Курс лекцій з фізики для студентів Державного університету інформаційно-комунікаційних технологій

Редько Р.А., Редько С.М.

Семестр 1

Модуль1
Модуль 2

2023

Рецензенти:

А.В. Саріков, провідний науковий співробітник Інституту фізики напівпровідників імені В.Є. Лашкарьова НАН України, доктор фізико-математичних наук.

Ю.М. Насєка, доцент Національного університету біоресурсів і природокористування України, доктор фізико-математичних наук.

Перша частина курсу лекцій з фізики для студентів Державного університету інформаційно-комунікаційних технологій охоплює невелику частику найбільш вагомих питань з механіки, електрики, магнетизму і коливальних процесів. Усі наведені питання передбачені навчальною програмою вивчення фізики студентами, які навчаються за спеціальністю 172 Телекомунікації та радіотехніка. Посібник може бути корисним також студентам інших фізичних та інженерно-технічних спеціальностей. Для більш глибокого та ширшого вивчення фізичних явищ читачі зможуть скористатися наведеним списком літератури.

Зміст

Модуль 1

Тема 1. Фізичні основи механіки. Кінематика

Тема 2. Електрика

Модуль 2

Тема 3. Магнетизм

Тема 4. Коливання

Вступ

„Всі науки поділяються на фізику і колекціонування марок“ ***(Ернест Резерфорд)***

Фізика як наука формує науковий світогляд людини. Зокрема інженера технічних спеціальностей у сфері зв'язку і телекомунікацій. Тому кваліфікований спеціаліст будь-якого технічного профілю повинен володіти фізикою в такій мірі, щоб бути в змозі застосовувати її досягнення у своїй практичній діяльності.

Важливо правильно розуміти закони фізики і відмінність їх від законів будь-якої іншої неприродничої науки. Особливість цих законів полягає у тому, що вони не виводяться, а встановлюються. Вони не залежать від волі тих чи інших суб'єктивних обставин. Наявність законів фізики зумовлена не тими людьми, які їх встановили, а навколишнім Всесвітом як таким. Тобто усе, що нас оточує відбувається не хаотично і випадково, а функціонує відповідно до деяких правил. Причому суворо їм підпорядковується. А фізики-науковці здійснюють спостереження, ставлять експерименти і встановлюють ці правила. Їхня діяльність дає людству закони і теорії, які грунтуються на величезній кількості багатократно апробованих експериментальних результатів. Ці знання, відповідно, дозволяють розраховувати потрібні параметри електричних кіл, механічних систем, електромагнітних пристоїв, складних будівельних конструкцій тощо.

Фізика є науковим фундаментом розвитку усіх галузей техніки. На основі її відкриттів створені: електротехніка, радіотехніка, електронна й обчислювальна техніка, ядерна енергетика, лазерні технології, провідний та мобільний зв'язок, всесвітня мережа інтернет та багато іншого. На основі досягнень фізики розробляються принципово нові джерела живлення такі як суперконденсатори, паливні комірки водню, фотоенергетичні перетворювачі на основі гетеропереходів, кестеритів, перовскитів тощо.

Фізика – це наука, що вивчає найпростіші і разом з тим найзагальніші закономірності явищ природи, властивості і будову матерії, а також закони її руху. Розвиваючись, вона видозмінює, доповнює, поглиблює уявлення людини про природу речей і причинні зв'язки навколишнього світу. Вивчення законів природничих наук, фізики зокрема, сприяє вирішенню конкретних технічних задач в найбільш простий і до того ж найбільш ефективний спосіб, оскільки спонукає до відшукання і встановлення причинно-наслідкових зв'язків.

Сучасні новітні досягнення світової фізичної науки такі як квантова заплутаність, фіксування гравітаційних хвиль, двигун EmDrive, керований (хоч і доволі нетривалий) термоядерний синтез та багато іншого були б просто неможливими без належного вивчення фізики у вищих навчальних закладах.

Модуль 1

Тема 1. Фізичні основи механіки. Кінематика

Лекція 1. Основи кінематики поступального та обертального рухів

В механіці розглядають механічний рух. Під механічним рухом розуміють зміну з часом положення тіла відносно інших тіл в просторі з часом. *Тіло відліку* – це тіло, відносно якого розглядається рух. Тіло відліку, система координат, пов'язана з ним і прилад для вимірювання часу разом становлять *систему відліку*.

На практиці використовують декартову, циліндричну і сферичну системи координат. У декартовій системі координат положення матеріальної точки задається трьома координатами: *x*, *y* та *z*. Іноді положення чи рух тіла зручно розглядати у циліндричній та сферичній системах координат. З рис. 1.1. видно, що звязок між декартовою і циліндричною системою координат може бути виражений як:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos\varphi \\ y &= \rho \sin\varphi \\ z &= z, \end{aligned} \qquad (1.1)$$

а звязок між декартовою і сферичною системою координат як:

$$\begin{aligned} x &= r \cos\varphi \sin\theta \\ y &= r \sin\varphi \sin\theta \\ z &= r \cos\theta. \end{aligned} \qquad (1.2)$$

У випадку руху в площині (так званий двовимірний рух) використовують декартову і поляр-

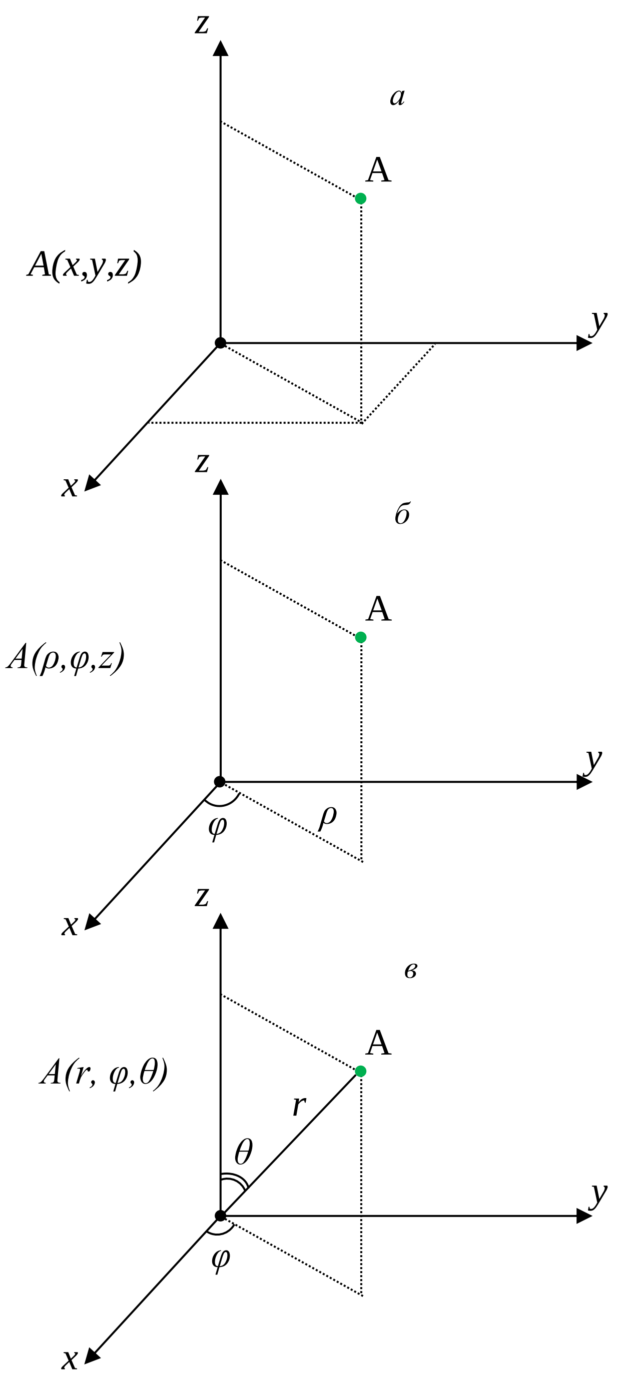


Рис. 1.1

ну системи координат (рис. 1.2).

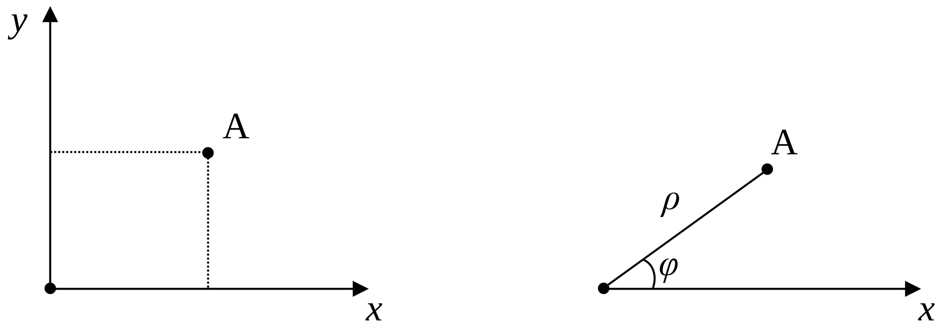


Рис. 1.2

Перехід між цими двома системами здійснюється відповідно до:

$$x = \rho \cos\varphi\,;\; y = \rho \sin\varphi \tag{1.3}$$

При русі матеріальної точки кожному моменту часу відповідають певні значення її координат. Рух вважається описаним, якщо відома функціональна залежність *x(t), y(t)* і *z(t).*

Положення матеріальної точки в просторі, як правило, задається радіус-вектором[1], який проводять з початку координат до місця знаходження точки в даний момент часу (рис. 1.3):

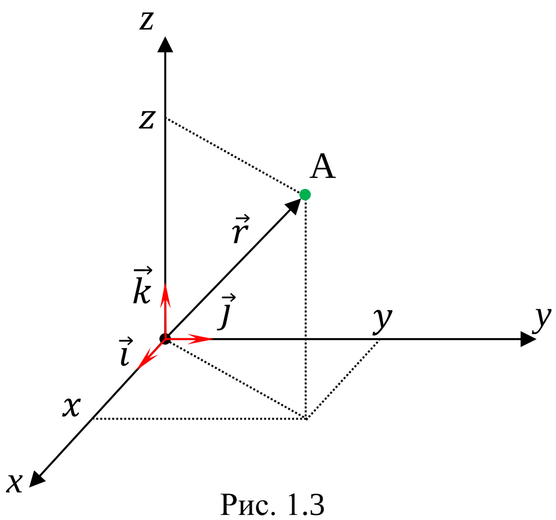


Рис. 1.3

Радіус-вектор можна виразити через координати точки із співвідношення:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \tag{1.4}$$

де $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – одиничні вектори вздовж додатного напрямку координатних осей (рис. 1.3). Так як x, y і z є функціями часу, то радіус-вектор є також функцією часу.

Будь-який механічний рух тіла можна розкласти на поступальний і обретальний. При *поступальному* русі будь-яка пряма, повязана з тілом залишається паралельною сама собі. При *обертальному* русі всі точки тіла рухаються по колах, центри яких лежать на одній прямій, яка називається *віссю обертання*.

[1] *Векторними* називають фізичні величини, які характеризаються числовим значенням і напрямком (сила, швидкість, переміщення та ін.). *Скалярними* називаються фізичні величини, які характеризуються тільки числовим значенням (маса, густина, час та ін.)

Основна задача механіки – визначити положення тіла в будь-який момент часу в просторі. Для цього використовують певні фізичні величини та поняття. *Матеріальна точка* – це тіло, розмірами якого (<u>але не масою!</u>) за даних умов задачі можна знехтувати. Наприклад, у випадку переміщення автомобіля на відстань, яка набагато більша за розміри самого автомобіля, останній можна вважати матеріальною точкою, проте той самий автомобіль не можна приймати за матеріальну точку, коли в задачі розглядаються рухи в середині самого автомобіля, чи переміщення авто відбувається на відстані, співрозмірні чи менші за розміри транспортного засобу.

Траєкторія – це уявна лінія, яку описує тіло під час свого руху (рис. 1.4). *Шлях* – це довжина траєкторії або це відстань, яку проходить тіло під час свого руху. *Переміщення* – це вектор, що сполучає початкове і кінцеве положення тіла.

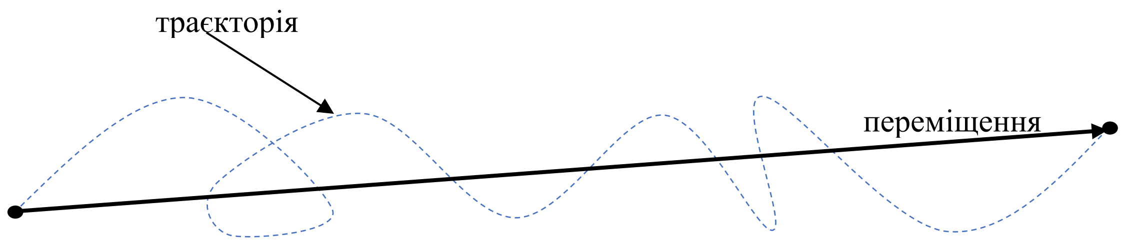


Рис. 1.4

Зрозуміло, що траєкторія, шлях і переміщення тісно пов'язані між собою, але слід пам'ятати, що різні поняття. Шлях і переміщення є фізичними величинами, як можуть в окремих випадках співпадати по величині. Але це відноситься тільки до прямолінійних рухів без зміни напрямку руху. Причому шлях це величина скалярна і може дорівнювати нулю тільки тоді, коли тіло знаходиться в стані спокою, а переміщення – це векторна величина і, на відміну від шляху, може дорівнювати нулю не тільки тоді, коли тіло стоїть, але й у випадку співпадання початкової і кінцевої точки руху.

Поняття про вектори

Векторами називають величини, які характеризуються як числовим значенням так і напрямком у просторі. Додавання векторів здійснюють за правилом паралелограма. Тобто сумою векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ буде вектор $\vec{c}$, який є діагоналлю в паралелограмі, побудованому на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$ (рис. 1.5).

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \qquad (1.5)$$

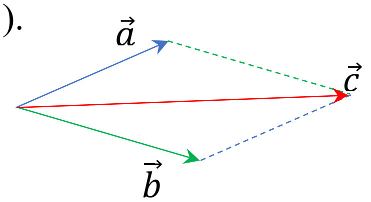


Рис. 1.5

Якщо відомі компоненти векторів, які додаються у вигляді:

$$\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k} \tag{1.6}$$

$$\vec{b} = b_x\vec{\imath} + b_y\vec{\jmath} + b_z\vec{k}, \tag{1.7}$$

то сумарний вектор $\vec{c}$ також може бути знайдений через його компоненти по осям координат:

$$\vec{c} = (a_x + b_x)\vec{\imath} + (a_y + b_y)\vec{\jmath} + (a_z + b_z)\vec{k}, \tag{1.8}$$

Числове значення вектора називається модулем цього вектора. При множенні вектора на скаляр отримаємо новий вектор:

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} \tag{1.9}$$

де α – довільне скалярне число і модуль вектора $\vec{d}$ в α разів більний за модуль вектора $\vec{a}$.

Віднімання векторів здійснюють за правилом трикутника. Різницею векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ буде вектор $\vec{c}$, який сполучає кінці векторів, що віднімаються і направлений до вектора, від якого віднімають (рис. 1.6):

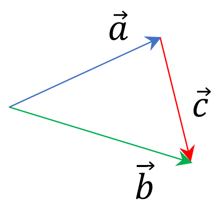


Рис. 1.6

$$\vec{c} = \vec{b} - \vec{a} \tag{1.10}$$

Аналогічно до додавання, відмімання векторів також можна здійснити через компоненти векторів, що віднімаються:

$$\vec{c} = (a_x - b_x)\vec{\imath} + (a_y - b_y)\vec{\jmath} + (a_z - b_z)\vec{k}, \tag{1.11}$$

Якщо розглянути деякий напямок в просторі, що задається деякою віссю l (рис. 1.7), то величина $a_l = a\cos\varphi$ називається проекцією вектора $\vec{a}$ на вісь l, φ – кут між вектором $\vec{a}$ та віссю l. Якщо $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, то $c_l = a_l + b_l$.

Будь-який вектор можна виразити через його проекції на координатні осі:

$$\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k} \tag{1.12}$$

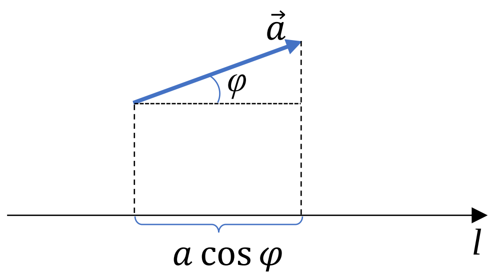


Рис. 1.7

При цьому модуль вектора $\vec{a}$ визначається із співвідношення:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{1.13}$$

Вектори можна множити скалярно і вектроно. Слід памятати, що результатом скалярного добуткку векторів є завжди скаляр, а результатом векторного добутку – вектор. *Скалярний добуток* векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається величина, яка визначається із співвідношення:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi \tag{1.14}$$

де φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Якщо відомі проекції a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ на координатні осі, то їхній скалярний добуток можна записати так:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \tag{1.15}$$

Векторним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор:

$$\vec{c} = [\vec{a} \cdot \vec{b}] \tag{1.16}$$

де модуль вектора $\vec{c}$ визначається із співвідношення:

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi \tag{1.17}$$

Напрям вектора $\vec{c}$ визначається за правилом правого гвинта (рис. 1.8)[2]. Як видно з означення, модуль векторного добутку дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 1.9).

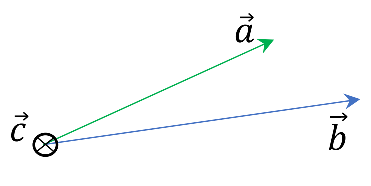


Рис. 1.8

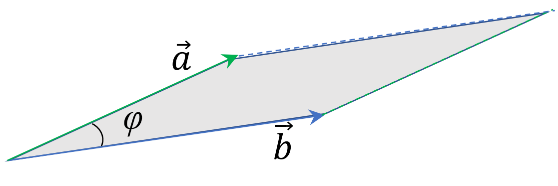


Рис. 1.9

[2] Якщо ручку гвинта повертати від першого вектора до другого, то поступальний рух гвинта покаже напрям результуючого вектора

Швидкість і прискорення

Нехай матеріальна точка рухається з т. А в т. В (рис. 1.10). Тоді $\Delta\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}$ - переміщення, довжина дуги АВ траєкторії між початковим і кінцевим положенням точки є шляхом. Різні тіла за один і той же проміжок часу можуть здійснювати різні переміщення.

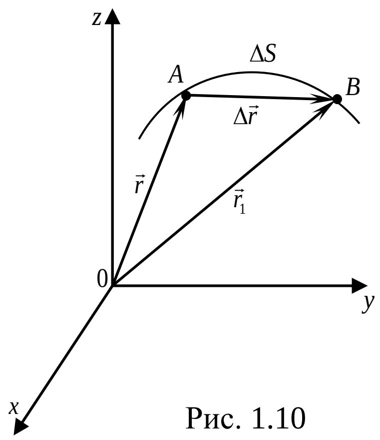


Рис. 1.10

Фізична величина:

$$< \vec{v} >= \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad (1.18)$$

називається *середньою швидкістю*.

Якщо зменшувати проміжок часу Δt, то відношення $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ буде прямувати до деякої границі. Границя, до якої прямує середня швидкість при умові, що проміжок часу $\Delta t \to 0$ називається миттєвою швидкістю, або швидкістю в даний момент часу в даній точці траєкторії. За означенням:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \qquad (1.19)$$

Миттєва швидкість є першою похідною від радіус-вектора по часу. При $\Delta t \to 0$ модуль вектора переміщення можна вважати приблизно рівним довжині дуги траєкторії, в цьому випадку модуль вектора швидкості буде такий:

$$|\vec{v}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{dt} = \frac{d\vec{S}}{dt}, \qquad (1.20)$$

де ΔS - це шлях, пройдений тілом за час Δt. Фізична величина, яка визначається із співвідношення:

$$\langle\vec{a}\rangle = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad (1.21)$$

називається *середнім прискоренням* тіла на проміжку часу Δt. Нехай за деякий проміжок часу Δt швидкість матеріальної точки змінилась від $\vec{v}$ до $\vec{v}_1$ (рис. 1.11). Тоді зміна швидкості:

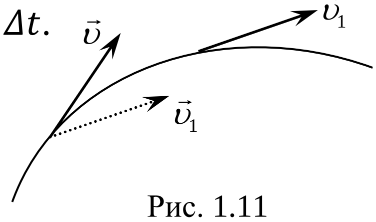


Рис. 1.11

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v} \qquad (1.22)$$

Якщо зменшувати проміжок часу Δt, то при $\Delta t \to 0$ величина $\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ буде наближатись до деякої границі. Фізична величина, яка визначається із співвідношення:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} \qquad (1.23)$$

називається *прискоренням* матеріальної точки.

Оскільки $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, то:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} \qquad (1.24)$$

Нехай за проміжок часу Δt швидкість точки змінилась від $\vec{v}_1$ до $\vec{v}_2$:
Як видно з рис. 1.12:

$$\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}_\tau + \Delta\vec{v}_n \qquad (1.25)$$

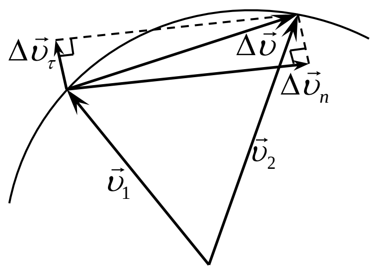


Рис. 1.12

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}_\tau + \Delta\vec{v}_n}{\Delta t} =$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}_\tau}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}_n}{\Delta t} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n, \qquad (1.26)$$

де $\vec{a}_\tau$ - *тангенціальне прискорення*, яке визначає зміну вектора швидкості по модулю та напрямлене по дотичній до траєкторії руху (рис. 1.13), $\vec{a}_n$ - *нормальне прискорення* (його ще називають доцентровим), яке визначає зміну вектора швидкості по напрямку, напрямлене до центру кривизни траєкторії (рис. 1.13). Відповідно повне прискорення:

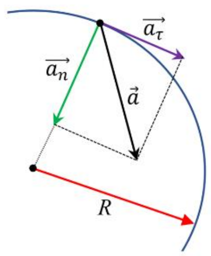


Рис. 1.13

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2} \qquad (1.27)$$

Кінематика обертального руху

Обертальний рух тіл можна характеризувати поворотом на деякий кут $\Delta\varphi$. Для випадку, якщо $\Delta\varphi$ є достатньо малим для того, щоб вказувати напрям повороту, величину $\Delta\varphi$ зображають вектором $d\vec{\varphi}$ (рис. 1.14), модуль якого рівний $d\varphi$, а напрям якого визначається за правилом правого гвинта:

якщо ручку гвинта повертати в напрямку руху тіла, то рух гвинта покаже напрям вектора $d\vec{\varphi}$. Введені таким чином вектори можна складати за правилом паралелограма, а називають їх *псевдовекторами*.

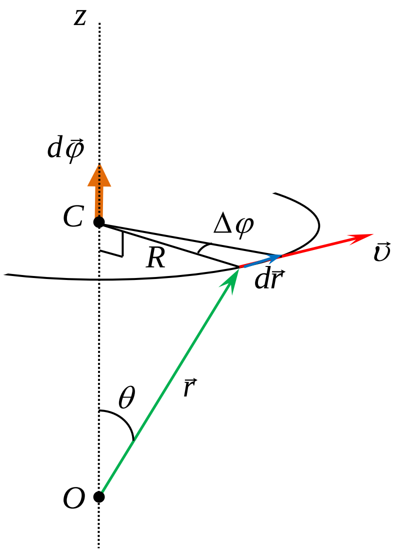


Рис. 1.14

Фізична величина, яка визначається із співвідношення:

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \qquad (1.28)$$

називається *кутовою швидкістю* обертального руху тіла. Напрям кутової швидкості визначається за правилом правого гвинта. Вона напрямлена вздовж осі обертання вгору або вниз (рис. 1.15).

Одиниці вимірювання кутової швидкості $\frac{рад}{c}$. Якщо $\vec{\omega} = const$, то маємо випадок рівномірного обертання (рис. 1.16). Для такого обертання $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$. Воно характеризується *періодом* – тривалістю одного повного оберту. В СІ період вимірюється в *секундах*:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad (1.29)$$

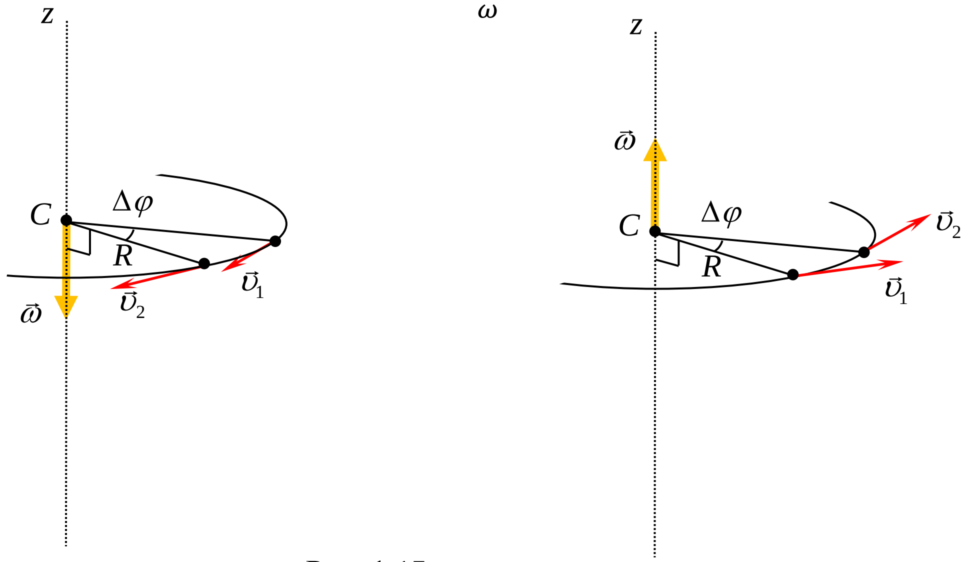


Рис. 1.15

Рівномірний рух по колу характеризується *частотою* обертання – кількістю обертань за одиницю часу. В СІ частота вимірюється в с$^{-1}$ або Гц:

$$\nu = \frac{1}{T} \qquad (1.30)$$

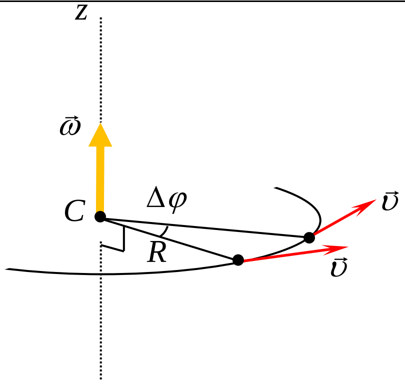


Рис. 1.16

Кутова швидкість може змінюватись за рахунок зміни лінійної швидкості обертання тіла навколо осі і внаслідок повороту осі обертання в просторі. Фізична величина, яка визначається із співвідношення:

$$\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad (1.31)$$

називається *кутовим прискоренням* тіла. Кутове прискорення, як і кутова швидкість направлена вздовж осі обертання вгору або вниз і співпадає з кутовою швидкістю, якщо обертання рівноприскорене (чи прискорене) і протилежне до кутової швидкості, якщо обертання рівносповільнене (або сповільнене) (рис. 1.17). Одиниці вимірювання кутового прискорення $\frac{рад}{c^2}$.

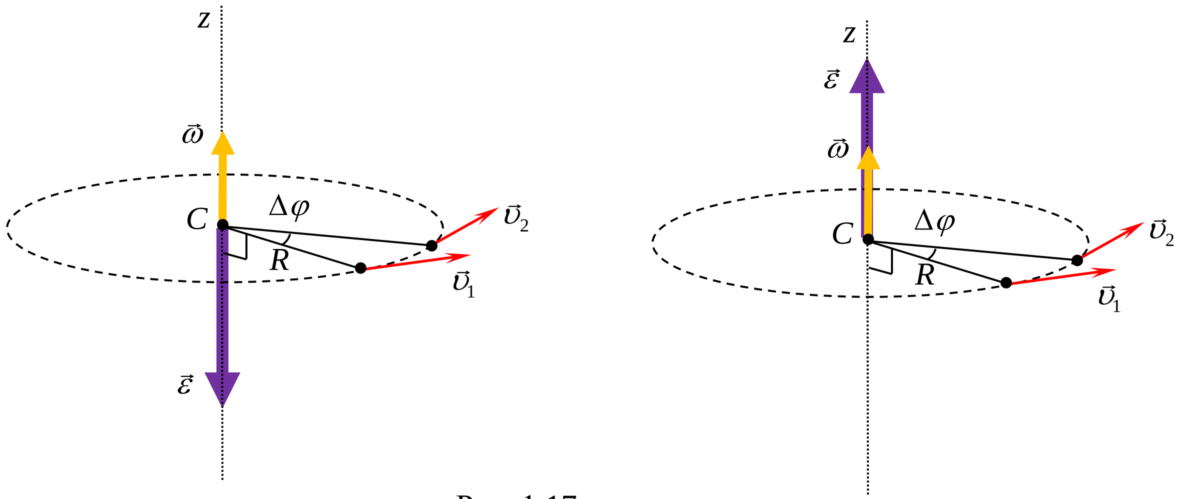


Рис. 1.17

Знайдемо зв'язок між лінійною і кутовою швидкостями тіла. Нехай за час Δt тіло, що обертається навколо осі здійснило поворот на кут $\Delta\varphi$. При цьому його переміщення нехай буде рівним ΔS (рис. 1.18).

Як ми знаємо, модуль швидкості тіла:

$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi \cdot R}{\Delta t} = R\omega \qquad (1.32)$$

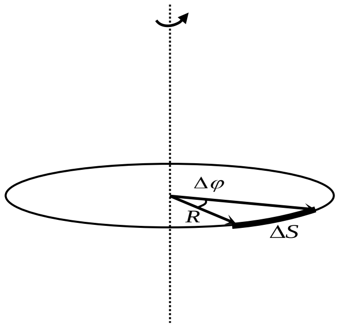


Рис. 1.18

Отже $\upsilon = R\omega$.

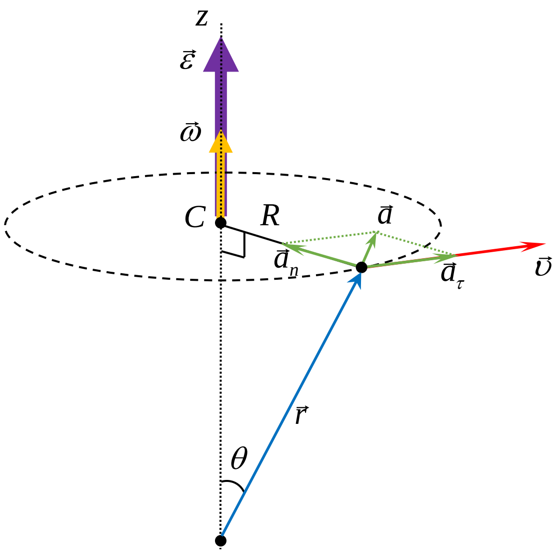


Рис. 1.19

Знайдемо вираз, який пов'язує вектори $\vec{\upsilon}$ і $\vec{\omega}$. Нехай матеріальна точка обертається навколо деякої осі і її кутова швидкість напрямлена вздовж цієї осі. Як видно з рис. 1.19, вектор швидкості $\vec{\upsilon}$ перпендикулярний до площини, утвореної радіусом кола R і вектором $\vec{\omega}$. Як вже зазначалося модуль вектора швидкості:

$$\upsilon = R\omega$$

Як видно з рис. 1.19, $R = |\vec{r}|\, sin\,\theta$ тому:

$$\upsilon = \omega r\, sin\,\theta \tag{1.33}$$

Використовуючи поняття векторного добутку векторів, формулу (1.33) можна записати у вигляді:

$$\vec{\upsilon} = [\vec{\omega}\vec{r}] \tag{1.34}$$

Отримане математичне співвідношення є справедливим для будь-якої точки відліку на осі Z, в тому числі і для центру кола ($\theta = 90^\circ$).

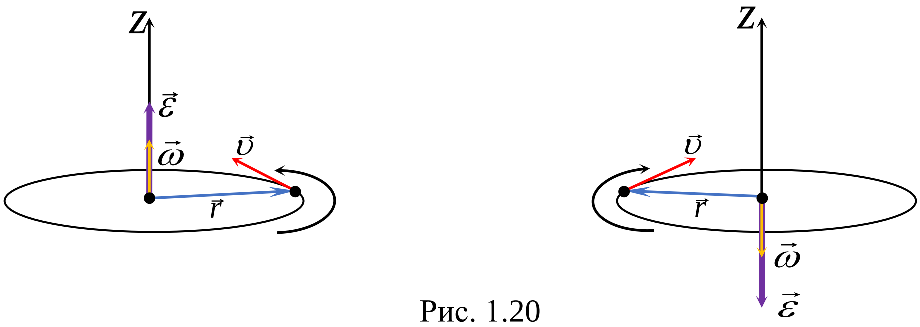


Рис. 1.20

Модуль вектора швидкості дорівнює модулю векторного добутку $\vec{\omega}$ і $\vec{r}$, а напрямок визначається за правилом правого свердлика[3] (рис. 1.20).

Так як нормальне прискорення при обертальному русі напрямлене до центра кола вздовж радіуса, то воно визначатиметься із співвідношення:

[3] Якщо ручку свердлика обертати так, щоб поступальний рух свердлика співпадав з напрямком кутової швидкості, то дотична до траєкторії, яку буде описувати ручка свердлика буде співпадати з напрямком вектора швидкості

$$\vec{a}_n = -\frac{v^2}{R}\vec{n} = -\vec{\omega}^2 R\vec{n}, \qquad (1.35)$$

де $\vec{n}$ - одиничний вектор, який напрямлений по радіусу кола від центру кола. Знак «-» фізично означає, що нормальне прискорення направлене протилежно до одиничного вектора. У скалярному вигляді нормальне прискорення можна записати так:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = \omega \frac{v}{R} R = \omega v$$

У векторній формі, відповідно:

$$\vec{a}_n = [\vec{\omega}\vec{v}] \qquad (1.36)$$

Оскільки тангенціальне прискорення відповідає за зміну вектора швидкості по абсолютному значенню, то:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon R \qquad (1.37)$$

У векторній формі, відповідно:

$$\vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon}\vec{r}] \qquad (1.38)$$

Слід відмітити, що зв’язок між повним прискоренням і кутовим прискоренням можна знайти, скориставшись правилом диференціювання векторного добутку:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d[\vec{\omega}\vec{r}]}{dt} = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}\vec{r}\right] + \left[\vec{\omega}\frac{d\vec{r}}{rt}\right] = [\vec{\varepsilon}\vec{r}] + [\vec{\omega}\vec{v}]$$

$$\vec{a} = [\vec{\varepsilon}\vec{r}] + [\vec{\omega}\vec{v}] \qquad (1.39)$$

Враховуючи (1.36) і (1.38), останню рівність можна записати як:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \qquad (1.40)$$

Розглянемо приклади руху:

а) Рівномірний прямолінійний рух. Для такого руху швидкість і координата матеріальної точки змінюються відповідно до законів:

$$\vec{v} = const, x = x_0 + vt \tag{1.41}$$

б) рівномірний рух по колу. В цьому випадку для кутової швидкості і кута повороту можна записати:

$$\vec{\omega} = const, \varphi = \varphi_0 + \omega t \tag{1.42}$$

в) рівнозмінний прямолінійний рух. Закони зміни швидкості, прискорення і координати матимуть вигляд:

$$\vec{a} = const, x = x_0 + v_x t + \frac{a_x t^2}{2}, v = v_0 + at \tag{1.43}$$

г) рівнозмінний рух по колу. Аналогічно до попереднього випадку, враховуючи кутові характеристики, можна записати:

$$\vec{\varepsilon} = const, \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}, \omega = \omega_0 + \varepsilon t \tag{1.44}$$

Центр мас.

Іноді дуже зручно користуватись поняттям цетнру мас для того щоб визначити характер руху тіла чи стану його рівноваги, яка може бути стійкою, нестійкою та байдужою (рис. 1.21). Розглянемо систему матеріальних точок $m_1, m_2, \ldots m_N$.

Рис. 1.21

Центром мас системи матеріальних точок називається точка простору положення якої визначається із співвідношення:

$$x_ц = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}; y_ц = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}; z_ц = \frac{\sum_{i=1}^{N} z_i m_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}, \tag{1.45}$$

де x_i, y_i, z_i — координати і-тої матеріальної точки.

Якщо система рухається в просторі, то величина:

$$\vec{v}_ц = \frac{d\vec{R}_ц}{dt}, \tag{1.46}$$

називається швидкість руху центра мас.

$$\vec{v}_ц = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{r}_i}{dt} m_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \vec{v}_i m_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}, \tag{1.47}$$

Останню рівність можна переписати:

$$\vec{p} = m\vec{v}_ц = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i, \tag{1.48}$$

де $m = \sum_{i=1}^{N} m_i$ тобто імпульс[4] системи матеріальних точок рівний імпульсу матеріальної точки, маса якої рівна масі системи і яка рухається так, як рухається центр мас цієї системи.

Для випадку замкненої системи $\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = const$ і якщо початок координат сумістити з центром мас, то $\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = 0$

Тобто, *центр мас* є точка простору, відносно якої імпульс замкнутої системи матеріальних точок рівний нулю. У випадку незамкнутої системи

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i, \tag{1.49}$$

тоді:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}_ц = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \vec{F}, \tag{1.50}$$

З останньої рівності можна зробити висновок, що центр мас рухається так, як рухалась б матеріальна точка маса якої рівна масі системи, яка знаходилась в центрі мас.

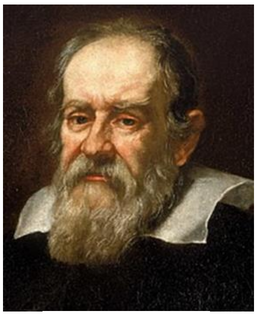
З останньої рівності випливає, що:

$$d\vec{p} = \vec{F}dt, \tag{1.51}$$

Величина $\vec{F}dt$ називається *імпульсом сили*, тобто зміна імпульсу тіла дорівнює імпульсу сили, що діє на дане тіло.

[4] Фізична величина $\vec{p} = m\vec{v}$ називається імпульсом тіла. Детальніше про імпульс можна дізнатись на стор. 32.

Перетворення Галілея.



Галілео Галілей
(1564-1642)

Положення в просторі та рух матеріальної точки є відносними, тобто визначеними лише в обраній системі відліку. Відповідно, характеристики руху точки в двох різних системах відліку є різними. Розглянемо дві системи відліку: нерухому K і рухому K', із збіжними осями координат X, X' й однаково напрямленими іншими осями координат. Нехай рухома система координат рухається зі швидкістю $\vec{V}$=const відносно K-системи у додатному напрямку осей X, X' (рис. 1.22).

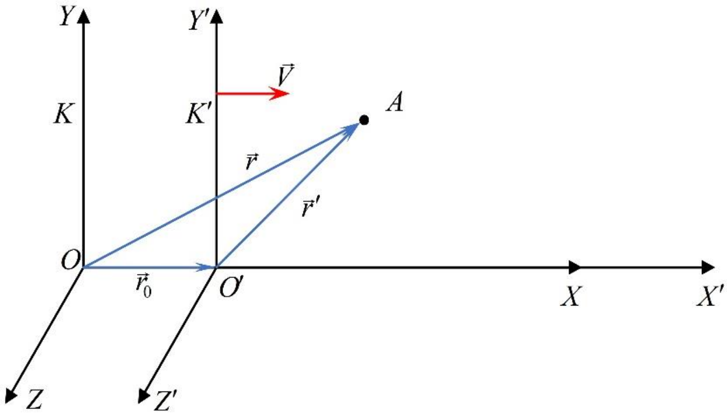


Рис. 1.22

Будемо вважатимемо, що в початковий момент часу системи K і K' збігалися. Тоді в довільний момент t положення точки O' відносно O визначається радіусом-вектором $\vec{r}_0 = \vec{V}t$. Положення довільної точки А в K і K'-системах визначаються радіусами-векторами $\vec{r}$ та $\vec{r}'$, які пов'язані співвідношеннями

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_0 = \vec{r}' + \vec{V}t \qquad (1.52)$$

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{r} - \vec{V}t \qquad (1.53)$$

Ці співвідношення виражають *перетворення Галілея* у векторній формі. Вони дозволяють визначати положення точки в одній системі відліку, якщо відоме її положення в іншій. При цьому вважається, що час є абсолютним, тобто тривалість будь-яких процесів, наприклад руху тіл, не залежить від системи відліку

$$t' = t \qquad (1.54)$$

В проекціях на координатні осі перетворення Галілея матимуть вигляд:

$$\begin{cases} x = x^{'} + Vt \\ y = y^{'} \\ z = z^{'} \end{cases} \tag{1.55}$$

$$\begin{cases} x^{'} = x - Vt \\ y^{'} = y \\ z^{'} = z \end{cases} \tag{1.56}$$

Взявши першу та другу похідні по часу від виразів (1.55) і (1.56), знайдемо формули перетворення швидкостей:

$$\begin{cases} \upsilon_x = \frac{dx}{dt} = \upsilon^{'} + V \\ \upsilon_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy^{'}}{dt} = \upsilon_{y^{'}} \\ \upsilon_z = \frac{dz}{dt} = \frac{dz^{'}}{dt} = \upsilon_{z^{'}} \end{cases} \tag{1.57}$$

$$\begin{cases} \upsilon_{x^{'}} = \frac{dx^{'}}{dt} = \upsilon - V \\ \upsilon_{y^{'}} = \frac{dy^{'}}{dt} = \frac{dy}{dt} = \upsilon_{y^{'}} \\ \upsilon_{z^{'}} = \frac{dz^{'}}{dt} = \frac{dz}{dt} = \upsilon_{z^{'}} \end{cases} \tag{1.58}$$

і прискорень:

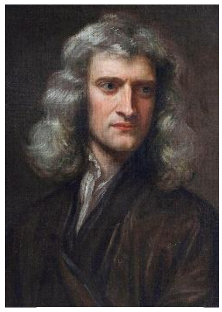
$$\begin{cases} a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{d\upsilon_{x^{'}}}{dt} = a_{x^{'}} \\ a_y = a_{y^{'}} \\ a_z = a_{z^{'}} \end{cases} \tag{1.59}$$

Слід відмітити, що співідношення Галілея ґрунтуються на принципово хибних уявленнях про простір та час і є непридатними при швидкостях руху, що є співрозмірні з швидкістю поширення світла $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Проте, для рухів із відносно малими швидкостями (набагато меншими за швидкість світла), ці співвідношення можуть бути цілком застосовні.

Лекція 2. Основи динаміки матеріальної точки та абсолютно твердого тіла

Перший закон Ньютона

Кінематика вивчає рух тіл не торкаючись причин виникнення і зміни цього руху. В динаміці вивчається рух тіла[5], а також причини зміни цього руху, які є наслідком дії на дане тіло інших тіл. В основі динаміки лежать три закони Ньютона. Перший закон Ньютона називається законом інерції. В свій час Галілей показав, що для підтримки рівномірного і прямолінійного руху не потрібна ніяка дія зі сторони інших тіл. Наприклад, тіло, що котиться по горизонтальній поверхні зупиниться тому, що на нього чинить дію сама ця поверхня (діє сила тертя). Якби цієї дії не було, то тіло котилося б нескінченно довго. *Ісаак Ньютон*, узагальнивши всі експериментальні факти, сформував свій перший закон:



Ісаак Ньютон (1642-1727)

Будь-яке тіло зберігає свій стан спокою або прямолінійного і рівномірного руху, доки дія на нього зі сторони інших тіл не змусить його змінити цей стан.

Система відліку, в якій виконується перший закон Ньютона називається *інерціальною*. Якщо в системі відліку перший закон Ньютона не виконується, то, відповідно, вона називається *неінерціальною*. По суті, перший закон Ньютона стверджує, що в природі існують інерціальні системи відліку. Такі системи перебувають в стані спокою або рухаються рівномірно і прямолінійно. Найбільш наближається до інерціальної системи відліку система, в якій тіло відліку є Сонце, а осі координат напрямлені на віддалені зорі (геліоцентрична система відліку).

Якщо ж систему відліку пов’язати із Землею, то вона, строго кажучи, не буде інерціальною, оскільки Земля рухається навколо Сонця і навколо своєї осі, а отже рухається із прискоренням. В зв’язку з цим вище сказану систему відліку не можна вважати інерціальною. Однак, в багатьох випадках цими рухами можна нехтувати і таку систему відліку вважають інерціальною.

Сила. Маса. Другий закон Ньютона

До Галілея вважали, що рух тіл зумовлений дією на них інших тіл з певною силою. Галілей, на основі експериментів показав, що не швидкість, а зміна швидкості тіла має певну причину і саме з цим він пов’язав поняття сили. З досліду відомо, що тіла змінюють свою швидкість в тому випадку, коли на них діють інші тіла. Крім того дія одного тіла на інше може спричинити деформацію останнього. Величина, що характеризує ці явища, є силою. Отже, *сила* – це фізична величина,

[5] Частіше всього під тілом розуміють *абсолютно тверде тіло* – система матеріальних точок, відстань між якими в процесі руху або взаємодії не змінюється, або це тіло, деформацією якого можна знехтувати.

що характеризується дією одного тіла на інше, внаслідок чого останнє може змінювати свою швидкість або деформуватись. Сила є векторною величиною, тобто це векторна кількісна характеристика взаємодії тіл.

Якщо на дану матеріальні точку діє кілька тіл, то як показують експерименти, їхня дія є незалежною і сила зумовлена дією цих тіл, рівна геометричній або векторній сумі сил, створених кожним тілом окремо:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \qquad (1.27)$$

Велична сили визначається по величині деформації або прискорення, яке отримує тіло при взаємодії. На практиці найчастіше силу вимірюють за допомогою пружини, розміщуючи біля незакріпленого кінця пружини шкалу. По її розтягу можна визначити значення діючої сили.

Як показує дослід, під дією одної і тої ж сили різні тіла набувають різних прискорень, але якщо взяти окреме тіло, то відношення діючої на нього сили до прискорення тіла є величина стала. Якщо ж з двох тіл під дією одної і тої ж сили одне набуває меншого прискорення, то кажуть, що воно є більш інертним. Кількісною характеристикою інертності тіл є *маса*. За одиницю маси в СІ (система інтернаціональна) беруть 1 кг.

З експерименту відомо, що прискорення, якого набуває тіло, прямо пропорційне діючій на нього силі і обернено пропорційне масі цього тіла:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \qquad (1.60)$$

Це і є математичний запис другого закону Ньютона, який також можна записати у вигляді:

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}. \qquad (1.61)$$

Якщо на тіло діє не одна, а кілька сил, то другий закон Ньютона можна сформулювати так:

Прискорення, якого набуває тіло прямо пропорційне рівнодійній сил, що діють на тіло і обернено пропорційне масі цього тіла:

$$\vec{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i}{m} \qquad (1.62)$$

З другого закону Ньютона випливає, що якщо виконується рівність $\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i = 0$, то $\vec{a} = 0$. Тобто якщо на тіло не діють ніякі сили, або дія цих сил компенсується, то тіло знаходиться в стані спокою або рівномірного і прямолінійного руху.

Може виникнути враження, що перший закон Ньютона є наслідком другого. Проте, перший закон Ньютона має глибоке самостійне значення тому, що він передбачає існування інерціальної системи відліку, в якій виконується другий закон Ньютона. З цього випливає фундаментальна властивість тіл – *інертність* (здатність зберігати тілом свій стан спокою або рівномірного і прямолінійного руху, коли на нього не діють інші тіла або поля або їхня дія компенсується).

Дуже часто в повсякденному житті поняття сили, маси та ваги переплітаються. Важливо памятати що, взагалі кажучи, це є три різні фізичні величини. Вага – це також сила, але це не абстрактна сила взаємодії, а сила, з якою тіло тисне на опору чи вертикальний підвіс. Як і будь-яка інша сила вага вимірюється в ньютонах і має напрямок, на відміну від маси, яка є скалярною величиною. Крім того з поняттям ваги тісно повязані такі стани як перевантаження, недовантаження і невагомість. Перші два стани тіла відповідають ситуації, коли його вага стає більшою і меншою, відповідно, ніж його вага в стаціонарному стані ($m\vec{g}$). Такі стани людина регулярно відчуває коли користується ліфтом в момент старту, в момент зльоту літака тощо. Невагомість – це стан в якому на тіло діє лише сила тяжіння. Важливо розуміти, що вага тіла при згаданих станах змінюється, а маса – ні.

Третій закон Ньютона.

В другому законі Ньютона йшла мова про сили, що діють на дане тіло. Але, сила характеризує взаємодію принаймні двох тіл. Роль другого тіла в динамічних явищах відображена в третьому законі Ньютона:

Два тіла взаємодіють між собою із силами, які направлені вздовж однієї прямої, рівними за модулем і протилежними за напрямком:

$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1} \tag{1.63}$$

Необхідно пам’ятати, що в третьому законі Ньютона мова йде про сили, прикладені до різних тіл, тому не можна говорити про рівнодійну цих сил.

Що ж стосується умов виконання всіх трьох законів Ньютона, то слід зазначити, що вони виконуються тільки в нерелятивіському випадку, тобто тоді, коли тіла рухаються повільно (мається на увазі те, що їхня швидкість має бути малою, в порівнянні із швидкістю світла – $c = 3 \cdot 10^8 \frac{м}{с}$).

Сили тертя

Сили тертя виникають при контактній взаємодії тіл. Розрізняють зовнішнє тертя і внутрішнє. Сили зовнішнього тертя виникають між поверхнями двох твердих тіл, які дотикаються. Якщо сила тертя виникає між частинками однієї і тієї ж речовини, то вона називається силою внутрішнього тертя.

Якщо між поверхнями тіл, що дотикаються, немає ніякого прошарку то таке тертя називають сухим. А тертя між поверхнею твердого тіла і рідиною або газом або між шарами рідини або газу називається в'язким тертям.

Сухе тертя в свою чергу поділяється на тертя ковзання і тертя кочення. Сили тертя завжди напрямлені по дотичних до тертьових поверхонь і напрямлені проти відносної швидкості цих поверхонь. Це означає, що сила тертя завжди прикладена до обох тертьових поверхонь, але в протилежні сторони. Сухе тертя між поверхнями може виникати не тільки при відносному русі двох тіл, а й при намаганні викликати цей рух.

Наприклад, для того щоб зрушити з місця масивне тіло потрібно прикласти достатньо велику силу. Якщо ця сила недостатня, то тіло буде знаходитись в спокої. Але між поверхнею цього тіла і поверхнею, на якій воно знаходиться, виникне сила тертя, яка називається *силою тертя спокою*.

Якщо зовнішня сила досягне певного значення, то тіло починає ковзати. Сила тертя, рівна по величині зовнішній силі, при якій тіло починає ковзати, називається *максимальною силою тертя спокою* (рис. 1.23[6]).

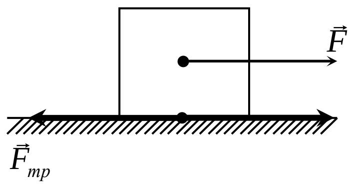


Рис. 1.23

Як показує експеримент, максимальна сила тертя спокою пропорційна силі нормального тиску, тобто силі, яка перпендикулярна до поверхні дотичних тіл і притискає ці поверхні одна до одної. Крім того, вона залежить від матеріалу, з якого виготовлені тіла і від способу обробки поверхонь:

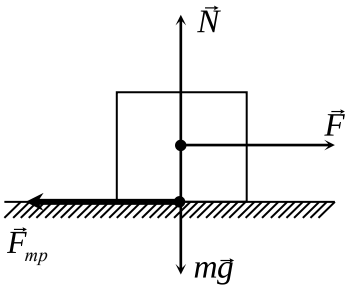


Рис. 1.24

$$F_{тр} = \mu N, \tag{1.64}$$

[6] Насправді точка прикладання сили тертя знаходиться на межі поділу тіло-поверхня, як показано на рис. 1.8, а точка прикладання зовнішньої діючої сили – центр мас тіла. На практиці, якщо розміри тіла не великі, цією різницею нехтують і усі сили відкладають від центру мас тіла.

де μ — коефіцієнт пропорційності, який називається *коефіцієнтом тертя,* N — *сила реакції опори*, яка за ІІІ законом Ньютона по модулю рівна силі нормального тиску (рис. 1.24).

Сили тертя пояснюють взаємодію між нерівностями поверхонь, що дотикаються. Ці нерівності “чіпляються” між собою. У випадку, якщо поверхні оброблені дуже якісно, то сила тертя виникає внаслідок взаємодії між атомами, що знаходяться на цих поверхнях. Якщо зовнішня сила досягне значення, рівного значенню максимального тертя спокою, то тіло починає ковзати по поверхні, але сила тертя при цьому не зникає і вона називається в цьому випадку силою тертя ковзання. Сила тертя ковзання залежить також від природи і способу обробки поверхні. Але вона також залежить і від відносної швидкості тертьових поверхонь. Найбільш характерний вид цієї залежності такий (рис. 1.25).

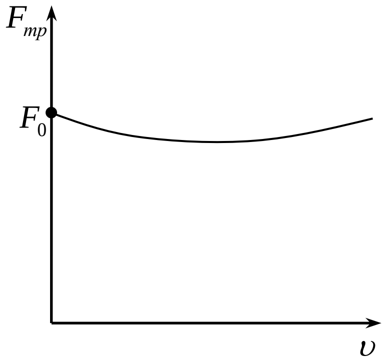


Рис. 1.25

На практиці часто приймають, що сила тертя ковзання не залежить від швидкості і дорівнює максимальному значенню сили тертя спокою. Слід відзначити, що сила, яка необхідна для того щоб зрушити тіло з місця трішки більша за силу, яка необхідна для того щоб підтримувати стан руху тіла. Через це для більш точних розрахунків вводять поняття коефіцієнт тертя спокою, який завжди більший за коефіцієнт тертя ковзання для одних і тих же поверхонь за інших однакових умов.

У випадку, якщо одне тіло котиться по поверхні іншого, то виникає сила тертя кочення. Формулу, за допомогою якої можна визначити тертя кочення, дослідним шляхом встановив Ньютон. Він показав, що сила тертя кочення пропорційна силі нормального тиску і обернено пропорційна радіусу тіла:

$$F_{тр} = \mu_k \frac{N}{R}, \qquad (1.65)$$

де μ_k — *коефіцієнт тертя кочення*.

Як видно із залежності, коефіцієнт тертя кочення має розмірність довжини, він не залежить від швидкості кочення і радіуса тіла, а залежить від матеріалу і стану поверхні тіл.

Експеримент показує, що сила тертя кочення при тих же умовах завжди менша від сили тертя ковзання. Сили тертя відіграють надзвичайно важливу роль в природі, а також в житті і практичній діяльності людини. Завдяки силі тертя ми можемо ходити по поверхні Землі. Вона буває корисною і шкідливою.

При русі тіл в рідині або газі також виникає сила тертя. Можна вважати, що для невеликих швидкостей сила тертя пропорційна швидкості тіла:

$$F_{тр} = k_1 \upsilon, \tag{1.66}$$

де k_1 – *коефіцієнт в'язкого тертя* або *коефіцієнт в'язкості*. Він залежить від розмірів, форми і стану поверхні тіла, а також властивостей рідини або газу, в якому рухається тіло.

На відміну від сухого, в'язке тертя характерне тим, що в цьому випадку не існує сили тертя спокою. Сила в'язкого тертя стає рівною нулю одночасно із швидкістю. При збільшенні швидкості, сила тертя починає залежати нелінійно від швидкості і для певних швидкостей вона пропорційна квадрату швидкості:

$$F_{тр} = k_2 \upsilon^2, \tag{1.67}$$

а при ще більших швидкостях пропорційна кубу швидкості:

$$F_{тр} = k_3 \upsilon^3. \tag{1.68}$$

Зрозуміло, що межа між малими швидкостями та великими є умовною, так само як і між великими та дуже великими. Під малими швидкостями слід розуміти швидкості до кількох десятків кілометрів за годину.

Сили пружності. Закон Гука.

Всі тверді тіла під дією зовнішньої сили деформуються. Якщо після припинення дії сили деформація тіла повністю зникає, і тіло повністю відновлює свою форму то такі тіла називають *абсолютно пружними*, а саму деформацію *пружною*. Якщо форма тіла не відновлюється, то такі тіла називають *непружними* або *пластичними*.

Роберт Гук (1635-1703)

В природі існує багато твердих тіл, які при невеликих деформаціях можна вважати абсолютно пружними (метали, каучук, гума), але є і тіла (сира глина, віск, пластилін), які при малих деформаціях поводять себе як пластичні тіла.

В природі існує цілий ряд різних видів деформацій: односторонній або векторний стиск або розтяг, згин, зсув, кручення та інші.

При будь-якій деформації виникають сили, які залежать як від величини так і від типу деформації. Ці сили називаються *силами пружності*. Найзручніше деформацію тіл вивчати на прикладі тонкого стержня, виготовленого із пружного матеріалу, один кінець якого закріплено (рис. 1.26).

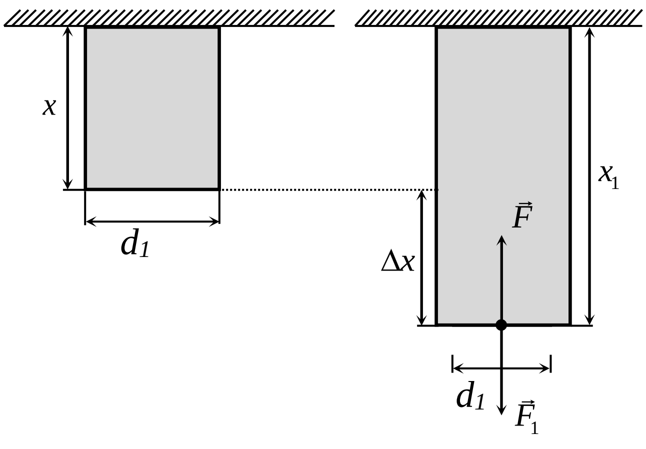


Рис. 1.26

Якщо до незакріпленого кінця прикласти силу F_1, то він видовжиться під дією цієї сили, а величина $\Delta x = x_1 - x$ називається *абсолютним видовженням стержня*. Величина $\varepsilon = \frac{\Delta x}{x}$ називається *відносним видовженням* стержня.

Ці величини характеризують деформацію тіл. В розтягнутому стержні виникає сила пружності F, яка за третім законом Ньютона $\vec{F} = -\vec{F}_1$.

Фізична величина, яка визначається із співвідношення:

$$\sigma = \frac{F}{S} \tag{1.34}$$

називається *механічною напругою*, де F- сила, що діє на стержень, S — площа поперечного перерізу стержня. З формули (1.34) видно, що одиниці вимірювання механічної напруги в СІ це $\frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$.

Як показують експерименти, для невеликих деформацій:

$$\sigma = -E\varepsilon, \tag{1.35}$$

Томас Юнг (1773-1829)

тобто механічна напруга пропорційна видовженню, де E — коефіцієнт пропорційності, який називається *модуль Юнга*. Даний вираз можна записати так:

$$\frac{F}{S} = -E\frac{\Delta x}{x}, \tag{1.36}$$

$$F = -E\frac{S}{x}\Delta x, \tag{1.37}$$

Позначимо:

$$k = E\frac{S}{x}, \tag{1.38}$$

Отже:

$$F = -k\Delta x,$$

а закон Гука можна сформулювати так:

Для малих деформацій сила пружності пропорційна величині деформації і напрямлена в сторону, протилежну до зміщення частинок деформованого тіла

$$F = -k\Delta x \qquad (1.38)$$

Як випливає з закону при ε=1 $\sigma = E$, тобто модуль Юнга чисельно дорівнює механічній напрузі при відносній деформації, рівній одиниці. Він характеризує пружні властивості різних тіл і дається в таблицях. Одиниці вимірювання модуля Юнга: $\left[\frac{Н}{м^2}\right] = [Па]$. Формули (1.38) та (1.35) вважають математичним записом закону Гука.

Як показує експеримент, при поздовжній деформації змінюються також поперечні розміри тіл. Величина:

$$\varepsilon_n = \frac{\Delta d}{d}, \qquad (1.39)$$

де d — діаметр стержня, $\Delta d = d_1 - d$ - зміна цього діаметра при деформації, називається *відносним поперечним розтягом або стиском*. Для багатьох матеріалів відношення коефіцієнта поперечної деформації до відносної поздовжньої деформації $\frac{\Delta x}{x}$ є величина стала.

Величина:

$$\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon} = \mu \qquad (1.40)$$

називається *коефіцієнтом Пуассона* або модуль поперечного розтягу або стиску. Коефіцієнт Пуассона поряд з модулем Юнга є важливою характеристикою пружних властивостей твердих тіл.

Сімеон-Дені Пуассон (1781-1840)

Пружні властивості реальних тіл

Закон Гука виконується лише для малих деформацій. Якщо деформація тіла перевищує певну межу, то його властивості будуть відрізнятись від властивостей пружних тіл.

Пружні властивості реальних тіл зручно розглядати на графіку, на якому вказано залежність механічної напруги, що виникає в тілі, від величини відносної деформації. Характерний вигляд цієї залежності для деформації розтягу показано на рис. 1.27. Як видно з цієї залежності пряма пропорційність між σ і ε спостерігається до певного значення напруги σ_1, яка називається межею пропорційності. Але пружні властивості тіл можуть зберігатись і для більших напруг, аж до напруги σ_2, яка називається *межею пружності*. Це означає що при всіх деформаціях, які викликають механічні напруження менші за σ_2, після припинення дії сили деформація зникає. При більших деформаціях в тілі залишається залишкова деформація навіть після припинення дії зовнішньої сили. Напруга σ_3 називається *межею текучості*. Ділянка CD називається *областю текучості*. Вона характерна тим, що при збільшенні деформації механічна напруга майже не змінюється. При деформаціях більших за ε_4 механічна напруга може зростати до величини σ_4, яка називається межею міцності матеріалу. При деформаціях більших за ε_5 механічна напруга починає швидко падати і матеріал руйнується.

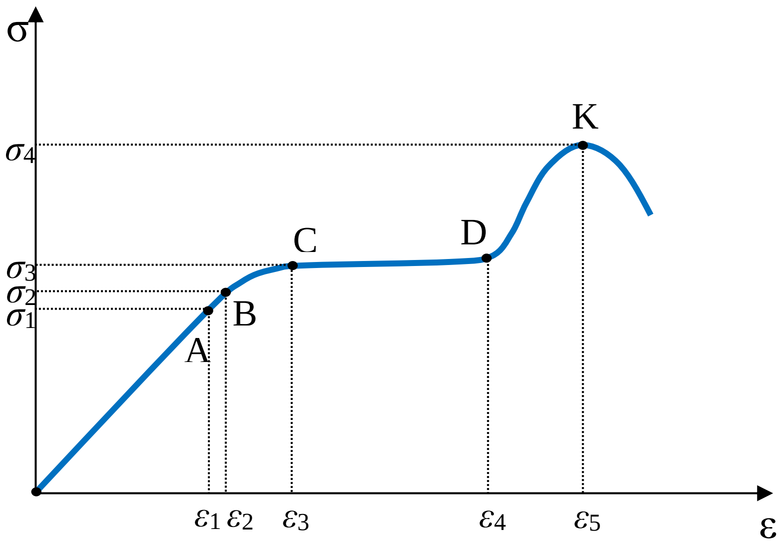


Рис. 1.27

Пружні властивості реальних тіл залежать від температури, тиску, часу дії зовнішньої сили і ряду інших факторів. Зокрема тверді тіла мають складну залежність деформації від часу. Якщо взяти реальне тіло і розтягувати його до межі текучості, то залежність $\sigma(\varepsilon)$ буде зростати по кривій OA (рис. 1.28). Якщо після цього зменшувати зовнішню силу, то залежність $\sigma(\varepsilon)$ буде зменшуватись по кривій AB, яка знаходиться нижче ніж крива OA. І при $\sigma=0$ тіло буде мати деяку залишкову деформацію. Для того щоб її зняти потрібно прикласти силу протилежного напрямку (стиснути). В точці C тіло буде недеформоване, але в ньому буде існувати механічна напруга. Якщо його далі продовжувати

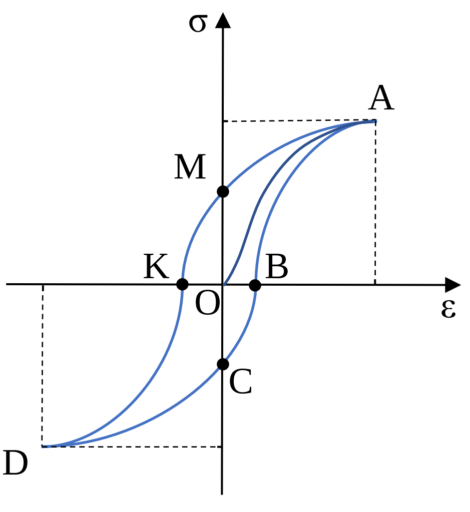


Рис. 1.28

стискувати, до межі текучоті (т. D), то залежність *σ(ε)* йде по кривій CD. Зменшуючи зовнішню силу до нуля, і після цього збільшуючи її, змінивши напрям на протилежний, ми отримаємо залежність *σ(ε)*, яка описується кривою DKMA. Отже залежність *σ(ε)* описується замкнутою кривою ABCDKMA, яка називається петлею пружного гістерезису. Площа петлі гістерезису пропорційна пружній енергії, що виділяється в тілі при періодичній повторіюваності деформації.

Закон Всесвітнього тяжіння

Встановлені Кеплером закони руху планет дали можливість Ньютону сформулювати відомий закон всесвітнього тяжіння на основі припущення про те, що всі тіла мають здатність притягуватись одне до одного.

Сила взаємного притягання двох матеріальних точок прямо пропорційна добутку їх мас і обернено пропорційна квадрату відстані між ними. Ця сила напрямлена вздовж прямої, що з'єднує ці матеріальні точки:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r_{1,2}^2} \tag{1.41}$$

Якщо тіла не точкові, то для того щоб знайти силу притягання між ними на основі загальної теорії відносності необхідно розбити їх на достатньо малі частинки так, щоб їх можна було б вважати матеріальними точками, знайти силу притягання між ними і результати просумувати. Перевірку свого закону Ньютон здійснив порівнюючи прискорення Місяця з прискоренням тіл на поверхні Землі. На основі цього закону йому вдалося пояснити рух комет, припливи та відпливи, дати наукове обґрунтування законів Кеплера. Цей закон Ньютон опублікував через 16 років після встановлення, після того як йому вдалося, використовуючи методи інтегрального числення, визначити силу притягання між тонкою сферичною оболонкою і матеріальною точкою, що знаходиться поза нею.

Виявляється, що сферична маса *M* притягує матеріальну точку маси *m* так ніби вся її маса знаходиться в центрі сфери:

$$F = G\frac{Mm}{r^2} \tag{1.42}$$

де *r* – відстань між матеріальною точкою та центром сфери.

З цього результату також випливає, що дві кулі притягуються так як дві матеріальні точки, маси яких рівна масам куль і які розташовані в центрах цих куль (рис. 1.29).

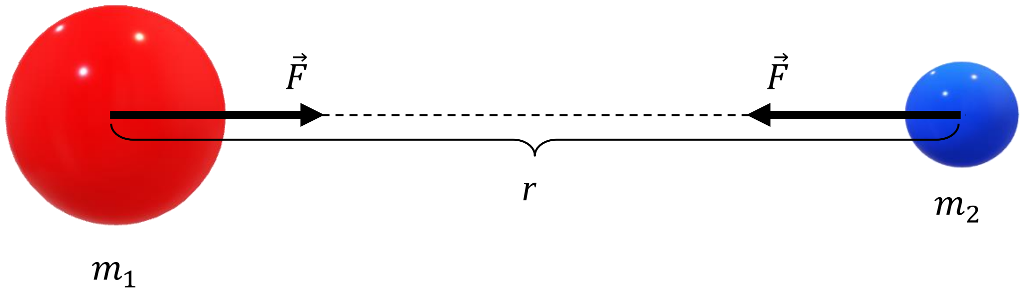


Рис. 1.29

Інертна та гравітаційна маси.

Як ми знаємо, масу тіл можна визначити з другого закону Ньютона. Визначена таким чином маса називається *інертною*, вона є мірою інертності тіл. Масу цього ж тіла можна визначити із закону всесвітнього тяжіння, вимірюючи силу притягання між тілами:

$$m = \frac{Fr^2}{GM} \tag{1.43}$$

Ге́нрі Ка́вендіш (1731-1810)

Визначена таким чином маса називається *гравітаційною*. Тобто гравітаційна маса є кількісною мірою гравітації або здатності тіл притягуватись одне до одного. Як показуються експерименти інертна маса дорівнює гравітаційній, але не тотожна їй.

Оскільки в законі всесвітнього тяжіння всі величини мають розмірність, то і гравітаційна стала *G* має розмірність також. Якщо взяти дві точкові маси по 1 кг і розмістити їх на відстані 1 м, то сила притягання між такими тілами буде чисельно рівня константі *G*. За сучасними даними $G=(6{,}6726\pm0{,}0005)\cdot10^{-11}\ \frac{Нм^2}{кг^2}$. Перше значення цієї сталої отримав Ньютон, визначаючи силу притягання тіл на поверхні Землі до Землі, а перші прямі вимірювання гравітаційної сталої провів *Генрі Кавендіш*.

Поле тяжіння. Принцип суперпозиції.

В законі всесвітнього тяжіння говориться, що тіла взаємодіють одне з одним із силою притягання, але нічого не сказано про природу цієї сили. До початку XX століття вважалось, що взаємодія між тілами передається миттєво. За сучасними поглядами взаємодія між тілами відбувається через особливий вид матерії – силове поле. Силове поле, яке передає гравітаційну взаємодію називається гравітаційним полем. Тобто якщо два точкових тіла масою m_1 та m_2 взаємодіють із силою, яка виражена формулою (1.41), то це означає, що тіло масою m_1 створює навколо себе гравітаційне поле і це поле діє на тіло масою m_2 із силою *F*, а тіло масою m_2 також, в свою чергу, створює гравітаційне поле, яке діє на тіло масою m_1 із силою F. Поле, як і речовина, є способом існування матерії.

Гравітаційне поле можна виявити, якщо в точку простору, де воно існує помістити точкове тіло маси m. Тоді збоку поля на це тіло буде діяти якась сила. Якщо збільшувати масу тіла, то збільшиться і величина сили, але відношення сили до маси залишається сталим. Отже це співвідношення буде характеризувати гравітаційне поле в даній точці простору. Фізична величина, яка дорівнює відношенню сили, що діє збоку гравітаційного поля на матеріальну точку до її маси, називається *напруженістю* гравітаційного поля або напруженістю поля тяжіння:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{m} \tag{1.44}$$

Із закону всесвітнього тяжіння випливає, що напрямок гравітаційного поля точкового тіла масою m можна визначити із співвідношення:

$$\vec{E} = G\frac{m}{r^3}\vec{r} \tag{1.45}$$

де $\vec{r}$ - радіус-вектор, проведений з місця знаходження тіла в точку простору, де визначається напруженість. Таким чином, напруженість – це силова векторна характеристика гравітаційного поля.

Як ми знаємо, поблизу поверхні Землі сила притягання, що діє збоку Землі на точку:

$$\vec{F} = m\vec{g} \tag{1.46}$$

Але із закону всесвітнього тяжіння:

$$\vec{F} = G\frac{M_З m}{R_З^3} \cdot \vec{R}_З, \tag{1.47}$$

де $M_З$ та $R_З$ – маса та радіус Землі, відповідно.

Прирівнюючи праві частини двох останніх рівнянь, отримаємо:

$$\vec{g} = G\frac{M_З}{R_З^3} \cdot \vec{R}_З \tag{1.48}$$

А порівнюючи (1.48) із (1.45), легко бачити, що $\vec{g} = \vec{E}$.

Тобто, поблизу поверхні напруженість гравітаційного поля Землі рівна прискоренню вільного падіння. Геометрично гравітаційне поле можна зобразити за допомогою силових ліній напруженості цього поля. Під силовими лініями напруженості розуміють лінії, дотична до яких в кожній точці простору співпадає з напрямком вектора напруженості. В ньютонівській механіці для гравітаційного полів виконується принцип суперпозиції:

Напруженість гравітаційного поля системи точкових тіл дорівнює векторній сумі напруженостей полів, створених крожним тілом окремо:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E_i} \quad (1.49)$$

Слід відмітити, що гравітаційне поле проникає в середину будь-якого тіла, і його нічим не можна екранувати. Поширюється гравітаційне поле із швидкістю світла (c=$3\cdot10^8\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$) за допомогою гравітаційних хвиль, існування яких передбичив Альберт Айнштайн в рамках загальної теорії відносності. У 2017 році за вирішальний внесок в спостереження гравітаційних хвиль була присуджена Нобелівська премія Райнеру Вайссу (США), Беррі Берішу(США) і Кіпові Торну (США).

Лекція 3. Елементи механіки твердого тіла

Імпульс. Закон збереження імпульсу

Як відомо за II законом Ньютона: $\vec{F} = m\vec{a}$, але $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, тоді:

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{1.50}$$

Фізична величина, що визначається з співвідношення:

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{1.51}$$

називається *імпульсом тіла*. Це векторна величина, напрям її співпадає з напрямом вектора швидкості. Одиниці вимірювання - $\left[\frac{кг\cdot м}{с}\right]$.

Виходячи з означення імпульсу II закон Ньютона можна записати так:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Дана рівність є більш загальною формою запису II закону Ньютона, оскільки в цьому випадку II закон Ньютона виконується і для тіл змінної маси.

Розглянемо систему з N взаємодіючих матеріальних точок. Для кожної точки цієї системи виконується II закон Ньютона:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} + \dots + \vec{F}_{1,\mathrm{N}} + \vec{F}_1 \\ \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{2,3} + \dots + \vec{F}_{2,\mathrm{N}} + \vec{F}_2 \\ \frac{d\vec{p}_N}{dt} = \vec{F}_{N,1} + \vec{F}_{N,2} + \dots + \vec{F}_{N,N-1} + \vec{F}_N \end{array}\right\}, \tag{1.52}$$

де p_i- імпульс i- тої матеріальної точки, F_{ik}- сила, що діє з боку k- тої матеріальної точки на i- ту – це є внутрішні сили даної системи, $\vec{F}_i$- зовнішня сила, що діє на i-ту матеріальну точку.

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{ik} + \vec{F}_i \tag{1.53}$$

Просумуємо ліві і праві частини рівностей:

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{d\vec{p}_j}{dt} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N} \vec{F}_{ji} + \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j, \tag{1.54}$$

Згідно III закону Ньютона $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$, тоді:

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{j} \vec{F}_{ji} = 0, \tag{1.55}$$

і отже:

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{d\vec{p}_j}{dt} = \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j \tag{1.56}$$

Якщо на матеріальні точки даної системи не діють зовнішні тіла, або поля, а вони взаємодіють тільки між собою всередині системи, то така система називається *замкнутою*.

$$\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j = 0$$

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \dots + \frac{d\vec{p}_N}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_N) = \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \tag{1.57}$$

де $\vec{p} = \vec{p}_1 + \dots + \vec{p}_N$- загальний імпульс замкнутої системи матеріальних точок.

Отже для замкнутої системи можна сформулювати закон збереження імпульсу:

Імпульс замкнутої системи матеріальних точок є величиною сталою

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \dots + \vec{p}_N = const \tag{1.58}$$

Закон збереження імпульсу є одним із фундаментальних законів природи. Він виконується в будь-якому випадку і виражає одну із фундаментальних симетрій простору, а саме однорідність простору або трансляційну симетрію. Якщо сума проекцій зовнішніх сил, що діють на дану систему на одну із координатних осей рівна нулю, то закон збереження імпульсу буде виконуватись в проекції на цю координатну вісь.

Реактивний рух

В класичній механіці під рухом тіл змінної маси розуміють такий рух, коли маса тіла змінюється за рахунок зміни кількості речовини цього тіла, а його швидкість мала, порівняно із швидкістю світла.

Найбільш типовим прикладом цього руху є рух ракет. Принцип дії ракет дуже простий. Продукти згорання палива викидаються з великою швидкістю з ракети, діючи на неї з певною силою і надаючи їй певного прискорення. При цьому швидкість ракети збільшується, а її маса зменшується, за рахунок зменшення маси палива, що згорає.

Знайдемо рівняння руху ракети. Нехай в момент часу t маса ракети була m, а швидкість - $\vec{v}$, отже імпульс: $m\vec{v}$.

В момент часу $t+dt$ маса ракети m-dm, а швидкість - $\vec{v}+d\vec{v}$, імпульс $(m-dm)(\vec{v}+d\vec{v})$. Тоді з рівняння $d\vec{p}=\vec{F}dt$ ми отримаємо:

$$(m-dm)(v+dv)+dm\vec{v}_{палива}-m\vec{v}=\vec{F}dt \quad (1.59)$$

де $dm\vec{v}_{палива}$- імпульс продуктів згорання палива, dm - маса палива, що згорає за час dt, $\vec{F}$ - рівнодійна всіх сил, що діють на ракету.

Розкриємо дужки:

$$m\vec{v}+md\vec{v}-dm\vec{v}-dmd\vec{v}+dm\vec{v}_{палива}-m\vec{v}=\vec{F}dt$$
$$md\vec{v}-dm\vec{v}-dmd\vec{v}+dm\vec{v}_{палива}=\vec{F}dt \quad (1.60)$$

За законами додавання швидкостей: $\vec{v}_{палива}=\vec{u}+\vec{v}$, де $\vec{u}$- швидкість палива відносно ракети, $\vec{v}$- швидкість ракети відносно землі.

$$md\vec{v}-dm\vec{v}+dm\vec{u}+dm\vec{v}=\vec{F}dt$$
$$md\vec{v}+dm\vec{u}=\vec{F}dt \quad (1.61)$$

Ділимо на dt і отримуємо рівняння руху ракети, або *рівняння Мещерського*:

$$\boxed{m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}-\frac{dm}{dt}\vec{u}} \quad (1.62)$$

Величина $\mu=\frac{dm}{dt}$ називається масою палива, що згорає за одиницю часу.

$$m\frac{dv}{dt}=\vec{F}-\mu u, \quad (1.63)$$

де $\vec{F}' = -\mu\vec{u}$- називається *реактивною силою*.

Розглянемо випадок коли $\vec{F} = 0$, тоді з рівняння Мещерського:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -u\frac{dm}{dt} \tag{1.64}$$

Позначимо $-u\frac{dm}{dt} = \Phi_R$. Рівняння Мещерського є II законом Ньютона для руху тіл змінної маси:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\Phi}_R + \vec{F} \tag{1.65}$$

Рух ракети в безповітряному просторі без дії зовнішніх сил:

$$m\frac{dv}{dt} = -u\frac{dm}{m};, \tag{1.66}$$

$$v = u\ln\left(\frac{m_0}{m}\right) + C \tag{1.67}$$

при $t = 0 \quad m = m_0$ отже $C = v_0$. Отримуємо рівняння для швидкості руху ракети, або рівняння Ціолковського:

$$\boxed{v = v_0 + u\ln\left(\frac{m_0}{m}\right)} \tag{1.68}$$

Швидкість ракети (кінцева) визначається тільки відносною швидкістю витікання продуктів згорання та логарифмом відношення початкової та кінцевої маси.

Швидкість, необхідна для подолання тілом сили тяжіння, внаслідок чого це тіло стане штучним супутником Землі, називається *першою космічною швидкістю* та становить $v_1 = 7{,}8\frac{км}{с}$. Швидкість, необхідна для того щоб тіло вийшло на навколосонячну орбіту називається *другою космічною швидкістю* та становить $v_2 = 11{,}2\frac{км}{с}$. Для того щоб тіло назавжди покинуло Сонячну систему, йому необхідно надати *третю космічну швидкість*: $v_3 = 13{,}5\frac{км}{с}$.

Момент імпульсу. Закон збереження моменту імпульсу

Розглянемо рух матеріальної точки масою m під дією сил, рівнодійна яких рівна *F*. За II законом Ньютона:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F};$$
$$md\vec{v}=\vec{F}dt \tag{1.69}$$

Назвемо *моментом імпульсу* матеріальної точки векторний добуток її радіус-вектора на імпульс:

$$[\vec{r}\cdot\vec{p}]=[\vec{r}m\vec{v}]=\vec{L} \tag{1.70}$$

Знайдемо похідну:

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d}{dt}[\vec{r}m\vec{v}]=m\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\vec{v}\right]+m\left[\vec{r}\frac{d\vec{v}}{dt}\right]=\left[\vec{r}\frac{d\vec{p}}{dt}\right]=\left[\vec{r}\vec{F}\right] \tag{1.71}$$

Моментом сили відносно даної точки називають векторний добуток радіус-вектора на силу. Тобто:

$$\vec{M}=\left[\vec{r}\vec{F}\right] \tag{1.72}$$

Підставивши в (1.56) ми отримаємо теорему про зміну моменту імпульсу матеріальної точки:

Похідна від моменту імпульсу матеріальної точки по часу дорівнює сумі моментів всіх сил, прикладених до цієї матеріальної точки, тобто:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}} \tag{1.73}$$

Якщо $\vec{M}_{зовн}=0$, то:

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=0;\vec{L}=const$$

Це означає, що момент імпульсу матеріальної точки є сталим, якщо сума моментів всіх сил, прикладених до цієї матеріальної точки дорівнює нулю. Враховуючи це, закон збереження моменту імпульсу можна сформулювати так:

У замкнутій системі сумарний момент імпульсу всіх тіл системи є величиною сталою:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = const \tag{1.74}$$

Виконання закону збереження моменту імпульсу призводить до того, що обертальний рух певних частин тіла в одну сторону обов'язково має супроводжуватись обертанням інших частин в протилежну сторону. Так, наприклад, гелікоптери обов'язково обладнані малим гвинтом на «хвості» для запобігання обертанню корпусу гелікоптера в протилежну сторону до напрямку обертання гвинта. Ті гелікоптери, які не обладнані таким гвинтом мають два основні гвинти, які обертаються в протилежні сторони. Крім того саме через цей закон змінюється швидкість обертання фігуристів навколо своєї осі при зміні відстані між тулубом і руками – збільшується із зменшенням цієї відстані і зменшується із її збільшенням.

Обертальний рух матеріальної точки відносно нерухомої осі

Якщо тіло обертається відносно нерухомої осі, то кожна його точка рухається по колу відповідного радіуса (рис. 1.29). Розглянемо рух матеріальної точки по колу.

$$|d\vec{r}| = dl \tag{1.75}$$

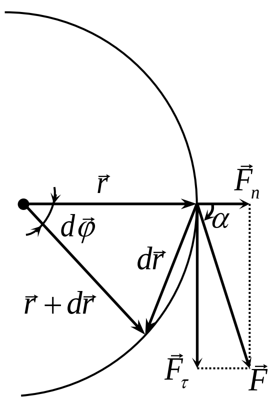


Рис. 1.29

Знайдемо роботу сили F:

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r} = F dr \cos(90 - \alpha) = F \sin\alpha dr$$
$$F sin\alpha = F_\tau;$$
$$\delta A = F_\tau dr$$

Роботу виконує тільки тангенціальна складова сили F:

$$dr = r d\varphi$$
$$\delta A = rF \sin\alpha \cdot d\varphi$$
$$Fr sin\alpha = M (\text{момент сили})$$
$$\delta A = M d\varphi$$
$$A = \int M\, d\varphi, \text{ якщо } M = const \text{ то}$$
$$A = M\Delta\varphi \tag{1.76}$$

Потужність при обертальному русі:

$$P = \frac{\delta A}{\partial t} = M \frac{\partial \varphi}{\partial t} = M\omega \tag{1.77}$$

Для твердого тіла, оскільки для його точок $d\varphi$ є однаковим, то:

$$\delta A = \sum \delta A_i = \sum M_i d\varphi = Md\varphi\,, \tag{1.78}$$

де M — рівнодійна моментів сил, прикладених до однієї точки.

Знайдемо кінетичну енергію матеріальної точки, що обертається навколо нерухомої осі. Як відомо, *кінетична енергія поступального руху*:

$$W_k = \frac{1}{2} m v^2 \tag{1.79}$$

Лінійна швидкість обертального руху із кутовою швидкістю обертального руху пов'язана формулою:

$$v = \omega r.$$

Тому для обертального руху можна записати:

$$W_k = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 \tag{1.80}$$

Величина, що дорівнює добутку маси матеріальної точки на квадрат відстані до осі обертання називається *моментом інерції* матеріальної точки:

$$I = mr^2 \tag{1.81}$$

Відповідно для *кінетичної енергії обертального руху* можна записати:

$$W_k = \frac{1}{2} I \omega^2 \tag{1.82}$$

За теоремою про зміну кінетичної енергії:

$$\delta A = dE_k$$
$$Md\varphi = \partial\left(\frac{1}{2} I \omega^2\right)$$
$$Md\varphi = I\omega d\omega; d\varphi = \omega dt \Rightarrow Mdt = Id\omega$$
$$M = I\frac{d\omega}{dt}$$

$$\boxed{M = I\varepsilon} \tag{1.83}$$

У векторній формі:

$$\boxed{\vec{M} = I\vec{\varepsilon}} \tag{1.84}$$

Це є основне рівняння динаміки для обертального руху або II закон Ньютона для обертального руху.

Для абсолютно твердого тіла, оскільки для нього ω і ε однакові для всіх точок, то:

$$W_k = \sum_{i=1}^{n} W_{k_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{I\omega_i^2}{2} = \frac{1}{2} I\omega^2 \tag{1.85}$$

$$I = \sum_{i=1}^{n} I_i = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \tag{1.86}$$

Моментом інерції твердого тіла називається сума моментів інерцій елементів мас з яких це тіло складається. Аналогічно основне рівняння динаміки обертального руху тіла має вигляд:

$$\boxed{\vec{M} = I\vec{\varepsilon},} \tag{1.87}$$

де $\vec{M}$- рівнодійна моментів всіх сил, прикладених до тіла, I - момент інерції тіла, $\vec{\varepsilon}$- кутове прискорення тіла. Візуально формула (1.87) схожа з формулою (1.84). Проте, фізичні величини, які фігурують у (1.84) відносяться до матеріальної точки, а фізичні величини у (1.87) характеризують властивості твердого тіла.

Для того щоб взнати момент інерції будь якого тіла, необхідно розбити це тіло на матеріальні точки, визначити їхні моменти інерції, а результати скласти. Тобто, в загальному випадку момент інерції визначається із співвідношення:

$$I = \int r^2 dm \tag{1.88}$$

<u>Приклад.</u>

Знайдемо момент інерції стержня довжиною L, масою m відносно осі, що проходить через його центр мас (рис. 1.30). Для цього розділимо стержень на елементи маси dm. Відстань до елемента маси від осі x.

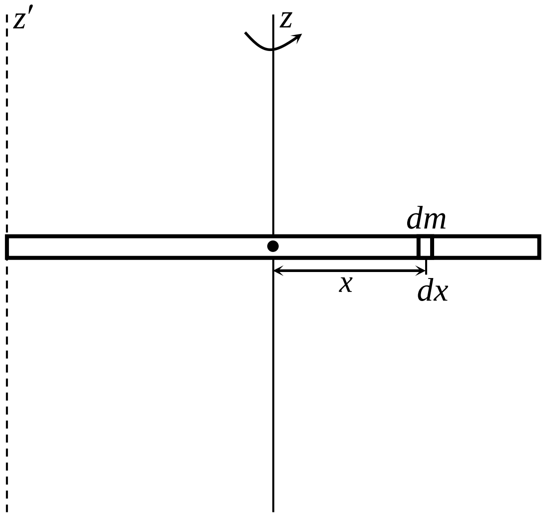


Рис. 1.30

$$W_k = \frac{1}{2}I\omega^2; W_k = \sum W_{k_i}$$

$$dI = dm \cdot x^2$$

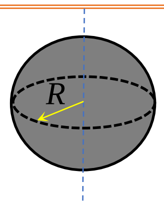
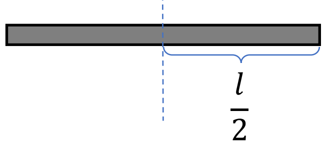
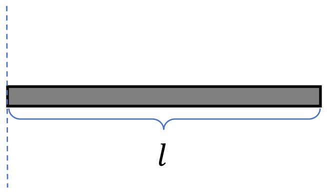
$$dm = \frac{m}{l}dx$$

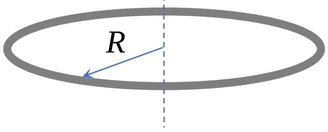
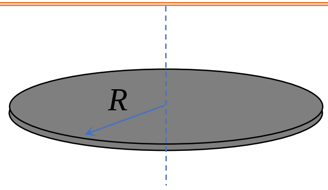
$$dI = \frac{mx^2}{l}dx$$

$$I_z = \int d\,I = \frac{2m}{l}\int_0^{\frac{l}{2}} x^2\,dx = \frac{2m}{l}\frac{l^3}{24} = \frac{1}{12}ml^2$$

$$I_{z\prime} = \frac{m}{l}\int_0^l x^2\,dx = \frac{1}{3}ml^2$$

Аналогічно можна визначити моменти інерції інших тіл. Моменти інерції деяких тіл правильної геометричної форми наведені в таблиці:

Вид тіла	Момент інерції
	$I = \frac{2}{5}mR^2$
	$I = \frac{1}{12}ml^2$
	$I = \frac{1}{3}ml^2$

	$I = mR^2$
	$I = \frac{1}{2}mR^2$

Теорема Штейнера

Нехай нам заданий момент інерції твердого тіла відносно осі, що проходить через центр його мас I_c (рис. 1.31).

Знайдемо момент інерції цього тіла відносно осі S, яка паралельна попередній і віддалена від неї на відстань d. Проведемо через dm площину паралельну XOY:

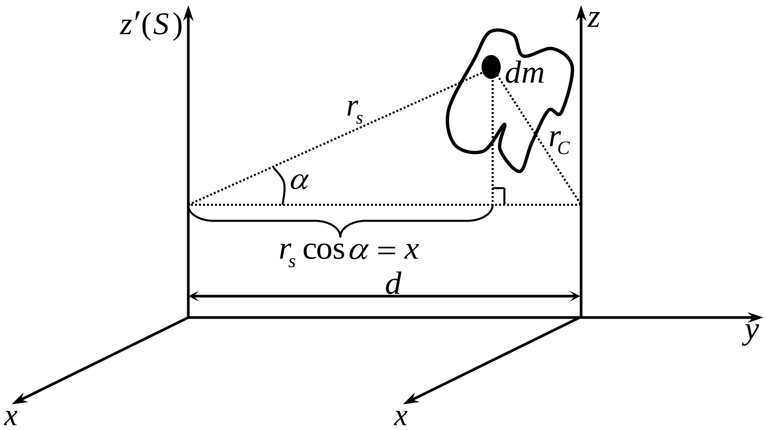


Рис. 1.31

$$r_c^2 = r_s^2 + d^2 - 2r_s d\cos\alpha$$

$$I_c = \int dm\, r_c^2 = \int r_s^2\, dm + \int d^2\, dm - 2\int r_s\, d\cos\alpha dm$$

$I_s = \int r_s^2\, dm$ - момент інерції тіла відносно осі S.

$$\int d^2\, dm = md^2$$

$$2\int r_s\, dm d\cos\alpha = 2d\int xdm = 2dx_c m = 2d^2 m \quad ; \quad (x_c = d; x = r_s\cos\alpha)$$

$$I_c = I_s + md^2 - 2md^2$$

$$\boxed{I_s = I_c + md^2} \qquad (1.89)$$

Отже, момент інерції твердого тіла відносно довільної осі дорівнює сумі моменту інерції цього тіла, що проходить через його центр мас і яка паралельна попередній, і добутку маси тіла на квадрат відстані між осями.

Лекція 4. Робота. Енергія. Потужність

Предметом вивчення природних наук є форми руху матерії. З досліду відомо, що рух може переходити з однієї форми в іншу, але він не знищувальний, оскільки сама матерія знаходиться в безперервному русі. Мірою руху матерії є фізична величина, яка називається *енергією*.

Як показують експерименти при переході руху з однієї форми в іншу зменшення енергії пов'язане з рухом однієї форми і рівне приросту енергії, пов'язаного з рухом іншої форми. Кількість енергії, яка перейшла з однієї форми в іншу дорівнює різниці енергії до переходу і після переходу. Різниця цих енергій, тобто кількість енергій яка перейшла з однієї форми в іншу називається *роботою*.

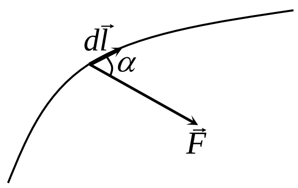


Рис. 1.32

В механіці під роботою сили $\vec{F}$, під дією якої тіло здійснює переміщення $d\vec{l}$ (рис. 1.32) називається фізична величина, яка визначається із співвідношення:

$$\delta A = Fdl\cos(\alpha) = F_l \cdot dl, \quad (1.90)$$

де α — кут між векторами $\vec{F}$і $d\vec{l}$, F_l- проекція вектора $\vec{F}$ на переміщення dl, δA[7] – елементарна робота.

Виходячи з поняття скалярного добутку, елементарну роботу можна визначити за формулою:

$$\delta A = (\vec{F} \cdot d\vec{l}) \quad (1.91)$$

або у скалярному вигляді:

$$A = Fl\cos\alpha \quad (1.92)$$

У випадку якщо тіло рухається по кривій (по криволінійній траєкторії), то для того, щоб знайти роботу сили, що діє на тіло при переміщенні його між двома точками, потрібно цю траєкторію розбити на достатньо малі ділянки, такі, щоб їх можна було вважати прямолінійними, а силу на цих ділянках сталою, знайти роботу на кожній з цих ділянок і результати скласти.

[7] Математично робота не є повним диференціалом. Тому для елементарної роботи використовується позначення δA, а не звичне dA. Так зроблено щоб відтінити те, що δA є просто “малою порцією” роботи, а не її приростом унаслідок зміни іншої величини, від якої величина A функціонально залежить.

На графіку залежності сили F від переміщення l робота буде рівна площі криволінійної трапеції (рис. 1.33). В загальному випадку роботу тіла при переміщенні тіла з т.1 в т.2 знаходять із співвідношення:

$$A = \int_1^2 F_l \, dl = \int_1^2 \vec{F} \, d\vec{l} \tag{1.93}$$

Якщо на тіло діє не одна, а декілька сил, то тоді рівнодійна:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \tag{1.94}$$

і тоді: $F_l = F_{1_l} + F_{2_l}$, а робота:

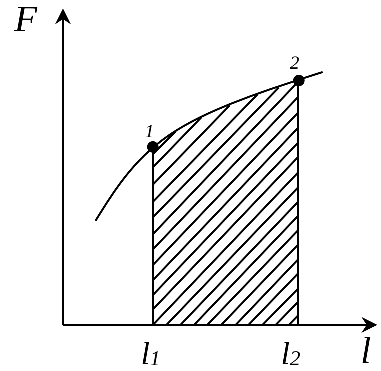


Рис. 1.33

$$A = \int_1^2 F_l \, dl = \int_1^2 \left(F_{1_l} + F_{2_l}\right) dl = \int_1^2 F_{1_l} \, dl + \int_1^2 F_{2_l} \, dl = A_1 + A_2. \tag{1.94}$$

Робота, виконана декількома силами, що діють на дане тіло дорівнює алгебраїчній сумі робіт виконаних кожною силою окремо. Тобто робота є величиною адитивною. В СІ одиницею роботи є 1 Дж = 1 Н · 1 м

Величина:

$$W_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m} \tag{1.95}$$

називається *кінетичною енергією* поступального руху тіла, а співвідношення:

$$A = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = W_{k_2} - W_{k_1} \tag{1.96}$$

називається *теоремою про кінетичну енергію*: **робота сили при переміщенні матеріальної точки дорівнює приросту кінетичної енергії цієї точки**.

Робота, виконана силою гравітаційного тяжіння, не залежить від форми траєкторії, по якій рухається тіло, а визначається тільки початковим і кінцевим положенням тіла. Сили, робота яких не залежить від форми траєкторії по якій рухається тіло, називаються *консервативними*. Якщо залежить, то *неконсервативними* або *дисипативними*. А поля, в яких діють консервативні сили – *потенціальними*. Робота консервативних сил по замкнутому контуру рівна нулю. Це є математичний критерій потенціальності поля консервативних сил:

$$A = \oint_L \delta A = \oint_L \left(\vec{F} d\vec{r}\right) = 0 \tag{1.97}$$

Тобто, **циркуляція вектора сили $\vec{F}$ по довільному замкненому контуру L дорівнює нулю**.

Якщо говорити про потенціальну енергію, то слід перш за все зауважити, що потенціальна енергія є різною і сама по собі не має фізичного змісту, оскільки залежить від початкових умов, тобто умовного нулюового рівня, від якого вона буде відраховуватись. Фізичного змісту набуває саме зміна потенціальної енергії тіла.

Потенціальна енергія – це функція стану величини, яка визначається тільки положенням, диференціал цієї величини дорівнює елементарній роботі з протилежним знаком.

Потенціальна енергія тіла в полі земного тяжіння:

$$W_p = -G\frac{Mm}{r} \tag{1.98}$$

Потенціальна енергія тіла, піднятого на висоту h над нульовим рівнем:

$$W_p = mgh \tag{1.99}$$

Потенціальна енергія стягнутої (розтягнутої) пружини:

$$W_p = \frac{kx^2}{2} \tag{1.100}$$

Крім зазначених типів потенціальних енергій є потенціальна енергія електростатичної взаємодії, яка буде вивчатись в наступній темі та потенціальна енергія сил поверхневого натягу, яка вивчається в розділі термодинаміка.

Закони збереження енергії в механіці

Якщо у механічній системі діють сили тертя або опору, механічна енергія поступово зменшується за рахунок перетворення в інші види енергії (наприклад у теплову). Цей процес називається дисипацією (розсіюванням) енергії. Механічна енергія при цьому не зберігається, а виконується *загальнофізичний закон збереження енергії*:

Енергія не виникає з нічого і не зникає безслідно: вона може тільки передаватись від одних фізичних систем до інших або переходити з одного виду в інший в еквівалентних кількостях.

Якщо ж в системі сили тертя не діють або ж вони настільки малі, що ними нехтують, то виконується *закон збереження механічної енергії*:

У замкненій системі консервативних сил повна механічна енергія є величиною сталою:

$$W_{мех} = W_k + W_p = const \text{ - для матеріальної точки} \tag{1.101}$$

$$W_{мех} = \sum_{i=1}^{N} W_{k_i} + \sum_{i=1}^{N} W_{p_i} = const \text{ - для системи матеріальних точок} \tag{1.102}$$

Формули (1.101) і (1.102) означають, що у замкнутій системі потенціальна енергія може перетворюватись у кінетичну і навпаки, причому вільно переходячи від одного тіла системи до іншого.

Потужність

Одну і ту ж роботу різні сили виконують за різний час. Робота, що виконується за одиницю часу називається *потужність* або *миттєва потужність*. Потужність визначається із співвідношення:

$$P = \frac{\delta A}{dt} \tag{1.103}$$

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{l} \tag{1.104}$$

$$P = \vec{F}\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{F}\vec{v} \tag{1.105}$$

Або у скалярній формі:

$$P = Fv\cos\alpha \tag{1.106}$$

де α – кут між напрямком дії сили і напрямком швидкості тіла. В СІ одиницею потужності є 1 Вт = 1 Дж/1с.

Середня потужність — фізична величина, що визначається відношенням всієї виконаної роботи *A* до часу *Δt*, за який цю роботу було виконано:

$$\langle P \rangle = \frac{A}{\Delta t} \tag{1.107}$$

При обертальному русі матеріальної точки (абсолютно твердого тіла):

$$P = \frac{Md\varphi}{dt} = M\omega, \qquad (1.108)$$

де M — момент діючої сили, ω — миттєва кутова швидкість матеріальної точки (абсолютно твердого тіла).

Абсолютно пружний та непружний удари

Яскравим прикладом застосування законів збереження енергії та імпульсу при розв'язування конкретних задач є удари абсолютно пружних та непружних тіл. *Ударом* називається зіткнення двох або більше тіл, яке триває дуже короткий проміжок часу. При розгляданні співударяння тіл, вважають, що сили, які діють між цими тілами набагато більші за інші зовнішні сили і систему таких тіл розглядають як замкнуту. А це, в свою чергу, дає можливість з повним правом застосовувати закони збереження.

Під час удару за рахунок кінетичної енергії відносного руху взаємодіючих тіл відбувається локальна деформація тіл, яка може пізніше відновитись. Досліди показують, що швидкості тіл після удару не досягають свого початкового значення. Це пояснюється відсутністю у природі ідеально гладких та ідеально пружних тіл. Тому удар характеризують *коефіцієнтом відновлення*:

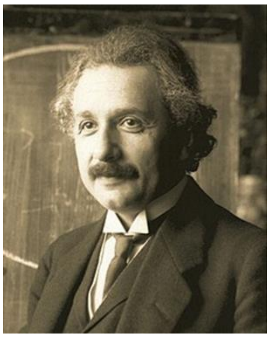
$$\varepsilon = \frac{\upsilon_0'}{\upsilon_0} \qquad (1.109)$$

Якщо при даному зіткненні ε=0, то удар називається абсолютно непружним, а якщо ε=1 – то абсолютно пружним. Для усіх реальних тіл $0<\varepsilon<1$. Наприклад, для стальних кульок $\varepsilon\approx0{,}56$, для кульок із слонової кістки $\varepsilon\approx0{,}89$, для свинцевих кульок $\varepsilon\approx0$. В конкретних задачах тіла з достатньою точністю тіла можна розглядати як абсолютно пружні або як абсолютно непружні.

Для характеристики процесу співударяння необхідно розуміти наступні поняття. *Лінія удару* – пряма, яка проходить через точку дотику тіл і нормальна до їхніх поверхонь. *Центральним* називається удар, якщо швидкості тіл до удару були спрямовані вздовж прямої, що проходить через їхні центри мас. Якщо удар супроводжується пружною деформацією взаємодіючих тіл (уся кінетична енергія тіл за короткий проміжок часу перейшла в енергію їхньої пружної деформації, а потім знову в кінетичну енергію їхнього руху), то він називається *абсолютно пружним*. Якщо ж після зіткнення тіла рухаються як одне ціле (наприклад, при взаємодії двох пластилінових кульок), то такий удар називається *абсолютно непружним*. В цьому випадку кінетична енергія тіл може переходити в інші види енергії (наприклад, у внутрішню).

Лекція 5. Основи спеціальної теорії відносності

В ньютонівській механіці час вважався абсолютним і однаковим в усіх системах відліку. Насправді це не так і у випадках, коли тіла рухаються із швидкостями, близькими до швидкості світла, це є дуже помітним. Теорію, що описує такий рух розробив *Альберт Айнштайн* (відомий також як Альберт Ейнштейн). Частина цієї теорії, яка вивчає рівномірний і прямолінійний рух, називається спеціальною теорією відносності (СТВ). В основі СТВ лежать два постулати, які Айнштайн сформулював у 1905 році:



(1879-1955)

Альберт Айнштайн

- **Усі фізичні явища протікають однаково в усіх інерціальних системах відліку**

- **Швидкість світла є граничною швидкістю поширення матерії у вакуумі, не залежить від швидкості руху джерела і приймача світла, однакова в усіх інерціальних системах відліку і є недосяжною**

У випадку, коли тіла рухаються доволі швидко, із швидкостями, близькими до швидкості світла замість перетворень Галілея використовують перетворення Лоренца:

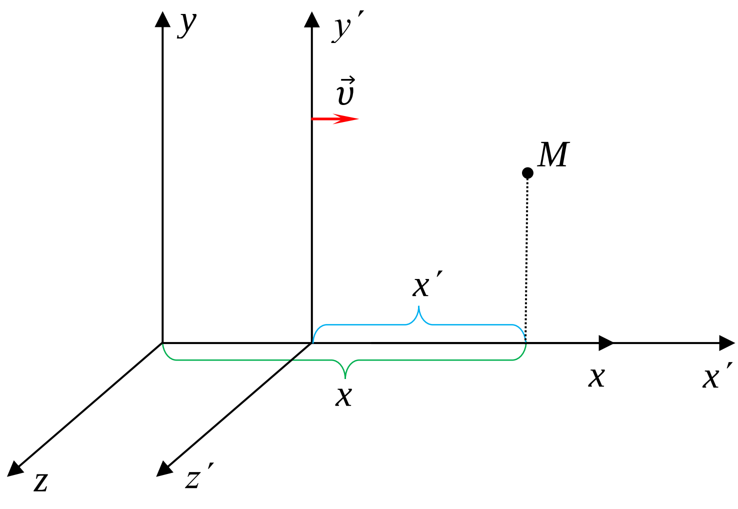


Рис. 1.34

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}\right\} \qquad (1.110)$$

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}\right\} \qquad (1.111)$$

Ці перетворення дозволяють знайти координати тіла в рухомій системі відліку, якщо відомі координати в нерухомій і навпаки (рис. 1.34). Слід зауважити, що при малих швидкостях $\left(\frac{v}{c} \ll 1\right)$ перетворення Лоренца переходять у перетворення

Галілея і вступають у силу закони класичної механіки, а при $\upsilon \geq \mathrm{c}$ $\left(\frac{\upsilon}{\mathrm{c}} \geq 1\right)$, перетворення Лоренца взагалі втрачають зміст. Із перетворень Лоренца випливає кілька важливих наслідків. Зокрема, ефекти скорочення довжин, уповільнення часу і зростання маси прямо випливають із формул (1.110) і (1.111).

1. Довжина тіла виявляється різною в різних системах відліку. Ця особливість ще називається *релятивіським скорочення довжини:*

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}} \tag{1.112}$$

де $l-$ довжина стержня в нерухомій системі відліку l_0- довжина стержня в рухомій системі відліку, υ – швидкість руху тіла, c – швидкість світла (c=3·10^8 м/с). Довжина тіла в системі, відносно якої воно рухається, виявляється меншою, ніж довжина цього ж тіла в системі, відносно якої воно перебуває в стані спокою ($l < l_0$).

2. Проміжок часу між двома послідовними подіями в різних системах відліку виявляється різним (так зване *релятивіське сповільнення часу*)

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \tag{1.113}$$

де $\Delta t-$ проміжок часу в нерухомій системі відліку, Δt_0- проміжок часу в рухомій системі відліку, υ – швидкість руху тіла, c – швидкість світла. Видно, що проміжок часу в системі, відносно якої тіло рухається, виявляється більшим, ніж проміжок часу в системі, відносно якої воно перебуває в стані спокою ($\Delta t > \Delta t_0$).

3. В релятивістському випадку іноді вживають термін релятивіської маси:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \tag{1.114}$$

де $m-$ маса тіла в нерухомій системі відліку, m_0- маса тіла в рухомій системі відліку, υ – швидкість руху тіла, c – швидкість світла. Видно, що маса тіла в системі, відносно якої тіло рухається, виявляється більшою, ніж маса тіла в системі, відносно якої воно перебуває в стані спокою ($m > m_0$).

Імпульс тіла у релятивістському випадку, враховуючи залежність маси від швидкості має вигляд:

$$\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{1.115}$$

Легко бачити, що при $v \ll c$ вираз для релятивістського імпульсу перетворюється на ньютонівський вираз імпульсу $\vec{p} = m_0\vec{v}$. Згідно класичної механіки швидкість руху тіла може бути будь-якою, і під дією постійної сили може зростати нескінченно довго (синя лінія на рис. 1.35), а відповідно до СТВ і експериментальних даних швидкість тіла зростає відповідно до червоної лінії на рис. 1.35. Тобто швидкість тіла може зростати, асимптотично підходячи до значення швидкості світла, але ні в якому разі не може досягнути цього значення і, тим більше, його перевищити. Те ж саме стосується імпульсу (рис. 1.36). Згідно класичного підходу він може набувати довільних значень, а згідно СТВ – ні.

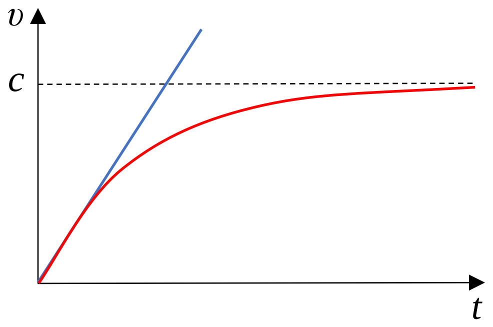


Рис. 1.35

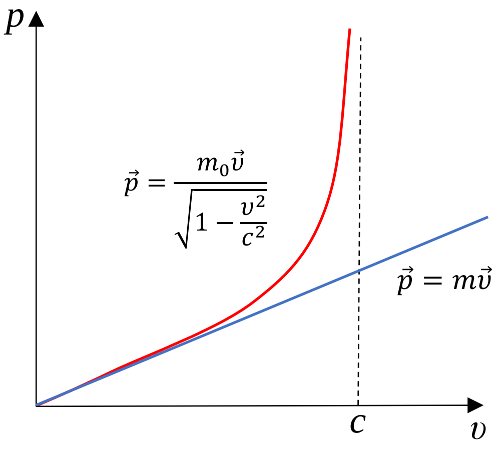


Рис. 1.36

Кінетичну енергію релятивістської частинки не можна подавати у вигляді $\frac{mv^2}{2}$, навіть якщо під m розуміти релятивіську масу. Це є однією із найбільш популярних помилок. Кінетична енергія в релятивістському розумінні це є надлишкова енергія над енергією спокою частинки:

$$W_k = (m - m_0)c^2 \tag{1.116}$$

Або, якщо використати формулу (1.114):

$$W_k = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) \tag{1.117}$$

Величина, що стоїть перед дужками є *енергією спокою* частинки:

$$E_0 = m_0c^2 \tag{1.118}$$

Повна енергія частинки визначається із співвідношення:

$$E = mc^2 \tag{1.119}$$

Останнє рівнняння виражає фкндаментальний зв'язок між масою та повною енергією не тільки елементарної частинки, але й будь якого тіла. Відповідного до цього рівняння будь-яке тіло, яке має масу має, відповідно, і енергію. Більш того, будь-яке надання чи відбирання енергії в тіла рівнозначне збільшенн. Чи зменшенню, відповідно, маси цього тіла. Дійсно, нагріваючи тіло, ми надаємо йому певну теплову енергію, піднімаючи тіло на певну висоту ми надаємо йому потенціальну енергію і т.д., цим процесам відповідають зростання маси цього тіла. Проте, таке зростання є настільки мізерно малим, що ніякими існуючими на сьогодні приладами це виявити не можливо.

В в ядерних реакціях, в яких взаємодіють ядра атомів або елементарні частинки дуже високих енергій можна не лише виявити, а й визначити на досліді різницю мас ядра та його складових частинок (так званий “*дефект мас*”). Зокрема, встановлено, що маса ядра будь-якого хімічного елемента менша за сумарну масу його нуклонів. При цьому ефект є настільки значним, що дозволяє отримувати промислову енергію на атомних електростанціях. Таким чином формула (1.118) виражає фундаментальний закон природи – взаємозв’язок енергії та масою.

Імпульс (1.115) і повна енергія (1.118) релятивістської частинки залежать від швидкості, отже й від системи відліку. Існує певна комбінація цих величин, яка є релятивістським інваріантом[8]. З формули (1.114) маємо:

$$m^2 = \frac{m_0^2}{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}$$

$$m^2\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right) = m_0^2$$

$$m^2c^2 - m^2\upsilon^2 = m_0^2c^2$$

Помноживши цей вираз на c^2 і врахувавши (1.118) і (1.115), отримаємо:

$$E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4 \tag{1.120}$$

[8] *Інваріантом* називають величину, яка не змінюється при зміні умов, в даному випадку йдеться про співвідношення, яке має однакове значення в усіх інерціальних системах відліку

Видно, що в правій частині цього виразу стоять величини, які не залежать від системи відліку (маса спокою та швидкість світла). Це означає, що ліва частина є релятивістським інваріантом, тобто, не змінюється при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої:

$$E^2 - p^2c^2 = \text{inv} \tag{1.121}$$

Із співвідношення (1.120) безпосередньо випливає корисна формула для обчислення повної енергії релятивістської частинки із відомим імпульсом:

$$E = c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2}, \tag{1.122}$$

а, використовуючи формули (1.120) і (1.116) можна знайти зв'язок між імпульсом і кінетичною енергією релятивістської частинки:

$$pc = \sqrt{E^2 - m_0^2c^4} = \sqrt{(W_k + m_0c^2)^2 - m_0^2c^4} = \sqrt{W_k(W_k + 2m_0c^4)} \tag{1.123}$$

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{W_k(W_k + 2m_0c^4)} \tag{1.124}$$

Зауважимо, що в ядерній фізиці та фізиці елементарних частинок енергію частинки прийнято вимірювати в МеВ (в мега електрон-вольтах), а імпульс, відповідно, в одиницях енергії (МеВ), поділених на швидкість світла c, тобто – в МеВ/c.

Відносність одночасності

Якщо розглянути уявний експеримент, в якому є рухомий вагон (рис. 1.37), по середині якого знаходиться ліхтар, а на дверях вагона встановлені пристрої, які відкривають двері, як тільки до них дійшло світло, то одночасність відкриття дверей в одній системі відліку не обовязково означає таку ж одночасність в іншій. Відносно спостерігача, який знаходиться у вагоні двері А та В відкриваються одночасно, оскільки світло проходить однакові відстані від середини вагона до дверей і двері у цій системі відліку є нерухомими. Якщо ж розглянути цю ж ситуацію відносно спостерігача на узбіччі, то двері А для нього відкриються раніше ніж двері В, оскільки двері А рухаються на зустріч світлу, а двері В від світла. .якщо ж ми уявимо ще одного сносерігача в сусідньому вагоні, який обганяє перший, то відносно нього першими відкриються двері В.

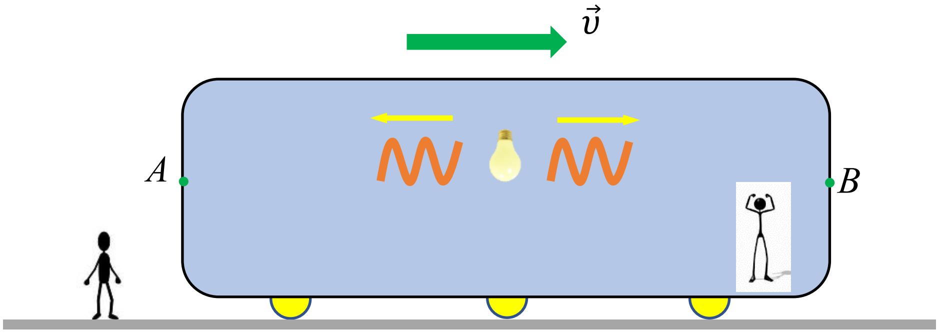


Рис. 1.37

Може скластися враження, що вибором сс継теми відліку ми можемо «переставити» в часі будь-які дві події, але це не так. Неможливо ніякими змінами системи відліку переставити у часі події, які пов'язані причинно-наслідковим зв'язком. Тобто не існує такої системи відліку, в якій спочатку відкриваються двері (байдуже які), а потім засвічується ліхтар.

Тема 2. Електрика

Лекція 6. Електростатичне поле та його характеристики

Джерелом статичного електричного поля є нерухомі електричні заряди. *Точковим зарядом* називається заряджене тіло, розмірами якого можна знехтувати в порівнянні з відстанню від цього тіла до інших тіл, що несуть електричний заряд.

З досліду відомо, що яким би не був складним процес перетворення частинок в деякій системі, сумарний заряд цієї системи зберігається, тобто має місце *закон збереження електричного заряду*:

в електрично ізольованій системі алгебраїчна сума електричних зарядів залишається незмінною величиною:

$$q = \sum_{i=1}^{n} q_i \tag{2.1}$$

Досліджуючи взаємодію заряджених кульок *Шарль Кулон* встановив закон:

Сила взаємодії двох нерухомих точкових зарядів пропорційна величині кожного із зарядів і обернено пропорційна квадрату відстані між ними. Ця сила напрямлена по прямій, що з'єднує ці заряди і є силою притягання, якщо заряди різноіменні і силою відштовхування, якщо заряди одноіменні*:*

$$F_{1,2} = k\frac{|q_1||q_2|}{r^2}, \tag{2.2}$$

(1736-1806)

Шарль Огюсте́н де Куло́н

де k — коефіцієнт пропорційності, $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Нм}^2}{\text{Кл}^2}$; $\varepsilon_0 = 0{,}885 \cdot 10^{-11} \frac{Ф}{м}$ (електрична стала). Слід відзначити, що якщо заряди знаходяться не у вакуумі, а в певному діелектричному середовищі, то у знаменнику закону Кулона слід добавити величину *ε*, яка називається діелектрична проникність середовища. Для вакууму вона рівна одиниці, а для всіх інших речовин більша за одиницю і ьереться з таблиць.

Взаємодія між нерухомими зарядами здійснюється через *електричне поле*, яке створює кожен з зарядів окремо шляхом зміни властивостей простору навколо нього.

Напруженістю електричного поля в даній точці простору називається векторна фізична величина, яка є силовою характеристикою електростатичного поля, і визначається із співвідношення:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{|q|} \qquad (2.3)$$

Тобто напруженість електричного поля чисельно рівна силі, що діє на одиничний точковий заряд, що знаходиться в даній точці поля. Напрямок вектора $\vec{E}$ співпадає з напрямком сили, що діє на позитивний заряд. Це означає, що для позитивного заряду вектори напруженості напрямлені від заряду, а для негативного – до заряду.

Якщо електростатичне поле утворене не одним, а кількома зарядами (рис. 2.1), то для визначення результуючої напруженості поля в деякій точці використовують *принцип суперпозиції напруженостей електростатичних полів*:

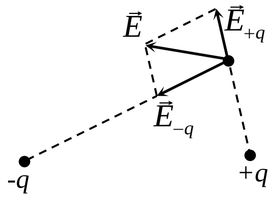


Рис. 2.1

Напруженість поля системи зарядів рівна векторній сумі напруженостей полів, які утворював би кожен із зарядів окремо:

$$\boxed{\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i} \qquad (2.4)$$

Електричне поле можна описати, вказавши для кожної точки величину та напрям вектора $\vec{E}$. Сукупність цих векторів утворює *поле вектора напруженості* електростатичного поля.

Електричне поле можна описати з допомогою ліній напруженості, які проводять таким чином, щоб дотична до них в кожній точці співпадала з напрямком ліній, що пронизують одиницю поверхні, перпендикулярну до ліній $\vec{E}$ (рис. 2.2). Густина ліній вибирається так, щоб кількість ліній, що пронизують одиницю поверхні, перпендикулярну до ліній площадки, була б рівною (або пропорційною) числовому значенню вектора $\vec{E}$.

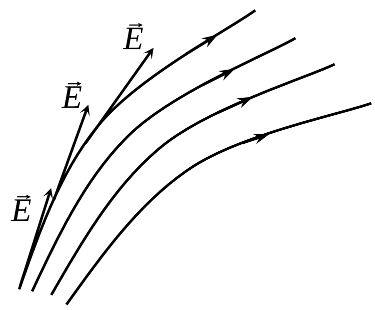


Рис. 2.2

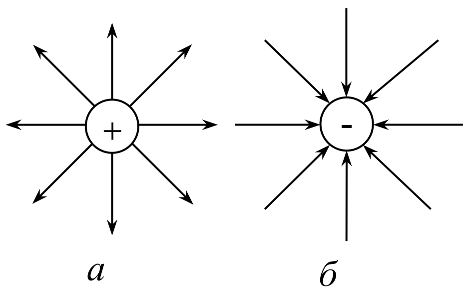


Рис. 2.3

Лінії напруженості поля точкового заряду являють собою сукупність радіальних прямих (рис. 2.3), направлених від заряду, якщо він додатний (*а*), і до заряду, якщо він від'ємний (*б*). (рис. 2.3). Ці лінії одним кінцем впираються в заряд, а іншим йдуть в нескінченність. Властивості ліній напруженості можна виразити так:

- Через кожну точку простору можна провести тільки 1 силову лінію.

- Силові лінії не перетинаються

Потенціал

Потенціалом поля φ називається потенціальна енергія одиничного точкового заряду q, що міститься в даній точці поля і для точкового заряду маємо:

$$\varphi = \frac{kq}{\varepsilon r} \quad (2.5)$$

Електричне поле консервативне, отже робота, яка здійснюється силами поля над зарядом q' при переміщенні його з однієї точки в іншу не залежить від форми шляху (рис. 2.4):

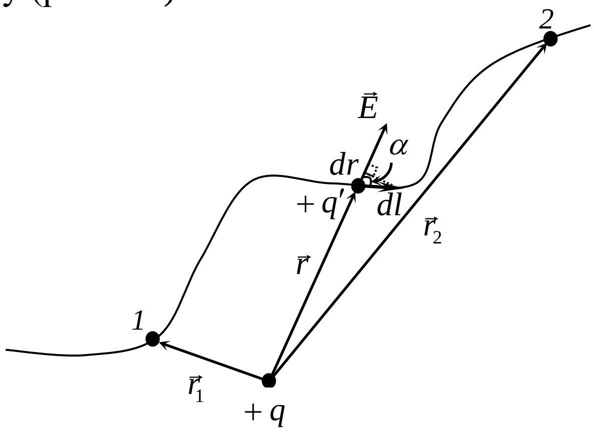


Рис. 2.4

$$A = \int_1^2 F\,(r)dr$$

$$A = \int_1^2 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}dr$$

$$A = \int_1^2 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}dr = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Враховуючи (2.5), останню формулу можна записати як:

$$\boxed{A = q'(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (2.6)$$

Тобто робота, яка здійснюється над зарядом q' силами поля заряду q рівна добутку величини заряду, який переміщується на різницю потенціалів в початковій і кінцевій точках (тобто на зменшення потенціалу). Зауважимо, що у формулах (2.5) та (2.6) заряд фігурує без модуля. Тобто додатний заряд буде створювати додатний потенціал, а від’ємний – від’ємний.

Потенціальна енергія взаємодії двох зарядів (рис. 2.5) визначається за формулою:

$$W_p = \frac{kq_1q_2}{\varepsilon r_{1,2}} \quad (2.7)$$

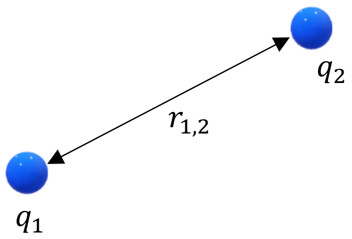


Рис. 2.5

Якщо зарядів більше ніж два, то формула потенціальної енергії зарядів ускладнюється. Необхідно врахувати попарні значення потенціальних енергій усіх можливих взаємодій. Для прикладу у випадку трьох зарядів (рис. 2.6) потенціальна енергія системи буде визначатись формулою:

$$W_p = \frac{kq_1q_2}{r_{1,2}} + \frac{kq_2q_3}{r_{2,3}} + \frac{kq_1q_3}{r_{1,3}} \quad (2.8)$$

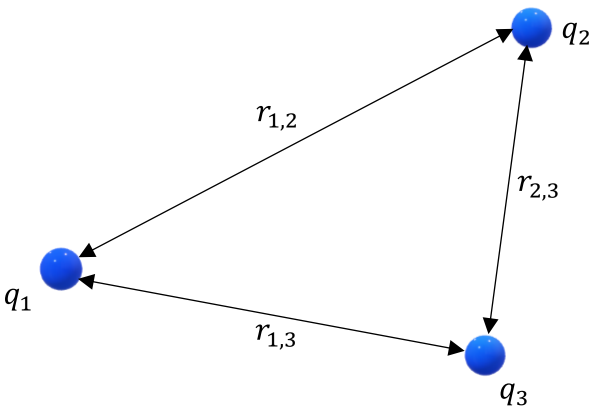


Рис. 2.6

Щоб знайти результуючий потенціал, який створюють кілька зарядів в деякій точці поля, використовують принцип суперпозиції для потенціалів, який формулюється так: **потенціал поля, створеного системою зарядів, рівний алгебраїчній сумі потенціалів, створених кожним із зарядів окремо**:

$$\boxed{\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i} \quad (2.9)$$

Робота, яка здійснюється силами поля над зарядом q' при переміщенні його з точки 1 в точку 2 може бути обчислена як: $A = \int_1^2 q'Edl = q'(\varphi_1 - \varphi_2)$

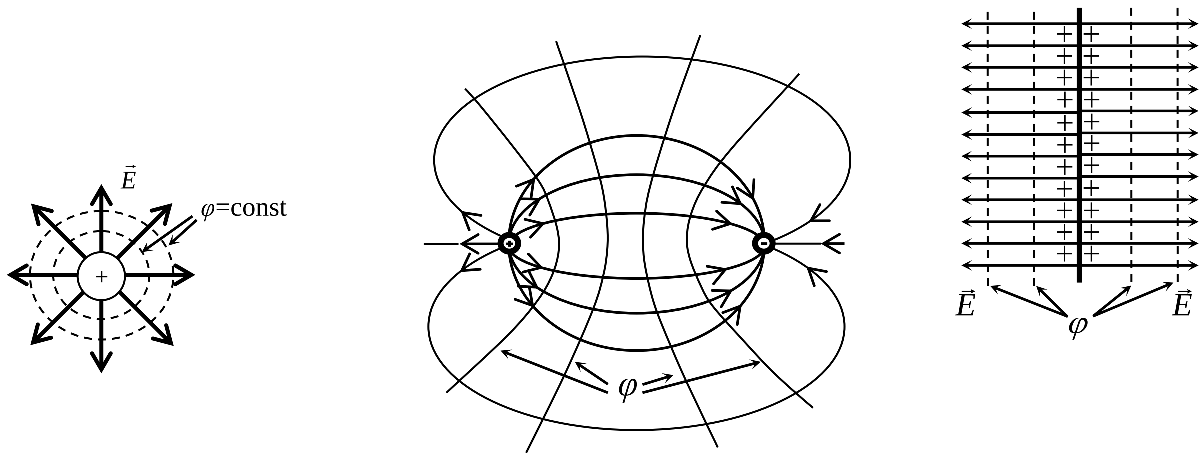
$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 Edl$$

Для замкнутого контуру $(\varphi_1 = \varphi_2)$ маємо:

$$\oint Edl = 0 \quad (2.10)$$

Уявна поверхня, всі точки якої мають однаковий потенціал називається *еквіпотенціальною поверхнею*, а її рівняння має вигляд $\phi(x, y, z) = const.$ Для точкового заряду такі еквіпотенціальні поверхні мають вигляд сферичних оболонок різних радіусів, в центі яких знаходиться сам точковий заряд.

Електричне поле навколо точкового заряду, електричного диполя та нескінченної зарядженої площини, відповідно, може бути подане за допомогою ліній напруженості та ліній однакового потенціалу (рис. 2.7):



а *б* *в*

Рис. 2.7

Зв'язок між напруженістю та потенціалом

Електричне поле можна описати або за допомогою векторної величини $\vec{E}$ або з допомогою скалярної величини φ. Очевидно, що між ними має бути зв'язок. З механіки відомо, що:

$$\delta A = F_x dx, \tag{2.11}$$

а диференціал від потенціальної енергії дорівнює елементарній роботі з протилежним знаком:

$$\delta A = -dW_p, \tag{2.12}$$

$$F_x dx = -dW_p, \tag{2.13}$$

$$F_x = -\frac{dW_p}{dx} \tag{2.14}$$

Насправді потенціальна енергія залежить не тільки від координати x, а від x, y, z. Отже правильніше буде записати, використовуючи частинну похідну[9]:

$$F_x = -\frac{\partial W_p}{\partial x}; F_y = -\frac{\partial W_p}{\partial y}; F_z = -\frac{\partial W_p}{\partial z} \tag{2.15}$$

Модуль сили:

$$|F| = \sqrt{F_X^2 + F_y^2 + F_z^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial W_p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W_p}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W_p}{\partial z}\right)^2} \tag{2.16}$$

Градієнтом називається вектор, проекції якого на осі координат дорівнюють частинним похідними скалярної функції координат:

$$grad = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{2.17}$$

$$\vec{F} = -\left(\vec{i}\frac{\partial W_p}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial W_p}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial W_p}{\partial z}\right) \tag{2.18}$$

Отже, сила дорівнює градієнту потенціальної енергії, взятому зі знаком мінус:

$$\vec{F} = -gradW_p \tag{2.19}$$

Використовуючи ∇- оператор Гамільтона “набла” (дельта, перевернута «догори»), для сили можна записати:

$$\vec{F} = -\nabla W_p \tag{2.20}$$

Кожна з частинних похідних в (2.18) визначає швидкість спадання потенціальної енергії по відповідній координаті. В даному випадку градієнт – це вектор, напрямлений у бік найшвидшого спадання потенціальної енергії.

Використовуючи добре відомі формули $\vec{F} = q\vec{E}$ та $U = q\phi$, отримаємо:

$$\boxed{\vec{E} = -grad\varphi} \tag{2.21}$$

---

[9] Якщо деяка функція залежить не від однієї змінної, а від багатьох, то використовується поняття *частинної похідної*, в знаменнику якої вказується змінна, по якій здійснюється диференціювання, інші змінні при цьому вважаються константами, тобто: $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{y,z=const}$, в той час як для повної похідної можна записати: $\frac{df}{dx}$.

В проекціях на відповідні осі:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}; E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}; E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{2.22}$$

Лекція 7. Теорема Гаусса

Потік вектора напруженості електричного поля.

(1777-1855)

Карл Фрідріх Гаусс

Розглянемо поняття потоку вектора напруженості (індукції) електростатичного поля. *Елементарним потоком* вектора напруженості dN_E через площину називають скалярний добуток вектора $\vec{E}$ на вектор $d\vec{S}$:

$$dN_E = \left(\vec{E}d\vec{S}\right) = Eds\cos\alpha = E_n ds,$$

де E_n- проекція вектора напруженості на нормаль до площини, а α - кут між вектором напруженості і нормаллю до площини (рис. 2.8). Потік вектора напруженості через площину скінченних розмірів визначається як сума всіх елементарних потоків:

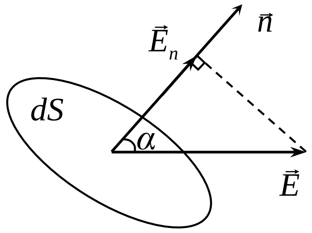


Рис. 2.8

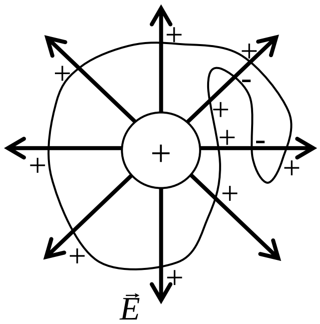


Рис. 2.9

$$N_E = \int_S dN_E = \int_S E_n\, dS \qquad (2.23)$$

Розглянемо поле точкового заряду q та обчислимо потік вектора $\vec{E}$ через замкнуту поверхню S, що містить в собі заряд (рис. 2.9). Як відомо, кількість ліній напруженості вектора $\vec{E}$, що починаються на точковому заряді $+q$ або закінчуються на заряді -q чисельно рівна: $\frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0}$.

Потік вектора напруженості $\vec{E}$ через довільну замкнуту поверхню дорівнює числу ліній, які виходять назовні, тобто тих, які починаються на заряді, якщо він додатній, і числу ліній, які входять всередину, тобто тих, які закінчуються на заряді, якщо він від'ємний: $N_E = N_{поч} - N_{закінч}$

Враховуючи $\frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0}$ маємо:

$$N_E = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0} \qquad (2.24)$$

Знак потоку співпадає із знаком заряду q.

Припустимо, що всередині замкнутої поверхні знаходяться N точкових зарядів $q_1, q_2, ..., q_N$. В силу принципу суперпозиції напруженість поля, яка створюється усіма зарядами, дорівнює сумі напруженостей $\vec{E}_i$, створених кожним зарядом окремо: $\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} E_i$, тому:

$$N_E = \oint_S E_n dS = \oint_S \left(\sum_{i=1}^{N} E_{n_i}\right) dS = \sum_{i=1}^{N} \oint_S E_{n_i} dS \qquad (2.25)$$

кожен із інтегралів, що стоять під знаком суми дорівнює $\frac{q_i}{\varepsilon\varepsilon_0}$.

Отже, теорему *Гаусса* можна сформулювати так:

Потік вектора напруженості електричного поля через замкнуту поверхню дорівнює алгебраїчній сумі зарядів, що знаходяться всередині цієї поверхні, поділений на $\boldsymbol{\varepsilon_0\varepsilon}$:

$$\oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i \qquad (2.26)$$

Якщо заряд розподілений по об’єму зарядженого тіла, то вводячи об’ємну густину заряду:

$$\rho = \frac{dq}{dV}, \qquad (2.27)$$

то $\sum_{i=1}^{N} q_i = \int_V \rho dV$, теорему Гаусса можна подати у вигляді:

$$\boxed{\oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \int_V \rho dV} \qquad (2.28)$$

Якщо заряд зосереджений в тонкому поверхневому шарі, що несе заряд тіла, то розподіл заряду в просторі можна охарактеризувати з допомогою *поверхневої густини заряду σ*:

$$\sigma = \frac{dq}{dS}, \qquad (2.29)$$

де dq – заряд площадки dS. Під dS розуміється фізично нескінченно мала[10] ділянка поверхні. В цьому випадку теорему Гаусса записують так:

[10] *Фізично нескінченно малою* ділянкою називається нескінченно мала ділянка поверхні, але ще така, яка зберігає фізичні властивості усього макрооб’єкту, частиною якого є ця ділянка.

$$\boxed{\oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\int_S \sigma dS} \tag{2.30}$$

Якщо заряд розподілений по об'єму або поверхні тонкого циліндричного тіла (рівномірно в кожному перерізі), використовується *лінійна густина заряду*:

$$\lambda = \frac{dq}{dl}, \tag{2.31}$$

де *dl* - довжина фізично нескінченно малого відрізку циліндра, dq - заряд, зосереджений в цьому відрізку. Теорему Гаусса у випадку такого розподілу заряду записують так:

$$\oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\int_l \lambda dl \tag{2.32}$$

Таким чином, теорема Гаусса пов’язує потік вектора напруженості електричного поля через довільну замкнуту поверхню із зарядами, що містяться в цій поверхні незалежно від того якої форми чи виду є ця поверхня.

Приклади застосування теореми Гаусса

Теорема Гаусса дозволяє в ряді випадків дуже просто знайти напруженість поля. Розглянемо класичні приклади застосування теореми Гаусса для визначення напруженості електростатичного поля тіл визначеної геометричної форми.

1. Поле точкового позитивного заряду

Розглянемо електростатичне поле навколо точкового позитивного заряду q. Замкнену поверхню візьмемо у вигляді сфери, радіусом r (рис. 2.10). Вектор напруженості в кожній точці цієї поверхні перпендикулярний до неї і однаковий за модулем.

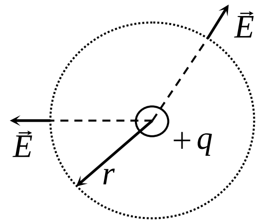


Рис. 2.10

Застосуємо теорему Гауса для визначення потоку вектора напруженості через цю сферичну поверхню:

$$\oint E_r\, dS = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} q$$

$$E_r S = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

$$E_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2} \qquad (2.33)$$

2. Поле рівномірно зарядженої сферичної оболонки

Нехай повний заряд на поверхні сфери радіуса R дорівнює Q. Необхідно знайти напруженість у точці, відстань до якої від центра сфери дорівнює r.

Є дві області: всередині сфери і поза сферою, теорему Гаусса слід застосовувати поокремо для кожної з областей. Всередині сфери ($r < R$, рис. 2.11, а) зарядів немає, отже потік дорівнює нулю, тому і напруженість дорівнює нулю. Для області поза сферою ($r > R$, рис. 2.9, б) потік вектора напруженості через сферу радіуса r:

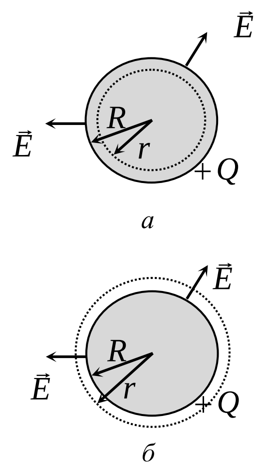


Рис. 2.11

$$\oint_S E_r\, dS = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\sum_i q_i$$

$$E_r S = \frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2} \qquad (2.34)$$

Отже, напруженість поля зарядженої сфери поза сферою така ж сама, яка і напруженість поля точкового заряду. Схематично залежність *E(r)* зображена на рис. 2.12.

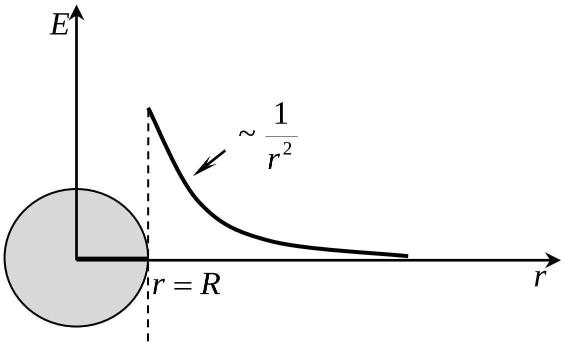


Рис. 2.12

3. Поле об'ємно зарядженої кулі

Нехай ми маємо кулю, радіусом R і загальним зарядом Q, заряджену рівномірно з об'ємною густиною заряду $\rho = \frac{dQ}{dV}$. З уявлень симетрії можна показати, що для області поза кулею ми отримаємо той же результат, що й в попередньому випадку (формула 2.34). В середині ж кулі напруженість кулі відрізняється від напруженості сфери, оскільки сфера пустотіла, а куля суцільна. Уявимо сферу, радіусом $r < R$. Відповідно до теореми Гаусса:

$$\oint_S E_r dS = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\int_V \rho dV$$

$$E_r S = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\rho\int_V dV$$

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\rho\frac{4}{3}\pi r^3$$

Після скорочень отримаємо:

$$E_r = \frac{\rho r}{3\varepsilon\varepsilon_0}, \qquad (2.35)$$

а враховуючи, що в нашому випадку $\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$, отримаємо:

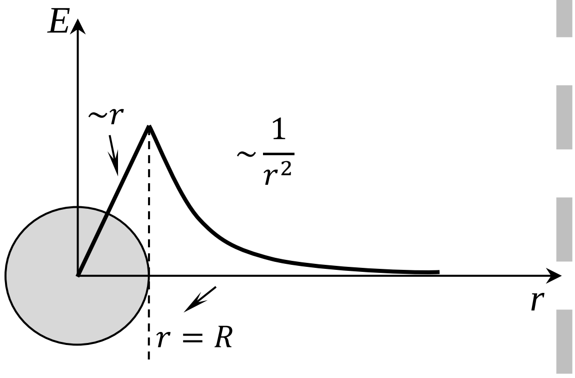


Рис. 2.13

$$E = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R^3}, (r < R) \quad (2.36)$$

Таким чином, напруженість поля поза рівномірно зарядженою кулею описується формулою (2.34), а всередині неї змінюється лінійно з відстанню r, відповідно до рівняння (2.36). Графічно таку залежність зображено на рис. 2.13.

4. Поле нескінченної однорідно зарядженої площини

Нехай поверхнева густина заряду у всіх точок площини однакова і рівна σ, для визначеності будемо вважати заряд додатнім. З уявлень симетрії випливає, що напруженість поля однакова по величині і протилежна по напрямку.

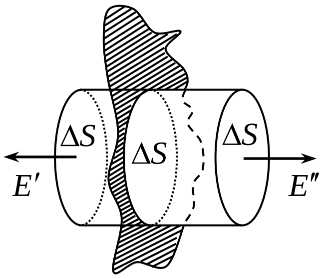


Рис. 2.14

Уявимо собі циліндричну поверхню з твірними, перпендикулярними до площини, і основами величини ΔS, розташованими відносно площини симетрично (рис. 2.14). В силу симетрії $E'=E''=E$. Застосуємо до поверхні теорему Гауса. Потік через бокову частину поверхні буде відсутній, оскільки E_n в кожній точці дорівнює 0. Для основ E_n співпадає з E, отже сумарний потік через поверхню рівний $2E\Delta S$, а заряд, що міститься в середині поверхні рівний $\sigma\Delta S$. Згідно теореми Гауса можемо записати:

$$\oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\int_S \sigma dS$$

$$2E\Delta S = \frac{\sigma\Delta S}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0} \quad (2.37)$$

Отриманий результат не залежить від довжини циліндра. Це означає, що на довільних відстанях від площини напруженість поля однакова по величині.

5. Поле двох нескінченних паралельних різнойменно заряджених площин

Нехай площини заряджені рівномірно з густинами $+\sigma$ і $-\sigma$, відповідно. Поле таких площин будемо шукати як суперпозицію полів, створених кожною площиною окремо. На рис. 2.15 темніші стрілки відповідають полю позитивно зарядженої площини, а світліші – негативно. Зліва і справа від площин поля віднімаються, оскільки лінії напруженості напрямлені в різні сторони.

Так як густини зарядів однакові, то поле в цих областях дорівнюватиме нулю

$$E = E^{+} - E^{-} = 0.$$

Для області між площинами поля спрямовані в одну сторону, тому, враховуючи (2.37), можна записати:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} \qquad (2.38)$$

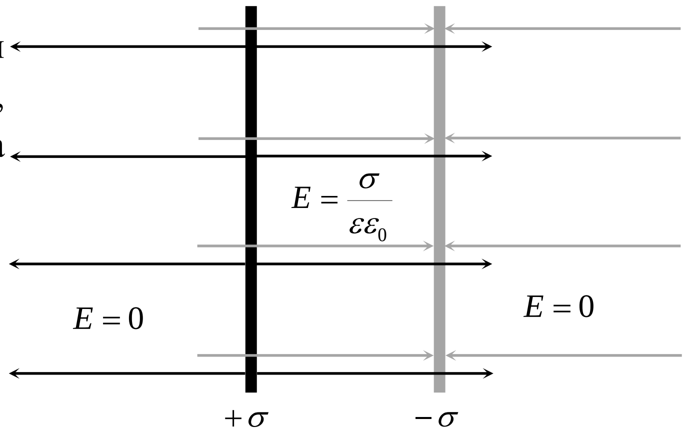


Рис. 2.15

Таким чином, результуюча напруженість поля між площинами визначається формулою (2.38), а поза нею рівна нулю.

6. Поле рівномірно зарядженого нескінченного циліндра

Нехай ми маємо нескінченний циліндр радіуса R (рис. 2.16), який заряджений рівномірно лінійною густиною заряду $\lambda = \frac{dq}{dl}$.

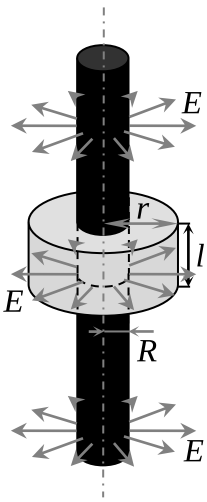


Рис. 2.16

Із уявлень симетрії слідує, що лінії напруженості будуть напрямлені по радіусам колових перерізів циліндра з однаковою густиною у всі сторони відносно осі циліндра. В якості замкнутої поверхні уявимо циліндр радіусу r і висотою l. Потік вектора E через торці такого циліндра рівний нулю (оскільки торці паралельні лініям напруженості), а через бокову грань визначатиметься теоремою Гаусса. При $r>R$ маємо:

$$\oint_S E_r dS = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\int_l \lambda dl$$

$$E_r \cdot 2\pi r l = \frac{\lambda l}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

звідки находимо:

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} \text{ при } r \geq R \qquad (2.39)$$

Якщо ж $r<R$, то замкнута поверхня зарядів не містить, тому в цій області $E=0$. Таким чином, напруженість поля поза рівномірно зарядженим нескінченним

циліндром визначається рівнянням (2.32), а в середині нього поле відсутнє. У випадку, якщо ми маємо нескінченну і рівномірно заряджену нитку (заряджений провідник), то напруженість такої нитки на довільних відстанях від неї також буде визначатись формулою (2.39).

Лекція 8. Діелектрики в електричному полі

Діелектриком називають речовину, що не проводить електричний струм, тобто в якій немає вільних зарядів. Усі заряди, які у ньому є – зв'язані. Питома провідність ідеального діелектрика прямує до нуля (вода, парафін, слюда, скло).

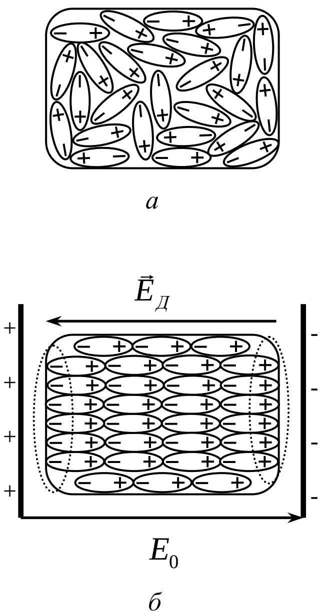


Рис. 2.17

За законом Кулона сила взаємодії між двома точковими зарядами зменшується в ε раз , коли між ними розміщений діелектрик. Це відбувається тому, що в діелектрику, розміщеному в зовнішньому полі, змінюється просторове розташування зарядів, тобто відбувається поляризація діелектрика. До розміщення в зовнішньому полі напруженістю E_0 діелектрик був в цілому нейтральним (рис. 2.17, а), а тепер у ньому з'явилось внутрішнє поле, напруженістю $\vec{E}_Д$, напрямлене проти зовнішнього поля(рис. 2.17, б):

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_Д \qquad (2.40)$$

У скалярній формі:

$$E = E_0 - E_Д \qquad (2.41)$$

Найчастіше напруженість внутрішнього поля пропорційна до напруженості сумарного поля:

$$E_Д = \chi E \qquad (2.42)$$

Коефіцієнт пропорційності χ називають *діелектричною сприйнятливістю*. Вона пов`язана з діелектричною пропорційністю:

$$\varepsilon = \frac{E_0}{E} = \frac{E+E_Д}{E} = 1 + \frac{E_Д}{E} = 1 + \chi \qquad (2.43)$$

$$\boxed{\varepsilon = 1 + \chi}$$

Діелектрична сприйнятливість завжди більша за нуль, тому діелектрична проникність завжди більша за одиницю.

Молекули будь-якої речовини складаються з позитивно і негативно заряджених частин: протонів та електронів. Але молекули різних речовин мають різну будову і, відповідно, різне розміщення електричних зарядів. Тому характер поляризації в різних типах діелектриків не однаковий.

Розрізняють три основні види поляризації діелектриків: електронна (кристал одного елемента), іонна (тонкі кристали) та дипольна (молекули у вигляді диполів).

Електронною називається поляризації, зумовлена зміщенням і деформацією електронних оболонок відносно ядер атомів.

Електронна поляризація виникає в основному у неполярних простих молекул, в яких за відсутності зовнішнього поля «центри тяжіння» позитивних і негативних зарядів збігаються (рис. 2.18, а). Якщо ж їх помістити з зовнішнє електричне поле, «центри тяжіння» зміщуються в протилежні сторони на невелику, порівняно з розмірами молекул, відстань (рис. 2.18, б). Виникає електричний дипольний момент молекули:

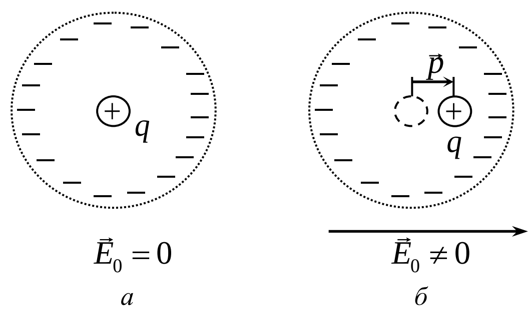


Рис. 2.18

$$\vec{p}_i = q_i\,\overrightarrow{l_i}, \tag{2.44}$$

де q_i - заряд, $\vec{l}_i$- вектор зміщення, який напрямлений від негативного заряду до позитивного, як і $\vec{p}_i$ - вектор дипольного моменту.

В основному зміщуються електрони, як легші частинки. Тому поляризація і називається електронною. Якщо зовнішнє поле зняти, «центри тяжіння» зарядів повертаються в початкове положення і поляризація зникає.

Іонна поляризація зумовлена пружним зміщенням різнойменних заряджених іонів, відносно положення рівнів. Така поляризація в іонних кристалах (NaCl, KBr). Тут зміщуються цілі ґратки, у вузлах яких знаходяться іони.

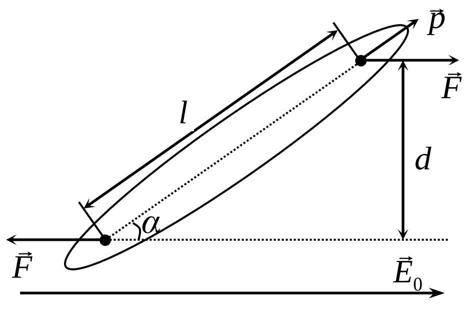


Рис. 2.19

Дипольна поляризація зумовлена переважною орієнтацією електричних моментів молекул в одному напрямі. Дипольна поляризація виникає в полярних діелектриках, таких як HCl, NH_3, H_2O, в яких молекули мають асиметричну будову і можуть бути зображені у вигляді електричних диполів із власним дипольним моментом (рис. 2.19).

Коли зовнішнє поле відсутнє, дипольні моменти окремих молекул орієнтовані хаотично, так, що в середньому внутрішнє поле дорівнює нулю. В зовнішньому полі напруженістю E_0 на молекулу діє обертальний момент:

$$M = Fd = qE_0d = qlE_0\sin\alpha,$$

але $ql\sin\alpha = p$, тоді:

$$\vec{M} = \vec{p} \cdot \vec{E}, \tag{2.45}$$

де $\vec{p}$- електричний дипольний момент. Цей момент буде намагатись розвернути диполь так щоб напрямок його дипольного моменту збігався з напрямком вектора напруженості зовнішнього поля. Дипольні моменти орієнтуються вздовж силових ліній.

Зовнішньо кожна з наведених поляризацій, проявляється в тому, що на протилежних поверхнях діелектрика з'являються поляризаційні заряди різних знаків.

Вектор поляризації

Вектором поляризації, або поляризованістю називають сумарний дипольний момент усіх молекул, що містяться в одиниці об`єму діелектрика:

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V}\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i \tag{2.46}$$

За такого визначення вектор поляризації характеризує властивість в даній точці: $\vec{p} = \vec{p}(x, y, z)$.

Як і інші характеристики поля, вектор поляризації значенні є диференціальною характеристикою. Вектор поляризації напрямлений вздовж вектора напруженості внутрішнього поля $\vec{E}_Д$ і в слабких полях пропорційний до нього:

$$\vec{P} = \varepsilon_0\vec{E}_Д \tag{2.47}$$

$$\vec{E}_Д = \chi\vec{E} \tag{2.48}$$

$$\vec{P} = \varepsilon_0\chi\vec{E} \tag{2.49}$$

Величина $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$ називається *індукцією* електричного поля. Вектори $\vec{D}$, $\vec{E}$, $\vec{P}$ характеризують стан поляризованого діелектрика. Знайдемо зв`язок між цими векторами:

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E} \tag{2.50}$$

$$\varepsilon = 1 + \chi$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0(1+\chi)\vec{E} = \varepsilon_0\vec{E} + \varepsilon_0\chi\vec{E}$$

$$\vec{P} = \varepsilon_0\chi\vec{E}$$

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}} \tag{2.51}$$

Граничні умови на межі двох діелектриків

Розглянемо зв'язок між векторами $\vec{E}$ та $\vec{D}$ на межі поділу двох однорідних ізотропних діелектриків, діелектричні проникності яких ε_1 та ε_2, відповідно, при відсутності вільних зарядів. Побудуємо поблизу границі поділу діелектриків невеликий замкнутий прямокутний контур ABCD, довжиною l, орієнтований так, як показано на рис. 2.20. Циркуляція вектора $\vec{E}$:

$$\oint_{ABCD} \vec{E}dl = 0.$$

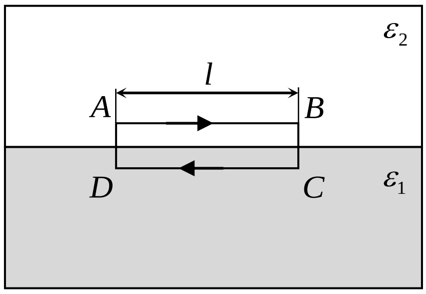


Рис. 2.20

Знаки інтегралів по ділянках AB та CD різні, оскільки напрямки інтегрування протилежні, а інтегралами по ділянкам BC та DA можна знехтувати. Тому:

$$E_{2_\tau}l - E_{1_\tau}l = 0$$

$$E_{2_\tau} = E_{1_\tau} \tag{2.52}$$

Замінюючи проекції вектора $\vec{E}$ проекціями вектора $\vec{D}$, відповідно до (2.50), отримаємо:

$$\frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \tag{2.53}$$

На межі поділу двох діелектриків побудуємо циліндр нескінченно малої висоти, одна основа якого міститься в одному діелектрику, а інша – в іншому (Рис. 2.21). Площі основ ΔS вибираємо настільки малими, щоб вектор $\vec{D}$ в межах кожної з них не змінювався. Відповідно до теореми Гаусса, маємо:

$$D_{2_n}\Delta S - D_{1_n}\Delta S = 0$$

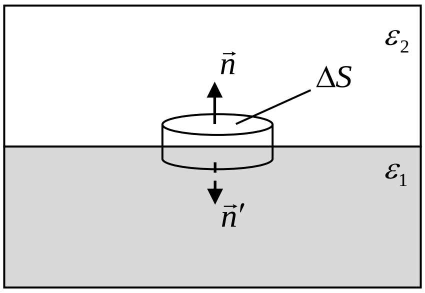


Рис. 2.21

Нормалі n та n' до основ циліндра напрямлені протилежно одна одній. Тому:

$$D_{2_n} = D_{1_n} \tag{2.54}$$

Замінюючи проекції вектора $\vec{D}$ проекціями вектора $\vec{E}$, відповідно до (2.50), отримаємо:

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \tag{2.55}$$

Таким чином, при переході через межу поділу двох діелектричних середовищ тангенціальна складова вектора $\vec{E}$ (E_τ) і нормальна складова вектора $\vec{D}$ (D_n) змінюються неперервно (не стрибком), а нормальна складова вектора $\vec{E}$ (E_n) і тангенціальна складова вектора $\vec{D}$ (D_τ) стрибкоподібно.

Нехай для означуваності $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$. Знайдемо зв'язок між кутами α_1, α_2 (рис. 2.19). Враховуючи (2.42) та (2.45) знайдемо відношення тангенсів кутів α_1 та α_2:

$$\frac{tg\alpha_2}{tg\alpha_1} = \frac{\frac{E_{2\tau}}{E_{2n}}}{\frac{E_{1\tau}}{E_{1n}}} = \frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \tag{2.56}$$

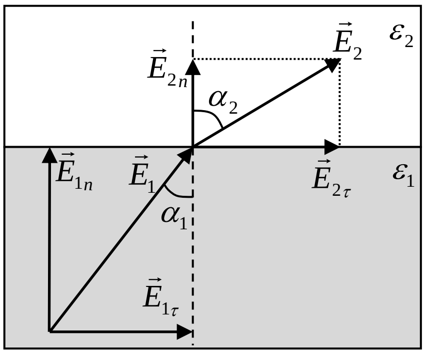


Рис. 2.22

Даний вираз є ніщо інше як закон заломлення ліній напруженості (індукції) при переході з одного діелектрика в інший.

З цієї формули слідує, що при переході з діелектрика з меншою діелектричною проникністю в діелектрик з більшою діелектричною проникністю лінії напруженості (індукції) відхиляються далі від нормалі.

Теорема Гаусса для діелектриків

Теорема Гаусса справедлива для діелектриків. Тільки на відміну від електростатичного поля тут її записують для вектора поляризації та вектора індукції електричного поля. В першому випадку вона формується так:

Потік вектора поляризації через довільну замкнуту поверхню дорівнює зв'язаному заряду з протилежним знаком, який міститься в об'ємі, окопленому цією поверхнею

$$\oint_S P_n dS = -q' \tag{2.57}$$

Важливо відмітити, що при поляризації діелектрика можуть, взагалі кажучи, виникати об'ємні та поверхневі поляризаційні заряди. Але якщо діелектрик однорідний та ізотропний і не містить сторонніх зарядів, то об'ємна густина звязаних зарядів для такого діелектрика рівна нулю ($\rho' = 0$). Поверхнева ж густина зв'язаних зарядів рівна нормальній складовій вектора поляризації $\vec{P}$:

$$\sigma' = P_n \tag{2.58}$$

Знак проекції P_n визначає знак поверхневого зв'язаного заряду σ' в даному місці діелектрика.

Якщо записувати теорему Гаусса для вектора напруженості поля в діелектрику, то справої сторони має бути сума всіх зарядів – і сторонніх і зв'язаних:

$$\oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0}(q + q') \tag{2.59}$$

Наявність зарядів q' робить непридатним використання такого запису для знаходження величини E, оскільки наявність q' і визначається напруженістю E. Але якщо q' підставити з рівняння (2.57), то

$$\oint_S \varepsilon_0 E_n dS + \oint_S P_n dS = q$$

$$\oint_S (\varepsilon_0 E_n + P_n) dS = q$$

А з урахуванням (2.51):

$$\oint_S D_n dS = q$$

Тобто, теорема Гауса для вектора індукції може бути сформульованою так:

Потік вектора індукції через довільну замкнуту поверхню дорівнює суму сторонніх зарядів, охоплених цією поверхнею:

$$\oint_S D_n dS = q \qquad (2.60)$$

Сегнетоелектрики

Сегнетоелектрики – це діелектрики, які в певному температурному інтервалі при відсутності зовнішнього електричного поля мають спонтанну поляризованість. До них відносяться, наприклад, $NaKC_4H_4O_6 \cdot 4H_2O$ (сегнетова сіль, від неї і пішла назва цих речовин), $BaTiO_3$ (титанат барію) та інші.

При відсутності зовнішнього електричного поля сегнетоелектрик являє собою «мозаїку» з доменів – областей з різними напрямками поляризованості, проте в цілому дипольний момент діелектрика рівний нулю. Якщо ж таку речовину внести у зовнішнє електричне поле, то відбувається переорієнтація дипольних моментів доменів за напрямком поля, а сумарне електричне поле, яке при цьому виникає, буде підтримувати деяку їхню орієнтацію навіть після того як зовнішнє поле зняти. Саме тому сегнетоелектрики мають аномально великі значення діелектричною проникності (для сегнетової солі ε_{max}=10^4).

Властивості сегнетоелектрика суттєво залежать від температури. Сегнетоелектричні властивості окремо взятого сегнетоелектрика зникають після досягнення певної температури. Ця температура називається точкою К'юрі. Як правило, така точка одна для конкретно взятої речовини, проте, наприклад, для сегентової солі їх дві: -18 та 24 ˚С. Поблизу точки К'юрі в сегнетоелектриків спостерігається також різке зростання теплоємності речовини, а саме перетворення сегнетоелектрика в звичайний діелектрик, яке відбувається в цій точці є фазовим переходом *другого*[11] роду.

Діелектрична проникність ε та діелектрична сприйнятливість χ сегнетоелектриків не постійні, а залежать від напруженості $\vec{E}$ поля в речовині, в той час як для інших діелектриків ці величини є константами. Формула (2.49) для сегнетоелектриків не виконується, оскільки для таких речовин зв'язок вектора поляризованості $\vec{P}$ та напруженості $\vec{E}$ нелінійний і залежить від значень $\vec{E}$ в

[11] Фазовим переходом другого роду називається такий перехід, коли перетворення відбуваються відразу по всій речовині, без зміни її питомого об'єму.

«попередні моменти часу». Тому для них спостерігається явище діелектричного гістерезису.

Як видно з рис. 2.23, із збільшенням напруженості зовнішнього електричного поля $\vec{E}$, поляризованість $\vec{P}$ зростає, досягаючи насичення (крива *1*). Якщо після цього напруженість поля зменшувати, то зменшення $\vec{P}$ відбувається вже по кривій 2, і при $\vec{E} = 0$ сегнетоелектрик зберігає залишкову поряризованість P_0. Щоб зняти цю поряризованість, необхідно прикласти електричне поле зворотного напрямку $-E_C$. Величина E_C називається *коерцитивною силою*. Якщо ж напруженість і далі змінювати, то поляризованість буде змінюватись по кривій *3*, замикаючи петлю гістерезису.

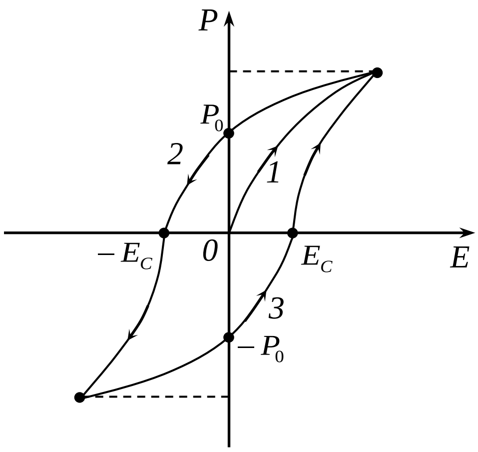


Рис. 2.23

В теперішній час відомо більше ста сегнетоелектричних речовин та їхніх твердих розчинів. Вони широко застосовуються в конденсаторах як матеріали з великим значенням діелектричної проникності.

Слід відзначити ще один цікавий клас речовин – *п'єзоелектрики*. Це кристалічні тверді тіла, в яких при стисканні або розтягу у певних напрямках виникає електрична поляризація навіть при відсутності зовнішнього електричного поля (так званий *прямий п'єзоефект*).

Якщо ж до таких речовин у певних напрямках прикладати електричне поле, то буде спостерігатись їхня механічна деформація (*зворотний п'єзоефект*). Існують такі п'єзоелектрики, кристалічні ґратки позитивних іонів яких у стані термодинамічної рівноваги[12] зміщена відносно ґратки негативних іонів. В таких речовинах електрична поляризація існую навіть без прикладання зовнішнього електричного поля, а самі вони називаються *піроелектриками*. Крім того існують такі діелектрики, які дуже довго зберігають поляризований стан після знімання електричного поля (аналогічно до постійних магнітів) – *електрети*.

[12] Макроскопічна система знаходиться в стані термодинамічної рівноваги, якщо її стан не змінюється з часом.

Лекція 9. Провідники в електричному полі

На відміну від діелектриків, у провіднику є достатня кількість вільних зарядів. При відсутності зовнішнього поля – поле у провіднику в середньому дорівнює нулю. При накладанні зовнішнього поля, електрони почнуть переміщуватись проти поля до однієї з поверхонь, а протилежна поверхня, збіднена електронами, виявиться зарядженою позитивно.

У зв`язку з цим у провіднику виникає власне внутрішнє поле $E_p$, напрямлене, як і у діелектрику проти зовнішнього поля. Але, на відміну від діелектрика, заряди в провіднику не зв`язані і будуть переміщуватись доти, доки напруженість внутрішнього поля не стане дорівнювати напруженості зовнішнього поля, а сумарне поле не стане рівним нулю:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p = 0$$

В рівноважних умовах поле всередині провідника у всіх точках $\vec{E}_p = 0$, а $\vec{E} = -grad\varphi$. Отже потенціал провідника є величина постійна. Можна сказати, що провідник є «еквіпотенціальним».

Визначимо напруженість поля поблизу поверхні провідника. Вектор напруженості буде перпендикулярним до поверхні провідника, бо поверхня еквіпотенціальна. Застосуємо теорему Гаусса для циліндричної замкнутої поверхні, яка показана на рис. 2.24. Вісь циліндра збігається з напрямом вектора напруженості, тому потік вектора напруженості через бокову поверхню циліндра рівна нулю.

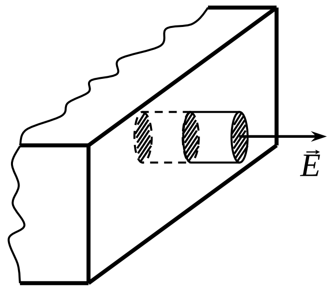


Рис. 2.24

Потік вектора через площину, яка міститься всередині провідника, також дорівнює нулю, оскільки напруженість поля всередині провідника дорівнює нулю. Залишається тільки потік вектора напруженості через праву площинку величиною dS.

$$dN_E = EdS$$

Якщо поверхнева густина заряду $\sigma = \frac{dq}{dS}$, то $dq = \sigma dS$,

$$\oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\int_S \sigma dS$$

$$EdS = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\sigma dS,$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} \quad (2.61)$$

Для вектора електричної індукції маємо:

$$D = \varepsilon\varepsilon_0 E = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} = \sigma \quad (2.62)$$

Отже, модуль вектора електричної індукції поблизу від поверхні зарядженого провідника дорівнює поверхневій густині заряду.

Провідник у зовнішньому електричному полі

При внесенні незарядженого провідника в електричне поле, носії заряду рухаються: позитивні в напрямку E, а від'ємні – в протилежну сторону. В результаті біля кінців провідника виникають заряди протилежного знаку, які називаються індукованими зарядами.

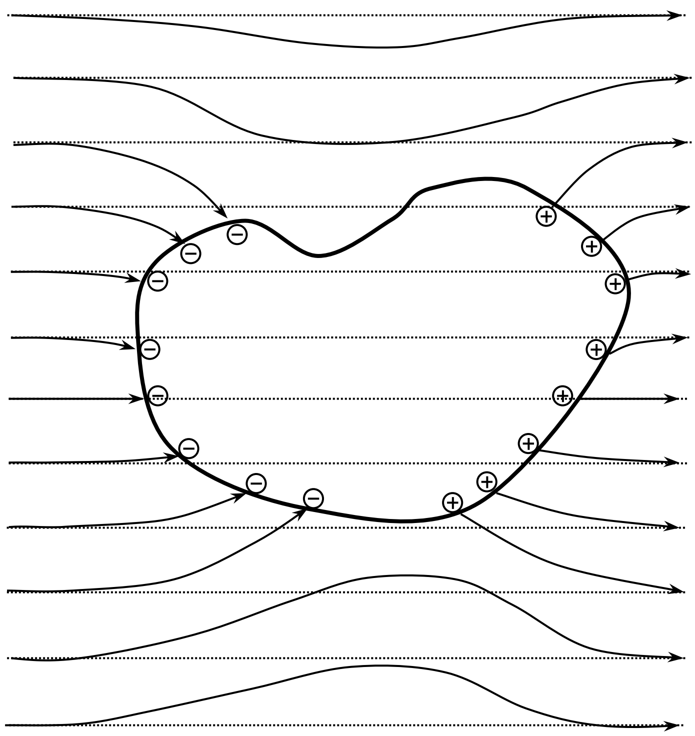


Рис. 2.25

Таким чином, нейтральний провідник, внесений в електричне поле, розриває частину ліній напруженості – вони закінчуються на від`ємних індукованих зарядах і знову починаються на додатних (рис. 2.25). Індуковані заряди розподіляються по зовнішній поверхні провідника. Якщо всередині провідника є порожнина, то при рівномірному розподілу індукованих зарядів, поле всередині неї дорівнює нулю.

На цьому базується *електростатичний захист*. Якщо якийсь прилад хочуть захистити від дії зовнішніх полів, його оточують провідним екраном. Зовнішнє поле компенсується всередині екрану виникаючими на його поверхні індукованими зарядами.

Електроємність

Якщо провіднику надати заряд q, то він розподіляється по його поверхні так, щоб напруженість поля всередині провідника була рівна нулю. Таке розподілення є єдиним. Тому якщо провіднику, який вже має заряд q, надати ще заряд такої ж величини, то другий заряд повинен розподілитись по провіднику точно таким же способом, як перший. В противному випадку, він створить в провіднику поле від нуля.

Слід відмітити, що це справедливо лише для відокремленого від інших тіл (усамітненого) провідника. Збільшення в декілька раз заряду приводить до збільшення у стільки ж разів напруженості поля в кожній точці простору навколо провідника. Відповідно у стільки ж разів зросте робота по переносу одиничного заряду з нескінченності на поверхню провідника, тобто потенціал провідника. Таким чином для усамітненого провідника:

$$q = C\varphi$$

Коефіцієнт пропорційності C між потенціалом і зарядом називається *електроємністю* (або просто *ємністю*) провідника:

$$C = \frac{q}{\varphi} \tag{2.63}$$

Отже, ємність чисельно дорівнює заряду, який необхідно надати провіднику для підвищення його потенціалу на одиницю. За одиницю ємності приймають ємність такого провідника, потенціал якого змінюється на 1 В при наданні йому заряду в 1Кл: $\left[1\Phi = \frac{1Кл}{1В}\right]$.

Найпростіша система провідників це електричний конденсатор. Він складається з двох провідників, між якими розміщений діелектрик. Ємність конденсатора: $C = \frac{q}{U}; U = \Delta\varphi$, де U - різниця потенціалів між обкладинками конденсатора (рис. 2.26)

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}$$

$$\sigma = \frac{q}{S}$$

$$E = \frac{q}{S\varepsilon_0 \varepsilon}$$

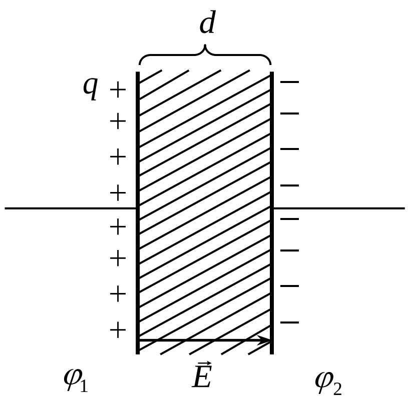


Рис. 2.26

Різниця потенціалів дорівнює роботі з переміщення одиничного позитивного заряду з однієї обкладинки на іншу:

$$U = \Delta\varphi = Ed = \frac{q}{S\varepsilon_0\varepsilon}d$$

якщо $U = \frac{q}{C}$, то ємність *плоского* конденсатора

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}} \qquad (2.64)$$

Для *циліндричного* конденсатора (рис. 2.27):

$$\boxed{C = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 h}{\ln\frac{r_2}{r_1}}}, \qquad (2.65)$$

де h - висота циліндричних обкладинок, r_1, r_2 - радіуси обкладинок.

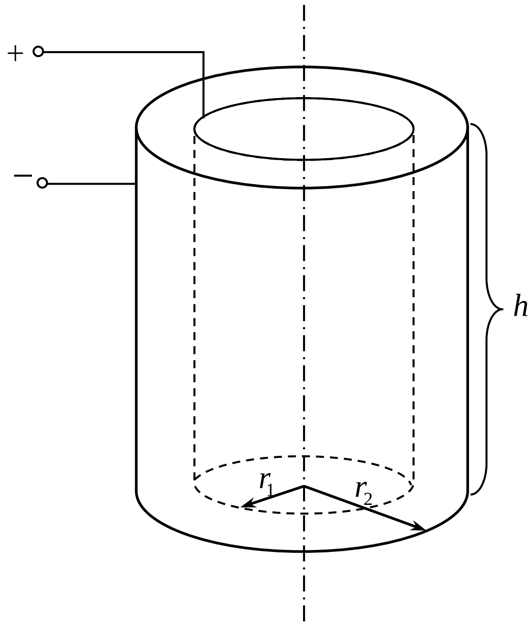


Рис. 2.27

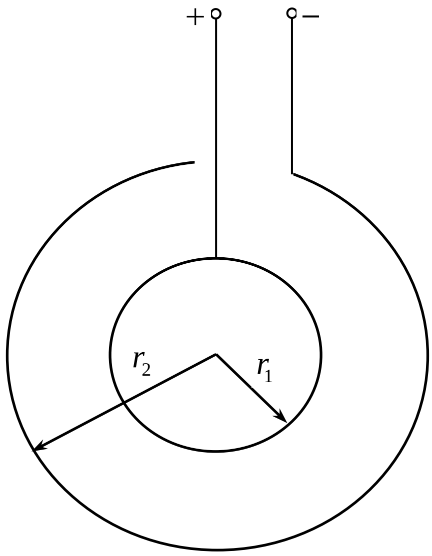


Рис. 2.28

Для *сферичного* конденсатора (рис. 2.28):

$$\boxed{C = \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}}, \qquad (2.66)$$

де r_1, r_2 - радіуси внутрішньої і зовнішньої обкладинок, відповідно. З формул (2.64) - (2.66) видно, що ємність будь-якого конденсатора пропорційна значенню діелектричної проникності середовища, яке заповнює простір між його обкладинками. Тому використання сегнетоелектрика як прошарку між обкладинками може суттєво збільшити ємність конденсатора.

Усі конденсатори характеризуються *пробивною напругою* – значенням різниці потенціалів між обкладинками, при якій відбувається пробій[13] діелектрика. Пробивна напруга залежить від властивостей діелектрика, його товщини та форми обкладинок конденсатора.

Для отримання необхідного значення ємності, конденсатори об'єднують у «батареї конденсаторів», застосовуючи при цьому послідовне та паралельне з'єднання.

Електроємність при з'єднуванні конденсаторів

При послідовному з'єднанні конденсаторів (рис. 2.29) заряд усіх обкладинок рівний за модулем, загальна напруга визначається сумою різниць потенціалів між обкладинками кожного конденсатора, а загальна ємність кола визначається формулою:

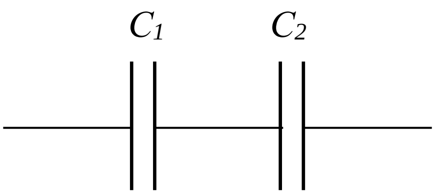


Рис. 2.29

$$\boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} \tag{2.67}$$

$$q = q_1 = q_2 \tag{2.68}$$

$$U = U_1 + U_2 \tag{2.69}$$

При паралельному з'єднанні конденсаторів (рис. 2.30) різниця потенціалів на обкладинках усіх конденсаторів однакова, загальний заряд системи конденсаторів рівний сумі зарядів кожного конденсатора, а загальна ємність кола визначається формулою:

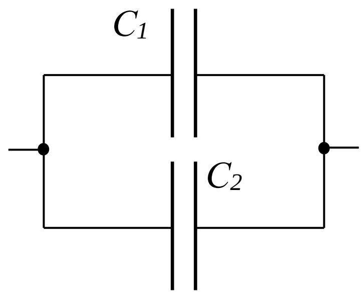


Рис. 2.30

$$\boxed{C = C_1 + C_2} \tag{2.70}$$

$$q = q_1 + q_2 \tag{2.71}$$

[13] *Пробій* – електричний розряд через шар діелектрика (в конденсаторі).

$$U = U_1 = U_2 \tag{2.72}$$

Таким чином, при паралельному з'єднанні конденсаторів загальна ємність дорівнює сумі ємностей окремих конденсаторів, а при послідовному з'єднанні – завжди менша за найменше значення ємності, існуючої в системі.

Енергія електричного поля плоского конденсатора

Енергію електричного поля плоского конденсатора можна обчислити за формулою:

$$W = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2} \tag{2.73}$$

Якщо поле однорідне[14](серед наведених конденсаторів однорідне поле характерне тільки для плоского конденсатора), то енергія розподіляється в просторі з постійною густиною ω, яка рівна енергії поля, поділеній на об'єм, який займає поле. Отже густина енергії поля, напруженістю E, створеного в середовищі з проникністю ε рівна:

$$\omega = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2 = \frac{ED}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon\varepsilon_0} \tag{2.74}$$

[14] *Однорідним* називається електростатичне поле, яке має однакову напруженість по всьому об'єму, яке воно займає

Лекція 10. Постійний електричний струм

Електричний струм – направлений рух заряджених частинок. Під таке загальне визначення підходить рух електронів у провіднику, електронні та іонні пучки, рух «дірок» у напівпровіднику, рух іонів в електролітах при електролізі тощо. Електричний струм характеризується густиною струму і силою струму.

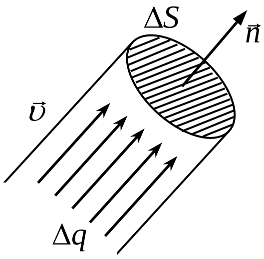


Рис. 2.31

Густиною струму $\vec{j}$ називають векторну величину, яка чисельно рівна заряду, який проходить за одиницю часу через одиничну площадку, орієнтовану перпендикулярно до напрямку носіїв заряду (рис. 2.31). Якщо за час Δt через площадку ΔS пройшов заряд Δq то вектор густини струму визначається так:

$$\vec{j} = \vec{n} \lim_{\substack{\Delta S \to 0 \\ \Delta t \to 0}} \frac{\Delta q}{\Delta S \Delta t} = \vec{n} \frac{dq}{dSdt} \qquad (2.75)$$

Густина струму є диференціальною[15] характеристикою. Величина і напрям вектора густини струму в кожній точці простору, в кожний момент часу можуть бути різними, тому з повним правом можна говорити про нестаціонарне векторне поле. Як вектор поля тут виступає вектор густини струму.

Одиниці вимірювання густини струму - $A \cdot м^{-2} = \frac{A}{м^{-2}}$. Якщо ж поле стаціонарне, то вектор густини струму в будь-якій точці не залежить від часу. Це означає, що кількість заряду, який проходить через повну площадку за одиницею часу, буде постійною. Отже, струм буде постійним.

Виразимо густину струму через характеристики зарядів, які рухаються. Нехай через площадку dS проходить перпендикулярно до неї елементарні заряди, кожен величиною e (рис. 2.32). За час Δt через цю площадку пройдуть усі заряди, які

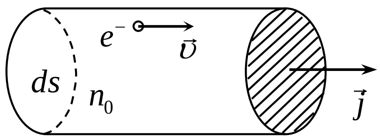


Рис. 2.32

перебувають від неї на відстані, що не перевищує vdt. Заряди, які містяться далі, не встигнуть дійти до неї. Число заряджених частинок, які пройшли через площадку, дорівнюють повному числу частинок, що містяться в об'ємі

[15] *Диференціальною* характеристикою є ті фізичні величини, які визначають властивості речовини в даній точці простору (в іншій точці цієї ж речовини ця фізична величини може бути іншою). Протилежна за змістом до диференціальної – *інтегральна* фізична величина, яка однакова для всього об'єму, який займає деяка речовина

елементарного циліндра, величиною $ds \cdot v \cdot dt$. Для обчислення повного числа частинок достатньо помножити об'єм циліндра на концентрацію n_0 :

$$dN = n_0 dS \cdot v \cdot dt$$

відповідно заряд:

$$dq = edN = en_0 v dS dt \qquad (2.76)$$

Густина струму:

$$\vec{j} = \vec{n}\frac{dq}{dSdt} = en_0\vec{v} \qquad (2.77)$$

$$\boxed{\vec{j} = en_0\vec{v}}$$

З останнього рівнняння видно, що вектор густини струму співпадає по напряму із дрейфовою[16] швидкістю в даному місці.

Сила струму через деяку поверхню S визначається повним зарядом, який проходить через цю поверхню за одиницю часу. В провіднику сила струму визначається зарядом, який проходить через переріз провідника за одиницю часу:

$$\boxed{I = \frac{dq}{dt}} \qquad (2.78)$$

Сила струму – скалярна величина і для постійного струму вона незмінна:

$$I = \frac{q}{t} \qquad (2.79)$$

Тобто при постійному струмі за одиницю часу через площу поперечного перерізу провідника проходить завжди одна і та ж кількість заряду.

Знайдемо зв`язок між силою струму і густиною струму. Для цього розглянемо фрагмент провідника, по якому тече струм. І нехай переріз провідника в загальному випадку є непостійним. Очевидно, що через площадку dS за одиницю часу пройде заряд: $j_n dS$ (рис. 2.33).

---

[16] Насправді при накладанні електричного поля носії заряду не перестають руханись хаотично. Складний рух носіїв заряду, який утворюється внаслідок накладання хаотичного і безладного теплового руху носіїв заряду із скерованим рухом під дією електричного поля називають *дрейфовим рухом*.

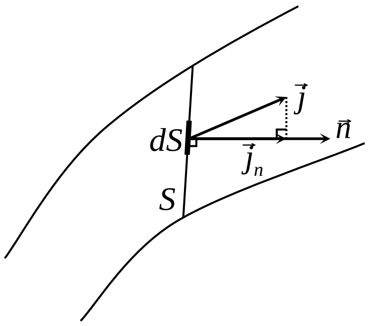


Рис. 2.33

Через всю поверхню S за одиницю часу пройде заряд:

$$\boxed{I = \int_S j_n dS} \qquad (2.80)$$

Потік густини струму через деяку поверхню S визначає силу струму через цю поверхню (рис. 2.34):
У випадку постійного струму $\vec{j} = const, \vec{j}_n = \vec{j}$. Тому:

$$I = j\int_S dS = jS$$

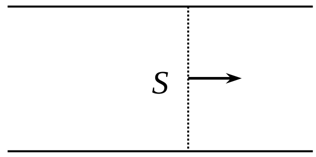


Рис. 2.34

Отже:

$$\boxed{j = \frac{I}{S}} \qquad (2.81)$$

Звідси випливає, що густина струму визначається силою струму через одиницю площі нормальну до поверхні.

Закон Ома в інтегральній формі

Омом експериментально було встановлено, що в металевих провідниках і в далеких інших середовищах при не дуже великих напругах прикладених до кінців провідника, сила струму в провіднику пропорційна прикладеній напрузі:

$$I = \sigma \cdot U \qquad (2.82)$$

Коефіцієнт пропорційності σ дістав назву електропровідності провідника. Найчастіше σ замінюють іншим коефіцієнтом пропорційності:

$$\sigma = \frac{1}{R}, \qquad (2.83)$$

де R - опір провідника. Отже закон *Ома* в інтегральній формі (для однорідної ділянки кола) можна зависати у вигляді:

$$I = \frac{U}{R}, \qquad (2.84)$$

Тобто: **сила струму в провіднику прямо пропорційна прикладеній до нього напрузі та обернено пропорційна його опору**.

(1789-1854)

Георг Симон Ом

Опір провідника правильної форми може бути обчислений за формулою:

$$R = \rho \frac{l}{S}, \tag{2.85}$$

де ρ - питомий опір[17], l - довжина провідника, S- площа його поперечного перерізу.

Фізична величина, обернена до питомого опору називається *питомою електропровідністю*:

$$\gamma = \frac{1}{\rho} \tag{2.86}$$

Закон Ома в диференціальній формі

Виділимо в середовищі, по якому протікає постійний струм, трубку струму (рис. 2.35). Якщо dl мале, то можна вважати, що $\Delta S_1 \approx \Delta S_2$ і $\vec{j}$ в обох випадках однакове. Тому можна застосувати закон Ома в інтегральній формі:

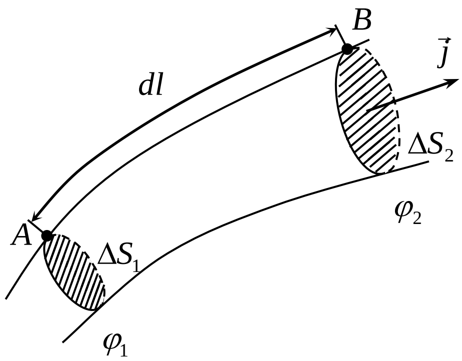


Рис. 2.35

$$I = \frac{U}{R}$$

Як відомо, для провідника правильної форми можна застосувати формулу (2.71). Переходячи до нескінченно малих величин можна записати:

$$I = \frac{dU}{dR} \tag{2.87}$$

$$dR = \rho \frac{dl}{\Delta S} \tag{2.88}$$

Напруга – це різниця потенціалів, тому:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2$$

[17] В СІ під *питомим опором* розуміють опір куба, ребро якого дорівнює 1 м при умові, що струм протікає в напрямку одного з ребер. $\rho = \frac{RS}{l} \Rightarrow [\rho] = Ом \cdot м$

Підставляючи останнє рівняння та (2.88) у (2.87) отримаємо:

$$I = \frac{1}{\rho}\frac{\Delta S}{dl}d(\varphi_1 - \varphi_2) \qquad (2.89)$$

Використовуючи (2.86) замінимо питомий опір на питому провідність та розділимо змінні:

$$\frac{I}{\Delta S} = \gamma\,\frac{d(\varphi_1 - \varphi_2)}{dl} \qquad (2.90)$$

Відповідно до (2.21), зв’язок напруженості та потенціалу може бути поданий як $\vec{E} = -grad\varphi$, що в одновимірному випадку приймає вигляд:

$$E = -\frac{d(\varphi_2 - \varphi_1)}{dl}$$

Врахувавши це, а також те, що $\frac{I}{\Delta S} = j$, рівняння (2.90) можна подати у вигляді:

$$j = \gamma E \qquad (2.91)$$

Тобто закон Ома в диференціальній формі можна сформулювати так:

Густина сили струму в провіднику дорівнює добутку питомої провідності і напруженості електричного поля

$$\vec{j} = \gamma\vec{E} \qquad (2.92)$$

Закон Джоуля – Ленца інтегральній формі.

Нехай ми маємо ділянку кола, в точках А і В якого потенціали рівні *φ1* та *φ2*, відповідно (рис. 2.36). Відповідно до (2.79) та (2.6) можна записати:

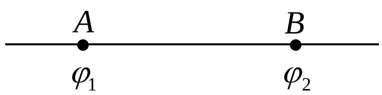
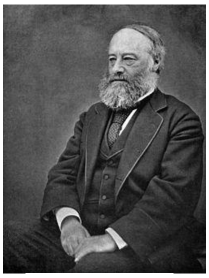


Рис. 2.36

$$q = I \cdot t$$

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Замінюючи різницю потенціалів на напругу отримаємо формулу для роботи струму:



(1818-1889)

Джеймс Прескотт Джоуль

$$\boxed{A = UIt} \tag{2.93}$$

А для потужності струму:

$$\boxed{P = \frac{A}{t} = UI} \tag{2.94}$$

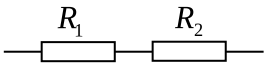
Якщо провідник не рухається, то вся робота йде на нагрівання провідника, тобто на збільшення його внутрішньої енергії.

Розглянемо послідовне і паралельне з’єднання провідників:

1. Послідовне з’єднання провідників:

(1804-1865)

Ленц Емілій Християнович



$$\boxed{R = R_1 + R_2} \tag{2.95}$$

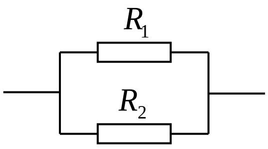
$$I = I_1 = I_2 \tag{2.96}$$

$$U = U_1 + U_2 \tag{2.97}$$

$$\boxed{Q = I^2 Rt} \tag{2.98}$$

При послідовному з’єднанні сильніше нагрівається той провідник, опір якого більший.

2. Паралельне з’єднання провідників:



$$\boxed{\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \tag{2.99}$$

$$I = I_1 + I_2 \tag{2.100}$$

$$U = U_1 = U_2 \tag{2.101}$$

$$\boxed{Q = \frac{U^2}{R} t} \tag{2.102}$$

При паралельному з’єднанні нагрівається сильніше той провідник, опір його менший. Формули (2.98) та (2.102) являють собою закон *Джоуля-Ленца* в інтегральній формі.

Закон Джоуля – Ленца в диференціальній формі

Виділимо в провіднику елементарний циліндричний об’єм $dV = dSdl$ (вісь циліндра співпадає з напрямком струму). Опір цієї частини провідника рівний $R = \rho\frac{dl}{dS}$. За законом Джоуля-Ленца, за час dt у цьому об’ємі виділиться теплота:

$$dQ = I^2Rdt = \rho\frac{dl}{dS}(jdS)^2dt = \rho j^2dVdt \tag{2.103}$$

Густина теплової потужності (ω) – це енергія, яка виділяється в одиниці об’єму середовища за одиницю часу, по якому протікає постійний струм:

$$\boxed{\omega = j^2\rho} \tag{2.104}$$

Використовуючи закон Ома в диференціальній формі (2.91) а також (2.86) для густини теплової потужності можна записати:

$$\boxed{\omega = \gamma E^2} \tag{2.105}$$

Або:

$$\boxed{\omega = jE} \tag{2.106}$$

У векторній формі:

$$\boxed{\omega = \left(\vec{j}\vec{E}\right)} \tag{2.107}$$

Електрорушійна сила

Розглянемо електричне коло, що складається із резистора R та джерела струму (рис. 2.37). За напрям струму приймають напрям в якому рухаються позитивні заряди. Будемо вважати, що в нашому випадку струм зумовлений рухом позитивних зарядів.

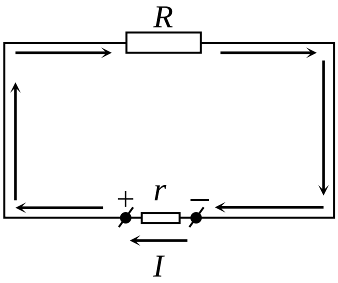


Рис. 2.37

В зовнішній частині кола заряди рухаються в нестаціонарному електричному полі і позитивні заряди можуть переміщуватися лише від більшого потенціалу до меншого (від «+» до «-»). В джерелі позитивні заряди переміщуються від меншого потенціалу до більшого. Таке переміщення не може відбуватися під дією стаціонарного електричного поля.

Отже, в джерелі діє деяка стороння сила[18] і ця сила переміщує заряди від меншого потенціалу до більшого, завдяки чому на кінцях ділянки кола підтримується різниця потенціалів і в колі протікає електричний струм.

Фізична величина, яка визначається роботою, що здійснюється сторонніми силами при переміщенні одиничного позитивного заряду називається *електрорушійною силою* (е.р.с.):

$$\varepsilon = \frac{A}{q'} \qquad (2.108)$$

Стороння сила $F_{ст}$, яка діє на заряд q' може бути виражена як:

$$F_{ст} = E_{ст}q', \qquad (2.109)$$

де $E_{ст}$ - напруженість поля сторонніх сил.

Робота цих сторонніх сил по переміщенню заряду q' на замкнутій ділянці кола рівна:

$$A = \oint F_{ст}dl = q'\oint E_{ст}dl \qquad (2.110)$$

Розділивши останнє рівняння на q' отримаємо вираз для е.р.с., яка діє у колі:

$$\varepsilon = \oint E_{ст}dl \qquad (2.111)$$

[18] Природа сторонніх сил може бути різною: в гальванічних елементах вони виникають за рахунок енергії хімічних реакцій між електродами, в генераторі – за рахунок механічної енергії обертання ротора і т.п.

Тобто, е.р.с., що діє у замкнутому колі, може бути визначена як циркуляція вектора напруженості сторонніх сил.

Напругою U на ділянці кола називається фізична величина, яка визначається роботою, яка здійснюється сумарним полем електростатичних (кулонівських) та сторонніх сил при переміщенні одиничного позитивного заряду на даній ділянці кола:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{1,2} \tag{2.112}$$

Отже, напруга на кінцях ділянки кола рівна різниці потенціалів тільки в тому випадку, якщо на цій ділянці не діє е.р.с.

Закон Ома для неоднорідної ділянки кола

До цього часу ми розглядали закон Ома для однорідної ділянки кола (2.84), тобто для такої, на якій відсутня е.р.с. Якщо ж на ділянці кола є е.р.с., то така ділянка є *неоднорідною*.

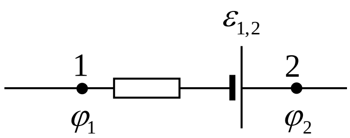


Рис. 2.38

Розглянемо таку ділянку кола (рис. 2.38). Нехай між точками кола *1* та *2* існує різниця потенціалів φ_1 - φ_2 та діє е.р.с. $\varepsilon_{1,2}$.

Якщо струм проходить по нерухомим провідникам, то робота $A_{1,2}$ усіх сил (сторонніх та електростатичних), яка здійснюється над зарядами, за законом збереження і перетворення енергії дорівнює кількості теплоти, яка виділяється на цій ділянці кола. Робота сил, яка здійснюється над зарядом q_0, на ділянці *1-2*:

$$A_{1,2} = q_0\varepsilon_{1,2} + q_0(\varphi_1 - \varphi_2) \tag{2.113}$$

Е.р.с. $\varepsilon_{1,2}$, так як і сила струму *I*, є величиною скалярною, тобто необхідно враховувати її знак залежно від знаку роботи сторонніх сил. Якщо е.р.с. сприяє руху додатних зарядів у вибраному напрямку (від т.*1* до т.*2*), то $\varepsilon_{1,2}>0$, якщо ж вона перешкоджає руху додатних зарядів – то $\varepsilon_{1,2}<0$. Протягом часу τ в провіднику виділяється кількість теплоти (згідно (2.98), враховуючи (2.79)):

$$Q = I^2Rt = IR \cdot It = IRq_0. \tag{2.114}$$

З формул (2.113) та (2.114) отримаємо:

$$IR = (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{1,2} \tag{2.115}$$

звідси:

$$\boxed{I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 \pm \varepsilon_{1,2}}{R}} \qquad (2.116)^{19}$$

Вирази (2.115) та (2.116) і являють собою *закон Ома для неоднорідної ділянки кола* в інтегральній формі

Якщо на даній ділянці кола джерело струму відсутнє ($\varepsilon_{1,2}$=0), то формула (2.116) перетворюється у закон Ома для однорідної ділянки кола (2.84). У випадку замкнутого кола $\varphi_1 = \varphi_2$. Рівняння (2.116) набуває вигляду:

$$I = \frac{\varepsilon_{1,2}}{R_{заг}}, \qquad (2.117)$$

де під $R_{заг}$ слід розуміти сумарний опір усього кола (у зовнішній та внутрішній частинах), тобто $R_{заг} = R + r$. Тому закон Ома для замкнутого (повного) кола має вигляд:

$$\boxed{I = \frac{\varepsilon}{R + r}} \qquad (2.118)$$

Якщо коло розімкнуте, то струм у ньому відсутній і, згідно закону Ома (2.116):

$$(\varphi_2 - \varphi_1) = \varepsilon_{1,2}$$

Тобто е.р.с., яка діє у розімкнутому колі, рівна різниці потенціалів на її кінцях. Таким чином, для того, що знайти е.р.с. джерела струму необхідно виміряти різницю потенціалів на його клемах при розімкнутому колі.

У тому випадку, коли ми маємо кілька послідовно чи паралельно з’єднаних однакових джерел живлення, то закон Ома для повного кола записується, відповідно:

$$I = \frac{n\varepsilon}{R + nr} \qquad (2.119)$$

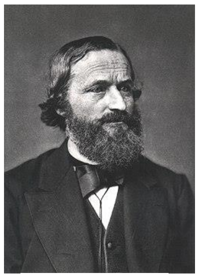
$$I = \frac{\varepsilon}{R + \frac{r}{n}} \qquad (2.119а)$$

[19] Знак «±»відображає той факт, що джерело воже бути ввімкнене за струмом, так як зображено на рис. 2.38 (тоді слід писати «+»), або ж навпаки, проти струму (тоді слід писати «-»).

де n- кількість джерел живлення. Якщо ж джерела живлення мають різний внутрішній опір, різну ерс і ще й ввімкнуті в коло по-різному, то краще всього скористуватись правилами Кірхгофа для розгалужених кіл.

Правила Кірхгофа для розгалужених кіл

Безпосередній розрахунок розгалужених кіл, які містять кілька замкнутих контурів, кожен з яких може мати кілька джерел е.р.с., легко здійснюється завдяки двом правилам Кірхгофа.



(1824-1887)

Густав Роберт Кірхгоф

Перше правило *Кірхгофа*:

Алгебраїчна сума струмів, які сходяться в вузлі[20] рівна нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0 \qquad (2.120)$$

<u>Приклад</u>

Для рис. 2.39 перше правило Кірхгофа запишеться так:

$$I_5 - I_1 - I_2 + I_3 - I_4 = 0$$

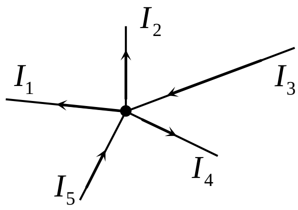


Рис. 2.39

Слід пам'ятати, що кількість різних рівнянь, записаних за першим законом Кірхгофа завжди на одиницю менше, ніж кількість вузлів у колі.

Друге правило Кірхгофа:

В довільному замкнутому контурі електричного кола алгебраїчна сума спадів напруг[21] рівна алгебраїчній сумі е.р.с., які існують в цьому контурі:

$$\sum_{i=1}^{n} I_i R_i = \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k \qquad (2.121)$$

При записі рівнянь за другим правилом Кірхгофа слід враховувати *правило знаків*: якщо при обході контуру напрямок струму через елемент кола співпадає з напрямком обходу, то спад напруги через цей елемент потрібно брати із знаком «+», якщо ж протилежний до напрямку обходу – то із знаком «-», відповідно, якщо при обході контуру джерело е.р.с. ми обходимо від негативного полюса до

[20] Довільна точка розгалуження кола, в якій сходяться не менше трьох провідників зі струмом, називається *вузлом*. При цьому струм, який входить у вузол, вважається позитивним, а струм, який виходить з вузла – негативним.

[21] *Спадом напруги* називається добуток сили струму,яка протікає у ділянці кола на опір цієї ділянки: $I_i R_i$

позитивного, то таке значення е.р.с. необхідно записувати із знаком «+», а якщо навпаки (від позитивного до негативного) – то із знаком «-».

<u>Приклад</u>

Запишемо рівняння за другим правилом Кірхгофа для різних ділянок кола, зображеного на рис. 2.35. Напрямки обходу контурів показані стрілочками, відповідно.

Для контуру *ABDE*:

$$-I_1r_1 - I_1R_1 - I_3r_3 - I_3R_3 = -\varepsilon_1 - \varepsilon_3,$$

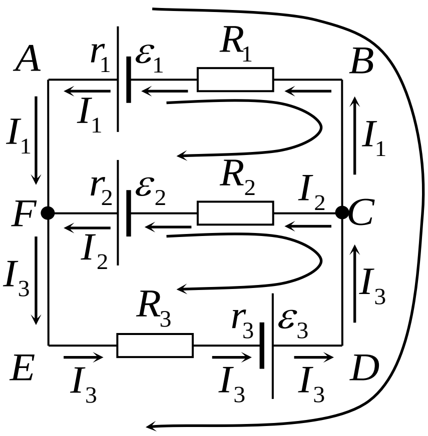


Рис. 2.35

для контуру *ABCF*:

$$-I_1r_1 - I_1R_1 + I_2R_2 = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2,$$

для контуру *FCDE*:

$$-I_2r_2 - I_2R_2 - I_3r_3 - I_3R_3 = -\varepsilon_2 - \varepsilon_3.$$

Слід відзначити, що кінцевий результат абсолютно не залежить від вибору напрямку обходу контуру. Довільно вибрані напрямки струмів перед початком запису рівнянь також не впливають на розв'язок.

Якщо ж в результаті обчислень якийсь із струмів вийшов із знаком «-», то фізично це означає, що реально цей струм тече в протилежну сторону до тої, яка була вибрана.

Вимірювання сили струму та напруги

Для вимірювання сили струму чи напруги на ділянці кола використовують амерметр і вольтметр, відповідно. Дуже часто на практиці використовують універсальний прилад – мультиметр, який окрім вже згаданих фізичних величин може вимірювати температуру, ємність, частоту, електричний опір тощо. Важливим моментом у процесі вимірювання є спосіб вмиканння приладу в електричне коло: амперметр підєднується послідовно до елемента кола (рис. 2.34), на якому потрібно поміряти силу струму, а вольтметр – паралельно (рис. 2.35).

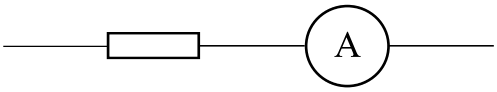


Рис. 2.34

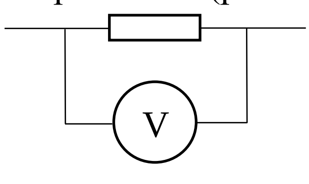


Рис. 2.35

В ідеальному випадку опір амперметра наближається до нуля, оскільки своєю присутністю у колі амперметр не має змінювати значення напруги, яке припадає на той елемент кола, який нас цікавить. Опір вольтметра – навпаки, в ідеальному випадку має наближатись до нескінченності, оскільки своєю присутнісю в електричному колі він не має змінювати силу струму через досліджуваний елемент кола.

Абсолютно зрозуміло, що в реальному випадку і амперметр і вольтметр (як і будь-які інші вимірювальні прилади) мають свій опір. І своєю присутністю вони точно змінюватимуть існуючі значення сили струму і напруги через певний елемент кола. Але, правильно підбираючи вимірювальний прилад, цей вплив можна зробити мізерно малим. Для цього необхідно, щоб опір ампермета був значно меншим, а опір вольтметра значно більшим ніж опір досліджуваного елемента кола.

У тих випадках, коли потрібно збільшити межі вимірювального приладу, для амперметра використовують шунт (рис. 2.36), а для вольтметра додатковий опір (рис. 2.37).

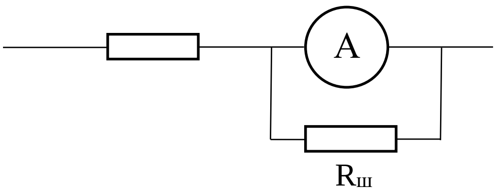


Рис. 2.36

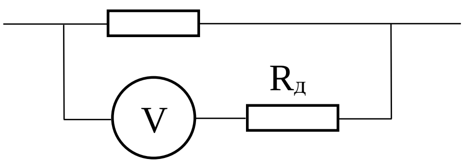


Рис. 2.37

Використовуючи закон Ома, можна показати, що величину опору шунта та додаткового опору можна розрахувати за формулами:

$$R_{ш} = \frac{I_A R_A}{I - I_A} \qquad (2.122)$$

де R_A- опір амепметра, I_A- максимальне значення струму на шкалі приладу, I – нова межа вимірювання приладу.

$$R_{д} = \frac{(U - U_V) R_V}{U_V} \qquad (2.123)$$

де $R_{Д}$- опір вольтметра, U_V- максимальне значення струму на шкалі приладу, U – нова межа вимірювання приладу.

Модуль 2

Тема 3. Магнетизм

Лекція 11. Магнітне поле постійного струму

Статичне магнітне поле створюється електричними зарядами, які рухаються. Воно здатне взаємодіяти тільки з рухомими зарядами.

Розглянемо два паралельні провідники, які перебувають на відстані d, і по яким протікають електричні струми, силами I_1 та I_2.

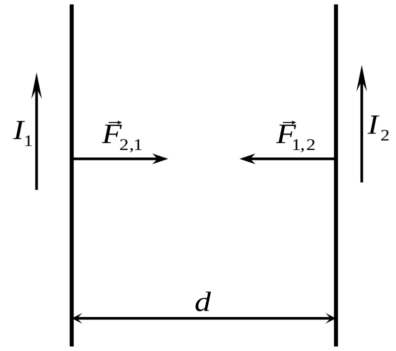


Рис. 3.1

При цьому виявляється, що провідники залежно від відносного напрямку струмів можуть притягуватись або відштовхуватись. Закон *Ампера* дозволяє знайти силу їхньої взаємодії:

Сила взаємодії на одиницю довжини провідників прямо пропорційна добутку величин струмів і обернено пропорційна відстані між ними:

$$F_{1,2} = \frac{\mu_0 \mu I_1 I_2}{2\pi d}, \quad (3.1)$$

де μ_0=1,26·10^{-6} $\frac{\text{Гн}}{\text{м}}$ - магнітна стала, μ - магнітна проникність.

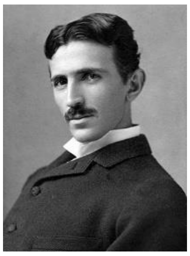
(1775-1836)

Андре-Марі Ампер

Збільшення сили струму, тобто збільшення швидкості руху зарядів призводить до збільшення сил взаємодії. Якщо струм в одному з провідників припиняється, то сила взаємодії зникне.

Взаємодія струмів здійснюється через магнітне поле. Вперше це спостерігав Ерстед у 1820 році. *Магнітне поле* – це векторне поле сил, тому воно характеризується такими самими величинами, що і інші силові поля. Розглянемо характеристики магнітного поля в порівнянні з характеристиками електростатичного поля.

Електростатичне поле	**Магнітне поле**
1. Напруженість $\vec{E}$	1. Напруженість $\vec{H}$
2. Електрична індукція $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$	2. Магнітна індукція $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$
3. Електрична стала $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{Ф}{м}$	3. Магнітна стала $\mu_0 = 1{,}26 \cdot 10^{-6}\,\frac{Гн}{м}$
4. Діелектрична проникність $\varepsilon = 1 + \chi$	4. Магнітна проникність $\mu = 1 +$æ
5. Діелектрична сприйнятливість χ характеризує ступінь поляризації, тобто ступінь поляризації просторового розподілу зарядів у діелектриків при накладанні на нього зовнішнього електричного поля $\vec{E}_0$. В діелектрику створюється внутрішнє поле з напруженістю $\vec{E}_Д = \chi\vec{E}$, яке напрямлене протилежно до напруженості зовнішнього поля. Напруженість результуючого поля: $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_Д$	5. Магнітна сприйнятливість æ характеризує ступінь намагніченості речовини, тобто ступінь деформації просторового розподілу магнітних моментів атомів при накладанні зовнішнього магнітного поля $\vec{H}_0$. В речовині створюється внутрішнє поле з напруженням $\vec{H}_m =$æ$\vec{H}$ Напруженість результуючого поля: $\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}_m$
6. Сила, що діє на заряд – це сила Кулона $\vec{F} = q\vec{E}$. Для позитивного заряду вона напрямлена по вектору напруженості та може виконувати деяку роботу.	6. Сила, яка діє на ті заряди, які рухаються – сила Лоренца: $\vec{F} = q[\vec{v} \cdot \vec{B}] = \mu\mu_0 q[\vec{v} \cdot \vec{H}]$ Вона напрямлена перпендикулярно до швидкості і не виконує роботу.



(1856-1943)

Нікола Тесла

Магнітне поле, на відміну від електричного, не здійснює дію на нерухомий заряд, сила виникає тільки тоді, коли заряд рухається. Провідник із струмом представляє собою електрично нейтральну систему зарядів, я якій заряди одного знаку рухаються в одну сторону, а заряди іншого знаку рухаються в протилежну сторону (або знаходяться с стані спокою). Звідси слідує, що магнітне поле породжується рухомими зарядами.

Таким чином, рухомі заряди (струми) змінюють властивості навколишнього простору – створюють у ньому магнітне поле. Це поле проявляється в тому, що на рухомі у ньому заряди (струми) діють певні сили. Магнітне поле – це різновид електромагнітного поля. Силовою характеристикою є напруженість поля. Для зручності вводять поняття ліній напруженості і ліній індукцій. Індукція магнітного поля вимірюється в теслах.

Лінія індукції (напруженості) – це лінія, дотична до якої в кожній точці співпадає з напрямом напруженості поля в цій точці. Лінії напруженості проводять так, щоб їхня густина в певному місці була рівна або пропорційна напруженості поля в цьому місці. Таким чином силова лінія виявляється замкнутою, на відміну від розімкнених силових ліній електростатичного поля. Дослід показує, що для магнітного поля, як і для електричного справедливий *принцип суперпозиції* :

Поле $\vec{B}$ породжене декількома рухомими зарядами (струми) дорівнює векторній сумі полів $\vec{B}_i$, створених кожним рухомим зарядом (струмом) окремо:

$$\boxed{\vec{B} = \sum_{i=1}^{n} \vec{B}_i} \qquad (3.2)$$

Закон Біо-Савара-Лапласа

Цей закон дозволяє знайти вектор напруженості або вектор індукції магнітного поля, створеного елементом струму в даній точці простору (рис. 3.2).

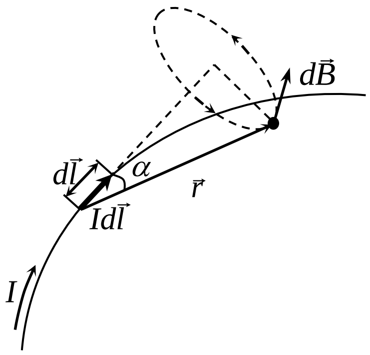
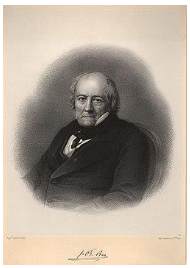


Рис. 3.2

Математичний запис цього закону може бути поданий у векторній (3.3) та (3.4) або скалярній (3.3а) та (3.4.а) формах:

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0 I[d\vec{l}\vec{r}]}{4\pi r^3} \quad dB = \frac{\mu\mu_0 I dl \sin\alpha}{4\pi r^2} \qquad (3.3)\ (3.3а)$$

$$d\vec{H} = \frac{I[d\vec{l}\vec{r}]}{4\pi r^3} \quad dH = \frac{I dl \sin\alpha}{4\pi r^2} \qquad (3.4)\ (3.4а)$$



(1774-1862)

Жан-Батіст Біо

(1791-1841)

Фелікс Савар

(1749-1827)

П'єр-Симон Лаплас

де $Id\vec{l}$- елемент струму (вектор, направлений вздовж напрямку струму), $\vec{r}$ - радіус-вектор, проведений від елемента струму до даної точки простору, α – кут між елементом струму і радіус-вектором.

Напрями векторів $\vec{H}$ і $\vec{B}$ визначаються за правилом правого свердлика[22].
У магнітному полі, як і в електричному діє принцип суперпозиції. Для визначення вектора напруженості або вектора магнітної індукції у випадку провідника скінченої довжини потрібно скласти всі елементарні вектори $d\vec{H}$ або $d\vec{B}$, тобто обчислити інтеграл:

$$\vec{H} = \int_l \vec{H} = \int_l \frac{I[d\vec{l}\vec{r}]}{4\pi r^3} \text{ або } \vec{B} = \int_l d\vec{B} = \int_l \frac{\mu\mu_0 I[d\vec{l}\vec{r}]}{4\pi r^3}$$

Приклад.

1. Поле провідника зі струмом нескінченної довжини (рис. 3.3).

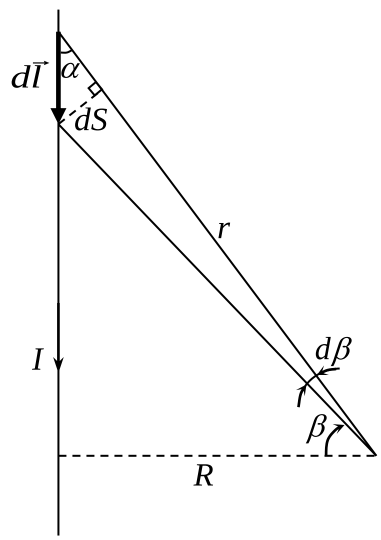


Рис. 3.3

$$dH = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{Idl\sin\alpha}{r^2}$$

$$\sin\alpha = \frac{dS}{dl}$$

$$dS = dl\sin\alpha$$

$$dH = \frac{I}{4\pi r^2} dS$$

$$\frac{dS}{r} \approx d\beta$$

$$dH = \frac{I}{4\pi r} d\beta$$

$$\cos\beta = \frac{R}{r}; \frac{1}{r} = \frac{\cos\beta}{R}$$

$$dH = \frac{I}{4\pi R} \cdot \cos\beta d\beta; \; H = \frac{I}{4\pi R} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos\beta d\beta = \frac{I}{4\pi R} \sin\beta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = \frac{I}{2\pi R}$$

[22] Якщо ручку свердлика обертати так, щоб поступальний рух свердлика співпадав з напрямком струму в провіднику, то дотична до траєкторії, яку буде описувати ручка свердлика буде співпадати з напрямком вектора напруженості (індукції) магнітного поля

$$\boxed{H = \frac{I}{2\pi R}} \qquad (3.5)$$

2. Магнітне поле в центрі колового струму.

Нехай ми маємо коловий провідник відомого радіусу r, по якому тече струм, силою I. Розіб'ємо коло на елементи струму $Id\vec{l}$ (рис. 3.4). Знайдемо напруженість поля, створену кожним струмом. Загальна напруженість поля буде рівна сумі напруженостей, які створюють кожен з елементів струму:

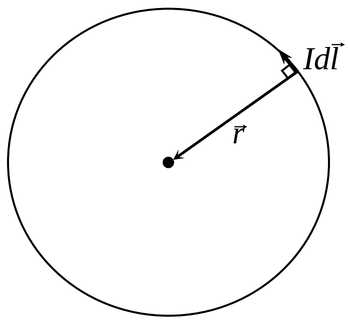


Рис. 3.4

$$dH = \frac{1}{4\pi}\frac{Idl\sin\alpha}{r^2}$$

$$\sin 90^0 = 1$$

$$dH = \frac{1}{4\pi}\frac{Idl}{r^2}$$

$$H = \oint \frac{1}{4\pi}\frac{Idl}{r^2} = \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{I}{r^2}\oint dl = \frac{I}{4\pi r^2}\cdot 2\pi r = \frac{I}{2r}$$

$$\boxed{H = \frac{I}{2r}} \qquad (3.6)$$

Напруженість магнітного поля провідника нескінченної довжини зі струмом буде постійною, якщо відстань до нього $R = const$.

3. Магнітне поле кільця струму на відстані *r* від його центру (рис. 3.5).

Кожен із векторів $d\vec{B}$ вносить вклад $dB_{\parallel}$ в результуючий вектор $\vec{B}$, який спрямований вздовж осі контура. Усі складові $dB_{\perp}$ будуть компенсувати одна одну, оскільки будуть спрямовані в протилежні сторони, тому у результуюче значення вектора магнітної індукції вкладу не робитимуть. Для кожної складової $dB_{\parallel}$ можна записати:

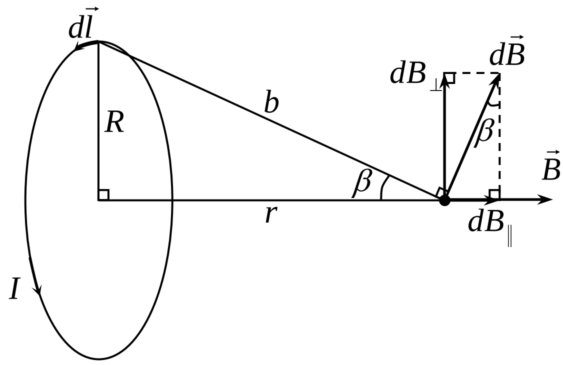


Рис. 3.5

$$dB_{\parallel} = dB\sin\beta \qquad (3.7)$$

Згідно (3.3а) маємо:

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \sin\alpha}{4\pi b^2}, \tag{3.8}$$

де α – кут між векторами $d\vec{l}$ і $\vec{b}$. З рисунка видно, що α=90˚. Тому останнє рівняння запишеться у вигляді:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Idl}{b^2} \tag{3.9}$$

$$sin\,\beta = \frac{R}{b} \tag{3.10}$$

Підставляючи в (3.7) рівняння (3.9) та (3.10), отримаємо:

$$dB_{\parallel} = dB \cdot \frac{R}{b} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Idl}{b^2} \cdot \frac{R}{b} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{IR}{b^3} dl$$

$$B = \oint dB_{\parallel} = \oint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{b^3} dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{b^3} \oint dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{b^3} \cdot 2\pi R = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{b^3} \tag{3.11}$$

З рисунка видно, що:

$$b^2 = R^2 + r^2$$

Тому рівняння (3.11) можна подати у вигляді:

$$\boxed{B = \frac{\mu_0}{2} IR^2 (R^2 + r^2)^{-\frac{3}{2}}} \tag{3.12}$$

Закон повного струму

В електростатичному полі циркуляція вектора напруженості вздовж будь-якого замкнутого контуру дорівнює нулю. Це означає, що робота на будь-якій замкнутій траєкторії дорівнює нулю:

$$\oint_{\gamma} \vec{E} d\vec{l} = 0$$

У свою чергу, це означає що електричне поле потенціальне. Але в магнітному полі циркуляція вектора напруженості не дорівнює нулю: $\int_l \vec{H} d\vec{l} \neq 0$. Покажемо це на прикладі магнітного поля прямого провідника нескінченної довжини, по якому тече постійний струм силою *I*.

Напруженість поля в будь-якій точці на відстані *R* від провідника постійна, напрямлена по дотичній до магнітної силової лінії і дорівнює: $H = \frac{I}{2\pi R}$.

Циркуляція вектора напруженості вздовж магнітної силової лінії, тобто вздовж кола радіуса *R*:

$$\oint_\gamma H dl = \oint_\gamma \frac{I}{2\pi r} dl = \frac{I}{2\pi r} \cdot 2\pi r = I \neq 0 \quad (3.13)$$

Отже, циркуляція вектора напруженості магнітного поля дорівнює силі струму в провіднику, що пронизує площу контуру. Вона не дорівнює нулю, і магнітне поле не є потенціальним.

Для довільного числа провідників зі струмом і для будь-якої форми справедливий *закон повного струму*:

Циркуляція вектора напруженості магнітного поля вздовж довільного замкнутого контуру дорівнює алгебраїчній сумі струмів, охоплених цим контуром:

$$\oint_\gamma \left(\vec{H} d\vec{l}\right) = \sum_{i=1}^{n} I_i \quad (3.14)$$

Це інтегральна форма закону повного струму.

Приклад.

1. Користуючись теоремою повних струмів, визначимо значення напруженості магнітного поля на осі тороїдальної котушки. Розглянемо таку котушку, по якій тече струм силою *I*, а кількість витків рівна *N* (рис. 3.6).

Магнітне поле тороїдальної котушки практично повністю зосереджене в тороїдальному просторі. Якщо виконується умова *r*>>*d*, то поле в тороїді буде практично однорідне. Визначимо напруженість поля на центральній осі тороїда. Ця напруженість є дотичною до даної осі її напрям визначається за правилом свердлика. Очевидно, що напруженість поля в кожній точці осі є постійною, оскільки відстань до центра тороїда і його діаметр незмінні.

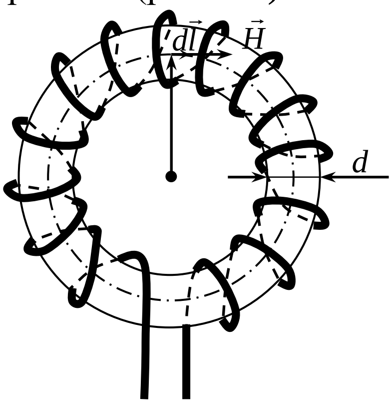


Рис. 3.6

Тоді, відповідно до (3.14), маємо:

$$\oint_{\gamma} (\vec{H} d\vec{l}) = \sum_{i=1}^{n} I_i$$

Кут між векторами $\vec{H}$ і $d\vec{l}$ рівний нулю, тому їхній скалярний добуток дорівнює добутку модулів цих векторів (cos 0˚=1). Отже:

$$\oint_{\gamma} H dl = I \cdot N$$

$$H \oint_{\gamma} dl = IN$$

$$H \cdot 2\pi r = IN$$

$$\boxed{H = I \frac{N}{2\pi r}} \qquad (3.15)$$

Позначимо кількість витків, що припадає на одиницю довжини тороїда через n:

$$n = \frac{N}{2\pi r} \qquad (3.16)$$

Тоді:

$$\boxed{H = In} \qquad (3.17)$$

Іноді добуток In називають ампер-витками на метр.

2. Розглянемо соленоїд. Його можна уявити як частину тороїдальної котушки, радіус якої *r* дуже великий (рис. 3.7).

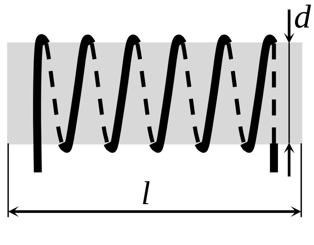


Рис. 3.7

Тому для соленоїда, особливо для точок, близьких до його середини, напруженість поля буде визначатись тою ж формулою (3.17). Слід відзначити головну умову виконання цієї формули для соленоїда – його довжина має бути набагато більшою за його діаметр: $l>>d$.

Теорема Гаусса для магнітного поля

Потоком вектора магнітної індукції (магнітним потоком) через довільну площадку dS називається скалярна фізична величина, яка рівна:

$$d\Phi_B = \vec{B}d\vec{S} = B_n dS, \tag{3.18}$$

де B_n - проекція вектора $\vec{B}$ на напрямок нормалі до площадки dS (α – кут між векторами $\vec{n}$ і $\vec{B}$), $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$ - вектор, модуль якого рівний dS, а напрямок співпадає з напрямком нормалі $\vec{n}$ до площадки. Потік вектора $\vec{B}$ може бути як додатним, так і від'ємним в залежності від знаку cosα. Зазвичай цей потік пов'язують з певним контуром, по якому тече струм. В такому випадку додатний напрямок нормалі до контуру пов'язаний із струмом та визначається правилом правого свердлика. Таким чином, магнітний потік, створений контуром через поверхню, обмежену ним самим, завжди додатний.

Потік вектора магнітної індукції Φ_B через довільну поверхню S рівний:

$$\Phi_B = \int_S \vec{B}d\vec{S} = \int_S B_n dS \tag{3.19}$$

Для однорідного поля і плоскої поверхні, розташованої перпендикулярно до вектора $\vec{B}$, $B_n = B = const$, а

$$\Phi_B = BScos\alpha \tag{3.20}$$

З цієї формули визначається одиниця магнітного потоку вебер: Один вебер – це магнітний потік через плоску поверхню площею 1 м^2, розташовану перпендикулярно однорідному магнітному полю, індукція якого рівна 1 Тл ([1 Вб]=[1Тл·1м^2]).

Теорема Гаусса для магнітного поля може бути сформульована наступним чином:

Потік вектора магнітної індукції через довільну замкнуту поверхню рівний нулю:

$$\oint_S \vec{B}d\vec{S} = \oint_S B_n dS = 0 \tag{3.21}$$

Ця теорема відображає факт відсутності магнітних зарядів, внаслідок чого лінії магнітної індукції не мають ні початку ні кінця і є замкнутими.

Лекція 12. Дія магнітного поля на рухомі заряди та струми

Сила Лоренца

На одиничний заряд величиною q, що рухається зі швидкістю $\vec{v}$ в магнітному полі індукцією $\vec{B}$ діє сила (рис. 3.8), яка називається *силою Лоренца*:

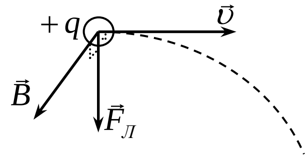


Рис. 3.8

$$F_Л = |q|[\vec{v}\vec{B}] = \mu\mu_0|q|[\vec{v}\vec{H}] \qquad (3.22)$$

Або в скалярному вигляді:

$$F_Л = |q|vB\sin\alpha \qquad (3.23)$$

де α – це кут між напрямком швидкості частинки і вектором магнітної індукції.

Сила *Лоренца* не діє на нерухому заряджену частинку, але якщо та починає рухатись – відразу зявляється сила Лоренца, яка не змінює швидкості руху за величиною, проте може змінити траєкторію руху. Сила Лоренца не виконує роботу, оскільки напрямлена перпендикулярно до напрямку руху. Якщо проаналізувати можливі варіанти руху зарядженої частинки у магнітному полі (нехай для означуваності частинка буде додатною), то можна отримати такі варіанти:

(1853-1928)
Гендрік Антон Лоренц

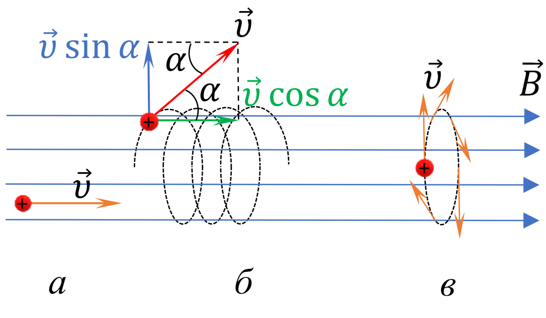


Рис. 3.9

якщо частинка залітає паралельно (або антипаралельно) до ліній індукції магнітного поля (рис. 3.9, а), то сила Лоренца рівна нулю, оскільки $\sin 0° = \sin 180° = 0$. В цьому випадку частинка рухається по прямолінійній траєкторії вздовж силових ліній магнітного поля;

- якщо частика залітає під кутом 90° до ліній індукції магнітного поля, то траєкторією руху частинки є коло (рис. 3.9, в);

- якщо ж кут відмінний від перших двох варіантів, то траєкторією руху є гвинтова лінія (рис. 3.9, б). В цьому випадку складова швидкості, яка паралельна силовим лініям магнітного поля відповідальна за рух зарядженої частини вздовж ліній, а складова швидкості, яка перпендикулярна силовим лініям магнітного поля

– за коловий рух навколо деякого центру, через який проходить силова лінія магнітного поля. При одночасній участі зарядженої частинки в таких рухах і утворюється гвинтова лінія.

Варто відмітити, що напрямок сили Лоренца, яка діє на заряджену частинку у магнітнму полі, шукають за правилом лівої руки:

Якщо ліву руку розмістити так, щоб лінії магнітної індукції входили в долоню, а чотири витянуті пальці співпадали з рухом позитивно зарядженої частики (були протилежно напямлені до руху негативно зарядженої частинки), то відігнутий на 90° великий палець покаже напрям сили Лоренца.

Сила Ампера

На провідник, по якому тече електричний струм (рис. 3.10), магнітне поле діє із силою *Ампера*. Сила Ампера, що діє на елементарний провідник довжиною dl, по якому тече струм I:

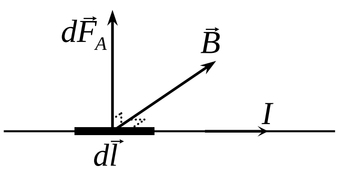


Рис. 3.10

$$dF_A = dq[\vec{v}\vec{B}] \tag{3.24}$$

Підставимо в цю формулу значення:

$$dq = Idt; \vec{v} = \frac{d\vec{l}}{dt}$$

Сила Ампера, що діє на провідник довжиною l:

$$\overrightarrow{F_A} = \int_l I\left[d\vec{l}\vec{B}\right] \tag{3.25}$$

Якщо поле однорідне ($\vec{B} = const$) і по провіднику протікає постійний струм ($I = const$), то формула (3.25) спрощується:

$$\vec{F}_A = I\left[\vec{l}\vec{B}\right] \tag{3.26}$$

або у скалярній формі

$$F_A = IlB\sin\alpha \tag{3.27}$$

де α – це кут між напрямком струму в провіднику і вектором магнітної індукції. Напрямок сили Ампера також шукають за правилом лівої руки. Його формулювання трішки відрізняється від формуювання для визначення напрямку сили, що двє на рухому заряджену частинку:

Якщо ліву руку розмістити так, щоб лінії магнітної індукції входили в долоню, а чотири витянуті пальці співпадали з напрямком струму в провіднику, то відігнутий на 90° великий палець покаже напрям сили Ампера.

Дія магнітного поля на контур зі струмом

На рамку, поміщену в однорідне магнітне поле при протіканні через неї струму діє сила Ампера. Вектор магнітної індукції напрямлений перпендикулярно до площини рамки[23]. За такої геометричної форми рамки, сили Ампера, що діють на кожну сторону рамки однакові. Вони мають у площині рамки і ніби «розтягують» її (рис. 3.11).

Якщо повернути рамку так, щоб нормам до її площини склала з напрямом вектора магнітної індукції кут φ**,** то на сторони ab і cd рамки будуть діяти сили, які намагатимуться повернути рамку в початкове положення (рис. 3.12). Виникає момент сили:

$$M = F_A d = F_A l\sin\varphi,$$

де d – плече сили, l- довжина сторони рамки. Сила Ампера, що діє на сторону ab або cd довжиною l:

$$F_A = IlB\sin\alpha$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \text{ тому } \sin\alpha = 1$$

$$F_A = IlB$$

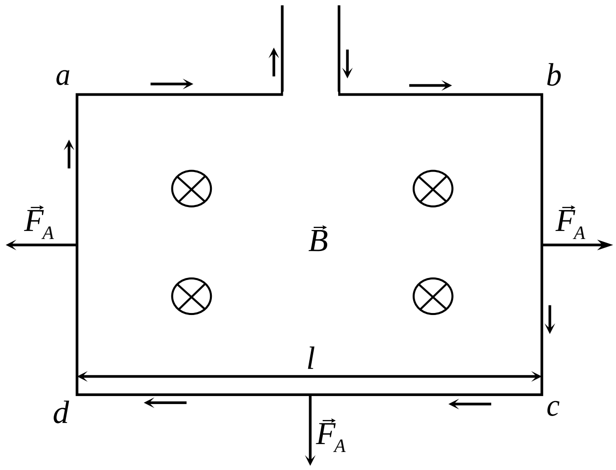


Рис. 3.11

Тоді обертаючий момент:

$$M = IlB \cdot l\sin\alpha = Il^2B\sin\alpha, \tag{3.28}$$

де $l^2 = S$ - площа рамки, тому:

$$M = ISB\sin\alpha \tag{3.29}$$

або:

[23] Прийнято позначати вектор, який напрямлений перпендикулярно до площини рисунка через ⊙, якщо він напрямлений до спостерігача і через ⊗, якщо від спостерігача.

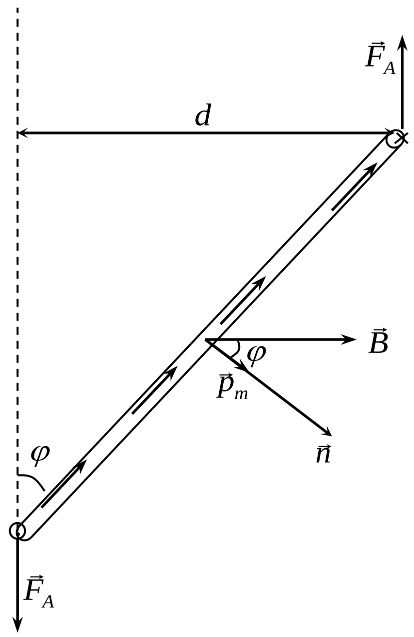


Рис. 3.12

$$M = \mu\mu_0 ISH\sin\alpha \qquad (3.30)$$

Добуток сили струму на площу рамки називається магнітним моментом рамки зі струмом:

$$p_m = IS \qquad (3.31)$$

Тоді рівняння (3.29) можна переписати у вигляді:

$$M = p_m B\sin\alpha \qquad (3.32)$$

або у векторній формі:

$$\vec{M} = [\vec{p}_m \vec{B}] \qquad (3.33)$$

Під дією моменту сили рамка завжди намагатиметься розміститись так, щоб магнітний момент рамки мав напрям напруженості поля.

Максимальний момент буде тоді, коли $\alpha = \frac{\pi}{2}$, тобто

$$M_{\max} = ISB, \qquad (3.34)$$

звідки:

$$B = \frac{M_{\max}}{IS} \qquad (3.35)$$

Щоб визначити індукцію магнітного поля в деякій точці простору, треба в цій точці помістити маленьку рамку (вона аналогічна пробному заряду в електростатиці). Тоді $\vec{B}$ визначається останньою формулою. Рамка орієнтується завжди так, щоб її магнітний момент мав напрям індукції магнітного поля.

Лекція 13. Магнітне поле в речовині

Магнітне поле діє на рухомі заряди, які є в будь-якій речовині. При поміщенні речовини в магнітне поле, вона намагнічується. Такі речовини дістали назву магнетиків.

Магнітне поле в речовині складається із зовнішнього магнітного поля і поля намагніченого магнетика. Вперше намагнічення магнетиків пояснив Ампер. Розглянемо детально механізм намагнічення.

Магнітні моменти електронів і атомів

Кожен електрон, який рухається по орбіті, еквівалентний коловому струму (рис. 3.13):

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{e}{T} = \frac{e\omega}{2\pi}, \quad (3.36)$$

де e – заряд електрона, T- період його обертання, ω- кутова швидкість обертання електрона по орбіті. Цьому струмові відповідає так званий *орбітальний магнітний момент електрона*:

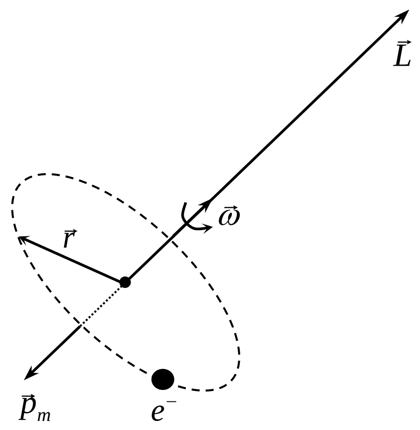


Рис. 3.13

$$p_m = IS$$

$$I = \frac{e\omega}{2\pi}$$

$$S = \pi r^2 \Rightarrow p_m = \frac{e\omega}{2\pi} \cdot \pi r^2$$

$$\boxed{p_m = \frac{e\omega r^2}{2}} \quad (3.37)$$

Напрям вектора орбітального моменту електрона визначається так само, як і для рамки зі струмом – за правилом правого свердлика. У цьому випадку вектор буде напрямлений униз, вздовж осі обертання, а не вгору, бо правило правого свердлика встановлене для руху позитивних зарядів, а електрон заряджений негативно.

Електрон, що рухається по коловій орбіті має також *орбітальний механічний момент імпульсу*. Він напрямлений вздовж осі обертання вгору:

$$\vec{L}_e = [\vec{r} \cdot m_e \vec{v}] \tag{3.38}$$

В скалярному вигляді:

$L_e = r \cdot m_e v$; але $v = \omega r$, тому:

$$\boxed{L_e = m_e \omega r^2} \tag{3.39}$$

Відношення двох моментів: орбітального магнітного моменту електрона до його механічного орбітального моменту імпульсу називають *магнітомеханічним* або *гіромагнітним* відношенням:

$$\frac{p_m}{L_e} = -\frac{e\omega r^2}{2} \cdot \frac{1}{m_e \omega r^2} = -\frac{e}{2m_e}$$, тобто:

$$\boxed{\frac{p_m}{L_e} = -\frac{e}{2m_e}} \tag{3.40}$$

Знак «-» вказує на те, що напрямки моментів протилежні.

Магнітні моменти є і в інших елементарних частинок, а також у ядер атомів. Проте вони набагато менші за орбітальний магнітний момент електрона. Крім того, електрон має власний магнітний момент – p_{ms}, та власний механічний момент – L_{es}. Гіромагнітне відношення для них:

$$\boxed{\frac{p_{ms}}{L_{es}} = -\frac{e}{m_e}} \tag{3.41}$$

Існування власних моментів електрона пояснюється наявністю спіну L_{es}.

Орбітальний магнітний момент атома – це геометрична сума моментів усіх його електронів:

$$\vec{P}_m = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_{m_i} \tag{3.42}$$

Повний механічний орбітальний момент атома – це сума орбітальних механічних моментів усіх електронів:

$$\vec{L}_a = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_{e_i} \tag{3.43}$$

Гіромагнітне відношення для всього атома дорівнює гіромагнітному відношенню для окремого електрона:

$$\boxed{\frac{\vec{P}_m}{\vec{L}_a} = -\frac{e}{2m_e}} \quad (3.44)$$

Вектор намагніченості

Кількісною характеристикою намагніченого стану речовини є вектор намагніченості або намагніченості, що дорівнює повному магнітному моменту усіх атомів в одиниці об'єму речовини:

$$\vec{J} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{n} P_{m_i}}{\Delta V} \quad (3.45)$$

Намагніченість багатьох речовин пропорційна сумарній напруженості магнітного поля:

$$\vec{J} = æ\vec{H}, \quad (3.46)$$

де æ – магнітна сприйнятливість, яка характеризує реакцією речовини на магнітне поле.

Зв'язок векторів магнітної індукції, напруженості та намагніченості

Відомо що: $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$, а $\mu = 1 +$æ. Тоді:

$$\vec{B} = \mu_0(1 + æ)\vec{H}$$

$$\vec{B} = \mu_0\vec{H} + \mu_0 æ\vec{H} = \mu_0\vec{H} + \mu_0\vec{J}$$

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{J})} \quad (3.47)$$

Види намагнічування

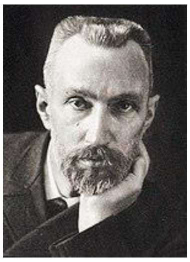
За типом намагнічування розрізняють такі основні види магнетиків: діамагнетики, парамагнетики, феромагнетики, феррити.

Діамагнетики – це речовини, в яких електронні оболонки повністю заповнити і магнітні моменти атомів скомпенсовані. До них належать інертні гази, вода, мармур, скло. При внесенні в поле, атоми діелектрика приймають наведений магнітний момент. Вектор намагніченості при цьому напрямлений проти вектора індукції зовнішнього поля. Магнітна сприйнятливість діамагнетиків мала – $10^{-6} - 10^{-5}$. Магнітна проникність діамагнетиків μ трохи менша за одиницю. Якщо зняти поле, намагніченість зникає. Тепловий хаотичний рух атомів не впливає на появу магнітних моментів, тому магнітна сприйнятливість і магнітна проникність не залежать від температури.

Парамагнетики – це речовини, атоми яких мають відмінний від нуля магнітний момент при відсутності зовнішнього поля. Це аналогічно власним дипольним моментам у полярних діелектриках. Тепловий рух забезпечує хаотичний розподіл напрямків векторів власних магнітних моментів окремих атомів, тому сумарна намагніченість при відсутності поля дорівнює нулю. Вплив зовнішнього магнітного поля проявляється в переважній орієнтації цих моментів вздовж поля. Тепловий рух заважає цій орієнтації, тому магнітна сприйнятливість парамагнетика суттєво залежить від температури. За законом *К'юрі*, магнітна сприйнятливість зворотно пропорційна абсолютній температурі:

$$\boxed{æ = \frac{C}{T},} \tag{3.48}$$

де C- стала К'юрі. Значення магнітної сприйнятливості: $10^{-5} - 10^{-3}$, але трохи більші ніж у діамагнетиків.



(1859-1906)

П'єр Кюрі

Магнітна проникність парамагнетиків більша за 1. В дуже сильних магнітних полях, коли всі магнітні моменти атомів виявляються орієнтованими вздовж поля, настає етап насичення намагніченості. До парамагнетиків відносяться – кисень, алюміній, платина, лужні та лужно-земельні метали.

Феромагнетики – це речовини, в яких внутрішнє магнітне поле в багато разів більше ніж зовнішнє магнітне поле, що його викликало. Феромагнетики складаються з магнітних доменів – областей спонтанної намагніченості. Розміри доменів сотні та тисячі долі міліметра. Всередині домену вектори намагніченості моментів атомів паралельні, причому намагніченість всередині домену досягає граничного значення, що дорівнює намагніченості насичення. Домени виникають у речовинах, атоми яких мають недобудовані електронні оболонки – залізо, нікель, кобальт.

За відсутності зовнішнього поля магнітні моменти окремих доменів орієнтовані безладно і сумарна намагніченість феромагнетика дорівнює нулю. Зовнішнє поле орієнтує вектори намагніченості доменів, причому в першу чергу орієнтуються ті домени, вектори намагніченості, яких близькі за напрямком до вектора напруженості зовнішнього поля.

Зі збільшенням напруженості зовнішнього поля, збільшується і намагніченість. Збільшення відбувається тому, що розміри доменів, які вже орієнтовані в напрямі поля, ростуть за рахунок інших доменів. У дуже сильних полях орієнтації в певний момент закінчується і в усьому об`ємі досягається намагніченість насичення J_s (рис. 3.14).

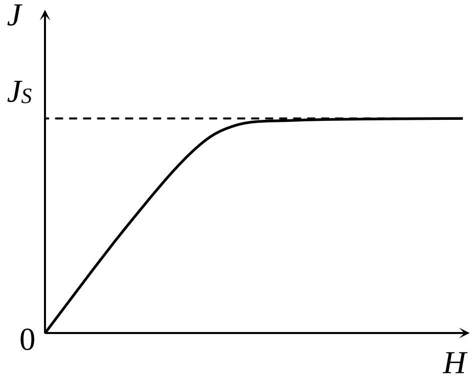


Рис. 3.14

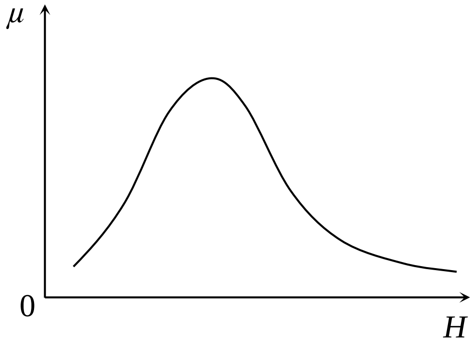


Рис. 3.15

Значення магнітної проникності μ дуже велике і досягає $10^5 - 10^6$. Магнітна проникність для конкретної речовини постійна і залежить від напруженості зовнішнього поля (рис. 3.15). Тепловий рух перешкоджає орієнтації як самих доменів, так і спінів всередині домену. Тому домени існують тільки при температурах нижчих ніж температура К'юрі $T_к$. Для заліза $T_к$=1043 К, для нікелю 633 К. При температурах, що перевищують температуру К'юрі, доменна структура руйнується і феромагнетики перетворюються в парамагнетики. У феромагнетику є *гістерезис намагніченості*.

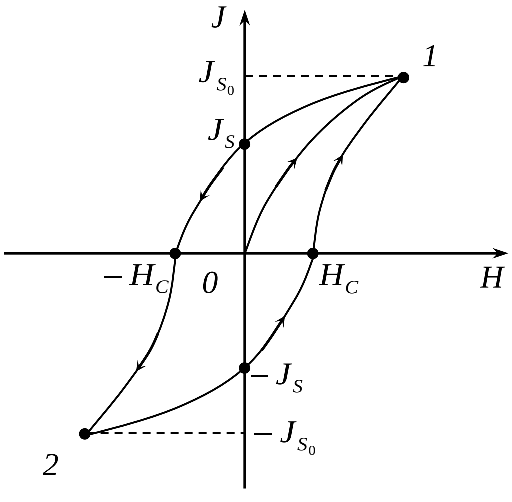


Рис. 3.16

При першому зростанні напруженості зовнішнього магнітного поля (рис. 3.16) намагніченість феромагнетика змінюється по кривій 0-1 (по початковій кривій намагнічування) до досягнення намагніченості насичення J_{S_0}.

При зменшенні напруженості до нуля намагніченість феромагнетика також зменшується, але не до нуля, а до деякої залишкової намагніченості: J_S. Для того, щоб намагніченість зменшилась до нуля потрібно змінити напрям вектора напруженості на протилежний і збільшувати до H_c.

При подальшому збільшенні негативного магнітного поля відбудеться перемагнічування феромагнетика і в точці 2 намагніченість досягне величини намагніченості насичення J_{S_0}. Далі зменшуючи напруженість можна замкнути петлю магнітного гістерезису.

Лекція 14. Явище електромагнітної індукції. Закон Фарадея. Правило Ленца

Відомо, що струм створює магнітне поле. Виникає питання: чи може магнітне поле створити струм? Фарадей, експериментуючи із провідниками струму і магнітними полями відкрив явище:

При довільній зміні потоку магнітної індукції через поверхню, обмежену контуром, в останньому виникає електричний струм, тобто електрорушійна сила індукції (рис. 3.17):

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} \qquad (3.49)$$

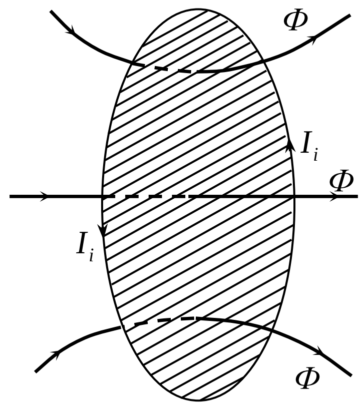


Рис. 3.17

ЕРС індукції як було показано експериментально, пропорційна швидкості потоку магнітної індукції через поверхню, обмежену контуром.

(1791-1867)

Майкл Фарадей

Фарадей показав, що якщо $\frac{d\Phi}{dt} \neq 0 \Rightarrow \Phi \neq const$, а якщо *Φ=const*, то $\varepsilon_i = 0$. Тобто індукційний струм виникає виключно у випадках зміни магнітного потоку. Причому байдуже в яку сторону: чи у сторону збільшення, чи у сторону зменшення. Незмінність у часі магнітного потоку не приводить до виникнення індукційного струму.

Напрям цього струму можна визначити, користуючись **правилом Ленца**:

Індукційний струм в контурі завжди має такий напрям, при якому магнітне поле, створене цим струмом протидіє зміні потоку магнітної індукції, що викликає індукційний струм.

Приклад.

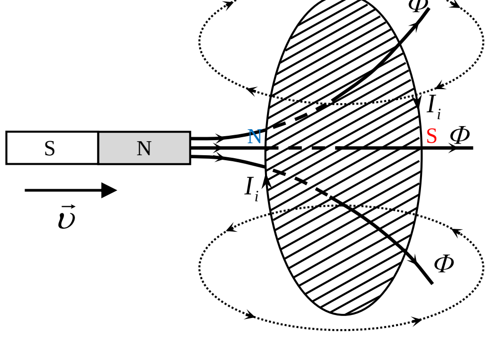


Рис. 3.18

Якщо наближати магніт, то в замкнутому контурі виникає індукційний струм, який протікає в певному напрямку і створений ним магнітний потік (рис. 3.18) відштовхує магніт. Знак «-» в рівнянні (3.49) враховує правило знаків, що слідує з закону Ленца, тому в даному випадку:

$$\Phi > 0 \text{ і } \frac{d\Phi}{dt} > 0.$$

Тоді, згідно (3.49):

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Це означає, що струм буде мати протилежний напрям до додатного обходу контуру.

А якщо віддаляти магніт, то індукційний струм протікатиме в протилежному напрямку і створений ним магнітний потік притягує магніт (рис. 3.19). В цьому випадку магнітний потік через замкнутий контур зменшується

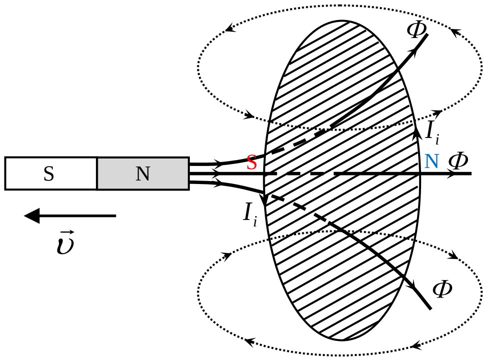


Рис. 3.19

$$\frac{d\Phi}{dt} < 0,$$

Тоді, згідно з правилом Ленца, виникає такий індуктивний струм, магнітне поле якого притягуватиме магніт.

Явище самоіндукції.

Явище *самоіндукції* є різновидом явища електромагнітної індукції, коли індукційний струм індукується в тому самому контурі (провіднику), по якому протікає основний струм, що викликає зміну потоку магнітної індукції.

<u>Приклад</u>

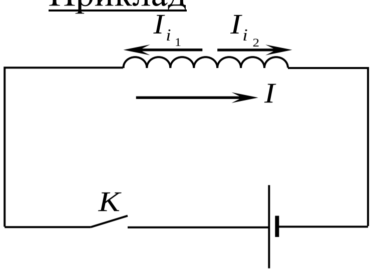


Рис. 3.20

Розглянемо коло, що складається з джерела живлення, котушки індуктивності та ключа (рис. 3.20). Якщо ключ замикаємо, індукційний струм I_{i_1} протилежний до I, а якщо ключ розімкнути, то виникатиме індукційний струм I_{i_2}, який паралельний до I.

Під час замикання або розмикання кола виникають відповідно екстраструми розмикання або замикання. Їхні значення змінюються відповідно до наступних формул:

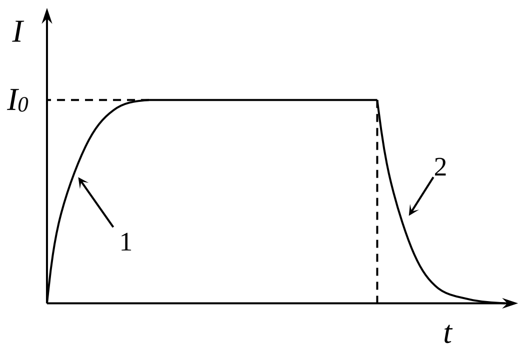


Рис. 3.21

$$\boxed{I = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}}$$ - при розмиканні кола (3.50)

$$\boxed{I = I_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}$$ - при замиканні кола (3.51)

де $\tau = \frac{L}{R}$ - час релаксації[24], а I_0 – струм, який встановився в колі під час замикання (був у колі до розмикання). Якби явища самоіндукції не існувало, струм у колі змінювався б різко, по штриховій лінії, (рис. 3.21). Реально ж існує плавне наростання (ділянка 1) та плавне спадання (ділянка 2) струму.

Індуктивність контура

Нехай ми маємо замкнутий контур, через який існує потік магнітної індукції *Ф*, який утворений струмом *I* в конурі (рис. 3.22). Очевидно, що $Ф \sim I$. Запишемо:

$$Ф = LI, \tag{3.52}$$

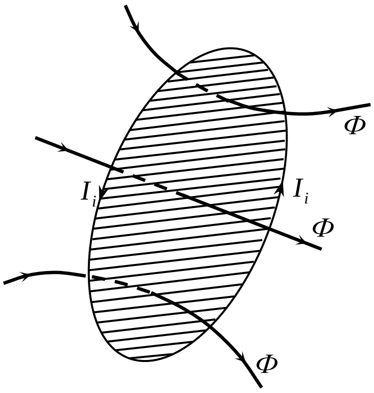


Рис. 3.22

де L – коефіцієнт самоіндукції (індуктивність контура). Одиниці вимірювання індуктивності – *генрі*: $[L] = [Гн]$.

Коли струм в контурі і відповідно *Ф* змінюються, то в контурі індукується е.р.с. самоіндукції:

$$\varepsilon_c = -L\frac{dI}{dt} \tag{3.53}$$

Індуктивність *L* залежить від форми і розмірів контуру, кількості витків (якщо це котушка, то ще від сердечника котушки). При послідовному з’єднанні котушок (рис.) їхня загальна індуктивність рівна алгебрахчній сумі їхніх індуктивностей:

$$L = L_1 + L_2 \tag{3.54}$$

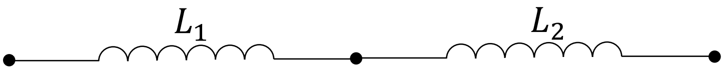


Рис. 3.23

А при паралельному з’єднанні (рис. 3.24) визначається формулою:

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \tag{3.55}$$

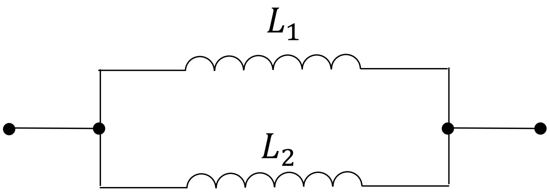


Рис. 3.24

[24] *Часом релаксації* називається час, протягом якого фізична величина (в даному випадку сила струму) змінюється в *е* раз

Явище взаємоіндукції

Явище, при якому протікання змінного струму в одному контурі викликає наведення е.р.с. індукційного струму в іншому контурі, називається *взаємоіндукцією*.

Розглянемо два близьо розташовані контури (рис. 3.25). $\Phi_{2,1}$- частина магнітного потоку, створеного контуром *1*, який пронизує контур *2*.

Очевидно, що $\Phi_{2,1} \sim I_{i_1}$. Отже

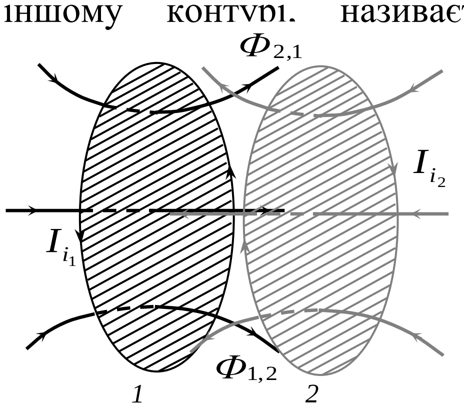


Рис. 3.25

$$\Phi_{2,1} \approx L_{2,1} I_{i_1} \text{, де} \tag{3.56}$$

$L_{2,1}$ - коефіцієнт взаємоіндукції другого контура, по відношенню до першого.

Якщо струм пропускається через контур *2*, то, очевидно, буде мати місце рівняння:

$$\Phi_{1,2} = L_{1,2} I_{i_2} \tag{3.57}$$

Виявляється, що $L_{21} = L_{12} = L_{вз}$.

Визначимо, що е.р.с., яка індукується в другому контурі змінним струмом, який протікає по першому контурі буде рівна:

$$\boxed{\varepsilon_2 = -L_{вз} \frac{dI_{i_1}}{dt}} \Rightarrow \tag{3.58}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon_2 = -\frac{d\Phi_{2,1}}{dt}} \tag{3.59}$$

Аналогічно:

$$\boxed{\varepsilon_1 = -L_{вз} \frac{dI_{i_2}}{dt}} \tag{3.60}$$

Приклад

Розглянемо дві котушки на спільному осерді (трансформатор). Нехай кількість витків на первинній обмотці більша ніж на вторинній (рис. 3.26). Тоді:

$N_1\varepsilon_0 = U_1$ - напруга 1 обмотки
$N_2\varepsilon_0 = U_2$ - напруга 2 обмотки

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} \qquad (3.61)$$

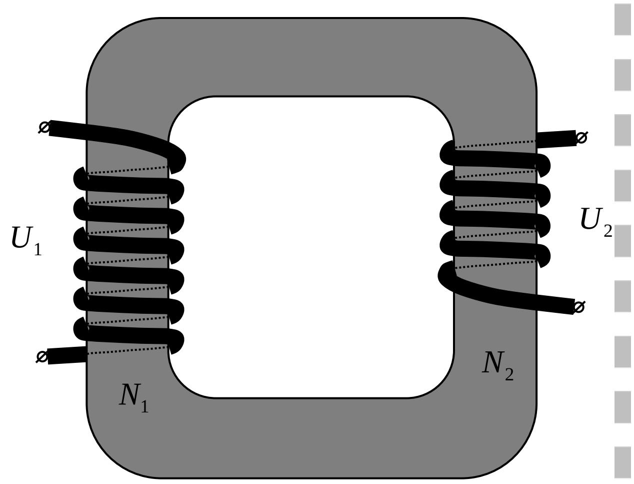


Рис. 3.26

Напруга на обмотках трансформатора прямопропорційна кількості витків. Трансформатори діляться на підвищувальні ($N_2 > N_1$) і понижувальні ($N_1 > N_2$). Для ідеального трансформатора коефіцієнт корисної дії $\eta = 100\%$.

Енергія магнітного поля

Магнітне поле має енергію. Ця енергія, згідно закону збереження енергії рівна тій роботі, яку необхідно виконати щоб створити магнітне поле навколо провідника або котушки струму.

Якщо по провіднику протікає струм і навколо нього існує магнітне поле, то при вимиканні е.р.с., яка створює струм, в колі струм не зникне, а буде повільно зменшуватись. Це пояснюється тим, що навколо провідника поле зникає, при цьому його енергія витрачається на роботу е.р.с. самоіндукції, яка виникає в колі в даному випадку. При цьому по провіднику протікає струм і він нагрівається, тобто енергія магнітного поля в кінцевому плані переходить в теплову енергію і розсіюється в оточуюче середовище. Визначимо роботу е.р.с. самоіндукції, яка виникає при розмиканні кола:

$$\delta A = \varepsilon I dt \qquad (3.62)$$

$$\varepsilon = -L\frac{dI}{dt} \qquad (3.63)$$

$$\delta A = -LI\frac{dI}{dt}dt \Rightarrow dA = -LIdI \qquad (3.64)$$

$$A = -L\int_{I_0}^{0} IdI = -L\frac{I}{2}\int_{I_0}^{0} dI = L\frac{I_0^2}{2} \qquad (3.65)$$

Згідно з законом збереження енергії, робота *A*=*E*, тобто:

$$\boxed{W_m = \frac{LI^2}{2}} \qquad (3.66)$$

Визначимо енергію котушки з проникністю μ. Все магнітне поле зосереджене в сердечнику тороїда. Як відомо:

$$L = \mu\mu_0 n^2 V, \qquad (3.67)$$

тому:

$$W_m = \mu\mu_0 n^2 V \frac{I^2}{2} \qquad (3.68)$$

Але:

$$H = In \qquad (3.69)$$

Тому можна записати:

$$W_m = \frac{1}{2}\mu\mu_0 H^2 V \qquad (3.70)$$

Якщо ширина сердечника тороїда набагато менша за радіус його кривизни, то поле в такому сердечнику можна вважати однорідним. Визначимо густину магнітного поля в цьому випадку.

$$\omega_m = \frac{W_m}{V} \qquad (3.71)$$

$$\omega_m = \frac{1}{2}\mu\mu_0 H^2 \qquad (3.70)$$

Дана формула подібна до формули густини енергії електростатичного поля (2.74).

Тема 4. Коливання

Лекція 15. Власні незгасаючі коливання

В природі існують такі рухи, які періодично повторюються. Вони називаються *коливаннями*. По характеру фізичних процесів розрізняють механічні, електромагнітні, електромеханічні коливання. По характеру залежності від часу коливання діляться на періодичні і неперіодичні. *Періодичними* називаються коливання, для яких виконується рівність: $f(T+t)=f(t)$, при довільних значеннях t, де T – період коливань (рис. 4.1).

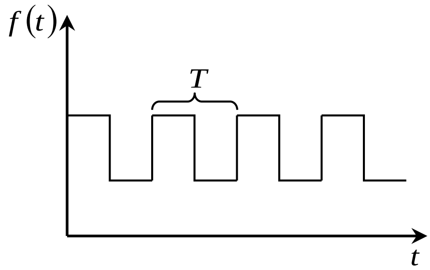


Рис. 4.1

Якщо для коливань це рівняння не виконується: $f(T+t)\neq f(t)$, вони називаються *неперіодичними* (рис. 4.2).

Періодичні коливання характеризуються періодом, частотою та амплітудою. *Періодом* називається тривалість одного повного коливання ($[T]=[c]$).

Частотною називається кількість коливань за одиницю часу $[\nu]=[c^{-1}]=[Гц]$.

$$\nu=\frac{1}{T} \tag{4.1}$$

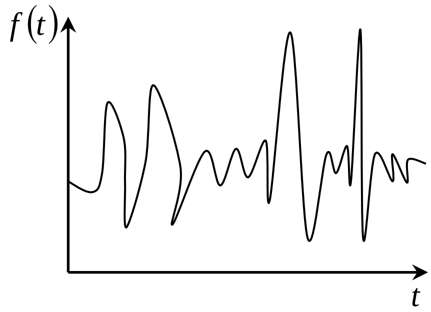


Рис. 4.2

Іноді зручно коливання характеризувати за допомогою циклічної частоти – кількості коливань за 2π секунд:

$$\omega=2\pi\nu \tag{4.2}$$

Амплітудою коливань називається максимальне відхилення від положення рівноваги.

За способом збуджень коливання поділяються на вільні або власні та вимушені. *Вільними* називаються коливання, які проходять без дії зовнішньої сили. *Вимушеними* називаються коливання, які відбуваються при періодичній дії зовнішньої сили.

Серед періодичних коливань виділяють гармонічні. *Гармонічними* називаються коливання, при яких величина, яка коливається, змінюється за законом синуса або косинуса:

$$x = x_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \tag{4.3}$$

$$x = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \tag{4.3а}$$

де x_m – амплітуда[25] коливань, ω_0 – циклячна частота коливань, $(\omega_0 t + \varphi_0)$ – фаза коливань, φ_0 – початкова фаза коливань.

Власні механічні коливання

Розглянемо деяку коливальну механічну систему, в якій координата змінюється за законом:

$$x = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Швидкість точки, яка коливається:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = -x_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \tag{4.4}$$

Її прискорення:

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -x_m \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \tag{4.5}$$

Використовуючи II закон Ньютона, можна записати:

$$F = ma = -m\omega_0^2 x = -m\omega_0^2 x_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \tag{4.6}$$

Фізично знак «-» в рівнянні (4.6) означає, що напрям сили, яка виникає при зміщенні системи від положення рівноваги завжди протилежне зміщенню.

Виразивши з рівняння (4.6) прискорення, записавши його у вигляді другої похідної від координати ми отримаємо диференціальне рівняння коливань в цьому випадку:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \tag{4.7}$$

або

[25] Слід відзначити, що амплітуду коливань іноді позначають *A*, позначення x_m вибране для того щоб підкреслити сутність самої амплітуди коливань – максимально можливого значення *x*.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (4.7,а)$$

Легко можна отримати точно таке ж диференціальне рівняння коливань, якщо координата точки, яка коливається змінюється не за законом (4.3а), а за законом (4.3). Тому розв’язом рівнянь (4.7) та (4.7а) є функції (4.3) або (4.3а).

Енергія механічних коливань

Кінетична енергія матеріальної точки, яка здійснює коливання, враховуючи (4.4) може бути виражена формулою:

$$W_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 x_m^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0), \qquad (4.8)$$

а потенціальна енергія, враховуючи (4.6), виразом:

$$W_p = -\int_0^x F dx = \int_0^x m\omega_0^2\, x dx = m\omega_0^2\,\frac{x^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 x_m^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0). \qquad (4.9)$$

Повна енергія, відповідно:

$$W = W_k + W_p = \frac{m\omega_0^2 x_m^2}{2} \qquad (4.10)$$

Власні електричні коливання

Електричний *коливальний контур* – це електричне коло, яке складається із ввімкнених послідовно котушки індуктивності L конденсатора ємності C та резистора опору R, в якому можуть виникнути електричні коливання (рис. 4.3).

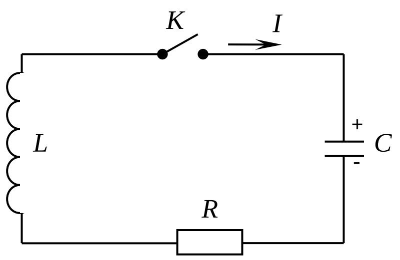
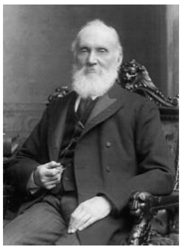


Рис. 4.3

Розглянемо *ідеальний контур*, в якому $R = 0$ (рис. 4.4, а). Для збудження в контурі коливань конденсатор попередньо заряджають, надаючи його обкладинкам заряду $\pm Q$. Якщо замкнути конденсатор на котушку індуктивності, то в контурі потече електричний струм, який буде зростати з часом. В результаті цього енергія конденсатора $\frac{q^2}{2C}$ буде зменшуватись, а енергія котушки $\frac{L\dot{q}^2}{2}$ збільшуватись. Повна енергія, згідно закону збереження енергії $W = \frac{q^2}{2C} + \frac{L\dot{q}^2}{2} = const$, завжди буде залишатись постійною. Як



(1824-1907)

Ві́льям То́мсон, лорд Ке́львін

тільки енергія магнітного поля котушки досягне свого максимуму (пройшло чверть періоду, рис. 4.4, б), вона почне зменшуватись, а енергія електричного поля конденсатора зростати. Досягнувши максимального значення (через половину періоду, рис. 4.4, в), енергія конденсатора знову буде зменшуватись, а енергія магнітного поля котушки зростати. Остання, в свою чергу, отримавши максимально можливе значення енергії, почне знову віддавати її конденсатору (пройшло три четвертих періоду, рис. 4.4, г). Як тільки енергія котушки стала рівна нулю, а енергія конденсатора досягнула максимуму, закінчилось одне повне коливання, тобто пройшов період.

В кінці періоду коливань конденсатор заряджений так само, як і в початковий момент часу (рис. 4.4, г). Період таких електричних коливань може бути визначений формулою *Томсона*:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{LC}} \tag{4.11}$$

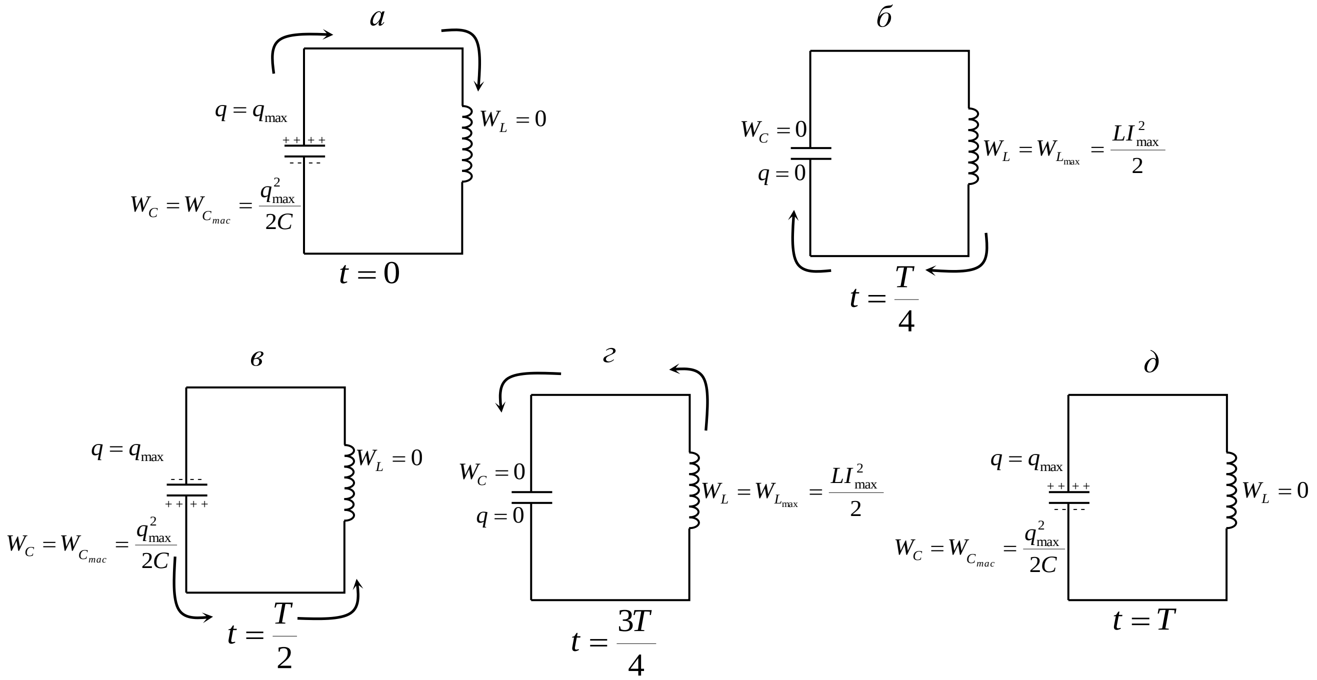


Рис. 4.4

Розглянемо деякий реальний коливальний контур (рис. 4.5). Запишемо для нього рівняння за другим правилом Кірхгофа:

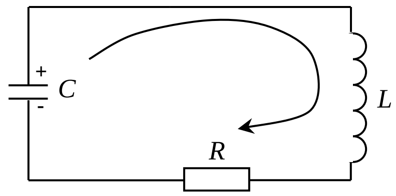


Рис. 4.5

$$IR - U_c = \varepsilon_i \tag{4.12}$$

$$C = \frac{q}{U_c} \tag{4.13}$$

$$U_c = \frac{q}{C} \tag{4.14}$$

$$\varepsilon_i = -L\frac{dI}{dt} \tag{4.15}$$

$$IR - \frac{q}{C} = -L\frac{dI}{dt} \tag{4.16}$$

$$I = -\frac{dq}{dt} = -\dot{q} \Rightarrow \tag{4.17}$$

$$\frac{dI}{dt} = -\ddot{q} \tag{4.18}$$

Підставимо (4.18) в (4.16):

$$IR - \frac{q}{C} = L\ddot{q} \tag{4.19}$$

Підставимо замість *I* значення з (4.17):

$$-\dot{q}R - \frac{q}{C} = L\ddot{q} \tag{4.20}$$

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0 \tag{4.21}$$

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0 \tag{4.22}$$

Вирази (4.21) та (4.22) є рівняннями електричних коливань для реального коливального контуру.

Якщо ввести заміни:

$$\frac{R}{L} = 2\beta, \tag{4.23}$$

де β - коефіцієнт затухання, та

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2, \tag{4.24}$$

де ω_0- власна частота коливального контуру, то рівняння (4.22) можна записати у вигляді:

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \tag{4.25}$$

Якщо $R = 0$ (затухання відсутнє, β=0) то останнє рівняння набуває вигляду:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0 \tag{4.26}$$

Порівнюючи дане рівняння з рівнянням (4.7а), стає зрозумілим, що не залежно від походження, гармонічні коливання описуються одними і тими ж рівняннями та параметрами.

Розв'язком виразу (4.26) є рівняння:

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \tag{4.27}$$

або

$$q = q_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \tag{4.27a}$$

Маятники

Взагалі кажучи, для виникнення коливань в будь-якій системі необхідні такі умови:

- При зміщенні тіла (чи деякої його частини) з деякого рівноважного положення, повинна виникати сила, що повертає тіло (чи його частину) назад до цього рівноважного положення.
- Тіло (чи його частина) повинні мати інерцію.
- Сили тертя або опору не повинні бути значними.

Найпростіші коливальні системи являють собою маятники:

а) Пружинний маятник[26]

Розглянемо тіло, прикріплене до спіральної пружини, інший кінець якої закріплений нерухомо (рис. 4.6). Силами тертя та опору нехтуємо.

[26] *Пружинним маятником* називається система, що складається з тягарця, підвішеного на пружині, один кінець якої закріплений.

Будемо розглядати малі деформації пружини (виконується закон Гука).

т. O — початок відліку

т. A — кінець недеформованої пружини

Δx — статична деформація пружини.

Згідно ІІ закону Ньютона:

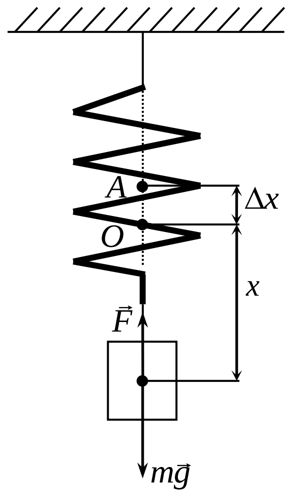


Рис. 4.6

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F} \qquad (4.28)$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - F \qquad (4.29)$$

$$|F| = k(\Delta x + x) \qquad (4.30)$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k\Delta x - kx \qquad (4.31)$$

$$k\Delta x = mg, \qquad (4.32)$$

отже:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad (4.33)$$

Замінюючи $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, отримаємо:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (4.33а)$$

б) <u>Математичний маятник</u>[27]

Розглянемо коливання тягарця підвішеного до довгої нерозтяжної невагомої нитки довжиною l (рис. 4.7):

$$\vec{M} = I\vec{\varepsilon}$$

$$I = ml^2; \ \varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2};$$

[27] *Математичним маятником* називається матеріальна точка, підвішена на невагомій та нерозтяжній нитці

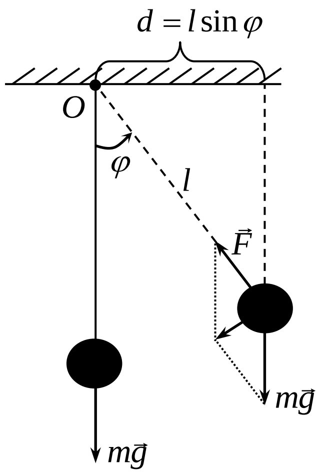


Рис. 4.7

Враховуючи те, що кутове зміщення φ та момент сили mg спрямовані протилежно:

$$M = -mg \cdot d = -mgl\,sin\,\varphi \qquad (4.34)$$

$$ml^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl\sin\varphi \qquad (4.35)$$

Ділимо обидві частини рівняння на ml^2:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0 \qquad (4.36)$$

Коливання малі, тобто $\sin\varphi \approx \varphi$, тому останню формулу можна записати у вигляді:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\varphi = 0 \qquad (4.37)$$

А з врахуванням заміни $\frac{g}{l} = \omega_o^2$:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_o^2\varphi = 0 \qquad (4.37а)$$

в) Фізичний маятник[28]

Розглянемо коливання абсолютно твердого тіла навколо осі, що не проходить через його центр мас (рис. 4.8).

$$I\vec{\varepsilon} = \vec{M}$$

Аналогічно до попереднього випадку:

[28] *Фізичним маятником* називається абсолютно тверде тіло, закріплене у точці, що не співпадає з його центром мас

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl\sin\varphi \qquad (4.38)$$

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} + mgl\sin\varphi = 0 \qquad (4.39)$$

Поділивши на I, отримаємо:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgl}{I}\sin\varphi = 0 \qquad (4.40)$$

Для малих кутів $\sin\varphi \approx \varphi$, отже:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgl}{I}\varphi = 0 \qquad (4.41)$$

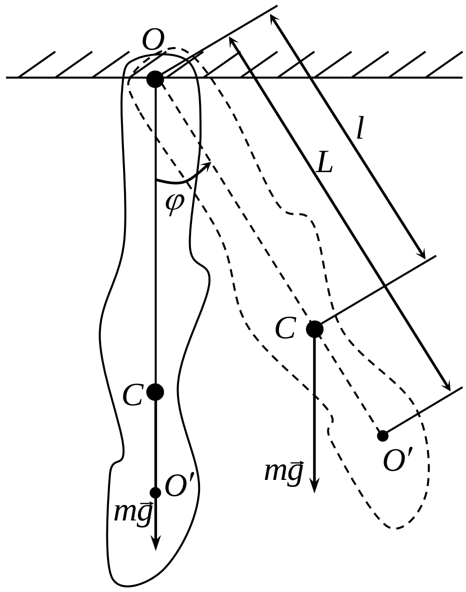


Рис. 4.8

Вводячи заміну $\omega_o^2 = \frac{mgl}{I}$ останнє рівняння можна записати у вигляді:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_o^2\varphi = 0 \qquad (4.41а)$$

Фізична величина, що визначається із співвідношення:

$$L = \frac{I}{ml} \qquad (4.42)$$

називається *зведеною довжиною фізичного маятника*. Тоді:

$$\omega_o^2 = \frac{g}{L} \qquad (4.43)$$

Оскільки ω_0 визначає період коливань, то порівнюючи вирази цієї величини у випадку математичного та фізичного маятників бачимо, що математичний маятник матиме такий самий період коливань, що й фізичний, якщо довжина його дорівнює зведеній довжині фізичного маятника.

Момент інерції відносно точки підвісу згідно теореми Штейнера:

$$I = I_c + ml^2 \qquad (4.44)$$

$$L = \frac{I}{ml} = \frac{I_c + ml^2}{ml} = l + \frac{I_c}{ml} \qquad (4.45)$$

Отже, $L > l$.

Нехай точкою закріплена маятника буде т.O'. Його нова зведена довжина:

$$L' = \frac{I'}{ml} = \frac{I_c + m(L-l)}{m(L-l)}, \qquad (4.46)$$

а новий момент інерції:

$$I' = I_c + m(L-l)^2 \qquad (4.47)$$

$$L' = \frac{I_c + \left(\frac{I_c}{ml}\right)^2 m}{m\frac{I_c}{ml}} = l + \frac{I_c}{ml} \qquad (4.48)$$

Отже при підвішуванні фізичного маятника в точках O і O', періоди коливань однакові, а ці точки називаються *взаємно спряженими*.

Таким чином, у всіх трьох випадках простих коливальних систем коливання описуються однаковими диференціальними рівняннями (4.33а), (4.37а) та (4.41а), розв'язком яких є гармонічна функція типу (4.3) або (4.3а). Якщо врахувати, що:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}, \qquad (4.49)$$

то із врахуванням використаних замін, отримаємо формули для періоду коливань пружинного маятника:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}} \qquad (4.50)$$

математичного маятника:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}} \qquad (4.51)$$

та фізичного маятника:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}} \qquad (4.52)$$

У випадку великих кутів відхилення формули (4.51) та (4.52) змінюються, відповідно:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\alpha_0^2}{16}\right) \tag{4.53}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \frac{\alpha_0^2}{16}\right) \tag{4.54}$$

З останніх формул видно, що період коливань маятників починає залежати від амплітуди коливань (від початкового кута відхилення від вертикалі) як тільки починає не виконуватись наближення для малих кутів $\sin\varphi \approx \varphi$.

Лекція 16. Згасаючі коливання

Механічні згасаючі коливання

Розглянемо рух матеріальної точки під дією сили пружності $F_1 = -\kappa x$ та сили опору $F_2 = -\mu \upsilon$, яка лінійно залежить від швидкості. Згідно II закону Ньютона:

$$ma = F_1 + F_2 \quad (4.55)$$

Диференціальне рівняння руху має вигляд:

$$m\ddot{x} = -kx - \mu \upsilon \quad (4.56)$$

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (4.57)$$

Вводимо заміни:

$$2\beta = \frac{\mu}{m} \quad (4.58)$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad (4.59)$$

Таким чином диференціальне рівняння затухаючих механічних коливань набуває вигляду:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (4.60)$$

З теорії диференційних рівнянь відомо, що його розв'язок можна шукати у вигляді:

$$x = x_m e^{-\beta t}\sin(\omega t + \varphi_0) \quad (4.61)$$

Розв'язок рівняння (4.60) буде функція, яка містить синусоїду і експоненту. Шукаючи першу та другу похідні від (4.61), та підставивши їх у (4.60) шляхом проведення нескладних математичних перетворень можна отримати, що:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (4.62)$$

Розглянемо граничні випадки розв'язку (4.61):

1) Якщо сили опору невеликі, то $\omega_0 > \beta$ (критерій «невеликості»), то розв'язок рівняння (4.60) має вигляд:

$$x = x_m e^{-\beta t} \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t + \varphi_0) \quad (4.63)$$

Зокрема, якщо покласти $\beta = 0$ (відсутність сил опору), то маємо закон гармонійних коливань з частотою ω_0.

Величину $x_m e^{-\beta t}$ можна розглядати як амплітуду, що зменшується за експоненціальним законом (рис. 4.9). Отже, дія невеликої сили опору ($\omega_0 > \beta$) на коливальну систему виражається у зменшенні амплітуди за законом $x_m e^{-\beta t}$.

Фізична величина, що визначається із співвідношення:

$$D = \frac{x_{m_1}}{x_{m_2}} = \frac{x_{m_2}}{x_{m_3}} = \ldots\ldots = \frac{x_m(t)}{x_m(t+T)} = \frac{x_m e^{-\beta t}}{x_m e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T} = const$$

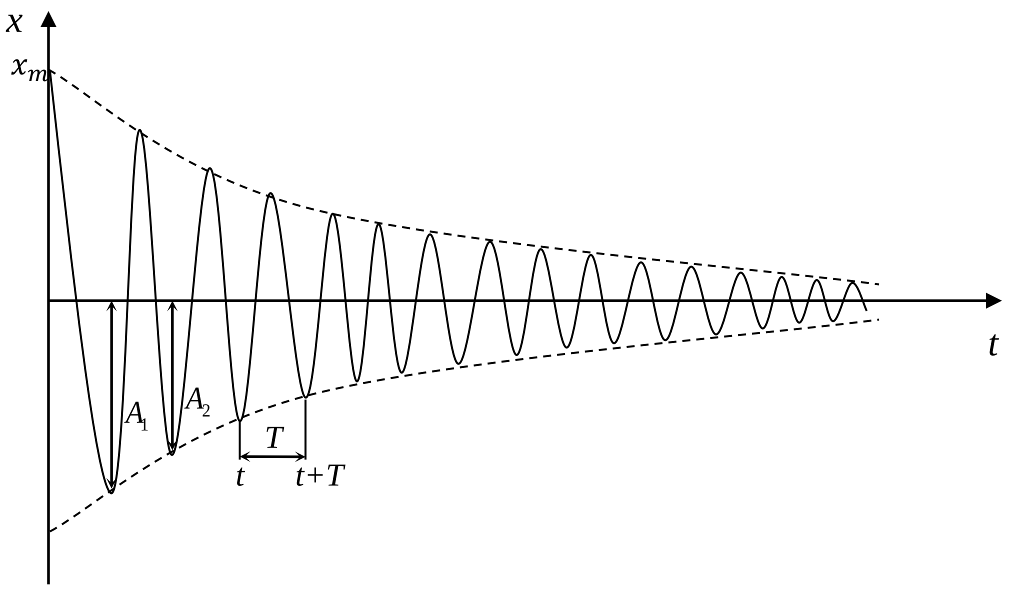


Рис. 4.9

є характеристикою процесу затухання коливань і називається *декрементом затухання*:

$$\boxed{D = e^{\beta T}} \quad (4.64)$$

Логарифмічним декрементом затухання називається фізична величина, яка дорівнює натуральному логарифму відношення двох амплітуд затухаючого коливання, розділених періодом:

$$\boxed{\delta = ln\frac{x_m(t)}{x_m(t+T)} = ln\,D = \beta T} \tag{4.65}$$

Добротністю коливальної системи називається фізична величина, що визначається із співвідношення:

$$\boxed{Q = \frac{\pi}{\delta} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\omega}{2\beta}} \tag{4.66}$$

Часом релаксації називається час на протязі якого амплітуда коливань зменшується в e разів:

$$\frac{x_m(t)}{x_m(t+T)} = e^{\beta T} = e,\, \beta T = 1$$

$$\boxed{\tau = \frac{1}{\beta}} \tag{4.67}$$

2) $\omega_0 < \beta$

Тоді розв’язком рівняння (4.60) є функція:

$$x = e^{-\beta t}\left(c_1 e^{\sqrt{\beta^2-\omega_0^2 t}} + c_2 e^{-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2 t}}\right) \tag{4.68}$$

3) $\omega_0 = \beta$, тоді:

$$x = (c_1 + c_2)e^{-\beta t} \tag{4.69}$$

Випадки 2 і 3 називаються випадки великого опору. Затухання коливань широко використовується на практиці: демпфери в аналітичних терезах, електровимірювальних приладах тощо.

Електричні згасаючі коливання

Розглянемо деякий коливальний контур, що складається з котушки, конденсатора та резистора (4.10).

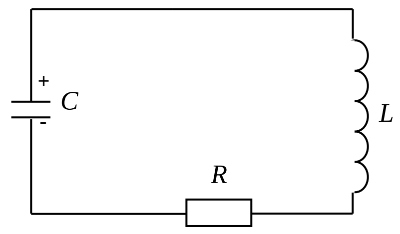


Рис. 4.10

Якщо $R \neq 0$, то диференціальне рівняння електричних коливань матиме вигляд:

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0, \tag{4.70}$$

де $2\beta = \frac{R}{L}$, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$.

За аналогією з механічними коливаннями, розв'язком останнього рівняння є наступна функція:

$$q = q_m e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0), \tag{4.71}$$

де $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$.

Проаналізуємо розв'язок (4.71):

1) При $\omega_0 > \beta \Rightarrow \omega > 0$. В даному випадку будуть відбуватися затухаючі коливання. Але не гармонічні (рис. 4.11). Характеристиками затухаючих коливань є такі ж параметри, як і у випадку механічних затухаючих коливань: *декремент* затухання $D = e^{\beta T}$, *логарифмічний декремент* затухання $\delta = ln\, D = \beta T$, *добротність* $Q = \frac{\omega}{\beta T}$ і *час релаксації* $\tau = \frac{1}{\beta}$.

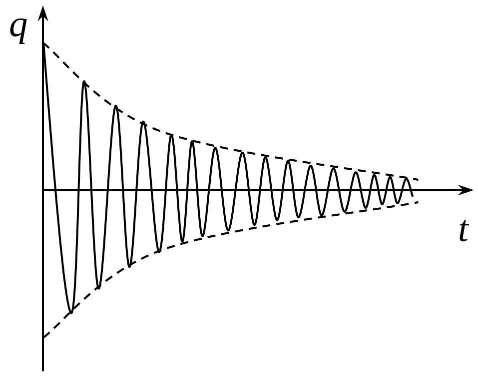


Рис. 4.11

2) Нехай $\omega_0 < \beta$. Тоді ω - уявна величина. Коливань в контурі не буде, а буде повільний розряд (рис. 4.12).

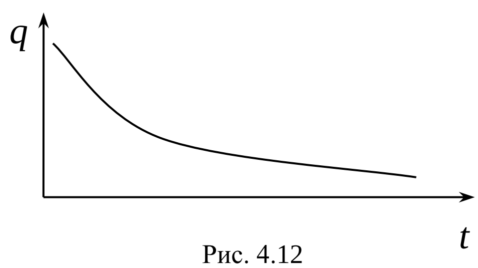


Рис. 4.12

3) У випадку $\omega_0 = \beta$ періодичні коливання переходять в аперіодичні. Визначимо граничний опір, при якому це відбувається:

$$\beta = \frac{R}{2\mathrm{L}}, \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$\omega_0 = \beta, \text{ при } R = R_k$$

$$\frac{R_k}{2\mathrm{L}} = \sqrt{\frac{1}{LC}} \tag{4.72}$$

$$R_k = 2\mathrm{L}\sqrt{\frac{1}{LC}} \qquad (4.73)$$

$$R_k = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad (4.73)$$

Для того, щоб коливання в реальному контурі не затухали необхідно коливальний контур поповнювати енергією. Такі автоколивальні системи в радіотехніці дістали назву генераторів електричних коливань.

Лекція 17. Вимушені коливання

Механічні вимушені коливання

Якщо тіло чи система рухається тільки під дією сили пружності, то здійснюються незатухаючі гармонічні коливання, які називаються також вільними, а таку систему називають *гармонічним осцилятором*.

Якщо система знаходиться під дією сил опору, то вона здійснює вільні затухаючі коливання і її називають *гармонічним осцилятором з тертям*.

Для того, щоб затухаючі коливання, які характерні для будь-яких реальних систем, існували довгий час, потрібно поповнювати втрати енергії системи. Найбільш простий спосіб – дія зовнішньої сили. Коливання під дією зовнішньої сили називаються *вимушеними*. Розглянемо простий випадок дії зовнішньої сили, яка змінюється за гармонічним законом:

$$F = F_0 \cos\omega t \tag{4.74}$$

Нехай ще діє сила пружності: $F_{пр} = -kx$ і опору $F_{оп} = -\mu\upsilon$.

Диференціальне рівняння руху має вигляд:

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t \tag{4.75}$$

Позначимо: $2\beta = \frac{\mu}{m}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $f_0 = \frac{F_0}{m}$, тоді рівняння (4.75) набуде вигляду:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0\cos\omega t \tag{4.76}$$

Оскільки результуюче коливання буде суперпозицією власних затухаючих коливань системи при умові, що опір невеликий та вимушених коливань з циклічною частотою зовнішньої сили, то через деякий скінчений час, власні коливання системи перестануть з’являтись і ми будемо спостерігати тільки коливання системи з частотою вимушеної сили.

Такі коливання називаються *встановленими*. Отже, розв`язок рівняння (4.76) має вигляд:

$$x = x_m\cos(\omega t + \varphi_0) \tag{4.77}$$

Знайдемо першу та другу похідні від (4.77):

$$\dot{x} = -x_m\omega\sin(\omega t + \varphi_0) \tag{4.78}$$

$$\ddot{x} = -x_m\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) \qquad (4.79)$$

та підставимо їх у (4.76):

$$-x_m\omega^2(\cos\omega t\cos\varphi_0 - \sin\omega t\sin\varphi_0) - 2x_m\omega\beta(\cos\omega t\,\sin\varphi_0 + \sin\omega t\cos\varphi_0)$$
$$+x_m\omega_0^2(\cos\omega t\cos\varphi_0 - \sin\omega t\sin\varphi_0) = f_0\cos\omega t \quad (4.80)$$

$$x_m\cos\omega t[\cos\varphi_0(\omega_0^2 - \omega^2) - 2\omega\beta\sin\varphi_0] - x_m\sin\omega t[\sin\varphi_0(\omega_0^2 - \omega^2) +$$
$$2\omega\beta\cos\varphi_0] = f_0\cos\omega t + [0\cdot\sin\omega t] \; (4.81)$$

Порівнюючи коефіцієнти біля $\cos\omega t$ і $\sin\omega t$ маємо:

$$\begin{aligned} &x_m[\cos\varphi_0(\omega_0^2 - \omega) - 2\omega\beta\sin\varphi_0] = f_0 \\ &x_m[\sin\varphi_0(\omega_0^2 - \omega) + 2\omega\beta\cos\varphi_0] = 0 \\ &x_m^2[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2] = f_0^2 \end{aligned} \qquad (4.82)$$

Звідси амплітуда вимушених коливань:

$$x_m = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\omega^2\beta^2}} \qquad (4.83)$$

Початкова фаза:

$$tg\varphi_0 = -\frac{2\omega\beta}{\omega_0^2-\omega^2} \qquad (4.84)$$

Характерним для рівняння вимушеного коливання та для рівняння амплітуди і початкової фази є те, що ці величини не залежать від початкових умов, а визначаються тільки квадратами частот власних і вимушених коливань, а також величинами f_0 та β.

Із (4.83) слідує, що амплітуда коливань залежить від співвідношення між частотами власних коливань та вимушуючої сили.

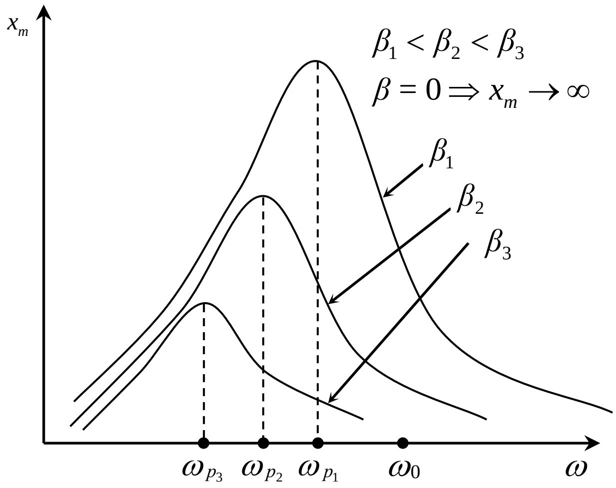


Рис. 4.13

Зокрема при $\beta = 0$ $\omega \to \omega_0 \Rightarrow x_m = \infty$. Маємо явище резонансу[29].

Знайдемо резонансну частоту при $\beta \neq 0$ (при $\beta = 0$, $\omega_p = \omega_0$). Для цього знайдемо мінімум підкореневого виразу (4.83):

$$-2\left(\omega_0^2 - \omega_p^2\right) \cdot 2\omega_p + 8\beta^2\omega_p = 0$$

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \qquad (4.85)$$

При наявності сили опору резонансна частота не співпадає із власною частотою коливань системи.

Залежність $x_m(\omega)$, що дається формулою (4.83) називається *амплітудно-частотною характеристикою* коливань системи (рис. 4.13).

Електромагнітні вимушені коливання

Якщо розглядати електричний коливальний контур, роль *x(t)* відіграє зовнішня е.р.с., яка періодично змінюється за гармонічним законом, або ж змінна напруга

$$U = U_m \sin \omega t \qquad (4.86)$$

Тоді рівняння (4.70) можна записати наступним чином:

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = \frac{U_m}{L}\cos \omega t \qquad (4.87)$$

Використовуючи заміни

$$2\beta = \frac{R}{L} \text{ та } \omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \qquad (4.88)$$

отримаємо вираз:

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{U_m}{L}\cos \omega t \qquad (4.89)$$

який є диференційним рівнянням вимушених електромагнітних коливань. Отже, *вимушені електромагнітні коливання* – це незатухаючі коливання які виникають в електричних колах під дією зовнішньої вимушуючої сили, роль якої відіграють генератори.

[29] *Резонансом* називається явище, при якому амплітуда вимушених коливань досягає максимуму

Процес отримання розв'язку рівняння (4.89) аналогічний то того, який був при розгляді вимушених механічних коливань. Провівши такі ж математичні операції, врахувавши (4.88) ми отримаємо, що амплітуда вимушених електромагнітних коливань:

$$q_m = \frac{U_m}{\omega\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \tag{4.90}$$

а початкова фаза:

$$tg\varphi_0 = \frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{R} \tag{4.91}$$

Розглянемо елементи коливального контуру в електричному колі з генератором струму по окремо:

а) активний опір в колі змінного струму.

На рис. 4.13 Γ – генератор змінного струму, R – резистор. Нехай генератор в даному колі створив струм:

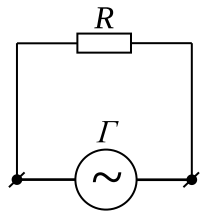


Рис. 4.13

$$I = I_m \sin\omega t \tag{4.92}$$

Застосуємо закон Ома для ділянки кола:

$$I = \frac{U+\varepsilon}{R} \tag{4.93}$$

$$\varepsilon = 0$$

Тому:

$$I = \frac{U}{R}, \text{ а } U = I \cdot R$$

Підставляючи (4.92), маємо:

$$U = I_m R \sin\omega t \tag{4.94}$$

Позначимо:

$$U_m = I_m R \tag{4.95}$$

$$U = U_m \sin\omega t \tag{4.96}$$

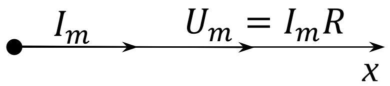


Рис. 4.14

В даному випадку коли в колі існує лише резистор R і відсутні індуктивність L і ємність C коливання напруги по фазі співпадають з коливаннями струму. Зручно коливання зображати за допомогою векторних діаграм (рис. 4.14).

б) Ємність в колі змінного струму (рис. 4.15). Резистор та котушка індуктивності відсутні, отже: $R = 0$ і $L = 0$.

Струм змінюється за таким же законом (4.92): $I = I_0 \sin\omega t$, напруга в колі – це напруга на конденсаторі:

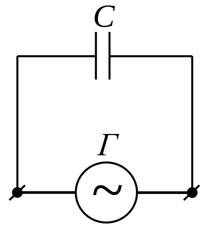


Рис. 4.15

$$U = U_c = \frac{q}{C} \tag{4.97}$$

Відомо, що $I = \frac{dq}{dt}$, звідси:

$$dq = Idt$$

Підставляючи (4.92), отримаємо:

$$dq = I_m \sin\omega t dt$$

$$q = -\frac{1}{\omega} I_m \cos\omega t + c_0, \tag{4.98}$$

де c_0- *const*, фізичний зміст якої – залишковий заряд на конденсаторі. $c_0 = 0$, якщо конденсатор до ввімкнення в коло був розряджений. Підставляючи (4.98) у (4.97), отримаємо:

$$U_c = \frac{q}{C} = -\frac{I_m}{\omega C} \cos\omega t \tag{4.99}$$

Позначимо:

$$U_m = \frac{I_m}{\omega C} \tag{4.100}$$ [30]

Тоді:

[30] Величина $\frac{1}{\omega C} = R_c$ називається *ємісним опором*

$$U = -U_m \cos\omega t \tag{4.101}$$

Із шкільного курсу геометрії відомо, що:

$$\cos\omega t = -\sin(\omega t - \tfrac{\pi}{2}) \tag{4.102}$$

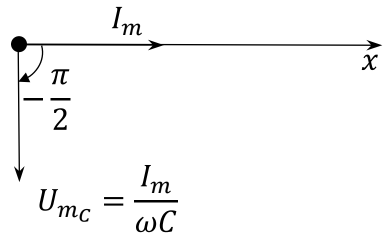


Рис. 4.16

Тому рівняння (4.101) можна подати у вигляді:

$$U_c = U_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \tag{4.103}$$

Отже, у випадку наявності у колі тільки конденсатора *C*, напруга відстає по фазі на $\frac{\pi}{2}$. Векторна діаграма для цього випадку зображена на рис. 4.16.

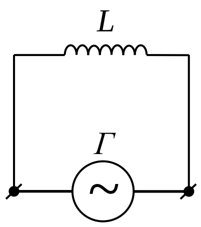


Рис. 4.17

в) індуктивність в колі змінного струму (рис. 4.17). Резистор та конденсатор відсутні, отже: $R = 0$ і $C = 0$. За законом Ома:

$$I = \frac{U + \varepsilon}{R}$$

Струм у колі змінюється за тим же законом (4.92): $I = I_m \sin\omega t$

$$U = IR - \varepsilon_c \Rightarrow U = -\varepsilon_c \tag{4.103}$$

$$\varepsilon_c = -L\frac{dI}{dt}$$

Підставляючи у (4.103), отримаємо:

$$U = -\varepsilon_c = L\frac{dI}{dt} = LI_m \omega \cos\omega t \tag{4.104}$$

Знаючи, що:

$$\cos\omega t = \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \tag{4.105}$$

Рівняння (4.104) набуває вигляду:

$$U = LI_m\omega\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (4.106)$$

Якщо позначити:

$$U_m = I_m L\omega \quad (4.107)$$ [31]

То:

$$U = U_m sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (4.108)$$

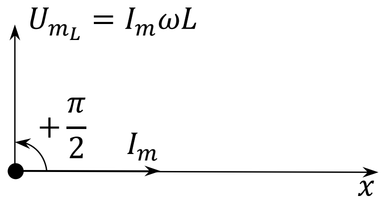


Рис. 4.18

Отже, якщо в колі існує лише індуктивний опір, то напруга випереджує силу струму на $\frac{\pi}{2}$. Використовуючи метод векторних діаграм, отримаємо рис. 4.18.

[31] Величина $R_L = L\omega$ називається *індуктивним опором*

Лекція 18. Змінний струм

Закон Ома для змінного струму

Ті електромагнітні коливання в коливальному контурі, які встановились з часом можна розглядати як змінний струм.

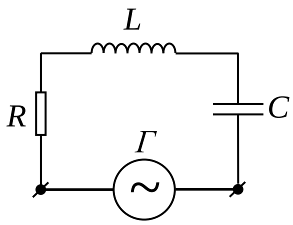


Рис. 4.19

Для визначення напруги скористаємось методом векторних діаграмам. Всі опори ввімкнені послідовно (рис. 4.19), тому загальна напруга дорівнює векторній сумі спадів напруг на кожному опорі. Векторна діаграма в цьому випадку матиме вигляд, зображений на рис 4.20, де U_m^* - це векторна сума амплітуд U_{m_L} та U_{m_C}, а U_m - векторна сума U_m^* та U_{m_R}. Таким чином, U_m - амплітудне значення спаду напруги на клемах кола, яке за теоремою Піфагора:

$$U_m = \sqrt{I_m^2\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + I_m^2 R^2}$$

Отже закон Ома для змінного струму для амплітудних значень має вигляд:

$$\boxed{U_m = I_m\sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}} \qquad (4.109)$$

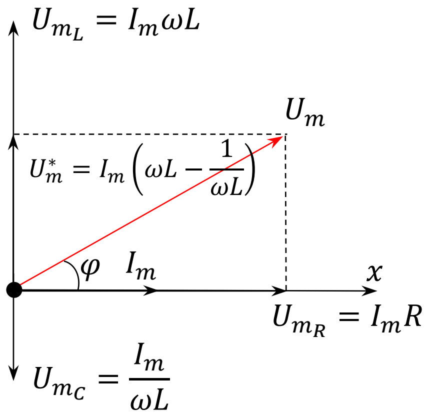


Рис. 4.20

Фазовий зсув між коливаннями сили струму і напруги може бути знайдений як:

$$\boxed{tg\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}} \qquad (4.110)$$

Величина:

$$\boxed{Z = \sqrt{(R_L - R_C)^2 + R^2} = \sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}} \qquad (4.111)$$

називається *повним опором* кол або *імпедансом*, а величина:

$$\boxed{X = R_L - R_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}} \qquad (4.112)$$

реактивним опором кола. Слід відмітити, що індуктивний опір росте, а ємнісний падає із підвищенням частоти ω. Активний ж опір R від неї не залажить. Ще одна відмінність активного опору від ємнісного і індуктивного полягає у тому, що тільки він відповідальний за можливість перетворення електричної енергії в тепло за законом Джоуля-Ленца.

Значення сили струму та напруги у колі постійно змінюється, тому потужність струму у такому колі також буде величина змінна. Проте, обчисливши таку потужність як

$$P(t) = U(t)I(t), \tag{4.112}$$

де $U(t)$ та $I(t)$ визначаються рівняннями (4.108) і (4.92), відповідно, ми отримаємо рівняння, в якому потужність буде залежати і від t і від φ. Практичну цінність ж має середнє значення потужності за період:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_m U_m cos\varphi \tag{4.113}$$

Якщо скориставшись векторною діаграмою 4.20 виразити косинус як $cos\varphi = \frac{I_m R}{U_m}$, то останню формулу можна подати як:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} R I_m^2 \tag{4.114}$$

таку ж потужність дає постійний струм: $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$. Тому величини:

$$I_\partial = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \text{ та } U_\partial = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \tag{4.115}$$

називаються *діючими (або ефективними)* значеннями струму на напруги, відповідно. Всі амперметри і вольтметри показують саме діюче значення. Вираз для середньої потужності (4.113) через діючі значення можна записати так:

$$\langle P \rangle = I_\partial U_\partial cos\varphi \tag{4.116}$$

Причому $cos\varphi$ тут називають *коефіцієнтом потужності*. Проаналізувавши вираз (4.116) можна бачити, що потужність змінного струму, на відміну від постійного, залежить не тільки від діючих значень сили струму і напруги, але й від зсуву фаз між ними. Особливо цікавим є випадок, коли $cos\varphi = 0$, тобто при $\varphi = 90°$. При такому зсуві фаз між силою струму і напругою потужність рівна нулю. Фізично це означає, що за певний проміжок часу потужність, яка передається генератором у зовнішнє коло рівна потужності, що передається від зовнішнього кола до генератора. Зрозуміло, що при створенні кіл змінного струму потрібно намагатись зробити так, щоб потужність у споживача була максимальною. А це є можливим тоді, коли $cos\varphi = 1$, або близький до одиниці. Аналізуючи векторну діаграму на рис. 4.20 можна бачити, що така можливість буде реалізовуватись тоді, коли індуктивний опір рівний ємнісному ($R_L = R_C$).

Резонанс напруги (послідовний резонанс)

Розглянемо електричне коло, яке складається із послідовно ввімкнених котушки індуктивності, конденсатора та резистора (рис. 4.19). Якщо в коло ввімкнений генератор то формулу (4.110) можна записати так:

$$\varepsilon_m = I_m\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}, \tag{4.115}$$

де ε_m - амплітудне значення е.р.с., створене генератором. Визначимо частоту е.р.с., при якій реактивний опір буде мінімальний:

$$\omega_p L - \frac{1}{\omega_p C} = 0 \tag{4.116}$$

$$\omega_p L = \frac{1}{\omega_p C}$$

$$\omega_p^2 LC = 1$$

Отже, *резонансна частота*:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{1}{LC}} \tag{4.117}$$

В даному випадку повний опір кола Z стає мінімальним, і дорівнює активному опорові R. Струм, в свою чергу, визначається даним опором і приймає максимально можливе значення при даному U_m. При цьому спад напруги на конденсаторі і спад напруги на котушці рівні за абсолютним значенням і протилежні за фазою, а тому «гасять» один одного. Тому спад напруги на резистору в цьому випадку рівний зовнішній напрузі, прикладеній до кола. Це явище називається *послідовним резонансом* або *резонансом напруг*.

При резонансі напруг напруга на котушці індуктивності так конденсаторі перевищує напругу, прикладену до кола. Тому явище послідовного резонансу використовується в техніці для підсилення коливань напруги якоїсь конкретної частоти. Таке підсилення напруги можливе тільки для вузького інтервалу частот поблизу резонансної частоти контуру, що дозволяє виділити з багатьох сигналів одне коливання певної частоти, тобто налаштувати радіоприймач на потрібну довжину хвилі.

Резонанс струму (паралельний резонанс)

Розглянемо коло змінного струму, яке містить паралельно з'єднані котушку, індуктивністю L і конденсатор, ємністю C (рис. 4.20).

Для спрощення припустимо, що активний опір кола настільки малий, що ним можна знехтувати.

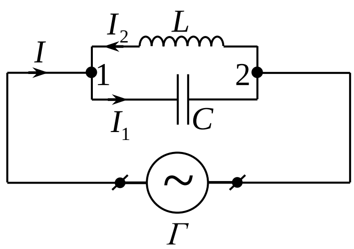


Рис. 4.20

Якщо прикладена напруга змінюється за законом:

$$U = U_m \cos \omega t, \qquad (4.118)$$

то у вітці 1C2 тече струм:

$$I_1 = I_{m_1} \cos(\omega t - \varphi_1) \qquad (4.119)$$

Амплітуда якого при умові, що R=0 і L=0:

$$I_{m_1} = \frac{U_m}{\frac{1}{\omega C}} \qquad (4.120)$$

Початкова фаза φ_1 цього струму визначається рівнянням:

$$tg\varphi_1 = -\infty \qquad (4.121)$$

Отже:

$$\varphi_1 = \left(2n + \frac{3}{2}\right)\pi, \qquad (4.122)$$

де n=1,2,3…
Аналогічно сила струму на ділянці $1L2$:

$$I_2 = I_{m_2}\cos(\omega t - \varphi_2) \tag{4.123}$$

Амплітуда якого визначається (враховуючи, що R=0 і C=0)

$$I_{m_2} = \frac{U_m}{\omega L} \tag{4.124}$$

Початкова фаза φ_2 такого струму:

$$tg\varphi_2 = +\infty \tag{4.125}$$

Звідки:

$$\varphi_2 = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi, \tag{4.124}$$

де n=1,2,3….

Порівнюючи вирази (4.122) і (4.124) можна побачити, що різниця фаз струмів:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \pi \tag{4.125}$$

Тобто струми в вітках кола протилежні по фазі. Амплітуда в зовнішньому (нерозгалуженому) колі:

$$I_m = \left|I_{m_1} - I_{m_2}\right| = U_m\left|\omega C - \frac{1}{\omega L}\right| \tag{4.126}$$

Якщо $\omega = \omega_{рез} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, то $I_{m_1} = I_{m_2}$ і $I_m = 0$. Явище різкого зменшення амплітуди сили струму у зовнішній ділянці кола, яка живить паралельно з'єднані конденсатор і котушку індуктивності, при наближенні ω до резонансної частоти $\omega_{рез}$ називається *резонансом струмів* (*паралельним резонансом*).

В даному випадку ми отримали таке ж значення резонансної частоти як і при резонансі напруги. Амплітуда сили струму I_m виявилась рівною нулю, тому що ми знехтували активним опором R. Якщо ж його врахувати, то різниця фаз $(\varphi_1 - \varphi_2)$ не буде рівна π, а отже при резонансі струмів амплітуда сили струму I_m в реальному контурі буде відмінною від нуля, але набуде найменшого можливого значення.

Таким чином, розглянутий контур чинить великий опір змінному струмові певної частоти, близької до резонансної. Тому дана властивість резонансу струмів використовується в резонансних підсилювачах, які дозволяють виділити одне конкретне коливання із сигналу складної форми.

Довідкові матеріали

Таблиця 1. Основні фізичні константи

Позначення	Величина	Значення
G	Гравітаційна стала	$6{,}672 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{Нм}^2}{\text{кг}^2}$
g	Прискорення вільного падіння	$9{,}81\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$
c	Швидкість світла у вакуумі	$2{,}9979 \cdot 10^{8}\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$
e	Елементарний електричний заряд	$1{,}60219 \cdot 10^{-19}$ Кл
m_e	Маса спокою електрона	$9{,}1095 \cdot 10^{-31}$ кг 0,0005486 а.о.м.
m_n	Маса спокою нейтрона	$1{,}6749 \cdot 10^{-27}$ кг 1,00866 а.о.м.
m_p	Маса спокою протона	$1{,}6726 \cdot 10^{-27}$ кг 1,00728 а.о.м.
ε_0	Електрична стала	$8{,}854 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
μ_0	Магнітна стала	$4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м
$M_З$	Маса Землі	$5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг
$R_З$	Радіус Землі	$6{,}37 \cdot 10^{6}$ м

Таблиця 2. Деякі відомості про одиниці фізичних величин

Величина	Найменування	Українське позначення	Міжнародне позначення
Довжина	метр	м	m
Маса	кілограм	кг	kg
Час	секунда	с	s
Сила, вага	ньютон	Н	N
Робота, енергія	джоуль	Дж	J
Потужність	ват	Вт	W
Тиск	паскаль	Па	Pa
Механічна напруга	паскаль	Па	Pa
Частота коливань	герц	Гц	Hz
Електричний заряд	кулон	Кл	C
Сила струму	ампер	А	A
Потенціал електричного поля	вольт	В	V
Напруженість електричного поля	вольт на метр	$\frac{\text{В}}{\text{м}}$	$\frac{\text{V}}{\text{m}}$
Індукція електричного поля	кулон на метр у квадраті	$\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$	$\frac{\text{C}}{\text{m}^2}$
Електрична напруга	вольт	В	V
Електрична ємність	фарад	Ф	F

Електричний опір	ом	Ом	Ω
Електрична провідність	сименс	См	S
Магнітна індукція	тесла	Тл	T
Напруженість магнітного поля	ампер на метр	$\frac{\text{А}}{\text{м}}$	$\frac{\text{A}}{\text{m}}$
Магнітний потік	вебер	Вб	Wb
Індуктивність	генрі	Гн	H

Таблиця 3. Множники і приставки для утворення десяткових і кратних одиниць

Множник	Приставка	Позначення
10^{15}	пета	П
10^{12}	тера	Т
10^{9}	гіга	Г
10^{6}	мега	М
10^{3}	кіло	к
10^{2}	гекто	г
10^{1}	дека	да
10^{-1}	деци	д
10^{-2}	санти	с
10^{-3}	мілі	м
10^{-6}	мікро	мк
10^{-9}	нано	н
10^{-12}	піко	п
10^{-15}	фемто	ф

Таблиця 4. Латинський та грецький алфавіти

Латинська буква		Назва букви		Грецька буква		Назва букви
A, a	*A, a*	а		Α, α	alpha	альфа
B, b	*B, b*	бе		Β, β	beta	бета
C, c	*C, c*	це		Γ, γ	gamma	гамма
D, d	*D, d*	де		Δ, δ	delta	дельта
E, e	*E, e*	є		Ε, ε	epsilon	епсілон
F, f	*F, f*	еф		Ζ, ζ	zeta	дзета
G, g	*G, g*	же		Η, η	eta	ета
H, h	*H, h*	аш		Θ, θ	theta	тета
I, i	*I, i*	і		Ι, ι	iota	йота
J, j	*J, j*	йот		Κ, κ	kappa	каппа
K, k	*K, k*	ка		Λ, λ	lambda	лямбда
L, l	*L, l*	ел		Μ, μ	mu	мю
M, m	*M, m*	ем		Ν, ν	nu	ню
N, n	*N, n*	ен		Ξ, ξ	xi	ксі
O, o	*O, o*	о		Ο, ο	omicron	омікрон
P, p	*P, p*	пе		Π, π	pi	пі
Q, q	*Q, q*	к'ю		Ρ, ρ	rho	ро
R, r	*R, r*	ер		Σ, σ	sigma	сігма
S, s	*S, s*	ес		Τ, τ	tau	тау
T, t	*T, t*	те		Υ, υ	upsilon	іпсілон
U, u	*U, u*	у		Φ, φ	phi	фі
V, v	*V, υ*	ве		Χ, χ	chi	хі
W, w	*W, w*	дубль-ве		Ψ, ψ	psi	псі
X, x	*X, x*	ікс		Ω, ω	omega	омега
Y, y	*Y, y*	ігрек				
Z, z	*Z, z*	зет				

Література

1. Кучерук І. М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Загальний курс фізики. У 3 томах. Том 1. Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка. К.: Техніка, 1999, 536 с.
2. Кучерук І. М., Горбачук І.Т., Луцик П.П. Загальний курс фізики. У 3 томах. Том 2. Електрика і магнетизм. К.: Техніка, 2001, 452 с.
3. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т.I Механика. 1979.:М, 520 с.
4. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т.III Электричество. 1979.:М, 691 с.
5. Савельев И.В. Курс общей физики, том I. Механика, колебания и волны, молекулярная физика. 1970. М.:Наука, 511 с.
6. Савельев И.В. Курс общей физики, том II. Электричество. 1970. М.:Наука, 431 с.
7. Зисман Г.А., Тодес О.М. Курс общей физики. Том I. Механика, молекулярная физика, колебания и волны. 1974. М.:Наука, 366 с.
8. Зисман Г.А., Тодес О.М. Курс общей физики. Том II. Электричество и магнетизм. 1972. М.:Наука, 368 с.
9. Трофимова Т.И. Курс физики: учебное пособие для вузов. 1990. М.Высшая школа, 478 с.
10. Ландсберг Г.С. Элементарный учебник физики: Учеб. пособие. В 3 т. Т.1. Механика. Теплота. Молекулярная физика.- 13-е изд.-М.:Физматлит, 2004.-608 с.
11. Ландсберг Г.С. Элементарный учебник физики: Учеб. пособие. В 3 т. Т.2. Электричество и магнетизм.- 12-е изд.-М.:Физматлит, 2001.-480 с.
12. Ландсберг Г.С. Элементарный учебник физики: Учеб. пособие. В 3 т. Т.3. Колебания и волны. Оптика. Атомная и ядерная физика.- 12-е изд.-М.:Физматлит, 2001.-656 с.