемо функцію $f(z)$, аналітичну в крузі k із центром у точці z_0.

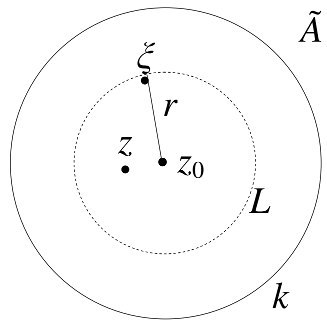


Рисунок 2.9

Нехай z довільна точка круга. Тоді за інтегральною формулою Коші $f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\tilde{A}}\dfrac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi.$

Проведемо всередині k коло L з центром в точці z_0 радіусом r так, щоб точка z була всередині цього кола (рисунок 2.9).

Тоді рівняння кола L: $|\xi-z_0|=r$.

Відстань між точками z і z_0 буде меньша r.

Розглянемо дріб

$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{\xi-z_0-(z-z_0)}=\frac{1}{\xi-z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\xi-z_0}}, \tag{12}$$

де $\dfrac{z-z_0}{\xi-z_0}=q\Rightarrow|q|<1$.

Вираз (12) можна розглядати як суму спадної геометричної прогресії з першим членом $\dfrac{1}{\xi-z_0}$ і знаменником $\dfrac{z-z_0}{\xi-z_0}$. Тоді згідно формули суми геометричної прогресії $\dfrac{a}{1-q}=a+aq+aq^2+\ldots$, отримаємо:

$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{\xi-z_0}+\frac{z-z_0}{(\xi-z_0)^2}+\frac{(z-z_0)^2}{(\xi-z_0)^3}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}}. \tag{13}$$

Перемноживши ряд (13) на $f(\xi)$, одержимо:

$$\frac{f(\xi)}{\xi-z}=\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}+\frac{(z-z_0)f(\xi)}{(\xi-z_0)^2}+\frac{(z-z_0)^2 f(\xi)}{(\xi-z_0)^3}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}. \tag{14}$$

Так як $|\xi-z_0|=r$, враховуючи аналітичність функції $|f(\xi)|<M$ при $\xi\in L$, то

$$\left|\frac{(z-z_0)^n f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\right|=\left|\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right|^n\cdot\frac{|f(\xi)|}{|\xi-z_0|}\le|q|^n\cdot\frac{M}{r}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|q|^n\cdot\dfrac{M}{r}=\dfrac{M}{r}\sum\limits_{n=0}^{\infty}|q|^n$ збігається і є мажорантним до ряду (14), тому ряд (14) збіжний і його можна почленно інтегрувати

$$f(z)=\oint\limits_L\left[\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}+\frac{(z-z_0)f(\xi)}{(\xi-z_0)^2}+\frac{(z-z_0)^2 f(\xi)}{(\xi-z_0)^3}+\ldots\right]d\xi=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}d\xi+\frac{(z-z_0)}{2\pi i}\oint\limits_L\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^2}d\xi+\frac{(z-z_0)^2}{2\pi i}\oint\limits_L\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^3}d\xi+\ldots=$$

$$= f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+\ldots . \qquad (15)$$

Отже,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n \text{ , де } C_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi .$$

Степеневий ряд (15) називається рядом Тейлора для функції $f(z)$.

2.8.2 Ряд Лорана

Раніше було показано, що областю збіжності степеневого ряду

$$C_0+C_1(z-z_0)+C_2(z-z_0)^2+\ldots+C_n(z-z_0)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$$

є круг: $|z-z_0|<R$.

Розглянемо ряд

$$\frac{C_1}{z-z_0}+\frac{C_2}{(z-z_0)^2}+\ldots+\frac{C_n}{(z-z_0)^n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}C_n(z-z_0)^{-n} . \qquad (16)$$

Зробимо заміну $\frac{1}{z-z_0}=\zeta$ та отримаємо ряд:

$$C_1\zeta+C_2\zeta^2+\ldots+C_n\zeta^n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\zeta^n .$$

Даний степеневий ряд збігається в крузі $|\zeta|<\rho$. Переходячи від ζ до змінної z, одержимо: $\frac{1}{|z-z_0|}<\rho$, $|z-z_0|>\frac{1}{\rho}$, тобто областю збіжності ряду (16) є зовнішня частина кола із центром в точці z_0 і радіусом $z=\frac{1}{\rho}$.

Розглянемо ряд, нескінченний в обидва боки

$$\ldots+\frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n}+\ldots+\frac{C_{-1}}{(z-z_0)^1}+C_0+C_1(z-z_0)+\ldots+C_n(z-z_0)^n+\ldots=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n(z-z_0)^n . \qquad (17)$$

Даний ряд буде збіжним, якщо одночасно збігатимуться ряди:

$$\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n \text{ і } \sum_{n=-\infty}^{-1}C_n(z-z_0)^n .$$

Область збіжності першого ряду є круг радіусом R із центром у точці z_0. Область збіжності другого ряду є зовнішність деякого кола радіусом r із центром у точці z_0. Якщо $0<r<R$ (рисунок 2.10), то їх спільна частина – кільце є областю збіжності ряду (17).

Множина точок z, що знаходяться в кільці задовольняють нерівність

$$r < \left|z - z_0\right| < R .$$

Якщо $r > R$, то ряд (17) не має точок збіжності. Якщо $R = r$, то ряд (17) може мати точки збіжності лише на колі $r = R$.

Сума ряду (17) є аналітичною функцією в кільці збіжності.

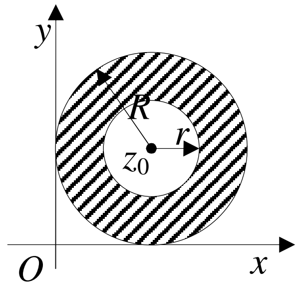


Рисунок 2.10

Справедливе зворотне твердження, що називається теоремою Лорана.

Теорема Лорана. Будь-яка функція, аналітична всередині кільця $0 < r < \left|z - z_0\right| < R$ з центром в точці z_0, може бути розкладена в цьому кільці в ряд

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n ,$$

коефіцієнти якого визначаються формулами

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz , \ n = 0; \pm 1; \pm 2; ...,$$

а L – будь-яке коло з центром у точці z_0, що лежить усередині даного кільця (без доведення).

Даний ряд називається рядом Лорана для функції $f(z)$ в розглянутому кільці.

2.9 Ізольовані особливі точки

Точки площини, у яких функція $f(z)$ є аналітичною, будемо називати правильними точками цієї функції, а точки, у яких функція $f(z)$ не є аналітичною, зокрема, точки, у яких функція $f(z)$ невизначена, називаються особливими точками. Особлива точка називається ізольованою, якщо в деякому її околі немає інших особливих точок.

Якщо z_0 ізольована особлива точка функції $f(z)$, то в достатньо малому околі з виколотим центром z_0, що є кільцем із внутрішнім радіусом, рівним нулю, функція $f(z)$ буде аналітичною й розкладається в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n} . \qquad (18)$$

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$ називається правильною частиною, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n}$ називається головною частиною розкладу функції $f(z)$ (18).

Можливо три випадки:

1. У розкладі (18) відсутня головна частина.

В цьому випадку точка z_0 називається усувною особливою точкою (УОТ).

$$f(z)=C_0+C_1(z-z_0)+\ldots+C_n(z-z_0)^n+\ldots,$$
$$\lim_{z\to z_0} f(z)=C_0.$$

Отже, якщо доозначити функцію $f(z)$ в точці z_0, прийнявши $f(z_0)=C_0$, то точка z_0 стане правильною.

Приклад 1. Знайти особливі точки функції $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ і визначити їх тип.

Розв'язання. $z=0$ – особлива точка. Розклад функції $f(z)=\sin z$ в ряд: $\sin z=z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}-\ldots$, тоді $\dfrac{\sin z}{z}=1-\dfrac{z^2}{3!}+\dfrac{z^4}{5!}-\ldots$ і $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}=1$.

Поклавши $f(0)=1$, невизначеність $\dfrac{0}{0}$ можна усунути. Отже, $z=0-$ УОТ.

Відповідь: $z=0$ – УОТ.

Якщо z_0 – усувна особлива точка (УОТ), то існує границя $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$, що дорівнює константі.

2. Головна частина містить кінцеве число членів.

Точка z_0 називається полюсом *k*-го порядку (П*k*П), якщо

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n+\frac{C_{-1}}{(z-z_0)}+\ldots+\frac{C_{-k}}{(z-z_0)^k},$$ де k – порядок полюса.

Приклад 2. Знайти особливі точки функції $f(z)=\dfrac{\cos z}{z}$ і визначити їх тип.

Розв'язання. $z=0$ – особлива точка. Розклад функції $f(z)=\cos z$ в ряд: $\cos z=1-\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^4}{4}-\ldots$, тоді $\dfrac{\cos z}{z}=\dfrac{1}{z}-\dfrac{z}{2!}+\dfrac{z^3}{4!}-\ldots$

Отже, $z=0$ – полюс першого порядку (П1П).

Відповідь: $z=0$ – П1П.

Якщо z_0 – полюс (П), то границя $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$. Полюс першого порядку називається простим полюсом. Точка z_0 буде полюсом *к*-го порядку функції $f(z)$, якщо $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)^k=C\neq 0$.

3. Головна частина містить нескінченне число членів.

Точка z_0 називається істотно особливою (ІОТ).

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n(z-z_0)^n.$$

Приклад 3. Знайти особливі точки функції $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ і визначити їх тип.

Розв'язання. $z=0$ – особлива точка. Розклад функції в ряд: $e^{\frac{1}{z}}=1+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{2!z^2}+\dfrac{1}{3!z^3}+\ldots$

Отже, $z=0$ – істотно особлива точка (ІОТ).

Відповідь: $z=0$ – ІОТ.

Якщо z_0 – істотно особлива точка (ІОТ), то границя $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ не існує.

2.10 Лишки. Основна теорема про лишки

Нехай z_0 – ізольована особлива точка функції $f(z)$. В околі цієї точки функцію $f(z)$ можна розкласти в ряд Лорана:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n+\frac{C_{-1}}{z-z_0}+\frac{C_{-2}}{(z-z_0)^2}+\ldots,$$

коефіцієнти якого визначаються за формулами:

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\tilde{A}}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\,,\ n=0;\pm1;\pm2;\ldots$$

Означення. Коефіцієнт при $(z-z_0)^{-1}$ в розкладі Лорана, тобто число C_{-1} називається лишком функції $f(z)$ відносно особливої точки z_0 й позначається $C_{-1}=\operatorname*{Res}\limits_{z=z_0} f(z)$ або $C_{-1}=\underset{z_0}{\hat{A}\hat{u}\div} f(z)$.

З формули для коефіцієнтів ряду Лорана слідує, що

$$C_{-1}=\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} f(z)dz\,.$$

Основна теорема про лишки. Якщо функція $f(z)$ аналітична всередині замкненого контура $\tilde{A}$ й на ньому, за винятком кінцевого числа точок $z_1, z_2,\ldots,z_n$ усередині $\tilde{A}$, які є полюсами, то $\oint_{\tilde{A}} f(z)dz$ дорівнює добутку $2\pi i$ на суму лишків відносно особливих точок функції $f(z)$, що лежать усередині області, обмеженої контуром $\tilde{A}$

$$\oint_{\tilde{A}} f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)\,. \qquad (19)$$

Доведення.

Особливі точки, що лежать усередині області, обмеженої контуром $\tilde{A}$, виділимо околами $\gamma_1,\ \gamma_2,\ldots,\ \gamma_n$ настільки малих радіусів, щоб вони лежали всередині області, обмеженої контуром $\tilde{A}$ і не перетиналися (рисунок 2.11).

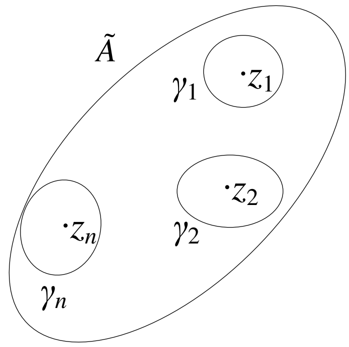


Рисунок 2.11

За теоремою Коші для багатозв’язної області, матимемо:

$$\oint_{\tilde{A}} f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\oint_{\gamma_k} f(z)dz\,. \qquad (20)$$

Із означення лишка:

$$\oint_{\gamma_k} f(z)dz=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)\,. \qquad (21).$$

Підставляючи (21) в (20), одержимо формулу (19).

Отже, щоб обчислити інтеграл, потрібно знати формули для обчислення лишків.

Обчислення лишків

1. Якщо функція $f(z)$ аналітична у точці z_0 або z_0 – усувна особлива точка (УОТ) функції $f(z)$, то $\underset{z=z_0}{\mathrm{Res}} f(z)=0$.

2. Нехай z_0 – простий полюс функції $f(z)$, тоді

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n + \frac{C_{-1}}{z-z_0}.$$

Почленно перемноживши ліву і праву частини на $(z-z_0)$, одержимо:

$$f(z)(z-z_0)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^{n+1} + C_{-1}.$$

Перейдемо до границі при $z\to z_0$, тоді $C_{-1}=\lim\limits_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)$.

Отже, якщо z_0 – простий полюс функції $f(z)$, то

$$\underset{z=z_0}{\mathrm{Res}} f(z)=\lim_{z\to z_0}\left[f(z)(z-z_0)\right].$$

Якщо функцію $f(z)$ можна представити у вигляді $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, де функції $\varphi(z),\ \psi(z)$ – аналітичні в точці $z_0,\ \psi(z_0)=0,\ \psi'(z_0)\neq 0$, то

$$\underset{z=z_0}{\mathrm{Res}} f(z)=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Якщо точка z_0 – полюс *к*-го порядку функції $f(z)$, то

$$\underset{z=z_0}{\mathrm{Res}} f(z)=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0}\left[f(z)(z-z_0)^k\right]^{(k-1)}$$

або

$$\underset{z=z_0}{\mathrm{Res}} f(z)=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{k-1}\left[f(z)(z-z_0)^k\right]}{dz^{k-1}}.$$

3. Якщо z_0 – істотно особлива точка (ІОТ) функції $f(z)$, то її лишок у даній точці знаходиться з безпосереднього розкладу функції $f(z)$ в ряд Лорана $\underset{z=z_0}{\mathrm{Res}} f(z)=C_{-1}$.

Приклад. Обчислити інтеграл $\oint\limits_{\tilde{A}} \dfrac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$, де $\tilde{A}: |z-1-i|=2$.

Розв'язання.

Особливі точки підінтегральної функції: $z_{1,2}=1,\ z_3=-i,\ z_4=i$.

Точки $z_{1,2}=1,\quad z_4=i$ знаходяться в області, обмеженій контуром $\tilde{A}: |z-1-i|=2$ (рисунок 2.12).

Визначимо тип особливих точок:

1) $z_{1,2}=1$. $\lim\limits_{z\to 1}\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}=\infty$.

Отже, $z_{1,2}=1$ – полюс. Знайдемо порядок полюса:

$$\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)^2}{(z-1)^2(z^2+1)}=\lim_{z\to 1}\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{2}\neq 0.$$

Тоді $z_{1,2}$=1 – полюс 2-го порядку (П2П).

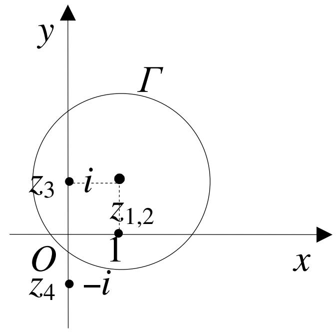


Рисунок 2.12

2) $z_4=i$. $\lim\limits_{z\to i}\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}=\lim\limits_{z\to i}\frac{1}{(z-1)^2(z+i)(z-i)}=\infty$. $z_4=i$ – полюс.

Порядок полюса: $\lim\limits_{z\to i}\frac{(z-i)}{(z-1)^2(z+i)(z-i)}=\lim\limits_{z\to i}\frac{1}{(z-1)^2(z+i)}=\frac{1}{4}$. Отже, $z_4=i$ – простий полюс (ПП).

Знаючи типи особливих точок, знайдемо лишки функції в даних точках:

1) так як $z_{1,2}=1$ – П2П, то $\operatorname*{Res}\limits_{z=1} f(z)=\lim\limits_{z\to 1}\left[\frac{(z-1)^2}{(z-1)^2(z^2+1)}\right]'=\lim\limits_{z\to 1}\frac{-2z}{(z^2+1)^2}=-\frac{1}{2}$;

2) так як $z_4=i$ – ПП, то $\operatorname*{Res}\limits_{z=i} f(z)=\lim\limits_{z\to i}\frac{(z-i)}{(z-1)^2(z+i)(z-i)}=\lim\limits_{z\to i}\frac{1}{(z-1)^2(z+i)}=\frac{1}{4}$.

Тоді $\oint\limits_{|z-1-i|=2}\frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}=2\pi i\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=-\frac{\pi i}{2}$.

Для $z_4=i$ – ПП, функцію $\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}$ можна представити у вигляді

$\frac{\frac{1}{(z-1)^2(z+i)}}{z-i}$, тоді $\operatorname*{Res}\limits_{z=i} f(z)=\lim\limits_{z\to i}\frac{\frac{1}{(z-1)^2(z+i)}}{(z-i)'}=\lim\limits_{z\to i}\frac{1}{(z-1)^2(z+i)}=\frac{1}{4}$.

Відповідь: $-\frac{\pi i}{2}$.

2.11 Обчислення невласних інтегралів

Невласні інтеграли дійсної змінної можна знаходити з допомогою лишків:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z), \tag{22}$$

де $z=z_k$ – ізольовані особливі точки функції $f(z)$, які знаходяться над віссю абсцис, а функція $f(z)$ задовольняє умові: $|z|\cdot f(z)\to 0$ при $|z|\to\infty$.

Якщо ж $z=z_i$ – ізольовані особливі точки функції $f(z)$, які розташовані на осі абсцис і $|z|\cdot f(z)\to 0$ при $|z|\to\infty$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_i} f(z). \qquad (23)$$

Приклад 1. Обчислити $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Розв'язання. Введемо функцію $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$. Так як $\frac{z}{1+z^2} \to 0$ при $|z| \to \infty$, то можна використовувати вище зазначені формули.

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \oint_C \frac{dz}{1+z^2} = \oint_C \frac{dz}{(z-i)(z+i)}$, C – границя півкруга достатньо великого радіуса, що містить всі особливі точки півплощини.

Особливі точки функції: $z_1 = i,\ z_2 = -i$.

Над віссю абсцис знаходиться точка $z_1 = i$, яка є простим полюсом функції $f(z) = \frac{1}{(z-i)(z+i)}$, тоді

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z\to i} \frac{(z-i)}{(z-i)(z+i)} = \lim_{z\to i} \frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i}.$$

Так як особлива точка знаходиться над віссю абсцис, то, використовуючи формулу (22), отримаємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi.$$

Відповідь: π.

Приклад 2. Обчислити $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}$.

Розв'язання. Введемо функцію $f(z) = \frac{1}{\left(1+z^2\right)^2}$. Так як $\frac{z}{\left(1+z^2\right)^2} \to 0$ при $|z| \to \infty$, то можна використовувати вище зазначені формули.

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2} = \oint_C \frac{dz}{\left(1+z^2\right)^2} = \oint_C \frac{dz}{(z-i)^2(z+i)^2}$, C – границя півкруга, який містить всі особливі точки півплощини.

Особливі точки функції: $z_1 = i,\ z_2 = -i$.

Над віссю абсцис знаходиться точка $z_1 = i$, яка є полюсом другого порядку функції $f(z) = \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}$. Тоді,

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z\to i}\left[\frac{(z-i)^2}{(z-i)^2(z+i)^2}\right]' = \lim_{z\to i}\left[\frac{1}{(z+i)^2}\right]' = \lim_{z\to i}\left[\frac{-2}{(z+i)^3}\right] = -\frac{2}{8i^3} = -\frac{i}{4}.$$

Згідно формули (22), маємо $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2} = 2\pi i\left(-\frac{i}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Відповідь: $\dfrac{\pi}{2}$.

Приклад 3. Обчислити $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{dx}{\left(x^2+1\right)\left(x-1\right)}$.

Розв'язання. Введемо функцію $f(z)=\dfrac{1}{\left(z^2+1\right)\left(z-1\right)}$. $\dfrac{z}{\left(z^2+1\right)\left(z-1\right)}\to 0$ при $|z|\to\infty$, то можна використовувати формули (22) і (23).

$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{dx}{\left(x^2+1\right)\left(x-1\right)}=\oint\limits_{N}\dfrac{dz}{\left(z^2+1\right)\left(z-1\right)}=\oint\limits_{N}\dfrac{dz}{(z-i)(z+i)\left(z-1\right)}$, C – границя півкруга, який містить всі особливі точки півплощини.

Особливі точки функції: $z_1=i,\ z_2=-i,\ z_3=1$.

Над віссю абсцис знаходиться точка $z_1=i$ (П1П), на осі абсцис – точка $z_3=1$ (П1П) функції $f(z)=\dfrac{1}{(z-i)(z+i)\left(z-1\right)}$. Тоді,

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z)=\lim_{z\to i}\frac{(z-i)}{(z-i)(z+i)\left(z-1\right)}=\frac{1}{-2-2i}=\frac{-1+i}{4};$$

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z)=\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)}{(z^2+1)\left(z-1\right)}=\frac{1}{2}.$$

Використовуючи формули (22) і (23) отримаємо

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)\left(x-1\right)}=2\pi i\left(\frac{-1+i}{4}\right)+\pi i\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}.$$

Відповідь: $-\dfrac{\pi}{2}$.

2.12 Завдання для самостійної роботи

2.12.1 Побудувати область G на комплексній площині (геометричне тлумачення).

1.01. $G:\left|z+1-zi\right|=3$.

1.02. $G:\left|z-1-i\right|=2$.

1.03. $G:\left|z+1-i\right|=1$.

1.07. $G:\left|z+2\right|-\left|z-1\right|=3$.

1.04. $G:\operatorname{Re}z-\operatorname{Im}z=2$.

1.05. $G:0\le\arg z\le\pi/4$..

1.06. $G:\left|z-1\right|+\left|z+1\right|=3$.

1.08. $G:\operatorname{Re}\dfrac{1}{z}=2$.

1.09. $G:\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right|=1$.

1.10. $G:\left|z-1+i\right|<2$.

1.11. $G:\operatorname{Re}z>2$.

1.12. $G:\operatorname{Im}z\le-1$.

1.13. $G:0<\operatorname{Re}z<2$.

1.14. $G:0\le Imz\le 3$.

1.15. $G:\left|z\right|+\operatorname{Re}z\le 1$.

1.16. $G:0<\arg z<\pi/4$.

1.17. $G:-\dfrac{\pi}{4}\le\arg z\le 0$.

1.18. $G:\left|z-2\right|+\left|z+2\right|=5$.

1.19. $G: 0 < \operatorname{Re}(iz) < 1$.
1.20. $G: |z| = 1 + \operatorname{Re} z$.
1.21. $G: \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < 1$.
1.22. $G: |2z| > |1 + z|$.
1.23. $G: |z| < \arg z$, якщо $0 \le \arg z < 2\pi$.
1.24. $G: \operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z \le 2$.
1.25. $G: |2z + 1 - 2i| = 2$.
1.26. $G: |2z - 1 - i| = 1$.
1.27. $G: |2z + 1 - i| = 2$.
1.28. $G: \operatorname{Re}(2z) - \operatorname{Im}(2z) = 1$.
1.29. $G: \arg z = \pi/4, \operatorname{Re} z \le 2$.
1.30. $G: 0 < \operatorname{Re} z \le 1$.

2.12.2 З'ясувати, чи є функція аналітичною: якщо так, то знайти її похідну в заданій точці.

2.01.	$\omega = (\operatorname{Re} z)^2 \cdot \mathrm{e}^z$,	$z_0 = -1$.	2.16.	$\omega = (z-1)^2 + z + i + 1$,	$z_0 = 0$.
2.02.	$\omega = \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z \cdot \sin z$,	$z_0 = 0$.	2.17.	$\omega = (z-1) \cdot \mathrm{e}^{z+i}$,	$z_0 = 1 - i$.
2.03.	$\omega = \operatorname{Im} z \cdot \cos z$,	$z_0 = \pi/3$.	2.18.	$\omega = (1 - z)\sin z$,	$z_0 = \pi/4$.
2.04.	$\omega = \operatorname{Re} z \cdot \mathrm{e}^z$,	$z_0 = 0$.	2.19.	$\omega = \mathrm{e}^{-iz^2}$,	$z_0 = i$.
2.05.	$\omega = z - \ln z$,	$z_0 = 1$.	2.20.	$\omega = i + \mathrm{e}^{-iz}$,	$z_0 = 1 - i$.
2.06.	$\omega = 9z - ie^z$,	$z_0 = i$.	2.21.	$\omega = z - e^z$,	$z_0 = -1 - i$.
2.07.	$\omega = 8z^2 - \sin z$,	$z_0 = 1 - i$.	2.22.	$\omega = z + \sin z$,	$z_0 = 2i - 1$
2.08.	$\omega = 2z^2 - i(z+1)$,	$z_0 = -i$.	2.23.	$\omega = (i+1) + e^z$,	$z_0 = 2i$.
2.09.	$\omega = (iz)^4 - i$,	$z_0 = i$.	2.24.	$\omega = i\sin(z+1)$,	$z_0 = i$.
2.10.	$\omega = ze^z + ie^z$,	$z_0 = i$.	2.25.	$\omega = \frac{1}{i}\cos(z - i)$,	$z_0 = i + 1$.
2.11.	$\omega = (z - \bar{z})\cos z$,	$z_0 = 0$.	2.26.	$\omega = \left(\operatorname{Re}\frac{z}{3}\right)^2 \cdot \mathrm{e}^{\frac{z}{3}}$,	$z_0 = 2i$.
2.12.	$\omega = z \cdot \bar{z} \cdot \mathrm{e}^z$,	$z_0 = 1$.	2.27.	$\omega = \operatorname{Re}\left(\frac{z}{2}\right)\operatorname{Im}\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{z}{2}\right)$,	$z_0 = \pi$.
2.13.	$\omega = z \cdot \cos \bar{z}$,	$z_0 = \pi/3$.	2.28.	$\omega = \operatorname{Im}\left(\frac{z}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{z}{2}\right)$,	$z_0 = \pi/6$.
2.14.	$\omega = \sin(i+z) + z^2 + 1$,	$z_0 = -1$.	2.29.	$\omega = \operatorname{Re}\left(\frac{z}{2}\right) \cdot \mathrm{e}^{\frac{z}{2}}$,	$z_0 = 1$.
2.15.	$\omega = i(1-z) + e^z$,	$z_0 = -i$	2.30.	$\omega = 2z - \ln(2z)$,	$z_0 = 2$.

2.12.3 Обчислити інтеграл по заданій кривій.

3.01. $\int\limits_{AB} \bar{z}dz$, AB: відрізок прямої, що з'єднує точки $A=0$ і $B=3+2i$.

3.02. $\int\limits_{AB} \bar{z}dz$, AB: напівколо $|z|=1$, $0\le\varphi\le\pi$.

3.03. $\int\limits_{AB} \operatorname{Im}\bar{z}dz$, AB: радіус-вектор точки $z=1+i$.

3.04. $\int\limits_{AB} \frac{z}{\bar{z}}dz$, AB: відрізок прямої, що з'єднує точки $A=0$ і $B=1+i$.

3.05. $\int\limits_{AB} \frac{z}{\bar{z}}dz$, AB: дуга параболи $y=x^2$, що з'єднує точки $A=0$ і $B=1+i$.

3.06. $\int\limits_{AB} \frac{z}{\bar{z}}dz$, AB: дуга $y=\sqrt{x}$, що з'єднує точки $A=1+i$ і $B=0$.

3.07. $\int\limits_{AB} z^3dz$, AB: відрізок прямої, що з'єднує точки $A=2+4i$ і $B=0$.

3.08. $\int\limits_{AB} z^3dz$, AB: дуга $y=x^2$, що з'єднує точки $A=0$ і $B=2+4i$.

3.09. $\int\limits_{AB} z^3dz$, AB: дуга $y=2\sqrt{2x}$, що з'єднує точки $A=0$ і $B=2+4i$.

3.10. $\int\limits_{AB} z^3dz$, AB: відрізок прямої, що з'єднує точки $A=i$ і $B=1$.

3.11. $\oint\limits_{\tilde{A}} z^3dz$, $\tilde{A}$: коло $|z|=2$.

3.12. $\int\limits_{AB} \operatorname{Re}zdz$, AB: радіус-вектор точки $z=2+i$.

3.13. $\int\limits_{AB} \operatorname{Im}zdz$, AB: радіус-вектор точки $z=2-i$.

3.14. $\int\limits_{AB} xdz$, AB: напівколо $|z|=1$, $0\le\varphi\le\pi$.

3.15. $\int\limits_{AB} ydz$, AB: частина кола $|z|=2$, $0\le\varphi\le\pi/2$.

3.16. $\int\limits_{AB} |z|dz$, AB: радіус-вектор точки $z=(-1-i)$.

3.17. $\int\limits_{AB} |z|dz$, AB: напівколо $|z|=2$, $0\le\varphi\le\pi$.

3.18. $\int\limits_{AB} |z|\bar{z}dz$, AB: частина кола $|z|=2$, $\pi/2\le\varphi\le\pi$.

3.19. $\int\limits_{AB} |z|zdz$, AB: напівколо $|z|=3$, $0\le\varphi\le\pi$.

3.20. $\int\limits_{AB} \frac{dz}{\sqrt{z}}$, AB: частина кола $|z|=1$, $0\le\varphi\le\pi/2$.

3.21. $\oint\limits_{\tilde{A}}(z^2-5)dz$, $\tilde{A}$: коло $|z-5|=1$.

3.22. $\oint\limits_{\tilde{A}}(\bar{z}+1)dz$, $\tilde{A}$: коло $|z|=1$.

3.23. $\oint\limits_{\tilde{A}} ie^z dz$, $\tilde{A}$: коло $|z|=1$.

3.24. $\int\limits_{AB}(\bar{z}+1)dz$, AB: відрізок прямої, що з'єднує точки $A=1+i$ і $B=2-i$.

3.25. $\int\limits_{AB}(\bar{z}+1)dz$, AB: напівколо $|z|=2$, $0\le\varphi\le\pi$.

3.26. $\oint\limits_{\tilde{A}}(5i+4)(1+\sin z)dz$, $\tilde{A}$: коло $|z-1|=1$.

3.27. $\oint\limits_{\tilde{A}}(5i-\cos z)dz$, $\tilde{A}$: коло $|z-i|=2$.

3.28. $\int\limits_{AB} e^z(i+1)dz$, AB: відрізок прямої, що з'єднує точки $A=-i$ і $B=-1$.

3.29. $\int\limits_{AB}\frac{(z+1)^2}{\bar{z}}dz$, AB: відрізок прямої, що з'єднує точки $A=-i$ і $B=1+i$.

3.30. $\int\limits_{AB}\frac{(z+1)^2}{\bar{z}}dz$, AB: відрізок прямої, що з'єднує точки $A=i$ і $B=1-i$.

2.12.4 Розкласти функцію у ряд Лорана в околі вказаної точки (або в кільці).

4.01. $\varphi=\frac{1}{z-2}$, $z_0=0$.

4.02. $\varphi=\frac{1}{z+1}$, $z_0=1$.

4.03. $\varphi=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$, $z_0=0$.

4.04. $\varphi=\frac{1}{(z-1)(z-3)}$, $z_0=1$.

4.05. $\varphi=\frac{1}{(z-2)(z-4)}$, $2<|z|<4$.

4.06. $\varphi=\frac{1}{(z-i)(z-1)}$, $z_0=1$.

4.07. $\varphi=\frac{1}{z^2+1}$, $z_0=0$.

4.08. $\varphi=\frac{1}{z^2+1}$, $z_0=i$

4.09. $\varphi=\frac{3}{z^2+1}$, $z_0=i$.

4.10. $\varphi=\frac{4}{z^2+2}$, $z_0=\sqrt{2}i$.

4.11. $\varphi=\frac{1}{(z-i)(z-2)}$, $1<|z|<2$.

4.12. $\varphi=\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$, $z_0=2$.

4.13. $\varphi=\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$, $1<|z|<2$.

4.14. $\varphi=\frac{z}{1+z^2}$, $z_0=i$.

4.15. $\varphi=\frac{z}{1+z^2}$, $z_0=-i$

4.16. $\varphi=\frac{z}{(z-1)(z-i)}$, $z_0=1$.

4.17. $\varphi=\frac{2z}{(z-1)(z+i)}$, $z_0=-i$.

4.18. $\varphi=\frac{3z}{(z+1)(z-1)}$, $z_0=1$.

4.19. $\varphi = z^3 \exp\frac{1}{z}$, $z_0 = 0$.

4.20. $\varphi = \cos\frac{z}{z-2}$, $z_0 = 2$.

4.21. $\varphi = \sin\frac{z}{z-i}$, $z_0 = i$.

4.22. $\varphi = (z-1)\sin\frac{z}{1-z}$, $z_0 = 1$.

4.23. $\varphi = e^{\frac{1}{1-z}}$, $z_0 = 1$.

4.24. $\varphi = z^2 \exp\frac{1}{z}$, $z_0 = 0$.

4.25. $\varphi = \frac{5}{(z-1)(z-5)}$, $1 < |z| < 5$.

4.26. $\varphi = \frac{1}{2z-1}$, $z_0 = 1$.

4.27. $\varphi = \frac{1}{2z+i}$, $z_0 = 0$.

4.28. $\varphi = \frac{1}{(2z-1)(z-1)}$, $z_0 = 1$.

4.29. $\varphi = \frac{1}{(3z-1)(z-1)}$, $z_0 = 1$.

4.30. $\varphi = \frac{1}{(z-1)(3z-2)}$, $z_0 = 1$.

2.12.5 Обчислити інтеграл від функції комплексної змінної, використовуючи теорему про лишки та за формулою Коші.

5.01. $\oint\limits_{\tilde{A}} \frac{dz}{z^2+1}$, $\tilde{A}: |z-i| = 1$.

5.02. $\oint\limits_{\tilde{A}} \frac{dz}{z^2-1}$, $\tilde{A}: |z| = 2$.

5.03. $\oint\limits_{\tilde{A}} \frac{dz}{(z-1)^2(z+2)}$, $\tilde{A}: |z| = 3$.

5.04. $\oint\limits_{\tilde{A}} \frac{dz}{z^4-1}$, $\tilde{A}: |z| = 2$.

5.05. $\oint\limits_{\tilde{A}} \sin\frac{1}{z} dz$, $\tilde{A}: |z| = 1$.

5.06. $\oint\limits_{\tilde{A}} \sin^2\frac{1}{z} dz$, $\tilde{A}: |z| = 1$.

5.07. $\oint\limits_{\tilde{A}} e^{\frac{1}{z}} dz$, $\tilde{A}: |z| = 1$.

5.08. $\oint\limits_{\tilde{A}} z^2 e^{\frac{3}{z}} dz$, $\tilde{A}: |z| = 1$.

5.09. $\oint\limits_{\tilde{A}} \cos\frac{1}{z} \exp\frac{2}{z} dz$, $\tilde{A}: |z| = 1$.

5.10. $\oint\limits_{\tilde{A}} \frac{\sin\frac{2}{z}}{\exp\frac{1}{z}} dz$, $\tilde{A}: |z| = 1$.

5.11. $\oint\limits_{\tilde{A}} \frac{z-1\sin\frac{2}{z}}{z^2+1} dz$, $\tilde{A}: |z| = 2$.

5.12. $\oint\limits_{\tilde{A}} \frac{dz}{z^4+1}$, $\tilde{A}: x^2 + y^2 = 2x$.

5.13. $\oint\limits_{\tilde{A}} \frac{dz}{z^4+1}$, $\tilde{A}: |z-2| = \frac{1}{2}$.

5.14. $\oint\limits_{\tilde{A}} \frac{z^3 dz}{2z^4+1}$, $\tilde{A}: |z| = 1$.

5.15. $\oint\limits_{\tilde{A}} \frac{e^z}{z^2(z^2-9)} dz$, $\tilde{A}: |z| = 1$.

5.16. $\oint\limits_{\tilde{A}} \frac{\sin\frac{1}{z}}{2\pi i} dz$, $\tilde{A}: |z| = 2$.

5.17. $\oint\limits_{\tilde{A}} \frac{1}{2\pi i} \sin^2\frac{1}{z} dz$, $\tilde{A}: |z| = 3$.

5.18. $\oint\limits_{\tilde{A}} \frac{dz}{(z-3)(z^2-1)}$, $\tilde{A}: |z| = 2$.

5.19. $\oint\limits_{\tilde{A}} \frac{1}{2\pi i} \cdot z^2 \cdot e^{\frac{2}{z}} dz$, $\tilde{A}: |z| = 2$.

5.20. $\oint\limits_{\tilde{A}} (1+z) e^{\frac{1}{z-1}} dz$, $\tilde{A}: |z| = 3$.

5.21. $\oint\limits_{\tilde{A}}(1+z)^2 e^{\frac{1}{z}}dz$, $\tilde{A}: |z|=3$.

5.22. $\oint\limits_{\tilde{A}}(1+z+z^2)e^{\frac{1}{z-2}}dz$, $\tilde{A}: |z|=3$.

5.23. $\oint\limits_{\tilde{A}}\dfrac{zdz}{(z-2)(z+i)}$, $\tilde{A}$: $|z-3|=33$.

5.24. $\oint\limits_{\tilde{A}}\dfrac{z+1}{z^2+1}$, $\tilde{A}$: $|z-4|=44$.

5.25. $\oint\limits_{\tilde{A}}\dfrac{z+1}{z^2(z-1)}$, $\tilde{A}$: $|z-0{,}1|=0{,}2$.

5.26. $\oint\limits_{\tilde{A}}\dfrac{dz}{2z^2+3}$, $\tilde{A}: |z+i|=1$.

5.27. $\oint\limits_{\tilde{A}}\dfrac{dz}{2z^2-3}$, $\tilde{A}: |z-1|=3$.

5.28. $\oint\limits_{\tilde{A}}\dfrac{2zdz}{(z-2)^2(2z+i)}$, $\tilde{A}: |z|=4$.

5.29. $\oint\limits_{\tilde{A}}\dfrac{dz}{3z^4-1}$, $\tilde{A}: |z-1|=3$.

5.30. $\oint\limits_{\tilde{A}}\sin\dfrac{z-1}{z}dz$, $\tilde{A}: |z-i|=0{,}5$.

ЛІТЕРАТУРА

Основна:

1. Гольдфайн И. А. Векторный анализ и теория поля. – ГИФМЛ, 1962.
2. Лаврентьев Н. А., Шабат Б. В. Методы функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987.
3. Маркушевич А. И., Маркушевич В. А. Введение в теорию аналитических функций. – М.: Просвещение, 1977.
4. Овчинников П. П., Яремчук Ф. П., Михайленко В. М. Вища математика. Ч. I, II. – К.: Техніка, 2000.
5. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 1, 2. – М.: Наука, 1985.
6. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: Полный курс. 3-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2005.
7. Поддубный Г. В. Математический анализ для радиоинженеров.– М.: Наука, 1978.
8. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. – М.: Физматгиз, 1960.
9. Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной. – М.: Наука, 1974.

Додаткова:

10. Кудрявцев Л. Д. Математический анализ. Т.II. – М.: Высшая школа, 1970.
11. Никольский С. М. Курс математического анализа. Т.II. – М.: Наука, 1973.
12. Лунгу К. Н., Норин В. П., Письменный Д. Т. И др. Сборник задач по высшей математике. 2 курс; под ред. С. Н. Федина. 4-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2006.
13. Лаптев Г. Ф. Элементы векторного исчисления. – М.: Наука, 1975.
14. Ладон И. Ф. Основы векторного исчисления с приложениями к теории электромагнитного поля. – Ленинград: Издание ВЭТА, 1938.
15. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Векторный анализ. – М.: Наука, 1978.
16. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Т. 1, 2. М.: Наука, 1971, 1973, 1979.
17. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анлизу. – ГИФМЛ, 1962.
18. Данко П. Е., Попов А. Г. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.II, III. Учебное пособие для втузов. – М.: Высшая школа, 1971
19. Бермант А. Ф., Араманович И. Г. Краткий курс математического анализа для втузов. – М.: Наука, 1967.
20. Толстов Г. П. Элементы математического анализа. Т. 1, 2. – М.: Наука, 1974.

21. Буслаєв А. Г. Верховський А. Г. Стрелковська І. В. Харсун О. М. Розрахункові завдання з вищої математики. Ч. І, ІІ. Методичні вказівки та завдання. – О.: ОНАЗ. 2001.
22. Верховський А. Г. Зиньков П. И. Ромащенко Н. В. Паскаленко В. М. Математический анализ в теории электрических цепей. Методические указания и контрольные задания. – О.: ОНАС. 1985.
23. Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике. – М.: Наука, 1973.
24. Паскаленко В. М., Стрелковська І. В., Шкуліпа І. В. Комплексні числа. Навчальний посібник для студентів технічних факультетів усіх форм навчання. – О.: ОНАЗ, 2005.