Министерство транспорта и связи Украины
Государственный департамент по вопросам связи и информатизации
ОДЕСКАЯ НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ СВЯЗИ им. А. С. ПОПОВА

# Теория поля.
# Теория функций комплексного переменного

Учебно-методическое пособие
для студентов II-го курса технических специальностей

Одесса – 2008

Составители: доц. А. Г. Буслаев, доц. Л. И. Соколов, доц. О. А. Василенко.

Теория поля. Теория функций комплексного переменного: Учебно-методическое пособие для студентов II-го курса технических специальностей.

В методическом пособии в краткой форме изложены основные сведения и методические разработки теоретических и практических занятий по модулю № 5 "Теория поля. Теория функций комплексного переменного". Из каждой темы представлено решения типичных задач и примеров, задачи для самостоятельного решения.

Учебно-методическое пособие рассмотрено и одобрено методическим советом факультета ТКС.

Протокол № 9 от 22 апреля 2008 г.

Рассмотрено и одобрено на заседании кафедры высшей математики.

Протокол № 8 от 6 марта 2008 г.

# СОДЕРЖАНИЕ

## Распределение учебного времени по модулю: „Теория поля. Теория функций комплексного переменного”

### Структура зачетного модуля

| Содержательные модули | Лекции (час.) | Занятия | | Самостоятельная и индивидуальная работа |
|---|---|---|---|---|
| | | практические | лабораторные | |
| 1 Скалярные и векторные поля | 18 | 18 | - | 40 |
| 2 Теория функций комплексного переменного | 14 | 14 | - | 31 |
| Вместе | 32 | 32 | - | 71 |

### Содержание зачетного модуля

1 Скалярные и векторные поля.
- 1.1 Скалярное поле. Производная по направлению. Градиент.
- 1.2 Криволинейный интеграл второго рода. Формула Грина.
- 1.3 Поверхностный интеграл второго рода. Формула Остроградского–Гаусса. Формула Стокса.
- 1.4 Векторное поле. Векторные линии. Поток векторного поля. Дивергенция векторного поля. Циркуляция. Ротор поля. Оператор Гамильтона.
- 1.5 Специальные векторные поля. Теорема Гельмгольца.

2 Теория функций комплексного переменного.
- 2.1 Предел и непрерывность функции комплексного переменного (ФКП).
- 2.2 Производная от функции комплексного переменного. Условия Коши–Римана. Аналитические функции.
- 2.3 Интеграл от функции комплексного переменного, его связь с криволинейным интегралом второго рода. Теорема Коши. Интегральная формула Коши. Интеграл типа Коши.
- 2.4 Ряды в комплексной области. Ряд Тейлора.
- 2.5 Ряд Лорана. Класификация изолированных особых точек.
- 2.6 Вычеты. Основная теорема о вычетах.

### Перечень лекционных занятий зачетного модуля

| № пп. | Номер, темы лекций | Час. |
|---|---|---|
| | **1 Скалярные и векторные поля** | |
| 1 | Л.1 Скалярное поле. Производная по направлению. Градиент функции. Оператор Гамильтона. | 2 |
| 2 | Л.2 Векторное поле. Криволинейный интеграл второго рода и его вычисление.<br>СР1 Использование криволинейного интеграла второго рода. | 2 |

| | | |
|---|---|---|
| 3 | Л.3 Формула Грина и её использование. | 2 |
| 4 | Л.4 Поверхностный интеграл второго рода.<br>СР2 Вычисление поверхностного интеграла второго рода. | 2 |
| 5 | Л.5 Дивергенция векторного поля. Формула Остроградского-Гаусса. | 2 |
| 6 | Л.6 Ротор векторного поля. Формула Стокса.<br>СР3 Вычисление циркуляции векторного поля. | 2 |
| 7 | Л.7 Свойства векторных полей. | 2 |
| 8 | Л.8 Работа в потенциальном поле. Теорема Гельмгольца.<br>СР4 Нахождение потенциала потенциального поля. | 2 |
| **2 Теория функций комплексного переменного** | | |
| 9 | Л.9 Комплексные числа, действия над ними. Формулы Эйлера. | 2 |
| 10 | Л.10 Функции комплексного переменного (ФКП). Основные определения.<br>СР5 Использования формул Эйлера. | 2 |
| 11 | Л.11 Производная от функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана.<br>СР6 Исследование на аналитичность функции комплексного переменного. | 2 |
| 12 | Л.12 Интеграл от функции комплексного переменного и его свойства. | 2 |
| 13 | Л.13 Интегральная теорема Коши для односвязной и многосвязной областей. | 2 |
| 14 | Л.14 Интегральная формула Коши. Производные висших порядков от аналитической функции комплексного переменного. | 2 |
| 15 | Л.15 Ряды Тейлора и Лорана. | 2 |
| 16 | Л.16 Класификация изолированных особых точек. Вычеты и их использование.<br>СР7 Вычисление несобственных интегралов от функции действительного переменного с помощью вычетов. | 2 |

**Перечень практических занятий зачетного модуля**

| № пп. | Номер, темы занятий | Час. |
|---|---|---|
| **1 Скалярные и векторные поля** | | |
| 1 | Скалярные поля. | 2 |
| 2 | Характеристики скалярных полей. Производная по направлению. Градиент. | 2 |
| 3 | Характеристики векторных полей. | 2 |
| 4 | Вычисление криволинейных интегралов II рода. | 2 |
| 5 | Вычисление поверхностных интегралов II рода. | 2 |
| 6 | Поток векторного поля. | 2 |
| 7 | Дивергенция. | 2 |
| 8 | Циркуляция. Ротор поля. | 2 |

| | | |
|---|---|---|
| 9 | Специальные векторные поля. | 2 |
| **2 Теория функций комплексного переменного** | | |
| 10 | Функции комплексного переменного. Основные элементарные ФКП. | 2 |
| 11 | Производная от функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. | 2 |
| 12 | Интеграл от функции комплексного переменного. Теорема Коши. | 2 |
| 13 | Интегральная формула Коши. Интеграл типа Коши. | 2 |
| 14 | Ряд Тейлора. | 2 |
| 15 | Ряд Лорана. | 2 |
| 16 | Вычеты. Использование вычетов в вычислении интегралов. | 2 |

**Перечень знаний и умений**

**Студент должен знать:**

1 Понятия скалярного и векторного полей, их характеристики.

2 Свойства векторных полей (соленоидальность, потенциальность, безвихреность).

3 Понятие функции комплексного переменного. Понятия предела, производной, интеграла от ФКП.

4 Определение производной от функции комплексного переменного и условия дифференцируемости ФКП.

5 Понятие аналитической функции комплексного переменного. Теорему Коши. Интегральную формулу Коши.

6 Разложение функции комплексного переменного в ряды Тейлора и Лорана.

7 Вычеты. Основную теорему о вычетах.

**Студент должен уметь:**

1 Находить основные характеристики скалярного поля (поверхности (линии) уровня, производную по направлению, градиент).

2 Находить основные характеристики векторного поля (уравнения векторных линий, поток, дивергенцию, циркуляцию, ротор, потенциал).

3 Виполнять действия над комплексными числами.

4 Находить действительную и мнимую части функции комплексного переменного.

5 Проверять условия Коши-Римана и находить производную от функции комплексного переменного.

6 Исспользовать интегральную формулу Коши для вычисления интегралов и криволинейного интеграла от аналитической функции комплексного переменного.

7 Раскладывать функции комплексного переменного в ряды Тейлора и Лорана, применять их на практике.

8 Находить вычеты и вычислять интегралы с помощью вычетов.

# 1 ТЕОРИЯ ПОЛЯ

## 1.1 Скалярное поле

Пусть $G$ – некоторая область на плоскости или в пространстве.

**Определение.** Если с каждой точкой $M$ области $G$ связана скалярная величина $u$, то говорят, что задано скалярное поле этой величины.

***Пример.*** Поле температур, поле давлений.

Скалярное поле задается скалярной функцией $u = f(M)$.

**Определение.** Множество точек, в которых скалярная функция принимает одно и то же значение $f(M) = \tilde{n}, (c = const)$, называют линией уровня (поверхностью уровня).

$$c = f(M),\ c = f(x, y) \text{ или } c = f(x, y, z).$$

***Пример 1.*** Найти линии уровня функции $u = \dfrac{y}{x^2}$.

*Решение.*

Так как функция $u = \dfrac{y}{x^2}$, тогда линии уровня: $c = \dfrac{y}{x^2}$, или $y = cx^2$.

Линиями уровня в данном случае есть семейство парабол (рисунок 1.1).

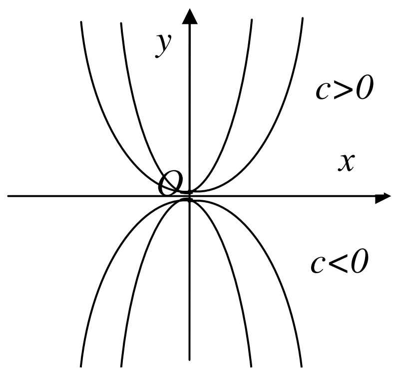



Рисунок 1.1

***Пример 2.*** Найти поверхности уровня функции $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

*Решение.*

Так как функция $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, тогда поверхности уровня находим: $c = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, или $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$.

Поверхностями уровня есть семейство (совокупность) концентричных сфер (рисунок 1.2).

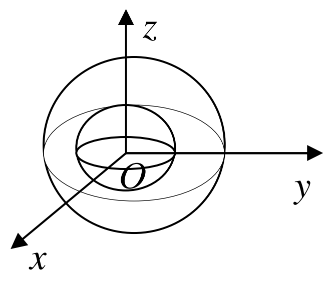



Рисунок 1.2

### 1.1.1 Производная по направлению

Рассмотрим функцию скалярного поля $u = f(x, y)$, $M \in G$.

**Определение.** Производной функции $u = f(x, y)$ в точке $M$ по направлению вектора $\bar{l}$ называется предел отношения $\dfrac{\Delta u}{\Delta l}$ при $\Delta l \to 0$ (если он существует), и обозначается символом $\dfrac{\partial u}{\partial l}$. Тогда по определению

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l u}{\Delta l}. \qquad (1)$$

Рассмотрим $\dfrac{\partial u}{\partial l} = \lim\limits_{\Delta l \to 0} \dfrac{\Delta_l u}{\Delta l} = \lim\limits_{\Delta l \to 0} \dfrac{f(N) - f(M)}{\Delta l}$, $\overline{MN} \parallel \bar{l}$ (рисунок 1.3).

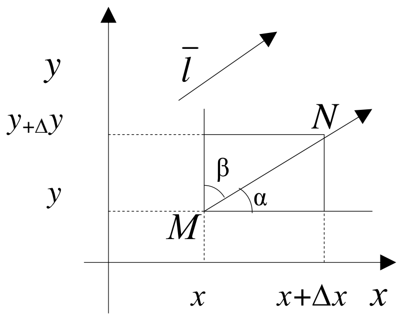



Рисунок 1.3

Пусть $MN = \Delta l$, тогда $\Delta x = \Delta l \cos\alpha$, $\Delta y = \Delta l \cos\beta$.

$$\bar{l}^{\circ} = \frac{\bar{l}}{|\bar{l}|} = \left( \frac{l_x}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2}} \;,\; \frac{l_y}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2}} \right) = (\cos\alpha \;, \cos\beta).$$

Тогда, $\cos\alpha = \dfrac{l_x}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2}}$, $\cos\beta = \dfrac{l_y}{\sqrt{l_x^2 + l_y^2}}$ и $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$.

Приращение: $\Delta_l u = f(N) - f(M) = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x,\ y)$. Перепишем данное равенство как $\Delta_l u = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x,\ y + \Delta y) + f(x,\ y + \Delta y) - f(x,\ y)$, тогда $\Delta_l u = \Delta_x u + \Delta_y u$. Подставляя последнее равенство в формулу (1), имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \left( \frac{\Delta_x u}{\Delta l} + \frac{\Delta_y u}{\Delta l} \right) = \lim_{\Delta l \to 0} \left( \frac{\Delta_x u}{\Delta x} \cos\alpha + \frac{\Delta_y u}{\Delta y} \cos\beta \right).$$

Итак, производная фунции скалярного поля *u=f(x, y)* по направлению вектора $\bar{l}$ равна:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta.$$

Аналогично доказывается, что для функции трёх переменных $u = f(x, y, z)$ производная по направлению вычисляется по формуле:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma,$$

где $\bar{l}^{\circ} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, а $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ назиbudaются направляющими косинусами вектора $\bar{l}$.

***Замечание.*** Понятие производной по направлению есть обобщением понятия частных производных $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z}$, которые можно рассматривать как производные от функции $u = f(x, y, z)$ по направлению координатных осей $Ox, Oy, Oz$.

***Пример.*** Найти производную функции $u = x^2 - 4yz$ в точке $M(-2, 1, 0)$ по направлению от этой точки к точке $M_1(2, 1, 3)$.

*Решение.* Найдем координати вектора $\overline{MM_1} = \bar{l}$ и его направляющие косинуси: $\overline{MM_1}(4, 0, 3)$, $\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{16+9}} = \frac{4}{5}$, $\cos\beta = 0$, $\cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{16+9}} = \frac{3}{5}$.

Частные производные функции в точке $M$: $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = 2x|_M = -4$, $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = -4z|_M = 0$, $\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = -4y|_M = -4$.

Итак, $\frac{\partial u}{\partial l} = -4 \cdot \frac{4}{5} + 0 - 4 \cdot \frac{3}{5} = -\frac{28}{5} = -5\frac{3}{5}$.

Так как $\frac{\partial u}{\partial l} < 0$, то заданная функция в данном направлении убывает.

*Ответ:* $-5\frac{3}{5}$.

### 1.1.2 Градиент функции

**Определение.** Градиентом функции $u = f(x, y, z)$ называется вектор $\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}$ или $\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$.

Очевидно, что $\frac{\partial u}{\partial l} = \operatorname{grad} u \cdot \bar{l}^{\circ}$.

Градиент функции указывает направление, по которому скорость изменения функции наибольшая.

**Свойства**:

1) $\operatorname{grad}(u + \upsilon) = \operatorname{grad} u + \operatorname{grad} \upsilon$;

2) $\operatorname{grad}(c \cdot u) = c \cdot \operatorname{grad} u$;

3) $\operatorname{grad}(u \cdot \upsilon) = \upsilon \cdot \operatorname{grad} u + u \cdot \operatorname{grad} \upsilon$.

## 1.2 Оператор Гамильтона

Основными дифференциальными операциями над скалярным полем $u$ и векторным полем $\vec{F}$ являются: $\operatorname{grad} u$, $\operatorname{div}\vec{F}$, $\operatorname{rot}\vec{F}$ ($\operatorname{div}\vec{F}$, $\operatorname{rot}\vec{F}$ рассмотрим позже). Операции нахождения градиента, дивергенции и ротора називают векторными операциями первого порядка (в них задействованы производные I-ых порядков). Эти операции удобно записывать с помощью оператора Гамильтона (символического вектора «набла»):

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right).$$

Он приобретает определенного смысла только в комбинации с скалярными или векторными функциями. Символическое умножение вектора $\vec{\nabla}$ на скаляр $u$ или вектор $\overline{F}$ выполняется по правилам векторной алгебры, а „умножение" символов $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ на величины $u, P, Q, R$ понимают как нахождение соответсвующей частной производной от этих величин.

Например, $\operatorname{grad} u = \vec{\nabla} \cdot u$, где $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}$.

## 1.3 Векторное поле

**Определение.** Если с каждою точкой $M$ области $G$ связана некоторая векторная величина $\overline{F}$, то говорят, что задано векторное поле этой величины.

***Пример.*** Поле скоростей, поле электрического напряжения.

Если в пространстве введена декартовая система координат, то векторное поле задается векторной функцией

$$\overline{F}(M) = P(M)\bar{i} + Q(M)\bar{j} + R(M)\bar{k},$$

где $P(M) = P(x, y, z),\ Q(M) = Q(x, y, z),\ R(M) = R(x, y, z)$ – скалярные функции.

$\overline{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\bar{i} + Q(x, y, z)\bar{j} + R(x, y, z)\bar{k}$ – пространственное векторное поле.

На плоскости векторное поле задается как $\overline{F}(x, y) = P(x, y)\bar{i} + Q(x, y)\bar{j}$ (плоское векторное поле).

**Определение.** Векторной линией поля $\overline{F}(M)$ называется кривая, в каждой точке которой её касательная совпадает с направлением вектора $\overline{F}(M)$.

***Пример.*** В поле скоростей растекающейся жидкости, векторными линиями будут линии, по которым двигаются частички жидкости (линии тока); для магнитного поля Земли векторными (силовыми) линиями будут линии, которые выходят из северного полюса и заканчиваются в южном.

Совокупность всех векторных линий поля, которые проходят через некоторую замкнутую кривую, назиevent векторной трубкой.

Пусть векторное поле задается вектором $\overline{F} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$, где $P = P(x, y, z),\ Q = Q(x, y, z),\ R = R(x, y, z)$ – неперерывные функции переменных $x, y, z$, которые имеют непрерывные частные производные первого порядка.

Векторные линии поля $\overline{F}(x, y, z)$ находятся из системы дифференциальных уравнений:

$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}$ – для пространственного векторного поля,

$$\frac{dx}{P(x,y)} = \frac{dy}{Q(x,y)}$$ – для плоского поля, которое ещё записывается так:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)} \to y' = f(x,y).$$

Эти уравнения следуют из условия коллинеарности векторов $\overline{F}(P,Q,R)$ и $\overline{dr}(dx,dy,dz)$ (рисунок 1.4).

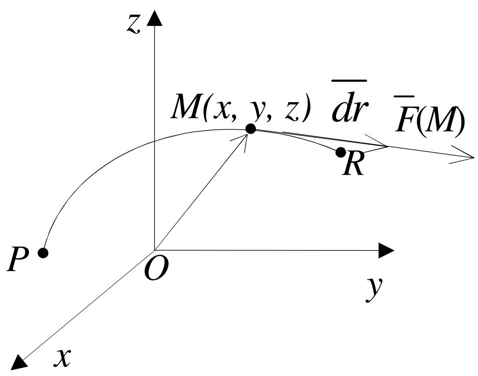


Рисунок 1.4

### 1.3.1 Интеграл по области (второго рода)

В векторном поле будем рассматривать только две области: линии и поверхности.

**Определение.** Линия называется ориентированной, если в каждой её точке задано направление, совпадающее с направлением касательной к ней (рисунок 1.5).

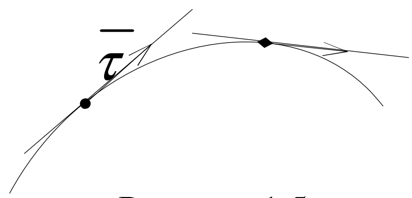


Рисунок 1.5

**Определение.** Поверхность считается ориентированной, если в каждой её точке задано направление, совпадающее с направлением нормали к ней в этой точке (рисунок 1.6).

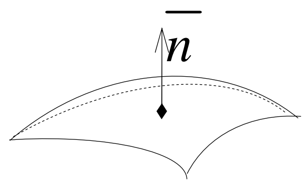


Рисунок 1.6

Ориентированную область будем обозначать через $G$, а единичный вектор, который задает направление в призвольной точке $M$ будем называть ориентирующим вектором и обозначать как $\bar{l}(M)$.

Пусть задана ориентированная область $G$, ориентирующий вектор $\bar{l}(M)$, и пусть в каждой точке этой области определена вектор-функция $\overline{F}(M)$. Разобъем произвольным образом область $G$ на $n$ частей: $G_1,...,G_n$ ($G_1 \cup G_2 \cup ... \cup G_n = G$). Меры областей $G_i$ обозначим через $\Delta\mu_i$ и через $\lambda = \max_i |\Delta\mu_i|$. Произвольно, в каждой области $G_i$ выберем по точке $M_i$ и вычислим значение вектор-функции $\overline{F}(M_i)$.

Проведём в точке $M_i$ вектор $\overline{\Delta\mu_i}$, направление которого совпадает с направлением ориентирующего вектора в точке $M_i$, а длина равняется мере области $G_i$, т.е. $\overline{\Delta\mu_i} = \Delta\mu_i \cdot \bar{l}(M_i)$. Вычислим скалярное произведение: $\overline{F}(M_i) \cdot \overline{\Delta\mu_i}$.

Рассмотрим сумму

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{F}\left(M_i\right)\cdot\overline{\Delta\mu_i}=\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{F}\left(M_i\right)\cdot\bar{l}\left(M_i\right)\right)\Delta\mu_i .$$

Эта сумма назиьвается интегральной суммой для вектор-функции $\overline{F}(M_i)$ по ориентированной области $G$.

**Определение.** Если при $\lambda=\max\limits_i\left|\Delta\mu_i\right|\to 0$ интегральная сумма $\sum\limits_{i=1}^{n}\overline{F}\left(M_i\right)\cdot\overline{\Delta\mu_i}=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\overline{F}\left(M_i\right)\cdot\bar{l}\left(M_i\right)\right)\Delta\mu_i$ имеет предел, который не зависит ни от способа разбития области $G$ на части, ни от выбора промежуточных точек $M_i$, то она называется интегралом от вектор-функции $\overline{F}(M_i)$ по ориентированной области $G$ (интегралом II-го рода) и обозначается

$$\int\limits_G\overline{F}(M)\cdot\overline{d\mu}=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\overline{F}\left(M_i\right)\cdot\overline{\Delta\mu_i} .$$

## 1.3.2 Криволинейный интеграл второго рода

**Определение.** Если область $G$ это кривая $L$, а её ориентирующий вектор в произвольной точке $M$ – $\bar{l}\left(M\right)$, то интеграл вида

$$\int\limits_L\overline{F}\cdot\overline{dl}=\int\limits_L P(x,\ y,\ z)dx+Q(x,\ y,\ z)dy+R(x,\ y,\ z)dz$$

называется криволинейным интегралом второго рода по пространственной кривой $L$.

***Задача*** (о вычислении работы векторного поля).

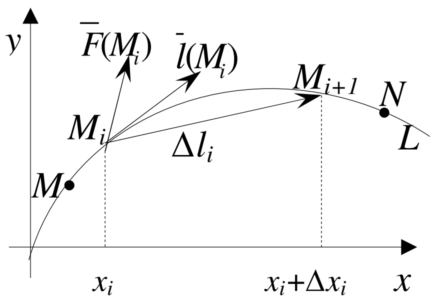


Рисунок 1.7

Пусть переменная сила $\overline{F}(M)=P(M)\bar{i}+Q(M)\bar{j}$ двигает материальную точку вдоль кривой $L$ с точки $M$ в точку $N$ (рисунок 1.7). Необходимо вычислить работу этой силы на заданном пути. Для этого разобъем кривую $L$ на $n$ частей точками $M=M_0,\ M_1,\ M_2,...,M_n=N$, тога

$$A_n=\sum_{i=1}^{n}A_i=\sum_{i=1}^{n}\overline{F}(M_i)\Delta\bar{l}_i ,$$

где $\Delta\bar{l}_i=\Delta x_i\bar{i}+\Delta y_i\bar{j}$.

Работа равняется пределу последовательности интегральных сумм при $\lambda=\max\limits_i\left|\Delta l_i\right|\to 0$ и обозначается через $A=\int\limits_L\overline{F}\cdot\overline{dl}$, $d\bar{l}=dx\bar{i}+dy\bar{j}$, а это по определению и есть криволинейный интеграл второго рода.

Так как $A_n = \sum_{i=1}^{n} P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i$, то $A = \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ – работа векторного поля $\overline{F}(M) = P(M)\overline{i} + Q(M)\overline{j}$ по дуге $\breve{MN}$.

Если поле пространственное $\overline{F}(M) = P(M)\overline{i} + Q(M)\overline{j} + R(M)\overline{k}$, тогда работу можно вычислить по формуле:

$$A = \int_L P(M)dx + Q(M)dy + R(M)dz.$$

***Замечание 1.*** Если кривая $L$ замкнутая, то она называется замкнутым контуром. Интеграл при этом называют циркуляцией вектора $\overline{F}$ по замкнутому контуру $L$ и обозначают $Ö = \oint_L \overline{F}(M)d\overline{l}$.

***Замечание 2.*** Криволинейный интеграл II-го рода зависит от направления обхода кривой, итак, $\int_{\breve{AB}} \overline{F}\cdot d\overline{l} = -\int_{\breve{BA}} \overline{F}\cdot d\overline{l}$.

Для замкнутого контура $L$ положительным направлением обхода считается обход контура против часовой стрелки.

### 1.3.3 Вычисление криволинейного интеграла второго рода

Пусть кривая $L$ задана в пространстве параметрически: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t_1 \le t \le t_2$, тогда

$$\int_{\breve{AB}} \overline{F}\cdot d\overline{l} = \int_{\breve{AB}} P(M)dx + Q(M)dy + R(M)dz =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} P\left[x(t), y(t), z(t)\right]x'(t)dt + Q\left[x(t), y(t), z(t)\right]y'(t)dt +$$

$$+R\left[x(t), y(t), z(t)\right]z'(t)dt.$$

***Пример.*** Вычислить $\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, где $L$ – треугольник $ABC$ с вершинами $A(1, 0)$, $B(1, 1)$, $C(0, 1)$.

*Решение.*

$$\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = \int_{\breve{AB}} \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} + \int_{\breve{BC}} \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} + \int_{\breve{CA}} \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}.$$

Запишем уравнения прямых *AB, BC, CA* (рисунок 1.8) в параметрической форме:

*AB:* $\begin{cases} x = 1, \\ y = t; \end{cases}$ $0 \le t \le 1$; *BC:* $\begin{cases} x = -t, \\ y = 1; \end{cases}$ $-1 \le t \le 0$; *CA:* $\begin{cases} x = t, \\ y = 1 - t; \end{cases}$ $0 \le t \le 1$.

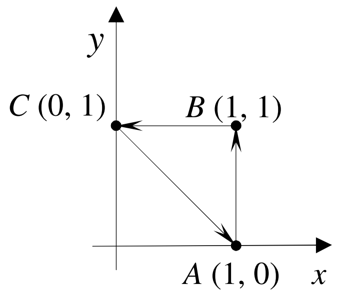



Рисунок 1.8

Тогда $\int\limits_{AB}\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=\left[\begin{array}{l}AB:\begin{cases}x=1,\\ y=t,\end{cases}\\ 0\le t\le 1\end{array}\right]=\int\limits_0^1\frac{t\cdot 0\cdot \mathrm{d}\,t-1\cdot \mathrm{d}\,t}{1+t^2}=$

$$=-\int\limits_0^1\frac{\mathrm{d}\,t}{1+t^2}=-\mathrm{arctg}\,t\Big|_0^1=-\frac{\pi}{4};$$

$$\int\limits_{BC}\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=\left[\begin{array}{l}BC:\begin{cases}x=-t,\\ y=1,\end{cases}\\ -1\le t\le 0\end{array}\right]=\int\limits_{-1}^0\frac{1\cdot(-\mathrm{d}\,t)+t\cdot 0\cdot \mathrm{d}\,t}{t^2+1}=-\int\limits_{-1}^0\frac{\mathrm{d}\,t}{t^2+1}=-\mathrm{arctg}\,t\Big|_0^1=-\frac{\pi}{4};$$

$$\int\limits_{CA}\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=\left[\begin{array}{l}CA:\begin{cases}x=t,\\ y=1-t,\end{cases}\\ 0\le t\le 1\end{array}\right]=\int\limits_0^1\frac{(1-t)\cdot \mathrm{d}\,t-t\cdot(-\mathrm{d}\,t)}{t^2+1-2t+t^2}=\int\limits_0^1\frac{\mathrm{d}\,t}{2t^2-2t+1}=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\frac{\mathrm{d}\,t}{t^2-t+\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\frac{\mathrm{d}\,t}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}=\mathrm{arctg}\,2\left(t-\frac{1}{2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{2}.$$

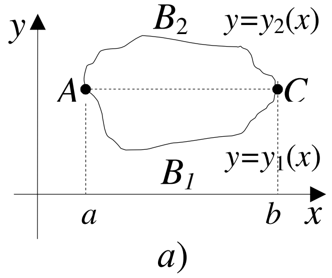
Итак, $\oint\limits_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=0$.

*Ответ:* 0.

### 1.3.4 Вычисление площадей плоских фигур с помощью криволинейного интеграла второго рода

Пусть задано правильную область $D$, такую, что $D:\begin{cases}a\le x\le b,\\ y_1(x)\le y\le y_2(x).\end{cases}$

(рисунок 1.9*а*) или $D:\begin{cases}c\le y\le d,\\ x_1(y)\le x\le x_2(y).\end{cases}$ (рисунок 1.9*б*).



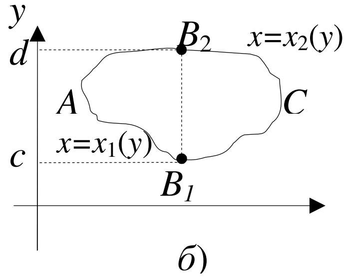




Рисунок 1.9

Тогда

$$S_D=\int_a^b\left(y_2(x)-y_1(x)\right)dx=\int_a^b y_2(x)dx-\int_a^b y_1(x)dx=\int_{AB_2C}ydx-\int_{AB_1C}ydx=$$
$$=-\int_{AB_1C}ydx-\int_{CB_2A}ydx=-\oint_L ydx.$$

Итак,

$$S_D=-\oint_L ydx. \qquad (2)$$

Аналогично (рисунок 1.9*б*),

$$S_D=\int_c^d\left(x_2(y)-x_1(y)\right)dy=\int_c^d x_2(y)dy-\int_c^d x_1(y)dy=\int_{B_1CB_2}xdy+\int_{B_2AB_1}xdy=\oint_L xdy=\oint_L xdy.$$

$$S_D=\oint_L xdy. \qquad (3)$$

Прибавив (2) и (3), получим: $S_D=\dfrac{1}{2}\oint_L xdy-ydx.$ (4)

***Пример.*** Вычислить площадь эллипса: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

*Решение.*

Запишем уравнение эллипса в параметрической форме:

$$\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t,\end{cases}\quad 0\le t\le 2\pi.$$

Используя формулу (4), вычислим площадь эллипса:

$$S=\frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}a\cos t\, b\cos t\,dt+b\sin t\,a\sin t\,dt=\frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}dt=\pi ab.$$

*Ответ:* $\pi ab$.

### 1.3.5 Связь криволинейного интеграла второго рода с двойным интегралом (формула Грина)

Если $\overline{F}$ плоское векторное поле и функции $P(x,y), Q(x,y), P_y^{'}(x,y)$, $Q_x^{'}(x,y)$ – непрерывные в области $D$ и на её границе $L$, то имеет место формула Грина:

$$\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,$$

где обход контура $L$ выполняется в положительном направлении.

*Доказательство.*

$$\iint_D\frac{\partial P}{\partial y}dxdy=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\frac{\partial P}{\partial y}dy=\int_a^b P(x,y)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)}dx=\int_a^b P\left(x,y_2(x)\right)dx-\int_a^b P\left(x,y_1(x)\right)dx=$$

$$= \int\limits_{AB_2C} P(x,y)dx - \int\limits_{AB_1C} P(x,y)dx = -\int\limits_{CB_2A} P(x,y)dx - \int\limits_{AB_1C} P(x,y)dx = -\oint\limits_{L} P(x,y)dx\,. \quad (5)$$

Аналогично, изменяя порядок интегрирования, получим:

$$\iint\limits_{D} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = \int\limits_{c}^{d} Q(x,y)\Big|_{x_1(y)}^{x_2(y)} dy = \int\limits_{c}^{d} Q\big(x_2(y),y\big)dy - \int\limits_{c}^{d} Q\big(x_1(y),y\big)dy =$$

$$= \int\limits_{B_1CB_2} Q(x,y)dy - \int\limits_{B_1AB_2} Q(x,y)dy = \int\limits_{B_1CB_2} Q(x,y)dy + \int\limits_{B_2AB_1} Q(x,y)dy = \oint\limits_{L} Q(x,y)dy\,. \quad (6)$$

Прибавив (5) и (6), получим формулу Грина.

### 1.3.6 Поверхностный интеграл второго рода. Поток векторного поля

Рассмотрим интеграл по ориентированной области $\int\limits_{G} \overline{F} \cdot \overline{d\mu}$ в случае, когда область $G$ – гладкая двусторонняя поверхность $\sigma$ (рисунок 1.10).

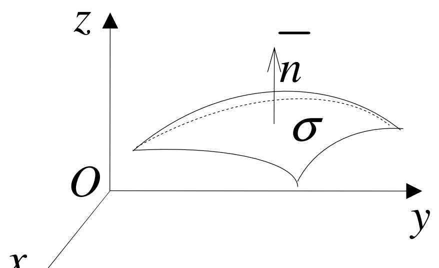



Рисунок 1.10

**Определение.** Поверхность $\sigma$ называется гладкой, если в каждой её точке можно провести касательную плоскость.

**Определение.** Поверхность $\sigma$ называется двусторонней, если нормаль к поверхности при обходе по произвольному замкнутому контуру возвращается в исходное положение.

Предполагается, что в каждой точке поверхности $\sigma$ задано векторное поле $\overline{F}(M)$.

Пусть область интегрирования вектор-функции $\overline{F}(M)$ есть двусторонняя поверхность $\sigma$, ориентирующий вектор которой – это единичный вектор $\overline{n}(M)$ к поверхности $\sigma$ в точке *M*, направление которого определяет одну из сторон поверхности.

**Определение.** Интеграл по такой ориентированной поверхности называется поверхностным интегралом второго рода и обозначается

$$\int\limits_{\sigma} \overline{F}(M) \cdot \overline{d\sigma}\,,$$

где $\overline{d\sigma} = \overline{n}(M)d\sigma$ – вектор, длина которого равняется площади $d\sigma$ элемента поверхности $\sigma$, а направление совпадает з направлением нормали к этой поверхности в точке *M*.

Итак,

$$\int\limits_{\sigma} \overline{F}(M) \cdot \overline{d\sigma} = \int\limits_{\sigma} \overline{F}(M) \cdot \overline{n}(M)d\sigma\,.$$

**Определение.** Потоком вектора скорости через поверхность $\sigma$ называется количество жидкости, проходящей через эту поверхность за единицу времени.

***Задача*** (о потоке вектора через поверхность).

Рассмотрим поле скоростей $\overline{\upsilon}(M)$ жидкости в пространстве (жидкость не сжимается).

Вычислим поток вектора $\overline{\upsilon}(M)$. Для этого разобъем поверхность $\sigma$ на $n$ элементарных участков $\sigma_i$, площади которых обозначим через $\Delta\sigma_i$. На каждом выберем произвольную точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$. Вектор $\overline{n}_i$ – единичный вектор нормали к участку $\sigma_i$.

Количество жидкости, проходящей через $\sigma_i$ за единицу времени приблизительно равняется объему цилиндра (цилиндрического столбика), висота которого равна

$$h_i = np_{\overline{n}_i}\overline{\upsilon}_i = \left|\overline{\upsilon}_i\right|\cos(\widehat{\overline{n}_i, \overline{\upsilon}_i}) = \overline{\upsilon}_i\,\overline{n}_i\ .$$

Поток вектора $\overline{\upsilon}_i$ через $\sigma_i$ равен: $\Pi_i \approx h_i\,\Delta\sigma_i = \overline{\upsilon}_i\,\overline{n}_i\,\Delta\sigma_i = \overline{\upsilon}_i\,\overline{\Delta\sigma_i}$.

Длина вектора $\overline{\Delta\sigma_i}$ равняется площади участка поверхности.

Поэтому поток вектора $\overline{\upsilon}$ через поверхность $\sigma$ приблизительно равняется:

$$\Pi = \sum_{i=1}^{n}\Pi_i \approx \sum_{i=1}^{n}\overline{\upsilon}_i\,\overline{\Delta\sigma_i} = \sum_{i=1}^{n}\overline{\upsilon}_i\overline{n}_i\Delta\sigma_i\,.$$

**Определение.** Предел этой суммы при $n \to \infty$, при условии, что $\lambda \to 0$ ($\lambda$ – максимальный диаметр участков) называется потоком векторного поля $\overline{\upsilon}(M)$ через поверхность $\sigma$ и обозначается:

$$\Pi = \iint_{\sigma}\overline{\upsilon}(M)\cdot\overline{n}d\sigma = \iint_{\sigma}\overline{\upsilon}(M)\cdot\overline{d\sigma}\,.$$

Интеграл справа по определению является поверхностным интегралом второго рода.

Таким образом, физическим смыслом поверхностного интеграла по поверхности $\sigma$ есть поток векторного поля $\overline{F}(M)$ через данную поверхность.

Поверхностный интеграл имеет следующее свойство:

$$\Pi = \iint_{\sigma^+}\overline{F}(M)\cdot\overline{n}(M)d\sigma = -\iint_{\sigma^-}\overline{F}(M)\cdot\overline{n}(M)d\sigma\,,$$

где $\sigma^+, \sigma^-$ – разные стороны поверхности $\sigma$.

Сведём вычисление поверхностного интеграла II-го рода к вычислению обычного интеграла. Для этого виразим единичный вектор нормали к поверхности $\overline{n}$ через его направляющие косинусы:

$$\overline{n} = \cos(\widehat{\overline{n}, \overline{i}})\overline{i} + \cos(\widehat{\overline{n}, \overline{j}})\overline{j} + \cos(\widehat{\overline{n}, \overline{k}})\overline{k}\,.$$

Обозначим $\alpha = (\widehat{\overline{n}, \overline{i}}), \beta = (\widehat{\overline{n}, \overline{j}}), \gamma = (\widehat{\overline{n}, \overline{k}})$, тогда единичный вектор можна записать так:

$$\bar{n} = \cos\alpha\bar{i} + \cos\beta\bar{j} + \cos\gamma\bar{k} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}.$$

Если уравнение поверхности $\sigma$ задано формулой $z = g(x, y)$, то $u = g(x, y) - z = 0$ есть её поверхностью уровня при $c = 0$. Вектор $\operatorname{grad} u$ будет перпендикулярным к этой поверхности. Так как $\operatorname{grad} u = \{g'_x, g'_y, -1\}$, то $\bar{N} = \{g'_x, g'_y, -1\}$, $\bar{n} = \dfrac{\bar{N}}{|\bar{N}|}$, $|\bar{N}| = \sqrt{1 + g'^2_x + g'^2_y}$, $\bar{n} = \left\{\dfrac{g'_x}{|\bar{N}|}, \dfrac{g'_y}{|\bar{N}|}, \dfrac{-1}{|\bar{N}|}\right\}$ либо $\bar{n} = \left\{\dfrac{-g'_x}{|\bar{N}|}, \dfrac{-g'_y}{|\bar{N}|}, \dfrac{1}{|\bar{N}|}\right\}$.

Положительным направлением вектора $\bar{n}$ считается направление, при котором угол между векторами $\bar{n}, \bar{k}$ – острый, т.е. $\cos\gamma > 0$.

Обозначим через $D_{x,y}$ проекцию $\sigma$ на $xOy$, аналогично $D_{x,z}$, $D_{y,z}$ – проекции $\sigma$ на $xOz$ и $yOz$, а их мери соответсвенно: $\Delta S_{x,y}$, $\Delta S_{x,z}$, $\Delta S_{y,z}$.

Тогда,

$$\Delta S_{x,y} = \Delta\sigma|\cos\gamma| = \Delta\sigma\left|\cos(\bar{n}, z)\right|,$$

$$\Delta S_{x,z} = \Delta\sigma|\cos\beta| = \Delta\sigma\left|\cos(\bar{n}, y)\right|,$$

$$\Delta S_{y,z} = \Delta\sigma|\cos\alpha| = \Delta\sigma\left|\cos(\bar{n}, x)\right|.$$

Так как, $\Delta S_{x,y} \Rightarrow dx\,dy$, при $\Delta\sigma \to d\sigma$, то

$$d\sigma = \frac{dx\,dy}{|\cos\gamma|},$$

аналогично

$$d\sigma = \frac{dx\,dz}{|\cos\beta|} \text{ и } d\sigma = \frac{dy\,dz}{|\cos\alpha|}.$$

Отсюда, $\Pi = \iint\limits_{\sigma} \bar{F} \cdot \bar{n}\, d\sigma = \iint\limits_{\sigma} [P(M)dydz + Q(M)dxdz + R(M)dxdy] =$

$$= \iint\limits_{D_{yz}} P\big(x(y,z), y, z\big)\operatorname{sign}\big(\cos\alpha\big)dydz + \iint\limits_{D_{xz}} Q\big(x, y\big(x,z\big), z\big)\operatorname{sign}\big(\cos\beta\big)dxdz +$$

$$+ \iint\limits_{D_{xy}} R\big(x, y, z\big(x, y\big)\big)\operatorname{sign}\big(\cos\gamma\big)dxdy.$$

**Определение.** Под потоком вектора через замкнутую поверхность понимают разность исходного и входного потоков (например, жидкости).

Тоесть, $\Pi = \Pi_{\text{âèõ}} - \Pi_{\text{âõ}}$, $\Pi = \oiint\limits_{\sigma} \bar{F}(M) \cdot \bar{n}(M) d\sigma$.

Если $\Pi = 0$ через замкнутую поверхность, то говорят, что внутри поверхности, ограниченной $\sigma$, нет источников.

Если $\Pi > 0$ через замкнутую поверхность, то говорят, что внутри существуют положительные источники векторного поля.

Если $\Pi < 0$, то внутри существуют стоки, т.е. отрицательные источники.

## Методы вычисления потока векторного поля

**1 Метод проектирования на одну из координатных плоскостей.** Пусть незамкнутая поверхность $\sigma$ проектируется взаимно однозначно на плоскость $xOy$ в область $D_{xy}$. В таком случае поверхность $\sigma$ задается уравнением $z = g(x, y)$, и так как элемент площади $d\sigma$ этой поверхности равняется

$$d\sigma = \frac{dx\,dy}{|\cos\gamma|},$$

то вычисление потока векторного поля $\overline{F}$ сводится к вычислению двойного интеграла по формуле

$$\Pi = \iint_{\sigma} \overline{F}\cdot\overline{n}\,d\sigma = \iint_{D_{xy}} \left.\frac{\overline{F}\cdot\overline{n}}{|\cos\gamma|}\right|_{z=g(x,y)} dxdy\,. \tag{7}$$

Орт нормали $\overline{n}$ к выбраной стороне поверхности $\sigma$ находим по формуле

$$\overline{n} = \pm\frac{-g'_x\overline{i} - g'_y\overline{j} + \overline{k}}{\sqrt{g'^2_x + g'^2_y + 1}}, \tag{8}$$

а $\cos\gamma$ равняется коэффициенту при орте $\overline{k}$ в формуле (8):

$$\cos\gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{g'^2_x + g'^2_y + 1}}. \tag{9}$$

Если угол $\gamma$ между осью $Oz$ и нормалью $\overline{n}$ острый, то в формулах (8) и (9) необходимо брать знак „+”, если же угол тупой – то „–”.

Если поверхность $\sigma$ удобнее спроектировать на координатные плоскости $yOz$ или $xOz$, то формулы (7), (8), (9) будут иметь вид:

$$\Pi = \iint_{\sigma} \overline{F}\cdot\overline{n}\,d\sigma = \iint_{D_{yz}} \left.\frac{\overline{F}\cdot\overline{n}}{|\cos\alpha|}\right|_{x=\varphi(y,z)} dydz$$

или

$$\Pi = \iint_{\sigma} \overline{F}\cdot\overline{n}\,d\sigma = \iint_{D_{xz}} \left.\frac{\overline{F}\cdot\overline{n}}{|\cos\beta|}\right|_{y=\psi(x,z)} dxdz\,,$$

где вектора нормалей соответственно равны:

$$\overline{n} = \pm\frac{\overline{i} - \varphi'_y\overline{j} - \varphi'_z\overline{k}}{\sqrt{1 + \varphi'^2_y + \varphi'^2_z}}$$

или

$$\overline{n}=\pm\frac{-\psi_x^{'}\overline{i}+\overline{j}-\psi_z^{'}\overline{k}}{\sqrt{\psi_x^{'2}+1+\psi_z^{'2}}},$$

и направляющие косинусы:

$$\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\varphi_y^{'2}+\varphi_z^{'2}}},$$

$$\cos\beta=\pm\frac{1}{\sqrt{\psi_x^{'2}+1+\psi_z^{'2}}}.$$

***Замечание.*** В случае, когда поверхность $\sigma$ задана неявно уравнением $\Phi(x,y,z)=0$, единичный вектор нормали находится по формуле:

$$\overline{n}=\pm\frac{\Phi_x^{'}\overline{i}+\Phi_y^{'}\overline{j}+\Phi_z^{'}\overline{k}}{\sqrt{\Phi_x^{'2}+\Phi_y^{'2}+\Phi_z^{'2}}}.$$

***Пример 1.*** Найти поток векторного поля $\overline{F}=(x-3z)\overline{i}+$ $+(x+3y+z)\overline{j}+(5x+y)\overline{k}$ через верхнюю сторону треугольника $ABC$ с вершинами в точках $A(1,\ 0,\ 0)$, $B(0,\ 1,\ 0)$, $C(0,\ 0,\ 2)$.

*Решение.* Уравнение плоскости треугольника $ABC$ имеет вид: $2x+2y+z=2$, отсюда $z=2-2x-2y$. Треугольник $ABC$ проектируется взаимно однозначно на плоскость $xOy$ в область $D_{xy}$, которой есть треугольник $OAB$ (рисунок 1.11).

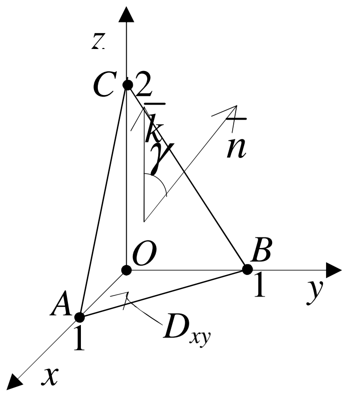



Рисунок 1.11

Угол $\gamma$ острый, поэтому в формулах (8) и (9) будем брать знак „+”, получим:

$$\overline{n}=\frac{2\overline{i}+2\overline{j}+\overline{k}}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{2}{3}\overline{i}+\frac{2}{3}\overline{j}+\frac{1}{3}\overline{k} \text{ и } \cos\gamma=\frac{1}{3}.$$

Найдем скалярное произведение:

$$\overline{F}\cdot\overline{n}=(x-3z)\frac{2}{3}+(x+3y+z)\frac{2}{3}+(5x+y)\frac{1}{3}=$$
$$=\frac{9x+7y-4z}{3}.$$

Подставим полученные результаты в формулу (7) и вычислим поток:

$$\Pi=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{\overline{F}\cdot\overline{n}}{|\cos\gamma|}\bigg|_{z=g(x,\,y)}dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}(9x+7y-4z)\big|_{z=2-2x-2y}dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(17x+15y-8)dy=$$
$$=\int_0^1\left(17x(1-x)+\frac{15}{2}(1-x)^2-8(1-x)\right)dx=-\frac{19}{6}+5-\frac{1}{2}=1\frac{1}{3}.$$

*Ответ:* $1\frac{1}{3}$.

**2 Метод проектирования на три координатные плоскости.** Пусть поверхность $\sigma$ взаимно однозначно проектируется на все три координатные плоскости. Обозначим через $D_{xy}$, $D_{xz}$, $D_{yz}$ проекции $\sigma$ соответственно на плоскости $xOy$, $xOz$, $yOz$.

Пусть уравнение $\Phi(x,y,z)=0$ поверхности $\sigma$ однозначно решается относительно каждого переменного $x=x(y,z),\ y=y(x,z),\ z=z(x,y)$. Тогда поток векторного поля $\overline{F}$ вычисляется по формуле

$$\Pi=\pm\iint\limits_{D_{yz}}P\big(x(y,z),y,z\big)dydz\pm\iint\limits_{D_{xz}}Q\big(x,y\big(x,z\big),z\big)dxdz\pm\iint\limits_{D_{xy}}R\big(x,y,z\big(x,y\big)\big)dxdy\,. \quad (10)$$

Знак перед каждым интегралом зависит от знака соответствующего направляющего косинуса вектора нормали (значение косинуса острого угла положительное, значение тупого – отрицательное).

***Пример 2.*** Найти поток векторного поля $\overline{F}=\{xy,\ yz,\ xz\}$ через часть внешней стороны сферы $x^2+y^2+z^2=1$, расположенной в первом октанте.

*Решение.* Так как часть поверхности находится в первом октанте (углы между вектором нормали и координатными осями острые), то в формуле (10) перед каждым интегралом необходимо брать знак „+”. Учитывая, что $P=xy,\ Q=yz,\ R=xz$, и с уравнений сферы

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2}\ ,\ y=\sqrt{1-x^2-z^2}\ ,\ x=\sqrt{1-z^2-y^2}\ ,$$

получим

$$\Pi=\iint\limits_{D_{yz}}xy\,dydz+\iint\limits_{D_{xz}}yz\,dxdz+\iint\limits_{D_{xy}}xz\,dxdy=$$

$$=\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{1-z^2-y^2}\,y\,dydz+\iint\limits_{D_{xz}}\sqrt{1-z^2-x^2}\,z\,dxdz+\iint\limits_{D_{xy}}x\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy\,.$$

Перейдем к полярным координатам и вычислим третий интеграл, который находится в правой части последнего равенства (первый и второй вычисляются аналогично).

$$\iint\limits_{D_{xy}}x\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy=\left[\left\{\begin{array}{l}x=\rho\cos\varphi,\\ y=\rho\sin\varphi,\end{array}\right.\text{ää}\begin{array}{c}0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0\le\rho\le1.\end{array}\right]=\iint\limits_{D_{xy}}\rho^2\sqrt{1-\rho^2}\cos\varphi d\varphi d\rho=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi d\varphi\int\limits_0^1\rho^2\sqrt{1-\rho^2}d\rho=\int\limits_0^1\rho^2\sqrt{1-\rho^2}d\rho=\begin{bmatrix}\rho=\sin t,\\ d\rho=\cos tdt\end{bmatrix}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2t\cos^2tdt=$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2tdt=\frac{1}{8}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos4t)dt=\frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{16}.$$

Искомый поток равняется $\Pi=\dfrac{\pi}{16}+\dfrac{\pi}{16}+\dfrac{\pi}{16}=\dfrac{3\pi}{16}$.

*Ответ:* $\dfrac{3\pi}{16}$.

### 1.3.7 Дивергенция векторного поля

**Определение.** Дивергенция векторного поля $\overline{F}$ в точке $M$ обозначается символом $\operatorname{div}\overline{F}(M)$ и определяется как:

$$\operatorname{div}\overline{F}(M)=\lim_{\substack{\lambda\to 0\\(V\to M)}}\frac{\oint\!\!\!\oint_{\sigma}\overline{F}(M)\overline{n}d\sigma}{V},$$

т.е., дивергенцией векторного поля называется предел отношения потока векторного поля через замкнутую поверхность $\sigma$ к объему $V$, ограниченному этой поверхностью, при условии, что область стремится к точке $M$ ($\lambda$ – её диаметр).

Дивергенция характеризирует плотность мощности источников векторного поля. Эта скалярная величина вычисляется по формуле

$$\operatorname{div}\overline{F}(M)=\overline{\nabla}\cdot\overline{F},$$

или

$$\operatorname{div}\overline{F}(M)=\frac{\partial P(M)}{\partial x}+\frac{\partial Q(M)}{\partial y}+\frac{\partial R(M)}{\partial z}.$$

**Свойства:**

1) $\operatorname{div}\overline{c}=0$, $\overline{c}$ – постоянный вектор;

2) $\operatorname{div}(\alpha\overline{F}_1+\beta\overline{F}_2)=\alpha\operatorname{div}\overline{F}_1+\beta\operatorname{div}\overline{F}_2$, $\alpha,\beta-const$;

3) $\operatorname{div}\left(\varphi(M)\cdot\overline{F}(M)\right)=\operatorname{grad}\varphi\cdot\overline{F}+\varphi\cdot\operatorname{div}\overline{F}$, так как

$(\varphi\cdot P)'_x+(\varphi\cdot Q)'_y+(\varphi\cdot R)'_z=\varphi'_x\cdot P+\varphi\cdot P'_x+\varphi'_y\cdot Q+\varphi\cdot Q'_y+\varphi'_z\cdot R+\varphi\cdot R'_z$;

4) $\operatorname{div}(\varphi\cdot\overline{c})=\operatorname{grad}\varphi\cdot\overline{c}$;

5) $\operatorname{div}\operatorname{grad}u=\Delta u=\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial z^2}$, где $\Delta$ – оператор Лапласа:

$\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ ($\Delta u=0$ – уравнение Лапласа).

### 1.3.8 Формула Остроградского-Гаусса

**Теорема Остроградского-Гаусса.** Пусть векторное поле $\overline{F}(M)$ имеет непрерывные частные производные $P'_x$, $Q'_y$, $R'_z$ в некоторой области $V$ и на её границе, и пусть замкнутая поверхность $\sigma$ ограничивает некоторую область $V$.

Тогда

$$\oiint\limits_{\sigma} \overline{F} \cdot \overline{n} d\sigma = \iiint\limits_{V} \operatorname{div} \overline{F}(M) dv\,,$$

т.е., поток вектора $\overline{F}$ через замкнутую поверхность $\sigma$ равняется тройному интегралу по области $V$ от дивергенции этого вектора.

В координатной форме:

$$\iiint\limits_{V} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \oiint\limits_{\sigma} \left( Pdydz + Qdxdz + Rdxdy \right). \qquad (11)$$

*Доказательство.* Пусть область $D$ есть проекцией поверхности $\sigma$ на плоскость $xOy$, а $z = z_1(x, y)$ и $z = z_2(x, y)$ – уравнения соответствующих частей поверхности $\sigma$ (нижней части $\sigma_1$ и верхней – $\sigma_2$), причём $z_1, z_2$ – непрерывные в $D$.

Обозначим $P = F_x, Q = F_y, R = F_z$.

Рассмотрим

$$I = \iiint\limits_{V} \frac{\partial F_z}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{D} dxdy \int\limits_{z_1(x,\, y)}^{z_2(x,\, y)} \frac{\partial F_z}{\partial z} dz\,.$$

Вычислим внутренний интеграл по формуле Ньютона-Лейбница:

$$I = \iint\limits_{D} \left[ F_z\left(x,\, y,\, z_2(x,\, y)\right) - F_z\left(x,\, y,\, z_1(x,\, y)\right) \right] dxdy\,.$$

Виразим двойной интеграл через поверхностный интеграл II-го рода (когда произвольным точкам $M(x, y)$ области $D$ отвечают точки $(x, y, z)$, которые описывают поверхность $\sigma$ как точки входа и вихода через поверхность)

$$I = \iint\limits_{\sigma_2^+} F_z(x,\, y,\, z) dxdy - \iint\limits_{\sigma_1^-} F_z(x,\, y,\, z) dxdy\,.$$

Заменяя во втором интеграле внутренюю сторону поверхности на внешнюю, получим:

$$I = \iint\limits_{\sigma_2^+} F_z(x,\, y,\, z) dxdy + \iint\limits_{\sigma_1^+} F_z(x,\, y,\, z) dxdy = \oiint\limits_{\sigma^+} F_z(x,\, y,\, z) dxdy\,.$$

А итак, $I = \iiint\limits_{V} \frac{\partial F_z}{\partial z} dxdydz = \oiint\limits_{\sigma^+} F_z(x,\, y,\, z) dxdy$.

Аналогично доказываем, что

$$\iiint\limits_{V} \frac{\partial F_x}{\partial x} dxdydz = \oiint\limits_{\sigma^+} F_x(x,\, y,\, z) dydz\,,\ \iiint\limits_{V} \frac{\partial F_y}{\partial y} dxdydz = \oiint\limits_{\sigma^+} F_y(x,\, y,\, z) dxdz\,.$$

Сумируя почленно эти равенства, получим:

$$\iiint\limits_{V} \operatorname{div} \overline{F}(M) dv = \oiint\limits_{\sigma^+} F_x dydz + \oiint\limits_{\sigma^+} F_y dxdz + \oiint\limits_{\sigma^+} F_z dxdy = \oiint\limits_{\sigma} \overline{F} \cdot \overline{d\sigma}$$

***Пример.*** Найти поток векторного поля $\overline{F} = \{x - 3z,\, x + 3y + z,\, 5x + y\}$ через внешнюю поверхность пирамиды *CAOB* с вершинами в точках *O*(0, 0, 0), *A*(1, 0, 0), *B*(0, 1, 0), *C*(0, 0, 2).

*Решение.* Так как $P = x - 3z, Q = x + 3y + z, R = 5x + y$, то, используя формулу (11), получим

$$\Pi = \iiint\limits_V (1+3+0)dv = 4\iiint\limits_V dv = 4V_{CAOB} = 1\frac{1}{3}.$$

*Ответ:* $1\frac{1}{3}$.

### 1.3.9 Ротор (вихрь) векторного поля

**Определение.** Ротором векторного поля $\overline{F}(M)$ называется вектор $\operatorname{rot}\overline{F}(M)$, который определяется следующим образом:

$$\operatorname{rot}\overline{F}(M) = \overline{\nabla}\times\overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix},$$

т.е.

$$\operatorname{rot}\overline{F}(M) = \left\{R'_y - Q'_z;\ P'_z - R'_x;\ Q'_x - P'_y\right\}.$$

Направление ротора – это направление, вокруг которого циркуляция имеет наибольшее значение сравнительно с циркуляцией вокруг любого направления, которое не совпадает с нормалью к плоской области, ограниченой замкнутым контуром.

**Свойства:**

1) $\operatorname{rot}\overline{c} = 0$;

2) $\operatorname{rot}(\alpha\overline{F}_1 + \beta\overline{F}_2) = \alpha\operatorname{rot}\overline{F}_1 + \beta\operatorname{rot}\overline{F}_2$;

3) $\operatorname{rot}\left(\varphi(M)\cdot\overline{F}(M)\right) = \operatorname{grad}\varphi\times\overline{F} + \varphi\cdot\operatorname{rot}\overline{F}$;

4) $\operatorname{rot}\left(\varphi(M)\cdot\overline{c}\right) = \operatorname{grad}\varphi\times\overline{c}$;

5) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi) = 0$;

6) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\overline{F}) = 0$.

### 1.3.10 Формула Стокса

**Теорема Стокса.** Циркуляция векторного поля $\overline{F}(M)$ по замкнутому контуру $L$ равняется потоку вихря этого вектора через поверхность $\sigma$, натянутую на контур $L$, т.е.

$$\ddot{O} = \oint\limits_L \overline{F}(M)\overline{dl} = \iint\limits_\sigma \operatorname{rot}\overline{F}(M)\cdot\overline{n}(M)d\sigma = \iint\limits_\sigma \operatorname{rot}\overline{F}\cdot\overline{d\sigma}.$$

В координатной форме

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_\sigma (R'_y - Q'_z)dydz + (P'_z - R'_x)dxdz + \left(Q'_x - P'_y\right)dxdy .$$

Обход по контуру $L$ выбирается так, что если смотреть с конца вектора нормали на движение по контуру $L$, то направление движения должно быть противоположным направлению движения часовой стрелки.

Рассмотрим частный случай формулы Стокса, когда векторное поле является плоским, тогда $R \equiv 0$, $z = 0$, $\overline{F}(M) = P(M)\overline{i} + Q(M)\overline{j}$, а формула Стокса будет иметь вид:

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy = \iint\limits_D (Q'_x - P'_y)dxdy ,$$

получили формулу Грина.

Физическим смыслом формулы Стокса есть утверждение, что поток векторного поля $\overline{F}$ равняется количеству жидкости, вытекающей (стекающей) через поверхность $\sigma$ за единицу времени

$$\oint\limits_L \overline{F}\,\overline{dl} = \iint\limits_\sigma \operatorname{rot}\overline{F}\,\overline{d\sigma} .$$

### 1.3.11 Свойства векторных полей

**1 Соленоидальное векторное поле.**

Векторное поле $\overline{F} = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$ называется соленоидальным в области $V$, если $\operatorname{div}\overline{F}(M) \equiv 0$ в каждой точке $M$ области $V$.

Тогда из формулы Остроградского-Гаусса: $\Pi = \iiint\limits_{V'} \operatorname{div}\overline{F}dv \equiv 0$, т.е. поток соленоидального векторного поля через любую замкнутую поверхность $\sigma'$, которая ограничивает область $V' \subset V$, равен нулю.

**2 Безвихревое векторное поле.**

Векторное поле $\overline{F}(M)$ называется безвихревым в некоторой области $V$, если в каждой её точке $\operatorname{rot}\overline{F}(M) = 0$. Тогда из формулы Стокса, $Ц = 0$ по любому замкнутому контуру $L$, полностью принадлежащему области $V$.

**3 Потенциальное векторное поле.**

Векторное поле называется потенциальным в некоторой области $V$, если существует скалярная функция $u(M)$ или $u(x, y, z)$ такая, что $\overline{F}(M) = \operatorname{grad} u(M) = \overline{\nabla} \cdot u$, $M \in V$.

Функция $u(M)$ называется потенциалом векторного поля.

**Теорема 1.** Для того, чтобы векторное поле было потенциальным в некоторой области $V$ необходимо и достаточно, чтобы его $\operatorname{rot}\overline{F}(M) = 0$, $M \in V$.

*Доказательство.*

*Необходимость.* Дано $\overline{F}(M)$ потенциальное поле в области $V$. Тогда

$$\overline{F}(M)=\operatorname{grad}u(M)=\overline{\nabla}\cdot u\,,\ \operatorname{rot}\overline{F}(M)=\overline{\nabla}\times\overline{F}\,.$$

Итак, $\operatorname{rot}\overline{F}(M)=\overline{\nabla}\times(\overline{\nabla}\cdot u)=0$ (так как $\overline{\nabla}$ è $\overline{\nabla}\cdot u$ – коллинеарные вектора).

*Достаточность.* Дано $\operatorname{rot}\overline{F}(M)=0$ в области $V$, т.е. $\overline{F}(M)$ – безвихровое поле.

$\operatorname{rot}\overline{F}(M)=\left\{R'_y-Q'_z;\ P'_z-R'_x;\ Q'_x-P'_y\right\}=0$, если $R'_y=Q'_z;\ P'_z=R'_x;\ Q'_x=P'_y$.

Рассмотрим следующую функцию:

$$u(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}P(x,y,z)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y,z)dy+\int_{z_0}^{z}R(x_0,y_0,z)dz\,.$$

Непосредственно вычисляя, получим:

$u'_x=P(x,y,z)$;

$u'_y=\int\limits_{x_0}^{x}P'_y dx+Q(x_0,y,z)+0=\int\limits_{x_0}^{x}Q'_x dx+Q=Q$, так как $P'_y=Q'_x$;

$$u'_z=\int_{x_0}^{x}P'_z dx+\int_{y_0}^{y}Q'_z dy+R(x_0,y_0,z)=\int_{x_0}^{x}R'_x dx+\int_{y_0}^{y}R'_y(x_0,y,z)dy+R(x_0,y_0,z)=$$

$$=R(x,y,z)-R(x_0,y,z)+R(x_0,y,z)-R(x_0,y_0,z)+R(x_0,y_0,z)=R,$$

так как $P'_z=R'_x$ і $Q'_z=R'_y$.

Таким образом,

$$\operatorname{grad}u(M)=\overline{F}(M)\,.$$

**Теорема 2.** Если поле $\overline{F}(M)$ безвихровое в области $V$, то криволинейный интеграл $\int\limits_{AB}\overline{F}\cdot\overline{dl}$ (II-го рода) не зависит от пути интегрирования в области $V$.

*Доказательство.*

$\overline{F}(M)$ безвихровое, поэтому $\operatorname{rot}\overline{F}(M)=0,\ M\in V$. Тогда согласно формуле Стокса: $\oint\limits_{L}\overline{F}\cdot\overline{dl}=0$.

Рассмотрим $\oint\limits_{L}\overline{F}\cdot\overline{dl}=\int\limits_{AMB}\overline{F}\cdot\overline{dl}+\int\limits_{BNA}\overline{F}\cdot\overline{dl}=\int\limits_{AMB}\overline{F}\cdot\overline{dl}-\int\limits_{ANB}\overline{F}\cdot\overline{dl}=0$,

т.е., $\int\limits_{AMB}\overline{F}\cdot\overline{dl}=\int\limits_{ANB}\overline{F}\cdot\overline{dl}$.

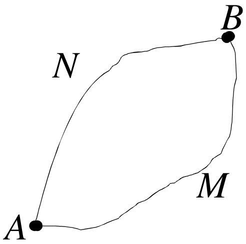


Рисунок 1.12

Из теоремы следует, что для того, чтобы криволинейный интеграл II-го рода не зависел от пути интегрирования необходимо и достаточно, чтобы поле было потенциальным.

Ибо, если векторное поле $\overline{F}(M)$ потенциальное в области $V$, то $\oint\limits_L \overline{F}\cdot\overline{dl}=\iint\limits_{\sigma}\operatorname{rot}\overline{F}\cdot d\overline{\sigma}=\begin{bmatrix}\operatorname{rot}\overline{F}\equiv 0 \text{ â îáëàñòè } V \\ \text{äëÿ ïîòåíöèàëüíîãî ïîëÿ}\end{bmatrix}=0$.

### 1.3.12 Работа в потенциальном поле

Физическим смыслом криволинейного интеграла II-го рода есть работа, поэтому если векторное поле $\overline{F}(M)$ потенциальное в области $V$, то

$$A=\int\limits_L \overline{F}\cdot\overline{dl}=\int\limits_L Pdx+Qdy+Rdz=\begin{bmatrix}\text{ïîëå ïîòåíöèàëüíîå} \\ P=u_x',\ Q=u_y',\ R=u_z'\end{bmatrix}=$$

$$=\int\limits_L u_x'dx+u_y'dy+u_z'dz=\int\limits_L du=u(B)-u(A),$$ где $AB=L$ (незамкнутая кривая).

Итак, работа вектора $\overline{F}(M)$ в потенциальном поле, равна разности потенциалов в конечной и начальной точках.

### 1.3.13 Теорема Гельмгольца

**Теорема.** Любое векторное поле $\overline{F}(M)$ представимо в виде суммы двух полей, одно из которых является потенциальным, а другое соленоидальным.

*Доказательство.* Пусть $\overline{F}(M)$ – произвольное векторное поле. Тогда $\operatorname{div}\overline{F}(M)=f(M)$ – скалярная функция. Найдём потенциальное поле $\overline{F}_1(M)=\operatorname{grad}u(M)$, потенциал $u$ которого является решением неоднородного уравнения Лапласа: $\Delta u=f(M)$.

Т.е., $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f(M)$ или $\Delta u=\overline{\nabla}\cdot\overline{\nabla}u$.

Покажем, что векторное поле $\overline{F_2}=\overline{F}-\overline{F}_1$ является соленоидальным. Для этого найдем его дивергенцию:

$$\operatorname{div}\overline{F}_2=\operatorname{div}\overline{F}-\operatorname{div}\overline{F}_1=f(M)-\operatorname{div}(\overline{\nabla}u)=f(M)-\overline{\nabla}\cdot\overline{\nabla}u=$$

$=f(M)-\Delta u=f(M)-f(M)\equiv 0$, поэтому $\overline{F_2}$ – соленоидальное поле.

Следовательно, $\overline{F}(M)=\underset{\text{ïîòåíö.}}{\overline{F}_1(M)}+\underset{\text{ñîëåíîèä.}}{\overline{F}_2(M)}$.

### 1.4 Задания для самостоятельной работы

1.4.1 Задано скалярное поле $u(x,y,z)$, вектор $\overline{l}$ и точка $M$. Найти:

1) производную поля $u(x,y,z)$ в точке $M$ по направлению вектора $\overline{l}$;
2) градиент поля $u(x,y,z)$ в точке $M$;
3) наибольшую скорость возростания поля $u(x,y,z)$ в точке $M$.

1.01. $u = x^2 - y^2 + z^3$, $\bar{l} = 2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$, $M(1;2;-1)$.

1.02. $u = xy + yz - xz$, $\bar{l} = \bar{i} - 2\bar{j} - 2\bar{k}$, $M(0;1;-1)$.

1.03. $u = x^2 y + y^2 z + xz^2$, $\bar{l} = 3\bar{i} - 4\bar{k}$, $M(1;0;2)$.

1.04. $u = xz + y^2 x - yz^2$, $\bar{l} = 4\bar{i} + 3\bar{j}$, $M(2;1;0)$.

1.05. $u = xyz^2 + zy$, $\bar{l} = -2\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$, $M(-1;0;2)$.

1.06. $u = 3x^2 + 2y^2 - 4zx$, $\bar{l} = \bar{i} - \bar{j} + \sqrt{2}\bar{k}$, $M(2;1;-1)$.

1.07. $u = 2x^3 + xy^2 + 3z^2$, $\bar{l} = 2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$, $M(2;2;0)$.

1.08. $u = x^2 y^2 z^2$, $\bar{l} = 4\bar{i} - 2\bar{j} + 4\bar{k}$, $M(1;2;3)$.

1.09. $u = xyz - y^2 z^3$, $\bar{l} = 4\bar{i} + 4\bar{j} - 2\bar{k}$, $M(2;0;1)$.

1.10. $u = x^2 yz + y^2 + xyz^2$, $\bar{l} = 2\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$, $M(1;-1;0)$.

1.11. $u = xy^2 z^3$, $\bar{l} = \bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$, $M(0;1;2)$.

1.12. $u = 2xy + 3yz^3$, $\bar{l} = 2\bar{i} - 2\bar{j} + \sqrt{8}\bar{k}$, $M(-1;2;1)$.

1.13. $u = 3xy + 2yz^3$, $\bar{l} = \bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$, $M(2;0;2)$.

1.14. $u = 3x^2 + 2y^2 - 4z^2$, $\bar{l} = 4\bar{j} - 3\bar{k}$, $M(1;1;0)$.

1.15. $u = 2xz + 3xy + 4yz$, $\bar{l} = \bar{i} - \bar{j} + \sqrt{2}\bar{k}$, $M(1;2;-2)$.

1.16. $u = 3x^2 + yz - xz^2$, $\bar{l} = 2\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$, $M(0;-1;2)$.

1.17. $u = 3xy^2 + 2yz^3$, $\bar{l} = 4\bar{i} - 3\bar{k}$, $M(2;0;1)$.

1.18. $u = 2xy - 3yz^3$, $\bar{l} = 2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$, $M(1;1;0)$.

1.19. $u = x^2 y + xy^2 - yz^2$, $\bar{l} = \bar{i} - \bar{j} + \sqrt{7}\bar{k}$, $M(1;-1;1)$.

1.20. $u = 2xyz^2 - 3xzy^2$, $\bar{l} = \bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}$, $M(2;1;-1)$.

1.21. $u = xy^2 z + x^2 z^2$, $\bar{l} = 2\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$, $M(0;-1;3)$.

1.22. $u = 4xz + 3yz^2$, $\bar{l} = \bar{i} - \bar{j} + \sqrt{7}\bar{k}$, $M(1;0;-3)$.

1.23. $u = x^3 y^2 + yz^2$, $\bar{l} = -\bar{i} + \bar{j} - 7\bar{k}$, $M(2;1;-3)$.

1.24. $u = 4xz + 3yz^2$, $\bar{l} = 2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$, $M(3;0;1)$.

1.25. $u = 2xy - 3yz + 4xz$, $\bar{l} = \bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$, $M(1;3;-1)$.

1.26. $u = xy^2 z + 2x^2 z^2$, $\bar{l} = 2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$, $M(1;3;-2)$.

1.27. $u = 2xyz + 3x^2 z^2$, $\bar{l} = 4\bar{i} + 3\bar{k}$, $M(2;-3;-1)$.

1.28. $u = 3xy^2 + 4yz^2$, $\bar{l} = -3\bar{i} - 4\bar{k}$, $M(-2;0;3)$.

1.29. $u = 2xy - 3yz^3$, $\bar{l} = 2\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$, $M(-1;0;1)$.

1.30. $u = 3xy + yz^3$, $\bar{l} = \bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$, $M(2;0;2)$.

1.4.2 Задано векторное поле $\overline{F}(x,y,z)$ и замкнутая поверхность $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$. Найти:

1) поток векторного поля $\overline{F}$ через поверхность $\sigma$ по определению и по формуле Остроградского-Гаусса;

2) циркуляцию поля $\overline{F}$ по замкнутому контуру $L=\sigma_1 \cap \sigma_2$ по определению и с помощью теоремы Стокса.

2.01. $\overline{F}=(x-y)\overline{i}+(y+z)\overline{j}+(y-z)\overline{k}$; $\sigma_1: x^2-y^2-z^2=1$; $\sigma_2: x^2+y^2+z^2=3$ $(z>0)$.

2.02. $\overline{F}=(x-y)\overline{i}+(y+z)\overline{j}-2x\overline{k}$; $\sigma_1: x^2+y^2+z^2=9$; $\sigma_2: z=0$ $(z\geq 0)$.

2.03. $\overline{F}=yz\overline{i}+x\overline{j}-y\overline{k}$; $\sigma_1: x^2+y^2=z^2$; $\sigma_2: z=1$ $(0\leq z\leq 1)$.

2.04. $\overline{F}=(x-y)\overline{i}+(y-z)\overline{k}$; $\sigma_1: x^2-y^2-z^2=1$; $\sigma_2: x=\sqrt{5}$.

2.05. $\overline{F}=(2x-y)\overline{i}+(3x+y)\overline{j}+z\overline{k}$; $\sigma_1: y=x^2+z^2$; $\sigma_2: y=1$.

2.06. $\overline{F}=2x\overline{i}-y\overline{j}+z\overline{k}$; $\sigma_1: x^2+y^2+z^2=4$; $\sigma_2: 3z=x^2+y^2$.

2.07. $\overline{F}=-y\overline{i}+x\overline{j}+z\overline{k}$; $\sigma_1: x^2+y^2=z^2$; $\sigma_2: x^2+y^2+z^2=2$ $(z>0)$.

2.08. $\overline{F}=x\overline{i}-y\overline{j}+z\overline{k}$; $\sigma_1: x^2+y^2=z$; $\sigma_2: z=3+2y$ $(z\geq 0)$.

2.09. $\overline{F}=(x+z)\overline{i}+y\overline{j}$; $\sigma_1: z=8-x^2-y^2$; $\sigma_2: z=x^2+y^2$.

2.10. $\overline{F}=(x-y)\overline{i}+(x+z)\overline{j}+2y\overline{k}$; $\sigma_1: x=y^2+z^2$; $\sigma_2: x^2+y^2+z^2=2$.

2.11. $\overline{F}=x\overline{i}+(x+z)\overline{j}-2y\overline{k}$; $\sigma_1: x=y^2+z^2$; $\sigma_2: x^2+y^2+z^2=2$.

2.12. $\overline{F}=-3y\overline{i}+2x\overline{j}+(x+z)\overline{k}$; $\sigma_1: x^2-y^2-z^2=1$; $\sigma_2: x^2+y^2+z^2=3$ $(z>0)$.

2.13. $\overline{F}=-2y\overline{i}+3z\overline{k}$; $\sigma_1: x^2=y^2+z^2$; $\sigma_2: x^2+y^2+z^2=8$ $(x\geq 0)$.

2.14. $\overline{F}=(x-3y)\overline{i}+(y+5z)\overline{j}+2x\overline{k}$; $\sigma_1: x^2+y^2=z^2$; $\sigma_2: z=3$.

2.15. $\overline{F}=3x\overline{i}-z\overline{j}$; $\sigma_1: z=6-x^2-y^2$; $\sigma_2: x^2+y^2=z^2$ $(z\geq 0)$.

2.16. $\overline{F}=x\overline{i}-(x+2y)\overline{j}+y\overline{k}$; $\sigma_1: z=x^2+y^2$; $\sigma_2: z=1$.

2.17. $\overline{F}=x\overline{i}+z\overline{j}-y\overline{k}$; $\sigma_1: z=4-2(x^2+y^2)$; $\sigma_2: z=2(x^2+y^2)$.

2.18. $\overline{F}=x\overline{i}-z\overline{j}+y\overline{k}$; $\sigma_1: x^2+y^2+z^2=1$; $\sigma_2: x^2+y^2=z^2$ $(z\geq 0)$.

2.19. $\overline{F}=(x+z)\overline{i}+y\overline{j}$; $\sigma_1: z=8-x^2-y^2$; $\sigma_2: z=x^2+y^2$.

2.20. $\overline{F}=(x+y)\overline{i}-4y\overline{j}+2x\overline{k}$; $\sigma_1: z=x^2+y^2$; $\sigma_2: z=1$.

2.21. $\overline{F}=x\overline{i}-2z\overline{j}+3y\overline{k}$; $\sigma_1: x^2+y^2-z=0$; $\sigma_2: z-2x=0$.

2.22. $\overline{F}=x\overline{i}+\overline{j}+y\overline{k}$; $\sigma_1: z=4-x^2-y^2$; $\sigma_2: z=0$ $(z>0)$.

2.23. $\overline{F}=3x\overline{i}-2y\overline{k}$; $\sigma_1: x^2-y^2-z^2=1$; $\sigma_2: x=2$.

2.24. $\overline{F}=(x-2y)\overline{i}+(z-x)\overline{j}+x\overline{k}$; $\sigma_1: x^2-y^2-z^2=1$; $\sigma_2: y=2$.

2.25. $\overline{F}=y\overline{i}+2x\overline{j}+z\overline{k}$; $\sigma_1: x^2+y^2+z^2=1$; $\sigma_2: z=0$ $(z>0)$.

2.26. $\overline{F}=(x+z)\overline{i}+(y+z)\overline{k}$; $\sigma_1: z=x^2+y^2$; $\sigma_2: z=1$.

2.27. $\overline{F}=(x-z)\overline{i}+y\overline{j}$; $\sigma_1: z=1-x^2-y^2$; $\sigma_2: z=x^2+y^2$.

2.28. $\overline{F}=(x+y)\overline{i}+2x\overline{k}$; $\sigma_1: z=x^2+y^2$; $\sigma_2: z=4$.

2.29. $\overline{F}=x\overline{i}+z\overline{j}+3y\overline{k}$; $\sigma_1: x^2+y^2-z=0$; $\sigma_2: z-2y=0$.

2.30. $\overline{F}=x\overline{i}+\overline{j}+y\overline{k}$; $\sigma_1: z=9-x^2-y^2$; $\sigma_2: z=0$ $(z>0)$.

1.4.3 Задано векторное поле $\overline{F}(x,y,z)$. Доказать, что поле $\overline{F}(x,y,z)$ является потенциальным. Найти потенциал поля $\overline{F}(x,y,z)$.

3.01. $\overline{F}=3x^2\overline{i}+2y\overline{j}-4\overline{k}$.

3.02. $\overline{F}=(2x+1)\overline{i}-4y^2\overline{j}-2z\overline{k}$.

3.03. $\overline{F}=(x^2+x)\overline{i}+4\overline{j}-2z\overline{k}$.

3.04. $\overline{F}=4\overline{i}-(y^2+1)\overline{j}+3z\overline{k}$.

3.05. $\overline{F}=5x\overline{i}-(y+2)\overline{j}+(z^2+1)\overline{k}$.

3.06. $\overline{F}=(2x^2+x)\overline{i}+y^2\overline{j}-(3z+2)\overline{k}$.

3.07. $\overline{F}=5\overline{i}-(y+3)\overline{j}-(z^2-1)\overline{k}$.

3.08. $\overline{F}=(1-3x)\overline{i}+5\overline{j}+(3z^2+2)\overline{k}$.

3.09. $\overline{F}=(4x^2+1)\overline{i}+(3y-2)\overline{j}+z\overline{k}$.

3.10. $\overline{F}=(3x+4)\overline{i}+(y^2-2y)\overline{j}+4\overline{k}$.

3.11. $\overline{F}=(2-3x)\overline{i}+(4y^2+3y)\overline{j}+(2z+1)\overline{k}$.

3.12. $\overline{F}=(1-2x^2)\overline{i}+(3-y)\overline{j}+(4z+1)\overline{k}$.

3.13. $\overline{F}=2x^2\overline{i}-y^2\overline{j}+\overline{k}$.

3.14. $\overline{F}=(5x+2)\overline{i}-(3y+1)\overline{j}+(2z-1)\overline{k}$.

3.15. $\overline{F}=(2x^2+x)\overline{i}+y^2\overline{j}-(3z+2)\overline{k}$.

3.16. $\overline{F}=(1+3x)\overline{i}-2y\overline{j}+(4-3z)\overline{k}$.

3.17. $\overline{F}=(3x-x^2)\overline{i}+(2-4y)\overline{j}+3\overline{k}$.

3.18. $\overline{F}=(2x^2+4)\overline{i}+(3y-1)\overline{j}+(z+2)\overline{k}$.

3.19. $\overline{F}=3x\overline{i}+(2-4y^2)\overline{j}+(3z-z^2)\overline{k}$.

3.20. $\overline{F}=(x^2-2)\overline{i}+(y-2)\overline{j}+(z^2+2z)\overline{k}$.

3.21. $\overline{F}=(1-2x+x^2)\overline{i}+(4y-1)\overline{j}-2z\overline{k}$.

3.22. $\overline{F}=2\overline{i}-(3y^2+y)\overline{j}+(4-3z)\overline{k}$.

3.23. $\overline{F}=(2x-x^2)\overline{i}+(1-4y)\overline{j}+(z^2+1)\overline{k}$.

3.24. $\overline{F}=(4x^2+1)\overline{i}-(3y+2)\overline{j}+(1-z^2)\overline{k}$.

3.25. $\overline{F}=(1+2x^2)\overline{i}+(3y-1)\overline{j}+4z\overline{k}$.

3.26. $\overline{F}=3\overline{i}+(4y^2+3y)\overline{j}+(2z+3)\overline{k}$.

3.27. $\overline{F}=(4-3x^2)\overline{i}+(2y^2-y)\overline{j}+(1-2z)\overline{k}$.

3.28. $\overline{F}=(x^2+1)\overline{i}+(3y-2)\overline{j}+4z^2\overline{k}$.

3.29. $\overline{F}=2x^2\overline{i}-(3y^2+2y)\overline{j}+(z^2-3z)\overline{k}$.

3.30. $\overline{F}=(3x-2)\overline{i}+(2y+1)\overline{j}+(z-1)\overline{k}$.

# 2 ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

## 2.1 Комплексные числа и действия над ними

**Определение.** Комплексными называют числа вида

$$z = x + iy, \tag{1}$$

где $x$ и $y$ – действительные числа, а $i$ – мнимая единица ($i^2 = -1$). Число $x$ называется действительной частью комплексного числа и обозначается $x = \operatorname{Re} z$, $y$ – мнимой частью: $y = \operatorname{Im} z$.

Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны отдельно их действительные и мнимые части.

Число $\bar{z} = x - iy$ называется сопряжёным к числу $z = x + iy$.

Запись комплексного числа в виде (1) называется его алгебраической формой.

Комплексное число $z = x + iy$ изображается на плоскости точкой с координатами $(x, y)$. Координатную плоскость в таком случае называют комплексной плоскостью.

Комплексное число представимо в виде радиус-вектора. Длина радиус-вектора:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

называется модулем комплексного числа ($r \ge 0$). Угол $\varphi$, образованый радиус-вектором $Oz$ с положительным направлением оси $Ox$ называется аргументом комплексного числа и обозначается

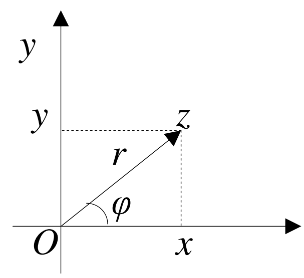



Рисунок 2.1

$\varphi = \arg z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ $(x \ne 0)$. Аргумент комплексного числа – величина многозначная: $\operatorname{A rg} z = \arg z + 2\pi k$ $(k = 0, -1, 1, \ \ -2, 2, \ldots)$, где $\arg z$ – главное значение аргумента, которое находится в промежутке $(-\pi; \pi]$.

Из рисунка 2.1 видно, что имеют место равенства:

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2},\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

Если в алгебраической форме $x$ и $y$ заменить на $x = r\cos\varphi$ и $y = r\sin\varphi$, то комплексное число $z = x + iy$ можно записать в виде:

$$z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right). \tag{2}$$

Такая запись комплексного числа называется его тригонометрической формой.

Эйлером было доказано равенство $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$, используя которое, можно записать

$$z = re^{i\varphi}. \tag{3}$$

Это показательная форма комплексного числа.

Пусть задано два комплексных числа в алгебраической форме: $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$. Тогда:

1) $z_1 \pm z_2 = \left(x_1 \pm x_2\right) + i\left(y_1 \pm y_2\right)$;

2) $z_1 \cdot z_2 = \left(x_1 + iy_1\right)\cdot\left(x_2 + iy_2\right) = \left(x_1x_2 - y_1y_2\right) + i\left(x_1y_2 + x_2y_1\right)$;

3) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}\cdot\dfrac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \dfrac{\left(x_1x_2 + y_1y_2\right) + i\left(x_2y_1 - x_1y_2\right)}{x_2^2 + y_2^2} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\dfrac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$.

Если же комплексные числа заданы в тригонометрической форме, т.е. $z_1 = r_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)$ и $z_2 = r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)$, то

1) $z_1 \cdot z_2 = r_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)\cdot r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right) = r_1\cdot r_2\cdot\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)$;

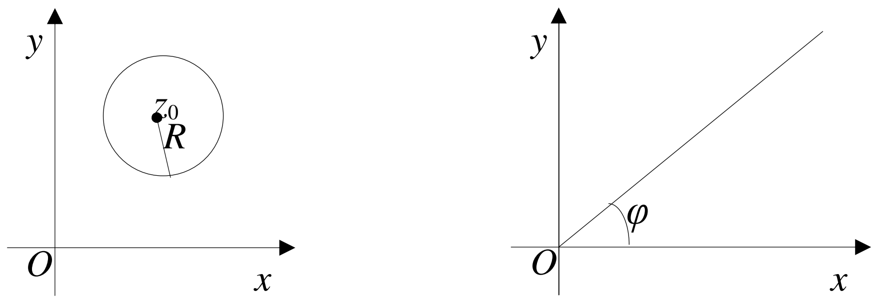
2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)}{r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)} = \dfrac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right]$;

3) $z^n = r^n\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)^n = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right)$, $n \in \mathbb{N}$ – формула Муавра;

4) $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$, $k = 0, 1, 2, ..., n-1$.

## 2.2 Понятие о функции комплексного переменного

В дальнейшем мы будем рассматривать разные множества комплексных чисел. Они задаются с помощью равенств или неравенств. Например, условие $\left|z_0\right| = R,\ R = const$ определяет окружность радиуса $R$ с центром в точке $z_0$ (рисунок 2.2*а*); условие $\arg z = const$ – луч, выходяший с начала координат под углом $\varphi = \arg z$ (рисунок 2.2*б*).




*а*) *б*)

Рисунок 2.2

**Определение 1.** Если каждому комплексному числу $z$, принадлежащему множеству $D$, поставлено в соответствие некоторое единственное комплексное число или совокупность комплексных чисел $\omega$, то говорят, что $\omega$ является функцией от $z$, определенной на множестве $D$ и записывают

$$\omega = f(z). \tag{4}$$

Если учесть, что $z = x + iy$ и положить $\omega = u + iv$, то для доопределения функции $\omega$ достаточно определить две функции действительных переменных $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$.

Следовательно,

$$\omega = u(x,y) + iv(x,y). \qquad (5)$$

От записи (4) можно перейти к записи вида (5). Такой переход называется виделением действительной и мнимой частей.

***Пример***. Виделить действительную и мнимую части функции: $\omega = z^2$.

*Решение.* Так как $z = x + iy$, тогда $\omega = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$. Итак, $u(x,y) = x^2 - y^2$ и $v(x,y) = 2xy$.

**Определение 2.** Комплексное число $\omega_0 = u_0 + iv_0$ называется пределом функции $\omega = u(x,y) + iv(x,y) = f(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$ при $z \to z_0(x_0,\, y_0)$, если для каждого, как угодно малого, заведомо заданого положительного числа $\varepsilon$ можно указать такое положительное число $\sigma$, что с неравенства $|z - z_0| < \sigma$ следует неравенство $|f(z) - \omega_0| < \varepsilon$.

Данное определение записывается: $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \omega_0$.

Из определения следует, что если $\omega_0$ является пределом функции $\omega = f(z)$ при $z \to z_0$, то это значение $\omega_0$ не зависит от пути, по которому $z$ приближается к $z_0$. Из определения также вытекает, что если предел функции существует, то существуют и пределы:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) = u_0 \text{ и } \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y) = v_0.$$

**Определение 3.** Функция $f(z)$ называется непрерывной функцией в точке $z_0$, если она определена в некоторой окрестности этой точки и $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$. Функция $f(z)$ непрерывная в области $D$, если она непрерывная в каждой точке этой области.

Непрерывные функции комплексного переменного обладают аналогичными свойствами, как и непрерывные функции действительного переменного. В частности, если функция $\omega = f(z)$ непрерывная в замкнутой области $D$, то она:

1) ограничена по модулю в этой области, т.е. $|f(z)| < M$ ;

2) достигает своего наибольшего и наименьшего значения в замкнутой области $D$.

## 2.3 Основные элементарные функции комплексного переменного

Определим основные элементарные функции комплексного переменного $z = x + iy$.

**Показательная функция.** Показательная функция $w = e^z$ определяется формулой

$$w = e^z = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Положив в этом равенстве $y=0$, устанавливаем, что для действительных значений $z=x$ показательная функция $e^z$ совпадает с показательной функцией действительного переменного: $e^z=e^x$.

**Логарифмическая функция.** Логарифмическая функция определяется как функция, обратная показательной: число $w$ называется логарифмом числа $z\neq 0$, если $e^w=z$ и обозначается $w=\operatorname{Ln} z$. Так как значения показательной функции $e^w=z$ всегда отличны от нуля, то логарифмическая функция $w=\operatorname{Ln} z$ определена на всей плоскости $z$, кроме точки $z=0$.

Положив $z=re^{i\varphi}$, $w=u+iv$, получим, согласно определению логарифмической функции,

$$e^{u+iv}=r\cdot e^{i\varphi} \text{ або } e^u\cdot e^{iv}=r\cdot e^{i\varphi}.$$

Отсюда имеем:

$$e^u=r,\ v=\varphi+2k\pi, \text{ т.е. } u=\ln r,\ v=\varphi+2k\pi \ \ (k=0,\pm 1,\pm 2,...).$$

Следовательно, $w=\operatorname{Ln} z=u+iv=\ln r+i(\varphi+2k\pi)=\ln|z|+i(\arg z+2k\pi)$, т.е. $\operatorname{Ln} z=\ln|z|+i(\arg z+2k\pi)$ или $\operatorname{Ln} z=\ln|z|+i\operatorname{Arg} z$, где $\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi$.

Последняя формула показывает, что логарифмическая функция комплексного переменного имеет бесконечное количество значений, т.е. $w=\operatorname{Ln} z$ – многозначная функция.

Однозначную ветвь этой функции можно выделить, подставив в последнюю формулу определённое значение $k$. Положив $k=0$, получим однозначную функцию, которую называют главным значением логарифма $\operatorname{Ln} z$ и обозначают $\ln z$:

$$\ln z=\ln|z|+i\arg z, \text{ де } -\pi<\arg z\leq\pi.$$

Если $z$ – действительное положительное число, то $\arg z=0$ и $\ln z=\ln|z|$, т.е. главное значение логарифма действительного положительного числа совпадает с обычным натуральным логарифмом этого числа.

Логарифмическую функцию комплексного переменного можно представить так:

$$\operatorname{Ln} z=\ln z+2k\pi i.$$

**Степенная функция.** Если $n$ – натуральное число, то степенная функция определяется равенством $w=z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$. Функция $w=z^n$ – однозначная функция. Если $n=\dfrac{1}{q}$ $(q\in\mathbb{N})$, то в этом случае

$$w=z^{\frac{1}{q}}=\sqrt[q]{z}=\sqrt[q]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z+2k\pi}{q}+i\sin\frac{\arg z+2k\pi}{q}\right), \text{ где } k=0,1,2,...,q-1.$$

Здесь функция $w=z^{\frac{1}{q}}$ есть многозначная ($q$-значная). Однозначную ветвь этой функции можно получить, придав $k$ определённое значение, например $k=0$.

Если $n=\dfrac{p}{q}$ $\left(p,\, q\in \square\right)$, то степенная функция определяется равенством

$$w=z^{\frac{p}{q}}=\left(\sqrt[q]{z}\right)^{p}=\sqrt[q]{|z|^{p}}\left(\cos\frac{p\left(\arg z+2k\pi\right)}{q}+i\sin\frac{p\left(\arg z+2k\pi\right)}{q}\right).$$

Функция $w=z^{\frac{p}{q}}$ – многозначная.

**Тригонометрические функции.** Тригонометрические функции комплексного аргумента $z=x+iy$ определяются равенствами:

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\ \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\ \operatorname{tg} z=\frac{\sin z}{\cos z},\ \operatorname{ctg} z=\frac{\cos z}{\sin z}.$$

Тригонометрические функции комплексного переменного сохраняют свойства тригонометрических функций действительного переменного.

**Гиперболические функции.** Гиперболические функции определяются равенствами:

$$\operatorname{sh} z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2},\ \operatorname{ch} z=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2},\ \operatorname{th} z=\frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z},\ \operatorname{cth} z=\frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Связь между гиперболическими и тригонометрическими функциями:

$$\operatorname{sh} iz=i\sin z,\ \sin z=-i\operatorname{sh} iz,\ \operatorname{ch} iz=\cos z.$$

Из определения гиперболических функций следует, что функции $\operatorname{sh} z, \operatorname{ch} z$ периодические с периодом $2\pi i$; функции $\operatorname{th} z, \operatorname{cth} z$ имеют период $\pi i$.

## 2.4 Дифференцируемость и аналитичность функции комплексного переменного

**Определение.** Пусть функция $f(z)$ определена в некоторой окрестности точки $z$. Тогда, если существует предел

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{df\left(z\right)}{dz}=f'(z),$$

то он называется производной от функции $f(z)$ комплексного переменного $z$, а функция $f(z)$ – дифференцируемой в точке $z$.

Напомним, что функция двух действительных переменных $u(x,y)$ называется дифференцируемой, или той, которая имеет полный дифференциал в данной точке $(x,y)$, если в полном приращении функции в этой точке может быть выделенная главная линейная часть и бесконечно малая часть с высшим порядком малости относительно $\Delta x,\,\Delta y$, т.е.

$$u(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-u(x,y)=A\Delta x+B\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y, \qquad (6)$$

$\alpha,\beta\to 0$ при $\Delta x,\Delta y\to 0$, причём $A=\dfrac{\partial u}{\partial x},\ B=\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

**Теорема**. Если функция $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ определена в некоторой окрестности точки $z=x+iy$, то для того, чтобы функция $f(z)$ имела производную в этой точке, необходимо и достаточно, чтобы функции $u$ и $v$ были дифференцируемы в точке $z(x,\ y)$ по $x$ и по $y$ и выполнялись условия:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y};\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$ (Условия Коши-Римана).

*Доказательство.*

*Необходимость.* Пусть функция $f(z)$ дифференцируема в точке $z=x+iy$. Необходимо доказать, что функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ дифференцируемы в точке $(x,y)$ и в этой точке выполняются условия Коши-Римана.

Так как функция $f(z)$ дифференцируема в точке $z$, то её приращение можно представить в виде:

$$f(z+\Delta z)-f(z)=c\Delta z+\gamma\Delta z,$$

причём $\gamma\to 0$ при $\Delta z\to 0$, а $c=f\,'(z)$, т.е.

$$f(z+\Delta z)-f(z)=f\,'(z)\Delta z+\gamma\Delta z.$$

По определению: $z=x+iy$, $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$;

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y);$$

$$f(z+\Delta z)=u(x+\Delta x,\ y+\Delta y)+iv(x+\Delta x,\ y+\Delta y).$$

$$f\,'(z)=A+iB,\ \gamma=\alpha+i\beta.\ \alpha,\beta\to 0 \text{ при } \Delta x\to 0,\ \Delta y\to 0.$$

Тогда

$$f(z+\Delta z)-f(z)=[u(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-u(x,y)]+i[v(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-v(x,y)]=$$
$$=(A+iB)(\Delta x+i\Delta y)+(\alpha+i\beta)(\Delta x+i\Delta y).$$

Отсюда,

$$u(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-u(x,y)=A\Delta x-B\Delta y+\alpha\Delta x-\beta\Delta x, \quad (7)$$

$$v(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-v(x,y)=B\Delta x+A\Delta y+\alpha\Delta y+\beta\Delta x. \quad (8)$$

Выражения (7) и (8) имеют тот же вид, что и (6). Сравнивая их, замечаем

$$A=\frac{\partial u}{\partial x} \text{ и } B=-\frac{\partial u}{\partial y};\ A=\frac{\partial v}{\partial y} \text{ и } B=\frac{\partial v}{\partial x},$$

так как $f\,'(z)=A+iB=u'_x+iv'_x$.

Отсюда,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (9)$$

Таким образом, доказано, что если функция $f(z)$ дифференцируема в точке $z=x+iy$, то её действительная и мнимая части $u(x,y), v(x,y)$ дифференцируемы в точке $(x,y)$ и удовлетворяют условиям (9).

Учитывая условия Коши-Римана, производная функции $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ находится по формулам:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

***Пример.*** Проверить условия Коши-Римана и найти производные функций: 1) $w = f(z) = z^2$; 2) $w = z\operatorname{Re} z$.

*Решение.*

1) $z = x + iy$, тогда $\omega = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$, поэтому $u(x,y) = x^2 - y^2$, $v(x,y) = 2xy$.

Так как $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial v}{\partial y} = 2x;\ \frac{\partial u}{\partial y} = -2y,\ \frac{\partial v}{\partial x} = 2y$, то условия Коши-Римана $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ выполняются.

Следовательно, $\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 2x + i2y = 2(x+iy) = 2z$.

2) $\omega = z\operatorname{Re} z = (x+iy)x = x^2 + xyi$, тогда $u(x,y) = x^2$, $v(x,y) = xy$. Находим $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial v}{\partial y} = x;\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial v}{\partial x} = y.$

Так как $\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y};\ \frac{\partial u}{\partial y} \neq \frac{\partial v}{\partial x}$, то условия Коши-Римана не выполняются и функция $\omega = z\operatorname{Re} z$ производной не имеет.

**Определение.** Если функция $f(z)$ дифференцируема не только в данной точке $z_0$, но и в некоторой окрестности этой точки, то она называется аналитической в точке $z_0$.

**Определение.** Функция $f(z)$, аналитическая во всех точках области $D$, называется аналитической в области $D$.

## 2.5 Интеграл от функции комплексного переменного. Теорема Коши

Пусть $f(z)$ – непрерывная функция комплексного переменного, определена в каждой точке некоторой дуги *AB*.

Разобъем дугу *AB* на *n* частей, произвольно выбирая точки $A = z_0$, $z_1$, $z_2, \ldots, z_{n-1}$, $z_n = B$ (рисунок 2.3). На каждой части выберем произвольную точку $\xi_i$ и образуем сумму: $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k$, где $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$.

Предел этой суммы (при приближении к нулю $\max|\Delta z_k|$) называется интегралом от $f(z)$ вдоль дуги *AB* и обозначается $\int_{\breve{AB}} f(z)dz$.

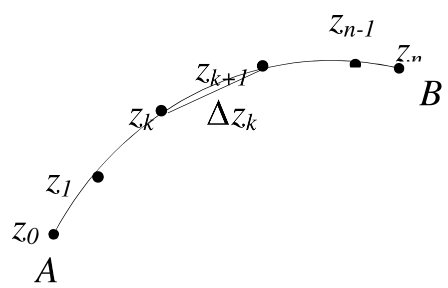



Рисунок 2.3

Т.е. $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz = \lim\limits_{\max|\Delta z_k|\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k$, где $|\Delta z_k|$ – длина хорды элементарной дуги $\overset{\frown}{z_k, z_{k+1}}$.

**Свойства интеграла.**

Из определения вытекают следующие свойства:

1. $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} [f_1(z) \pm f_2(z)]dz = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f_1(z)dz \pm \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f_2(z)dz$.

2. $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} c\, f(z)dz = c\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz$, $c - const$.

3. $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz = -\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} f(z)dz$.

4. Если дуга $AB$ разделена на части точкой $C$, то

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz = \int\limits_{\overset{\frown}{AC}} f(z)dz + \int\limits_{\overset{\frown}{CB}} f(z)dz.$$

5. Оценка модуля интеграла.

Если на кривой $\overset{\frown}{AB}$, имеющей длину $L$: $|f(z)| \le M$, то $\left|\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz\right| \le ML$.

*Доказательство.*

$\left|\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k\right| \le \sum\limits_{k=1}^{n} |f(\xi_k)||\Delta z_k| \le M\sum\limits_{k=1}^{n}|\Delta z_k|$, $|\Delta z_k|$ – расстояние между точками $z_k$ и $z_{k-1}$, а $\sum\limits_{k=1}^{n}|\Delta z_k|$ – длина ломаной, вписаной в дугу $\overset{\frown}{AB}$, поэтому $\sum\limits_{k=1}^{n}|\Delta z_k| \le L$.

Следовательно, $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k\right| \le ML$.

Переходя к пределу, получим $\left|\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz\right| \le ML$

6. Выражение интеграла от функции комплексного переменного через криволинейные интегралы второго рода.

Так как $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ и $z_k = x_k + iy_k$, то

$$\sum_{k=1}^{n} f(z_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n}[u(x_k, y_k) + iv(x_k, y_k)](\Delta x_k + i\Delta y_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}[u(x_k, y_k)\Delta x_k - v(x_k, y_k)\Delta y_k] + i\sum_{k=1}^{n}[v(x_k, y_k)\Delta x_k + u(x_k, y_k)\Delta y_k].$$

Эти суммы являются интегральными суммами криволинейных интегралов II-го рода. Поэтому предельный переход при условии, что $\max\limits_k|\Delta z_k| \to 0$, т.е., $\max\limits_k|\Delta y_k| \to 0$ дает возможность записать формулу

$$\int_{\overset{\smile}{AB}} f(z)dz = \int_{\overset{\smile}{AB}} u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_{\overset{\smile}{AB}} v(x,y)dx + u(x,y)dy\,.$$

В этой формуле отделяются действительная и мнимая части интеграла.

7. Превращение интеграла функции комплексного переменного в обычный интеграл от комплексной функции действительного переменного.

Если дуга $AB$ задана параметрическим уравнением $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $t_1 \le t \le t_2$, то $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ – комплексное параметрическое уравнение дуги $AB$. Тогда

$$\int_{\overset{\smile}{AB}} f(z)dz = \int_{t_1}^{t_2} f[x(t) + iy(t)]d[x(t) + iy(t)] =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} f[x(t) + iy(t)]\frac{d}{dt}[x(t) + iy(t)]dt = \int_{t_1}^{t_2} f[z(t)]z'(t)dt\,.$$

Данная формула сводит вычисление интеграла от функции комплексного переменного к вычислению определённого интеграла действительного переменного.

***Пример 1.*** Найти $\oint_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}$, где $\gamma$ – окружность радиуса $R$ с центром в точке $z_0 = \alpha + i\beta$.

*Решение.*

Уравнение окружности:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \text{ (рисунок 2.4).}$$

Пусть $x - \alpha = R\cos t$, $y - \beta = R\sin t$.

Уравнение $\begin{cases} x = \alpha + R\cos t, \\ y = \beta + R\sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$ является параметрическим уравнением окружности, тогда его комплексное параметрическое уравнение:

$$z = x + iy = \alpha + i\beta + R(\cos t + i\sin t) = z_0 + Re^{it}\,.$$

Дифференцируя, получим:

$$dz = d(z_0 + Re^{it}) = iRe^{it}dt\,.$$

Поэтому $\oint_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{it}dt}{Re^{it}} = 2\pi i$.

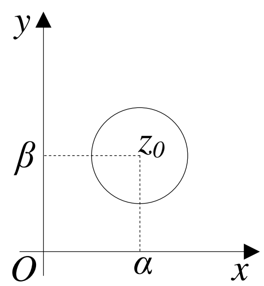


Рисунок 2.4

*Ответ:* $2\pi i$.

**Основная теорема Коши.** Если функция $f(z)$ аналитическая в односвязной области $D$, ограниченной замкнутым контуром $\tilde{A}$, а также в точках этого контура, то интеграл от этой функции по контуру $\tilde{A}$ равен нулю:

$$\oint_{\tilde{A}} f(z)dz = 0\,.$$

*Доказательство.*

Пусть функция $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ аналитическая в односвязной области $D$. Отсюда следует существование непрерывных частных производных от функций $u(x,y)$, $v(x,y)$ в области $D$. Пусть $\tilde{A}$ – замкнутый контур, ограничивающий область $D$ (рисунок 2.5).

Тогда $\oint\limits_{\tilde{A}} f(z)dz = \oint\limits_{\tilde{A}} u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\oint\limits_{\tilde{A}} v(x,y)dx + u(x,y)dy$.

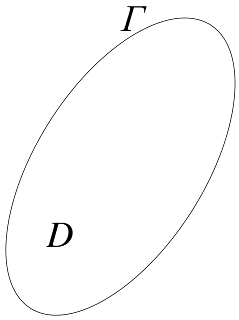



Рисунок 2.5

Используя формулу Грина

$$\oint\limits_{\tilde{A}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,$$

получим

$$\oint\limits_{\tilde{A}} f(z)dz = \iint\limits_{D}\left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy + i\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy.$$

Так как функция $f(z)$ аналитическая, то выполня-ются условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Следовательно, $\oint\limits_{\tilde{A}} f(z)dz = 0$.

***Пример 2.*** Вычислить интегралы:

1) $\oint\limits_{\tilde{A}} (z^2 - 3z)dz$;

2) $I = \oint\limits_{\tilde{A}} \frac{dz}{z - z_0}$, если *а*) $\tilde{A} : |z - z_0| = R$;

*б*) $\tilde{A}$ – контур, не содержащий точки $z_0$.

*Решение.*

1) Так как функция $f(z) = z^2 - 3z$ аналитическая на всей плоскости, то $\oint\limits_{\tilde{A}} (z^2 - 3z)dz = 0$ по любому замкнутому контуру.

2) $I = \oint\limits_{\tilde{A}} \frac{dz}{z - z_0}$, если *а*) $\tilde{A} : |z - z_0| = R$.

Из выше доказанного (пример 1) $I = \oint\limits_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$. Отметим, что точка $z_0$ лежит внутри окружности $|z - z_0| = R$ и функция $f(z)$ в этой точке не аналитическая.

*б*) Если же $\tilde{A}$ – контур, который не содержит точки $z_0$, то $I = \oint\limits_{\tilde{A}} \frac{dz}{z - z_0} = 0$.

*Ответ:* 0; $2\pi i$, 0.

**Теорема**. Если функция $f(z)$ аналитическая в многосвязной области $D$, ограниченной внешним контуром $\tilde{A}$ и внутренними контурами $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, а также на контурах $\tilde{A}$, $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, то имеет место формула

$$\oint_{\tilde{A}} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{\gamma_k} f(z)dz.$$

*Доказательство.*

Докажем теорему при $n = 2$.

Пусть в области, ограниченной контуром $\tilde{A}$ есть два контура $\gamma_1$, $\gamma_2$ и $f(z)$ функция, аналитическая в области, находящейся между контурами $\tilde{A}$ и $\gamma_1$, $\gamma_2$, а также на всех этих контурах.

Проведём дуги: $lk$, $mn$, $pg$, объединяющие контур Г с $\gamma_1$, $\gamma_1$ с $\gamma_2$, $\gamma_2$ с $\tilde{A}$ и обозначим через $C_1$ замкнутый контур $lkzmntpgfl$, а через $C_2$ – $klrgpunmsk$ (рисунок 2.6). Тогда области внутри контуров $C_1$ и $C_2$ односвязные и для них применима основная теорема Коши:

$$\oint_{C_1} f(z)dz = 0, \quad \oint_{C_2} f(z)dz = 0.$$

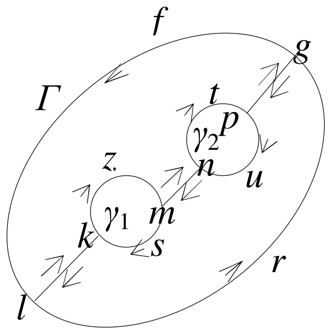



Рисунок 2.6

Прибавив эти равенства и, используя 3-е свойство для интегралов, можно отметить, что интегрирование по каждой из дуг $lk$, $mn$, $pq$ производится дважды в разных направлениях, а обход контуров $\gamma_1$, $\gamma_2$ происходит по часовой стрелке (т.е., в противоположном направлении). Итак,

$$\oint_{\tilde{A}} f(z)dz - \oint_{\gamma_1} f(z)dz - \oint_{\gamma_2} f(z)dz = 0,$$

откуда и следует необходимое.

## 2.6 Интеграл Коши. Интегральная формула Коши

**Теорема.** Пусть функция $f(z)$ аналитическая в односвязной области $D$, ограниченной замкнутым контуром $\tilde{A}$, и на самом контуре. Тогда значение функции в любой точке $z_0 \in D$ находится по формуле

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\tilde{A}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

*Доказательство.*

Пусть $f(z)$ – аналитическая функция в области, ограниченной замкнутым контуром $\tilde{A}$ и на самом контуре. Зафиксируем точку $z_0$ внутри контура $\tilde{A}$ и рассмотрим функцию

$$\varphi(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Эта функция аналитическая во всех точках контура $\tilde{A}$ и на нём, за исключением точки $z_0$. Т.е., при $z = z_0$ получим неопределённость $\left[\frac{0}{0}\right]$, которая раскрывается, потому что, при $z \to z_0$ $\varphi(z) \to f\,'(z_0)$. И если доопределить функцию $\varphi(z)$ в точке $z_0$ условием $\varphi(z) = f\,'(z_0)$, то $\varphi(z)$ станет непрерывной функцией во всей области, ограниченной замкнутым контуром.

Следовательно, сама функция будет ограниченной и $\left|\varphi(z)\right| < M$ , где $M$ – некоторое положительное число.

Пусть $\gamma$ – окружность радиуса $\rho$ с центром в точке $z_0$, которая лежит внутри $\tilde{A}$ (рисунок 2.7). В области, ограниченной контурами $\tilde{A}$ и $\gamma$ функция $\varphi(z)$ – аналитическая, так как точка $z = z_0$ (в которой аналитичность нарушается) выброшена с области.

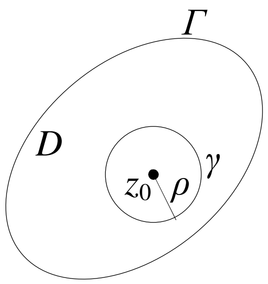



Рисунок 2.7

Используя теорему Коши для многосвязной области, получим

$$\oint_{\tilde{A}} \varphi(z)dz = \oint_{\gamma} \varphi(z)dz .$$

По правилу оценки модуля интеграла, будем иметь:

$$\left|\oint_{\gamma} \varphi(z)dz\right| \le ML_{\tilde{A}} = 2\pi\rho M .$$

Переходя к пределу при $\rho \to 0$ в последнем равенстве, получим

$$\oint_{\tilde{A}} \varphi(z)dz = 0 ,$$

или

$$\oint_{\tilde{A}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0 \;\Rightarrow \oint_{\tilde{A}} \frac{f(z)dz}{z - z_0} - f(z_0)\oint_{\tilde{A}} \frac{dz}{z - z_0} = 0 . \qquad (10)$$

Согласно теореме Коши для многосвязной области

$$\oint_{\tilde{A}} \frac{dz}{z - z_0} = \oint_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i .$$

Поэтому равенство (10) принимает вид:

$$\oint_{\tilde{A}} \frac{f(z)dz}{z - z_0} - 2\pi i f(z_0) = 0 .$$

Отсюда,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\tilde{A}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Эта формула называется интегральной формулой Коши, а интеграл справа называется интегралом Коши. Из формулы видно, что значение аналитической функции внутри контура $\tilde{A}$ полностью определяется значением этой функции на границе области $C$.

***Пример.*** Вычислить интеграл $I = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_{\tilde{A}} \dfrac{z^2 dz}{z+1}$ , где $\tilde{A}$ : 1) $|z| = 2$;

2) $|z| = \dfrac{1}{2}$.

*Решение.*

1) По условию $I = \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\tilde{A}} \dfrac{z^2 dz}{z+1}$ функция $f(z) = z^2$ аналитическая везде. Точка $z_0 = -1$ лежит внутри круга $|z| < 2$, поэтому по формуле Коши $I = f(-1) = 1$.

2) точка $z_0 = -1$ лежить вне круга $|z| \le \dfrac{1}{2}$, поэтому по теореме Коши $I = 0$.

*Ответ:* 1; 0.

## 2.7 Производные высших порядков от аналитической функции

**Теорема.** Аналитическая функция бесконечно раз дифференцируема, причём справедлива формула

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_{\tilde{A}} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z)^{n+1}}.$$

*Доказательство.*

Мы показали, что если функция $f(z)$ аналитическая в области $D$, ограниченной контуром $\tilde{A}$ и на самом контуре, то значение функции в любой точке $z$, принадлежащей области $D$, находится по интегральной формуле Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\tilde{A}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Какова б ни была точка $z$ всегда можно выбрать величину $\Delta z$ такую, что новая точка $z + \Delta z$ тоже будет лежать внутри области $D$. Будем, например, считать $|\Delta z|$ меньше кратчайшего расстояния от точки $z$ до границы области. Тогда для новой точки $z + \Delta z$, по формуле Коши

$$f(z + \Delta z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\tilde{A}} \frac{f(\xi)}{\xi - z - \Delta z} d\xi.$$

Рассмотрим

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i \Delta z}\oint\limits_{\tilde{A}} \left[\frac{f(\xi)}{\xi - z - \Delta z} - \frac{f(\xi)}{\xi - z}\right] d\xi.$$

После преобразования

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\tilde{A}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z - \Delta z)(\xi - z)} d\xi.$$

При $\Delta z \to 0$, получим

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\tilde{A}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi. \tag{11}$$

Получили формулу для $n = 1$. Заменяя в формуле (11) $z$ на $z + \Delta z$ и, составив новое отношение: $\dfrac{f'(z+\Delta z) - f'(z)}{\Delta z}$, получим формулу для второй производной:

$$f''(z)=\frac{2}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^3}d\xi \text{ и т.д.}$$

Следовательно,

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}d\xi .$$

Из аналитичности функции в некоторой точке следует существование в окрестности этой же точки производных любого порядка, а, следовательно, и их аналитичность.

## 2.8 Ряды аналитических функций

**Определение.** Степенным рядом называется ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$, где $C_n$ – постоянные комплексные числа (коэффициенты ряда). Для степенных рядов справедливы следующие свойства:

1. Для степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$, имеющего как точки сходимости, так и точки расходимости, всегда существует такое действительное число $R\geq 0$, что внутри круга $|z-z_0|<R$ рассматриваемый ряд сходится, а вне этого круга – расходится.

Область $|z-z_0|<R$ называется областью сходимости, а число $R$ – радиус сходимости степенного ряда.

2. Сумма степенного ряда является аналитической функцией в области сходимости.

3. Степенной ряд в круге радиуса $\rho<R$ сходится равномерно. Его можно почленно дифференцировать и почленно интегрировать по любой дуге, лежащей в области сходимости. При этом, радиус сходимости каждого вновь полученного ряда равен радиусу сходимости исходного ряда, а над суммой ряда выполняется то же действие, что и над самим рядом.

***Пример.*** Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1+i)^n}{2^n}$.

*Решение.* Воспользуемся признаком Даламбера

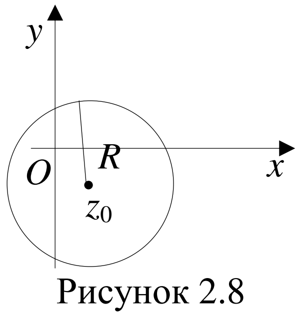


Рисунок 2.8

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(z-1+i\right)^{n+1}2^n}{2^{n+1}\left(z-1+i\right)^n}\right|=\frac{1}{2}|z-1+i|<1, \text{ тоді } |z-1+i|<2,$$

где $z_0=1-i$ і $R=2$.

Так как

$|z-1+i|=|x+iy-1+i|<2\Rightarrow\sqrt{\left(x-1\right)^2+\left(y+1\right)^2}<2$, а последнее неравенство определяет область, ограниченную окружностью с центром в точке $z_0(1,-1)$ и радиусом $R=2$.

### 2.8.1 Ряд Тейлора

Степенной ряд внутри своей области сходимости определяет аналитическую функцию – сумму ряда. Справедливое и обратное утверждение.

**Теорема.** Любая функция $f(z)$, аналитическая внутри круга з центром в точке $z_0$, разлагается внутри этого круга в степенной ряд вида:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n ,$$

коэффициенты которого вычисляются по формуле:

$$C_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},\ n=0,1,2,.....$$

*Доказательство.*

Рассмотрим функцию $f(z)$, аналитическую внутри круга *k* с центром в точке $z_0$.

Пусть $z$ – любая точка круга. Тогда согласно интегральной формуле Коши $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\tilde{A}}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi.$

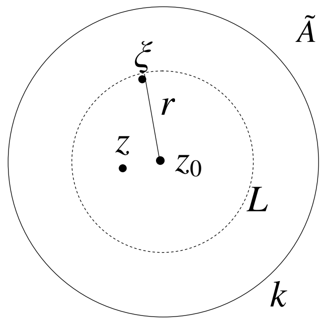


Рисунок 2.9

Проведем внутри круга $k$ окружность $L$ с центром в точке $z_0$ радиуса $r$ так, чтобы точка $z$ была внутри этой окружности (рисунок 2.9).

Тогда уравнение окружности $L$: $|\xi-z_0|=r$. Расстояние между точками $z$ и $z_0$ будет меньше $r$.

Рассмотрим дробь

$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{\xi-z_0-\left(z-z_0\right)}=\frac{1}{\xi-z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\xi-z_0}}, \qquad (12)$$

где $\frac{z-z_0}{\xi-z_0}=q\Rightarrow|q|<1$.

Выражение (12) рассмотрим как сумму убывающей геометрической прогрессии с первым членом $\frac{1}{\xi-z_0}$ и знаменателем $\frac{z-z_0}{\xi-z_0}$. Тогда согласно формуле суммы геометрической прогрессии $\frac{a}{1-q}=a+aq+aq^2+...$, получим:

$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{\xi-z_0}+\frac{z-z_0}{(\xi-z_0)^2}+\frac{(z-z_0)^2}{(\xi-z_0)^3}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}}. \qquad (13)$$

Умножая ряд (13) на $f(\xi)$, получаем:

$$\frac{f(\xi)}{\xi-z}=\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}+\frac{\left(z-z_0\right)f(\xi)}{(\xi-z_0)^2}+\frac{(z-z_0)^2 f(\xi)}{(\xi-z_0)^3}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}. \qquad (14)$$

Так как $|\xi - z_0| = r$, учитывая аналитичность функци $|f(\xi)| < M$ при $\xi \in L$, то

$$\left|\frac{(z-z_0)^n f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\right| = \left|\frac{z-z_0}{\xi - z_0}\right|^n \cdot \frac{|f(\xi)|}{|\xi - z_0|} \le |q|^n \cdot \frac{M}{r}.$$

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |q|^n \cdot \frac{M}{r} = \frac{M}{r}\sum_{n=0}^{\infty}|q|^n$ сходится и является мажорантным к (14), поэтому ряд (14) сходится и его можно почленно интегрировать

$$f(z) = \oint_L \left[\frac{f(\xi)}{\xi - z_0} + \frac{(z-z_0) f(\xi)}{(\xi - z_0)^2} + \frac{(z-z_0)^2 f(\xi)}{(\xi - z_0)^3} + \dots\right] d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi + \frac{(z-z_0)}{2\pi i}\oint_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^2} d\xi + \frac{(z-z_0)^2}{2\pi i}\oint_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^3} d\xi + \dots =$$

$$= f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + \dots . \quad (15)$$

Следовательно,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n, \text{ где } C_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi .$$

Степенной ряд (15) называется рядом Тейлора для функции $f(z)$.

### 2.8.2 Ряд Лорана

Ранее было показано, что областью сходимости степенного ряда

$$C_0 + C_1(z-z_0) + C_2(z-z_0)^2 + \dots + C_n(z-z_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n$$

является круг: $|z - z_0| < R$.

Рассмотрим ряд

$$\frac{C_1}{z-z_0} + \frac{C_2}{(z-z_0)^2} + \dots + \frac{C_n}{(z-z_0)^n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} C_n (z-z_0)^{-n} . \quad (16)$$

Сделаем замену $\frac{1}{z-z_0} = \zeta$ и получим ряд:

$$C_1\zeta + C_2\zeta^2 + \dots + C_n\zeta^n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \zeta^n .$$

Этот степенной ряд сходится в круге $|\zeta| < \rho$. Переходя от $\zeta$ к переменной $z$, получим: $\frac{1}{|z-z_0|} < \rho$, $|z - z_0| > \frac{1}{\rho}$, т.е. областью сходимости ряда (16) является внешность круга с центром в точке $z_0$ и радиусом $z = \frac{1}{\rho}$.

Рассмотрим ряд, бесконечный в обе стороны

$$...+\frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n}+...+\frac{C_{-1}}{(z-z_0)^1}+C_0+C_1(z-z_0)+...+C_n(z-z_0)^n+...=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n(z-z_0)^n. \quad (17)$$

Этот ряд будет сходящимся, если одновременно будут сходится ряды:

$$\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n \text{ и } \sum_{n=-\infty}^{-1}C_n(z-z_0)^n.$$

Область сходимости первого ряда есть круг радиуса $R$ с центром в точке $z_0$. Область сходимости второго ряда является внешность некоторого круга радиуса $r$ с центром в точке $z_0$. Если $0<r<R$ (рисунок 2.10), то их общая часть – кольцо – является областью сходимости ряда (17).

Множество точек $z$, которые находятся в кольце, удовлетворяют неравенство

$$r<|z-z_0|<R.$$

Если $r>R$, то ряд (17) не имеет точек сходимости. Если $R=r$, то ряд (17) может иметь точки сходимости только на окружности $r=R$.

Сумма ряда (17) является аналитической функцией в кольце сходимости.

Справедливое обратное утверждение, которое называется теоремой Лорана.

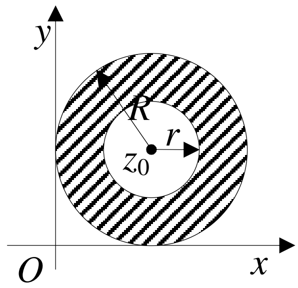



Рисунок 2.10

**Теорема Лорана.** Всякая функция, аналитическая внутри кольца $0<r<|z-z_0|<R$ с центром в точке $z_0$, может быть разложена внутри этого кольца в ряд

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n(z-z_0)^n,$$

коэффициенты которого определяются формулой $C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$, $n=0;\pm1;\pm2;...$, а $L$ – любая окружность с центром в точке $z_0$, лежащая внутри данного кольца (без доказательства).

Этот ряд называется рядом Лорана для функции $f(z)$ в рассматриваемом кольце.

## 2.9 Изолированные особые точки

Точки плоскости, в которых функция $f(z)$ является аналитической, будем называть правильными точками этой функции, а точки, в которых функция $f(z)$ не является аналитической, в частности, точки, в которых функция $f(z)$ не определена, называются особыми точками. Особая точка называется изолированной, если в некоторой её окрестности нет других особых точек.

Если $z_0$ изолированная особая точка функции $f(z)$, то в достаточно малом круге с выколотым центром $z_0$, который является кольцом с внутренним радиусом, равным нулю, функция $f(z)$ будет аналитической и разлагается в ряд Лорана

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n}. \qquad (18)$$

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$ называется правильной частью, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n}$ называется главной частью разложения функции $f(z)$ (18).

Возможно три случая:

1. В разложении (18) отсутствует главная часть.

В этом случае точка $z_0$ называется устранимой особой точкой (УОТ).

$$f(z)=C_0+C_1(z-z_0)+...+C_n(z-z_0)^n+...,$$
$$\lim_{z\to z_0} f(z)=C_0.$$

Значит, если доопределить функцию $f(z)$ в точке $z_0$, приняв $f(z_0)=C_0$, то точка $z_0$ станет правильной.

***Пример 1.*** Найти особые точки функции $f(z)=\frac{\sin z}{z}$ и определить их тип.

*Решение.* $z=0$ – особая точка. Разложение функции $f(z)=\sin z$ в ряд: $\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-...$, тогда $\frac{\sin z}{z}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-...$ и $\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1$.

Положив $f(0)=1$, неопределённость $\frac{0}{0}$ можно устранить. Следовательно, $z=0$ – УОТ.

*Ответ:* $z=0$ – УОТ.

Если $z_0$ – устранимая особая точка (УОТ) функции $f(z)$, то существует конечный предел функции $\lim_{z\to z_0} f(z)$.

2. Главная часть содержит конечное число членов.

Точка $z_0$ называется полюсом *k*-го порядка (П*k*П), если

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n+\frac{C_{-1}}{(z-z_0)}+...+\frac{C_{-k}}{(z-z_0)^k},$$ где $k$ – порядок полюса.

***Пример 2.*** Найти особые точки функции $f(z)=\frac{\cos z}{z}$ и определить их тип.

*Решение.* $z=0$ – особая точка. Разложение функции $f(z)=\cos z$ в ряд: $\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4}-...$, тогда $\frac{\cos z}{z}=\frac{1}{z}-\frac{z}{2!}+\frac{z^3}{4!}-...$

Следовательно, $z=0$ – полюс первого порядка (П1П).

*Ответ:* $z=0$ – П1П.

Если $z_0$ – полюс (П), то предел $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$. Полюс первого порядка называется простым полюсом. Точка $z_0$ будет полюсом *к*-го порядка функции $f(z)$, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)^k = C \neq 0$.

3. Главная часть содержит бесконечное число членов.

Точка $z_0$ называется существенно особой (СОТ).

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-z_0)^n .$$

***Пример 3.*** Найти особые точки функции $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ и определить их тип.

*Решение.* $z=0$ – особая точка. Разложение функции в ряд: $e^{\frac{1}{z}}=1+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{2!z^2}+\dfrac{1}{3!z^3}+\dots$

Следовательно, $z=0$ – существенно особая точка (СОТ).

*Ответ:* $z=0$ – СОТ.

Если $z_0$ – существенно особая точка (СОТ), то предел $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ не существует.

## 2.10 Вычеты. Основная теорема о вычетах

Пусть $z_0$ – изолированная особая точка функции $f(z)$. В окрестности этой точки функцию $f(z)$ можно разложить в ряд Лорана:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n + \frac{C_{-1}}{z-z_0}+\frac{C_{-2}}{(z-z_0)^2}+\dots,$$

коэффициенты которого определяются по формуле:

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\tilde{A}} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz ,\ n=0;\pm 1;\pm 2;\dots$$

**Определение.** Коэффициент при $(z-z_0)^{-1}$ в разложении Лорана, т.е. число $C_{-1}$ называется вычетом функции $f(z)$ относительно особой точки $z_0$ и обозначается $C_{-1}=\operatorname*{Res}\limits_{z=z_0} f(z)$ или $C_{-1}=\underset{z_0}{\text{Âû}}\div f(z)$.

Из формулы для коэффициентов ряда Лорана следует, что

$$C_{-1}=\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} f(z)dz .$$

**Основная теорема о вычетах.** Если функция $f(z)$ аналитическая внутри замкнутого контура $\tilde{A}$ и на нём, за исключением конечного числа точек $z_1, z_2,\dots,z_n$ внутри $\tilde{A}$, которые есть полюсами, то $\oint_{\tilde{A}} f(z)dz$ равен произведению $2\pi i$ на сумму вычетов относительно особых точек функции $f(z)$, лежащих внутри области, ограниченной контуром $\tilde{A}$.

$$\oint_{\tilde{A}} f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z). \tag{19}$$

*Доказательство.*

Особые точки, лежащие внутри области, ограниченной контуром $\tilde{A}$, выделим окрестностями $\gamma_1,\ \gamma_2,\ldots,\ \gamma_n$ настолько малых радиусов, чтоб они лежали внутри области, ограниченной контуром $\tilde{A}$ и не пересекались.

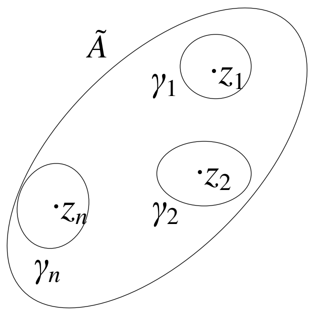



Рисунок 2.11

Из теоремы Коши для многосвязной области, будем иметь:

$$\oint_{\tilde{A}} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n}\oint_{\gamma_k} f(z)dz. \tag{20}$$

По определению вычетов:

$$\oint_{\gamma_k} f(z)dz = 2\pi i\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z). \tag{21}$$

Подставляя (21) в (20), получим формулу (19).

Следовательно, чтобы вычислить интеграл, необходимо знать формулы для вычисления вычетов.

## Вычисление вычетов

1. Если функция $f(z)$ аналитическая в точке $z_0$ или $z_0$ – устранимая особая точка (УОТ) функции $f(z)$, то $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=0$.

2. Пусть $z_0$ – простой полюс функции $f(z)$, тогда

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n+\frac{C_{-1}}{z-z_0}.$$

Умножив почленно слева и справа на $(z-z_0)$, получим:

$$f(z)(z-z_0)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^{n+1}+C_{-1}.$$

Перейдемо к пределу при $z\to z_0$, тогда $C_{-1}=\lim_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)$.

Итак, если $z_0$ – простой полюс функции $f(z)$, то

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0}\left[f(z)(z-z_0)\right].$$

Если функцию $f(z)$ можно представить в виде $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где функции $\varphi(z),\ \psi(z)$ – аналитические в точке $z_0,\ \psi(z_0)=0,\ \psi'(z_0)\neq 0$, то

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Если точка $z_0$ – полюс $k$-ого порядка функции $f(z)$, то

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0}\left[f(z)(z-z_0)^k\right]^{(k-1)}$$

или

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{k-1}\left[f(z)(z-z_0)^k\right]}{dz^{k-1}}.$$

3. Если $z_0$ – существенно особая точка (СОТ) функции $f(z)$, то её вычет в данной точке находится непосредственно с разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=C_{-1}$.

***Пример.*** Вычислить интеграл $\oint\limits_{\tilde{A}}\frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$, где $\tilde{A}:|z-1-i|=2$.

*Решение.*

Особые точки подинтегральной функции: $z_{1,2}=1$, $z_3=-i$, $z_4=i$.

Точки $z_{1,2}=1$, $z_4=i$ находятся в области, ограниченной контуром $\tilde{A}:|z-1-i|=2$ (рисунок 2.12).

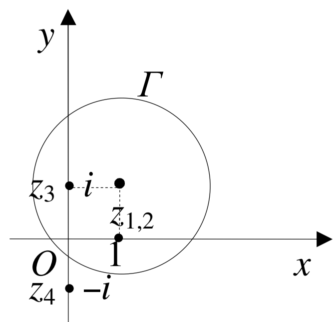


Рисунок 2.12

Определим тип особых точек:

1) $z_{1,2}=1$. $\lim\limits_{z\to 1}\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}=\infty$.

Итак, $z_{1,2}=1$ – полюс. Найдём порядок полюса:

$$\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)^2}{(z-1)^2(z^2+1)}=\lim_{z\to 1}\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{2}\neq 0.$$

Тогда $z_{1,2}$=1 – полюс 2-го порядка (П2П).

2) $z_4=i$. $\lim\limits_{z\to i}\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}=\lim\limits_{z\to i}\frac{1}{(z-1)^2(z+i)(z-i)}=\infty$. $z_4=i$ – полюс.

Порядок полюса: $\lim\limits_{z\to i}\frac{(z-i)}{(z-1)^2(z+i)(z-i)}=\lim\limits_{z\to i}\frac{1}{(z-1)^2(z+i)}=\frac{1}{4}$. Итак, $z_4=i$ – простой полюс (ПП).

Зная типы особых точек, найдём вычеты функции в данных точках:

1) так как $z_{1,2}=1$ – П2П, то $\operatorname*{Res}\limits_{z=1} f(z)=\lim\limits_{z\to 1}\left[\frac{(z-1)^2}{(z-1)^2(z^2+1)}\right]'=\lim\limits_{z\to 1}\frac{-2z}{(z^2+1)^2}=-\frac{1}{2}$;

2) $z_4=i$ – ПП, то $\operatorname*{Res}\limits_{z=i} f(z)=\lim\limits_{z\to i}\frac{(z-i)}{(z-1)^2(z+i)(z-i)}=\lim\limits_{z\to i}\frac{1}{(z-1)^2(z+i)}=\frac{1}{4}$.

Тогда $\oint\limits_{|z-1-i|=2}\frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}=2\pi i\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=-\frac{\pi i}{2}$.

Для $z_4=i$ – ПП, функцию $\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}$ можно представить в виде $\frac{\frac{1}{(z-1)^2(z+i)}}{z-i}$, тогда $\operatorname*{Res}\limits_{z=i} f(z)=\lim\limits_{z\to i}\frac{\frac{1}{(z-1)^2(z+i)}}{(z-i)'}=\lim\limits_{z\to i}\frac{1}{(z-1)^2(z+i)}=\frac{1}{4}$.

*Ответ:* $-\frac{\pi i}{2}$.

## 2.11 Вычисление несобственных интегралов

Несобственные интегралы действительного переменного можно находить с помощью вычетов:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z), \qquad (22)$$

где $z = z_k$ – изолированные особые точки функции $f(z)$, которые находятся над осью абсцис, а функция $f(z)$ удовлетворяет условию: $|z| \cdot f(z) \to 0$ при $|z| \to \infty$.

Если же $z = z_i$ – изолированные особые точки функции $f(z)$, которые расположены на оси абсцис и $|z| \cdot f(z) \to 0$ при $|z| \to \infty$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_i} f(z). \qquad (23)$$

***Пример 1.*** Вычислить $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

*Решение.* Введём функцию $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$. Так как $\frac{z}{1+z^2} \to 0$ при $|z| \to \infty$, то можно использовать выше указанные формулы.

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \oint_C \frac{dz}{1+z^2} = \oint_C \frac{dz}{(z-i)(z+i)}$, $C$ – граница полукруга достаточно большого радиуса, которая содержит все особые точки полуплоскости.

Особые точки функции: $z_1 = i,\ z_2 = -i$.

Над осью абсцис находится точка $z_1 = i$, которая является простым полюсом функции $f(z) = \frac{1}{(z-i)(z+i)}$, тогда

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z \to i} \frac{(z-i)}{(z-i)(z+i)} = \lim_{z \to i} \frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i}.$$

Так как особая точка находится над осью абсцис, то, используя формулу (22), получим $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi$.

*Ответ:* $\pi$.

***Пример 2.*** Вычислить $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}$.

*Решение.* Введем функцию $f(z) = \frac{1}{\left(1+z^2\right)^2}$. Так как $\frac{z}{\left(1+z^2\right)^2} \to 0$ при $|z| \to \infty$, то можно использовать выше указанные формулы.

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2} = \oint_C \frac{dz}{\left(1+z^2\right)^2} = \oint_C \frac{dz}{(z-i)^2(z+i)^2}$, $C$ – граница полукруга достаточно большого радиуса, которая содержит все особые точки полуплоскости.

Особые точки функции: $z_1 = i,\ z_2 = -i$.

Над осью абсцис находится точка $z_1 = i$, которая является полюсом второго порядка функции $f(z) = \dfrac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}$. Тогда,

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z\to i}\left[\frac{(z-i)^2}{(z-i)^2(z+i)^2}\right]' = \lim_{z\to i}\left[\frac{1}{(z+i)^2}\right]' = \lim_{z\to i}\left[\frac{-2}{(z+i)^3}\right] = -\frac{2}{8i^3} = -\frac{i}{4}.$$

Согласно формуле (22), имеем $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2} = 2\pi i\left(-\frac{i}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$.

*Ответ:* $\dfrac{\pi}{2}$.

***Пример 3.*** Вычислить $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)\left(x-1\right)}$.

*Решение.* Введем функцию $f(z) = \dfrac{1}{\left(z^2+1\right)\left(z-1\right)}$. $\dfrac{z}{\left(z^2+1\right)\left(z-1\right)} \to 0$ при $|z| \to \infty$, то можно использовать формулы (22) и (23).

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)\left(x-1\right)} = \oint_N \frac{dz}{\left(z^2+1\right)\left(z-1\right)} = \oint_N \frac{dz}{(z-i)(z+i)\left(z-1\right)},$$ $C$ – граница полукруга достаточно большого радиуса, которая содержит все особые точки полуплоскости.

Особые точки функции: $z_1 = i,\ z_2 = -i,\ z_3 = 1$.

Над осью абсцис находится точка $z_1 = i$ (П1П), на оси абсцис – точка $z_3 = 1$ (П1П) функции $f(z) = \dfrac{1}{(z-i)(z+i)\left(z-1\right)}$. Тогда,

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z\to i}\frac{(z-i)}{(z-i)(z+i)\left(z-1\right)} = \frac{1}{-2-2i} = \frac{-1+i}{4};\ \operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z\to 1}\frac{(z-1)}{(z^2+1)\left(z-1\right)} = \frac{1}{2}.$$

Используя формулы (22) и (23) получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)\left(x-1\right)} = 2\pi i\left(\frac{-1+i}{4}\right) + \pi i\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

*Ответ:* $-\dfrac{\pi}{2}$.

## 2.12 Задания для самостоятельной работы

2.12.1 Построить область $G$ на комплексной плоскости (геометрическое истолкование).

1.01. $G:|z+1-zi|=3$.

1.02. $G:|z-1-i|=2$.

1.03. $G:|z+1-i|=1$.

1.04. $G:\operatorname{Re}z-\operatorname{Im}z=2$.

1.05. $G:0\le\arg z\le\pi/4$..

1.06. $G:|z-1|+|z+1|=3$.

1.07. $G:|z+2|-|z-1|=3$.

1.08. $G:\operatorname{Re}\frac{1}{z}=2$.

1.09. $G:\left|\frac{z-1}{z+1}\right|=1$.

1.10. $G:|z-1+i|<2$.

1.11. $G:\operatorname{Re}z>2$.

1.12. $G:\operatorname{Im}z\le-1$.

1.13. $G:0<\operatorname{Re}z<2$.

1.14. $G:0\le Imz\le3$.

1.15. $G:|z|+\operatorname{Re}z\le1$.

1.16. $G:0<\arg z<\pi/4$.

1.17. $G:-\frac{\pi}{4}\le\arg z\le0$.

1.18. $G:|z-2|+|z+2|=5$.

1.19. $G:0<\operatorname{Re}(iz)<1$.

1.20. $G:|z|=1+\operatorname{Re}z$.

1.21. $G:\operatorname{Re}z+\operatorname{Im}z<1$.

1.22. $G:|2z|>|1+z|$.

1.23. $G:|z|<\arg z$, если $0\le\arg z<2\pi$.

1.24. $G:|z-1-2i|=2$.

1.25. $G:|2z+1-2i|=2$.

1.26. $G:|2z-1-i|=1$.

1.27. $G:|2z+1-i|=2$.

1.28. $G:\operatorname{Re}(2z)-\operatorname{Im}(2z)=1$.

1.29. $G:\arg z=\pi/4,\ \operatorname{Re}z\le2$.

1.30. $G:\operatorname{Re}(z)-\operatorname{Im}(z)=1$.

2.12.2 Выяснить, является ли функция аналитической: если да, то найти её производную в данной точке.

2.01. $\omega=(\operatorname{Re}z)^2\cdot\mathrm{e}^z$, $z_0=-1$.

2.02. $\omega=\operatorname{Re}z\cdot\operatorname{Im}z\cdot\sin z$, $z_0=0$.

2.03. $\omega=\operatorname{Im}z\cdot\cos z$, $z_0=\pi/3$.

2.04. $\omega=\operatorname{Re}z\cdot\mathrm{e}^z$, $z_0=0$.

2.05. $\omega=z-\ln z$, $z_0=1$.

2.06. $\omega=9z-ie^z$, $z_0=i$.

2.07. $\omega=8z^2-\sin z$, $z_0=1-i$.

2.08. $\omega=2z^2-i(z+1)$, $z_0=-i$.

2.09. $\omega=(iz)^4-i$, $z_0=i$.

2.10. $\omega=ze^z+ie^z$, $z_0=i$.

2.11. $\omega=(z-\bar{z})\cos z$, $z_0=0$.

2.12. $\omega=z\cdot\bar{z}\cdot\mathrm{e}^z$, $z_0=1$.

2.13. $\omega=z\cdot\cos\bar{z}$, $z_0=\pi/3$.

2.14. $\omega=\sin(i+z)+z^2+1$, $z_0=-1$.

2.15. $\omega=i(1-z)+e^z$, $z_0=-i$

2.16. $\omega=(z-1)^2+z+i+1$, $z_0=0$.

2.17. $\omega=(z-1)\cdot\mathrm{e}^{z+i}$, $z_0=1-i$.

2.18. $\omega=(1-z)\sin z$, $z_0=\pi/4$.

2.19. $\omega=\mathrm{e}^{-iz^2}$, $z_0=i$.

2.20. $\omega=i+\mathrm{e}^{-iz}$, $z_0=1-i$.

2.21. $\omega=z-e^z$, $z_0=-1-i$.

2.22. $\omega=z+\sin z$,. $z_0=2i-1$

2.23. $\omega=(i+1)+e^z$, $z_0=2i$.

2.24. $\omega=i\sin(z+1)$, $z_0=i$.

2.25. $\omega=\frac{1}{i}\cos(z-i)$, $z_0=i+1$.

2.26. $\omega=\left(\operatorname{Re}\frac{z}{3}\right)^2\cdot\mathrm{e}^{\frac{z}{3}}$, $z_0=2i$.

2.27. $\omega = \mathrm{Re}\left(\frac{z}{2}\right)\mathrm{Im}\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{z}{2}\right)$, $z_0 = \pi$.

2.28. $\omega = \mathrm{Im}\left(\frac{z}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{z}{2}\right)$, $z_0 = \pi/6$.

2.29. $\omega = \mathrm{Re}\left(\frac{z}{2}\right)\cdot e^{\frac{z}{2}}$, $z_0 = 1$.

2.30. $\omega = 2z - \ln(2z)$, $z_0 = 2$.

2.12.3 Вычислить интеграл по заданной кривой.

3.01. $\int\limits_{AB} \bar{z}dz$, $AB$: отрезок прямой, соединяющий точки $A=0$ и $B=3+2i$.

3.02. $\int\limits_{AB} \bar{z}dz$, $AB$: полуокружность $|z|=1$, $0 \le \varphi \le \pi$.

3.03. $\int\limits_{AB} \mathrm{Im}\,\bar{z}dz$, $AB$: радиус-вектор точки $z=1+i$.

3.04. $\int\limits_{AB} \frac{z}{\bar{z}}dz$, $AB$: отрезок прямой, соединяющий точки $A=0$ и $B=1+i$.

3.05. $\int\limits_{AB} \frac{z}{\bar{z}}dz$, $AB$: дуга параболы $y=x^2$, соединяющая точки $A=0$ и $B=1+i$.

3.06. $\int\limits_{AB} \frac{z}{\bar{z}}dz$, $AB$: дуга $y=\sqrt{x}$, соединяющая точки $A=1+i$ и $B=0$.

3.07. $\int\limits_{AB} z^3dz$, $AB$: отрезок прямой, соединяющий точки $A=2+4i$ и $B=0$.

3.08. $\int\limits_{AB} z^3dz$, $AB$: дуга $y=x^2$, соединяющая точки $A=0$ и $B=2+4i$.

3.09. $\int\limits_{AB} z^3dz$, $AB$: дуга $y=2\sqrt{2x}$, соединяющая точки $A=0$ и $B=2+4i$.

3.10. $\int\limits_{AB} z^3dz$, $AB$: отрезок прямой, соединяющий точки $A=i$ и $B=1$.

3.11. $\oint\limits_{\tilde{A}} z^3dz$, $\tilde{A}$: окружность $|z|=2$.

3.12. $\int\limits_{AB} \mathrm{Re}\,zdz$, $AB$: радиус-вектор точки $z=2+i$.

3.13. $\int\limits_{AB} \mathrm{Im}\,zdz$, $AB$: радиус-вектор точки $z=2-i$.

3.14. $\int\limits_{AB} xdz$, $AB$: полуокружность $|z|=1$, $0 \le \varphi \le \pi$.

3.15. $\int\limits_{AB} ydz$, $AB$: часть окружности $|z|=2$, $0 \le \varphi \le \pi/2$.

3.16. $\int\limits_{AB} |z|dz$, $AB$: радиус-вектор точки $z = (-1-i)$.

3.17. $\int\limits_{AB} |z|dz$, $AB$: полуокружность $|z|=2$, $0 \le \varphi \le \pi$.

3.18. $\int\limits_{AB} |z|\bar{z}dz$, $AB$: часть окружности $|z|=2,\ \pi/2 \le \varphi \le \pi$.

3.19. $\int\limits_{AB} |z|zdz$, $AB$: полуокружность $|z|=3,\ 0 \le \varphi \le \pi$.

3.20. $\int\limits_{AB} \dfrac{dz}{\sqrt{z}}$, $AB$: часть окружности $|z|=1,\ \ 0 \le \varphi \le \pi/2$.

3.21. $\oint\limits_{\tilde{A}} (z^2-5)dz$, Ã: окружность $|z-5|=1$.

3.22. $\oint\limits_{\tilde{A}} (\bar{z}+1)dz$, Ã: окружность $|z|=1$.

3.23. $\oint\limits_{\tilde{A}} ie^z dz$, Ã: окружность $|z|=1$.

3.24. $\int\limits_{AB} (\bar{z}+1)dz$, $AB$: отрезок прямой, соединяющий точки $A=1+i$ и $B=2-i$.

3.25. $\int\limits_{AB} (\bar{z}+1)dz$, $AB$: полуокружность $|z|=2$, $0 \le \varphi \le \pi$.

3.26. $\oint\limits_{\tilde{A}} (5i+4)(1+\sin z)dz$, Ã: окружность $|z-1|=1$.

3.27. $\oint\limits_{\tilde{A}} (5i-\cos z)dz$, Ã: окружность $|z-i|=2$.

3.28. $\int\limits_{AB} e^z(i+1)dz$, $AB$: отрезок прямой, соединяющий точки $A=-i$ и $B=-1$.

3.29. $\int\limits_{AB} \dfrac{(z+1)^2}{\bar{z}}dz$, $AB$: отрезок прямой, соединяющий точки $A=-i$ и $B=1+i$.

3.30. $\int\limits_{AB} \dfrac{(z+1)^2}{\bar{z}}dz$, $AB$: отрезок прямой, соединяющий точки $A=i$ и $B=1-i$.

2.12.4 Разложить функцию в ряд Лорана в окрестности указанной точки (или в кольце).

4.01. $\varphi=\dfrac{1}{z-2}$, $z_0=0$.

4.02. $\varphi=\dfrac{1}{z+1}$, $z_0=1$.

4.03. $\varphi=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$, $z_0=0$.

4.04. $\varphi=\dfrac{1}{(z-1)(z-3)}$, $z_0=1$.

4.05. $\varphi=\dfrac{1}{(z-2)(z-4)}$, $2<|z|<4$.

4.06. $\varphi=\dfrac{1}{(z-i)(z-1)}$, $z_0=1$.

4.07. $\varphi=\dfrac{1}{z^2+1}$, $z_0=0$.

4.08. $\varphi=\dfrac{1}{z^2+1}$, $z_0=i$

4.09. $\varphi=\dfrac{3}{z^2+1}$, $z_0=i$.

4.10. $\varphi=\dfrac{4}{z^2+2}$, $z_0=\sqrt{2}i$.

4.11. $\varphi=\dfrac{1}{(z-i)(z-2)}$, $1<|z|<2$.

4.12. $\varphi=\dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$, $z_0=2$.

4.13. $\varphi=\dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$, $1<|z|<2$.

4.14. $\varphi=\dfrac{z}{1+z^2}$, $z_0=i$.

4.15. $\varphi=\dfrac{z}{1+z^2}$, $z_0=-i$

4.16. $\varphi=\dfrac{z}{(z-1)(z-i)}$, $z_0=1$.

4.17. $\varphi=\dfrac{2z}{(z-1)(z+i)}$, $z_0=-i$.

4.18. $\varphi=\dfrac{3z}{(z+1)(z-1)}$, $z_0=1$.

4.19. $\varphi=z^3\exp\dfrac{1}{z}$, $z_0=0$.

4.20. $\varphi=\cos\dfrac{z}{z-2}$, $z_0=2$.

4.21. $\varphi=\sin\dfrac{z}{z-i}$, $z_0=i$.

4.22. $\varphi=(z-1)\sin\dfrac{z}{1-z}$, $z_0=1$.

4.23. $\varphi=e^{\frac{1}{1-z}}$, $z_0=1$.

4.24. $\varphi=z^2\exp\dfrac{1}{z}$, $z_0=0$.

4.25. $\varphi=\dfrac{5}{(z-1)(z-5)}$, $1<|z|<5$.

4.26. $\varphi=\dfrac{1}{2z-1}$, $z_0=1$.

4.27. $\varphi=\dfrac{1}{2z+i}$, $z_0=0$.

4.28. $\varphi=\dfrac{1}{(2z-1)(z-1)}$, $z_0=1$.

4.29. $\varphi=\dfrac{1}{(3z-1)(z-1)}$, $z_0=1$.

4.30. $\varphi=\dfrac{1}{(z-1)(3z-2)}$, $z_0=1$.

2.12.5 Вычислить интеграл от функции комплексного переменного, используя теорему о вычетах и по формуле Коши.

5.01. $\oint_{\tilde{A}}\dfrac{dz}{z^2+1}$, $\tilde{A}:\ |z-i|=1$.

5.02. $\oint_{\tilde{A}}\dfrac{dz}{z^2-1}$, $\tilde{A}:\ |z|=2$.

5.03. $\oint_{\tilde{A}}\dfrac{dz}{(z-1)^2(z+2)}$, $\tilde{A}:\ |z|=3$.

5.04. $\oint_{\tilde{A}}\dfrac{dz}{z^4-1}$, $\tilde{A}:\ |z|=2$.

5.05. $\oint_{\tilde{A}}\sin\dfrac{1}{z}\,dz$, $\tilde{A}:\ |z|=1$.

5.06. $\oint_{\tilde{A}}\sin^2\dfrac{1}{z}\,dz$, $\tilde{A}:\ |z|=1$.

5.07. $\oint_{\tilde{A}}e^{\frac{1}{z}}\,dz$, $\tilde{A}:\ |z|=1$.

5.08. $\oint_{\tilde{A}}z^2e^{\frac{3}{z}}\,dz$, $\tilde{A}:\ |z|=1$.

5.09. $\oint_{\tilde{A}}\cos\dfrac{1}{z}\,\exp\dfrac{2}{z}\,dz$, $\tilde{A}:\ |z|=1$.

5.10. $\oint_{\tilde{A}}\dfrac{\sin\frac{2}{z}}{\exp\frac{1}{z}}\,dz$, $\tilde{A}:\ |z|=1$.

5.11. $\oint_{\tilde{A}}\dfrac{z-1\sin\frac{2}{z}}{z^2+1}\,dz$, $\tilde{A}:\ |z|=2$.

5.12. $\oint_{\tilde{A}}\dfrac{dz}{z^4+1}$, $\tilde{A}:\ x^2+y^2=2x$.

5.13. $\oint_{\tilde{A}}\dfrac{dz}{z^4+1}$, $\tilde{A}:\ |z-2|=\dfrac{1}{2}$.

5.14. $\oint_{\tilde{A}}\dfrac{z^3dz}{2z^4+1}$, $\tilde{A}:\ |z|=1$.

5.15. $\oint\limits_{\tilde{A}} \dfrac{e^z}{z^2(z^2-9)}dz$, $\quad \tilde{A} : |z| = 1$.

5.16. $\oint\limits_{\tilde{A}} \dfrac{\sin\frac{1}{z}}{2\pi i}dz$, $\quad \tilde{A} : |z| = 2$.

5.17. $\oint\limits_{\tilde{A}} \dfrac{1}{2\pi i}\sin^2\dfrac{1}{z}dz$, $\quad \tilde{A} : |z| = 3$.

5.18. $\oint\limits_{\tilde{A}} \dfrac{dz}{(z-3)(z^2-1)}$, $\quad \tilde{A} : |z| = 2$.

5.19. $\oint\limits_{\tilde{A}} \dfrac{1}{2\pi i}\cdot \mathrm{z}^2\cdot \mathrm{e}^{\frac{2}{z}}dz$, $\quad \tilde{A} : |z| = 2$.

5.20. $\oint\limits_{\tilde{A}} (1+z)e^{\frac{1}{z-1}}dz$, $\quad \tilde{A} : |z| = 3$.

5.21. $\oint\limits_{\tilde{A}} (1+z)^2 e^{\frac{1}{z}}dz$, $\quad \tilde{A} : |z| = 3$.

5.22.
$\oint\limits_{\tilde{A}} (1+z+z^2)e^{\frac{1}{z-2}}dz$, $\quad \tilde{A} : |z| = 3$.

5.23. $\oint\limits_{\tilde{A}} \dfrac{zdz}{(z-2)(z+i)}$, $\quad \tilde{A} : |z-3| = 33$.

5.24. $\oint\limits_{\tilde{A}} \dfrac{z+1}{z^2+1}$, $\quad \tilde{A} : |z-4| = 44$.

5.25. $\oint\limits_{\tilde{A}} \dfrac{z+1}{z^2(z-1)}$, $\quad \tilde{A} : |z-0{,}1| = 0{,}2$.

5.26. $\oint\limits_{\tilde{A}} \dfrac{dz}{2z^2+3}$, $\quad \tilde{A} : |z+i| = 1$.

5.27. $\oint\limits_{\tilde{A}} \dfrac{dz}{2z^2-3}$, $\quad \tilde{A} : |z-1| = 3$.

5.28. $\oint\limits_{\tilde{A}} \dfrac{2zdz}{(z-2)^2(2z+i)}$, $\quad \tilde{A} : |z| = 4$.

5.29. $\oint\limits_{\tilde{A}} \dfrac{dz}{3z^4-1}$, $\quad \tilde{A} : |z-1| = 3$.

5.30. $\oint\limits_{\tilde{A}} \sin\dfrac{z-1}{z}dz$, $\quad \tilde{A} : |z-i| = 0{,}5$.

## ЛИТЕРАТУРА

### Основная:


1. Гольдфайн И. А. Векторный анализ и теория поля. – ГИФМЛ, 1962.
2. Лаврентьев Н. А., Шабат Б. В. Методы функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987.
3. Маркушевич А. И., Маркушевич В. А. Введение в теорию аналитических функций. – М.: Просвещение, 1977.
4. Овчинников П. П., Яремчук Ф. П., Михайленко В. М. Вища математика. Ч. I, II. – К.: Техніка, 2000.
5. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 1, 2. – М.: Наука, 1985.
6. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: Полный курс. 3-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2005.
7. Поддубный Г. В. Математический анализ для радиоинженеров.– М.: Наука, 1978.
8. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. – М.: Физматгиз, 1960.
9. Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной. – М.: Наука, 1974.


### Дополнительная:


10. Кудрявцев Л. Д. Математический анализ. Т.II. – М.: Высшая школа, 1970.
11. Никольский С. М. Курс математического анализа. Т.II. – М.: Наука, 1973.
12. Лунгу К. Н., Норин В. П., Письменный Д. Т. И др. Сборник задач по высшей математике. 2 курс; под ред. С. Н. Федина. 4-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2006.
13. Лаптев Г. Ф. Элементы векторного исчисления. – М.: Наука, 1975.
14. Ладон И. Ф. Основы векторного исчисления с приложениями к теории электромагнитного поля. – Ленинград: Издание ВЭТА, 1938.
15. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Векторный анализ. – М.: Наука, 1978.
16. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Т. 1, 2. М.: Наука, 1971, 1973, 1979.
17. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анлизу. – ГИФМЛ, 1962.
18. Данко П. Е., Попов А. Г. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.II, III. Учебное пособие для втузов. – М.: Высшая школа, 1971
19. Бермант А. Ф., Араманович И. Г. Краткий курс математического анализа для втузов. – М.: Наука, 1967.
20. Толстов Г. П. Элементы математического анализа. Т. 1, 2. – М.: Наука, 1974.

21. Буслаєв А. Г. Верховський А. Г. Стрелковська І. В. Харсун О. М. Розрахункові завдання з вищої математики. Ч. І, ІІ. Методичні вказівки та завдання. – О.: ОНАЗ. 2001.
22. Верховський А. Г. Зиньков П. И. Ромащенко Н. В. Паскаленко В. М. Математический анализ в теории электрических цепей. Методические указания и контрольные задания. – О.: ОНАС. 1985.
23. Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике. – М.: Наука, 1973.
24. Паскаленко В. М., Стрелковська І. В., Шкуліпа І. В. Комплексні числа. Навчальний посібник для студентів технічних факультетів усіх форм навчання. – О.: ОНАЗ, 2005.