Державний університет інтелектуальних технологій та зв'язку

Кафедра вищої математики

Стрелковська І.В., Паскаленко В.М.

РЯДИ ФУР'Є.
ІНТЕГРАЛ ФУР'Є

Навчальний посібник
для фахівців в галузі зв'язку

Одеса 2021

УДК 517.9
ББК 22.161

Стрелковська І.В., Паскаленко В.М. Ряди Фур'є. Інтеграл Фур'є : навч. посіб. для фахівців в галузі зв'язку. – Одеса, 2021. – 122 с.

Рецензент: завідувач кафедри телекомунікацій Національного університету «Львівська політехніка», д.т.н., професор М.М. Климаш.

При написанні навчального посібника «Ряди Фур'є» для фахівців в галузі зв'язку авторами було використано багаторічний досвід викладання вищої математики у Одеській національній академії зв'язку ім. О.С. Попова.

У навчальному посібнику ряди Фур'є подані з урахуванням їх застосування спеціалістами у галузі зв'язку.

Навчальний посібник містить теоретичний курс, велику кількість відповідних прикладів з докладними поясненнями по розв'язуванню, а також задачі для самостійного розв'язування; контрольні запитання; перевірні тести та тренувальні вправи.

Навчальний посібник відповідає вимогам програми курсу вищої математики для студентів вищих навчальних закладів, що навчаються за напрямом «Телекомунікації».

Навчальний посібник адресовано викладачам та студентам технічних спеціальностей, а також тим, хто вивчає вищу математику самостійно.

ЗМІСТ

Глава 1

РЯДИ ФУР'Є. ІНТЕГРАЛ ФУР'Є

1 Ортогональні та ортонормовані системи функцій

1.1 Ортогональні та нормовані функції

В и з н а ч е н н я . Якщо функції $\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$ є неперервними на сегменті $[a; b]$, то інтеграл $\int\limits_a^b \varphi_1(x)\varphi_2(x)dx$ називається *скалярним добутком функцій* $\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$ на сегменті $[a; b]$. При цьому використовується позначення

$$(\varphi_1(x); \varphi_2(x)) = \int\limits_a^b \varphi_1(x)\varphi_2(x)dx. \tag{1}$$

В л а с т и в о с т і с к а л я р н о г о д о б у т к у :

1. Якщо функції $\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$ неперервні на сегменті $[a; b]$, то

$$(\varphi_1(x); \varphi_2(x)) = (\varphi_2(x); \varphi_1(x)). \tag{2}$$

2. Якщо функції $\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$ неперервні на сегменті $[a; b]$, а λ – деяка стала, то

$$(\lambda\varphi_1(x); \varphi_2(x)) = (\varphi_1(x); \lambda\varphi_2(x)) = \lambda\,(\varphi_1(x); \varphi_2(x)). \tag{3}$$

3. Якщо функції $\varphi_1(x)$; $\varphi_2(x)$; $\varphi_3(x)$ неперервні на сегменті $[a; b]$, то

$$(\varphi_1(x) + \varphi_2(x); \varphi_3(x)) = (\varphi_1(x); \varphi_3(x)) + (\varphi_2(x); \varphi_3(x)). \tag{4}$$

4. Якщо функція $\varphi(x)$ неперервна на сегменті $[a; b]$ і $\varphi(x) \neq 0$, то справедливою є нерівність

$$(\varphi(x); \varphi(x)) > 0. \tag{5}$$

Завдання для самостійної роботи. Довести справедливість властивостей 1 – 4.

В и з н а ч е н н я . Функції $\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$ називаються ортогональними на сегменті $[a; b]$, якщо ці функції неперервні на сегменті $[a; b]$, а їхній скалярний добуток дорівнює нулю, тобто

$$\int\limits_a^b \varphi_1(x)\varphi_2(x)dx = 0, \tag{6}$$

а $\varphi_1(x) \not\equiv \varphi_2(x)$ на сегменті $[a; b]$.

В и з н а ч е н н я . *Нормою функції* $\varphi(x)$ на сегменті $[a;\ b]$, що належить множині неперервних на сегменті $[a;\ b]$ функцій, називається величина $\sqrt{\int_a^b \varphi^2(x)dx}$. При цьому використовується позначення $\|\varphi(x)\| = (\varphi(x);\ \varphi(x))^{\frac{1}{2}}$ або

$$\|\varphi(x)\| = \sqrt{\int_a^b \varphi^2(x)dx}. \tag{7}$$

В и з н а ч е н н я . Функція $\varphi(x)$, норма якої дорівнює одиниці на сегменті $[a;\ b]$, тобто

$$\sqrt{\int_a^b \varphi^2(x)dx} = 1,$$

називається *нормованою на сегменті* $[a;\ b]$ функцією.

1.2 Ортогональні системи функцій. Ортонормовані системи функцій

Розглянемо послідовність функцій

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \varphi_3(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots\ , \tag{8}$$

які визначені та неперервні на сегменті $[a;\ b]$ і серед яких немає функції, що тотожно дорівнює нулю на сегменті $[a;\ b]$.

В и з н а ч е н н я . Послідовність функцій (8) називається *ортогональною системою функцій на сегменті* $[a;\ b]$, якщо є ортогональними будь-які дві не рівні між собою функції цієї системи, та усі функції цієї системи є інтегровними з квадратом, тобто

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n \neq m; \\ K, & \text{якщо } n = m. \end{cases} \tag{9}$$

В и з н а ч е н н я . Система функцій (8) називається *повною системою функцій на сегменті* $[a;\ b]$, якщо з умови

$$(f(x);\ \varphi_1(x)) = (f(x);\ \varphi_2(x)) = \ldots. = (f(x);\ \varphi_n(x)) = \ldots = 0 \tag{10}$$

виходить, що $f(x) \equiv 0$ на сегменті $[a;\ b]$, де $f(x)$ – будь-яка неперервна на сегменті $[a;\ b]$ функція.

В и з н а ч е н н я . Послідовність функцій (8) називається *нормованою на сегменті* $[a;\ b]$ *системою функцій*, якщо кожна з функцій системи є нормованою функцією.

Якщо система функцій не є нормованою системою функцій, то таку систему функцій можна пронормувати.

Для цього знаходиться норма кожної ненормованої функції, після чого функція ділиться на свою норму.

В и з н а ч е н н я . Система функцій називається *ортонормованою системою функцій на сегменті* $[a;\ b]$, якщо ця система функцій є 1) ортогональною; 2) нормованою системою функцій, тобто

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = \begin{cases} 0, \text{ якщо } n \neq m; \\ 1, \text{ якщо } n = m. \end{cases} \tag{11}$$

ЗАУВАЖЕННЯ: Системи функцій

$$\begin{cases} 1)\ 1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \ldots, \cos nx, \ldots; \\ 2)\ 1, \sin x, \sin 2x, \sin 3x, \ldots, \sin nx, \ldots; \\ 3)\ 1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots \end{cases} \tag{12}$$

є ортогональними системами функцій на сегменті $[-\pi;\ \pi]$.

Системи функцій

$$\begin{cases} 4)\ 1, \cos\omega x; \cos 2\omega x; \cos 3\omega x, \ldots, \cos n\omega x, \ldots; \\ 5)\ 1, \sin\omega x; \sin 2\omega x, \sin 3\omega x, \ldots, \sin n\omega x, \ldots; \\ 6)\ 1, \cos\omega x; \sin\omega x; \cos 2\omega x, \sin 2\omega x, \ldots, \cos n\omega x, \sin n\omega x, \ldots \end{cases} \tag{13}$$

є ортогональними системами функцій на сегменті $[-l;\ l]$, де $\omega = \dfrac{\pi}{l}$.

Завдання для самостійної роботи: 1. Довести, що системи функцій (12) та (13) є ортогональними системами.

2. Перевірити, чи є ці системи функцій нормованими системами функцій.

3. Пронормувати системи функцій (12) та (13), якщо вони не є нормованими системами функцій.

2 Ряди та коефіцієнти Фур'є

2.1 Узагальнений ряд Фур'є

Нехай на сегменті $[a;\ b]$ задана ортонормована система функцій

$$\varphi_1(x);\ \varphi_2(x);\ \varphi_3(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots, \tag{14}$$

а також функція $f(x)$, що є неперервною або кусково-неперервною на сегменті $[a;\ b]$ функцією і до того ж абсолютно інтегровною функцією.

З'ясуємо, за яких умов функція $f(x)$ може бути розвинена у ряд по функціях системи (14), тобто

$$f(x) = \lambda_1\varphi_1(x) + \lambda_2\varphi_2(x) + \lambda_3\varphi_3(x) + \ldots + \lambda_n\varphi_n(x) + \ldots . \qquad (15)$$

Будемо вважати, що ряд (15) рівномірно збігається до функції $f(x)$ на сегменті $[a; b]$.

Знайдемо коефіцієнти такого ряду. Обидві частини рівності (15) помножимо на $\varphi_1(x)$ та почленно проінтегруємо на сегменті $[a; b]$ згідно з теоремою про почленне інтегрування функціональних рядів.

Виходить

$$\int_a^b f(x)\,\varphi_1(x)dx = \lambda_1\int_a^b \varphi_1^2(x)dx + \lambda_2\int_a^b \varphi_2(x)\,\varphi_1(x)dx + \ldots + \lambda_n\int_a^b \varphi_n(x)\,\varphi_1(x)dx + \ldots . \quad (16)$$

У правій частині рівності (16) перший з інтегралів дорівнює одиниці як квадрат норми нормованої функції $\varphi_1(x)$, усі інші інтеграли дорівнюють нулю, оскільки вони є скалярними добутками ортогональних функцій.

Таким чином, маємо

$$\lambda_1 = \int_a^b f(x)\,\varphi_1(x)dx. \qquad (17)$$

У такий спосіб можна знайти усі інші коефіцієнти ряду (16).

Отже,

$$\lambda_n = \int_a^b f(x)\,\varphi_n(x)dx, \qquad (18)$$

де $n = 1; 2; 3; \ldots$.

Ряд (15) називається *узагальненим рядом Фур'є*, складеним для функції $f(x)$ на сегменті $[a; b]$.

Коефіцієнти такого ряду знаходяться за формулою (18) та називаються коефіцієнтами ряду Фур'є.

У залежності від функцій, що утворюють систему (14), ряд Фур'є може мати ту чи іншу структуру.

Якщо замість ортонормованої системи функцій (14) взяти ортогональну на сегменті $[a; b]$ систему функцій

$$\psi_1(x);\ \psi_2(x);\ \psi_3(x),\ \ldots,\ \psi_n(x),\ \ldots \qquad (19)$$

та по функціях цієї системи розкласти функцію $f(x)$ у ряд

$$f(x) = \mu_1\psi_1(x) + \mu_2\psi_2(x) + \mu_3\psi_3(x) + \ldots + \mu_n\psi_n(x) + \ldots,$$

то коефіцієнти цього ряду будуть знаходитись за формулою

$$. \mu_n = \frac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx}{\sqrt{\int_a^b \varphi_n^2(x)dx}}, \tag{20}$$

де n = 1; 2; 3; … .

Завдання для самостійної роботи. Існує багато різноманітних ортогональних та ортонормованих систем функцій, як-то система функцій Радемахера, система функцій Уолша, поліноми Лежандра, поліноми Якобі та інші, з якими можна ознайомитись у додатковій літературі.

Вибір тієї чи іншої системи ортогональних функцій для розкладання у ряд Фур'є функції $f(x)$ залежить від того, який процес описує функція $f(x)$.

У теорії електрозв'язку, у радіотехніці важливу роль відіграють сигнали. Для дослідження сигналів за допомогою рядів найбільш поширеними ортогональними системами функцій є тригонометричні системи функцій.

2.2 Тригонометричний ряд Фур'є та його коефіцієнти

Нехай $f(x)$ – періодична функція з періодом $T = 2\pi$.

Знайдемо розвинення функції в ряд Фур'є по функціях ортонормованої системи

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}};\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x;\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x;\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x;\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x;\ldots;\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx;\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx;\ldots, \tag{21}$$

визначеної на сегменті [–π; π].

У такому разі ряд Фур'є для функції $f(x)$ має вигляд

$$\begin{gathered}\frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1\sin x + a_2\cos 2x + b_2\sin 2x + \ldots \\ \ldots + a_n\cos nx + b_n\sin nx + \ldots = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)\end{gathered} \tag{22}$$

та називається *тригонометричним рядом Фур'є функції* $f(x)$.

При цьому використовується позначення

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx).$$

Будемо вважати, що ряд (22) на сегменті [–π; π] рівномірно збігається до функції $f(x)$. Оскільки ряд (22) збігається рівномірно, то на нього поширюється теорема про почленне інтегрування функціональних рядів.

Проінтегруємо почленно рівність (22) на сегменті [–π; π]:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + a_1\int_{-\pi}^{\pi}\cos x dx + b_1\int_{-\pi}^{\pi}\sin x dx + \ldots$$
$$\ldots + a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx dx + \ldots. \tag{23}$$

З ортогональності системи функцій (21) виходить, що у рівності (3.144) усі інтеграли правої частини, за винятком першого, дорівнюють нулю.

Отже,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi} = a_0\pi, \tag{24}$$

звідки

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx. \tag{25}$$

Далі обидві частини рівності (22) помножимо на неперервну функцію $\cos nx$ та отримаємо у правій частині рівності ряд, який також рівномірно збігається на сегменті [–π; π].

Почленно проінтегруємо на сегменті [–π; π] цей ряд згідно з теоремою про почленне інтегрування функціональних рядів маємо

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\, dx + a_1\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\cos nx\, dx +$$
$$+ b_1\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\cos nx\, dx + a_2\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2x\cos nx\, dx + b_2\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2x\cos nx\, dx + \ldots$$
$$\ldots + a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\, dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos nx\, dx + \ldots \tag{26}$$

Усі інтеграли правої частини рівності (26), за винятком інтеграла $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\, dx$, дорівнюють нулю в силу ортогональності функцій системи (21).

Виходить, що

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx dx = \frac{a_n}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2nx)dx = \frac{a_n}{2}\left(x + \frac{1}{2n}\sin^2 nx)\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi a_n,$$

звідки

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \tag{27}$$

де $n = 1; 2; 3; \ldots$.

Аналогічно маємо

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \tag{28}$$

де $n = 1; 2; 3; \ldots$.

2.3 Достатні ознаки розвинення функції у ряд Фур'є

Якщо періодичну з періодом $T = 2\pi$ функцію розкласти у ряд Фур'є, то може так статись, що сума побудованого ряду не дорівнює функції $f(x)$.

В цьому випадку в рівності (22) замість знака «=» ставиться знак ~, тобто

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Розглянемо умови, за яких сума ряду Фур'є, побудованого для функції $f(x)$, збігається з функцією $f(x)$.

В и з н а ч е н н я . Функція $f(x)$ називається *кусково-неперервною на сегменті* $[a; b]$, якщо цей сегмент за допомогою скінченної кількості точок можна розбити на сегменти $[a; x_1]$, $[x_1; x_2]$, $[x_2; x_3]$, …, $[x_{n-1}; b]$ так, що на кожному з цих сегментів функція $f(x)$ є неперервною та існують граничні значення $f(a + 0)$; $f(x_1 – 0)$; $f(x_1 + 0)$; $f(x_2 – 0)$; $f(x_2 + 0)$, …, $f(x_{n-1} – 0)$; $f(x_{n-1} + 0)$; $f(b – 0)$.

В и з н а ч е н н я . Функція $f(x)$ називається *кусково-монотонною на сегменті* $[a; b]$, якщо цей сегмент за допомогою скінченної кількості точок можна розбити на інтервали $(a; x_1)$; $(x_1; x_2)$; $(x_2; x_3)$, …, $(x_{n-1}; b)$ так, що на кожному з цих інтервалів функція $f(x)$ є монотонною функцією.

В и з н а ч е н н я . Функція $f(x)$ називається *гладкою на сегменті* $[a; b]$, якщо вона неперервна на сегменті $[a; b]$, а її перша похідна є неперервною функцією в інтервалі $(a; b)$.

Графік гладкої функції є гладкою кривою.

В и з н а ч е н н я . Функція $f(x)$ називається *кусково-гладкою на сегменті* $[a; b]$, якщо цей сегмент за допомогою скінченної кількості точок можна розбити на інтервали $(a; x_1)$, $(x_1; x_2)$, $(x_2; x_3)$, …, $(x_{n-1}; b)$ так, що в кожному з них функція $f(x)$ є гладкою функцією.

Графік кусково-гладкої функції складається зі скінченної кількості гладких дуг.

Теорема 1 (Діріхле). Нехай функція $f(x)$ задовольняє умови:

1) є періодичною з періодом $T = 2\pi$;
2) є неперервною або кусково-неперервною на сегменті $[-\pi; \pi]$;
3) є монотонною або кусково-монотонною на сегменті $[-\pi; \pi]$.

Тоді:

1) ряд Фур'є, побудований для функції $f(x)$, за будь-якого значення $x \in [-\pi; \pi]$ збігається до суми $S(x)$;

2) у точках неперервності функції $f(x)$ значення суми $S(x)$ дорівнюють значенням функції $f(x)$;

3) у точках розриву функції $f(x)$ значення суми $S(x)$ дорівнюють середньому арифметичному односторонніх граничних значень функції $f(x)$ у цих точках, тобто $S(x) = \frac{1}{2}\left(f(x-0) + f(x+0)\right)$;

4) на кінцях сегмента $[-\pi; \pi]$ сума $S(x)$ визначається таким чином $S(-\pi) = S(\pi) = \frac{1}{2}\left(f(-\pi+0) + f(\pi-0)\right)$;

5) на будь-якому сегменті, що входить до інтервалу неперервності функції $f(x)$, ряд Фур'є функції $f(x)$ збігається рівномірно.

ЗАУВАЖЕННЯ 1. Функція $f(x)$ задовольняє умови Діріхле на сегменті $[a; b]$, якщо ця функція:

1) є неперервною або кусково-неперервною на сегменті $[a; b]$;
2) є монотонною або кусково-монотонною на сегменті $[a; b]$.

ЗАУВАЖЕННЯ 2. Функція $f(x)$ задовольняє умови Діріхле на сегменті $[a; b]$, якщо ця функція:

1) є неперервною на сегменті $[a; b]$ або має скінченну кількість точок розриву першого роду;
2) є монотонною на сегменті $[a; b]$ або має скінченну кількість точок екстремуму.

Наведені формуліровки є еквіваленті.

Теорема 2. Нехай функція $f(x)$ задовольняє умови:

1) є періодичною з періодом $T = 2\pi$;
2) є гладкою або кусково-гладкою на сегменті $[-\pi; \pi]$.

Тоді:

1) ряд Фур'є, побудований для функції $f(x)$, за будь-якого значення $x \in [-\pi; \pi]$ збігається до суми $S(x)$;

2) у точках неперервності функції $f(x)$ значення суми $S(x)$ дорівнюють значенням функції $f(x)$;

3) у точках розриву функції $f(x)$ значення суми $S(x)$ дорівнюють середньому арифметичному односторонніх граничних значень функції $f(x)$ у цих точках, тобто $S(x)=\frac{1}{2}\big(f(x-0)+f(x+0)\big)$;

4) на кінцях сегмента $[-\pi;\ \pi]$ сума $S(x)$ визначається таким чином $S(-\pi)=S(\pi)=\frac{1}{2}\big(f(-\pi+0)+f(\pi-0)\big)$;

5) на будь-якому сегменті, що входить до інтервалу неперервності функції $f(x)$, ряд Фур'є функції $f(x)$ збігається рівномірно.

Теорема 3. Нехай функція $f(x)$ задовольняє умови:

1) визначена на сегменті $[-\pi;\ \pi]$;

2) розкладається у ряд Фур'є;

3) на кінцях сегмента $[-\pi;\ \pi]$ приймає однакові значення, тобто $f(-\pi) = f(\pi)$;

4) похідна першого порядку на кінцях сегмента $[-\pi;\ \pi]$ приймає однакові значення, тобто $f'(-\pi) = f'(\pi)$;

5) похідна другого порядку на сегменті $[-\pi;\ \pi]$ є обмеженою функцією, тобто

$$|f''(x)| \le M.$$

Тоді ряд Фур'є функції $f(x)$ на сегменті $[-\pi;\ \pi]$ збігається рівномірно та абсолютно.

Теорема 4. Нехай функція $f(x)$ задовольняє умови:

1) визначена на сегменті $[-\pi;\ \pi]$;

2) на кінцях сегмента $[-\pi;\ \pi]$ приймає однакові значення, тобто $f(-\pi) = f(\pi)$;

3) похідна першого порядку на кінцях сегмента $[-\pi;\ \pi]$ приймає однакові значення, тобто $f'(-\pi) = f'(\pi)$;

4) похідна другого порядку на сегменті $[-\pi;\ \pi]$ є обмеженою функцією, тобто $|f''(x)| \le M$.

Тоді функція $f(x)$ може бути на сегменті $[-\pi;\ \pi]$ розвинена у ряд Фур'є і це розвинення є єдиним.

Приймемо теореми 1–4 без доведення.

Приклади до пункту 2

Приклад 1. Розкласти у ряд Фур′є функцію

$$f(x)=\begin{cases}4x, \text{ якщо } -\pi<x<0;\\ 2x, \text{ якщо } 0\le x<\pi.\end{cases}$$

Р о з в ′ я з а н н я

Знаходимо коефіцієнти тригонометричного ряду Фур′є (22) за формулами (25), (27), (28):

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}4xdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}2xdx=\frac{1}{\pi}\left(2x^2\Big|_{-\pi}^{0}+x^2\Big|_{0}^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}(0-2\pi^2+\pi^2-0)=-\pi\,.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}4x\cos nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}2x\cos nxdx=\begin{bmatrix} U=x; & dU=dx; \\ dV=\cos nxdx; & V=\frac{1}{n}\sin nx\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{4}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\sin nxdx\right)+\frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_{0}^{\pi}-\frac{1}{n}\int_{0}^{\pi}\sin nxdx\right)=$$

$$=\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}\right)+\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_{0}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{4}{\pi n^2}(1-\cos n\pi)+\frac{2^{-\pi}}{\pi n^2}(\cos n\pi-1)=\frac{2-2\cos n\pi}{\pi n^2}=\frac{2}{\pi n^2}(1-\cos n\pi)\,;$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}4x\sin nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}2x\sin nxdx=\begin{bmatrix} U=x; & dU=dx; \\ dV=\sin nxdx; & V=-\frac{1}{n}\cos nx\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{4}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\cos nxdx\right)+\frac{2}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_{0}^{\pi}+\frac{1}{n}\int_{0}^{\pi}\cos nxdx\right)=$$

$$=\frac{4}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos nx+\frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_{0}^{\pi}\right)+\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos nx+\frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_{0}^{\pi}\right)=$$

$$=-\frac{4}{n}\cos n\pi-\frac{2}{n}\cos n\pi=-\frac{6}{n}\cos n\pi\,.$$

Отже, маємо

$$f(x)\sim-\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n^2}(1-\cos n\pi)\cos nx-\frac{6}{n}\cos n\pi\sin nx$$

або

$$f(x)=-\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left(1-(-1)^n\right)}{\pi n^2}\cos nx-\frac{6}{n}(-1)^n\sin nx\,,$$

так як функція $f(x)$ задовольняє умовам Діріхле.

В і д п о в і д ь: $f(x)=-\dfrac{\pi}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left(1-(-1)^n\right)}{\pi n^2}\cos nx-\frac{6}{n}(-1)^n\sin nx\,.$

Приклад 2. Розкласти у ряд Фур′є функцію $f(x)=x^2+x$ в інтервалі $(-\pi;\pi)$. Побудувати графік суми ряду.

Р о з в ′ я з а н н я

Знайдемо коефіцієнти ряду Фур′є, користуючись формулами (25), (27), (28):

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2+x)dx=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{3}(\pi^3+\pi^3)+\frac{1}{2}(\pi^2-\pi^2)\right)=\frac{2}{3}\pi^2;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2+x)\cos nxdx=\begin{bmatrix} U=x^2+x; & dU=(2x+1)dx \\ dV=\cos nxdx; & V=\frac{1}{n}\sin nx \end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2+x}{n}\sin nx\Bigg|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}(2x+1)\sin nxdx\right)=-\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2x+1)\sin nxdx=$$

$$=\begin{bmatrix} U=2x+1; & dU=2dx \\ dV=\sin nxdx; & V=-\frac{1}{n}\cos nx \end{bmatrix}=\frac{2x+1}{n^2\pi}\cos nx\Bigg|_{-\pi}^{\pi}-\frac{2}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx=$$

$$=\frac{2\pi+1}{n^2\pi}\cos n\pi-\frac{-2\pi+1}{n^2\pi}\cos n\pi--\frac{2}{n^3\pi}\sin nx\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=$$

$$=\frac{1}{n^2\pi}(2\pi\cos n\pi+\cos n\pi+2\pi\cos n\pi-\cos n\pi)=\frac{4\pi\cos n\pi}{n^2\pi}=\frac{4}{n}\cos n\pi;$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2+x)\sin nxdx=\begin{bmatrix} U=x^2+x; & dU=(2x+1)dx \\ dV=\sin nxdx; & V=-\frac{1}{n}\cos nx \end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x^2+x}{n}\cos nx\Bigg|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}(2x+1)\cos nxdx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi^2+\pi}{n}\cos n\pi+\frac{\pi^2-\pi}{n}\cos n\pi+\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}(2x+1)\cos nxdx\right)=$$

$$=\begin{bmatrix} U=2x+1; & dU=2dx \\ dV=\cos nxdx; & V=\frac{1}{n}\sin nx \end{bmatrix}=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi^2}{n}\cos n\pi-\frac{\pi}{n}\cos n\pi+\frac{\pi^2}{n}\cos n\pi-\right.$$

$$\left.-\frac{\pi}{n}\cos n\pi+\frac{1}{n}\left(\frac{2x+1}{n}\sin nx\Bigg|_{-\pi}^{\pi}-\frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx\right)\right)=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{2\pi}{n}\cos n\pi+\frac{2}{n^3}\cos nx\Bigg|_{-\pi}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{2\pi}{n}\cos n\pi+\frac{2}{n^3}\cos n\pi-\frac{2}{n^3}\cos n\pi\right)=-\frac{2}{n}\cos n\pi.$$

Ряд Фур'є для функції $f(x) = x^2 + x$ в інтервалі $(-\pi; \pi)$ має вигляд

$$x^2 + x = \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos n\pi\right)\cos nx + \left(-\frac{2}{n}\cos n\pi\right)\sin nx$$

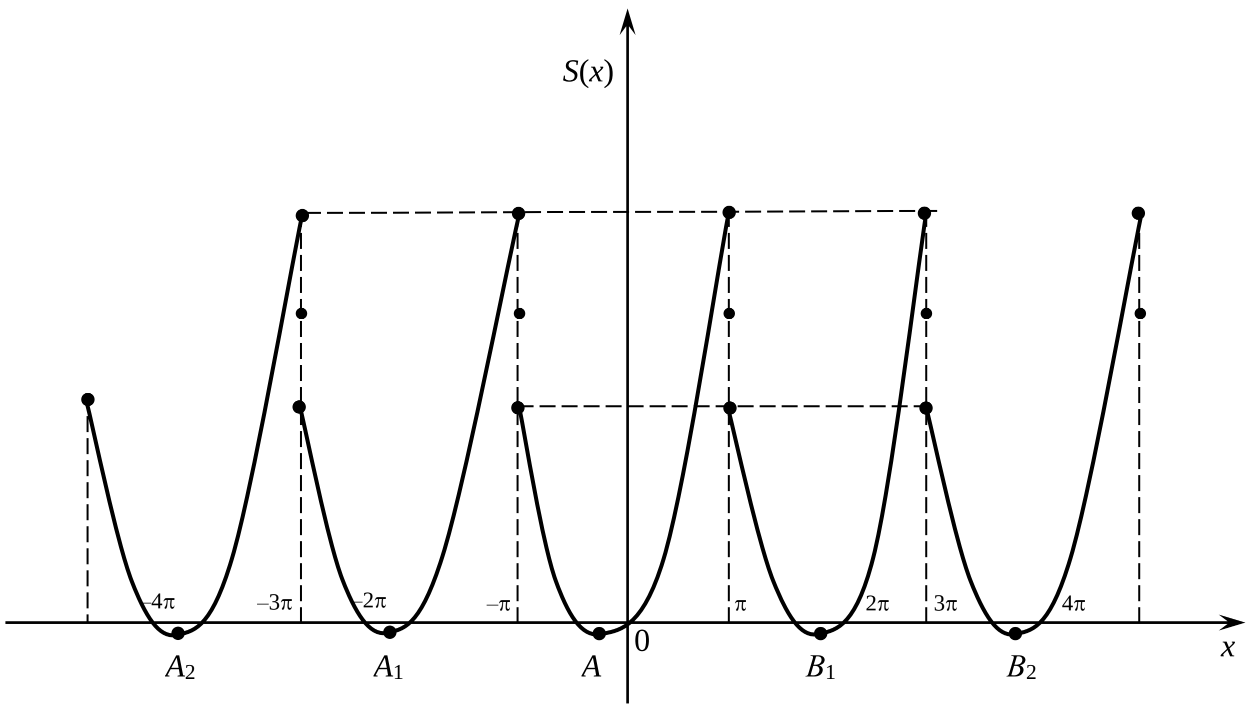
або

$$x^2 + x = \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx - \frac{2(-1)^n}{n}\sin nx \text{ для } x \in (-\pi; \pi).$$

Побудуємо графік суми ряду. В інтервалі $(-\pi; \pi)$ графік суми ряду збігається з графіком самої функції. Якщо функцію $y = x^2 + x$ подати у вигляді $y + \frac{1}{4} = (x + \frac{1}{2})^2$, то очевидно, що задана функція визначає параболу з вершиною у точці $A\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$, симетричну відносно прямої $x = -\frac{1}{2}$. Гілки параболи напрямлені вгору.

Сума ряду Фур′є є періодичною функцією з періодом 2π.

Отже, на кожному з проміжків $(-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi)$, де $k \in Z$, графік суми ряду повторюється, а у точках розриву, тобто у точках $\pi + 2k\pi$, де $k \in Z$, сума



ряду набуває значення $\frac{1}{2}\left((\pi^2 - \pi) + (\pi^2 + \pi)\right)$ чи то π^2 (див. рисунок 2).

Рисунок до прикладу 2

В і д п о в і д ь : $x^2 + x = \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx - \frac{2(-1)^n}{n}\sin nx$.

3 Особливості розвинення у ряд Фур'є періодичних та неперіодичних функцій

3.1 Розвинення у ряд Фур'є періодичної функції

Нехай функція $f(x)$ на сегменті $[-\pi; \pi]$ задовольняє умови розвинення у ряд Фур'є та є періодичною функцією з періодом $T = 2\pi$.

Для цієї функції на сегменті $[-\pi; \pi]$ будується ряд Фур'є, а сума $S(x)$ цього ряду на сегменті $[-\pi; \pi]$ у точках неперервності дорівнює функції $f(x)$.

Оскільки функція $f(x)$ є 2π-періодичною функцією, то вона періодично поширюється на усю числову вісь. Сума $S(x)$ ряду Фур'є є сумою періодичних функцій, а отже, і сама функція $S(x)$ є періодичною функцією. Виходить, що поза сегментом $[-\pi; \pi]$ і функція $f(x)$ і функція $S(x)$ визначені, а їхні значення у точках неперервності функції $f(x)$ збігаються.

3.2 Розвинення у ряд Фур'є неперіодичної функції

Нехай функція $f(x)$ визначена лише на сегменті $[-\pi; \pi]$ і задовольняє на цьому сегменті умови розвинення функції у ряд Фур'є.

Для цієї функції на сегменті $[-\pi; \pi]$ будується ряд Фур'є, а сума $S(x)$ цього ряду на сегменті $[-\pi; \pi]$ у точках неперервності дорівнює функції $f(x)$.

Сума $S(x)$ як періодична функція поширюється на усю числову вісь, але не має нічого спільного з функцією $f(x)$ поза сегментом $[-\pi; \pi]$, оскільки функція $f(x)$ поза сегментом $[-\pi; \pi]$ не визначена.

Припустимо тепер, що функція $f(x)$ визначена і на сегменті $[-\pi; \pi]$ і поза цим сегментом, але вона не є періодичною функцією. На сегменті $[-\pi; \pi]$ функція $f(x)$ задовольняє умови розвинення функції у ряд Фур'є.

Для цієї функції на сегменті $[-\pi; \pi]$ будується ряд Фур'є, а сума $S(x)$ цього ряду на сегменті $[-\pi; \pi]$ у точках неперервності дорівнює функції $f(x)$.

Сума $S(x)$ як періодична функція поширюється на усю числову вісь, функція $f(x)$ також визначена поза сегментом $[-\pi; \pi]$, але оскільки функція $f(x)$ не є 2π-періодичною функцією, то значення суми $S(x)$ та відповідні значення функції $f(x)$ поза сегментом $[-\pi; \pi]$ не збігаються.

Приклади до пункту 3

Приклад 3. Розкласти в ряд Фур′є періодичну функцію

$$f(x)=\begin{cases}\sin 2x, \text{ якщо } -\pi<x<0;\\ \cos 2x, \text{ якщо } 0\le x<\pi.\end{cases}$$

Побудувати графік функції $f(x)$ та графік суми ряду $S(x)$.

Р о з в ′ я з а н н я

Функція $f(x)$ є 2π-періодичною функцією. Отже, достатньо побудувати для неї ряд Фур′є в інтервалі $(-\pi;\,\pi)$.

Знаходимо коефіцієнти ряду Фур′є (22) за формулами (25), (27), (28):

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin 2x dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos 2x dx=-\frac{1}{2\pi}\cos 2x\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{2\pi}\sin 2x\Big|_{0}^{\pi}=-\frac{1}{2\pi}(\cos 0-\cos 2n)=0.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin 2x\cos nx dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos 2x\cos nx dx=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(\sin(2+n)x+\sin(2-n)x dx+\right.$$

$$\left.+\int_{0}^{\pi}(\cos(2+n)x+\cos(2-n)x)dx\right)=\frac{1}{2\pi}\left(-\frac{1}{2+n}\cos(2+n)x\Big|_{-\pi}^{0}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2-n}\cos(2-n)x\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{2+n}\sin(2+n)x\Big|_{0}^{\pi}+\frac{1}{2-n}\sin(2-n)x\Big|_{0}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(-\frac{1}{2+n}(1-\cos(2+n)\pi)-\frac{1}{2-n}(1-\cos(2-n)\pi)\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+2}\cos(n+2)\pi-\frac{1}{n-2}\cos(n-2)\pi\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{4}{n^2-4}+\frac{1}{n+2}\cos(n+2)\pi-\frac{1}{n-2}\cos(n-2)\pi\right).$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin 2x\sin nx dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos 2x\sin nx dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{0}(\cos(2-n)x-\cos(2+n)xdx+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi}(\sin(n+2)x+\sin(n-2)x)dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{2-n}\sin(2-n)x\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{1}{2+n}\sin(2+n)x\Big|_{-\pi}^{0}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{n+2}\cos(n+2)x\Big|_{0}^{\pi}-\frac{1}{n-2}\cos(n-2)x\Big|_{0}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(-\frac{1}{n+2}\cos(n+2)\pi+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n-2}\cos(n-2)\pi+\frac{1}{n-2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n+2}\cos(n+2)\pi-\frac{1}{n-2}\cos(n-2)\pi)\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{2n}{n^2-4}-\frac{1}{n+2}\cos(n+2)\pi-\frac{1}{n-2}\cos(n-2)\pi)\right).$$

Ряд Фур′є для заданої функції має такий вигляд

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{4}{n^2-4}+\frac{1}{n+2}\cos(n+2)\pi-\frac{1}{n-2}\cos(n-2)\pi\right)\cdot\cos nx+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{2n}{n^2-4}-\frac{1}{n+2}\cos(n+2)\pi-\frac{1}{n-2}\cos(n-2)\pi\right)\cdot\sin nx\right).$$

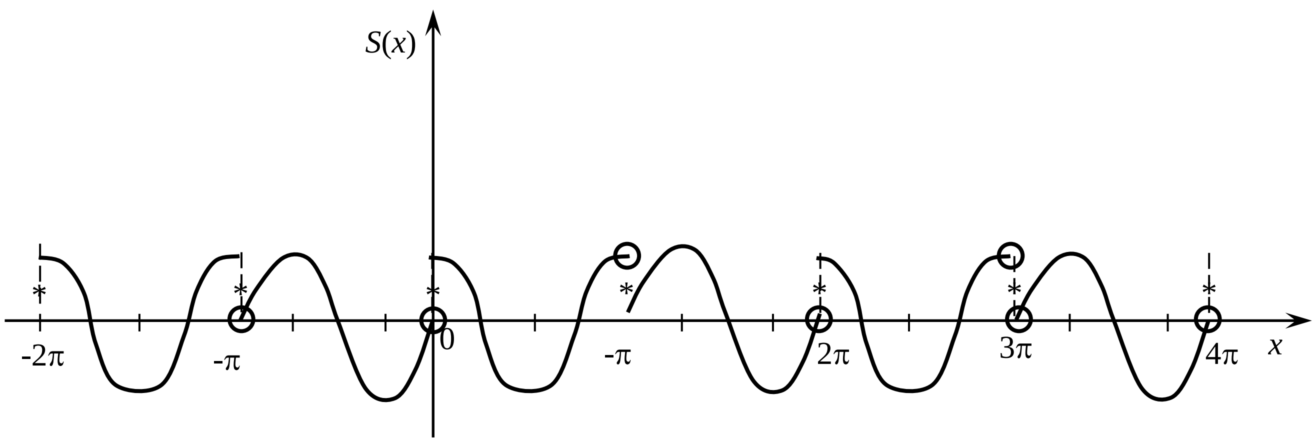


Рисунок до прикладу 3

Задана функція $f(x)$ є 2π-періодичною функцією, сума $S(x)$ ряду Фур′є також є 2π-періодичною функцією. У точках неперервності функції $f(x)$ графіки функцій $f(x)$ та $S(x)$ збігаються, а у точках розриву функції $f(x)$ функція $S(x)$

набуває значення, яке дорівнює середньому арифметичному односторонніх границь. На рисунку ці значення позначені зірочкою.

Відповідь: $$f(x)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{4}{n^2-4}+\frac{1}{n+2}\cos(n+2)\pi-\frac{1}{n-2}\cos(n-2)\pi\right)\cos nx+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{2n}{n^2-4}-\frac{1}{n+2}\cos(n+2)\pi-\frac{1}{n-2}\cos(n-2)\pi\right)\cdot\sin nx\right).$$

Приклад 4. Розкласти у ряд Фур′є періодичну функцію $f(x)=\arcsin(\sin x)$. Побудувати графік функції $f(x)$ та графік суми ряду $S(x)$.

Р о з в ′ я з а н н я

Функція $\arcsin(\sin x)$ є 2π-періодичною функцією. Отже, достатньо розкласти цю функцію у ряд Фур′є на проміжку $[-\pi;\ \pi]$.

Функція $\arcsin(\sin x)$ визначена для $x\in(-\infty;+\infty)$ і, до того ж, ця функція може бути подана у вигляді

$$\arcsin(\sin x)=x-2\pi n,\ \text{якщо}\ 2\pi n-\frac{\pi}{2}\le x<2\pi n+\frac{\pi}{2},$$

де $n\in Z$.

На проміжку $[-\pi;\ \pi]$ цю функцію можна задати у вигляді

$$\arcsin(\sin x)=\begin{cases}-x-\pi,\ \text{якщо}\ -\pi\le x<-\dfrac{\pi}{2};\\ x,\qquad\ \text{якщо}\ -\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2};\\ -x+\pi,\ \text{якщо}\ \dfrac{\pi}{2}<x\le\pi.\end{cases}$$

Знаходимо коефіцієнти ряду Фур′є (22) за формулами (25), (27), (28):

$$a_0=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}(-x-\pi)dx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}xdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-x+\pi)dx\right)=$$
$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{2}(x+\pi)^2\Big|_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}x^2\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}(x-\pi)^2\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)=$$
$$-\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{4}-0\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{4}\right)-\frac{1}{2}\left(0-\frac{\pi^2}{4}\right)\right)=\frac{1}{2\pi}\left(-\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi^2}{4}\right)=0;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left(-\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}(x+\pi)\cos nx dx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\cos nx dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(x-\pi)\cos nx dx\right)=\frac{1}{\pi}(I_1+I_2+I_3),$$

де $I_1=-\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}(x+\pi)\cos nx dx,\quad I_2=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\cos nx dx,\quad I_3=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(x-\pi)\cos nx dx.$

$$I_1=-\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}(x+\pi)\cos nx dx=\begin{bmatrix} U=x+\pi; & dU=dx \\ dV=\cos nx dx; & V=-\frac{1}{n}\sin nx\end{bmatrix}=$$

$$=-\frac{x+\pi}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}\sin nx dx=\frac{\pi}{2n}\sin\frac{\pi n}{2}-\frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{\pi}{2n}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{1}{n^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-\cos n\pi\right)=\frac{\pi}{2n}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{n^2}\cos n\pi.$$

$I_2=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\cos nx dx=0$ як інтеграл у симетричних межах від непарної функції.

$$I_3=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(x-\pi)\cos nx dx=\begin{bmatrix} U=x-\pi; & dU=dx \\ dV=\cos nx dx; & V=\frac{1}{n}\sin nx\end{bmatrix}=$$

$$=-\frac{(x-\pi)}{n}\sin nx\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+\frac{1}{n}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin nx dx=\frac{\pi}{2n}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=$$

$$=\frac{\pi}{2n}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{1}{n^2}\left(\cos n\pi-\cos\frac{n\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2n}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{1}{n^2}\cos n\pi+\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}.$$

$$I=-\frac{\pi}{2n}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{n^2}\cos n\pi-\frac{\pi}{2n}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{1}{n^2}\cos n\pi+\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2}=0.$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left(-\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}(x+\pi)\sin nx dx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\sin nx dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(x-\pi)\sin nx dx\right)=\frac{1}{\pi}(I_1+I_2+I_3),$$

де $I_1=-\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}(x+\pi)\sin nx dx,\quad I_2=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\sin nx dx,\quad I_3=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(x-\pi)\sin nx dx.$

$$I_1=-\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}(x+\pi)\sin nx dx=\begin{bmatrix} U=x+\pi; & dU=dx \\ dV=\sin nx dx; & V=-\frac{1}{n}\cos nx\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{x+\pi}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}\cos nxdx=\frac{\pi}{2n}\cos\frac{\pi n}{2}-\frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{\pi}{2n}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{1}{n^2}\left(-\sin\frac{n\pi}{2}+\sin n\pi\right)=\frac{\pi}{2n}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

$$I_2=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\sin nxdx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin nxdx=\begin{bmatrix} U=x; & dU=dx \\ dV=\sin nxdx; & V=-\frac{1}{n}\cos nx \end{bmatrix}=$$

$$=-\frac{2x}{n}\cos nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{2}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos nxdx=-\frac{\pi}{n}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{2}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{\pi}{n}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{2}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

$$I_3=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(x-\pi)\sin nxdx=\begin{bmatrix} U=x-\pi; & dU=dx \\ dV=\sin nxdx; & V=-\frac{1}{n}\cos nx \end{bmatrix}=$$

$$=\frac{x-\pi}{n}\cos nx\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\frac{1}{n}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos nxdx=\frac{\pi}{2n}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{\pi}{2n}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

$$I=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2n}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{2}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{2n}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right)=$$

$$=\frac{4}{\pi n^2}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

Записуємо ряд Фур′є:

$$\arcsin(\sin x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin nx$$

або

$$\arcsin(\sin x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin(2k+1)x\,.$$

Побудуємо графіки функції $f(x)=\arcsin(\sin x)$ та суми $S(x)$ ряду Фур′є.

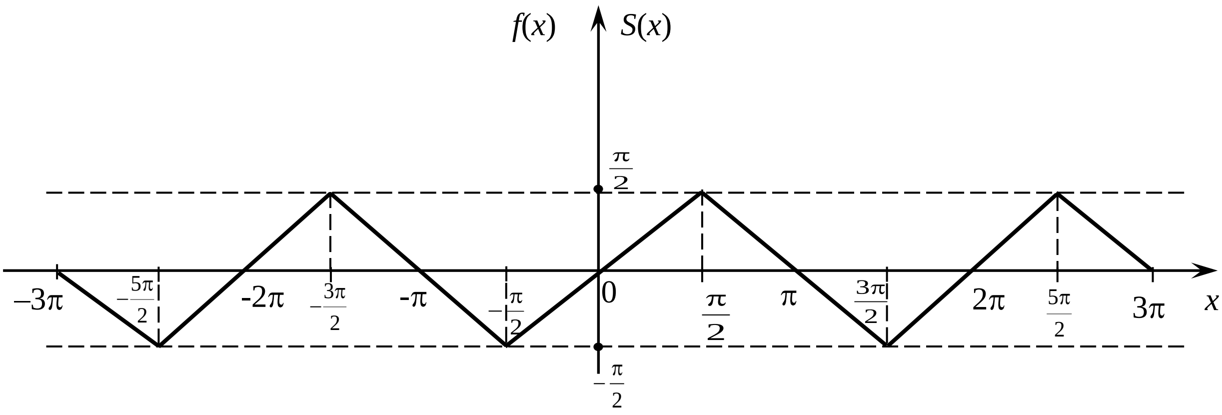


Рисунок до прикладу 4

Оскільки функція $f(x)$ є періодичною та неперервною, то за будь-якого $x \in (-\infty;+\infty)$ графіки $f(x)$ та $S(x)$ збігаються.

В і д п о в і д ь : $\arcsin(\sin x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin(2k+1)x$.

Приклад 5. Розкласти в ряд Фур′є функцію

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi \le x < 0; \\ 0, & 0 < x \le \pi, \end{cases}$$

визначену на сегменті $[-\pi; \pi]$.

Р о з в ’ я з а н н я

Знаходимо коефіцієнти ряду Фур′є (22) за формулами (25), (27), (28).

$$a_0 = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 0 dx = -\frac{1}{2\pi}x^2\Big|_{-\pi}^{0} = \frac{\pi}{2};.$$

$$a_n = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\cos nx dx = \begin{bmatrix} U = x; & dU = dx \\ dV = \cos nx dx; & V = \frac{1}{n}\sin nx \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\sin nx dx\right) = -\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0} = -\frac{1}{\pi n^2}(1-\cos n\pi);$$

$$b_n = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\sin nx dx = \begin{bmatrix} U = x; & dU = dx \\ dV = \sin nx dx; & V = -\frac{1}{n}\cos nx \end{bmatrix} =$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\bigg|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\cos nx dx\right)=-\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos n\pi+\frac{1}{n^2}\sin nx\bigg|_{-\pi}^{0}\right)=\frac{1}{n}\cos n\pi .$$

Отже, маємо

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi n^2}(\cos n\pi-1)\cos nx+\frac{1}{n}\cos n\pi\cdot\sin nx\right).$$

Побудуємо графіки функції $f(x)$ та суми $S(x)$.

Оскільки функція $f(x)$ є неперіодичною, то графік функції розміщений лише на сегменті $[-\pi; \pi]$.

Незважаючи на те, що функція $f(x)$ не є періодичною, сума $S(x)$ ряду Фур′є для функції $f(x)$ є 2π-періодичною функцією. Графіки функції $f(x)$ та $S(x)$ збігаються в інтервалі $(-\pi; \pi)$, а поза цим інтервалом функція $S(x)$ також існує, а її графік періодично повторюється.

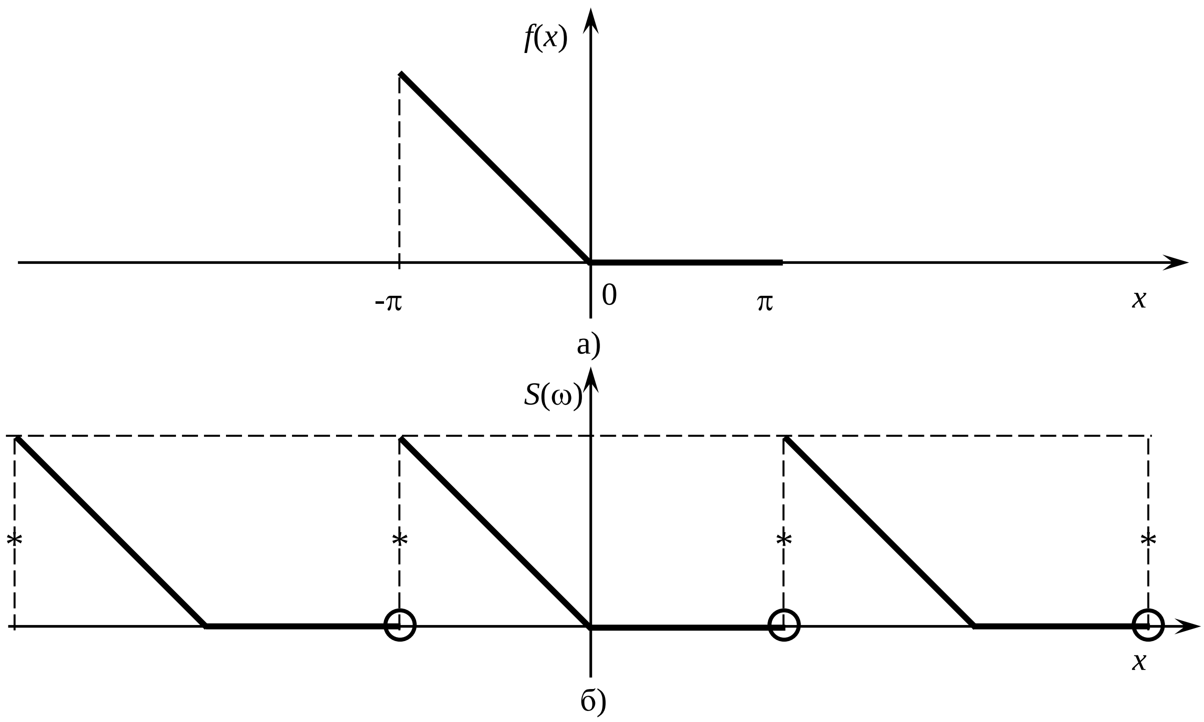


Рисунок до прикладу 5

В і д п о в і д ь : $f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi n^2}(\cos n\pi-1)\cos nx+\frac{1}{n}\cos n\pi\cdot\sin nx\right)$.

4. Особливості розвинення функції

у ряд Фур’є у разі зміщення сегмента розкладання

4.1 Розвинення у ряд Фур’є функції, визначеної на сегменті [*a*; *a* + 2*π*]

У деяких випадках виникає необхідність розкласти у ряд Фур’є функцію $f(x)$, яка визначена не на симетричному відносно початку координат сегменті $[-\pi; \pi]$, а на будь-якому іншому сегменті $[a; a+2\pi]$ тієї ж довжини.

Покажемо, що такий зсув сегмента розкладання

1) залишає ортонормованою систему функцій (21)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}};\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x;\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x;\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x;\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x;\ldots;\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx;\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx;\ldots;$$

2) не змінює значення інтегралів, через які виражені коефіцієнти ряду Фур’є.

Теорема. Якщо функція $f(x)$ є T-періодичною функцією, то якими б не були числа a та c, справедливою є рівність

$$\int_a^{a+T}\varphi(x)dx=\int_{a+c}^{a+c+T}\varphi(x)dx. \qquad (29)$$

Д о в е д е н н я

Розглянемо інтеграл $\int\limits_{a+T}^{a+T+c}\varphi(x)dx.$

$$\int_{a+T}^{a+T+c}\varphi(x)dx=\left[\begin{array}{l|c|c|} x=T+t; & x & t \\ & a+T+c & a+c \\ dx=dt & a+T & a \end{array}\right]=\int_a^{a+c}\varphi(T+t)dt=\int_a^{a+c}\varphi(t)dt,$$

оскільки $\varphi(T+t)=\varphi(t)$ як T-періодична функція.

Отже, якщо перепозначити змінну інтегрування в останньому інтегралі, то дістанемо:

$$\int_{a+T}^{a+T+c}\varphi(x)dx=\int_a^{a+c}\varphi(x)dx. \qquad (30)$$

Далі розглянемо інтеграл $\int\limits_a^{a+T}\varphi(x)dx$.

$$\int_{a}^{a+T}\varphi(x)dx=\int_{a}^{a+c}\varphi(x)dx+\int_{a+c}^{a+c+T}\varphi(x)dx+\int_{a+c+T}^{a+T}\varphi(x)dx=\int_{a}^{a+c}\varphi(x)dx+\int_{a+c}^{a+c+T}\varphi(x)dx-\int_{a+T}^{a+c+T}\varphi(x)dx.$$

Враховуючи результат (30), отримаємо

$$\int_{a}^{a+T}\varphi(x)dx=\int_{a}^{a+c}\varphi(x)dx+\int_{a+c}^{a+c+T}\varphi(x)dx-\int_{a}^{a+c}\varphi(x)dx,$$

звідки маємо

$$\int_{a}^{a+T}\varphi(x)dx=\int_{a+c}^{a+c+T}\varphi(x)dx.$$

Цей результат означає, що зсув сегмента розкладання не впливає на значення інтеграла від періодичної на цьому сегменті функції.

Тому ортонормована на сегменті [–π; π] система функцій (21) залишається ортонормованою і на сегменті $[a; a+2\pi]$.

Дійсно,

$$\frac{1}{\pi}\int_{a}^{a+2\pi}dx=1;\qquad \int_{a}^{a+2\pi}\sin mx\cos nx dx=0;$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{a}^{a+2\pi}\cos^2 nx dx=1;\qquad \int_{a}^{a+2\pi}\cos mx\cos nx dx=0\ (m\neq n);$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{a}^{a+2\pi}\sin^2 nx dx=1;\qquad \int_{a}^{a+2\pi}\sin mx\sin nx dx=0\ (m\neq n).$$

Згідно з умовою функція $f(x)$ є 2π-періодичною, тоді і функції $f(x)\cos nx$, $f(x)\sin nx$ також є 2π-періодичними функціями. Отже, для коефіцієнтів Фур'є маємо

$$\frac{1}{\pi}\int_{a}^{a+2\pi}f(x)\cos nx dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx=a_n,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{a}^{a+2\pi}f(x)\sin nx dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx=b_n,$$

тобто при зсуві сегмента розкладання у ряд Фур'є 2π-періодичної функції значення коефіцієнтів ряду Фур'є не змінюються, при цьому є справедливі формули

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_a^{a+2\pi} f(x)dx, \\ a_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_a^{a+2\pi} f(x)\cos nxdx, \\ b_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_a^{a+2\pi} f(x)\sin nxdx, \end{cases} \tag{31}$$

де $n = 1; 2; 3; \dots$.

4.2 Розвинення у ряд Фур'є функції, визначеної на сегменті [*a*; *b*]

Нехай функція $f(x)$ на сегменті $[a; a + 2\ell]$ задовольняє умови розвинення у ряд Фур'є. Розглянемо можливість розвинення у ряд Фур'є функції $f(x)$, визначеної на сегменті $[a; a + 2\ell]$ довжиною 2ℓ.

Для того, щоб можна було користуватися формулами для розкладання у ряд Фур'є функції, визначеної на сегменті $[-\pi; \pi]$, введемо допоміжну змінну t таку, що $x = \dfrac{t\ell}{\pi}$. У такому разі, якщо $a \le x \le a + 2\ell$, то $a \le \dfrac{t\ell}{\pi} \le a + 2\ell$, звідки $\dfrac{\pi a}{\ell} \le t \le \dfrac{\pi a}{\ell} + 2\pi$.

Внаслідок такої заміни функція $f\left(\dfrac{t\ell}{\pi}\right)$, тобто функція від аргументу t визначена на сегменті $\left[\dfrac{\pi a}{\ell}; \dfrac{\pi a}{\ell} + 2\pi\right]$ довжиною 2π. Таку функцію можна розкладати у ряд Фур'є як функцію аргументу t:

$$f\left(\frac{\ell t}{\pi}\right) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt. \tag{32}$$

При цьому

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int\limits_{\frac{a\pi}{\ell}}^{\frac{a\pi}{\ell}+2\pi} f\left(\dfrac{\ell t}{\pi}\right) dt; \\ a_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int\limits_{\frac{a\pi}{\ell}}^{\frac{a\pi}{\ell}+2\pi} f\left(\dfrac{\ell t}{\pi}\right) \cos ntdt; \\ b_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int\limits_{\frac{a\pi}{\ell}}^{\frac{a\pi}{\ell}+2\pi} f\left(\dfrac{\ell t}{\pi}\right) \sin ntdt, \end{cases} \tag{33}$$

де $n = 1; 2; 3; \dots$.

Скористаємось можливістю зробити зсув сегмента розкладання без зміни його довжини, а саме, замість сегмента $\left[\dfrac{a\pi}{\ell}; \dfrac{a\pi}{\ell} + 2\pi\right]$ візьмемо сегмент $[-\pi;\pi]$. Як було показано раніше, зсув сегмента інтегрування не впливає на значення коефіцієнтів Фур'є.

Маємо:

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\left(\dfrac{\ell t}{\pi}\right) dt; \\ a_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\left(\dfrac{\ell t}{\pi}\right) \cos ntdt; \\ b_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\left(\dfrac{\ell t}{\pi}\right) \sin ntdt, \end{cases} \tag{34}$$

де $n = 1; 2; 3; \dots$.

Повернемось до змінної x.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell};$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{\ell t}{\pi}\right) dt = \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{\pi x}{\ell}; \\ dt = \dfrac{\pi}{\ell} dx; \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline t & x \\ \hline \pi & \ell \\ \hline -\pi & -l \\ \hline \end{array}\right] = \frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{\ell t}{\pi}\right)\cos ntdt = \left[\begin{array}{ll} t = \dfrac{\pi x}{\ell}; & \begin{array}{|c|c|}\hline t & x \\ \hline \pi & \ell \\ \hline -\pi & -\ell \\ \hline \end{array} \\ dt = \dfrac{\pi}{\ell}dx; & \end{array}\right] = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{\ell t}{\pi}\right)\sin ntdt = \left[\begin{array}{ll} t = \dfrac{\pi x}{\ell}; & \begin{array}{|c|c|}\hline t & x \\ \hline \pi & \ell \\ \hline -\pi & -\ell \\ \hline \end{array} \\ dt = \dfrac{\pi}{\ell}dx; & \end{array}\right] = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx,$$

де $n = 1; 2; 3; \ldots$.

Остаточно маємо

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}; \tag{35}$$

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{\ell}\displaystyle\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx; \\ a_n = \dfrac{1}{\ell}\displaystyle\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\dfrac{\pi n x}{\ell}dx; \\ b_n = \dfrac{1}{\ell}\displaystyle\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\dfrac{\pi n x}{\ell}dx, \end{cases} \tag{36}$$

де $n = 1; 2; 3; \ldots$.

Зокрема, досить часто розглядають функції, які задовольняють умови розвинення функції у ряд Фур'є на сегменті $[-\ell; \ell]$ довжиною 2ℓ. Оскільки такий сегмент є частинним випадком сегмента $[a; a + 2\ell]$, коли $a = -\ell$, то рядом Фур'є для таких функцій є ряд (35), а коефіцієнти Фур'є знаходяться за формулами (36). Якщо враховувати, що $\frac{\pi}{\ell} = \omega$, то формули (35) та (36) набуває такий вигляд:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x; \tag{37}$$

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\ell}\displaystyle\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx; \\ a_n = \dfrac{1}{\ell}\displaystyle\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos n\omega x dx; \\ b_n = \dfrac{1}{\ell}\displaystyle\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin n\omega x dx, \end{cases} \qquad (38)$$

де $n = 1; 2; 3; \ldots$.

Приклади до пункту 4

Приклад 6. Розкласти у ряд Фур′є 2π-періодичну функцію

$$f(x) = \begin{cases} 4, \text{ якщо } -\dfrac{\pi}{2} \le x < \dfrac{\pi}{2}; \\ 6, \text{ якщо } \quad \dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

Р о з в ′ я з а н н я

Знаходимо коефіцієнти ряду Фур′є (22) за формулами (31).

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 6dx \right) = \frac{1}{\pi}\left(4x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 6x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(4\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) + 6\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{\pi}(4\pi + 6\pi) = 10;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos n\omega x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 6\cos n\omega x dx \right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{4}{n\omega}\sin n\omega x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{6}{n\omega}\sin n\omega x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \right).$$

Оскільки $\omega = \dfrac{\pi}{\ell}$, тобто $\omega = \dfrac{\pi}{\pi} = 1$, то далі маємо

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{4}{n}\left(\sin\frac{n\pi}{2} + \sin\frac{n\pi}{2} \right) + \frac{6}{n}\left(\sin\frac{3n\pi}{2} - \sin\frac{n\pi}{2} \right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left(8\sin\frac{n\pi}{2} + 6\sin\frac{3n\pi}{2} - \sin\frac{n\pi}{2} \right) = \frac{1}{\pi n}\left(7\sin\frac{n\pi}{2} + 6\sin\frac{3n\pi}{2} \right).$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}4\sin n\omega x dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}6\sin n\omega x dx\right)=\frac{1}{\pi}\left(4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin nx dx+6\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\sin nx dx\right)=$$

$$=-\frac{1}{\pi n}\left(4\cos nx\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+6\cos nx\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\right)=$$

$$=-\frac{1}{\pi n}\left(4\left(\cos\frac{n\pi}{2}-\cos\frac{n\pi}{2}\right)+6\left(\cos\frac{3n\pi}{2}-\cos\frac{n\pi}{2}\right)\right)=$$

$$=-\frac{6}{\pi n}\left(\cos\frac{3n\pi}{2}-\cos\frac{n\pi}{2}\right).$$

Отже, маємо

$$f(x)\sim 5+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n\pi}\left(7\sin\frac{n\pi}{2}+6\sin\frac{3n\pi}{2}\right)\cos nx+\frac{6}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-\cos\frac{3n\pi}{2}\right)\sin nx\right).$$

В і д п о в і д ь : $f(x)\sim 5+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n\pi}\left(7\sin\frac{n\pi}{2}+6\sin\frac{3n\pi}{2}\right)\cos nx+\right.$

$$\left.+\frac{6}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-\cos\frac{3n\pi}{2}\right)\sin nx\right).$$

Приклад 7. Розкласти у ряд Фур′є функцію двопівперіодичного випрямленого синусоїдного струму

$$i(t)=\begin{cases}A\sin\omega t, \text{ якщо } 0\le t<\frac{\pi}{\omega};\\ -A\sin\omega t, \text{ якщо } \frac{\pi}{\omega}\le t\le\frac{2\pi}{\omega}.\end{cases}$$

Р о з в ′ я з а н н я

Задана функція визначена на сегменті $[0;\ \frac{2\pi}{\omega}]$. Довжина сегмента $2\ell=\frac{2\pi}{\omega}-0=\frac{2\pi}{\omega}$, звідки $\ell=\frac{\pi}{\omega}$.

Знаходимо коефіцієнти ряду Фур′є (22) за формулами (38)

$$a_0=\frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}A\sin\omega t dt-\frac{\omega}{\pi}\int_{\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}}A\sin\omega t dt=\frac{A\omega}{\pi}\left(-\frac{1}{\omega}\cos\omega t\Big|_0^{\frac{\pi}{\omega}}+\frac{1}{\omega}\cos\omega t\Big|_{\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}}\right)=$$

$$=\frac{A}{\pi}\left(-\cos\pi+1+\cos2\pi-\cos\pi\right)=\frac{2A}{\pi}(1-\cos\pi)=\frac{4A}{\pi};$$

$$a_n=\frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}A\sin\omega t\cos n\omega t dt-\frac{\omega}{\pi}\int_{\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}}A\sin\omega t\cos n\omega t dt=$$

$$=\frac{A\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}(\sin(1+n)\omega t+\sin(1-n)\omega t)dt-\frac{A\omega}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}}(\sin(1+n)\omega t+\sin(1-n)\omega t)dt=$$

$$=\frac{A\omega}{2\pi}\left(-\frac{1}{(1+n)\omega}\cos(1+n)\omega t\Big|_0^{\frac{\pi}{\omega}}-\frac{1}{(1-n)\omega}\cos(1-n)\omega t\Big|_0^{\frac{\pi}{\omega}}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(1+n)\omega}\cos(1+n)\omega t\Big|_{\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}}+\frac{1}{(1-n)\omega}\cos(1-n)\omega t\Big|_{\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}}\right)=$$

$$=\frac{A\omega}{2\pi}\left(-\frac{1}{(1+n)\omega}\cos(1+n)\pi+\frac{1}{(1+n)\omega}-\frac{1}{(1-n)\omega}\cos(1-n)\pi+\frac{1}{(1-n)\omega}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(1+n)\omega}-\frac{1}{(1+n)\omega}\cos(1+n)\pi+\frac{1}{(1-n)\omega}-\frac{1}{(1-n)\omega}\cos(1-n)\pi\right);$$

$$a_n=\frac{A}{2\pi}\left(\frac{2}{(1+n)}+\frac{2}{(1-n)}-\frac{2}{(1+n)}\cos(1+n)\pi-\frac{2}{(1-n)}\cos(1-n)\pi\right);$$

$$a_n=\frac{A}{\pi}\left(\frac{2}{(1-n^2)}-\frac{1}{(1+n)}\cos(1+n)\pi-\frac{1}{(1-n)}\cos(1-n)\pi\right).$$

Виходить, що

$$a_n=\begin{cases}0,\ \text{якщо}\ n=2k+1,\quad k\in Z;\\ \dfrac{4A}{\pi(1-n^2)},\ \text{якщо}\ n=2k,\ k\in Z,\end{cases}$$

тобто

$$a_1=0;\ a_2=-\frac{4A}{3\pi};\ a_3=0;\ a_4=-\frac{4A}{15\pi};\ a_5=0;\ a_6=-\frac{4A}{35\pi},\ldots;$$

$$b_n=\frac{A\omega}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}\sin\omega t\sin n\omega t dt+\int_{\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}}\sin\omega t\sin n\omega t dt\right)=$$

$$= \frac{A\omega}{2\pi}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{\omega}} (\cos(1-n)\omega t - \cos(1+n)\omega t) \right) dt + \int\limits_{\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}} (\cos(1-n)\omega t - \cos(1+n)\omega t) dt =$$

$$= \frac{A\omega}{2\pi}\left(\frac{1}{(1-n)\omega}\sin(1-n)\omega t \Big|_0^{\frac{\pi}{\omega}} - \frac{1}{(1+n)\omega}\sin(1+n)\omega t \Big|_0^{\frac{\pi}{\omega}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(1-n)\omega}\sin(1-n)\omega t \Big|_{\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}} - \frac{1}{(1+n)\omega}\sin(1+n)\omega t \Big|_{\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}} \right) = 0.$$

Отже, маємо

$$i(t) = \frac{2A}{\pi} - \frac{4A}{3\pi}\cos 2\omega t - \frac{4A}{15\pi}\cos 4\omega t - \frac{4A}{35\pi}\cos 6\omega t - ...$$

або

$$i(t) = \frac{4A}{3\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cos 2\omega t - \frac{1}{15}\cos 4\omega t - \frac{1}{35}\cos 6\omega t - ... \right).$$

ЗАУВАЖЕННЯ. У процесі дослідження $\frac{2\pi}{\omega}$-періодичних синусоїдальних змінних струмів та неперіодичних несинусоїдальних струмів використовуються ряди Фур′є.

В і д п о в і д ь : $i(t) = \frac{4A}{3\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cos 2\omega t - \frac{1}{15}\cos 4\omega t - \frac{1}{35}\cos 6\omega t - ... \right)$.

Приклад 8. Розкласти у ряд Фур′є періодичну функцію на сегменті [–4; 4], період якої $T = 8$.

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } -4 \le x < 0; \\ 2x+1, \text{ якщо } 0 \le x \le 4. \end{cases}$$

Р о з в ′ я з а н н я

Функцію задано на симетричному проміжку [–4; 4]. Побудуємо для цієї функції ряд Фур′є (37), коефіцієнти ряду Фур′є знайдемо за формулами (38), при цьому $\ell = 4, \omega = \frac{\pi}{4}$.

$$a_0 = \frac{1}{4}\int\limits_{-4}^{0} dx + \frac{1}{4}\int\limits_0^4 (2x+1)dx = \frac{1}{4}x\Big|_{-4}^{0} + \frac{1}{16}(2x+1)^2\Big|_0^4 = 1 + \frac{1}{16}(81-1) = 6;$$

$$a_n=\frac{1}{4}\int_{-4}^{0}\cos n\omega dx+\frac{1}{4}\int_{0}^{4}(2x+1)\cos n\omega x dx=\begin{bmatrix} U=2x+1; & dU=2dx \\ dV=\cos n\omega x dx; & V=\dfrac{1}{n\omega}\sin n\omega x \end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n\omega}\sin n\omega x\Big|_{-4}^{0}+\frac{1}{4}\left(\frac{2x+1}{n\omega}\sin n\omega x\Big|_{0}^{4}-\frac{2}{n\omega}\int_{0}^{4}\sin n\omega x dx\right)=\frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{4}\Big|_{-4}^{0}+$$

$$+\frac{1}{4}\left(\frac{4(2x+1)}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{4}\Big|_{0}^{4}+\frac{2\cdot 4}{n\pi}\cdot\frac{4}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{4}\Big|_{0}^{4}\right)=$$

$$=\frac{1}{n\pi}(9\sin n\pi-\sin 0)+\frac{8}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1)=\frac{8}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1);$$

$$b_n=\frac{1}{4}\int_{-4}^{0}\sin n\omega x dx+\frac{1}{4}\int_{0}^{4}(2x+1)\sin n\omega x dx=$$

$$=\begin{bmatrix} U=2x+1; & dU=2dx \\ dV=\sin n\omega x dx; & V=-\dfrac{1}{n\omega}\cos n\omega x \end{bmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{4n\omega}\cos n\omega x\Big|_{-4}^{0}+\frac{1}{4}\left(-\frac{2x+1}{n\omega}\cos n\omega x\Big|_{0}^{4}+\frac{2}{n\omega}\int_{0}^{4}\cos n\omega x dx\right)=$$

$$=-\frac{1}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{4}\Big|_{-4}^{0}+\frac{1}{4}\left(-\frac{4(2x+1)}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{4}\Big|_{0}^{4}+\frac{2\cdot 4\cdot 4}{n\pi\, n\pi}\sin\frac{n\pi x}{4}\Big|_{0}^{4}\right)=$$

$$=-\frac{1}{n\pi}(1-\cos n\pi)-\frac{9}{n\pi}\cos n\pi+\frac{1}{n\pi}+\frac{8}{n^2\pi^2}(\sin n\pi-\sin 0)=$$

$$=\frac{1}{n\pi}(-1+\cos n\pi-9\cos n\pi+1)=\frac{1}{n\pi}(-8\cos n\pi)=-\frac{8}{n\pi}\cos n\pi.$$

Тоді маємо

$$f(x)=3+8\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1)\cos n\omega x-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi\cdot\sin n\omega x\right).$$

В і д п о в і д ь : $f(x)=3+8\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1)\cos n\omega x-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi\cdot\sin n\omega x\right).$

5 Особливості розвинення у ряд Фур'є парних та непарних функцій

5.1 Розвинення у ряд Фур'є парної функції

Нехай функція $f(x)$ на сегменті $[-\pi; \pi]$ задовольняє умови розвинення у ряд Фур'є та є парною функцією, тобто $f(x) = f(-x)$, де $x_1 - x \in [-\pi; \pi]$.

Тоді:

1) $a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)dx;$

2) $a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx;$

3) $b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = 0,$

де n = 1; 2; 3; …, згідно з властивостями інтегралів з симетричними межами інтегрування від парних та непарних функцій.

Таким чином, якщо $f(x)$ – парна функція, то вона розкладається у тригонометричний ряд Фур'є

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \tag{39}$$

на сегменті $[-\pi; \pi]$, а коефіцієнти цього ряду визначаються формулами

$$\begin{cases} a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx; \\ a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx; \\ b_n = 0, \end{cases} \tag{40}$$

де n = 1; 2; 3; … .

Зокрема, якщо парна функція $f(x)$ задовольняє умови розвинення у ряд Фур'є на сегменті $[-\ell; \ell]$, то її ряд Фур'є має вигляд

$$f(x)! \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell}, \tag{41}$$

а коефіцієнти визначаються формулами

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{2}{\ell}\displaystyle\int_0^{\ell} f(x)dx; \\ a_n = \dfrac{2}{\ell}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{\ell}dx; \\ b_n = 0, \end{cases} \qquad (42)$$

де $n = 1; 2; 3; \ldots$,

або

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega x, \qquad (43)$$

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{2}{\ell}\displaystyle\int_0^{\ell} f(x)dx; \\ a_n = \dfrac{1}{\ell}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos n\omega x dx; \\ b_n = 0, \end{cases} \qquad (44)$$

де $n = 1; 2; 3; \ldots$.

5.2 Розвинення у ряд Фур’є непарної функції

Нехай функція $f(x)$ на сегменті $[-\pi; \pi]$ задовольняє умови розвинення у ряд Фур’є та є непарною функцією, тобто $f(-x) = -f(x)$, де $x_1 - x \in [-\pi; \pi]$.

Тоді

1) $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0;$

2) $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = 0;$

3) $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx,$

де $n = 1; 2; 3; \ldots$, згідно з властивостями інтегралів з симетричними межами інтегрування від парних та непарних функцій.

Таким чином, якщо $f(x)$ – непарна функція, то вона розкладається у тригонометричний ряд Фур’є

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \qquad (45)$$

на сегменті $[-\pi; \pi]$, а коефіцієнти цього ряду визначаються формулами:

$$\begin{cases} a_0 = 0; \\ a_n = 0; \\ b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx, \end{cases} \qquad (46)$$

де $n = 1; 2; 3; \ldots$.

Зокрема, якщо непарна функція $f(x)$ задовольняє умови розвинення у ряд Фур'є на сегменті $[-\ell; \ell]$, то її ряд Фур'є має вигляд

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \qquad (47)$$

а його коефіцієнти визначаються формулами:

$$\begin{cases} a_0 = 0; \\ a_n = 0; \\ b_n = \dfrac{2}{\ell}\displaystyle\int_0^{\ell} \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx, \end{cases} \qquad (48)$$

де $n = 1; 2; 3; \ldots$,

або

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega x, \qquad (49)$$

$$\begin{cases} a_0 = 0; \\ a_n = 0; \\ b_n = \dfrac{2}{\ell}\displaystyle\int_{-\ell}^{\ell} \sin n\omega x dx, \end{cases} \qquad (50)$$

де $n = 1; 2; 3; \ldots$.

Приклади до пункту 5

Приклад 9. Розкласти у ряд Фур'є функцію $f(x) = x \sin x$ у інтервалі $(-\pi; \pi)$.

Р о з в ′ я з а н н я

Задана функція є парною, тому коефіцієнти ряду Фур′є (39) знаходимо за формулами (40).

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin x dx=\begin{bmatrix} U=x; & dU=dx \\ dV=\sin x dx; & V=-\cos x\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-x\cos x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x dx\right)=\frac{2}{\pi}\left(-\pi\cos\pi+\sin x\Big|_0^{\pi}\right)=\frac{2}{\pi}\cdot\pi=2;$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin x\cos nx dx=\frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi}x(\sin(x+nx)+\sin(x-nx))dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin(1+n)xdx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin(1-n)xdx=$$

$$=\begin{bmatrix} U=x; & dU=dx \\ dV=\sin(1+n)xdx; & V=-\dfrac{1}{1+n}\cos(1+n)x\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U=x; & dU=dx \\ dV=\sin(1-n)xdx; & V=-\dfrac{1}{1-n}\cos(1-n)x\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{1+n}\cos(1+n)x\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{1+n}\int_0^{\pi}\cos(1+n)xdx\right)+$$

$$+\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{1-n}\cos(1-n)x\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{1-n}\int_0^{\pi}\cos(1-n)xdx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{1+n}\cos(1+n)\pi+\frac{1}{(1+n)^2}\sin(1+n)x\Big|_0^{\pi}-\right.$$

$$\left.-\frac{\pi}{1-n}\cos(1-n)\pi+\frac{1}{(1-n)^2}\sin(1-n)x\Big|_0^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{1+n}\cos(1+n)\pi-\right.$$

$$\left.-\frac{\pi}{1-n}\cos(1-n)\pi\right)=\frac{1}{n-1}\cos(1-n)\pi-\frac{1}{n+1}\cos(1+n)\pi\,.$$

Оскільки функція $y=x\sin x$ є парною функцією, то $b_n=0$.

Тоді оскільки виконується умова Діріхле, то

$$x\sin x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}\cos(1-n)\pi - \frac{1}{n+1}\cos(1+n)\pi\right)$$

або

$$x\sin x = 1 - \frac{1}{2}\cos x + 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos nx \text{ для } x\in(-\pi;\pi)$$

Відповідь: $x\sin x = 1 - \frac{1}{2}\cos x + 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos nx,\ x\in(-\pi;\pi)$.

Приклад 10. Розкласти у ряд Фур′є функцію $f(x) = x\cos x$ в інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Розв′язання

Задана функція є непарною функцією, тому коефіцієнти ряду Фур′є (49) знаходимо за формулами (50).

Отже, згідно з формулами (50), $a_0 = 0, a_n = 0$. Для заданої функції $2\ell = \pi$; $\ell = \frac{\pi}{2}$; $\omega = \frac{\pi}{\ell}$, тобто ω = 2.

$$b_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\sin n\omega x dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\sin 2nx dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(2n+1)x dx + \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(2n-1)x dx =$$

$$= \begin{bmatrix} U = x; & dU = dx \\ dV = \sin(2n+1)x dx; & V = -\frac{1}{2n+1}\cos(2n+1)x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U = x; & dU = dx \\ dV = \sin(2n-1)x dx; & V = -\frac{1}{2n-1}\cos(2n-1)x \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x}{2n+1}\cos(2n+1)x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2n+1)x dx - \right.$$

$$\left. -\frac{x}{2n-1}\cos(2n-1)x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2n-1)xdx \right) =$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2(2n+1)}\cos(2n+1)\frac{\pi}{2} + \frac{1}{(2n+1)^2}\sin(2n+1)x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \right.$$

$$\left. -\frac{\pi}{2(2n-1)}\cos(2n-1)\frac{\pi}{2} + \frac{1}{(2n-1)^2}\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) =$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2(2n+1)}\cos\frac{(2n+1)\pi}{2} + \frac{1}{(2n+1)^2}\sin\frac{(2n+1)\pi}{2} - \right.$$

$$\left. -\frac{\pi}{2(2n-1)}\cos\frac{(2n-1)\pi}{2} + \frac{1}{(2n-1)^2}\sin\frac{(2n-1)\pi}{2} \right) =$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{(2n+1)^2}\sin\frac{(2n+1)\pi}{2} + \frac{1}{(2n-1)^2}\sin\frac{(2n-1)\pi}{2} \right).$$

Отже, за нормою Діріхле, маємо

$$x\cos x = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n+1)^2}\sin\frac{(2n+1)\pi}{2} + \frac{1}{(2n-1)^2}\sin\frac{(2n-1)\pi}{2} \right)\sin 2nx$$

або

$$x\cos x = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2} + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} \right)\sin 2nx,$$

де $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$.

$$x\cos x = \frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{(4n^2-1)^2}\sin 2nx, \ x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right).$$

В і д п о в і д ь : $x\cos x = \frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{(4n^2-1)^2}\sin 2nx, \ x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$.

6 Особливості розвинення у ряд Фур'є функції, визначеної на сегменті [0; π]

Нехай функція $f(x)$ на сегменті $[0;\ \pi]$ задовольняє умови розвинення функції у ряд Фур'є.

Оскільки функція $f(x)$ визначена на сегменті $[0;\ \pi]$, то її можна довизначити на сегменті $[-\pi;\ 0]$ у той чи інший спосіб.

6.1 Розвинення функції у ряд Фур'є по косинусах

Впровадимо допоміжну функцію

$$f^*(x)=\begin{cases} f(x),\ 0\le x\le\pi; \\ f(x),\ -\pi\le x<0. \end{cases}$$

Функція $f^*(x)$ є парною функцією, яка визначена на сегменті $[-\pi;\ \pi]$. Така функція може бути розвинена у ряд Фур'є (39), коефіцієнти якого визначаються формулами (40). На сегменті $[0;\ \pi]$ ряд Фур'є, побудований для функції $f^*(x)$, є водночас і рядом Фур'є, побудованим для функції $f(x)$.

Зокрема, якщо функція $f(x)$ задана на сегменті $[0;\ell]$, то її можна довизначити до парної функції $f_\ell^*(x)$, так що

$$f_\ell^*(x)=\begin{cases} f(x),\ 0\le x\le\ell; \\ f(x),\ -\ell\le x<0. \end{cases}$$

Тоді рядом Фур'є для цієї функції на сегменті $[-\ell;\ \ell]$ є ряд (41), а його коефіцієнти визначаються формулами (42).

Цей самий ряд на сегменті $[0;\ \ell]$ є рядом функції $f(x)$.

6.2 Розвинення функції у ряд Фур'є по синусах

Впровадимо допоміжну функції

$$f^*(x)=\begin{cases} f(x),\ \ 0\le x\le\pi; \\ -f(x),\ -\pi\le x<0. \end{cases}$$

Функція $f^*(x)$ є непарною функцією, яка визначена на сегменті $[-\pi;\ \pi]$. Така функція може бути розвинена у ряд Фур'є (45), коефіцієнти якого визначаються формулами (46).

На сегменті $[0;\ \pi]$ ряд Фур'є, побудований для функції $f^*(x)$, є водночас і рядом Фур'є, побудованим для функції $f(x)$.

Зокрема, якщо функція $f(x)$ задана на сегменті $[0;\ \ell]$, то її можна довизначити до непарної функції $f_\ell^*(x)$ так, що

$$f_\ell^*(x)=\begin{cases} f(x), & 0\le x\le \ell;\\ -f(x), & -\ell\le x<0.\end{cases}$$

Тоді рядом Фур'є для цієї функції на сегменті $[-\ell;\ \ell]$ є ряд (47), а його коефіцієнти визначаються формулами (48).

Цей самий ряд на сегменті $[0;\ \ell]$ є рядом функції $f(x)$.

Приклади до пункту 6

Приклад 11. Розкласти у ряд Фур'є по косинусах в інтервалі $(0;\ \pi)$ функцію

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\pi}{2}-x, & 0<x<\dfrac{\pi}{2};\\ 0, & \dfrac{\pi}{2}\le x<\pi.\end{cases}$$

Р о з в ' я з а н н я

Оскільки функція визначена в інтервалі $(0;\ \pi)$, то, розкладаючи цю функцію у ряд Фур'є по косинусах, ми маємо розкладати її в ряд Фур'є як парну функцію в інтервалі $(-\pi;\ \pi)$, тобто за формулами (39) та (40):

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx=-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{\pi}\left(0-\frac{\pi^2}{4}\right)=\frac{\pi}{4};.$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos nx dx=\begin{bmatrix} U=\dfrac{\pi}{2}-x; & dU=-dx\\ dV=\cos nx dx; & V=\dfrac{1}{n}\sin nx\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin nx\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin nx dx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}(0-0)-\frac{1}{n^2}\cos nx\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=-\frac{2}{\pi n^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-1\right).$$

Отже, так як виконуються умови Діріхле, то

$$f(x)=\frac{\pi}{8}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-1\right)\cos nx,$$

де $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Відповідь: $f(x)=\frac{\pi}{8}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-1\right)\cos nx,$

де $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Приклад 12. Розкласти у ряд Фур'є по синусах в інтервалі $(0;\pi)$ функцію

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0<x<\frac{\pi}{2};\\ 0, & \frac{\pi}{2}\le x<\pi.\end{cases}$$

Розв'язання

Оскільки функція визначена в інтервалі $(0;\ \pi)$, то, розкладаючи цю функцію у ряд Фур'є за синусами, ми маємо розкладати її у ряд Фур'є як непарну функцію в інтервалі $(-\pi;\pi)$, тобто за формулами (45) та (46).

Тоді $a_0=0$, $a_n=0$.

Знаходимо b_n:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos(1-n)x-\cos(1+n)x)dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1-n}\sin(1-n)x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+n}\sin(1+n)x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{1}{\pi(1-n)}\sin\frac{(1-n)\pi}{2}-\frac{1}{\pi(1+n)}\sin\frac{(1+n)\pi}{2}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1-n}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{n\pi}{2}\right)-\frac{1}{1+n}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{n\pi}{2}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1-n}-\frac{1}{1+n}\right)\cos\frac{n\pi}{2}=\frac{1}{\pi}\frac{2n}{1-n^2}\cos\frac{n\pi}{2}.$$

Отже, так як виконується умова Діріхле, то

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1-n^2}\cos\frac{n\pi}{2}\sin nx,$$

де $x\in(0;\pi)$.

Відповідь: $f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1-n^2}\cos\frac{n\pi}{2}\sin nx,$

де $x\in(0;\pi)$.

Приклад 13. Розкласти функцію $f(x)=e^{kx}$ в інтервалі (0; π) у ряд Фур'є по косинусах.

Розв'язання

Задану функцію будемо розкладати у ряд Фур'є у інтервалі (–π; π) як парну функцію за формулами (39) та (40), маючи на увазі, що отриманий ряд Фур'є буде збігатися з заданою функцією лише у інтервалі (0; π).

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}e^{kx}dx=\frac{2}{\pi k}e^{kx}\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi k}(e^{k\pi}-1);$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}e^{kx}\cos nx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}e^{kx}\frac{1}{2}(e^{inx}+e^{-inx})dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(e^{(k+in)x}+e^{(k-in)x})dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{k+in}e^{(k+in)x}+\frac{1}{k-in}e^{(k-in)x}\right)\Bigg|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{k+in}e^{(k+in)\pi}-\frac{1}{k+in}+\frac{1}{k-in}e^{(k-in)\pi}-\frac{1}{k-in}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{k-in+k+in}{k^2+n^2}+\frac{1}{k+in}e^{k\pi}e^{in\pi}+\frac{1}{k-in}e^{k\pi}e^{-in\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{2k}{k^2+n^2}+e^{k\pi}\frac{ke^{in\pi}-ine^{in\pi}+ke^{-in\pi}+ine^{in\pi}}{k^2+n^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{(k^2+n^2)\pi}\Big(-2k+e^{k\pi}\big(k(\cos n\pi+i\sin n\pi+\cos n\pi-i\sin n\pi)-$$

$$-in\cos n\pi+n\sin n\pi+in\cos n\pi+n\sin n\pi)\Big)=-\frac{2k}{\pi(k^2+n^2)}+\frac{2e^{k\pi}(-1)^n k}{\pi(k^2+n^2)}=$$

$$=\frac{2k(e^{k\pi}(-1)^n-1)}{\pi(k^2+n^2)}.$$

$$b_n = 0\,.$$

В інтервалі (0; π) виконуються умови Діріхле. Тоді

$$e^{kx} = \frac{e^{k\pi} - 1}{\pi k} + \frac{2k}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left((-1)^n e^{k\pi} - 1\right)}{k^2 + n^2}\cos nx\,,$$

де $x \in (0; \pi)$.

В і д п о в і д ь : $e^{kx} = \dfrac{e^{k\pi} - 1}{\pi k} + \dfrac{2k}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\left((-1)^n e^{k\pi} - 1\right)}{k^2 + n^2}\cos nx$, де $x \in (0; \pi)$.

Приклад 14. Розкласти функцію $f(x) = e^{kx}$ в інтервалі (0; π) у ряд Фур'є по синусах.

Р о з в ' я з а н н я

Задану функцію будемо розкладати у ряд Фур'є у інтервалі (–π; π) як непарну функцію за формулами (45), (46).

Тоді $a_0 = 0$, $a_n = 0$.

Знаходимо b_n:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{kx}\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{kx}\frac{1}{2i}(e^{inx} - e^{-inx})dx = \frac{1}{\pi i}\int_0^{\pi}(e^{(k+in)x} - e^{(k-in)x})dx =$$

$$= \frac{1}{\pi i}\left(\frac{1}{k+in}e^{(k+in)x} - \frac{1}{k-in}e^{(k-in)x}\right)\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi i}\left(\frac{1}{k+in}(e^{(k+in)\pi} - 1) - \frac{1}{k-in}(e^{(k-in)\pi} - 1)\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi i}\left(\frac{-k + in + k + in}{k^2 + n^2} + e^{k\pi}\,\frac{(k - in)e^{-in\pi} - (k + in)e^{-in\pi}}{k^2 + n^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi i}\left(\frac{2in}{k^2 + n^2} + e^{k\pi}\,\frac{ke^{in\pi} - ine^{in\pi} - ke^{-in\pi} - ine^{in\pi}}{k^2 + n^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi i}\left(\frac{2in}{k^2 + n^2} + \frac{e^{k\pi}}{k^2 + n^2}\left(k(\cos n\pi + i\sin n\pi - \cos n\pi + i\sin n\pi) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - in(\cos n\pi + i\sin n\pi + + \cos n\pi - i\sin n\pi)\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi i(k^2 + n^2)}\left(2in + e^{k\pi}(-2in(-1)^n)\right)\frac{2n}{\pi(k^2 + n^2)}(1 - (-1)^n e^{k\pi})\,.$$

Таким чином, в інтервалі (0; π) виконуються умови Діріхле. Тоді

$$e^{kx}=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n\left(1-(-1)^{n}e^{k\pi}\right)}{k^{2}+n^{2}}\sin nx,$$

де $x\in(0;\pi)$.

Відповідь: $e^{kx}=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n\left(1-(-1)^{n}e^{k\pi}\right)}{k^{2}+n^{2}}\sin nx$, де $x\in(0;\pi)$.

Приклад 15. Розкласти функцію $f(x)=e^{kx}$ в інтервалі (0; π) у ряд Фур’є.

Розв’язання

Виходячи з того, що функція $f(x)$ визначена в інтервалі (0; π), будемо користуватися формулами (35) та (36).

У цьому випадку $2\ell=\pi;\quad \ell=\frac{\pi}{2}.$

Знаходимо коефіцієнти ряду Фур’є:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}e^{kx}dx=\frac{2}{\pi k}e^{kx}\bigg|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi k}(e^{k\pi}-1);$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}e^{kx}\cos 2nx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}e^{kx}\frac{1}{2}(e^{i2nx}+e^{-i2nx})dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(e^{(k+2in)x}+e^{(k-2in)x})dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{k+2in}e^{(k+2in)x}+\frac{1}{k-2in}e^{(k-2in)x}\right)\bigg|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{k+2in}(e^{(k+2in)\pi}-1)+\frac{1}{k-2in}(e^{(k-2in)\pi}-1)\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{k-2in+k+2in}{k^2+4n^2}+e^{k\pi}\left(\frac{1}{k+2in}e^{2in\pi}+\frac{1}{k-2in}e^{-2in\pi}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{2k}{k^2+4n^2}+e^{k\pi}\frac{ke^{2in\pi}-2ine^{2in\pi}+ke^{-2in\pi}+2ine^{-2in\pi}}{k^2+4n^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{2k}{k^2+4n^2}+e^{k\pi}\frac{k(e^{2in\pi}+e^{-2in\pi})-2in(e^{2in\pi}-e^{-2in\pi})}{k^2+4n^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi(k^2+4n^2)}\Big(-2k+e^{k\pi}\big(k(\cos 2n\pi+i\sin 2n\pi+\cos 2n\pi-i\sin 2n\pi)\big)\ -$$

$$-2in(\cos 2n\pi+i\sin 2n\pi-\cos 2n\pi+i\sin 2n\pi)\Big)=$$

$$=\frac{1}{\pi(k^2+4n^2)}(-2k+e^{k\pi}2k)=\frac{2k(e^{k\pi}-1)}{\pi(k^2+4n^2)};$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}e^{kx}\sin 2nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}e^{kx}\frac{1}{2i}(e^{i2nx}-e^{-i2nx})dx=$$

$$-\frac{i}{\pi}\left(\frac{1}{k+2in}e^{(k+2in)x}-\frac{1}{k-2in}e^{(k-2in)x}\right)\Bigg|_0^{\pi}=$$

$$=-\frac{i}{\pi}\left(\frac{1}{k+2in}(e^{(k+2in)\pi}-1)-\frac{1}{k-2in}(e^{(k-2in)\pi}-1)\right)=$$

$$=-\frac{i}{\pi}\left(\frac{k+2in-k+2in}{k^2+4n^2}+\frac{(k-2in)e^{(k+2in)\pi}-(k+2in)e^{(k-2in)\pi}}{k^2+4n^2}\right)=$$

$$=-\frac{i}{\pi}\left(\frac{4in}{k^2+4n^2}+\frac{e^{k\pi}}{k^2+4n^2}\Big(k(e^{2in\pi}-e^{-2in\pi})-2in(e^{2in\pi}+e^{-2in\pi})\Big)\right)=$$

$$=-\frac{i}{\pi(k^2+4n^2)}\Big(4in+k(\cos 2n\pi+i\sin 2n\pi-\cos 2n\pi+i\sin 2n\pi)-$$

$$-2in(\cos 2n\pi+i\sin 2n\pi+\cos 2n\pi-i\sin 2n\pi)\Big)=$$

$$=-\frac{i}{\pi(k^2+4n^2)}(4in-4in)=0.$$

Виходить, в інтервалі $(0;\pi)$, де виконуються умови Діріхле,

$$e^{kx}=\frac{e^{k\pi}-1}{\pi k}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k\left(e^{k\pi}-1\right)}{k^2+4n^2}\cos 2nx,$$

де $x\in(0;\pi)$.

В і д п о в і д ь : $e^{kx}=\dfrac{e^{k\pi}-1}{\pi k}+\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{k\left(e^{k\pi}-1\right)}{k^2+4n^2}\cos 2nx,$

де $x\in(0;\pi)$.

ЗАУВАЖЕННЯ. Доцільно зробити порівняльний аналіз розв’язків у прикладах 14, 15, 16.

7 Комплексна форма ряду Фур'є

7.1 Ортогональні та ортонормовані системи комплекснозначних функцій

В и з н а ч е н н я . Якщо комплекснозначні функції $\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$ є неперервними на сегменті $[a;b]$, то інтеграл $\int_a^b \varphi_1(x)\overline{\varphi_2(x)}\,dx$ називається *скалярним добутком функцій* $\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$ на сегменті $[a;b]$. При цьому використовується позначення

$$(\varphi_1(x);\varphi_2(x)) = \int_a^b \varphi_1(x)\overline{\varphi_2(x)}\,dx,$$

де $\overline{\varphi_2(x)}$ – функція, комплексно-спряжена до функції $\varphi_2(x)$.

На комплекснозначні функції поширюються усі властивості скалярного добутку дійсних функцій, а також поняття норми функції, ортогональної системи функцій, ортонормованої системи функцій.

Серед комплекснозначних функцій ортогональною системою функцій на сегменті $[-\pi;\pi]$ є система функцій

$$1, e^{ix}, e^{-ix}, e^{i2x}, e^{-i2x}, \ldots, e^{inx}, e^{-inx}, \ldots, \tag{51}$$

а на сегменті $[-\ell;\ell]$ ортогональною є система функцій

$$1, e^{\frac{i\pi x}{\ell}}, e^{-\frac{i\pi x}{\ell}}, e^{\frac{i2\pi x}{\ell}}, e^{\frac{-i2\pi x}{\ell}}, \ldots, e^{\frac{in\pi x}{\ell}}, e^{\frac{-in\pi x}{\ell}}, \ldots . \tag{52}$$

Завдання для самостійної роботи. Довести ортогональність систем функцій (51) та (52).

7.2 Розвинення функції у ряд Фур'є у комплексній формі

По функціях системи (51) або (52), як і по функціях тригонометричної системи функцію $f(x)$ можна розкладати у ряд Фур'є. Так, функцію $f(x)$, визначену на сегменті $[-\pi;\pi]$, можна розкласти у ряд, по функціях системи (51):

$$f(x) = c_0 + c_1 e^{ix} + c_{-1}e^{-ix} + c_2 e^{i2x} + c_{-2}e^{-i2x} + \ldots + c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx} + \ldots . \tag{53}$$

Коефіцієнти ряду (53) можна знайти так, як знаходились коефіцієнти тригонометричного ряду (22). Але коефіцієнти ряду (53) можна знайти і в інший спосіб.

Нехай

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx.$$

Скористаємось формулами

$$\cos nx=\frac{1}{2}\left(e^{-inx}+e^{inx}\right)$$

та

$$\sin nx=\frac{i}{2}\left(e^{-inx}-e^{inx}\right).$$

Тоді

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}a_n(e^{-inx}+e^{inx})+\frac{i}{2}b_n(e^{-inx}-e^{inx}).$$

Після спрощення отримаємо таке:

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(a_n-ib_n)e^{inx}+\frac{i}{2}(a_n+ib_n)e^{-inx}. \tag{54}$$

Позначимо

$$\begin{cases} c_0=\dfrac{1}{2}a_0; \\ c_n=\dfrac{1}{2}(a_n-ib_n); \\ c_{-n}=\dfrac{1}{2}(a_n+ib_n). \end{cases} \tag{455}$$

З урахуванням (55) маємо

$$f(x)\sim c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_ne^{inx}+\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}e^{-inx}.$$

У сумі $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_{-n}e^{-inx}$ позначимо $n=-k$, тоді $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_{-n}e^{-inx}=\sum\limits_{k=-1}^{-\infty}c_ke^{ikx}$. Не змінюючи структуру суми $\sum\limits_{k=-1}^{-\infty}c_ke^{ikx}$, позначимо індекс сумовності через n, тобто

$$\sum_{k=-1}^{-\infty}c_ke^{ikx}=\sum_{n=-1}^{-\infty}c_ne^{inx}.$$

У такому разі

$$f(x)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{inx}+\sum_{n=-1}^{-\infty}c_n e^{inx}$$

або

$$f(x)=c_0 e^{iox}+\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{inx}+\sum_{n=-1}^{-\infty}c_n e^{inx}.$$

Остаточно маємо

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e^{inx}, \tag{56}$$

де $c_n=\dfrac{1}{2}(a_n-ib_n)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)(\cos nx-i\sin x)\,dx=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx,$

тобто

$$c_n=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx, \tag{57}$$

Ряд (56) називається рядом Фур’є у комплексній формі для функції $f(x)$, що задовольняє умовам розвинення функції у ряд Фур’є на сегменті $[-\pi;\ \pi]$. *Коефіцієнти* c_n *називаються коефіцієнтами ряда Фур’є* у комплексній формі.

Якщо функція $f(x)$ задовольняє умовам розвинення функції у ряд Фур’є на сегменті $[-\ell;\ \ell]$, то її ряд Фур’є у комплексній формі має вигляд

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e^{\frac{in\pi x}{\ell}}, \tag{58}$$

а його коефіцієнти визначаються формулою

$$c_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)e^{\frac{-in\pi x}{\ell}}dx. \tag{59}$$

Приклади до пункту 7

Приклад 16. Розкласти у ряд Фур′є у комплексній формі функцію

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x<\pi;\\ -1, & \pi\le x\le 2\pi.\end{cases}$$

Р о з в ′ я з а н н я

Ряд Фур’є у комплексній формі будемо шукати у вигляді (56), а його коефіцієнти будемо знаходити за формулою (57). Отже,

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} dx - \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} dx = \frac{1}{2\pi}\left(\left. x\right|_0^{\pi} - \left. x\right|_{\pi}^{2\pi}\right) = \frac{1}{2\pi}(\pi - 2\pi + \pi) = 0 .$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-inx} dx - \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} e^{-inx} dx = \frac{-1}{2in\pi}\left(\left. e^{-inx}\right|_0^{\pi} - \left. e^{-inx}\right|_{\pi}^{2\pi}\right) =$$

$$= \frac{i}{2n\pi}(e^{-in\pi} - 1 - e^{-i2n\pi} + e^{-in\pi}) = \frac{i}{2n\pi}(2e^{-in\pi} - e^{-i2n\pi} - 1) .$$

Тоді ряд Фур'є має вигляд

$$f(x) = \frac{i}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2n}(2e^{-in\pi} - e^{-i2n\pi} - 1)e^{inx}$$

або

$$f(x) = \frac{i}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n}(2\cos n\pi - 2i\sin n\pi - \cos 2n\pi + i\sin 2n\pi - 1)e^{inx} :$$

$$f(x) = \frac{i}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n}\Big(2(-1)^{n\pi} - 2\Big)e^{inx} ;$$

$$f(x) = \frac{i}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n}\Big((-1)^{n\pi} - 1\Big)e^{inx} .$$

В і д п о в і д ь: $f(x) = \frac{i}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n}\Big((-1)^{n\pi} - 1\Big)e^{inx}$.

Приклад 17. Розкласти у ряд Фур′є у комплексній формі 2π-періодичну функцію

$$f(x) = e^x; \quad -\pi < x < \pi .$$

Р о з в ′ я з а н н я

За формулами (56) та (57) маємо

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x dx = \frac{1}{2\pi}\left. e^x\right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}(e^{\pi} - e^{-\pi}) = \frac{1}{\pi}\operatorname{sh}\pi ;$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cdot e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)x} dx =$$

$$= \frac{1}{2(1-in)\pi}\left. e^{(1-in)x}\right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2(1-in)\pi}(e^{(1-in)\pi} - e^{-(1-in)\pi}) =$$

$$=\frac{(1+in)}{2(1+n^2)\pi}\Big((\cos n\pi-i\sin n\pi)e^{\pi}-(\cos n\pi+i\sin n\pi)e^{-\pi}\Big)=$$

$$=\frac{(1+in)}{2(1+n^2)\pi}\Big((-1)^n e^{\pi}-(-1)^n e^{-\pi}\Big)=\frac{(-1)^n(1+in)}{(1+n^2)\pi}(e^{\pi}-e^{-\pi})=$$

$$=\frac{(-1)^n(1+in)}{2(1+n^2)\pi}(e^{\pi}-e^{-\pi})=\frac{(-1)^n(1+in)}{(1+n^2)\pi}\operatorname{sh}\pi;$$

$$e^x=\frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n(1+in)}{1+n^2}e^{inx}.$$

В і д п о в і д ь : $e^x=\dfrac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n(1+in)}{1+n^2}e^{inx}$.

Приклад 18. Розкласти у ряд Фур′є в комплексній формі π-періодичну функцію

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & 0<x<\dfrac{\pi}{2};\\ 0, & \dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi.\end{cases}$$

Р о з в ′ я з а н н я

Знаходимо коефіцієнти ряду Фур’є за формулами (59), оскільки функція є π-періодичною, а отже, $2\ell=\pi$. Виходить

$$c_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\frac{1}{\pi}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{\pi};$$

$$c_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot e^{-i2nx}dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(e^{ix}+e^{-ix})e^{-i2nx}dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(e^{i(1-2n)x}+e^{-i(1+2n)x}\Big)dx=$$

$$=\frac{1}{i2\pi(1-2n)}e^{i(1-2n)x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{i2\pi(1+2n)}e^{-i(1+2n)x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{i}{2\pi(1-2n)}(e^{i(1-2n)\frac{\pi}{2}}-1)+$$

$$+\frac{i}{2\pi(1+2n)}(e^{-i(1+2n)\frac{\pi}{2}}-1)=-\frac{i}{2\pi(1-2n)}(\cos(1-2n)\frac{\pi}{2}+i\sin(1-2n)\frac{\pi}{2}-1)+$$

$$+\frac{i}{2\pi(1+2n)}(\cos(1+2n)\frac{\pi}{2}-i\sin(1+2n)\frac{\pi}{2}-1)=\frac{1}{2\pi(1-2n)}\sin(1-2n)\frac{\pi}{2}+$$

$$+\frac{1}{2\pi(1+2n)}\sin(1+2n)\frac{\pi}{2}-\frac{i}{2\pi(1-2n)}-\frac{i}{2\pi(1+2n)}=$$

$$=\frac{1}{2\pi(1-2n)}\left(\sin\frac{\pi}{2}\cos n\pi-\cos\frac{\pi}{2}\sin n\pi\right)+\frac{1}{2\pi(1+2n)}\left(\sin\frac{\pi}{2}\cos n\pi+\cos\frac{\pi}{2}\sin n\pi\right)+$$

$$+\frac{i}{2\pi}\cdot\frac{4n}{1-4n^2}=\frac{(-1)^n}{2\pi(1-2n)}+\frac{(-1)^n}{2\pi(1+2n)}+\frac{2in}{\pi(1-4n^2)}=$$

$$=\frac{(-1)^n}{2\pi}\cdot\frac{2}{1-4n^2}+\frac{2in}{\pi(1-4n^2)}=\frac{(-1)^n+2ni}{\pi(1-4n^2)}.$$

Оскільки функція є π-періодичною, то її ряд Фур'є визначається за формулою (58)

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n+2ni}{\pi(1-4n^2)}e^{i2nx}.$$

В і д п о в і д ь: $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n+2ni}{\pi(1-4n^2)}e^{i2nx}$.

Приклад 19. Функцію $f(x)=6x+4$, визначену на проміжку $[-\pi;\pi]$:

1) розкласти у тригонометричний ряд Фур′є;

2) розкласти у ряд Фур'є у комплексній формі.

Впевнитись у тому, що отримані ряди співпадають.

Р о з в ′ я з а н н я

1) Оскільки $2l=2\pi$, то користуємось формулами (25), (27), (28) та (22),

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(6x+4)dx=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3x+2)dx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{6}(3x+2)^2\Big|_{-\pi}^{\pi}=$$

$$=\frac{1}{3\pi}((3\pi+2)^2-(-3\pi+2))=\frac{1}{3\pi}(9\pi^2+12\pi+4-9\pi^2+12\pi-4)=8;$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3x+2)\cos nxdx=\begin{bmatrix}U=3x+2; & dU=3dx;\\ dV=\cos nxdx; & V=\frac{1}{n}\sin nx\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{3x+2}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{3}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{3\pi+2}{n}\sin n\pi+\frac{-3\pi+2}{n}\sin n\pi+\frac{3}{n^2}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{3}{n^2}\left(\cos n\pi-\cos n\pi\right)=0\,;$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(3x+2)\sin nx dx=\left[\begin{array}{ll} U=3x+2; & dU=3dx \\ dV=\sin nx dx; & V=-\frac{1}{n}\cos nx \end{array}\right]=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{3x+2}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{3}{n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{3\pi+2}{n}\cos n\pi+\frac{-3\pi+2}{n}\cos n\pi+\frac{3}{n^2}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\left(-\frac{3\pi}{n}-\frac{2}{n}-\frac{3\pi}{n}+\frac{2}{n}\right)(-1)^n+\frac{3}{n^2}\left(\sin n\pi+\sin n\pi\right)\right)=-\frac{12}{n\pi}(-1)^n.$$

Звідси маємо розвинення функції $f(x)=6x+4$ у тригонометричний ряд Фур'є

$$6x+4=4-\frac{12}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nx$$

або

$$6x+4=4+12\sin x-6\sin 2x+4\sin 3x-3\sin 4x+\ldots\,. \qquad (*)$$

2) Розкладаючи функцію $f(x)$ у ряд Фур'є у комплексній формі, будемо користуватись формулами (57) та (56).

Знаходимо коефіцієнти c_0, c_n.

$$c_0=\frac{2}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(3x+4)dx=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{6}(3x+2)^2\Big|_{-\pi}^{\pi}=$$

$$=\frac{1}{6\pi}\left((3\pi+2)^2-(-3\pi+2)^2\right)=\frac{1}{6\pi}(9\pi^2+12\pi+4-9\pi^2+12\pi-4)=4.$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(6x+4)e^{-inx}dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(3x+2)e^{-inx}dx=$$

$$=\left[\begin{array}{ll} U=3x+2; & dU=3dx \\ dV=e^{-inx}dx; & V=-\frac{1}{in}e^{-inx} \end{array}\right]=\frac{1}{\pi}\left(\frac{3x+2}{in}e^{-inx}\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{3}{in}\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{-inx}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{3\pi+2}{n}ie^{-in\pi}-\frac{-3\pi+2}{n}ie^{in\pi}+\frac{3}{n^2}e^{-in\pi}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{3\pi}{n}ie^{-in\pi}+\frac{2}{n}ie^{-in\pi}+\frac{3\pi}{n}ie^{in\pi}-\frac{2}{n}ie^{in\pi}+\frac{3}{n^2}e^{-in\pi}-\frac{3}{n^2}e^{in\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{3\pi}{n}i(\cos n\pi-i\sin n\pi+\cos n\pi+i\sin n\pi)+\right.$$

$$+\frac{2}{n}i(\cos n\pi-i\sin n\pi-\cos n\pi-i\sin n\pi)+$$

$$\left.+\frac{3}{n^2}(\cos n\pi-i\sin n\pi-\cos n\pi-i\sin n\pi)\right)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{6\pi}{n}i=\frac{6(-1)^n}{n}i.$$

Знайдені коефіцієнти: $c_0=4$; $c_n=\dfrac{(-1)^n 6}{n}i$.

Далі побудуємо ряд Фур’є у комплексній формі.

Оскільки з формули $c_n=\dfrac{(-1)^n 6}{n}i$ не можна отримати $c_0=4$ як частинний випадок, то записати ряд Фур’є у формі (56) не можна. Тому запишемо ряд у такому вигляді

$$f(x)=c_0+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' c_n e^{inx},$$

де символ $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}{}'$ не поширюється на значення n = 0.

Отже, маємо

$$6x+4=4+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}'\frac{6(-1)^n}{n}ie^{inx}.$$

Запишемо також цей ряд у розгорнутому вигляді.

$$6x+4=4-6ie^{ix}+6ie^{-ix}+3ie^{2ix}-3ie^{-2ix}-2ie^{3ix}+2ie^{-3ix}+\frac{3}{2}ie^{4ix}-\frac{3}{2}ie^{-4ix}+\ldots\,. \quad (**)$$

3) Покажемо, що отриманий для функції $f(x)=6x+4$ ряд Фур’є у комплексній формі, може бути зведений до тригонометричного ряду Фур’є для цієї ж функції:

$$6x+4=4-6i(\cos x+i\sin x)+6i(\cos x-i\sin x)+3i(\cos 2x+i\sin 2x)-$$

$$-3i(\cos 2x-i\sin 2x)+2i(\cos 3x+i\sin 3x)+2i(\cos 3x-i\sin 3x)+$$

$$+\frac{3}{2}i(\cos 4x+i\sin 4x)-\frac{3}{2}i(\cos 4x-i\sin 4x)+\ldots;$$

$$6x+4=4+6i(\cos x-i\sin x-\cos x-i\sin x)+3i(\cos 2x+i\sin 2x-$$

$$-\cos 2x + i\sin 2x) + 2i(\cos 3x - i\sin 3x - \cos 3x - i\sin 3x) +$$
$$+\frac{3}{2}i(\cos 4x + i\sin 4x - \cos 4x + i\sin 4x) + ...;$$
$$6x + 4 = 4 + 12\sin x - 6\sin 2x + 4\sin 3x - 3\sin 4x + ... \,.$$

Таким чином доведено, що ряди (*) та (**) співпадають.

В і д п о в і д ь :

1) $6x + 4 = 4 + 12\sin x - 6\sin 2x + 4\sin 3x - 3\sin 4x + ...$;

2) $6x + 4 = 4 - 6ie^{ix} + 6ie^{-ix} + 3ie^{2ix} - 3ie^{-2ix} - 2ie^{3ix} + 2ie^{-3ix} + \frac{3}{2}ie^{4ix} - \frac{3}{2}ie^{-4ix} + ...$.

8 Спектральні характеристики ряду Фур'є

8.1 Спектральні характеристики тригонометричного ряду Фур'є

У електрозв'язку, у радіотехніці одним із важливіших об'єктів дослідження є сигнали, які відповідають повідомленням, що передаються тим чи іншим способом кодування. Електричний сигнал – це фізичний процес, який несе інформацію. Кількість інформації, яку можна передавати за допомогою деякого сигналу, залежить від його параметрів: тривалості, смуги частот, потужності.

Усі сигнали поділяються на детерміновані та випадкові сигнали.

Детермінованим сигналом називається такий сигнал, миттєве значення якого у будь-який момент часу можна передбачити.

Випадковий сигнал – це такий сигнал, миттєве значення якого передбачити неможливо. До випадкових сигналів належать, приміром, електрична напруга під час розмови, радіоімпульси на вході радіолокаційного приймача і т.ін.

Детерміновані сигнали підрозділяються на періодичні та неперіодичні сигнали.

Найпростішим періодичним сигналом є гармонічні коливання, які описуються функціями типу

$$S = A\sin(\omega t + \varphi_0) \tag{60}$$

або

$$S = A\cos(\omega t - \varphi_0), \tag{61}$$

де t – це час, а S – відстань коливної точки від положення рівноваги.

Такі функції називаються синусоїдальними. Число A називається амплітудою коливання, аргумент $\omega t + \varphi_0$ функції (60) та аргумент $\omega t - \varphi_0$

функції (61) називаються фазами коливання, число φ_0 називається початковою фазою, а число $\dfrac{\omega}{2\pi}$ називається частотою коливання. Періодом функцій (60) та (61) є число $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$.

Коливання, які описуються функціями (60) або (61), називаються простими гармонічними коливаннями або простими гармоніками.

При дослідженні деяких процесів доводиться зустрічатися з сумами простих гармонічних коливань типу

$$S = A_1\sin(\omega_1 t+\varphi_1)+A_2\sin(\omega_2 t+\varphi_2)+\ldots+A_n\sin(\omega_n t+\varphi_n) \qquad (63)$$

або

$$S = A_1\cos(\omega_1 t-\varphi_1)+A_2\cos(\omega_2 t-\varphi_2)+\ldots+A_n\cos(\omega_n t-\varphi_n)\,. \qquad (64)$$

Такі коливання називаються складними гармонічними коливаннями. Накладання простих гармонічних коливань приводить до різноманітних періодичних коливань, які не схожі з простими гармонічними коливаннями. Якщо сума простих гармонік є нескінченною, тобто являє собою ряд, то за допомогою такої суми будь-яку періодичну функцію, що задовольняє умови розвинення у ряд Фур'є, можна розкласти на прості гармоніки.

Виконаємо деякі перетворення функцій (60) та (61). Так, для функції (60) маємо

$$S = A(\sin\omega t\cos\varphi_0+\cos\omega t\sin\varphi_0)=A\cos\varphi_0\sin\omega t+A\sin\varphi_0\cos\omega t\,.$$

Позначимо

$$A\cos\varphi_0=b;$$
$$A\sin\varphi_0=a.$$

Тоді

$$S=a\cos\omega t+b\sin\omega t. \qquad (64)$$

Аналогічно, для функції (61) маємо

$$S = A\cos\varphi_0\cos\omega t+A\sin\varphi_0\sin\omega t\,.$$

Якщо позначити

$$A\cos\varphi_0=a;$$
$$A\sin\varphi_0=b,$$

то

$$S=a\cos\omega t+b\sin\omega t. \qquad (65)$$

При цьому $A=\sqrt{a^2+b^2}$, а $\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{a}{b}$ для функції (60) та $\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}$ для функції (61).

Розглянемо нескінченну суму простих гармонік з періодами $2\pi, \frac{2\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, ..., \frac{2\pi}{n}, ...,$ внаслідок чого отримаємо тригонометричний ряд для функції $f(t)$ на сегменті $[-\pi; \pi]$, тобто

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt. \qquad (66)$$

При цьому величина $\frac{a_0}{2}$ називається сталою складовою або нульовою гармонікою, гармонічне коливання $a_1 \cos t + b_1 \sin t$ називається першою гармонікою, гармонічне коливання $a_2 \cos t + b_2 \sin t$ називається другою гармонікою, гармонічне коливання $a_n \cos nt + b_n \sin nt$ називається n-ою гармонікою і т.д. Перша гармоніка називається основною гармонікою, друга, третя і т.д. гармоніки називаються вищими гармоніками.

Нульова гармоніка $\frac{a_0}{2}$ дорівнює середньому значенню коливань протягом часу, що дорівнює періоду функції.

Кожний складний періодичний сигнал може бути поданий як сума гармонічних коливань.

Як зазначалось раніше, існують різноманітні ортогональні системи функцій, які можна використовувати як базисні функції для розвинення у ряд по цих функціях заданої функції, що описує той чи інший процес.

Для дослідження радіосигналів, відеосистем найбільш доцільним є використання ортогональних тригонометричних систем функцій. Справа у тому, що гармонічні сигнали є інваріантними відносно тих перетворень, які виконуються лінійними електричними сигналами.

Якщо будь-який сигнал подано у вигляді суми гармонічних коливань з кратними частотами, то це означає, що здійснено спектральне розвинення цього сигналу у базисі гармонічних функцій. Сукупність окремих гармонічних компонент сигналу утворює його спектр.

Кожна з гармонік, що входить до ряду (66) має свої характеристики, а їхня сукупність утворює спектральні характеристики ряду Фур'є. Частоти гармонік утворюють частотний спектр:

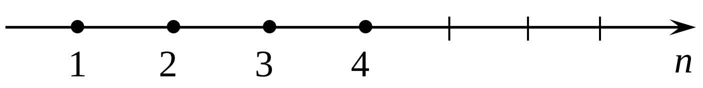


Рисунок 1

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots \text{ (рис. 1)} \qquad (67)$$

Амплітуди гармонік знаходяться за формулою

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\text{, де n = 1, 2, …. .} \tag{68}$$

та утворюють амплітудний спектр:

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots\,. \tag{69}$$

Такий спектр існує лише у точках, які відповідають частотному спектру. Це означає, що амплітудний спектр не можна зобразити неперервною лінією і його зображують у вигляді вертикальних ліній, які виходять з точок частотного спектра та мають висоту, що дорівнює значенню амплітуди (рис. 2)

Ще однією характеристикою є

енергетичний спектр $W_1, W_2, W_3, \ldots, W_n, \ldots$ (рис. 3) (70)

де

$$W_n = A_n^2. \tag{71}$$

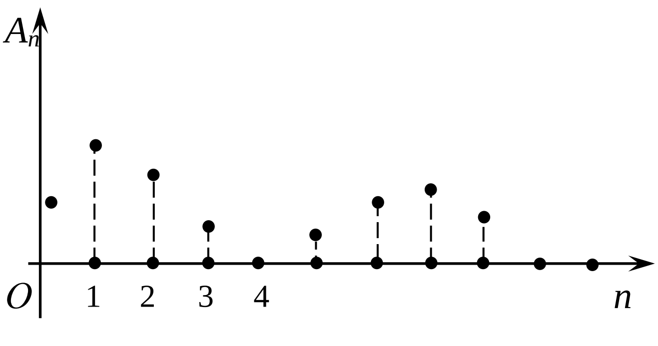


Рисунок 2

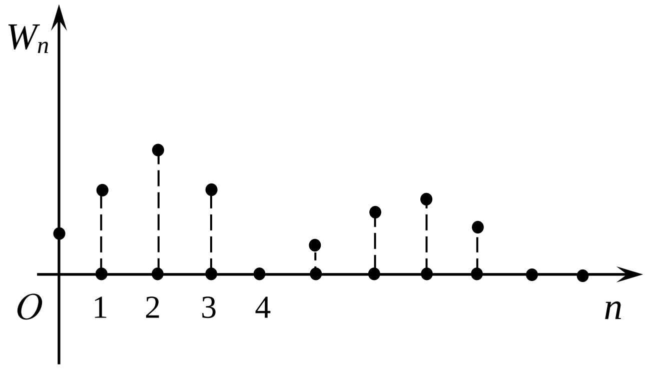


Рисунок 3

Фазовий спектр складається зі значень фаз відповідних гармонік:

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n, \ldots, \tag{72}$$

де

$$\varphi_n = \operatorname{arctg}\frac{b_n}{a_n}. \tag{73}$$

Будується фазовий спектр у точках, що відповідають частотному спектру (рис. 4).

Нехай тепер функція $f(t)$ задовольняє умови розвинення функції у ряд Фур'є на сегменті $[-\ell; \ell]$.

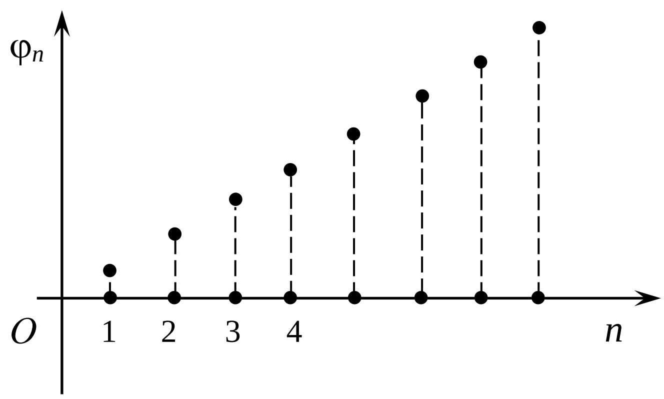


Рисунок 4

Тоді вона розкладається у тригонометричний ряд Фур'є

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t,$$

де $\omega = \frac{\pi}{\ell}$, або

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi t}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi t}{\ell}. \tag{74}$$

У цьому разі спектральні характеристики є такими.

Частотний спектр $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n, \ldots$ (рис. 5) (75)

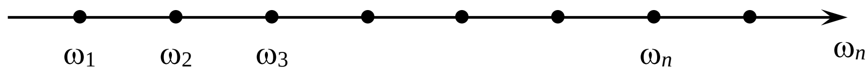


Рисунок 5

Частота ω_1 називається основною частотою, а інші частоти є кратними основній частоті: $\omega = n\omega_1$.

Амплітудний спектр (рис. 6):

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots . \tag{76}$$

Амплітудний спектр є найважливішою характеристикою сигналу або іншого процесу, що описується функцією $f(t)$, оскільки цей спектр дозволяє оцінювати відсотковий вклад тих чи інших гармонік у спектрі періодичного сигналу.

Енергетичний спектр:

$$W_1, W_2, W_3, \ldots, W_n, \ldots \text{ (рис. 7)}.$$

Фазовий спектр (рис. 8):

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n, \ldots . \tag{77}$$

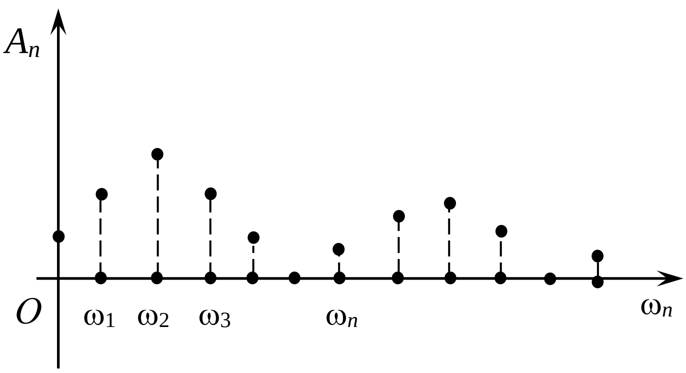


Рисунок 6

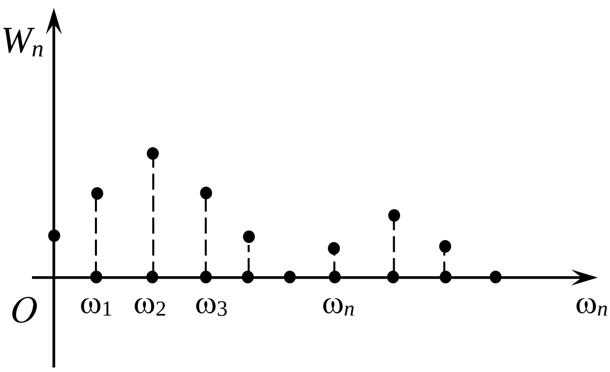


Рисунок 7

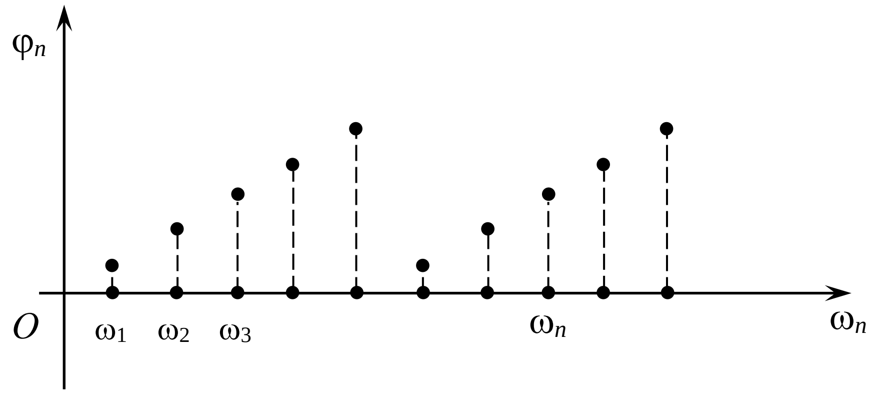


Рисунок 8

8.2 Спектральні характеристики ряду Фур'є у комплексній формі

Розглянемо функцію $f(t)$, яка на сегменті [–π; π] задовольняє умови розвинення функції у ряд Фур'є. Функції $f(t)$ відповідає тригонометричний ряд Фур'є (54), а також ряд Фур'є у комплексній формі

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}, \tag{78}$$

а його коефіцієнти c_n визначаються формулою

$$c_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-\mathrm{int}} dt, \tag{79}$$

де $n = \ldots 3, 2, 1, 0, 1. 2. 3, \ldots$.

За формулами Ейлера

$$c_n e^{int} = c_n(\cos nt + i \sin nt).$$

Вирази $c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int}$ називаються гармоніками у комплексній формі, а числа $\alpha_n = nt$ називаються *хвильовими числами*. Ряд Фур'є (78) у комплексній формі являє собою суму нескінченної кількості гармонік.

Гармоніки $c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int}$ мають свої характеристики, сукупність яких утворює спектральні характеристики ряду Фур'є. Сукупність хвильових чисел утворює частотний спектр …, $-n$, … , –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, … n, …. (рис. 2):

$$\ldots, -n, \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots n, \ldots.. \tag{80}$$

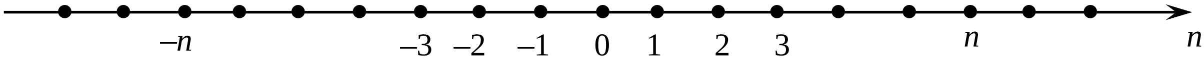


Рисунок 9

Особливістю цього спектра є те, що він утримує як додатні, так і від'ємні частоти. Від'ємні частоти не мають фізичного змісту та мають лише математичне обґрунтування.

Розглянемо суму $c_n e^{int} + c_{-n} e^{int}$, яка утворює n-ну гармоніку у комплексній формі.

Маємо

$$c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int} = \frac{1}{2}\Big((a_n - ib_n)e^{int} + (a_n + ib_n)e^{-int}\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\big((a_n - ib_n)(\cos nt + i\sin nt) + (a_n + ib_n)(\cos nt - i\sin nt)\big) =$$

$$= \frac{1}{2}\big(a_n(\cos nt + i\sin nt + \cos nt - i\sin nt) + ib_n(-\cos nt - i\sin nt + \cos nt - i\sin nt)\big) =$$

$$= a_n \cos nt + b_n \sin nt.$$

Отже, комплексній гармоніці відповідає дійсна гармоніка.

Таким чином введення від'ємних частот зумовлене зручністю у роботі з комплексними числами.

Амплітудний спектр (рис. 10) утворюється модулями коефіцієнтів c_n:

$$\ldots, |c_{-n}|, \ldots, |c_{-3}|, |c_{-2}|, |c_{-1}|, |c_0|, |c_1|, |c_2|, |c_3|, \ldots, |c_n|, \ldots \,. \qquad (81)$$

Амплітуди c_n називаються комплексними амплітудами. Встановимо зв'язок між амплітудами A_n та комплексними амплітудами c_n.

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad |c_n| = \sqrt{\frac{1}{4}a_n^2 + \frac{1}{4}b_n^2}\,; \qquad |c_n| = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2}\,;$$

$$|c_n| = \frac{1}{2}A_n. \qquad (82)$$

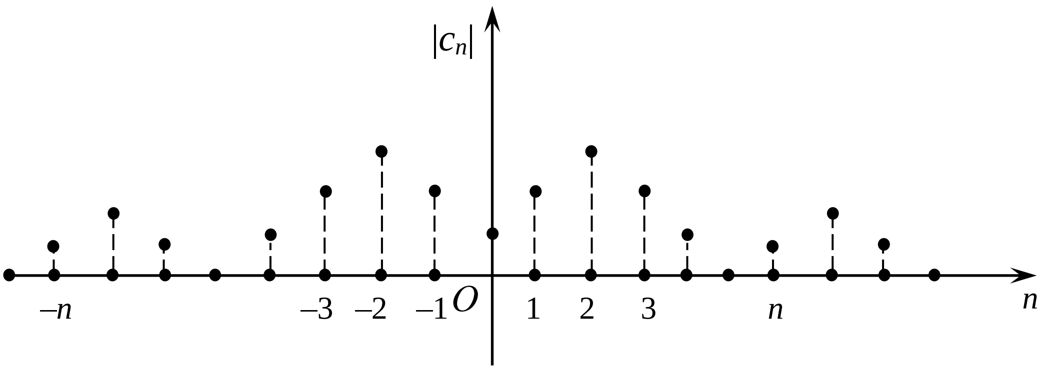


Рисунок 10

Фазовий спектр $\ldots, \varphi_{-n}, \ldots, \varphi_{-3}, \varphi_{-2}, \varphi_{-1}, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n, \ldots$ (рис. 11):

$$\ldots, \varphi_{-n}, \ldots, \varphi_{-3}, \varphi_{-2}, \varphi_{-1}, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n, \ldots . \qquad (83)$$

Фази φ_n знаходяться за формулою

$$\varphi_n = -\arg c_n , \qquad (84)$$

оскільки амплітуди c_n є комплексними.

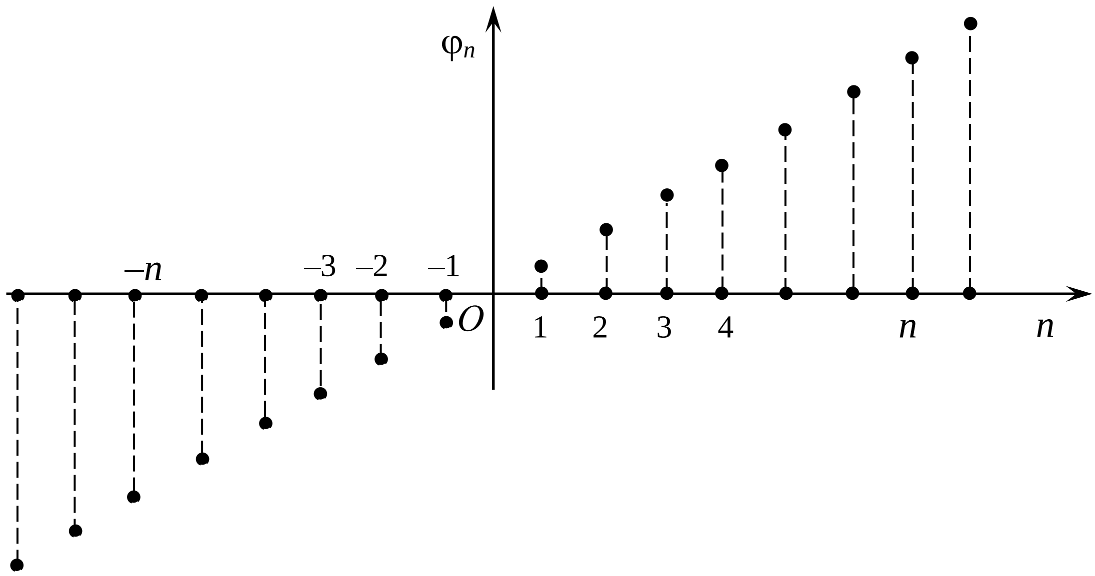


Рисунок 11

Нехай тепер функція $f(t)$ задовольняє умови розвинення функції у ряд Фур'є на сегменті $[-\ell; \ell]$. Тоді вона розкладається у тригонометричний ряд Фур'є або у ряд Фур'є у комплексній формі

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{in\pi t}{\ell}} \qquad (85)$$

або

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}. \qquad (86)$$

У цьому разі спектральні характеристики є такими.

Частотний спектр $\ldots, \omega_{-n}, \ldots, \omega_{-3}, \omega_{-2}, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n, \ldots$ (рис. 12):

$$\ldots, \omega_{-n}, \ldots, \omega_{-3}, \omega_{-2}, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n, \ldots . \qquad (87)$$

Амплітудний спектр (рис. 12):

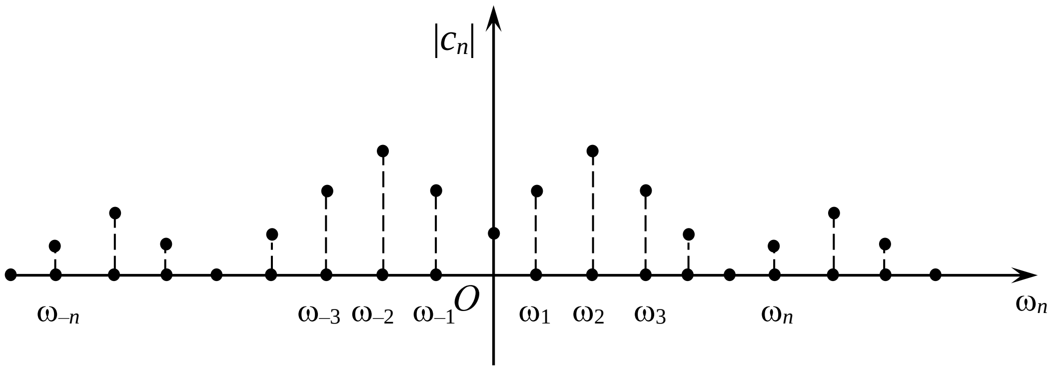


Рисунок 12

Енергетичний спектр $\ldots, W_{-n}, \ldots, W_{-3}, W_{-2}, W_{-1}, W_0, W_1, W_2, W_3, \ldots, W_n, \ldots$. (рис. 13):

$$\ldots, W_{-n}, \ldots, W_{-3}, W_{-2}, W_{-1}, W_0, W_1, W_2, W_3, \ldots, W_n, \ldots . \tag{88}$$

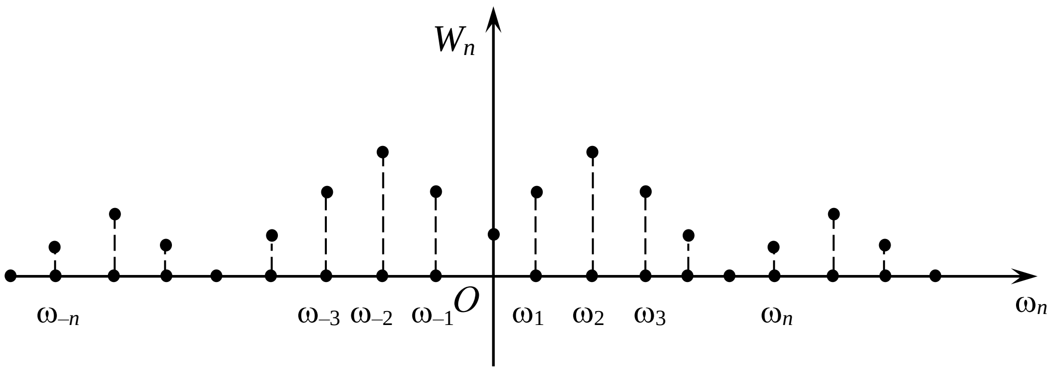


Рисунок 13

Фазовий спектр (рис. 14):

$$\ldots, \varphi_{-n}, \ldots, \varphi_{-3}, \varphi_{-2}, \varphi_{-1}, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n, \ldots . \tag{89}$$

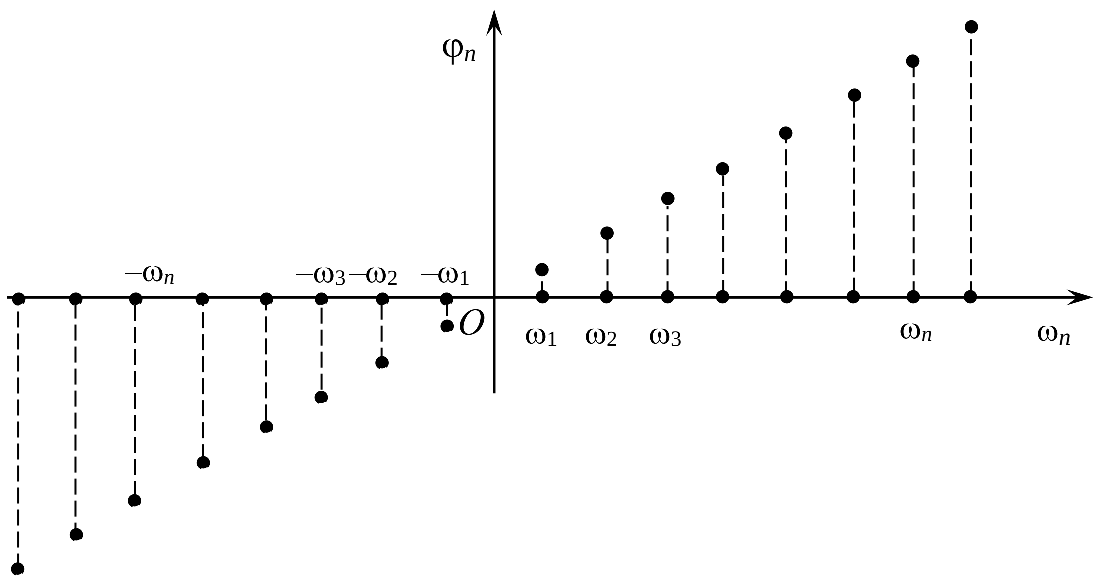


Рисунок 14

Спектральною функцією або спектральною щільністю ряду Фур'є називається функція

$$S(n\Delta\omega) = 2\ell c_n = \int_{-\ell}^{\ell} f(t)e^{in\Delta\omega t}dt\,.$$

Оскільки спектральна функція $S(n\Delta\omega)$ є комплекснозначною функцією, то вона характеризується модулем та фазою, яким відповідають два лінійчатих спектра: амплітудний та фазовий.

Амплітудним спектром $\rho(n\Delta\omega)$ називається модуль спектральної функції, тобто

$$\rho(n\Delta\omega) = |S(n\Delta\omega)| = \left|\int_{-l}^{l} f(t)e^{in\Delta\omega t}dt\right|$$

Фазовим спектром $\Phi(n\Delta\omega)$ називається аргумент спектральної функції, що береться з протилежним знаком, тобто

$$\Phi(n\Delta\omega) = -\arg S(n\Delta\omega)\,.$$

За допомогою спектральної функції $S(n\Delta\omega)$ будь-яку функцію $f(x)$, що задовольняє умови розвинення у ряд Фур'є на сегменті $[-\ell;\ \ell]$, можна подати у вигляді

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\ell} S(n\Delta\omega)e^{in\Delta\omega x}$$

для точок неперервності $f(x)$ та у вигляді

$$\frac{1}{2}(f(x-0) + f(x+0)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\ell} S(n\Delta\omega)e^{in\Delta\omega x}\,,$$

де x – точки розриву першого роду.

Таким чином, якщо періодична функція $f(x)$ є заданою, то можна побудувати її спектр частот та навпаки, якщо відомо спектр частот функції, то можна знайти і саму функцію $f(x)$.

Отже, можливі два подання функції: часове, коли функція $f(t)$ є функцією часу t, та частотне, коли є визначеним спектр, тобто амплітуди $\rho(n\Delta\omega)$ частотних складових $e^{in\Delta\omega t}$.

Приклади до пункту 8

Приклад 20. Функція *f*(*x*) задана графічно (рис. 1) на сегменті [0; 4];

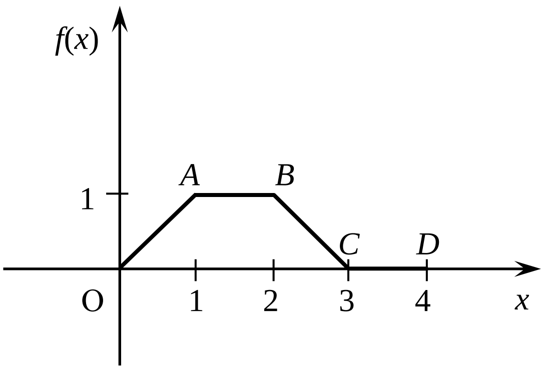


Рисунок 1 до прикладу 20

1) Записати функцію *f*(*x*) в аналітичній формі.
2) Розкласти функцію *f*(*x*) у тригонометричний ряд Фур'є.
3) Розкласти функцію *f*(*x*) у ряд Фур'є у комплексній формі.
4) Побудувати амплітудний спектр на m = 5 гармонік для тригонометричного ряду Фур'є.
5) Побудувати амплітудний спектр на m = 5 гармонік для ряду Фур'є у комплексній формі.
6) Побудувати енергетичний спектр на m = 5 гармонік для тригонометричного ряду Фур'є.
7) Побудувати енергетичний спектр на m = 5 гармонік для ряду Фур'є у комплексній формі.

1) Графік заданої функції являє собою ламану з вершинами у точках $O(0;\,0)$; $A(1;1)$; $B(2;1)$; $C(3;0)$; $D\,(4;0)$.

Аналітично ця функція на сегменті [0; 4] описується у такий спосіб:

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{якщо } 0\le x<1;\\ 1, & \text{якщо } 1\le x<2;\\ 3-x, & \text{якщо } 2\le x<3;\\ 0, & \text{якщо } 3\le x\le 4. \end{cases}$$

2) Функція *f*(*x*) на сегменті [0; 4] задовольняє умови теореми Діріхле. Побудуємо тригонометричний ряд за формулами (33) та (35):

$$a_0=\frac{1}{2}\left(\int_0^1 x\,dx+\int_1^2 dx+\int_2^3(3-x)\,dx+\int_3^4 0\,dx\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1+x\Big|_1^2-\frac{1}{2}(3-x)^2\Big|_2^3\right)=1.$$

$$a_n=\frac{1}{2}\left(\int_0^1 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx+\int_1^2\cos\frac{n\pi x}{2}dx+\int_2^3(3-x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx+\int_3^4 0\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}(I_1+I_2+I_3+I_4).$$

$$I_1=\int_0^1 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\begin{bmatrix} U=x; & dU=dx \\ dV=\cos\frac{n\pi x}{2}dx; & V=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{2x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1-\frac{2}{n\pi}\int_0^1\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}-0+\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1=$$

$$=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{4}{n^2\pi^2}.$$

$$I_2=\int_1^2\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_1^2=\frac{2}{n\pi}\sin n\pi-\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}=-\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

$$I_3=\int_2^3(3-x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\begin{bmatrix} U=3-x; & dU=-dx \\ dV=\cos\frac{n\pi x}{2}dx; & V=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{2(3-x)}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_2^3+\frac{2}{n\pi}\int_2^3\sin\frac{n\pi x}{2}dx=0-\frac{2}{n\pi}\sin n\pi-\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_2^3=$$

$$=-\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{3n\pi}{2}+\frac{4}{n^2\pi^2}\cos n\pi.$$

$$I_4=\int_3^4 0\cos\frac{n\pi x}{2}dx=0.$$

Тоді

$$a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{4}{n^2\pi}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{4}{n^2\pi}-\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{4}{n^2\pi}\cos\frac{3n\pi}{2}+\frac{4}{n^2\pi}\cos\frac{n\pi}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{n^2\pi^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-\cos\frac{3n\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{n^2\pi^2}\cos n\pi-\frac{4}{n^2\pi^2}\right)=$$

$$=\frac{2}{n^2\pi^2}\cdot 2\sin 2n\pi\cdot\sin n\pi+\frac{2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1)=\frac{2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1).$$

$$b_n=\frac{1}{2}\left(\int_0^1 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx+\int_1^2\sin\frac{n\pi x}{2}dx+\int_2^3(3-x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx+\int_3^4 0\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}(I_1+I_2+I_3+I_4).$$

Розглянемо кожний з інтегралів окремо.

$$I_1=\int_0^1 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\begin{bmatrix} U=x; & dU=dx \\ dV=\sin\frac{n\pi x}{2}dx; & V=-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\end{bmatrix}=$$

$$= -\frac{2x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \cos\frac{n\pi x}{2}dx = -\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + 0 + \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1 =$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} - 0 = -\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

$$I_2 = \int_1^2 \sin\frac{n\pi x}{2}dx = -\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_1^2 = -\frac{2}{n\pi}\cos n\pi + \frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}.$$

$$I_3 = \int_2^3 (3-x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx = \begin{bmatrix} U = 3-x; & dU = -dx \\ dV = \sin\frac{n\pi x}{2}dx; & V = -\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{2(3-x)}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_2^3 - \frac{2}{n\pi}\int_2^3 \cos\frac{n\pi x}{2}dx = 0 + \frac{2}{n\pi}\cos n\pi - \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_2^3 =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\cos n\pi - \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{3n\pi}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2}\sin n\pi = \frac{2}{n\pi}\cos n\pi - \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{3n\pi}{2}.$$

$$I_4 = \int_3^2 0\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}dx = 0.$$

$$b_n = \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{2}{n\pi}\cos n\pi - \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{3n\pi}{2}\right) = \frac{4}{n^2\pi^2}\left(\sin\frac{n\pi}{2} - \sin\frac{3n\pi}{2}\right).$$

Отже, маємо тригонометричний ряд Фур'є для функції $f(x)$ на сегменті [0; 4]:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}(\cos n\pi - 1)\cos\frac{n\pi x}{2} + \frac{1}{n^2}\left(\sin\frac{n\pi}{2} - \sin\frac{3n\pi}{2}\right)\sin\frac{n\pi x}{2}\right). \qquad (*)$$

3) Побудуємо ряд Фур'є у комплексній формі, спираючись на формули (59) та (58):

$$c_0 = \frac{1}{4}\left(\int_0^1 x dx + \int_1^2 dx + \int_2^3 (3-x)dx + \int_3^4 0 dx\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 + x\Big|_1^2 - \frac{1}{2}(3-x)^2\Big|_2^3\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$c_n = \frac{1}{4}\left(\int_0^1 x e^{-i\frac{n\pi x}{2}}dx + \int_1^2 e^{-i\frac{n\pi x}{2}}dx + \int_2^3 (3-x)e^{-i\frac{n\pi x}{2}}dx + \int_3^4 0\cdot e^{-i\frac{n\pi x}{2}}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{4}(I_1 + I_2 + I_3 + I_4).$$

Розглянемо кожний з інтегралів окремо.

$$I_1=\int_0^1 xe^{-\frac{in\pi x}{2}}dx=\left[\begin{array}{ll} U=x; & dU=dx \\ dV=e^{-\frac{in\pi x}{2}}dx; & V=-\dfrac{2}{in\pi}e^{-\frac{in\pi x}{2}} \end{array}\right]=$$

$$=-\frac{2x}{in\pi}e^{-\frac{in\pi x}{2}}\Bigg|_0^1+\frac{2}{in\pi}\int_0^1 e^{-\frac{in\pi x}{2}}dx=-\frac{2}{in\pi}e^{-\frac{in\pi x}{2}}+0-\frac{2^2}{(in\pi)^2}e^{-\frac{in\pi x}{2}}\Bigg|_0^1=$$

$$=-\frac{2i}{n\pi}e^{-\frac{in\pi}{2}}+\frac{4}{n^2\pi^2}e^{-\frac{in\pi}{2}}-\frac{4}{n^2\pi^2}.$$

$$I_2=\int_1^2 e^{-\frac{in\pi x}{2}}dx=-\frac{2}{in\pi}e^{-\frac{in\pi x}{2}}\Bigg|_1^2=\frac{2i}{n\pi}e^{-in\pi}-\frac{2i}{n\pi}e^{-\frac{in\pi}{2}}.$$

$$I_3=\int_2^3 (3-x)e^{-\frac{in\pi x}{2}}dx=\left[\begin{array}{ll} U=3-x; & dU=-dx \\ dV=e^{-\frac{in\pi x}{2}}dx; & V=-\dfrac{2}{in\pi}e^{-\frac{in\pi x}{2}} \end{array}\right]=$$

$$=\frac{2i(3-x)}{n\pi}e^{-\frac{in\pi x}{2}}\Bigg|_2^3-\frac{2i}{n\pi}\int_2^3 e^{-\frac{in\pi x}{2}}dx=-\frac{2i}{n\pi}e^{-in\pi}-\frac{4}{(n\pi)^2}e^{-\frac{in\pi x}{2}}\Bigg|_2^3=$$

$$=-\frac{2i}{n\pi}e^{-in\pi}-\frac{4}{n^2\pi^2}e^{-\frac{3in\pi x}{2}}+\frac{4}{n^2\pi^2}e^{-in\pi}.$$

Тоді

$$c_n=\frac{1}{4}\left(\frac{2i}{n\pi}e^{-\frac{in\pi}{2}}+\frac{4}{n^2\pi^2}e^{-\frac{in\pi}{2}}-\frac{4}{n^2\pi^2}+\frac{2i}{n\pi}e^{-in\pi}-\frac{2i}{n\pi}e^{-\frac{in\pi}{2}}-\frac{2i}{n\pi}e^{-in\pi}-\right.$$

$$\left.-\frac{4}{n^2\pi^2}e^{-\frac{3in\pi}{2}}+\frac{4}{n^2\pi^2}e^{-in\pi}\right)=\frac{1}{n^2\pi^2}\left(e^{-\frac{in\pi}{2}}-1-\frac{4}{n^2\pi^2}e^{-\frac{3in\pi}{2}}+\frac{4}{n^2\pi^2}e^{-in\pi}\right).$$

Таким чином, ряд Фур'є у комплексній формі для функції $f(x)$ на сегменті [0; 4] має вигляд

$$f(x)\sim\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}'\frac{1}{n^2}\left(e^{-i\frac{n\pi}{2}}-1+e^{-i\frac{3n\pi}{2}}+e^{-in\pi}\right). \qquad (**)$$

4) Побудуємо амплітудний спектр на п'ять гармонік для ряду (*) (рис. 2).

Оскільки a_0 = 1 та $a_n=\dfrac{2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1)$; $b_n=\dfrac{2}{n^2\pi^2}(\sin\dfrac{n\pi}{2}-\sin\dfrac{3n\pi}{2})$, то з точністю до 0,01 маємо:

$a_1 = -\dfrac{4}{\pi^2} \approx -0{,}41;$ $\qquad$ $b_1 = \dfrac{4}{\pi^2} \approx 0{,}41;$

$a_2 \approx 0;$ $\qquad$ $b_2 \approx 0;$

$a_3 = -\dfrac{4}{9\pi^2} \approx -0{,}05;$ $\qquad$ $b_3 = -\dfrac{4}{\pi^2} \approx -0{,}05;$

$a_4 \approx 0;$ $\qquad$ $b_4 \approx 0;$

$a_5 = -\dfrac{4}{25\pi^2} \approx -0{,}02;$ $\qquad$ $b_5 = \dfrac{4}{25\pi^2} \approx 0{,}02.$

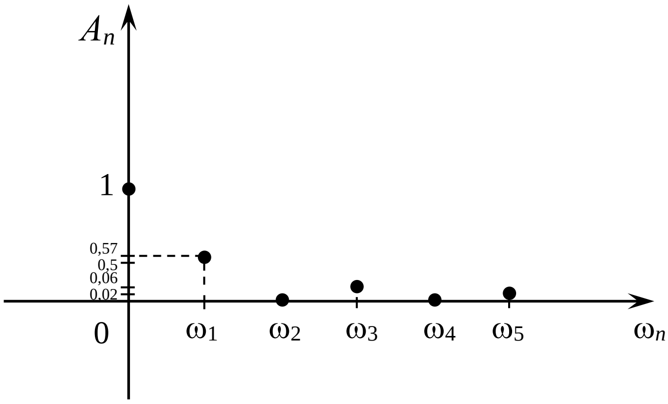


Рисунок 2 до прикладу 20

Знаходимо амплітуди $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.

$A_0 = 1$; $A_1 \approx 0{,}57$; $A_2 = 0$;

$A_3 = 0{,}06$; $A_4 = 0$; $A_5 \approx 0{,}02$.

5) Побудуємо амплітудний спектр на п’ять гармонік для ряду (**) (рис. 3). Оскільки $a_0 = 0{,}5$ та

$$c_n = \frac{1}{n^2\pi^2}\left(e^{-i\frac{n\pi}{2}} - 1 - e^{-i\frac{3n\pi}{2}} + e^{-in\pi}\right),$$

то з точністю до 0,01 маємо:

$$c_1 = -\frac{2}{\pi^2}(1+i);$$

$c_{-1} = -\dfrac{2}{\pi^2}(1-i);$

$c_2 = 0;$ $\qquad$ $c_{-2} = 0;$

$c_3 = -\dfrac{2}{9\pi^2}(1-i);$ $\qquad$ $c_{-3} = -\dfrac{2}{9\pi^2}(1+i);$

$c_4 = 0;$ $\qquad$ $c_{-4} = 0;$

$c_5 = -\dfrac{2}{25\pi^2}(1+i);$ $\qquad$ $c_{-5} = -\dfrac{2}{25\pi^2}(1-i).$

Знаходимо амплітуди

$|c_1| = \dfrac{2\sqrt{2}}{\pi^2} = 0{,}29;$ $\qquad$ $|c_{-1}| = \dfrac{2\sqrt{2}}{\pi^2} = 0{,}29;$

$|c_2| = 0;$ $\qquad$ $|c_{-2}| = 0;$

$|c_3| = \dfrac{2\sqrt{2}}{9\pi^2} = 0{,}03;$ $\qquad$ $|c_{-3}| = \dfrac{2\sqrt{2}}{9\pi^2} = 0{,}03;$

$|c_4| = 0;$ $\qquad$ $|c_{-4}| = 0;$

$|c_5| = \dfrac{2\sqrt{2}}{25\pi^2} = 0{,}01;$ $\qquad$ $|c_{-5}| = \dfrac{2\sqrt{2}}{25\pi^2} = 0{,}01.$

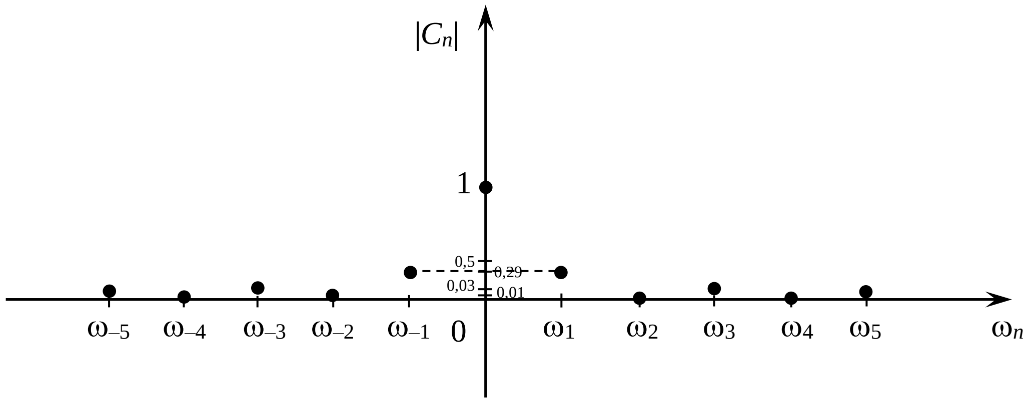


Рисунок 3 до прикладу 20

6) Побудуємо енергетичний спектр на п’ять гармонік для ряду (*) (рис. 4). Оскільки $W_0 = a_0^2$ та $W_n = A_n^2$, то

$W_0 = 1$; $W_1 = 0{,}33$;

$W_2 = 0$; $W_3 = 0{,}0036$;

$W_4 = 0$; $W_5 = 0{,}0004$.

7) Побудуємо енергетичний спектр на п’ять гармонік для ряду (**).

Оскільки

$W_0 = \left|c_0\right|^2$ та $W_n = \left|c_n\right|^2 = \left|c_{-n}\right|^2$, то

$W_0 = 0{,}25$; $W_1 = 0{,}08$;

$W_2 = 0$; $W_3 = 0{,}0009$;

$W_4 = 0$; $W_5 = 0{,}0001$.

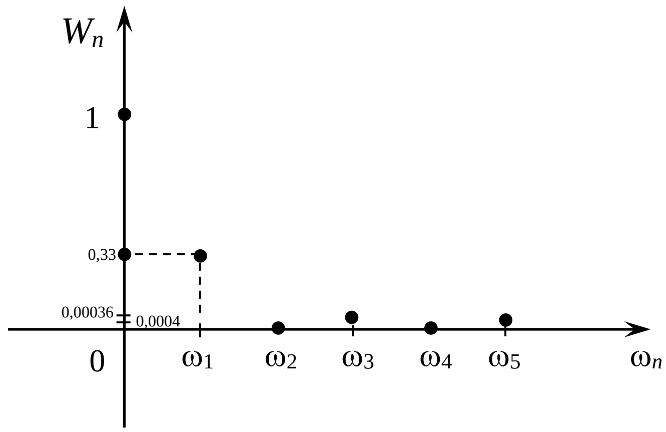


Рисунок 4 до прикладу 20

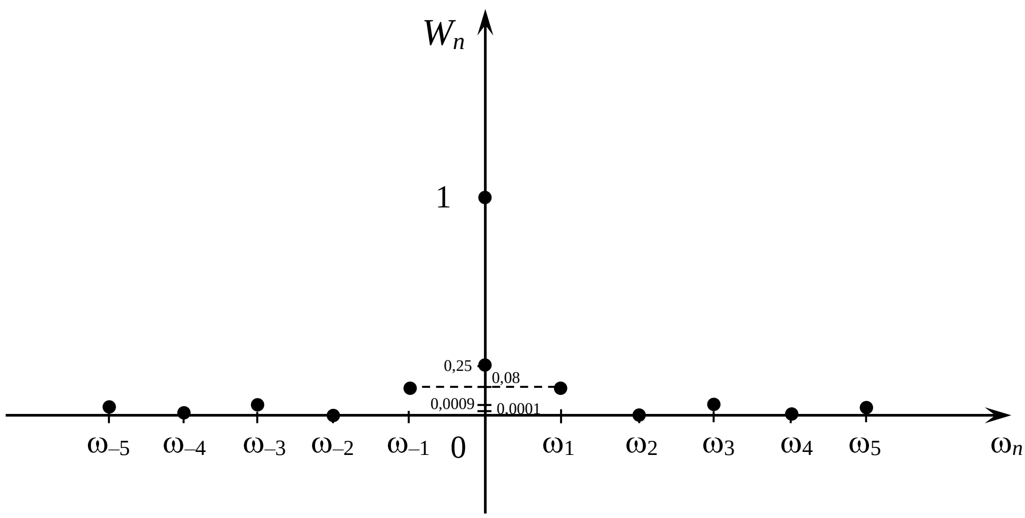


Рисунок 5 до прикладу 20

В і д п о в і д ь :

$$f(x)\sim\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}(\cos n\pi-1)\cos\frac{n\pi x}{2}+\frac{1}{n^2}\left(\sin\frac{n\pi}{2}-\sin\frac{3n\pi}{2}\right)\sin\frac{n\pi x}{2}\right);$$

$$f(x)\sim\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}'\,\frac{1}{n^2}\left(e^{-i\frac{n\pi}{2}}-1+e^{-i\frac{3n\pi}{2}}+e^{-in\pi}\right).$$

Приклад 21. Розкласти функцію $f(x)=e^{-x}$ у ряд Фур'є у комплексній формі на сегменті [0; 3] та побудувати її фазовий спектр.

Р о з в ' я з а н н я

Задана функція на сегменті [0; 3] задовольняє умови теореми Діріхле, $2\ell=3,\ \ell=\frac{3}{2}$. Знаходимо коефіцієнти c_0 та c_n:

$$c_0=\frac{1}{3}\int_0^3 e^{-x}dx=-\frac{1}{3}e^{-x}\Big|_0^3=-\frac{1}{3}(e^{-3}-1)=\frac{1}{3}(1-e^{-3});$$

$$c_n=\frac{1}{3}\int_0^3 e^{-x}e^{-i\frac{2\pi nx}{3}}dx=\frac{1}{3}\int_0^3 e^{-(1+i\frac{2\pi n}{3})x}dx=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+i\frac{2\pi n}{3}}e^{-(1+i\frac{2\pi n}{3})x}\Bigg|_0^3=$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{3+2\pi in}\left(e^{-(1+i\frac{2\pi n}{3})3}-1\right)=-\frac{3-2\pi ni}{9+4\pi^2n^2}(e^{-3+2\pi ni}-1)=$$

$$=-\frac{3-2\pi ni}{9+4\pi^2n^2}(e^{-3}e^{2\pi ni}-1)=-\frac{3-2\pi ni}{9+4\pi^2n^2}\left(e^{-3}(\cos 2\pi n+i\sin 2\pi n)-1\right)=$$

$$=-\frac{3-2\pi ni}{9+4\pi^2n^2}(e^{-3}-1)=\frac{3-2\pi ni}{9+4\pi^2n^2}(1-e^{-3}).$$

Тоді ряд Фур'є для $x\in[0,3]$ має вигляд

$$f(x)=(1-e^{-3})\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{3-2\pi ni}{9+4\pi^2n^2}e^{i\frac{2\pi n}{3}x}.$$

Оскільки

$$c_n=\frac{1-e^{-3}}{9+4\pi^2n^2}(3-2\pi ni)$$

або

$$c_n=\frac{3(1-e^{-3})}{9+4\pi^2n^2}-\frac{2\pi n(1-e^{-3})}{9+4\pi^2n^2}i,$$

то

$$\varphi_n = -\arg c_n = \mathrm{arctg}\frac{2\pi n}{3}.$$

Звідси

$$\varphi_1 = \mathrm{arctg}\frac{2\pi}{3} = 0{,}38; \qquad \varphi_2 = \mathrm{arctg}\frac{4\pi}{3} = 0{,}45;$$

$$\varphi_3 = \mathrm{arctg}\,2\pi = 2{,}83; \qquad \varphi_4 = \mathrm{arctg}\frac{8\pi}{3} = 0{,}48;$$

$$\varphi_5 = \mathrm{arctg}\frac{10\pi}{3} = 0{,}49.$$

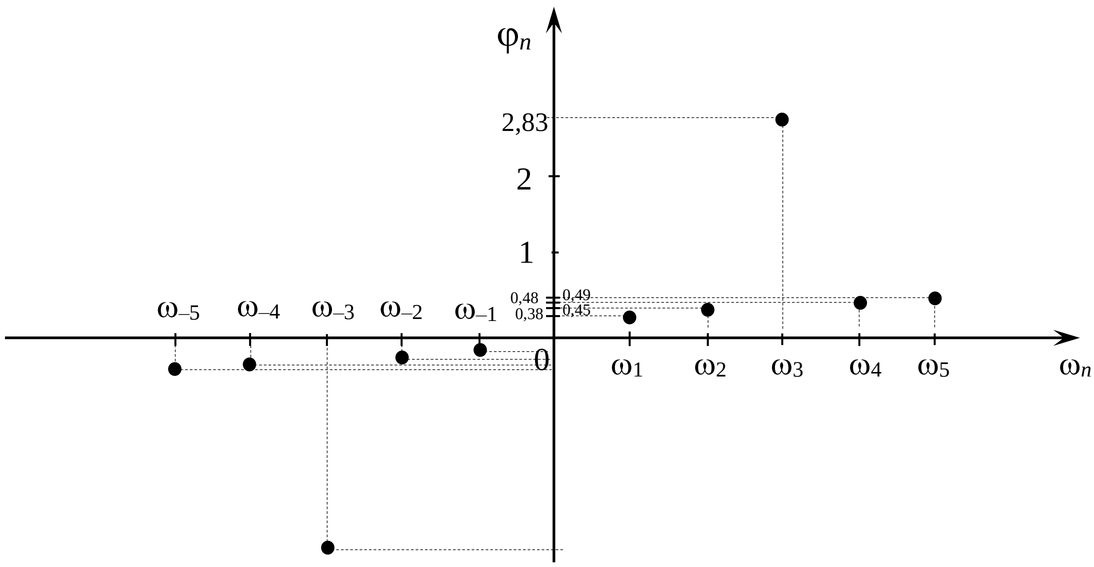


Рисунок 1 до прикладу 21

9. Апроксимація функцій тригонометричним многочленом Фур'є

9.1 Апроксимація функції многочленом Фур'є

У залежності від своїх властивостей функція $f(x)$ може бути розвинена у той чи інший ряд, як ряд Тейлора, ряд Маклорена, узагальнений ряд Фур'є, тригонометричний ряд Фур'є.

Якщо функція $f(x)$ розвинена у деякий ряд та задовольняє умови розвинення у цей ряд, то сума такого ряду дорівнює значенням функції $f(x)$ у відповідних точках.

За деяких обставин для характеристики функції не обов'язково знаходити суму ряду, в який вона розвинена, а можна обмежитись лише частинною сумою ряду $S_n(x)$, що приводить до наближеної рівності

$$f(x) \approx S_n(x),$$

яка є тим точніше, чим більше n. Частинна сума $S_n(x)$ являє собою многочлен. Заміна функції $f(x)$ на многочлен $S_n(x)$ називається апроксимацією функції $f(x)$ многочленом $S_n(x)$. При цьому многочлен $S_n(x)$ називається апроксимуючим многочленом.

Якщо функція $f(x)$ на сегменті $[-\pi; \pi]$ задовольняє умови розвинення у ряд Фур'є, то її апроксимуючим многочленом є деякий многочлен n-го порядку

$$P_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx. \tag{89}$$

Розглянемо, якими мають бути коефіцієнти α_k та β_k, щоб апроксимуючий многочлен $P_n(x)$ за даного n давав найкраще наближення до функції $f(x)$.

Впровадимо величину δ, яка називається середньоквадратичним відхиленням многочлена $P_n(x)$ від функції $f(x)$ на сегменті $[a; b]$ та визначається формулою

$$\delta^2 = \frac{1}{b-a}\int_a^b (f(x) - P_n(x))^2 dx,$$

а для функції $f(x)$, що визначена на сегменті $[-\pi; \pi]$,

$$\delta^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - P_n(x))^2 dx$$

або

$$\delta^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) - \left(\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx \right)\right)^2 dx. \tag{90}$$

Для того, щоб апроксимація була найкращою, маємо з'ясувати за яких значень коефіцієнтів $\alpha_0, \alpha_k, \beta_k (k = 1; 2; ...; n)$ функція δ^2 як функція $2n + 1$ змінної набуває найменшого значення.

Виконаємо спрощення під знаком інтеграла із формули (90)

$$\delta^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(f^2(x) - 2f(x)\left(\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx \right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx \right)^2 \right) dx,$$

$$\delta^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \frac{\alpha_0}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx -$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\beta_k\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kxdx++\frac{1}{2\pi}\frac{\alpha_0^2}{4}\int_{-\pi}^{\pi}dx+\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kxdx+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\beta_k^2\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kxdx+\frac{1}{2\pi}\alpha_0\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx+\frac{1}{2\pi}\alpha_0\sum_{k=1}^{n}\beta_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kxdx+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_k\alpha_j\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos jxdx++\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_k\alpha_j\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin jxdx+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\beta_k\beta_j\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin jxdx.$$

Враховуючи, що

$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=a_0$, $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx=a_k$,

$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kxdx=b_k$ $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kxdx=0$,

$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kxdx=0$ $\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos jxdx=0$, де $k\neq j$,

$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos jxdx=0$, де $k\neq j$, $\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin jxdx=0$,

де $k,\ j=1,2,...,n$, отримаємо

$$\delta^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-\frac{\alpha_0 a_0}{2}-\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k a_k+\beta_k b_k)+\frac{\alpha_0^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2+\beta_k^2).$$

Якщо у правій частині додати і відняти вираз $\left(\frac{\alpha_0^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right)$, то тоді

$$\delta^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-\frac{\alpha_0^2}{4}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2+\beta_k^2)+\frac{1}{4}(\alpha_0-a_0)^2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}((\alpha_k-a_k)^2+(\beta_k-b_k)^2).$$

Перші три доданки правої частини не залежать від коефіцієнтів $a_0; a_k; b_k\,(k=1;2;...;n)$. Усі інші доданки правої частини є невід’ємними. Тому δ^2 досягає найменшого значення, якщо ці доданки будуть дорівнювати нулю, тобто, якщо

$$\alpha_0 = a_0;\ \alpha_1 = a_1; \alpha_2 = a_2, ..., \alpha_n = a_n;\ \beta_1 = b_1; \beta_2 = b_2, ..., \beta_n = b_n.$$

Тоді

$$\delta^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2). \tag{91}$$

У такому разі виходить, що апроксимуючий многочлен $P_n(x)$ дає найкраще наближення до функції $f(x)$, якщо він має вигляд

$$P_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

тобто якщо $P_n(x)$ збігається з многочленом Фур'є для функції $f(x)$.

9.2 Нерівність Бесселя. Рівність Парсеваля

З формули (3.206) виходить, що оскільки $\delta^2 \geq 0$, то

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) \geq 0,$$

а отже,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \geq \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2).$$

Припустимо, що $n \to \infty$, тоді маємо

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \geq \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2). \tag{92}$$

Нерівність (3.207) називається нерівністю Бесселя.

Якщо функція $f(x)$ на сегменті $[-\pi; \pi]$ задовольняє умови розвинення у ряд Фур'є, то δ^2 дорівнює нулю коли $n \to \infty$, у такому разі

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2). \tag{93}$$

Рівність (3.208) називається рівністю Парсеваля.

За допомогою нерівності Бесселя можна довести важливу властивість коефіцієнтів ряда Фур'є.

Теорема. Якщо функція $f(x)$ є кусково-неперервною на сегменті $[-\pi; \pi]$, то її коефіцієнти Фур'є прямують до нуля, якщо $n \to \infty$, тобто

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0; \\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0. \end{cases} \qquad (94)$$

Д о в е д е н н я

Якщо функція $f(x)$ на сегменті $[-\pi; \pi]$ є кусково-неперервною, то і функція $f^{2}(x)$ також є кусково-неперервною на сегменті $[-\pi; \pi]$.

Тоді із нерівності Бесселя виходить, що

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, fx - \frac{1}{2}\alpha_0^2,$$

а це означає, що ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$ є збіжним рядом. За необхідною ознакою збіжності ряду маємо

$$\lim_{k\to\infty}(a_k^2 + b_k^2) = 0,$$

звідки виходить, що $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$ та $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = 0$, звідки випливає (94).

Глава 2

ІНТЕГРАЛ ФУР'Є. ІНТЕГРАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є

1 Інтеграл Фур'є в дійсній формі

Нехай функція $f(x)$ задовольняє умови:

1) визначена в інтервалі $(-\infty; +\infty)$;
2) є абсолютно інтегровною в інтервалі $(-\infty; +\infty)$, тобто

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx = K < \infty;$$

3) на будь-якому сегменті $[-\ell; \ell]$ може бути розвинена у ряд Фур'є, тобто

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x$$

з коефіцієнтами

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos n\omega x dx;$$

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin n\omega x dx,$$

де $\omega = \frac{\pi}{\ell}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Запишемо ряд Фур'є у вигляді

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos n\omega x dx\right)\cos n\omega x + \left(\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin n\omega x dx\right)\sin n\omega x\right).$$

Для зручності змінну інтегрування x у визначених інтегралах позначимо через t:

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)dt + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\cos n\omega t dt\right)\cos n\omega x + \left(\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\sin n\omega t dt\right)\sin n\omega x\right).$$

Звідси маємо

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(t)(\cos n\omega t\cos n\omega x+\sin n\omega t\sin n\omega x)dt$$

або

$$f(x)=\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(t)dt+\frac{1}{\ell}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\ell}^{\ell}f(t)\cos n\omega(t-x)dt. \qquad (95)$$

Припустимо, що $\ell\to\infty$. Числа ω; 2ω; 3ω, …, nω, … утворюють частотний спектр. Позначимо $\omega=\omega_1$; $2\omega=\omega_2$; $3\omega=\omega_3$, …, $n\omega=\omega_n$, … . У такому разі частотний спектр складається з чисел ω_1; ω_2; ω_3, …, ω_n, … . При цьому $\Delta\omega_n=\omega_n-\omega_{n-1}$ або $\Delta\omega_n=\omega_n-\omega_{n-1}=n\omega-(n-1)\omega=\omega=\frac{\pi}{\ell}$. Якщо $\ell\to\infty$, то $\Delta\omega_n\to 0$. Це означає, що коли $\ell\to\infty$, то частотний спектр з дискретного спектра переходить у неперервний спектр.

Тоді $$f(x)=\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(t)dt+\frac{1}{\ell}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\ell}^{\ell}f(t)\cos\omega_n(t-x)dt.$$

Другий доданок правої частини помножимо та поділимо на $\frac{\pi}{\ell}$:

$$f(x)=\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(t)dt+\frac{1}{\ell}\cdot\frac{\ell}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-\ell}^{\ell}f(t)\cos\omega_n(t-x)dt\right)\frac{\pi}{\ell},$$

$$f(x)=\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(t)dt+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-\ell}^{\ell}f(t)\cos\omega_n(t-x)dt\right)\Delta\omega_n. \qquad (96)$$

Оцінимо перший доданок правої частини рівності (96), коли $\ell\to\infty$.

$$\lim_{\ell\to\infty}\left|\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(t)dt\right|=\lim_{\ell\to\infty}\frac{1}{2\ell}\left|\int_{-\ell}^{\ell}f(t)\,dt\right|\le\lim_{\ell\to\infty}\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}|f(t)|\,dt=\lim_{\ell\to\infty}\frac{K}{2\ell}=0.$$

Другий доданок правої частини (96) являє собою інтегральну суму відносно ω.

Отже,

$$\lim_{\ell\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-\ell}^{\ell}f(t)\cos\omega_n(t-x)dt\right)\Delta\omega_n=\int_{0}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega(t-x)dt\right)d\omega.$$

Остаточно маємо

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega(t-x)dt\right)d\omega. \qquad (97)$$

Вираз у правій частині рівності (97) називається *інтегралом Фур'є* для функції $f(x)$. В усіх точках неперервності функції $f(x)$ значення інтеграла Фур'є збігаються зі значеннями функції $f(x)$. У точках x, що є точками розриву першого роду, є справедливою рівність

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega(t-x)dt\right)d\omega=\frac{1}{2}(f(x-0)+f(x+0)). \qquad (98)$$

Зважаючи на парність функції $\cos\omega(t-x)$ формулу (97) зручно записувати у вигляді

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega(t-x)dt\right)d\omega, \qquad (99)$$

а формулу (98) у вигляді

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega(t-x)dt\right)d\omega=\frac{1}{2}(f(x-0)+f(x+0)). \qquad (100)$$

2 Інтеграл Фур'є для парних та непарних функцій

2.1 Інтеграл Фур'є для парних функцій

Нехає функція $f(x)$ є парною функцією, яка може бути подана інтегралом Фур'є.

Запишемо рівність (97) у вигляді

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega t dt\right)\cos\omega x d\omega+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\omega t dt\right)\sin\omega x d\omega. \qquad (101)$$

Внутрішній інтеграл у другому доданку є інтегралом від непарної функції, оскільки $f(t)$ – парна функція, а $\sin\omega t$ – непарна функція. Оскільки межі інтегрування є симетричними, то такий інтеграл дорівнює нулю.

Таким чином, інтеграл Фур'є для парної функції має вигляд

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega t dt\right)\cos\omega x d\omega. \qquad (102)$$

Оскільки

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega t dt = 2\int\limits_{0}^{+\infty} f(t)\cos\omega t dt$$

як інтеграл від парної функції у симетричних межах, то

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\left(\int\limits_{0}^{+\infty} f(t)\cos\omega t dt\right)\cos\omega x d\omega. \qquad (103)$$

2.2 Інтеграл Фур'є для непарних функцій

Нехай функція $f(x)$ є непарною функцією, яка може бути подана інтегралом Фур'є.

Будемо виходити з формули (101). Внутрішній інтеграл у першому доданку як інтеграл з симетричними межами від непарної функції дорівнює нулю.

Тоді інтеграл Фур'є для непарної функції є таким:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\left(\int\limits_{0}^{+\infty} f(t)\sin\omega t dt\right)\sin\omega x d\omega. \qquad (104)$$

Приклади до пунктів 1 – 2

Приклад 22. Задано неперіодичну функцію

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < -\pi; \\ 6x + 4, & \text{якщо } -\pi \le x \le \pi; \\ 0, & \text{якщо } \pi < x. \end{cases}$$

Знайти інтеграл Фур'є для функції $f(x)$ у дійсній формі.

Р о з в ' я з а н н я

Задана функція задовольняє умови існування інтеграла Фур'є. Будемо користуватись поданням (97).

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}(6t+4)\cos\omega(t-x)dt\right)d\omega = \begin{bmatrix} U = 6t+4; & dU = 6dx \\ dV = \cos\omega(t-x)dt; & V = \dfrac{1}{\omega}\sin\omega(t-x) \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\left(\frac{6t+4}{\omega}\sin\omega(t-x)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{6}{\omega}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin\omega(t-x)dt\right)d\omega =$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{6\pi+4}{\omega}\sin\omega(\pi-x)-\frac{-6\pi+4}{\omega}\sin\omega(-\pi-x)+\frac{6}{\omega^2}\cos\omega(t-x)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}\right)d\omega=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{6\pi+4}{\omega}\sin\omega(\pi-x)+\frac{-6\pi+4}{\omega}\sin\omega(\pi+x)+\frac{6}{\omega^2}\cos\omega(\pi-x)-\right.$$

$$\left.-\frac{6}{\omega^2}\cos\omega(\pi+x)\right)d\omega=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{6\pi}{\omega}\sin\omega(\pi-x)+\frac{4}{\omega}\sin\omega(\pi-x)-\frac{6\pi}{\omega}\sin\omega(\pi+x)+\right.$$

$$\left.+\frac{4}{\omega}\sin\omega(\pi+x)+\frac{6}{\omega^2}\cos\omega(\pi-x)-\frac{6}{\omega^2}\cos\omega(\pi+x)\right)d\omega=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{6\pi}{\omega}\sin\pi\omega\cos\omega x-\frac{6\pi}{\omega}\cos\pi\omega\sin\omega x+\frac{4}{\omega}\sin\pi\omega\cos\omega x-\frac{4}{\omega}\sin\omega x\cos\pi\omega-\right.$$

$$-\frac{6\pi}{\omega}\sin\pi\omega\cos\omega x-\frac{6\pi}{\omega}\cos\pi\omega\sin\omega x+\frac{4}{\omega}\sin\pi\omega\cos\omega x+$$

$$+\frac{4}{\omega}\sin\omega x\cos\pi\omega+\frac{6}{\omega^2}\cos\pi\omega\cos\omega x+\frac{6}{\omega^2}\sin\pi\omega\sin\omega x-$$

$$\left.-\frac{6}{\omega^2}\cos\pi\omega\cos\omega x+\frac{6}{\omega^2}\sin\pi\omega\sin\omega x\right)d\omega,\ \text{де}\ \omega\neq 0.$$

Після спрощення отримаємо подання функції $f(x)$ через інтеграл Фур’є у дійсній формі

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}\left(-\frac{3}{\omega}\cos\pi\omega\sin\omega x+\frac{2}{\omega}\sin\pi\omega\cos\omega x+\frac{3}{\omega^2}\sin\pi\omega\sin\omega x\right)d\omega,$$

де $\omega\neq 0$, $x\neq\pm\pi$.

Відповідь:

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}\left(-\frac{3}{\omega}\cos\pi\omega\sin\omega x+\frac{2}{\omega}\sin\pi\omega\cos\omega x+\frac{3}{\omega^2}\sin\pi\omega\sin\omega x\right)d\omega,$$

де $\omega\neq 0$, $x\neq\pm\pi$.

Приклад 23. Функцію

$$f(x)=\begin{cases}\cos x,\ \text{якщо}\ |x|\le\dfrac{\pi}{2};\\[2mm] 0,\quad \text{якщо}\ |x|>\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$$

подати інтегралом Фур’є у дійсній формі.

Р о з в ’ я з а н н я

Задана функція задовольняє умови існування інтеграла Фур’є та є парною функцією.

Будемо користуватись формулою (103).

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cos\omega t dt\right)\cos\omega x\, d\omega=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos(1+\omega)t+\cos(1-\omega)\right)t dt\right)\cos\omega x\, d\omega=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+\omega}\sin(1+\omega)t+\frac{1}{1-\omega}\sin(1-\omega)t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\omega x\, d\omega=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+\omega}\sin(1+\omega)\frac{\pi}{2}+\frac{1}{1-\omega}\sin(1-\omega)\frac{\pi}{2}\right)\cos\omega x d\omega=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(1+\omega)\frac{\pi}{2}-\omega\sin(1+\omega)\frac{\pi}{2}+\sin(1-\omega)\frac{\pi}{2}+\omega\sin(1-\omega)\frac{\pi}{2}}{1-\omega^2}\cos\omega x\, d\omega=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1-\omega^2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\omega\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\omega\right)+\right.$$

$$\left.+\omega\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\omega\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\omega\right)\right)\right)\cos\omega x\, d\omega=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1-\omega^2}\left(\left(\cos\frac{\pi\omega}{2}+\cos\frac{\pi\omega}{2}\right)+\omega\left(\cos\frac{\pi\omega}{2}-\cos\frac{\pi\omega}{2}\right)\right)\cos\omega x\, d\omega.$$

Остаточно маємо:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1-\omega^2}\cos\frac{\pi\omega}{2}\cos\omega x\, d\omega,$$

де $x\neq\pm\frac{\pi}{2}$, $\omega\neq\pm1$.

В і д п о в і д ь: $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1-\omega^2}\cos\frac{\pi\omega}{2}\cos\omega x\, d\omega$,

де $x\neq\pm\frac{\pi}{2}$, $\omega\neq\pm1$.

Приклад 24. Функцію

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } -\infty < x < 1;\\ x, & \text{якщо } -1 \le x \le 1;\\ 0, & \text{якщо } \quad 1 < x < -\infty,\end{cases}$$

подати у вигляді інтеграла Фур'є у дійсній формі.

Р о з в ' я з а н н я

Задана функція задовольняє умови існування інтеграла Фур'є та є непарною функцією на проміжку [–1; 1].

Будемо користуватись формулою (104).

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^1 t\sin\omega t dt\right)\sin\omega x d\omega=\begin{bmatrix} U=t; & dU=dt \\ dV=\sin\omega t dt; & V=-\dfrac{1}{\omega}\cos\omega t\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(-\frac{t}{\omega}\cos\omega t\Big|_0^1+\frac{1}{\omega}\int_0^1\cos\omega t dt\right)\sin\omega x d\omega=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(-\frac{1}{\omega}\cos\omega+\frac{1}{\omega^2}\sin\omega t\Big|_0^1\right)\sin\omega x d\omega=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(-\frac{1}{\omega}\cos\omega+\frac{1}{\omega^2}\sin\omega\right)\sin\omega x d\omega,$$

де $\omega\ne 0,\ x\ne 1$.

В і д п о в і д ь: $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(-\frac{1}{\omega}\cos\omega+\frac{1}{\omega^2}\sin\omega\right)\sin\omega x d\omega$

де $\omega\ne 0,\ x\ne 1$.

3 Інтеграл Фур'є у комплексній формі

Нехай функція $f(x)$ подана інтегралом Фур'є (99):

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega(t-x)dt\right)d\omega.$$

Скористаємось формулою

$$\cos\omega(t-x)=\frac{1}{2}\left(e^{i\omega(t-x)}+e^{-i\omega(t-x)}\right).$$

Тоді

$$f(x)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\left(e^{i\omega(t-x)}+e^{-i\omega(t-x)}\right)dt\right)d\omega$$

або

$$f(x)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{i\omega(t-x)}dt\right)d\omega+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega(t-x)}dt\right)d\omega. \qquad (105)$$

Розглянемо другий з інтегралів правої частини рівності (3.220)

$$I=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega(t-x)}dt\right)d\omega=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt\right)e^{i\omega x}d\omega=$$

$$=\left[\begin{array}{ll} \omega=-z; & \begin{array}{|c|c|}\hline \omega & z \\ \hline +\infty & -\infty \\ \hline -\infty & +\infty \\ \hline \end{array} \\ d\omega=-dz; & \end{array}\right]=-\int\limits_{+\infty}^{-\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{izt}dt\right)e^{-izt}dz=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{izt}dz\right)\cdot e^{-izx}dz=$$

$$=\left[\begin{array}{ll} z=\omega\,; & \begin{array}{|c|c|}\hline z & \omega \\ \hline +\infty & +\infty \\ \hline -\infty & -\infty \\ \hline \end{array} \\ dz=d\omega\,; & \end{array}\right]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\omega t}dt\right)e^{-i\omega x}d\omega.$$

Повертаючись до рівності (105), отримаємо:

$$f(x)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\omega t}dt\right)e^{-i\omega x}d\omega+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\omega t}dt\right)e^{-i\omega x}d\omega,$$

звідки

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\omega t}dt\right)e^{-i\omega x}d\omega. \qquad (106)$$

Інтеграл у правій частині називається *інтегралом Фур'є* у комплексній формі для функції $f(x)$, а формула (106) називається *розвиненням функції* $f(x)$ в інтеграл Фур'є у комплексній формі.

ЗАУВАЖЕННЯ. У процесі перетворень було показано, що другий інтеграл рівності (105) можна привести до такого ж вигляду, який має перший інтеграл. Можна і перший інтеграл привести до вигляду, який має другий інтеграл.

У такому разі отримаємо

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt\right)e^{i\omega x}d\omega. \qquad (107)$$

Інтеграл у правій частині також називається інтегралом Фур'є у комплексній формі, а формула (107) є розвиненням функції $f(x)$ в інтеграл Фур'є у комплексній формі.

Приклади до пункту 3

Приклад 25. Задано неперіодичну функцію

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad x<-\pi;\\ 6x+4, & \text{якщо} \quad -\pi\le x\le\pi;\\ 0, & \text{якщо} \quad x>\pi.\end{cases}$$

Знайти інтеграл Фур'є для функції $f(x)$ у комплексній формі.

Р о з в ' я з а н н я

Задана функція задовольняє умови існування інтеграла Фур'є. Будемо користуватись поданням (106)

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}(6t+4)e^{i\omega t}dt\right)e^{-i\omega x}d\omega=\begin{bmatrix}U=6t+4; & dU=6dt\\ dV=e^{i\omega t}dt; & V=-\dfrac{i}{\omega}e^{i\omega t}t\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(-\frac{6t+4}{\omega}ie^{i\omega t}\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{6}{\omega}i\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{i\omega t}dt\right)e^{-i\omega x}d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(-\frac{6\pi+4}{\omega}ie^{i\omega\pi}+\frac{-6\pi+4}{\omega}ie^{-i\omega\pi}+\frac{6}{\omega^2}e^{i\omega t}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)e^{-i\omega x}d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(-\frac{6\pi+4}{\omega}ie^{i\omega\pi}+\frac{-6\pi+4}{\omega}ie^{-i\omega\pi}+\frac{6}{\omega^2}e^{i\omega\pi}-\frac{6}{\omega^2}e^{-i\omega\pi}\right)e^{-i\omega x}d\omega,$$

де $\omega\neq 0$, $x\neq\pm\pi$.

Після спрощення отримаємо подання функції $f(x)$ через інтеграл Фур'є у комплексній формі

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(-\frac{6\pi}{\omega}(e^{i\omega\pi}+e^{-i\omega\pi})i-\frac{4}{\omega}(e^{i\omega\pi}-e^{-i\omega\pi})i+\frac{6}{\omega^2}(e^{i\omega\pi}-e^{-i\omega\pi})\right)e^{-i\omega x}d\omega,$$

де $\omega\neq 0$, $x\neq\pm\pi$.

Від інтеграла Фур'є у комплексній формі можна перейти до інтеграла Фур'є у дійсній формі і навпаки.

Покажемо, що знайдений інтеграл Фур'є у комплексній формі може бути приведений до інтеграла Фур'є у дійсній формі для цієї ж функції (див. приклад 25).

У процесі перетворень будемо користуватись формулами Ейлера, а саме:

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi,\;\; 2\cos\varphi=e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}:$$

$$e^{-i\varphi}=\cos\varphi-i\sin\varphi,\;\; 2i\sin\varphi=e^{i\varphi}-e^{-i\varphi};$$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(-\frac{6\pi}{\omega}2i\cos\omega\pi+\frac{4}{\omega}2\sin\omega\pi+\frac{6}{\omega^2}2i\sin\omega\pi\right)e^{-i\omega x}d\omega,$$

де $\omega\neq 0$.

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(-\frac{3\pi}{\omega}i\cos\omega\pi+\frac{2}{\omega}\sin\omega\pi+\frac{3}{\omega^2}i\sin\omega\pi\right)(\cos\omega x-i\sin\omega x)d\omega,$$

де $\omega\neq 0$.

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(-\frac{3\pi}{\omega}i\cos\omega\pi\cos\omega x-\frac{3\pi}{\omega}\cos\omega\pi\sin\omega x+\frac{2}{\omega}\sin\omega\pi\cos\omega x-\right.$$

$$\left.-\frac{4}{\omega}i\sin\omega\pi\sin\omega x+\frac{3}{\omega^2}i\sin\omega\pi\cos\omega x+\frac{3}{\omega^2}\sin\omega\pi\sin\omega x\right)d\omega,$$

де $\omega\neq 0,\; x\neq\pm\pi$.

Запишемо останній інтеграл у вигляді суми двох інтегралів

$$f(x)=\frac{2i}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(-\frac{3\pi}{\omega}\cos\omega\pi\cos\omega x-\frac{2}{\omega}\sin\omega\pi\sin\omega x+\frac{3}{\omega^2}\sin\omega\pi\cos\omega x\right)d\omega+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(-\frac{3\pi}{\omega}\cos\omega\pi\sin\omega x+\frac{2}{\omega}\sin\omega\pi\cos\omega x+\frac{3}{\omega^2}\sin\omega\pi\sin\omega x\right)d\omega,$$

де $\omega\neq 0,\; x\neq\pm\pi$.

Отже, маємо

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\left(-\frac{3\pi}{\omega}\cos\omega\pi\sin\omega x+\frac{2}{\omega}\sin\omega\pi\sin\omega x+\frac{3}{\omega^2}\sin\omega\pi\cos\omega x\right)d\omega,$$

де $\omega\neq 0,\; x\neq\pm\pi$ (порівняйте з відповіддю до прикладу 22).

Користуючись формулами Ейлера отриманий результат можна привести до вигляду:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(-\frac{6\pi}{\omega}(e^{i\omega\pi}+e^{-i\omega\pi})i-\frac{4}{\omega}(e^{i\omega\pi}-e^{-i\omega\pi})i+\right.$$

$$\left.+\frac{6}{\omega^2}(e^{i\omega\pi}-e^{-i\omega\pi})\right)e^{-i\omega x}d\omega.$$

В і д п о в і д ь: $f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(-\frac{6\pi}{\omega}(e^{i\omega\pi}+e^{-i\omega\pi})i-\frac{4}{\omega}(e^{i\omega\pi}-e^{-i\omega\pi})i+\right.$

$$\left.+\frac{6}{\omega^2}(e^{i\omega\pi}-e^{-i\omega\pi})\right)e^{-i\omega x}d\omega,$$

де $\omega\neq 0,\; x\neq\pm\pi$.

Приклад 26. Функцію $f(x)$ задано графічно

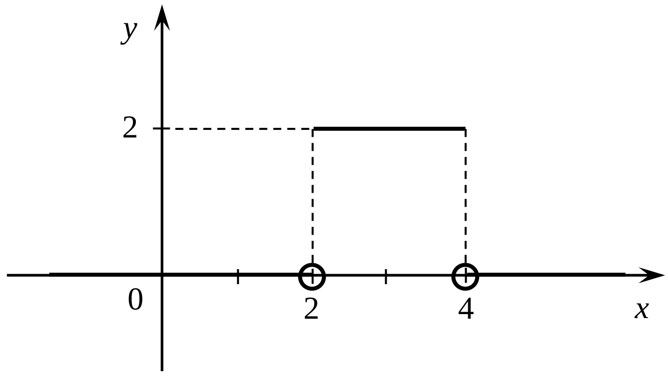


Рисунок до прикладу 26

Подати функцію $f(x)$ у вигляді інтеграла Фур'є у комплексній формі.

Р о з в ' я з а н н я

Запишемо аналітичне завдання функції $f(x)$:

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } \quad x<2;\\ 2, \text{ якщо } \ 2\le x\le 4;\\ 0, \text{ якщо } \quad 4<x.\end{cases}$$

Будемо користуватись формулою (106).

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{2}^{4}2e^{i\omega t}dt\right)e^{-i\omega x}d\omega=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(-\frac{i}{\omega}e^{i\omega t}\Big|_{2}^{4}\right)e^{-i\omega x}d\omega=$$

$$=-\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\omega}(e^{4i\omega}-e^{2i\omega}\right)e^{-i\omega x}d\omega,$$

де $\omega\neq 0,\ x\neq 2,\ x\neq 4$.

Отриманий вираз можна спростити:

$$f(x)=-\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\omega}(\cos 4\omega+i\sin 4\omega-\cos 2\omega-i\sin 2\omega)e^{-i\omega x}d\omega=$$

$$=-\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\omega}((\cos 4\omega-\cos 2\omega)+i(\sin 4\omega-\sin 2\omega))e^{-i\omega x}d\omega=$$

$$=-\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\omega}(-2\sin 3\omega\sin\omega+2i\sin\omega\cos 3\omega))e^{-i\omega x}d\omega=$$

$$=\frac{2i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}(\sin 3\omega-i\cos 3\omega)e^{-i\omega x}d\omega=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}(\cos 3\omega+i\sin 3\omega)e^{-i\omega x}d\omega=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\cdot e^{i3\omega}e^{-i\omega x}d\omega=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\cdot e^{i(3-x)\omega}d\omega,$$

де $\omega\neq 0,\ x\neq 2,\ x\neq 4$.

Отже, маємо

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\cdot e^{i(3-x)\omega}d\omega.$$

Відповідь: $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\sin\omega}{\omega}\cdot e^{i(3-x)\omega}d\omega,$

де $\omega\neq 0,\ x\neq 2,\ x\neq 4$.

4 Перетворення Фур'є у дійсній формі

Нехай функція $f(x)$ задовольняє умови за яких вона може бути подана інтегралом Фур'є.

Будемо виходити з формули (97) та запишемо її у вигляді

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega t\,dt\right)\cos\omega x\,d\omega+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\omega t\,dt\right)\sin\omega x\,d\omega. \qquad (108)$$

Введемо позначення для внутрішніх інтегралів:

$$\begin{cases} A(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega t\,dt; \\ B(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\omega t\,dt. \end{cases} \qquad (109)$$

Запишемо функцію $f(x)$ з урахуванням цих позначень:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}(A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x)d\omega. \qquad (110)$$

Формули (109) та (110) називаються *прямим* та *оберненим перетворенням Фур'є* у дійсній формі.

Формула (110) дає розвинення функції $f(x)$ на гармоніки, частоти яких неперервно змінюються від 0 до ∞.

Закон розподілу амплітуд та початкових фаз у залежності від частоти описується функціями $A(\omega)$ та $B(\omega)$.

5. Перетворення Фур'є для парних та непарних функцій

5.1 Косинус-перетворення Фур'є

Нехай функція $f(x)$, що подана формулами (101), є парною функцією.

У такому разі $B(\omega)=0$ як інтеграл від непарної функції з симетричними межами інтегрування. При цьому перетворення Фур'є набуває вигляду

$$\begin{cases} F_c(\omega)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\cos\omega t dt; \\ f(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_0^{+\infty} F_c(\omega)\cos\omega x d\omega. \end{cases} \tag{111}$$

та називається прямим та оберненим косинус-перетворенням Фур'є відповідно.

5.2 Синус-перетворення Фур'є

Нехай функція $f(x)$, що подана формулами (101) є непарною функцією. У такому разі $A(\omega) = 0$ як інтеграл від непарної функції у симетричних межах.

При цьому перетворення Фур'є набуває вигляду

$$\begin{cases} F_s(\omega)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\sin\omega t dt; \\ f(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_0^{+\infty} F_s(\omega)\sin\omega x d\omega. \end{cases} \tag{112}$$

та називається прямим та оберненим синус-перетворенням Фур'є відповідно.

Приклади до пунктів 4 – 5

Приклад 27. Задано неперіодичну функцію

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x<-\pi; \\ 6x+4, & \text{якщо} \quad -\pi\le x\le\pi; \\ 0, & \text{якщо} \quad \pi<x. \end{cases}$$

Знайти пряме та обернене перетворення Фур'є у дійсній формі для цієї функції.

Р о з в ' я з а н н я

Задана функція задовольняє умови існування інтеграла Фур'є.

Пряме та обернене перетворення Фур'є будемо шукати за формулами (109).

$$A(\omega)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega t dt, \; B(\omega)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\omega t dt,$$

$$A(\omega)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{+\pi}(6t+4)\cos\omega t dt = \begin{bmatrix} U=6t+4; & dU=6dt \\ dV=\cos\omega t dt; & V=\dfrac{1}{\omega}\sin\omega t \end{bmatrix} =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{6t+4}{\omega}\sin\omega t\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{6}{\omega}\int_{-\pi}^{\pi}\sin\omega t dt\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{6\pi+4}{\omega}\sin\omega\pi+\frac{-6\pi+4}{\omega}\sin\omega\pi+\frac{6}{\omega^2}\cos\omega t\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{8}{\omega}\sin\omega\pi,$$

де $\omega\neq 0,\ x\neq\pm\pi$.

$$B(\omega)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{+\pi}(6t+4)\sin\omega t dt=\begin{bmatrix} U=6t+4; & dU=6dt \\ dV=\sin\omega t dt; & V=-\dfrac{1}{\omega}\cos\omega t\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(-\frac{6t+4}{\omega}\cos\omega t\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{6}{\omega}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\omega t dt\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(-\frac{6\pi+4}{\omega}\cos\omega\pi+\frac{-6\pi+4}{\omega}\cos\omega\pi+\frac{6}{\omega^2}\sin\omega t\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(-\frac{12\pi}{\omega}\cos\omega\pi+\frac{12}{\omega^2}\sin\omega\pi\right),$$

де $\omega\neq 0,\ x\neq\pm\pi$.

Підставляємо $A(\omega)$ та $B(\omega)$ у формулу (110), маємо

$$\begin{cases} A(\omega)=\dfrac{8}{\omega\sqrt{\pi}}\sin\omega\pi; \\ B(\omega)=\dfrac{12}{\omega\sqrt{\pi}}(-\pi\cos\omega\pi+\dfrac{1}{\omega}\sin\omega\pi); \\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{8}{\omega\sqrt{\pi}}\sin\omega\pi\cos\omega x+\frac{12}{\omega\sqrt{\pi}}(-\pi\cos\omega\pi+\frac{1}{\omega}\sin\omega\pi)\sin\omega x\right)d\omega, \end{cases}$$

де $\omega\neq 0,\ x\neq\pm\pi$.

ЗАУВАЖЕННЯ. Якщо провести деякі спрощення в останній формулі, то отримаємо інтеграл Фур'є для заданої функції у дійсній формі. Порівняйте з розв'язком прикладу 25.

В і д п о в і д ь :

$$\begin{cases} A(\omega)=\dfrac{8}{\omega\sqrt{\pi}}\sin\omega\pi; \\ B(\omega)=\dfrac{12}{\omega\sqrt{\pi}}(-\pi\cos\omega\pi+\dfrac{1}{\omega}\sin\omega\pi); \\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{8}{\omega\sqrt{\pi}}\sin\omega\pi\cos\omega x+\frac{12}{\omega\sqrt{\pi}}(-\pi\cos\omega\pi+\frac{1}{\omega}\sin\omega\pi)\sin\omega x\right)d\omega, \end{cases}$$

де $\omega\neq 0,\ x\neq\pm\pi$.

Приклад 28. Знайти перетворення Фур'є у дійсній формі для функції

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad x<-\dfrac{\pi}{a};\\ \sin ax, & \text{якщо} \quad -\dfrac{\pi}{a}\le x\le \dfrac{\pi}{a};\\ 0, & \text{якщо} \quad \dfrac{\pi}{a}<x.\end{cases}$$

Р о з в ' я з а н н я .

Задана функція на проміжку $\left[-\frac{\pi}{a};\frac{\pi}{a}\right]$ є непарною функцією та задовольняє умови існування інтеграла Фур'є. Будемо шукати перетворення Фур'є за формулами (112).

$$F_S(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin at\sin\omega t dt=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos(a-\omega)t-\cos(a+\omega t)\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\sin(a-\omega)t}{a-\omega}-\frac{\sin(a+\omega)t}{a+\omega}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1}{a-\omega}\sin\left(\pi-\frac{\pi\omega}{a}\right)-\frac{1}{a+\omega}\sin\left(\pi+\frac{\pi\omega}{a}\right)\right)=\frac{2a\sin\frac{\pi\omega}{a}}{\sqrt{2\pi}(a^2-\omega^2)},$$

де $\omega\ne\pm a,\ x\ne\pm\frac{\pi}{a}$.

Отже, маємо

$$\begin{cases}F_S(\omega)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{a\sin\frac{\pi\omega}{a}}{(a^2-\omega^2)};\\ f(x)=\dfrac{2}{\pi}a\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{a^2-\omega^2}\sin\frac{\pi\omega}{a}\sin\omega x\,d\omega,\end{cases}$$

де $\omega\ne\pm a,\ x\ne\pm\frac{\pi}{a}$.

В і д п о в і д ь:

$$\begin{cases} F_s(\omega) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \dfrac{a \sin \dfrac{\pi\omega}{a}}{(a^2 - \omega^2)}; \\ f(x) = \dfrac{2}{\pi} a \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{a^2 - \omega^2} \sin \dfrac{\pi\omega}{a} \sin \omega x \, d\omega, \end{cases}$$

де $\omega \neq \pm a, \ x \neq \pm \dfrac{\pi}{a}$.

Приклад 29. Знайти косинус-перетворення Фур'є для функції

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{якщо} \quad 0 \leq x \leq 2; \\ 0, & \text{якщо} \quad 2 < x. \end{cases}$$

Р о з в ' я з а н н я

Оскільки задана функція визначена на проміжку $[0; +\infty)$, продовжимо цю функцію у парний спосіб на проміжок $(-\infty; 0)$. Отримана функція задовольняє умови існування інтеграла Фур'є.

Будемо користуватись формулами (111):

$$F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^2 3\cos\omega t dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{3}{\omega} \sin \omega t \Big|_0^2 = \frac{3}{\omega} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin 2\omega,$$

де $\omega \neq 0, \ x \neq 2$.

Тоді

$$f(x) = \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \right)^2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2\omega}{\omega} \cos\omega x d\omega.$$

Отже, маємо

$$\begin{cases} F_c(\omega) = \dfrac{3}{\omega} \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \sin 2\omega; \\ f(x) = \dfrac{6}{\pi} \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin 2\omega}{\omega} \cos\omega x d\omega, \end{cases}$$

де $\omega \neq 0, \ x \neq 2$.

В і д п о в і д ь:

$$\begin{cases} F_c(\omega) = \dfrac{3}{\omega} \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \sin 2\omega, \\ f(x) = \dfrac{6}{\pi} \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin 2\omega}{\omega} \cos\omega x d\omega, \end{cases}$$

де $\omega \neq 0, \ x \neq 2$.

6 Перетворення Фур’є у комплексній формі

Нехай функція $f(x)$ задовольняє умови, за яких вона може бути подана інтегралом Фур’є.

Будемо виходити з формули (3.221) та запишемо її у вигляді:

$$\begin{cases} F(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\omega t}dt; \\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{-i\omega x}d\omega. \end{cases} \tag{113}$$

Формули (113) називаються відповідно *прямим та оберненим перетворенням Фур’є* у комплексній формі.

Розглянемо деякі особливості перетворення Фур’є:

1. Якщо порівняти першу та другу формули (113), то можна помітити, що ці формули мають схожу структуру, але невласний інтеграл з першої формули збігається у звичайному розумінні, а невласний інтеграл з другої формули збігається у розумінні головних значень. До того ж першу з формул (113) можна розуміти як визначення функцій $F(\omega)$, а друга з формул (113) являє собою подання інтеграла Фур’є в іншому вигляді. Цю формулу можна розглядати як твердження, що за одних і тих самих значень x функція $f(x)$ та інтеграл з правої частини формули збігається.

2. Якщо функція $f(x)$ є абсолютно інтегровною функцією, то функція $F(\omega)$ є обмеженою неперервною функцією, яка прямує до нуля, коли $|\omega| \to \infty$.

3. Перетворення Фур’є $F(\omega)$ є лінійним оператором, тобто для будь-яких λ_1, λ_2

$$F(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2)=\lambda_1 F(f_1)+\lambda_2 F(f_2).$$

Якщо A – це лінійний оператор, то для використання цього оператора важливо знати його власні функції, тобто такі функції φ, що $A\varphi = \lambda\varphi$.

Власними функціями перетворення Фур’є є функції

$$\varphi_n(x)=\omega_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}},$$

де $\omega_n(x)$ – многочлени спеціального виду n = 1; 2; 3; … . Такі функції називається *функціями Ерміта*.

Якщо $f_1(t)$ та $f_2(t)$ – власні функції перетворення Фур'є, які є інтегровними у інтервалі $(-\infty; +\infty)$, то справедливою є рівність

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(x-\tau) d\tau,$$

при цьому функція $f(x)$ *називається згорткою* і позначається як $f_1 * f_2$ або $f_1 \circ f_2$ Для перетворення Фур'є справедливою є рівність

$$F(f_1 * f_2) = F(f_1) F(f_2).$$

Приклади до пункту 6

Приклад 30. Знайти інтегральне перетворення Фур'є у комплексній формі для функції

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < -1; \\ 1, & \text{якщо } -1 \le x \le 1; \\ 0, & \text{якщо } 1 < x. \end{cases}$$

Р о з в ' я з а н н я

Задана функція задовольняє умови, за яких існує інтеграл Фур'є.

Будемо користуватись формулами (113).

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{i}{\omega} e^{-i\omega t} \Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{i}{\omega} (e^{-i\omega} - e^{i\omega}).$$

Тоді

$$f(x) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega} - e^{i\omega}}{\omega} e^{i\omega x} d\omega,$$

де $\omega \ne 0,\ x \ne \pm 1$.

Отже, маємо

$$\begin{cases} F(\omega) = \dfrac{i}{\omega\sqrt{2\pi}} (e^{-i\omega} - e^{i\omega}); \\ f(x) = \dfrac{i}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega} - e^{i\omega}}{\omega} e^{i\omega x} d\omega, \end{cases}$$

де $\omega \ne 0,\ x \ne \pm 1$.

В і д п о в і д ь:

$$\begin{cases} F(\omega) = \dfrac{i}{\omega\sqrt{2\pi}} (e^{-i\omega} - e^{i\omega}); \\ f(x) = \dfrac{i}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega} - e^{i\omega}}{\omega} e^{i\omega x} d\omega, \end{cases}$$

де $\omega \ne 0,\ x \ne \pm 1$.

Приклад 31. Знайти перетворення Фур'є у комплексній формі для функції

$$f(x)=\begin{cases}3, & \text{якщо} \quad -\infty < x < 0;\\ e^{-kx}, & \text{якщо} \quad 0 \le x < +\infty.\end{cases}$$

Р о з в ' я з а н н я

Задана функція задовольняє умови існування інтеграла Фур'є.

Будемо користуватись формулами (113):

$$F(\omega)=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int_0^{\infty} e^{-kt}e^{-i\omega t}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} e^{-t(k+i\omega)}dt=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{e^{-t(k+i\omega)}}{k+i\omega}\Bigg|_0^{\infty}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}(k+i\omega)}\cdot\frac{1}{e^{t(k+i\omega)}}\Bigg|_0^{\infty}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}(k+i\omega)}.$$

Тоді

$$f(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{k+i\omega}e^{i\omega x}d\omega.$$

Отже, маємо

$$\begin{cases}F(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}(k+i\omega)};\\ f(x)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{k+i\omega}e^{i\omega x}d\omega,\end{cases}$$

де $x \neq 0$.

В і д п о в і д ь:

$$\begin{cases}F(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}(k+i\omega)};\\ f(x)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{k+i\omega}e^{i\omega x}d\omega,\end{cases}$$

де $x \neq 0$.

7 Спектральні характеристики інтеграла Фур'є

У електротехнічних курсах пряме та обернене перетворення Фур'є досить часто розглядають у такому вигляді:

$$\begin{cases} S(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt; \\ f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{i\omega x} d\omega. \end{cases} \tag{114}$$

Функція $S(\omega)$ називається *спектральною функцією інтеграла Фур'є* або *спектральною щільністю*.

Модуль спектральної функції $|S(\omega)|$ називається амплітудно-частотним спектром інтеграла Фур'є (рис. 15).

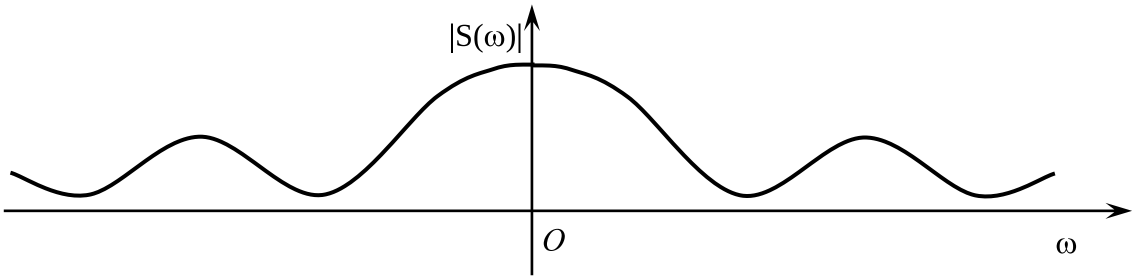


Рисунок 15

Квадрат модуля спектральної функції $|S(\omega)|^2$ називається *спектральною щільністю енергії* або *спектром енергії*.

Нормалізованою енергією E інтеграла Фур'є називається *така енергія, яка визначаються енергією*, що *розсіюється струмом* $f(x)$, який протікає через опір в 1 Ом.

Нормалізована енергія E знаходиться за формулою:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(\omega)|^2 d\omega. \tag{115}$$

Функція $\Phi(\omega)$ називається фазовим спектром інтеграла Фур'є (рис. 16). Фазовий спектр визначається формулою

$$\Phi(\omega) = -\arg S(\omega)$$

або

$$\Phi(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)},$$

де $U(\omega) = \operatorname{Re} S(\omega), V(\omega) = \operatorname{Im} S(\omega)$.

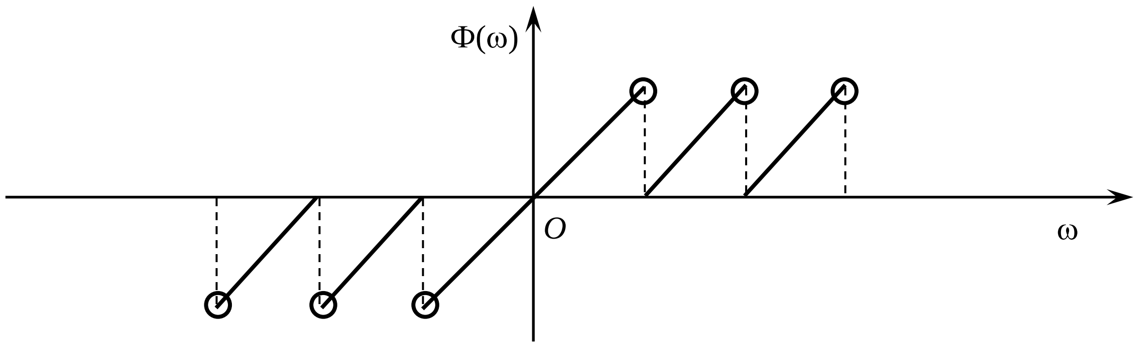


Рисунок 16

Графіки амплітудного спектра $|S(\omega)|$ та фазового спектра $\Phi(\omega)$ для інтеграла Фур'є являють собою обвідні до відповідних спектральних характеристик ряду Фур'є.

Спектральні характеристики інтеграла Фур'є відіграють значну роль у теорії сигналів.

Ряди Фур'є та їхні спектральні характеристики являють собою математичну модель детермінованих періодичних сигналів.

Інтеграл Фур'є та його спектральні характеристики являють собою математичну модель детермінованих неперіодичних сигналів.

Досить часто часове подання $f(t)$ сигнала буває складним, а його спектральна функція $S(\omega)$ може бути значно простішою.

До того ж , спектральне подання сигналів дає можливість проводити аналіз проходження сигналів через широкий клас електротехнічних, радіотехнічних кіл та систем.

Приклади до пункту 7

Приклад 32. Знайти спектральну функцію інтеграла Фур'є для функції

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x < -1; \\ x, & \text{якщо} \quad -1 \le x \le 1; \\ 0, & \text{якщо} \quad 1 < x. \end{cases}$$

Р о з в ' я з а н н я

Задана функція задовольняє умови існування інтеграла Фур'є.
Користуємось формулою

$$S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt;$$

$$S(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-1}^{+1} te^{-i\omega t}dt=\left[\begin{matrix} U=t; & dU=dt \\ dV=e^{-i\omega t}dt; & V=\dfrac{i}{\omega}e^{-i\omega t}\end{matrix}\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{it}{\omega}e^{-i\omega t}\Big|_{-1}^{1}-\frac{i}{\omega}\int\limits_{1}^{1}e^{-i\omega t}dt\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{i}{\omega}e^{-i\omega}+\frac{i}{\omega}e^{i\omega}+\frac{i}{i\omega^2}e^{-i\omega t}\Big|_{-1}^{1}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{i}{\omega}(e^{-i\omega}+e^{i\omega})+\frac{i}{\omega^2}(e^{-i\omega}-e^{i\omega})\right).$$

Отже,

$$S(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{i}{\omega}(e^{-i\omega}+e^{i\omega})+\frac{i}{\omega^2}(e^{-i\omega}-e^{i\omega})\right),$$

де $\omega\neq 0,\ x\neq\pm 1$.

В і д п о в і д ь: $S(\omega)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\dfrac{i}{\omega}(e^{-i\omega}+e^{i\omega})+\dfrac{i}{\omega^2}(e^{-i\omega}-e^{i\omega})\right)$,

де $\omega\neq 0,\ x\neq\pm 1$.

Приклад 33. Знайти спектральну щільність прямокутного неперіодичного відеоімпульса, заданого графічно

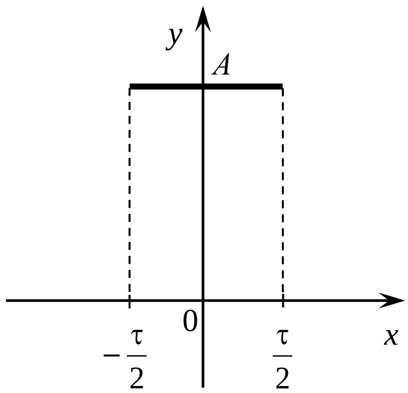


Рисунок до прикладу 33

Р о з в ’ я з а н н я

$$S(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} Ae^{-i\omega t}dt.$$

$$S(\omega)=\frac{A}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{i}{\omega}e^{-i\omega t}\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}=\frac{Ai}{\sqrt{2\pi}\omega}(e^{-i\omega\frac{\tau}{2}}-e^{i\omega\frac{\tau}{2}})=$$

$$=\frac{Ai}{\sqrt{2\pi}\omega}\left(\cos\frac{\omega\tau}{2}-i\sin\frac{\omega\tau}{2}-\cos\frac{\omega\tau}{2}-i\sin\frac{\omega\tau}{2}\right)=\frac{2Ai}{\sqrt{2\pi}\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2},$$

де $\omega\neq 0,\ x\neq\pm\dfrac{\pi}{2}$.

В і д п о в і д ь: $S(\omega)=\dfrac{2A}{\sqrt{2\pi}\omega}\sin\dfrac{\omega\tau}{2}$,

де $\omega\neq 0,\ x\neq\pm\dfrac{\pi}{2}$.

Приклад 34. Знайти спектральні характеристики неперіодичного імпульса

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad t<0;\\ t, & \text{якщо} \quad 0\le t<1;\\ 2-t, & \text{якщо} \quad 1\le t<2;\\ 0, & \text{якщо} \quad 2<t.\end{cases}$$

Р о з в ’ я з а н н я

1. Знаходимо спектральну щільність:

$$S(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^1 te^{-i\omega t}dt+\int_0^1(2-t)e^{-i\omega t}dt\right);$$

$$I_1=\int_0^1 te^{-i\omega t}dt=\begin{bmatrix} U=t; & dU=dt\\ dV=e^{-i\omega t}dt; & V=\frac{i}{\omega}e^{-i\omega t}\end{bmatrix}=\frac{it}{\omega}e^{-i\omega t}\Big|_0^1-\frac{i}{\omega}\int_0^1 e^{-i\omega t}dt=$$

$$=\frac{i}{\omega}e^{-i\omega}+\frac{1}{\omega^2}e^{-i\omega t}\Big|_0^1=\frac{i}{\omega}(\cos\omega-i\sin\omega)+$$

$$+\frac{1}{\omega^2}(e^{-i\omega}-1)=\frac{i}{\omega}\cos\omega+\frac{1}{\omega}\sin\omega+\frac{1}{\omega^2}\cos\omega-$$

$$-\frac{i}{\omega^2}\sin\omega-\frac{1}{\omega^2}=\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega+\frac{1}{\omega^2}\cos\omega-\frac{1}{\omega^2}\right)+i\left(\frac{1}{\omega}\cos\omega-\frac{1}{\omega^2}\sin\omega\right);$$

$$I_2=\int_1^2(2-t)e^{-i\omega t}dt=\begin{bmatrix} U=2-t; & dU=-dt\\ dV=e^{-i\omega t}dt; & V=\frac{i}{\omega}e^{-i\omega t}\end{bmatrix}=\frac{i(2-t)}{\omega}e^{-i\omega t}\Big|_1^2-\frac{i}{\omega^2 i}e^{-i\omega t}\Big|_1^2=$$

$$=-\frac{i}{\omega}e^{-i\omega}-\frac{1}{\omega^2}(e^{-2i\omega}-e^{-i\omega})=-\frac{i}{\omega}(\cos\omega-i\sin\omega)-$$

$$-\frac{1}{\omega^2}(\cos 2\omega-i\sin 2\omega)+\frac{1}{\omega^2}(\cos\omega-i\sin\omega)=$$

$$=\left(-\frac{i}{\omega}\sin\omega-\frac{1}{\omega^2}\cos 2\omega+\frac{1}{\omega^2}\cos\omega\right)+i\left(-\frac{1}{\omega}\cos\omega+\frac{1}{\omega^2}\sin 2\omega-\frac{1}{\omega^2}\sin\omega\right).$$

Тоді

$$S(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\omega^2}\big((2\cos\omega-\cos 2\omega-1)+i(\sin 2\omega-2\sin\omega)\big).$$

2. Знаходимо амплітудний спектр $|S(\omega)|$.

Спочатку знайдемо $|S(\omega)|^2$.

$$2\pi\cdot|S(\omega)|^2=\frac{1}{\omega^2}(2\cos\omega-\cos 2\omega-1)^2+\frac{1}{\omega^2}(\sin 2\omega-2\sin\omega)^2=$$

$$=\frac{1}{\omega^4}\big(4\cos^2\omega+\cos^2 2\omega+1+\sin^2 2\omega+$$

$$+4\sin^2\omega-4\cos\omega\cos 2\omega-4\cos\omega+2\cos 2\omega-$$

$$-4\sin\omega\sin 2\omega)=\frac{1}{\omega^4}(6+8\cos\omega+2\cos 2\omega)=$$

$$=\frac{2}{\omega^4}(\cos^2\omega-\sin^2\omega-4\cos\omega+3)=\frac{2}{\omega^4}(2\cos^2\omega-4\cos\omega+2)=$$

$$=\frac{4}{\omega^4}(\cos^2\omega-2\cos\omega+1)=\frac{4}{\omega^4}(1-\cos\omega)^2;$$

$$|S(\omega)|^2=\frac{2}{\pi\omega^4}(1-\cos\omega)^2,\quad |S(\omega)|^2=\frac{8}{\pi\omega^4}\sin^4\frac{\omega}{2}.$$

Звідси

$$|S(\omega)|=\frac{2\sqrt{2}\sin^2\frac{\omega}{2}}{\sqrt{\pi}\omega^2}.$$

Побудуємо графік функції $|S(\omega)|$.

ω	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π
$\lvert S(\omega)\rvert$	0,39	0,32	0,16	0,04	0	0,01	0,02	0,01	0

3. Знаходимо фазовий спектр

$$\Phi(\omega)=-\arg S(\omega);$$

або

$$\Phi(\omega)=-\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{Im}S(\omega)}{\operatorname{Re}S(\omega)}.$$

$$\Phi(\omega)=-\operatorname{arctg}\frac{\sin 2\omega-2\sin\omega}{2\cos\omega-\cos 2\omega-1}=-\operatorname{arctg}\frac{2\sin\omega\cos\omega-2\sin\omega}{2\cos\omega-2\cos^2\omega}=$$

$$=-\operatorname{arctg}\frac{2\sin\omega(\cos\omega-1)}{-2\cos\omega(\cos\omega-1)}=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\omega).$$

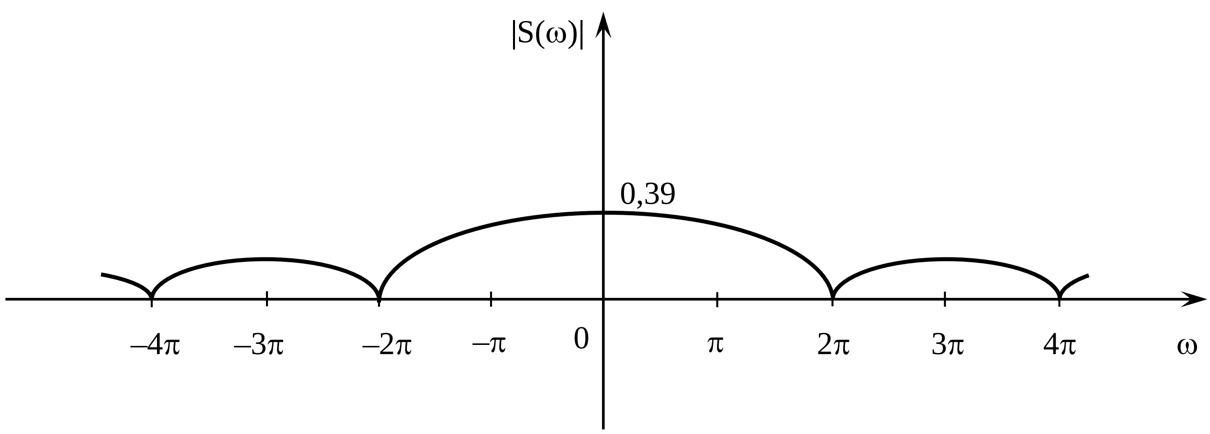


Рисунок 1 до прикладу 34

Як відомо,

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\omega)=\omega-n\pi,\ \text{якщо}\ \omega\in\left(n\pi-\frac{\pi}{2};\,n\pi+\frac{\pi}{2}\right),\ n\in Z\,.$$

Отже,

$$\Phi(\omega)=\omega-n\pi,\ \text{якщо}\ \omega\in\left(n\pi-\frac{\pi}{2};\,n\pi+\frac{\pi}{2}\right),\ n\in Z\,.$$

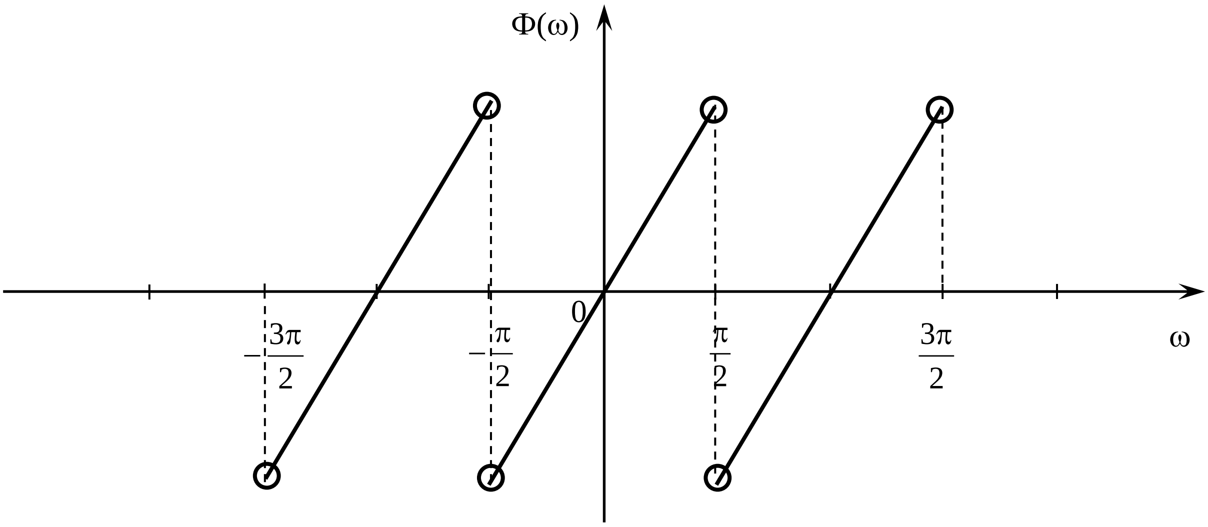


Рисунок 2 до прикладу 34

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що називається скалярним добутком функцій?
2. Що називається нормою функції?
3. За яких умов система функцій називається ортогональною системою функцій?
4. За яких умов система функцій називається нормованою системою функцій?
5. За яких умов система функцій називається ортонормованою системою функцій? Наведіть приклади ортогональної системи функцій.
6. Сформулюйте умови розвинення функцій у тригонометричний ряд Фур'є.
7. Сформулюйте особливості розвинення у ряд Фур'є періодичних функцій.
8. Сформулюйте особливості розвинення у ряд Фур'є неперіодичних функцій.
9. Сформулюйте особливості розвинення у ряд Фур'є парних функцій.
10. Сформулюйте особливості розвинення у ряд Фур'є непарних функцій.
11. Сформулюйте особливості розвинення у ряд Фур'є функції по косинусах.
12. Сформулюйте особливості розвинення у ряд Фур'є функції по синусах.
13. Запишіть ряд Фур'є у тригонометричній формі та його коефіцієнти.
14. Запишіть ряд Фур'є у комплексній формі та його коефіцієнти.
15. Який зв'язок існує між коефіцієнтами тригонометричного ряду Фур'є та коефіцієнтами ряду Фур'є у комплексній формі.
16. Сформулюйте спектральні характеристики тригонометричного ряду Фур'є.
17. Сформулюйте спектральні характеристики у комплексній формі.
18. Достатні ознаки розвинення функції у ряд Фур'є.
19. Яка функція називається гладкою на заданому сегменті?
20. Особливості розвинення у ряд Фур'є функції, визначеної на сегменті $[a; a + 2\pi]$.
22. Сформулюйте спектральні характеристики ряду Фур'є у комплексній формі.
23. Сформулюйте умови розвинення функції в інтеграл Фур'є.
24. Сформулюйте спектральні характеристики інтеграла Фур'є у дійсній формі.
25. Сформулюйте спектральні характеристики інтеграла Фур'є у комплексній формі.

ПЕРЕВІРНІ ТЕСТИ

№ 1. Задано функції $\varphi_1(x) = \sin 16x$, $\varphi_2(x) = \cos 48x$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin 16x \cdot \cos 48x dx = A.$$

Яке з тверджень є справедливим:

1) $A = 64$;

2) $A = 128\pi$;

3) $A = 0$;

4) інша відповідь?

№ 2. Задано функції $\varphi_1(x) = \sin 14\omega x$ та $\varphi_2(x) = \sin 50\omega x$.

$$\int_{-e}^{e} \sin 14\omega x \cdot \sin 50\omega x dx = A, \text{ де } e = \frac{\pi}{\omega}.$$

Яке з тверджень є справедливим:

1) $A = \pi$;

2) $A = 0$;

3) $A = 64\pi$;

4) інша відповідь?

№ 3. Задано функцію $\varphi(x) = \cos 12x$.

Яке з тверджень є справедливим: на сегменті $[-\pi; \pi]$ норма функції $\varphi(x)$ дорівнює

1) $\sqrt{\pi}$;

2) 2π;

3) 0;

4) інша відповідь?

№ 4. Задано функцію $\varphi(x) = \sin \dfrac{x}{15}$.

Яке з тверджень є справедливим: на сегменті $[-\pi; \pi]$ норма функції $\varphi(x)$ дорівнює

1) $\dfrac{1}{15}$;

2) $\frac{2}{15}$;

3) $\sqrt{\pi}$;

4) інша відповідь?

№ 5. Задано функції

$\varphi_1(x) = \sin 7x$; $\varphi_2(x) = \frac{1}{7}\sin 7x$; $\varphi_3(x) = \sqrt{7\pi}\sin 7x$; $\varphi_4(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 7x$;

$\varphi_5(x) = 7\sin 7x$; $\varphi_6(x) = 7\pi\sin 7x$.

Яке з тверджень є справедливим:

Нормованою є функція

1) $\varphi_3(x)$;

2) $\varphi_4(x)$;

3) $\varphi_1(x)$;

4) інша відповідь?

№ 6. На проміжку (–π; π) функцію $f(x) = x^2$ розвинено у тригонометричний ряд Фур'є.

Яке з тверджень є справедливим:

1) $a_0 = \frac{1}{3}$;

2) $a_0 = \pi^2$;

3) $a_0 = \frac{\pi^2}{3}$

4) інша відповідь?

№ 7. На проміжку (–π; π) функцію $f(x) = x^3$ розвинено у тригонометричний ряд Фур'є.

Яке з тверджень є справедливим:

1) π;

2) π^3;

3) 0;

4) інша відповідь?

№ 8. На проміжку (–π; π) функцію $f(x)=x^2$ розвинено у тригонометричний ряд Фур'є.

Яке з тверджень є справедливим:

1) $a_1=-4\sin x$;

2) $a_1=-4\cos x$;

3) $a_1 = 0$;

4) інша відповідь?

№ 9. На проміжку (–π; π) функцію $f(x)=x^3$ розвинено у тригонометричний ряд Фур'є.

Яке з тверджень є справедливим:

1) $a_1=\sin^3 x$;

2) $a_1=-12(6-\pi^2)\sin x$;

3) $a_1=25(4+\pi^2)\cos x$;

4) інша відповідь?

№ 10. На проміжку (–π; π) функцію $f(x)=\cos\alpha$ розвинено у тригонометричний ряд Фур'є.

Яке з тверджень є справедливим:

1) $\frac{2}{\pi\alpha}\sin\alpha\pi$;

2) $\frac{2}{\pi\alpha}\cos\alpha\pi$;

3) 0;

4) інша відповідь?

№ 11. На проміжку (0; 1) функцію $f(x)$ розвинено у тригонометричний ряд Фур'є.

Яке з тверджень є справедливим:

1) $a_0=1$;

2) $a_0=2$;

3) $a_0=\pi$;

4) інша відповідь?

№ 12. Функцію

$$f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi\le x<0;\\ 0, & 0<x\le\pi.\end{cases}$$

розвинено у тригонометричний ряд Фур'є.

Яке з тверджень є справедливим:

1) $a_0=4\pi$;

2) $a_0=\dfrac{\pi}{2}$;

3) $a_0=\pi$;

4) інша відповідь?

№ 13. Функцію

$$f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi\le x<0;\\ 0, & 0<x\le\pi.\end{cases}$$

розвинено у тригонометричний ряд Фур'є.

Яке з тверджень є справедливим:

1) $a_1=-\dfrac{\pi}{2}$;

2) $a_1=-\dfrac{2}{\pi}$;

3) $a_1=-\pi$;

4) інша відповідь?

№ 14. Функцію

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x<\pi;\\ -1, & \pi\le x\le 2\pi.\end{cases}$$

розвинено у комплексний ряд Фур'є.

Яке з тверджень є справедливим:

1) $c_3=\dfrac{1}{6\pi}\left(2e^{-3\pi i}-e^{-6\pi i}-1\right)$;

2) $c_3=6\pi\left(e^{-3\pi i}-e^{-\pi i}+1\right)$;

3) 0;

4) інша відповідь?

№ 15. Функцію $f(x)=x$ на проміжку (–π; π) розвинено у тригонометричний ряд Фур'є.

Яке з тверджень є справедливим:

1) $a_2 = b_2$;

2) $a_2 = 3b_2$;

3) $b_2 = 3a_2$;

4) інша відповідь?

№ 16. Функцію $f(x) = 4 + 6x$ розвинено у тригонометричний ряд Фур'є.

Яке з тверджень є справедливим:

1) $b_{12} = -\dfrac{1}{\pi}$;

2) $b_{12} = \dfrac{1}{\pi}$;

3) $b_2 = 0$;

4) інша відповідь?

№ 17. Функцію $f(x) = 4 + 6x$ розвинено у тригонометричний ряд Фур'є.

Яке з тверджень є справедливим:

1) $a_{24} = 16\pi$;

2) $a_{24} = \dfrac{\pi}{24}$;

3) $a_{24} = 0$;

4) інша відповідь?

№ 18. Функцію $f(x) = 2(2 + 3x)$ розвинено у комплексний ряд Фур'є.

Яке з тверджень є справедливим:

1) $c_6 = i$;

2) $c_6 = 6i$;

3) $c_6 = 0$;

4) інша відповідь?

№ 19. Функцію $f(x) = \begin{cases} -2x, \text{ якщо } -\pi < x \le 0, \\ 3x, \text{ якщо } \quad 0 < x \le \pi, \end{cases}$

розвинено у тригонометричний ряд Фур'є та знайдено суму ряду $S(x)$.

Яке з тверджень є справедливим:

1) $S(\pi)=\frac{5\pi}{2}$;

2) $S(\pi)=\frac{2}{5}\pi$;

3) $S(\pi)=2\pi$;

4) інша відповідь?

№ 20. Функцію $f(x) = x$ розвинено у тригонометричний ряд Фур'є на проміжку $[-\pi; \pi]$.

Яке з тверджень є справедливим:

1) $a_2+a_4+a_6=12$;

2) $a_2+a_4+a_6=0$;

3) $a_2+a_4+a_6=4$;

4) інша відповідь?

№ 21. Функцію $f(x)$ розвинено у тригонометричний ряд Фур'є на проміжку $[-\pi; \pi]$.

Яке з тверджень є справедливим:

1) $b_5=\frac{2}{5}$;

2) $b_5=\frac{3}{5}$;

3) $b_5=1$;

4) інша відповідь?

№ 22. Функцію $f(x) = 10 - x$ розвинено у тригонометричний ряд Фур'є на проміжку (5; 15).

Яке з тверджень є справедливим:

1) $b_6=\frac{5}{3\pi}$;

2) $b_6=\frac{3}{5\pi}$;

3) $b_6=\frac{5\pi}{3}$;

4) інша відповідь?

№ 23. Функцію $f(x) = 2x$ розвинено у тригонометричний ряд Фур'є на проміжку (0; 1).

Яке з тверджень є справедливим:

1) $b_3 = \frac{2}{3\pi}$;

2) $b_3 = -\frac{2}{3\pi}$;

3) $b_3 = \frac{2}{3}$;

4) інша відповідь?

№ 24. Функцію

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } 0 < x \le 5, \\ 0, \text{ якщо } 5 < x < \pi, \end{cases}$$

розвинено у тригонометричний ряд Фур'є по косинусах.

Яке з тверджень є справедливим:

1) $a_4 = \frac{1}{2\pi}$;

2) $a_4 = \frac{\sin 20}{2\pi}$;

3) $a_4 = \sin 20$;

4) інша відповідь?

№ 25. Косинусоїду з амплітудою i_0 та періодом $T = 2\pi$, що зрізана віссю $0x$, розвинено у тригонометричних ряд Фур'є.

Яке з тверджень є справедливим:

1) $a_0 = \frac{1}{\pi} i_0$;

2) $a_0 = i_0$;

3) $a_0 = \frac{1}{\pi}$;

4) інша відповідь?

ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ

1. Функцію $f(x)$, задану на сегментах $[a; b]$ та $[c; d]$:

1) розкласти у тригонометричний ряд Фур'є на сегменті $[a; b]$ та на сегменті $[c; d]$;

2) розкласти у ряд Фур'є по косинусах на сегменті $[0; b]$ або $[a; 0]$;

3) розкласти у ряд Фур'є по синусах на сегменті $[0; b]$ або $[a; 0]$.

№ варіанта	$f(x)$	a	b	c	d
1.01	$\frac{3}{4}x$	0	π	–2	3
1.02	$1-\frac{x}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	2	4
1.03	x^2+1	0	$\frac{\pi}{4}$	–1	1
1.04	$2+\frac{x}{3}$	0	2π	1	3
1.05	$1-x$	0	$\frac{\pi}{3}$	1	6
1.06	$\frac{x}{2}+1$	$-\pi$	0	3	4
1.07	$\frac{x}{3}$	0	3π	–2	5
1.08	$1+\frac{2}{3}x$	$-\frac{\pi}{2}$	0	–2	2
1.09	$1+2x$	-2π	0	2	6
1.10	$\frac{x}{2}+2$	$-\frac{\pi}{4}$	0	–2	1
1.11	$4+x$	$-\frac{\pi}{3}$	0	–2	2
1.12	$1-2x$	0	$\frac{\pi}{4}$	–3	2
1.13	$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	–3	3
1.14	$1+\frac{x}{3}$	0	π	2	4

1.15	x^2	$-\frac{\pi}{4}$	0	1	7
1.16	$4-x$	0	2π	2	4
1.17	$2+\frac{x}{2}$	0	$\frac{\pi}{3}$	–1	1
1.18	$2x-1$	$-\pi$	0	–2	4
1.19	$x-4$	0	$\frac{\pi}{6}$	–1	5
1.20	$\frac{x^2}{2}$	0	2π	–2	3
1.21	$x-\frac{2}{3}$	-2π	0	–2	1
1.22	$3x-1$	$-\frac{\pi}{2}$	0	–2	2
1.23	$1+\frac{x}{3}$	0	$\frac{2\pi}{3}$	2	4
1.24	$x+2$	$-\pi$	0	–2	2
1.25	$2+\frac{x}{3}$	0	π	–1	1

2. Функцію *f*(*x*), задану на сегменті [*a*; *b*]:

1) розкласти у ряд Фур'є у комплексній формі на сегменті [a; b];

2) розкласти у тригонометричний ряд Фур'є на сегменті [a; b];

3) від ряду Фур'є у комплексній формі перейти до ряду Фур'є у дійсній формі.

№ варіанта	$f(x)$	a	b
2.01	$\cos x$	0	2π
2.02	e^x	0	π
2.03	e^{-x}	0	$\frac{\pi}{2}$
2.04	$\sin x$	0	π
2.05	e^x	0	$\frac{\pi}{2}$
2.06	$\operatorname{sh} x$	0	2π
2.07	$\cos 2x$	0	π

2.08	$\sin 2x$	0	$\frac{\pi}{2}$
2.09	e^{-x}	0	$\frac{\pi}{4}$
2.10	$\mathrm{ch}x$	0	π
2.11	e^{x}	0	2
2.12	$\cos x$	0	π
2.13	$\mathrm{sh}x$	0	$\frac{\pi}{4}$
2.14	$\sin x$	0	$\frac{\pi}{2}$
2.15	e^{-x}	0	2π
2.16	$\sin x$	0	$\frac{\pi}{4}$
2.17	e^{x}	0	3π
2.18	$\mathrm{sh}x$	0	$\frac{\pi}{2}$
2.19	e^{x}	0	1
2.20	$\cos x$	0	$\frac{\pi}{4}$
2.21	e^{x}	0	4
2.22	e^{-x}	0	2
2.23	$\mathrm{ch}x$	0	1
2.24	e^{-x}	0	3
2.25	$\sin x$	0	2π

3. Функцію $f(x)$, задану графічно на сегменті [a; d], розкласти у тригонометричний ряд Фур'є.

№ варіанта	$f(x)$	a	b	c	d
3.01	Рис. 1	–1	1	2	3
3.02	Рис. 2	0	2	3	5
3.03	Рис. 3	0	1	2	3

3.04	Рис. 4	–1	2	3	4
3.05	Рис. 1	–2	2	4	6
3.06	Рис. 2	–3	0	2	4
3.07	Рис. 3	–1	0	1	2
3.08	Рис. 4	–2	1	2	4
3.09	Рис. 1	–1	0	1	3
3.10	Рис. 2	–1	2	3	4
3.11	Рис. 3	–1	0	1	3
3.12	Рис. 4	–1	2	4	6
3.13	Рис. 1	–4	0	1	2
3.14	Рис. 2	–2	0	1	3
3.15	Рис. 3	0	1	3	4
3.16	Рис. 4	0	2	3	4
3.17	Рис. 1	–2	0	1	2
3.18	Рис. 2	–4	1	2	3
3.19	Рис. 3	–2	0	1	3
3.20	Рис. 4	0	1	2	4
3.21	Рис. 1	–2	0	2	4
3.22	Рис. 2	0	2	3	4
3.23	Рис. 3	–3	0	1	2
3.24	Рис. 4	–2	2	3	4
3.25	Рис. 1	–2	0	1	5

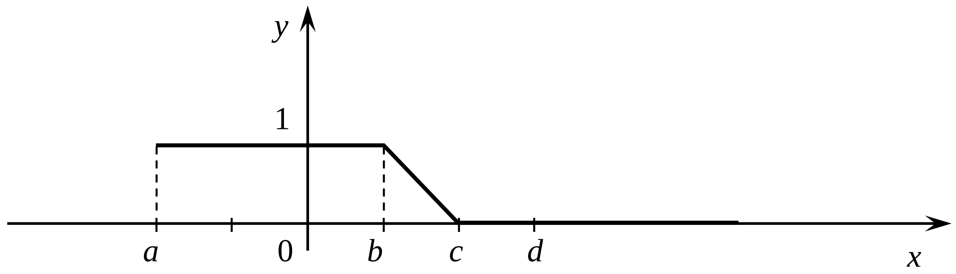


Рисунок 1

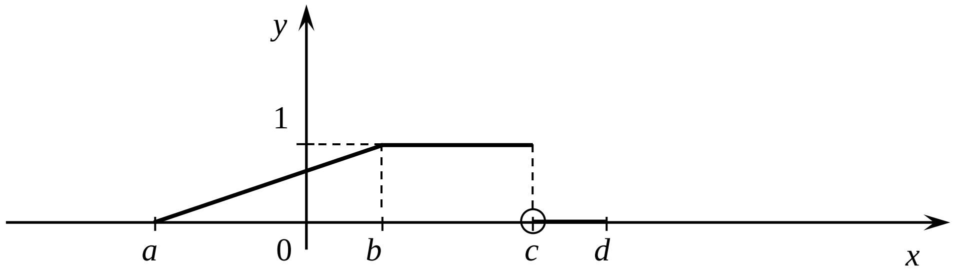


Рисунок 2

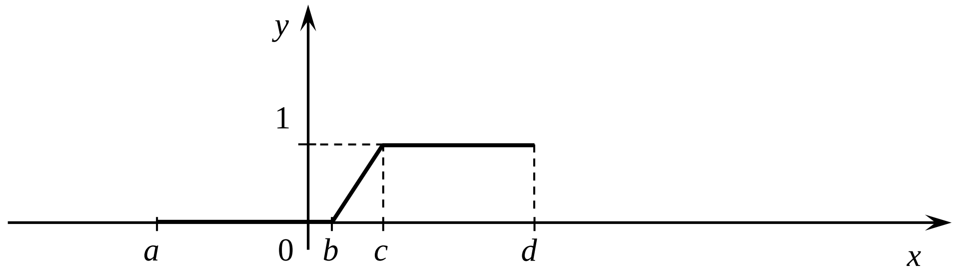


Рисунок 3

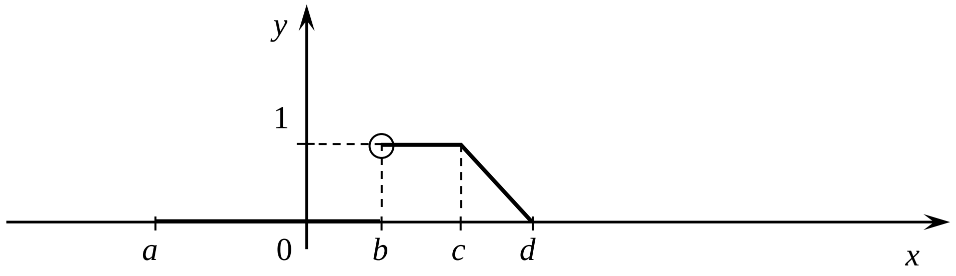


Рисунок 4

4. Знайти перетворення Фур'є для функції $f(x)$.

№ вар.	$f(x)$	№ вар.	$f(x)$	№ вар.	$f(x)$
4.01	$\begin{cases} e^x, 0 \le x \le 1 \\ 0, x < 0, x > 1 \end{cases}$	**4.10**	$\begin{cases} 2, 2 \le x \le 4 \\ 0, x < 2, x > 4 \end{cases}$	**4.19**	$\begin{cases} \cos\frac{\pi}{2}, 0 \le x \le \pi \\ 0, x < 0, x > \pi \end{cases}$
4.02	e^{-x} $x \in [0, \infty)$	**4.11**	$\begin{cases} \sin x, 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0, x < 0, x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$	**4.20**	e^x $x \in (-\infty, 0]$
4.03	$\begin{cases} 2, \|x\| < 2 \\ 0, \|x\| > 2 \end{cases}$	**4.12**	$\begin{cases} 3, 0 \le x \le \pi \\ 0, x < 0, x > \pi \end{cases}$	**4.21**	$\begin{cases} 3x, 0 \le x \le 2 \\ 0, x < 0, x > 2 \end{cases}$
4.04	$\begin{cases} x, \|x\| \le 1 \\ 0, \|x\| > 1 \end{cases}$	**4.13**	$\begin{cases} \cos\frac{\pi}{2}, 0 \le x \le \pi \\ 0, x < 0, x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$	**4.22**	$\begin{cases} \sin x, 0 \le x \le \pi \\ 0, x < 0, x > \pi \end{cases}$
4.05	$\begin{cases} \cos x, \|x\| \le \frac{\pi}{2} \\ 0, \|x\| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$	**4.14**	$\begin{cases} e^x, 0 \le x \le 2 \\ 0, x < 0, x > 2 \end{cases}$	**4.23**	$\begin{cases} \cos x, 0 \le x \le \pi \\ 0, x < 0, x > \pi \end{cases}$
4.06	$\begin{cases} 1 - \|x\|, \|x\| \le 1 \\ 0, \|x\| > 1 \end{cases}$	**4.15**	$\begin{cases} 2x, 0 \le x \le 1 \\ 0, x < 0, x > 1 \end{cases}$	**4.24**	$\begin{cases} 4, 0 \le x \le 1 \\ 0, x < 0, x > 1 \end{cases}$
4.07	$\begin{cases} 1 - x, 0 \le x \le 1 \\ 0, x < 0, x > 1 \end{cases}$	**4.16**	$\begin{cases} 4, -1 \le x \le 1 \\ 0, x < -1, x > 1 \end{cases}$	**4.25**	$\begin{cases} e^x, 0 \le x \le 1 \\ 0, x < 0, x > 2 \end{cases}$
4.08	$e^{-\|x\|}$ $x \in (-\infty, \infty)$	**4.17**	$\begin{cases} \sin\frac{x}{2}, 0 \le x \le \pi \\ 0, x < 0, x > \pi \end{cases}$		
4.09	$\begin{cases} \sin x, 0 \le x \le \frac{\pi}{4} \\ 0, x < 0, x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$	**4.18**	$\begin{cases} 3, 1 \le x \le 3 \\ 0, x < 1, x > 3 \end{cases}$		

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Задача 1. Функцію $f(x) = \cos\frac{x}{3}$ розкласти у тригонометричний ряд Фур'є на проміжку $[0; \pi]$.

Задача 2. Функцію $f(x) = \cos\frac{x}{3}$ розкласти у ряд Фур'є по косинусах на проміжку $[0; \pi]$.

Задача 3. Функцію $f(x) = \cos\frac{x}{3}$ розкласти у ряд Фур'є по синусах на проміжку $[0; \pi]$.

Задача 4. Функцію $f(x) = \cos\frac{x}{3}$ розкласти у ряд Фур'є у комплексній формі на проміжку $[0; \pi]$.

Задача 5. Розкласти у ряд Фур'є 2π-періодичну функцію

$$f(x) = \begin{cases} -k, \text{ якщо } -\pi < x \le 0, \\ k, \text{ якщо } \quad 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

Задача 6. Розкласти у ряд Фур'є 2π-періодичну функцію, задану графічно (рис.).

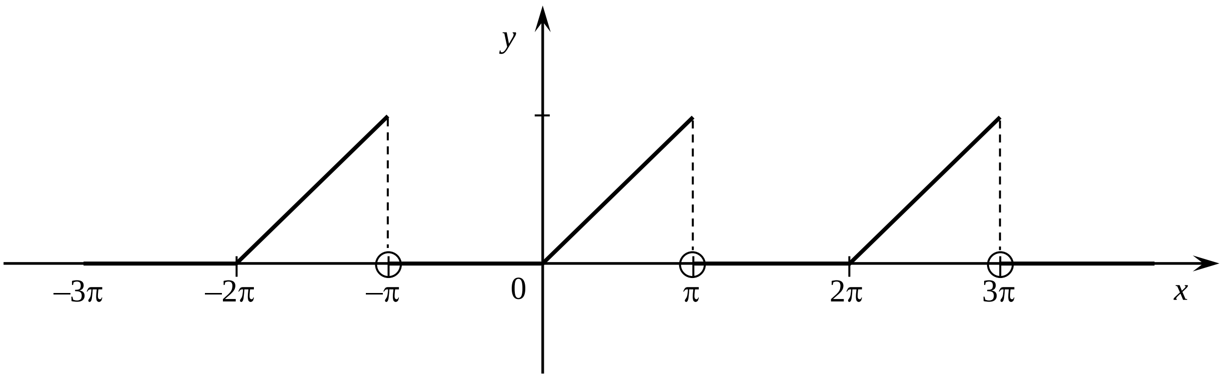


Рисунок до задачі 6

Задача 7. Розкласти у ряд Фур'є косинусоїду з амплітудою I, зрізану віссю $0x$ (рис.).

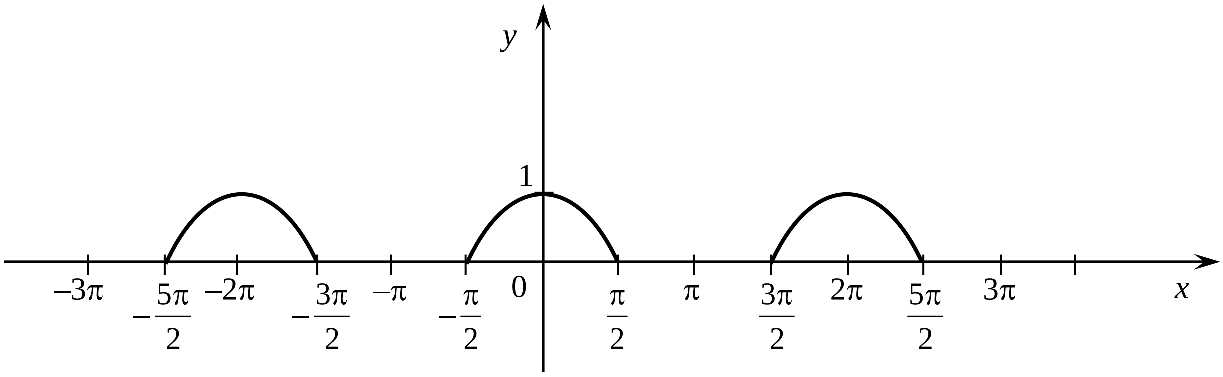


Рисунок до задачі 7

Задача 8. Розкласти у ряд Фур'є синусоїду з амплітудою I, зрізану віссю $0x$ (рис. до задачі 17).

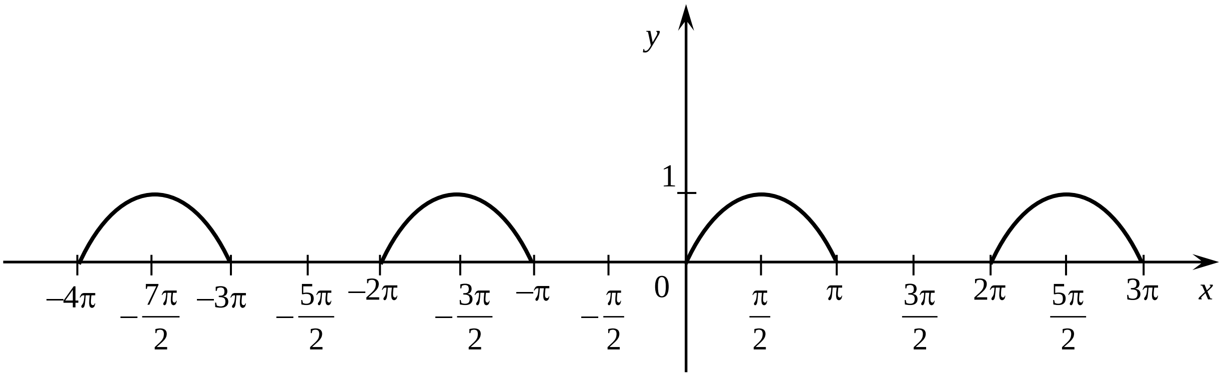


Рисунок до задачі 8

Задача 9. Розкласти у ряд Фур'є 2π-періодичну функцію

$$f(x)=\begin{cases} 0, \text{ якщо } -\pi \le x < 0, \\ x, \text{ якщо } \quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ \pi - x, \text{ якщо } \dfrac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$$

Задача 10. Розкласти у ряд Фур'є функцію $f(x)=|\cos x|$.

Задача 11. Знайти спектральну щільність прямокутного імпульса, заданого графічно (рис. до задачі 11).

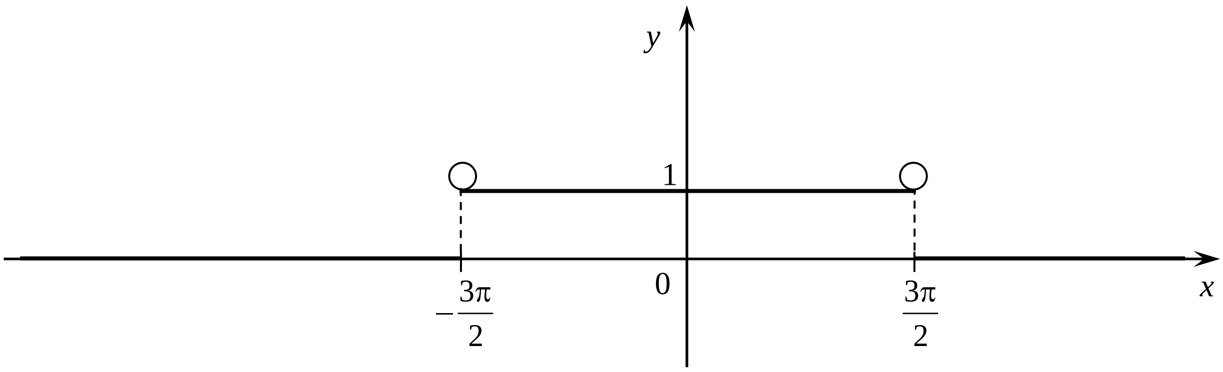


Рисунок до задачі 11

Задача 12. Знайти спектральну щільність імпульса

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x<0,\\ 5e^{-\alpha x}, & \text{якщо } x\ge 0,\end{cases}$$

де $\alpha>0$.

Задача 13. Знайти обернене перетворення Фур'є для функції

$$f(x)=e^{-|x|}.$$

Задача 14. Знайти обернене перетворення Фур'є для функції

$$f(x)=\begin{cases}4, \text{ якщо } x\in[0;1],\\ 0, \text{ якщо } x\in(1;\infty)\end{cases}$$

за умови, що $f(-x)=-f(x)$.

Задача 15. Знайти обернене перетворення Фур'є для функції

$$f(x)=e^{-\beta x},$$

якщо $\beta>0,\ x\ge 0$ та $f(-x)=f(x)$.

Задача 16. Знайти обернене перетворення для функції

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le -2,\\ x-2, \text{ якщо } -2<x\le -1,\\ x, \text{ якщо } -1<x\le 1,\\ 2-x, \text{ якщо } 1<x\le 2,\\ 0, \text{ якщо } x>2.\end{cases}$$

ВІДПОВІДІ ДО ЗАДАЧ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Задача 1. $f(x)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\pi}+\dfrac{1}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{18n\sin 2nx-3\sqrt{3}\cos 2nx}{36n^2-1}.$

Задача 2. $f(x)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\pi}+\dfrac{3\sqrt{3}}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}\cos nx}{9n^2-1}.$

Задача 3. $f(x)=\dfrac{3}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}n\sin nx}{9n^2-1}.$

Задача 4. $f(x)=\dfrac{1}{2\pi}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{3\sqrt{3}+18ni}{1-36n^2}e^{2nxi}.$

Задача 5. $f(x)=\dfrac{4k}{\pi}\left(\sin x+\dfrac{1}{3}\sin 3x+\dfrac{1}{5}\sin 5x+\dfrac{1}{7}\sin 7x+\ldots\right).$

Задача 6.

$$f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\cos x-\frac{2}{9\pi}\cos x-\frac{2}{25\pi}\cos 5x+\ldots$$
$$\ldots+\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{1}{4}\sin 4x+\ldots.$$

Задача 7.

$$f(x)=\frac{1}{\pi}I+\frac{1}{2}I\cos x+\frac{2}{3\pi}I\cos 2x-\frac{2}{15\pi}I\cos 4x+\frac{2}{35\pi}I\cos 6x+\ldots\ .$$

Задача 8.

$$f(x)=\frac{1}{\pi}I+\frac{1}{2}I\sin x-\frac{2}{3\pi}I\cos 2x-\frac{2}{15\pi}I\cos 4x-\frac{2}{35\pi}I\cos 6x+\ldots\ .$$

Задача 9.

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\left(\sin x-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{9}\sin 3x+\frac{1}{25}\sin 5x-\frac{1}{28}\cos 6x+\ldots\right).$$

Задача 10. $f(x)=\dfrac{2}{\pi}+\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos 2nx.$

Задача 11. $S(\omega)=\dfrac{2}{\pi\omega}\sin\dfrac{a\omega}{2}.$

Задача 12. $S(\omega)=\dfrac{5}{2\pi(\alpha+i\omega)}.$

Задача 13. $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cos\omega x}{\omega^2+1}d\omega.$

Задача 14. $f(x)=\dfrac{8}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1-\cos\omega}{\omega}\sin\omega x d\omega.$

Задача 15. $f(x)=\dfrac{2\beta}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cos\omega x}{\beta^2+\omega^2}d\omega.$

Задача 16. $f(x)=\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{(1-\cos\omega)\sin\omega\sin\omega x}{\omega^2}d\omega.$

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 1,2. – М.: Наука, 1985.
2. Стрелковська І. В. Вища математика для фахівців в галузі зв’язку. Ч. І. Підручник для фахівців в галузі зв’язку / Стрелковська І. В., Буслаєв А. Г., Паскаленко В. М.; за заг. редакцією проф. П. П. Воробієнка. – Одеса: 2010. – 594 с.
3. Стрелковська І. В. Вища математика для фахівців в галузі зв’язку. Ч. ІІ. Підручник для фахівців в галузі зв’язку / Стрелковська І. В., Буслаєв А. Г., Паскаленко В. М.; за заг. редакцією проф. П. П. Воробієнка. – Одеса: 2010. – 620 с.
4. Стрелковська І. В. Вища математика для фахівців в галузі зв’язку. Ч. ІІІ. Підручник для фахівців в галузі зв’язку / Стрелковська І. В., Паскаленко В. М.; за заг. редакцією проф. П. П. Воробієнка. – Одеса: 2012. – 494 с.
5. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко, А.Г. Попов. – М.: Высшая школа, 1986.
6. Овчинников И.И. Вища математика. Ч. І, ІІ / Овчинников И.И., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. – К.: Техніка, 2000.
7. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике. Ч. 1, 2, 3. / Каплан И.А. – ХГУ, 1970.
8. Сборник задач по высшей математике; под ред. Г.И. Кручковича. – М.: Высшая школа, 1973. – 576 с.
9. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу мат. анализа / Берман Г.Н. – М.: Наука, 1985. – 383 с.
10. Демидович Б.П. Сборник задач по высшей математике / Демидович Б.П. – М.: Наука, 1972. – 544 с.
11. Бермант А.Ф. Краткий курс математического анализа / А.Ф. Бермант, И.Г. Араманович. – М.: Наука, 1973. – 736 с.
12. Богомолов М.В. Практические занятия по математике / Богомолов М.В. – [3-е изд.]. – перераб. и доп. – К.: Высш. шк., 1990. – 495 с.
13. Бутузов В.Ф. Математический анализ в вопросах и задачах / В.Ф. Бутузов и др. – М.: Высш. шк., 1988. – 288 с.
14. Виноградова И.А. Задачи и упражнения по математическому анализу / Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А.; под ред. В.А. Садовничего. – М.: Изд-во Моск. ун-и, 1988. – 416 с.
15. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике / Выгодский М.Я. – М.: Наука, 1977. – 872 с.
16. Глаголев А.А. Курс высшей математики / А.А. Глаголев, Т.В. Солнцева. – М.: Высш. шк., 1971. – 650 с.
17. Дороговцев А.Я. Математический анализ / Дороговцев А.Я. – К.: Лыбидь, 1993. – Ч.1. – 320 с.; Ч.2. – 304 с.
18. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу / Запорожец Г.И. – М.: Высш. шк., 1966. – 460 с.

19. Зорич В.А. Математический анализ. – М.: Наука, 1981. – Т.1. – 544 с.; 1984. – Т.2. – 640 с.
20. Ильин В.А. Математический анализ / Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. – М.: Изд-во Моск. Ун-и, 1985. – Т.1. – 664 с.; 2007. – Т.2. – 353 с.
21. Ильин В.А. Основы математического анализа / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – М.: Наука, 1971. – Т.1. – 599 с.; 1973. – Т.2. – 447 с.
22. Клепко В.Ю. Вища математика в прикладах і задачах / В.Ю. Клепко, В.Л. Голець. – К.: Вид-во ЦУЛ, 2009. – 592 с.
23. Кудрявцев В.А. Курс математического анализа / В.А. Кудрявцев. – М.: Высш. шк., 1988. – 712 с.
24. Кудрявцев В.А. Краткий курс высшей математики / В.А. Кудрявцев, Б.П. Демидович. – М.: Наука, 1989. – 576 с.
25. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа: в 3-х томах / Л.Д. Кудрявцев. – М.: Высш. шк., 2003. – Т.1. – 704 с.; 2004. – Т.2. – 720 с.; 2006. – Т.3. – 351 с.
26. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа: в 2-х томах / Кудрявцев Л.Д. – М.: Наука, 2005. – Т.1. – 400 с.; Т.2. – 424 с.
27. Литвин І.І. Вища математика / Литвин І.І., Конанчук Г.О., Желєзняк Г.О. – К.: Вид-во ЦУЛ, 2009. – 368 с.
28. Лунгу К.Н. Сборник задач по высшей математике / К.Н. Лунгу и др. – М.: Абрис Пресс, 2004. – 591 с.
29. Никольский С.М. Курс математического анализа / Никольский С.М. – М.: Высш. шк., 2001. – 592 с.
30. Поддубный Г.В. Математический анализ для радиоинженеров / Г.В. Поддубный, Р.К. Романовский. – М.: Воениздат, 1976. – 344 с.
31. Решетняк Ю.Г. Курс математического анализа / Ю.Г. Решетняк. – Новосибирск: Изд-во Ин-и математики, 1999. – Ч.1, кн. 2. – 512 с.
32. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / [Ляшко С.И., Боярчук А.К., Александрович И.Н. и др.]. – Изд-во: Вильямс, 2001. – Ч.1. – 432 с.
33. Справочное пособие по математическому анализу / [И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Я.Г. Гай, Г.П. Головач]. – М.: Изд-во ЛКИ, 2007. – 224 с.
34. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Фихтенгольц Г.М. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – Т.1. – 616 с.; Т.2. – 810 с.; Т.3. – 662 с.