Р. М. Трохимчук

М. С. Нікітченко

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА
У ПРИКЛАДАХ І ЗАДАЧАХ

ПЕРЕДМОВА

Одним із найвидатніших винаходів XX ст. є створення універсального автоматичного перетворювача інформації, названого електронною обчислювальною машиною, або комп'ютером. Появу комп'ютера без перебільшення можна назвати Великою інтелектуальною революцією. Значення обчислювальних машин у сучасному житті важко переоцінити.

Важливо наголосити, що визначальну роль у створенні комп'ютера відіграли вчені-математики. Саме вони формулювали й досліджували абстрактні моделі, а згодом брали активну участь у практичній реалізації перших (і наступних) обчислювальних машин. Фундаментальні та прикладні математичні дослідження в усіх напрямах комп'ютерної галузі успішно тривають.

У свою чергу, комп'ютер не міг не вплинути на саму математику. З його появою відбулося певне збагачення класичної математики, стався перерозподіл уваги й зацікавленості математиків предметом досліджень. Комп'ютерна практика є потужним джерелом новітніх ідей і задач, вона сприяє появі нових дисциплін і напрямів математичних досліджень. Зокрема, з'явився окремий розділ сучасної математики – дискретна математика.

Дискретна математика (інші назви: дискретний аналіз, скінченна математика) – це розділ сучасної математики, в якому вивчають властивості математичних об'єктів дискретного характеру.

Головним критерієм, за яким різноманітні розділи математики (як ті, що виникли в давні часи, так і ті, що з'явились у XX ст.) об'єднують під назвою "дискретна математика", є те, яке відношення вони мають до теорії та практики проектування, використання електронних обчислювальних машин і програмування. Тому дискретну математику останнім часом справедливо називають **комп'ютерною математикою**.

Нині дискретна математика входить до навчальних програм багатьох факультетів університетів та інших вищих навчальних закладів. Однак темпи розвитку комп'ютерних систем, як їх матеріальної, "залізної" частини (*hardware*), так і особливо програмного забезпечення (*software*) такі, що знання про конкретні системи, отримані під час навчання, часто застарівають уже на момент його завершення. Не девальвуються лише фундаментальні базові знання. Тому фахівець, який бажає завжди бути обізнаним щодо ідей, новацій і прогресу, має подбати про фундаментальну теоретичну підготовку.

Формування інтелектуальних навичок і вмінь немислиме без активних індивідуальних дій, без набуття самостійного досвіду й практики у процесі розв'язування задач, що, безумовно, є найкращим способом засвоєння будь-яких теоретичних математичних понять, методів, концепцій і результатів, перевірки правильності та повноти розуміння матеріалу. Тому для глибокого й усебічного засвоєння будь-якої математичної дисципліни надзвичайно важливо використовувати достатньо широкий і різноманітний набір задач.

Навчальний посібник містить задачі та вправи з класичних розділів дискретної математики. Кожний розділ включає теоретичні відомості, де подано основні означення, позначення й терміни, приклади розв'язання типових задач, а також завдання для самостійної роботи.

За необхідності початок розв'язання прикладів можна позначати знаком ►, закінчення – знаком ◄. Якщо приклад простий, то ці знаки не ставлять або ставлять лише знак завершення розв'язання.

Розділ 1
ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ ЛОГІКИ

Термін **логіка** походить від грецького $\lambda o\gamma o\zeta$, що означає *слово, яке виражає думку*; *поняття*; *вчення*; *міркування*. Саме аналізуючи зв'язок слова й думки, мови та міркувань, стародавні (переважно давньогрецькі) мислителі створили логіку – науку про способи мислення, що ведуть до істини, про закони й форми правильного мислення.

Логічні закони й правила побудови коректних міркувань почали формуватись у сиву давнину, коли в людини з'явилась потреба обмінюватись досвідом і знаннями, обґрунтовувати свої думки, робити правильні висновки з певних посилань або гіпотез. Важливо підкреслити, що правила й процедури для коректних міркувань не залежать від конкретного **змісту** посилань і висновків, а також від жодних суб'єктивних (настрій, емоції, рівень інтелекту або освіти, ставлення до підсумку умовиводів тощо) чи зовнішніх (погода, пора року, місце, умови перебування особи тощо) чинників, а залежать лише від **форми** вираження цих міркувань і є загальними для всіх міркувань тієї самої форми, безвідносно до того, про що в них ідеться.

Так з'явилась **формальна логіка**. Вважають, що формальна логіка як учення про умовивід і доведення виникла більше двох з половиною тисяч років тому в Давній Греції. Найповніше її принципи та положення було викладено в працях видатного давньогрецького вченого й філософа Арістотеля (384–322 рр. до н. е.) та його учнів і послідовників.

Досягнувши відносно високого ступеня досконалості, арістотелева логіка, на відміну від математики, протягом багатьох століть практично не розвивалась. Вона була обов'язковою складовою хорошої освіти та служила переважно інструментом для обґрунтування різного роду тверджень (часто, як у випадку середньовічної схоластики, досить сумнівних).

Новий етап в історії формальної логіки датують серединою XIX ст., коли було опубліковано головні праці визначного англійського математика Джорджа Буля (1815–1864), у яких він наблизив логіку до математики й заклав основи математичної логіки.

Характерною особливістю **математичної логіки** є використання математичної мови символів, операцій, формул, обчислень, числень, рівносильних перетворень тощо.

Розуміння формальних методів і моделей, уміння ними користуватися, знання й володіння законами математичної логіки є необхідним етапом у процесі вивчення та засвоєння інформатики, мов і методів програмування для ЕОМ. В епоху комп'ютеризації всіх сфер людського буття – виробництва, економіки, наукових досліджень, освіти, побуту – знання основ математичної логіки необхідне для формування фахівця у будь-якій галузі діяльності, розвинення в нього аналітичного і творчого мислення, ефективного використання обчислювальної техніки.

Вивчення й засвоєння мови та методів сучасної формальної логіки сприяє набуттю навичок правильних міркувань і переконливої аргументації, чіткого формулювання думок і висновків, формування загальної культури мислення. Ці навички необхідні й корисні в усіх сферах людської діяльності, оскільки логіка є окремою науковою дисципліною та водночас – інструментом будь-якої науки.

Сьогодні математична, або формальна, логіка входить до навчальних програм багатьох факультетів (як природничих, так і гуманітарних) усіх університетів та інших вищих навчальних закладів.

1.1. Поняття висловлення. Логічні операції (зв'язки). Складені висловлення

Просте (елементарне) висловлення – це просте твердження, тобто розповідне речення, щодо змісту якого доречно ставити запитання про його правильність або неправильність. Прості висловлення, у яких виражено правильну думку, називають **істинними**, а ті, що виражають неправильну, – **хибними**.

Приклад 1.1. Чи є наведений вираз простим висловленням? Якщо вираз є висловленням, то вказати, яким саме – істинним чи хибним.

(а) *Число 357 кратне 7.*

(б) *Це речення складається із шести слів.*

(в) *Хай живе кібернетика!*

(г) *Женева – столиця Швейцарії.*

(д) *Не існує найбільшого простого числа.*

(е) *Чи існує найменше просте число*?

(є) *Будьте уважні та взаємно ввічливі.*

(ж) *Сонце зійшло.*

(з) *Виходячи з кімнати, вимикайте світло.*

(и) *Нерівність* $3 < 2$ *хибна.*

(і) *Нерівність* $2 < 3$ *хибна.*

(ї) *Це висловлення – хибне.*

► Вирази (а), (б), (г), (д), (и) та (і) є висловленнями, (а), (б), (д), та (и) – істинними, а (г) та (і) – хибними. Вираз (ї) не є висловленням, оскільки, послідовно припускаючи, що в ньому виражено правильну або неправильну думку, отримуємо логічну суперечність. Цей вираз є одним із варіантів логічного **парадоксу брехуна**. ◄

Зазвичай конкретні елементарні висловлення позначають малими латинськими літерами: a, b, c, … (інколи з індексами), а значення висловлень *істинно* та *хибно* – відповідно символами **1** та **0** (або **I** та **X**, а в англомовній літературі – відповідно **T** і **F**).

Крім того, розглядатимемо **змінні висловлення**, які позначатимемо латинськими літерами x, y, z, … (інколи з індексами) і називатимемо також **пропозиційними змінними**. Після підстановки замість пропозиційної змінної певного елементарного висловлення ця змінна набуде відповідного значення (**1** або **0**).

Окремі елементарні висловлення можна з'єднувати між собою за допомогою певних зв'язок (сполучників), утворюючи **складені висловлення.**

Наприклад, вирази *Число* 5 *– просте та число* 23 *– просте*; *Київ – столиця України, а Берн – столиця Швейцарії*; *Якщо число* 27 *кратне* 3, *то число* 27 *кратне* 6; *Неправильно, що* $2 < 3$, *або неправильно, що* $4 < 3$ є складеними висловленнями, що утворені з простіших (елементарних) висловлень шляхом використання зв'язок *і*; *а*; *якщо ..., то*; *неправильно, що* та *або*.

У математичній логіці використання мовних зв'язок трактується як виконання над висловленнями певних логічних операцій, що мають такі назви: **кон'юнкція**, **диз'юнкція**, **заперечення**, **імплікація** та **еквівалентність**.

У табл. 1.1 наведено різні назви та позначення, що використовують для цих операцій.

Таблиця 1.1

Назва	Позначення
Кон'юнкція (логічне множення, логічне *і*)	$\wedge$ & $\cdot$
Диз'юнкція (логічне додавання, логічне *або*)	$\vee$
Заперечення (логічне *ні*)	$\neg$ $'$ $\bar{\ }$
Імплікація (логічне *якщо, …то…*)	$\rightarrow \supset \Rightarrow$
Еквівалентність (рівнозначність)	$\sim \leftrightarrow \equiv$

Зазвичай використовуватимемо перші із наведених назв і позначень. Табл. 1.2 містить означення цих операцій.

Таблиця 1.2

$x\ y$	$x \wedge y$	$x \vee y$	$\neg x$	$x \rightarrow y$	$x \sim y$
0 0	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**
0 1	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**
1 0	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**
1 1	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**

Отже, з елементарних висловлень і пропозиційних змінних за допомогою означених операцій і дужок утворюються складені висловлення, яким відповідають формули або вирази.

Зауважимо, що символам логічних операцій відповідають у звичайній мові такі мовні зв'язки, або сполучники:

$\wedge$ – *і*; *та*; *а*; *але*; *хоч*; *разом із*; *незважаючи на*; …

$\vee$ – *або*; *чи*; *хоч* (*принаймні*) *одне з*; …

$\neg$ – *не*; *неправильно, що*; …

$\rightarrow$ – *якщо* (*коли*) … , *то* (*тоді*)…; … *імплікує* …; *із* … *випливає* …; *у разі* … *має місце* …; …

$\sim$ – … *тоді й тільки тоді, коли* …; … *якщо й тільки якщо* …; … *еквівалентне* …; … *рівносильне* … тощо.

Застосовуючи пропозиційні змінні та символи логічних операцій, будь-яке складене висловлення можна формалізувати, тобто перетворити на формулу, яка виражатиме (задаватиме) його *логічну структуру*.

Приклад 1.2.

1. Висловлення *Якщо число* 24 *кратне* 2 *і* 3, *то число* 24 *кратне* 6 має таку логічну структуру: $(a \wedge b) \to c$. Тут пропозиційній змінній a відповідає елементарне висловлення *Число* 24 *кратне* 2, змінній b – висловлення *Число* 24 *кратне* 3, а змінній c – висловлення *Число* 24 *кратне* 6.

2. Нехай задано елементарні висловлення:

a – 7 – *ціле число*; c – 7 – *просте число*;
b – 7 – *від'ємне число*; d – *Число* 7 *кратне* 3.

Сформулювати словами складене висловлення, визначити його істинність чи хибність для таких формул:

(а) $a \wedge b$; (б) $a \vee b$; (в) $a \to \neg b$;
(г) $(b \to \neg a) \vee c$; (д) $(\neg a \wedge \neg c) \to d$.

► Першій із цих формул відповідає складене висловлення 7 – *ціле число* і 7 – *від'ємне число* (звичайно таке висловлення формулюється у вигляді 7 – *ціле і від'ємне число*). Отримане висловлення є хибним, оскільки перша його елементарна складова a є істинним висловленням, а друга b – хибним. За означенням операції кон'юнкції $\wedge$ значенням цього складеного висловлення є *хибно*, або **0**.

Формулі (б) відповідатиме складене висловлення 7 – *ціле число або* 7 – *від'ємне число*, що є істинним, адже одна з його складових (а саме перша) є істинним висловленням.

Формула (в) задає складене висловлення *якщо* 7 – *ціле число*, *то неправильно, що* 7 – *від'ємне число*, що є істинним, оскільки йому відповідає вираз $\mathbf{1} \to \mathbf{1}$, який має значення **1**.

Формула (г) задає складене висловлення *якщо* 7 – *від'ємне число, то неправильно, що* 7 – *ціле число або* 7 – *просте число*, яке є істинним, оскільки остання його елементарна складова c є істинним висловленням. Якщо принаймні одне з елементарних висловлень, з'єднаних мовною зв'язкою *або* (логічною операцією диз'юнкції $\vee$), є істинним, то й усе складене висловлення є істинним.

Остання формула задає складене висловлення *якщо неправильно, що* 7 – *ціле число та неправильно, що* 7 – *просте число*, *то число* 7 *кратне* 3, що є істинним, адже йому відповідає логічний вираз $\mathbf{0} \to \mathbf{1}$, який має значення **1**. ◄

Приклад 1.3.

1. Визначити істинність чи хибність складеного висловлення, використавши його логічну структуру й виходячи з відомих значень істинності простих висловлень, із яких воно складається.

(а) *Число* 777 *кратне* 7, *але не кратне* 11.

(б) *Число* 36 *кратне* 6 *або* 7.

(в) Якщо $4 < 3$, то $4^2 < 3^2$.

(г) $-2 > -3$ *та* $(-1/2) > (-1/3)$.

(д) $-2 > -3$, *але* $(-2)^2 < (-3)^2$.

(е) *Якщо* $2 < 3$, *то* $2^2 < 3^2$.

(є) *Принаймні одне із чисел* 21, 24 *чи* 27 *парне*.

(ж) *Якщо число* 24 *кратне* 6, *то число* 24 *кратне* 3.

(з) *Якщо число* 27 *кратне* 6, *то число* 27 *кратне* 3.

(и) *Якщо число* 27 *кратне* 3, *то число* 27 *кратне* 6.

(і) *Якщо* $2 < 3$ *та* $3 < 1$, *то* $2 < 1$.

(ї) *Неправильно, що принаймні одне з чисел* 35, 57, 77 *просте*.

► Вираз (а) має логічну структуру $a \wedge b$, де пропозиційній змінній a відповідає елементарне висловлення *Число* 777 *кратне* 7, а змінній b – висловлення *Число* 777 *не кратне* 11. Обидва висловлення істинні, тому й задане складене висловлення істинне.

Вираз (б) має логічну структуру $a \vee b$, де a – *Число* 36 *кратне* 6 і b – *Число* 36 *кратне* 7. Отже, значенням усього висловлення буде **1**.

Вирази (в), (е), (ж), (з), (и) та (і) мають логічну структуру $a \to b$. Висловлення (и) – хибне, решта – істинні.

Вирази (г) і (д) мають однакову логічну структуру $a \wedge b$. Перший із них є хибним, а другий – істинним.

Логічна структура виразу (є) має вигляд $a \vee b \vee c$, де a – 21 – *парне число*, b – 24 – *парне число* та c – 27 – *парне число*. Отже, значенням складеного висловлення буде **1**.

Логічна структура виразу (ї) має вигляд $\neg\,(a \vee b \vee c)$, де a – 35 – *просте число*, b – 57 – *просте число* і c – 77 – *просте число*. Значенням складеного висловлення буде **1**, оскільки a, b і c – хибні висловлення. ◄

2. Визначити значення істинності висловлень a, b, c, d, які фігурують у складених висловленнях, якщо складені висловлення 1) та 2) – істинні, а 3) та 4) – хибні.

1) *Якщо* 7 *– просте число, то* a.

2) *Якщо* b, *то* 7 *– складене число*.

3) *Якщо* 7 *– просте число, то* c.

4) *Якщо* d, *то* 7 *– складене число*.

► Оскільки перше висловлення істинне та його елементарна складова 7 – *просте число* є також істинним висловленням, то із правила виконання операції імплікації випливає, що його друга елементарна складова a має бути істинним висловленням. Аналогічно аналізуємо решту висловлень. У результаті отримаємо, що висловлення a та d – істинні, b та c – хибні. ◄

3. Із хибної рівності $2 \times 2 = 5$, застосовуючи відомі рівносильні перетворення математичних виразів, вивести:

(а) хибну рівність $3 \times 3 = 8$;

(б) правильну рівність $2 \times 3 = 6$.

► (а) Це можна зробити, наприклад, так: спочатку віднімемо почленно від даної рівності $2 \times 2 = 5$ правильну рівність $2 \times 2 = 4$, отримаємо, що $0 = 1$. Потім віднімемо почленно отриману рівність від правильної рівності $3 \times 3 = 9$, дістанемо рівність $3 \times 3 = 8$.

(б) $2 \times 3 = 2 \times (2 + 1) = 2 \times 2 + 2 \times 1 = 5 + 2 = 7$. Від останньої рівності $2 \times 3 = 7$ віднімемо почленно отриману у попередньому пункті рівність $0 = 1$, дістанемо, що $2 \times 3 = 6$. ◄

У математичній мові імплікацію $p \to q$ трактують так: твердження p є достатньою умовою для q, а твердження q – необхідною умовою для твердження p. Вираз $p \to q$ інтерпретують ще як *q тоді, коли p* або *p тільки тоді, коли q*. В імплікації $p \to q$ операнд p називають **антецедентом**, або **засновком**, а q – **консеквентом**, або **висновком**.

Приклад 1.4. Записати словами у вигляді твердження задане висловлення різними способами, використовуючи вирази: *необхідна умова*; *достатня умова*; *тоді, коли*; *тільки тоді, коли*.

(а) (24 *кратне* 6) $\to$ (24 *кратне* 3).

(б) *Число* 45 *кратне* 15 *тільки тоді, коли* 45 *кратне* 3 *і кратне* 5.

► Для пункту (а) такими твердженнями будуть:

– висловлення 24 *кратне* 3 є необхідною умовою для висловлення 24 *кратне* 6;

– висловлення 24 *кратне* 6 є достатньою умовою для висловлення 24 *кратне* 3;

– 24 *кратне* 3 тоді, коли 24 *кратне* 6;

– 24 *кратне* 6 тільки тоді, коли 24 *кратне* 3.

Для пункту (б) маємо:

– висловлення 45 *кратне* 3 і 45 *кратне* 5 є необхідною умовою для висловлення 45 *кратне* 15;

– висловлення 45 *кратне* 15 є достатньою умовою для висловлення 45 *кратне* 3 і 45 *кратне* 5;

– 45 *кратне* 3 і 45 *кратне* 5 тоді, коли 45 *кратне* 15. ◄

Завдання для самостійної роботи

1. Чи є наведений вираз простим висловленням? Якщо вираз є висловленням, то вказати, яким саме – істинним чи хибним.

(а) *Число* 434 *кратне* 7.

(б) *Астрономічний рік складається із* 365 *днів*.

(в) *Осінь – це пора року*.

(г) *Осінь – найкраща пора року*.

(д) *Київ – столиця України*.

(е) $7 < 7$. (є) $7 \leq 7$.

(є) $2 \times 2 = 4$.

(ж) *Існує опуклий многокутник із чотирма гострими кутами*.

(з) *Бісектриса трикутника ділить його площу на рівновеликі частини*.

(и) *Це речення розташовано на сторінці з парним номером*.

(і) *Усі слова цього речення містять принаймні одну голосну літеру*.

(ї) *Нехай усе буде гаразд*.

(й) *Ця задача нескладна*.

(к) *Число* 777 *менше Евересту*.

(л) *Справджується нерівність* $x < 2$.

2. Нехай задано елементарні висловлення:

a – 5 – *ціле число*; b – 11 – *парне число*; c – 12 – *просте число*; d – *Число* 18 *кратне* 3.

Для наведених нижче формул сформулювати словами складене висловлення, визначити його істинність чи хибність:

(а) $a \wedge b$; (б) $a \vee b$; (в) $a \to \neg b$;
(г) $(a \vee c) \to b$; (д) $(a \vee (b \wedge d)) \to \neg c$; (є) $(\neg a \wedge \neg c) \to d$;
(е) $(\neg a \vee \neg d) \sim b$; (ж) $(\neg a \to \neg c) \wedge b$.

3. Визначити істинність чи хибність складеного висловлення, використавши його логічну структуру й виходячи із відомих значень істинності елементарних висловлень, з яких воно складається.

(а) *Число* 333 *кратне* 3, *але не кратне* 11.

(б) *Число* 54 *кратне* 6 *або* 8.

(в) *Принаймні одне із чисел* 11, 23 *або* 26 *парне*.

(г) $-3 > -4$ та $(-1/3) > (-1/4)$.

(д) $-3 > -4$, але $(-3)^2 < (-4)^2$.

(е) *Якщо* $4 < 5$, *то* $4^2 < 5^2$.

(є) *Якщо число* 36 *кратне* 6, *то число* 36 *кратне* 3.

(ж) *Якщо число* 15 *кратне* 6, *то число* 15 *кратне* 3.

(з) *Якщо число* 15 *кратне* 3, *то число* 15 *кратне* 6.

(и) *Якщо* $3 < 4$ *та* $4 < 2$, *то* $3 < 2$.

(і) 72 *кратне* 48 *тоді й тільки тоді, коли* 72 *кратне* 8 *та* 72 *кратне* 6.

(ї) *Неправильно, що* $2 < 3$ і $4 < 3$. *Неправильно, що принаймні одне із чисел* 35, 57, 77 *просте*.

(й) *Неправильно, що виконується хоч б одна з нерівностей* $2 < 3$ чи $3 < 2$.

(к) 144 *кратне* 24 *тоді й тільки тоді, коли* 144 *кратне* 8 *та* 144 *кратне* 3.

4. Сформулювати наведене твердження у вигляді *Якщо …, то …*:

(а) *Із нерівності* $x < 3$ *випливає нерівність* $x \leq 3$.

(б) *Я успішно складу іспит з математичної логіки тоді, коли регулярно робитиму домашні завдання*.

(в) *Необхідно знати означення понять, щоб правильно зрозуміти формулювання математичної задачі*.

(г) *Щоб чотирикутник був ромбом, достатньо, щоб він був квадратом*.

(д) *Число* 24 *кратне* 6 *тільки тоді, коли воно кратне* 3.

5. Записати словами у вигляді твердження імплікацію чотирма різними способами, використовуючи вирази: *необхідна умова*; *достатня умова*; *тоді, коли*, *тільки тоді, коли*:

(а) $(2 > 3) \to (1 > 2)$;

(б) (42 *кратне* 21) $\to$ (42 *кратне* 7);

(в) $(2 > 3) \to (1 > 2)$;

(г) *Якщо* $3 > 2$, то $3 \geq 2$.

(д) *Якщо* $4 < 5$, то $4^2 < 5^2$.

(е) *Якщо* $3 < 4$ і $4 < 2$, то $3 < 2$.

6. Із хибної нерівності $1 > 2$, застосовуючи відомі рівносильні перетворення математичних виразів, вивести:

(а) хибну нерівність $5 > 7$;

(б) правильну нерівність $5 < 7$.

1.2. Формули алгебри висловлень. Таблиця істинності. Тавтології

За аналогією зі звичайними числовими алгебрами, де змінні можуть набувати значень із певної множини чисел (напр., цілі, раціональні або дійсні числа), розглянемо **алгебру висловлень**, в якій значеннями відповідних змінних будуть якісь висловлення.

Операціями алгебри висловлень будуть означені вище кон'юнкція, диз'юнкція, заперечення, імплікація та еквівалентність. Застосовуючи до елементарних висловлень і пропозиційних змінних ці операції, діставатимемо складені висловлення, яким відповідатимуть формули (або вирази) алгебри висловлень. Для запису цих формул і дослідження їхніх властивостей використовують формальні мови, тобто певні множини слів у деякому алфавіті.

Алфавіт найбільш поширеної формальної мови алгебри висловлень складається з трьох груп символів:

1) символи елементарних висловлень і пропозиційних змінних: a, b, c, … та x, y, z, … (інколи з індексами);

2) символи операцій: $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\to$, $\sim$;

3) допоміжні символи – круглі дужки: (і).

Із символів цього алфавіту будують пропозиційні формули або просто формули алгебри висловлень за індуктивним правилом:

1) усі пропозиційні змінні та елементарні висловлення є формулами;

2) якщо A та B – формули, то вирази $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(\neg A)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \sim B)$ також є формулами (для всіх цих виразів формули A та B є підформулами);

3) інших формул, крім тих, що побудовані за правилами 1) та 2), немає.

Формули алгебри висловлень позначатимемо великими латинськими літерами.

Приклад 1.5.

1. Визначити, чи є послідовність символів формулою алгебри висловлень.

(а) $(((x \rightarrow y) \wedge z) \sim ((\neg x) \rightarrow (y \vee z)))$;

(б) $(((\neg x) \wedge y) \rightarrow (x \sim ((\neg y) \vee x)$.

► Для цього за допомогою індексів спочатку занумеруємо порядок виконання операцій у першій послідовності символів (у багатьох випадках ця процедура виконується неоднозначно). Матимемо такий вираз: $(((x \rightarrow_1 y) \wedge_2 z) \sim_6 ((\neg_3 x) \rightarrow_5 (y \vee_4 z)))$ (зручно відповідний номер записувати над операцією). Подамо його у вигляді $(F_1 \sim_6 F_2)$, де $F_1 = ((x \rightarrow_1 y) \wedge_2 z)$ і $F_2 = ((\neg_3 x) \rightarrow_5 (y \vee_4 z))$.

У свою чергу, формула F_1 має вигляд $(F_{11} \wedge_2 F_{12})$ і розкладається на підформули $F_{11} = (x \rightarrow_1 y)$ і $F_{12} = z$, а формула F_2 має вигляд $(F_{21} \rightarrow_5 F_{22})$ і розкладається на підформули $F_{21} = (\neg_3 x)$ і $F_{22} = (y \vee_4 z)$.

Вираз F_{12} є формулою згідно з п. 1) в означенні пропозиційної формули. А кожна з решти підформул F_{11}, F_{21} та F_{22} утворюється відповідно до п. 2) цього означення:

$$F_{11} = (F_{111} \rightarrow_1 F_{112}),$$

де $F_{111} = x$ і $F_{112} = y$,

$$F_{21} = (\neg_3 F_{211}),$$

де $F_{211} = x$ і, нарешті,

$$F_{22} = (F_{221} \vee_4 F_{222}),$$

де $F_{221} = y$ та $F_{222} = z$.

Отже, ми продемонстрували, що ця формула побудована із пропозиційних змінних

$$F_{12} = z, \quad F_{111} = x, \quad F_{112} = y, \quad F_{211} = x, F_{221} = y, F_{222} = z$$

за викладеними вище правилами.

При спробі аналогічно розкласти другу послідовність символів на певному кроці отримаємо вираз $(F_1 \sim F_2$, який не має за-криваючої дужки. Отже, ця послідовність не є пропозиційною формулою. ◄

2. Виписати всі підформули формули:

$$(((x \to y) \land z) \sim ((\neg x) \to (y \lor z))).$$

► Скориставшись процедурою, що описана в попередньому пункті, дістанемо, що F_1, F_2, F_{11}, F_{12}, F_{21}, F_{22}, F_{111}, F_{112}, F_{211}, F_{221}, F_{222} – це всі підформули даної формули. ◄

Кожна формула A зображує форму або схему складеного висловлення: вона перетворюється на висловлення, якщо замість її пропозиційних змінних підставити якісь конкретні висловлення. Оскільки кожне із підставлених висловлень має значення **0** або **1**, то, послідовно обчислюючи значення всіх підформул формули A, одержимо значення формули A на цьому наборі висловлень, яке дорівнюватиме **0** або **1**. Підставляючи у формулу A замість її пропозиційних змінних інший набір висловлень, аналогічно обчислимо нове значення формули A і т. д. Оскільки кожне із висловлень набору повністю характеризується своїм значенням (істинно або хибно, тобто **1** або **0**), то замість пропозиційних змінних у формулу можна підставляти не самі висловлення, а їхні значення – **1** або **0**.

Нехай $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – це всі пропозиційні змінні, що входять до формули A; позначатимемо цей факт $A(p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Формулі $A(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ поставимо у відповідність функцію $f(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, що означена на множині впорядкованих наборів $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, де кожне p_i набуває значення у множині $B = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, і значенням функції f є **0** або **1**. Значення функції f на наборі значень $a_1, a_2, \ldots, a_n$ її змінних $p_1, p_2, \ldots, p_n$ дорівнює значенню формули $A(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ при підстановці до неї замість пропозиційних змінних $p_1, p_2, \ldots, p_n$ значень $a_1, a_2, \ldots, a_n$, відповідно. Зауважимо, що кількість елементів в області визначення функції f дорівнює 2^n.

Приклад 1.6. Обчислити значення формули алгебри висловлень

$$(((a \to (\neg\, b)) \to (b \land ((\neg\, c) \to a))) \sim (\neg\, a))$$

на наборі (1,1,0) значень її змінних, тобто за умови, що $a = \mathbf{1}$, $b = \mathbf{1}$, $c = \mathbf{0}$.

► Для цього за допомогою індексів занумеруємо порядок виконання операцій у даній формулі, як було зроблено у прикладі 1.5(1). Матимемо:

$$(((a \to_4 (\neg_1 b)) \to_7 (b \wedge_6 ((\neg_2 c) \to_5 a))) \sim_8 (\neg_3 a)).$$

Підставимо замість пропозиційних змінних a, b, c задані вище значення, дістанемо

$$(((\mathbf{1} \to_4 (\neg_1 \mathbf{1})) \to_7 (\mathbf{1} \wedge_6 ((\neg_2 \mathbf{0}) \to_5 \mathbf{1}))) \sim_8 (\neg_3 \mathbf{1})).$$

Обчисливши операції 1, 2 та 3, дістанемо вираз

$$(((\mathbf{1} \to_4 \mathbf{0}) \to_7 (\mathbf{1} \wedge_6 (\mathbf{1} \to_5 \mathbf{0}))) \sim_8 \mathbf{0}),$$

який після обчислення операцій 4 та 5 набуде вигляду

$$((\mathbf{0} \to_7 (\mathbf{1} \wedge_6 \mathbf{0})) \sim_8 \mathbf{0}).$$

Результатом операції 6 є $\mathbf{0}$, отже, матимемо $((\mathbf{0} \to_7 \mathbf{0}) \sim_8 \mathbf{0})$. Після виконання операції 7 дістанемо $(\mathbf{1} \sim_8 \mathbf{0})$. Останній вираз має значення $\mathbf{0}$. Таким чином, значенням даної формули на наборі $(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{0})$ буде $\mathbf{0}$. Аналогічні обчислення можна виконати й для решти семи наборів значень змінних a, b, c. ◄

Функцію f називають **функцією істинності** для формули A або відповідного складеного висловлення. Для функції істинності f можна побудувати **таблицю істинності** (табл. 1.3). Традиційно набори значень змінних розташовують у цій таблиці в лексикографічному порядку (див. розд. 2).

Таблиця 1.3

$p_1\, p_2 \ldots p_{n-1}\, p_n$	$f(p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n)$
0 0 ... 0 0	$f(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}, \mathbf{0})$
0 0 ... 0 1	$f(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}, \mathbf{1})$
0 0 ... 1 0	$f(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{1}, \mathbf{0})$
0 0 ... 1 1	$f(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{1}, \mathbf{1})$
....	....
1 1 ... 1 0	$f(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{1}, \mathbf{0})$
1 1 ... 1 1	$f(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{1}, \mathbf{1})$

Приклад 1.7. Побудувати таблицю істинності для формули із попереднього прикладу.

► У першому рядку кожного стовпця останньої таблиці записано вираз (підформулу) і номер відповідної операції. Наприклад, запис $(a\to(1))$ (4) означає, що результатом операції із номером 4 є імплікація значення пропозиційної змінної a та результату операції з номером 1, а запис $((4)\to(6))$ (7) означає, що результатом операції з номером 7 є імплікація значення операції із номером 4 і результату операції із номером 6 тощо.

a b c	$(\neg b)$ (1)	$(\neg c)$ (2)	$(\neg a)$ (3)	$(a \to (1))$ (4)	$((2) \to a)$ (5)	$(b \wedge (5))$ (6)	$((4) \to (6))$ (7)	$((7) \sim (3))$ (8)
0 0 0	1	1	1	1	0	0	0	0
0 0 1	1	0	1	1	1	0	0	0
0 1 0	0	1	1	1	0	0	0	0
0 1 1	0	0	1	1	1	1	1	1
1 0 0	1	1	0	1	1	0	0	1
1 0 1	1	0	0	1	1	0	0	1
1 1 0	0	1	0	0	1	1	1	0
1 1 1	0	0	0	0	1	1	1	0

◄

Формулу алгебри висловлень $A(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ називають **тавтологією**, коли їй відповідає функція істинності, що тотожно дорівнює **1**. Те, що формула A є тавтологією, позначають як $\vDash A$.

Тавтології ще називають **тотожно істинними формулами**, або **законами алгебри висловлень**.

Наведемо приклади деяких важливих тавтологій:

$(p \vee (\neg p))$ (закон виключення третього);

$(\neg (p \wedge (\neg p)))$ (закон виключення суперечності);

$(p \rightarrow p)$ (закон тотожності).

Переконатись у тому, що ці формули є тавтологіями, можна за допомогою відповідних таблиць істинності.

Іноді перевірку того, що певна формула є тавтологією, виконують за допомогою **способу відшукання контрприкладу** (або методу від супротивного). Пояснимо його на прикладах.

Приклад 1.8.

1. Перевірити, чи є тавтологією формула

$A = (((a \rightarrow \neg b) \wedge (b \rightarrow (a \wedge c))) \wedge (\neg c \rightarrow \neg a)) \rightarrow (a \vee \neg c)$.

► Припустимо, що формула A не є тавтологією. Тоді принаймні на одному наборі значень формула A набуває значення **0**. Спробуємо відшукати цей набір. Оскільки останньою (головною) операцією формули A є імплікація, то її консеквент має дорівнювати нулю, а антецедент – одиниці. Консеквент $(a \vee \neg c)$ дорівнює нулю, коли $a = \mathbf{0}$ та $c = \mathbf{1}$. Звідси $(a \rightarrow \neg b) = \mathbf{1}$ та $(\neg c \rightarrow \neg a) = \mathbf{1}$. Залишилось з'ясувати, чи може за цих умов вираз $(b \rightarrow (a \wedge c))$ дорівнювати одиниці. Відповідь позитивна (для $b = \mathbf{0}$). Отже, ми знайшли набір $(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$, на якому формула A набуває значення **0**, тобто відшукали контрприклад, який свідчить, що формула A не є тавтологією. ◄

2. У разі, коли при спробі відшукати контрприклад для певної формули A отримуємо суперечність, можемо стверджувати, що A – тавтологія.

Наприклад, треба перевірити на тавтологічність формулу

$B = (((a \rightarrow \neg b) \wedge (b \rightarrow (a \wedge c))) \wedge (\neg c \rightarrow \neg a)) \rightarrow (a \vee \neg b)$,

яка є дещо зміненим варіантом попередньої формули A.

► Діючи саме у такий спосіб, матимемо: $a = \mathbf{0}$ і $b = \mathbf{1}$, звідки $(a \rightarrow \neg b) = \mathbf{1}$, $(\neg c \rightarrow \neg a) = \mathbf{1}$, однак $(b \rightarrow (a \wedge c)) = \mathbf{0}$, що суперечить припущенню $(b \to (a \wedge c)) = \mathbf{1}$. Отже, формула B є тавтологією. ◄

Якщо формула $A \to B$ є тавтологією, то кажуть, що формула A **сильніша ніж** B, а формула B **слабша ніж** A.

Формула алгебри висловлень $A(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, яка набуває значення $\mathbf{0}$ на всіх наборах $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ значень своїх пропозиційних змінних, називається **суперечністю**, або **тотожно хибною формулою.**

Формулу, що не є ні тавтологією, ні суперечністю, називають **нейтральною**.

Множину всіх формул алгебри висловлень розбивають на тавтології, суперечності та нейтральні формули.

Формулу, яка не є суперечністю, називають **виконуваною**, інакше – **невиконуваною**.

Приклад 1.9.

1. Показати, що формула алгебри висловлень

$$(a \to (b \to \neg\, b)) \wedge (a \to c) \vee (a \wedge \neg\, c)$$

є виконуваною.

Для будь-якого набору значень змінних, у якому $a = \mathbf{1}$ та $c = \mathbf{0}$, підформула $(a \wedge \neg\, c)$, а отже, і вся формула набуватиме значення $\mathbf{1}$, тому ця формула є виконуваною.

2. Довести, що формула $A = (a \to c) \wedge (b \to c)$ алгебри висловлювань є сильнішою за формулу $B = (a \wedge b) \to c$.

Для доведення слід відомим способом переконатись, що формула $A \to B$ є тавтологією.

3. Визначити, чи є формула алгебри висловлень

$$((a \vee b) \to c) \to ((a \to c) \vee (b \to c))$$

тавтологією, суперечністю або нейтральною.

За допомогою таблиці істинності або методом відшукання контрприкладу для формули можна переконатись, що ця формула є тавтологією.

4. Чи може суперечність містити тільки операції із множини $\{\vee, \wedge, \sim, \to\}$? Відповідь обґрунтувати.

Припустимо, що така формула-суперечність існує. Підставимо замість усіх її пропозиційних змінних значення $\mathbf{1}$. Усі підформули цієї формули містять тільки операції з множини $\{\vee, \wedge, \sim, \to\}$, тому всі вони, отже, і вся формула набуватимуть значення **1** (див. табл. 1.2). Це суперечить нашому припущенню про те, що ця формула є суперечністю. Звідси доходимо висновку, що такої суперечності бути не може.

5. Довести чи спростувати таке твердження: якщо A та B – тавтології, то $A \vee B$ – тавтологія. Чи правильне обернене твердження?

Оскільки A та B – тавтології, то на кожному наборі значень їхніх пропозиційних змінних ці формули набуватимуть значення **1**, отже, формула $A \vee B$ також дорівнюватиме **1**. Тому наведене твердження є істинним.

Обернене твердження не справджується. Наприклад, якщо A – тавтологія, а B – суперечність, то $A \vee B$ буде тавтологією, але при цьому не виконуватиметься умова, що A та B – тавтології.

6. Довести чи спростувати таке твердження: якщо $A \to B$ – виконувана формула, то A та B – виконувані. Чи правильне обернене твердження?

Це твердження хибне. Наприклад, якщо A – суперечність (тобто не є виконуваною формулою), а B – довільна формула, то $A \to B$ буде тавтологією (тобто буде виконуваною формулою).

Обернене твердження справджується. Якщо A та B – виконувані формули, то принаймні на одному наборі значень пропозиційних змінних формула B набуватиме значення **1**. Тоді на цьому наборі формула $A \to B$ також дорівнюватиме **1**, а отже, буде виконуваною.

7. Довести твердження: якщо A та $A \to B$ – тавтології, то B – тавтологія (правило висновку, або *modus ponens* (MP)).

Припустимо, що формула B не є тавтологією. Тоді на якомусь наборі значень пропозиційних змінних формула B набуватиме значення **0**. На цьому самому наборі формула A набуватиме значення **1**, а формула $A \to B$ дорівнюватиме **0**, а це суперечить припущенню, що $A \to B$ – тавтологія. Отже, припустивши, що формула B не є тавтологією, ми дійшли суперечності, тому справджується, що B – тавтологія.

8. Відомо, що формула $A \to B$ є тавтологією, а формула $A \sim B$ – нейтральна. Що можна сказати про формулу $B \to A$?

Із умов задачі випливає, що існує такий набір значень пропозиційних змінних, на якому формула B набуватиме значення **1**, а формула A – значення **0** (на цьому наборі формула $A \sim B$ дорівнюватиме **0**, а формула $A \to B$ – **1**), а також існує такий набір, на якому обидві формули A та B набуватимуть однакових значень (на цьому наборі обидві формули $A \sim B$ та $A \to B$ дорівнюватимуть **1**). Тоді на першому із цих наборів формула $B \to A$ дорівнюватиме **0**, а на другому вона дорівнюватиме **1**. Отже, формула $B \to A$ – нейтральна.

9. Відомо, що $\vDash A \to \neg A$. Що можна сказати про формулу A?

Формула A є суперечністю. Якщо припустити, що формула A не є суперечністю, то вона виконувана, тобто принаймні на одному наборі значень пропозиційних змінних формула A набуватиме значення **1**. Тоді на цьому наборі формула $A \to \neg A$ дорівнюватиме **0**, що суперечить умові задачі. ◄

Порядок виконання операцій у формулі визначається за допомогою дужок. Задля зменшення їх кількості випускають зовнішні дужки й запроваджують такий порядок (пріоритет) виконання операцій у разі відсутності дужок: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\sim$ (за спаданням). Часто у формулах алгебри висловлень випускають знак кон'юнкції $\wedge$ і замість $a \wedge b$ записують ab.

Для визначення порядку виконання операцій у формулі пріоритету операцій не достатньо. Потрібно ще вказувати для однакових операцій, групуються вони зліва направо чи справа наліво. Наприклад, операції $\wedge$ та $\vee$ групуються зліва направо, а операція $\to$ – справа наліво. Тому для формули $a \wedge b \wedge c$ дужки розставляємо таким чином: $((a \wedge b) \wedge c)$, для формули $a \to b \to a$ дужки розставляємо так: $(a \to (b \to a))$. Зазначимо, що для операцій $\wedge$ та $\vee$ порядок групування не є суттєвим, але для операції $\to$ він є важливим. Тому для формули $a \to b \to a$ при групуванні дужок справа наліво отримаємо формулу $(a \to (b \to a))$, яка не еквівалентна попередній формулі $(a \to (b \to a))$. Переконайтесь у цьому самостійно. Для операції еквівалентності групування не використовують.

Приклад 1.10. Розставити дужки у формулі:

$$a \to b \to \neg b \wedge a \to c \vee a \wedge \neg c.$$

► Починаємо із пошуку операцій найвищого пріоритету й беремо відповідну підформулу в дужки. Тут операцією з найвищим пріоритетом є заперечення. Воно зустрічається двічі. Отримуємо формулу

$$a \to b \to (\neg\, b) \wedge a \to c \vee a \wedge (\neg\, c).$$

Наступна за пріоритетом операція – це $\wedge$. Така операція має два аргументи. Беремо відповідні підформули в дужки:

$$a \to b \to ((\neg b) \wedge a) \to c \vee (a \wedge (\neg\, c)).$$

Далі виокремлюємо підформулу з операцією $\vee$. Дістали

$$a \to b \to ((\neg b) \wedge a) \to (c \vee (a \wedge (\neg\, c))).$$

Наступна за пріоритетом операція – імплікація $\to$. Однак тут треба врахувати порядок групування, тому отримуємо остаточний результат:

$$(a \to (b \to (((\neg\, b) \wedge a) \to (c \vee (a \wedge (\neg\, c)))))).$$ ◄

Структура формули. Розстановка дужок у формулі вказує не лише на порядок виконання операцій, а фактично задає її структуру. Тут важливими є поняття головної операції у формулі та її аргументів.

Приклад 1.11. Проаналізувати структуру формули

$$(a \to (b \to (((\neg\, b) \wedge a) \to (c \vee (a \wedge (\neg\, c))))))$$

із прикладу 1.10.

► Головною буде перша імплікація (позначаємо головну операцію зірочкою *). Маємо такий запис:

$$(\ a \to^* (b \to (((\neg b) \wedge a) \to (c \vee (a \wedge (\neg\, c)))))).$$

Далі аналізуємо підформули. Підформули

$$a \quad \text{та} \quad (b \to (((\neg\, b) \wedge a) \to (c \vee (a \wedge (\neg\, c)))))$$

задають перший і другий аргументи цієї операції. Для другої підформули головною буде перша імплікація, тобто

$$(b \to^* (((\neg\, b) \wedge a) \to (c \vee (a \wedge (\neg\, c))))).$$

Далі, у підформулі

$$(((\neg\, b) \wedge a) \to (c \vee (a \wedge (\neg\, c))))$$

головною є імплікація, тому отримуємо

$$(((\neg b) \wedge a) \to^* (c \vee (a \wedge (\neg c)))).$$

Аргументами є підформули

$$((\neg\, b) \wedge a) \text{ та } (c \vee (a \wedge (\neg\, c))).$$

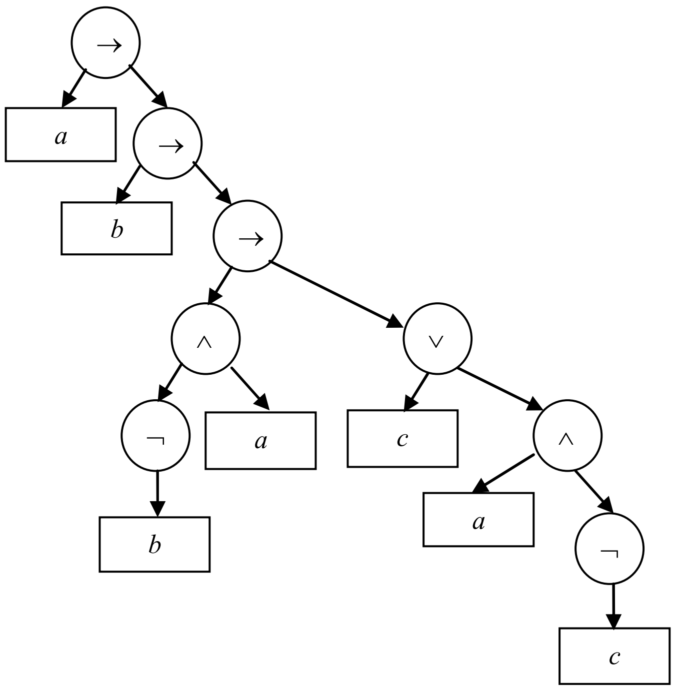
Подаємо першу підформулу у вигляді

$$((\neg\, b) \wedge^* a),$$

а другу – $\qquad (c \vee^* (a \wedge (\neg\, c))).$

Продовжуючи таким чином, підійдемо до найпростіших підформул a , b, c.

Структуру формули часто подають **деревом синтаксичного аналізу формули**. У ньому дужки не вказують. Для проаналізованої формули дерево синтаксичного аналізу має вигляд:



Наведене дерево дає наочне уявлення про порядок виконання операцій, оскільки спочатку виконуються операції, записані внизу дерева, а потім ті, які йдуть вище. ◄

Проблема розв'язності в алгебрі висловлень – це задача знаходження алгоритму, за допомогою якого для будь-якої формули A алгебри висловлень можна визначити, є A тотожно істинною (тавтологією), чи ні.

Для алгебри висловлень цю проблему можна, зокрема, розв'язати такими двома способами:

1) побудувати таблицю істинності для формули A й перевірити, чи складається стовпчик значень A лише з одиниць;

2) застосувати спосіб відшукання контрприкладу.

Аналогічно можна сформулювати й розв'язати проблему розв'язності для визначення того, чи є певна формула алгебри висловлень суперечністю або виконуваною.

Завдання для самостійної роботи

1. Визначити, чи є наведена послідовність символів формулою алгебри висловлень:

(а) $(((x \to y) \wedge (\neg z)) \sim ((\neg x) \to (y \to x)))$;

(б) $(((\neg x) \sim ((\neg y) + 1)) \to (x \vee 5y))$;

(в) $(((\neg y) \sim (x \wedge (\neg z))) \to ((\neg y) \vee x))$;

(г) $(((((x \to y) \sim (\neg z)) \vee x) \wedge (\neg y)))$.

2. Виписати всі підформули даної формули:

(а) $(((x \to (\neg y)) \wedge (\neg z)) \sim ((\neg x) \to (x \wedge z)))$;

(б) $((((y \vee (\neg z)) \to (y \wedge z)) \sim ((\neg y) \wedge x))$;

(в) $((z \to (\neg y)) \wedge ((\neg x) \vee (\neg(y \vee (\neg x)))))$;

(г) $(((\neg x \wedge y) \vee (x \sim ((\neg y) \to x))$.

3. Занумерувати послідовність виконання операцій у формулі:

(а) $(((y \sim (\neg z)) \wedge (\neg x)) \to ((\neg z) \sim (x \wedge y)))$;

(б) $(((x \to (\neg y)) \to (y \wedge ((\neg z) \to x))) \sim (\neg x))$.

4. Занумерувати послідовність виконання операцій у формулі з урахуванням їхніх пріоритетів:

(а) $(a \to \neg b) \vee (\neg a \sim c) \wedge b \vee (c \to \neg (a \sim b))$;

(б) $(a \to \neg ((b \vee c) \wedge \neg a)) \to (\neg c \vee b) \wedge a \sim \neg (a \to \neg b)$.

5. Знайти значення істинності формули:

(а) $(a \sim b) \wedge ((\neg c \to b) \vee (\neg a \wedge c) \vee (a \wedge \neg b))$
при $a = \mathbf{0}$, $b = \mathbf{1}$, $c = \mathbf{0}$;

(б) $((b \to a) \wedge (\neg c \vee (a \sim \neg b))) \to (a \wedge (d \vee \neg b))$
при $a = \mathbf{1}$, $b = \mathbf{1}$, $c = \mathbf{0}$, $d = \mathbf{1}$;

(в) $\neg a \wedge (a \sim c) \wedge (\neg b \vee (\neg c \to a))$
при $a = \mathbf{1}$, $b = \mathbf{0}$, $c = \mathbf{1}$.

6. Знайти значення істинності складеного висловлення:

(а) *Якщо ми успішно складемо іспити* (a), *то поїдемо відпочивати до моря* (b), *і ми або успішно складемо іспити*, *або здійснимо турпохід у Карпати* (c) *тоді й тільки тоді, коли погода* *буде хорошою* (d). Значення істинності елементарних висловлень такі: $a = \mathbf{1}$, $b = \mathbf{0}$, $c = \mathbf{0}$, $d = \mathbf{1}$.

(б) *Якщо ми успішно виконаємо домашнє завдання з математичної логіки* (a), *то ми отримаємо заліковий бал* (b) *або візьмемо участь у науковому семінарі* (c), *водночас якщо ми візьмемо участь у науковому семінарі й отримаємо заліковий бал, то достроково складемо іспит з математичної логіки* (d). Значення істинності елементарних висловлень:

$$a = \mathbf{0}, \quad b = \mathbf{1}, \quad c = \mathbf{0}, \quad d = \mathbf{1}.$$

7. Скласти таблицю істинності для формули алгебри висловлень:

(а) $(a \to \neg (b \wedge c)) \to (c \to \neg a)$;

(б) $((\neg a \vee b) \sim (a \wedge \neg c)) \vee (a \to b)$;

(в) $((a \to b) \sim (b \to \neg c)) \to (c \wedge a)$;

(г) $(a \to b) \to ((b \to c) \to (a \to c))$.

8. Побудувати таблицю істинності й показати, що дана формула алгебри висловлень є тотожно істинною (тавтологією):

(а) $\neg a \vee \neg b \vee a \wedge b$;

(б) $a \to (b \to a)$;

(в) $(a \to b) \to ((b \to c) \to (a \to c))$;

(г) $(a \to c) \to ((b \to c) \to ((a \vee b) \to c))$.

9. Способом відшукання контрприкладу встановити, що наведена формула алгебри висловлень є тавтологією:

(а) $((a \to b) \wedge (c \to d)) \to ((a \vee c) \to (b \vee d))$;

(б) $(a \to (b \to c)) \to ((d \to b) \to (a \to (d \to c)))$;

(в) $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c))$;

(г) $(a \to b) \to ((a \to c) \to (a \to (b \wedge c)))$.

10. Довести, що формула $((a \to b) \wedge (b \to c)) \to (a \to c)$ є тавтологією (транзитивна властивість імплікації). Чи буде тавтологією обернена імплікація $(a \to c) \to ((a \to b) \wedge (b \to c))$?

11. Довести, що формула $((a \sim b) \wedge (b \sim c)) \to (a \sim c)$ є тавтологією (транзитивна властивість еквівалентності). Чи буде тавтологією обернена імплікація $(a \sim c) \to ((a \sim b) \wedge (b \sim c))$?

12. Довести, що формула $((a \to b) \wedge (b \to c)) \to ((a \wedge b) \to c)$ є тавтологією. Чи буде тавтологією обернена імплікація $((a \wedge b) \to c) \to ((a \to b) \wedge (b \to c))$?

13. Довести, що формула $(a \to b) \wedge (b \to c) \to (a \to (b \wedge c))$ є тавтологією. Чи буде тавтологією обернена імплікація

$$(a \to (b \wedge c)) \to ((a \to b) \wedge (b \to c))?$$

14. У різні способи показати, що дана формула алгебри висловлень не є тавтологією:

(а) $(a \to b) \to (b \to a)$;

(б) $((a \wedge b) \to c) \sim ((a \to b) \to c)$;

(в) $(a \sim (b \wedge c)) \sim ((a \sim b) \wedge (a \sim c))$;

(г) $(a \to (a \to b)) \to (b \sim a)$.

15. Перевірити (довести чи спростувати), чи є наведена формула алгебри висловлень тавтологією:

(а) $((a \to b) \to (c \to d)) \to ((a \to c) \to (b \to d))$;

(б) $(b \to (a \to (b \to c))) \to (a \to c)$;

(в) $((a \to b) \vee (c \to b)) \sim ((a \wedge c) \to b)$;

(г) $((a \to b) \wedge (c \to d)) \to ((a \vee c) \to (b \vee d))$.

16. Порівняти формули A та B. Переконатись, що одна з них є тавтологією, а інша – ні:

(а) $A = a \to ((a \to b) \to b)$, $B = (a \to (a \to b)) \to b$;

(б) $A = ((a \to b) \to (a \to \neg b)) \to \neg a$,

$B = (a \to b) \to ((a \to \neg b) \to \neg a)$;

(в) $A = (b \to c) \to ((a \to b) \to (a \to c))$,

$B = ((b \to c) \to (a \to b)) \to (a \to c)$.

17. Показати, що формула алгебри висловлень є виконуваною:

(а) $(a \to (b \to \neg c)) \wedge (a \to b) \vee (c \sim \neg b)$;

(б) $(a \to b) \wedge (a \to \neg b) \wedge (b \to c) \wedge (b \to \neg c) \wedge (c \to a) \wedge (c \to \neg a)$;

(в) $(\neg a \vee b) \vee (\neg b \vee c) \vee (a \to \neg b)$.

18. Переконатися в тому, що наведена формула алгебри висловлень є суперечністю:

(а) $\neg ((a \to b) \to ((a \wedge \neg b) \to b))$;

(б) $(a \vee b) \sim (\neg a \wedge (b \to \neg b))$;

(в) $(a \to (b \to c)) \wedge (a \to b) \wedge (a \wedge \neg c)$;

(г) $\neg b \wedge a \wedge (a \to b)$;

(д) $(a \vee \neg a) \to (b \wedge \neg b)$.

19. Довести, що формула A алгебри висловлень є сильнішою за формулу B:

(а) $A = (a \to b) \wedge (b \to c)$, $B = a \to c$;

(б) $A = (a \to b) \wedge (b \to c)$, $B = a \to (b \wedge c)$;

(в) $A = (a \sim b) \wedge (b \sim c)$, $B = a \sim c$;

(г) $A = a \to (b \to c)$, $B = (a \to b) \to (a \to c)$.

20. Визначити, чи є наведена формула алгебри висловлень тавтологією, суперечністю або нейтральною:

(а) $((a \wedge b) \to c) \to ((a \to c) \wedge (b \to c))$;

(б) $(a \wedge c \vee b \wedge d) \to ((a \vee b) \wedge (c \vee d))$;

(в) $(a \wedge b \vee c \wedge d) \to ((a \vee b) \wedge (c \vee d))$;

(г) $((a \sim b) \to (c \sim d)) \to ((a \vee c) \sim (b \vee d))$;

(д) $((a \to b) \wedge a \wedge b) \sim ((a \to b) \wedge a)$;

(е) $((\neg a \vee b) \wedge (\neg b \vee c) \wedge a) \to \neg c$.

21. Чи може тавтологія містити тільки операції із множини $\{\vee, \wedge\}$? Відповідь обґрунтувати.

22. Довести, що будь-яка формула алгебри висловлень, операціями якої є тільки операції з множини $\{\vee, \wedge\}$, є нейтральною.

23. Довести, що довільна формула алгебри висловлень, яка містить із символів логічних операцій лише $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\sim$, є виконуваною.

24. Довести чи спростувати твердження:

(а) Із двох формул A та $\neg A$ алгебри висловлень принаймні одна – тавтологія.

(б) Якщо A та B – тавтології, то $A \wedge B$ – тавтологія. Чи правильне обернене твердження?

(в) Якщо A та B – тавтології, то $A \vee B$ – тавтологія. Чи правильне обернене твердження?

(г) Якщо A та B – тавтології, то $A \to B$ – тавтологія. Чи правильне обернене твердження?

(д) Якщо формула $A \sim B$ – тавтологія, то A та B – тавтології. Чи правильне обернене твердження?

25. Довести чи спростувати твердження:

(а) Якщо A – виконувана формула алгебри висловлень, то формула $\neg A$ є невиконуваною.

(б) Формула A невиконувана тоді й тільки тоді, коли A – суперечність.

(в) Із двох формул A та $\neg A$ алгебри висловлень хоча б одна є виконуваною.

(г) Якщо A та B – виконувані формули, то $A \wedge B$ – виконувана. Чи правильне обернене твердження?

(д) Якщо A та B – виконувані формули, то $A \vee B$ – виконувана. Чи є правильним обернене твердження?

(е) Якщо $A \sim B$ – виконувана формула, то A та B – виконувані. Чи правильне обернене твердження?

26. Довести твердження:

(а) Якщо $A \to B$ і $\neg B$ – тавтології, то $\neg A$ – тавтологія (правило заперечення, або modus tolens).

(б) Якщо $A \vee B$ і $\neg A$ – тавтології, то B – тавтологія (правило диз'юнктивного силогізму).

(в) Якщо $A \to B$ і $B \to C$ – тавтології, то $A \to C$ – тавтологія (правило ланцюгового висновку).

(г) Якщо $A \to B$ та $A \to \neg B$ – тавтології, то $\neg A$ – тавтологія (метод доведення від супротивного).

27. Довести твердження:

(а) Якщо $(A \vee B)$ і $(\neg A \vee C)$ – тавтології, то $(B \vee C)$ – тавтологія.

(б) Якщо формули $(A \vee B)$, $(A \to C)$ і $(B \to D)$ – тавтології, то $(C \vee D)$ – тавтологія.

(в) Якщо $(\neg A \vee B)$ і $(\neg B \vee \neg C)$ – тавтології, то $(A \to \neg C)$ – тавтологія.

28. Відомо, що формула $A \to B$ є тавтологією, а формула $A \sim B$ – суперечністю. Що можна сказати про формулу $B \to A$?

29. Формула $A \sim B$ є суперечністю. Що можна стверджувати про формули $\neg A \sim B$ і $\neg A \sim \neg B$?

30. Відомо, що $\models B \to C$. Чи можна стверджувати, що для довільної формули A алгебри висловлень формула

$(A \to B) \to (A \to C)$ є тавтологією?

31. Розставити дужки у формулах:

(а) $a \wedge b \to c \to (a \to c \wedge (b \to c))$;

(б) $a \wedge c \vee b \wedge d \to (a \vee b) \wedge c \vee d$;

(в) $a \wedge b \vee c \wedge d \to a \vee b \wedge c \vee d$;

(г) $(a \sim b) \to (c \sim d) \to a \vee c \sim b \vee d$;

(д) $a \to b \wedge a \wedge b \sim (a \to b) \wedge a$;

(е) $\neg a \vee b \wedge \neg b \vee c \wedge a \to \neg c$.

32. Побудувати дерева синтаксичного аналізу для формул із завдання 31.

1.3. Рівносильні формули алгебри висловлень

Формули A та B алгебри висловлень називають **рівносильними**, якщо їм відповідає та сама функція істинності, тобто вони набувають однакових значень на всіх наборах значень їхніх пропозиційних змінних.

Рівносильність формул A та B позначають за допомогою знака $\equiv$ ($=$ або $\leftrightarrow$): записують $A \equiv B$.

Рівносильні формули ще часто називають **еквівалентними**.

Рівносильність формул можна перевірити складанням таблиць істинності відповідних функцій і порівнюванням цих таблиць.

Рівносильним перетворенням формули A називають дію або процедуру, у результаті якої дістаємо формулу B, рівносильну формулі A.

Неважко довести (побудовою відповідних таблиць істинності) **основні тотожності** (**рівносильності**, **закони**) **алгебри висловлень.**

1. $(a \vee b) \vee c \equiv a \vee (b \vee c)$, $(a \wedge b) \wedge c \equiv a \wedge (b \wedge c)$ – **асоціативність**;

2. $a \vee b \equiv b \vee a$, $a \wedge b \equiv b \wedge a$ – **комутативність**;

3. $a \wedge (b \vee c) \equiv (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, $a \vee (b \wedge c) \equiv (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ – **дистрибутивність**;

4. $a \vee a \equiv a$, $a \wedge a \equiv a$ – **ідемпотентність**;

5. $\neg (a \vee b) \equiv \neg a \wedge \neg b$, $\neg (a \wedge b) \equiv \neg a \vee \neg b$ – **закони де Моргана**;

6. $\neg \neg a \equiv a$ – **закон подвійного заперечення**;

7. $a \vee \mathbf{0} \equiv a$, $a \wedge \mathbf{1} \equiv a$; $a \vee \mathbf{1} \equiv \mathbf{1}$, $a \wedge \mathbf{0} \equiv \mathbf{0}$ – **властивості елементів $\mathbf{0}$ та $\mathbf{1}$**;

8. $a \vee \neg a \equiv \mathbf{1}$, $a \wedge \neg a \equiv \mathbf{0}$ – **властивості заперечення**;

9. $a \vee (a \wedge b) \equiv a$; $a \wedge (a \vee b) \equiv a$ – **правила поглинання**.

Приклад 1.12.

1. Довести такі рівносильності алгебри висловлень:

(а) $a \to b \equiv \neg a \vee b$; (б) $a \to b \equiv \neg b \to \neg a$;

(в) $a \sim b \equiv (a \to b) \wedge (b \to a)$; (г) $a \sim b \equiv (\neg a \vee b) \wedge (a \vee \neg b)$;

(д) $a \sim b \equiv (a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$; (е) $a \sim b \equiv \neg (a \wedge \neg b) \wedge \neg (\neg a \wedge b)$.

Кожну із наведених рівносильностей неважко довести, побудувавши відповідні таблиці істинності для її правої і лівої частин і порівнявши ці таблиці.

Важливим висновком із цих рівносильностей є те, що операції $\to$ та $\sim$ є надлишковими в алгебрі висловлень. Кожну підформулу, що містить такі операції, можна замінити на рівносильну їй (згідно з наведеними рівносильностями), що міститиме лише операції кон'юнкції, диз'юнкції та заперечення.

2. Використавши тотожності попередньої задачі, замінити формулу алгебри висловлень $\neg (a \to b) \sim (\neg a \to \neg b)$ рівносильною, що містить лише операції кон'юнкції, диз'юнкції та заперечення.

Замінимо спочатку підформули, що містять символ операції $\to$. Матимемо $\neg (\neg a \vee b) \sim (\neg \neg a \vee \neg b)$. Використавши тотожність 4 попередньої задачі, отримаємо рівносильну формулу

$$(\neg \neg (\neg a \vee b) \vee (\neg \neg a \vee \neg b)) \wedge (\neg (\neg a \vee b) \vee \neg (\neg \neg a \vee \neg b)).$$

Застосуємо до цієї формули закон подвійного заперечення зі списку основних тотожностей алгебри висловлень. Отримаємо формулу $((\neg a \vee b) \vee (a \vee \neg b)) \wedge (\neg(\neg a \vee b) \vee \neg (a \vee \neg b))$. Однак і після спрощення дістали рівносильну формулу, що майже вдвічі довша від початкової. Саме цим пояснюється наявність надлишкових операцій $\to$ та $\sim$ в алгебрі висловлень.

3. Дано два складені висловлення:

1) *Якщо один доданок кратний* 3 *і сума кратна* 3, *то й другий доданок кратний* 3.

2) *Якщо один доданок кратний* 3, *а другий – не кратний* 3, *то сума не кратна* 3.

Записати ці висловлення формально й визначити, чи вони рівносильні.

Позначимо елементарні висловлення, з яких складено наведені висловлення, так: *a – один доданок кратний* 3, *b – сума кратна* 3, *c – другий доданок кратний* 3. Відповідні формули, що задають логічну структуру цих висловлень, є такими:

$$(a \wedge b) \to c \text{ і } (a \wedge \neg c) \to \neg b.$$

Побудувавши таблиці істинності для кожної із цих формул, переконаємося, що вони рівносильні.

4. Перевірити, чи є логічно еквівалентними (рівносильними) такі твердження: *Неправильно, що a тоді й тільки тоді, коли b* та $\neg$ *a тоді й тільки тоді, коли* $\neg$ *b*.

Запишемо дані твердження (висловлення) формально. Матимемо відповідно: $\neg (a \sim b)$ і $(\neg a \sim \neg b)$. Таблиці істинності цих формул відрізняються, тому наведені твердження не є логічно еквівалентними (рівносильними).

У той самий час, наприклад, твердження *Неправильно, що a та b* і *Неправильно, що a*, *або неправильно, що b* є рівносильними. Це один із законів де Моргана, записаний словами. ◄

Завдання для самостійної роботи

1. Довести таку рівносильність:

(а) $a \wedge \neg b \vee \neg a \wedge b \equiv (a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$;

(б) $a \vee b \vee c \vee d \equiv (\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c) \to d$;

(в) $(a \wedge b) \to c \equiv (a \wedge \neg c) \to \neg b$;

(г) $(a \sim b) \wedge (a \wedge \neg b \vee b) \equiv a \wedge b$.

2. Довести, що формули алгебри висловлень

$(a \wedge b) \to c$, $(a \wedge \neg c) \to \neg b$, $(b \wedge \neg c) \to \neg a$ та $a \to (b \to c)$ рівносильні.

3. Визначити, яка із наведених чотирьох формул рівносильна формулі $\neg (a \to b)$:

1) $\neg a \to \neg b$;
3) $\neg a \to b$;
2) $a \to \neg b$;
4) $a \wedge \neg b$.

4. Довести, що $a \to b \equiv \neg b \to \neg a$ (**закон контрапозиції**).

5. Перевірити (довести або спростувати), чи має місце така рівносильність:

(а) $\neg (a \sim \neg b) \equiv a \wedge b \vee \neg a \wedge \neg b$;

(б) $(a \vee c) \to (b \vee d) \equiv (a \to b) \wedge (c \to d)$;

(в) $a \to (a \sim b) \equiv (a \to b)$;

(г) $a \to (b \to c) \equiv (a \wedge b) \to c$;

(д) $(a \vee b \vee \neg c) \to a \equiv (b \to a) \wedge (\neg a \to c)$;

(е) $(a \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c)) \equiv ((a \wedge b) \vee (a \wedge c))$.

6. Перевірити, чи є логічно еквівалентними (рівносильними) такі пари тверджень:

(а) *Якщо a, то b* та *Якщо неправильно, що b, то неправильно, що a*.

(б) *Якщо a*, *то b*" та *Якщо неправильно, що a, то неправильно, що b*.

(в) *Якщо a, то b* та *Неправильно, що a, і неправильно, що* $\neg$ *b*.

(г) *Із a випливає b* та *a тільки тоді, коли b*.

(д) *b випливає з a* та $\neg$ *b – достатня умова для* $\neg$ *a*.

(е) *b – необхідна умова для a* та *b тільки тоді, коли a*.

(є) *b – необхідна умова для a* та $\neg$ *b – достатня умова для* $\neg$ *a*.

(ж) *Неправильно, що a або b* та *Неправильно, що a*, *і неправильно, що b*.

(з) *Неправильно, що a та* $\neg$*b* та *Неправильно, що a, або справджується b*.

7. Визначити, які із висловлень логічно рівносильні:

1) *Студент розв'язав цю задачу, але не склав іспит з математичної логіки*.

2) *Студент розв'язав цю задачу або не склав іспит з математичної логіки*.

3) *Неправильно, що студент не розв'язав цю задачу або склав іспит з математичної логіки*.

4) *Студент розв'язав цю задачу і склав іспит з математичної логіки або він не розв'язав цю задачу й не склав іспит з математичної логіки*.

5) *Якщо студент склав іспит з математичної логіки, то він розв'язав цю задачу*.

6) *Студент склав іспит з математичної логіки тоді й тільки тоді, коли він розв'язав цю задачу*.

1.4. Нормальні форми логічних функцій. Досконала диз'юнктивна нормальна форма (ДДНФ). Досконала кон'юнктивна нормальна форма (ДКНФ)

У п. 1.2 описано спосіб побудови таблиці істинності для заданої пропозиційної формули, тобто побудови таблиці логічної функції, яку задає ця формула.

Не менш важливою є обернена задача: для функції, заданої таблицею, графіком, словесно тощо, визначити (побудувати) формулу, що цю функцію задає. У багатьох розділах математики побудувати таку формулу для довільної функції не вдається. Замість формули, яка абсолютно точно визначає вихідну функцію, використовують методи побудови різних формул, що відтворюють цю функцію наближено (або апроксимують її) з певною точністю.

В алгебрі логіки існує кілька процедур, що дають змогу для заданої логічної функції побудувати формули, які задають цю функцію й використовують певний набір логічних операцій.

Розглянемо дві такі процедури.

Будемо вважати, що основною формою задання логічної функції є її таблиця істинності. Якщо функція задана якимось іншим способом (словесно, графіком, якоюсь формулою з іншим набором операцій тощо), то спочатку визначаємо за заданням відповідну таблицю істинності.

Уведемо такі позначення: для логічної змінної x вважатимемо, що $x^0 = \neg x$ та $x^1 = x$. Неважко переконатись, що для логічної змінної $a \in B$ виконується $x^a = 1$, якщо $a = x$ (тобто якщо значення змінних a та x збігаються), а $x^a = 0$, якщо $a \neq x$.

Розглянемо довільну логічну функцію $f(x, y, z)$ від трьох змінних. Нехай (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2),…, (a_k, b_k, c_k) – це всі набори значень змінних, для яких функція f істинна (тобто дорівнює 1). Тоді формула, що задає цю функцію, має вигляд:

$$x^{a_1} y^{b_1} z^{c_1} \vee x^{a_2} y^{b_2} z^{c_2} \vee \ldots \vee x^{a_k} y^{b_k} z^{c_k} \tag{1.1}$$

Справді, якщо до цієї формули підставити замість x, y та z один із наборів (a_i, b_i, c_i) (тобто покласти $x = a_i$, $y = b_i$ і $z = c_i$), то рівно один із логічних доданків формули (1.1), а саме доданок $x^{a_i} y^{b_i} z^{c_i}$, дорівнюватиме 1, $i = 1, 2, \ldots, k$. Отже, значенням усієї формули (1.1) на цьому наборі (a_i, b_i, c_i) буде 1. Якщо ж до (1.1) підставити будь-який інший набір значень змінних (тобто набір, що не увійшов до вищезазначеного списку з k елементів), то всі доданки формули (1.1)дорівнюватимуть 0, отже, і значенням усієї формули на такому наборі буде 0.

Таким чином, обґрунтовано, що значення формули (1.1) збігається зі значенням заданої функції $f(x, y, z)$ на будь-якому наборі (a, b, c) значень її змінних, тобто (1.1) задає (реалізує) функцію $f(x, y, z)$.

Формулу (1.1) називають **досконалою диз'юнктивною нормальною формою** (ДДНФ) логічної функції $f(x, y, z)$.

Операції, що входять до складу ДДНФ – це кон'юнкція, диз'юнкція та заперечення.

Приклад 1.13.

1. Побудувати ДДНФ логічної функції, таблицю істинності якої отримано у прикладі 1.7. Ця функція набуває значення 1 на наборах (0,1,1), (1,0,0) і (1,0,1), тому її ДДНФ – це

$$x^0y^1z^1 \vee x^1y^0z^0 \vee x^1y^0z^1 \text{ або } \neg xyz \vee x\neg y\neg z \vee x\neg yz.$$

2. Побудувати ДДНФ логічної функції $f(x, y, z)$ від трьох змінних, яка набуває такого самого значення, як і більшість її змінних (**функція голосування**).

Функція голосування є істинною на наборах (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0) та (1,1,1), тому її ДДНФ – $\neg xyz \vee x\neg yz \vee xy\neg z \vee xyz$. ◄

Алгоритм побудови ДДНФ для логічних функцій від двох, чотирьох, п'яти та більшої кількості змінних аналогічний.

Приклад 1.14.

1. Побудувати ДДНФ логічної функції $f(x, y, z, u)$ від чотирьох змінних, яка набуває значення 1 на тих і лише тих наборах значень її змінних, у яких кількість одиниць і кількість нулів збігаються.

З умови задачі робимо висновок, що наборами, на яких функція f набуває значення 1, є такі:

(0,0,1,1), (0,1,0,1), (0,1,1,0), (1,0,0,1), (1,0,1,0), (1,1,0,0).

Шукана ДДНФ має вигляд

$$x^0y^0z^1u^1 \vee x^0y^1z^0u^1 \vee x^0y^1z^1u^0 \vee x^1y^0z^0u^1 \vee x^1y^0z^1u^0 \vee x^1y^1z^0u^0 \text{ або}$$

$$\neg x\neg yzu \vee \neg xy\neg zu \vee \neg xyz\neg u \vee x\neg y\neg zu \vee x\neg yz\neg u \vee xy\neg z\neg u.$$

2. Побудувати ДДНФ логічної функції $f(x, y, z, u, v)$ від п'яти змінних, яка набуває значення 1 на тих і лише тих наборах значень її змінних, у яких тільки одна зі змінних дорівнює 0.

Отже, за умовою задана функція набуває значення 1 лише на наборах (0,1,1,1,1), (1,0,1,1,1), (1,1,0,1,1), (1,1,1,0,1) та (1,1,1,1,0).

Відповідна ДДНФ:

$$\neg xyzuv \vee x\neg yzuv \vee xy\neg zuv \vee xyz\neg uv \vee xyzu\neg v. ◄$$

За допомогою тих самих операцій кон'юнкції, диз'юнкції і заперечення можна побудувати іншу формулу, що реалізує певну логічну функцію.

Нехай (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2),…, (a_k, b_k, c_k) – це всі набори значень змінних, для яких логічна функція $f(x, y, z)$ хибна (набуває значення 0). Тоді формула

$$(x^{\neg a_1} \vee y^{\neg b_1} \vee z^{\neg c_1}) \wedge (x^{\neg a_2} \vee y^{\neg b_2} \vee z^{\neg c_2}) \vee \ldots \vee (x^{\neg a} y^{\neg b_k} z^{\neg c_k}) \quad (1.2)$$

реалізує функцію f.

Аналогічно вищенаведеним міркуванням можна обґрунтувати, що для будь-якого набору (a_i, b_i, c_i), $i = 1, 2, \ldots, k$ значенням формули (1.2) буде 0, а для будь-якого іншого набору, що не увійшов до цього списку, (1.2) дорівнюватиме 1. Пропонуємо переконатись у цьому самостійно.

Формулу (1.2) називають **досконалою кон'юнктивною нормальною формою** (ДКНФ) відповідної логічної функції $f(x, y, z)$.

Приклад 1.15.

1. Побудувати ДКНФ для логічної функції $f(x, y, z)$ із прикладу 1.7.

Ця функція набуває значення 0 на наборах (0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (1,1,0) і (1,1,1), тому її ДКНФ має вигляд

$$(x^{\neg 0} \vee y^{\neg 0} \vee z^{\neg 0}) \wedge (x^{\neg 0} \vee y^{\neg 0} \vee z^{\neg 1}) \wedge (x^{\neg 0} \vee y^{\neg 1} \vee z^{\neg 0}) \wedge$$

$$\wedge (x^{\neg 1} \vee y^{\neg 1} \vee z^{\neg 0}) \wedge (x^{\neg 1} \vee y^{\neg 1} \vee z^{\neg 1}) \text{ або}$$

$$(x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \neg z) \wedge (x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee \neg z).$$

2. Визначити ДКНФ функції голосування із попереднього прикладу.

Функція голосування $f(x, y, z)$ є хибною для наборів (0,0,0), (0,0,1), (0,1,0) і (1,0,0), тому її ДКНФ є такою:

$$(x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \neg z) \wedge (x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee y \vee z). \blacktriangleleft$$

Аналогічно можна побудувати ДКНФ логічної функції від будь-якої іншої кількості змінних.

1.5. Логічний висновок на базі алгебри висловлень. Несуперечність множини висловлень

Формулу $B(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ називають **логічним наслідком** (**логічним висновком**) із формул

$$A_1(p_1, p_2, \ldots, p_n), A_2(p_1, p_2, \ldots, p_n), \ldots, A_k(p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

на базі алгебри висловлень, якщо B набуває значення **1** на всіх тих наборах значень $p_1, p_2, \ldots, p_n$, на яких усі A_i ($i = 1, 2, \ldots, k$) набувають значення **1**. Формули $A_1, A_2, \ldots, A_k$ при цьому називають **засновками** чи **припущеннями**.

Те, що B є логічним висновком з $A_1, A_2, \ldots, A_k$ на базі алгебри висловлень, позначають

$$A_1, A_2, \ldots, A_k \vDash B.$$

Вираз

$$A_1, A_2, \ldots, A_k \vDash B$$

називають **твердженням про наслідковість** (**висновковість**), або **наслідковісним** (**висновковісним**) **твердженням**. Можна також уживати термін **наслідковість** (**висновковість**[1]).

Зокрема, якщо $k = 1$, то формулу

$$B(p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

називають **логічним висновком** (**логічним наслідком**) формули $A_1(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ і часто позначають $A_1 \Rightarrow B$.

Неважко переконатись, що формула B є логічним висновком із формул $A_1, A_2, \ldots, A_k$ (тобто $A_1, A_2, ..., A_k \vDash B$) тоді й тільки тоді, коли формула $A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_k \to B$ є тавтологією.

Приклад 1.16.

1. Довести наслідковісне твердження:

$$a \wedge b, \neg c \to \neg b \vDash c.$$

Побудуємо таблиці істинності для кожної із формул, що входять до складу твердження (для зручності об'єднаємо ці таблиці до однієї).

$a\ b\ c$	$a \wedge b$	$\neg c \to \neg b$	c
0 0 0	**0**	**1**	**0**
0 0 1	**0**	**1**	**1**
0 1 0	**0**	**0**	**0**
0 1 1	**0**	**1**	**1**
1 0 0	**0**	**1**	**0**
1 0 1	**0**	**1**	**1**
1 1 0	**1**	**0**	**0**
1 1 1	**1**	**1**	**1**

[1] Терміни введено авторами.

Аналізуючи таблиці, маємо, що тільки на наборі (**1**,**1**,**1**) обидва засновки нашого твердження набувають значення **1**. На цьому самому наборі висновок також набуває значення **1**. Наслідковісне твердження доведено.

2. Перевірити коректність наведених логічних міркувань формальними методами.

(а) *Якщо Андрій поїде до Харкова, то Віктор поїде до Києва. Андрій поїде в Харків або в Одесу. Якщо Андрій поїде в Одесу, то Ольга залишиться у Львові. Однак Ольга не залишилась у Львові. Отже, Віктор поїде до Києва*.

(б) *Для того, щоб бути допущеним до іспитів, необхідно отримати залік з математичної логіки. Я отримаю цей залік, якщо навчуся розв'язувати логічні задачі. Я не навчився розв'язувати логічні задачі. Отже, я не буду допущений до іспитів*.

► Позначимо елементарні висловлення, з яких складено перше з міркувань, так: *a – Андрій поїде у Харків*, *b – Віктор поїде в Київ*, *c – Андрій поїде в Одесу*, *d – Ольга залишиться у Львові*. Відповідні формули-засновки, що задають логічну структуру цих висловлень, є такими: $a \to b$, $a \vee c$, $c \to d$, $\neg\, d$. Висновок – b. Отже, задачу зведено до перевірки такої вивідності:

$$a \to b, a \vee c, c \to d, \neg\, d \vDash b.$$

Побудувавши таблиці істинності для кожної з формул, що входять до складу вивідності, отримаємо, що існує лише один набір (**1**,**1**,**0**,**0**), на якому всі засновки нашої вивідності набувають значення **1**. На цьому самому наборі й висновок b також набуває значення **1**. Отже, наведені логічні міркування коректні.

Аналогічний аналіз зробимо й для другого міркування. У цьому разі маємо такі елементарні висловлення: *a – Я допущений до іспитів*, *b – Я отримав залік з математичної логіки*, *c – Я навчився розв'язувати логічні задачі*. Відповідні формули-засновки, що задають логічну структуру висловлень наведеного міркування, є такими: $b \to a$, $c \to b$, $\neg c$. Висновок – $\neg\, a$.

Побудувавши таблиці істинності, отримаємо, що, наприклад, на наборі (**1**,**0**,**0**) усі засновки нашої вивідності набувають значення **1**. Однак на цьому наборі висновок $\neg\, a$ набуває значення **0**. Отже, наведені логічні міркування некоректні. ◄

Неважко переконатись, що мають місце корисні й часто використовувані вивідності

$$A \wedge B \vDash A,\ A \wedge B \vDash B \text{ та } A \vDash A \vee B,\ B \vDash A \vee B,$$

які можна записати також у вигляді

$$A \wedge B \Rightarrow A,\ A \wedge B \Rightarrow B \text{ та } A \Rightarrow A \vee B,\ B \Rightarrow A \vee B.$$

Множину висловлень

$M = \{A_1(p_1, p_2, \ldots, p_n), A_2(p_1, p_2, \ldots, p_n), \ldots, A_k(p_1, p_2, \ldots, p_n)\}$

називають **несуперечною** (**сумісною**), якщо існує такий набір значень для $p_1, p_2, \ldots, p_n$, на якому кон'юнкція $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$ набуває значення **1** (про висловлення $A_1, A_2, \ldots, A_k$ тоді кажуть, що вони **сумісні**). Якщо на всіх наборах значень $p_1, p_2, \ldots, p_n$ кон'юнкція $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$ набуває значення **0**, кажуть, що висловлення $A_1, A_2, \ldots, A_k$ **несумісні** або множина висловлень M **суперечна**.

Приклад 1.17.

1. Визначити, чи є множина висловлень

$$\{a \sim \neg b, \neg a \to \neg c, a \vee c, c \to b\}$$

несуперечною.

Побудувавши таблицю істинності для формули

$$(a \sim \neg b) \wedge (\neg a \to \neg c) \wedge (a \vee c) \wedge (c \to b),$$

отримаємо, що існує набір (**1**,**0**,**0**), на якому ця формула набуває значення **1**. Отже, задана множина висловлень несуперечна.

2. Перевірити, чи є несуперечною множина висловлень.

1) *Андрій складе іспит з дискретної математики тоді й тільки тоді, коли регулярно виконуватиме домашні завдання*.

2) *Якщо Андрій використає навчальний посібник з дискретної математики, то він регулярно виконуватиме домашні завдання*.

3) *Андрій поїде на відпочинок до Одеси тоді, коли складе іспит з дискретної математики*.

4) *Андрій використає навчальний посібник з дискретної математики й поїде на відпочинок до Одеси*.

Позначимо елементарні висловлення, з яких складена задана множина, так: *a – Андрій складе іспит з дискретної математики*, *b – Андрій регулярно виконуватиме домашні завдання*, *c – Андрій використає навчальний посібник з дискретної математики*, *d – Андрій поїде на відпочинок до Одеси*. Відповідні формули, що задають логічну структуру наведених висловлень:

$$a \sim b,\ c \to b,\ a \to d,\ c \wedge d.$$

Неважко підібрати (навіть не будуючи таблиці істинності) набір, на якому всі чотири останні формули набувають значення **1**. Таким набором буде (**1**,**1**,**1**,**1**). Отже, задана множина висловлень несуперечна.

3. Слідчий допитує трьох свідків: **А**, **Б**, **В**. Свідок **А** стверджує, що **Б** говорить неправду. **Б** наполягає на тому, щоб слідчий не вірив показанням **В**. **В** каже, що ані **А**, ані **Б** не говорять правди. Визначити, хто з трьох свідків говорить правду.

Розглянемо такі елементарні висловлення: a – **А** *говорить правду*, b – **Б** *говорить правду*, c – **В** *говорить правду*. З умов задачі матимемо множину висловлень:

$$a \sim \neg b,\ b \sim \neg c,\ c \sim (\neg a \wedge \neg b).$$

Ця множина несуперечна й усі три висловлення істинні тільки для набору значень (**0**,**1**,**0**). Отже, правду каже лише свідок **Б**. ◄

Завдання для самостійної роботи

1. Довести наслідковість:

(а) $a \vee b, \neg a \vee c \models b \vee c$;

(б) $a \vee b, a \to c, b \to d \models c \vee d$;

(в) $\neg a \vee b, \neg b \vee \neg c \models a \to \neg c$;

(г) $a \to b, a \wedge \neg b \models b$;

(д) $\neg (a \vee b) \models \neg a \vee c$;

(е) $a, c \to \neg(a \vee b) \models \neg c$;

(є) $a \vee \neg c, a \to d, b \to c, \neg b \to d \models d$;

(ж) $a \to (b \vee c), d \to a \models (\neg b \wedge \neg c) \to \neg d$.

2. Побудувавши відповідні таблиці істинності, визначити, чи є правильною така наслідковість:

(а) $(a \to b) \to c \models (a \vee b) \vee c$;

(б) $(a \vee b) \vee c \models (a \to b) \to c$;

(в) $a \to b, a \vee c \models (a \vee c) \to (a \wedge b)$;

(г) $a \to b, a \to c, a \models b \wedge c$;

(д) $a \to b, c \wedge a \models c \wedge b$;

(е) $a \to b, c \wedge a \models c$;

(є) $a \wedge b, \neg a \vee b \models \neg b$;

(ж) $a \vee b, a \to c, b \to c \models \neg c \to \neg a$.

3. Розташувати наведені формули в такому порядку, щоб кожна з них була логічним висновком усіх попередніх: 1) $\neg a \sim b$; 2) $a \to (\neg a \to b)$; 3) $a \wedge \neg b$; 4) $\neg a \to b$; 5) $a \wedge \neg (\neg b \vee a)$.

4. Формули A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 задано таблицями істинності:

$x\ y\ z$	A_1	A_2	A_3	B_1	B_2
0 0 0	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
0 0 1	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**
0 1 0	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**
0 1 1	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**
1 0 0	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**
1 0 1	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**
1 1 0	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**
1 1 1	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**

Визначити, чи має місце таке наслідковісне твердження:

(а) $A_1 \vDash B_2$; (б) $A_1, A_3 \vDash B_1$; (в) $A_2, A_3 \vDash B_2$;

(г) $A_1, A_2, A_3 \vDash B_2$; (д) $A_2, A_3 \vDash B_1$; (е) $A_1, A_3 \vDash B_2$.

5. Довести твердження:

(а) $A, A \to B \vDash B$; (б) $A \to B, \neg B \vDash \neg A$;

(в) $A \to B, B \to C \vDash A \to C$; (г) $A \vee B, \neg A \vDash B$;

(д) $A \to B, A \to \neg B \vDash \neg A$; (е) $A \to \neg A \vDash \neg A$;

(є) $A \to B, B \to \neg A \vDash \neg A$; (ж) $\neg A \to A \vDash A$.

6. Перевірити (довести чи спростувати) твердження:

(а) $A \to B, B \vDash A$; (б) $\neg B \to \neg A, A \vDash B$;

(в) $A \to B, B \to \neg A \vDash A$; (г) $\neg A \to B, \neg A \vDash B$;

(д) $A \to B, \neg A \to B \vDash B$; (е) $\neg A \to \neg B, A \vDash B$.

7. Чи є твердження *Студент погано працював протягом семестру, тому не склав іспит з дискретної математики* логічним висновком із твердження *Якщо студент добре працюватиме протягом семестру, то він успішно складе іспит з дискретної математики*?

8. Нехай задано такий засновок: *Якщо студент не знає математичної логіки, то він не зможе розв'язати логічну задачу*. Визначити коректність логічного висновку за умови другого засновку:

(а) *Студент розв'язав логічну задачу. Отже, він знає математичну логіку*.

(б) *Студент знає математичну логіку. Отже, він зможе розв'язати логічну задачу*.

(в) *Студент не знає математичної логіки. Отже, він не зможе розв'язати логічну задачу*.

(г) *Студент не розв'язав логічну задачу. Отже, він не знає математичної логіки*.

9. Перевірити коректність наведених логічних міркувань формальними методами:

(а) *Якщо студент не прочитає підручник з математичної логіки, то він не набуде необхідних знань. Однак студент прочитав підручник з логіки. Отже, він набув необхідних знань*.

(б) *Якщо певний елемент обчислювальної машини має дефект, то машина не працюватиме. Обчислювальна машина не працює, отже, її певний елемент має дефект*.

(в) *Шахіст N не буде чемпіоном, якщо не виграє цю партію. Однак N виграв цю партію. Отже, N буде чемпіоном*.

(г) *Якщо всі засновки наслідковості істинні й наслідковість правильна, то висновок – істинний. У цій наслідковості висновок хибний. Отже, або в наслідковості не всі засновки істинні, або вона неправильна*.

(д) *Для того, щоб скласти іспит з дискретної математики, мені необхідно дістати підручник або конспект. Я дістану підручник тільки в тому разі, якщо мій приятель не поїде додому. Однак він поїде додому тільки тоді, коли я дістану конспект. Отже, я складу іспит з дискретної математики*.

10. Записати нижченаведені міркування у вигляді наслідковості (на базі алгебри висловлень) і визначити її коректність.

1) (а) *Число ділиться на* 9 *тільки тоді, коли воно ділиться на* 3. (б) *Це число не ділиться на 9. Отже, воно не ділиться й на* 3.

2) (а) *Для того щоб число* 2007 *було простим, необхідно, щоб* 2007 *не було кратне* 6. (б) 2007 *кратне* 6 *тільки тоді, коли* 2007 *кратне* 2. (в) 2007 *не кратне* 2. *Отже*, 2007 *– просте число*.

3) (а) *Якщо в розкладі занять на сьогодні є лекція з алгебри, то немає лекції з дискретної математики*. (б) *Заняття з французької мови є тільки тоді, коли є практикум із програмування*. (в) *Немає лекції з математичного аналізу, якщо немає заняття з французької мови*. (г) *Лекція з алгебри є в розкладі занять на*

сьогодні. Отже, у розкладі занять на сьогодні немає лекції з математичного аналізу.

4) (а) *Будь-який дріб – раціональне число*. (б) *Кожне ціле число є раціональним. Отже, кожне ціле число – дріб.*

5) (а) *Будь-який дріб – раціональне число*. (б) *Кожне ціле число є раціональним. Отже, будь-який дріб – ціле число*.

11. Визначити, чи є задана множина висловлень несуперечною:

(а) $\{a \to b, \neg a, \neg b\}$; (б) $\{a \to \neg b, a \wedge b\}$;
(в) $\{a \to b, a \to \neg b, \neg a\}$; (г) $\{a \to \neg a, \neg a \to a\}$;
(д) $\{\neg (a \to b), b \to a\}$; (е) $\{a \sim c, c \to b, a \wedge \neg c\}$;
(є) $\{a \wedge \neg b, \neg b \to \neg a, c \sim b\}$; (ж) $\{\neg a \sim \neg b, c \to b, c \wedge \neg a\}$;
(з) $\{a \sim \neg b, \neg a \to \neg c, a \vee c, c \to b\}$.

12. Перевірити, чи є несуперечною множина висловлень:

1) *Дмитро успішно складе іспит із дискретної математики тоді й тільки тоді, коли регулярно виконуватиме домашні завдання*.

2) *Якщо Дмитро раціонально організує свій робочий час, то він регулярно виконуватиме домашні завдання.*

3) *Дмитро поїде на екскурсію до Львова тоді, коли успішно складе іспит з дискретної математики*.

4) *Дмитро раціонально організує свій робочий час і поїде на екскурсію до Львова*.

13. Визначити коректність логічного висновку в міркуванні *Крадіжку могли здійснити або* **А**, *або* **Б**, *або* **В**. *Однак крадіжку здійснив* **А**. *Отже, крадіжку не здійснили ні* **Б**, *ні* **В**.

14. Перевірте формальними методами правильність таких логічних міркувань поліцейського детектива: *Якщо Джон не зустрічав у цю ніч Сміта, то або Сміт – убивця, або Джон бреше. Якщо Сміт – убивця, то Джон не зустрічав Сміта в цю ніч, і вбивство відбулося після опівночі. Якщо вбивство відбулося після опівночі, то або Сміт – убивця, або Джон бреше. Отже, Сміт – убивця.*

15. Шість студентів **А**, **Б**, **В**, **Г**, **Д**, **Е** купили по лотерейному квитку. Після розіграшу виявилось, що два з них виграли. На запитання, хто саме виграв, студенти дали такі відповіді: **А**: *виграли я та* **Д**; **Б**: *виграли я та* **Е**; **В**: *виграли* **А** *та* **Е**; **Г**: *виграли* **Г**

та **Б**; **Д**: "*виграли* **Е** *та* **Д**. У чотирьох із відповідей лише одна частина твердження правильна, а в одній – обидві неправильні. Чиї лотерейні білети виграли?

16. Хтось із трьох студентів **А**, **Б**, **В** розбив вікно. **А** сказав, що він і **Б** вікно не розбивали; **Б** сказав, що **А** цього не робив, а розбив вікно **В**; **В** сказав, що він також не розбивав, а це зробив **А**. Як пізніше виявилось, один зі студентів двічі сказав неправду, інший – двічі сказав правду, а серед тверджень третього одне правильне, а інше – ні. Хто розбив вікно?

17. Троє обвинувачуваних **А**, **Б**, **В** дають свідчення. **А**: **Б** *винен, а* **В** *– ні*; **Б:** *Якщо* **А** *винен, то* **В** *– теж*; **В**: *Я не винен, але хоч один із двох інших – винен.*

(а) Вважаючи, що **Б** та **В** кажуть правду, установити, хто саме винен.

(б) Якщо всі троє невинні, то хто з них сказав правду, а хто – неправду?

1.6. Секвенції і секвенційні форми для логіки висловлень

Метод таблиць істинності дає змогу перевірити істинність формули або множини формул. Він належить до класу семантичних методів, тобто базується на обчисленні значень формул (семантиці формул). Іншим класом методів є синтаксичні методи, які засновані на синтаксичних перетвореннях формул чи множин формул. Слід зазначити, що такі синтаксичні перетворення індуковані семантичними властивостями формул, тому семантичні та синтаксичні методи пов'язані між собою. Розглянемо секвенційні методи, зокрема секвенційне числення логіки висловлень.

Ідея секвенційних методів дуже проста. Розглянемо наслідкове твердження $A_1, A_2, \ldots, A_k \vDash B$. За означенням воно буде істинним тоді й тільки тоді, коли для всіх значень пропозиційних змінних з істинності $A_1, A_2, \ldots, A_k$ випливає істинність B.

Доведемо істинність твердження методом від супротивного. Для цього припустимо, що наслідкове твердження є спростовним, тобто існує набір значень пропозиційних змінних такий, що $A_1, A_2, \dots, A_k$ є істинними, а B – хибним. Якщо в процесі перетворень дійдемо суперечності, тобто отримаємо формулу, що є одночасно істинною та хибною, то наше припущення буде спростовано. Отже, наслідкове твердження – істинне.

Ідея пошуку суперечності покладена в основу секвенційного методу. Розглянемо загальніший вигляд наслідкового твердження: $A_1, A_2, \dots, A_k \vDash B_1, B_2, \dots, B_m$. Для секвенційних методів такі твердження записуються як

$$A_1, A_2, \dots, A_k \to B_1, B_2, \dots, B_m$$

і називаються **секвенціями**. Тут символ $\to$ є новим символом, який не належить мові висловлень. Треба розуміти, що цей символ є метасимволом, але за змістом для введеного логічного наслідку він є насправді символом імплікації.

Для роз'яснення секвенційного методу розглянемо простий приклад, а саме: доведемо істинність наслідкового твердження

$$\neg(A \vee B) \vDash \neg A \wedge \neg B.$$

Припустимо, що це твердження є неправильним, тобто існує такий набір значень пропозиційних змінних, що формула $\neg(A \vee B)$ є істинною, а формула $\neg A \wedge \neg B$ – хибною. Ці припущення записуватимемо у вигляді

$$_1\neg\,(A \vee B),\ \ _0\neg A \wedge \neg B,$$

тобто істинні формули проіндексуємо (розмітимо) знаком 1, а хибні – знаком 0. Отримаємо дві індексовані формули, які утворюють **розмічену секвенцію**.

Далі спробуємо спростити формули цієї секвенції. Головною операцією першої формули є заперечення. Тому $\neg(A \vee B)$ буде істиною тоді й тільки тоді, коли $A \vee B$ буде хибою. Таким чином, початкова секвенція перетворена на нову секвенцію

$$_0A \vee B,\ \ _0\neg A \wedge \neg B.$$

Далі спрощуватимемо формулу $A \vee B,$ яка має бути хибною. Головною операцією цієї формули є диз'юнкція.

Диз'юнкція буде хибною тоді й тільки тоді, коли її аргументи будуть одночасно хибними. У нашому випадку аргументами диз'юнкції є A та B. Тому індексовану формулу $_0A \vee B$ можна замінити на дві індексовані формули $_0A$ та $_0B$. Тим самим секвенція

$$_0A \vee B,\ \ _0\neg A \wedge \neg B$$

перетворилась на нову секвенцію

$$_0A,\ _0B,\ _0\neg A\wedge\neg B.$$

В останній секвенції є лише одна складена (неатомарна) формула

$$_0\neg A\wedge\neg B,$$

яка свідчить, що формула $\neg A\wedge\neg B$ має бути хибною.

Кон'юнкція набуває значення хиби у трьох випадках (див. табл. 1.2):

1) коли перший і другий аргументи кон'юнкції є хибними;

2) коли перший аргумент є хибою, а другий – істиною;

3) коли перший аргумент є істиною, а другий – хибою. Ці три випадки можна замінити двома спрощеними випадками:

1) перший аргумент кон'юнкції є хибою;

2) другий аргумент кон'юнкції є хибою.

Тому далі для кон'юнкції (як і для диз'юнкції) розглядатимемо лише по два випадки.

Отже, формула $\neg A\wedge\neg B$ буде хибною тоді й тільки тоді, коли:

1) $\neg A$ – хибне або

2) $\neg B$ – хибне.

Це означає, що секвенція

$$_0A,\ _0B,\ _0\neg A\wedge\neg B$$

перетворилась на дві секвенції:

$$_0A,\ _0B,\ _0\neg A \text{ та } _0A,\ _0B,\ _0\neg B.$$

У першій із них неатомарною є формула $_0\neg A$, яку заміняємо на $_1A$. Отримано секвенцію

$$_0A,\ _0B,\ _1A.$$

Аналізуючи її, бачимо, що в ній A має бути одночасно істиною та хибою, оскільки до секвенції входять індексовані формули $_0A$ та $_1A$. Отримали суперечність, тому ця секвенція наше початкове твердження не може спростувати.

Тепер проаналізуємо другу секвенцію

$$_0A,\ _0B,\ _0\neg B.$$

Перетворюючи $_0\neg B$ на $_1B$, отримуємо секвенцію

$$_0A,\ _0B,\ _1B.$$

У цій секвенції суперечність виникає для формули B. Отже, і ця секвенція не може спростувати початкове наслідкове твердження.

Секвенції такого вигляду, тобто ті, що містять формулу, індексовану як 1 та 0, називаються **замкненими**. Такі суперечливі формули індексуємо знаком ×. Цим самим знаком позначатимемо й замкнені секвенції.

Ми розглянули всі можливі випадки та продемонстрували, що наслідкове твердження не може буди спростовано, тому воно є істинним. Це дає змогу зробити загальні висновки:

1) для перевірки істинності наслідкового твердження можна застосовувати метод доведення від супротивного, який полягає в пошуку суперечності для множин індексованих формул, отриманих у процесі доведення;

2) перетворення індексованих формул відбувається за правилами, індукованими семантичними властивостями операцій; правила мають засновки та висновки;

3) секвенційне доведення (секвенційне виведення) може бути подане у вигляді дерева, його корінь – початкова розмічена секвенція, а переходи задаються секвенційними правилами.

Як сформулювати секвенційні правила? Бачимо, що для кожної логічної операції є два правила: перше задає перетворення формули, яка розмічена 1, друге – формули, яка розмічена 0. Наприклад, для операції диз'юнкції можна записати два такі правила (засновки пишемо над рискою, висновки – під рискою):

$$\frac{{}_1A,\ {}_1B}{{}_1A\vee B} \text{ та } \frac{{}_0A,\ {}_0B}{{}_0A\vee B}.$$

Ці правила сформульовані для однієї формули, але секвенція може мати також інші формули. Позначимо їх множину як Σ. Загальне правило матиме такий вигляд (ліворуч пишемо назву правила):

$$_1\neg\ \frac{{}_0A,\sum}{{}_1\neg A,\sum},\qquad _0\neg\ \frac{{}_1A,\sum}{{}_0\neg A,\sum}.$$

Аналогічно можна побудувати правила для інших логічних операцій. Отримаємо таку сукупність секвенційних правил:

$$_1\neg\ \frac{{}_0A,\sum}{{}_1\neg A,\sum} \qquad\qquad _0\neg\ \frac{{}_1A,\sum}{{}_0\neg A,\sum}$$

$$ {}_{1}\vee\ \frac{{}_{1}A,\sum \qquad {}_{1}B,\sum}{{}_{1}A\vee B,\sum} \qquad\qquad {}_{0}\vee\ \frac{{}_{0}A,\ {}_{0}B,\sum}{{}_{0}A\vee B,\sum} $$

$$ {}_{1}\wedge\ \frac{{}_{1}A,{}_{1}B,\sum}{{}_{1}A\wedge B,\sum} \qquad\qquad {}_{0}\wedge\ \frac{{}_{0}A,\sum \qquad {}_{0}B,\sum}{{}_{0}A\wedge B,\sum} $$

$$ {}_{1}\rightarrow\ \frac{{}_{0}A,\sum \qquad {}_{1}B,\sum}{{}_{1}A\rightarrow B,\sum} \qquad\qquad {}_{0}\rightarrow\ \frac{{}_{1}A,\ {}_{0}B,\sum}{{}_{0}A\rightarrow B,\sum} $$

$$ {}_{1}\sim\ \frac{{}_{0}A,{}_{0}B,\sum \qquad {}_{1}A,{}_{1}B,\sum}{{}_{1}A\leftrightarrow B,\sum} \qquad\qquad {}_{0}\sim\ \frac{{}_{0}A,{}_{1}B,\sum \qquad {}_{1}A,{}_{0}B,\sum}{{}_{0}A\leftrightarrow B,\sum} $$

При виконанні завдань виведення доцільно записувати у зворотному порядку – тобто висновки писати над рискою, а засновки – під рискою. Іншими словами, складніші формули пишемо над рискою, а простіші – під рискою. Отже, надалі записуватимемо секвенційні правила в такому вигляді:

$$ {}_{1}\neg\ \frac{{}_{1}\neg A,\sum}{{}_{0}A,\sum} \qquad\qquad {}_{0}\neg\ \frac{{}_{0}\neg A,\sum}{{}_{1}A,\sum} $$

$$ {}_{1}\vee\ \frac{{}_{1}A\vee B,\sum}{{}_{1}A,\sum \qquad {}_{1}B,\sum} \qquad\qquad {}_{0}\vee\ \frac{{}_{0}A\vee B,\sum}{{}_{0}A,\ {}_{0}B,\sum} $$

$$ {}_{1}\wedge\ \frac{{}_{1}A\wedge B,\sum}{{}_{1}A,{}_{1}B,\sum} \qquad\qquad {}_{0}\wedge\ \frac{{}_{0}A\wedge B,\sum}{{}_{0}A,\Sigma \quad {}_{0}B,\sum} $$

$$ {}_{1}\rightarrow\ \frac{{}_{1}A\rightarrow B,\sum}{{}_{0}A,\Sigma \qquad {}_{1}B,\sum} \qquad\qquad {}_{0}\rightarrow\ \frac{{}_{0}A\rightarrow B,\sum}{{}_{1}A,\ {}_{0}B,\sum} $$

$$ {}_{1}\sim\ \frac{{}_{1}A\leftrightarrow B,\sum}{{}_{0}A,{}_{0}B,\sum \qquad {}_{1}A,{}_{1}B,\sum} \qquad\qquad {}_{0}\sim\ \frac{{}_{0}A\leftrightarrow B,\sum}{{}_{0}A,{}_{1}B,\sum \qquad {}_{1}A,{}_{0}B,\sum} $$

Зауваження. Прямий і зворотний записи правил можна трактувати як пряме та зворотне доведення. Тому для зворотного доведення можемо в правилі засновки писати над рискою, а висновки – під рискою. **Прохання звертати на це увагу при побудові доведень**.

Нижче наведено запис секвенційного виведення розглянутого наслідкового твердження: $\neg(A \vee B) \models \neg A \wedge \neg B$:

$$({}_1\neg)\dfrac{{}_1\neg(A \vee B),\ {}_0\neg A \wedge \neg B}{({}_0\vee)\dfrac{{}_0A \vee B,\ {}_0\neg A \wedge \neg B}{({}_0\wedge)\dfrac{{}_0A,\ {}_0B,\ {}_0\neg A \wedge \neg B}{({}_1\neg)\dfrac{{}_0A,\ {}_0B,\ {}_0\neg A}{\dfrac{{}_0A_\times,\ {}_0B,\ {}_1A_\times}{\times}} \quad \dfrac{{}_0A,\ {}_0B,\ {}_0\neg B}{\dfrac{{}_0A,\ {}_0B_\times,\ {}_1B_\times}{\times}}}}}$$

Приклад 1.18.

1. Антецедент як консеквент (**засновок як висновок**): $A \to B \to A.$ Нагадуємо, що дужки у цій формулі розставляють таким чином: $(A \to (B \to A)),$ тобто головною операцією є перша імплікація. Подаємо формулу як розмічену секвенцію: ${}_0A \to B \to A.$ Застосовуємо правило ${}_0{\to}$. Назву правила пишемо ліворуч від риски. Отримуємо

$$({}_0\to)\dfrac{{}_0A \to B \to A}{{}_1A,\ \ {}_0B \to A}.$$

Аналізуємо отриману секвенцію ${}_1A,\ {}_0B \to A.$ Тут є лише одна складна формула ${}_0B \to A.$ Індексуємо її знаком * і застосовуємо до неї правило ${}_0{\to}$.

$$({}_0\to)\dfrac{{}_0A \to B \to A}{({}_0\to)\dfrac{{}_1A,\ \ {}_0B \to A_*}{{}_1A,\ \ {}_1B,\ {}_0A}}.$$

Остання секвенція є замкненою, оскільки містить формули ${}_1A$ та ${}_0A$, тобто секвенція вимагає, щоб A було одночасно істинним і хибним. Такі формули індексуємо знаком ×. Це є суперечністю, тому початкова секвенція не має спростування. Таку замкнену секвенцію позначаємо знаком ×. Остаточно дерево виведення секвенції має вигляд

$$({}_0\to)\dfrac{{}_0A \to B \to A}{({}_0\to)\dfrac{{}_1A,\ \ {}_0B \to A_*}{\dfrac{{}_1A_\times,\ \ {}_1B,\ {}_0A_\times}{\times}}}.$$

Побудувавши таблицю істинності, переконуємось, що початкова формула є тавтологією:

$A\ B$	$B \to A$	$A \to B \to A$
0 0	**1**	**1**
0 1	**0**	**1**
1 0	**1**	**1**
1 1	**1**	**1**

2. Комутативність антецедентів (засновків):

$$A \to (B \to C) \sim B \to (A \to C).$$

Формуємо розмічену секвенцію:

$$_0 A \to (B \to C) \sim B \to (A \to C).$$

Головною її операцією є еквівалентність ~, тому застосовуємо правило $_0\sim$.

$$(_0\sim)\frac{_0 A \to (B \to C) \sim B \to (A \to C)}{_0 A \to (B \to C),_1 B \to (A \to C) \qquad _1 A \to (B \to C),_0 B \to (A \to C)}.$$

Отримано дві нові секвенції. Розглянемо першу

$$_0 A \to (B \to C),\ _1 B \to (A \to C).$$

Доцільно застосувати правило $_0\to$ до першої формули, яку індексуємо знаком *. Це саме правило застосовуємо також для другої секвенції:

$$(_0\to)\frac{_0 A \to (B \to C)_*,\ _1 B \to (A \to C)}{(_0\to)\dfrac{_1 A,\ _0 B \to C_*,\ _1 B \to (A \to C)}{_1 A,\ _1 B,\ _0 C,\ _1 B \to (A \to C)}}.$$

У виведеній секвенції єдиною складною формулою є $_1 B \to (A \to C)$, до якої застосуємо правило $_1\to$. Це саме правило застосуємо ще раз до формули $_1 A \to C$. Усі отримані секвенції будуть замкненими:

$$(_1\to)\frac{_1 A,\ _1 B,\ _0 C,\ _1 B \to (A \to C)_*}{\dfrac{_1 A,\ _1 B_\times,\ _0 C,\ _0 B_\times}{\times} \qquad (1\to)\dfrac{_1 A,\ _1 B,\ _0 C,\ _1 A \to C_*}{\dfrac{_1 A_\times,\ _1 B,\ _0 C,\ _0 A_\times}{\times} \qquad \dfrac{_1 A,\ _1 B,\ _0 C_\times,\ _1 C_\times}{\times}}}.$$

Залишилось розглянути секвенцію

$$_1 A \to (B \to C),\ _0 B \to (A \to C).$$

Двічі застосовуємо правило $_0\to$ до позначених формул:

$$(_0\to)\frac{_1 A \to (B \to C),\ _0 B \to (A \to C)_*}{(_0\to)\dfrac{_1 A \to (B \to C),\ _1 B,\ _0 (A \to C)_*}{_1 A \to (B \to C)_*,\ _1 B,\ _1 A,\ _0 C}}.$$

Будуємо дерево виведення для останньої отриманої секвенції:

$$({}_1\to)\dfrac{{}_1A\to(B\to C)_*,\ {}_1B,\ {}_1A,\ {}_0C}{\dfrac{{}_0A_\times,\ {}_1B,\ {}_1A_\times,\ {}_0C}{\times}\qquad (1\to)\dfrac{{}_1B\to C_*,\ {}_1B,\ {}_1A,\ {}_0C}{\dfrac{{}_0B_\times,\ {}_1B_\times,\ {}_1A,\ {}_0C}{\times}\quad \dfrac{{}_1C_\times,\ {}_1B,\ {}_1A,\ {}_0C_\times}{\times}}}.$$

Усі гілки дерева виведення замкнені, тому початкова формула є тавтологією. Це можна також перевірити за допомогою побудови семантичної таблиці:

$A\ B\ C$	$B\to C$	$A\to C$	$A\to(B\to C)$	$B\to(A\to C)$	$A\to(B\to C)\sim$ $\sim B\to(A\to C)$
0 0 0	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
0 0 1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
0 1 0	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
0 1 1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
1 0 0	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
1 0 1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
1 1 0	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**
1 1 1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**

3. Кон'юнкція антецедентів (засновків):

$$A\to B\to C\sim A\wedge B\to C.$$

Дужки можна розставити таким чином:

$$(A\to(B\to C))\sim((A\wedge B)\to C),$$

тому головною операцією є еквівалентність. Формуємо розмічену секвенцію та застосовуємо правило ${}_0\sim$. Отримуємо

$$({}_0\sim)\dfrac{{}_0A\to B\to C\sim A\wedge B\to C}{{}_0A\to B\to C,\ {}_1B\to C\qquad {}_1A\to B\to C,\ {}_0A\wedge B\to C}.$$

Побудуємо дерево виведення окремо для двох зазначених секвенцій. Почнемо з першої секвенції:

$$({}_0\to)\dfrac{{}_0A\to B\to C_*,\ {}_1B\to C}{({}_0\to)\dfrac{{}_1A,\ {}_0B\to C_*,\ {}_1B\to C}{({}_1\to)\dfrac{{}_1A,\ {}_1B,\ {}_0C,\ {}_1B\to C_*}{\dfrac{{}_1A,\ {}_1B,\ {}_0C,\ {}_0B}{\times}\quad\dfrac{{}_1A,\ {}_1B,\ {}_0C,\ {}_1C}{\times}}}}.$$

Усі гілки дерева виведення замкнені, тобто секвенція виведена (це позначають $\vdash {}_0A\to B\to C_*,\ {}_1B\to C$). Тепер будуємо дерево виведення для другої секвенції:

$$(_0{\to})\dfrac{_1A\to B\to C,\ _0A\wedge B\to C_*}{(_1\wedge)\dfrac{_1A\to B\to C,\ _1A\wedge B_*,\ _0C}{(_1{\to})\dfrac{_1A\to B\to C_*,\ _1A,\ _1B,\ _0C}{\dfrac{_0A,\ _1A,\ _1B,\ _0C}{\times}\qquad (_1{\to})\dfrac{_1B\to C_*,\ _1A,\ _1B,\ _0C}{\dfrac{_0B,\ _1A,\ _1B,\ _0C}{\times}\qquad\dfrac{_1C,\ _1A,\ _1B,\ _0C}{\times}}}}}.$$

Усі гілки замкнені, тому $A\to B\to C \sim A\wedge B\to C$ є тавтологією. Це можна також перевірити побудовою семантичної таблиці:

$A\ B\ C$	$B\to C$	$A\wedge B$	$A\to(B\to C)$	$(A\wedge B)\to C$	$A\to(B\to C)\sim$ $\sim(A\wedge B)\to C$
0 0 0	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
0 0 1	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
0 1 0	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**
0 1 1	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
1 0 0	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
1 0 1	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
1 1 0	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**
1 1 1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**

4. Неасоціативність імплікації: перевірити еквівалентність $A\to B\to C\sim(A\to B)\to C$.

Зауваження. Імплікація є правоасоціативною операцією, тому $A\to B\to C = A\to(B\to C)$; головною операцією є еквівалентність, тобто дужки можна розставити таким чином:

$$(A\to(B\to C))\sim((A\to B)\to C).$$

Для доведення істинності початкової формули треба довести (вивести) розмічену імплікацію:

$$_0A\to(B\to C)\sim(A\to B)\to C.$$

Головною операцією є еквівалентність. Тому застосовуємо правило $_0\sim$. Отримуємо виведення

$$_0{\sim}\dfrac{_0A\to(B\to C)\sim(A\to B)\to C}{_0A\to(B\to C),\ _1(A\to B)\to C\quad\ _1A\to(B\to C),\ _0(A\to B)\to C}.$$

Оскільки повне виведення не вміщається по ширині сторінки, то розглянемо окремо виведення для двох секвенцій:

$_0A\to(B\to C),\ _1(A\to B)\to C$ та $_1A\to(B\to C),\ _0(A\to B)\to C$.

Проаналізуємо секвенцію ${}_0A \to (B \to C),\ {}_1(A \to B) \to C.$ Тут слід звернути увагу на формулу ${}_0A \to (B \to C).$ Правило ${}_0\!\to$ для її перетворення є достатньо простим, тому в секвенції будемо застосовувати його для зазначеної формули. Щоб позначити таке застосування, індексуємо згадану формулу знаком *.

Дістали виведення

$$({}_0\!\to)\,\frac{{}_0A \to (B \to C)^*,\ {}_1(A \to B) \to C}{{}_1A,\ {}_0(B \to C),\ {}_1(A \to B) \to C}.$$

Аналізуючи отриману секвенцію, бачимо, що найпростіше перетворення буде для формули ${}_0(B \to C).$ Індексуємо цю формулу в секвенції знаком * і застосовуємо правило ${}_0\!\to$. Виведення набуває вигляду

$$({}_0\!\to)\,\cfrac{{}_0A \to (B \to C)^*,\ {}_1(A \to B) \to C}{({}_0\!\to)\,\dfrac{{}_1A,\ {}_0(B \to C)^*,\ {}_1(A \to B) \to C}{{}_1A,\ {}_1B,\ {}_0C,\ {}_1(A \to B) \to C}}\ .$$

Тепер єдиною формулою, до якої можна застосувати секвенційне правило, є формула ${}_1(A \to B) \to C.$ Одержуємо

$$({}_0\!\to)\,\cfrac{{}_0A \to (B \to C)^*,\ {}_1(A \to B) \to C}{({}_0\!\to)\,\cfrac{{}_1A,\ {}_0(B \to C)^*,\ {}_1(A \to B) \to C}{({}_1\!\to)\,\dfrac{{}_1A,\ {}_1B,\ {}_0C,\ {}_1(A \to B) \to C^*}{{}_1A,\ {}_1B,\ {}_0C,\ {}_0A \to B \qquad {}_1A,\ {}_1B,\ {}_0C,\ {}_1C}}}\ .$$

Отримано дві нові секвенції. Друга секвенція є замкненою, оскільки містить ${}_0C$ та ${}_1C$, тобто секвенція вимагає, щоб C було одночасно істинним і хибним. Ці формули індексуємо знаком $\times$. Дістали суперечність, тому на цій гілці доведення початкова секвенція не має спростування. Таку замкнену секвенцію позначаємо знаком $\times$.

Перетворюємо першу секвенцію, застосовуючи правило ${}_0\!\to$:

$$({}_0\!\to)\,\cfrac{{}_0A \to (B \to C)^*,\ {}_1(A \to B) \to C}{({}_0\!\to)\,\cfrac{{}_1A,\ {}_0(B \to C)_*,\ {}_1(A \to B) \to C}{({}_1\!\to)\,\cfrac{{}_1A,\ {}_1B,\ {}_0C,\ {}_1(A \to B) \to C_*}{({}_0\!\to)\,\dfrac{{}_1A,\ {}_1B,\ {}_0C,\ {}_0A \to B^*}{\dfrac{{}_1A,\ {}_1B_\times,\ {}_0C,\ {}_1A,\ {}_0B_\times}{\times}} \qquad \dfrac{{}_1A,\ {}_1B,\ {}_0C_\times,\ {}_1C_\times}{\times}}}}\ .$$

Отримані секвенції є замкненими. Отже, усі випадки розглянуто, секвенцію ${}_0A\to(B\to C),\ {}_1(A\to B)\to C$ доведено.

Тепер почнемо будувати виведення секвенції

$${}_1A\to(B\to C),\ {}_0(A\to B)\to C.$$

Її аналіз свідчить про те, що доцільно перетворювати формулу ${}_0(A\to B)\to C$. Маємо

$$({}_0\!\to)\,\frac{{}_1A\to(B\to C),\ {}_0(A\to B)\to C\,{}_*}{{}_1A\to(B\to C),\ {}_1A\to B,\ {}_0C}.$$

Розкриваючи першу формулу отриманої секвенції, маємо:

$$({}_0\!\to)\,\dfrac{{}_1A\to(B\to C),\ {}_0(A\to B)\to C\,{}_*}{({}_1\!\to)\,\dfrac{{}_1A\to(B\to C)^*,\ {}_1A\to B,\ {}_0C}{{}_0A,\ {}_1A\to B,\ {}_0C \qquad {}_1B\to C,\ {}_1A\to B,\ {}_0C}}.$$

Дістали дві секвенції: ${}_0A,\ {}_1A\to B,\ {}_0C$ та ${}_1B\to C,\ {}_1A\to B,\ {}_0C$. До першої застосовуємо правило ${}_0\!\to$. Отримуємо

$$({}_0\!\to)\,\dfrac{{}_1A\to(B\to C),\ {}_0(A\to B)\to C\,{}_*}{({}_1\!\to)\,\dfrac{{}_1A\to(B\to C)\,{}_*,\ {}_1A\to B,\ {}_0C}{({}_1\!\to)\,\dfrac{{}_0A,\ {}_1A\to B\,{}_*,\ {}_0C}{\dfrac{{}_0A,\ {}_0A,\ {}_0C}{!} \qquad \dfrac{{}_0A,\ {}_1B,\ {}_0C}{!}} \qquad {}_1B\to C,\ {}_1A\to B,\ {}_0C}}.$$

Цей випадок дає дві незамкнені секвенції: ${}_0A,\ {}_0A,\ {}_0C$ та ${}_0A,\ {}_1B,\ {}_0C$, які позначаємо знаком ! Незамкнена секвенція надає контрприклад, тобто вказує значення пропозиційних змінних, які спростовують формулу.

Дійсно, обчислимо значення $A\to(B\to C)\leftrightarrow(A\to B)\to C$ за значень $A, B,\ C$ відповідно **0**, **0**, **0**. Маємо:

$$\mathbf{0}\to(\mathbf{0}\to\mathbf{0})\sim(\mathbf{0}\to\mathbf{0})\to\mathbf{0}=\mathbf{0}\to\mathbf{1}\sim\mathbf{1}\to\mathbf{0}=\mathbf{1}\to\mathbf{0}=\mathbf{0}.$$

Такий само результат отримуємо за значень A, B, C, відповідно **0**, **1**, **0**. Тепер будуємо дерево виведення для секвенції

$${}_1B\to C,\ {}_1A\to B,\ {}_0C.$$

Отримуємо за значень A, B, C, відповідно **0**, **1**, **0**. Маємо

$$\mathbf{0}\to(\mathbf{1}\to\mathbf{0})\sim(\mathbf{0}\to 1)\to\mathbf{0}=\mathbf{0}\to\mathbf{0}\sim\mathbf{1}\to\mathbf{0}=\mathbf{1}\to\mathbf{0}=\mathbf{0}.$$

Повернемось до побудови дерева виведення для секвенції

$${}_1B\to C,\ {}_1A\to B,\ {}_0C.$$

Отримуємо

$$(_1\!\to)\dfrac{_1B\to C^*,\ _1A\to B,\ _0C}{(_1\!\to)\dfrac{_0B,\ _1A\to B^*,\ _0C}{\dfrac{_0B,\ _0A,\ _0C}{!}\quad \dfrac{_0B_\times,\ _1B_\times,\ _0C}{\times}} \qquad (_1\!\to)\dfrac{_0C^*,\ _1A\to B,\ _0C}{\dfrac{_0C,\ _0A,\ _0C}{!}\quad \dfrac{_0C,\ _1B,\ _0C}{!}}}.$$

Незамкненими є секвенції

$$_0B,\ _0A,\ _0C;\ \ _0C,\ _0A,\ _0C;\ \ _0C,\ _1B,\ _0C.$$

Вони всі надають контрприклади для початкової секвенції.

Побудуємо для неї таблицю істинності:

$A\ B\ C$	$B\to C$	$A\to B$	$A\to(B\to C)$	$(A\to B)\to C$	$A\to(B\to C)\sim$ $\sim(A\to B)\to C$
0 0 0	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**
0 0 1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
0 1 0	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**
0 1 1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
1 0 0	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
1 0 1	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
1 1 0	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**
1 1 1	**1**	**1**	**1**	**1**	**0** ◄

5. Довести наслідковість $a\vee b,\neg a\vee c\vDash b\vee c$.

Формуємо розмічену секвенцію: $_1a\vee b,\ _1\neg a\vee c,\ _0b\vee c$. Будуємо її секвенційне виведення:

$$(_0\vee)\dfrac{_1a\vee b,\ _1\neg a\vee c,\ _0b\vee c^*}{(_1\vee)\dfrac{_1a\vee b^*,\ _1\neg a\vee c,\ _0b,\ _0c}{(_1\vee)\dfrac{_1a,\ _1\neg a\vee c^*,\ _0b,\ _0c}{(_1\vee)\dfrac{_1a,\ _1\neg a^*,\ _0b,\ _0c}{\dfrac{_1a_\times,\ _0a_\times,\ _0b,\ _0c}{\times}}\quad \dfrac{_1a,\ _1c_\times,\ _0b,\ _0c_\times}{\times}}\qquad \dfrac{_1b_\times,\ _1\neg a\vee c,\ _0b_\times,\ _0c}{\times}}}.$$

Дерево доведення замкнене, тому наслідковість доведено.

Зауваження щодо застосування правил до секвенцій. Дотепер ми детально не описували процедуру застосування секвенційних правил до секвенцій. Вона складається із трьох пунктів:

1) вибір секвенційного правила, яке можна застосувати до заданої (об'єктної) секвенції;

2) побудова уніфікатора, тобто такого зв'язку змінних у засновках секвенційного правила з певними пропозиційними формулами (чи секвенціями), що при заміні цих змінних у засновках правила на формули з уніфікатора отримаємо об'єктну секвенцію;

3) застосування побудованого уніфікатора до висновків секвенційного правила, що дає висновок для об'єктної секвенції.

Наприклад, маємо об'єктну секвенцію

$$_1A \to (B \to C),\ _0(A \to B) \to C.$$

Проаналізувавши її, застосуємо правило $_0\!\to$ до другої формули секвенції. Правило запишемо у вигляді

$$_0\!\to \frac{_0A \to B, \sum}{_1A,\ _0B, \sum}.$$

Тепер побудуємо уніфікатор. У засновках правила прописано змінні (краще навіть називати їх метазмінними, оскільки їх значеннями будуть пропозиційні змінні чи формули) A, B, Σ.

Тут A та B – пропозиційні метазмінні (оскільки вони будуть замінюватися на пропозиційні формули), Σ – секвенційна метазмінна (оскільки замінюватиметься на секвенцію). Виокремлюємо формулу

$$_0(A \to B) \to C,$$

яку перетворюватимемо. Другу формулу $_1A \to (B \to C)$ наразі не перетворюватимемо. Тому секвенційній метазмінній Σ відповідатиме формула $_1A \to (B \to C)$ (записуємо у вигляді

$$\frac{\sum}{_1A} \to (B \to C)),$$

а формулі $_0A \to B$ із засновків правила відповідатиме формула

$$_0(A \to B) \to C$$

з об'єктної секвенції. В об'єктній формулі головною операцією є друга імплікація, тому при уніфікації метазмінній A з правила відповідає формула $A \to B$ (записуємо у вигляді $A/A \to B$), а метазмінній B – формула C (записуємо у вигляді B/C). Це означає, про побудовано уніфікатор

$$\left[\frac{\sum}{_1A} \to (B \to C), \frac{_1A}{A} \to B, \frac{B}{C}\right].$$

Тепер застосовуємо отриманий уніфікатор до висновків правила

$$_1A,\ _0B, \sum,$$

замінюючи метазмінні на відповідні до них з уніфікатора. Отримуємо об'єктний висновок (значення Σ ставимо на початку висновку, щоб була відповідність до об'єктної секвенції):

$$_1A \to (B \to C),\ \ _1A \to B,\ \ _0C.$$

Завдання для самостійної роботи

Наведені задачі виконати з використанням секвенційного числення для пропозиційної логіки.

1. Довести наслідковість:

(а) $a, a \to b \vDash b$; (б) $a \to b\ , \neg\, b \vDash \neg\, a$;

(в) $a \vee b, \neg\, a \vDash b$; (г) $a \vee b, a \to b \vDash b$;

(д) $a \to b, a \wedge \neg\, b \vDash b$; (е) $a \vee b, a \to c, b \to d \vDash c \vee d$;

(є) $\neg\, a \vee b, \neg b \vee \neg\, c \vDash a \to \neg\, c$; (ж) $\neg\, (a \vee b) \vDash \neg\, a \vee c$;

(з) $a, c \to \neg\, (a \vee b) \vDash \neg c$;

(и) $(a \to b) \to c, a \to (b \to c) \vDash b \to c$;

(і) $a \vee \neg\, c, a \to d, b \to c, \neg\, b \to d \vDash d$;

(ї) $a \to (b \vee c), d \to a \vDash (\neg\, b \wedge \neg\, c) \to \neg\, d$.

2. Визначити, чи є правильною наслідковість:

(а) $(a \to b) \to c \vDash a \wedge b \vee c$; (б) $a \vee b \vee c \vDash a \to b \to c$;

(в) $a \to b, a \vee c \vDash a \wedge c \to a \wedge b$; (г) $a \to b, a \to c, a \vDash b \vee c$;

(д) $a \to b, c \wedge a \vDash c \wedge b$; (е) $a \to b, c \wedge a \vDash c$;

(є) $a \wedge b, \neg\, a \vee b \vDash \neg\, b$;

(ж) $a \vee b, a \to c, b \to c \vDash \neg\, c \to \neg\, a$.

3. Знайти логічні наслідки із засновків:

(а) $a, a \to b$; (б) $a \to b\ , \neg\, b$; (в) $a \vee b, \neg\, a$;
(г) $a \vee b, a, \neg\, b$; (д) $a \to b \to c\ , b \to c$; (е) $a \vee b, a \to c, b \to d$.

4. Знайти засновки, логічними наслідками яких є такі формули:

(а) $a \to b$; (б) $a \wedge b$; (в) $a \to b \wedge c$; (г) $a \vee b \to a \wedge b$.

1.7. Логіка предикатів. Квантори

Алгебра висловлень, розглянута раніше, є важливою й невід'ємною складовою математичної логіки. Однак вона занадто бідна для опису й аналізу навіть простих логічних міркувань науки і практики.

Одна із причин цього полягає в тому, що в логіці висловлень будь-яке просте висловлення розглядають як елементарний об'єкт, неподільне ціле, без частин і внутрішньої структури, яке має лише одну властивість – бути або істинним, або хибним.

Щоб побудувати систему правил, яка давала б змогу здійснювати логічні міркування для виведення нетривіальних правильних висновків з урахуванням будови складених висловлень і змісту простих висловлень, запропоновано формальну теорію, що дістала назву **числення предикатів**.

Теорія предикатів починається з аналізу простих висловлень і ґрунтується на такому їх розумінні: прості висловлення виражають той факт, що деякі об'єкти (або окремий об'єкт) мають певні властивості, або що вони перебувають між собою в певному відношенні.

Наприклад, в істинному висловленні 3 – *просте число* підмет 3 – це об'єкт, а присудок *просте число* виражає певну його властивість.

У латинській граматиці присудок називається **предикатом**, звідки цей термін і ввійшов до математичної логіки. Головною для логіки предикатів є саме друга складова реченнявисловлення – присудок-властивість. Її фіксують, а значення об'єкта пропонують змінювати так, щоб кожного разу отримувати змістовні речення, тобто висловлення.

Наприклад, замінюючи в наведеному вище висловленні 3 на числа 1, 5, 9 або 12, матимемо відповідно такі висловлення: 1 – *просте число*, 5 – *просте число*, 9 – *просте число*, 12 – *просте число*, з яких друге істинне, а решта – хибні висловлення.

Це дозволяє розглянути вираз x – *просте число* не як елементарне висловлення, а як **пропозиційну** (**висловлювальну**) **форму**, тобто форму (або формуляр), після підстановки до якої за-місць параметра (змінної) x об'єктів (значень) із певної множини M дістаємо висловлення.

Аналогічно можна трактувати, наприклад, пропозиційні форми *a – українець*, *b* і *c – однокурсники*, *c важче, ніж d* або *точка x лежить між точками y та z*. До перших двох із них можна підставляти замість параметрів a, b і c прізвища конкретних людей, до третьої – замість c і d назви будь-яких об'єктів (предметів), що мають вагу. Для четвертої множиною M значень змінних x, y та z може бути множина точок певної прямої.

Перша із цих пропозиційних форм задає, як і в наведеній раніше формі, певну властивість для об'єкта a. Інші три форми описують деякі відношення між відповідними об'єктами.

Розглянувши конкретні приклади й коротко зупинившись на мотивації та змістовній інтерпретації подальших понять, перейдемо до формальних математичних означень.

***n*-місним предикатом** $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на якійсь множині M називають довільну функцію, яка впорядкованому набору елементів $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ множини M ставить у відповідність логічне значення **1** або **0**.

Множину M називають предметною областю, або універсальною множиною, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – предметними змінними предиката P.

Множина наборів $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ таких, що $P(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \mathbf{1}$, називається **областю істинності** (або **характеристичною множиною**) предиката P.

Якщо $P(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \mathbf{1}$, то згідно із логічною інтерпретацією казатимемо, що предикат P є **істинним** на $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. В іншому разі казатимемо, що предикат P є **хибним**.

Вираз $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, що перетворюється на висловлення після заміни всіх його змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на елементи певної предметної області M, називають **пропозиційною** (**висловлювальною**) **формою**.

Приклад 1.18. Нехай предметною областю є множина N натуральних чисел, тоді вирази *x – просте число*, *x ділить y*, $x + y = z$, $x < 5$ тощо є пропозиційними формами. ◄

Пропозиційна форма є одним зі способів задання предиката.

Для $n = 1$ предикат $P(x)$ називається **одномісним**, або **унарним**, для $n = 2$ $P(x, y)$ – **двомісним**, або **бінарним**, для $n = 3$ $P(x, y, z)$ – **тримісним**, або **тернарним** предикатом.

Якщо в n-арному предикаті $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ зафіксувати значення деяких m змінних (тобто надати їм певних значень із множини M), то отримаємо $(n - m)$-місний предикат на множині M. Тому можна вважати висловлення нульмісними предикатами, які утворено з багатомісних предикатів підстановкою замість усіх їх параметрів певних значень із предметної області. Отже, висловлення можна розглядати як окремий випадок предиката.

Як з елементарних висловлень за допомогою логічних операцій можна утворювати складені висловлення, так і, використовуючи прості (елементарні) предикати й логічні зв'язки (операції), можна будувати складені предикати, або **предикатні формули.**

Зазвичай основні логічні операції $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, $\sim$ означають для предикатів, що задані на тій самій предметній області M і залежать від тих самих змінних.

Нехай $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ і $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – n-місні предикати на множині M.

Кон'юнкцією $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називають предикат $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, що набуває значення **1** на тих і тільки тих наборах значень змінних, на яких обидва предикати $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ і $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дорівнюють **1**. Зауважимо, що на інших наборах значень змінних предикат набуває значення **0**.

Диз'юнкцією $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називають предикат $T(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, що набуває значення **1** на тих і тільки тих наборах значень змінних, на яких принаймні один із предикатів $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ або $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дорівнює **1**. Відповідно на інших наборах значень змінних предикат набуває значення **0**.

Запереченням $\neg P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ предиката $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називають предикат $S(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, що дорівнює **1** на тих і лише тих наборах значень термів, на яких предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дорівнює **0**.

Аналогічно вводять також інші логічні операції: $\rightarrow$, $\sim$ тощо.

Знаючи, як виконуються окремі операції предикатів, можна утворювати вирази або формули, операндами яких є предикати. Наприклад, формула $P_1(x) \vee (\neg P_3(x, z) \to P_2(y, x, z))$ задає деякий предикат $Q(x, y, z)$. Значення предиката Q неважко обчислити для будь-якого набору значень його змінних x, y, z, виходячи зі значень предикатів P_1, P_2, P_3 на цьому наборі.

Додатково в логіці предикатів використовують дві спеціальні операції предикатів, які називають **кванторами**. Ці операції роблять теорію предикатів значно гнучкішою, глибшою й багатшою, ніж теорія висловлень. Саме тому логіку предикатів іноді називають **теорією квантифікації**.

Найпопулярнішими й найуживанішими виразами в математиці є фрази або формулювання типу *для всіх* та *існує*. Вони входять до більшості математичних міркувань і доведень, висновків, лем і теорем. Наприклад: *Для всіх дійсних чисел x виконується рівність* $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$; *Для заданих натуральних a та b завжди існує натуральне число d, яке ділить числа a та b*; *Для всіх натуральних n справедливе твердження*: *якщо n ділиться на* 6 *і на* 15, *то n ділиться на* 30 тощо.

Поняття, що відповідає словам *для всіх*, лежить в основі означення квантора загальності.

Нехай $P(x)$ – предикат на множині M. Тоді **квантор загальності** (із параметром x) – це операція, що ставить у відповідність $P(x)$ висловлення *для всіх x із M P*(x) *істинне*; для позначення цієї операції використовують знак $\forall$, записують $\forall x P(x)$ (читають *для всіх x P від x*).

Іншу операцію називають **квантором існування** та позначають її знаком $\exists$. Якщо $Q(x)$ – деякий предикат на множині M, то висловлення *існує в множині M елемент x такий*, *що* $Q(x)$ *істинне* записують у вигляді $\exists x Q(x)$ і читають *існує такий x*, *що Q від x* або *є такий x*, *що Q від x*.

Походження обраних позначень пояснюється тим, що символ $\forall$ – це перевернута велика перша літера німецького слова *alle* або англійського слова *all*, що перекладають як *усі*. А символ $\exists$ відповідає першій літері слів *existieren* (нім.) або *exist* (англ.) – *існувати*.

Вираз $\forall x$ читають також як *усі* x; *для кожного* x; *для довільного* x; *для будь-якого* x; а вираз $\exists x$ – як *деякий* x; *для деякого* x; *знайдеться такий* x тощо.

Зазначимо, що, крім уведених символічних позначень кванторів, використовують також інші позначення. Наприклад, замість $\forall x$ іноді пишуть $\forall(x)$, (x) або $\wedge x$, а замість $\exists x$ – відповідно $\exists(x)$, $(\mathrm{E}x)$ або $\vee x$.

Приклад 1.19.

1. Розглянемо два бінарні предикати на множині натуральних чисел N: предикат *x менше y* та предикат *x ділить y*. Перший із них записуватиме у традиційній формі $x < y$, а другий – у вигляді $x \mid y$. Тоді неважко переконатись, що висловлення:

$\forall x \exists y(x < y)$ та $\forall x \exists y(x \mid y)$ є істинними,

$\exists y \forall x(x < y)$ та $\exists y \forall x(x \mid y)$ є хибними.

Істинними будуть, наприклад, висловлення

$\forall x(0 < x^2 - x + 1)$,

$\exists x((x \mid 1) \wedge (\neg (1 < x)))$,

$\forall x((x < 1) \rightarrow (x < 2))$,

$\forall x(((2 \mid x) \wedge (3 \mid x)) \rightarrow (6 \mid x))$,

а хибними –

$$\forall x(2 \mid x),\ \exists x(x^2 < 0),\ \forall x((3 \mid x) \rightarrow (6 \mid x)).$$

2. Записати формулою логіки предикатів такі твердження:

(а) *Існує таке* x, *що* $P(x)$ – хибне;

(б) *Існує таке* x, *що* $P(x)$ – хибне.

(а) $\exists x(\neg P(x))$; (б) $\neg \exists x P(x)$.

3. У цій вправі предметна область є множиною R дійсних чисел. Визначити, чи є даний вираз висловленням або пропозиційною формою. У першому випадку вказати, істинним чи хибним є висловлення; у другому – здійснити квантифікацію так, щоб одержати істинне висловлення:

(а) $\exists y\ (x < y)$; (б) $\forall x \forall y \exists z\ (xy = z)$.

Розглянемо (а). Це пропозиційна форма. Перетворити її на істинне висловлення можна, наприклад, так:

$$\forall x \exists y\ (x < y)\ (\text{або } \exists x \exists y\ (x < y)).$$

Розглянемо (б). Це істинне висловлення. У ньому виражено твердження, що для будь-яких дійсних чисел x та y існує дійсне число z, яке є їхнім добутком. ◄

Важливу роль у логіці предикатів відіграє поняття **області дії квантора у заданій формулі**, під якою розумітимемо той вираз (підформулу), до якого належить квантор. Область дії квантора позначають за допомогою дужок. Ліва дужка, що відповідає початку області дії, записується безпосередньо після кванторної змінної даного квантора, а відповідна до неї права дужка означає закінчення області дії цього квантора. Там, де це не викликає невизначеності, дужки можна опускати й замість $\forall x(P(x))$ або $\exists x(P(x))$ писати відповідно $\forall xP(x)$ або $\exists xP(x)$. Це означає, що операції квантифікації мають більший пріоритет, ніж логічні операції.

Приклад 1.20. В усіх нижченаведених кванторних виразах область дії квантора підкреслено:

$$\exists x\underline{((3 \mid x) \to (6 \mid x))},\ \exists x\underline{(3 \mid x)} \to (6 \mid x),$$
$$\forall x\underline{((x^2 < 9) \to (x < 3))},\ \forall x\underline{(x^2 < 9)} \to (x < 3).$$

Перший і другий вирази з останнього прикладу, а також третій і четвертий відрізняються не лише областю дії квантора. Відмінність між ними істотніша, і про це слід сказати окремо.

Розглянемо на універсальній множині R дійсних чисел вирази:

$$x^2 < 10 \quad \text{та} \quad \exists x(x^2 < 10).$$

Перший із них є предикатом, що залежить від змінної x. Замість x до нього можна підставляти різні дійсні значення й отримувати певні висловлення (істинні чи хибні). Та сама предметна змінна x входить до другого виразу інакше. Якщо замість неї підставити будь-яке дійсне значення, то дістанемо беззмістовний вираз.

Нехай $P(x)$ – деякий предикат на M. Перехід від $P(x)$ до $\forall xP(x)$ або $\exists xP(x)$ називають **зв'язуванням** змінної x. Інші назви – **навішування квантора** на змінну x у предикаті $P(x)$ (або на предикат $P(x)$), **квантифікацією** змінної x. Змінну x, на яку навішено квантор, називають **зв'язаною**, інакше змінну x називають **вільною**.

Зауважимо, що така ситуація не виняткова й доволі часто зустрічається в інших розділах математики. Наприклад, у виразах

$$\int_a^b f(x)dx, \lim_{x \to c} x^n \quad \text{та} \quad \sum_{j=k}^{n} f(j)$$

параметри a, b, c, k і n – це змінні, замість яких можна підставляти певні значення, а параметри x та j – зв'язані змінні, підстановка замість яких будь-яких значень не має жодного сенсу.

Навішувати квантори можна й на багатомісні предикати. Наприклад, застосовуючи квантори $\forall$ і $\exists$ до змінних x та y двомісного предиката $A(x, y)$, отримаємо чотири різні одномісні предикати:

$$\forall xA(x, y),\ \exists xA(x, y),\ \forall yA(x, y) \text{ і } \exists yA(x, y).$$

У перших двох змінна x є зв'язаною, а змінна y – вільною, а у двох останніх – навпаки.

Вираз $\forall xA(x, y)$ (читають як *для всіх x A від x та y*) є одномісним предикатом $B(y)$. Він є істинним для тих і тільки тих $b \in M$, для яких одномісний предикат $A(x, b)$ є істинним для всіх x із M.

Приклад 1.20. Розглянемо двомісний предикат $A(x, y)$, означений на множині $M = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ за допомогою табл. 1.4. Значенням предиката $A(a_i, a_j)$ є елемент на перетині рядка, що відповідає a_i, та стовпчика, що відповідає a_j.

Таблиця 1.4

$x \setminus y$	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	**0**	**1**	**1**	**0**
a_2	**0**	**1**	**1**	**1**
a_3	**0**	**0**	**1**	**1**
a_4	**0**	**0**	**1**	**0**

Таблиці істинності для чотирьох відповідних одномісних предикатів, отримуваних з $A(x, y)$ навішуванням одного квантора, наведено у табл. 1.5.

Таблиця 1.5

y	$\forall xA(x, y)$	y	$\exists xA(x, y)$	x	$\forall yA(x, y)$	x	$\exists yA(x, y)$
a_1	**0**	a_1	**0**	a_1	**0**	a_1	**1**
a_2	**0**	a_2	**1**	a_2	**0**	a_2	**1**
a_3	**1**	a_3	**1**	a_3	**0**	a_3	**1**
a_4	**0**	a_4	**1**	a_4	**0**	a_4	**1**

У всіх чотирьох випадках до вільної змінної, що залишилася, можна застосовувати один із кванторів і, зв'язавши таким чином обидві змінні, перетворити відповідні предикати на висловлення.

У результаті отримаємо такі висловлення:

$\forall x(\forall yA(x, y)) = \mathbf{0}$, $\forall y(\forall xA(x, y)) = \mathbf{0}$, $\exists y(\forall xA(x, y)) = \mathbf{1}$,
$\exists x(\forall yA(x, y)) = \mathbf{0}$, $\exists x(\exists yA(x, y)) = \mathbf{1}$, $\exists y(\exists xA(x, y)) = \mathbf{1}$,
$\forall y(\exists xA(x, y)) = \mathbf{0}$, $\forall x(\exists yA(x, y)) = \mathbf{1}$.

Неважко переконатися, що перестановка однакових кванторів зумовлює рівносильні висловлення. Дійсно, обидва висловлення $\forall x(\forall y A(x, y))$ і $\forall y(\forall x A(x, y))$ істинні тоді й тільки тоді, коли предикат $A(x, y)$ набуває значення 1 на всіх кортежах значень (a, b) з M^2. Висловлення $\exists x(\exists y\, A(x, y))$ і $\exists y(\exists x\, A(x, y))$ істинні тоді й тільки тоді, коли існує принаймні одна пара (a, b) така, що $A(a, b) = 1$.

Водночас усі чотири висловлення з різнойменними кванторами є нерівносильними. Особливо слід наголосити, що суттєвим є порядок слідування різнойменних кванторів.

Висловлення $\forall x(\exists y A(x, y))$ і $\exists y(\forall x A(x, y))$ нерівносильні. Наприклад, у термінах табличного задання предиката $A(x, y)$ істинність першого висловлення $\forall x(\exists y A(x, y))$ означає, що кожен рядок таблиці істинності містить принаймні одну одиницю. Друге ж висловлення $\exists y(\forall x A(x, y))$ істинне тоді й лише тоді, коли в таблиці є стовпчик, що складається тільки з одиниць. ◄

Неважко поширити всі наведені вище міркування й висновки на предикати більшої арності. Навішування одного квантора завжди зменшує кількість вільних змінних і арність предиката на одиницю. Застосування кванторів до всіх змінних предиката перетворює його на висловлення (іноді таку предикатну формулу називають **замкненою**).

Зауваження. Треба звернути увагу на те, що термін "предикат" має різні тлумачення в лінгвістичному та математичному контекстах. У лінгвістичному (синтаксичному) контексті він тлумачиться як присудок-властивість у певному реченні; математичне (семантичне) тлумачення (яке є абстракцією від лінгвістичного) полягає в тому, що термін *предикат* визначається як функція в множину булевих значень, яка задана на множині предметних значень (це питання буде розглянуто детальніше в останньому розділі посібника).

Завдання для самостійної роботи

1. Записати формулою логіки предикатів таке твердження:
Для кожного x P(x) – хибне; *P(x) – хибне для кожного x*.

2. Указати вільні та зв'язані змінні у виразі. Для кожної зв'язаної змінної визначити, яким саме квантором її зв'язано:

(а) $P(x) \to \forall y\,(Q(y) \vee \exists z\,P(z) \sim \neg\,P(y))$;

(б) $\exists x\,(P(y) \to P(x) \wedge \exists z(Q(z) \sim \exists y(Q(y) \vee Q(x))) \wedge \forall x(P(x) \to \neg\,(\exists y\,Q(y)))$;

(в) $\forall x\,(x^2 y > 0 \to y > 0)$; (г) $x > 3 \wedge \forall x\,\forall y\,(xy^2 > 0)$;

(д) $\forall x\,\forall y\,(x < y \to \exists z\,(x < z \wedge z < y))$.

3. Предметна область – це множина R дійсних чисел. Визначити, є вираз висловленням чи пропозиційною формою. У першому випадку вказати, істинним чи хибним є висловлення, у другому – навісити квантори так, щоб дістати істинне висловлення:

(а) $\exists y \forall x(xz = xy)$; (б) $\exists p \forall x(x^2 + px + q > 0)$;

(в) $\exists x \forall y \exists z(xy = z)$; (г) $\exists y \forall x(xy > 0) \to \exists z(z^2 < 0)$.

4. Нехай предметною областю є множина N натуральних чисел. Проаналізувати область дії кванторів і знайти значення висловлення:

(а) $\forall x \forall y(\exists z\,(z > x \wedge z < y) \sim x < y)$;

(б) $\forall x \forall y \exists z((z > x \wedge z < y) \sim x < y)$.

5. Навести приклади тверджень як математичного, так і нематематичного змісту, у яких є кванторні вирази *для кожного* та *існує*, значення яких змінюються при зміні порядку слідування цих виразів.

6. Порівняти області дії квантора й значення істинності виразів

$$\forall x(x > 3) \to (2 > 3) \text{ та } \forall x((x > 3) \to (2 > 3)).$$

1.8. Формули логіки предикатів. Рівносильність формул. Пренексні формули. Тотожно істинні формули

Наведемо індуктивне означення поняття **формули логіки предикатів** (**предикатної формули**, або просто **формули**).

1. Якшо P – символ елементарного n-місного предиката, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – предметні змінні, то вираз

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

– формула. Такі формули називають **елементарними**, або **атомарними**.

2. Якщо A та B – формули, то

$$(\neg A), (A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \sim B)$$

– теж формули.

3. Якщо A – формула, а x – предметна змінна в A, то

$$(\forall x(A)) \text{ і } (\exists x(A))$$

– теж формули.

4. Інших формул, крім утворених за правилами 1–3, немає.

Це означення дозволяє стверджувати, що всі формули алгебри висловлень є формулами логіки предикатів, оскільки висловлення – це нульмісні предикати. За допомогою означення неважко також переконатися, що вирази

$$(\forall x(\exists y\,(A(x, y)) \rightarrow (B(x) \vee (\exists z(C(x, z))))),$$
$$(\forall x(\forall y(A(x, y) \wedge B(x)) \rightarrow (\exists y(C(x, y))))$$

є формулами логіки предикатів. Для зручності можна запровадити деякі домовленості про скорочення кількості дужок у формулах. По-перше, залишимо всі умови скорочення кількості дужок, які було прийнято в алгебрі висловлень, виходячи з пріоритету логічних операцій. По-друге, випускатимемо всі зовнішні дужки. Вважатимемо, що квантори мають більший пріоритет, ніж логічні операції. Випускатимемо також дужки, що позначають область дії квантора, якщо остання є елементарною формулою. Нарешті, не писатимемо дужки між кванторами, що йдуть один за одним. Правила асоціативності залишаються такими самими, як і для пропозиційної логіки. Що стосується кванторних операцій, то вони виконуються в порядку, зворотному до їх написання (справа наліво).

Нехай $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – деяка формула логіки предикатів, а множина M – деяка предметна область. Для **інтерпретації** $\boldsymbol{F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ **в** $\boldsymbol{M}$ необхідно задати значення символів елементарних предикатів у M як n-місних предикатів у M. За наявності такої логічної (істиннісної) інтерпретації формули F у M можливі три основні ситуації.

1. Існує набір значень змінних, для якого формула F набуває значення **1**. У цьому разі формулу F називають **виконуваною в області** M.

2. Якщо формула F набуває значення 1 (виконувана) для всіх наборів значень з області M, то її називають **тотожно істинною в** M.

3. Якщо формула F невиконувана в області M, то її називають **тотожно хибною в** M.

Наведені означення можна узагальнити, якщо розглядати різні предметні області, а саме: якщо для формули F існує область M, в якій вона виконувана, то формулу F називають **виконуваною**; формулу, тотожно істинну в будь-яких областях M, називають **тотожно істинною**, або **логічно загальнозначущою**; формула, невиконувану в усіх областях M, називають **тотожно хибною**, або **суперечністю**.

Приклад 1.21. Формула

$$\exists x A(x, y) \rightarrow \forall x A(x, y)$$

виконувана й тотожно істинна в усіх одноелементних областях M. Формула

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee \neg F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

тотожно істинна, а формула

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge \neg F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

тотожно хибна.

Тотожно істинними є формули $\forall x P(x) \rightarrow P(y)$ і $P(y) \rightarrow \exists x P(x)$.◄

Формули F_1 і F_2 називають **рівносильними** (**еквівалентними**), якщо за всіх можливих підстановок значень замість їхніх змінних вони набувають однакових значень; позначають $F_1 = F_2$ або $F_1 \equiv F_2$.

Зауваження. Слід розуміти відмінність відношення рівносильності $\equiv$ від операції еквівалентності $\sim$. Операція еквівалентності $\sim$ є операцією булевої алгебри, яка двом булевим предикатам ставить у відповідність новий предикат, у той час як рівносильність є бінарним відношенням на множині формул. Утім, ці поняття поєднані в тому сенсі, що **рівносильність формул** F_1 і F_2 свідчить про тотожну істинність формули $F_1 \sim F_2$ і навпаки, тотожна істинність формули $F_1 \sim F_2$ свідчить про рівносильність F_1 і F_2. Зазначимо також, що **всі тотожно істинні** (**усі тотожно хибні**) **формули рівносильні** між собою.

Множина всіх тотожно істинних формул логіки предикатів є складовою частиною всіх формальних математичних теорій, тому її дослідження й опис – важлива задача математичної логіки. Значення цієї множини підкреслює також той факт, що їй, як було зазначено вище, належать усі рівносильні співвідношення (тотожності) логіки предикатів.

Як і в логіці висловлень, постають дві проблеми: перша – опис або побудова множини всіх тотожно істинних формул, друга – перевірка тотожної істинності заданої формули логіки предикатів.

Якщо існує процедура розв'язання другої проблеми, то на її основі можна сформулювати такий алгоритм, що породжує шукану множину T тотожно істинних формул. Послідовно будуємо всі формули, кожну з них за відомою процедурою перевіряємо на тотожну істинність і вносимо до множини T ті, для яких результат перевірки позитивний.

Однак на відміну від логіки висловлень, де така процедура існує та зводиться до обчислення значень формули на скінченній множині значень її параметрів, у логіці предикатів області визначення предметних і предикатних змінних формул нескінченні.

Метод обчислення значення формули шляхом підстановки значень замість змінних і послідовного виконання зазначених дій є зручним для встановлення виконуваності заданої формули або доведення нерівносильності певних формул. Для цього достатньо підібрати одну відповідну підстановку, тобто побудувати контрприклад. Застосовувати цей метод можна також, коли предметна область M скінченна. Пов'язано це з тим, що для скінченної множини $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ кванторні формули можна перетворити на рівносильні їм формули логіки висловлень:

$$\forall x P(x) = P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \ldots \wedge P(a_n),$$

$$\exists x P(x) = P(a_1) \vee P(a_2) \vee \ldots \vee P(a_n).$$

Замінивши всі квантори за допомогою наведених співвідношень, будь-яку формулу логіки предикатів можна перетворити на рівносильну пропозиційну форму, або формулу логіки висловлень. Істинність останньої на скінченній множині M можна перевірити за допомогою скінченної кількості підстановок й обчислень.

Для доведення ж рівносильності предикатних формул, заданих на нескінченних предметних областях, прямий перебір непридатний, і доводиться застосовувати різні опосередковані методи.

Наприклад, вище за допомогою простих міркувань було доведено рівносильність формул, що описують переставність однойменних кванторів у двомісних предикатах, тобто доведено тотожну істинність формул

$$\forall x \forall y A(x, y) \sim \forall y \forall x A(x, y) \text{ та } \exists x \exists y A(x, y) \sim \exists y \exists x A(x, y).$$

Приклад 1.22. Аналогічними міркуваннями доведемо рівносильність, що описує дистрибутивність квантора $\forall x$ відносно кон'юнкції

$$\forall x(A(x) \wedge B(x)) = \forall x A(x) \wedge \forall x B(x).$$

Нехай ліва частина цього співвідношення істинна для деяких предикатів A та B. Тоді для будь-якого $a \in M$ істинною є кон'юнкція $A(a) \wedge B(a)$. Тому $A(a)$ та $B(a)$ одночасно істинні для довільних a, отже, формула $\forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$ істинна. Якщо ж ліва частина хибна, то це означає, що для деякого $a \in M$ хибним є або $A(a)$, або $B(a)$. Тому хибне або $\forall x A(x)$, або $\forall x B(x)$, а отже, хибною є й права частина. ◄

Подібним методом можна довести дистрибутивність квантора $\exists x$ відносно диз'юнкції:

$$\exists x(A(x) \vee B(x)) = \exists x A(x) \vee \exists x B(x).$$

Приклад 1.23. Доведемо, що квантори $\forall x$ і $\exists x$ недистрибутивні щодо диз'юнкції і кон'юнкції. Дійсно, істинні лише імплікації

$$\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \rightarrow \forall x(A(x) \vee B(x)),$$
$$\exists x(A(x) \wedge B(x)) \rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x).$$

Якщо один із предикатів $A(x)$ або $B(x)$ тотожно істинний, то ліва й права частини першої імплікації одночасно істинні. Якщо ж існуватимуть такі значення $a, b \in M$, що $A(a)$ та $B(b)$ хибні, то ліва частина хибна, а права може бути або хибною, або істинною. Для її істинності достатньо, щоб для кожного $a \in M$ істинним був принаймні один із предикатів. Це означає, що знак імплікації $\rightarrow$ не можна замінити на знак еквівалентності $\sim$, отже, ліва і права частини першої імплікації нерівносильні. ◄

Пропонуємо самостійно проаналізувати другу імплікацію та довести її істинність.

Приклад 1.24. Доведемо ще одне корисне й популярне в логіці та математиці рівносильне співвідношення:

$$\neg (\exists x P(x)) = \forall x(\neg P(x)).$$

Нехай для деякого предиката P і предметної області M ліва частина істинна. Тоді не існує $a \in M$, для якого $P(a)$ істинне. Отже, для всіх $a \in M$ $P(a)$ хибне, тобто $\neg P(a)$ істинне. Тому права частина істинна. Якщо ж ліва частина хибна, то існує $b \in M$, для якого $P(b)$ істинне, тобто $\neg P(b)$ – хибне. Отже, права частина також хибна. ◄

Аналогічно можна довести рівносильність

$$\neg(\forall x P(x)) = \exists x(\neg P(x)).$$

Приклад 1.25.

1. Побудувавши відповідну інтерпретацію (контрприклад), довести, що формули A та B логіки предикатів не є рівносильними: $A = \exists x\ (P(x) \wedge Q(x))$, $B = \exists x\ P(x) \wedge \exists x\ Q(x)$.

Для предметної області $M = \{a, b\}$ визначимо предикати P і Q так: $P(a) = \mathbf{0}$, $P(b) = \mathbf{1}$ та $Q(a) = \mathbf{1}$, $Q(b) = \mathbf{0}$. Тоді формула A буде хибною, а формула B – істинною.

2. Довести чи спростувати твердження про рівносильність таких формул A та B логіки предикатів:

(а) $A = \forall x(P(x) \to (Q(x) \to R(x)))$, $B = \forall x(P(x) \to (R(x) \to Q(x)))$;

(б) $A = \forall x(P(x) \to (Q(x) \to R(x)))$, $B = \forall x(Q(x) \to (R(x) \to P(x)))$.

Формули A та B першої пари рівносильні. Це твердження можна довести, перебравши, наприклад, усі вісім можливих комбінацій значень предикатів P, Q і R для довільного об'єкта x із предметної області та переконавшись, що в усіх восьми випадках формули

$$(P(x) \to (Q(x) \to R(x))) \text{ і } (P(x) \to (R(x) \to Q(x)))$$

набувають однакових значень.

Цю рівносильність можна обґрунтувати й такими міркуваннями. Формула

$$(P(x) \to (Q(x) \to R(x)))$$

набуває значення $\mathbf{0}$ тоді й тільки тоді, коли для якогось x із предметної області виконується $P(x) = \mathbf{1}$, $Q(x) = \mathbf{1}$ і $R(x) = \mathbf{0}$. Друга формула

$$(P(x) \to (R(x) \to Q(x)))$$

також набуває значення $\mathbf{0}$ лише за тих самих умов.

Формули A та B другої пари нерівносильні. Контрприклад: для предметної області $M = \{a\}$ покладемо

$$P(a) = Q(a) = \mathbf{1} \text{ і } R(a) = \mathbf{0}.$$

За цих умов формула A набуває значення **0**, а формула B – значення **1**.

3. Перевірити, чи випливає в логіці предикатів із наведених нижче припущень зроблений з них висновок, тобто чи коректні міркування. Якщо міркування правильні, то побудувати відповідний дедуктивний ланцюжок; якщо ж некоректні, – то відповідний контрприклад.

Припущення: 1) деякі вписані в коло чотирикутники є прямокутниками; 2) кожний прямокутник є паралелограмом.

Висновок: отже, деякі вписані в коло чотирикутники є паралелограмами.

Уведемо на множині M усіх чотирикутників такі предикати: $P(x)$ – x – *чотирикутник, вписаний у коло*, $Q(x)$ – x – *прямокутник*, $R(x)$ – x – *паралелограм*. Тоді припущення можна записати у вигляді таких предикатних формул:

1) $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$, 2) $\forall x(Q(x) \to R(x))$,

а висновок – у вигляді формули $\exists x(P(x) \wedge R(x))$.

Із припущення 1) випливає, що для якогось $a \in M$ виконується

$$P(a) \wedge Q(a) = 1, \text{ тобто } P(a) = 1 \text{ та } Q(a) = 1.$$

Звідси та із припущення 2) маємо

$$R(a) = 1.$$

Отже, $P(a) \wedge R(a) = 1$, тому формула $\exists x(P(x) \wedge R(x))$ істинна в M. ◄

Формула A перебуває в **пренексній формі**, якщо вона має вигляд $Qx_1 \ldots Qx_n B$, де Qx_k – кванторний префікс $\exists x_k$ або $\forall x_k$, B – безкванторна формула.

Формулу в пренексній формі називають **пренексною формулою.**

Розглянемо важливі рівносильні співвідношення, які дозволяють змінювати області дії кванторів. Нехай B – предикатна формула, що **не містить вільних входжень змінної** x. Тоді справджуються такі рівносильності:

1) $\forall xA(x) \vee B = \forall x(A(x) \vee B)$; 2) $\forall xA(x) \wedge B = \forall x(A(x) \wedge B)$;
3) $B \to \forall xA(x) = \forall x(B \to A(x))$; 4) $\forall xA(x) \to B = \exists x(A(x) \to B)$;
5) $\exists xA(x) \vee B = \exists x(A(x) \vee B)$; 6) $\exists xA(x) \wedge B = \exists x(A(x) \wedge B)$;
7) $B \to \exists xA(x) = \exists x(B \to A(x))$; 8) $\exists xA(x) \to B = \forall x(A(x) \to B)$.

Ці співвідношення означають, що формулу, яка не містить вільних входжень x, можна виносити за межі області дії квантора, що зв'язує x. З іншого боку, ці самі рівносильності дають змогу включати відповідну формулу B до області дії квантора за змінною x, від якої B не залежить.

Приклад 1.26. Знайдемо пренексну форму для формули

$$\forall x \forall y A(x, y) \wedge \exists x B(x) \rightarrow \neg \exists x A(x, y).$$

Спочатку проаналізуємо, які змінні є вільними, а які – зв'язаними. Вільна змінна для всієї формули – лише y. Змінні x та y зв'язані в різних підформулах цієї формули. Оскільки є різні квантори зі змінною x, то спочатку замінимо цю змінну у двох останніх кванторах на нові змінні, наприклад z і t. Також треба змінити зв'язану змінну y, наприклад на v. Отримуємо формулу

$$\forall x \forall v A(x, v) \wedge \exists z B(z) \rightarrow \neg \exists x A(t, y).$$

У підформулі

$$\forall x \forall v A(x, v) \wedge \exists z B(z)$$

послідовно виносимо квантори згідно з правилами 2) і 6); квантор, який виноситься, підкреслюватимемо:

$\forall x \forall v A(x,v) \wedge \underline{\exists z} B(z)$ = (за правилом 6).

$\exists z(\underline{\forall x} \forall v A(x,v) \wedge B(z))$ = (за правилом 2).

$\exists z(\forall x(\underline{\forall v} A(x,v) \wedge B(z)))$ = (за правилом 2).

$\exists z(\forall x(\forall v(A(x,v) \wedge B(z))))$ = (знімаємо зовнішні дужки).

$\exists z \forall x \forall v(A(x,v) \wedge B(z))$.

Перетворення застосовані коректно, оскільки формули не містять вільних змінних, які б потрапляли в розширену область дії кванторів. ◄

Завдання для самостійної роботи

1. Довести, що формула логіки предикатів

$$\forall x \exists y \, (P(x) \vee \neg P(y))$$

логічно загальнозначуща. Чи є такою наступна формула?

$$\exists y \forall x \, (P(x) \vee \neg P(y)).$$

2. Довести, що формула тотожно істинна:

(а) $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\exists x P(x) \wedge \exists x\, Q(x))$;

(б) $(\forall x\, P(x) \rightarrow \exists x Q(x)) \sim \exists x(P(x) \rightarrow Q(x))$.

3. Довести чи спростувати твердження про те, що запропонована формула тотожно істинна:

(а) $\exists x P(x) \wedge \exists x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow \exists x Q(x)$;

(б) $\exists x P(x) \wedge \forall x(P(x) \to Q(x)) \to \exists x Q(x)$;

(в) $\forall x P(x) \wedge \exists x(P(x) \to Q(x)) \to \exists x Q(x)$;

(г) $\forall x(P(x) \to (Q(x) \to R(x))) \to \forall x(P(x) \vee Q(x) \to R(x))$.

4. Довести, що формули A та B логіки предикатів рівносильні:

(а) $A = \exists x(P(x) \vee Q(x))$, $B = \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$;

(б) $A = \neg (\forall x\, P(x))$, $B = \exists x\, (\neg P(x))$.

5. Побудувавши відповідну інтерпретацію (контрприклад), довести, що формули A та B логіки предикатів не є рівносильними:

(а) $A = \exists x(P(x) \wedge Q(x))$, $B = \exists x\, P(x) \wedge \exists x Q(x)$;

(б) $A = \forall x(P(x) \vee Q(x))$, $B = \forall x\, P(x) \vee \forall x Q(x)$;

(в) $A = \exists x P(x) \to \exists x\, Q(x)$, $B = \exists x\, (P(x) \to Q(x))$.

6. Довести чи спростувати твердження про рівносильність формул A та B логіки предикатів:

(а) $A = \forall y \forall x\, (P(x) \to Q(y))$, $B = \forall y(\forall x\, P(x) \to Q(y))$;

(б) $A = \forall x(P(x) \to Q(y))$, $B = \forall x(P(x)) \to Q(y)$;

(в) $A = \exists x(P(x) \to Q(y))$, $B = \exists x(P(x)) \to Q(y)$.

7. Побудувати пренексну форму для формул:

(а) $\forall x A(x) \to \forall y(\exists z B(x,y,z) \to \neg\, \forall x A(x) \wedge \exists x C(x, y))$;

(б) $\forall x \neg\, \exists y A(x,y) \to \forall x B(x) \to \neg\, \exists y A(x, y)$;

(в) $\neg \forall x A(x) \wedge \exists x B(x) \vee \forall x(\forall y C(x,y) \to A(y))$;

(г) $\forall x A(x) \to \forall y(\forall z B(x,y,z) \to \neg\, \forall x A(x))$.

8. Визначити, які з тверджень 1–5 логічно еквівалентні:

1. Неправильно, що всі числа, кратні 4, є точними квадратами.

2. Усі числа, кратні 4, не є точними квадратами.

3. Не всі числа, кратні 4, є точними квадратами.

4. Існує число, кратне 4, яке не є точним квадратом.

5. Деякі числа, не кратні 4, не є точними квадратами.

У подальших вправах перевірити, чи випливають у логіці предикатів із припущень зроблені з них висновки, тобто чи коректними були здійснені міркування. Якщо міркування правильне, то побудувати відповідний дедуктивний ланцюжок; якщо ж міркування некоректне, то побудувати відповідний контрприклад.

9.

1) *Кожне число*, *кратне* 51, *кратне* 17 *і кратне* 3.

2) *Кожне число кратне* 3 *тільки тоді*, *коли сума цифр його запису в десятковій системі числення кратна* 3.

3) *Сума цифр запису числа* 10712 *не кратна* 3. *Отже*, 10712 *не кратне* 51.

10.

1) *Якщо хтось може розв'язати дану задачу*, *то знайдеться здібний студент*, *який зробить це*.

2) *Петренко – здібний студент*, *але не зміг розв'язати цю задачу. Отже*, *ніхто не здатен розв'язати дану задачу*.

1.9. Секвенції і секвенційні форми для логіки предикатів

Логіка предикатів, на відміну від логіки висловлень, вводить нові логічні операції – квантори. Розглянемо секвенційні правила для кванторів.

За означенням індексована формула ${}_1\exists A(x)$ є істинною за її інтерпретації в області *M*, якщо є значення предметної змінної *x*, яке робить істинним формулу $A(x)$. Таке значення *x* позначимо *y*. Однак у секвенційному численні немає прив'язки до конкретної області *M*, тому будемо тлумачити y як певну предметну змінну. Іншими словами, формулу ${}_1\exists A(x)$ можна замінити на формулу ${}_1A(x)$, де y – нова змінна. Ураховуючи наявність у секвенції інших формул множини $\sum$, отримуємо правило

$$_1\exists\ \frac{{}_1\exists x A(x), \sum}{{}_1A(y), \sum}$$

за умови, що нова змінна *y* не входить до $\sum \cup \{\exists x A(x)\}$.

Розглянемо тепер правило для ${}_0\exists A(x)$. За означенням хибність цієї формули означає хибність формули $A(x)$ за всіх значень *x* із області предметної інтерпретації. У секвенції такі значення задаються її вільними змінними, тому здається, що правило можна записати у вигляді

$$\frac{{}_0\exists x A(x), \sum}{{}_0A(z_1), \ldots, {}_0A(z_m), \sum},$$

де $\{z_1, \ldots, z_m\}$ – усі вільні змінні $\sum \cup \{\exists x A(x)\}$.

Однак у такому правилі не враховано два моменти:

1) що відбуватиметься за відсутності вільних предметних змінних у множині формул $\sum \cup \{\exists x A(x)\}$;

2) чи буде правило правильним, якщо в процесі виведення з'являться нові вільні змінні?

У першому випадку, якщо вільних змінних немає, то беремо довільну нову змінну, наприклад z_1. У другому випадку ситуація складніша, оскільки на значеннях нових змінних формула $A(x)$ також має бути хибною. Щоб урахувати цей момент, у правилі залишаємо формулу ${}_0\exists A(x)$, яка при розгортанні зможе врахувати значення нових змінних. Таким чином, виправлене правило матиме вигляд

$$ {}_0\exists \ \frac{{}_0\exists x A(x), \sum}{{}_0 A(z_1), \ldots, {}_0 A(z_m), \sum, \ {}_0\exists x A(x)}, $$

де $\{z_1, \ldots, z_m\}$ – усі вільні змінні $\sum \cup \{\exists x A(x)\}$; якщо вільних змінних немає, то беремо довільну нову змінну z_1.

Зазначимо, що в цьому правилі спрощення не відбувається, але з'являються нові простіші формули, які, можливо, зроблять секвенцію замкненою.

Дуально будують секвенційні правила для універсального квантора.

Зауваження. Обговоримо питання про введення нових змінних у правилах ${}_1\exists$ та ${}_0\exists$ розкриття кванторів. Ці нові змінні можна тлумачити як константи в тому сенсі, що їх значення вже не будуть змінюватись. Тому для таких змінних можна використовувати позначення, які застосовуються для предметних констант: a, b, c, d, e, … . Іншими словами, нові змінні мають подвійну природу: з одного боку, це змінні, а з іншого – їх можна тлумачити як константи. Тому правило ${}_1\exists$ можна записати у вигляді

$$ {}_1\exists \ \frac{{}_1\exists x A(x), \sum}{{}_1 A(a), \sum} $$

за умови, що нова змінна (константа) a не входить до $\sum \cup \{\exists x A(x)\}$, і казати, що константа a підтверджує істинність предиката A.

Аналогічно правило ${}_0\exists$ також можна подати формулою

$$ {}_0\exists \ \frac{{}_0\exists x A(x), \sum}{{}_0A(z_1), ..., {}_0A(z_m), \sum, {}_0\exists x A(x)}, $$

де $\{z_1, \ldots, z_m\}$ – усі вільні змінні $\sum \cup \{\exists x A(x)\}$; якщо вільних змінних немає, то беремо довільну нову змінну (константу) z_1.

Проте такі константи в секвенційних правилах трактуються як змінні, а в інтерпретаціях їх можна розуміти як константи (зауваження зроблено з метою додаткового роз'яснення правил).

У **секвенційних правилах** (формах) для логіки предикатів висновки пишемо над рискою, засновки – під рискою:

$$ {}_1\neg \ \frac{{}_1\neg A, \sum}{{}_0A, \sum} \qquad {}_0\neg \ \frac{{}_0\neg A, \sum}{{}_1A, \sum} $$

$$ {}_1\vee \ \frac{{}_1A \vee B, \sum}{{}_1A, \sum \qquad {}_1B, \sum} \qquad {}_0\vee \ \frac{{}_0A \vee B, \sum}{{}_0A, {}_0B, \sum} $$

$$ {}_1\wedge \ \frac{{}_1A \wedge B, \sum}{{}_1A, {}_1B, \sum} \qquad {}_0\wedge \ \frac{{}_0A \wedge B, \sum}{{}_0A, \Sigma \qquad {}_0B, \sum} $$

$$ {}_1\to \ \frac{{}_1A \to B, \sum}{{}_0A, \sum \qquad {}_1B, \sum} \qquad {}_0\to \ \frac{{}_0A \to B, \sum}{{}_1A, {}_0B, \sum} $$

$$ {}_1\leftrightarrow \ \frac{{}_1A \leftrightarrow B, \sum}{{}_0A, {}_0B, \sum \qquad {}_1A, {}_1B, \sum} \qquad {}_0\leftrightarrow \ \frac{{}_0A \leftrightarrow B, \sum}{{}_0A, {}_1B, \sum \qquad {}_1A, {}_0B, \sum} $$

$$ {}_1\exists \ \frac{{}_1\exists x A(x), \sum}{{}_1A(y), \sum} $$

за умови, що нова змінна y не входить до $\sum \cup \{\exists x A(x)\}$.

$$ {}_0\exists \ \frac{{}_0\exists x A(x), \sum}{{}_0A(z_1), ..., {}_0A(z_m), \sum, {}_0\exists x A(x)}, $$

де $\{z_1, \ldots, z_m\}$ – усі вільні змінні $\sum \cup \{\exists x A(x)\}$; якщо вільних змінних немає, то береться довільна нова змінна z_1.

$$ {}_1\forall \ \frac{{}_1\forall x A(x), \sum}{{}_1A(z_1), ..., {}_1A(z_m), \sum, {}_1\forall x A(x)}, $$

де $\{z_1,\ldots, z_m\}$ – усі вільні змінні $\sum\cup\{\forall xA(x)\}$; якщо вільних змінних немає, то беремо довільну нову змінну z_1.

$$_0\forall\ \frac{_0\forall xA(x),\sum}{_0A(y),\sum}$$

за умови, що нова змінна y не входить до $\sum\cup\{\forall xA(x)\}$.

Припускатимемо, що в атомарних формулах відображені всі змінні, кількість яких дорівнює арності предиката. Однак у формулах правил вільні змінні не вказуватимемо, тобто записи A та $A(x)$ не міститимуть список усіх вільних змінних (те саме стосується формул B і множини формул $\sum$).

Приклад 1.27.

1. Довести формулу $\forall x(A(x)\to B(x))\to(\forall xA(x)\to\exists xB(x))$.

► Формулюємо розмічену секвенцію:

$$_0\forall x(A(x)\to B(x))\to(\forall xA(x)\to\exists xB(x)).$$

Головною операцією є друга імплікація, тому застосовуємо правило $_0\!\to$:

$$({}_0\!\to)\frac{_0\forall x(A(x)\to B(x))\to(\forall xA(x)\to\exists xB(x))}{_1\forall x(A(x)\to B(x)),\ _0\forall xA(x)\to\exists xB(x)}.$$

Отримано нову секвенцію із двох формул. До другої формули доцільно застосувати правило $_0\!\to$:

$$({}_0\!\to)\frac{_0\forall x(A(x)\to B(x))\to(\forall xA(x)\to\exists xB(x))}{({}_0\!\to)\dfrac{_1\forall x(A(x)\to B(x)),\ _0\forall xA(x)\to\exists xB(x)_*}{_1\forall x(A(x)\to B(x)),\ _1\forall xA(x),\ _0\exists xB(x)}}.$$

У новій секвенції доцільно застосувати правило $_1\forall$ до другої формули $_1\forall xA(x)$. Це правило вимагає виявити всі вільні змінні в секвенції. У даному випадку вільних змінних немає, тому беремо довільну нову змінну y, яку підставляємо до формули $A(x)$ замість x. Маємо:

$$({}_0\!\to)\frac{_0\forall x(A(x)\to B(x))\to(\forall xA(x)\to\exists xB(x))}{({}_0\!\to)\dfrac{_1\forall x(A(x)\to B(x)),\ _0\forall xA(x)\to\exists xB(x)_*}{({}_1\forall)\dfrac{_1\forall x(A(x)\to B(x)),\ _1\forall xA(x)_*,\ _0\exists xB(x)}{_1\forall x(A(x)\to B(x)),\ _1A(y),\ _1\forall xA(x),\ _0\exists xB(x)}}}.$$

Далі до першої формули можна застосувати правило $_1\forall$, однак тепер маємо вільну змінну y. Отримуємо:

$$
\begin{array}{l}
{}_0\forall x(A(x)\to B(x))\to(\forall xA(x)\to\exists xB(x)) \\ \hline
({}_0\!\to)\quad {}_1\forall x(A(x)\to B(x)),\ {}_0\forall xA(x)\to\exists xB(x)_* \\ \hline
({}_0\!\to)\quad {}_1\forall x(A(x)\to B(x)),\ {}_1\forall xA(x)_*,\ {}_0\exists xB(x) \\ \hline
({}_1\forall)\quad {}_1\forall x(A(x)\to B(x))_*,\ {}_1A(y),\ {}_1\forall xA(x),\ {}_0\exists xB(x) \\ \hline
({}_1\forall)\quad {}_1A(y)\to B(y),{}_1\,\forall x(A(x)\to B(x)), \\
\qquad {}_1A(y),\ {}_1\forall xA(x),\ {}_0\exists xB(x)
\end{array}
$$

(остання секвенція розміщена на двох рядках).

До останньої формули секвенції застосуємо правило ${}_0\exists$, ураховуючи, що в секвенції єдиною вільною змінною є y:

$$
\begin{array}{l}
{}_0\forall x(A(x)\to B(x))\to(\forall xA(x)\to\exists xB(x)) \\ \hline
({}_0\!\to)\quad {}_1\forall x(A(x)\to B(x)),\ {}_0\forall xA(x)\to\exists xB(x)_* \\ \hline
({}_0\!\to)\quad {}_1\forall x(A(x)\to B(x)),\ {}_1\forall xA(x)_*,\ {}_0\exists xB(x) \\ \hline
({}_1\forall)\quad {}_1\forall x(A(x)\to B(x))_*,\ {}_1A(y),\ {}_1\forall xA(x),\ {}_0\exists xB(x) \\ \hline
({}_1\forall)\quad {}_1A(y)\to B(y),{}_1\,\forall x(A(x)\to B(x)), \\
\qquad {}_1A(y),\ {}_1\forall xA(x),\ {}_0\exists xB(x)_* \\ \hline
({}_0\exists)\quad {}_1A(y)\to B(y),{}_1\,\forall x(A(x)\to B(x)), \\
\qquad {}_1A(y),\ {}_1\forall xA(x), B(y),\ {}_0\exists xB(x)
\end{array}.
$$

Тепер до першої формули застосуємо правило ${}_1\!\to$. Оскільки отримані секвенції доволі великі, то запишемо їх у кілька рядків:

$$
\begin{array}{l}
{}_0\forall x(A(x)\to B(x))\to(\forall xA(x)\to\exists xB(x)) \\ \hline
({}_0\!\to)\quad {}_1\forall x(A(x)\to B(x)),\ {}_0\forall xA(x)\to\exists xB(x)_* \\ \hline
({}_0\!\to)\quad {}_1\forall x(A(x)\to B(x)),\ {}_1\forall xA(x)_*,\ {}_0\exists xB(x) \\ \hline
({}_1\forall)\quad {}_1\forall x(A(x)\to B(x))_*,\ {}_1A(y),\ {}_1\forall xA(x),\ {}_0\exists xB(x) \\ \hline
({}_1\forall)\quad {}_1A(y)\to B(y),{}_1\,\forall x(A(x)\to B(x)), \\
\qquad {}_1A(y),\ {}_1\forall xA(x),\ {}_0\exists xB(x)_* \\ \hline
({}_0\exists)\quad {}_1A(y)\to B(y),{}_1\,\forall x(A(x)\to B(x)), \\
\qquad {}_1A(y),\ {}_1\forall xA(x),\ {}_0B(y),\ {}_0\exists xB(x) \\ \hline
({}_1\!\to)\quad
\begin{array}{ll}
{}_0A(y)_\times, & {}_1B(y)_\times,{}_1 \\
{}_1\forall x(A(x)\to B(x)), & \forall x(A(x)\to B(x)), \\
{}_1A(y)_\times, & {}_1A(y), \\
{}_1\forall xA(x), & {}_1\forall xA(x), \\
{}_0B(y),\ {}_0\exists xB(x) & {}_0B(y)_\times,\ {}_0\exists xB(x) \\ \hline
\times & \times
\end{array}
\end{array}.
$$

Усі отримані секвенції замкнені, тому початкова формула є всюди істинною. ◄

2. Чи є всюди істинною формула?

$$(\forall xA(x)\to\exists xB(x))\to\forall x(A(x)\to B(x)).$$

► У цьому й подальших прикладах не вказуватимемо назву застосованого правила, оскільки воно легко визначається за головною операцією формули, індексованої знаком *. Формулюємо розмічену секвенцію та починаємо будувати дерево виведення:

$$\cfrac{{}_0(\forall xA(x)\to\exists xB(x))\to\forall x(A(x)\to B(x))}{\cfrac{{}_1\forall xA(x)\to\exists xB(x)^*,\ {}_0\forall x(A(x)\to B(x))}{{}_0\forall xA(x)^*,\ {}_0\forall x(A(x)\to B(x))\qquad {}_1\exists xB(x)^*,\ {}_0\forall x(A(x)\to B(x))}}.$$

Отримано дві секвенції, які не мають вільних змінних. Застосування правила ${}_0\forall$ до першої формули першої секвенції вводить нову змінну y; при застосуванні правила ${}_1\exists$ до першої формули другої секвенції можна взяти ту саму нову (для другої секвенції) змінну y. Дістанемо:

$$\cfrac{{}_0(\forall xA(x)\to\exists xB(x))\to\forall x(A(x)\to B(x))}{\cfrac{{}_1\forall xA(x)\to\exists xB(x)^*,\ {}_0\forall x(A(x)\to B(x))}{\cfrac{{}_0\forall xA(x)^*,\ {}_0\forall x(A(x)\to B(x))}{{}_0A(y),\ {}_0\forall x(A(x)\to B(x))}\qquad \cfrac{{}_1\exists xB(x)^*,\ {}_0\forall x(A(x)\to B(x))}{{}_1B(y),\ {}_0\forall x(A(x)\to B(x))}}}.$$

До обох нових секвенцій входить формула

$${}_1B(y),\ \ {}_0\forall x(A(x)\to B(x)),$$

яку розкриваємо за правилом ${}_0\forall$ із використанням нової вільної змінної z. Далі застосовуємо правило ${}_0\to$. Маємо:

$$\cfrac{{}_0(\forall xA(x)\to\exists xB(x))\to\forall x(A(x)\to B(x))}{\cfrac{{}_1\forall xA(x)\to\exists xB(x)^*,\ {}_0\forall x(A(x)\to B(x))}{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{{}_0\forall xA(x)^*,\ {}_0\forall x(A(x)\to B(x))}{{}_0A(y),\ {}_0\forall x(A(x)\to B(x))}}{{}_0A(y),\ {}_0A(z)\to B(z)}}{{}_0A(y),\ {}_1A(z),\ {}_0B(z)}}{!}\qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{{}_1\exists xB(x)^*,\ {}_0\forall x(A(x)\to B(x))}{{}_1B(y),\ {}_0\forall x(A(x)\to B(x))}}{{}_1B(y),\ {}_0A(z)\to B(z)}}{{}_1B(y),\ {}_1A(z),\ {}_0B(z)}}{!}}}.$$

Отримані секвенції ${}_0A(y),{}_1A(z),{}_0B(z)$ та ${}_1B(y),{}_1A(z),{}_0B(z)$ містять лише атомарні формули, але не є замкненими. Це означає, що можна побудувати контрприклади, які спростовують початкову формулу. Кожна із секвенцій має дві вільні змінні y та z. Тому оберемо модель із двох констант a та b, вважаючи їх відповідно значеннями y та z. Перша секвенція ${}_0A(y), {}_1A(z), {}_0B(z)$ визначає значення базових предикатів A та B: $A(a)=0,\ \ A(b)=1, B(b)=0.$ Значення $B(a)$ секвенція не визначає, тому воно може бути довільним (позначаємо знаком *). Будуємо таблицю, що задає модель (інтерпретацію предикатних символів):

x	$A(x)$	$B(x)$
a	0	*
b	1	0

Обчислимо значення формули

$$(\forall xA(x)\to\exists xB(x))\to\forall x(A(x)\to B(x))$$

у цій моделі. Оскільки вільних змінних немає, то початковий стан змінних задається порожньою множиною. У наведеній формулі головною операцією є імплікація, тому обчислюємо значення: антецедента – $\forall xA(x)\to\exists xB(x)$; консеквентна – $\forall x(A(x)\to B(x))$ на початковому стані. Антецедент сформовано за допомогою імплікації, тому обчислюємо $\forall xA(x)$ та $\exists xB(x)$.

Бачимо, що в нашій моделі $\forall xA(x)$ набуває значення 0, відповідно $\forall xA(x)\to\exists xB(x)$ отримує значення 0 (тут значення консеквента не є важливим), отже, значення

$$(\forall xA(x)\to\exists xB(x))\to\ \forall x(A(x)\to B(x))\ =0,$$

тобто формула спростовна.

Аналогічно будують модель для незамкненої секвенції ${}_1B(y), {}_1A(z), {}_0B(z)$. Ця модель також задає контрприклад. ◄

3. Чи є всюди істинною формула $\exists x(A(x)\to B(x))\to(A(x)\to\exists xB(x))$?

► Зауважимо, що у формулі є вільна змінна x. Будуємо секвенційне виведення цієї формули (коментарі для правил виведення пишемо у фігурних дужках):

$$\begin{array}{c}
{}_0\exists x(A(x)\to B(x))\to(A(x)\to\exists xB(x)) \\ \hline
{}_1\exists x(A(x)\to B(x)),\ \ {}_0(A(x)\to\exists xB(x))^* \\ \hline
{}_1\exists x(A(x)\to B(x))^*,\ \ {}_1A(x),\ \ {}_0\exists xB(x) \\ \hline
{}_1A(y)\to B(y))^*,\ \ {}_1A(x),\ \ {}_0\exists xB(x))
\end{array}.$$

$$\begin{array}{c|c}
{}_0A(y),\ \ {}_1A(x),\ \ {}_0\exists xB(x)^* & {}_1B(y),\ \ {}_1A(x),\ \ {}_0\exists xB(x)^* \\
\{\text{тут вільні } x, y\} & \{\text{тут вільні } x, y\} \\ \hline
{}_0A(y),\ \ {}_1A(x),\ \ {}_0B(x), {}_0B(y), & {}_1B(y),\ \ {}_1A(x),\ \ {}_0\exists xB(x)^* \\ \cline{2-2}
{}_0\exists xB(x) & {}_1B(y)_\times,\ \ {}_1A(x),\ \ {}_0B(y)_\times, \\
\{\text{тут вільні } x, y, z\} & {}_0B(x), {}_0\exists xB(x) \\ \hline
! & \times
\end{array}$$

У лівій секвенції ${}_0A(y),\ {}_1A(x),\ {}_0B(x),{}_0B(y),\ {}_0\exists xB(x)$ є неатомарна формула ${}_0\exists xB(x),$ але застосування правила ${}_0\exists$ не змінює секвенцію. Отже, секвенція не є замкненою. Щоб отримати контрприклад, будуємо модель із двома константами a та b, вважаючи їх відповідно значеннями x та y. Секвенція визначає значення базових предикатів A та B:

$$A(b)=0,\ A(a)=1,\ \ B(a)=0,\ B(b)=0.$$

Будуємо таблицю, яка задає модель (інтерпретацію предикатних символів):

z	$A(z)$	$B(z)$
a	1	0
b	0	0

Обчислимо значення формули

$$\exists x(A(x)\to B(x))\to(A(x)\to\exists xB(x))$$

у такій моделі, вважаючи a значенням x. У цій формулі головною операцією є імплікація, тому обчислюємо значення антецедента $\exists x(A(x)\to B(x))$ і консеквента. Головною операцією антецедента є квантор існування, тому обчислюємо формулу $A(x)\to B(x)$ за значень x, рівних a та b. Маємо, що

$$A(a)\to B(a)=0 \text{ та } A(b)\to B(b)=1.$$

Отже, значення $\exists x(A(x)\to B(x))$ дорівнює 1.

Тепер обчислюємо консеквент

$$A(x)\to\exists xB(x).$$

Тут $A(x)$ отримує значення 1, а $\exists xB(x)$ – значення 0. Тому $A(x)\to\exists xB(x)$ матиме значення 0, як і вся формула в цілому. Таким чином, формула спростовна.

Зазначимо, що якби A не залежало від x, то формула $\exists x(A\to B(x))\to(A\to\exists xB(x))$ була б істинною. Дійсно,

$$\dfrac{{}_0\exists x(A\to B(x))\to(A\to\exists xB(x))}{\dfrac{{}_1\exists x(A\to B(x)),\ {}_0(A\to\exists xB(x))^*}{\dfrac{{}_1\exists x(A\to B(x))^*,\ {}_1A,\ {}_0\exists xB(x)}{\dfrac{{}_1A\to B(x)_*,\ {}_1A,\ {}_1\exists xB(x)}{\dfrac{{}_0A_\times,\ {}_1A_\times,\ {}_0\exists xB(x)}{\times}\qquad\dfrac{{}_1B(x),\ {}_1A,\ {}_0\exists xB(x)^*}{\dfrac{{}_1B(x)_\times,\ {}_1A,\ {}_0B(x)_\times,\ {}_0\exists xB(x)}{\times}}}}}}.$$

4. Чи є всюди істинною формула

$$\exists xA(x)\vee B(x)\to\exists x(A(x)\wedge B(x))?$$

► Будуємо секвенційне виведення:

$$\frac{{}_0\exists xA(x)\vee B(x)\to\exists x(A(x)\wedge B(x))}{\dfrac{{}_1\exists xA(x)\vee B(x)^*,\ {}_0\exists x(A(x)\wedge B(x))}{{}_1\exists xA(x),\ {}_0\exists x(A(x)\wedge B(x))\quad {}_1B(x),\ {}_0\exists x(A(x)\wedge B(x))}}.$$

Тепер будуємо виведення для першої секвенції:

$$\frac{{}_1\exists xA(x)^*,\ {}_0\exists x(A(x)\wedge B(x))}{\dfrac{{}_1A(y),\ {}_0\exists x(A(x)\wedge B(x))_*}{\dfrac{{}_1A(y),\ {}_0A(y)\wedge B(y)^*\ {}_0\exists x(A(x)\wedge B(x))}{\dfrac{{}_1A(y)_\times,\ {}_0A(y)_\times,\ {}_0\exists x(A(x)\wedge B(x))}{\times}\quad {}_1A(y),\ {}_0B(y),\ {}_0\exists x(A(x)\wedge B(x))}}}.$$

Залишилось побудувати виведення для другої секвенції:

$$\frac{{}_1A(y),\ {}_0B(y),\ {}_0\exists x(A(x)\wedge B(x))_*}{\dfrac{{}_1A(y),\ {}_0B(y),\ {}_0A(y)\wedge B(y)^*,\ {}_0\exists x(A(x)\wedge B(x))}{\dfrac{{}_1A(y)_\times,\ {}_0B(y),\ {}_0A(y)_\times,\ {}_0\exists x(A(x)\wedge B(x))}{\times}\quad \dfrac{{}_1A(y),\ {}_0B(y),\ {}_0B(y),\ {}_0\exists x(A(x)\wedge B(x))}{!}}}.$$

Отримали незамкнену секвенцію, яка дозволяє побудувати таку модель:

z	$A(z)$	$B(z)$
a	1	0

На цій моделі початкова формула спростовна. ◄

5. Чи є всюди істинною наступна формула?

$$\exists y\forall xA(x,y)\to\forall x\exists yA(x,y).$$

► Будуємо секвенційне виведення:

$$\frac{{}_0\exists y\forall xA(x,y)\to\forall x\exists yA(x,y)}{\dfrac{{}_1\exists y\forall xA(x,y)^*,\ {}_0\forall x\exists yA(x,y)}{\dfrac{{}_1\forall xA(x,z),\ {}_0\forall x\exists yA(x,y)_*}{\dfrac{{}_1\forall xA(x,z)^*,\ {}_0\exists yA(t,y)}{\dfrac{{}_1\forall xA(x,z),\ {}_1A(z,z),\ {}_1A(t,z),\ {}_0\exists yA(t,y)^*}{\dfrac{{}_1\forall xA(x,z),\ {}_1A(z,z),\ {}_1A(t,z)_\times,\ {}_0A(t,z)_\times,\ {}_0A(t,t),\ {}_0\exists yA(t,y)^*}{\times}}}}}}.$$

Дерево виведення замкнене, тому формула є всюди істинною.

6. Чи є всюди істинною формула

$$\forall x\exists yA(x,y)\to\exists y\forall xA(x,y)?$$

Будуємо секвенційне виведення (використовуємо для введених змінних позначення як для констант: a, b, c, d, e, …):

$$\frac{{}_0\forall x\exists yA(x,y)\to\exists y\forall xA(x,y)}{{}_1\forall x\exists yA(x,y)^*,\ {}_0\exists y\forall xA(x,y)}.$$

{вільних змінних немає, вводимо a}

$${}_1\forall x\exists yA(x,y),\ {}_1\exists yA(a,y)^*,\ {}_0\exists y\forall xA(x,y)$$

{вводимо нову змінну b}

$${}_1\forall x\exists yA(x,y),\ {}_1A(a,b),\ {}_0\exists y\forall xA(x,y)^*$$

{підставляємо замість y усі вільні змінні $-a,b$}

$${}_1\forall x\exists yA(x,y),\ {}_1A(a,b),\ {}_0\exists y\forall xA(x,y),\ {}_0\forall xA(x,a)^*,\ {}_0\forall xA(x,b)$$

{вводимо нову змінну c}

$${}_1\forall x\exists yA(x,y),\ {}_1A(a,b),\ {}_0\exists y\forall xA(x,y),\ {}_0A(c,a),\ {}_0\forall xA(x,b)_*$$

$${}_1\forall x\exists yA(x,y)_*,\ {}_1A(a,b),\ {}_0\exists y\forall xA(x,y),\ {}_0A(c,a),\ {}_0A(d,b)$$

$${}_1\forall x\exists yA(x,y),\ {}_1\exists yA(b,y)_*,\ {}_1A(a,b),\ {}_0\exists y\forall xA(x,y),\ {}_0A(c,a),\ {}_0A(d,b)$$

{вводимо нову змінну e}

$${}_1\forall x\exists yA(x,y),\ {}_1A(b,e)_*,\ {}_1A(a,b),\ {}_0\exists y\forall xA(x,y),\ {}_0A(c,a),\ {}_0A(d,b)$$

...

Так можна побудувати нескінченний контрприклад. Зокрема, однією з можливих спростовних інтерпретацій є інтерпретація на натуральних числах, де $A(x, y)$ інтерпретують як $x < y$:

$$\forall x\exists y(x<y)\to\exists y\forall x(x<y).$$

Ця формула є спростовною.

Існує також скінченний контрприклад, коли $A(x, y)$ задається таблицею

A	a	b
a	**0**	**1**
b	**1**	**0**

Із двох останніх прикладів випливає, що при перестановці кванторів формули можуть бути не еквівалентними, тобто формула $\forall x\exists yA(x,y)\leftrightarrow\exists y\forall xA(x,y)$ не є всюди істинною. ◄

Зауваження. Можливі випадки, за яких процес побудови секвенції є нескінченним і контрприклад побудувати не вдається.

Завдання для самостійної роботи

Наведені задачі виконувати з використанням секвенційного числення для логіки предикатів.

1. Застосувати секвенційне числення для розв'язку завдань 1–6 із п. 1.8.

2. Чи є тотожно істинними формули?

(а) $(A(x) \to \forall x B(x)) \to (\forall x A(x) \to B(x))$;

(б) $(A(x) \to \exists x B(x)) \to \exists x(A(x) \to B(x))$;

(в) $(\exists x A(x) \to B(x)) \to (A(x) \to \exists x B(x))$;

(г) $(\exists x A(x) \to B(x)) \to (A(x) \to \exists x B(x))$;

(д) $(\forall x A(x) \to B(x)) \to (A(x) \to \forall x B(x))$;

(е) $\exists x(A(x) \to B(x)) \to (A(x) \to \forall x B(x))$;

(є) $(A(x) \to \forall x B(x)) \to \exists x(A(x) \to B(x))$;

(ж) $\exists x A(x) \wedge B(x) \to \exists x(A(x) \wedge B(x))$;

(з) $\exists x A(x) \wedge B(x) \to \forall x(A(x) \wedge B(x))$;

(и) $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \to \exists x A(x) \wedge B(x)$;

(і) $\exists x A(x) \vee B(x) \to \exists x(A(x) \vee B(x))$;

(ї) $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \to \exists x A(x) \vee B(x)$;

(й) $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \to \exists x A(x) \wedge B(x)$;

(к) $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \to \exists x A(x) \wedge B(x)$;

(л) $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \to \exists x A(x) \wedge B(x)$;

(м) $A(x) \wedge \forall x B(x) \to \forall x(A(x) \vee B(x))$.

5. Довести рівносильності:

(а) $\neg \forall x A(x) \sim \exists x \neg A(x)$; (б) $\forall x \forall y A(x, y) \sim \forall y \forall x A(x, y)$;

(в) $\exists x \exists y A(x, y) \sim \exists y \exists x A(x, y)$;

(г) $\exists x(A(x) \vee B(x)) \sim \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$;

(д) $\forall x(A(x) \wedge B(x)) \sim \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$.

Розділ 2
МНОЖИНИ ТА ВІДНОШЕННЯ

Основи теорії множин було закладено відомим німецьким математиком Георгом Кантором у другій половині XIX ст. Появу цієї теорії з ентузіазмом сприйняли багато авторитетних математиків. Вони побачили в ній засоби створення метамови математики, тобто формальної універсальної системи понять і принципів, за допомогою якої можна було б викласти з єдиних позицій зміст різноманітних традиційно далеких один від одного розділів математики. Перші такі досить успішні спроби було зроблено незабаром після виникнення канторівської теорії множин.

Однак пізніші дослідники виявили в теорії Кантора чимало суперечностей – **парадоксів**, або **антиномій**, теорії множин. Виникла кризова ситуація. Одні математики, посилаючись на штучність сформульованих антиномій, вважали за краще не помічати суперечності або не надавати їм великого значення. Інші – зосередили зусилля на пошуках більш обґрунтованих і точних принципів і концепцій, на яких можна було б побудувати несуперечливу теорію множин.

У результаті було запропоновано кілька формальних (або аксіоматичних) систем, що стали фундаментом сучасної теорії множин, отже, і всієї класичної математики. Важливість цих досліджень підкреслює і той факт, що значний внесок до становлення аксіоматичної теорії множин зробили такі видатні математики й мислителі минулого століття, як Б. Рассел, Д. Гільберт, К. Гедель та ін.

Сьогодні теорія множин – це математична теорія, на якій ґрунтується більшість розділів сучасної математики, як неперервної, так і дискретної.

2.1. Поняття множини. Способи задання множин

Для наших цілей достатньо викласти основи **інтуїтивної**, або **наївної**, теорії множин, яка в головних своїх положеннях зберігає ідеї й результати її засновника Г. Кантора.

В інтуїтивній теорії множин поняття **множина** належить до первинних понять, тобто його не можна безпосередньо означити через інші простіші терміни чи об'єкти. Тому такі поняття зазвичай пояснюють на прикладах, апелюючи до уяви та інтуїції. Такими поняттями в математиці є також *число*, *пряма*, *точка*, *площина* тощо. Водночас треба зазначити, що відсутність строгих означень зовсім не означає, що не можна будувати строгі обмежені моделі цих понять. Такі означення роблять через опис зв'язків з іншими поняттями.

Канторівський вираз: *Множина – це об'єднання в єдине ціле певних об'єктів, які чітко розрізняються нашою інтуїцією чи нашою думкою*, – безумовно не можна вважати строгим математичним означенням. Це, скоріше, пояснення поняття множини, яке заміняє термін *множина* на термін *об'єднання*. Іншими синонімами основного слова *множина* є *сукупність*, *набір*, *колекція* тощо. Прикладами множин можуть бути: множина десяткових цифр, множина літер українського алфавіту, множина мешканців Києва, множина парних чисел, множина розв'язків якогось рівняння тощо.

На письмі множини позначають зазвичай великими літерами. Для деяких множин у математиці використовують сталі позначення. Наприклад, Z – множина цілих чисел, N – множина натуральних чисел, Q – множина раціональних чисел, R – множина дійсних чисел тощо.

Об'єкти, з яких складається задана множина, називаються її **елементами**. Елементи множин позначатимемо малими літерами латинського алфавіту. Той факт, що об'єкт a є елементом множини M, записують так: $a \in M$ (читають: *a належить множині M* або *a – елемент множини M*). **Знак належності** елемента множині $\in$ є стилізацією першої літери грецького слова εστι (бути). Те, що елемент a не належить множині M, позначають так: $a \notin M$ або $a \overline{\in} M$.

Запис $a, b, c, \ldots \in M$ використовують для скорочення запису $a \in M$, $b \in M$, $c \in M$, … .

Множину називають **скінченною**, якщо кількість її елементів скінченна, тобто існує натуральне число k, що є кількістю елементів цієї множини; інакше множина є **нескінченною**. Кількість елементів скінченної множини A традиційно позначають через $|A|$.

Для **задання множини**, утвореної із будь-яких елементів, використовуватимемо два способи. В основі обох лежить позначення множини за допомогою фігурних дужок.

1. Якщо $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – деякі об'єкти, то множину цих об'єктів позначають як $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, де у фігурних дужках міститься перелік усіх елементів відповідної множини. Так можна задавати лише скінченні множини. Порядок запису елементів множини в такому позначенні неістотний.

Приклад 2.1. Множину всіх десяткових цифр записують як $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, множину основних арифметичних операцій – як $\{+, -, \times, /\}$, а множину розв'язків нерівності – як $(x-1)^2 \le 0$ – $\{1\}$. ◄

Зазначимо, що одна з основних ідей канторівської теорії множин – розгляд множини як нового самостійного об'єкта математичного дослідження. Тому потрібно розрізняти такі два різні об'єкти, як елемент a та множина $\{a\}$, яка складається з єдиного елемента a. Зокрема, множини можуть бути елементами якоїсь іншої множини. Наприклад, множина

$$D = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$

усіх можливих пар з елементів a, b, c складається із трьох елементів, її задано цілком коректно.

2. Другий спосіб задання множин ґрунтується на зазначенні загальної властивості або породжувальної процедури для всіх об'єктів, що утворюють описувану множину.

У загальному випадку задання множини M має вигляд

$$M = \{a \mid P(a)\}.$$

M – це множина всіх тих і тільки тих елементів a,
для яких виконується умова P.

Через $P(a)$ позначено або властивість, яку мають елементи множини M, або деяку породжувальну процедуру, що описує спосіб отримання елементів множини M з уже відомих її елементів чи інших об'єктів. Замість вертикальної риски іноді пишуть двокрапку.

Приклад 2.2.

1. Множину всіх непарних цілих чисел можна задати так: $S = \{n \mid n$ – непарне ціле число$\}$ або $S = \{n \mid n = 2k + 1,\ k \in Z\}$. Множина $F = \{f_i \mid f_{i+2} = f_{i+1} + f_i,\ i \in N,\ f_1 = f_2 = 1\}$ – це множина чисел Фібоначчі.

2. З яких елементів складається множина

$$B = \{y \mid y = x + z,\ x, z \in A\},$$

якщо $A = \{1, 2, 3\}$?

$B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. ◄

Другий спосіб задання множин загальніший. Наприклад, уведену вище множину D усіх пар з елементів a, b, c можна задати так:

$$D = \{\{x, y\} \mid x \in \{a, b, c\}, y \in \{a, b, c\} \text{ та } x \neq y\}.$$

Дві множини A та B називають **рівними** (записують $A = B$), якщо вони складаються з тих самих елементів.

Приклад 2.3.

1. Які з наведених співвідношень є правильними?

(а) $\{1, 2, 3\} = \{1, 2, 2, 3\}$; (б) $\{1, 2, 3\} = \{1, \{2\}, 3\}$;
(в) $\{1, 2, 3\} = \{1, 3, 2\}$; (г) $\{1, 2, 3\} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$.

(а) та (б) – правильні.

2. Які з наведених співвідношень є правильними?

(а) $1 \in \{1, 2, 3\}$; (б) $1 \in \{\{1, 2, 3\}\}$;
(в) $1 \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$; (г) $\{1\} \in \{1, 2, 3\}$;
(д) $\{1\} \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$; (е) $\{1, 2\} \in \{1, 2, 3\}$;
(є) $\{1, 2\} \in \{1, 2\}$; (ж) $\{1, 2\} \in \{\{1, 2\}\}$;
(з) $\{1, 2\} \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$; (и) $\{1, 2\} \in \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$;
(і) $a \in \{a\}$; (ї) $a \in \{\{a\}\}$.

(а), (д), (ж), (и), (і) – правильні. ◄

Для зручності та однорідності виконання математичних викладок уводять поняття множини, яка не містить жодного елемента. Таку множину називають **порожньою множиною** і позначають $\varnothing$. Наприклад, якщо досліджують множину об'єктів, які мають задовольняти певні властивості, і з'ясовують, що таких об'єктів не існує, то зручніше сказати, що шукана множина порожня, ніж оголосити її неіснуючою. Порожню множину можна позначати за допомогою будь-якої суперечливої властивості, наприклад $\varnothing = \{ x \mid x \neq x\}$ тощо. Водночас твердженням *множина M – непорожня* можна замінювати рівносильне йому твердження *існують елементи, що належать множині M*.

Приклад 2.4.

1. Які з наведених співвідношень є правильними?

(а) $\varnothing = \{0\}$; (б) $\varnothing = \{\ \}$; (в) $\varnothing = \{\{\ \}\}$;
(г) $\{1, \varnothing\} = \{1\}$; (д) $|\varnothing| = 0$; (е) $|\{\varnothing\}| = 0$;

(є) $|\{\varnothing\}| = 1$; (ж) $|\{\{\varnothing\}\}| = 2$; (з) $|\{\varnothing, \{\varnothing\}\}| = 2$;
(и) $|\{\varnothing, 1\}| = 1$; (і) $|\{\{\varnothing\}, \{\varnothing, 1\}\}| = 3$; (ї) $|\{\varnothing, \{1, 2\}\}| = 3$.

(б), (д), (є), (з) – правильні.

2. Які з наведених співвідношень є правильними?

(а) $0 \in \varnothing$; (б) $\{\varnothing\} \in \{\varnothing\}$; (в) $\{\{\varnothing\}\} \in \{\{\{\varnothing\}\}\}$;
(г) $\varnothing \in \varnothing$; (д) $\varnothing \in \{1\}$; (е) $\{\varnothing\} \in \{\varnothing, \{1\}\}$;
(є) $\varnothing \in \{\varnothing\}$; (ж) $\varnothing \in \{\{\varnothing\}\}$; (з) $\varnothing \in \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

(в), (є), (з) – правильні. ◄

2.2. Підмножини

Дві множини A та B називають **рівними** (записують $A = B$), якщо вони складаються з однакових елементів.

Множина A називається **підмножиною** множини B (записують $A \subseteq B$ або $B \supseteq A$) тоді й тільки тоді, коли кожний елемент множини A належить також множині B. Кажуть також, що множина A міститься в множині B. Знаки $\subseteq$ і $\supseteq$ називають **знаками включення.**

Неважко переконатись, що $A = B$ тоді й тільки тоді, коли одночасно виконуються два включення: $A \subseteq B$ і $B \subseteq A$. Крім того, якщо $A \subseteq B$ і $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$. Останні два факти часто використовують у доведеннях тверджень про рівність двох заданих множин.

Якщо $A \subseteq B$, але $A \neq B$, то пишуть $A \subset B$ і називають множину A **власною** (**строгою**, **істинною**) **підмножиною** множини B. Знак $\subset$ (або $\supset$), на відміну від знака $\subseteq$ (або $\supseteq$), називають **знаком строгого включення**.

Очевидно, що для будь-якої множини A виконується включення $A \subseteq A$. Крім того, вважають, що порожня множина є підмножиною будь-якої множини A, тобто $\varnothing \subseteq A$ (зокрема $\varnothing \subseteq \varnothing$).

Слід чітко розуміти різницю між знаками $\in$ та $\subseteq$ і не плутати ситуації їх використання. Якщо $\{a\} \subseteq M$, то $a \in M$, і навпаки. Однак із включення $\{a\} \subseteq M$ не випливає $\{a\} \in M$. Для будь-якого об'єкта x виконується $x \notin \varnothing$. Наприклад, для множини D (2.1) та її елементів виконуються такі співвідношення:

$\{a, b\} \in D$, $\{\{a, b\}, \{b, c\}\} \subseteq D$, $a \in \{a, b\}$, $\{c\} \notin \{a, c\}$, $\{a\} \subseteq \{a, b\}$.

Приклад 2.5.

1. Які з наведених співвідношень є правильними?

(а) $1 \subseteq \{1, 2, 3\}$; (б) $1 \subseteq \{\{1, 2, 3\}\}$;
(в) $\{1\} \subseteq \{1, 2, 3\}$; (г) $\{a\} \subseteq \{a, b\}$;
(д) $\varnothing \subseteq \{1, 2, 3\}$; (е) $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$;
(є) $\{1\} \subseteq \{\{1\}, \{2, 3\}\}$; (ж) $\{1, 2\} \subseteq \{\{1\}, 1, 2, 3\}$;
з) $\{1, 2\} \subseteq \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$.

(в), (г), (е), (ж), (з) – правильні.

2. Нехай $A = \{1, 2, \{1\}\}$. Які з наведених співвідношень є правильними?

(а) $1 \in A$; (б) $\{1\} \in A$; (в) $\{\{1\}\} \in A$;
(г) $\{1\} \subseteq A$; (д) $\{\{1\}\} \subseteq A$; (е) $\{2\} \in A$;
(є) $\{2\} \subseteq A$; (ж) $\{\{2\}\} \subseteq A$; (з) $\{1, 2\} \in A$;
(и) $\{1, 2\} \subseteq A$; (і) $\varnothing \in A$; (ї) $\varnothing \subseteq A$;
(й) $\{\varnothing\} \in A$; (к) $\{\varnothing\} \subseteq A$; (л) $\{\varnothing, 1\} \subseteq A$.

(а), (б), (г), (д), (є), (и), (ї) – правильні.

3. Нехай $A = \{\varnothing, 1, \{1\}, \{2\}\}$. Які зі співвідношень попередньої задачі є правильними?

(а), (б), (г), (д), (е), (ж), (і), (ї), (к), (л) – правильні.

4. Які з наведених співвідношень є правильними:

(а) $\varnothing \subseteq \varnothing$; (б) $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$; (в) $\{\varnothing\} \subseteq \varnothing$;
(г) $\{\varnothing\} \subseteq \{\{\varnothing\}\}$; (д) $\varnothing \subseteq \{1\}$; (е) $\{\varnothing\} \subseteq \{\varnothing\}$;
(є) $\{\{\varnothing\}\} \subseteq \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$; (ж) $\{\{\varnothing\}\} \subseteq \{\varnothing\}$

(а), (б), (д), (е), (є) – правильні.

5. Які з наведених тверджень правильні:

(а) якщо $A \in B$ і $B \in C$, то $A \in C$;
(б) якщо $A \in B$ і $B \subseteq C$, то $A \in C$;
(в) якщо $A \subseteq B$ і $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$;
(г) якщо $A \subseteq B$ і $B \in C$, то $A \subseteq C$?

У тих випадках, коли твердження неправильне, разом із контрприкладами побудуйте окремі приклади, для яких воно виконується.

Тільки б, в – правильні.

(а) Контрприклад:

$$\text{для } A = \{1\}, B = \{\{1\}, 2\}, C = \{\{\{1\}, 2\}, 3\}$$

твердження хибне.

Приклад, коли твердження виконується:

$$A = \{1\}, B = \{\{1\}, 2\}, C = \{\{\{1\}, 2\}, \{1\}\}.$$

(г) Контрприклад: для

$$A = \{1\}, B = \{1, 2\}, C = \{\{1, 2\}, 3\}$$

твердження хибне.

Приклад, коли твердження виконується:

$$A = \{1\}, B = \{1, 2\}, C = \{\{1, 2\}, 1\}.$$

6. Чи є наведене твердження правильним: якщо $A \notin B$ і $B \notin C$, то $A \notin C$?

Ні. Контрприклад: для $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $C = \{\{1\}, 3\}$ це твердження хибне. ◄

Множину всіх підмножин множини A (скінченної чи нескінченної) називають **булеаном** множини A та позначають $\beta(A)$.

Для булеана множини A використовують також інші позначення: 2^A, $P(A)$, $B(A)$ або $\mathrm{M}(A)$.

Наприклад, для множини $A = \{a, b\}$ маємо

$$\beta(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}.$$

Приклад 2.6.

1. Для заданої множини A побудувати множину всіх підмножин множини A, тобто її булеан $\beta(A)$.

(а) $A = \{1, 2, 3\}$; (б) $A = \{\varnothing\}$; (в) $A = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

► (а) $\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$;

(б) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$; (в) $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$. ◄

2. Визначити множину $\beta(\beta(\{1, 2\}))$.

► $\beta(\beta(\{1, 2\})) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{1\}\}, \{\{2\}\}, \{\{1, 2\}\}, \{\varnothing, \{1\}\}, \{\varnothing, \{2\}\}, \{\varnothing, \{1, 2\}\}, \{\{1\}, \{2\}\}, \{\{1\}, \{1, 2\}\}, \{\{2\}, \{1, 2\}\}, \{\varnothing, \{1\}, \{2\}\}, \{\varnothing, \{1\}, \{1, 2\}\}, \{\varnothing, \{2\}, \{1, 2\}\}, \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}, \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}\}$. ◄

Завдання для самостійної роботи

1. Які з наведених співвідношень правильні?

(а) $\{2, 1, 3\} = \{1, 1, 2, 2, 3\}$; (б) $\{1, 2, \{3\}\} = \{1, \{2\}, \{3\}\}$;
(в) $\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1, 2\}$; (г) $\{1, 2, 3\} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}$.

2. Із яких елементів складається множина B, якщо $A = \{1, 2, 3\}$?

(а) $B = \{ y \mid y = x + z, x, z \in A\}$; (б) $B = \{ y \mid x = y + z, x, z \in A\}$;
(в) $B = \{ y \mid y = x\, z, x, z \in A\}$.

3. Які з наведених співвідношень правильні?

(а) $\varnothing = \{0\}$; (б) $\varnothing = \{\ \}$; (в) $\{2, \varnothing\} = \{2\}$;
(г) $|\varnothing| = 0$; (д) $|\{\varnothing\}| = 0$; (е) $|\{\varnothing\}| = 1$;
(є) $|\{\{\varnothing, \varnothing\}\}| = 2$; (ж) $|\{\varnothing, \{\varnothing\}\}| = 2$.

4. Які з наведених співвідношень правильні?

(а) $2 \in \{1, 2, 3\}$; (б) $2 \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$;
(в) $\{2\} \in \{1, 2, 3\}$; (г) $\{2\} \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$;
(д) $\{1, 3\} \in \{1, 2, 3\}$; (е) $\{1, 3\} \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$;
(є) $a \in \{a\}$; (ж) $\{2, 3\} \in \{2, 3\}$;
(з) $\{1, 3\} \in \{\{1, 3\}\}$.

5. Які з наведених співвідношень правильні:

(а) $0 \in \varnothing$; (б) $\varnothing \in \varnothing$; (в) $\varnothing \in \{\varnothing, 1\}$; (г) $\varnothing \in \{\varnothing\}$;
(д) $\varnothing \in \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$; (е) $\{\varnothing\} \in \{\{\{\varnothing\}\}\}$?

6. Які з наведених співвідношень правильні?

(а) $2 \subseteq \{1, 2, 3\}$; (б) $\{2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$;
(в) $\{1, 1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$; (г) $\{1\} \subseteq \{\{1\}, \{1, 2, 3\}\}$;
(д) $\{1, 2, 3\} \subseteq \{\{1\}, \{1, 2\}, \{3\}\}$; (е) $\varnothing \subseteq \{1, 2, 3\}$.

7. Нехай $A = \{1, 2, \{2\}\}$. Які з наведених співвідношень правильні?

(а) $2 \in A$; (б) $\{2\} \in A$; (в) $\{\{1\}\} \in A$; (г) $\{1\} \subseteq A$;
(д) $\{\{1\}\} \subseteq A$; (е) $\{1\} \in A$; (є) $\{2\} \subseteq A$; (ж) $\{\{1\}\} \subseteq A$;
(з) $\{1, 2\} \in A$; (и) $\{1, 2\} \subseteq A$; (й) $\{\varnothing\} \in A$; (і) $\varnothing \in A$;
(ї) $\varnothing \subseteq A$; (к) $\{\varnothing\} \subseteq A$; (л) $\{\varnothing, 2\} \subseteq A$; (м) $\{\varnothing, \{2\}\} \subseteq A$

8. Які з наведених співвідношень правильні?

(а) $\varnothing \subseteq \varnothing$; (б) $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$; (в) $\{\varnothing\} \subseteq \varnothing$;
(г) $\{\varnothing\} \subseteq \{\{\varnothing\}\}$; (д) $\varnothing \subseteq \{1\}$; (е) $\{\varnothing\} \subseteq \{\varnothing\}$;
(є) $\{\{\varnothing\}\} \subseteq \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$; (ж) $\{\{\varnothing\}\} \subseteq \{\varnothing\}$; (з) $\{\{\varnothing\}\} \subseteq \{\{\{\varnothing\}\}\}$.

9. Чи існує така одноелементна множина B, що для деякої множини A одночасно виконуються співвідношення $A \in B$ і $A \subseteq B$?

10. Для множини A побудувати множину всіх її підмножин, тобто булеан $\beta(A)$:

(а) $A = \{2, 3, 4\}$; (б) $A = \{\varnothing, 1\}$;
(в) $A = \{1, \{1\}, \{1, 2\}\}$; (г) $A = \{\varnothing, \{2, 3\}\}$.

11. Визначити множину: (а) $\beta(\beta(\{2, 3\}))$; (б) $\beta(\beta(\beta(\varnothing)))$.

2.3. Операції над множинами та їхні властивості

Для множин можна ввести низку операцій (теоретико-множинних), результатом виконання яких також є множини. За допомогою цих операцій можна конструювати нові множини із заданих.

Нехай A та B – якісь множини.

Об'єднанням множин A та B (позначають $A \cup B$) називають множину тих елементів, які належать принаймні одній із множин A чи B. Символічно операцію об'єднання множин записують так:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ або } x \in B\}, \text{ чи } x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B).$$

Приклад 2.7. $\{a, b\} \cup \{c, d,\} = \{a, b, c, d,\}$, $\{a, c\} \cup \varnothing = \{a, c\}$, $\{a, b, c\} \cup \{a, c, d, e\} = \{a, b, c, d, e\}$. ◄

Перетином множин A та B (позначчють $A \cap B$) називають множину, що складається із тих і тільки тих елементів, які належать множинам A та B одночасно, тобто

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ та } x \in B\}, \text{ або } x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B).$$

Приклад 2.8. $\{a, b, c\} \cap \{a, c, d, e\} = \{a, c\}$, $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \varnothing$. ◄

Кажуть, що множини A та B **не перетинаються**, якщо $A \cap B = \varnothing$.

Різницею множин A та B (позначають $A \setminus B$) називають множину тих елементів, які належать множині A та не належать множині B. Отже,

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ та } x \notin B\}, \text{ або } x \in A \setminus B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge \neg (x \in B).$$

Приклад 2.9. $\{b, c\} \setminus \{a, d, c\} = \{b\}$, $\{a, c, d, e\} \setminus \{a, b, c\} = \{d, e\}$, $\{a, b\} \setminus \varnothing = \{a, b\}$, $\{a, b\} \setminus \{a, b, c, d\} = \varnothing$. ◄

Симетричною різницею множин A та B (позначають $A \Delta B$, $A \oplus B$ або $A \div B$) називають множину, що складається зі всіх елементів множини A, які не містяться у B, а також усіх елементів множини B, які не містяться в A, тобто

$$A \Delta B = \{x \mid (x \in A \text{ та } x \notin B \text{ }), \text{ або (} x \in B \text{ та } x \notin A)\}, \text{ або}$$

$$x \in A \Delta B \Leftrightarrow ((x \in A) \wedge \neg (x \in B))(\neg (x \in A) \wedge (x \in B)).$$

Приклад 2.10.

1. $\{a, b, c\} \Delta \{a, c, d, e\} = \{b, d, e\}$, $\{a, b\} \Delta \{a, b\} = \varnothing$, $\{a, b\} \Delta \varnothing = \{a, b\}$.

2. Нехай $A = \{1, 3, 5, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ і $C = \{2, 4, 7\}$. Обчислити:

(а) $A \cup B$; (б) $(A \cup C) \setminus B$; (в) $A \cap B \cap C$;
(г) $(A \setminus C) \cup (B \setminus A)$; (д) $A \Delta B$; (е) $(B \setminus C) \cap (A \setminus B)$.

► (а) $\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$; (б) $\{4, 6\}$; (в) $\varnothing$;
(г) $\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$; (д) $\{2, 6, 7\}$; (е) $\varnothing$. ◄

Уведені теоретико-множинні операції можна проілюструвати **діаграмою Венна** (або **діаграмою Ейлера**) (рис. 2.1).

Тут A та B – множини точок двох кругів. Тоді множина $A \cup B$ складається із точок областей **I**, **II**, **III**, $A \cap B$ – область **II**, $A \setminus B$ – область **I**, $B \setminus A$ – область **III**, $A \Delta B$ складається із точок областей **I** та **III**.

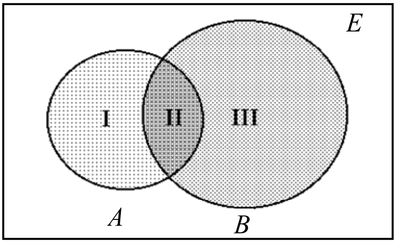


Рис. 2.1

У конкретній математичній теорії буває зручно вважати, що всі розглядувані множини є підмножинами деякої фіксованої множини, яку називають **універсальною множиною**, або **універсумом**, і позначають через E (або U). Наприклад, в елементарній алгебрі такою універсальною множиною можна вважати множину дійсних чисел R, у вищій алгебрі – множину комплексних чисел C, в арифметиці – множину цілих чисел Z, у традиційній планіметрії – множину всіх точок площини або множину всіх геометричних об'єктів, тобто множину множин точок на площині тощо.

Якщо зафіксовано універсальну множину E, то **доповненням** множини A (воно є підмножиною універсальної множини E й позначається $\overline{A}$) називають множину всіх елементів універсальної множини, що не належать множині A, тобто

$$\overline{A} = \{x \mid x\in E \text{ та } x\notin A\}, \text{ або } x\in \overline{A} \Leftrightarrow \neg (x\in A).$$

Зауважимо, що $\overline{A} = E \setminus A$.

Приклад 2.11.

1. Якщо за універсальну множину взяти множину N усіх натуральних чисел, то доповненням $\overline{P}$ множини P усіх парних натуральних чисел буде множина всіх непарних натуральних чисел.

2. Нехай $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{2, 3, 6\}$, $B = \{1, 4, 6, 7\}$ і $C = \{1, 2, 3, 6\}$. Обчислити:

(а) $\overline{A}$; (б) $\overline{B \cup C}$; (в) $A \cap \overline{C}$;

(г) $\overline{(A \cup C)} \cup (\overline{(A \cup B)}$; (д) $\overline{(A \cap \overline{B})} \cup B$; (е) $(C \setminus B) \cap (A \setminus \overline{C})$.

► (а) $\{1, 4, 5, 7\}$; (б) $\{5\}$; (в) $\varnothing$;
(г) $\{4, 5, 7\}$; (д) $\{1, 4, 5, 6, 7\}$; (е) $\{2, 3\}$. ◄

Зазначимо у вигляді тотожностей **основні властивості** введених вище **теоретико-множинних операцій**:

1. Асоціативність:
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

2. Комутативність: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$.

3. Дистрибутивність:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C). \qquad (2.1)$$

4. Ідемпотентність: $A \cup A = A$; $A \cap A = A$.

5. Інволютивність: $\overline{\overline{A}} = A$.

6. Правила (закони) де Моргана:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}; \ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Наведемо також інші корисні **теоретико-множинні тотожності:**

$$A \cup \varnothing = A, A \cap \varnothing = \varnothing; A \cup E = E, \qquad A \cap E = A;$$
$$A \cup \overline{A} = E, A \cap \overline{A} = \varnothing; \ \overline{E} = \varnothing, \ \overline{\varnothing} = E. \qquad (2.2)$$

Окремо запишемо **властивості операції симетричної різниці**:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus A \cap B) = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B),$$

$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ – **асоціативність,**

$A \Delta B = B \Delta A$ – **комутативність,**

$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$ – **дистрибутивність перетину**),

$A \Delta A \varnothing, A \Delta E = \overline{A}, \ A \Delta \varnothing = A.$

Приклад 2.12. Покажемо істинність однієї із наведених тотожностей – правила де Моргана $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Як зазначалось, рівність двох множин $A = B$ має місце тоді й тільки тоді, коли одночасно виконуються два включення:

$$A \subseteq B \text{ і } B \subseteq A.$$

Для доведення теоретико-множинного включення однієї множини в іншу слід розглянути довільний елемент першої множини і шляхом коректних міркувань обґрунтувати, що цей елемент належить також другій із цих множин.

Побудуємо такий ланцюжок логічних міркувань (за кожним знаком $\Rightarrow$ або $\Leftrightarrow$ записано відповідне пояснення):

$x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow$ – **за означенням доповнення множини**;

$\neg (x \in A \cup B) \Leftrightarrow$ – **за означенням об'єднання множин**;

$\neg ((x \in A) \vee (x \in B)) \Leftrightarrow$ – **за законом де Моргана**, див. п. 1.3;

$\neg (x \in A) \wedge \neg (x \in B) \Leftrightarrow$ – **за означенням доповнення множини**;

$x \in \overline{A} \wedge x \in \overline{B} \Leftrightarrow$ – **за означенням перетину множин** $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$.

Усі кроки описаних вище міркувань були рівносильними. Це означає, що із твердження $x \in \overline{A \cup B}$ випливає $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$, і навпаки. Отже, обґрунтовано обидва включення:

$$\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B} \text{ і } \overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}. \blacktriangleleft$$

Аналогічно можна довести всі інші наведені теоретико-множинні тотожності.

Ці тотожності дають змогу спрощувати різні складні вирази над множинами.

Приклад 2.13. Послідовно застосовуючи тотожності із (2.1) і (2.2), маємо:

$$(A \cap B \cap C \cap \overline{D}) \cup (\overline{A} \cap C) \cup (\overline{B} \cap C) \cup (C \cap D) =$$
$$= (A \cap B \cap C \cap \overline{D}) \cup ((\overline{A} \cup \overline{B} \cup D) \cap C) =$$
$$= ((A \cap B \cap \overline{D}) \cup (\overline{A \cap B \cap \overline{D}})) \cap C = E \cap C = C. \blacktriangleleft$$

Ще одним методом доведення теоретико-множинних співвідношень (рівностей або включень) є **метод логічних таблиць.**

Значення твердження, що об'єкт є елементом множини M (тобто $x \in M$), позначатимемо символом 1. В іншому разі, якщо $x \notin M$, писатимемо 0.

Приклад 2.14.

1. Доведемо методом логічних таблиць теоретико-множинну рівність $A \setminus (B \,\Delta\, C) = (A \setminus \overline{B}) \,\Delta\, (A \setminus C)$.

За допомогою індексів занумеруємо порядок виконання операцій у лівій та правій частинах, як це було зроблено у прикладах 1.5 та 1.6. Матимемо $A \setminus_2 (B \Delta_1 C) = (A \setminus_1 \overline{B}) \Delta_3 (A \setminus_2 C)$.

Як і раніше, запис (k) у таблиці позначатиме результат операції з номером k.

Будуємо відповідні логічні таблиці:

$x \in A$	$x \in B$	$x \in C$	**Ліва частина**		**Права частина**		
			$x \in (1)$	$x \in (2)$	$x \in (1)$	$x \in (2)$	$x \in (3)$
0	0	0	0	**0**	1	0	**0**
0	0	1	1	**0**	1	0	**0**
0	1	0	1	**0**	0	0	**0**
0	1	1	0	**0**	0	0	**0**
1	0	0	0	**1**	1	0	**1**
1	0	1	1	**0**	1	0	**0**
1	1	0	1	**0**	0	1	**0**
1	1	1	0	**1**	0	1	**1**

Правило заповнення таблиць розглянемо для випадку

$$(x \in A) \wedge (x \notin B) \wedge (x \in C).$$

За таких умов виконується $x \in B \Delta C$ (у таблиці цей факт позначено $x \in (1)$). Тоді зі співвідношень $x \in A$ та $x \in B \Delta C$ випливає, що $x \notin A \setminus (B \Delta C)$, тобто x не є елементом множини в лівій частині.

За тих самих умов у правій частині матимемо послідовно: $x \in \overline{B}$ (оскільки $x \notin B$), $x \notin A \setminus \overline{B}$ (оскільки $x \in A$ та $x \in \overline{B}$), $x \notin A \setminus C$) (оскільки $x \in A$ та $x \in C$) і, нарешті, $x \notin (A \setminus \overline{B}) \Delta (A \setminus C)$ (оскільки $x \notin A \setminus \overline{B}$ та $x \notin A \setminus C$).

Повний збіг значень в останніх (виділених) стовпцях таблиць, що відповідають лівій і правій частинам даної теоретико-множинної рівності, свідчить, що ця рівність справджується.

2. Для доведення теоретико-множинного включення (напр., $M1 \subseteq M2$) за допомогою методу логічних таблиць аналогічно попередньому прикладу будуємо логічні таблиці для множин $M1$ та $M2$. Включення справджується, якщо в будь-якому рядку цих двох таблиць імплікація значення, що відповідає множині $M1$, і значення, що відповідає $M2$, є істинною (тобто твердження $\forall x((x \in M1) \to (x \in M2))$ – істинне).

Побудуємо відповідні логічні таблиці для доведення такого теоретико-множинного включення: $A \setminus (B \cup C) \subseteq (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Маємо $A \setminus_2 (B \cup_1 C) \subseteq (A \setminus_1 B) \cup_3 (A \setminus_2 C)$.

Імплікації виділених значень у всіх рядках таблиці є істинними, тому включення справджується.

Аналіз отриманих логічних таблиць свідчить також, що в наведеному співвідношенні знак включення $\subseteq$ не можна замінити на знак рівності. Наприклад, для випадку $(x{\in}A) \wedge (x{\notin}B) \wedge (x{\in}C)$ (відповідний рядок таблиці – (1,0,1)) такий об'єкт x є елементом правої множини, однак він не належить лівій множині. ◄

$x{\in}A$	$x{\in}B$	$x{\in}C$	**Ліва частина**		**Права частина**		
			$x{\in}(1)$	$x{\in}(2)$	$x{\in}(1)$	$x{\in}(2)$	$x{\in}(3)$
0	0	0	0	**0**	0	0	**0**
0	0	1	1	**0**	0	0	**0**
0	1	0	1	**0**	0	0	**0**
0	1	1	1	**0**	0	0	**0**
1	0	0	0	**1**	1	1	**1**
1	0	1	1	**0**	1	0	**1**
1	1	0	1	**0**	0	1	**1**
1	1	1	1	**0**	0	0	**0**

3. Перевірити (довести чи спростувати) правильність такого твердження:

(а) якщо $A \cap B \subseteq \overline{C}$ і $A \cup C \subseteq B$, то $A \subseteq \overline{C}$;

(б) $A \cap B \subseteq C$ тоді й тільки тоді, коли $A \subseteq \overline{B} \cup C$;

(в) якщо $A \cap B \subseteq C$, то $A \subseteq C$ і $B \subseteq C$.

(а) Позначимо елементарні твердження $x{\in}A$, $x{\in}B$ та $x{\in}C$ через a, b, c, відповідно. Тоді перевірка правильності сформульованого твердження зводиться до з'ясування коректності такого логічного висновку: $(a \wedge b) \to (\neg c), (a \vee c) \to b \vdash a \to (\neg c)$.

Тобто слід визначити, чи є тавтологією формула

$$((a \wedge b) \to (\neg c)) \wedge ((a \vee c) \to b) \to (a \to (\neg c)).$$

Побудовою таблиці істинності або методом відшукання контрприкладу переконуємось, що остання формула є тавтологією. Отже, твердження правильне.

(б) Використаємо ті самі елементарні твердження, що й у попередньому пункті. Відповідна до наведеного твердження формула

$$((a \wedge b) \to c)) \sim (a \to (\neg\, b \vee c))$$

є тавтологією, що свідчить про його правильність.

(в) Аналогічно попереднім пунктам запишемо відповідну наслідковість

$$a \wedge b \to c \;\; (a \to b) \wedge (b \to c).$$

Неважко переконатись, що ця наслідковість не виконується. Наприклад, для елемента x такого, що $x \in A$, $x \notin B$ та $x \notin C$, засновок $a \wedge b \to c$ буде істинним, а висновок $(a \to b) \wedge (b \to c)$ – хибним. ◄

Приклад 2.15.

1. Навести приклад множин A та B, які спростовують рівність $(A \setminus B) \cup B = A$. Сформулювати та довести необхідні й достатні умови для виконання цієї рівності.

Наприклад, $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$. Тоді $(A \setminus B) \cup B = \{1, 2, 3\} \neq A$.

Доведемо, що $(A \setminus B) \cup B = A$ тоді й тільки тоді, коли $B \subseteq A$.

Нехай $(A \setminus B) \cup B = A$. Розглянемо довільний елемент $x \in B$. З вивідностей у п. 1.4 маємо: $x \in B \Rightarrow (x \in A \setminus B \vee x \in B) \Leftrightarrow$ (за означенням об'єднання множин) $x \in (A \setminus B) \cup B$. Отже, за умовою $x \in A$ й виконується включення $B \subseteq A$.

Припустимо, що $B \subseteq A$. Для встановлення рівності

$$(A \setminus B) \cup B = A$$

доведемо такі два включення: $(A \setminus B) \cup B \subseteq A$ та $A \subseteq (A \setminus B) \cup B$.

$x \in (A \setminus B) \cup B \Leftrightarrow$ – за означенням **об'єднання множин**;

$(x \in (A \setminus B) \vee x \in B) \Leftrightarrow$ – за означенням **різниці множин**;

$((x \in A \wedge x \notin B) \vee x \in B) \Rightarrow$ – див. п. 1.4 і припущення $B \subseteq A$;

$(x \in A \vee x \in A) \Leftrightarrow$ – **ідемпотентність диз'юнкції** $x \in A$.

Навпаки, нехай $x \in A \Rightarrow$ (див. п. 1.4) $(x \in A \wedge (x \in B \vee x \notin B)) \Leftrightarrow$ – **дистрибутивність кон'юнкції щодо диз'юнкції**, див. п. 1.3);

$((x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \notin B)) \Rightarrow$ – див. п. 1.4;

$(x \in B \vee x \in A \setminus B) \Leftrightarrow$ – за означенням **об'єднання та властивістю комутативності об'єднання множин** $x \in (A \setminus B) \cup B$.

Отже, необхідні й достатні умови для виконання рівності $(A \setminus B) \cup B = A$ доведено.

2. Чи існують множини A, B і C, для яких одночасно виконуються такі співвідношення?

$$A \cap B \neq \varnothing,\ A \cap C = \varnothing,\ (A \cap B) \setminus C = \varnothing.$$

Ні. Доведення виконаємо методом від супротивного, тобто припустимо, що такі множини A, B і C існують. Тоді з умови $A \cap B \neq \varnothing$ випливає, що існує елемент $x \in A \cap B$, тобто $x \in A$ та $x \in B$. З другої умови отримаємо $x \notin C$. Отже, $x \in (A \cap B) \setminus C$, що суперечить останній умові. Отримана суперечність спростовує припущення про існування таких множин.

3. Довести, що $A \cap B \subseteq C$ тоді й тільки тоді, коли $A \subseteq \overline{B} \cup C$.

Нехай $A \cap B \subseteq C$ і $x \in A \Rightarrow$ – див. п. 1.4;

$(x \in A \wedge (x \in B \vee x \notin B)) \Leftrightarrow$ – **дистрибутивність кон'юнкції щодо диз'юнкції**, див. п. 1.3;

$((x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \notin B)) \Rightarrow$ – **означення перетину й доповнення множин і наслідковість** із п. 1.4;

$(x \in A \cap B \vee x \in \overline{B}) \Rightarrow$ – **припущення задачі й означення об'єднання множин** $x \in \overline{B} \cup C$.

Отже, доведено, що $A \subseteq \overline{B} \cup C$.

Навпаки, нехай $A \subseteq \overline{B} \cup C$. Маємо

$x \in A \cap B \Leftrightarrow$ – **означення перетину множин**;

$x \in A \wedge x \in B \Rightarrow$ – **припущення задачі**;

$(x \in \overline{B} \cup C \wedge x \in B) \Leftrightarrow$ – **означення об'єднання множин**;

$(x \in \overline{B} \vee x \in C) \wedge x \in B \Leftrightarrow$ – **дистрибутивність кон'юнкції щодо диз'юнкції**;

$(x \in \overline{B} \wedge x \in B) \vee (x \in C \wedge x \in B) \Leftrightarrow$ – **означення доповнення множини**;

$(\neg (x \in B) \wedge x \in B) \vee (x \in C \wedge x \in B) \Leftrightarrow$ – **властивість заперечення**, див. п. 1.3;

$\mathbf{0} \vee (x \in C \wedge x \in B) \Leftrightarrow$ – властивості елементів **0** і **1**, див. п. 1.3;

$C \wedge x \in B \Rightarrow$ – наслідковість із п. 1.4 $x \in C$.

Таким чином, доведено включення $A \cap B \subseteq C$.

Наведене твердження можна довести також за допомогою методів математичної логіки, обґрунтувавши рівносильність формул

$$((x \in A \wedge x \in B) \rightarrow x \in C) \text{ і } (x \in A \rightarrow (\neg x \in B \vee x \in C))$$

або (що те саме) тотожну істинність виразу

$$((x \in A \wedge x \in B) \rightarrow x \in C) \sim (x \in A \rightarrow (\neg x \in B \vee x \in C)).$$

4. Що можна сказати про множини A та B, якщо?

1) $A \,\Delta\, B = A$; 2) $A \,\Delta\, B = \overline{A}$.

У першому випадку A – довільна множина, а $B = \varnothing$. Обґрунтуємо це твердження методом від супротивного, тобто припустимо, що множина B непорожня та існує елемент $x \in B$. Якщо одночасно $x \in A$, то за означенням симетричної різниці множин матимемо, що $x \notin A \Delta B$, тобто $A \Delta B \neq A$, що суперечить умові задачі. Якщо ж припустити, що $x \in B$, але $x \notin A$, то за означенням симетричної різниці множин матимемо, що $x \in A \Delta B$. Отже, і цього разу задана рівність $A \Delta B = A$ не виконується. Таким чином, припущення, що $B \neq \varnothing$, суперечить умові задачі, тобто має місце рівність $B = \varnothing$.

Розв'язання другої задачі таке: A – довільна множина, а $B = E$ (або $\overline{B} = \varnothing$). Знову застосуємо метод від супротивного й припустимо, що множина $\overline{B}$ непорожня та існує елемент $x \in \overline{B}$. Якщо одночасно $x \in A$ (тобто $x \notin \overline{A}$), то за означенням симетричної різниці множин матимемо $x \in A \Delta B$, тобто $A \Delta B \neq \overline{A}$, що суперечить умові задачі. Якщо ж припустити, що $x \in \overline{B}$, але $x \notin A$ (або $x \in \overline{A}$), то отримаємо $x \notin A \Delta B$, тобто й цього разу задана в умові рівність не виконується. Отже, припустивши, що $B \neq E$, дійшли суперечності, тобто має місце рівність $B = E$. ◄

Завдання для самостійної роботи

1. Нехай $A = \{1, 3, 5, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ і $C = \{2, 4, 7\}$.
Обчислити:
(а) $A \cup B$; (б) $(A \cup C) \setminus B$; (в) $A \cap B \cap C$;
(г) $(A \setminus C) \cup (B \setminus A)$; (д) $A \Delta B$; (е) $(B \setminus C) \cap (A \setminus B)$.

2. За допомогою діаграм Венна та методу логічних таблиць перевірити такі теоретико-множинні рівності:
(а) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
(б) $(A \cap B) \cup A = (A \cup B) \cap A = A$;
(в) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
(г) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;
(д) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$;
(е) $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

3. Навести приклад множин A та B, які спростовують рівність

$$(A \cup B) \setminus B = A.$$

Сформулювати й довести необхідні й достатні умови для виконання цієї рівності.

4. Визначити множини:

(а) $\varnothing \cap \{\varnothing\}$; (б) $\{\varnothing\} \cap \{\varnothing\}$; (в) $\{\varnothing\} \cup \varnothing$;

(г) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\} \setminus \varnothing$; (д) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\} \setminus \{\varnothing\}$; (е) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\} \setminus \{\{\varnothing\}\}$.

5. Нехай A та B – довільні множини. Довести, що співвідношення, розміщені в одному рядку, рівносильні між собою, тобто з істинності одного з них випливає істинність усіх інших.

(а) $A \subseteq B$, $\overline{B} \subseteq \overline{A}$, $A \cup B = B$, $A \cap B = A$, $A \setminus B = \varnothing$;

(б) $A \subseteq B$, $\overline{A} \cup B = E$, $A \cap \overline{B} = \varnothing$;

(в) $A \cap B = \varnothing$, $A \subseteq \overline{B}$, $B \subseteq \overline{A}$;

(г) $A \cup B = E$, $\overline{A} \subseteq B$, $\overline{B} \subseteq A$.

6. Перевірити (довести чи спростувати) правильність твердження:

(а) якщо $A \cup C = B \cup C$, то $A = B$;

(б) якщо $A \cap C = B \cap C$, то $A = B$;

(в) якщо $A \,\Delta\, B = A \,\Delta\, C$, то $B = C$;

(г) якщо $A \cup C = B \cup C$ і $A \cap C = B \cap C$, то $A = B$;

(д) якщо $A \setminus C = B \setminus C$ і $C \setminus A = C \setminus B$, то $A = B$;

(е) якщо $A \setminus C = B \setminus C$ і $A \cap C = B \cap C$, то $A = B$.

7. Довести, що:

(а) $A \cup B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq C$ і $B \subseteq C$;

(б) $A \subseteq B \cap C \Leftrightarrow A \subseteq B$ і $A \subseteq C$;

(в) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow C \subseteq A$;

(г) $A \subseteq B \cup C \Leftrightarrow A \cap \overline{B} \subseteq C$;

(д) $(A \setminus B) \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$;

(е) $A \setminus B = A \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$.

8. Що можна сказати про множини A та B, якщо:

(а) $A \cup B = A \cap B$; (б) $A \setminus B = B \setminus A$; (в) $A \subseteq \overline{B}$ і $\overline{A} \subseteq B$;

(г) $A \cup B = \varnothing$; (д) $A \setminus B = A$; (є) $A \setminus B = B$;

(е) $A \setminus B = \varnothing$; (ж) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \cup B$.

9. Чи існують множини A, B і C, для яких одночасно виконуються такі співвідношення?

$$A \neq \varnothing,\ A \cap B = \varnothing,\ A \cap C = \varnothing,\ A \setminus (B \cup C) = \varnothing.$$

10. Довести тотожність $(A \cap B) \cup A = (A \cup B) \cap A = A$.

11. Сформулювати та довести необхідні й достатні умови для множин A та B, щоб виконувалася рівність

$$\beta(A) \cup \beta(B) = \beta(A \cup B).$$

12. Що можна сказати про множини A та B, якщо:

(а) $A \Delta B = B$; (б) $A \Delta B = \overline{B}$; (в) $A \Delta B = \varnothing$;

(г) $A \Delta B = E$; (д) $(A \setminus B) \Delta (B \setminus A) = \varnothing$; (е) $(A \cup B) \Delta A = B$?

2.4. Декартів (прямий) добуток множин

Декартовим (прямим) добутком множин A та B (позначають $A \times B$) називають множину всіх пар (a, b), у яких перша компонента належить множині A ($a \in A$), а друга – множині B ($b \in B$), тобто

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ та } b \in B \},\text{ або } (a, b) \in A \times B \Leftrightarrow a \in A \wedge b \in B.$$

Декартів добуток можна природно узагальнити для довільної скінченної сукупності множин. Якщо $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – множини, то їхнім декартовим добутком називається множина

$$D = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\},$$

яка складається зі всіх наборів $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, у кожному з яких i-й член, що називається **i-ю координатою**, або **i-м компонентом** набору, належить множині A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Декартів добуток позначають $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

Щоб відрізняти набір $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ від множини, що складається з елементів $a_1, a_2, \ldots, a_n$, його записують не у фігурних, а в круглих дужках і називають **кортежем**, **вектором** або **впорядкованим набором.**

Довжиною кортежу називають кількість його координат.

Два кортежі $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ і $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ однакової довжини вважають **рівними** тоді й тільки тоді, коли рівні відповідні їхні координати, тобто $a_i = b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Отже, кортежі (a, b, c) і (a, c, b) різні, у той час як множини $\{a, b, c\}$ і $\{a, c, b\}$ рівні між собою.

Декартів добуток множини A на себе n разів, тобто множину $A \times A \times \ldots \times A$, називають **$n$-м декартовим (прямим) степенем** множини A та позначають A^n.

Вважають, що $A^0 = \varnothing$ ($n = 0$) і $A^1 = A$ ($n = 1$).

Приклад 2.16. 1. Якщо $A = \{a, b\}$ і $B = \{b, c, d\}$, то

$$A \times B = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, c), (b, d)\},$$
$$A^2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}.$$

2. Якщо R – множина дійсних чисел, або множина точок координатної прямої, то R^2 – це множина пар (a, b), де $a, b \in R$, або множина точок координатної площини.

Координатне зображення точок площини вперше запропонував французький математик і філософ Рене Декарт, тому введена теоретико-множинна операція й називається декартовим добутком.

3. Скінченну множину A, елементами якої є символи (літери, цифри, спеціальні знаки тощо), називають **алфавітом**. Елементи декартового степеня A^n називають **словами** довжиною n в алфавіті A. Множина

$$A^* = \{e\} \cup A \cup A^2 \cup A^3 \cup \ldots = \{e\} \cup \bigcup_{i \in N} A^i$$

– це **множина всіх слів у алфавіті** A; тут e – **порожнє слово** (слово довжиною 0), яке не містить жодного символу алфавіту A. Порожнє слово позначають також через ε.

Замість запису слів з A^n у вигляді кортежів $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ частіше використовують традиційну форму їх запису у вигляді послідовності символів $a_1a_2\ldots a_n$, $a_j \in A$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Наприклад,

010111, 011, 0010, 100 – слова в алфавіті $B = \{0, 1\}$,

67–35, 98))*–)+1, (4*50+12)/27 – слова в алфавіті

$C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, +, –, *, /, (,)\}$. ◄

Операція декартового добутку неасоціативна й некомутативна, тобто множини

$$(A \times B) \times C,\ A \times (B \times C) \text{ і } A \times B \times C,$$

а також множини

$$A \times B \quad \text{і} \quad B \times A$$

не рівні між собою. (Зауважимо, що в математиці множини $(A \times B) \times C$ і $A \times (B \times C)$ іноді ототожнюють з $A \times B \times C$, вважаючи, що кортежі $((a, b), c)$, $(a, (b, c))$ і (a, b, c) збігаються.)

Приклад 2.17.

1. Навести приклад множин A та B таких, що $A \times B \neq B \times A$. Для яких множин виконується рівність?

Для будь-яких множин A та B таких, що $A \neq B$, виконується $A \times B \neq B \times A$. Рівність має місце, коли $A = B$.

2. Довести, що $(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B) \times (A \cap B)$.

$$(x, y) \in (A \times B) \cap (B \times A) \Leftrightarrow (x, y) \in A \times B \wedge (x, y) \in B \times A \Leftrightarrow$$
$$(x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in B \wedge y \in A) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B \wedge y \in A \wedge y \in B) \Leftrightarrow$$
$$(x \in A \cap B \wedge y \in A \cap B) \Leftrightarrow (x, y) \in (A \cap B) \times (A \cap B). \blacktriangleleft$$

Зв'язок декартового добутку з іншими теоретико-множинними операціями виражають такі тотожності:

$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$, $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$,
$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$, $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

Проекцією на i-ту вісь (або **i-ю проекцією**) кортежу

$$w = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

називають i-ту координату a_i кортежу w; позначають $\mathrm{Pr}_i w$.

Проекцією кортежу $w = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ на осі з номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ називають кортеж $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k})$; позначають

$$\mathrm{Pr}_{i_1, i_2, \ldots, i_k} w.$$

Нехай V – множина кортежів однакової довжини. **Проекцією множини** V на i-ту вісь (позначають $\mathrm{Pr}_i V$) називають множину проекцій на i-ту вісь усіх кортежів множини V:

$$\mathrm{Pr}_i V = \{ \mathrm{Pr}_i v \mid v \in V \}.$$

Аналогічно означають проекцію множини V на кілька осей:

$$\mathrm{Pr}_{i_1, i_2, \ldots, i_k} V = \{ \mathrm{Pr}_{i_1, i_2, \ldots, i_k} v \mid v \in V \}.$$

Приклад 2.18. $\mathrm{Pr}_{i_1, i_2, \ldots, i_k} (A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) = A_{i_1} \times A_{i_2} \times \ldots \times A_{i_k}$.

Якщо $V = \{(a, b, c), (a, c, d), (a, b, d)\}$, то $\mathrm{Pr}_1 V = \{a\}$,
$\mathrm{Pr}_2 V = \{b, c\}$, $\mathrm{Pr}_{1,3} V = \{(a, c), (a, d)\}$,
$\mathrm{Pr}_{2,3} V = \{(b, c), (c, d), (b, d)\}$. $\blacktriangleleft$

Завдання для самостійної роботи

1. Для заданих множин $A = \{1, 2\}$ і $B = \{2, 3, 4\}$ визначити:
(а) $A \times B$; (б) $B \times A$; (в) B^2;
(г) $(B \setminus A) \times A$; (д) $A \times B \times A$; (е) $A \times (A \cup B)$.

2. Довести, що $(A \times B) \cup (B \times A) \subseteq (A \cup B) \times (A \cup B)$.

3. Сформулювати й довести необхідні та достатні умови виконання рівності $(A \cup B) \times (A \cup B) = (A \times B) \cup (B \times A)$.

4. Позначимо $D = \beta(M) \times \beta(M) \times \beta(M)$, де $M = \{1, 2\}$. Виписати всі такі кортежі $(A, B, C) \in D$, що:

(а) $A \cap B = C$; (б) $A \cup B \cup C = M$; (в) $A \cap B \neq B \cap C$.

5. Довести, що коли $B \neq \varnothing$, то:

(а) $\mathrm{Pr}_1(A \times B) = A$; (б) якщо $C \subseteq A \times B$, то $\mathrm{Pr}_1 C \subseteq A$.

2.5. Відповідності

Відповідністю між множинами A та B називають будь-яку підмножину $C \subseteq A \times B$.

Якщо $(a, b) \in C$, то кажуть, що **елемент** b **відповідає елементу** a за відповідності C.

Оскільки відповідності є множинами, то для їхнього задання використовують ті самі методи, що й для довільних множин.

Крім того, відповідність можна задавати (чи ілюструвати) за допомогою **графіка відповідності**. Нехай

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ і } B = \{a, b, c, d\},$$

а $C = \{(1, a), (1, d), (2, c), (2, d), (3, b), (5, a), (5, b)\}$ – відповідність між A та B. Позначимо числами 1, 2, 3, 4, 5 вертикальні прямі, а літерами a, b, c, d – горизонтальні прямі на координатній площині (рис. 2.2, a). Тоді виділені вузли на перетині цих прямих позначають елементи відповідності C і утворюють графік відповідності C.

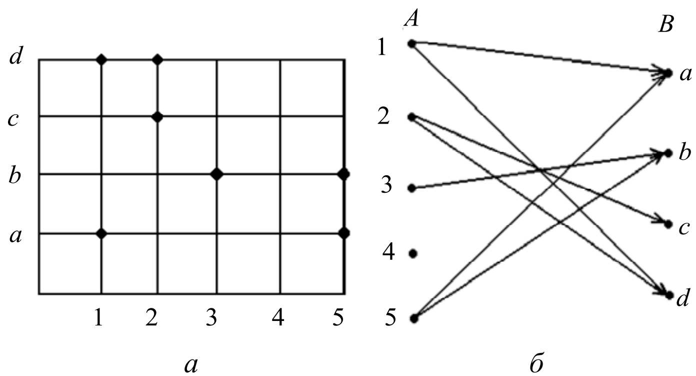


Рис. 2.2

Зручним методом задання невеликих скінченних відповідностей є **діаграма**, або **граф відповідності**. В одній колонці розміщують точки, позначені елементами множини A, у другій (праворуч) – точки, позначені елементами множини B. Із точки a першої колонки проводять стрілку в точку b другої колонки тоді й тільки тоді, коли пара (a, b) належить заданій відповідності. На рис. 2.2, *б* зображено діаграму відповідності C (див. попередній абзац).

Відповідність можна задавати, означаючи співвідношення, які мають задовольняти її обидві координати.

Приклад 2.19. Розглянемо на класичній координатній площині $R^2 = R \times R$ такі відповідності:

$$C_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\},\ C_2 = \{(x, y) \mid y = x^2\},$$
$$C_3 = \{(x, y) \mid |x| \le 1, |y| \le 1\}.$$

Графік відповідності C_1 – це коло радіусом 1 із центром у початку координат, графік C_2 – квадратична парабола, а графік C_3 – усі точки квадрата з вершинами (–1, –1), (–1, 1), (1, 1) і (1, –1). ◄

Нехай $C \subseteq A \times B$ – відповідність між множинами A та B.

Множину $\mathrm{Pr}_1 C$ називають **областю визначення**, а множину $\mathrm{Pr}_2 C$ – **областю значень** відповідності C (інші позначення – відповідно δ_C та ρ_C).

Образом елемента $a \in \mathrm{Pr}_1 C$ за відповідності C називають множину всіх елементів $b \in \mathrm{Pr}_2 C$, що відповідають елементу a; позначають $C(a)$. **Прообразом елемента** $b \in \mathrm{Pr}_2 C$ за відповідності C називають множину всіх тих елементів $a \in \mathrm{Pr}_1 C$, яким відповідає елемент b; позначають $C^{-1}(b)$. Якщо $D \subseteq \mathrm{Pr}_1 C$, то **образом множини** D за відповідності C називають об'єднання образів усіх елементів із D; позначають $C(D)$. Аналогічно означають **прообраз множини** $G \subseteq \mathrm{Pr}_2 C$; позначають $C^{-1}(G)$.

Відповідність $i_A = \{\, (a, a) \mid a \in A \,\}$ називають **тотожним перетворенням**, **діагональною** відповідністю або **діагоналлю** в A.

Оскільки відповідності – це множини, то до них можна застосовувати всі відомі теоретико-множинні операції: об'єднання, перетин, різницю тощо. Зокрема, для операції доповнення відповідності C між множинами A та B універсальною множиною є $A \times B$.

Додатково введемо для відповідностей дві специфічні операції.

Відповідністю, **оберненою** до заданої відповідності C між множинами A та B, називають таку відповідність D між множинами B та A, що $D = \{ (b, a) \mid (a, b) \in C \}$. Відповідність, обернену до відповідності C, позначають C^{-1}.

Приклад 2.20. Нехай задано множини $A = \{a, b, c, d\}$ і $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ та відповідності між A та B:

$$C_1 = \{(a, 1), (a, 3), (a, 5), (b, 1), (b, 3), (d, 3), (d, 4), (d, 5)\},$$

$$C_2 = \{(a, 4), (a, 5), (b, 2), (b, 3), (c, 1), (d, 2), (d, 3)\}.$$

Визначити множини

$$\mathrm{Pr}_1 C_1,\ \mathrm{Pr}_1 C_2,\ \mathrm{Pr}_2 C_1,\ C_1 \cup C_2,\ C_1 \setminus C_2,\ C_1 \cap C_2,\ \overline{C}_1,\ C_1 \Delta C_2,\ C_2^{-1}.$$

► $\mathrm{Pr}_1 C_1 = \{a, b, d\}$, $\mathrm{Pr}_1 C_2 = \{a, b, c, d\}$, $\mathrm{Pr}_2 C_1 = \{1, 3, 4, 5\}$,

$C_1 \cup C_2 = \{(a, 1), (a, 3), (a, 4), (a, 5), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (c, 1), (d, 2), (d, 3), (d, 4), (d, 5)\}$,

$C_1 \setminus C_2 = \{(a, 1), (a, 3), (b, 1), (d, 4), (d, 5)\}$,

$C_1 \cap C_2 = \{(a, 5), (b, 3), (d, 3)\}$,

$\overline{C}_1 = \{(a, 2), (a, 4), (b, 2), (b, 4), (b, 5), (c, 1), (c, 2), (c, 3), (c, 4), (c, 5), (d, 1), (d, 2)\}$,

$C_1 \Delta C_2 = \{(a, 1), (a, 3), (a, 4), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (d, 2), (d, 4), (d, 5)\}$,

$C_2^{-1} = \{(4, a), (5, a), (2, b), (3, b), (1, c), (2, d), (3, d)\}$. ◄

Якщо задано відповідності $C \subseteq A \times B$ і $D \subseteq B \times F$, то **композицією** (**суперпозицією**, **добутком**) **відповідностей** C і D (позначають $C \circ D$) називають таку відповідність H між множинами A та F, що $H = \{(a, b) \mid$ існує елемент $c \in B$, для якого $(a, c) \in C \wedge (c, b) \in D \}$.

Приклад 2.21.

1. Нехай задано множини $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ і $G = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, відповідність

$C = \{(a, 2), (a, 3), (b, 1), (c, 4), (c, 5), (d, 2), (d, 3)\}$ між A та B і відповідність між

$D = \{(1, \beta), (1, \gamma), (2, \alpha), (2, \gamma), (3, \gamma), (5, \alpha), (5, \beta)\}$ B і G.

Визначити відповідності $C \circ D$, $C \circ C^{-1}$, $D^{-1} \circ C^{-1}$.

$C \circ D = \{(a, \alpha), (a, \gamma), (b, \beta), (b, \gamma), (c, \alpha), (c, \beta), (d, \alpha), (d, \gamma)\}$,

$C \circ C^{-1} = \{(a, a), (a, d), (b, b), (c, c), (d, a), (d, d)\}$,

$D^{-1} \circ C^{-1} = \{(\alpha, a), (\gamma, a), (\beta, b), (\gamma, b), (\alpha, c), (\beta, c), (\alpha, d), (\gamma, d)\}$.

2. Що можна сказати про множини A та B, якщо

$$i_A \cap (A \times B) = \varnothing?$$

$A \cap B = \varnothing$. В іншому разі існував би елемент x, що належав би одночасно обом множинам A та B. Звідси отримаємо, що $(x, x) \in i_A$ (за означенням діагональної відповідності i_A) і $(x, x) \in A \times B$ (за означенням декартового добутку множин A та B), отже,

$$(x, x) \in i_A \cap (A \times B),$$

що суперечить умові задачі.

3. Нехай C_1 – відповідність між A та B, C_2 – відповідність між B і G. Довести, що $C_1 \circ C_2 = \varnothing$ тоді й тільки тоді, коли

$$\mathrm{Pr}_2 C_1 \cap \mathrm{Pr}_1 C_2 = \varnothing.$$

Доведемо необхідність методом від супротивного. Нехай $C_1 \circ C_2 = \varnothing$ і припустимо, що існує елемент

$$z \in \mathrm{Pr}_2 C_1 \cap \mathrm{Pr}_1 C_2 \Leftrightarrow (z \in \mathrm{Pr}_2 C_1 \wedge z \in \mathrm{Pr}_1 C_2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\exists x{:}(x, z) \in C_1 \wedge \exists y{:}(z, y) \in C_2) \Rightarrow (x, y) \in C_1 \circ C_2.$$

Останнє суперечить умові, отже, $\mathrm{Pr}_2 C_1 \cap \mathrm{Pr}_1 C_2 = \varnothing$. Навпаки, нехай $\mathrm{Pr}_2 C_1 \cap \mathrm{Pr}_1 C_2 = \varnothing$. Знову застосуємо метод доведення від супротивного і припустимо, що існує елемент $(x, y) \in C_1 \circ C_2$. Тоді

$$(\exists z{:}(x, z) \in C_1 \wedge (z, y) \in C_2) \Leftrightarrow (z \in \mathrm{Pr}_2 C_1 \wedge z \in \mathrm{Pr}_1 C_2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow z \in \mathrm{Pr}_2 C_1 \cap \mathrm{Pr}_1 C_2.$$

Отримано суперечність щодо умови. Отже, множина $C_1 \circ C_2$ не може містити елементів та є порожньою. ◄

Розглянемо окремі важливі випадки відповідностей C між множинами A та B.

Якщо $\mathrm{Pr}_1 C = A$, то відповідність C називається **всюди** (**скрізь**) **визначеною**. В іншому разі відповідність називають **частковою**.

Відповідність $f \subseteq A \times B$ називають **функціональною**, або **функцією** з A в B, якщо кожному елементові $a \in \mathrm{Pr}_1 f$ відповідає тільки один елемент із $\mathrm{Pr}_2 f$, тобто образом кожного елемента $a \in \mathrm{Pr}_1 f$ є єдиний елемент b з $\mathrm{Pr}_2 f$. Якщо f – функція з A в B, то кажуть, що функція має **тип** $A \to B$ і позначають $f : A \to B$.

Усюди визначену функціональну відповідність $f \subseteq A \times B$ називають **відображенням** з A в B; позначають, як і функцію $f : A \to B$. Відображення називають також усюди (скрізь) визначеними функціями.

Відображення типу $A \to A$ називають **перетворенням** множини A.

Через B^A позначають множину всіх відображень із A в B.

Оскільки функція і відображення є окремими випадками відповідності, то для них мають місце всі наведені вище означення: поняття областей визначення та значень, поняття образу та прообразу елементів і множин тощо. Зокрема, для функції f елементи множини $\mathrm{Pr}_1 f$ називають **аргументами** функції, образ $f(a)$ елемента $a \in \mathrm{Pr}_1 f$ – **значенням** функції f на a.

Відповідність C називають **сюр'єктивною** (**сюр'єкцією**), або **відповідністю** *на* множину B, якщо $\mathrm{Pr}_2 C = B$.

Відповідність C називають **ін'єктивною** (**ін'єкцією**), або **різнозначною відповідністю**, якщо для кожного елемента $b \in \mathrm{Pr}_2 C$ його прообраз $C^{-1}(b)$ складається тільки з одного елемента. Інакше кажучи, різним елементам множини A відповідають різні елементи множини B. Іноді ін'єкцію називають 1–1 відповідністю.

Відображення, яке є одночасно сюр'єктивним та ін'єктивним, називають **бієктивним**, або **бієкцією**. Бієктивні відображення називають часто також **взаємно однозначними відображеннями**, або **взаємно однозначними відповідностями** між множинами A та B.

Отже, відповідність є взаємно однозначною тоді й лише тоді, коли вона функціональна, усюди визначена, сюр'єктивна та ін'єктивна.

Приклад 2.22.

1. Нехай задано такі відповідності між множинами $A = \{a, b, c, d, e\}$ і $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$:

$C_1 = \{(a, 2), (a, 5), (b, 1), (b, 5), (c, 2), (d, 3), (d, 5)\}$,

$C_2 = \{(a, 3), (b, 2), (c, 3), (e, 3)\}$,

$C_3 = \{(a, 2), (b, 3), (c, 4), (d, 1), (e, 5)\}$,

$C_4 = \{(a, 2), (a, 3), (b, 1), (c, 4), (c, 5), (d, 1), (e, 2), (e, 4)\}$,

$C_5 = \{(a, 4), (b, 3), (c, 5), (d, 2), (e, 1)\}$.

Визначити, які з цих відповідностей усюди визначені, функціональні, ін'єктивні, сюр'єктивні, бієктивні (взаємно однозначні).

Усюди визначені – C_3, C_4, C_5; функціональні – C_2, C_3, C_5; ін'єктивні – C_3, C_5; сюр'єктивні – C_3, C_4, C_5; бієктивні (взаємно однозначні) – C_3, C_5.

2. Для скінченної множини $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ установити взаємно однозначну відповідність між множинами $\beta(A)$ і $\{0, 1\}^{|A|}$.

Довільній множині $M \in \beta(A)$ поставимо у відповідність двійковий вектор $(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \{0, 1\}^{|A|}$, означений так: $b_k = 1$, якщо $b_k \in M$, інакше $b_k = 0$, $k = 1,2,\ldots,n$.◄

Бієктивне відображення з A в A називають **підстановкою** множини A.

Для довільної відповідності C між A та A позначимо через $C^{(n)}$ відповідність $C \circ C \circ \ldots \circ C$ (n входжень літери C). Вважаємо, що $C^{(0)} = i_A$ та $C^{(1)} = C$.

Наведемо приклади відповідностей, відображень і функцій.

Приклад 2.23.

1. Відповідність між клітинками та фігурами на шахівниці у будь-який момент гри є функціональною, але не є відображенням, оскільки не всі поля шахівниці зайняті фігурами.

2. Відповідність між натуральними числами й сумами цифр їхнього десяткового запису є відображенням. Це відображення не є ін'єктивним, оскільки йому належать, наприклад, такі пари, як (17, 8) і (26, 8).

3. Відповідність, за якою кожному натуральному числу $n \in N$ відповідає число $3n$, є взаємно однозначною відповідністю між множиною всіх натуральних чисел і множиною натуральних чисел, кратних 3.

4. Відповідність між множиною точок координатної площини R^2 і множиною всіх векторів з початком у точці (0, 0) є взаємно однозначною.

5. Нехай f – відповідність між A та B. Довести, що f – усюди визначена тоді й тільки тоді, коли $i_A \subseteq f \circ f^{-1}$.

Нехай f – усюди визначена відповідність між A та B, а x – довільний елемент множини A ($x \in A$), тоді $(x, x) \in i_A$. Зі всюди визначеності f випливає, що існує такий елемент $y \in B$, що $(x, y) \in f$, тоді $(y, x) \in f^{-1}$ та $(x, x) \in f \circ f^{-1}$, отже, $i_A \subseteq f \circ f^{-1}$. Для доведення оберненого твердження розглянемо довільний елемент

$$x \in A \Leftrightarrow (x, x) \in i_A \Rightarrow$$

(з умови задачі) $(x, x) \in f \circ f^{-1} \Rightarrow (\exists y\text{: } (x, y) \in f \wedge (y, x) \in f^{-1})$.

Із останнього твердження випливає всюди визначеність f. ◄

Завдання для самостійної роботи

1. Нехай задано множини $A = \{a, b, c, d\}$ та $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ і відповідності між A та B:

$C_1 = \{ (a, 1), (a, 2), (a, 5), (b, 1), (b, 4), (d, 2), (d, 4), (d, 5)\}$,

$C_2 = \{ (a, 2), (a, 5), (b, 2), (b, 3), (c, 3), (d, 2), (d, 3)\}$,

$C_3 = \{ (b, 1), (b, 2), (b, 4), (c, 1), (c, 5), (d, 1), (d, 2)\}$.

Визначити:

(а) $\mathrm{Pr}_j C_i, j = 1, 2, i = 1, 2, 3$; (б) $C_1 \cup C_2, C_2 \cup C_3$;

(в) $C_1 \cap C_2, C_2 \cap (C_1 \cup C_3)$; (г) $C_1 \setminus C_2, C_3 \setminus (C_1 \cap C_3)$;

(д) $\overline{C}_1,\ C_2 \Delta C_3$; (е) $C_i^{-1},\ i = 1, 2, 3$.

Побудувати графіки та діаграми відповідностей C_1, C_2, C_3 і відповідностей із п. (б)–(е).

2. Нехай задано множини $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ і $G = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, відповідності між A та B

$C_1 = \{(a, 1), (a, 3), (b, 2), (c, 3), (c, 5), (d, 1), (d, 3)\}$,

$C_2 = \{(b, 2), (b, 5), (c, 1), (c, 4), (d, 1), (d, 2), (d, 5)\}$

і відповідності між B та G

$D_1 = \{(1, \beta), (1, \gamma), (2, \alpha), (2, \beta), (3, \gamma), (5, \alpha), (5, \gamma)\}$,

$D_2 = \{(1, \alpha), (2, \alpha), (2, \beta), (3, \beta), (4, \beta), (4, \gamma)\}$.

Визначити:

(а) $C_i \circ D_j, i, j = 1, 2$; (б) $C_i \circ C_j^{-1}, i, j = 1, 2$; (в) $C_2 \circ (D_1 \circ\ C_i^{-1}$.

3. Нехай задано такі відповідності між R і R:

$C_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$; $C_2 = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 3\}$;

$C_3 = \{(x, y) \mid y^2 - |x| \geq 0\}$.

Побудувати графік відповідності:

(а) $\overline{C_1 \cap C_2} \cap C_3$; (б) $C_2 \cup C_3$; (в) $C_1 \cap C_2 \cap C_3$.

4. Що можна сказати про множини A та B, якщо:

(а) $i_A \subseteq A \times B$; (б) $i_A \cap (A \times B) \neq \varnothing$;

(в) з $(a, b) \in A \times B$ випливає $(b, a) \in A \times B$;

(г) з $(a, b) \in A \times B$ випливає $a \neq b$;

(д) $A \times B \subseteq B \times A$; (е) $|A \times B| = 1$.

5. Нехай C_1 – відповідність між A та B, C_2 – відповідність між B і G. Довести, що коли $C_1 \circ C_2 = D$, то

$$\mathrm{Pr}_1 D \subseteq \mathrm{Pr}_1 C_1 \text{ та } \mathrm{Pr}_2 D \subseteq \mathrm{Pr}_2 C_2.$$

6. Що можна сказати про відповідність C між множинами A та B, якщо:

(а) для будь-якого $x \in A$ існує $y \in B$ такий, що $(x, y) \in C$;

(б) з (x, y), $(x, z) \in C$ випливає $y = z$;

(в) з (x, y), $(z, y) \in C$ випливає $x = z$;

(г) для будь-якого $y \in B$ існує $x \in A$ такий, що $(x, y) \in C$;

(д) для будь-якого $x \in A$ існує єдиний $y \in B$ такий, що $(x, y) \in C$, і навпаки, для будь-якого $t \in B$ існує єдиний $z \in A$ такий, що $(z, t) \in C$?

7. Нехай задано такі відповідності між множинами

$A = \{a, b, c, d, e\}$ і $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$:

$C_1 = \{(a, 3), (a, 4), (b, 1), (b, 5), (c, 2), (d, 2), (d, 5)\}$,

$C_2 = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3), (c, 4), (e, 5)\}$,

$C_3 = \{(a, 1), (b, 3), (c, 4), (d, 2), (e, 4)\}$,

$C_4 = \{(a, 2), (a, 3), (b, 2), (c, 3), (c, 5), (d, 1), (e, 3), (e, 4)\}$,

$C_5 = \{(a, 3), (b, 4), (c, 5), (d, 1), (e, 2)\}$.

Визначити, які з відповідностей усюди визначені, функціональні, ін'єктивні, сюр'єктивні, бієктивні (взаємно однозначні). Побудувати графіки та діаграми цих відповідностей.

8. Установити взаємно однозначну відповідність між множинами:

(а) A^k та A^{N_k}; (б) $\beta(A)$ та $\{0, 1\}^A$.

9. Нехай f – відповідність між A та B. Довести, що:

(а) f функціональна тоді й тільки тоді, коли $f^{-1} \circ f \subseteq i_B$;

(б) f є відображенням тоді й тільки тоді, коли

$$i_A \subseteq f \circ f^{-1} \text{ та } f^{-1} \circ f \subseteq i_B;$$

(в) f сюр'єктивна тоді й тільки тоді, коли $i_B \subseteq f^{-1} \circ f$;

(г) f ін'єктивна тоді й тільки тоді, коли $f \circ f^{-1} \subseteq i_A$;

(д) f взаємно однозначна тоді й тільки тоді, коли

$$f \circ f^{-1} = i_A \text{ та } f^{-1} \circ f = i_B.$$

2.6. Відношення. Властивості відношень

Підмножину R декартового степеня M^n деякої множини M називають n-**місним** (n-**арним**) **відношенням** на множині M. Кажуть, що елементи $a_1, a_2, \ldots, a_n \in M$ перебувають у відношенні R, якщо $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R$.

При $n = 1$ відношення $R \subseteq M$ називають **одномісним**, або **унарним**. Таке відношення часто називають також **ознакою**, або **характеристичною властивістю** елементів множини M. Кажуть, що елемент $a \in M$ має ознаку R, якщо $a \in R$ і $R \subseteq M$. Наприклад, ознаки *непарність* і *кратність* 7 виділяють із множини N натуральних чисел відповідно унарні відношення

$$R' = \{2k - 1 \mid k \in N\} \text{ і } R'' = \{7k \mid k \in N\}.$$

Найпопулярнішими в математиці є **двомісні**, або **бінарні** відношення, на вивченні властивостей яких зупинимося детальніше. Далі скрізь під словом **відношення** розумітимемо бінарне відношення. Якщо елементи $a, b \in M$ перебувають у відношенні R, тобто $(a, b) \in R$, то це часто записують також у вигляді aRb. Зауважимо, що бінарні відношення іноді розглядають як окремий випадок відповідностей (а саме – як відповідності між однаковими множинами), тому багато означень і понять для відношень подібні до аналогічних означень і понять для відповідностей.

Приклад 2.24. Наведемо приклади бінарних відношень на різних множинах.

1. Відношення на множині N натуральних чисел:

R_1 – відношення *менше чи дорівнює*, тоді

$$4\ R_1\ 9,\ 5\ R_1\ 5 \text{ і } 1\ R_1\ m \text{ для будь-якого } m \in N;$$

R_2 – відношення *ділиться на*, тоді

$$24\ R_2\ 3,\ 49\ R_2\ 7 \text{ і } m\ R_2\ 1 \text{ для будь-якого } m \in N;$$

R_3 – відношення *є взаємно простими*, тоді

$$15\ R_3\ 8,\ 366\ R_3\ 121,\ 1001\ R_3\ 612;$$

R_4 – відношення *складаються з однакових цифр*, тоді

$$127\ R_4\ 721,\ 230\ R_4\ 302,\ 3231\ R_4\ 3213311.$$

2. Відношення на множині точок координатної площини R^2:

R_5 – відношення *лежать на однаковій відстані від початку координат*, тоді

$$(3, 2)\ R_5\ (\sqrt{5}, -\sqrt{8}),\ (0, 0)\ R_5\ (0, 0);$$

R_6 – відношення *симетричні відносно осі ординат*, тоді

$$(-3, 2)\ R_6\ (3, 2),\ (1, 7)\ R_6\ (-1, 7)$$

і взагалі $(a, b)\ R_6\ (-a, b)$ для будь-яких $a, b \in R$;

R_7 – відношення *менше або дорівнює*. Вважаємо, що $(a, b)\ R_7\ (c, d)$, якщо $a \le c$ і $b \le d$. Зокрема,

$$(1, 7)\ R_7\,(20, 14),\ (–12, 4)\ R_7\,(0, 17),$$
а пари (2, –7) і (1, 4) та (3, –5) і (–3, 2) не належать відношенню R_7.

3. Відношення на множині студентів певного факультету:

R_8 – відношення *є однокурсником*,

R_9 – відношення *молодший за віком від*. ◄

Відношення можна задавати у ті самі способи, що й звичайні множини. Наприклад, якщо множина M скінченна, то довільне відношення R на M можна задати списком пар елементів, що перебувають у відношенні R.

Крім того, зручно задавати бінарне відношення R на скінченній множині $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ за допомогою **матриці бінарного відношення.** Це квадратна матриця C порядку n, у якій елемент c_{ij}, що стоїть на перетині i-го рядка та j-го стовпчика, позначають так: $c_{ij} = 1$, якщо $a_i\,R\,a_j$, і $c_{ij} = 0$ – в іншому разі.

Відношення можна задавати також за допомогою графіків і діаграм. **Графік відношення** означають і будують так само, як і графік відповідності. Поняття діаграми (або графа) відношення можна означити аналогічно відповідності. Однак частіше **діаграму** (**граф**) **відношення** R на скінченній множині

$$M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

означають так. Поставимо у взаємно однозначну відповідність елементам множини M деякі точки площини. Із точки a_i до точки a_j проводимо напрямлену лінію (стрілку) у вигляді відрізка чи кривої тоді й тільки тоді, коли a_iRa_j. Зокрема, якщо a_iRa_i, то відповідну стрілку, що веде з a_i в a_i, називають **петлею**.

Приклад 2.25. Для множини $M = \{2, 7, 36, 63, 180\}$ матриці відношень R_1, R_2, R_3 із прикладу 2.24 мають вигляд:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Діаграми (графи) відношень R_1, R_2, R_3 подано на рис. 2.3. ◄

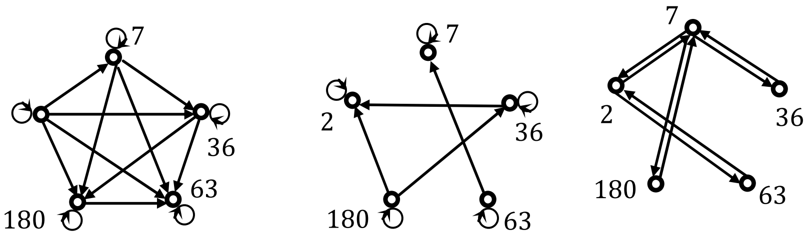


Рис. 2.3

Оскільки відношення на M є підмножинами множини M^2, то для них означені всі відомі теоретико-множинні операції. Наприклад, перетином відношень *більше або дорівнює* та *менше або дорівнює* є відношення *дорівнює*, об'єднанням відношень *менше* та *більше* є відношення *не дорівнює*, доповненням відношення *ділиться на* є відношення *не ділиться на* тощо. Стосовно операції доповнення для відношень на множині M універсальною множиною є M^2.

Аналогічно відповідностям для відношень можна означити поняття оберненого відношення та композиції відношень.

Відношення R^{-1} називають **оберненим** до відношення R, якщо $bR^{-1}a$ тоді й тільки тоді, коли aRb. Очевидно, що $(R^{-1})^{-1} = R$.

Наприклад, для відношення *більше або дорівнює* оберненим є відношення *менше або дорівнює*, для відношення *ділиться на* – відношення *є дільником*.

Композицією відношень R_1 і R_2 на множині M (позначають $R_1 \circ R_2$) називають таке відношення R на M, що aRb тоді й тільки тоді, коли існує елемент $c \in M$, для якого виконується aR_1c і cR_2b.

Наприклад, композицією відношень R_1 – *є сином* і R_2 – *є братом* на множині чоловіків є відношення $R_1 \circ R_2$ – *є небожем*.

Для відношення R на множині M через $R^{(k)}$ позначимо відношення $R \circ R \circ ... \circ R$ (k разів). Вважаємо, що $R^{(0)} = i_M$ і $R^{(1)} = R$.

Приклад 2.26.

1. На множині людей P означено такі відношення:

$$F = \{(x, y) \mid x, y \in P \text{ та } x - \text{батько } y\},$$
$$D = \{(x, y) \mid x, y \in P \text{ та } x - \text{донька } y\}.$$

Описати відношення:

(а) $F \circ F$; (б) $F^{-1} \circ D$.

(а) Нехай $(x, y) \in F^\circ F$, тоді $\exists z$: $(x, z) \in F \wedge (z, y) \in F$, тобто x – батько z і z – батько y. Отже, $F^\circ F$ – це множина таких (x, y), що x є батьком батька y (або x – дідусь y через батька).

(б) Нехай $(x, y) \in F^{-1} \circ D$, тоді $\exists z$: $(x, z) \in F^{-1} \wedge (z, y) \in D$, тобто z – батько x і z – донька y, що неможливо. Отже, $F^{-1} \circ D$ – порожня множина.

2. Довести, що для довільних відношень R_1 і R_2 виконується

$$(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1}.$$

$$(x, y) \in (R_1 \circ R_2)^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in R_1 \circ R_2 \Leftrightarrow \exists z\colon (y, z) \in R_1 \wedge (z, x) \in R_2 \Leftrightarrow \exists z\colon$$
$$(x, z) \in R_2^{-1} \wedge (z, y) \in R_1^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in R_2^{-1} \circ R_1^{-1}.$$

3. Для яких відношень виконується рівність $R^{-1} = \overline{R}$?

Для жодних. Оскільки, припустивши існування такого відношення R, матимемо: якщо $(x, x) \in R$, то $(x, x) \in R^{-1}$ та $(x, x) \notin \overline{R}$; якщо ж $(x, x) \notin R$, то знову дійдемо суперечності, тому що отримаємо $(x, x) \notin R^{-1}$ та $(x, x) \in \overline{R}$.

4. Визначити, для яких відношень R на множині M виконується співвідношення:

(а) $i_M \circ R = R$; (б) $i_M \circ R = i_M$; (в) $i_M \subseteq R \circ R^{-1}$.

(а) Для всіх R. Якщо $(x, y) \in i_M \circ R$, то $(x, x) \in i_M$ і $(x, y) \in R$, отже, $(x, y) \in R$. Якщо ж $(x, y) \in R$, то, ураховуючи $(x, x) \in i_M$, з означення композиції відношень матимемо $(x, y) \in i_M \circ R$.

(б) Тільки для $R = i_M$ (див. (а)).

(в) Для таких і тільки таких, що $\mathrm{Pr}_1 R = M$. Нехай $\mathrm{Pr}_1 R = M$, тоді для довільного елемента $x \in M$ послідовно маємо: $(x, x) \in i_M$ та $x \in \mathrm{Pr}_1 R \Leftrightarrow \exists y\colon (x, y) \in R \Leftrightarrow (y, x) \in R^{-1} \Rightarrow (x, x) \in R \circ R^{-1}$. Доведемо обернене твердження. Візьмемо $x \in M$, тоді

$$(x, x) \in i_M \Rightarrow (x, x) \in R \circ R^{-1} \Leftrightarrow (\exists y \in M\colon (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R^{-1}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists y \in M\colon (x, y) \in R.$$

Отже, $x \in \mathrm{Pr}_1 R$ і доведено включення $M \subseteq \mathrm{Pr}_1 R$. Обернене включення випливає із означення проекції відношення.

5. Довести, що коли $R_1 \subseteq R_2$, тоді для довільного відношення Q виконується $Q \circ R_1 \subseteq Q \circ R_2$.

Нехай $(x, y) \in Q \circ R_1$, тоді існує z такий, що $(x, z) \in Q$ і $(z, y) \in R_1$. Ураховуючи умову, матимемо $(x, z) \in Q$ і $(z, y) \in R_2$, отже, за означенням композиції відношень отримаємо $(x, y) \in Q \circ R_2$. ◄

Наведемо **властивості**, за якими класифікують відношення.

Нехай R – відношення на множині M.

1. Відношення R називається **рефлексивним**, якщо для всіх $a \in M$ виконується aRa.

Очевидно, що відношення R_1, R_2, R_4, R_5, R_7 – рефлексивні.

2. Відношення R називають **антирефлексивним** (**іррефлексивним**), якщо для жодного $a \in M$ не виконується aRa.

Відношення *більше*, *менше*, *є сином* антирефлексивні, а відношення R_6 не є ні рефлексивним, ні антирефлексивним.

Усі елементи головної діагоналі матриці C для рефлексивного відношення на скінченній множині M дорівнюють 1, а для антирефлексивного відношення вони дорівнюють 0.

3. Відношення R називають **симетричним**, якщо для всіх $a, b \in M$ таких, що aRb, маємо bRa.

4. Відношення R називають **антисиметричним**, якщо для всіх $a, b \in M$ таких, що aRb і bRa, маємо $a = b$.

Наприклад, відношення R_3, R_4, R_5, R_6, R_8 – симетричні, а відношення R_1, R_2, R_7 – антисиметричні.

Неважко переконатися, що відношення R симетричне тоді й тільки тоді, коли $R = R^{-1}$.

5. Відношення R називають **транзитивним**, якщо із співвідношень aRb і $bR\,c$ випливає aRc.

Наприклад, відношення R_1, R_2, R_4, R_5, R_7, R_8, R_9 транзитивні, а відношення R_3, R_6 не транзитивні.

Неважко переконатися, що відношення R транзитивне тоді й тільки тоді, коли $R \circ R \subseteq R$ (**критерій транзитивності відношення**).

Зауважимо, що коли відношення R має будь-яку з наведених вище властивостей, тоді обернене відношення R^{-1} також має ту саму властивість. Отже, операція обернення зберігає всі п'ять властивостей відношень.

Відношення R на множині M називають **толерантним** (**відношенням толерантності**, або просто **толерантністю**), якщо воно рефлексивне й симетричне.

Для довільного відношення R означимо нову операцію. Відношення R^+ називають **транзитивним замиканням** відношення R на M, якщо $a\,R^+b$, $a, b \in M$, тоді й тільки тоді, коли в множині M існує така послідовність елементів $a_1, a_2, \ldots, a_k$, що

$$a_1 = a,\ a_k = b \text{ і } a_1 R a_2,\ a_2 R a_3,\ \ldots,\ a_{k-1} R a_k.$$

Зокрема, k може дорівнювати 2; отже, якщо aRb, то $a R^+ b$. Тому $R \subseteq R^+$.

Іншим рівносильним означенням цього поняття є таке: **транзитивним замиканням** відношення R на множині M називають найменше транзитивне відношення на M, що включає R.

Наприклад, нехай M – множина точок на площині й aRb, $a, b \in M$, якщо точки a та b з'єднані відрізком. Тоді cR^+d, коли існує ламана лінія, що з'єднує точки c і d, $c, d \in M$.

Можна довести, що відношення R транзитивне тоді й тільки тоді, коли $R^+ = R$. Крім того, справджується рівність

$$R^+ = R^{(1)} \cup R^{(2)} \cup \ldots \cup R^{(k)} \cup \ldots .$$

Відношення $R^+ \cup i_M$ позначають через R^* і називають **рефлексивним транзитивним замиканням** відношення R на множині M.

Приклад 2.27.

1. Навести приклад двох антирефлексивних відношень R_1 і R_2 на множині $M = \{1, 2, 3\}$, композиція $R_1 \circ R_2$ яких не буде антирефлексивним відношенням. Наприклад,

$$R_1 = \{(1, 2)\},\ R_2 = \{(2, 1)\}.$$

2. Довести, що композиція $R_1 \circ R_2$ симетричних відношень R_1 і R_2 є симетричним відношенням тоді й тільки тоді, коли

$$R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1.$$

Нехай для симетричних відношень R_1 і R_2 їхня композиція $R_1 \circ R_2$ є симетричним відношенням. Розглянемо довільний елемент $(x, y) \in R_1 \circ R_2$, тоді $(y, x) \in R_1 \circ R_2$. Звідси матимемо таку послідовність рівносильних тверджень:

$$(y, x) \in R_1 \circ R_2 \Leftrightarrow (\exists z\colon (y, z) \in R_1 \wedge (z, x) \in R_2) \Leftrightarrow (\exists z\colon (z, y) \in R_1 \wedge (x, z) \in R_2) \Leftrightarrow (x, y) \in R_2 \circ R_1.$$

Отже, доведено рівність $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.

Навпаки, припустимо, що для симетричних відношень R_1 і R_2 виконується $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$. Розглянемо довільний елемент $(x, y) \in R_1 \circ R_2$, тоді матимемо:

$$(x, y) \in R_2 \circ R_1 \Leftrightarrow (\exists z\colon (x, z) \in R_2 \wedge (z, y) \in R_1) \Leftrightarrow (\exists z\colon (z, x) \in R_2 \wedge (y, z) \in R_1) \Leftrightarrow (y, x) \in R_1 \circ R_2.$$

Симетричність $R_1 \circ R_2$ доведено.

3. Довести, що відношення R на множині M транзитивне тоді й тільки тоді, коли $R \circ R \subseteq R$.

Припустимо, що R – транзитивне відношення, $(x, y) \in R \circ R$, тоді існує z такий, що $(x, z) \in R$ і $(z, y) \in R$, отже, $(x, y) \in R$ (за властивістю транзитивності R). Навпаки, нехай виконується включення $R \circ R \subseteq R$. Розглянемо елементи $(x, y) \in R$ і $(y, z) \in R$, тоді $(x, z) \in R \circ R$ і з умови отримаємо $(x, z) \in R$. Отже, R – транзитивне відношення.

4. Довести, що композиція $R_1 \circ R_2$ транзитивних відношень R_1 і R_2 є транзитивним відношенням, якщо $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.

Нехай для транзитивних відношень R_1 і R_2 виконується рівність $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$. Розглянемо елементи $(x, y) \in R_1 \circ R_2$ і $(y, z) \in R_1 \circ R_2$. Тоді

$$(x, z) \in (R_1 \circ R_2) \circ (R_1 \circ R_2).$$

Використовуючи асоціативність операції композиції (для будь-яких відношень R_1, R_2, R_3 виконується $(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$), умову даної задачі, результат попередньої, а також приклад 2.25(5), отримаємо:

$$(R_1 \circ R_2) \circ (R_1 \circ R_2) = R_1 \circ (R_2 \circ R_1) \circ R_2 = R_1 \circ (R_1 \circ R_2) \circ R_2 =$$
$$= (R_1 \circ R_1) \circ (R_2 \circ R_2) \subseteq R_1 \circ R_2. \text{ Отже, } (x, z) \in R_1 \circ R_2.$$

5. Знайти помилку в наведених міркуваннях. Якщо R – симетричне й транзитивне відношення на множині M, то R – рефлексивне, оскільки із того, що $(a, b) \in R$, послідовно випливає

$$(b, a) \in R \text{ і } (a, a) \in R.$$

Якщо $\mathrm{Pr}_1 R \neq M$, то із симетричності й транзитивності відношення R не випливає його рефлексивність. Наприклад, відношення

$$R = \{(1, 3), (3, 1), (1, 1), (3, 3)\}$$

є симетричним і транзитивним, але не є рефлексивним на множині $M = \{1, 2, 3\}$.

6. Довести, що відношення

$$T = \{(x, y) \mid |x - y| < 1, x, y \in R\}$$

на множині дійсних чисел R є толерантним.

Рефлексивність T випливає із того, що для всіх дійсних x виконується нерівність $|x - x| < 1$, отже, $(x, x) \in T$. Симетричність T випливає із рівності $|x - y| = |y - x|$.

7. Довести, що для транзитивного відношення R виконується $R^{(k)} \subseteq R$ для всіх $k \geq 1$.

Доведення здійснимо методом математичної індукції. Для $k = 1$ твердження справджується, оскільки за означенням $R^{(1)} = R$. Припустимо, що для транзитивного відношення R виконується $R^{(k)} \subseteq R$ для всіх $k \leq n$. Застосувавши до припущення індукції $R^{(n)} \subseteq R$ результат задачі із прикладу 2.25(5), маємо $R^{(n)} \circ R \subseteq R \circ R$, тобто $R^{(n+1)} \subseteq R \circ R$. За критерієм транзитивності для відношення R виконується $R \circ R \subseteq R$. Отже, $R^{(n+1)} \subseteq R$.

8. Довести, що $R^{+} = R^{(1)} \cup R^{(2)} \cup \ldots \cup R^{(k)} \cup \ldots$.

Якщо $(a, b) \in R^{+}$, то за означенням транзитивного замикання існує послідовність елементів $a_1, a_2, ..., a_k$ така, що $a_1 = a$, $a_k = b$ і $a_1 R a_2, a_2 R a_3, ..., a_{k-1} R a_k$. Звідси робимо висновок, що $a_1 R^{(k-1)} a_k$, тобто $a R^{(k-1)} b$ для деякого k ($k \geq 2$). Отже,

$$(a, b) \in R^{(1)} \cup R^{(2)} \cup ... \cup R^{(k)} \cup ...$$

Навпаки, нехай $(a, b) \in R^{(1)} \cup R^{(2)} \cup ... \cup R^{(k)} \cup ...$. Тоді $(a, b) \in R^{(k)}$ для якогось k, $k = 1, 2, ...$. З означення відношення $R^{(k)}$ і властивостей операції композиції випливає, що існує набір елементів $z_1, z_2, ..., z_{k+1}$, для яких виконуються співвідношення $z_1 = a$, $z_{k+1} = b$ і $z_i R z_{i+1}$ для $i = 1, 2, ..., k$. Отже, $(a, b) \in R^{+}$. ◄

Деякі відношення посідають особливе місце в математиці. Розглянемо ці відношення окремо в наступних параграфах.

Завдання для самостійної роботи

1. Нехай на множині всіх людей P означено відношення:

$$F = \{(x, y) \mid x, y \in P \text{ та } x - \text{батько } y\},$$
$$D = \{(x, y) \mid x, y \in P \text{ та } x - \text{донька } y\}.$$

Описати такі відношення:

(а) $D \circ F$; (в) $F \circ D$; (д) $D \circ F^{-1}$; (є) $F^{-1} \circ F$;

(б) $D \circ D$; (г) $D^{-1} \circ F^{-1}$; (е) $F^{-1} \circ D^{-1}$; (ж) $D^{-1} \circ F$.

2. Довести, що для довільного відношення R на множині M виконується:

(а) $\mathrm{Pr}_2 R = \mathrm{Pr}_1 R^{-1}$; (б) $\mathrm{Pr}_1 R = \mathrm{Pr}_2 R^{-1}$;

(в) $\mathrm{Pr}_1 R = M \Leftrightarrow i_M \subseteq R \circ R^{-1}$; (г) $\mathrm{Pr}_2 R = M \Leftrightarrow i_M \subseteq R^{-1} \circ R$.

3. Довести, що для довільних відношень R_1 і R_2 виконується $R_1 \circ R_2 = \varnothing$ тоді й тільки тоді, коли $\mathrm{Pr}_2 R_1 \cap \mathrm{Pr}_1 R_2 = \varnothing$.

4. Визначити, для яких відношень R на множині M виконується рівність:

(а) $R \circ i_M = i_M$; (б) $R \circ i_M = R$; (в) $R^{-1} \circ R = i_M$; (г) $R \circ i_M \circ R = i_M$;
(д) $i_M \circ R \circ i_M = i_M$; (е) $R \circ R = i_M$.

5. На множині $M = \{1, 2, 3, 4\}$ задано відношення:

$R_1 = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (4, 2), (4, 4)\}$;
$R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\}$;
$R_3 = \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (1, 2), (3, 1), (3, 3), (4, 1)\}$;
$R_4 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$;
$R_5 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (4, 1), (4, 3)\}$.

Визначити, які з цих відношень:

(а) рефлексивні; (б) антирефлексивні; (в) симетричні;
(г) антисиметричні; (д) транзитивні.

Побудувати графіки, графи й матриці заданих відношень.

6. Проінтерпретуйте властивості відношень за допомогою їх матриць, графіків і діаграм.

7. Довести, що коли $R_1 \subseteq R_2$, тоді для довільного відношення Q виконується:

(а) $R_1 \circ Q \subseteq R_2 \circ Q$; (б) $R_1^{-1} \subseteq R_2^{-1}$.

8. Довести, що відношення R на множині M є рефлексивним тоді й лише тоді, коли:

(а) $i_M \subseteq R$; (б) $i_M \cap R = i_M$; (в) $i_M \cup R = R$.

9. Навести приклад двох антирефлексивних відношень R_1 і R_2 на множині $M = \{1, 2, 3\}$, композиція $R_1 \circ R_2$ яких буде рефлексивним відношенням.

10. Довести, що відношення R є симетричним тоді й тільки тоді, коли:

(а) $R = R^{-1}$; (б) $R^{-1} \subseteq R$; (в) $R \subseteq R^{-1}$.

11. Довести, що композиція $R_1 \circ R_2$ симетричних відношень R_1 і R_2 є симетричним відношенням тоді й тільки тоді, коли $R_2 \circ R_1 \subseteq R_1 \circ R_2$.

12. Довести, що відношення R на множині M антисиметричне тоді й тільки тоді, коли $R \cap R^{-1} \subseteq i_M$.

13. Довести, що об'єднання $R_1 \cup R_2$ антисиметричних відношень R_1 і R_2 на множині M є антисиметричним відношенням тоді й лише тоді, коли $R_1 \cap R_2^{-1} \subseteq i_M$.

14. Довести, що рефлексивне відношення R є транзитивним тоді й тільки тоді, коли $R \circ R = R$.

15. Довести, що перетин транзитивних відношень є транзитивним відношенням.

16. Довести, що для довільних толерантних відношень R_1 і R_2 відношення

$$R_1 \cup R_2,\ R_1 \cap R_2,\ R_1^{-1},\ R_1 \circ R_2 \cup R_2 \circ R_1 \text{ і } R_1 \circ R_2 \cap R_2 \circ R_1$$

будуть також толерантними.

17. Побудувати толерантні відношення R_1 і R_2 на множині $M = \{1, 2, 3\}$, композиція $R_1 \circ R_2$ яких не є толерантним відношенням.

18. Довести, що для довільного транзитивного відношення R і для будь-якого $k = 0, 1, 2, \ldots$ відношення $R^{(k)}$ є транзитивним.

19. Довести, що коли R – рефлексивне і транзитивне відношення, тоді $R^{(k)} = R$ для всіх натуральних k.

20. Довести, що для довільного відношення R на скінченній множині M ($|M| = n$) має місце рівність $R^{+} = R^{(1)} \cup R^{(2)} \cup \ldots \cup R^{(n)}$.

21. Довести, що відношення R транзитивне тоді й тільки тоді, коли $R^{+} = R$.

22. Нехай C – матриця відношення R, заданого на скінченній множині M ($|M| = n$). Побудувати матрицю $C^{(k)}$ відношення $R^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

2.7. Відношення еквівалентності

Відношення R на множині M називають **відношенням еквівалентності** (або просто **еквівалентністю**), якщо воно рефлексивне, симетричне й транзитивне.

Зважаючи на важливість відношення еквівалентності, дамо розгорнуте означення цього поняття. Відношення R на множині M є **відношенням еквівалентності**, або **еквівалентністю**, якщо воно має такі властивості:

1) aRa для всіх $a \in M$ (рефлексивність);

2) якщо aRb, то bRa для $a, b \in M$ (симетричність);

3) якщо aRb і bRc, то aRc для $a, b, c \in M$ (транзитивність).

Приклад 2.28.

1. Відношення рівності i_M на будь-якій множині M є відношенням еквівалентності. Рівність – це мінімальне відношення еквівалентності, оскільки з видаленням принаймні одного елемента з i_M відношення припиняє бути рефлексивним, отже, і відношенням еквівалентності.

2. Відношення подібності на множині всіх трикутників є еквівалентністю.

3. Важливу роль відіграє в математиці відношення *мають однакову остачу при діленні на k*, або *конгруентні за модулем k*, яке є відношенням еквівалентності на множині N натуральних чисел для будь-якого фіксованого $k \in N$. **Відношення конгруентності за модулем** k часто позначають

$$a \equiv b \pmod{k}$$

a та b конгруентні за модулем k.

Цьому відношенню належать, наприклад, пари натуральних чисел (17, 22), (1221, 6), (42, 57) для $k = 5$, тобто $17 \equiv 22 \pmod{5}$, $1221 \equiv 6 \pmod{5}$, $42 \equiv 57 \pmod{5}$.

4. На множині $M = N \times N$ означимо відношення R:

$$((a, b), (c, d)) \in R \Leftrightarrow a + d = b + c.$$

Довести, що R – відношення еквівалентності на множині M.

Рефлексивність R випливає із того, що $a + b = b + a$; симетричність – із того, що коли $a + d = b + c$, то $c + b = d + a$. Для обґрунтування транзитивності розглянемо пари $((a, b), (c, d)) \in R$ і $((c, d), (e, f)) \in R$. Тоді, додавши почленно рівності $a + d = b + c$ і $c + f = d + e$, отримаємо $a + f = b + e$, тобто $((a, b), (e, f)) \in R$.

5. Нехай $M = N \times N$. Означимо на множині M відношення R: $(a, b)\, R\, (c, d)$ тоді й тільки тоді, коли $ab = cd$. Довести, що R є еквівалентністю на M. Виписати всі елементи класів еквівалентності [(1, 1)], [(2, 2)], [(4, 3)], [(1, 23)] і [(6, 8)] за відношенням R.

Для доведення, що R є еквівалентністю на множині M, див. попередню задачу. Класу еквівалентності $[(a, b)]$ належать усі такі пари (c, d) натуральних чисел, що $cd = ab$. Отже,

$[(1, 1)] = \{(1, 1)\}$,
$[(2, 2)] = \{(1, 4), (4, 1), (2, 2)\}$,
$[(4, 3)] = \{(1, 12), (12, 1), (2, 6), (6, 2), (3, 4), (4, 3)\}$,
$[(1, 23)] = \{(1, 23), (23, 1)\}$,
$[(6, 8)] = \{(1, 48), (48, 1), (2, 24), (24, 2), (3, 16), (16, 3), (4, 12), (12, 4), (6, 8), (8, 6)\}$.

6. Довести, що об'єднання $R_1 \cup R_2$ двох еквівалентностей R_1 і R_2 є еквівалентністю тоді й тільки тоді, коли $R_1 \cup R_2 = R_1 \circ R_2$.

Нехай відношення R_1, R_2 і $R_1 \cup R_2$ є еквівалентностями. Доведемо рівність $R_1 \cup R_2 = R_1 \circ R_2$. Розглянемо елемент $(a, b) \in R_1 \cup R_2$, тоді $(a, b) \in R_1$ або $(a, b) \in R_2$. Із рефлексивності R_1 і R_2 маємо $(b, b) \in R_2$ та $(a, a) \in R_1$, отже, в обох ситуаціях отримаємо $(a, b) \in R_1 \circ R_2$. Для доведення оберненого включення розглянемо довільний елемент $(a, b) \in R_1 \circ R_2$. Тоді існує елемент c такий, що $(a, c) \in R_1$ і $(c, b) \in R_2$. Використавши властивості операції об'єднання, матимемо $(a, c) \in R_1 \cup R_2$ і $(c, b) \in R_1 \cup R_2$. За умовою відношення $R_1 \cup R_2$ транзитивне, тому $(a, b) \in R_1 \cup R_2$. Необхідність доведено.

Припустимо, що для еквівалентностей R_1 і R_2 виконується рівність $R_1 \cup R_2 = R_1 \circ R_2$. Рефлексивність і симетричність об'єднання $R_1 \cup R_2$ неважко вивести з рефлексивності й симетричності R_1 і R_2.

Для доведення транзитивності відношення $R_1 \cup R_2$ розглянемо пари $(a, b) \in R_1 \cup R_2$ і $(b, c) \in R_1 \cup R_2$. Останні умови рівносильні такій сукупності співвідношень:

– або 1) $(a, b) \in R_1$ і $(b, c) \in R_1$, – або 2) $(a, b) \in R_1$ і $(b, c) \in R_2$,

– або 3) $(a, b) \in R_2$ і $(b, c) \in R_1$, – або 4) $(a, b) \in R_2$ і $(b, c) \in R_2$.

Для 1) або 4) із транзитивності R_1 і R_2 отримаємо, відповідно $(a, c) \in R_1$ або $(a, c) \in R_2$, звідки матимемо $(a, c) \in R_1 \cup R_2$.

У випадку 2) маємо $(a, c) \in R_1 \circ R_2$, тому $(a, c) \in R_1 \cup R_2$ (за умовою).

Нарешті, для 3) послідовно отримаємо: $(b, a) \in R_2$ і $(c, b) \in R_1$

$$\text{(симетричність } R_1 \text{ і } R_2) \Rightarrow (c, a) \in R_1 \circ R_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (c, a) \in R_1 \cup R_2 \Rightarrow (a, c) \in R_1 \cup R_2$$

(оскільки $R_1 \cup R_2$ – симетричне відношення).

7. Довести, що для довільного відношення еквівалентності R виконується рівність $R \circ R = R$.

Нехай $(a, b) \in R \circ R$, тоді існує c такий, що $(a, c) \in R$ і $(c, b) \in R$. Оскільки R транзитивне, то $(a, b) \in R$. З іншого боку, якщо $(a, b) \in R$, то із рефлексивності R маємо $(b, b) \in R$, отже, $(a, b) \in R \circ R$.

8. Довести, що композиція $R_1 \circ R_2$ двох еквівалентностей R_1 і R_2 є еквівалентністю, якщо $R_1 \circ R_2 = R_1 \cup R_2$.

Рефлексивність композиції легко вивести із рефлексивності R_1 і R_2: для довільного елемента $a \in M$ $(a, a) \in R_1$ і $(a, a) \in R_2$, отже, $(a, a) \in R_1 {\circ} R_2$. Для доведення симетричності розглянемо елемент $(a, b) \in R_1 {\circ} R_2$, тоді послідовно матимемо:

$$(a, b) \in R_1 \cup R_2 \Leftrightarrow ((a, b) \in R_1 \vee (a, b) \in R_2) \Leftrightarrow ((b, a) \in R_1 \vee$$
$$\vee (b, a) \in R_2) \Leftrightarrow (b, a) \in R_1 \cup R_2 \Leftrightarrow (b, a) \in R_1 {\circ} R_2.$$

Для обґрунтування транзитивності $R_1 {\circ} R_2$ візьмемо пари $(a, b) \in R_1 {\circ} R_2$ і $(b, c) \in R_1 {\circ} R_2$, тоді за умовою $(a, b) \in R_1 \cup R_2$ і $(b, c) \in R_1 \cup R_2$. Далі див. доведення достатності в прикл. 2.26 (6). ◄

Сукупність множин $\{B_i \mid i \in I\}$ називають **розбиттям** множини A, якщо

$$\bigcup_{i \in I} B_i = A \text{ та } B_i \cap B_j = \varnothing \text{ для } i \neq j.$$

Множини B_i, $i \in I$, є підмножинами множини A. Їх називають **класами**, **суміжними класами**, **блоками** чи **елементами** розбиття. Очевидно, що кожний елемент $a \in A$ належить одній і тільки одній множині B_i, $i \in I$.

Припустимо, що на множині M задано відношення еквівалентності R. Виконаємо таку побудову. Виберемо якийсь елемент $a \in M$ та утворимо підмножину

$$S_a^R = \{x \mid x \in M \text{ і } a\, R\, x\},$$

що складається зі всіх елементів множини M, еквівалентних елементу a. Потім візьмемо другий елемент $b \in M$ такий, що $b \notin S_a^R$ і утворимо множину

$$S_b^R = \{\, x \mid x \in M \text{ і } b\, R\, x \,\}$$

з елементів, еквівалентних b і т. д. Таким чином одержимо сукупність множин (можливо, нескінченну)

$$\left\{S_a^R, S_b^R, \ldots\right\}.$$

Побудовану сукупність $\{S_i^R \mid i \in I\}$ називають **фактормножиною** множини M за еквівалентністю R і позначають M/R.

Приклад 2.29.

1. Фактормножина за відношенням рівності E для будь-якої множини M має вигляд $M/E = \{\{a\} \mid a \in M\}$.

2. Фактормножина для відношення *конгруентні за модулем* 3 на множині N натуральних чисел складається із трьох класів

$$\{3k \mid k\in N\},\ \{3k-1 \mid k\in N\}\ \text{і}\ \{3k-2 \mid k\in N\}.\ ◄$$

Доведемо, що фактормножина M/R є розбиттям множини M. Оскільки за побудовою кожний елемент множини M належить принаймні одній із множин S_i^R, $i\in I$, то

$$\bigcup_{i\in I} S_i^R = M.$$

Тепер припустимо, що для деяких $S_a^R \neq S_b^R$ існує елемент $c \in S_a^R \cap S_b^R$. Тоді із $c \in S_a^R$ випливає aRc, а із $c \in S_b^R$ – bRc. Із симетричності та транзитивності відношення R виводимо aRb і bRa. Із співвідношення aRb і правила побудови множини S_a^R маємо $S_a^R \subseteq S_b^R$, а з bRa та правила побудови множини S_b^R одержуємо протилежне включення $S_b^R \subseteq S_a^R$. Отже, $S_a^R = S_b^R$, і з одержаної суперечності випливає справедливість сформульованого твердження.

Очевидно, що будь-які два елементи з одного класу S_i^R еквівалентні, а будь-які два елементи із різних класів фактормножини M/R нееквівалентні. Класи S_i^R називають **класами еквівалентності** за відношенням R. Клас еквівалентності, що містить елемент $a\in M$, часто позначають через $[a]_R$.

Потужність $|M/R|$ фактормножини M/R називають **індексом розбиття**, або **індексом відношення еквівалентності** R.

З іншого боку, припустимо, що для множини M задано деяке розбиття $\{S_i \mid i\in I\}$. Побудуємо відношення T на множині M за таким правилом: $a\,T\,b$ для $a, b\in M$ тоді й тільки тоді, коли елементи a та b належать одному класу даного розбиття. Неважко переконатись, що відношення T рефлексивне, симетричне і транзитивне, тобто є еквівалентністю на множині M.

Отже, існує взаємно однозначна відповідність між усіма можливими еквівалентностями на множині M і всіма розбиттями цієї множини. Інакше кажучи, кожному відношенню еквівалентності на множині M відповідає єдине розбиття даної множини на класи і, навпаки, кожне розбиття множини M однозначно задає певне відношення еквівалентності на M.

Нехай R – відношення еквівалентності на множині M. Відображення множини M на фактормножину M/R, що кожному елементу $a \in M$ ставить у відповідність клас еквівалентності $[a]_R$, якому належить елемент a, називають **канонічним** (**природним**) **відображенням** множини M на фактормножину M/R.

Завдання для самостійної роботи

1. На множині $N \times N$ означимо відношення Q:

$$((a, b), (c, d)) \in Q \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c.$$

Довести, що Q – відношення еквівалентності на множині $N \times N$.

2. Нехай $M = N \times N$. Означимо на множині M відношення Q: $(a, b)\ Q\ (c, d)$ тоді й тільки тоді, коли $a + b = c + d$. Довести, що Q є еквівалентністю на M. Виписати всі елементи класів еквівалентності $[(1, 1)]$, $[(2, 2)]$, $[(4, 3)]$, $[(1, 23)]$ і $[(6, 8)]$ за відношенням R.

3. На множині N натуральних чисел означимо відношення R: mRn тоді й тільки тоді, коли $m/n = 2^k$ для деякого цілого k.

(а) Довести, що R – відношення еквівалентності на N.

(б) Скільки різних класів еквівалентності є серед $[1]_R$, $[2]_R$, $[3]_R$ і $[4]_R$?

(в) Скільки різних класів еквівалентності є серед $[6]_R$, $[7]_R$, $[12]_R$, $[24]_R$, $[28]_R$, $[42]_R$ і $[48]_R$?

4. Нехай у множині M зафіксовано деяку підмножину $K \subseteq M$. Означимо відношення R на $\beta(M)$: $A\ R\ B$ тоді й тільки тоді, коли $A \cap K = B \cap K$, $A, B \in \beta(M)$.

(а) Довести, що R – відношення еквівалентності на $\beta(M)$.

(б) Для $M = \{1, 2, 3\}$ і $K = \{1, 2\}$ знайти класи еквівалентності за відношенням R.

(в) Для $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ і $K = \{1, 2, 3\}$ визначити $[A]_R$, де $A = \{2, 3, 4\}$.

(г) Для $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ і $K = \{1, 2, 3\}$ визначити кількість класів еквівалентності та кількість підмножин множини M у кожному класі еквівалентності за відношенням R.

(д) Визначити кількість класів еквівалентності та кількість підмножин множини M у кожному класі еквівалентності за відношенням R, якщо $|\,M\,| = n$ і $|\,K\,| = m$.

5. Довести, що перетин будь-якої сукупності відношень еквівалентності на множині M є еквівалентністю на M.

6. Навести приклад двох еквівалентностей R_1 і R_2 на множині $M = \{1, 2, 3\}$ таких, що $R_1 \cup R_2$ не є еквівалентністю на множині M.

7. Навести приклад двох еквівалентностей R_1 і R_2 на множині $M = \{1, 2, 3\}$ таких, що $R_1 \circ R_2$ не є еквівалентністю на M.

8. Побудувати найменше відношення еквівалентності Q на множині $M = \{1, 2, 3, 4\}$, що включає задане відношення R:

(а) $R = \{(2, 4), (3, 1)\}$; (б) $R = \{(2, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 3)\}$.

9. Навести приклад відношення R на множині $M = \{1, 2, 3\}$, для якого виконується $R^+ = R$ і яке не є еквівалентністю.

10. Довести, що коли R – рефлексивне і транзитивне відношення на множині M, тоді $R \cap R^{-1}$ є відношенням еквівалентності на множині M.

11. Довести, що для довільного відношення еквівалентності R три наведені твердження рівносильні:

$$1)\ (x, y) \in R; \quad 2)\ [x]_R \cap [y]_R \neq \varnothing; \quad 3)\ [x]_R = [y]_R.$$

12. Побудувати всі можливі розбиття множини:

$$(а)\ M = \{a, b, c\}; \quad (б)\ M = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}.$$

13. Нехай M – скінченна множина. Яке відношення еквівалентності на M має:

(а) найбільший індекс; (б) найменший індекс?

14. Нехай R – відношення еквівалентності на скінченній множині M ($|M| = n$) і $|R| = k$. Довести, що $k - n$ – завжди парне число.

2.8. Відношення порядку

Відношення R на множині M називають **відношенням часткового (нестрогого) порядку**, якщо воно рефлексивне, антисиметричне і транзитивне, тобто:

1) $a\,R\,a$ для всіх $a \in M$ – **рефлексивність**;
2) коли $a\,R\,b$ і $b\,R\,a$, то $a = b$ – **антисиметричність**;
3) коли $a\,R\,b$ і $b\,R\,c$, то $a\,R\,c$ – **транзитивність**.

Множину M, на якій задано деякий частковий порядок, називають **частково впорядкованою**.

Елементи a, $b \in M$ назвемо **порівнюваними** за відношенням R, якщо виконується aRb або bRa.

Частково впорядковану множину M, у якій будь-які два елементи порівнювані між собою, називають **лінійно впорядкованою** множиною, або **ланцюгом**. Відповідне відношення R, задане на лінійно впорядкованій множині, називають **лінійним** (**досконалим**) **порядком**. Отже, відношення R на множині M називають відношенням **лінійного порядку**, якщо воно рефлексивне, антисиметричне, транзитивне й для будь-якої пари елементів a, $b \in M$ виконується aRb або bRa.

Для позначення відношень порядку використовуватимемо знаки $\leq$ *і* $\geq$, які повторюють звичайні математичні знаки нерівностей, тобто для відношення порядку R замість aRb записуватимемо $a \leq b$ або $b \geq a$ та читатимо відповідно *a менше або дорівнює b* або *b більше або дорівнює a*. Очевидно, що $\leq$ – обернене відношення до $\geq$.

За кожним відношенням часткового порядку $\leq$ на довільній множині M можна побудувати інше відношення $<$ на M, вважаючи, що $a < b$ тоді й лише тоді, коли $a \leq b$ і $a \neq b$. Це відношення називають **відношенням строгого порядку** на множині M. Зрозуміло, що відношення строгого порядку антирефлексивне, транзитивне, а також задовольняє умову сильної антисиметричності (асиметричності), тобто для жодної пари a, $b \in M$ не може одночасно виконуватись $a < b$ і $b < a$.

З іншого боку, за довільним відношенням строгого порядку $<$ на множині M однозначно можна побудувати відповідне відношення часткового (нестрогого) порядку $\leq$, поклавши $a \leq b$ тоді й тільки тоді, коли $a < b$ або $a = b$, a, $b \in M$. З огляду на такий простий зв'язок між відношеннями часткового (нестрогого) і строгого порядку можна обмежитися вивченням лише одного з них, наприклад $\leq$.

Приклад 2.30.

1. Традиційні відношення $\leq$ і $<$ ($\geq$ і $>$) – це відношення відповідно часткового й строгого порядку на множинах чисел N, Z і R. Більш того, множини N, Z і R, а також будь-які їхні підмножини лінійно впорядковані за відношеннями $\leq$ або $\geq$.

2. Частковим порядком є відношення рівності i_M на будь-якій множині M. Цей порядок іноді називають **тривіальним**.

3. Відношення нестрогого включення $\subseteq$ є відношенням часткового порядку, а відношення $\subset$ – відношенням строгого порядку на множині $\beta(A)$ усіх підмножин (булеані) заданої множини A.

4. Задамо відношення $\leq$ і $<$ на множині R^n кортежів дійсних чисел довжиною n так:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

тоді й тільки тоді, коли $a_1 \leq b_1$, $a_2 \leq b_2$, …, $a_n \leq b_n$; аналогічно $(a_1, a_2, \ldots, a_n) < (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ тоді й лише тоді, коли

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

і принаймні для однієї координати $i = 1, 2, \ldots, n$ виконується $a_i < b_i$. Тоді $(2, 3.7, 4) < (7, 24, 10)$, а кортежі $(1, 4, -1.7)$ і $(2, 2, 4)$ непорівнювані. Аналогічно можна ввести частковий порядок на множинах N^n, Z^n і Q^n.

5. Зафіксуємо строгий порядок розташування символів у довільному скінченному алфавіті $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, наприклад, покладемо, що $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Тоді природним чином можна означити **лексикографічний порядок** на множині A^m усіх слів довжиною m в алфавіті A, а саме: вважатимемо

$$a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_m} < a_{j_1}a_{j_2}\ldots a_{j_m}$$

тоді й тільки тоді, коли $a_{i_s} = a_{j_s}$ для $s = 1, 2, \ldots, k-1$ і $a_{i_k} < a_{j_k}$ для певного k, $k = 1, 2, \ldots, m$.

Лексикографічний порядок можна поширити на множину A^* всіх слів у алфавіті A, якщо доповнити алфавіт A додатковим (порожнім) символом p і вважати, що $p < a_i$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, n$. При порівнюванні двох слів різної довжини спочатку слово меншої довжини доповнюють праворуч такою кількістю порожніх символів p, щоб воно зрівнялося за довжиною з другим словом, після чого обидва слова порівнюють як слова однакової довжини.

Нехай $A = \{a, b, c\}$ і $a < b < c$, тоді

$$aac < aba,\ ab < abab,\ b < cba \text{ тощо.}$$

Лексикографічний порядок лежить в основі впорядкування всіх словників, енциклопедій, індексів (предметних або іменних покажчиків), довідників, списків, таблиць тощо.

6. У множині N натуральних чисел відношення *ділить* – це частковий порядок. Маємо $4 \leq 28$, $11 \leq 132$, $5 \leq 5$, $1 \leq n$ для будь-якого $n \in N$. Пари чисел 7 і 22, 13 і 35 непорівнювані. ◄

Нехай M – частково впорядкована множина, A – деяка її непорожня підмножина. **Верхньою гранню** підмножини $A \subseteq M$ у множині M називають елемент $b \in M$ такий, що $a \leq b$ для всіх $a \in A$. Елемент b називають **найбільшим елементом** множини M, якщо b – верхня грань множини M.

Аналогічно елемент c частково впорядкованої множини M називають **нижньою гранню** підмножини $A \subseteq M$, якщо $c \leq a$ для будь-якого $a \in A$. Елемент c – **найменший** у множині M, якщо c – нижня грань самої множини M.

Отже, найбільший і найменший елементи, а також верхня й нижня грані (якщо вони існують) порівнювані відповідно зі всіма елементами даної множини M або підмножини A.

Елемент $x \in M$ називають **максимальним** у множині M, якщо не існує такого елемента $a \in M$, що $x < a$. Відповідно елемент $y \in M$ називають **мінімальним** у множині M, якщо не існує такого елемента $a \in M$, що $a < y$.

Очевидно, що коли в частково впорядкованій множині M існує найбільший елемент, то це єдиний максимальний елемент множини M. Аналогічно найменший елемент множини M – єдиний її мінімальний елемент. Зауважимо також, що частково впорядкована множина M може не мати найбільшого (найменшого) елемента й водночас мати один або кілька максимальних (мінімальних) елементів. У лінійно впорядкованій множині поняття найбільшого й максимального (найменшого й мінімального) елементів збігаються.

Приклад 2.31.

1. У множині Z цілих чисел із традиційним відношенням порядку множина N натуральних чисел має найменший елемент (число 1) і не має найбільшого елемента. Будь-яке від'ємне число, а також 0, є нижніми гранями для N.

2. У довільній множині M із тривіальним порядком i_M (відношенням рівності) кожен елемент $a \in M$ є одночасно максимальним і мінімальним. Найбільшого й найменшого елементів у множині M немає.

3. Булеан $\beta(A)$ множини A з відношенням часткового порядку $\subseteq$ містить найменший елемент – порожню множину – і найбільший елемент – саму множину A. У множині D усіх непорожніх підмножин множини A (тобто в множині $\beta(A)\backslash\{\varnothing\}$) немає найменшого елемента, але всі одноелементні множини $\{a\}$, $a\in A$, є мінімальними елементами множини D.

4. У множині M усіх натуральних дільників числа $n\in N$, частково впорядкованій за відношенням "ділить", число 1 – найменший елемент, а n – найбільший. ◄

Завдання для самостійної роботи

1. Означимо відношення R на множині цілих чисел Z так: mRn тоді й тільки тоді, коли $m - n$ – невід'ємне парне число. Довести, що R – частковий порядок на Z. Чи є R лінійним порядком?

2. Нехай M – довільна множина. Означимо відношення R на множині $\beta(M)\times\beta(M)$: $(A,B)\,R\,(C,D)$ тоді й тільки тоді, коли $A\,\Delta\,B \subseteq C\,\Delta\,D$, $A, B, C, D\in\beta(M)$. Чи є R відношенням часткового порядку?

3. Нехай $\leq_A$ – частковий порядок на множині A, $\leq_B$ – частковий порядок на множині B. Назвемо **прямим добутком** частково впорядкованих множин A та B множину $A\times B$ із заданим на ній відношенням $\leq$: $(a_1, b_1)\leq(a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1\leq_A a_2$ та $b_1\leq_B b_2$. Довести, що $\leq$ – частковий порядок на $A\times B$.

4. Довести чи спростувати таке твердження: якщо $\leq_A$ – лінійний порядок на множині A, а $\leq_B$ – лінійний порядок на множині B, то відношення $\leq$, означене в попередній задачі, є лінійним порядком на множині $A\times B$.

5. Нехай M – довільна множина. Означимо відношення R на множині $\beta(M)\times\beta(M)$: $(A,B)\,R\,(C,D)$ тоді й тільки тоді, коли $A\subseteq C$ і $B\subseteq D$, $A, B, C, D\in\beta(M)$. Визначити, чи є R:

(а) відношенням часткового порядку;

(б) відношенням лінійного порядку?

6. Нехай R – транзитивне відношення на множині M. Довести, що R є частковим порядком на M тоді й тільки тоді, коли

$$R \cap R^{-1} = i_M.$$

7. Довести, що об'єднання $R_1 \cup R_2$ відношень часткового порядку R_1 і R_2 на множині M є частковим порядком на множині M тоді й тільки тоді, коли $R_1 \circ R_2 \cup R_2 \circ R_1 \subseteq R_1 \cup R_2$ і $R_1 \cap R_2^{-1} = i_M$.

8. Нехай $\leq$ і $<$ – традиційні відношення порядку на множині натуральних чисел N. Довести, що:

(а) $< \circ < \neq <$; (б) $\leq \circ < = <$; (в) $\leq \circ \geq = N^2$.

9. Довести, що будь-яка непорожня скінченна частково впорядкована множина A містить мінімальний і максимальний елементи.

10. Довести, що скінченна частково впорядкована множина має найменший (найбільший) елемент тоді й тільки тоді, коли вона містить рівно один мінімальний (максимальний) елемент. Чи це так для нескінченних частково впорядкованих множин?

11. Знайти всі множини M, для яких існує повний порядок R на M такий, що R^{-1} також є повним порядком на M.

2.9. Парадокси теорії множин

Слово **парадокс** має грецьке походження та перекладається українською як *несподіваний*, *дивний*. Це слово вживають щодо висловлення (положення, ідеї), яке суттєво відрізняється від загальноприйнятого традиційного уявлення. Уживання терміна "парадокс" стосовно суперечностей, виявлених різними математиками в теорії множин Г. Кантора, є наївною спробою зменшити їх значення й надати їм характеру логічних курйозів, штучних, неприродних конструкцій. Точніше суть явища передає назва **антиномії теорії множин**, оскільки термін *антиномія* є синонімом терміна *суперечність*. Однак за традицією називатимемо сформульовані нижче положення парадоксами.

Парадокс Б. Рассела. Для будь-якої множини M коректним є питання, чи належить множина M собі як окремий елемент, тобто чи є множина M елементом самої себе, чи ні. Наприклад, множина всіх множин є множиною й тому належить сама собі, а множина всіх будинків у місті не є будинком, множина студентів в аудиторії не є студентом.

Отже, коректно поставити сформульоване питання й щодо множини всіх множин, які не будуть власними елементами. Нехай M – множина всіх тих множин, що не є елементами самих себе. Розглянемо питання: а чи є сама множина M елементом самої себе? Якщо припустити, що $M \in M$, то із означення множини M випливає $M \notin M$. Якщо ж припустимо, що $M \notin M$, то з того самого означення дістанемо $M \in M$.

Близьким до парадокса Рассела є **парадокс цирульника**. Цирульник – це мешканець міста, який голить тих і тільки тих мешканців міста, які не голяться самі. Виникає проблема з визначенням множини C усіх тих мешканців міста, яких голить цирульник. Міркуючи аналогічно тому, як це було зроблено в парадоксі Рассела, дійдемо висновку, що цирульник голить себе в тому й тільки в тому випадку, коли він не голить сам себе, тобто цирульник належить множині C тоді й лише тоді, коли він не належить C.

Багато хто із математиків на початку XX ст. не надавав цим парадоксам особливого значення, оскільки в той час теорія множин була відносно новою галуззю математики й не зачіпала інтересів більшості фахівців. Однак їхні більш відповідальні та проникливі колеги зрозуміли, що виявлені парадокси стосуються не тільки теорії множин і побудованих на ній розділів класичної математики, але й безпосередньо пов'язані з логікою взагалі, яка є головним інструментом математики.

Зокрема, парадокс Рассела можна переформулювати в термінах логіки й таким чином додати до відомих із давніх часів логічних парадоксів: парадокса брехуна (людина, яка завжди каже неправду, одного разу мовить: *Те, що я сказав, – брехня*), парадокса всемогутньої істоти (чи **може** всемогутня істота створити такий камінь, який вона **не зможе** підняти?) тощо.

Гостро постало питання про обґрунтування засад математики. На початку двадцятого століття виникли три основні напрями досліджень з обґрунтування сучасної математики. Коротко подамо суть кожного з них.

1. Логіцизм. Основною тезою логіцизму є положення, що першооснова математики – це логіка, а математика – лише частина логіки, тобто всі математичні істини складають власну підмножину множини всіх логічних істин.

Основні ідеї й методи логіцизму було вперше викладено у великій праці А. Уайтхеда і Б. Рассела "Принципи математики", що вийшла друком на початку другого десятиріччя XX ст.

Незважаючи на те що в межах логіцизму проблему обґрунтування математики не було остаточно розв'язано, усе ж було зроблено чимало для з'ясування деяких важливих аспектів логічної структури математики.

2. Інтуїціонізм. Основними засадами інтуїціонізму є такі:

1) основою математики вважають поняття натурального числа, причому систему натуральних чисел покладають інтуїтивно відомою;

2) усі інші математичні об'єкти будують на основі натуральних чисел суто конструктивно за допомогою скінченної кількості застосувань скінченної кількості конкретних операцій.

Доведення існування математичного об'єкта зводиться до побудови конкретного алгоритму, тобто визнаються лише конструктивні доведення існування математичних об'єктів. Зокрема, не визнається доведення існування математичних об'єктів методом від супротивного;

3) закон виключеного третього незастосовний до нескінченних множин (закон виключеного третього – це логічна аксіома, згідно з якою із двох тверджень *А* та *не А* тільки одне істинне);

4) визнається абстракція потенційної нескінченності та відкидається абстракція актуальної нескінченності.

Обґрунтування математики в межах інтуїціонізму натрапляє на дві основні перешкоди: значну частину її важливих розділів не вдається побудувати засобами інтуїціонізму або ж така побудова має досить громіздкий і штучний вигляд, який не задовольняє переважну більшість як математиків-теоретиків, так і практиків.

Наступним кроком у розвитку інтуїціонізму є конструктивний напрям (або **конструктивізм**), що розвивається на основі уточненого поняття алгоритму.

3. Формалізм. Засновником формалізму вважають Д. Гільберта. Цей напрям є подальшим поглибленням аксіоматичного методу в математиці. Основою будь-якої аксіоматичної теорії є перелік неозначуваних (первинних) понять і список аксіом, тобто положень, які беруть за вихідні та істинність яких декларують із самого початку. Додатково означають логічні правила, за допомогою яких з одних тверджень (зокрема аксіом) дістають інші.

Гільберт і його послідовники вважали, що кожен розділ математики можна повністю формалізувати, тобто за допомогою формальних виразів (формул) подати всі аксіоми, а всі математичні (логічні) доведення звести до суто формальних перетворень над формулами.

Саме на основі ідей формалізму Е. Цермело 1908 року побудував першу формальну аксіоматичну теорію множин (**систему Цермело–Френкеля**, або ZF). Пізніше було запропоновано багато видозмін і вдосконалень ZF і кілька інших аксіоматичних теорій множин.

Проаналізувавши всі парадокси теорії множин, можна дійти висновку, що всі вони зумовлені необмеженим застосуванням **принципу абстракції** (або **принципу згортання**), згідно з яким для будь-якої властивості $P(x)$ існує відповідна множина елементів x, які мають властивість P. Якщо відкинути це припущення, то всі відомі парадокси теорії множин стають неможливими. Наприклад, із парадокса Рассела випливало б, що не існує множина множин, які не є елементами самих себе.

В усіх існуючих аксіоматичних теоріях множин неможливість антиномій ґрунтується на обмеженнях принципу згортання, тобто на обмеженні допустимих множин.

Розділ 3
КОМБІНАТОРИКА

Комбінаторика (інша назва – **комбінаторний аналіз**) – це розділ сучасної дискретної математики, що вивчає способи вибору й розміщення певних предметів, досліджує властивості та формулює методи обчислення кількостей різноманітних конфігурацій, які можна утворити з цих предметів. Оскільки конкретний вигляд (матеріальна сутність) предметів, які обирають і розміщують, не має для комбінаторного аналізу жодного значення, то при формулюванні та розв'язуванні задач комбінаторики використовують загальні поняття й терміни теорії множин і відношень. Особливо слід наголосити, що всі множини, з якими має справу комбінаторика, скінченні. Далі скрізь у цьому розділі під словами **множина** чи **підмножина** розумітимемо скінченні множини.

Користуючись мовою теорії множин, можна сказати, що комбінаторика вивчає різноманітні властивості множин, які можна утворити з підмножин певної скінченної множини. При цьому кожного разу задають певні правила, за якими формуються ці множини і підмножини.

Кількість елементів (потужність) основної скінченної множини називають **розмірністю** комбінаторної задачі.

Комбінаторні задачі мають давню історію. Однак тривалий час комбінаторика не привертала до себе уваги математиків. Пояснюється це значною мірою тим, що, оскільки комбінаторні задачі формулюють для скінченних множин, то для переважної більшості таких задач існує тривіальний метод їх розв'язання – перебір. Пошук зручніших алгоритмів і методів для задач малої розмірності не викликає інтересу в дослідників, тому що виграш порівняно з тривіальним алгоритмом перебору незначний. Водночас комбінаторні задачі великої розмірності навіть за умови застосування найефективніших алгоритмів потребують такої кількості операцій (обсягу обчислень), що стають практично нерозв'язними.

Ситуація кардинально змінилася з появою ЕОМ. З'явилась реальна можливість для розв'язання комбінаторних задач достатньо великої розмірності. Виявилося, що для таких задач різноманітні вдосконалення й оптимізація відповідних алгоритмів зумовлюють істотний виграш у часі та пам'яті. Це, у свою чергу, дає змогу додатково збільшити розмірність задач, які можна розв'язувати за допомогою "хороших" алгоритмів. Розробка й дослідження загальних принципів побудови оптимальних комбінаторних алгоритмів для розв'язування різноманітних комбінаторних задач – одні з найважливіших проблем сучасної теорії та практики програмування.

3.1. Комбінаторні обчислення для основних теоретико-множинних операцій. Формула включення-виключення

Якщо A та B – довільні скінченні множини, то безпосередньо із означення теоретико-множинних операцій випливають співвідношення $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$ і $|B \setminus A| = |B| - |A \cap B|$.

Як і раніше, через $|M|$ позначено кількість елементів скінченної множини M.

Очевидно також, що коли множини A та B не перетинаються, тобто $A \cap B = \varnothing$, то $|A \cup B| = |A| + |B|$. Зокрема,

$$|A \,\Delta\, B| = |A \setminus B| + |B \setminus A|.$$

Для довільних множин A та B маємо

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

А для трьох множин A, B, C справджується така рівність:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - \\ - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C|. \quad (3.1)$$

При обчислюванні за формулою (3.1) потрібно послідовно додавати й віднімати певні кількості. Тому метод обчислення за цією формулою дістав назву **методу (принципу) включення та виключення.**

Приклад 3.1.

1. Зі 100 студентів факультету англійську мову знає 61 студент, французьку – 43, німецьку – 26, англійську і французьку – 25, англійську й німецьку – 17, французьку й німецьку – 14, усі три мови знають 8 студентів. Скільки студентів не знають жодної з трьох мов?

Позначимо через A, B, C множини студентів, які знають англійську, французьку та німецьку мову. Тоді кількість студентів, які знають принаймні одну мову, згідно з (3.1) становить

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| -$$
$$- (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C| =$$
$$= 61 + 43 + 26 - (25 + 17 + 14) + 8 = 92.$$

Отже, шукана кількість дорівнює $100 - 92 = 8$.

2. Знайти кількість натуральних чисел, що не перевищують 1000 і не діляться ні на 3, ні на 5, ні на 7.

Позначимо через A_k множину натуральних чисел, що не перевищують 1000 і діляться на k. Множиною натуральних чисел, що не перевищують 1000 і діляться або на 3, або на 5, або на 7, є множина

$$A_3 \cup A_5 \cup A_7,$$

а шуканою множиною є

$$E \setminus (A_3 \cup A_5 \cup A_7),$$

де множина-універсум E – всі натуральні числа від 1 до 1000. Тоді

$$|E \setminus (A_3 \cup A_5 \cup A_7)| = |E| - |E \cap (A_3 \cup A_5 \cup A_7)| =$$
$$= |E| - |A_3 \cup A_5 \cup A_7|$$

(див. співвідношення (2.3)).

$|E| = 1000$, а вираз $|A_3 \cup A_5 \cup A_7|$ обчислюють за (3.1). Крім того, $|A_k| = [1000/k]$ і $A_k \cap A_l = A_m$, де m – найменше спільне кратне чисел k і l (через $[x/y]$ позначено цілу частину від ділення x на y). ◄

Нарешті, розглянемо останню теоретико-множинну операцію – прямий добуток. Якщо $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – скінченні множини, то

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|. \qquad (3.2)$$

Формулу (3.2) часто називають **основним правилом комбінаторики** (або **правилом множення**).

Нехай потрібно виконати одну за одною n дій. Якщо першу дію можна виконати k_1 способами, другу – k_2 способами і т. д., а n-ту – k_n способами, то всі n дій разом можна виконати $k_1 k_2 \ldots k_n$ способами.

Приклад 3.2.

1. Кількість слів довжиною m в алфавіті A ($|A| = n$) становить $|A^m| = |A|^m = n^m$. Цей результат випливає також із того, що побудову одного зі слів довжиною m можна розкласти на m кроків (або дій): перший крок – вибір першої літери слова, другий –

вибір другої літери слова і т. д., m-й – вибір останньої літери. Кожну з цих дій можна виконати n способами.

2. З'ясуємо, скількома способами можна розподілити k різних предметів серед n осіб.

Нехай A – множина осіб, серед яких розподіляють предмети. Кожному варіанту розподілу поставимо у відповідність кортеж $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k})$, де a_{i_j} – особа, яка одержала j-й предмет. Установлена відповідність взаємно однозначна, отже, множина варіантів розподілу містить таку саму кількість елементів, що й множина всіх кортежів довжиною k, утворених з елементів множини A. Тому шукане число становить $|A^k| = |A|^k = n^k$.

3. Нехай A та B – скінченні множини, $|A| = n$, $|B| = m$. Обчислимо кількість усіх можливих відображень множини A в множину B. Кожне відображення $\varphi\colon A \to B$ можна повністю задати його табл. 3.1, де $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – елементи множини A, а $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)$ – відповідні образи. Кожен з образів можна обрати m способами.

Таблиця 3.1

a_1		…	a_{n-1}	a_n
$\varphi(a_1)$	$\varphi(a_2)$	…	$\varphi(a_{n-1})$	$\varphi(a_n)$

Отже, існує m^n способів утворення рядка значень для відображення φ у табл. 3.1, тому кількість відображень типу $A \to B$ становить $|B^A| = m^n = |B|^{|A|}$.

4. Скількома способами можна розмістити на шахівниці 8 тур так, щоб вони не били одна одну?

8! Є вісім способів розташувати першу туру на першій вертикалі шахівниці, сім способів розташувати другу туру на другій вертикалі і т.д., один спосіб розташувати восьму туру на останній вертикалі.

5. Скільки існує n-значних десяткових чисел,

(а) усі цифри яких парні;

(б) у запису яких є принаймні одна парна цифра;

(в) у запису яких немає цифри 7;

(г) у запису яких обов'язково є цифра 5?

(а) $4{\cdot}5^{n-1}$. Першу цифру такого числа можна обрати чотирма способами (2, 4, 6 або 8), а кожну наступну – п'ятьма.

(б) $9 \cdot 10^{n-1} - 5^n$. Від кількості всіх n-значних десяткових чисел слід відняти кількість n-значних чисел, усі цифри яких непарні.

(в) $8 \cdot 9^{n-1}$.

(г) $9 \cdot 10^{n-1} - 8 \cdot 9^{n-1}$ (див. (б) і (в)).

6. Визначити, скільки різних натуральних дільників має число:

(а) $2^{1001} \cdot 3^{2015} \cdot 7^{2002}$; (б) 4004^{2124}.

(а) Довільний дільник даного числа має вигляд $2^n \cdot 3^m \cdot 7^k$, де n може набувати значення в діапазоні від 0 до 1001 (тобто є 1002 варіанти обрати n), m – від 0 до 2015, а k – від 0 до 2002. Отже, шукана кількість дільників дорівнює $1002 \cdot 2016 \cdot 2003$.

(б) Слід розкласти число 4004 на прості множники й застосувати міркування, наведені в попередньому пункті.

7. Нехай множина A містить n елементів, а множина B – m елементів. Визначити кількість:

(а) відповідностей; (б) усюди визначених відповідностей;

(в) функціональних відповідностей між множинами A та B.

(а) Оскільки відповідність C між A та B – це довільна підмножина декартового добутку $A \times B$, то кількість таких відповідностей дорівнює кількості елементів булеана множини $A \times B$, яка містить nm елементів. Це число дорівнює 2^{nm}, оскільки для будь-якої підмножини $M \subseteq A \times B$ і для довільного елемента $a \in A \times B$ (nm варіантів вибору) можливі лише дві ситуації: або елемент a належить множині M, або елемент a не належить множині M.

(б) Будь-яка відповідність C між A та B однозначно задається множиною образів $C(a)$, $a \in A$. Для всюди визначеної відповідності C кожна з цих множин (що є підмножиною множини B) має бути непорожньою. Кількість непорожніх підмножин множини B дорівнює $2^m - 1$. За правилом множення кількість усюди визначених відповідностей дорівнюватиме $(2^m - 1)^n$.

(в) Множиною образів $f(a)$ функціональної відповідності f між A та B для кожного $a \in A$ може бути або деяка одноелементна підмножина множини B, або порожня множина. Отже, є $m + 1$ варіант обрати образ для кожного з n елементів множини A, тому кількість функціональних відповідностей дорівнює $(m + 1)^n$.

8. Нехай множина M містить n елементів. Визначити кількість:

(а) відношень; (б) рефлексивних відношень;

(в) нерефлексивних відношень;

(г) антирефлексивних відношень;

(д) симетричних відношень;

(е) антисиметричних відношень;

(є) рефлексивних і антисиметричних відношень;

(ж) рефлексивних і несиметричних відношень на множині M.

Нехай $m = n^2$, $k = n^2 - n$, $l = k/2$.

(а) 2^m. Кількість відношень на множині M дорівнює кількості елементів булеана множини $M \times M$, яка містить $m = n^2$ елементів.

(б) 2^k. Будь-яке рефлексивне відношення R на множині M можна подати у вигляді $R = i_M \cup R'$, де R' – множина недіагональних елементів із $M \times M$. Кількість варіантів обрати R' дорівнює кількості елементів булеана множини $(M \times M) \setminus i_M$, що містить $k = n^2 - n$ елементів.

(в) Ця кількість дорівнює різниці кількостей усіх відношень і рефлексивних відношень на M, тобто $2^m - 2^k$.

(г) 2^k (див. (б)).

(д) Будь-яке симетричне відношення на M однозначно задається вибором довільної підмножини діагоналі i_M та довільної підмножини з елементів, розташованих над (або під) діагоналлю. Кількість елементів, з яких здійснюється вибір, становить $n + l = n(n + 1)/2$, тому кількість симетричних відношень $2^{n + l} = 2^{n(n + 1)/2}$.

(е) Для того щоб утворити антисиметричне відношення R, слід узяти довільну підмножину діагоналі i_M (2^n способів) і додати до неї деяку множину недіагональних елементів, ураховуючи те, що з пари (a, b) і (b, a) симетричних недіагональних елементів до R може входити або лише один із цих елементів, або жоден (3^l способів, оскільки кількість таких пар дорівнює l). Отже, існує $2^n \cdot 3^l = 2^n \cdot 3^{n(n - 1)/2}$ антисиметричних відношень на множині M.

(є) $3^{n(n - 1)/2}$ (див. попередній пункт).

(ж) Нехай P – множина рефлексивних відношень, а C – множина симетричних відношень на множині M. Тоді множина рефлексивних і несиметричних відношень на множині M – це

$P \setminus C$. $|P \setminus C| = |P| - |P \cap C| = 2^k - 2^l$ (див. п. (б) і (д)). ◄

Завдання для самостійної роботи

1. Нехай M – скінченна множина і $A, B \subseteq M$. Розташуйте у порядку неспадання такі величини:

(а) $|B|, |A \cup B|, |\varnothing|, |A \cap B|, |M|$;

(б) $|A \backslash B|, |A| + |B|, |A \Delta B|, |\varnothing|, |A \cup B|$.

2. Довести нерівності:

(а) $|A \cup B| \le |A| + |B|$; (б) $|A \backslash B| \le |A|$;

(в) $|A \Delta B| \le |A| + |B|$; (г) $|A \backslash B| \ge |A| - |B|$;

(д) $|A \Delta B| \le |A \cup B|$; (е) $|A| < |\beta(A)|$;

(є) $|A \cap B| \le |A|$; (ж) $|A \cap B| \le |A \cup B|$.

3. Нехай A – скінченна множина, a – елемент, а B – підмножина множини A. Яких підмножин множини A більше:

(а) тих, що містять елемент a, чи тих, що не містять елемента a;

(б) тих, що містять множину B, чи тих, що не перетинаються із множиною B;

(в) тих, що включають множину B, чи тих, що не включають множину B?

4. У групі 27 студентів. Із них 16 відвідують семінар **А**, 12 – семінар **Б**, а 7 студентів не відвідують жодного семінару.

(а) Скільки студентів відвідують семінари **А** та **Б**?

(б) Скільки студентів відвідують лише семінар **А**?

5. Обстеження читацьких смаків студентів показало, що 60 % студентів читають журнал **А**, 50 % – журнал **Б**, 50 % – журнал **В**, 30 % – журнали **А** та **Б**, 20 % – журнали **Б** і **В**, 40 % – журнали **А** та **В**, 10 % – журнали **А**, **Б** і **В**. Скільки відсотків студентів:

(а) читають принаймні один журнал;

(б) не читають жодного з журналів;

(в) читають точно два журнали;

(г) читають не менше двох журналів?

6. Знайти кількість і суму чотиризначних натуральних чисел, що не діляться на жодне з таких чисел:

(а) 2, 5, 11; (б) 6, 10, 18.

7. Знайти кількість простих чисел, що не перевищують 120.

8. Під час екзаменаційної сесії з чотирьох іспитів не менше 70 % студентів склали іспит з дискретної математики, не менше 75 % – з математичного аналізу, не менше 80 % – з алгебри й не менше 85 % – з програмування. Яка мінімальна кількість студентів, що склали одночасно всі чотири іспити?

9. Номер автомашини складається із трьох літер українського алфавіту (що містить 33 літери) і чотирьох цифр. Скільки можна скласти різних номерів автомашин?

10. Скількома способами можна розмістити на шахівниці розміром $m \times n$ дві різнокольорові тури так, щоб вони не били одна одну?

11. Скільки існує n-значних десяткових чисел,

(а) які починаються із двох однакових цифр;

(б) у яких сусідні цифри різні;

(в) усі цифри яких непарні;

(г) у запису яких є принаймні одна непарна цифра;

(д) у запису яких немає цифри 9;

(е) у запису яких обов'язково є цифра 3?

12. Скількома способами в множині A з n елементів можна вибрати дві підмножини, що не перетинаються?

13. Визначити, скільки різних натуральних дільників має число:

(а) $3^{2015} \cdot 5^{2016} \cdot 11^{2017}$; (б) 2448^{2124}; (в) 3124^{4004}; (г) 9216^{2331}.

14. На одній прямій дано n точок, а на іншій, паралельній першій, – m точок. Скільки існує трикутників, вершинами яких є ці точки?

15. Нехай множина A містить n елементів, а множина B – m елементів. Визначити кількість:

(а) сюр'єктивних відповідностей;

(б) ін'єктивних відповідностей;

(в) бієктивних відповідностей

між множинами A та B.

16. Нехай множина M містить n елементів. Визначити кількість:

(а) неантирефлексивних відношень;

(б) несиметричних відношень;

(в) неантисиметричних відношень;

(г) рефлексивних і симетричних відношень;

(д) рефлексивних і антисиметричних відношень;

(е) антирефлексивних і симетричних відношень;

(є) антирефлексивних і несиметричних відношень;

(ж) антирефлексивних і антисиметричних відношень

на множині M.

3.2. Сполуки, перестановки та розміщення

Позначимо через $B_k(M)$ множину всіх k-елементних підмножин даної скінченної множини M, а через $C(n, k)$ – кількість елементів множини $B_k(M)$, де $n = |M|$ і $0 \le k \le n$. Зокрема, $B_0(M)$ складається лише з одного елемента – порожньої множини $\varnothing$, $B_1(M)$ складається з n елементів – одноелементних підмножин множини M, а $B_n(M)$ містить лише один елемент – саму множину M. Отже, $C(n, 0) = C(n, n) = 1$ і $C(n, 1) = n$.

Кількість усіх k-елементних підмножин множини M, яка складається з n елементів, становить

$$C(n, k) = \frac{(n-k+1)(n-k+2)...(n-1)n}{k(k-1)...2\cdot 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad (3.3)$$

Довільну k-елементну підмножину n-елементної множини називають **сполукою** (або **комбінацією**) *з* n **елементів за** k. Формула (3.3) дає змогу обчислити кількість таких сполук.

Для кількості сполук з n по k крім уведеного позначення $C(n, k)$ використовують також позначення C_n^k, nCk, (n, k) або $\binom{n}{k}$.

Приклад 3.3. Підрахуємо, скількома способами можна заповнити картку *Лото* (6 *із* 49). Очевидно, їхня кількість дорівнює кількості сполук із 49 елементів (чисел) по 6, тобто

$$C(49, 6) = \frac{49\cdot 48\cdot 47\cdot 46\cdot 45\cdot 45\cdot 44}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} = 13\ 983\ 816. ◄$$

Нехай множина M містить n елементів.

Перестановкою множини M називають будь-який утворений з елементів множини M кортеж довжиною n, в якому кожен елемент із M зустрічається лише один раз. Позначимо через P_n кількість усіх перестановок множини M.

Послідовно утворюватимемо кортежі довжиною n з елементів множини M ($|M| = n$). Є n можливостей для вибору першої координати кортежу. Після того, як обрано елемент для першої координати, залишиться $n - 1$ елемент, з яких можна вибрати другу координату кортежу і т. д. За основним правилом комбінаторики всі n дій разом можна виконати

$$n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1 = n!$$

способами. Отже, є $n!$ кортежів довжиною n, утворених з елементів множини M, і $P_n = n!$

Приклад 3.4.

1. Скільки п'ятизначних чисел можна утворити із цифр 0, 1, 2, 3, 4? Кожну цифру можна використовувати в числі тільки один раз.

Існує $P_5 = 5!$ перестановок зазначених цифр. Однак частина з цих перестановок матиме на першому місці цифру 0, тобто відповідатиме чотиризначним числам. Кількість чисел вигляду $0abcd$, де (a, b, c, d) – перестановка з цифр 1, 2, 3, 4, становить $P_4 = 4!$ Отже, шуканим числом є $P_5 - P_4 = 5! - 4! = 96$.

2. Визначити, скількома способами можна вибрати з натуральних чисел від 1 до 100 три натуральні числа так, щоб їх сума була парною.

$C(50, 3) + 50C(50, 2)$. Сума трьох чисел парна, якщо або всі вони парні (кількість таких трійок $C(50, 3)$), або два з них непарні (таких пар $C(50, 2)$) і одне парне (що обирається із 50 можливих).

3. Скільки є перестановок цифр 0, 1, 2, …, 9, у яких цифра 3 займає третє місце, а цифра 5 – п'яте?

8! Зафіксуємо в кожній перестановці цифру 3 на третьому місці, а цифру 5 – на п'ятому. На всіх інших восьми позиціях розташуємо всіма можливими способами решту вісім цифр.

4. Скількома способами можна розташувати n нулів і k одиниць так, щоб жодні дві одиниці не стояли поруч?

$C(n + 1, k)$. Запишемо спочатку всі n нулів. Існує $n + 1$ місце (одне – перед першим нулем, $n - 1$ – між нулями й одне – після останнього нуля), на які можна записувати по одній одиниці, щоб вони не стояли поруч. Отже, для кожного заданого розташування слід обрати k місць з $n + 1$ можливих. ◄

Кортеж довжиною k, утворений з елементів множини M ($|M| = n$), у якому елементи не повторюються, називають **розміщенням з n по k** ($0 \le k \le n$). Різні розміщення з n по k відрізняються або складом елементів, або їхнім порядком.

Кількість розміщень із n по k позначають $A(n, k)$ або A_n^k .

Кількість усіх k-елементних підмножин множини M з n елементів дорівнює $C(n, k)$. Із кожної з цих підмножин можна утворити стільки кортежів, скільки існує різних перестановок її елементів. За попередньою теоремою їхня кількість дорівнює k! Отже, загальна кількість кортежів довжиною k, які можна побудувати з n елементів, дорівнює $k!C(n, k)$.

$$A(n, k) = k!C(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!},$$

тобто $A(n, k) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$.

Приклад 3.5. Визначити, скільки тризначних чисел можна утворити з цифр 0, 1, 2, 3, 4 за умови, що цифри кожного числа різні.

Існує $A(5, 3)$ кортежів довжиною 3, координати яких обрано із зазначених цифр. Виключимо із них кортежі, перша координата яких дорівнює 0. Таких кортежів – $A(4, 2)$. Отже, шукане число дорівнює $A(5, 3) - A(4, 2) = 5 \cdot 4 \cdot 3 - 4 \cdot 3 = 48$. ◄

Нехай задано множину M, що складається з n елементів, і такі цілі числа

$k_1, k_2, \ldots, k_m$, що $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$ і $k_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Скільки існує розбиттів $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ множини M (див. п. 2.7) таких, що $|A_i| = k_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$? Позначимо шукане число через $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$.

Усі зазначені розбиття множини M на m класів можна дістати таким чином: візьмемо довільну k_1-елементну підмножину множини M (це можна зробити $C(n, k_1)$ способами); серед $n - k_1$ елементів, що залишилися, візьмемо k_2-елементну підмножину (це можна зробити $C(n - k_1, k_2)$ способами) і т. д. Загальна кількість способів вибору різних множин $A_1, A_2, \ldots, A_m$ за правилом множення становить

$$C(n,k_1)\cdot C(n-k_1,k_2)\cdot C(n-k_1-k_2,k_3)\cdot\ldots\cdot C(n-k_1-k_2-\ldots-k_{m-1}, k_m) =$$

$$= \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!}\cdot\frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!}\cdot\frac{(n-k_1-k_2)!}{k_3!(n-k_1-k_2-k_3)!}\cdot\ldots\cdot$$

$$\frac{(n-k_1-k_2-\ldots-k_{m-1})!}{k_m!(n-k_1-k_2-\ldots-k_m)!} = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}.$$

(Нагадаємо, що $0! = 1$.) Отже,

$$C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}. \tag{3.4}$$

Кількість різних перестановок, які можна утворити з n елементів, серед яких є k_1 елементів першого типу, k_2 елементів другого типу і т. д., k_m елементів m-го типу, дорівнює

$$C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m).$$

Візьмемо перестановку W – довільну із зазначених перестановок – і замінимо в ній усі k_1 однакових елементів першого типу різними елементами. Тоді, виконуючи $k_1!$ перестановок нововведених елементів, одержимо $k_1!$ відповідних перестановок з n елементів. Потім замінимо в перестановці W усі k_2 елементів другого типу різними елементами. Переставляючи ці елементи, одержимо $k_2!$ відповідних перестановок і т. д. Отже, за допомогою описаної процедури з кожної перестановки W можна утворити $k_1!k_2! \ldots k_m!$ різних перестановок довжиною n. Зробивши так для всіх зазначених перестановок, дістанемо всі $n!$ можливих перестановок з n елементів. Якщо позначимо шукану кількість через L, то з наведених міркувань одержимо $L \cdot k_1!k_2! \ldots k_m! = n!$

Отже, $L = \dfrac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}$, тобто $L = C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$.

Приклад 3.6.

1. Скільки різних слів можна утворити, переставляючи літери слова *математика*?

Маємо 10 елементів – *м*, *а*, *т*, *е*, *м*, *а*, *т*, *и*, *к*, *а*, серед яких є два елементи *м* (першого типу), три елементи *а* (другого типу), два елементи *т* (третього типу) та по одному елементу інших типів – *е*, *и* та *к*. За доведеною теоремою з цих елементів можна утворити

$$C_{10}(2, 3, 2, 1, 1, 1) = \frac{10!}{2!3!2!1!1!1!} = 151200$$

перестановок (або слів).

2. Нехай дано n символів a, m символів b і k символів c. Визначити кількість різних слів,

(а) які можна скласти зі всіх цих символів;

(б) які складаються зі всіх цих символів і у яких жодні два символи c не стоять поруч.

(а) $(n + m + k)!/(n!m!k!)$.

(б) Розглянемо довільне слово w, утворене зі всіх символів a та b. Кількість таких слів $(n + m)!/(n!m!)$, а довжина кожного з них – $m + n$. У слові w існує $n + m + 1$ позицій, на які можна записувати по одному символу c, щоб вони не опинились поруч. Це можна зробити $C(n + m + 1, k)$ способами. Отже, шукана кількість – $C(n + m + 1, k)(n + m)!/(n!m!)$. ◄

Завдання для самостійної роботи

1. Скількома способами можна розподілити k екзаменаційних білетів між n студентами?

2. Скількома способами з 6 інженерів і 14 робітників можна створити бригаду, яка складалася б із 2 інженерів і 5 робітників?

3. Визначити, скількома способами можна вибрати з натуральних чисел від 1 до 100 три натуральні числа так, щоб їх сума:

(а) була непарною; (б) ділилася на три.

4. Скількома способами можна вибрати з n чоловік групу людей для роботи, якщо група має складатися не менше ніж із p чоловік?

5. Скільки є перестановок цифр 0, 1, 2, …, 9, у яких цифра 2 займає друге місце, а цифра 5 – п'яте або шосте?

6. Скількома способами можна посадити за круглий стіл n чоловіків і m жінок так, щоб жодні дві жінки не сиділи поруч?

7. Скількома способами можна роздати 28 кісток доміно чотирьом гравцям так, щоб кожний одержав 7 кісток?

8. Нехай дано n символів a, m символів b. Визначити кількість різних слів,

(а) які можна скласти зі всіх цих символів;

(б) які складаються зі всіх цих символів і у яких жодні два символи b не стоять поруч.

9. Скільки різних слів можна утворити, переставляючи літери в слові?

(а) комбінаторика; (б) філологія;

(в) мінімум; (г) абракадабра?

10. Скількома способами можна переставити літери слова *кавоварка* так, щоб голосні та приголосні чергувалися? Розв'язати ту саму задачу для слова *палеонтолог*.

11. Визначити, скількома способами можна переставити літери наведеного слова так, щоб приголосні йшли за абеткою:

(а) абракадабра; (б) монолог; (в) амальгама.

12. Скільки слів довжиною 5 можна утворити з літер *a*, *b*, *c*, якщо:

(а) кожна із літер зустрічається у слові без обмежень;

(б) літеру *a* можна використати в слові лише один раз;

(в) літеру *a* можна використати в слові не більше двох разів?

13. У скількох перестановках літер *a*, *a*, *a*, *a*, *b*, *b*, *b*, *c*, *c* не зустрічається жодне з підслів *aaaa*, *bbb*, *cc*?

14. У скількох перестановках літер *a*, *a*, *b*, *b*, *c*, *c* жодна літера не збігається з літерою, що стоїть на такому самому місці у слові *aabbcc*?

3.3. Біном Ньютона та поліномна формула

Має місце рівність

$(a + b)^n = C(n, 0)a^n + C(n, 1)a^{n-1}b + C(n, 2)a^{n-2}b^2 + \ldots + C(n, n)b^n$

або

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)a^{n-k}d^k. \quad (3.5)$$

Щоб переконатись у справедливості цієї рівності, для будь-яких чисел *a*, *b* і *n* розглянемо добуток

$$(a + b)(a + b)(a + b)\ldots(a + b) \text{ (}n\text{ множників).} \quad (3.6)$$

Розкриваючи дужки, отримаємо суму двочленів вигляду a^kb^{n-k}. Причому двочлен a^kb^{n-k} дістанемо тоді й тільки тоді, коли із *k* співмножників у добутку (3.6) оберемо доданок *a*, а з решти $n - k$ множників – доданок *b*. Цей вибір можна здійснити $C(n, k)$ способами. Отже, двочлен a^kb^{n-k} входить до розкладання виразу (3.6) $C(n, k)$ разів, що й доводить справедливість формули (3.5).

Формулу (3.5) називають **біномом Ньютона**, відповідне твердження – **біномною теоремою**, а числа $C(n, k)$ – **біномними коефіцієнтами.**

Приклад 3.7.

1. Знайти розкладання бінома $(1 - x^3)^5$.

$$1 - 5x^3 + 10x^6 - 10x^9 + + 5x^{12} - x^{15}.$$

2. Знайти коефіцієнти при x^3 та x^5 у многочлені

$$(1 + x)^3 + (1 + x)^4 + (1 + x)^5 + \ldots + (1 + x)^{15}.$$

Коефіцієнт при x^3 дорівнює $C(3, 3) + C(4, 3) + ... + C(15, 3)$, а при x^5 – $C(5, 5) + C(6, 5) + ... + C(15, 5)$.

3. Обмежившись двома членами е розкладанні бінома, наближено обчислити $(0{,}997)^8$.

$$(0{,}997)^8 = (1 - 0{,}003)^8 = 1 - 8\cdot 0{,}003 = 0{,}976. \blacktriangleleft$$

Наведемо деякі цікаві й важливі співвідношення для біномних коефіцієнтів, які називають **біномними тотожностями**.

1) $C(n, k) = C(n, n - k)$.

2) $C(n, k + 1) = C(n, k) + C(n, k - 1)$.

3) $C(n, 0) + C(n, 1) + C(n, 2) + \ldots + C(n, n - 1) + C(n, n) = 2^n$.

4) $C(n, 0) - C(n, 1) + C(n, 2) - \ldots + (-1)^n C(n, n) = 0$. (3.7)

5) $C(n, 0) + C(n, 2) + C(n, 4) + \ldots + C(n, k) = 2^{n-1}$, де $k = 2[n/2]$.

6) $C(n, 1) + C(n, 3) + C(n, 5) + \ldots + C(n, m) = 2^{n-1}$, де $m = 2[(n - 1)/2] + 1$.

У справедливості тотожностей 1) і 2) легко переконатися, застосовуючи (3.3).

Тотожність 3) дістанемо, якщо в біномі Ньютона (3.5) покладемо $a = b = 1$. Вона випливає також із того, що $C(n, k)$ – це кількість k-елементних підмножин множини з n елементів, тому сума в лівій частині тотожності 3) дорівнює кількості всіх підмножин множини з n елементів. За теоремою 1.1 ця кількість дорівнює 2^n.

Якщо в біномі Ньютона покласти $a = 1$ і $b = -1$, то дістанемо тотожність 4). Тотожності 5) і 6) можна отримати за допомогою відповідно додавання й віднімання тотожностей 3) та 4).

Тотожність 2) дає змогу обчислювати біномні коефіцієнти для $n + 1$, виходячи з біномних коефіцієнтів для n. Цю процедуру часто виконують за допомогою трикутної таблиці, яку називають **трикутником Паскаля**:

1	$n = 0$
1 1	$n = 1$
1 2 1	$n = 2$
1 3 3 1	$n = 3$
1 4 6 4 1	$n = 4$
1 5 10 10 5 1	$n = 5$
………………	……

У n-му рядку трикутника Паскаля стоять біномні коефіцієнти розкладу $(a + b)^n$, причому кожний коефіцієнт (окрім крайніх двох, які дорівнюють 1) дорівнює сумі двох відповідних коефіцієнтів з попереднього рядка.

Приклад 3.8.

1. Знайти n, коли відомо, що:

(а) у розкладанні $(1 + x)^n$ коефіцієнти при x^4 та x^{10} однакові;

(б) коефіцієнти п'ятого, шостого й сьомого членів розкладання бінома $(1 + x)^n$ утворюють арифметичну прогресію.

(а) Маємо $C(n, 4) = C(n, 10)$. Звідси, скориставшись тотожністю 1 з (3.7), дістанемо $n = 14$.

(б) Розв'язавши рівняння $C(n, 5) - C(n, 4) = C(n, 6) - C(n, 5)$ (див. (3.3)), отримаємо $n = 7$ або $n = 14$.

2. Розв'язати рівняння

$$C(k + 3, k + 1) = C(k + 1, k - 1) + C(k, k - 2) + C(k + 1, k)$$

відносно натурального k.

Скориставшись (3.3), отримаємо рівносильне рівняння

$$(k + 3)(k + 2) = (k + 1)k + k(k - 1) + 2(k + 1).$$

Коренями останнього будуть числа 4 та –1. Отже, $k = 4$.

3. Довести тотожність $C(n, 1) + 2C(n, 2) +\ldots+ nC(n, n) = n2^{n-1}$.

Використавши рівність $kC(n, k) = nC(n - 1, k - 1)$, яку можна отримати із (3.3), перетворимо ліву частину до вигляду

$$nC(n - 1, 0) + nC(n - 1, 1) + \ldots + nC(n - 1, n - 1)$$

і застосуємо тотожність 3 із (3.7). ◄

Поліномна формула:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)^n = \sum_{\substack{k_1, k_2, \ldots, k_m \geq 0 \\ k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n}} C_n(k_1, k_1, \ldots, k_m,) a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m} \qquad (3.8)$$

Перемножимо $(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)$ n разів:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)(a_1 + a_2 + \ldots + a_m) \ldots (a_1 + a_2 + \ldots + a_m). \qquad (3.9)$$

Одержимо доданки вигляду

$$a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m}$$

такі, що $k_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$ і $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$.

Кількість членів типу $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m}$ дорівнює кількості варіантів вибору k_1 множників із (3.9) першого типу (із цих множників до одночлену ввійде k_1 множників a_1), відтак вибору із решти $n - k_1$ множників із (3.9) k_2 множників другого типу (із цих множників до одночлену увійде k_2 множників a_2) і т. д.

Отже, шукана кількість дорівнює кількості розбиттів n множників у добутку (3.9) на m класів, кількість елементів у яких дорівнює відповідно $k_1, k_2, \ldots, k_m$. За (3.4) ця кількість становить

$$C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}.$$

Для $m = 2$ тотожність (3.8) перетворюється на біном Ньютона (3.5).

Приклад 3.9.

1. Користуючись поліномною формулою, обчислити $(x + y + z)^3$.

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3xy^2 + 3y^2z + 3xz^2 + 3yz^2 + 6xyz.$$

2. Знайти коефіцієнт при x^8 у розкладанні полінома

$$(1 + x^2 - x^3)^9.$$

Довільний член розкладання полінома має вигляд

$$C_9(k_1, k_2, k_3)1^{k_1}(x^2)^{k_2}(-x^3)^{k_3} = C_9(k_1, k_2, k_3)(-1)^{k_3}x^{2k_2+3k_3},$$

де k_1, k_2, k_3 – невід'ємні цілі числа, а $k_1 + k_2 + k_3 = 9$. Потрібно знайти ті з них, для яких виконується $2k_2 + 3k_3 = 8$. Ці умови задовольняють тільки дві трійки чисел: $k_1 = 5, k_2 = 4, k_3 = 0$ і $k_1 = 6, k_2 = 1, k_3 = 2$. Отже, шуканий коефіцієнт

$$C_9(5, 4, 0)(-1)^0 + C_9(6, 1, 2)(-1)^2 = C_9(5, 4, 0) + C_9(6, 1, 2) = 378. \blacktriangleleft$$

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти розкладання бінома:

(а) $(2x - 4)^4$; (б) $(a/2 + 2b)^5$; (в) $(2 - x^4)^5$; (г) $(a + 2b)^7$.

2. Знайти коефіцієнти при x^3 та x^5 у многочлені

$$x(2 - 3x)^5 + x^3(1 + 2x^2)^7 - x^2(5 + 3x^3)^4.$$

3. Знайти коефіцієнт при x^m у розкладанні

$$(1 + x)^k + (1 + x)^{k+1} + \ldots + (1 + x)^n.$$

Розглянути випадки $m < k$ і $m \geq k$.

4. Обмежившись двома членами у розкладанні бінома, наближено обчислити $(2{,}003)^{10}$.

5. Знайти n, коли відомо, що:

(а) у розкладанні $(1 + x)^n$ коефіцієнти при x^5 та x^{12} однакові;

(б) восьмий член розкладання $(2x + 3)^n$ має найбільший коефіцієнт.

6. Розв'язати рівняння відносно натурального k:

(а) $C(k, k - 3) + C(k, k - 2) = 15(k - 1)$;

(б) $C(k + 1, k - 1) + C(k, k - 2) = 9k + 10$;

(в) $C(k, 3) + C(k, 4) = 11C(k + 1, 2)$.

7. Розв'язати систему рівнянь відносно натуральних n і m:

(а) $C(n, m) = C(n, m + 2)$, $C(n, 2) = 153$;
(б) $C(n + 1, m - 1) : C(n + 1, m) = 3 : 5$;
(в) $C(n + 1, m) = C(n + 1, m + 1)$.

8. Довести тотожність:
(а) $C(n, 1) + 6C(n, 2) + 6C(n, 3) = n^3$;
(б) $1 + 7C(n, 1) + 12C(n, 2) + 6C(n, 3) = (n + 1)^3$;
(в) $C(n, 1) + 14C(n, 2) + 36C(n, 3) + 24C(n, 4) = n^4$;
(г) $C(n, 0) + 2C(n, 1) + 2^2C(n, 2) + \ldots + 2^nC(n, n) = 3^n$;
(д) $C(n, 1) - 2C(n, 2) + \ldots + (-1)^{n-1}nC(n, n) = 0$.

9. Користуючись поліномною теоремою, обчислити

$$(x + 2y + 3z)^3.$$

10. Знайти коефіцієнт при x^k у розкладі полінома:
(а) $(1 + x^2 + x^3)^7$, $k = 11$;
(б) $(1 + 2x^2 - 3x^4)^{10}$, $k = 8$.

3.4. Урнова модель. Сполуки із повтореннями

Розглянемо одну важливу й популярну в комбінаториці модель, яку називатимемо **урновою моделлю**.

Нехай є k урн і n однакових предметів (наприклад куль). Підрахуємо, скількома способами можна розподілити ці предмети по урнах. Для цього розташуємо урни послідовно та занумеруємо їх від 1 до k. Тоді кожному розподілу предметів в урнах можна поставити у відповідність кортеж $(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ довжиною k, i-та координата якого дорівнює кількості предметів, що потрапили в урну з номером i. Ця відповідність є, безумовно, взаємно однозначною. Тому шукана кількість розподілів збігається із кількістю таких кортежів. Для підрахунку останньої виконаємо перетворення (теж взаємно однозначне) кортежів. Кортеж $(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ замінимо на кортеж із нулів і одиниць за таким правилом. Спочатку запишемо послідовність, що складається з m_1 одиниць, за нею запишемо нуль, далі – послідовність із m_2 одиниць, знову нуль і т. д. Закінчується кортеж послідовністю з m_k одиниць. Кожен отриманий таким способом кортеж складатиметься з n одиниць (оскільки $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$) і $k - 1$ нулів, і множина цих кортежів взаємно однозначно відповідатиме множині розподілів n предметів по k урнах.

Наприклад, для $n = 7$ і $k = 3$ розподілу (5, 1, 1) (5 предметів у першій урні та по одному предмету в другій і третій) відповідає кортеж

$$(1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1),$$

а розподілу (0, 4, 3) – кортеж

$$(0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1).$$

У свою чергу, кортеж

$$(1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1)$$

– це запис розподілу, за яким у першій урні міститься 3, у другій – 0 і в третій – 4 предмети.

Кількість кортежів, що складаються з n одиниць і $k - 1$ нулів, обчислити неважко. Вона дорівнює кількості способів обрання n позицій серед $n + k - 1$ координат цих кортежів, на які буде записано одиниці (на всі інші автоматично записуються нулі). Отже, шукана кількість дорівнює $C(n + k - 1, n)$.

До запропонованої моделі зводяться й задачі, у яких накладено певні умови на розподіли n однакових предметів по k урнах. Наприклад, якщо потрібно, щоб у результаті розподілу кожна урна містила не менше ніж t предметів ($t \geq 1$), то спочатку слід у кожну урну покласти по t предметів, потім $n - tk$ предметів, що залишились, розподіляти так як раніше. У цьому разі кількість різних розподілів

$$C(n - tk + k - 1, n - tk) \text{ або } C(n - tk + k - 1, k - 1).$$

Зокрема, якщо накладено умову, щоб при кожному розподілі жодна з урн не залишилася порожньою (тобто $t = 1$), то кількість способів дорівнюватиме

$$C(n - 1, n - k) \text{ або } C(n - 1, k - 1).$$

Урнову модель можна також використати для визначення кількості невід'ємних цілих розв'язків рівняння

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n,$$

де k і n – фіксовані натуральні числа. Кожному із розв'язків $(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ цього рівняння поставимо у відповідність певний розподіл n однакових предметів по k урнах, а саме розподіл, за яким у першу урну потрапило t_1 предметів, у другу – t_2 предметів і т. д., в останню – t_k предметів. Отже, шукана кількість розв'язків дорівнюватиме $C(n + k - 1, n)$.

Приклад 3.10.

1. Скількома способами можна розкласти 12 однакових куль по п'яти різних пакетах, якщо жоден пакет не має бути порожнім?

За наведеною вище формулою ця кількість становить

$$C(12 - 1, 5 - 1) = C(11, 4).$$

2. Скільки є способів розміщення 57 пасажирів у 5 вагонах поїзда, якщо рівно 2 вагони виявляться порожніми?

Кількість варіантів обрати 2 вагони, що будуть порожніми, дорівнює $C(5, 2)$. А способів розміщення 57 пасажирів у 3 вагонах поїзда так, щоб серед них не було порожніх, дорівнює $C(56, 2)$. Отже, за правилом множення шукана кількість дорівнює $C(5, 2)\cdot C(56, 2)$.

3. Скількома способами можна розкласти 15 однакових куль по 5 урнах так, щоб виявилося не більше двох порожніх урн?

Множину варіантів розподілу слід розбити на ситуації, коли порожніми є дві, одна або жодна з урн.

$$C(5, 2)C(14, 2) + C(5, 1)C(14, 3) + C(5, 0)C(14, 4) = 3731.$$

Зауважимо, що $C(5, 0) = 1$.

4. Довести, що кількість розв'язків рівняння

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n$$

у натуральних числах дорівнює $C(n - 1, m - 1)$.

Ця кількість збігається із кількістю розподілів n предметів по m урнах за умови, що жодна з урн не залишається порожньою (тут x_i – кількість предметів, що потрапили в урну з номером i).

5. Скількома способами 4 червоні, 4 білі та 4 сині кулі можна розкласти в 6 різних пакетів (деякі пакети можуть бути порожніми)?

Кількість способів розподілити 4 кулі одного кольору по 6 пакетах дорівнює $C(9, 5)$, тому за правилом множення шукана кількість – $(C(9, 5))^3$. ◄

Нехай задано n груп (сортів) елементів, кожна з яких складається з однакових між собою елементів. **Сполукою** (або **комбінацією**) **з** n **по** k **елементів із повтореннями** називають невпорядкований набір, що містить k елементів, причому кожний із цих елементів належить до однієї із заданих n груп.

Наприклад, якщо $n = 2$ і перша група елементів складається з літер a, а друга – з літер b, то з елементів цих двох груп можна утворити такі чотири сполуки по 3 елементи з повтореннями: *aaa*, *aab*, *abb*, *bbb* (підкреслимо, що у сполуках порядок розташування елементів неістотний).

Кількість сполук з n по k елементів з повтореннями позначатимемо $\underline{C}(n, k)$. Задачу визначення цієї кількості можна також звести до урнової моделі, а саме до задачі розподілу k однакових предметів по n урнах. Зв'язок між сполуками й розподілами встановимо таким чином. Кожному розподілу $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ предметів по урнах поставимо у відповідність сполуку з повтореннями, що містить m_1 елементів першої групи, m_2 предметів другої групи і т. д., m_n елементів n-ї групи. Отже,

$$\underline{C}(n, k) = C(n + k - 1, k) = C(n + k - 1, n - 1). \qquad (3.10)$$

Аналогічно задачам розподілу з накладеними на них додатковими умовами можна розв'язувати й задачі обчислення кількостей сполук із повтореннями, для яких мають виконуватися певні умови. Наприклад, такою умовою може бути вимога, щоб у кожну зі сполук гарантовано входило принаймні по одному елементу з t фіксованих груп тощо.

Приклад 3.11.

1. Скількома способами можна вибрати 5 тістечок (однакових або різних) у кондитерській, де є 11 різних сортів тістечок?

За (3.10) ця кількість становить

$$C(11 + 5 - 1, 11 - 1) = C(15, 10).$$

2. Скількома способами можна вибрати 7 тістечок у кондитерській, де є 12 різних сортів тістечок за умови, що серед кожних семи обраних буде щонайменше 2 тістечка певного фіксованого сорту?

Отримавши 2 тістечка певного сорту, нам залишається вибрати ще 5, що можна зробити $C(18, 11)$ способами. Остання кількість і буде шуканою. ◄

Завдання для самостійної роботи

1. Скількома способами можна розкласти 17 однакових куль по 6 різних пакетах, якщо жоден пакет не має бути порожнім?

2. Скільки є способів розміщення k пасажирів у n вагонах поїзда, за яких рівно m вагонів виявиться порожніми?

3. Скількома способами можна розкласти:

(a) 19 однакових куль по 7 урнах так, щоб виявилося не більше двох порожніх урн;

(б) 20 однакових куль по 5 урнах так, щоб у кожній урні виявилося не менше двох куль?

4. Довести, що кількість розв'язків рівняння

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n$$

у невід'ємних цілих числах дорівнює кількості розв'язків рівняння

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n + m$$

у натуральних числах.

5. Скількома способами 5 червоних, 7 білих і 9 синіх куль можна розкласти в 6 різних пакетів (деякі пакети можуть бути порожніми)?

6. Скількома способами можна розмістити n білих, m червоних і k синіх куль по p урнах? Скільки є таких розміщень, де в першій урні міститься l_1 білих, l_2 червоних і l_3 синіх куль?

7. У $2n$ урнах розподілено n білих і n чорних однакових куль, причому в кожній урні є принаймні одна куля. Скількома різними способами можна це зробити?

8. Скількома способами можна укласти букет з 11 квіток, якщо квітковий магазин пропонує 25 різних сортів квітів? Скільки існує таких способів, щоб у кожному букеті було обов'язково щонайменше три троянди?

9. Скількома способами можна вибрати k тістечок у кондитерській, де є n різних сортів тістечок, так, щоб серед обраних k тістечок обов'язково були тістечка кожного із n сортів ($k \geq n$)?

10. Скількома способами можна вибрати 5 літер з набору?

(а) а, а, а, а, а, б, б, б, б, б;

(б) а, а, а, а, а, б, б, б, б, б, в, в, в, в, в;

(в) а, а, а, а, а, б, б, в, в, в.

Розділ 4
ТЕОРІЯ ГРАФІВ

Роком виникнення теорії графів вважають 1736, коли Леонард Ейлер опублікував розв'язання задачі про кенігсберзькі мости, а також знайшов загальний критерій існування ейлерового циклу в графі (див. п. 4.10). Картинка у вигляді набору точок на площині та ліній, проведених між деякими з них, стала зручною й наочною формою зображення найрізноманітніших об'єктів, процесів і явищ (див. п. 4.12). Нині теорія графів – важливий розділ дискретної математики.

4.1. Поняття графа. Способи задання графів

Нехай V – непорожня скінченна множина, а $V^{(2)}$ – множина всіх двохелементних підмножин (невпорядкованих пар різних елементів) множини V.

Графом (**неорієнтованим графом**) G називають пару множин (V, E), де E – довільна підмножина множини $V^{(2)}$ ($E \subseteq V^{(2)}$); позначають $G = (V, E)$.

Елементи множини V називають **вершинами** графа G, а елементи множини E – його **ребрами**. Відповідно V називають **множиною вершин**, а E – **множиною ребер** графа G.

Традиційно ребра $\{v,w\}$ записують за допомогою круглих дужок (v, w) (іноді просто vw).

Граф, що складається з однієї вершини, називають **тривіальним**, а граф $G = (V, \varnothing)$ – **порожнім**.

Нехай задано граф $G = (V, E)$. Якщо $(v, w) \in E$, то кажуть, що **вершини** v і w **суміжні**, інакше вершини v і w **несуміжні**. Якщо $e = (v, w)$ – ребро графа, то вершини v і w називають **кінцями** ребра e. У цьому разі кажуть також, що ребро e **з'єднує** вершини v і w. Вершину v і ребро e називають **інцидентними**, якщо v – кінець ребра e. Два ребра називають **суміжними**, якщо вони мають спільну вершину.

Існує кілька способів задання графів.

Один із них – задати кожну із множин V та E за допомогою переліку їхніх елементів.

Приклад 4.1. $G_1 = (V_1, E_1)$, де $V_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ і $E_1 = \{(v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_4)\}$ – граф із чотирма вершинами й п'ятьма ребрами, а $G_2 = (V_2, E_2)$, де

$V_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ і

$E_2 = \{(v_1, v_2), (v_2, v_4), (v_1, v_5), (v_3, v_2), (v_3, v_5), (v_4, v_1), (v_5, v_4)\}$ – граф із п'ятьма вершинами й сімома ребрами. ◄

Граф $G = (V, E)$ зручно зображати за допомогою рисунка на площині, який називають **діаграмою** графа G. Вершинам графа G ставлять у бієктивну відповідність точки площини. Точки, що відповідають вершинам v і w, з'єднують лінією (відрізком або кривою) тоді й тільки тоді, коли v і w – суміжні вершини. Зрозуміло, що діаграма графа змінює вигляд залежно від вибору відповідних точок на площині.

Приклад 4.2. На рис. 4.1 подано діаграми графів G_1 і G_2 із попереднього прикладу.

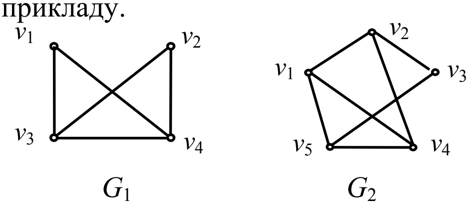


Рис. 4.1 ◄

Графи можна задавати також за допомогою матриць.

Занумеруємо всі вершини графа G натуральними числами від 1 до n. **Матрицею суміжності** A графа G називають квадратну $n \times n$-матрицю, у якій елемент a_{ij} i-го рядка та j-го стовпця дорівнює 1, якщо вершини v_i та v_j з номерами i та j суміжні, і дорівнює 0 в іншому випадку.

Приклад 4.3. Для графів G_1 і G_2 маємо відповідно

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{та} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \blacktriangleleft$$

Очевидно, що матриці суміжності графів симетричні.

Занумеруємо всі вершини графа G числами від 1 до n, а всі його ребра – числами від 1 до m. **Матрицею інцидентності** B

графа G називають $n \times m$-матрицю, у якій елемент b_{ij} i-го рядка та j-го стовпця дорівнює 1, якщо вершина v_i з номером i інцидентна ребру e_j з номером j, і дорівнює 0 в іншому випадку.

Приклад 4.4. Для графів G_1 і G_2 маємо такі матриці інцидентності (ребра графів занумеровано в тому порядку, у якому їх виписано в прикладі 4.1):

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ і } B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \blacktriangleleft$$

Нарешті, ще одним способом задання графів є **списки суміжності.** Кожній вершині графа відповідає свій список. До списку, що відповідає вершині v, послідовно записують усі суміжні їй вершини.

Приклад 4.5. Для графів G_1 і G_2 маємо такі списки суміжності:

G_1:	G_2:
v_1: v_3, v_4	v_1: v_2, v_4, v_5
v_2: v_3, v_4	v_2: v_1, v_3, v_4
v_3: v_1, v_2, v_4	v_3: v_2, v_5
v_4: v_1, v_2, v_3	v_4: v_1, v_2, v_5
	v_5: v_1, v_3, v_4 ◄

Вибір і зручність того чи іншого способу задання графів залежить від особливостей розв'язуваної задачі.

Завдання для самостійної роботи

1. Нехай задано граф $G = (V, E)$:

(а) $V = \{1, 2, 3, 4\}$, $E = \{(1, 3), (2, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2)\}$;

(б) $V = \{a, b, c, d, e\}$,
$E = \{(a, d), (b, c), (b, e), (c, e), (d, b), (d, e), (e, a)\}$;

(в) $V = \{A, B, C, D\}$,
$E = \{(A, B), (A, D), (B, C), (B, D), (C, A), (C, D)\}$.

Побудувати діаграму, матриці суміжності та інцидентності, а також списки суміжності для кожного із цих графів.

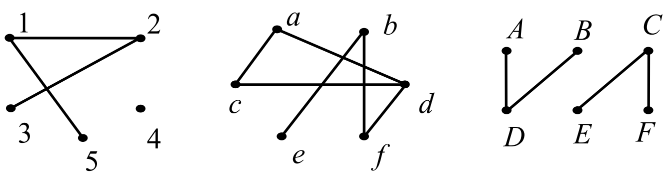
2. Нехай $V = \{a, b, c, d, e\}$. Граф $G = (V, E)$ задано за допомогою матриці суміжності A:

$$(а)\ A=\begin{pmatrix}0&1&1&0&1\\1&0&0&1&1\\1&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\1&1&1&0&0\end{pmatrix};\qquad (б)\ A=\begin{pmatrix}0&1&0&0&1\\1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\\0&0&1&0&1\\1&0&0&1&0\end{pmatrix};$$

$$(в)\ A=\begin{pmatrix}0&0&1&0&1\\0&0&1&0&0\\1&1&0&1&1\\0&0&1&0&1\\1&0&1&1&0\end{pmatrix};\qquad (г)\ A=\begin{pmatrix}0&1&1&0&0\\1&0&1&0&0\\1&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Визначити множину ребер E графа G та побудувати його діаграму, матрицю інцидентності та списки суміжності.

2. Граф G задано його діаграмою:



(а) (б) (в)

Визначити множину вершин V і множину ребер E, матриці суміжності й інцидентності, а також списки суміжності графа G.

4. Нехай задано матрицю суміжності A деякого графа G. Як за допомогою матриці A визначити:

(а) кількість вершин графа G; (б) кількість ребер графа G;

(в) матрицю інцидентності графа G?

4.2. Підграфи. Ізоморфізм графів. Операції для графів

Граф $G_1 = (V_1, E_1)$ називають **підграфом** графа $G = (V, E)$, якщо

$$V_1 \subseteq V \quad \text{та} \quad E_1 \subseteq E.$$

Важливі класи становлять підграфи, які можна отримати в результаті застосування до заданого графа операцій вилучення вершини або вилучення ребра.

Операція вилучення вершини v із графа $G = (V, E)$ полягає у вилученні з множини V елемента v, а з множини E – усіх ребер, інцидентних v.

Операція вилучення ребра e з графа $G = (V, E)$ – це вилучення елемента e з множини E. При цьому всі вершини зберігаються.

Графи $G_1 = (V_1, E_1)$ і $G_2 = (V_2, E_2)$ називають **ізоморфними**, якщо існує таке взаємно однозначне відображення φ множини вершин V_1 на множину вершин V_2, що ребро $(v, w) \in E_1$ тоді й тільки тоді, коли ребро $(\varphi(v), \varphi(w)) \in E_2$.

Відображення φ називають **ізоморфним відображенням**, або **ізоморфізмом**, графа G_1 на граф G_2.

Таким чином, ізоморфні графи відрізняються лише ідентифікаторами (іменами) своїх вершин. Із погляду теорії графів ця відмінність неістотна, тому зазвичай ізоморфні графи ототожнюють і, зображаючи графи у вигляді діаграм, або зовсім не ідентифікують їхні вершини, або нумерують вершини натуральними числами.

Приклад 4.6. Неважко переконатися, що всі графи на рис. 4.2, ізоморфні між собою, а графи на рис. 4.3 – не ізоморфні.

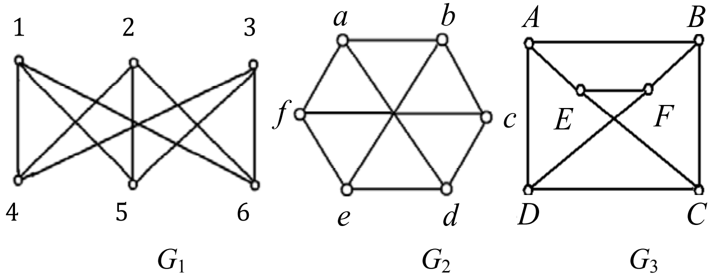


Рис. 4.2

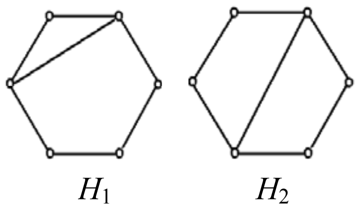


Рис. 4.3 ◄

Наприклад, відображення φ множини вершин

$$V_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$$

графа G_1 на множину вершин

$$V_2 = \{a, b, c, d, e, f\}$$

графа G_2, за яким $\varphi(1) = a$, $\varphi(2) = c$, $\varphi(3) = e$, $\varphi(4) = f$, $\varphi(5) = d$, $\varphi(6) = b$, є ізоморфізмом графа G_1 на граф G_2. Аналогічно можна побудувати ізоморфне відображення графа G_2 на граф G_3.

Відношення ізоморфізму є відношенням еквівалентності на сукупності графів.

Граф $G = (V, E)$ називають **повним**, якщо будь-які дві його вершини суміжні (тобто $E = V^{(2)}$). Повний граф із n вершинами позначають K_n.

Приклад 4.7.

1. Скільки ребер містить повний граф із n вершинами?

Оскільки в повному графі будь-які дві його вершини з'єднані ребром, то кількість його ребер становить $C(n, 2) = n(n - 1)/2$.

2. Чи існує повний граф, у якого кількість ребер дорівнює:

(а) 15; (б) 18; (в) 199…900…0 (k дев'яток і k нулів)?

(а) Кількість ребер повного графа з n вершинами дорівнює $n(n - 1)/2$. Рівняння $n(n - 1)/2 = 15$ має корені 6 і –5. Отже, існує повний граф із 6 вершинами, кількість ребер у якому дорівнює 15.

(б) Рівняння $n(n - 1)/2 = 18$ не має натуральних коренів, тому такий повний граф не існує.

(в) Розглянемо рівняння

$$n(n - 1) = 2\cdot 199\ldots 900\ldots 0 = 200\ldots 0\cdot 199\ldots 9 \text{ (}k\text{ нулів і }k\text{ дев'яток).}$$

Число у правій частині цього рівняння можна подати у вигляді $2\cdot 10^k(2\cdot 10^k - 1)$, тобто $n = 2\cdot 10^k$. Отже, такий повний граф існує й має $2\cdot 10^k$ вершин. ◄

Для графів можна означити операції об'єднання, перетину й доповнення.

Об'єднанням графів $G_1 = (V_1, E_1)$ і $G_2 = (V_2, E_2)$ називають граф $G = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$; позначають $G = G_1 \cup G_2$.

Об'єднання $G = G_1 \cup G_2$ називають **прямою сумою** графів G_1 і G_2, якщо $V_1 \cap V_2 = \varnothing$.

Перетином і **різницею** графів $G_1 = (V, E_1)$ і $G_2 = (V, E_2)$ з однаковими множинами вершин називають відповідно графи $G' = (V, E_1 \cap E_2)$ і $G'' = (V, E_1 \setminus E_2)$; позначають $G' = G_1 \cap G_2$ і $G'' = G_1 \setminus G_2$.

Доповненням графа $G = (V, E)$ називають граф

$$\overline{G} = (V, V^{(2)} \setminus E).$$

Отже, граф $\overline{G}$ має ту саму множину вершин V, що й граф G, а вершини графа $\overline{G}$ суміжні тоді й лише тоді, коли вони несуміжні в G. Для графа G із n вершинами виконується $\overline{G} = K_n \setminus G$.

Графи G_1 і G_2 ізоморфні тоді й тільки тоді, коли ізоморфні їхні доповнення $\overline{G_1}$ і $\overline{G_2}$.

Приклад 4.8. Об'єднання й перетин графів H_1 і H_2 із прикладу 4.6 подано на рис. 4.4, а доповнення графів G_2 і H_2 – на рис. 4.5.

Граф G, ізоморфний своєму доповненню $\overline{G}$, називають **самодоповнювальним**.

Приклад 4.9.

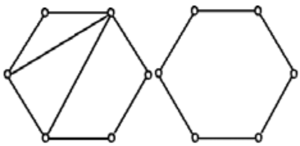
1. Граф $G = (V, E)$, у якому

$$V = \{a, b, c, d\} \text{ і } E = \{(a, b), (b, c), (c, d)\},$$

самодоповнювальний.

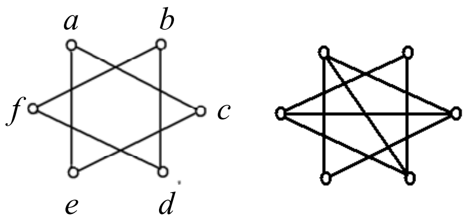
2. Чому дорівнює кількість ребер у графі $\overline{G}$, якщо граф G має n вершин і k ребер?

$n(n - 1)/2 - k$ (див. приклад 4.7(1)).



$H_1 \cup H_2$ $H_1 \cap H_2$

Рис. 4.4



$\overline{G_2}$ $\overline{H_2}$

Рис. 4.5 ◄

3. Визначити, скільки існує попарно неізоморфних графів, які мають 8 вершин і 25 ребер.

Доповнення кожного з таких графів матиме 8 вершин і 3 ребра (див. попередній пункт). Існує тільки 5 попарно неізоморфних графів з такими параметрами. Доповнення кожного із цих п'яти графів задовольняють умову задачі.

4. Довести, що кількість вершин будь-якого само доповнювального графа дорівнює або $4k$, або $4k + 1$, $k \in N$.

Якщо m – кількість ребер самодоповнювального графа $G = (V, E)$ з n вершинами, то $n(n-1)/2 - m = m$, тобто

$$n(n-1) = 4m.$$

Із того, що число $n(n-1)$ кратне 4, випливає, що $n = 4k$ або

$$n = 4k + 1,\ k \in N.\ ◄$$

Завдання для самостійної роботи

1. Накресліть діаграму повного графа з n вершинами K_n для:
(а) $n = 2$; (б) $n = 3$; (в) $n = 4$; (г) $n = 5$.

2. Чи існує повний граф, у якого кількість ребер дорівнює:
(а) 21; (б) 27; (в) 500…0500…0 (у кожній групі k нулів);
(г) $8k^2 + 2k$, $k \in N$?

3. Довести, що для довільного графа G об'єднання $G \cup \overline{G}$ є повним графом.

4. Нехай графи $G_1 = (V, E_1)$ і $G_2 = (V, E_2)$ задано за допомогою матриць суміжності A_1 та A_2, відповідно ($|V| = n$). Визначити матрицю суміжності A для графа:

(а) $G_1 \cup G_2$; (б) $G_1 \cap G_2$; (в) $G_1 \setminus G_2$; (г) $\overline{G_1}$.

5. Довести, що ізоморфне відображення φ графа $G_1 = (V_1, E_1)$ на граф $G_2 = (V_2, E_2)$ установлює певне взаємно однозначне відображення ψ множини ребер E_1 на множину ребер E_2.

6. Довести, що ізоморфні графи мають однакову кількість вершин та однакову кількість ребер.

7. Довести, що графи ізоморфні тоді й тільки тоді, коли ізоморфні їхні доповнення.

8. Визначити, скільки існує попарно неізоморфних графів, які мають:
(а) 8 вершин і 26 ребер;
(б) 5 вершин і 78 ребер;
(в) 6 вершин і 12 ребер.

9. Знайти нетривіальний самодоповнювальний граф із найменшою кількістю вершин.

10. Довести, що довільний самодоповнювальний граф містить або $4k^2 - k$, або $4k^2 + k$ ребер, $k \in N$.

4.3. Графи та бінарні відношення

Між множиною всіх графів із множиною вершин V і множиною всіх антирефлексивних симетричних бінарних відношень на V існує взаємно однозначна відповідність: графу $G = (V, E)$ відповідає таке відношення R на V, що $(v, w) \in R$ тоді й тільки тоді, коли $(v, w) \in E$, $v, w \in V$. Зокрема, порожньому графу $G = (V, \varnothing)$ відповідає порожнє відношення на V ($R = \varnothing$), а повному графу – відношення $(V \times V) \setminus i_V$, де i_V – діагональне (тотожне) відношення: $i_V = \{(v, v) \mid v \in V\}$.

Очевидно, що операціям об'єднання, перетину й доповнення графів відповідають аналогічні операції для відношень. Якщо графам G_1 і G_2 відповідають відношення R_1 і R_2, то графам $G_1 \cup G_2$, $G_1 \cap G_2$ і $\overline{G_1}$ – відношення $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$ і $\overline{R_1} \setminus i_V = (V \times V) \setminus (R_1 \cup i_V)$.

Якщо R – транзитивне відношення, то у відповідному графі G для кожної пари ребер $(v, w), (w, u) \in E$ існує замикальне ребро $(v, u) \in E$.

4.4. Степені вершин графа

Степенем $\delta(v)$ **вершини** v називають кількість інцидентних їй ребер. Вершину степеня 0 називають **ізольованою**, а вершину степеня 1 – **кінцевою** (або **висячою**).

Кубічним називають граф, степені всіх вершин якого дорівнюють 3.

У будь-якому графі $G = (V, E)$ виконується рівність

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E|. \tag{4.1}$$

Справедливість цього твердження випливає з того, що кожне ребро графа інцидентне двом вершинам, тому воно вносить у суму степенів усіх вершин рівно дві одиниці.

Приклад 4.10.

1. Як визначити степінь певної вершини графа G за його матрицею суміжності A?

Степінь вершини v із номером i дорівнює сумі елементів i-го рядка матриці A, оскільки ця сума визначає кількість вершин, суміжних із вершиною v.

2. Нехай A – матриця суміжності графа G із n вершинами. Довести, що i-й діагональний елемент матриці A^2 дорівнює степеню $\delta(v_i)$ i-ї вершини графа G, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Елемент $a_{ii}^{(2)}$ матриці A^2

$$a_{ii}^{(2)} = \sum_k a_{ik} a_{ki} = \sum_k a_{ik}^2 = \sum_k a_{ik},$$

оскільки $a_{ik} = a_{ki}$ і $a_{ij} \in \{0, 1\}$.

Отже, $a_{ii}^{(2)} = \delta(v_i)$ (див. попередню задачу).

3. Довести, що в будь-якому графі з n вершинами ($n \geq 2$) завжди знайдуться принаймні дві вершини з однаковими степенями.

Припустимо, що існує граф G із n вершинами, усі степені вершин якого попарно різні. Ці степені можуть дорівнювати 0, 1, 2, ..., $n - 1$. Однак якщо в графі G є вершина степеня 0 (ізольована), то в ньому не може бути вершини степеня $n - 1$. Отже, степені принаймні двох вершин збігаються.

4. Визначити, чи існує граф із шістьма вершинами, степені яких дорівнюють:

(а) 1,1,2,3,4,4; (б) 2,3,3,4,4,4; (в) 0,0,2,3,3,4.

(а) Такий граф не існує, тому що сума степенів усіх його вершин непарна, що суперечить рівності (4.1).

(б) Такий граф існує, його матриця суміжності

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(в) Граф із такими степенями вершин не існує. За умовою він має дві ізольовані вершини, отже, максимальне значення степеня для будь-якої з решти чотирьох вершин – 3, тобто в такому графі не може бути вершини зі степенем 4.

5. Довести, що доповнення жодного кубічного графа не є кубічним графом.

Припустимо, що такий кубічний граф G із n вершинами існує. Тоді із того, що степені всіх вершин графа G і його доповнення дорівнюють 3, випливає, що $(n – 1) – 3 = 3$, тобто $n = 7$. Звідси

$$\sum_i \delta(v_i) = 2 \cdot 7 = 21,$$

що суперечить рівності (4.1). ◄

Завдання для самостійної роботи

1. Чому дорівнює степінь кожної вершини у повному графі з n вершинами?

2. Як визначити степінь певної вершини графа G за його матрицею інцидентності B?

3. Скільки вершин має бути в кубічному графі? Скільки ребер у такому графі?

4. У графі з n вершинами тільки дві вершини мають однакові степені. Чи можуть обидві ці вершини мати степінь 0 або степінь $n – 1$?

5. У футбольному турнірі беруть участь 15 команд. Довести, що в будь-який момент знайдеться команда, яка зіграла парну кількість матчів.

6. Довести, що в ізоморфних графів кількість вершин степеня k однакова для довільного k.

7. Визначити, чи існує граф із шістьма вершинами, степені яких дорівнюють:

(а) 1, 1, 2, 3, 4, 5; (б) 1, 1, 3, 3, 3, 5;
(в) 1, 2, 3, 3, 4, 5; (г) 0, 2, 3, 3, 4, 4.

4.5. Шлях у графі. Зв'язність графів

Маршрутом (або **шляхом**) у графі $G = (V, E)$ називають послідовність

$$v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_k, v_{k+1} \tag{4.2}$$

вершин v_i і ребер e_i таку, що кожні два сусідні ребра в ній мають спільну вершину, отже, $e_i = (v_i, v_{i+1})$, $i = 1, 2, \dots, k$. Вершину v_1 називають **початком**, а вершину v_{k+1} – **кінцем** шляху. Усі інші вершини цього шляху називають **проміжними**, або **внутрішніми**.

Найчастіше маршрут записують лише як послідовність вершин, що входять до його складу, тобто замість послідовності (4.2) пишуть $v_1, v_2, \dots , v_{k+1}$.

Кількість k ребер у маршруті називають його **довжиною**. Кажуть, що цей маршрут **з'єднує** вершини v_1 і v_{k+1}, або **веде** із вершини v_1 до вершини v_{k+1}.

Маршрутом довжиною 0 вважають послідовність, що складається з єдиної вершини.

Маршрут, у якому всі ребра попарно різні, називають **ланцюгом**, а той, у якому всі вершини попарно різні, – **простим ланцюгом.**

Маршрут (4.2) називають **замкненим** (або **циклічним**), якщо $v_1 = v_{k+1}$. Замкнений ланцюг називають **циклом**, а замкнений простий ланцюг – **простим циклом**.

Граф, усі ребра якого утворюють простий цикл довжиною n, позначають C_n. Простий цикл довжиною 3 називають **трикутником**.

Граф називають **зв'язним**, якщо будь-яку пару його вершин можна з'єднати деяким маршрутом.

Компонентою зв'язності (або **зв'язною компонентою**) графа G називають його зв'язний підграф такий, що не є власним підграфом жодного іншого зв'язного підграфа графа G.

Відстанню між вершинами v і w зв'язного графа (позначають $d(v, w)$) називають довжину найкоротшого простого ланцюга, що з'єднує вершини v і w.

Оскільки кожна вершина графа $G = (V, E)$ з'єднана сама із собою маршрутом довжиною 0, то для всіх $v \in V$ виконується рівність $d(v, v) = 0$.

Ексцентриситетом $e(v)$ довільної вершини v зв'язного графа $G = (V, E)$ називають найбільшу з відстаней між вершиною v і всіма іншими вершинами графа G, тобто $e(v) = \max\limits_{w \in V} \{d(v, w)\}$.

Діаметром зв'язного графа G (позначають $D(G)$) називають максимальний зі всіх ексцентриситетів вершин графа G. Мінімальний зі всіх ексцентриситетів вершин зв'язного графа G називають його **радіусом** і позначають $R(G)$.

Вершину v називають **центральною**, якщо $e(v) = R(G)$.

Центром графа G називається множина всіх його центральних вершин.

Вершини v і w графа G називаються **зв'язаними**, якщо в G існує маршрут, що їх з'єднує.

Відношення зв'язаності Z рефлексивне, транзитивне й симетричне, тобто є відношенням еквівалентності на множині V. Розглянемо фактор множину

$$V/Z = \{V_1, V_2, \ldots, V_t\}.$$

Підграфи $G_i = (V_i, E_i)$, де $E_i = E \cap V_i^{(2)}$, очевидно, є компонентами зв'язності графа G. Крім того, виконується

$$G = G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_t.$$

Цей факт можна сформулювати у вигляді такого твердження.

Будь-який граф можна однозначно зобразити у вигляді прямої суми своїх компонент зв'язності.

Якщо граф G зв'язний, то всі його вершини попарно зв'язані, тобто $V/Z = \{V\}$ і G має єдину зв'язну компоненту, яка збігається із самим графом G.

Приклад 4.11.

1. У графі G на рис. 4.6 послідовність

1, (1,3), 3, (3,4), 4, (4,2), 2, (2,7), 7, (7,5), 5

або, у простішому варіанті, послідовність

$$1, 3, 4, 2, 7, 5$$

є маршрутом, що веде з вершини 1 у вершину 5. Цей маршрут є простим ланцюгом і його довжина дорівнює 5. А маршрут

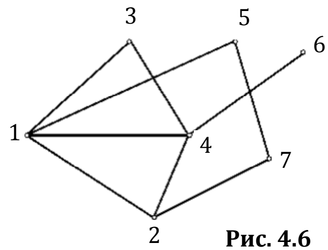


Рис. 4.6

$$1, 3, 4, 1, 2, 7, 5, 1$$

є циклом, але не є простим циклом. Крім того, граф G є зв'язним і

$$d(1, 6) = 2,\ d(3, 7) = 3,\ d(5, 6) = 3,\ d(3, 4) = 1.$$

Значення ексцентриситетів вершин цього графа G :

$$e(1) = 2,\ e(2) = 2,\ e(3) = 3,\ e(4) = 2,\ e(5) = 3,\ e(6) = 3,\ e(7) = 3.$$

Отже, $D(G) = 3$ і $R(G) = 2$. Центром графа G є множина вершин

$$\{1, 2, 4\}.$$

2. Довести, що для будь-якого графа $G = (V, E)$ або він сам, або його доповнення $\overline{G}$ є зв'язним графом.

Якщо G – зв'язний граф, то твердження справджується. Нехай $G = (V, E)$ – незв'язний граф і $G_1 = (V_1, E_1)$ – одна з його компонент зв'язності. Розглянемо графи

$$G_1 \text{ і } G' = (V', E'), \quad \text{де } V' = V \setminus V_1 \text{ і } E' = E \setminus E_1.$$

Для будь-якої пари вершин $v \in V_1$ і $w \in V'$ у графі $\overline{G}$ існує ребро (v, w), адже ці вершини несуміжні в графі G. Оскільки для кожної пари вершин $v_1, v_2 \in V_1$ графа G_1 і довільної вершини $w \in V'$ існують ребра (v_1, w) і (v_2, w), які належать множині ребер графа $\overline{G}$, то в графі $\overline{G}$ такі вершини v_1 і v_2 зв'язані. Аналогічно встановлюємо зв'язність у графі $\overline{G}$ будь-якої пари вершин w_1 і w_2 із множини V'. Отже, усі пари вершин графа $\overline{G}$ зв'язані між собою.

3. Довести, що коли G – незв'язний граф, то граф $\overline{G}$ зв'язний і $D(\overline{G}) \le 2$.

Дійсно, якщо G – незв'язний граф, то з попередньої задачі випливає, що $\overline{G}$ зв'язний, і для будь-яких двох вершин v та w графа $\overline{G}$ виконується або $d(v, w) = 1$, або $d(v, w) = 2$.

4. Довести, що коли в графі G тільки дві вершини v і w мають непарні степені, тоді ці вершини зв'язані в графі G.

Якщо v і w незв'язані, то вони містяться у різних компонентах зв'язності G_1 і G_2. Тоді сума степенів усіх вершин підграфа G_1 (або G_2) буде непарною, що суперечитиме формулі (4.1).

5. Довести, що самодоповнювальний граф завжди зв'язний.

Якщо припустити, що існує незв'язний самодоповнювальний граф G, то із прикладу 4.11 (2) випливає, що його доповнення $\overline{G}$ – зв'язний граф. А це суперечить умові ізоморфізму графів G та $\overline{G}$. ◄

Доведемо таке важливе твердження щодо зв'язних графів.

Нехай $G = (V, E)$ – зв'язний граф і e – деяке його ребро. Розглянемо граф G', отриманий із G вилученням ребра e.

а) Якщо ребро e належить деякому циклу графа G, то граф G' зв'язний.

б) Якщо ребро e не належить жодному циклу графа G, то граф G' незв'язний і має рівно дві компоненти зв'язності.

Доведення. а) Розглянемо дві довільні вершини v і w графа G'.

Якщо маршрут M, що з'єднує вершини v і w у зв'язному графі G, не містить ребра e, то він з'єднуватиме вершини v та w також у графі G'. Якщо ж ребро e належить маршруту M і $e = (u_1, u_2)$, то маршрут, що веде з v у w у графі G', можна побудувати так:

беремо маршрут, що веде з v в u_1, додаємо до нього ту частину циклу, що містить ребро e, яка залишилась у графі G' і з'єднує вершини u_1 і u_2; відтак завершуємо його маршрутом з u_2 у w. Отже, граф G' зв'язний.

б) Нехай ребро $e = (u_1, u_2)$ не належить жодному циклу графа G. Тоді в графі G' вершини u_1 та u_2 будуть незв'язаними й належатимуть двом різним компонентам зв'язності G_1 та G_2 графа G'. Крім того, у графі G' стануть незв'язаними ті й тільки ті вершини, які були з'єднані в графі G маршрутом, що містив ребро e. Отже, кожна вершина v у G' буде зв'язана або з вершиною u_1, або з вершиною u_2, тобто v належатиме або G_1, або G_2. Твердження доведено.

Завдання для самостійної роботи

1. Спростувати твердження: якщо деякий ланцюг, що веде із вершини v у вершину w, проходить через вершину u ($u \neq v$ і $u \neq w$), то він містить простий ланцюг, що веде з v у w і проходить через u.

2. Довести, що будь-який найкоротший ланцюг, який веде із вершини v у вершину w ($v \neq w$), є простим ланцюгом.

3. Довести, що в графі, степені всіх вершин якого більші 1, є цикл.

4. Побудувати граф, центр якого:

(а) складається тільки з однієї вершини;

(б) складається тільки із двох вершин;

(в) складається із трьох вершин і не збігається із множиною всіх вершин;

(г) збігається із множиною всіх вершин.

5. Довести, що для довільного графа G виконуються нерівності

$$R(G) \leq D(G) \leq 2R(G).$$

6. Довести, що діаметр довільного самодоповнювального графа дорівнює або 2, або 3.

7. Довести, що в ізоморфних графів кількість простих циклів довжиною l однакова для всіх l.

4.6. Перевірка зв'язності графів

Зв'язність заданого графа G зручно перевіряти за допомогою його матриці суміжності A.

Нехай A – матриця суміжності графа $G = (V, E)$ з n вершинами ($|V| = n$). Тоді елемент $a_{ij}^{(k)}$ i-го рядка та j-го стовпчика матриці A^k дорівнює кількості шляхів довжиною k, які ведуть у графі G із вершини v_i у вершину v_j.

Звідси отримаємо такий метод перевірки зв'язності графа G. У графі G вершини v_i і v_j ($i \neq j$) зв'язані тоді й тільки тоді, коли елемент i-го рядка та j-го стовпчика матриці

$$A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{n-1}$$

не дорівнює нулю.

Це випливає із тієї простої властивості, що коли в графі G із n вершинами існує шлях між вершинами v_i і v_j ($i \neq j$), тоді між цими вершинами обов'язково існує шлях довжиною не більше $n - 1$.

Крім того, щоб вилучити умову $i \neq j$ для встановлення зв'язності між будь-якими вершинами графа G, можна використовувати матрицю

$$M^{(n)} = I_n + A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{n-1},$$

де I_n – одинична матриця порядку n (нагадаємо, що будь-яка вершина зв'язана сама із собою шляхом довжиною 0).

Таким чином, граф G зв'язний тоді й тільки тоді, коли в матриці $M^{(n)}$ немає нульових елементів.

Граф $G^* = (V, E^*)$ називають **транзитивним замиканням** графа $G = (V, E)$, якщо $(v, w) \in E^*$, тоді й тільки тоді, коли вершини v і w зв'язані в графі G.

Отже, транзитивне замикання графа G є повним графом тоді й тільки тоді, коли граф G зв'язний.

Якщо графу $G = (V, E)$ відповідає відношення R на V, то графу G^* відповідатиме рефлексивне транзитивне замикання R^* відношення R (див. п. 2.6).

Побудуємо для графа G^* $n \times n$-матрицю A^* за таким правилом: (i, j)-й елемент матриці A^* дорівнює 1 тоді й тільки тоді, коли відповідний елемент матриці $M^{(n)}$ не дорівнює 0; усі інші елементи матриці A^* дорівнюють 0.

Матрицю A^* називають **матрицею досяжності** графа G (інші назви: **матриця зв'язності**, **матриця зв'язку**).

Матрицю досяжності A^* можна обчислити також в інший спосіб. Позначимо через $A^{(1)}$ булеву матрицю, елементи якої повністю збігаються з елементами матриці A, але їх розглядають не як числа 0 і 1, а як символи булевого (логічного) алфавіту **0** і **1** (див. п. 1.1). Уведемо операцію булевого множення $C \wedge D$ матриць C і D, які складаються з булевих елементів **0** і **1**, так:

(i, j)-й елемент матриці $C \wedge D$

$$f_{ij} = \bigvee_{t=1}^{n} (c_{it} \wedge d_{tj}),$$

де c_{it} і d_{tj} – відповідні елементи матриць C і D, а операції $\vee$ і $\wedge$ – це операції диз'юнкції та кон'юнкції (див. п. 1.1).

Позначимо через $A^{(m)}$ матрицю $A^{(1)} \wedge A^{(1)} \wedge \ldots \wedge A^{(1)}$ (m разів).

Якщо $A^{(1)}$ – булева матриця, що відповідає матриці суміжності A графа $G = (V, E)$, то елемент $b_{ij}^{(m)}$ $(i \neq j)$ матриці $A^{(m)}$ дорівнює **1** тоді й тільки тоді, коли в графі G існує принаймні один шлях довжиною m, що веде ѕз вершини v_i у вершину v_j.

Отже, матрицю досяжності A^* графа G із n вершинами можна обчислити за формулою

$$A^* = I_n^{(1)} \vee A^{(1)} \vee A^{(2)} \vee \ldots \vee A^{(n-1)}$$

(операція диз'юнкції виконується для матриць поелементно).

Таким чином, граф G зв'язний тоді й тільки тоді, коли всі елементи його булевої матриці досяжності A^* дорівнюють **1**.

Приклад 4.12. Нехай A – матриця суміжності графа G. Довести, що діагональний елемент $a_{ii}^{(3)}$ матриці A^3 дорівнює подвоєній кількості трикутників графа G, які містять вершину з номером i.

Елемент $a_{ii}^{(3)}$ дорівнює кількості шляхів довжиною 3 у графі G, що починаються й закінчуються у вершині i (отже, кожен такий шлях є трикутником). Ця кількість удвічі більша від кількості трикутників з вершиною i, тому що існують два способи обійти кожен із цих трикутників, починаючи й завершуючи обхід у вершині i. ◄

Завдання для самостійної роботи

1. Користуючись наведеними алгоритмами, з'ясувати, чи є зв'язними графи, задані матрицями суміжності в завданні для самостійної роботи 4.1.2.

2. Нехай A – матриця суміжності графа G. Довести, що сума всіх діагональних елементів $a_{ii}^{(3)}$ матриці A^3 у шість разів перевищує кількість трикутників у графі G.

3. Нехай A – матриця суміжності зв'язного графа G. Довести, що відстань $d(v_i, v_j)$ між вершинами v_i і v_j ($i \neq j$) дорівнює найменшому натуральному числу k, для якого елемент $a_{ij}^{(k)}$ i-го рядка та j-го стовпчика матриці A^k відмінний від 0.

4.7. Деякі важливі класи графів. Дерева та двочасткові графи

Граф без циклів називають **ациклічним**, ациклічний зв'язний граф – **деревом**, довільний ациклічний граф – **лісом**.

Очевидно, що зв'язними компонентами лісу є дерева, тому кожен ліс можна зобразити у вигляді прямої суми дерев.

Дерева – це особливий і дуже важливий клас графів. Особлива роль дерев визначається як широким їх застосуванням у різних галузях науки і практики, так і тим особливим положенням, яке дерева займають у самій теорії графів. Останнє випливає з граничної простоти будови дерев. Часто при розв'язуванні різних задач теорії графів їх дослідження починають із дерев.

Існують також інші, рівносильні наведеному, означення дерева, які можна розглядати як його характеристичні властивості (або критерії).

Для графа $G = (V, E)$, $|V| = n$, $|E| = m$, такі твердження рівносильні:

1) G – дерево (ациклічний зв'язний граф);

2) G – зв'язний граф і $m = n - 1$;

3) G – ациклічний граф і $m = n - 1$;

4) для будь-яких вершин v і w графа G існує лише один простий ланцюг, що їх з'єднує;

5) G – такий ациклічний граф, що якщо будь-які його несуміжні вершини v і w з'єднати ребром (v, w), то одержаний граф міститиме рівно один цикл.

Приклад 4.13.

1. Для довільного дерева $T = (V, E)$ з n вершинами виконується

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2(n-1).$$

Із вищенаведених тверджень маємо, що дерево T із n вершинами має $n - 1$ ребро, тому дана рівність випливає з (4.1).

2. Будь-яке нетривіальне дерево $T = (V, E)$ має принаймні дві кінцеві вершини.

Припустимо, що дерево T має менше двох кінцевих вершин. Тоді степінь лише однієї вершини може дорівнювати 1, а степені всіх інших – не менші 2. Отже,

$$\sum_{v \in V} \delta(v) \geq 2(n-1) + 1 = 2n - 1,$$

що суперечить результату попередньої задачі.

3. Ліс F, який має n вершин і складається з k дерев, містить $n - k$ ребер.

Дійсно, якщо дерево T_i лісу F має n_i вершин, то воно містить $n_i - 1$ ребро, $i = 1, 2, \ldots, k$. Додаючи кількості ребер кожного з дерев T_i, дістанемо кількість $n - k$ ребер у F.

4. У графі G із n вершинами, який має більше ніж $n - 1$ ребро, є принаймні один цикл.

Розглянемо довільний граф G із n вершинами та кількістю ребер, яка перевищує $n - 1$. Припустимо, що G – ациклічний граф. Тоді G – ліс, що складається з k дерев ($k \geq 1$). За попередньою задачею кількість ребер у такому графі дорівнює $n - k$; тоді $n - k > n - 1$, тобто $k < 1$, що неможливо. ◄

5. Чи може зв'язний граф із n вершинами та $n - 1$ ребром мати цикл? Відповідь обґрунтувати.

Ні. За наведеними вище твердженнями зв'язний граф з n вершинами і $n - 1$ ребром є деревом, тобто є ациклічним графом.

6. Описати всі дерева, доповнення яких також є деревами.

Рівність $n(n–1)/2 – (n – 1) = n – 1$ (див. приклад 4.9 (2)) виконується для $n = 1$ або $n = 4$, що відповідає тривіальному графу або графу з прикладу 4.9 (1). ◄

Кістяковим (**каркасним**) **деревом** зв'язного графа $G = (V, E)$ називають дерево $T = (V, E_T)$ таке, що $E_T \subseteq E$.

Кістяковим (**каркасним**) **лісом** незв'язного графа $G = (V, E)$ називають сукупність кістякових (каркасних) дерев зв'язних компонент графа G.

Приклад 4.14.

1. Для отримання кістякового дерева зв'язного графа $G = (V, E)$ слід вилучити $|E| - |V| + 1$ ребро.

Кількість ребер, що залишаться в кістяковому дереві графа G, дорівнюватиме $|V| - 1$, отже, має бути вилучено

$$|E| - (|V| - 1) = |E| - |V| + 1 \text{ ребро.}$$

2. Нехай граф $G = (V, E)$ має k компонент зв'язності. Для отримання його кістякового лісу з графа G потрібно вилучити $|E| - |V| + k$ ребер.

Для доведення цього твердження потрібно застосувати результат попередньої задачі до кожної компоненти зв'язності графа G, відтак підсумувати результати. ◄

Число $|E| - |V| + k$ називають **цикломатичним числом** графа G і позначають $\nu(G)$.

Граф $G = (V, E)$ називають **двочастковим**, якщо існує таке розбиття $\{V_1, V_2\}$ множини його вершин V на дві підмножини (**частки**), що для довільного ребра $(v,w) \in E$ або $v \in V_1$ і $w \in V_2$, або $v \in V_2$ і $w \in V_1$.

Двочастковий граф $G = (V, E)$ називають **повним двочастковим**, якщо для будь-якої пари вершин його часток $v \in V_1$ і $w \in V_2$ маємо $(v, w) \in E$. Якщо $|V_1| = m$ і $|V_2| = n$, то повний двочастковий граф G позначають $K_{m,n}$.

Відомо таке твердження (теорема Кеніга): граф є двочастковим тоді й тільки тоді, коли всі його цикли мають парну довжину.

Завдання для самостійної роботи

1. Довести властивості цикломатичного числа $\nu(G)$ графа G:

(а) Для довільного графа G виконується $\nu(G) \geq 0$.

(б) Граф G є лісом тоді й тільки тоді, коли $\nu(G) = 0$.

(в) Граф G має рівно один простий цикл тоді й тільки тоді, коли $\nu(G) = 1$.

(г) Кількість циклів у графі G не менша ніж $\nu(G)$.

2. Описати всі дерева, які є самодоповнювальними графами.

3. Довести, що граф G зв'язний тоді й тільки тоді, коли він має кістякове дерево.

4. Довести, що граф (простий цикл парної довжини C_{2k}) є двочастковим графом.

5. Скільки ребер містить повний двочастковий граф $K_{n,m}$?

6. Довести, що будь-яке дерево є двочастковим графом. Які дерева є повними двочастковими графами?

7. Який вигляд має доповнення графа $K_{n,m}$?

8. Чи для кожного натурального числа k існує повний двочастковий граф, кількість ребер якого дорівнює k ($k \geq 2$)?

9. Чому дорівнюють діаметр і радіус повного двочасткового графа $K_{n,m}$?

4.8. Плоскі та планарні графи

Часто не має особливого значення, як зобразити граф у вигляді рисунка на площині (діаграми), оскільки ізоморфні графи подібні за структурою й містять ту саму інформацію. Однак існують ситуації, коли потрібно, щоб зображення графа на площині задовольняло певні умови. Наприклад, якщо граф є моделлю якоїсь електронної схеми чи транспортної мережі, де вершини позначають окремі елементи схеми чи станції, а ребра – відповідно електричні проводи і шляхи, то бажано таким чином розташувати ці ребра на площині, щоб уникнути перетинів. Так виникає поняття плоского графа.

Граф називають **плоским**, якщо його діаграму можна зобразити на площині таким чином, щоб лінії, які відповідають ребрам графа, не перетиналися (тобто мали спільні точки тільки у вершинах графа). Таке зображення називають **плоскою картою** графа.

Граф називають **планарним**, якщо він ізоморфний деякому плоскому графу.

Наприклад, граф на рис. 4.7 *а* – планарний, оскільки він ізоморфний графу, що зображений поруч (рис. 4.7 *б*). Простий цикл, дерево та ліс – також планарні графи.

Про планарні графи кажуть, що вони **укладаються на площині** (мають **плоске укладання**).

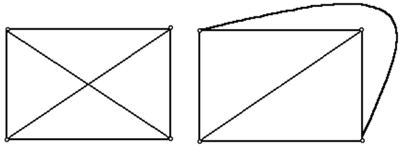


Рис. 4.7

Жордановою кривою називатимемо неперервну лінію, що не перетинає сама себе. **Гранню** плоского графа називають множину точок площини, кожну пару яких можна з'єднати жордановою кривою, що не перетинає ребер графа. **Межею грані** вважають замкнений маршрут, що обмежує цю грань.

Отже, плоский граф розбиває всю множину точок площини на грані так, що кожна точка належить деякій грані. Зазначимо, що плоский граф має одну, причому єдину, необмежену грань (на рис. 4.8 це грань 5). Називатимемо її **зовнішньою**, а всі інші грані – **внутрішніми**.

Множину граней плоского графа позначатимемо через P.

Степенем грані r називають довжину циклічного шляху, що обмежує грань r, тобто довжину межі грані r (позначають Δ_r).

Приклад 4.15.

1. На рис. 4.8 зображено плоский граф із п'ятьма гранями.

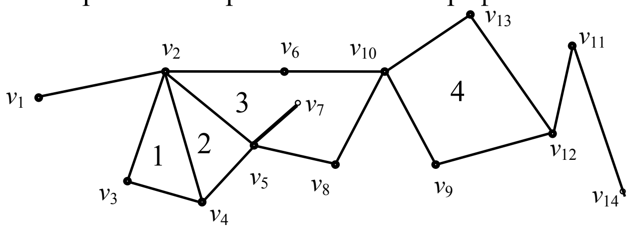


Рис. 4.8

У цьому графі

$$v_3, (v_3, v_2), v_2, (v_2, v_4), v_4, (v_4, v_3), v_3 \text{ –}$$

циклічний шлях, що обмежує грань 1,

$$v_2, (v_2, v_5), v_5, (v_5, v_7), v_7, (v_7, v_5), v_5, (v_5, v_8),$$
$$v_8, (v_8, v_{10}), v_{10}, (v_{10}, v_6), v_6, (v_6, v_2), v_2$$

– циклічний шлях для грані 3. Отже, $\Delta_1 = 3$ і $\Delta_3 = 7$.

2. Довести, що для плоского графа $G = (V, E)$ виконується рівність

$$\sum_{r\in P} \Delta_r = 2|E|.$$

Кожне ребро плоского графа або розділяє дві різні грані, або лежить усередині однієї грані (напр.=, на рис. 4.8 це ребро (v_5, v_7)). Отже, кожне ребро графа G або входить у межі тільки двох граней, або є елементом межі лише однієї грані, але при циклічному обході цієї грані таке ребро проходять двічі. Тому кожне ребро плоского графа вносить у розглядувану суму дві одиниці.

3. Довести, що для будь-якого зв'язного плоского графа $G = (V, E)$ виконується формула Ейлера

$$| V | - | E | + | P | = 2. \tag{4.3}$$

Нехай $G = (V, E)$ – зв'язний плоский граф із $n = | V |$ вершинами, а $T = (V, E_T)$ – деяке його кістякове дерево. Дерево T має тільки одну грань (зовнішню). Кількість ребер дерева T становить $| E_T | = | V | - 1$. Отже, для кістякового дерева T формула (4.3) виконується.

Послідовно проводитимемо в дереві T ребра графа G із множини $E \setminus E_T$. При цьому на кожному кроці процедури кількість вершин $|V|$ залишатиметься незмінною, а кількості ребер і граней (див. п. 4.7) одночасно збільшуватимуться на одиницю. Таким чином, формула Ейлера (4.3) виконується після кожної такої операції, тому вона справджується й для графа G, який отримаємо на завершення всієї процедури.

4. Довести, що для довільного зв'язного планарного графа $G = (V, E)$ із не менше ніж трьома вершинами виконується нерівність

$$| E | \le 3|V| - 6.$$

Оскільки в графі G немає петель і кратних ребер, то степінь Δ_r будь-якої грані не менше 3, тобто

$$\sum_{r \in P} \Delta_r \ge 3|P|.$$

Ураховуючи співвідношення з прикладу 4.15(2) і формулу Ейлера, маємо

$$\sum_{r \in P} \Delta_r = 2|E| \ge 3(|E| - |V| + 2),$$

звідки $|E| \le 3\,|V| - 6$.

5. Довести, що в будь-якому планарному графі є принаймні одна вершина, степінь якої не перевищує 5.

Якщо припустити, що степені всіх вершин планарного графа $G = (V, E)$ більші ніж 5, то дістанемо нерівність

$$2|E| = \sum_{v \in V} \delta(v) \ge 6|V|,$$

яка суперечить результату попередньої задачі. ◄

Максимальним планарним графом називають планарний граф, який при додаванні до нього будь-якого ребра перестає бути планарним.

Плоский зв'язний граф, кожну грань якого (включаючи й зовнішню) обмежено трикутником, називають **тріангуляцією**.

Можна довести, що граф є максимальним плоским графом тоді й тільки тоді, коли він – тріангуляція.

Приклад 4.16.

1. Чи існує планарний граф, який має:

(а) 7 вершин і 16 ребер; (б) 8 вершин і 18 ребер?

(а) Ні, оскільки для нього не виконується нерівність із прикладу 4.15 (4).

(б) Так, це тріангуляція.

2. Довести, що будь-яка тріангуляція з n вершинами ($n \geq 3$) містить $3n - 6$ ребер і має $2n - 4$ граней.

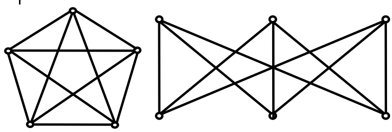
Із прикладу 4.15(2) для тріангуляції матимемо

$$3|P| = 2|E|.$$

Використовуючи цю рівність, із формули Ейлера (4.3) дістанемо

$$|E| = 3n - 6 \text{ і } |P| = 2n - 4. \blacktriangleleft$$

При дослідженні плоских графів особливе місце займають графи K_5 і $K_{3,3}$, зображені на рис. 4.9.



K_5 **Рис. 4.9** $K_{3,3}$

Доведемо, що графи K_5 і $K_{3,3}$ не є планарними.

Доведемо, що граф K_5 непланарний. Припустимо супротивне, тобто що $K_5 = (V, E)$ – планарний граф. Тоді із прикладу 4.15(4) випливає, що $|E| \leq 3|V| - 6$. Однак для графа

$$K_5\ |E| = 10 \text{ і } |V| = 5,$$

тобто має виконуватись $10 \leq 3 \cdot 5 - 6 = 9$, що неможливо. Отже, припущення про те, що K_5 – планарний граф, неправильне.

Аналогічно методом від супротивного доведемо, що граф $K_{3,3}$ непланарний. У графі $K_{3,3}$ жодні три вершини не є вершинами трикутника. Отже, $\Delta_r \geq 4$ для всіх граней $r \in P$. Припускаючи, що граф $K_{3,3}$ планарний, з формули Ейлера (4.3) отримаємо

$$|P| = |E| - |V| + 2 = 9 - 6 + 2 = 5.$$

Тоді $$2|E| = \sum_{r \in P} \Delta_r \geq 4|P| = 4 \cdot 5 = 20, \text{ тобто } |E| \geq 10,$$

що неправильно для графа $K_{3,3}$.

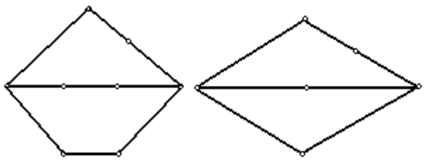
Значення графів K_5 і $K_{3,3}$ полягає в тім, що вони є єдиними істотно непланарними графами. Усі інші непланарні графи містять підграфи, подібні до K_5 або $K_{3,3}$. Характер цієї подібності розкривається за допомогою таких понять.

Нехай $e = (v, w)$ – ребро графа G, а u не є вершиною G. Вилучимо ребро e з графа G і додамо до нього нові ребра $e_1 = (v, u)$ та $e_2 = (v, u)$. Цю операцію називатимемо **підрозбиттям ребра** e.

Графи називають **гомеоморфними**, якщо їх можна отримати з одного графа за допомогою послідовного підрозбиття його ребер.

На рис. 4.10 зображено два гомеоморфні графи, G і G'.Очевидно, що коли граф G планарний, то будь-який граф, гомеоморфний G, також планарний.

Критерій планарності сформульовано у славетній теоремі К. Куратовського: граф G планарний тоді й тільки тоді, коли він не містить підграфів, гомеоморфних K_5 або $K_{3,3}$.



G **Рис. 4.10** G'

У теорії графів існують також інші критерії планарності. Наведемо ще один з них.

Елементарним стягуванням графа $G = (V, E)$ називають вилучення в ньому деякого ребра $(v_i, v_j) \in E$ та злиття вершин v_i і v_j в одну вершину v, причому v інцидентна всім тим відмінним від (v_i, v_j) ребрам графа G, які були інцидентні або вершині v_i , або вершині v_j.

Кажуть, що граф G **стягується** до графа G', якщо G' можна отримати із G за допомогою послідовності елементарних стягувань.

Граф G з рис. 4.10 стягується до графа G' поруч.

Критерій планарності можна сформулювати у вигляді такого твердження: граф планарний тоді й тільки тоді, коли він не містить підграфів, що стягуються до K_5 або $K_{3,3}$.

Наведені критерії дають змогу перевірки планарності графів. Існують алгоритми, які, установивши планарність графа, будують для нього можливе плоске укладання.

Завдання для самостійної роботи

1. Скільком граням може належати вершина степеня k плоского графа?

2. Довести, що будь-яке дерево є планарним графом. Скільки граней має дерево?

3. Чому дорівнює степінь єдиної грані дерева з n вершинами?

4. Довести, що кількість граней будь-якого плоского укладання зв'язного планарного графа з n вершинами та m ребрами є величиною сталою й дорівнює $m - n + 2$, тобто

$$|P| = |E| - |V| + 2.$$

Отже, число $|P|$ – це інваріант для заданого планарного графа G, тобто воно не залежить від способу укладання графа на площині.

5. Знайти зв'язний плоский граф із n вершинами та m ребрами, для якого $m > 3n - 6$.

6. Довести, що для довільного плоского графа $G = (V, E)$ із k компонентами зв'язності виконується рівність

$$|V| - |E| + |P| = k + 1 \text{ (узагальнена формула Ейлера).}$$

7. Довести, що кількість внутрішніх граней довільного плоского графа G дорівнює цикломатичному числу $\nu(G)$ графа G.

8. Чи існує планарний граф, який має: (а) 7 вершин і 15 ребер; (б) 8 вершин і 19 ребер?

9. Чи існує плоский граф із шістьма вершинами, що має дев'ять граней?

10. Довести, що для зв'язного плоского графа з n вершинами ($n \geq 3$) і m ребрами, який не містить трикутників, виконується нерівність $m \leq 2n - 4$.

11. Довести, що граф є максимальним плоским графом тоді й тільки тоді, коли він є тріангуляцією.

4.9. Розфарбування графів

Нехай $G = (V, E)$ – довільний граф, а $N_k = \{1, 2, \dots, k\}$.

Будь-яке відображення $f : V \to N_k$, яке кожній вершині $v \in V$ ставить у відповідність деяке натуральне число $f(v) \in N_k$, називають **розфарбуванням** графа G. Число $f(v)$ називають **кольором**, або **номером фарби**, вершини v.

Розфарбування f графа G називають **правильним**, якщо для будь-яких його суміжних вершин v і w виконується $f(v) \neq f(w)$.

Мінімальне число k, для якого існує правильне розфарбування графа G, називають **хроматичним числом** графа G і позначають $\chi(G)$.

Мінімальним правильним розфарбуванням графа G називають правильне розфарбування для $k = \chi(G)$.

Для певних типів графів визначити хроматичні числа нескладно. Наприклад, 1-хроматичними є порожні графи $G = (V, \varnothing)$ і тільки вони. Хроматичне число повного графа K_n дорівнює n, а хроматичне число довільного двочасткового графа – 2. 2-хроматичні графи часто називають **біхроматичними**.

Неважко обґрунтувати такі твердження.

Якщо кожна зв'язна компонента графа G потребує для свого правильного розфарбування не більше k фарб, то $\chi(G) \leq k$.

Граф є біхроматичним тоді й тільки тоді, коли він двочастковий. Зокрема, усі дерева та прості цикли парної довжини C_{2k} біхроматичні. Водночас $\chi(C_{2k+1}) = 3$.

Приклад 4.17. Доведемо, що для довільного графа G виконується нерівність $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$, де $\Delta(G)$ – найбільший зі степенів вершин графа G.

Доведення проведемо індукцією за кількістю n вершин графа G. Для тривіального графа ($n = 1$) і графів із двома вершинами нерівність виконується.

Нехай твердження теореми виконується для всіх графів із кількістю вершин t ($t \geq 2$). Розглянемо довільний граф G із $t + 1$ вершиною. Вилучимо з нього деяку вершину v. Дістанемо граф G', степені всіх вершин якого не перевищують $\Delta(G)$. Отже, за припущенням індукції для правильного розфарбування G' потрібно не більше ніж $\Delta(G) + 1$ фарб. Правильне розфарбування для G дістанемо з правильного розфарбування графа G', якщо пофарбуємо вершину v у колір, відмінний від кольорів усіх суміжних із v вершин. Оскільки таких вершин не більше ніж $\Delta(G)$, то для правильного розфарбування графа G достатньо $\Delta(G) + 1$ фарб. ◄

Так склалося історично, що окреме місце у теорії графів займають дослідження з розфарбування планарних графів. Це пов'язано зі відомою **проблемою** (**гіпотезою**) **чотирьох фарб**.

Грані плоскої карти назвемо **суміжними**, якщо їхні межі мають принаймні одне спільне ребро.

Гіпотеза чотирьох фарб виникла у зв'язку з розфарбуванням друкованих географічних карт (звідси й термін *плоска карта*) і була сформульована так: **грані довільної плоскої карти можна розфарбувати не більше ніж чотирма фарбами так, що будь-які суміжні грані матимуть різні кольори**.

Згодом з'явилось інше, рівносильне, формулювання гіпотези чотирьох фарб: **для правильного розфарбування вершин довільного планарного графа потрібно не більше чотирьох фарб**.

Ця гіпотеза виникла в середині XIX ст. Більше ста років дослідники намагалися її довести чи спростувати. У результаті багаторічних досліджень виявилось, що для розв'язання проблеми чотирьох фарб потрібно перевірити її справедливість для скінченної кількості графів певного вигляду. Кількість варіантів, які потрібно було перебрати, була настільки великою, що тільки за допомогою потужної ЕОМ, яка неперервно працювала протягом більше двох місяців, у 1976 р. справедливість гіпотези чотирьох фарб було підтверджено. Однак такий фізичний, експериментальний спосіб доведення не зовсім влаштовує багатьох професіональних математиків, тому вони продовжують пошуки аналітичного доведення гіпотези.

Набагато простіше можна отримати такі результати.

Приклад 4.18*.* Довести, що для правильного розфарбування довільного планарного графа потрібно не більше шести фарб.

Доведення виконаємо індукцією за кількістю n вершин графа. Для $n \le 6$ твердження очевидне.

Припустимо, що хроматичне число всіх планарних графів із t вершинами не перевищує 6 ($t \ge 6$). Розглянемо довільний планарний граф G із $t+1$ вершиною. Згідно із прикладом 4.15(5) у графі G існує вершина v, степінь якої не більше 5. Вилучимо вершину v із графа G. Отримаємо граф G', вершини якого за припущенням індукції можна правильно розфарбувати не більше ніж у шість кольорів. Тоді правильне розфарбування для G отримаємо з одержаного правильного розфарбування графа G', надаючи вершині v колір, відмінний від кольорів усіх суміжних із нею вершин. Оскільки таких вершин не більше п'яти, то для виконання цієї процедури достатньо шести фарб. Отже,

$$\chi(G) \le 6. \blacktriangleleft$$

Пропонуємо самостійно переконатись у справедливості такого твердження: для довільного планарного графа G виконується

$$\chi(G) \leq 5.$$

Граф G називають **критичним**, якщо хроматичне число підграфа G', отриманого в результаті вилучення будь-якої вершини із G, строго менше, ніж хроматичне число графа G.

Критичний граф G, для якого $k = \chi(G)$, називають k-**критичним**.

Приклад 4.19.

1. Доведемо, що будь-який повний граф є критичним.

$\chi(K_n) = n$, а після вилучення довільної вершини з K_n (див. п. 4.2) отримаємо повний граф K_{n-1}, хроматичне число якого дорівнює $n - 1$.

2. Довести, що довільний критичний граф є зв'язним.

Припустимо, що деякий критичний граф G є незв'язним і має кілька компонент зв'язності. Вилучимо довільну вершину з тієї компоненти зв'язності графа G, хроматичне число якої не перевищує хроматичні числа решти компонент зв'язності. Отримаємо суперечність, оскільки після такого вилучення хроматичне число графа G не зміниться. ◄

Наостанок зауважимо, що існують планарні графи, хроматичне число яких дорівнює 4. Найпростішим таким графом є K_4. Отже, гіпотезу чотирьох фарб не можна вдосконалити, перетворивши на гіпотезу трьох фарб.

Різноманітні алгоритми відшукання правильних розфарбувань графів можна знайти у підручниках з теорії графів.

Завдання для самостійної роботи

1. Визначити хроматичне число:

(а) повного графа K_n;

(б) повного двочасткового графа $K_{n,m}$;

(в) довільного двочасткового графа;

(г) простого циклу довжиною $2k$;

(д) простого циклу довжиною $2k + 1$, $k \in N$;

(е) дерева.

2. Довести, що для правильного розфарбування довільного кубічного графа достатньо чотирьох фарб.

3. Чому дорівнює хроматичне число повного графа K_n, з якого вилучено одне ребро?

4. Довести, що граф G біхроматичний тоді й тільки тоді, коли він не містить циклів непарної довжини.

5. Довести, що для довільного планарного графа G виконується нерівність $\chi(G) \le 5$.

6. Знайти графи, які мають різні хроматичні числа й у яких:

(а) кількість вершин степеня k однакова для всіх $k \ge 0$;

(б) кількість простих циклів довжиною l однакова для всіх l;

(в) виконуються обидві умови з п. (а) та (б).

7. Знайти всі 2-критичні й 3-критичні графи.

4.10. Обходи графів

Появу теорії графів як розділу математики пов'язують із задачею про кенігсберзькі мости. Сім мостів міста Кенігсберга було розташовано на р. Прегель так, як зображено на рис. 4.11, *а* (*B* і *C* – береги, *A* та *D* – острови).

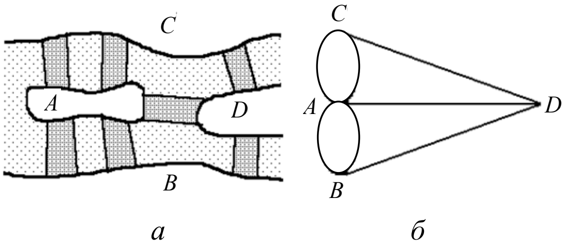


Рис. 4.11

Задача полягає в тім, чи можна, починаючи з будь-якої точки (*A*, *B*, *C* або *D*), здійснити прогулянку (обхід) через усі мости так, щоб пройти кожен міст тільки один раз і повернутися у вихідну точку.

Оскільки істотними є тільки переходи через мости, то план міста можна зобразити у вигляді графа *G* (із *кратними* ребрами), вершинами якого є береги й острови (точки *A*, *B*, *C* і *D*), а ребрами – мости (рис. 4.11, *б*). Тоді задачу про кенігсберзькі мости мовою теорії графів можна сформулювати так: чи існує в графі *G* цикл, який містить усі ребра графа? Інше відоме формулювання проблеми: чи можна накреслити фігуру, що зображає граф *G*, не відриваючи олівця від паперу й не повторюючи ліній двічі, почавши й закінчивши процедуру в одній із вершин фігури? Уперше відповідь на це запитання дав Л. Ейлер у 1736 р. Його роботу, у якій викладено розв'язок задачі, вважають початком теорії графів.

Цикл, що містить усі ребра графа, називають **ейлеровим**. Зв'язний граф, що має ейлерів цикл, називають **ейлеровим**.

Ейлер довів таку теорему: зв'язний граф G є ейлеровим тоді й тільки тоді, коли степені всіх його вершин парні.

Оскільки для графа G на рис. 4.11, *б* умови теореми Ейлера не виконуються, то в задачі про кенігсберзькі мости відповідь негативна.

Приклад 4.20. Довести, що для довільного зв'язного графа існує циклічний маршрут, який починається з будь-якої вершини й містить усі ребра графа, причому кожне з них – двічі.

Подвоїмо кожне ребро графа G, перетворивши його на мультиграф G' (див. п. 4.11). Степені всіх вершин G' парні, тому за теоремою Ейлера в G' існує цикл, що містить усі його ребра. Циклу відповідає шуканий циклічний маршрут у графі G. ◄

Якщо G – ейлерів граф, то будь-який його ейлерів цикл не єдиний і може відрізнятися від інших ейлерових циклів цього графа або початковою вершиною, або порядком проходження вершин (а можливо, і тим, і іншим).

Для знаходження якогось ейлерового циклу в ейлеровому графі G можна застосувати **алгоритм Фльорі**. Фіксуємо довільну початкову вершину циклу. На кожному кроці процедури до шуканого циклу обираємо (доки це можливо) те ребро, після вилучення якого граф не розіб'ється на дві нетривіальні зв'язні компоненти. Кожне обране ребро вилучаємо із G. Процедуру завершуємо, коли всі ребра буде вичерпано. Сформульований алгоритм будує ейлерів цикл графа G.

Існує ще один різновид обходу графа, який має різноманітні практичні застосування й називається гамільтоновим циклом. Простий цикл, який проходить через усі вершини графа, називають **гамільтоновим циклом**. Граф називають **гамільтоновим**, якщо він має гамільтонів цикл.

Незважаючи на певну подібність означень ейлерових і гамільтонових графів, на жаль, для розпізнавання гамільтоновості графів на сьогодні не існує таких простих і вичерпних критеріїв та алгоритмів, як для ейлерових графів. Є кілька теорем, що формулюють достатні умови існування гамільтонового циклу в заданому графі. Доведення таких теорем зазвичай містять і алгоритми побудови відповідних гамільтонових циклів.

Незамкнений ланцюг, що містить усі ребра графа, називають **ейлеровим**, а простий незамкнений ланцюг, що містить усі вершини графа, – **гамільтоновим ланцюгом**.

Приклад 4.21. Навести приклади ейлерового графа, який не є гамільтоновим, а також гамільтонового графа, який не є ейлеровим.

Граф $G = (V, E)$, де

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\},\ E = \{(1,2), (1,3), (2,3), (3,4), (3,5), (4,5)\},$$

є ейлеровим, однак не є гамільтоновим. А будь-який повний граф K_n для непарного n є гамільтоновим, але не ейлеровим. ◄

Завдання для самостійної роботи

1. Визначити, які з повних графів K_n є ейлеровими.

2. Для яких значень n і m повний двочастковий граф $K_{n,m}$ є ейлеровим?

3. Довести, що зв'язний граф має ейлерів ланцюг тоді й тільки тоді, коли він має тільки дві вершини з непарними степенями.

4. Довести, що не для всіх зв'язних графів існує циклічний маршрут, який містить кожне ребро графа тричі. Сформулювати умови існування такого маршруту.

5. Довести, що в повному графі K_n існує гамільтонів цикл для довільного $n \geq 3$.

4.11. Орієнтовані графи

Крім моделі, розглянутої у попередніх параграфах, у теорії графів досліджують також інші типи графів. Наприклад, **мультиграф** – граф, у якому дозволяються **кратні ребра**, тобто будь-які дві вершини можна з'єднати кількома ребрами. **Псевдограф** – це мультиграф, який може мати **петлі**, тобто ребра, що з'єднують вершину саму із собою. **Гіперграф** – граф, у якому ребрами можуть бути не лише двоелементні, але й довільні підмножини множини вершин. Нарешті, важливою для різноманітних практичних застосувань є модель, яку називають **орієнто-**

ваним графом (або **орграфом**). Подамо короткий огляд основних понять і результатів для орграфів.

Орієнтованим графом (**орграфом**) G називають пару множин (V, E), де $E \subseteq V \times V$. Елементи множини V називають **вершинами**, а елементи множини E – **дугами** орграфа $G = (V, E)$. Отже, дуга – це впорядкована пара вершин; V називають **множиною вершин**, E – **множиною дуг** орграфа G.

Якщо $e = (v, w)$ – дуга, то вершину v називають **початком**, а вершину w – **кінцем** дуги e. Кажуть, що дуга e **веде** із вершини v у вершину w, або виходить із v і заходить у w. Дугу e та вершини v і w називають **інцидентними** між собою, а вершини v і w – **суміжними**.

Дугу (v, v), у якій початок і кінець збігаються, називають **петлею**. Надалі розглядатимемо тільки орграфи без петель.

Як і звичайний граф, орграф $G = (V, E)$ можна задавати переліком елементів скінченних множин V і E, діаграмою або за допомогою матриць.

Діаграма орграфа відрізняється від діаграми звичайного графа тим, що дуги орграфа зображають напрямленими лініями (відрізками чи кривими), які йдуть від початку до кінця дуги. Напрямок лінії позначають стрілкою.

Поставимо у відповідність усім вершинам орграфа $G = (V, E)$ натуральні числа від 1 до n; дістанемо множину вершин V у вигляді $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. **Матрицею суміжності** A орграфа G називають квадратну матрицю порядку n, у якій елемент i-го рядка та j-го стовпчика a_{ij} дорівнює 1, якщо $(v_i, v_j) \in E$, і дорівнює 0 в іншому разі.

Занумеруємо всі вершини орграфа $G = (V, E)$ числами від 1 до n, а дуги – числами від 1 до m. **Матрицею інцидентності** B орграфа G називають $n \times m$-матриця, у якій елемент i-го рядка та j-го стовпчика b_{ij} дорівнює 1, якщо вершина v_i є початком дуги e_j, b_{ij} дорівнює -1, якщо вершина v_i є кінцем дуги e_j, і b_{ij} дорівнює 0, якщо вершина v_i і дуга e_j неінцидентні.

Орграфи $G_1 = (V_1, E_1)$ і $G_2 = (V_2, E_2)$ називають **ізоморфними**, якщо існує таке взаємно однозначне відображення φ множини V_1 на множину V_2, що дуга $(v, w) \in E_1$ тоді й тільки тоді, коли дуга $(\varphi(v), \varphi(w)) \in E_2$.

Напівстепенем виходу вершини v (позначають $\delta^+(v)$) орграфа G називають кількість дуг орграфа G, початком яких є вершина v.

Напівстепенем заходу вершини v (позначають $\delta^{-}(v)$) орграфа G називають кількість дуг орграфа G, кінцем яких є вершина v.

Приклад 4.22.

1. Довести, що для довільного орграфа $G = (V, E)$ виконується рівність

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in V} \delta^{-}(v).$$

У будь-якому орграфі G кількість початків його дуг, очевидно, збігається з кількістю їхніх кінців.

2. Чи існує орграф із п'ятьма вершинами, напівстепені виходу вершин якого дорівнюють 4, 2, 1, 0, 1, а відповідні напівстепені заходу – 3, 2, 1, 1, 2?

Ні, адже не виконується рівність із попереднього пункту.

3. Чи існує орграф із чотирма вершинами, напівстепені виходу вершин якого дорівнюють 3, 1, 3, 0, а відповідні напівстепені заходу – 1, 2, 1, 3?

Так, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – його матриця суміжності. ◄

Чималу частку властивостей і тверджень стосовно звичайних графів можна без змін сформулювати й для орграфів. Зокрема, це стосується цілих розділів (таких, наприклад, як планарність або розфарбування графів), у яких властивість орієнтації ребер неістотна. Певні особливості в означеннях, постановках задач і методах їх розв'язання виникають при дослідженні проблем, пов'язаних із маршрутами, зв'язністю, обходами графів тощо.

Маршрутом, або **шляхом**, в орграфі $G = (V, E)$ називають таку послідовність його вершин і дуг

$$v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_k, v_{k+1}, \tag{4.4}$$

що $e_i = (v_i, v_{i+1})$, $i = 1, 2, \dots, k$. Кажуть, що цей маршрут **веде** з вершини v_1 у вершину v_{k+1}. Кількість k дуг у маршруті (4.4) називають його **довжиною**.

Як і для графів, розглянутих вище, маршрут (4.4) можна записувати лише як послідовність вершин, що входять до його складу, тобто $v_1, v_2, \dots, v_{k+1}$.

Маршрут, у якому всі дуги попарно різні, називають **ланцюгом**, а маршрут, у якому всі вершини попарно різні, – **простим**

ланцюгом. Маршрут (4.4) називають **замкненим** (або **циклічним**), якщо $v_1 = v_{k+1}$. Замкнений ланцюг називають **циклом**, а замкнений простий ланцюг – **простим циклом**, або **контуром**.

Орграф називають **ациклічним** (або **безконтурним**), якщо він не має жодного циклу.

Якщо існує маршрут, який веде з вершини v у вершину w, то кажуть, що вершина w **досяжна** з вершини v. Тоді **відстанню** $d(v, w)$ від вершини v до вершини w називають довжину найкоротшого маршруту, що веде з v у w.

Вершину v орграфа G називають **джерелом**, якщо з неї досяжна будь-яка інша вершина орграфа G. Вершину w називають **стоком**, якщо вона досяжна з будь-якої іншої вершини орграфа G. Вершина v орграфа G називають **тупиковою**, якщо жодна із вершин орграфа G не досяжна з v. Вершину v орграфа G називають **недосяжною**, якщо вона не досяжна з жодної вершини орграфа G.

Повним орграфом (або **турніром**) називають орграф, у якому будь-які дві вершини інцидентні одній і тільки одній його дузі.

Приклад 4.23.

1. Для довільного повного орграфа $G = (V, E)$ з n вершинами $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ виконуються такі рівності:

(а) $\sum_{i=1}^{n} \delta^+(v_i) = |E|$; (б) $|E| = n(n-1)/2$; в) $\sum_{i=1}^{n}(m-1-\delta^+(v_i)) = \sum_{i=1}^{n}\delta^+(v_i)$.

(а) У будь-якому орграфі G (зокрема повному) кількість дуг $|E|$ збігається з кількістю початків цих дуг (і, відповідно, з кількістю кінців усіх дуг).

(б) Кількість дуг у повному орграфі G збігається з кількістю ребер у відповідному неорієнтованому повному графі G', тобто в графі, який отримаємо з G, замінивши в ньому всі орієнтовані дуги на неорієнтовані ребра (див. приклад 4.7 (1)).

(в) У повному орграфі з n вершинами для всіх вершин виконуються рівності

$$n - 1 - \delta^+(v_i) = \delta^-(v_i),\ i = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Отже, сума в лівій частині рівності є кількістю кінців усіх дуг повного орграфа G, а сума в правій частині – кількістю початків усіх його дуг. Ці кількості, очевидно, збігаються.

2. Довести, що в будь-якому повному орграфі $G = (V, E)$ є принаймні одне джерело.

Для доведення твердження застосуємо метод математичної індукції за кількістю вершин повного орграфа. База індукції: у повному орграфі з двома вершинами одна з них є джерелом (а інша – стоком). Припустимо, що будь-який повний орграф із n вершинами має джерело. Розглянемо довільний повний орграф $G = (V, E)$ з $n + 1$ вершиною. Вилучивши одну з його вершин v, отримаємо повний орграф із n вершинами, для якого справджується припущення індукції. Отже, у ньому є принаймні одне джерело. Нехай це буде вершина w. Повернемо на місце вилучену вершину v зі всіма відповідними дугами. Оскільки граф G повний, то його вершини v і w з'єднані дугою. Якщо ця дуга веде з v у w (тобто $(v, w)\in E$), то джерелом у графі G буде вершина v. В іншому разі, коли $(w, v)\in E$, джерелом залишиться вершина w. ◄

3. Нумерацією орграфа $G = (V, E)$ з n вершинами називатимемо взаємно однозначне відображення

$$f : V \to N_n,$$

яке кожній вершині $v\in V$ ставить у відповідність натуральне число $f(v)$ із множини $N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Довести, що для ациклічного орграфа $G = (V, E)$ існує така нумерація f, що для будь-якої дуги $(v, w)\in E$ виконується

$$f(v) < f(w).$$

Цю нумерацію називають **правильною нумерацією**, або **топологічним сортуванням** вершин орграфа G.

Неважко довести (методом від супротивного), що ациклічний орграф G завжди має принаймні один стік. Нехай u_1 – стік орграфа G. Покладемо $f(u_1) = n$ і вилучимо з G вершину u_1. Дістанемо ациклічний орграф G_1, у якому існуватиме стік u_2. Покладемо $f(u_2) = n - 1$ і вилучимо u_2 з G_1. Продовжуючи цю процедуру, отримаємо шукану правильну нумерацію. ◄

Послідовність (4.4) називають **напівмаршрутом**, якщо кожна дуга e_i цієї послідовності є такою, що або $e_i = (v_i, v_{i+1})$, або $e_i = (v_{i+1}, v_i)$ (можна вважати, що при побудові напівмаршруту ми ігноруємо орієнтацію дуг орграфа). Аналогічно означають **напівланцюг**, **напівцикл** і **півконтур**.

Орграф називають **сильно зв'язним**, якщо будь-які дві його вершини досяжні одна з одної. Орграф називають **однобічно зв'язним**, якщо для будь-яких двох його вершин принаймні одна досяжна з іншої. Орграф називають **слабко зв'язним**, якщо для будь-яких двох його вершин існує напівмаршрут, що веде з однієї вершини в іншу. Маршрут в орграфі G називають **кістяковим**, якщо він містить усі вершини орграфа G.

Орграф, у якому є джерело й немає жодного півконтуру, називають **кореневим деревом**.

Вхідне дерево – це орграф, який має стік і не має жодного півконтуру.

Орграф називають **функціональним**, якщо напівстепінь виходу кожної його вершини дорівнює 1. Орграф називають **ін'єктивним**, якщо напівстепінь заходу кожної його вершини дорівнює 1.

Ейлеровим контуром в орграфі G називають контур, що містить усі дуги орграфа G. **Ейлеровим орграфом** називають орграф, у якому є ейлерів контур. **Ейлеровим ланцюгом** називають незамкнений ланцюг, що містить усі дуги орграфа.

Нижченаведене твердження можна довести так само, як і для звичайних графів.

Слабко зв'язний орграф $G = (V, E)$ є ейлеровим тоді й тільки тоді, коли напівстепінь виходу будь-якої його вершини дорівнює напівстепеню її заходу.

Гамільтоновим контуром називають контур, що містить усі вершини орграфа. Орграф, який має гамільтонів контур, називають **гамільтоновим орграфом**.

Простий незамкнений ланцюг, що містить усі вершини орграфа, називають **гамільтоновим**.

Повний орграф завжди гамільтонів.

Орграф $G = (V, E)$ називають **транзитивним**, якщо з $(v, w) \in E$ і $(w, u) \in E$ випливає $(v, u) \in E$.

Існує взаємно однозначна відповідність між множиною всіх безконтурних транзитивних орграфів $G = (V, E)$ із множиною вершин $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ і петлями в кожній вершині та множиною всіх відношень часткового порядку на V. Ця бієкція встановлюється так: орграфу $G = (V, E)$ відповідає відношення R на V таке, що $(v_i, v_j) \in R$ тоді й тільки тоді, коли $(v_i, v_j) \in E$, $v_i, v_j \in V$.

Завдання для самостійної роботи

1. Нехай задано орграф $G = (V, E)$:

(а) $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

$E = \{(1, 3), (2, 1), (2, 5), (3, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 2)\}$;

(б) $V = \{a, b, c, d\}$, $E = \{(a, c), (a, d), (b, a), (b, d), (c, b), (d, c)\}$.

Побудувати діаграму, матриці суміжності та інцидентності для кожного з цих орграфів.

2. Як визначити напівстепені виходу та заходу певної вершини орграфа G за його матрицею суміжності A?

3. Чи існує орграф із трьома вершинами, напівстепені виходу вершин якого дорівнюють 2, 2 і 0, а відповідні напівстепені заходу – 2, 1 та 1?

4. Довести, що відношення досяжності на множині вершин орграфа транзитивне.

5. Довести, що в повному орграфі може бути не більше однієї недосяжної й не більше однієї тупикової вершини.

6. Довести, що в будь-якому повному орграфі є принаймні один стік.

7. Довести, що для транзитивного повного орграфа завжди існує правильна нумерація.

8. Нехай A – матриця суміжності орграфа G. Довести, що елемент $a_{ij}^{(k)}$ i-го рядка та j-го стовпчика матриці A^k дорівнює кількості шляхів довжиною k, які ведуть в орграфі G з вершини з номером i у вершину з номером j.

4.12. Граф як модель. Застосування теорії графів

Останнім часом графи й пов'язані з ними методи досліджень використовують практично в усіх розділах сучасної математики, зокрема в дискретній математиці.

Граф – це математична модель найрізноманітніших об'єктів, явищ і процесів, досліджуваних і використовуваних у науці, техніці та на практиці. Коротко опишемо найвідоміші застосування теорії графів.

Наприклад, у вигляді графа можна зображувати такі об'єкти:

• електричні та транспортні мережі;
• інформаційні й комп'ютерні мережі;
• карти автомобільних, залізничних і повітряних шляхів, газо- й нафтопроводів;
• моделі кристалів;
• структури молекул хімічних речовин;
• моделі ігор;
• різні математичні об'єкти (відношення, частково впорядковані множини, ґратки, автомати, ланцюги Маркова, алгоритми та програми);
• лабіринти;
• плани діяльності чи плани виконання певних робіт (розклади);
• генеалогічні дерева тощо.

Наведемо приклади застосування теорії графів:
• пошук зв'язних компонент у комунікаційних мережах;
• пошук найкоротших, найдешевших і найдорожчих шляхів у комунікаційних мережах;
• побудова кістякового дерева, тобто досягнення зв'язності з найменшою можливою кількістю ребер;
• пошук максимальної течії для транспортної мережі, у якій означено вхідні та вихідні вершини і пропускні спроможності ребер;
• ізоморфізм графів: ідентичність структур молекул (ізометрія);
• відшукання циклів графів:
  – гамільтонів цикл: обійти всі вершини графа, побувавши в кожній з них лише один раз (задача комівояжера);
  – ейлерів цикл: обійти всі ребра (здійснити контроль дієздатності всіх ланок мережі);
• розфарбування графів: розфарбування географічних карт, укладання розкладів, розміщення ресурсів тощо;
• планарність графів: проектування друкованих електронних та електричних схем, транспортних розв'язок тощо;
• знаходження центрів графа – вершин, максимальна відстань від яких до решти вершин графа мінімальна (*столиць*) тощо.

Розділ 5
ТЕОРІЯ АВТОМАТІВ

Однією з найпопулярніших і найпоширеніших математичних моделей, які активно й успішно використовувались і використовуються в теорії та практиці сучасної комп'ютерної науки (інформатики), є скінченний автомат. Варто назвати лише деякі найважливіші приклади застосування цієї моделі.

1. Опис функціонування та логічного проектування найрізноманітніших схем і пристроїв дискретної дії. Зокрема, скінченний автомат широко використовують для розробки й аналізу схем і пристроїв обчислювальної техніки як модель для інтерпретування мікропрограм виконання команд ЕОМ тощо.

2. Скінченний автомат – зручний і ефективний засіб для опису та створення важливого компонента стандартного компілятора мови програмування, який називають **лексичним аналізатором**. Цей програмний модуль відповідає за розбивку вхідного тексту на логічні одиниці: ідентифікатори, ключові (резервовані) слова, константи, спеціальні знаки тощо.

3. Скінченний автомат є складовою частиною програмного забезпечення, призначеного для перегляду великих текстових масивів даних (наприклад набору web-сторінок) з метою пошуку в них потрібної інформації. Ключем для такого пошуку служать або ключові слова, або певні послідовності символів (образи).

4. Модель скінченного автомата використовують у програмному забезпеченні для розробки й аналізу поведінки різноманітних систем, що можуть перебувати у скінченній кількості відмінних один від одного станів. Прикладами таких систем можуть бути протокол безпечного (захищеного) обміну інформацією, протокол, що організує та контролює процедури електронної торгівлі та інших фінансових операцій у комп'ютерних мережах тощо.

5.1. Поняття скінченного автомата. Методи задання автоматів

Скінченним автоматом (далі – просто **автоматом**) називають систему

$$A = (X, Y, U, \delta, \lambda),$$

у якій $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ та $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ – скінченні **множини** (**алфавіти**) відповідно **вхідних і вихідних сигналів**, $U = \{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$ – **множина внутрішніх станів** автомата. Функції δ та λ описують алгоритм функціонування (поведінку) автомата A. Функцію δ: $U \times X \to U$ називають **функцією переходів**, а λ: $U \times X \to Y$ – **функцією виходів** автомата A.

Необхідно підкреслити одну особливість моделі автомата, яка випливає з її подальшої фізичної інтерпретації. Вважаємо, що автомат A функціонує в дискретному часі, тобто час функціонування автомата розбито на відрізки однакової довжини – **такти**. Межі тактів t називають моментами абстрактного дискретного **автоматного часу** й нумерують натуральними числами, починаючи з одиниці. Значення вхідних і вихідних сигналів та значення станів автомата можуть змінюватися тільки в моменти автоматного часу $t = 1, 2, \ldots$.

Якщо позначимо через

$$x(t) \in X,\ y(t) \in Y,\ a(t) \in U$$

значення вхідного й вихідного сигналів і стану автомата в момент автоматного часу t, то робота автомата A описуватиметься співвідношеннями

$$a(t + 1) = \delta(a(t), x(t)),\ y(t) = \lambda(a(t), x(t)). \tag{5.1}$$

Співвідношення (5.1) називають **канонічними рівняннями** автомата A.

Перше із канонічних рівнянь можна прочитати так: стан автомата A в будь-який момент автоматного часу $t + 1$ однозначно визначається сигналом, поданим на вхід автомата, і станом автомата A в попередній момент автоматного часу. При цьому кажемо, що автомат A переходить зі стану $a(t)$ у стан $a(t + 1)$.

У математичній моделі автомата можна вважати, що такий перехід відбувається миттєво (стрибкоподібно). За фізичної інтерпретації розглядуваної моделі слід брати до уваги, що зазначений перехід відбувається поступово й потребує певного фізикного часу. Однак вважатимемо, що цей час завжди менший від тривалості такту введеного дискретного часу; отже, від моменту t до моменту $t + 1$ весь перехідний процес завершується.

Крім зміни станів, результатом роботи автомата є також видача вихідних сигналів за законом, визначеним другим канонічним рівнянням автомата.

Якщо у автоматі A виділено стан, у якому автомат A перебуває в момент автоматного часу $t = 1$, то цей стан називають **початковим** (зазвичай початковим станом уважають a_1), а автомат A називають **ініціальним** і позначають A/a_1. Надалі не вказуватимемо явно залежність змінних і результатів функцій переходів і виходів від автоматного часу t, крім тих випадків, коли це потрібно.

Для розв'язання задач теорії автоматів зручно використовувати різні способи (методи) задання автоматів. Опишемо два найпоширеніші. У цих методах істотним є те, що функції δ та λ автомата A мають скінченні області визначення.

Табличний спосіб. Функції δ і λ можна задавати за допомогою двох таблиць, які називають відповідно **таблицею переходів** і **таблицею виходів** автомата A. Загальна структура обох таблиць однакова: рядки таблиць позначено вхідними сигналами $x_1, x_2, \ldots, x_m$, а стовпчики – станами $a_1, a_2, \ldots, a_s$. На перетині i-го рядка та j-го стовпчика в таблиці переходів записують стан $\delta(a_j, x_i)$, а в таблиці виходів – вихідний сигнал $\lambda(a_j, x_i)$. Іноді для задання автомата використовують одну **суміщену таблицю переходів/виходів**, у якій на перетині i-го рядка та j-го стовпчика записують відповідну пару a_k/y_l, де $a_k = \delta(a_j, x_i)$ та $y_l = \lambda(a_j, x_i)$.

Графічний спосіб задання автомата за допомогою орієнтованого мультиграфа називають **графом**, або **діаграмою автомата** (**автоматним графом**, **автоматною діаграмою**). Вершини графа позначають символами станів автомата A. Якщо $\delta(a_i, x_k) = a_j$ та $\lambda(a_i, x_k) = y_l$, то в графі автомата проводять орієнтовану дугу (або стрілку) з вершини a_i у вершину a_j й позначають її символами x_k/y_l. Задання автомата за допомогою графа особливо наочне, якщо кількість його станів порівняно невелика.

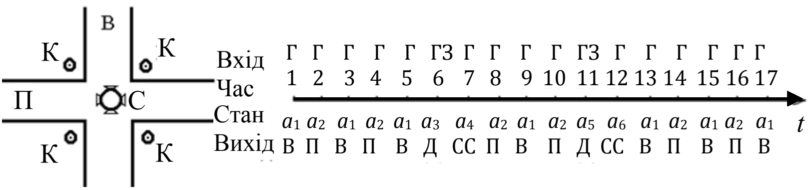
Зрозуміло, що досить легко можна перейти від одного способу задання до іншого.

Автомат A називають **детермінованим**, якщо функції δ і λ всюди визначені, і **недетермінованим**, якщо δ і λ – усюди визначені відповідності між $U \times X$ і U та $U \times X$ та Y, відповідно, але вони не задовольняють умову функціональності. Автомат A називають **частковим**, якщо функції δ і λ не є всюди визначеними.

Приклад 5.1.

1. Розглянемо автомат D, який регулює дорожній рух на перехресті вулиць В і П.

В автомат дорожнього руху D з періодом одна хвилина надходить тактовий сигнал Г генератора синхроімпульсів, що послідовно перемикає сигнали світлофора С, дозволяючи транспорту рух відповідно вулицями В і П (рис. 5.1, *а*). Крім світлофора є також кнопка виклику К, за допомогою якої пішохід може надіслати автомату запит З на призупинення руху на перехресті. При надходженні запиту З і по завершенні поточного інтервалу часу в одну хвилину автомат перериває генерування послідовності сигналів В і П на дві хвилини, сигналом Д запалює транспарант, що дозволяє перехід пішоходам, а по вичерпанні двох хвилин формує сигнал скидання СС, повертаючи автомат до відновлення формування послідовності сигналів В та П. Таким чином, автомат D виробляє вихідні сигнали В, П, Д і СС для дозволу руху транспорту по вулицях В і П, дозволу переходу пішоходам та скидання кнопки виклику. Роботу автомата D ілюструє часова діаграма на рис. 5.1, *б*.



а **Рис. 5.1** *б*

Таблиці переходів і виходів автомата дорожнього руху мають такий вигляд:

δ	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
x_1	a_2	a_1	a_4	a_2	a_6	a_1
x_2	a_3	a_5	a_4	a_2	a_6	a_1

λ	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
x_1	y_2	y_1	y_4	y_2	y_4	y_1
x_2	y_3	y_3	y_4	y_2	y_4	y_1

Тут використано позначення:

x_1 = Г, x_2 = З & Г, y_1 = В, y_2 = П, y_3 = Д, y_4 = Д & СС):

Граф автомата дорожнього руху подано на рис. 5.2.

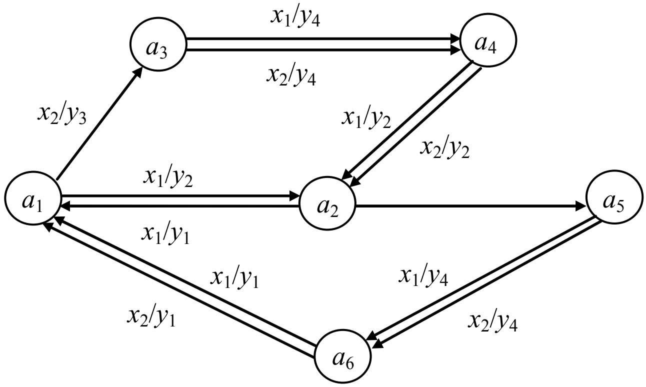


Рис. 5.2

2. Побудуємо автомат *S*, який описує алгоритм функціонування послідовного двійкового суматора. На вхід автомата надходять пари розрядів двійкових чисел, що додаються, починаючи з молодших розрядів. На виході автомата має з'являтися розряд результату додавання. Потрібно також фіксувати й ураховувати ситуацію наявності чи відсутності перенесення в наступний розряд. Ці дві ситуації відображають два стани автомата *S*: початковому стану a_1 відповідає ситуація *немає перенесення*, а стану a_2 – ситуація *є перенесення*.

Вхідні сигнали $x_0 = (0, 0)$, $x_1 = (0, 1)$, $x_2 = (1, 0)$ і $x_3 = (1, 1)$ задають чотири можливі комбінації розрядів, що додаються. Граф автомата *S* подано на рис. 5.3.

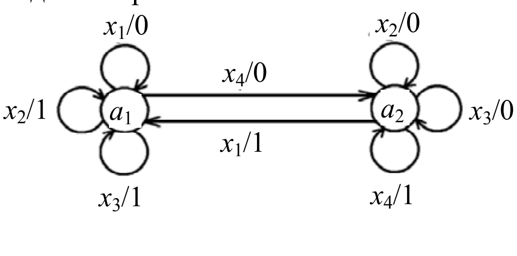


Рис. 5.3

3. Побудуємо суміщену таблицю переходів/виходів автомата A, на виході якого з'являється сигнал 1 тоді й лише тоді, коли на його вхід було подано послідовність символів, що відповідає ідентифікатору якоїсь мови програмування; в іншому разі вихідним сигналом є 0. Вхідні сигнали автомата A: x_1 – літера, x_2 – цифра, x_3 – будь-який інший символ.

П – початковий стан автомата A. Автомат перебуває у стані T, коли на його вхід подається послідовність символів, що відповідає ідентифікатору, в іншому разі він перебуває у стані H.

δ/λ	П	T	H
x_1	T/1	T/1	H/0
x_2	H/0	T/1	H/0
x_3	H/0	H/0	H/0

4. Побудувати автомат-пошуковець S для $X = Y = \{0, 1\}$, на виході якого з'являється сигнал 1 тоді й лише тоді, коли чотири останні вхідні сигнали – це 0110.

Позначимо через 0 стан, що відповідає очікуванню бажаної (шуканої) четвірки символів, через 1 – стан, що фіксує появу на вході автомата першого 0 четвірки, через 2 – стан, що відповідає появі пари 01, через 3 – стан, що відповідає появі 011, і через 4 – стан, у який автомат переходить, коли останніми вхідними сигналами є 0110. Суміщену таблицю переходів/виходів автомата-пошуковця S наведено нижче:

δ/λ	0	1	2	3	4
0	1/0	1/0	1/0	4/1	1/0
1	0/0	2/0	3/0	0/0	2/0

5. Побудувати таблиці переходів і виходів, граф автомата P, що за допомогою своїх станів запам'ятовує два останні символи (двійкові розряди), які було подано на його вхід. Вихідним сигналом є останній символ, що "забувається".

δ/λ	00	01	10	11
0	00/0	10/0	00/1	10/1
1	01/0	11/0	01/1	11/1

Для зручності стани автомата P позначено чотирма можливими варіантами значень двох останніх символів (двійкових розрядів) вхідного слова, тобто автомат P перебуває в стані ab, якщо двома останніми вхідними символами були ab, $a, b \in \{0, 1\}$. ◄

Завдання для самостійної роботи

1. Побудувати таблиці переходів і виходів, граф автомата P, що за допомогою своїх станів запам'ятовує три останні символи (двійкові розряди), які було подано на його вхід. Вихідним сигналом є останній символ, що "забувається".

2. Побудувати таблиці переходів і виходів, граф автомата B, на виході якого з'являється сигнал 1 тоді й лише тоді, коли на його вхід була подана послідовність символів, що відповідає числовій константі – дійсному числу зі знаком і фіксованою крапкою; в іншому разі вихідним сигналом є 0. Вхідні сигнали автомата B: x_1 – знак, x_2 – цифра, x_3 – крапка, x_4 – будь-який інший символ.

3. Побудувати автомат затримки, тобто такий, вихідний сигнал якого в момент часу $t + 1$ дорівнює вхідному сигналу в момент часу t, $X = Y = \{0, 1\}$.

4. Побудувати автомат для $X = Y = \{0, 1\}$, на виході якого з'являється сигнал 1 тоді й лише тоді, коли п'ять останніх вхідних сигналів – це 01101.

5. Побудувати генератор парності, тобто автомат, що функціонує в алфавітах $X = Y = \{0, 1\}$ і реалізує такий алгоритм. На його вхід надходять слова довжиною 3, розділені якимось символом a, $a \in X$. На виході автомат має повторити вхідну трійку символів, замінивши розділовий символ a на 1 тоді й лише тоді, коли кількість одиниць у даній трійці парна.

6. Побудувати автомат, що перевіряє відповідність лівих і правих дужок у вхідному слові, яке задає певний алгебричний вираз. Найбільша дозволена вкладеність дужок – n. Вхідні сигнали автомата: x_1 – ліва дужка, x_2 – права дужка, x_3 – будь-який інший символ, x_4 – символ, що позначає кінець виразу.

7. Побудувати автомат, що керує роботою ліфта в чотириповерховому будинку. Станами автомата є номери поверхів. Вхідний сигнал – номер потрібного поверху, вихідний сигнал – напрямок руху (угору, униз, не рухатись).

5.2. Автоматне відображення

Нехай у процесі функціонування заданого автомата A вхідний сигнал у момент автоматного часу $t = 1$ дорівнює $x_{i_1} \in X$, у наступний момент $t = 2$ – $x_{i_2} \in X$ і т. д., а в момент $t = k$ на вхід автомата A подається сигнал $x_{i_k} \in X$. Інакше кажучи, $x(1) = x_{i_1}$, $x(2) = x_{i_2}$, …, $x(k) = x_{i_k}$. У такому разі говоритимемо, що на вхід автомата A подано **вхідне слово** $x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k} \in X^*$.

Для заданого автомата A його функції переходів δ і виходів λ можна природно поширити з множини $U \times X$ на множину $U \times X^*$, даючи змогу визначати стан і вихідний сигнал у автоматі A після подання на його вхід довільного вхідного слова $p = x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k} \in X^*$. Вважатимемо, що

$$\delta(a_l, p) = \delta(\delta(\ldots(\delta(\delta(a_l, x_{i_1}), x_{i_2}), \ldots), x_{i_{k-1}}), x_{i_k}),$$

$$\lambda(a_l, p) = \lambda(\delta(\ldots(\delta(\delta(a_l, x_{i_1}), x_{i_2}), \ldots), x_{i_{k-1}}), x_{i_k}).$$

Іноді **розширені функції переходів і виходів** автомата позначають особливим чином, наприклад δ^* і λ^*, але ми цього не робитимемо й залишимо для розширених функцій ті самі позначення, що й для основних.

Розширену функцію переходів δ можна також означити індуктивно:

1) $\delta(a_l, x)$ для $x \in X$ визначають за таблицею переходів автомата A;

2) для довільного слова $p \in X^*$ і довільного вхідного сигналу

$$x \in X \ \delta(a_l, px) = \delta(\delta(a_l, p), x).$$

Спираючись на останнє означення, розширену функцію виходів λ можна означити співвідношенням

$$\lambda(a_l, px) = \lambda(\delta(a_l, p), x), p \in X^*, x \in X. \quad (5.2)$$

Для порожнього слова $e \in X^*$ вважають, що $\delta(a_l, e) = a_l$ і $\lambda(a_l, e) = e$.

Нехай A/a_1 – ініціальний автомат. Для довільного вхідного слова $p = x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}$ означимо відповідне вихідне слово $q \in Y^*$ так:

$$q = \lambda(a_1, x_1)\lambda(a_1, x_{i_1}, x_{i_2})\lambda(a_1, x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3})\ldots\lambda(x_{i_1}, x_{i_2} \ldots x_{i_k}).$$

Так означену відповідність між вхідними словами p і вихідними словами q називають **автоматним відображенням**, що індукується (ініціюється, реалізується) автоматом A/a_1; позначають φ_A. Рівносильним означенням автоматного відображення $\varphi_A : X^* \to Y^*$ є такі рекурентні співвідношення:

$$\varphi_A(e) = e,\ \varphi_A(px) = \varphi_A(p)\lambda(a_1, px),\ p \in X^*,\ x \in X. \qquad (5.3)$$

Автоматне відображення часто називають також **поведінкою**, або **зовнішньою поведінкою**, автомата.

Автоматне відображення має дві важливі властивості, що випливають безпосередньо з його означення:

1) $|p| = |\varphi_A(p)|$ для будь-якого слова $p \in X^*$. Через $|w|$ позначено довжину слова w.

2) Якщо $p = p_1p_2$ і $\varphi_A(p) = q_1q_2$, де $|p_1| = |q_1|$, то $q_1 = \varphi_A(p_1)$.

Назвемо сформульовані властивості **умовами автоматності** відображення φ_A.

Поняття автоматного відображення можна узагальнити, аналогічно означивши відповідність між вхідними й вихідними словами, індуковану автоматом A/a_i, тобто автоматом A, що починає роботу зі стану a_i. Позначатимемо таке автоматне відображення через φ_A^i.

Із наведених означень і умов автоматності випливає важлива властивість автоматних відображень φ_A^i: якщо $p = p_1p_2 \in X^*$ і $a_{i_1} = \delta(a_i, p_1)$, то

$$\varphi_A^i(p) = \varphi_A^i(p_1, p_2) = \varphi_A^i(p_1)\varphi_A^{i_1}(p_2). \qquad (5.4)$$

Усі наведені означення можна наочно проілюструвати за допомогою графа автомата. Якщо зафіксувати деякий стан $a_i \in U$ у автоматі A, то будь-яке слово $p = x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k} \in X^*$ однозначно визначає шлях довжиною k, що веде з вершини a_i і складається з k дуг, позначених послідовно вхідними сигналами $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$. Тоді стан $\delta(a_i, p)$ – остання вершина цього шляху, $\lambda(a_i, p)$ – вихідний сигнал, яким позначено останню його дугу, а $\varphi_A^i(p)$ – слово, утворене з послідовності k вихідних сигналів, які написані на k дугах шляху.

Приклад 5.2. Для автомата дорожнього руху D із прикладу 5.1(1) і для вхідних слів $p_1 = x_1x_1x_2$ та $p_2 = x_2x_2x_1x_2$ маємо:

$$\delta(a_1, p_1) = a_3,\ \delta(a_3, p_1) = a_5,\ \delta(a_4, p_2) = a_1,$$
$$\lambda(a_1, p_1) = y_3,\ \lambda(a_4, p_2) = y_1,\ \lambda(a_2, p_2) = y_3.$$

Крім того,

$$\varphi_D(p_1) = y_2y_1y_3,\ \varphi_D(p_2) = y_3y_4y_2y_3,$$
$$\varphi_D^2(p_1) = y_1y_2y_3,\ \varphi_D^4(p_2) = y_2y_3y_4y_1.$$

Для автомата-пошуковця S із прикладу 5.1 (4) матимемо: $\delta(0, 0100101) = 2$, $\delta(3, 10101100) = 1$, $\lambda(1, 0100101) = 0$, $\lambda(3, 1010110) = 1$, $\varphi_S(0100101) = 0000000$, $\varphi_S(1010110110) = 0000001001$. ◄

Завдання для самостійної роботи

1. Дати індуктивне означення розширеної функції виходів.

2. За допомогою методу математичної індукції довести умови автоматності для автоматного відображення φ_A.

3. Методом математичної індукції за довжиною слова p_2 довести властивість (5.4) автоматного відображення.

4. Знайти значення автоматного відображення φ_D на даному вхідному слові для автомата дорожнього руху D із прикладу 5.1(1):

(а) $\varphi_D^1(x_1x_2x_1x_1x_2)$; (б) $\varphi_D^1(x_2x_1x_1x_2x_2x_2)$;

(в) $\varphi_D^2(x_2x_1x_2x_2x_2x_1x_2x_1x_2)$.

5. Знайти значення автоматного відображення φ_S на вхідному слові для автомата S із прикладу 5.1 (2):

(а) $\varphi_S^1(x_1x_2x_1x_3x_2)$; (б) $\varphi_S^1(x_2x_1x_1x_4x_2x_2)$; (в) $\varphi_S^2(x_2x_4x_2x_4x_2x_3x_2x_1x_2)$.

5.3. Ізоморфізм і невідрізнюваність автоматів

Нехай $A_1 = (X, Y, U_1, \delta_1, \lambda_1)$ і $A_2 = (X, Y, U_2, \delta_2, \lambda_2)$ – скінченні автомати. Взаємно однозначне відображення $\gamma: U_1 \to U_2$ називають **ізоморфізмом** (або **ізоморфним відображенням**) автомата A_1 на автомат A_2, якщо для будь-яких $x \in X_1$ і $a \in U_1$ виконуються умови

$$\gamma(\delta_1(a, x)) = \delta_2(\gamma(a), x),\ \lambda_1(a, x)) = \lambda_2(\gamma(a), x). \tag{5.5}$$

Автомати, для яких існує ізоморфізм, називають **ізоморфними**.

Означаючи ізоморфізм для ініціальних автоматів, вважають, що відображення γ переводить початковий стан одного автомата в початковий стан іншого автомата.

Уведене поняття має для автоматів той самий сенс, що й для графів. Як ізоморфні графи відрізняються один від одного тільки назвами своїх вершин, так ізоморфні автомати відрізняються лише іменами (назвами) своїх станів.

Розглянемо пару автоматів

$$A = (X, Y, U_1, \delta_1, \lambda_1) \text{ та } B = (X, Y, U_2, \delta_2, \lambda_2),$$

які мають однакові вхідні й вихідні алфавіти. Отже, усі автоматні відображення, які індукують автомати A та B, мають однакові типи, тобто області визначення й області значень відображень збігаються. Це дає змогу ввести для автоматів такого типу деякі означення.

Стан $a_i \in U_1$ автомата A та стан $b_j \in U_2$ автомата B називають **невідрізнюваними**, якщо для довільного слова $p \in X^*$ виконується рівність $\varphi_A{}^i(p) = \varphi_B{}^j(p)$.

Наведене означення можна застосовувати й тоді, коли $A = B$. У цьому разі вводять відношення невідрізнюваності для різних станів того самого автомата A: стани a_i, $a_j \in U_1$ автомата A називають **невідрізнюваними**, якщо $\varphi_A{}^i(p) = \varphi_A{}^j(p)$ для будь-якого $p \in X^*$.

Автомати A та B називають **невідрізнюваними**, якщо для будь-якого стану $a \in U_1$ автомата A існує невідрізнюваний стан $b \in U_2$ автомата B і, навпаки, для будь-якого стану $d \in U_2$ автомата B існує невідрізнюваний стан $c \in U_1$ автомата A. Ініціальні автомати невідрізнювані, коли їхні початкові стани невідрізнювані.

Невідрізнюваність автоматів означає, що будь-яке автоматне відображення (поведінку), яке реалізує один з автоматів, може реалізувати інший автомат. Інакше кажучи, невідрізнювані автомати за зовнішньою поведінкою подібні між собою.

Неважко переконатися, що відношення невідрізнюваності H рефлексивне, симетричне і транзитивне, отже, є відношенням еквівалентності (на множині станів чи множині автоматів). У зв'язку з цим часто в літературі з теорії автоматів невідрізнюваність називають еквівалентністю, тобто використовують поняття **еквівалентні стани**, **еквівалентні автомати**. Термінологічно це не зовсім зручно й не зовсім коректно, оскільки назву властивості відношення використовують як назву самого відношення. Однак у теорії автоматів ці терміни стали загальноприйнятими, тому далі будемо говорити про еквівалентні стани й еквівалентні автомати, маючи на увазі відношення невідрізнюваності.

Зв'язок наведених вище означень і понять установлює таке важливе твердження: будь-які ізоморфні автомати A_1 і A_2 є невідрізнюваними. Для його обґрунтування слід довести, що для будь-якого стану a автомата A_1 стани a та $\gamma(a)$ є невідрізнюваними, де γ – ізоморфізм автоматів A_1 і A_2.

У різних розділах математики в множині (класі) еквівалентних між собою об'єктів часто означають стандартних представників – **канонічні**, або **нормальні**, **форми**. Зведенням до канонічної форми можна перевірити (або встановити) еквівалентність або нееквівалентність певних об'єктів множини. Такою канонічною формою в теорії автоматів є мінімальний автомат.

Для множини (класу) K всіх невідрізнюваних між собою скінченних автоматів **мінімальним**, або **зведеним**, автоматом називають такий, що належить цій множині, й усі різні стани якого попарно нееквівалентні.

Завдання для самостійної роботи

1. Довести, що відношення невідрізнюваності є відношенням еквівалентності.

2. Побудувати приклад невідрізнюваних автоматів, які не ізоморфні.

5.4. Основні проблеми теорії автоматів

Стосовно зовнішніх умов функціонування розрізняють два типи поведінки і два відповідні типи скінченних автоматів.

Перший тип поведінки – це розглянуте вище й уже знайоме нам перетворення вхідних слів на вихідні, тобто реалізація автоматних відображень. Автомати, що реалізують зазначений тип поведінки, називають **автоматами-перетворювачами**.

Другий тип поведінки – це розпізнання певних множин вхідних слів. **Автомат-розпізнавач**, або **автомат-акцептор**, для будь-якого вхідного слова p дає змогу визначити, належить це слово певній множині чи ні. У разі позитивної відповіді на поставлене запитання кажуть, що слово p **розпізнається**, або **сприймається** автоматом, інакше вважають, що слово p не розпізнається (відкидається).

Найпоширенішу модель ініціального автомата-розпізнавача $A = (X, Y, U, \delta, \lambda)$ означають так. Множину станів U розбивають на дві підмножини: U_1 та U_2. Вважають, що слово $p \in X^*$ розпізнається автоматом A, якщо $\delta(a_1, p) \in U_1$; в іншому разі ($\delta(a_1, p) \in U_2$) слово p відкидається.

Існує кілька можливостей інтерпретування зазначених типів автоматів. Наприклад, автомат-перетворювач можна розглядати як пристрій, що перекодовує (перекладає) слова з однієї мови на іншу, або як пристрій, що реалізує алгоритм розв'язання задач певного типу, перетворюючи умови задачі (вхідні слова) на записи відповідних розв'язків (вихідні слова). Можна інтерпретувати автомат-перетворювач і як пристрій, що реалізує певний зворотний зв'язок: автомат одержує інформацію із зовнішнього середовища у вигляді вхідних слів і виробляє відповідні керувальні послідовності у вигляді вихідних слів тощо. Автомат-розпізнавач можна інтерпретувати як аналізатор, що розпізнає (сприймає) певні синтаксичні конструкції (правильні слова, речення, програми тощо).

Основними проблемами теорії автоматів для кожного з типів поведінки й типів автоматів вважають проблеми аналізу та синтезу.

Проблема аналізу полягає в тому, щоб за заданим автоматом визначити його поведінку й дослідити певні її властивості. Як правило, розв'язання проблеми аналізу принципових труднощів не становить, оскільки зазвичай разом із заданням автомата наводять правила опису його поведінки.

У **задачі синтезу** потрібно, виходячи із заданих умов поведінки, побудувати (синтезувати) автомат, що реалізує цю поведінку. Очевидно, що одна з перших проблем, яка виникає при розв'язанні задачі синтезу – це дослідження питання, які з умов поведінки взагалі можуть бути реалізовані у автоматах, зокрема у скінченних автоматах. Відтак постає проблема побудови власне алгоритму синтезу.

5.5. Зображення подій у автоматах

Наступні параграфи присвячено проблемам аналізу та синтезу для автоматів-розпізнавачів. Оскільки для такого типу автоматів нас цікавитиме для кожного вхідного слова w лише значення розширеної функції переходів на цьому слові (тобто стан, у який автомат перейде, отримавши на вхід слово w), то доцільно розглянути ще одну модель автомата, яку називають автоматом без виходів.

Автомат без виходів $A = (X, U, \delta, a_1, F)$ означають так: перші три об'єкти X, U і δ мають той самий зміст, що й раніше, $a_1 \in U$ – початковий стан, F – множина заключних станів автомата A, $F \subseteq U$. У найближчих параграфах будемо розглядати без додаткових застережень ініціальні скінченні автомати без виходів.

Множину P слів у вхідному алфавіті X, тобто $P \subseteq X^*$, називатимемо **подією** в алфавіті X.

Цей термін став традиційним у теорії автоматів, хоча він не містить нічого принципово нового: можна було б користуватися просто терміном *множина слів у алфавіті X*. Інший термін для цього самого поняття – **мова**.

Подія P **зображувана в автоматі** $A = (X, U, \delta, a_1, F)$ (або автомат A *зображує* подію P), якщо $\delta(a_1, w) \in F$, тоді й тільки тоді, коли $w \in P$.

Кожному автомату $A = (X, U, \delta, a_1, F)$ відповідає зображувана в ньому подія P. Подію P зручно проілюструвати за допомогою графа автомата A: подія P складається зі всіх вхідних слів, відповідні шляхи яких у графі автомата A ведуть із вершини a_1 у вершини з множини F.

Подію P називають **зображуваною** (в автоматі), якщо існує автомат A, який її зображує. Інші терміни для цього поняття: множина, або мова, яка **визначає**, **допускає** чи **розпізнає** автомат.

Можлива ситуація, коли $a_1 \in F$. У цьому разі вважатимемо, що події P, зображуваній у автоматі A, належить порожнє слово e. Порожнє слово не слід плутати з порожньою подією. Автомат A зображує порожню подію, якщо не існує жодного вхідного слова, яке переводить автомат A з початкового стану a_1 в будь-який із заключних станів. Порожню подію будемо позначати символом порожньої множини $\varnothing$.

Будь-яка скінченна множина слів $P = \{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$ в алфавіті X (скінченна подія) зображувана в скінченному автоматі.

Приклад 5.3.

1. На рис. 5.4 подано граф автомата A, що зображує скінченну подію $P = \{x_1x_2x_1x_1,\ x_1x_1x_2,\ x_1x_1x_1x_2,\ x_1x_1x_1\}$. Нижче виписано всі підслова слів множини P і відповідні до них стани шуканого автомата A. Заключні стани автомата A позначено подвійними кругами (кожен з них відповідає одному зі слів події P).

$$e - a_1,\ x_1 - a_2,\ x_1x_1 - a_3,\ x_1x_2 - a_4,\ x_1x_1x_1 - a_5,\ x_1x_1x_2 - a_6,$$
$$x_1x_2x_1 - a_7,\ x_1x_1x_1x_2 - a_8,\ x_1x_2x_1x_1 - a_9.$$

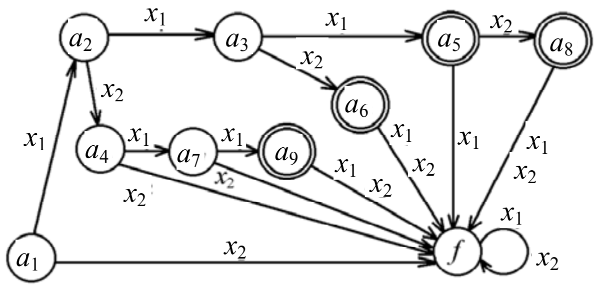


Рис. 5.4

2. Побудувати автомат-розпізнавач, який зображує подію в алфавіті $B = \{0, 1\}$, що складається зі всіх слів, які починаються з 00 і закінчуються парою символів 11, тобто мають вигляд $00w11$, $w \in B^*$.

Таблиця переходів цього автомата має такий вигляд (1 – початковий, 5 – заключний стани):

δ	1	2	3	4	5	f
0	2	3	3	3	f	f
1	f	f	4	5	5	5

Зауваження. Радимо для наочності та кращого розуміння алгоритмів функціонування будувати за наведеними у прикладах таблицями переходів автоматів їхні діаграми (графи).

3. Побудувати скінченний автомат для розпізнавання, чи є вхідний набір символів ідентифікатором якоїсь мови програмування.

У більшості мов програмування ідентифікатор – це послідовність літер і цифр, що починається з літери. Позначимо через x_1 вхідний сигнал, що відповідає літері, x_2 – вхідний сигнал, що відповідає цифрі, і через x_3 – вхідний сигнал, що відповідає будь-якому іншому символу вхідного алфавіту (див. таблицю переходів відповідного автомата: заключним станом автомата є стан 2).

δ	1	2	f
x_1	2	2	f
x_2	f	2	f
x_3	f	f	f

◄

Завдання для самостійної роботи

1. Побудувати автомат-розпізнавач, що зображує скінченну подію P:

(а) $P = \{x_1x_1x_1x_2, x_1x_1x_2x_2x_1, x_1x_1x_1x_1x_2, x_1x_1x_1x_2x_1x_1\}$;

(б) $P = \{e, x_1x_2x_1x_1x_2x_2, x_1x_1x_2x_1x_1x_2, x_1x_2x_1x_1\}$.

2. Нехай подія P зображувана в скінченному автоматі A та $e \notin P$. Як побудувати новий скінченний автомат A', що зображує подію $P \cup \{e\}$?

3. Побудувати автомат-розпізнавач, який зображує подію в алфавіті $B = \{0, 1\}$, що складається зі всіх слів, які починаються й закінчуються парами символів 00 або 11, тобто мають вигляд $00w00$ або $11p11$, $w, p \in B^*$.

4. Побудувати скінченний автомат для розпізнавання певної синтаксичної конструкції:

(а) число з фіксованою крапкою;

(б) простий арифметичний вираз;

(в) коментарі.

5.6. Алгебра регулярних подій

У попередньому параграфі ми навели приклад класу подій – клас скінченних подій, які завжди зображувані в скінченних автоматах. Однак існують події, незображувані в скінченних автоматах. Зрозуміло, що в скінченних автоматах зображувані не тільки скінченні події. Бажано було б мати засоби, за допомогою яких можна було б описувати події, зображувані в скінченних автоматах. Один із таких засобів, запропонований С.-К. Кліні, розвинутий і вдосконалений В. М. Глушковим, Р. Ф. Мак-Нотоном та іншими, має назву **мови регулярних виразів**.

Нехай $P_1, P_2 \subseteq X^*$ – події в алфавіті X. Розглянемо три операції над подіями, які називатимемо **регулярними операціями**.

1. Об'єднання (іноді **диз'юнкція**) подій $P_1 \cup P_2$ – це звичайне теоретико-множинне об'єднання.

2. Множення (**конкатенація**) подій P_1P_2 – це подія, яка складається зі всіх таких слів w_1w_2, що $w_1 \in P_1$ і $w_2 \in P_2$. Зазвичай операцію множення подій використовують без спеціального позначення. Для зручності посилання на цю операцію позначатимемо її через $\cdot$.

3. Ітерацією події P називають подію

$$P^* = \{e\} \cup P \cup P^2 \cup \ldots \cup P^n \cup \ldots = \bigcup_{n=0}^{\infty} P^n.$$

Тут через P^0 позначено подію $\{e\}$, а через P^n – подію $PP\ldots P$ (n разів). Іноді операцію ітерації події P позначають $\{P\}$.

Звернемо увагу на те, що введене вище позначення X^* для множини всіх слів у алфавіті

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$$

і позначення X^* операції ітерації для події X мають той самий смисл. Дійсно, подія

$$X^* = (\{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \ldots \cup \{x_m\})^*$$

складається зі всіх слів (включаючи порожнє слово) в алфавіті X. Через P^+ позначатимемо подію $P^* \backslash \{e\}$.

Окремо зазначимо деякі важливі події. Подію, яка містить усі слова в алфавіті X, тобто X^*, назвемо **загальною**. Подію, яка не містить жодного слова, назвемо **порожньою**, або **неможливою** й позначимо символом порожньої множини $\varnothing$.

Використовуючи регулярні операції, круглі дужки та події в алфавіті X як операнди, одержуватимемо вирази, що задають певні події в алфавіті X. Щоб зменшити кількість дужок у виразах, домовимося про такі пріоритети для регулярних операцій: спочатку виконується ітерація, відтак – множення і, нарешті, – об'єднання.

Приклад 5.4.

1. Виписати всі слова події P^* в алфавіті $X = \{a, b\}$, довжина яких дорівнює k.

(а) $P = \{ab, bb\}$, $k = 6$. (б) $P = \{aa, b\}$, $k = 5$.

(а) *ababab*, *ababbb*, *abbbab*, *abbbbb*, *bbabab*, *bbabbb*, *bbbbab*, *bbbbbb*.

(б) *aaaab*, *aabaa*, *baaaa*, *aabbb*, *baabb*, *bbaab*, *bbbaa*, *bbbbb*.

2. Визначити, чи належать події P слова v і w.

(а) $P = \{000\}^*\{1\}^*\{0\}$, $v = 00011110$, $w = 11100$.

(б) $P = \{001, 11\}^*\{0, 11\}$, $v = 11001110$, $w = 1001011$.

(а) Слово v належить події P, тому що для його підслів маємо $000\in\{000\}^*$, $1111\in\{1\}^*$ і $0\in\{0\}$. Слово w не належить події P, оскільки слова події P, що містять принаймні один символ 1, закінчуються тільки одним символом 0.

(б) $v\in P$, $w\notin P$. ◄

Вирази називають **рівносильними** (**еквівалентними**), якщо вони задають ту саму подію. Рівносильність виразів позначатимемо за допомогою знака =. Безпосередньо із означень випливають такі властивості регулярних операцій.

Нехай P, Q і T – довільні події. Тоді:

1) $(P \cup Q) \cup T = P \cup (Q \cup T)$, $(PQ)T = P(QT)$ – **асоціативність**;

2) $P \cup Q = Q \cup P$ (комутативність об'єднання);

3) $P(Q \cup T) = PQ \cup PT$, $(P \cup Q)T = PT \cup QT$ – **дистрибутивність**;

4) $P \cup P = P$ – **ідемпотентність об'єднання**;

5) $(P^*)^* = P^*$, $P^*P^* = P^*$ – **ідемпотентність ітерації**;

6) $PP^* = P^*P$; (5.6)

7) $P^* = \{e\} \cup PP^* = (\{e\} \cup P)^*$, $\{e\}P = P\{e\} = P$, $\{e\}^* = \{e\}$ – **властивості події** $\{e\}$);

8) $P\varnothing = \varnothing P = \varnothing$, $P \cup \varnothing = P$, $\varnothing^* = \{e\}$ – **властивості порожньої події** $\varnothing$;

9) $(P \cup Q)^* = (P^* \cup Q^*)^* = (P^*Q^*)^*$;

10) $(P^* \cup Q)^* = (P \cup Q)^*$;

11) $P^* = (\{e\} \cup P \cup P^2 \cup \ldots \cup P^{n-1})(P^n)^*$.

Зазначимо, що операція множення подій некомутативна.

Події $\{x_i\}$, де $x_i\in X$, називають **елементарними**. До елементарних подій належить також подія $\{e\}$.

Подія P називається **регулярною**, якщо вона є результатом застосування скінченної кількості операцій об'єднання, множення та ітерації до елементарних подій.

Точніше індуктивне означення регулярних подій таке:

1) елементарні події $\{e\}$ та $\{x_i\}$, $x_i\in X$, $i = 1, 2, \ldots, m$ – регулярні;

2) якщо P_1 і P_2 – регулярні події, то $P_1 \cup P_2$, P_1P_2 та P_1^* – регулярні події;

3) інших регулярних подій, окрім побудованих за правилами 1) і 2), немає.

Із означення випливає, що кожну регулярну подію можна зобразити (задати) деяким виразом (формулою), що складається зі скінченної кількості регулярних подій (операндів) і знаків регулярних операцій. Такі вирази називають **регулярними**. Регулярним виразом для порожньої події вважатимемо символ $\varnothing$.

Регулярні вирази **рівносильні** (**еквівалентні**), якщо вони задають ту саму регулярну подію.

Усі наведені вище рівносильні співвідношення (5.6) справедливі й для регулярних подій, тобто мають місце також для довільних регулярних виразів. Як завжди в алгебрах, ці рівносильності дають змогу виконувати рівносильні перетворення (зокрема оптимізацію, або спрощення) регулярних виразів.

Очевидно, що будь-яка подія

$$\{x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}\},$$

що складається з одного слова в алфавіті X^*, регулярна, оскільки вираз

$$\{x_{i_1}\}\{x_{i_2}\}\ldots\{x_{i_k}\},$$

що зображує цю подію, регулярний. Більш того, будь-яка скінченна подія

$$P = \{w_1, w_2, \ldots, w_t\}$$

є регулярною та її можна задати виразом

$$\{w_1\}\cup\{w_2\}\cup \ldots \cup\{w_t\}.$$

Регулярною є також загальна подія X^*, оскільки

$$X^* = (\{x_1\}\cup\{x_2\}\cup \ldots \cup\{x_m\})^*.$$

Зауважимо, що для зручності та компактності запису регулярних виразів часто випускають фігурні дужки в позначеннях елементарних подій і замість подій (множин) $\{x_i\}$ записують просто

$$x_i,\ i = 1, 2, \ldots, m,$$

а замість $\{e\}$ – e. Іноді для більшої коректності замість $\{x_i\}$ пишуть $\boldsymbol{x_i}$ або $\mathbf{x}_i$.

Має місце така центральна теорема теорії автоматів (Кліні): подія P зображувана в скінченному автоматі тоді й тільки тоді, коли вона регулярна. Теорема Кліні визначає ту центральну роль, яку відіграють регулярні події й відповідні регулярні вирази в теорії автоматів.

Приклад 5.5.

1. Написати регулярний вираз у алфавіті $X = \{0, 1\}$, який задає подію, що складається зі всіх слів таких і тільки таких,

(а) у яких кількість символів 0 кратна трьом;

(б) які містять рівно три символи 1;

(в) що містять 01011 як підслово.

(а) $\{1^*01^*01^*01^*\}^*$;

(б) $0^*10^*10^*10^*$;

(в) $\{0, 1\}^*01011\{0, 1\}^*$.

2. Написати регулярний вираз у алфавіті $X = \{0, 1, 2\}$, який задає подію, що складається зі всіх слів таких і тільки таких, у яких п'ятим символом з кінця є 2.

$\{0, 1, 2\}^*2\{0, 1, 2\}^4$.

3. Описати звичайними словами мову (подію) P у алфавіті $X = \{a, b\}$, задану регулярним виразом:

(а) $a\{a, b\}^*bb$; (б) $\{a\}^*\{b\}^*a\{e, bb\}^*$.

(а) Подія P – це множина всіх слів у алфавіті $X = \{a, b\}$, які починаються символом a та закінчуються парою символів bb.

(б) Будь-яке слово даної події починається з довільної кількості (зокрема 0) символів a, за якими йде довільна кількість символів b, і завершується або символом a, або підсловом abb.

4. Побудувати автомат, що розпізнає множину всіх слів у алфавіті $\{0, 1\}$,

(а) що закінчуються на 00; (б) що містять три нулі поспіль;

(в) що містять 01011 як підслово.

Нижче подано таблиці переходів таких автоматів. У кожному з них початковим є перший стан, а заключним – останній.

(а)

δ	1	2	3
0	2	3	3
1	1	1	1

(б)

δ	1	2	3	4
0	2	3	4	4
1	1	1	1	4

(в)

δ	1	2	3	4	5	6
0	2	2	4	2	4	2
1	1	3	1	5	6	1

Завдання для самостійної роботи

1. Нехай P, Q, R і S – події в алфавіті X. Довести, що коли $P \subseteq R$ і $Q \subseteq S$, то $PQ \subseteq RS$. Чи правильним є обернене твердження?

2. Визначити всі можливі події P і Q в алфавіті $\{0, 1\}$, для яких $PQ = \{01, 010, 0101, 0111, 01000, 010111\}$.

3. Виписати всі слова події P^*, довжина яких не перевищує k:

(а) $P = \{ab, b\}$, $k = 5$; (б) $P = \{a, ab, ba\}$, $k = 7$;

(в) $P = \{aa, aba, baa\}$, $k = 9$.

4. Скільки слів довжиною k містить подія, задана регулярним виразом r?

(а) $r = (a \cup b)^*$, $k = 3$; (б) $r = (aa \cup b)^*$, $3 \leq k < 7$;

(в) $r = (a \cup b)^*$, $k = n$; (г) $r = (aa \cup b)^*$, $k = n$.

5. Довести, що коли $P \subseteq Q$, то $P^* \subseteq Q^*$.

6. Нехай $P = \{aa, ba\}$ і $Q = \{aa, ba, aaaa\}$. Довести, що

$$P^* = Q^*.$$

7. Нехай $P = \{aa, ba\}$ і $Q = \{aa, ba, aaa\}$. Довести, що

$$P^* \subset Q^*.$$

8. Навести приклад таких подій P і Q, що:

(а) $P \subset Q$, однак $P^* = Q^*$; (б) $P^* = Q^*$, однак $P \not\subset Q$ (символ $\not\subset$ позначає, що не виконується жодне зі співвідношень $\supset, \supseteq, \subset, \subseteq, =$).

9. Нехай для непорожньої події P виконується рівність $P^2 = P$. Довести, що: (а) $e \in P$; (б) $P^* = P$.

10. Написати регулярний вираз у алфавіті $X = \{0, 1\}$, який задає подію, що складається зі всіх слів таких і тільки таких,

(а) у яких кількість символів 0 кратна 3;

(б) які містять рівно 3 символи 1;

(в) які закінчуються на 00 або на 11;

(г) які містять 00 або 11 тільки один раз;

(д) які містять парну кількість 1;

(е) у яких сьомим символом є 0;

(є) у яких третім символом від кінця є 1;

(ж) у яких нулі утворюють підслова парної довжини.

11. Описати словами подію, задану регулярним виразом:

(а) $a(a \cup b)^*$; (б) $(aa \cup ab \cup ba \cup bb)^*$;

(в) $(a \cup b)^*a(e \cup bbb)$; (г) $(a(a \cup bb)^*)^*$;

(д) $(a(aa)^*b(bb)^*)^*$; (е) $(b(bb)^*)^*(a(aa)^*b(bb)^*)^*$.

12. Побудувати скінченний автомат, що відшукує у вхідному тексті (слові) певний фрагмент, тобто автомат, що переходить у заключний стан тоді й тільки тоді, коли вхідне слово в алфавіті $X = \{a, b\}$ завершується підсловом.

(а) *abba*; (б) *bbbaba*; (в) *aabbaaa*; (г) *baabbba*.

13. Довести такі рівносильні співвідношення для регулярних виразів:

(а) $(a \cup b)^*ab(a \cup b)^* \cup b^*a^* = (a \cup b)^*$;

(б) $(ab)^*a = a(ba)^*$;

(в) $(a^* \cup b)^* = (a \cup b)^*$;

(г) $(a^*b)^*a^* = a^*(ba^*)^*$;

(д) $((a \cup bb)^*aa)^* = e \cup (a \cup bb)^*aa$;

(е) $(aa)^*(e \cup a) = a^*$;

(є) $(a^*bbb)^*a^* = a^*(bbba^*)^*$;

(ж) $a(ba \cup a)^*b = aa^*b(aa^*b)^*$.

14. Довести чи спростувати твердження про рівносильність таких регулярних виразів:

(а) $(ab \cup a)^*a = a(ba \cup a)^*$;

(б) $(ab \cup a)^*ab = (aa^*b)^*$;

(в) $(a \cup b)^*b = (a^*b)^*$;

(г) $b(ab \cup b)^*a = aa^*b(aa^*b)^*$;

(д) $(a \cup b)^* = a^*(ba^*)^*$;

(е) $a(a \cup b)^* \cup b(a \cup b)^* \cup e = (a \cup b)^*$.

Розділ 6
СЕМАНТИЧНІ ЗАСАДИ ЛОГІКИ ПРЕДИКАТІВ

У попередніх розділах, які стосувались математичної логіки, увагу було зосереджено переважно на синтаксичних аспектах. Тепер детальніше розглянемо семантичні аспекти логіки.

6.1. Класи *n*-арних і квазіарних функцій

Основним поняттям логіки із семантичного погляду є поняття **предиката**, яке інтуїтивно можна тлумачити як відображення значень змінних у значення істинності.

Наприклад, розглянемо предикат, що задається виразом

якщо $x > y$ та $y > z$, то $x > z$.

Тут вільними змінними є змінні x, y, z. Якщо такий предикат інтерпретується над множиною цілих чисел, то його значення слід обчислювати за наявності значень цих змінних. Нехай x має значення 17, y – 11, z – 3. Це означає, що визначено певний стан змінних, який записуватимемо у вигляді $[x \mapsto 17, y \mapsto 11, z \mapsto 3]$. Стан змінних також називають **інтерпретацією**, **оцінкою** або **розподілом** змінних.

Таким чином, розглянутий предикат є відображенням множини станів змінних у значення істинності. Множину значень істинності позначають $Bool = \{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}$ або $Bool = \{T, F\}$. Щоб зберегти однотипність позначень з іншими розділами посібника, уживатимемо позначення $\{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}$. Розглядаючи предикат як указану функцію, будемо називати стани змінних **даними** (з області визначення предиката).

Застосувавши предикат до даного (стану змінних)

$$[x \mapsto 17, y \mapsto 11, z \mapsto 3],$$

отримуємо істиннісне значення **1**.

Наведені міркування дають змогу формально означити поняття стану змінних. Нехай V – множина змінних (імен), M – множина предметних (базових) значень. Тоді довільна часткова функція із V у M називають **станом змінних**, **іменованими даними**, **квазіарними даними**, або просто **даними**. Множину таких даних позначатимемо $D = V \to M = {}^{V}M$.

Якщо іменами є цілі числа, то квазіарне дане вигляду

$$[1 \mapsto a_1, 2 \mapsto a_2, \ldots\ n \mapsto a_n]$$

називатимемо n-арним даним. Такі дані зазвичай позначають у вигляді кортежа $(a_1, a_2, \ldots\ a_n)$. Кортеж є елементом декартового добутку M^n. Відповідно квазіарні дані є елементами узагальненого часткового декартового добутку ${}^{V}M$.

Уведені позначення дають змогу означити класи n-арних та квазіарних функцій. Функція, визначена на класі n-арних даних, називають ***n*-арною**, а функцію, визначену на класі квазіарних даних, – **квазіарною**.

Спеціальними класами таких функцій є предикати та ординарні функції. Предикат p: $M^n \to Bool$ називають ***n*-арним предикатом**, а предикат q: ${}^{V}M \to Bool$ – **квазіарним предикатом**. Функцію f: $M^n \to M$ називають ***n*-арною ординарною функцією**, а функцію g: ${}^{V}M \to M$ – **квазіарною ординарною функцією**. Термін *ординарний* часто пропускатимемо.

Розглянемо предикат над цілими числами, який задається виразом

якщо $x > y$ та $z > t$, то $x + z > y + t$.

Із яких предикатів і функцій побудовано цей предикат? Бачимо, що тут фігурують бінарний предикат > та бінарна функція +. Однак якого типу є функції x+z та y+t ? Оскільки функції визначені над станами змінних, то вони є квазіарними. Ці квазіарні функції отримано підстановкою (суперпозицією) квазіарних функцій розіменування (узяття значення) змінних у бінарну функцію +. Функції розіменування позначатимемо $'x$, $'y$, $'z$, $'t$. Наприклад, на стані

$$[x \mapsto 17, y \mapsto 11, z \mapsto 3]$$

значення змінних $'x$, $'y$, $'z$ дорівнюють відповідно 17, 11, 3, значення змінної $'t$ не визначено. Позначатимемо це таким чином:

$$'x\ ([x \mapsto 17, y \mapsto 11, z \mapsto 3]) \downarrow = 17,$$

$$'y([x \mapsto 17, y \mapsto 11, z \mapsto 3]) \downarrow = 11,$$

$$'z([x \mapsto 17, y \mapsto 11, z \mapsto 3\,]) \downarrow = 3,$$

$$'t([x \mapsto 17, y \mapsto 11, z \mapsto 3])\uparrow.$$

Тут символ $\downarrow$ означає, що значення функції визначено, а символ $\uparrow$ – що воно не визначено.

Позначаючи підстановку квазіарних предикатів (функцій) у n-арний предикат як S_P^n, отримуємо, що предикат $x > y$ подають як $S_P^2(>,'x,'y)$. Відповідно подають також інші предикати. Тут S_P^n – операція над квазіарними предикатами. Її задають формулою

$$S_P^2(p, g_1, ..., g_n)(d) = p(g_1(d), ..., g_n(d)),$$

де p – n-арний предикат, $g_1,\ldots,g_n$ – квазіарні ординарні функції, d – номінативне дане.

Яким чином побудовано предикат, що заданий виразом

якщо $x > y$ та $y > z$, то $x > z$?

Очевидно, що його побудовано із квазіарних предикатів

$$S_P^2(>,'x,'y),\ S_P^2(>,'y,'z) \text{ та } S_P^2(>,'x,'z)$$

за допомогою спеціальної операції над предикатами, яку називають **імплікацією** й позначають символом $\rightarrow$. Операції подібного типу називатимемо **композиціями** предикатів, а відповідне подання предиката – **композиційною формулою** (інколи вживають також назви **композиційний терм**, **операторний терм**, **семантичний терм**). Остаточно отримуємо таку композиційну формулу:

$$S_P^2(>,'x,'y)\ \&\ S_P^2(>,'y,'z) \rightarrow S_P^2(>,'x,'z).$$

Приклад 6.1.

1. Обчислити предикат

$$S_P^2(>,'x,'y)\ \&\ S_P^2(>,'y,'z) \rightarrow S_P^2(>,'x,'z).$$

на номінативному даному $d = [x \mapsto 17, y \mapsto 11, z \mapsto 3\,]$.

Спираючись на означення композицій суперпозиції, обчислюємо спочатку

$$S_P^2(>,'x,'z)(d) = >('x(d),'z(d)) = >(17,3) = 1.$$

За означенням композиції імплікації отримуємо, що

$$S_P^2(>,'x,'z)\ \&\ S_P^2\ (>,'y,'z) \rightarrow S_P^2(>,'x,'z)(d) = 1.$$

2. Обчислити вказаний предикат на номінативному даному

$$d = [x \mapsto 1, y \mapsto 11, z \mapsto 3].$$

Спочатку обчислюємо

$$S_P^2(>,'x,'z)(d) = >('x(d),'z(d)) = >(1,3) = \mathbf{0}.$$

Оскільки консеквент хибний, то обчислюємо антицедент. Для цього обчислюємо значення

$$S_P^2(>,'x,'y)(d) = >('x(d),'y(d)) = >(1,11) = \mathbf{0},$$

$$S_P^2(>,'y,'z)(d) = >('y(d),'z(d)) = >(11,3) = 1.$$

Звідси

$$S_P^2(>,'x,'y)\ \mathbf{\&}\ S_P^2('>,'y,'z)(d) = \mathbf{0},$$

$$\left(S_P^2(>,'x,'y)\ \mathbf{\&}\ S_P^2('>,'y,'z) \to S_P^2(>,'x,'z)\right)(d) = 1. \blacktriangleleft$$

Для функцій вводимо композицію **суперпозиції** квазіарних ординарних функцій у n-арну функцію:

$$S_F^n(f, g_1,..., g_n)(d) = f(g_1(d),..., g_n(d)),$$

де f – n-арна функція, $g_1,\ldots, g_n$ – квазіарні ординарні функції, d – номінативне дане.

Приклад 6.2. Написати композиційну формулу для предиката, що поданий виразом

якщо $x > y$ та $z > t$, то $x + z > y + t$,

та обчислити його значення на номінативному даному

$$d = [x \mapsto 17, y \mapsto 11, z \mapsto 5, t \mapsto 3].$$

Указаний вираз можна задати композиційною формулою

$$S_P^2(>,'x,'y)\ \mathbf{\&}\ S_P^2('>,'y,'z) \to S_P^2(>, S_F^2(+,'x,'z), S_F^2(+,'y,'t).$$

Обчислюємо

$$S_P^2\big(>, S_F^2(+,'x,'z), S_F^2(+,'y,'t)(d) = >(S_F^2(+,'x,'z)(d), S_F^2(+,'y,'t)(d)\big) =$$

$$= >\big(+\big('x(d),'z(d)),+\ (y(d))\big)\big) = >\big(+(17,5),+\ (11,3) => (22,14)\big) = 1.$$

Це означає, що

$$S_P^2(>,'x,'y)\ \mathbf{\&}\ S_P^2('>,'y,'z) \to S_P^2\big(>, S_F^2(+,'x,'z), S_F^2(+,'y,'t)\big)(d) = \mathbf{1}. \blacktriangleleft$$

Підсумовуючи розглянуті приклади, доходимо висновку, що семантика логіки предикатів спирається на дві алгебри (алгебричні системи): алгебру предметних значень із n-арними операціями та алгебру квазіарних предикатів і функцій з композиціями як операцій.

Композиції поділяємо на два класи, які буде означено в наступних параграфах: пропозиційні композиції і композиції квантифікації.

Завдання для самостійної роботи

1. Побудувати композиційні формули для предикатів:

якщо $x = y$ та $y = z$, *то* $x = z$;

якщо $x > y$ та $z > t$, то $x \times z > y \times t$.

2. Обчислити значення предикатів, отриманих у попередньому завданні, на таких номінативних даних:

$d = [x \mapsto 17, y \mapsto 11, z \mapsto 5, t \mapsto 3]$;

$d = [x \mapsto 12, y \mapsto 11, z \mapsto 55, t \mapsto 33, v \mapsto 13]$.

6.2. Пропозиційні композиції

Пропозиційний рівень розгляду характеризується тим, що тут ми не проникаємо до внутрішньої структури об'єктів дослідження. На цьому рівні предикати розглядають як функції вигляду

$$p : A \to \{\mathbf{1}, \mathbf{0}\},$$

де A – абстрактна множина, тобто її елементи неструктуровані.

Предикат p на множині A назвемо **істинним**, якщо $p(d) = \mathbf{1}$ для всіх $d \in A$.

Для довільних предикатів $p, q : A \to \{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}$ пишемо $p \Rightarrow q$, якщо з умови $p(d) = \mathbf{1}$ випливає $q(d) = \mathbf{1}$ для довільних $d \in A$.

На пропозиційному рівні засобом утворення складніших висловлень чи предикатів із простіших є **логічні операції** (композиції), які не враховують структурованості даних – **пропозиційні композиції,** або **логічні зв'язки**. Зазначимо, що на відміну від булевих операцій, які означають на множині булевих значень, тут логічні зв'язки тлумачать як операції над предикатами. Тому ці операції задаємо не таблицями істинності, а значеннями предикатів на довільному $d \in A$.

Основними логічними зв'язками є **диз'юнкція** $\vee$, **кон'юнкція** $\&$, **імплікація** $\to$, **заперечення** $\neg$ та **еквіваленція** $\sim$.

Указані композиції задамо так (p, q – предикати, d – довільне значення з A):

$$(p \vee q)(d) = \begin{cases} \mathbf{1}, & \text{якщо } p(d) = \mathbf{1} \text{ або } q(d) = \mathbf{1}, \\ \mathbf{0}, & \text{якщо } p(d) = \mathbf{0} \text{ та } q(d) = \mathbf{0}. \end{cases}$$

$$(p \,\&\, q)(d) = \begin{cases} \mathbf{1}, & \text{якщо } p(d) = \mathbf{1} \text{ та } q(d) = \mathbf{1}, \\ \mathbf{0}, & \text{якщо } p(d) = \mathbf{0} \text{ або } q(d) = \mathbf{0}. \end{cases}$$

$$(p \to q)(d) = \begin{cases} \mathbf{1}, & \text{якщо } p(d) = \mathbf{0} \text{ або } q(d) = \mathbf{1}, \\ \mathbf{0}, & \text{якщо } p(d) = \mathbf{1} \text{ та } q(d) = \mathbf{0}. \end{cases}$$

$$(\neg p)(d) = \begin{cases} \mathbf{1}, & \text{якщо } p(d) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{0}, & \text{якщо } p(d) = \mathbf{1}. \end{cases}$$

$$(p \sim q)(d) = \begin{cases} \mathbf{1}, & \text{якщо } p(d) = q(d), \\ \mathbf{0}, & \text{якщо } p(d) \neq q(d). \end{cases}$$

Укажемо основні властивості пропозиційних композицій.

1) Комутативність $\vee$, & та $\sim$:

$p \vee q = q \vee p$; $p \,\&\, q = q \,\&\, p$; $p \sim q = q \sim p$.

2) Асоціативність $\vee$, & та $\sim$:

$(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$; $(p \,\&\, q) \,\&\, r = p \,\&\, (q \,\&\, R)$;

$(p \sim q) \sim r = p \sim (q \sim r)$.

3) Дистрибутивність $\vee$ відносно & та & відносно $\vee$:

$(p \vee q) \,\&\, r = (p \,\&\, r) \vee (q \,\&\, r)$; $(p \,\&\, q) \vee r = (p \vee r) \,\&\, (q \vee r)$.

4) Зняття подвійного заперечення: $\neg \neg p = p$.

5) Ідемпотентність $\vee$ та &: $p = p \vee p$; $p = p \,\&\, p$.

6) Закони де Моргана:

$\neg (p \vee q) = (\neg p) \,\&\, (\neg q)$; $\neg(p \,\&\, q) = (\neg p) \vee (\neg q)$.

7) Зведення $\to$ та $\sim$ до $\neg$, $\vee$ та &:

$p \to q = (\neg p) \vee q$; $p \sim q = (p \to q) \,\&\, (q \to p)$.

8) Закони поглинання: $P \Rightarrow p \vee q$; $p \,\&\, q \Rightarrow p$.

9) Закон (правило) *modus ponens*: $p \,\&\, (p \to q) \Rightarrow q$.

10) Основоположні закони логіки виражають такі істинні предикати:

– **закон тотожності**: $p \sim p$;

– **закон виключеного третього**: $(\neg p) \vee p$;

– **закон суперечливості**: $\neg (p \,\&(\neg p))$.

Завдання для самостійної роботи

1. Виразити композиції & та ~ через композиції $\neg$ та $\vee$.

2. Довести наведені вище основні властивості пропозиційних композицій.

6.3. Композиції квантифікації

У класичній логіці квантори зазвичай вводять на синтаксичному рівні при означенні формул, їхня семантична роль як логічних операцій розкривається при інтерпретації формул.

Тут означимо композиції квантифікації $\exists x$ та $\forall x$ для квазіарних предикатів. Для цього замість абстрактної множини значень A, що розглядалась для пропозиційного випадку, візьмемо множину квазіарних даних ${}^{V}M$.

Для квазіарного даного d запис $d\,\nabla x \mapsto a$ означає нове квазіарне дане, у якому предметне ім'я (змінна) x отримує значення a; для інших змінних залишається те значення, яке вони мали в d.

Предикати $\exists x(p)$ та $\forall x(p)$ позначатимемо $\exists xp$ та $\forall xp$. Задамо їх так (p: ${}^{V}M \to Bool$, $d \in {}^{V}M$):

$$(\exists xp)(d) = \begin{cases} \mathbf{1}, & \text{якщо існує } b \in M: \; p(d\,\nabla x \mapsto b) = \mathbf{1}, \\ \mathbf{0}, & \text{якщо } P(d\,\nabla x \mapsto a) = \mathbf{0} \text{ для всіх } a \in M. \end{cases}$$

$$(\forall xp)(d) = \begin{cases} \mathbf{1}, & \text{якщо } p(d\,\nabla x \mapsto a) = \mathbf{1} \text{ для всіх } a \in M, \\ \mathbf{0}, & \text{якщо існує } b \in M: \; p(d\nabla x \mapsto b) = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Основні властивості композицій $\exists x$ та $\forall x$:

1) Комутативність однотипних кванторів:

$$\exists x \exists yp = \exists y \exists xp; \quad \forall x \forall yp = \forall y \forall xp.$$

2) Закони де Моргана для кванторів:

$$\neg \exists xp = \forall x \neg p; \quad \neg \forall xp = \exists x \neg p.$$

3) Неістотність квантифікованих імен:

$$\exists x \exists xp = \exists xp; \quad \exists x \forall xp = \forall xp; \quad \forall x \exists xp = \exists xp; \; \forall x \forall xp = \forall xp.$$

4) Закони $p \Rightarrow \exists xp$ та $\forall xp \Rightarrow p$.

5) Закон $\exists y \forall xp \Rightarrow \forall x \exists yp$.

6) Закони дистрибутивності кванторів щодо $\vee$ та &:

$\exists xp \vee \exists xq = \exists x(p \vee q)$; $\forall xp \& \forall xq = \forall x(p \; \& \; q)$;

$\exists x(p\&q) \Rightarrow \exists xp\&\exists xq$; $\forall xp \vee \forall xq \Rightarrow \forall x(p \vee q)$.

Зауважимо, що назва **логіка першого порядку** пов'язана із тим, що квантори застосовують лише до імен компонентів у квазіарних даних (до предметних імен). Якщо квантори застосовують до предикатів (функцій), то отримуємо логіки другого порядку.

6.4. Алгебричні системи та алгебри предикатів

Семантика логіки предикатів першого порядку задається двома типами алгебр: алгеброю предметних значень (у нашому випадку – алгебричною системою) та алгеброю предикатів.

Алгебричною системою (АС) назвемо об'єкт вигляду

$$\boldsymbol{A} = (M, Fn^M, Pr^M),$$

де M – непорожня множина предметних значень, яку називають **носієм**, або **основою** АС, Fn^M та Pr^M – множини n-арних функцій і предикатів, заданих на M.

Нехай Fs та Ps – довільні множини, які відповідно називають множинами функціональних (ФС) і предикатних символів (ПС). Нехай

$$\boldsymbol{I}^{Fs} : Fs \to Fn^M \text{ та } \boldsymbol{I}^{Ps} : Ps \to Pr^M$$

– відображення інтерпретації функціональних і предикатних символів. Кожен функціональний і предикатний символ має свою арність. Уведені поняття дозволяють узагальнити поняття алгебричної системи, яку тепер розглядатимемо як кортеж

$$\boldsymbol{A} = (M, \boldsymbol{I}^{Fs}, \boldsymbol{I}^{Ps}).$$

Для кожного $F \in Fs$ функцію $f \in Fn^M$ таку, що $\boldsymbol{I}^{Fs}(F) = f$, назвемо **значенням** ФС F за інтерпретації $\boldsymbol{I}^{Fs}$ на АС

$$\boldsymbol{A} = (M, \boldsymbol{I}^{Fs}, \boldsymbol{I}^{Ps})$$

і позначатимемо цю функцію $F_{\boldsymbol{A}}$. Предикат $p \in Pr^M$ такий, що $\boldsymbol{I}^{Ps}(P) = p$, назвемо **значенням** ПС P при інтерпретації $\boldsymbol{I}^{Ps}$ на АС $\boldsymbol{A}$ та позначимо цей предикат $P_{\boldsymbol{A}}$. Функцію $F_{\boldsymbol{A}}$ називають базовою, а предикат $P_{\boldsymbol{A}}$ – базовим предикатом. Якщо функція $F_{\boldsymbol{A}}$ є функцією-константою на A, то ФС F називають **константним символом.**

Зауважимо, що за інтерпретації функціонального чи предикатного символу арність отриманої функції чи предиката дорівнює арності відповідного символу.

Алгебричні системи задають властивості предметних значень за допомогою n-арних функцій і предикатів, заданих на M. Однак основними класами предикатів і функцій є класи квазіарних ординарних предикатів та функцій, які позначимо відповідно

$$FnQ^M = {}^V M \to M \quad \text{та} \quad PrQ^M = {}^V M \to Bool.$$

Їхні властивості задаються за допомогою композицій квазіарних предикатів і функцій. Для мов першого порядку достатньо поняття алгебри квазіарних предикатів, а саме: кортеж

$$\boldsymbol{A1} = (PrQ^{M}, \neg, \vee, \&, \to, \sim, \exists x, \forall x)$$

називають **алгеброю квазіарних предикатів першого порядку**.

Яким чином пов'язані алгебрична система та алгебра предикатів? Фактично – через третю алгебру, основними операціями якої є суперпозиції в n-арні функції і предикати. Ця алгебра відіграє допоміжну роль, тому тут не розглядатимемо її детально.

Для логіки першого порядку алгебра предикатів є фіксованою, різні інтерпретації формул задаються за допомогою алгебричних систем.

Завдання для самостійної роботи

1. Виразити композицію $\forall x$ через композиції $\neg$ та $\exists x$.

2. Довести наведені вище основні властивості композицій $\exists x$ та $\forall x$.

6.5. Мови першого порядку та їх інтерпретації

Уведені раніше алгебри (алгебрична система предметних значень та алгебра квазіарних предикатів) фактично визначають мову логіки предикатів першого порядку, або просто **мову першого порядку.**

Сигнатура мови (множини символів) складається з таких типів символів:

– **предметні імена** (змінні) x, y, z,... з деякої множини V;

– **функціональні символи** f_0, f_1, f_2,... заданої арності з деякої множини Fs;

– **предикатні символи** p_0, p_1, p_2,... заданої арності з деякої множини Ps;

– **символи логічних операцій** (композицій) $\neg$, $\vee$ та $\exists$;

– **символ рівності** = предметних значень.

У множині *Fs* може виділятися підмножина константних символів $Cn \subseteq Fs$. Символ рівності = завжди інтерпретуємо як предикат рівності, причому таку рівність трактуємо як **тотожність**.

Символи $\neg$, $\vee$, $\exists$, = і предметні імена назвемо базовими **логічними** символами. Функціональні та предикатні символи, окрім =, назвемо **нелогічними** символами. Множини *Fs* та *Ps* утворюють **сигнатуру** мови першого порядку.

Основними конструкціями мови першого порядку є **терми** та **формули**. Терми використовують для позначення, назви об'єктів предметної області, формули – для запису тверджень про такі об'єкти.

Індуктивне означення **терму** таке:

1) кожне предметне ім'я та кожна константа є термом; такі терми назвемо **атомарними**;

2) якщо $t_1,..., t_n$ – терми, F – n-арний функціональний символ, то $F(t_1...t_n)$ – терм.

Атомарною формулою називають вираз вигляду $P(t_1...t_n)$, де P – n-арний предикатний символ, $t_1,..., t_n$ – терми.

Індуктивне визначення **формули** таке:

1) кожна атомарна формула є формулою;

2) якщо Φ та Ψ – формули, то $(\neg \Phi)$ та $(\Phi \vee \Psi)$ – формули;

3) якщо Φ – формула, x – предметне ім'я, то $(\exists x\Phi)$ – формула.

Дужки можна опускати, ураховуючи пріоритет операцій та їх асоціативність. Пріоритет символів логічних зв'язок вважаємо нижчим за пріоритет предикатних символів, а пріоритет предикатних символів – нижчим за пріоритет функціональних символів. Квантори мають вищий пріоритет ніж бінарні логічні зв'язки. Для бінарних функціональних і предикатних символів зазвичай застосовуємо інфіксну форму запису. Те саме – для атомарних формул. Для формул вигляду $\neg (t_1 = t_2)$ уживатимемо скорочення $t_1 \neq t_2$.

Вирази $\Phi\&\Psi$, $\Phi \to \Psi$ та $\Phi \sim \Psi$ вважаємо відповідно скороченнями формул

$\neg (\neg \Phi \vee \neg \Psi)$, $\neg \Phi \vee \Psi$ та $\neg (\neg (\neg \Phi \vee \Psi) \vee \neg (\neg \Psi \vee \Phi))$.

Користуємося також символом $\forall$, вважаючи вираз $\forall x\Phi$ скороченням формули $\neg \exists x \neg \Phi$.

Скорочення термів і формул називатимемо просто термами та формулами. Множини термів і формул мови першого порядку позначатимемо відповідно Tr та Fr. Формули й терми визначають мову логіки L.

У формулі вигляду $\exists x\Phi$ або $\forall x\Phi$ формулу Φ називають **областю дії** квантора за x. Вираз вигляду $\exists x$ або $\forall x$ називають **кванторним префіксом.**

Входження імені (змінної) x до формули Φ **зв'язане**, якщо воно міститься в області дії деякого квантора за x, інакше таке входження x у Φ **вільне**. Якщо існує вільне входження імені x до формули Φ, то x – **вільне ім'я** (**вільна змінна**) формули Φ.

Формулу Φ із вільними іменами $x_1,.., x_n$ позначаємо $\Phi(x_1,.., x_n)$.

Формула **замкнена**, якщо вона не має вільних імен.

Терм, який не містить входжень предметних імен, називають **замкненим термом**. Зокрема, таким є кожний константний символ.

Наведемо приклади мов першого порядку.

Приклад 6.3.

1. Мова арифметики L_{ar} визначається сигнатурою

$$0,\ 1,\ +,\ \times,\ =,$$

де 0 та 1 – константні символи, + та $\times$ – бінарні функціональні символи, = – бінарний предикатний символ.

Терм мови арифметики назвемо **арифметичним термом**, а формулу мови арифметики – **арифметичною формулою.**

Наприклад,

$1 + 1$ – **замкнений арифметичний терм**;

$x \times (y + z)$ – **арифметичний терм**;

$\exists z(x + z = y)$ – **арифметична формула**.

2. Мова теорії множин L_{set} визначається сигнатурою $\in$, =, де $\in$ та = – бінарні предикатні символи.

Наприклад,

$z\in x$ – **атомарна формула**;

$\forall z(z\in x\to z\in y)$ – **формула**;

$\exists x\neg\exists y(y\in x)$ – **замкнена формула мови** $L_{set.}$

Зауважимо, що останні дві формули відповідно означають $x \subseteq y$ та *існує* $\varnothing$.

3. Мова теорії впорядкованих множин L_{ord} визначається сигнатурою <, =, де < та = – бінарні предикатні символи.

Наприклад,

$x < y$ – **атомарна формула**;

$z < x \to x < y \to z \in y$ – **формула**;

$\forall x \exists y (y < x)$ – **замкнена формула мови** L_{ord}. ◄

Зв'язані імена у формулах можна замінювати іншими предметними іменами, але при цьому може виникнути **колізія** – ситуація, за якої вільні імена стали зв'язаними. Наприклад, із формули

$$\exists z(x + z = y)$$

можна отримати формулу

$$\exists t(x + t = y),$$

коли колізії немає, і формулу

$$\exists x(x + x = y),$$

коли колізія змінила смисл формули.

Вільні входження предметних імен до формули або терму можна замінювати термами. Позначимо

$$\Phi_{x_1,\ldots,x_n}[t_1,\ldots, t_n]$$

формулу, отриману із формули Φ заміною всіх вільних входжень імен $x_1,.., x_n$ на терми $t_1,..., t_n$, відповідно. Для термів аналогічно вводимо позначення

$$t_{x_1,\ldots,x_n}[t_1,\ldots, t_n].$$

У загальному випадку формули

$$\Phi_{x,y}[a, b] \text{ та } (\Phi_x[a])_y[b]$$

– різні. Наприклад, якщо Φ – це формула $x\in y$, то $\Phi_{x,y}[y, z]$ – формула $y\in z$, $(\Phi_x[y])_y[z]$ – формула $z\in z$.

При заміні вільних входжень предметних імен термами можливі колізії, за яких вільне ім'я стає зв'язаним. Наприклад, нехай Φ – це формула $\exists z(x + z = y)$. Тоді

$\Phi_x[u]$ – це формула $\exists z(u + z = y)$;

$\Phi_x[z]$ – це формула $\exists z(z + z = y)$.

Отже, маємо колізію.

Звідси терм t **допустимий для заміни вільного імені** x **у формулі** Φ, якщо за такої заміни не виникають колізії.

Інтерпретацією, або **моделлю** мови L, називатимемо АС із доданою сигнатурою вигляду $\boldsymbol{A} = (M, \boldsymbol{I}^{Fs}, \boldsymbol{I}^{Ps})$.

Множину A називають **областю інтерпретації**.

Значення символів і виразів мови L задамо на $\boldsymbol{A}$ таким чином.

Предметні імена інтерпретуємо як імена елементів (змінні) на M. Символи логічних операцій інтерпретуємо як відповідні логічні операції (композиції). Константні символи інтерпретуємо як конкретні елементи множини M, тобто як функції-константи на M. Предикатні та функціональні символи інтерпретуємо як предикати та функції відповідної арності, визначені на M, причому бінарний предикатний символ = завжди інтерпретуватимемо як предикат рівності на M.

Для інтерпретації термів і формул мови L задамо відображення

$$\boldsymbol{J}^{Tr}: Tr \to FnQ^M \text{ та } \boldsymbol{J}^{Fr}: Fr \to PrQ^M,$$

яке індуктивно визначають за допомогою $\boldsymbol{I}^{Fs}$ та $\boldsymbol{I}^{Ps}$.

Для термів маємо:

$\boldsymbol{J}^{Tr}(x) = '\boldsymbol{x}$;

$\boldsymbol{J}^{Tr}(F(t_1,..,t_n)) = \boldsymbol{I}^{Fs}(F)(\boldsymbol{J}^{Tr}(t_1),..., \boldsymbol{J}^{Tr}(t_n)) = F_A(\boldsymbol{J}^{Tr}(t_1),..., \boldsymbol{J}^{Tr}(t_n))$.

Для атомарних формул маємо:

$\boldsymbol{J}^{Fr}(P(t_1...t_n)) = \boldsymbol{I}^{Ps}(P)(\boldsymbol{J}^{Fr}(t_1),..., \boldsymbol{J}^{Fr}(t_n)) = P_A(\boldsymbol{J}^{F}(t_1),..., \boldsymbol{J}^{F}(t_n))$.

Для формул маємо:

Нехай $\boldsymbol{J}^{Fr}(\Phi) = p$. Тоді $\boldsymbol{J}^{Fr}(\neg\,\Phi) = \neg\, p$, $\boldsymbol{J}^{Fr}(\exists x\Phi) = \exists \boldsymbol{x} p$.

Нехай $\boldsymbol{J}^{Fr}(\Phi) = p$ та $\boldsymbol{J}^{Fr}(\Psi) = q$. Тоді $\boldsymbol{J}^{Fr}(\Phi\vee\Psi) = p \vee q$.

Зауважимо, тут ми неявно використовуємо введені раніше композиції суперпозиції:

$F_A(g_1,..., g_n)$, по суті, означає $S^n_F(F_A, g_1,..., g_n)$,

$P_A(g_1,..., g_n)$ означає $S^n_P(P_A, g_1,..., g_n)$.

Терми та формули за заданої інтерпретації визначають спеціальні підкласи квазіарних функцій і предикатів, які називають X-арними функціями та предикатами. Тут X – множина імен (змінних) $\{v_1,..., v_n\}$. Значення X-арних функцій і предикатів визначаються лише значеннями змінних із X, інші змінні не впливають на значення функцій і предикатів. Клас X-арних даних позначаємо M^X.

Уведені визначення дають змогу стверджувати, що кожний терм із вільними іменами $v_1,..., v_n$ інтерпретується як $\{v_1,..., v_n\}$-арна функція на M, кожна формула з вільними іменами $v_1,..., v_n$

– як $\{v_1,..., v_n\}$-арна функція на M. Зокрема, кожний замкнений терм інтерпретується як функція-константа на M, кожна замкнена формула – як предикат-константа на M.

Функцію, що є значенням терму t на АС $\boldsymbol{A} = (M, \boldsymbol{I}^{Fs}, \boldsymbol{I}^{Ps})$, позначаємо t_A; предикат, що є значенням формули Φ на АС $\boldsymbol{A} = (M, \boldsymbol{I}^{Fs}, \boldsymbol{I}^{Ps})$, позначаємо Φ_A. Це означає, що

$$\boldsymbol{J}^{Tr}(t) = t_A,\ \boldsymbol{J}^{Fr}(\Phi) = \Phi_A.$$

Формулу Φ назвемо **істинною за інтерпретації $\boldsymbol{A}$**, або **істинною на $\boldsymbol{A}$**, або **$\boldsymbol{A}$-істинною**, якщо предикат Φ_A є істинним.

Останнє означає: X-арний предикат $\Phi_{\boldsymbol{A}}$ такий, що для всіх $d \in M^X$ маємо $\Phi_{\boldsymbol{A}}(d) = \mathbf{1}$.

Те, що формула Φ істинна на АС $\boldsymbol{A}$, позначатимемо $\boldsymbol{A} \vDash \Phi$.

Формулу Φ називають **всюди істинною**, якщо вона істинна за кожної інтерпретації.

Те, що Φ усюди істинна, позначатимемо $\vDash \Phi$.

Формулу Φ назвемо **виконуваною за інтерпретації $\boldsymbol{A}$**, або **виконуваною на** *АС* $\boldsymbol{A}$, або **$\boldsymbol{A}$-виконуваною**, якщо предикат Φ_A є виконуваним. Це означає: X-арний предикат Φ_A є таким, що для деякого $d \in M^X$ виконується $\Phi_A(d) = \mathbf{1}$.

Формулу Φ називають **виконуваною**, якщо вона виконувана за деякої інтерпретації.

Приклад 6.4.

1. Формула $x = x$ усюди істинна.

2. Формула $\forall x \forall y(x = y)$ істинна на всіх 1-елементних АС і тільки на них; формула $\neg\forall x \forall y(x = y)$ істинна на всіх k-елементних АС, де $k > 1$, і тільки на них.

Замиканням формули Φ із вільними іменами $x_1,..., x_n$ назвемо замкнену формулу $\forall x_1...\forall x_n\Phi$, яку позначатимемо $\overline{\Phi}$.

Із наведених означень випливає **семантична теорема замикання:**

Для всіх інтерпретацій $\boldsymbol{A}$ та формули Φ

$$\boldsymbol{A} \vDash \Phi \Leftrightarrow \boldsymbol{A} \vDash \overline{\Phi}.$$

3. Кожна формула вигляду $\Phi_x[t] \to \exists x\Phi$ усюди істинна. ◄

Формула Φ мови L k-**істинна**, якщо $\boldsymbol{A} \vDash \Phi$ для кожної k-елементної інтерпретації $\boldsymbol{A}$ мови L.

Формула Φ **скінченно-істинна**, якщо Φ є k-істинною для кожного $k > 0$. Отже, скінченно-істинна формула є істинною за кожної скінченної інтерпретації.

Приклад 6.5.

1. Формула

$$\exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_k((x_1 \neq x_2)\&\ldots\&(x_1 \neq x_k)\&(x_2 \neq x_3)\&\ldots\&(x_{k1} \neq x_k)),$$

яку позначимо E_k, стверджує, що існує не менше k різних елементів області інтерпретації. Отже, E_k є n-істинною для всіх $n \geq k$.

2. Формула

$$\exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_k \forall y((y = x_1) \vee \ldots \vee (y = x_k)),$$

яку позначимо G_k, стверджує, що існує не більше k різних елементів області інтерпретації. Отже, G_k є n-істинною для всіх $1 \leq n \leq k$.

3. Формула $E_k\&G_k$ k-істинна, але не є n-істинною для кожного $n \neq k$.

Завдання для самостійної роботи

1. Навести приклади природних 2-елементних інтерпретацій $L_{ar.}$

2. Указати формули L_{set}, які означають:

1) $X \subset Y$; 2) $X = Y \cup Z$;

3) $X = 2^Y$; 4) $X = (Y \cap Z)\backslash S$.

3. Довести чи спростувати твердження:

1) $\vDash \forall x \exists y A \to \exists y \forall x A$; 2) $\vDash \exists y \forall x A \to \forall x \exists y A$;

3) $\vDash \forall x A \vee \forall x B \to \forall x(A \vee B)$; 4) $\vDash \forall x(A \vee B) \to \forall x A \vee \forall x B$;

5) $\vDash \exists x A \vee \exists x B \to \exists x(A \vee B)$; 6) $\vDash \exists x(A \vee B) \to \exists x A \vee \exists x B$;

7) $\vDash \forall x A \& \forall x B \to \forall x(A \& B)$; 8) $\vDash \forall x(A \& B) \to \forall x A \& \forall x B$;

9) $\vDash \exists x A \& \exists x B \to \exists x(A \& B)$; 10) $\vDash \exists x(A \& B) \to \exists x A \& \exists x B$;

11) $|= \exists x A \vee B \to A \vee \exists x B$; 12) $\vDash A \& \forall x B \to \forall x A \& B$;

13) $|= \forall x A \vee \exists x B \to \exists x A \vee \forall x B$; 14) $\vDash \exists x A \vee \forall x B \to \forall x A \vee \exists x B$.

6.6. Виразність в алгебричних системах. Арифметичні предикати, множини, функції

Нехай $\boldsymbol{A} = (M, \boldsymbol{I}^{Fs}, \boldsymbol{I}^{Ps})$ – деяка АС. Квазіарний предикат $p \in PrQ^{M}$ **виразний формулою** Φ **в інтерпретації** $\boldsymbol{A}$, якщо p – суть предикат $\Phi_{\boldsymbol{A}}$.

Предикат p **виразний в** *АС* $\boldsymbol{A}$, якщо p виразний деякою формулою Ф.

Множину, що є областю істинності предиката, виразного в АС $\boldsymbol{A}$, називаєть **виразною в АС $\boldsymbol{A}$ множиною**.

Функцію, графік якої – виразна в АС $\boldsymbol{A}$ множина, називають **виразною в АС $\boldsymbol{A}$ функцією**.

Приклад 6.6.

1. Предикат $x = 0$ в АС $(\boldsymbol{N}, \times, =)$, $(\boldsymbol{Q}, \times, =)$ та $(\boldsymbol{R}, \times, =)$ виражається формулою

$$\forall y(x \times y = x).$$

2. Предикат $x = 1$ в АС $(\boldsymbol{N}, \times, =)$, $(\boldsymbol{Z}, \times, =)$ та $(\boldsymbol{R}, \times, =)$ виражається формулою

$$\forall y(x \times y = y).$$

3. Предикат $x = 0$ в АС $(\boldsymbol{N}, +, =)$, $(\boldsymbol{Z}, +, =)$ та $(\boldsymbol{R}, +, =)$ виражається формулою

$$x + x = x.$$

4. Предикат $x = 1$ в АС $(\boldsymbol{N}, +, =)$ виражається формулою

$$\forall u \forall v(x = u + v \rightarrow u = u + u \vee v = v + v) \ \& \neg\, x = x + x.$$

5. Предикат $y = x + 4$ в АС $(\boldsymbol{R}, y = x + 2, =)$ виражається формулою

$$\exists z(y = z + 2 \ \& \ z = x + 2).$$

6. Предикат $| x–y | = 2$ в АС $(\boldsymbol{Z}, | x - y | =1, =)$ виражається формулою

$$\exists z(| x - z | = 1 \ \&| z - y | = 1 \& \neg \ x = y.$$

7. Предикат $| x - y| = 3$ в АС $(\boldsymbol{Q}, y = x + 3, =)$ виражається формулою

$$y = x + 3 \vee x = y + 3.$$

8. Предикат $z = x + 1$ виражається в АС $(Z, <, =)$ формулою

$$(x < z) \& \neg \exists v(x < v \ \& \ v < z).$$

Тут $\boldsymbol{N}$ – множина натуральних, $\boldsymbol{Z}$ – множина цілих, $\boldsymbol{Q}$ – множина раціональних, а $\boldsymbol{R}$ – множина дійсних чисел.

Множину натуральних чисел $\boldsymbol{N}$ із виділеними константами 0 та 1, означеними на $\boldsymbol{N}$ стандартними бінарними операціями (функціями) додавання + і множення × та стандартним бінарним предикатом рівності, назвемо **стандартною інтерпретацією**, або **стандартною моделлю** мови арифметики.

Арифметичну формулу, яка істинна на $\boldsymbol{N}$, називають **істинною арифметичною формулою** (скорочено ІАФ).

Кожна всюди істинна арифметична формула є ІАФ, але не кожна ІАФ усюди істинна. Наприклад, формула $\neg\,\exists x(x + 1 = 0)$ є ІАФ, але вона не істинна на $\boldsymbol{Z} = (\boldsymbol{Z}, 0, 1, +, \times, =)$ та на $\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{R}, 0, 1, +, \times, =)$.

Предикати, множини та функції, виразні в $\boldsymbol{N} = (N, 0, 1, +, \times, =)$, назвемо **арифметичними**. Отже, функція f арифметична, якщо її графік є арифметичною множиною. Звідси маємо: арифметична формула Ф виражає функцію f, якщо Ф виражає предикат $y = f(x_1, \ldots, x_n)$.

Приклад 6.7.

1. Предикати x *є* **парним числом** та x **ділиться на** y арифметичні, вони виражаються формулами

$$\exists y(x = y + y) \text{ та } \exists z(x = y \times z).$$

2. Предикат x *є* **простим числом** арифметичний. Він виражається арифметичною формулою

$$\forall y \forall z(x = y \times z \rightarrow y = 1 \vee z = 1) \,\&\, \neg\, x = 1.$$

3. Предикати $x \leq y$ та $x < y$ арифметичні. Вони виражаються арифметичними формулами

$$\exists z(x + z = y) \text{ та } \exists z(x + z = y \,\&\, x \neq y).$$

4. Предикат $x \leq y$ в АС $\boldsymbol{N} = (N, 0, 1, +, \times, =)$, $\boldsymbol{R} = (R, 0, 1, +, \times, =)$ та $\boldsymbol{Z} = (Z, 0, 1, +, \times, =)$ виражається різними арифметичними формулами. Дійсно, маємо:

для $\boldsymbol{N}$ $\quad \exists z(x + z = y)$;

для $\boldsymbol{R}$ $\quad \exists z(x + z \times z = y)$,

для $\boldsymbol{Z}$ $\quad \exists z \exists u \exists v \exists w(x + z \times z + u \times u + v \times v + w \times w = y)$. ◄

Використовуючи наведений приклад, у записах арифметичних формул надалі вживатимемо скорочення вигляду $x \leq y$ та $x < y$.

Приклад 6.8. Арифметичними є такі функції:

Функції $x + y$, $x \times y$ та $x \dot{-} y$ виражаються формулами

$$z = x + y,\ z = x \times y \text{ та } y + z = x.$$

Функція $[x/y]$ виражається формулою

$$z \times y \le x \,\&\, x < (z + 1) \times y.$$

Функція $\mathrm{mod}(x, y)$ виражається формулою

$$\exists u(x = \mathrm{z} + u \times y \,\&\, z < y).$$

Функція $[\sqrt{x}\,]$ виражається формулою

$$z \times z \le x \,\&\, z < (z + 1) \times (z + 1). \blacktriangleleft$$

Завдання для самостійної роботи

1. Указати формули відповідної мови, що виражають такі предикати:

1) $\mathrm{mod}(x,3) = 0$ та $x = 2$ в АС ($\boldsymbol{N}$; +, =);
2) x **парне** та x **непарне** в АС ($\boldsymbol{Z}$; +, =);
3) $y = x + 9$ в АС ($\boldsymbol{N}$; $y = x + 3$, =);
4) $| x–y | = 6$ в АС ($\boldsymbol{R}$; $| x - y | = 2$, =);
5) $x = 0$ та $x = 1$ в АС ($\boldsymbol{N}$; <, =);
6) $x = 1$ та $x = –1$ в АС ($\boldsymbol{Z}$; ×, =).

2. Указати формулу L_{ar}, що виражає предикат:

1) *існує більше чотирьох парних чисел*;
2) *існує не менше чотирьох непарних чисел*;
3) *не існує простих чисел*, *кратних* 4;
4) *існують прості числа*, *кратні* 5;
5) *множина непарних чисел нескінченна*;
6) *існує єдине парне просте число*;
7) *кожне парне число*, *більше ніж* 2, *є сумою двох простих чисел*.

3. Указати формулу L_{ar}, що виражає функцію:

1) $| x \dot{-} y |$; 2) $\mathrm{mod}(x, [y/z])$; 3) $HCD(x, y)$; 4) $HCK(x, y)$.

6.7. Аксіоматичні системи логік першого порядку

Розглянемо аксіоматичні системи гільбертівського типу.
Спочатку означимо поняття формальної системи.

Під **формальною системою** (ФС) розуміють трійку (L, A, P), де L – мова формальної системи, A – множина **аксіом**, P – множина **правил виведення**.

Мова задається **алфавітом** і правилами побудови її слів, які називають **формулами**. Кожна аксіома є формулою. Правила виведення ФС діють на множині формул.

Формулу, що отримують із аксіом за допомогою правил виведення, називають **теоремою**. Правила виведення записують у вигляді

$$P_1, P_{2,}..., P_n \vdash P, \text{ де } P_1, P_{2,}...,$$

де P_n – засновки, P – висновок.

Під **виведенням** розумітимемо скінченну послідовність формул $\Phi_1, \Phi_{2,}..., \Phi_m$, де кожна із формул є або аксіомою, або її отримано із попередніх формул цієї послідовності за допомогою деякого правила виведення.

Аксіоматичні системи логік першого порядку називають численнями першого порядку, або теоріями першого порядку. Під **теорією першого порядку** розумітимемо формальну систему $T = (L, A, P)$, де L – мова першого порядку, A – множина **аксіом**, розбита на множину **логічних** аксіом і множину **власних** аксіом, P – множина **правил виведення**.

Логічні аксіоми є в усіх теоріях першого порядку, власні аксіоми визначають специфіку тієї чи іншої теорії.

Множина логічних аксіом задається такими схемами аксіом:

*Ax*1) $\neg\, \Phi \vee \Phi$ – пропозиційні аксіоми;

*Ax*2) $\Phi_x[t] \to \exists x\Phi$ – аксіоми підстановки;

*Ax*3) $x = x$ – аксіоми тотожності;

*Ax*4) $x_1 = y_1 \to ... \to x_n = y_n \to F(x_1 \ldots x_n) = F(y_1 \ldots y_n)$ та
$x_1 = y_1 \to \ldots \to x_n = y_n \to P(x_1 \ldots x_n) \to P(y_1 \ldots y_n)$ – аксіоми рівності.

Множина ***P*** складається із таких правил виведення:

П1) $\Phi \vdash \Psi \vee \Phi$ – **правило розширення**;

П2) $\Phi \vee \Phi \vdash \Phi$ – **правило скорочення**;

П3) $\Phi \vee (\Psi \vee \Xi) \vdash (\Phi \vee \Psi) \vee \Xi$ – **правило асоціативності**;

П4) $\Phi \vee \Psi, \neg\, \Phi \vee \Xi \vdash \Psi \vee \Xi$ – **правило перетину**;

П5) $\Phi \to \Psi \vdash \exists x\Phi \to \Psi$, якщо x не вільна в Ψ, – **правило $\exists$-введення**.

Теоремою теорії першого порядку $\boldsymbol{T}$ називають формулу, яка виводиться із аксіом за допомогою скінченної кількості застосувань правил виведення. Множину теорем теорії $\boldsymbol{T}$ позначатимемо Th($\boldsymbol{T}$).

Те, що формула A – теорема, позначатимемо $\boldsymbol{T} \vdash A$, або $\vdash A$, якщо $\boldsymbol{T}$ мається на увазі.

Абстрагуючись від наборів символів логічних операцій, способів запису термів і формул, наборів логічних аксіом і правил виведення, можна сказати, що **теорія першого порядку визначається сигнатурою мови та множиною власних аксіом**.

Сигнатурою теорії першого порядку називають сигнатуру мови цієї теорії. Формулу мови теорії називатимемо також формулою теорії.

Розглянемо кілька прикладів теорій першого порядку.

Приклад 6.9.

1. Теорію першого порядку, що не містить власних аксіом, називають **численням предикатів першого порядку** (скорочено ЧП-1).

2. Особливе місце серед формальних теорій займає теорія натуральних чисел – **формальна арифметика**. Таку теорію позначимо Ar. Мовою Ar є мова L_{ar}. Власні аксіоми Ar:

Ar1) $\neg(x + 1 = 0)$; Ar2) $x + 1 = y + 1 \to x = y$;

Ar3) $x + 0 = x$; Ar4) $x + (y + 1) = (x + y) + 1$;

Ar5) $x \times 0 = 0$; Ar6) $x \times (y + 1) = x \times y + x$;

Ar7) $A_x[0] \,\&\forall x(\mathrm{A}\to \mathrm{A}_{\boldsymbol{x}}[x{+}1])\to \forall xA$ – аксіоми індукції.

Кожна власна аксіома формальної арифметики є ІАФ. ◄

Неважко довести, що **логічні аксіоми є всюди істинними формулами**. Як наслідок цього факту, а також того, що правила виведення зберігають властивість усюди істинності, маємо, що **кожна теорема ЧП-1 є всюди істинною формулою**.

Моделлю теорії першого порядку $\boldsymbol{T}$ називають інтерпретацію мови теорії, на якій істинні всі власні аксіоми теорії $\boldsymbol{T}$.

Приклад 6.10.

1. Моделлю ЧП-1 є кожна інтерпретація його мови.

2. Моделлю формальної арифметики *Ar* є $\boldsymbol{N}$ – стандартна інтерпретація L_{ar}. Таку модель називають **стандартною моделлю** формальної арифметики.

Формулу Ф називають **істинною** в теорії $\boldsymbol{T}$, якщо Ф істинна на кожній моделі теорії $\boldsymbol{T}$.

Справедливі такі твердження:

Кожна теорема теорії першого порядку $\boldsymbol{T}$ істинна в $\boldsymbol{T}$ (теорема істинності).

Кожна тавтологія є теоремою (теорема тавтології).

У наведених нижче прикладах використаємо теорему тавтології (ТТ).

Приклад 6.11.

1. $\vdash \forall xA \to A$.

$(Ax2) \vdash \neg A \to \exists x \neg A$, звідки за ТТ $\vdash \neg\exists x \neg A \to$ A, тобто

$$\vdash \forall x\mathrm{A} \to \mathrm{A}.$$

2. (**правило $\forall$-введення**). Якщо $\vdash A \to B$ та x не вільне в A, то

$$\vdash A \to \forall xB.$$

Якщо $\vdash A \to B$, то $\vdash \neg B \to \neg A$ за ТТ, звідки $\vdash \exists x \neg B \to \neg A$ за П5. Тоді $\vdash \neg\neg A \to \neg \exists x \neg B$ за ТТ, отже, $\vdash A \to \forall xB$.

3. (правила $\exists$-дистрибутивності та $\forall$-дистрибутивності). Якщо $\vdash A \to$ B, то маємо $\vdash \exists xA \to \exists xB$ та $\vdash \forall xA \to \forall xB$.

Маємо $\vdash A \to B$ (умова) та $\vdash B \to \exists xB$ (аксіома $Ax2$), звідки за ТТ $\vdash A \to \exists xB$, тому за П5 дістаємо $\vdash \exists xA \to \exists xB$.

Із умови маємо $\vdash \neg B \to \neg A$ за ТТ, отже $\vdash \neg A \to \exists x \neg A$ $(Ax2)$, звідки за ТТ $\vdash \neg B \to \exists x \neg A$.

За П5 $\vdash \exists x \neg B \to \exists x \neg A$, тому за ТТ $\vdash \neg \exists x \neg$ A $\to \neg \exists x \neg B$, тобто $\vdash \forall xA \to \forall xB$.

Наведені приклади дають змогу ввести похідні правила виведення:

– **правило $\forall$-вв**: $A \to B \vdash A \to \forall xB$, якщо x не вільне в A;

– **правило $\exists$-дис**: $A \to$ B $\vdash \exists xA \to \exists xB$;

– **правило $\forall$-дис**: $A \to$ B $\vdash \forall xA \to \forall xB$.

4. (**правило усоблення**). Якщо $\vdash \forall x$A, то $\vdash A$.

За п. 1 $\vdash \forall xA \to A$. Звідси та з умови $\vdash \forall xA$ за МР $\vdash A$.

5. (**правило узагальнення**). Якщо $\vdash A$, то $\vdash \forall xA$.

Якщо $\vdash A$, то за П1 $\vdash \forall xA \vee A$, звідки за ТТ $\vdash \neg A \to \forall xA$. Тоді $\vdash \exists x \neg A \to \forall xA$ за П5, тобто $\vdash \forall xA \vee \forall xA$.

Тепер $\vdash \forall xA$ за П2.

6. $\vdash \exists x\exists yA \leftrightarrow \exists y\exists xA$.

Із аксіоми Aх2 $\vdash A \to \exists xA$ за $\exists$-дис маємо $\vdash \exists yA \to \exists y\exists xA$, далі за П5 $\vdash \exists x\exists yA \to \exists y\exists xA$.

Аналогічно $\vdash \exists y\exists xA \to \exists x\exists yA$, тому за ТТ $\vdash \exists x\exists yA \leftrightarrow \exists y\exists xA$.

7. $\vdash \exists x\forall yA \to \forall y\exists xA$. Маємо $\vdash A \to \exists xA$ ($Ax2$), звідки $\vdash \forall yA \to \forall y\exists xA$ за $\forall$-дис. За П5 маємо $\vdash \exists x\forall yA \to \forall y\exists xA$.

8. $\vdash \exists x(A \vee B) \to \exists xA \vee \exists xB$. Маємо

$$\vdash A \to \exists xA\ (Ax2) \text{ та } \vdash B \to \exists xB\ (Ax2),$$

звідки за ТТ маємо $\vdash A \vee B \to \exists xA \vee \exists xB$.

Тепер за П5 $\vdash \exists x(A \vee B) \to \exists xA \vee \exists xB$.

9. $\vdash \exists xA \vee \exists xB \to \exists x(A \vee B)$. За ТТ маємо $\vdash A \to A \vee B$ та $\vdash B \to A \vee B$, звідки $\vdash \exists xA \to \exists x(A \vee B)$ та $\vdash \exists xB \to \exists x(A \vee B)$ за $\exists$-дис.

Тепер $\vdash \exists xA \vee \exists xB \to \exists x(A \vee B)$ за ТТ.

10. $\vdash \forall x(A \to B) \to (A \to \forall xB)$ за умови *x не вільне в A*.

Маємо $\vdash \forall x(A \to B) \to (A \to B)$ (п. 1), звідки за ТТ дістаємо $\vdash \forall x(A \to B)\ \&\ A \to B$.

За правилом $\forall$-введення $\vdash \forall x(A \to B)\ \&\ A \to \forall xB$, звідки за ТТ $\vdash \forall x(A \to B) \to (A \to \forall xB)$.

11. (правило симетрії). Для довільних термів a та b

$$\vdash a = b \leftrightarrow b = a.$$

Маємо $\vdash x = y \to x = x \to x = x \to y = x$,

аксіома рівності для ПС =

звідки $\quad \vdash x = x \to x = x \to y = x \to y = x$ за ТТ.

Однак $\vdash x = x$ ($Ax3$), тому послідовно за МР

$$\vdash x = x \to y = x \to y = x \quad \text{та} \quad \vdash x = y \to y = x.$$

Аналогічно $\vdash y = x \to x = y$, тому $\vdash x = y \leftrightarrow y = x$ за ТТ. Звідси за ПП $\vdash a = b \leftrightarrow b = a$.

12 (**правило транзитивності**). Для довільних термів a, b та c

$$\vdash a = b \to b = c \to a = c.$$

Маємо $\vdash y = x \to y = z \to y = y \to x = z$,

аксіома рівності для предикатного символу =

звідки $\vdash y = y \to y = x \to y = z \to x = z$ за ТТ.

Однак $\vdash y = y$ ($Ax3$), тому за МР $\vdash y = x \to y = z \to x = z$.

Згідно із правилом симетрії $\vdash x = y \to y = x$, тому $\vdash x = y \to y = z \to x = z$ за ТТ. За ПП $\vdash a = b \to b = c \to a = c$. ◄

Нехай ***T*** – довільна теорія першого порядку із множиною власних аксіом ***Ax***, **Г** – деяка множина формул. Розширення теорії ***T*** із множиною власних аксіом ***Ax*** $\cup$ **Г** позначають ***T***[**Г**]. Теорію, отриману із ***T*** додаванням **А** як нової аксіоми, позначимо ***T***[**А**].

Теорема дедукції. Нехай A – замкнена формула. Тоді для довільної формули B маємо:

$$\boldsymbol{T} \vdash A \to B \Leftrightarrow \boldsymbol{T}[A] \vdash B.$$

Теорію першого порядку ***T*** називають **несуперечливою**, якщо не існує формули Ф такої, що ***T*** $\vdash$ Ф та ***T*** $\vdash \neg$Ф.

Несуперечливу теорію першого порядку T називають **максимальною** (інколи кажуть **повною**), якщо для кожної замкненої формули Ф маємо або ***T*** $\vdash$ Ф, або ***T*** $\vdash \neg$Ф.

Приклад 6.12. Позначимо S замкнену формулу

$$\forall x \forall y (x = y),$$

істинну тільки на 1-елементних інтерпретаціях. Тоді $\neg S$ істинна на всіх n-елементних інтерпретаціях, де $n > 1$. Якщо $\vdash S$, то $\models S$, що неможливо; якщо ж $\vdash \neg S$, то $\models \neg S$, що також неможливо.

Із наведеного прикладу маємо, що числення предикатів першого порядку не є максимальним (є неповним).

Завдання для самостійної роботи

1. Побудувати виведення в численні предикатів:

1) $\vdash \neg \forall x B \leftrightarrow \exists x \neg B$ та $\vdash \neg \exists x B \leftrightarrow \forall x \neg B$;

2) $\vdash \forall xA \leftrightarrow \forall x \neg \neg A$;

3) $\vdash \forall x\forall yA \leftrightarrow \forall y\forall xA$;

4) $\vdash \forall xA \vee \forall xB \rightarrow \forall x(A \vee B)$;

5) $\vdash \forall xA \& \forall xB \leftrightarrow \forall x(A \& B)$;

6) $\vdash \exists x(A \& B) \rightarrow \exists xA \& \exists xB$;

7) $\vdash \forall x(A \& B) \rightarrow \forall xA \& B$;

8) $\vdash \exists xA \vee B \leftrightarrow \exists x(A \vee B)$, якщо *x не вільна* у B;

9) $\vdash \forall xA \vee B \leftrightarrow \forall x(A \vee B)$, якщо *x не вільна* у B;

10) $\vdash \exists xA \& B \leftrightarrow \exists x(A \& B)$ за умови *x не вільне у B*;

11) $\vdash \forall xA \& B \leftrightarrow \forall x(A \& B)$ за умови *x не вільне у B*;

12) $\vdash (A \rightarrow \forall xB) \rightarrow (\forall xA \rightarrow B)$;

13) $\vdash \forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (\forall xA \rightarrow \forall xB)$;

14) $\vdash \forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (\exists xA \rightarrow \exists xB)$;

15) $\vdash (\forall xA \rightarrow \forall xB) \rightarrow \exists x(A \rightarrow B)$;

16) $\vdash (\exists xA \rightarrow \exists xB) \rightarrow \exists x(A \rightarrow B)$.

2. Чи є істотною умова замкненості формули **A** в теоремі дедукції?

3. Доведіть, що теорія першого порядку $\boldsymbol{T}$ суперечлива тоді й тільки тоді, коли $\boldsymbol{T} \vdash A$ для кожної формули A мови теорії $\boldsymbol{T}$.

4. Нехай A - замкнена формула. Доведіть таке твердження:

– якщо неправильно $\boldsymbol{T} \vdash$А, то $\boldsymbol{T}[A]$ несуперечлива;

– $\boldsymbol{T} \vdash A$ тоді й тільки тоді, коли $\boldsymbol{T}[\neg A]$ суперечлива.

Список літератури

1. *Глушков В. М.* Введение в кибернетику / В. М. Глушков. – К. : Изд-во АН УССР, 1964.
2. *Глушков В. М.* Алгебра, языки, программирование / В. М. Глушов, Г. Е. Цейтлин, Е. Л. Ющенко. – 3-е изд., перераб. и доп. – К. : Наук. думка, 1989.
3. *Єжов І. І.* Елементи комбінаторики / І. І. Єжов, А. В. Скороход, М. Й. Ядренко. – К. : Вища шк., 1972.
4. *Калужнин Л. А.* Введение в общую алгебру / Л. А. Калужин. – М. : Наука, 1973.
5. *Калужнін Л. А.* Алгоритми і математичні машини / Л. А. Калужнін, В. С. Королюк. – К. : Вища шк., 1964.
6. *Кривий С. Л.* Дискретна математика : вибрані питання / С. Л. Кривий. – К. : Вид. дім "Києво-Могилянська акад.", 2007.
7. *Кривий С. Л.* Збірник задач з дискретної математики : вибрані питання / С. Л. Кривий, О. М. Ходзинський. – К. : Бізнесполіграф, 2008.
8. *Кук Д.* Компьютерная математика / Д. Кук, Д. Бейз. – М. : Наука, 1990.
9. *Нікітченко М. С.* Прикладна логіка / М. С. Нікітченко, С. С. Шкільняк. – К. : ВПЦ "Київ. ун-т", 2013.
10. *Нікітченко М. С.* Математична логіка та теорія алгоритмів / М. С. Нікітченко, С. С. Шкільняк. – К. : ВПЦ "Київ. ун-т", 2008.
11. *Кузнецов О. П.* Дискретная математика для инженера / О. П. Кузнецов, Г. М. Адельсон-Вельский. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Энергоатомиздат, 1988.
12. *Трохимчук Р. М.* Дискретна математика / Р. М. Трохимчук. – К. : Вид. дім "Персонал", 2010.
13. *Трохимчук Р. М.* Збірник задач і вправ з дискретної математики / Р. М. Трохимчук. – К. : ВПЦ "Київ. ун-т", 2008.
14. *Трохимчук Р. М.* Збірник задач і вправ з теорії множин і відношень : навч. посіб. / Р. М. Трохимчук. – К. : ВПЦ "Київ. ун-т", 2012.
15. *Хромой Я. В.* Математична логіка / Я. В. Хромой. – К. : Вища шк., 1983.
16. *Хромой Я. В.* Збірник задач і вправ з математичної логіки / Я. В. Хромой. – К. : Вища шк., 1978.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Одним із найвидатніших винаходів XX ст. є створення універсального автоматичного перетворювача інформації, названого електронною обчислювальною машиною, або комп'ютером. Появу комп'ютера без перебільшення можна назвати Великою інтелектуальною революцією. Значення обчислювальних машин у сучасному житті важко переоцінити.

Важливо наголосити, що визначальну роль у створенні комп'ютера відіграли вчені-математики. Саме вони формулювали й досліджували абстрактні моделі, а згодом брали активну участь у практичній реалізації перших (і наступних) обчислювальних машин. Фундаментальні та прикладні математичні дослідження в усіх напрямах комп'ютерної галузі успішно тривають.

У свою чергу, комп'ютер не міг не вплинути на саму математику. З його появою відбулося певне збагачення класичної математики, стався перерозподіл уваги й зацікавленості математиків предметом досліджень. Комп'ютерна практика є потужним джерелом новітніх ідей і задач, вона сприяє появі нових дисциплін і напрямів математичних досліджень. Зокрема, з'явився окремий розділ сучасної математики – дискретна математика.

Дискретна математика (інші назви: дискретний аналіз, скінченна математика) – це розділ сучасної математики, в якому вивчають властивості математичних об'єктів дискретного характеру.

Головним критерієм, за яким різноманітні розділи математики (як ті, що виникли в давні часи, так і ті, що з'явились у XX ст.) об'єднують під назвою "дискретна математика", є те, яке відношення вони мають до теорії та практики проектування, використання електронних обчислювальних машин і програмування. Тому дискретну математику останнім часом справедливо називають **комп'ютерною математикою**.

Нині дискретна математика входить до навчальних програм багатьох факультетів університетів та інших вищих навчальних закладів. Однак темпи розвитку комп'ютерних систем, як їх матеріальної, "залізної" частини (*hardware*), так і особливо програмного забезпечення (*software*) такі, що знання про конкретні системи, отримані під час навчання, часто застарівають уже на момент його завершення. Не девальвуються лише фундаментальні базові знання. Тому фахівець, який бажає завжди бути обізнаним щодо ідей, новацій і прогресу, має подбати про фундаментальну теоретичну підготовку.

Формування інтелектуальних навичок і вмінь немислиме без активних індивідуальних дій, без набуття самостійного досвіду й практики у процесі розв'язування задач, що, безумовно, є найкращим способом засвоєння будь-яких теоретичних математичних понять, методів, концепцій і результатів, перевірки правильності та повноти розуміння матеріалу. Тому для глибокого й усебічного засвоєння будь-якої математичної дисципліни надзвичайно важливо використовувати достатньо широкий і різноманітний набір задач.

Навчальний посібник містить задачі та вправи з класичних розділів дискретної математики. Кожний розділ включає теоретичні відомості, де подано основні означення, позначення й терміни, приклади розв'язання типових задач, а також завдання для самостійної роботи.

За необхідності початок розв'язання прикладів можна позначати знаком ►, закінчення – знаком ◄. Якщо приклад простий, то ці знаки не ставлять або ставлять лише знак завершення розв'язання.

Розділ 1
ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ ЛОГІКИ

Термін **логіка** походить від грецького $\lambda o \gamma o \zeta$, що означає *слово, яке виражає думку*; *поняття*; *вчення*; *міркування*. Саме аналізуючи зв'язок слова й думки, мови та міркувань, стародавні (переважно давньогрецькі) мислителі створили логіку – науку про способи мислення, що ведуть до істини, про закони й форми правильного мислення.

Логічні закони й правила побудови коректних міркувань почали формуватись у сиву давнину, коли в людини з'явилась потреба обмінюватись досвідом і знаннями, обґрунтовувати свої думки, робити правильні висновки з певних посилань або гіпотез. Важливо підкреслити, що правила й процедури для коректних міркувань не залежать від конкретного **змісту** посилань і висновків, а також від жодних суб'єктивних (настрій, емоції, рівень інтелекту або освіти, ставлення до підсумку умовиводів тощо) чи зовнішніх (погода, пора року, місце, умови перебування особи тощо) чинників, а залежать лише від **форми** вираження цих міркувань і є загальними для всіх міркувань тієї самої форми, безвідносно до того, про що в них ідеться.

Так з'явилась **формальна логіка**. Вважають, що формальна логіка як учення про умовивід і доведення виникла більше двох з половиною тисяч років тому в Давній Греції. Найповніше її принципи та положення було викладено в працях видатного давньогрецького вченого й філософа Арістотеля (384–322 рр. до н. е.) та його учнів і послідовників.

Досягнувши відносно високого ступеня досконалості, арістотелева логіка, на відміну від математики, протягом багатьох століть практично не розвивалась. Вона була обов'язковою складовою хорошої освіти та служила переважно інструментом для обґрунтування різного роду тверджень (часто, як у випадку середньовічної схоластики, досить сумнівних).

Новий етап в історії формальної логіки датують серединою XIX ст., коли було опубліковано головні праці визначного англійського математика Джорджа Буля (1815–1864), у яких він наблизив логіку до математики й заклав основи математичної логіки.

Характерною особливістю **математичної логіки** є використання математичної мови символів, операцій, формул, обчислень, числень, рівносильних перетворень тощо.

Розуміння формальних методів і моделей, уміння ними користуватися, знання й володіння законами математичної логіки є необхідним етапом у процесі вивчення та засвоєння інформатики, мов і методів програмування для ЕОМ. В епоху комп'ютеризації всіх сфер людського буття – виробництва, економіки, наукових досліджень, освіти, побуту – знання основ математичної логіки необхідне для формування фахівця у будь-якій галузі діяльності, розвинення в нього аналітичного і творчого мислення, ефективного використання обчислювальної техніки.

Вивчення й засвоєння мови та методів сучасної формальної логіки сприяє набуттю навичок правильних міркувань і переконливої аргументації, чіткого формулювання думок і висновків, формування загальної культури мислення. Ці навички необхідні й корисні в усіх сферах людської діяльності, оскільки логіка є окремою науковою дисципліною та водночас – інструментом будь-якої науки.

Сьогодні математична, або формальна, логіка входить до навчальних програм багатьох факультетів (як природничих, так і гуманітарних) усіх університетів та інших вищих навчальних закладів.

1.1. Поняття висловлення. Логічні операції (зв'язки). Складені висловлення

Просте (елементарне) висловлення – це просте твердження, тобто розповідне речення, щодо змісту якого доречно ставити запитання про його правильність або неправильність. Прості висловлення, у яких виражено правильну думку, називають **істинними**, а ті, що виражають неправильну, – **хибними**.

Приклад 1.1. Чи є наведений вираз простим висловленням? Якщо вираз є висловленням, то вказати, яким саме – істинним чи хибним.

(а) *Число 357 кратне 7.*

(б) *Це речення складається із шести слів.*

(в) *Хай живе кібернетика!*

(г) *Женева – столиця Швейцарії.*

(д) *Не існує найбільшого простого числа.*

(е) *Чи існує найменше просте число*?

(є) *Будьте уважні та взаємно ввічливі.*

(ж) *Сонце зійшло.*

(з) *Виходячи з кімнати, вимикайте світло.*

(и) *Нерівність 3 < 2 хибна.*

(і) *Нерівність 2 < 3 хибна.*

(ї) *Це висловлення – хибне.*

► Вирази (а), (б), (г), (д), (и) та (і) є висловленнями, (а), (б), (д), та (и) – істинними, а (г) та (і) – хибними. Вираз (ї) не є висловленням, оскільки, послідовно припускаючи, що в ньому виражено правильну або неправильну думку, отримуємо логічну суперечність. Цей вираз є одним із варіантів логічного **парадоксу брехуна**. ◄

Зазвичай конкретні елементарні висловлення позначають малими латинськими літерами: a, b, c, … (інколи з індексами), а значення висловлень *істинно* та *хибно* – відповідно символами **1** та **0** (або **I** та **X**, а в англомовній літературі – відповідно **T** і **F**).

Крім того, розглядатимемо **змінні висловлення**, які позначатимемо латинськими літерами x, y, z, … (інколи з індексами) і називатимемо також **пропозиційними змінними**. Після підстановки замість пропозиційної змінної певного елементарного висловлення ця змінна набуде відповідного значення (**1** або **0**).

Окремі елементарні висловлення можна з'єднувати між собою за допомогою певних зв'язок (сполучників), утворюючи **складені висловлення.**

Наприклад, вирази *Число* 5 *– просте та число* 23 *– просте*; *Київ – столиця України, а Берн – столиця Швейцарії*; *Якщо число* 27 *кратне* 3, *то число* 27 *кратне* 6; *Неправильно, що* $2 < 3$, *або неправильно, що* $4 < 3$ є складеними висловленнями, що утворені з простіших (елементарних) висловлень шляхом використання зв'язок *і*; *а*; *якщо ..., то*; *неправильно, що* та *або*.

У математичній логіці використання мовних зв'язок трактується як виконання над висловленнями певних логічних операцій, що мають такі назви: **кон'юнкція**, **диз'юнкція**, **заперечення**, **імплікація** та **еквівалентність**.

У табл. 1.1 наведено різні назви та позначення, що використовують для цих операцій.

Таблиця 1.1

Назва	**Позначення**
Кон'юнкція (логічне множення, логічне *і*)	$\wedge$ & $\cdot$
Диз'юнкція (логічне додавання, логічне *або*)	$\vee$
Заперечення (логічне *ні*)	$\neg$ $'$ $\bar{\ }$
Імплікація (логічне *якщо, …то…*)	$\rightarrow$ $\supset$ $\Rightarrow$
Еквівалентність (рівнозначність)	$\sim$ $\leftrightarrow$ $\equiv$

Зазвичай використовуватимемо перші із наведених назв і позначень. Табл. 1.2 містить означення цих операцій.

Таблиця 1.2

$x\ y$	$x \wedge y$	$x \vee y$	$\neg x$	$x \rightarrow y$	$x \sim y$
0 0	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**
0 1	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**
1 0	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**
1 1	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**

Отже, з елементарних висловлень і пропозиційних змінних за допомогою означених операцій і дужок утворюються складені висловлення, яким відповідають формули або вирази.

Зауважимо, що символам логічних операцій відповідають у звичайній мові такі мовні зв'язки, або сполучники:

$\wedge$ – *і*; *та*; *а*; *але*; *хоч*; *разом із*; *незважаючи на*; …

$\vee$ – *або*; *чи*; *хоч* (*принаймні*) *одне з*; …

$\neg$ – *не*; *неправильно, що*; …

$\rightarrow$ – *якщо* (*коли*) … , *то* (*тоді*)…; … *імплікує* …; *із* … *випливає* …; *у разі* … *має місце* …; …

$\sim$ – … *тоді й тільки тоді, коли* …; … *якщо й тільки якщо* …; … *еквівалентне* …; … *рівносильне* … тощо.

Застосовуючи пропозиційні змінні та символи логічних операцій, будь-яке складене висловлення можна формалізувати, тобто перетворити на формулу, яка виражатиме (задаватиме) його *логічну структуру*.

Приклад 1.2.

1. Висловлення *Якщо число* 24 *кратне* 2 *і* 3, *то число* 24 *кратне* 6 має таку логічну структуру: $(a \wedge b) \to c$. Тут пропозиційній змінній a відповідає елементарне висловлення *Число* 24 *кратне* 2, змінній b – висловлення *Число* 24 *кратне* 3, а змінній c – висловлення *Число* 24 *кратне* 6.

2. Нехай задано елементарні висловлення:

a – 7 – *ціле число*; c – 7 – *просте число*;

b – 7 – *від'ємне число*; d – *Число* 7 *кратне* 3.

Сформулювати словами складене висловлення, визначити його істинність чи хибність для таких формул:

(а) $a \wedge b$; (б) $a \vee b$; (в) $a \to \neg b$;

(г) $(b \to \neg a) \vee c$; (д) $(\neg a \wedge \neg c) \to d$.

► Першій із цих формул відповідає складене висловлення 7 – *ціле число* і 7 – *від'ємне число* (звичайно таке висловлення формулюється у вигляді 7 – *ціле і від'ємне число*). Отримане висловлення є хибним, оскільки перша його елементарна складова a є істинним висловленням, а друга b – хибним. За означенням операції кон'юнкції $\wedge$ значенням цього складеного висловлення є *хибно*, або **0**.

Формулі (б) відповідатиме складене висловлення 7 – *ціле число або* 7 – *від'ємне число*, що є істинним, адже одна з його складових (а саме перша) є істинним висловленням.

Формула (в) задає складене висловлення *якщо* 7 – *ціле число, то неправильно, що* 7 – *від'ємне число*, що є істинним, оскільки йому відповідає вираз $\mathbf{1} \to \mathbf{1}$, який має значення **1**.

Формула (г) задає складене висловлення *якщо* 7 – *від'ємне число, то неправильно, що* 7 – *ціле число або* 7 – *просте число*, яке є істинним, оскільки остання його елементарна складова c є істинним висловленням. Якщо принаймні одне з елементарних висловлень, з'єднаних мовною зв'язкою *або* (логічною операцією диз'юнкції $\vee$), є істинним, то й усе складене висловлення є істинним.

Остання формула задає складене висловлення *якщо неправильно, що* 7 – *ціле число та неправильно, що* 7 – *просте число*, *то число* 7 *кратне* 3, що є істинним, адже йому відповідає логічний вираз $\mathbf{0} \to \mathbf{1}$, який має значення **1**. ◄

Приклад 1.3.

1. Визначити істинність чи хибність складеного висловлення, використавши його логічну структуру й виходячи з відомих значень істинності простих висловлень, із яких воно складається.

(а) *Число* 777 *кратне* 7, *але не кратне* 11.

(б) *Число* 36 *кратне* 6 *або* 7.

(в) Якщо $4 < 3$, то $4^2 < 3^2$.

(г) $-2 > -3$ *та* $(-1/2) > (-1/3)$.

(д) $-2 > -3$, *але* $(-2)^2 < (-3)^2$.

(е) *Якщо* $2 < 3$, *то* $2^2 < 3^2$.

(є) *Принаймні одне із чисел* 21, 24 *чи* 27 *парне*.

(ж) *Якщо число* 24 *кратне* 6, *то число* 24 *кратне* 3.

(з) *Якщо число* 27 *кратне* 6, *то число* 27 *кратне* 3.

(и) *Якщо число* 27 *кратне* 3, *то число* 27 *кратне* 6.

(і) *Якщо* $2 < 3$ *та* $3 < 1$, *то* $2 < 1$.

(ї) *Неправильно, що принаймні одне з чисел* 35, 57, 77 *просте*.

► Вираз (а) має логічну структуру $a \wedge b$, де пропозиційній змінній a відповідає елементарне висловлення *Число* 777 *кратне* 7, а змінній b – висловлення *Число* 777 *не кратне* 11. Обидва висловлення істинні, тому й задане складене висловлення істинне.

Вираз (б) має логічну структуру $a \vee b$, де a – *Число* 36 *кратне* 6 і b – *Число* 36 *кратне* 7. Отже, значенням усього висловлення буде **1**.

Вирази (в), (е), (ж), (з), (и) та (і) мають логічну структуру $a \to b$. Висловлення (и) – хибне, решта – істинні.

Вирази (г) і (д) мають однакову логічну структуру $a \wedge b$. Перший із них є хибним, а другий – істинним.

Логічна структура виразу (є) має вигляд $a \vee b \vee c$, де a – 21 – *парне число*, b – 24 – *парне число* та c – 27 – *парне число*. Отже, значенням складеного висловлення буде **1**.

Логічна структура виразу (ї) має вигляд $\neg\,(a \vee b \vee c)$, де a – 35 – *просте число*, b – 57 – *просте число* і c – 77 – *просте число*. Значенням складеного висловлення буде **1**, оскільки a, b і c – хибні висловлення. ◄

2. Визначити значення істинності висловлень a, b, c, d, які фігурують у складених висловленнях, якщо складені висловлення 1) та 2) – істинні, а 3) та 4) – хибні.

1) *Якщо* 7 – *просте число, то a.*

2) *Якщо b, то* 7 – *складене число.*

3) *Якщо* 7 – *просте число, то c.*

4) *Якщо d, то* 7 – *складене число.*

► Оскільки перше висловлення істинне та його елементарна складова 7 – *просте число* є також істинним висловленням, то із правила виконання операції імплікації випливає, що його друга елементарна складова a має бути істинним висловленням. Аналогічно аналізуємо решту висловлень. У результаті отримаємо, що висловлення a та d – істинні, b та c – хибні. ◄

3. Із хибної рівності $2 \times 2 = 5$, застосовуючи відомі рівносильні перетворення математичних виразів, вивести:

(а) хибну рівність $3 \times 3 = 8$;

(б) правильну рівність $2 \times 3 = 6$.

► (а) Це можна зробити, наприклад, так: спочатку віднімемо почленно від даної рівності $2 \times 2 = 5$ правильну рівність $2 \times 2 = 4$, отримаємо, що $0 = 1$. Потім віднімемо почленно отриману рівність від правильної рівності $3 \times 3 = 9$, дістанемо рівність $3 \times 3 = 8$.

(б) $2 \times 3 = 2 \times (2 + 1) = 2 \times 2 + 2 \times 1 = 5 + 2 = 7$. Від останньої рівності $2 \times 3 = 7$ віднімемо почленно отриману у попередньому пункті рівність $0 = 1$, дістанемо, що $2 \times 3 = 6$. ◄

У математичній мові імплікацію $p \to q$ трактують так: твердження p є достатньою умовою для q, а твердження q – необхідною умовою для твердження p. Вираз $p \to q$ інтерпретують ще як *q тоді, коли p* або *p тільки тоді, коли q*. В імплікації $p \to q$ операнд p називають **антецедентом**, або **засновком**, а q – **консеквентом**, або **висновком**.

Приклад 1.4. Записати словами у вигляді твердження задане висловлення різними способами, використовуючи вирази: *необхідна умова*; *достатня умова*; *тоді, коли*; *тільки тоді, коли*.

(а) (24 *кратне* 6) $\to$ (24 *кратне* 3).

(б) *Число* 45 *кратне* 15 *тільки тоді, коли* 45 *кратне* 3 *і кратне* 5.

► Для пункту (а) такими твердженнями будуть:

– висловлення 24 *кратне* 3 є необхідною умовою для висловлення 24 *кратне* 6;

– висловлення 24 *кратне* 6 є достатньою умовою для висловлення 24 *кратне* 3;

– 24 *кратне* 3 тоді, коли 24 *кратне* 6;

– 24 *кратне* 6 тільки тоді, коли 24 *кратне* 3.

Для пункту (б) маємо:

– висловлення 45 *кратне* 3 і 45 *кратне* 5 є необхідною умовою для висловлення 45 *кратне* 15;

– висловлення 45 *кратне* 15 є достатньою умовою для висловлення 45 *кратне* 3 і 45 *кратне* 5;

– 45 *кратне* 3 і 45 *кратне* 5 тоді, коли 45 *кратне* 15. ◄

Завдання для самостійної роботи

1. Чи є наведений вираз простим висловленням? Якщо вираз є висловленням, то вказати, яким саме – істинним чи хибним.

(а) *Число* 434 *кратне* 7.

(б) *Астрономічний рік складається із* 365 *днів*.

(в) *Осінь – це пора року*.

(г) *Осінь – найкраща пора року*.

(д) *Київ – столиця України*.

(е) $7 < 7$. (є) $7 \leq 7$.

(є) $2 \times 2 = 4$.

(ж) *Існує опуклий многокутник із чотирма гострими кутами*.

(з) *Бісектриса трикутника ділить його площу на рівновеликі частини*.

(и) *Це речення розташовано на сторінці з парним номером*.

(і) *Усі слова цього речення містять принаймні одну голосну літеру*.

(ї) *Нехай усе буде гаразд*.

(й) *Ця задача нескладна*.

(к) *Число* 777 *менше Евересту*.

(л) *Справджується нерівність* $x < 2$.

2. Нехай задано елементарні висловлення:

a – 5 – *ціле число*; b – 11 – *парне число*; c – 12 – *просте число*; d – *Число* 18 *кратне* 3.

Для наведених нижче формул сформулювати словами складене висловлення, визначити його істинність чи хибність:

(а) $a \wedge b$; (б) $a \vee b$; (в) $a \to \neg b$;
(г) $(a \vee c) \to b$; (д) $(a \vee (b \wedge d)) \to \neg c$; (є) $(\neg a \wedge \neg c) \to d$;
(е) $(\neg a \vee \neg d) \sim b$; (ж) $(\neg a \to \neg c) \wedge b$.

3. Визначити істинність чи хибність складеного висловлення, використавши його логічну структуру й виходячи із відомих значень істинності елементарних висловлень, з яких воно складається.

(а) *Число* 333 *кратне* 3, *але не кратне* 11.

(б) *Число* 54 *кратне* 6 *або* 8.

(в) *Принаймні одне із чисел* 11, 23 *або* 26 *парне*.

(г) $-3 > -4$ та $(-1/3) > (-1/4)$.

(д) $-3 > -4$, але $(-3)^2 < (-4)^2$.

(е) *Якщо* $4 < 5$, *то* $4^2 < 5^2$.

(є) *Якщо число* 36 *кратне* 6, *то число* 36 *кратне* 3.

(ж) *Якщо число* 15 *кратне* 6, *то число* 15 *кратне* 3.

(з) *Якщо число* 15 *кратне* 3, *то число* 15 *кратне* 6.

(и) *Якщо* $3 < 4$ *та* $4 < 2$, *то* $3 < 2$.

(і) 72 *кратне* 48 *тоді й тільки тоді, коли* 72 *кратне* 8 *та* 72 *кратне* 6.

(ї) *Неправильно, що* $2 < 3$ і $4 < 3$. *Неправильно, що принаймні одне із чисел* 35, 57, 77 *просте*.

(й) *Неправильно, що виконується хоч б одна з нерівностей* $2 < 3$ чи $3 < 2$.

(к) 144 *кратне* 24 *тоді й тільки тоді, коли* 144 *кратне* 8 *та* 144 *кратне* 3.

4. Сформулювати наведене твердження у вигляді *Якщо* …, *то* …:

(а) *Із нерівності* $x < 3$ *випливає нерівність* $x \leq 3$.

(б) *Я успішно складу іспит з математичної логіки тоді, коли регулярно робитиму домашні завдання*.

(в) *Необхідно знати означення понять, щоб правильно зрозуміти формулювання математичної задачі*.

(г) *Щоб чотирикутник був ромбом, достатньо, щоб він був квадратом*.

(д) *Число* 24 *кратне* 6 *тільки тоді, коли воно кратне* 3.

5. Записати словами у вигляді твердження імплікацію чотирма різними способами, використовуючи вирази: *необхідна умова*; *достатня умова*; *тоді, коли*, *тільки тоді, коли*:

(а) $(2 > 3) \to (1 > 2)$;

(б) (42 *кратне* 21) $\to$ (42 *кратне* 7);

(в) $(2 > 3) \to (1 > 2)$;

(г) *Якщо* $3 > 2$, то $3 \geq 2$.

(д) *Якщо* $4 < 5$, то $4^2 < 5^2$.

(е) *Якщо* $3 < 4$ і $4 < 2$, то $3 < 2$.

6. Із хибної нерівності $1 > 2$, застосовуючи відомі рівносильні перетворення математичних виразів, вивести:

(а) хибну нерівність $5 > 7$;

(б) правильну нерівність $5 < 7$.

1.2. Формули алгебри висловлень. Таблиця істинності. Тавтології

За аналогією зі звичайними числовими алгебрами, де змінні можуть набувати значень із певної множини чисел (напр., цілі, раціональні або дійсні числа), розглянемо **алгебру висловлень**, в якій значеннями відповідних змінних будуть якісь висловлення.

Операціями алгебри висловлень будуть означені вище кон'юнкція, диз'юнкція, заперечення, імплікація та еквівалентність. Застосовуючи до елементарних висловлень і пропозиційних змінних ці операції, діставатимемо складені висловлення, яким відповідатимуть формули (або вирази) алгебри висловлень. Для запису цих формул і дослідження їхніх властивостей використовують формальні мови, тобто певні множини слів у деякому алфавіті.

Алфавіт найбільш поширеної формальної мови алгебри висловлень складається з трьох груп символів:

1) символи елементарних висловлень і пропозиційних змінних: a, b, c, … та x, y, z, … (інколи з індексами);

2) символи операцій: $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\to$, $\sim$;

3) допоміжні символи – круглі дужки: (і).

Із символів цього алфавіту будують пропозиційні формули або просто формули алгебри висловлень за індуктивним правилом:

1) усі пропозиційні змінні та елементарні висловлення є формулами;

2) якщо A та B – формули, то вирази $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(\neg A)$, $(A \to B)$, $(A \sim B)$ також є формулами (для всіх цих виразів формули A та B є підформулами);

3) інших формул, крім тих, що побудовані за правилами 1) та 2), немає.

Формули алгебри висловлень позначатимемо великими латинськими літерами.

Приклад 1.5.

1. Визначити, чи є послідовність символів формулою алгебри висловлень.

(а) $(((x \to y) \wedge z) \sim ((\neg x) \to (y \vee z)))$;

(б) $(((\neg x) \wedge y) \to (x \sim ((\neg y) \vee x)$.

► Для цього за допомогою індексів спочатку занумеруємо порядок виконання операцій у першій послідовності символів (у багатьох випадках ця процедура виконується неоднозначно). Матимемо такий вираз: $(((x \to_1 y) \wedge_2 z) \sim_6 ((\neg_3 x) \to_5 (y \vee_4 z)))$ (зручно відповідний номер записувати над операцією). Подамо його у вигляді $(F_1 \sim_6 F_2)$, де $F_1 = ((x \to_1 y) \wedge_2 z)$ і $F_2 = ((\neg_3 x) \to_5 (y \vee_4 z))$.

У свою чергу, формула F_1 має вигляд $(F_{11} \wedge_2 F_{12})$ і розкладається на підформули $F_{11} = (x \to_1 y)$ і $F_{12} = z$, а формула F_2 має вигляд $(F_{21} \to_5 F_{22})$ і розкладається на підформули $F_{21} = (\neg_3 x)$ і $F_{22} = (y \vee_4 z)$.

Вираз F_{12} є формулою згідно з п. 1) в означенні пропозиційної формули. А кожна з решти підформул F_{11}, F_{21} та F_{22} утворюється відповідно до п. 2) цього означення:

$$F_{11} = (F_{111} \to_1 F_{112}),$$

де $F_{111} = x$ і $F_{112} = y$,

$$F_{21} = (\neg_3 F_{211}),$$

де $F_{211} = x$ і, нарешті,

$$F_{22} = (F_{221} \vee_4 F_{222}),$$

де $F_{221} = y$ та $F_{222} = z$.

Отже, ми продемонстрували, що ця формула побудована із пропозиційних змінних

$$F_{12} = z, \quad F_{111} = x, \quad F_{112} = y, \quad F_{211} = x, F_{221} = y, F_{222} = z$$

за викладеними вище правилами.

При спробі аналогічно розкласти другу послідовність символів на певному кроці отримаємо вираз $(F_1 \sim F_2$, який не має за-криваючої дужки. Отже, ця послідовність не є пропозиційною формулою. ◄

2. Виписати всі підформули формули:

$$(((x \to y) \wedge z) \sim ((\neg x) \to (y \vee z))).$$

► Скориставшись процедурою, що описана в попередньому пункті, дістанемо, що F_1, F_2, F_{11}, F_{12}, F_{21}, F_{22}, F_{111}, F_{112}, F_{211}, F_{221}, F_{222} – це всі підформули даної формули. ◄

Кожна формула A зображує форму або схему складеного висловлення: вона перетворюється на висловлення, якщо замість її пропозиційних змінних підставити якісь конкретні висловлення. Оскільки кожне із підставлених висловлень має значення **0** або **1**, то, послідовно обчислюючи значення всіх підформул формули A, одержимо значення формули A на цьому наборі висловлень, яке дорівнюватиме **0** або **1**. Підставляючи у формулу A замість її пропозиційних змінних інший набір висловлень, аналогічно обчислимо нове значення формули A і т. д. Оскільки кожне із висловлень набору повністю характеризується своїм значенням (істинно або хибно, тобто **1** або **0**), то замість пропозиційних змінних у формулу можна підставляти не самі висловлення, а їхні значення – **1** або **0**.

Нехай $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – це всі пропозиційні змінні, що входять до формули A; позначатимемо цей факт $A(p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Формулі $A(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ поставимо у відповідність функцію $f(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, що означена на множині впорядкованих наборів $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, де кожне p_i набуває значення у множині $B = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, і значенням функції f є **0** або **1**. Значення функції f на наборі значень $a_1, a_2, \ldots, a_n$ її змінних $p_1, p_2, \ldots, p_n$ дорівнює значенню формули $A(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ при підстановці до неї замість пропозиційних змінних $p_1, p_2, \ldots, p_n$ значень $a_1, a_2, \ldots, a_n$, відповідно. Зауважимо, що кількість елементів в області визначення функції f дорівнює 2^n.

Приклад 1.6. Обчислити значення формули алгебри висловлень

$$(((a \to (\neg\, b)) \to (b \wedge ((\neg\, c) \to a))) \sim (\neg\, a))$$

на наборі (1,1,0) значень її змінних, тобто за умови, що $a = \mathbf{1}$, $b = \mathbf{1}$, $c = \mathbf{0}$.

► Для цього за допомогою індексів занумеруємо порядок виконання операцій у даній формулі, як було зроблено у прикладі 1.5(1). Матимемо:

$$(((a \to_4 (\neg_1 b)) \to_7 (b \wedge_6 ((\neg_2 c) \to_5 a))) \sim_8 (\neg_3 a)).$$

Підставимо замість пропозиційних змінних a, b, c задані вище значення, дістанемо

$$(((\mathbf{1} \to_4 (\neg_1 \mathbf{1})) \to_7 (\mathbf{1} \wedge_6 ((\neg_2 \mathbf{0}) \to_5 \mathbf{1}))) \sim_8 (\neg_3 \mathbf{1})).$$

Обчисливши операції 1, 2 та 3, дістанемо вираз

$$(((\mathbf{1} \to_4 \mathbf{0}) \to_7 (\mathbf{1} \wedge_6 (\mathbf{1} \to_5 \mathbf{0}))) \sim_8 \mathbf{0}),$$

який після обчислення операцій 4 та 5 набуде вигляду

$$((\mathbf{0} \to_7 (\mathbf{1} \wedge_6 \mathbf{0})) \sim_8 \mathbf{0}).$$

Результатом операції 6 є **0**, отже, матимемо $((\mathbf{0} \to_7 \mathbf{0}) \sim_8 \mathbf{0})$. Після виконання операції 7 дістанемо $(\mathbf{1} \sim_8 \mathbf{0})$. Останній вираз має значення **0**. Таким чином, значенням даної формули на наборі (**1**,**1**,**0**) буде **0**. Аналогічні обчислення можна виконати й для решти семи наборів значень змінних a, b, c. ◄

Функцію f називають **функцією істинності** для формули A або відповідного складеного висловлення. Для функції істинності f можна побудувати **таблицю істинності** (табл. 1.3). Традиційно набори значень змінних розташовують у цій таблиці в лексикографічному порядку (див. розд. 2).

Таблиця 1.3

$p_1\, p_2 \ldots p_{n-1}\, p_n$	$f(p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n)$
0 0 ... 0 0	f(**0**, **0**, ..., **0**, **0**)
0 0 ... 0 1	f(**0**, **0**, ..., **0**, **1**)
0 0 ... 1 0	f(**0**, **0**, ..., **1**, **0**)
0 0 ... 1 1	f(**0**, **0**, ..., **1**, **1**)
....	....
1 1 ... 1 0	f(**1**, **1**, ..., **1**, **0**)
1 1 ... 1 1	f(**1**, **1**, ..., **1**, **1**)

Приклад 1.7. Побудувати таблицю істинності для формули із попереднього прикладу.

► У першому рядку кожного стовпця останньої таблиці записано вираз (підформулу) і номер відповідної операції. Наприклад, запис $(a \to (1))$ (4) означає, що результатом операції із номером 4 є імплікація значення пропозиційної змінної a та результату операції з номером 1, а запис $((4) \to (6))$ (7) означає, що результатом операції з номером 7 є імплікація значення операції із номером 4 і результату операції із номером 6 тощо.

$a\ b\ c$	$(\neg b)$ (1)	$(\neg c)$ (2)	$(\neg a)$ (3)	$(a \to (1))$ (4)	$((2) \to a)$ (5)	$(b \wedge (5))$ (6)	$((4) \to (6))$ (7)	$((7) \sim (3))$ (8)
0 0 0	1	1	1	1	0	0	0	0
0 0 1	1	0	1	1	1	0	0	0
0 1 0	0	1	1	1	0	0	0	0
0 1 1	0	0	1	1	1	1	1	1
1 0 0	1	1	0	1	1	0	0	1
1 0 1	1	0	0	1	1	0	0	1
1 1 0	0	1	0	0	1	1	1	0
1 1 1	0	0	0	0	1	1	1	0

◀

Формулу алгебри висловлень $A(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ називають **тавтологією**, коли їй відповідає функція істинності, що тотожно дорівнює **1**. Те, що формула A є тавтологією, позначають як $\vDash A$.

Тавтології ще називають **тотожно істинними формулами**, або **законами алгебри висловлень**.

Наведемо приклади деяких важливих тавтологій:

$(p \vee (\neg p))$ (закон виключення третього);

$(\neg (p \wedge (\neg p)))$ (закон виключення суперечності);

$(p \to p)$ (закон тотожності).

Переконатись у тому, що ці формули є тавтологіями, можна за допомогою відповідних таблиць істинності.

Іноді перевірку того, що певна формула є тавтологією, виконують за допомогою **способу відшукання контрприкладу** (або методу від супротивного). Пояснимо його на прикладах.

Приклад 1.8.

1. Перевірити, чи є тавтологією формула

$A = (((a \to \neg b) \wedge (b \to (a \wedge c))) \wedge (\neg c \to \neg a)) \to (a \vee \neg c)$.

► Припустимо, що формула A не є тавтологією. Тоді принаймні на одному наборі значень формула A набуває значення **0**. Спробуємо відшукати цей набір. Оскільки останньою (головною) операцією формули A є імплікація, то її консеквент має дорівнювати нулю, а антецедент – одиниці. Консеквент $(a \vee \neg c)$ дорівнює нулю, коли $a = \mathbf{0}$ та $c = \mathbf{1}$. Звідси $(a \to \neg b) = \mathbf{1}$ та $(\neg c \to \neg a) = \mathbf{1}$. Залишилось з'ясувати, чи може за цих умов вираз $(b \to (a \wedge c))$ дорівнювати одиниці. Відповідь позитивна (для $b = \mathbf{0}$). Отже, ми знайшли набір $(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$, на якому формула A набуває значення **0**, тобто відшукали контрприклад, який свідчить, що формула A не є тавтологією. ◄

2. У разі, коли при спробі відшукати контрприклад для певної формули A отримуємо суперечність, можемо стверджувати, що A – тавтологія.

Наприклад, треба перевірити на тавтологічність формулу

$$B = (((a \to \neg b) \wedge (b \to (a \wedge c))) \wedge (\neg c \to \neg a)) \to (a \vee \neg b),$$

яка є дещо зміненим варіантом попередньої формули A.

► Діючи саме у такий спосіб, матимемо: $a = \mathbf{0}$ і $b = \mathbf{1}$, звідки $(a \to \neg b) = \mathbf{1}$, $(\neg c \to \neg a) = \mathbf{1}$, однак $(b \to (a \wedge c)) = \mathbf{0}$, що суперечить припущенню $(b \to (a \wedge c)) = \mathbf{1}$. Отже, формула B є тавтологією. ◄

Якщо формула $A \to B$ є тавтологією, то кажуть, що формула A **сильніша ніж** B, а формула B **слабша ніж** A.

Формула алгебри висловлень $A(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, яка набуває значення $\mathbf{0}$ на всіх наборах $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ значень своїх пропозиційних змінних, називається **суперечністю**, або **тотожно хибною формулою.**

Формулу, що не є ні тавтологією, ні суперечністю, називають **нейтральною**.

Множину всіх формул алгебри висловлень розбивають на тавтології, суперечності та нейтральні формули.

Формулу, яка не є суперечністю, називають **виконуваною**, інакше – **невиконуваною**.

Приклад 1.9.

1. Показати, що формула алгебри висловлень

$$(a \to (b \to \neg\, b)) \wedge (a \to c) \vee (a \wedge \neg\, c)$$

є виконуваною.

Для будь-якого набору значень змінних, у якому $a = \mathbf{1}$ та $c = \mathbf{0}$, підформула $(a \wedge \neg\, c)$, а отже, і вся формула набуватиме значення $\mathbf{1}$, тому ця формула є виконуваною.

2. Довести, що формула $A = (a \to c) \wedge (b \to c)$ алгебри висловлювань є сильнішою за формулу $B = (a \wedge b) \to c$.

Для доведення слід відомим способом переконатись, що формула $A \to B$ є тавтологією.

3. Визначити, чи є формула алгебри висловлень

$$((a \vee b) \to c) \to ((a \to c) \vee (b \to c))$$

тавтологією, суперечністю або нейтральною.

За допомогою таблиці істинності або методом відшукання контрприкладу для формули можна переконатись, що ця формула є тавтологією.

4. Чи може суперечність містити тільки операції із множини $\{\vee, \wedge, \sim, \to\}$? Відповідь обґрунтувати.

Припустимо, що така формула-суперечність існує. Підставимо замість усіх її пропозиційних змінних значення $\mathbf{1}$. Усі підформули цієї формули містять тільки операції з множини $\{\vee, \wedge, \sim, \to\}$, тому всі вони, отже, і вся формула набуватимуть значення **1** (див. табл. 1.2). Це суперечить нашому припущенню про те, що ця формула є суперечністю. Звідси доходимо висновку, що такої суперечності бути не може.

5. Довести чи спростувати таке твердження: якщо A та B – тавтології, то $A \vee B$ – тавтологія. Чи правильне обернене твердження?

Оскільки A та B – тавтології, то на кожному наборі значень їхніх пропозиційних змінних ці формули набуватимуть значення **1**, отже, формула $A \vee B$ також дорівнюватиме **1**. Тому наведене твердження є істинним.

Обернене твердження не справджується. Наприклад, якщо A – тавтологія, а B – суперечність, то $A \vee B$ буде тавтологією, але при цьому не виконуватиметься умова, що A та B – тавтології.

6. Довести чи спростувати таке твердження: якщо $A \to B$ – виконувана формула, то A та B – виконувані. Чи правильне обернене твердження?

Це твердження хибне. Наприклад, якщо A – суперечність (тобто не є виконуваною формулою), а B – довільна формула, то $A \to B$ буде тавтологією (тобто буде виконуваною формулою).

Обернене твердження справджується. Якщо A та B – виконувані формули, то принаймні на одному наборі значень пропозиційних змінних формула B набуватиме значення **1**. Тоді на цьому наборі формула $A \to B$ також дорівнюватиме **1**, а отже, буде виконуваною.

7. Довести твердження: якщо A та $A \to B$ – тавтології, то B – тавтологія (правило висновку, або *modus ponens* (MP)).

Припустимо, що формула B не є тавтологією. Тоді на якомусь наборі значень пропозиційних змінних формула B набуватиме значення **0**. На цьому самому наборі формула A набуватиме значення **1**, а формула $A \to B$ дорівнюватиме **0**, а це суперечить припущенню, що $A \to B$ – тавтологія. Отже, припустивши, що формула B не є тавтологією, ми дійшли суперечності, тому справджується, що B – тавтологія.

8. Відомо, що формула $A \to B$ є тавтологією, а формула $A \sim B$ – нейтральна. Що можна сказати про формулу $B \to A$?

Із умов задачі випливає, що існує такий набір значень пропозиційних змінних, на якому формула B набуватиме значення **1**, а формула A – значення **0** (на цьому наборі формула $A \sim B$ дорівнюватиме **0**, а формула $A \to B$ – **1**), а також існує такий набір, на якому обидві формули A та B набуватимуть однакових значень (на цьому наборі обидві формули $A \sim B$ та $A \to B$ дорівнюватимуть **1**). Тоді на першому із цих наборів формула $B \to A$ дорівнюватиме **0**, а на другому вона дорівнюватиме **1**. Отже, формула $B \to A$ – нейтральна.

9. Відомо, що $\vDash A \to \neg A$. Що можна сказати про формулу A?

Формула A є суперечністю. Якщо припустити, що формула A не є суперечністю, то вона виконувана, тобто принаймні на одному наборі значень пропозиційних змінних формула A набуватиме значення **1**. Тоді на цьому наборі формула $A \to \neg A$ дорівнюватиме **0**, що суперечить умові задачі. ◄

Порядок виконання операцій у формулі визначається за допомогою дужок. Задля зменшення їх кількості випускають зовнішні дужки й запроваджують такий порядок (пріоритет) виконання операцій у разі відсутності дужок: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\sim$ (за спаданням). Часто у формулах алгебри висловлень випускають знак кон'юнкції $\wedge$ і замість $a \wedge b$ записують ab.

Для визначення порядку виконання операцій у формулі пріоритету операцій не достатньо. Потрібно ще вказувати для однакових операцій, групуються вони зліва направо чи справа наліво. Наприклад, операції $\wedge$ та $\vee$ групуються зліва направо, а операція $\to$ – справа наліво. Тому для формули $a \wedge b \wedge c$ дужки розставляємо таким чином: $((a \wedge b) \wedge c)$, для формули $a \to b \to a$ дужки розставляємо так: $(a \to (b \to a))$. Зазначимо, що для операцій $\wedge$ та $\vee$ порядок групування не є суттєвим, але для операції $\to$ він є важливим. Тому для формули $a \to b \to a$ при групуванні дужок справа наліво отримаємо формулу $(a \to (b \to a))$, яка не еквівалентна попередній формулі $(a \to (b \to a))$. Переконайтесь у цьому самостійно. Для операції еквівалентності групування не використовують.

Приклад 1.10. Розставити дужки у формулі:

$$a \to b \to \neg b \wedge a \to c \vee a \wedge \neg c.$$

► Починаємо із пошуку операцій найвищого пріоритету й беремо відповідну підформулу в дужки. Тут операцією з найвищим пріоритетом є заперечення. Воно зустрічається двічі. Отримуємо формулу

$$a \to b \to (\neg\, b) \wedge a \to c \vee a \wedge (\neg\, c).$$

Наступна за пріоритетом операція – це $\wedge$. Така операція має два аргументи. Беремо відповідні підформули в дужки:

$$a \to b \to ((\neg b) \wedge a) \to c \vee (a \wedge (\neg\, c)).$$

Далі виокремлюємо підформулу з операцією $\vee$. Дістали

$$a \to b \to ((\neg b) \wedge a) \to (c \vee (a \wedge (\neg\, c))).$$

Наступна за пріоритетом операція – імплікація $\to$. Однак тут треба врахувати порядок групування, тому отримуємо остаточний результат:

$$(a \to (b \to (((\neg\, b) \wedge a) \to (c \vee (a \wedge (\neg\, c)))))). \blacktriangleleft$$

Структура формули. Розстановка дужок у формулі вказує не лише на порядок виконання операцій, а фактично задає її структуру. Тут важливими є поняття головної операції у формулі та її аргументів.

Приклад 1.11. Проаналізувати структуру формули

$$(a \to (b \to (((\neg\, b) \wedge a) \to (c \vee (a \wedge (\neg\, c))))))$$

із прикладу 1.10.

► Головною буде перша імплікація (позначаємо головну операцію зірочкою *). Маємо такий запис:

$$(\, a \to^{*} (b \to (((\neg b) \wedge a) \to (c \vee (a \wedge (\neg\, c)))))).$$

Далі аналізуємо підформули. Підформули

$$a \quad \text{та} \quad (b \to (((\neg\, b) \wedge a) \to (c \vee (a \wedge (\neg\, c)))))$$

задають перший і другий аргументи цієї операції. Для другої підформули головною буде перша імплікація, тобто

$$(b \to^{*} (((\neg\, b) \wedge a) \to (c \vee (a \wedge (\neg\, c))))).$$

Далі, у підформулі

$$(((\neg\, b) \wedge a) \to (c \vee (a \wedge (\neg\, c))))$$

головною є імплікація, тому отримуємо

$$(((\neg b) \wedge a) \to^{*} (c \vee (a \wedge (\neg c)))).$$

Аргументами є підформули

$$((\neg\, b) \wedge a) \text{ та } (c \vee (a \wedge (\neg\, c))).$$

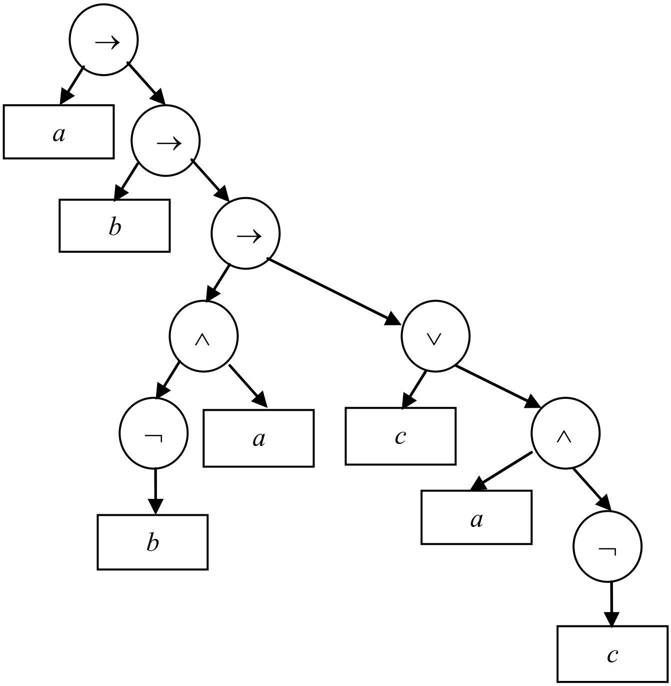
Подаємо першу підформулу у вигляді

$$((\neg\, b) \wedge^{*} a),$$

а другу – $\qquad (c \vee^{*} (a \wedge (\neg\, c))).$

Продовжуючи таким чином, підійдемо до найпростіших підформул a , b, c.

Структуру формули часто подають **деревом синтаксичного аналізу формули**. У ньому дужки не вказують. Для проаналізованої формули дерево синтаксичного аналізу має вигляд:



Наведене дерево дає наочне уявлення про порядок виконання операцій, оскільки спочатку виконуються операції, записані внизу дерева, а потім ті, які йдуть вище. ◄

Проблема розв'язності в алгебрі висловлень – це задача знаходження алгоритму, за допомогою якого для будь-якої формули A алгебри висловлень можна визначити, є A тотожно істинною (тавтологією), чи ні.

Для алгебри висловлень цю проблему можна, зокрема, розв'язати такими двома способами:

1) побудувати таблицю істинності для формули A й перевірити, чи складається стовпчик значень A лише з одиниць;

2) застосувати спосіб відшукання контрприкладу.

Аналогічно можна сформулювати й розв'язати проблему розв'язності для визначення того, чи є певна формула алгебри висловлень суперечністю або виконуваною.

Завдання для самостійної роботи

1. Визначити, чи є наведена послідовність символів формулою алгебри висловлень:

(а) $(((x \to y) \wedge (\neg z)) \sim ((\neg x) \to (y \to x)))$;

(б) $(((\neg x) \sim ((\neg y) + 1)) \to (x \vee 5y))$;

(в) $(((\neg y) \sim (x \wedge (\neg z))) \to ((\neg y) \vee x))$;

(г) $(((((x \to y) \sim (\neg z)) \vee x) \wedge (\neg y)))$.

2. Виписати всі підформули даної формули:

(а) $(((x \to (\neg y)) \wedge (\neg z)) \sim ((\neg x) \to (x \wedge z)))$;

(б) $((((y \vee (\neg z)) \to (y \wedge z)) \sim ((\neg y) \wedge x))$;

(в) $((z \to (\neg y)) \wedge ((\neg x) \vee (\neg(y \vee (\neg x)))))$;

(г) $(((\neg x \wedge y) \vee (x \sim ((\neg y) \to x))$.

3. Занумерувати послідовність виконання операцій у формулі:

(а) $(((y \sim (\neg z)) \wedge (\neg x)) \to ((\neg z) \sim (x \wedge y)))$;

(б) $(((x \to (\neg y)) \to (y \wedge ((\neg z) \to x))) \sim (\neg x))$.

4. Занумерувати послідовність виконання операцій у формулі з урахуванням їхніх пріоритетів:

(а) $(a \to \neg b) \vee (\neg a \sim c) \wedge b \vee (c \to \neg (a \sim b))$;

(б) $(a \to \neg ((b \vee c) \wedge \neg a)) \to (\neg c \vee b) \wedge a \sim \neg (a \to \neg b)$.

5. Знайти значення істинності формули:

(а) $(a \sim b) \wedge ((\neg c \to b) \vee (\neg a \wedge c) \vee (a \wedge \neg b))$
при $a = \mathbf{0}$, $b = \mathbf{1}$, $c = \mathbf{0}$;

(б) $((b \to a) \wedge (\neg c \vee (a \sim \neg b))) \to (a \wedge (d \vee \neg b))$
при $a = \mathbf{1}$, $b = \mathbf{1}$, $c = \mathbf{0}$, $d = \mathbf{1}$;

(в) $\neg a \wedge (a \sim c) \wedge (\neg b \vee (\neg c \to a))$
при $a = \mathbf{1}$, $b = \mathbf{0}$, $c = \mathbf{1}$.

6. Знайти значення істинності складеного висловлення:

(а) *Якщо ми успішно складемо іспити* (a), *то поїдемо відпочивати до моря* (b), *і ми або успішно складемо іспити*, *або здійснимо турпохід у Карпати* (c) *тоді й тільки тоді, коли погода* *буде хорошою* (d). Значення істинності елементарних висловлень такі: $a = \mathbf{1}$, $b = \mathbf{0}$, $c = \mathbf{0}$, $d = \mathbf{1}$.

(б) *Якщо ми успішно виконаємо домашнє завдання з математичної логіки* (a), *то ми отримаємо заліковий бал* (b) *або візьмемо участь у науковому семінарі* (c), *водночас якщо ми візьмемо участь у науковому семінарі й отримаємо заліковий бал, то достроково складемо іспит з математичної логіки* (d). Значення істинності елементарних висловлень:

$$a = \mathbf{0}, \quad b = \mathbf{1}, \quad c = \mathbf{0}, \quad d = \mathbf{1}.$$

7. Скласти таблицю істинності для формули алгебри висловлень:

(а) $(a \to \neg (b \wedge c)) \to (c \to \neg a)$;

(б) $((\neg a \vee b) \sim (a \wedge \neg c)) \vee (a \to b)$;

(в) $((a \to b) \sim (b \to \neg c)) \to (c \wedge a)$;

(г) $(a \to b) \to ((b \to c) \to (a \to c))$.

8. Побудувати таблицю істинності й показати, що дана формула алгебри висловлень є тотожно істинною (тавтологією):

(а) $\neg a \vee \neg b \vee a \wedge b$;

(б) $a \to (b \to a)$;

(в) $(a \to b) \to ((b \to c) \to (a \to c))$;

(г) $(a \to c) \to ((b \to c) \to ((a \vee b) \to c))$.

9. Способом відшукання контрприкладу встановити, що наведена формула алгебри висловлень є тавтологією:

(а) $((a \to b) \wedge (c \to d)) \to ((a \vee c) \to (b \vee d))$;

(б) $(a \to (b \to c)) \to ((d \to b) \to (a \to (d \to c)))$;

(в) $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c))$;

(г) $(a \to b) \to ((a \to c) \to (a \to (b \wedge c)))$.

10. Довести, що формула $((a \to b) \wedge (b \to c)) \to (a \to c)$ є тавтологією (транзитивна властивість імплікації). Чи буде тавтологією обернена імплікація $(a \to c) \to ((a \to b) \wedge (b \to c))$?

11. Довести, що формула $((a \sim b) \wedge (b \sim c)) \to (a \sim c)$ є тавтологією (транзитивна властивість еквівалентності). Чи буде тавтологією обернена імплікація $(a \sim c) \to ((a \sim b) \wedge (b \sim c))$?

12. Довести, що формула $((a \to b) \wedge (b \to c)) \to ((a \wedge b) \to c)$ є тавтологією. Чи буде тавтологією обернена імплікація $((a \wedge b) \to c) \to ((a \to b) \wedge (b \to c))$?

13. Довести, що формула $(a \to b) \wedge (b \to c) \to (a \to (b \wedge c))$ є тавтологією. Чи буде тавтологією обернена імплікація

$$(a \to (b \wedge c)) \to ((a \to b) \wedge (b \to c))?$$

14. У різні способи показати, що дана формула алгебри висловлень не є тавтологією:

(а) $(a \to b) \to (b \to a)$;

(б) $((a \wedge b) \to c) \sim ((a \to b) \to c)$;

(в) $(a \sim (b \wedge c)) \sim ((a \sim b) \wedge (a \sim c))$;

(г) $(a \to (a \to b)) \to (b \sim a)$.

15. Перевірити (довести чи спростувати), чи є наведена формула алгебри висловлень тавтологією:

(а) $((a \to b) \to (c \to d)) \to ((a \to c) \to (b \to d))$;

(б) $(b \to (a \to (b \to c))) \to (a \to c)$;

(в) $((a \to b) \vee (c \to b)) \sim ((a \wedge c) \to b)$;

(г) $((a \to b) \wedge (c \to d)) \to ((a \vee c) \to (b \vee d))$.

16. Порівняти формули A та B. Переконатись, що одна з них є тавтологією, а інша – ні:

(а) $A = a \to ((a \to b) \to b)$, $B = (a \to (a \to b)) \to b$;

(б) $A = ((a \to b) \to (a \to \neg b)) \to \neg a$,
$B = (a \to b) \to ((a \to \neg b) \to \neg a)$;

(в) $A = (b \to c) \to ((a \to b) \to (a \to c))$,
$B = ((b \to c) \to (a \to b)) \to (a \to c)$.

17. Показати, що формула алгебри висловлень є виконуваною:

(а) $(a \to (b \to \neg c)) \wedge (a \to b) \vee (c \sim \neg b)$;

(б) $(a \to b) \wedge (a \to \neg b) \wedge (b \to c) \wedge (b \to \neg c) \wedge (c \to a) \wedge (c \to \neg a)$;

(в) $(\neg a \vee b) \vee (\neg b \vee c) \vee (a \to \neg b)$.

18. Переконатися в тому, що наведена формула алгебри висловлень є суперечністю:

(а) $\neg ((a \to b) \to ((a \wedge \neg b) \to b))$;

(б) $(a \vee b) \sim (\neg a \wedge (b \to \neg b))$;

(в) $(a \to (b \to c)) \wedge (a \to b) \wedge (a \wedge \neg c)$;

(г) $\neg b \wedge a \wedge (a \to b)$;

(д) $(a \vee \neg a) \to (b \wedge \neg b)$.

19. Довести, що формула A алгебри висловлень є сильнішою за формулу B:

(а) $A = (a \to b) \wedge (b \to c)$, $B = a \to c$;

(б) $A = (a \to b) \wedge (b \to c)$, $B = a \to (b \wedge c)$;

(в) $A = (a \sim b) \wedge (b \sim c)$, $B = a \sim c$;

(г) $A = a \to (b \to c)$, $B = (a \to b) \to (a \to c)$.

20. Визначити, чи є наведена формула алгебри висловлень тавтологією, суперечністю або нейтральною:

(а) $((a \wedge b) \to c) \to ((a \to c) \wedge (b \to c))$;

(б) $(a \wedge c \vee b \wedge d) \to ((a \vee b) \wedge (c \vee d))$;

(в) $(a \wedge b \vee c \wedge d) \to ((a \vee b) \wedge (c \vee d))$;

(г) $((a \sim b) \to (c \sim d)) \to ((a \vee c) \sim (b \vee d))$;

(д) $((a \to b) \wedge a \wedge b) \sim ((a \to b) \wedge a)$;

(е) $((\neg a \vee b) \wedge (\neg b \vee c) \wedge a) \to \neg c$.

21. Чи може тавтологія містити тільки операції із множини $\{\vee, \wedge\}$? Відповідь обґрунтувати.

22. Довести, що будь-яка формула алгебри висловлень, операціями якої є тільки операції з множини $\{\vee, \wedge\}$, є нейтральною.

23. Довести, що довільна формула алгебри висловлень, яка містить із символів логічних операцій лише $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\sim$, є виконуваною.

24. Довести чи спростувати твердження:

(а) Із двох формул A та $\neg A$ алгебри висловлень принаймні одна – тавтологія.

(б) Якщо A та B – тавтології, то $A \wedge B$ – тавтологія. Чи правильне обернене твердження?

(в) Якщо A та B – тавтології, то $A \vee B$ – тавтологія. Чи правильне обернене твердження?

(г) Якщо A та B – тавтології, то $A \to B$ – тавтологія. Чи правильне обернене твердження?

(д) Якщо формула $A \sim B$ – тавтологія, то A та B – тавтології. Чи правильне обернене твердження?

25. Довести чи спростувати твердження:

(а) Якщо A – виконувана формула алгебри висловлень, то формула $\neg A$ є невиконуваною.

(б) Формула A невиконувана тоді й тільки тоді, коли A – суперечність.

(в) Із двох формул A та $\neg A$ алгебри висловлень хоча б одна є виконуваною.

(г) Якщо A та B – виконувані формули, то $A \wedge B$ – виконувана. Чи правильне обернене твердження?

(д) Якщо A та B – виконувані формули, то $A \vee B$ – виконувана. Чи є правильним обернене твердження?

(е) Якщо $A \sim B$ – виконувана формула, то A та B – виконувані. Чи правильне обернене твердження?

26. Довести твердження:

(а) Якщо $A \to B$ і $\neg B$ – тавтології, то $\neg A$ – тавтологія (правило заперечення, або modus tolens).

(б) Якщо $A \vee B$ і $\neg A$ – тавтології, то B – тавтологія (правило диз'юнктивного силогізму).

(в) Якщо $A \to B$ і $B \to C$ – тавтології, то $A \to C$ – тавтологія (правило ланцюгового висновку).

(г) Якщо $A \to B$ та $A \to \neg B$ – тавтології, то $\neg A$ – тавтологія (метод доведення від супротивного).

27. Довести твердження:

(а) Якщо $(A \vee B)$ і $(\neg A \vee C)$ – тавтології, то $(B \vee C)$ – тавтологія.

(б) Якщо формули $(A \vee B)$, $(A \to C)$ і $(B \to D)$ – тавтології, то $(C \vee D)$ – тавтологія.

(в) Якщо $(\neg A \vee B)$ і $(\neg B \vee \neg C)$ – тавтології, то $(A \to \neg C)$ – тавтологія.

28. Відомо, що формула $A \to B$ є тавтологією, а формула $A \sim B$ – суперечністю. Що можна сказати про формулу $B \to A$?

29. Формула $A \sim B$ є суперечністю. Що можна стверджувати про формули $\neg A \sim B$ і $\neg A \sim \neg B$?

30. Відомо, що $\models B \to C$. Чи можна стверджувати, що для довільної формули A алгебри висловлень формула

$(A \to B) \to (A \to C)$ є тавтологією?

31. Розставити дужки у формулах:

(а) $a \wedge b \to c \to (a \to c \wedge (b \to c))$;

(б) $a \wedge c \vee b \wedge d \to (a \vee b) \wedge c \vee d$;

(в) $a \wedge b \vee c \wedge d \to a \vee b \wedge c \vee d$;

(г) $(a \sim b) \to (c \sim d) \to a \vee c \sim b \vee d$;

(д) $a \to b \wedge a \wedge b \sim (a \to b) \wedge a$;

(е) $\neg a \vee b \wedge \neg b \vee c \wedge a \to \neg c$.

32. Побудувати дерева синтаксичного аналізу для формул із завдання 31.

1.3. Рівносильні формули алгебри висловлень

Формули A та B алгебри висловлень називають **рівносильними**, якщо їм відповідає та сама функція істинності, тобто вони набувають однакових значень на всіх наборах значень їхніх пропозиційних змінних.

Рівносильність формул A та B позначають за допомогою знака $\equiv$ ($=$ або $\leftrightarrow$): записують $A \equiv B$.

Рівносильні формули ще часто називають **еквівалентними**.

Рівносильність формул можна перевірити складанням таблиць істинності відповідних функцій і порівнюванням цих таблиць.

Рівносильним перетворенням формули A називають дію або процедуру, у результаті якої дістаємо формулу B, рівносильну формулі A.

Неважко довести (побудовою відповідних таблиць істинності) **основні тотожності (рівносильності, закони) алгебри висловлень.**

1. $(a \vee b) \vee c \equiv a \vee (b \vee c)$, $(a \wedge b) \wedge c \equiv a \wedge (b \wedge c)$ – **асоціативність**;

2. $a \vee b \equiv b \vee a$, $a \wedge b \equiv b \wedge a$ – **комутативність**;

3. $a \wedge (b \vee c) \equiv (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, $a \vee (b \wedge c) \equiv (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ – **дистрибутивність**;

4. $a \vee a \equiv a$, $a \wedge a \equiv a$ – **ідемпотентність**;

5. $\neg (a \vee b) \equiv \neg a \wedge \neg b$, $\neg (a \wedge b) \equiv \neg a \vee \neg b$ – **закони де Моргана**;

6. $\neg \neg a \equiv a$ – **закон подвійного заперечення**;

7. $a \vee \mathbf{0} \equiv a$, $a \wedge \mathbf{1} \equiv a$; $a \vee \mathbf{1} \equiv \mathbf{1}$, $a \wedge \mathbf{0} \equiv \mathbf{0}$ – **властивості елементів $\mathbf{0}$ та $\mathbf{1}$**;

8. $a \vee \neg a \equiv \mathbf{1}$, $a \wedge \neg a \equiv \mathbf{0}$ – **властивості заперечення**;

9. $a \vee (a \wedge b) \equiv a$; $a \wedge (a \vee b) \equiv a$ – **правила поглинання**.

Приклад 1.12.

1. Довести такі рівносильності алгебри висловлень:

(а) $a \to b \equiv \neg a \vee b$; (б) $a \to b \equiv \neg b \to \neg a$;

(в) $a \sim b \equiv (a \to b) \wedge (b \to a)$; (г) $a \sim b \equiv (\neg a \vee b) \wedge (a \vee \neg b)$;

(д) $a \sim b \equiv (a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$; (е) $a \sim b \equiv \neg (a \wedge \neg b) \wedge \neg (\neg a \wedge b)$.

Кожну із наведених рівносильностей неважко довести, побудувавши відповідні таблиці істинності для її правої і лівої частин і порівнявши ці таблиці.

Важливим висновком із цих рівносильностей є те, що операції $\rightarrow$ та $\sim$ є надлишковими в алгебрі висловлень. Кожну підформулу, що містить такі операції, можна замінити на рівносильну їй (згідно з наведеними рівносильностями), що міститиме лише операції кон'юнкції, диз'юнкції та заперечення.

2. Використавши тотожності попередньої задачі, замінити формулу алгебри висловлень $\neg (a \rightarrow b) \sim (\neg a \rightarrow \neg b)$ рівносильною, що містить лише операції кон'юнкції, диз'юнкції та заперечення.

Замінимо спочатку підформули, що містять символ операції $\rightarrow$. Матимемо $\neg (\neg a \vee b) \sim (\neg \neg a \vee \neg b)$. Використавши тотожність 4 попередньої задачі, отримаємо рівносильну формулу

$$(\neg \neg (\neg a \vee b) \vee (\neg \neg a \vee \neg b)) \wedge (\neg (\neg a \vee b) \vee \neg (\neg \neg a \vee \neg b)).$$

Застосуємо до цієї формули закон подвійного заперечення зі списку основних тотожностей алгебри висловлень. Отримаємо формулу $((\neg a \vee b) \vee (a \vee \neg b)) \wedge (\neg(\neg a \vee b) \vee \neg (a \vee \neg b))$. Однак і після спрощення дістали рівносильну формулу, що майже вдвічі довша від початкової. Саме цим пояснюється наявність надлишкових операцій $\rightarrow$ та $\sim$ в алгебрі висловлень.

3. Дано два складені висловлення:

1) *Якщо один доданок кратний* 3 *і сума кратна* 3, *то й другий доданок кратний* 3.

2) *Якщо один доданок кратний* 3, *а другий – не кратний* 3, *то сума не кратна* 3.

Записати ці висловлення формально й визначити, чи вони рівносильні.

Позначимо елементарні висловлення, з яких складено наведені висловлення, так: a – *один доданок кратний* 3, b – *сума кратна* 3, c – *другий доданок кратний* 3. Відповідні формули, що задають логічну структуру цих висловлень, є такими:

$$(a \wedge b) \rightarrow c \text{ і } (a \wedge \neg c) \rightarrow \neg b.$$

Побудувавши таблиці істинності для кожної із цих формул, переконаємося, що вони рівносильні.

4. Перевірити, чи є логічно еквівалентними (рівносильними) такі твердження: *Неправильно, що a тоді й тільки тоді, коли b* та $\neg$ *a тоді й тільки тоді, коли* $\neg$ *b*.

Запишемо дані твердження (висловлення) формально. Матимемо відповідно: $\neg (a \sim b)$ і $(\neg a \sim \neg b)$. Таблиці істинності цих формул відрізняються, тому наведені твердження не є логічно еквівалентними (рівносильними).

У той самий час, наприклад, твердження *Неправильно, що a та b* і *Неправильно, що a*, *або неправильно, що b* є рівносильними. Це один із законів де Моргана, записаний словами. ◄

Завдання для самостійної роботи

1. Довести таку рівносильність:

(а) $a \wedge \neg b \vee \neg a \wedge b \equiv (a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$;

(б) $a \vee b \vee c \vee d \equiv (\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c) \rightarrow d$;

(в) $(a \wedge b) \rightarrow c \equiv (a \wedge \neg c) \rightarrow \neg b$;

(г) $(a \sim b) \wedge (a \wedge \neg b \vee b) \equiv a \wedge b$.

2. Довести, що формули алгебри висловлень

$(a \wedge b) \rightarrow c$, $(a \wedge \neg c) \rightarrow \neg b$, $(b \wedge \neg c) \rightarrow \neg a$ та $a \rightarrow (b \rightarrow c)$ рівносильні.

3. Визначити, яка із наведених чотирьох формул рівносильна формулі $\neg (a \rightarrow b)$:

1) $\neg a \rightarrow \neg b$;

2) $a \rightarrow \neg b$;

3) $\neg a \rightarrow b$;

4) $a \wedge \neg b$.

4. Довести, що $a \rightarrow b \equiv \neg b \rightarrow \neg a$ (**закон контрапозиції**).

5. Перевірити (довести або спростувати), чи має місце така рівносильність:

(а) $\neg (a \sim \neg b) \equiv a \wedge b \vee \neg a \wedge \neg b$;

(б) $(a \vee c) \rightarrow (b \vee d) \equiv (a \rightarrow b) \wedge (c \rightarrow d)$;

(в) $a \rightarrow (a \sim b) \equiv (a \rightarrow b)$;

(г) $a \rightarrow (b \rightarrow c) \equiv (a \wedge b) \rightarrow c$;

(д) $(a \vee b \vee \neg c) \rightarrow a \equiv (b \rightarrow a) \wedge (\neg a \rightarrow c)$;

(е) $(a \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c)) \equiv ((a \wedge b) \vee (a \wedge c))$.

6. Перевірити, чи є логічно еквівалентними (рівносильними) такі пари тверджень:

(а) *Якщо а, то b* та *Якщо неправильно, що b, то неправильно, що а*.

(б) *Якщо а*, *то b*" та *Якщо неправильно, що а, то неправильно, що b*.

(в) *Якщо а, то b* та *Неправильно, що а, і неправильно, що ¬ b*.

(г) *Із а випливає b* та *а тільки тоді, коли b*.

(д) *b випливає з а* та *¬ b – достатня умова для ¬ а*.

(е) *b – необхідна умова для а* та *b тільки тоді, коли а*.

(є) *b – необхідна умова для а* та *¬ b – достатня умова для ¬ а*.

(ж) *Неправильно, що а або b* та *Неправильно, що а*, *і неправильно, що b*.

(з) *Неправильно, що а та ¬b* та *Неправильно, що а, або справджується b*.

7. Визначити, які із висловлень логічно рівносильні:

1) *Студент розв'язав цю задачу, але не склав іспит з математичної логіки*.

2) *Студент розв'язав цю задачу або не склав іспит з математичної логіки*.

3) *Неправильно, що студент не розв'язав цю задачу або склав іспит з математичної логіки*.

4) *Студент розв'язав цю задачу і склав іспит з математичної логіки або він не розв'язав цю задачу й не склав іспит з математичної логіки*.

5) *Якщо студент склав іспит з математичної логіки, то він розв'язав цю задачу*.

6) *Студент склав іспит з математичної логіки тоді й тільки тоді, коли він розв'язав цю задачу*.

1.4. Нормальні форми логічних функцій. Досконала диз'юнктивна нормальна форма (ДДНФ). Досконала кон'юнктивна нормальна форма (ДКНФ)

У п. 1.2 описано спосіб побудови таблиці істинності для заданої пропозиційної формули, тобто побудови таблиці логічної функції, яку задає ця формула.

Не менш важливою є обернена задача: для функції, заданої таблицею, графіком, словесно тощо, визначити (побудувати) формулу, що цю функцію задає. У багатьох розділах математики побудувати таку формулу для довільної функції не вдається. Замість формули, яка абсолютно точно визначає вихідну функцію, використовують методи побудови різних формул, що відтворюють цю функцію наближено (або апроксимують її) з певною точністю.

В алгебрі логіки існує кілька процедур, що дають змогу для заданої логічної функції побудувати формули, які задають цю функцію й використовують певний набір логічних операцій.

Розглянемо дві такі процедури.

Будемо вважати, що основною формою задання логічної функції є її таблиця істинності. Якщо функція задана якимось іншим способом (словесно, графіком, якоюсь формулою з іншим набором операцій тощо), то спочатку визначаємо за заданням відповідну таблицю істинності.

Уведемо такі позначення: для логічної змінної x вважатимемо, що $x^0 = \neg x$ та $x^1 = x$. Неважко переконатись, що для логічної змінної $a \in B$ виконується $x^a = 1$, якщо $a = x$ (тобто якщо значення змінних a та x збігаються), а $x^a = 0$, якщо $a \neq x$.

Розглянемо довільну логічну функцію $f(x, y, z)$ від трьох змінних. Нехай (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2),…, (a_k, b_k, c_k) – це всі набори значень змінних, для яких функція f істинна (тобто дорівнює 1). Тоді формула, що задає цю функцію, має вигляд:

$$x^{a_1} y^{b_1} z^{c_1} \vee x^{a_2} y^{b_2} z^{c_2} \vee \ldots \vee x^{a_k} y^{b_k} z^{c_k} \qquad (1.1)$$

Справді, якщо до цієї формули підставити замість x, y та z один із наборів (a_i, b_i, c_i) (тобто покласти $x = a_i$, $y = b_i$ і $z = c_i$), то рівно один із логічних доданків формули (1.1), а саме доданок $x^{a_i} y^{b_i} z^{c_i}$, дорівнюватиме 1, $i = 1, 2, \ldots, k$. Отже, значенням усієї формули (1.1) на цьому наборі (a_i, b_i, c_i) буде 1. Якщо ж до (1.1) підставити будь-який інший набір значень змінних (тобто набір, що не увійшов до вищезазначеного списку з k елементів), то всі доданки формули (1.1)дорівнюватимуть 0, отже, і значенням усієї формули на такому наборі буде 0.

Таким чином, обґрунтовано, що значення формули (1.1) збігається зі значенням заданої функції $f(x, y, z)$ на будь-якому наборі (a, b, c) значень її змінних, тобто (1.1) задає (реалізує) функцію $f(x, y, z)$.

Формулу (1.1) називають **досконалою диз'юнктивною нормальною формою** (ДДНФ) логічної функції $f(x, y, z)$.

Операції, що входять до складу ДДНФ – це кон'юнкція, диз'юнкція та заперечення.

Приклад 1.13.

1. Побудувати ДДНФ логічної функції, таблицю істинності якої отримано у прикладі 1.7. Ця функція набуває значення 1 на наборах (0,1,1), (1,0,0) і (1,0,1), тому її ДДНФ – це

$$x^0y^1z^1 \vee x^1y^0z^0 \vee x^1y^0z^1 \text{ або } \neg xyz \vee x\neg y\neg z \vee x\neg yz.$$

2. Побудувати ДДНФ логічної функції $f(x, y, z)$ від трьох змінних, яка набуває такого самого значення, як і більшість її змінних (**функція голосування**).

Функція голосування є істинною на наборах (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0) та (1,1,1), тому її ДДНФ – $\neg xyz \vee x\neg yz \vee xy\neg z \vee xyz$. ◄

Алгоритм побудови ДДНФ для логічних функцій від двох, чотирьох, п'яти та більшої кількості змінних аналогічний.

Приклад 1.14.

1. Побудувати ДДНФ логічної функції $f(x, y, z, u)$ від чотирьох змінних, яка набуває значення 1 на тих і лише тих наборах значень її змінних, у яких кількість одиниць і кількість нулів збігаються.

З умови задачі робимо висновок, що наборами, на яких функція f набуває значення 1, є такі:

(0,0,1,1), (0,1,0,1), (0,1,1,0), (1,0,0,1), (1,0,1,0), (1,1,0,0).

Шукана ДДНФ має вигляд

$$x^0y^0z^1u^1 \vee x^0y^1z^0u^1 \vee x^0y^1z^1u^0 \vee x^1y^0z^0u^1 \vee x^1y^0z^1u^0 \vee x^1y^1z^0u^0 \text{ або}$$

$$\neg x\neg yzu \vee \neg xy\neg zu \vee \neg xyz\neg u \vee x\neg y\neg zu \vee x\neg yz\neg u \vee xy\neg z\neg u.$$

2. Побудувати ДДНФ логічної функції $f(x, y, z, u, v)$ від п'яти змінних, яка набуває значення 1 на тих і лише тих наборах значень її змінних, у яких тільки одна зі змінних дорівнює 0.

Отже, за умовою задана функція набуває значення 1 лише на наборах (0,1,1,1,1), (1,0,1,1,1), (1,1,0,1,1), (1,1,1,0,1) та (1,1,1,1,0).

Відповідна ДДНФ:

$$\neg xyzuv \vee x\neg yzuv \vee xy\neg zuv \vee xyz\neg uv \vee xyzu\neg v. \blacktriangleleft$$

За допомогою тих самих операцій кон'юнкції, диз'юнкції і заперечення можна побудувати іншу формулу, що реалізує певну логічну функцію.

Нехай (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2),…, (a_k, b_k, c_k) – це всі набори значень змінних, для яких логічна функція $f(x, y, z)$ хибна (набуває значення 0). Тоді формула

$$(x^{\neg a_1} \vee y^{\neg b_1} \vee z^{\neg c_1}) \wedge (x^{\neg a_2} \vee y^{\neg b_2} \vee z^{\neg c_2}) \vee \ldots \vee (x^{\neg a} y^{\neg b_k} z^{\neg c_k}) \quad (1.2)$$

реалізує функцію f.

Аналогічно вищенаведеним міркуванням можна обґрунтувати, що для будь-якого набору (a_i, b_i, c_i), $i = 1, 2, \ldots, k$ значенням формули (1.2) буде 0, а для будь-якого іншого набору, що не увійшов до цього списку, (1.2) дорівнюватиме 1. Пропонуємо переконатись у цьому самостійно.

Формулу (1.2) називають **досконалою кон'юнктивною нормальною формою** (ДКНФ) відповідної логічної функції $f(x, y, z)$.

Приклад 1.15.

1. Побудувати ДКНФ для логічної функції $f(x, y, z)$ із прикладу 1.7.

Ця функція набуває значення 0 на наборах (0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (1,1,0) і (1,1,1), тому її ДКНФ має вигляд

$$(x^{\neg 0} \vee y^{\neg 0} \vee z^{\neg 0}) \wedge (x^{\neg 0} \vee y^{\neg 0} \vee z^{\neg 1}) \wedge (x^{\neg 0} \vee y^{\neg 1} \vee z^{\neg 0}) \wedge$$

$$\wedge (x^{\neg 1} \vee y^{\neg 1} \vee z^{\neg 0}) \wedge (x^{\neg 1} \vee y^{\neg 1} \vee z^{\neg 1}) \text{ або}$$

$$(x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \neg z) \wedge (x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee \neg z).$$

2. Визначити ДКНФ функції голосування із попереднього прикладу.

Функція голосування $f(x, y, z)$ є хибною для наборів (0,0,0), (0,0,1), (0,1,0) і (1,0,0), тому її ДКНФ є такою:

$$(x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \neg z) \wedge (x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee y \vee z). \blacktriangleleft$$

Аналогічно можна побудувати ДКНФ логічної функції від будь-якої іншої кількості змінних.

1.5. Логічний висновок на базі алгебри висловлень. Несуперечність множини висловлень

Формулу $B(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ називають **логічним наслідком** (**логічним висновком**) із формул

$$A_1(p_1, p_2, \ldots, p_n), A_2(p_1, p_2, \ldots, p_n), \ldots, A_k(p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

на базі алгебри висловлень, якщо B набуває значення **1** на всіх тих наборах значень $p_1, p_2, \ldots, p_n$, на яких усі A_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ набувають значення **1**. Формули $A_1, A_2, \ldots, A_k$ при цьому називають **засновками** чи **припущеннями**.

Те, що B є логічним висновком з $A_1, A_2, \ldots, A_k$ на базі алгебри висловлень, позначають

$$A_1, A_2, \ldots, A_k \vDash B.$$

Вираз

$$A_1, A_2, \ldots, A_k \vDash B$$

називають **твердженням про наслідковість** (**висновковість**), або **наслідковісним** (**висновковісним**) **твердженням**. Можна також уживати термін **наслідковість** (**висновковість**[1]).

Зокрема, якщо $k = 1$, то формулу

$$B(p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

називають **логічним висновком** (**логічним наслідком**) формули $A_1(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ і часто позначають $A_1 \Rightarrow B$.

Неважко переконатись, що формула B є логічним висновком із формул $A_1, A_2, \ldots, A_k$ (тобто $A_1, A_2, ..., A_k \vDash B$) тоді й тільки тоді, коли формула $A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_k \rightarrow B$ є тавтологією.

Приклад 1.16.

1. Довести наслідковісне твердження:

$$a \wedge b, \neg c \rightarrow \neg b \vDash c.$$

Побудуємо таблиці істинності для кожної із формул, що входять до складу твердження (для зручності об'єднаємо ці таблиці до однієї).

$a\ b\ c$	$a \wedge b$	$\neg c \rightarrow \neg b$	c
0 0 0	**0**	**1**	**0**
0 0 1	**0**	**1**	**1**
0 1 0	**0**	**0**	**0**
0 1 1	**0**	**1**	**1**
1 0 0	**0**	**1**	**0**
1 0 1	**0**	**1**	**1**
1 1 0	**1**	**0**	**0**
1 1 1	**1**	**1**	**1**

[1] Терміни введено авторами.

Аналізуючи таблиці, маємо, що тільки на наборі (**1**,**1**,**1**) обидва засновки нашого твердження набувають значення **1**. На цьому самому наборі висновок також набуває значення **1**. Наслідковісне твердження доведено.

2. Перевірити коректність наведених логічних міркувань формальними методами.

(а) *Якщо Андрій поїде до Харкова, то Віктор поїде до Києва. Андрій поїде в Харків або в Одесу. Якщо Андрій поїде в Одесу, то Ольга залишиться у Львові. Однак Ольга не залишилась у Львові. Отже, Віктор поїде до Києва*.

(б) *Для того, щоб бути допущеним до іспитів, необхідно отримати залік з математичної логіки. Я отримаю цей залік, якщо навчуся розв'язувати логічні задачі. Я не навчився розв'язувати логічні задачі. Отже, я не буду допущений до іспитів*.

► Позначимо елементарні висловлення, з яких складено перше з міркувань, так: a – *Андрій поїде у Харків*, b – *Віктор поїде в Київ*, c – *Андрій поїде в Одесу*, d – *Ольга залишиться у Львові*. Відповідні формули-засновки, що задають логічну структуру цих висловлень, є такими: $a \to b$, $a \vee c$, $c \to d$, $\neg d$. Висновок – b. Отже, задачу зведено до перевірки такої вивідності:

$$a \to b, a \vee c, c \to d, \neg d \vDash b.$$

Побудувавши таблиці істинності для кожної з формул, що входять до складу вивідності, отримаємо, що існує лише один набір (**1**,**1**,**0**,**0**), на якому всі засновки нашої вивідності набувають значення **1**. На цьому самому наборі й висновок b також набуває значення **1**. Отже, наведені логічні міркування коректні.

Аналогічний аналіз зробимо й для другого міркування. У цьому разі маємо такі елементарні висловлення: a – *Я допущений до іспитів*, b – *Я отримав залік з математичної логіки*, c – *Я навчився розв'язувати логічні задачі*. Відповідні формули-засновки, що задають логічну структуру висловлень наведеного міркування, є такими: $b \to a$, $c \to b$, $\neg c$. Висновок – $\neg a$.

Побудувавши таблиці істинності, отримаємо, що, наприклад, на наборі (**1**,**0**,**0**) усі засновки нашої вивідності набувають значення **1**. Однак на цьому наборі висновок $\neg a$ набуває значення **0**. Отже, наведені логічні міркування некоректні. ◄

Неважко переконатись, що мають місце корисні й часто використовувані вивідності

$$A \wedge B \vDash A,\ A \wedge B \vDash B \text{ та } A \vDash A \vee B,\ B \vDash A \vee B,$$

які можна записати також у вигляді

$$A \wedge B \Rightarrow A,\ A \wedge B \Rightarrow B \text{ та } A \Rightarrow A \vee B,\ B \Rightarrow A \vee B.$$

Множину висловлень

$M = \{A_1(p_1, p_2, \ldots, p_n), A_2(p_1, p_2, \ldots, p_n), \ldots, A_k(p_1, p_2, \ldots, p_n)\}$

називають **несуперечною** (**сумісною**), якщо існує такий набір значень для $p_1, p_2, \ldots, p_n$, на якому кон'юнкція $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$ набуває значення **1** (про висловлення $A_1, A_2, \ldots, A_k$ тоді кажуть, що вони **сумісні**). Якщо на всіх наборах значень $p_1, p_2, \ldots, p_n$ кон'юнкція $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$ набуває значення **0**, кажуть, що висловлення $A_1, A_2, \ldots, A_k$ **несумісні** або множина висловлень M **суперечна**.

Приклад 1.17.

1. Визначити, чи є множина висловлень

$$\{a \sim \neg b, \neg a \to \neg c, a \vee c, c \to b\}$$

несуперечною.

Побудувавши таблицю істинності для формули

$$(a \sim \neg b) \wedge (\neg a \to \neg c) \wedge (a \vee c) \wedge (c \to b),$$

отримаємо, що існує набір (**1**,**0**,**0**), на якому ця формула набуває значення **1**. Отже, задана множина висловлень несуперечна.

2. Перевірити, чи є несуперечною множина висловлень.

1) *Андрій складе іспит з дискретної математики тоді й тільки тоді, коли регулярно виконуватиме домашні завдання*.

2) *Якщо Андрій використає навчальний посібник з дискретної математики, то він регулярно виконуватиме домашні завдання*.

3) *Андрій поїде на відпочинок до Одеси тоді, коли складе іспит з дискретної математики*.

4) *Андрій використає навчальний посібник з дискретної математики й поїде на відпочинок до Одеси*.

Позначимо елементарні висловлення, з яких складена задана множина, так: *a – Андрій складе іспит з дискретної математики*, *b – Андрій регулярно виконуватиме домашні завдання*, *c – Андрій використає навчальний посібник з дискретної математики*, *d – Андрій поїде на відпочинок до Одеси*. Відповідні формули, що задають логічну структуру наведених висловлень:

$$a \sim b,\ c \to b,\ a \to d,\ c \wedge d.$$

Неважко підібрати (навіть не будуючи таблиці істинності) набір, на якому всі чотири останні формули набувають значення **1**. Таким набором буде (**1**,**1**,**1**,**1**). Отже, задана множина висловлень несуперечна.

3. Слідчий допитує трьох свідків: **А**, **Б**, **В**. Свідок **А** стверджує, що **Б** говорить неправду. **Б** наполягає на тому, щоб слідчий не вірив показанням **В**. **В** каже, що ані **А**, ані **Б** не говорять правди. Визначити, хто з трьох свідків говорить правду.

Розглянемо такі елементарні висловлення: a – **А** *говорить правду*, b – **Б** *говорить правду*, c – **В** *говорить правду*. З умов задачі матимемо множину висловлень:

$$a \sim \neg b,\ b \sim \neg c,\ c \sim (\neg a \wedge \neg b).$$

Ця множина несуперечна й усі три висловлення істинні тільки для набору значень (**0**,**1**,**0**). Отже, правду каже лише свідок **Б**. ◄

Завдання для самостійної роботи

1. Довести наслідковість:

(а) $a \vee b, \neg a \vee c \vDash b \vee c$;

(б) $a \vee b, a \to c, b \to d \vDash c \vee d$;

(в) $\neg a \vee b, \neg b \vee \neg c \vDash a \to \neg c$;

(г) $a \to b, a \wedge \neg b \vDash b$;

(д) $\neg (a \vee b) \vDash \neg a \vee c$;

(е) $a, c \to \neg(a \vee b) \vDash \neg c$;

(є) $a \vee \neg c, a \to d, b \to c, \neg b \to d \vDash d$;

(ж) $a \to (b \vee c), d \to a \vDash (\neg b \wedge \neg c) \to \neg d$.

2. Побудувавши відповідні таблиці істинності, визначити, чи є правильною така наслідковість:

(а) $(a \to b) \to c \vDash (a \vee b) \vee c$;

(б) $(a \vee b) \vee c \vDash (a \to b) \to c$;

(в) $a \to b, a \vee c \vDash (a \vee c) \to (a \wedge b)$;

(г) $a \to b, a \to c, a \vDash b \wedge c$;

(д) $a \to b, c \wedge a \vDash c \wedge b$;

(е) $a \to b, c \wedge a \vDash c$;

(є) $a \wedge b, \neg a \vee b \vDash \neg b$;

(ж) $a \vee b, a \to c, b \to c \vDash \neg c \to \neg a$.

3. Розташувати наведені формули в такому порядку, щоб кожна з них була логічним висновком усіх попередніх: 1) $\neg a \sim b$; 2) $a \to (\neg a \to b)$; 3) $a \wedge \neg b$; 4) $\neg a \to b$; 5) $a \wedge \neg (\neg b \vee a)$.

4. Формули A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 задано таблицями істинності:

x y z	A_1	A_2	A_3	B_1	B_2
0 0 0	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
0 0 1	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**
0 1 0	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**
0 1 1	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**
1 0 0	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**
1 0 1	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**
1 1 0	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**
1 1 1	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**

Визначити, чи має місце таке наслідковісне твердження:

(а) $A_1 \vDash B_2$; (б) $A_1, A_3 \vDash B_1$; (в) $A_2, A_3 \vDash B_2$;

(г) $A_1, A_2, A_3 \vDash B_2$; (д) $A_2, A_3 \vDash B_1$; (е) $A_1, A_3 \vDash B_2$.

5. Довести твердження:

(а) $A, A \to B \vDash B$; (б) $A \to B, \neg B \vDash \neg A$;

(в) $A \to B, B \to C \vDash A \to C$; (г) $A \vee B, \neg A \vDash B$;

(д) $A \to B, A \to \neg B \vDash \neg A$; (е) $A \to \neg A \vDash \neg A$;

(є) $A \to B, B \to \neg A \vDash \neg A$; (ж) $\neg A \to A \vDash A$.

6. Перевірити (довести чи спростувати) твердження:

(а) $A \to B, B \vDash A$; (б) $\neg B \to \neg A, A \vDash B$;

(в) $A \to B, B \to \neg A \vDash A$; (г) $\neg A \to B, \neg A \vDash B$;

(д) $A \to B, \neg A \to B \vDash B$; (е) $\neg A \to \neg B, A \vDash B$.

7. Чи є твердження *Студент погано працював протягом семестру, тому не склав іспит з дискретної математики* логічним висновком із твердження *Якщо студент добре працюватиме протягом семестру, то він успішно складе іспит з дискретної математики*?

8. Нехай задано такий засновок: *Якщо студент не знає математичної логіки, то він не зможе розв'язати логічну задачу*. Визначити коректність логічного висновку за умови другого засновку:

(а) *Студент розв'язав логічну задачу. Отже, він знає математичну логіку*.

(б) *Студент знає математичну логіку. Отже, він зможе розв'язати логічну задачу*.

(в) *Студент не знає математичної логіки. Отже, він не зможе розв'язати логічну задачу*.

(г) *Студент не розв'язав логічну задачу. Отже, він не знає математичної логіки*.

9. Перевірити коректність наведених логічних міркувань формальними методами:

(а) *Якщо студент не прочитає підручник з математичної логіки, то він не набуде необхідних знань. Однак студент прочитав підручник з логіки. Отже, він набув необхідних знань*.

(б) *Якщо певний елемент обчислювальної машини має дефект, то машина не працюватиме. Обчислювальна машина не працює, отже, її певний елемент має дефект*.

(в) *Шахіст N не буде чемпіоном, якщо не виграє цю партію. Однак N виграв цю партію. Отже, N буде чемпіоном*.

(г) *Якщо всі засновки наслідковості істинні й наслідковість правильна, то висновок – істинний. У цій наслідковості висновок хибний. Отже, або в наслідковості не всі засновки істинні, або вона неправильна*.

(д) *Для того, щоб скласти іспит з дискретної математики, мені необхідно дістати підручник або конспект. Я дістану підручник тільки в тому разі, якщо мій приятель не поїде додому. Однак він поїде додому тільки тоді, коли я дістану конспект. Отже, я складу іспит з дискретної математики*.

10. Записати нижченаведені міркування у вигляді наслідковості (на базі алгебри висловлень) і визначити її коректність.

1) (а) *Число ділиться на* 9 *тільки тоді, коли воно ділиться на* 3. (б) *Це число не ділиться на 9. Отже, воно не ділиться й на* 3.

2) (а) *Для того щоб число* 2007 *було простим, необхідно, щоб* 2007 *не було кратне* 6. (б) 2007 *кратне* 6 *тільки тоді, коли* 2007 *кратне* 2. (в) 2007 *не кратне* 2. *Отже*, 2007 – *просте число*.

3) (а) *Якщо в розкладі занять на сьогодні є лекція з алгебри, то немає лекції з дискретної математики*. (б) *Заняття з французької мови є тільки тоді, коли є практикум із програмування*. (в) *Немає лекції з математичного аналізу, якщо немає заняття з французької мови*. (г) *Лекція з алгебри є в розкладі занять на*

сьогодні. Отже, у розкладі занять на сьогодні немає лекції з математичного аналізу.

4) (а) *Будь-який дріб – раціональне число*. (б) *Кожне ціле число є раціональним. Отже, кожне ціле число – дріб.*

5) (а) *Будь-який дріб – раціональне число*. (б) *Кожне ціле число є раціональним. Отже, будь-який дріб – ціле число*.

11. Визначити, чи є задана множина висловлень несуперечною:

(а) $\{a \to b, \neg a, \neg b\}$; (б) $\{a \to \neg b, a \wedge b\}$;
(в) $\{a \to b, a \to \neg b, \neg a\}$; (г) $\{a \to \neg a, \neg a \to a\}$;
(д) $\{\neg (a \to b), b \to a\}$; (е) $\{a \sim c, c \to b, a \wedge \neg c\}$;
(є) $\{a \wedge \neg b, \neg b \to \neg a, c \sim b\}$; (ж)$\{\neg a \sim \neg b, c \to b, c \wedge \neg a\}$;
(з) $\{a \sim \neg b, \neg a \to \neg c, a \vee c, c \to b\}$.

12. Перевірити, чи є несуперечною множина висловлень:

1) *Дмитро успішно складе іспит із дискретної математики тоді й тільки тоді, коли регулярно виконуватиме домашні завдання*.

2) *Якщо Дмитро раціонально організує свій робочий час, то він регулярно виконуватиме домашні завдання.*

3) *Дмитро поїде на екскурсію до Львова тоді, коли успішно складе іспит з дискретної математики*.

4) *Дмитро раціонально організує свій робочий час і поїде на екскурсію до Львова*.

13. Визначити коректність логічного висновку в міркуванні *Крадіжку могли здійснити або* **А**, *або* **Б**, *або* **В**. *Однак крадіжку здійснив* **А**. *Отже, крадіжку не здійснили ні* **Б**, *ні* **В**.

14. Перевірте формальними методами правильність таких логічних міркувань поліцейського детектива: *Якщо Джон не зустрічав у цю ніч Сміта, то або Сміт – убивця, або Джон бреше. Якщо Сміт – убивця, то Джон не зустрічав Сміта в цю ніч, і вбивство відбулося після опівночі. Якщо вбивство відбулося після опівночі, то або Сміт – убивця, або Джон бреше. Отже, Сміт – убивця.*

15. Шість студентів **А**, **Б**, **В**, **Г**, **Д**, **Е** купили по лотерейному квитку. Після розіграшу виявилось, що два з них виграли. На запитання, хто саме виграв, студенти дали такі відповіді: **А**: *виграли я та* **Д**; **Б**: *виграли я та* **Е**; **В**: *виграли* **А** *та* **Е**; **Г**: *виграли* **Г**

та **Б**; **Д**: "*виграли* **Е** *та* **Д**. У чотирьох із відповідей лише одна частина твердження правильна, а в одній – обидві неправильні. Чиї лотерейні білети виграли?

16. Хтось із трьох студентів **А**, **Б**, **В** розбив вікно. **А** сказав, що він і **Б** вікно не розбивали; **Б** сказав, що **А** цього не робив, а розбив вікно **В**; **В** сказав, що він також не розбивав, а це зробив **А**. Як пізніше виявилось, один зі студентів двічі сказав неправду, інший – двічі сказав правду, а серед тверджень третього одне правильне, а інше – ні. Хто розбив вікно?

17. Троє обвинувачуваних **А**, **Б**, **В** дають свідчення. **А**: **Б** *винен*, *а* **В** – *ні*; **Б:** *Якщо* **А** *винен*, *то* **В** – *теж*; **В**: *Я не винен, але хоч один із двох інших – винен.*

(а) Вважаючи, що **Б** та **В** кажуть правду, установити, хто саме винен.

(б) Якщо всі троє невинні, то хто з них сказав правду, а хто – неправду?

1.6. Секвенції і секвенційні форми для логіки висловлень

Метод таблиць істинності дає змогу перевірити істинність формули або множини формул. Він належить до класу семантичних методів, тобто базується на обчисленні значень формул (семантиці формул). Іншим класом методів є синтаксичні методи, які засновані на синтаксичних перетвореннях формул чи множин формул. Слід зазначити, що такі синтаксичні перетворення індуковані семантичними властивостями формул, тому семантичні та синтаксичні методи пов'язані між собою. Розглянемо секвенційні методи, зокрема секвенційне числення логіки висловлень.

Ідея секвенційних методів дуже проста. Розглянемо наслідкове твердження $A_1, A_2, \ldots, A_k \models B$. За означенням воно буде істинним тоді й тільки тоді, коли для всіх значень пропозиційних змінних з істинності $A_1, A_2, \ldots, A_k$ випливає істинність B.

Доведемо істинність твердження методом від супротивного. Для цього припустимо, що наслідкове твердження є спростовним, тобто існує набір значень пропозиційних змінних такий, що $A_1, A_2, \ldots, A_k$ є істинними, а B – хибним. Якщо в процесі перетворень дійдемо суперечності, тобто отримаємо формулу, що є одночасно істинною та хибною, то наше припущення буде спростовано. Отже, наслідкове твердження – істинне.

Ідея пошуку суперечності покладена в основу секвенційного методу. Розглянемо загальніший вигляд наслідкового твердження: $A_1, A_2, \ldots, A_k \vDash B_1, B_2, \ldots, B_m$. Для секвенційних методів такі твердження записуються як

$$A_1, A_2, \ldots, A_k \to B_1, B_2, \ldots, B_m$$

і називаються **секвенціями**. Тут символ $\to$ є новим символом, який не належить мові висловлень. Треба розуміти, що цей символ є метасимволом, але за змістом для введеного логічного наслідку він є насправді символом імплікації.

Для роз'яснення секвенційного методу розглянемо простий приклад, а саме: доведемо істинність наслідкового твердження

$$\neg(A \vee B) \vDash \neg A \wedge \neg B.$$

Припустимо, що це твердження є неправильним, тобто існує такий набір значень пропозиційних змінних, що формула $\neg(A \vee B)$ є істинною, а формула $\neg A \wedge \neg B$ – хибною. Ці припущення записуватимемо у вигляді

$$_1\neg(A \vee B),\ \ _0\neg A \wedge \neg B,$$

тобто істинні формули проіндексуємо (розмітимо) знаком 1, а хибні – знаком 0. Отримаємо дві індексовані формули, які утворюють **розмічену секвенцію**.

Далі спробуємо спростити формули цієї секвенції. Головною операцією першої формули є заперечення. Тому $\neg(A \vee B)$ буде істиною тоді й тільки тоді, коли $A \vee B$ буде хибою. Таким чином, початкова секвенція перетворена на нову секвенцію

$$_0 A \vee B,\ \ _0\neg A \wedge \neg B.$$

Далі спрощуватимемо формулу $A \vee B$, яка має бути хибною. Головною операцією цієї формули є диз'юнкція.

Диз'юнкція буде хибною тоді й тільки тоді, коли її аргументи будуть одночасно хибними. У нашому випадку аргументами диз'юнкції є A та B. Тому індексовану формулу $_0 A \vee B$ можна замінити на дві індексовані формули $_0 A$ та $_0 B$. Тим самим секвенція

$$_0 A \vee B,\ \ _0\neg A \wedge \neg B$$

перетворилась на нову секвенцію

$$_0A,\ _0B,\ _0\neg A \wedge \neg B.$$

В останній секвенції є лише одна складена (неатомарна) формула

$$_0\neg A \wedge \neg B,$$

яка свідчить, що формула $\neg A \wedge \neg B$ має бути хибною.

Кон'юнкція набуває значення хиби у трьох випадках (див. табл. 1.2):

1) коли перший і другий аргументи кон'юнкції є хибними;

2) коли перший аргумент є хибою, а другий – істиною;

3) коли перший аргумент є істиною, а другий – хибою. Ці три випадки можна замінити двома спрощеними випадками:

1) перший аргумент кон'юнкції є хибою;

2) другий аргумент кон'юнкції є хибою.

Тому далі для кон'юнкції (як і для диз'юнкції) розглядатимемо лише по два випадки.

Отже, формула $\neg A \wedge \neg B$ буде хибною тоді й тільки тоді, коли:

1) $\neg A$ – хибне або

2) $\neg B$ – хибне.

Це означає, що секвенція

$$_0A,\ _0B,\ _0\neg A \wedge \neg B$$

перетворилась на дві секвенції:

$$_0A,\ _0B,\ _0\neg A \text{ та } _0A,\ _0B,\ _0\neg B.$$

У першій із них неатомарною є формула $_0\neg A$, яку заміняємо на $_1A$. Отримано секвенцію

$$_0A,\ _0B,\ _1A.$$

Аналізуючи її, бачимо, що в ній A має бути одночасно істиною та хибою, оскільки до секвенції входять індексовані формули $_0A$ та $_1A$. Отримали суперечність, тому ця секвенція наше початкове твердження не може спростувати.

Тепер проаналізуємо другу секвенцію

$$_0A,\ _0B,\ _0\neg B.$$

Перетворюючи $_0\neg B$ на $_1B$, отримуємо секвенцію

$$_0A,\ _0B,\ _1B.$$

У цій секвенції суперечність виникає для формули B. Отже, і ця секвенція не може спростувати початкове наслідкове твердження.

Секвенції такого вигляду, тобто ті, що містять формулу, індексовану як 1 та 0, називаються **замкненими**. Такі суперечливі формули індексуємо знаком ×. Цим самим знаком позначатимемо й замкнені секвенції.

Ми розглянули всі можливі випадки та продемонстрували, що наслідкове твердження не може буди спростовано, тому воно є істинним. Це дає змогу зробити загальні висновки:

1) для перевірки істинності наслідкового твердження можна застосовувати метод доведення від супротивного, який полягає в пошуку суперечності для множин індексованих формул, отриманих у процесі доведення;

2) перетворення індексованих формул відбувається за правилами, індукованими семантичними властивостями операцій; правила мають засновки та висновки;

3) секвенційне доведення (секвенційне виведення) може бути подане у вигляді дерева, його корінь – початкова розмічена секвенція, а переходи задаються секвенційними правилами.

Як сформулювати секвенційні правила? Бачимо, що для кожної логічної операції є два правила: перше задає перетворення формули, яка розмічена 1, друге – формули, яка розмічена 0. Наприклад, для операції диз'юнкції можна записати два такі правила (засновки пишемо над рискою, висновки – під рискою):

$$\frac{{}_1A,\ {}_1B}{{}_1A \vee B} \text{ та } \frac{{}_0A,\ {}_0B}{{}_0A \vee B}.$$

Ці правила сформульовані для однієї формули, але секвенція може мати також інші формули. Позначимо їх множину як Σ. Загальне правило матиме такий вигляд (ліворуч пишемо назву правила):

$$_1\neg\ \frac{{}_0A, \sum}{{}_1\neg A, \sum}, \qquad _0\neg\ \frac{{}_1A, \sum}{{}_0\neg A, \sum}.$$

Аналогічно можна побудувати правила для інших логічних операцій. Отримаємо таку сукупність секвенційних правил:

$$_1\neg\ \frac{{}_0A, \sum}{{}_1\neg A, \sum} \qquad\qquad _0\neg\ \frac{{}_1A, \sum}{{}_0\neg A, \sum}$$

$$1\vee\ \frac{{}_1A,\Sigma \qquad {}_1B,\Sigma}{{}_1A\vee B,\Sigma} \qquad 0\vee\ \frac{{}_0A,\ {}_0B,\Sigma}{{}_0A\vee B,\Sigma}$$

$$1\wedge\ \frac{{}_1A,{}_1B,\Sigma}{{}_1A\wedge B,\Sigma} \qquad 0\wedge\ \frac{{}_0A,\Sigma \qquad {}_0B,\Sigma}{{}_0A\wedge B,\Sigma}$$

$$1\!\to\ \frac{{}_0A,\Sigma \qquad {}_1B,\Sigma}{{}_1A\to B,\Sigma} \qquad 0\!\to\ \frac{{}_1A,\ {}_0B,\Sigma}{{}_0A\to B,\Sigma}$$

$$1\!\sim\ \frac{{}_0A,{}_0B,\Sigma \qquad {}_1A,{}_1B,\Sigma}{{}_1A\leftrightarrow B,\Sigma} \qquad 0\!\sim\ \frac{{}_0A,{}_1B,\Sigma \qquad {}_1A,{}_0B,\Sigma}{{}_0A\leftrightarrow B,\Sigma}$$

При виконанні завдань виведення доцільно записувати у зворотному порядку – тобто висновки писати над рискою, а засновки – під рискою. Іншими словами, складніші формули пишемо над рискою, а простіші – під рискою. Отже, надалі записуватимемо секвенційні правила в такому вигляді:

$$1\neg\ \frac{{}_1\neg A,\Sigma}{{}_0A,\Sigma} \qquad 0\neg\ \frac{{}_0\neg A,\Sigma}{{}_1A,\Sigma}$$

$$1\vee\ \frac{{}_1A\vee B,\Sigma}{{}_1A,\Sigma \qquad {}_1B,\Sigma} \qquad 0\vee\ \frac{{}_0A\vee B,\Sigma}{{}_0A,\ {}_0B,\Sigma}$$

$$1\wedge\ \frac{{}_1A\wedge B,\Sigma}{{}_1A,{}_1B,\Sigma} \qquad 0\wedge\ \frac{{}_0A\wedge B,\Sigma}{{}_0A,\Sigma \quad {}_0B,\Sigma}$$

$$1\!\to\ \frac{{}_1A\to B,\Sigma}{{}_0A,\Sigma \qquad {}_1B,\Sigma} \qquad 0\!\to\ \frac{{}_0A\to B,\Sigma}{{}_1A,\ {}_0B,\Sigma}$$

$$1\!\sim\ \frac{{}_1A\leftrightarrow B,\Sigma}{{}_0A,{}_0B,\Sigma \qquad {}_1A,{}_1B,\Sigma} \qquad 0\!\sim\ \frac{{}_0A\leftrightarrow B,\Sigma}{{}_0A,{}_1B,\Sigma \qquad {}_1A,{}_0B,\Sigma}$$

Зауваження. Прямий і зворотний записи правил можна трактувати як пряме та зворотне доведення. Тому для зворотного доведення можемо в правилі засновки писати над рискою, а висновки – під рискою. **Прохання звертати на це увагу при побудові доведень**.

Нижче наведено запис секвенційного виведення розглянутого наслідкового твердження: $\neg(A \vee B) \models \neg A \wedge \neg B$:

$$({}_1\neg)\dfrac{{}_1\neg(A \vee B),\ {}_0\neg A \wedge \neg B}{({}_0\vee)\dfrac{{}_0 A \vee B,\ {}_0\neg A \wedge \neg B}{({}_0\wedge)\dfrac{{}_0 A,\ {}_0 B,\ {}_0\neg A \wedge \neg B}{({}_1\neg)\dfrac{{}_0 A,\ {}_0 B,\ {}_0\neg A}{\dfrac{{}_0 A_{\times},\ {}_0 B,\ {}_1 A_{\times}}{\times}} \qquad \dfrac{{}_0 A,\ {}_0 B,\ {}_0\neg B}{\dfrac{{}_0 A,\ {}_0 B_{\times},\ {}_1 B_{\times}}{\times}}}}}$$

Приклад 1.18.

1. Антецедент як консеквент (**засновок як висновок**): $A \to B \to A.$ Нагадуємо, що дужки у цій формулі розставляють таким чином: $(A \to (B \to A)),$ тобто головною операцією є перша імплікація. Подаємо формулу як розмічену секвенцію: ${}_0 A \to B \to A.$ Застосовуємо правило ${}_0\!\to$. Назву правила пишемо ліворуч від риски. Отримуємо

$$({}_0\!\to)\dfrac{{}_0 A \to B \to A}{{}_1 A,\ \ {}_0 B \to A}.$$

Аналізуємо отриману секвенцію ${}_1 A,\ \ {}_0 B \to A.$ Тут є лише одна складна формула ${}_0 B \to A.$ Індексуємо її знаком * і застосовуємо до неї правило ${}_0\!\to$.

$$({}_0\!\to)\dfrac{{}_0 A \to B \to A}{({}_0\!\to)\dfrac{{}_1 A,\ \ {}_0 B \to A_{*}}{{}_1 A,\ \ {}_1 B,\ {}_0 A}}.$$

Остання секвенція є замкненою, оскільки містить формули ${}_1 A$ та ${}_0 A$, тобто секвенція вимагає, щоб A було одночасно істинним і хибним. Такі формули індексуємо знаком ×. Це є суперечністю, тому початкова секвенція не має спростування. Таку замкнену секвенцію позначаємо знаком ×. Остаточно дерево виведення секвенції має вигляд

$$({}_0\!\to)\dfrac{{}_0 A \to B \to A}{({}_0\!\to)\dfrac{{}_1 A,\ \ {}_0 B \to A_{*}}{\dfrac{{}_1 A_{\times},\ \ {}_1 B,\ {}_0 A_{\times}}{\times}}}.$$

Побудувавши таблицю істинності, переконуємось, що початкова формула є тавтологією:

$A\ B$	$B \to A$	$A \to B \to A$
0 0	**1**	**1**
0 1	**0**	**1**
1 0	**1**	**1**
1 1	**1**	**1**

2. Комутативність антецедентів (засновків):

$$A \to (B \to C) \sim B \to (A \to C).$$

Формуємо розмічену секвенцію:

$${}_0 A \to (B \to C) \sim B \to (A \to C).$$

Головною її операцією є еквівалентність $\sim$, тому застосовуємо правило ${}_0\sim$.

$$({}_0\sim)\frac{{}_0 A \to (B \to C) \sim B \to (A \to C)}{{}_0 A \to (B \to C), {}_1 B \to (A \to C) \qquad {}_1 A \to (B \to C), {}_0 B \to (A \to C)}.$$

Отримано дві нові секвенції. Розглянемо першу

$${}_0 A \to (B \to C),\ {}_1 B \to (A \to C).$$

Доцільно застосувати правило ${}_0\to$ до першої формули, яку індексуємо знаком *. Це саме правило застосовуємо також для другої секвенції:

$$({}_0\to)\frac{{}_0 A \to (B \to C)_*,\ {}_1 B \to (A \to C)}{({}_0\to)\dfrac{{}_1 A,\ {}_0 B \to C_*,\ {}_1 B \to (A \to C)}{{}_1 A,\ {}_1 B,\ {}_0 C,\ {}_1 B \to (A \to C)}}.$$

У виведеній секвенції єдиною складною формулою є ${}_1 B \to (A \to C)$, до якої застосуємо правило ${}_1\to$. Це саме правило застосуємо ще раз до формули ${}_1 A \to C$. Усі отримані секвенції будуть замкненими:

$$({}_1\to)\frac{{}_1 A,\ {}_1 B,\ {}_0 C,\ {}_1 B \to (A \to C)_*}{\dfrac{{}_1 A,\ {}_1 B_\times,\ {}_0 C,\ {}_0 B_\times}{\times} \quad (1\to)\dfrac{{}_1 A,\ {}_1 B,\ {}_0 C,\ {}_1 A \to C_*}{\dfrac{{}_1 A_\times,\ {}_1 B,\ {}_0 C,\ {}_0 A_\times}{\times} \quad \dfrac{{}_1 A,\ {}_1 B,\ {}_0 C_\times,\ {}_1 C_\times}{\times}}}.$$

Залишилось розглянути секвенцію

$${}_1 A \to (B \to C),\ {}_0 B \to (A \to C).$$

Двічі застосовуємо правило ${}_0\to$ до позначених формул:

$$({}_0\to)\frac{{}_1 A \to (B \to C),\ {}_0 B \to (A \to C)_*}{({}_0\to)\dfrac{{}_1 A \to (B \to C),\ {}_1 B,\ {}_0 (A \to C)_*}{{}_1 A \to (B \to C)_*,\ {}_1 B,\ {}_1 A,\ {}_0 C}}.$$

Будуємо дерево виведення для останньої отриманої секвенції:

$$(_1\!\to)\dfrac{{}_1A\to(B\to C)_*,\ {}_1B,\ {}_1A,\ {}_0C}{\dfrac{{}_0A_\times,\ {}_1B,\ {}_1A_\times,\ {}_0C}{\times}\qquad (1\to)\dfrac{{}_1B\to C_*,\ {}_1B,\ {}_1A,\ {}_0C}{\dfrac{{}_0B_\times,\ {}_1B_\times,\ {}_1A,\ {}_0C}{\times}\quad \dfrac{{}_1C_\times,\ {}_1B,\ {}_1A,\ {}_0C_\times}{\times}}}.$$

Усі гілки дерева виведення замкнені, тому початкова формула є тавтологією. Це можна також перевірити за допомогою побудови семантичної таблиці:

$A\ B\ C$	$B\to C$	$A\to C$	$A\to(B\to C)$	$B\to(A\to C)$	$A\to(B\to C)\sim$ $\sim B\to(A\to C)$
0 0 0	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
0 0 1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
0 1 0	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
0 1 1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
1 0 0	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
1 0 1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
1 1 0	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**
1 1 1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**

3. Кон'юнкція антецедентів (засновків):

$$A\to B\to C\sim A\wedge B\to C.$$

Дужки можна розставити таким чином:

$$(A\to(B\to C))\sim((A\wedge B)\to C),$$

тому головною операцією є еквівалентність. Формуємо розмічену секвенцію та застосовуємо правило ${}_0\sim$. Отримуємо

$$(_0\!\sim)\dfrac{{}_0A\to B\to C\sim A\wedge B\to C}{{}_0A\to B\to C,\ {}_1B\to C\quad {}_1A\to B\to C,\ {}_0A\wedge B\to C}.$$

Побудуємо дерево виведення окремо для двох зазначених секвенцій. Почнемо з першої секвенції:

$$(_0\!\to)\dfrac{{}_0A\to B\to C_*,\ {}_1B\to C}{(_0\!\to)\dfrac{{}_1A,\ {}_0B\to C_*,\ {}_1B\to C}{(_1\!\to)\dfrac{{}_1A,\ {}_1B,\ {}_0C,\ {}_1B\to C_*}{\dfrac{{}_1A,\ {}_1B,\ {}_0C,\ {}_0B}{\times}\quad \dfrac{{}_1A,\ {}_1B,\ {}_0C,\ {}_1C}{\times}}}}.$$

Усі гілки дерева виведення замкнені, тобто секвенція виведена (це позначають $\vdash {}_0A\to B\to C_*,\ {}_1B\to C$). Тепер будуємо дерево виведення для другої секвенції:

$$({}_0\to)\dfrac{{}_1A\to B\to C,\ {}_0A\wedge B\to C_*}{({}_1\wedge)\dfrac{{}_1A\to B\to C,\ {}_1A\wedge B_*,\ {}_0C}{({}_1\to)\dfrac{{}_1A\to B\to C_*,\ {}_1A,\ {}_1B,\ {}_0C}{\dfrac{{}_0A,\ {}_1A,\ {}_1B,\ {}_0C}{\times}\qquad ({}_1\to)\dfrac{{}_1B\to C_*,\ {}_1A,\ {}_1B,\ {}_0C}{\dfrac{{}_0B,\ {}_1A,\ {}_1B,\ {}_0C}{\times}\quad \dfrac{{}_1C,\ {}_1A,\ {}_1B,\ {}_0C}{\times}}}}}.$$

Усі гілки замкнені, тому $A\to B\to C\sim A\wedge B\to C$ є тавтологією. Це можна також перевірити побудовою семантичної таблиці:

$A\ B\ C$	$B\to C$	$A\wedge B$	$A\to(B\to C)$	$(A\wedge B)\to C$	$A\to(B\to C)\sim$ $\sim(A\wedge B)\to C$
0 0 0	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
0 0 1	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
0 1 0	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**
0 1 1	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
1 0 0	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
1 0 1	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
1 1 0	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**
1 1 1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**

4. Неасоціативність імплікації: перевірити еквівалентність $A\to B\to C\sim(A\to B)\to C$.

Зауваження. Імплікація є правоасоціативною операцією, тому $A\to B\to C=A\to(B\to C)$; головною операцією є еквівалентність, тобто дужки можна розставити таким чином:

$$(A\to(B\to C))\sim((A\to B)\to C).$$

Для доведення істинності початкової формули треба довести (вивести) розмічену імплікацію:

$${}_0A\to(B\to C)\sim(A\to B)\to C.$$

Головною операцією є еквівалентність. Тому застосовуємо правило ${}_0\sim$. Отримуємо виведення

$${}_0\sim\dfrac{{}_0A\to(B\to C)\sim(A\to B)\to C}{{}_0A\to(B\to C),\ {}_1(A\to B)\to C\quad {}_1A\to(B\to C),\ {}_0(A\to B)\to C}.$$

Оскільки повне виведення не вміщається по ширині сторінки, то розглянемо окремо виведення для двох секвенцій: ${}_0A\to(B\to C),\ {}_1(A\to B)\to C$ та ${}_1A\to(B\to C),\ {}_0(A\to B)\to C$.

Проаналізуємо секвенцію ${}_0A\to(B\to C),\ {}_1(A\to B)\to C.$ Тут слід звернути увагу на формулу ${}_0A\to(B\to C).$ Правило ${}_0\to$ для її перетворення є достатньо простим, тому в секвенції будемо застосовувати його для зазначеної формули. Щоб позначити таке застосування, індексуємо згадану формулу знаком *.

Дістали виведення

$$({}_0\to)\,\frac{{}_0A\to(B\to C)^*,\ \ {}_1(A\to B)\to C}{{}_1A,\ \ {}_0(B\to C),\ \ {}_1(A\to B)\to C}.$$

Аналізуючи отриману секвенцію, бачимо, що найпростіше перетворення буде для формули ${}_0(B\to C).$ Індексуємо цю формулу в секвенції знаком * і застосовуємо правило ${}_0\to$. Виведення набуває вигляду

$$({}_0\to)\,\frac{{}_0A\to(B\to C)^*,\ \ {}_1(A\to B)\to C}{({}_0\to)\,\dfrac{{}_1A,\ \ {}_0(B\to C)^*,\ \ {}_1(A\to B)\to C}{{}_1A,\ \ {}_1B,\ {}_0C,\ \ {}_1(A\to B)\to C}}\ .$$

Тепер єдиною формулою, до якої можна застосувати секвенційне правило, є формула ${}_1(A\to B)\to C.$ Одержуємо

$$({}_0\to)\,\frac{{}_0A\to(B\to C)^*,\ \ {}_1(A\to B)\to C}{({}_0\to)\,\dfrac{{}_1A,\ \ {}_0(B\to C)^*,\ \ {}_1(A\to B)\to C}{({}_1\to)\,\dfrac{{}_1A,\ \ {}_1B,\ {}_0C,\ \ {}_1(A\to B)\to C^*}{{}_1A,\ \ {}_1B,\ {}_0C,\ \ {}_0A\to B \qquad {}_1A,\ \ {}_1B,\ {}_0C,\ \ {}_1C}}}\ .$$

Отримано дві нові секвенції. Друга секвенція є замкненою, оскільки містить ${}_0C$ та ${}_1C$, тобто секвенція вимагає, щоб C було одночасно істинним і хибним. Ці формули індексуємо знаком $\times$. Дістали суперечність, тому на цій гілці доведення початкова секвенція не має спростування. Таку замкнену секвенцію позначаємо знаком $\times$.

Перетворюємо першу секвенцію, застосовуючи правило ${}_0\to$:

$$({}_0\to)\,\frac{{}_0A\to(B\to C)^*,\ \ {}_1(A\to B)\to C}{({}_0\to)\,\dfrac{{}_1A,\ \ {}_0(B\to C)_*,\ \ {}_1(A\to B)\to C}{({}_1\to)\,\dfrac{{}_1A,\ \ {}_1B,\ {}_0C,\ \ {}_1(A\to B)\to C_*}{({}_0\to)\,\dfrac{{}_1A,\ \ {}_1B,\ {}_0C,\ \ {}_0A\to B^*}{\dfrac{{}_1A,\ \ {}_1B_\times,\ {}_0C,\ \ {}_1A,\ {}_0B_\times}{\times}} \qquad \dfrac{{}_1A,\ \ {}_1B,\ {}_0C_\times,\ \ {}_1C_\times}{\times}}}}\ .$$

Отримані секвенції є замкненими. Отже, усі випадки розглянуто, секвенцію ${}_0A\to(B\to C),\ {}_1(A\to B)\to C$ доведено.

Тепер почнемо будувати виведення секвенції

$${}_1A\to(B\to C),\ {}_0(A\to B)\to C.$$

Її аналіз свідчить про те, що доцільно перетворювати формулу ${}_0(A\to B)\to C$. Маємо

$$(_0\to)\frac{{}_1A\to(B\to C),\ {}_0(A\to B)\to C\ *}{{}_1A\to(B\to C),\ {}_1A\to B,\ {}_0C}.$$

Розкриваючи першу формулу отриманої секвенції, маємо:

$$(_0\to)\dfrac{{}_1A\to(B\to C),\ {}_0(A\to B)\to C\ *}{(_1\to)\dfrac{{}_1A\to(B\to C)*,\ {}_1A\to B,\ {}_0C}{{}_0A,\ {}_1A\to B,\ {}_0C\qquad {}_1B\to C,\ {}_1A\to B,\ {}_0C}}.$$

Дістали дві секвенції: ${}_0A,\ {}_1A\to B,\ {}_0C$ та ${}_1B\to C,\ {}_1A\to B,\ {}_0C$. До першої застосовуємо правило ${}_0\to$. Отримуємо

$$(_0\to)\dfrac{{}_1A\to(B\to C),\ {}_0(A\to B)\to C\ *}{(_1\to)\dfrac{{}_1A\to(B\to C)*,\ {}_1A\to B,\ {}_0C}{(_1\to)\dfrac{{}_0A,\ {}_1A\to B*,\ {}_0C}{\dfrac{{}_0A,\ {}_0A,\ {}_0C}{!}\qquad\dfrac{{}_0A,\ {}_1B,\ {}_0C}{!}}\qquad {}_1B\to C,\ {}_1A\to B,\ {}_0C}}.$$

Цей випадок дає дві незамкнені секвенції: ${}_0A,\ {}_0A,\ {}_0C$ та ${}_0A,\ {}_1B,\ {}_0C$, які позначаємо знаком ! Незамкнена секвенція надає контрприклад, тобто вказує значення пропозиційних змінних, які спростовують формулу.

Дійсно, обчислимо значення $A\to(B\to C)\leftrightarrow(A\to B)\to C$ за значень $A, B,\ C$ відповідно **0**, **0**, **0**. Маємо:

$$\mathbf{0}\to(\mathbf{0}\to\mathbf{0})\sim(\mathbf{0}\to\mathbf{0})\to\mathbf{0}=\mathbf{0}\to\mathbf{1}\sim\mathbf{1}\to\mathbf{0}=\mathbf{1}\to\mathbf{0}=\mathbf{0}.$$

Такий само результат отримуємо за значень A, B, C, відповідно **0**, **1**, **0**. Тепер будуємо дерево виведення для секвенції

$${}_1B\to C,\ {}_1A\to B,\ {}_0C.$$

Отримуємо за значень A, B, C, відповідно **0**, **1**, **0**. Маємо

$$\mathbf{0}\to(\mathbf{1}\to\mathbf{0})\sim(\mathbf{0}\to 1)\to\mathbf{0}=\mathbf{0}\to\mathbf{0}\sim\mathbf{1}\to\mathbf{0}=\mathbf{1}\to\mathbf{0}=\mathbf{0}.$$

Повернемось до побудови дерева виведення для секвенції

$${}_1B\to C,\ {}_1A\to B,\ {}_0C.$$

Отримуємо

$$({}_1{\to})\dfrac{{}_1B\to C^*,\ {}_1A\to B,\ {}_0C}{({}_1{\to})\dfrac{{}_0B,\ {}_1A\to B^*,\ {}_0C}{\dfrac{{}_0B,\ {}_0A,\ {}_0C}{!}\quad \dfrac{{}_0B_\times,\ {}_1B_\times,\ {}_0C}{\times}}\quad ({}_1{\to})\dfrac{{}_0C^*,\ {}_1A\to B,\ {}_0C}{\dfrac{{}_0C,\ {}_0A,\ {}_0C}{!}\quad \dfrac{{}_0C,\ {}_1B,\ {}_0C}{!}}}.$$

Незамкненими є секвенції

$${}_0B,\ {}_0A,\ {}_0C;\ \ {}_0C,\ {}_0A,\ {}_0C;\ \ {}_0C,\ {}_1B,\ {}_0C.$$

Вони всі надають контрприклади для початкової секвенції.

Побудуємо для неї таблицю істинності:

$A\ B\ C$	$B\to C$	$A\to B$	$A\to(B\to C)$	$(A\to B)\to C$	$A\to(B\to C)\sim$ $\sim(A\to B)\to C$
0 0 0	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**
0 0 1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
0 1 0	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**
0 1 1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
1 0 0	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
1 0 1	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
1 1 0	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**
1 1 1	**1**	**1**	**1**	**1**	**0** ◄

5. Довести наслідковість $a\vee b,\ \neg\, a\vee c \vDash b\vee c$.

Формуємо розмічену секвенцію: ${}_1a\vee b,\ {}_1\neg a\vee c,\ {}_0b\vee c$. Будуємо її секвенційне виведення:

$$({}_0{\vee})\dfrac{{}_1a\vee b,\ {}_1\neg a\vee c,\ {}_0b\vee c^*}{({}_1{\vee})\dfrac{{}_1a\vee b^*,\ {}_1\neg a\vee c,\ {}_0b,\ {}_0c}{({}_1{\vee})\dfrac{{}_1a\ ,\ {}_1\neg a\vee c^*,\ {}_0b,\ {}_0c}{({}_1{\vee})\dfrac{{}_1a,\ {}_1\neg a^*,\ {}_0b,\ {}_0c}{\dfrac{{}_1a_\times,\ {}_0a_\times,\ {}_0b,\ {}_0c}{\times}}\quad \dfrac{{}_1a,\ {}_1c_\times,\ {}_0b,\ {}_0c_\times}{\times}}\quad \dfrac{{}_1b_\times,{}_1\neg a\vee c,{}_0b_\times,{}_0c}{\times}}}.$$

Дерево доведення замкнене, тому наслідковість доведено.

Зауваження щодо застосування правил до секвенцій. Дотепер ми детально не описували процедуру застосування секвенційних правил до секвенцій. Вона складається із трьох пунктів:

1) вибір секвенційного правила, яке можна застосувати до заданої (об'єктної) секвенції;

2) побудова уніфікатора, тобто такого зв'язку змінних у засновках секвенційного правила з певними пропозиційними формулами (чи секвенціями), що при заміні цих змінних у засновках правила на формули з уніфікатора отримаємо об'єктну секвенцію;

3) застосування побудованого уніфікатора до висновків секвенційного правила, що дає висновок для об'єктної секвенції.

Наприклад, маємо об'єктну секвенцію

$$ {}_1A \to (B \to C),\ {}_0(A \to B) \to C. $$

Проаналізувавши її, застосуємо правило ${}_0\!\to$ до другої формули секвенції. Правило запишемо у вигляді

$$ {}_0\!\to \frac{{}_0A \to B, \sum}{{}_1A,\ {}_0B, \sum}. $$

Тепер побудуємо уніфікатор. У засновках правила прописано змінні (краще навіть називати їх метазмінними, оскільки їх значеннями будуть пропозиційні змінні чи формули) A, B, Σ.

Тут A та B – пропозиційні метазмінні (оскільки вони будуть замінюватися на пропозиційні формули), Σ – секвенційна метазмінна (оскільки замінюватиметься на секвенцію). Виокремлюємо формулу

$$ {}_0(A \to B) \to C, $$

яку перетворюватимемо. Другу формулу ${}_1A \to (B \to C)$ наразі не перетворюватимемо. Тому секвенційній метазмінній Σ відповідатиме формула ${}_1A \to (B \to C)$ (записуємо у вигляді

$$ \frac{\sum}{{}_1A} \to (B \to C)), $$

а формулі ${}_0A \to B$ із засновків правила відповідатиме формула

$$ {}_0(A \to B) \to C $$

з об'єктної секвенції. В об'єктній формулі головною операцією є друга імплікація, тому при уніфікації метазмінній A з правила відповідає формула $A \to B$ (записуємо у вигляді $A/A \to B$), а метазмінній B – формула C (записуємо у вигляді B/C). Це означає, про побудовано уніфікатор

$$ \left[\frac{\sum}{{}_1A} \to (B \to C), \frac{{}_1A}{A} \to B, \frac{B}{C}\right]. $$

Тепер застосовуємо отриманий уніфікатор до висновків правила

$$ {}_1A,\ {}_0B, \sum, $$

замінюючи метазмінні на відповідні до них з уніфікатора. Отримуємо об'єктний висновок (значення Σ ставимо на початку висновку, щоб була відповідність до об'єктної секвенції):

$$_1A \to (B \to C),\ _1A \to B,\ _0C.$$

Завдання для самостійної роботи

Наведені задачі виконати з використанням секвенційного числення для пропозиційної логіки.

1. Довести наслідковість:

(а) $a, a \to b \vDash b$; (б) $a \to b\ , \neg\, b \vDash \neg\, a$;

(в) $a \vee b, \neg\, a \vDash b$; (г) $a \vee b, a \to b \vDash b$;

(д) $a \to b, a \wedge \neg\, b \vDash b$; (е) $a \vee b, a \to c, b \to d \vDash c \vee d$;

(є) $\neg\, a \vee b, \neg b \vee \neg\, c \vDash a \to \neg\, c$; (ж) $\neg\, (a \vee b) \vDash \neg\, a \vee c$;

(з) $a, c \to \neg\, (a \vee b) \vDash \neg c$;

(и) $(a \to b) \to c, a \to (b \to c) \vDash b \to c$;

(і) $a \vee \neg\, c, a \to d, b \to c, \neg\, b \to d \vDash d$;

(ї) $a \to (b \vee c), d \to a \vDash (\neg\, b \wedge \neg\, c) \to \neg\, d$.

2. Визначити, чи є правильною наслідковість:

(а) $(a \to b) \to c \vDash a \wedge b \vee c$; (б) $a \vee b \vee c \vDash a \to b \to c$;

(в) $a \to b, a \vee c \vDash a \wedge c \to a \wedge b$; (г) $a \to b, a \to c, a \vDash b \vee c$;

(д) $a \to b, c \wedge a \vDash c \wedge b$; (е) $a \to b, c \wedge a \vDash c$;

(є) $a \wedge b, \neg\, a \vee b \vDash \neg\, b$;

(ж) $a \vee b, a \to c, b \to c \vDash \neg\, c \to \neg\, a$.

3. Знайти логічні наслідки із засновків:

(а) $a, a \to b$; (б) $a \to b\ , \neg\, b$; (в) $a \vee b, \neg\, a$;
(г) $a \vee b, a, \neg\, b$; (д) $a \to b \to c\ , b \to c$; (е) $a \vee b, a \to c, b \to d$.

4. Знайти засновки, логічними наслідками яких є такі формули:

(а) $a \to b$; (б) $a \wedge b$; (в) $a \to b \wedge c$; (г) $a \vee b \to a \wedge b$.

1.7. Логіка предикатів. Квантори

Алгебра висловлень, розглянута раніше, є важливою й невід'ємною складовою математичної логіки. Однак вона занадто бідна для опису й аналізу навіть простих логічних міркувань науки і практики.

Одна із причин цього полягає в тому, що в логіці висловлень будь-яке просте висловлення розглядають як елементарний об'єкт, неподільне ціле, без частин і внутрішньої структури, яке має лише одну властивість – бути або істинним, або хибним.

Щоб побудувати систему правил, яка давала б змогу здійснювати логічні міркування для виведення нетривіальних правильних висновків з урахуванням будови складених висловлень і змісту простих висловлень, запропоновано формальну теорію, що дістала назву **числення предикатів**.

Теорія предикатів починається з аналізу простих висловлень і ґрунтується на такому їх розумінні: прості висловлення виражають той факт, що деякі об'єкти (або окремий об'єкт) мають певні властивості, або що вони перебувають між собою в певному відношенні.

Наприклад, в істинному висловленні 3 – *просте число* підмет 3 – це об'єкт, а присудок *просте число* виражає певну його властивість.

У латинській граматиці присудок називається **предикатом**, звідки цей термін і ввійшов до математичної логіки. Головною для логіки предикатів є саме друга складова речення-висловлення – присудок-властивість. Її фіксують, а значення об'єкта пропонують змінювати так, щоб кожного разу отримувати змістовні речення, тобто висловлення.

Наприклад, замінюючи в наведеному вище висловленні 3 на числа 1, 5, 9 або 12, матимемо відповідно такі висловлення: 1 – *просте число*, 5 – *просте число*, 9 – *просте число*, 12 – *просте число*, з яких друге істинне, а решта – хибні висловлення.

Це дозволяє розглянути вираз x – *просте число* не як елементарне висловлення, а як **пропозиційну** (**висловлювальну**) **форму**, тобто форму (або формуляр), після підстановки до якої за-місць параметра (змінної) x об'єктів (значень) із певної множини M дістаємо висловлення.

Аналогічно можна трактувати, наприклад, пропозиційні форми *a – українець*, *b* і *c – однокурсники*, *c важче, ніж d* або *точка x лежить між точками y та z*. До перших двох із них можна підставляти замість параметрів a, b і c прізвища конкретних людей, до третьої – замість c і d назви будь-яких об'єктів (предметів), що мають вагу. Для четвертої множиною M значень змінних x, y та z може бути множина точок певної прямої.

Перша із цих пропозиційних форм задає, як і в наведеній раніше формі, певну властивість для об'єкта a. Інші три форми описують деякі відношення між відповідними об'єктами.

Розглянувши конкретні приклади й коротко зупинившись на мотивації та змістовній інтерпретації подальших понять, перейдемо до формальних математичних означень.

***n*-місним предикатом** $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на якійсь множині M називають довільну функцію, яка впорядкованому набору елементів $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ множини M ставить у відповідність логічне значення **1** або **0**.

Множину M називають предметною областю, або універсальною множиною, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – предметними змінними предиката P.

Множина наборів $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ таких, що $P(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \mathbf{1}$, називається **областю істинності** (або **характеристичною множиною**) предиката P.

Якщо $P(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \mathbf{1}$, то згідно із логічною інтерпретацією казатимемо, що предикат P є **істинним** на $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. В іншому разі казатимемо, що предикат P є **хибним**.

Вираз $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, що перетворюється на висловлення після заміни всіх його змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на елементи певної предметної області M, називають **пропозиційною** (**висловлювальною**) **формою**.

Приклад 1.18. Нехай предметною областю є множина N натуральних чисел, тоді вирази *x – просте число*, *x ділить y*, $x + y = z$, $x < 5$ тощо є пропозиційними формами. ◄

Пропозиційна форма є одним зі способів задання предиката.

Для $n = 1$ предикат $P(x)$ називається **одномісним**, або **унарним**, для $n = 2$ $P(x, y)$ – **двомісним**, або **бінарним**, для $n = 3$ $P(x, y, z)$ – **тримісним**, або **тернарним** предикатом.

Якщо в n-арному предикаті $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ зафіксувати значення деяких m змінних (тобто надати їм певних значень із множини M), то отримаємо $(n - m)$-місний предикат на множині M. Тому можна вважати висловлення нульмісними предикатами, які утворено з багатомісних предикатів підстановкою замість усіх їх параметрів певних значень із предметної області. Отже, висловлення можна розглядати як окремий випадок предиката.

Як з елементарних висловлень за допомогою логічних операцій можна утворювати складені висловлення, так і, використовуючи прості (елементарні) предикати й логічні зв'язки (операції), можна будувати складені предикати, або **предикатні формули.**

Зазвичай основні логічні операції $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, $\sim$ означають для предикатів, що задані на тій самій предметній області M і залежать від тих самих змінних.

Нехай $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ і $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – n-місні предикати на множині M.

Кон'юнкцією $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називають предикат $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, що набуває значення **1** на тих і тільки тих наборах значень змінних, на яких обидва предикати $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ і $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дорівнюють **1**. Зауважимо, що на інших наборах значень змінних предикат набуває значення **0**.

Диз'юнкцією $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називають предикат $T(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, що набуває значення **1** на тих і тільки тих наборах значень змінних, на яких принаймні один із предикатів $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ або $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дорівнює **1**. Відповідно на інших наборах значень змінних предикат набуває значення **0**.

Запереченням $\neg P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ предиката $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називають предикат $S(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, що дорівнює **1** на тих і лише тих наборах значень термів, на яких предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дорівнює **0**.

Аналогічно вводять також інші логічні операції: $\rightarrow$, $\sim$ тощо.

Знаючи, як виконуються окремі операції предикатів, можна утворювати вирази або формули, операндами яких є предикати. Наприклад, формула $P_1(x) \vee (\neg P_3(x, z) \to P_2(y, x, z))$ задає деякий предикат $Q(x, y, z)$. Значення предиката Q неважко обчислити для будь-якого набору значень його змінних x, y, z, виходячи зі значень предикатів P_1, P_2, P_3 на цьому наборі.

Додатково в логіці предикатів використовують дві спеціальні операції предикатів, які називають **кванторами**. Ці операції роблять теорію предикатів значно гнучкішою, глибшою й багатшою, ніж теорія висловлень. Саме тому логіку предикатів іноді називають **теорією квантифікації**.

Найпопулярнішими й найуживанішими виразами в математиці є фрази або формулювання типу *для всіх* та *існує*. Вони входять до більшості математичних міркувань і доведень, висновків, лем і теорем. Наприклад: *Для всіх дійсних чисел x виконується рівність* $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$; *Для заданих натуральних a та b завжди існує натуральне число d, яке ділить числа a та b*; *Для всіх натуральних n справедливе твердження*: *якщо n ділиться на* 6 *і на* 15, *то n ділиться на* 30 тощо.

Поняття, що відповідає словам *для всіх*, лежить в основі означення квантора загальності.

Нехай $P(x)$ – предикат на множині M. Тоді **квантор загальності** (із параметром x) – це операція, що ставить у відповідність $P(x)$ висловлення *для всіх x із M P*(x) *істинне*; для позначення цієї операції використовують знак $\forall$, записують $\forall x P(x)$ (читають *для всіх x P від x*).

Іншу операцію називають **квантором існування** та позначають її знаком $\exists$. Якщо $Q(x)$ – деякий предикат на множині M, то висловлення *існує в множині M елемент x такий*, *що Q*(x) *істинне* записують у вигляді $\exists x Q(x)$ і читають *існує такий x*, *що Q від x* або *є такий x*, *що Q від x*.

Походження обраних позначень пояснюється тим, що символ $\forall$ – це перевернута велика перша літера німецького слова *alle* або англійського слова *all*, що перекладають як *усі*. А символ $\exists$ відповідає першій літері слів *existieren* (нім.) або *exist* (англ.) – *існувати*.

Вираз $\forall x$ читають також як *усі* x; *для кожного* x; *для довільного* x; *для будь-якого* x; а вираз $\exists x$ – як *деякий* x; *для деякого* x; *знайдеться такий* x тощо.

Зазначимо, що, крім уведених символічних позначень кванторів, використовують також інші позначення. Наприклад, замість $\forall x$ іноді пишуть $\forall(x)$, (x) або $\wedge x$, а замість $\exists x$ – відповідно $\exists(x)$, $(\mathrm{E}x)$ або $\vee x$.

Приклад 1.19.

1. Розглянемо два бінарні предикати на множині натуральних чисел N: предикат *x менше y* та предикат *x ділить y*. Перший із них записуватиме у традиційній формі $x < y$, а другий – у вигляді $x \mid y$. Тоді неважко переконатись, що висловлення:

$\forall x \exists y(x < y)$ та $\forall x \exists y(x \mid y)$ є істинними,

$\exists y \forall x(x < y)$ та $\exists y \forall x(x \mid y)$ є хибними.

Істинними будуть, наприклад, висловлення

$\forall x(0 < x^2 - x + 1)$,

$\exists x((x \mid 1) \wedge (\neg (1 < x)))$,

$\forall x((x < 1) \rightarrow (x < 2))$,

$\forall x(((2 \mid x) \wedge (3 \mid x)) \rightarrow (6 \mid x))$,

а хибними –

$$\forall x(2 \mid x),\ \exists x(x^2 < 0),\ \forall x((3 \mid x) \rightarrow (6 \mid x)).$$

2. Записати формулою логіки предикатів такі твердження:

(а) *Існує таке* x, *що* $P(x)$ – хибне;

(б) *Існує таке* x, *що* $P(x)$ – хибне.

(а) $\exists x(\neg P(x))$; (б) $\neg \exists x P(x)$.

3. У цій вправі предметна область є множиною R дійсних чисел. Визначити, чи є даний вираз висловленням або пропозиційною формою. У першому випадку вказати, істинним чи хибним є висловлення; у другому – здійснити квантифікацію так, щоб одержати істинне висловлення:

(а) $\exists y\ (x < y)$; (б) $\forall x \forall y \exists z\ (xy = z)$.

Розглянемо (а). Це пропозиційна форма. Перетворити її на істинне висловлення можна, наприклад, так:

$$\forall x \exists y\ (x < y)\ (\text{або}\ \exists x \exists y\ (x < y)).$$

Розглянемо (б). Це істинне висловлення. У ньому виражено твердження, що для будь-яких дійсних чисел x та y існує дійсне число z, яке є їхнім добутком. ◄

Важливу роль у логіці предикатів відіграє поняття **області дії квантора у заданій формулі**, під якою розумітимемо той вираз (підформулу), до якого належить квантор. Область дії квантора позначають за допомогою дужок. Ліва дужка, що відповідає початку області дії, записується безпосередньо після кванторної змінної даного квантора, а відповідна до неї права дужка означає закінчення області дії цього квантора. Там, де це не викликає невизначеності, дужки можна опускати й замість $\forall x(P(x))$ або $\exists x(P(x))$ писати відповідно $\forall xP(x)$ або $\exists xP(x)$. Це означає, що операції квантифікації мають більший пріоритет, ніж логічні операції.

Приклад 1.20. В усіх нижченаведених кванторних виразах область дії квантора підкреслено:

$$\exists x\underline{((3 \mid x) \to (6 \mid x))},\ \exists x\underline{(3 \mid x)} \to (6 \mid x),$$
$$\forall x\underline{((x^2 < 9) \to (x < 3))},\ \forall x\underline{(x^2 < 9)} \to (x < 3).$$

Перший і другий вирази з останнього прикладу, а також третій і четвертий відрізняються не лише областю дії квантора. Відмінність між ними істотніша, і про це слід сказати окремо.

Розглянемо на універсальній множині R дійсних чисел вирази:

$$x^2 < 10 \quad \text{та} \quad \exists x(x^2 < 10).$$

Перший із них є предикатом, що залежить від змінної x. Замість x до нього можна підставляти різні дійсні значення й отримувати певні висловлення (істинні чи хибні). Та сама предметна змінна x входить до другого виразу інакше. Якщо замість неї підставити будь-яке дійсне значення, то дістанемо беззмістовний вираз.

Нехай $P(x)$ – деякий предикат на M. Перехід від $P(x)$ до $\forall xP(x)$ або $\exists xP(x)$ називають **зв'язуванням** змінної x. Інші назви – **навішування квантора** на змінну x у предикаті $P(x)$ (або на предикат $P(x)$), **квантифікацією** змінної x. Змінну x, на яку навішено квантор, називають **зв'язаною**, інакше змінну x називають **вільною**.

Зауважимо, що така ситуація не виняткова й доволі часто зустрічається в інших розділах математики. Наприклад, у виразах

$$\int_a^b f(x)dx, \lim_{x \to c} x^n \quad \text{та} \quad \sum_{j=k}^{n} f(j)$$

параметри a, b, c, k і n – це змінні, замість яких можна підставляти певні значення, а параметри x та j – зв'язані змінні, підстановка замість яких будь-яких значень не має жодного сенсу.

Навішувати квантори можна й на багатомісні предикати. Наприклад, застосовуючи квантори $\forall$ і $\exists$ до змінних x та y двомісного предиката $A(x, y)$, отримаємо чотири різні одномісні предикати:

$$\forall xA(x, y),\ \exists xA(x, y),\ \forall yA(x, y) \text{ і } \exists yA(x, y).$$

У перших двох змінна x є зв'язаною, а змінна y – вільною, а у двох останніх – навпаки.

Вираз $\forall xA(x, y)$ (читають як *для всіх x A від x та y*) є одномісним предикатом $B(y)$. Він є істинним для тих і тільки тих $b \in M$, для яких одномісний предикат $A(x, b)$ є істинним для всіх x із M.

Приклад 1.20. Розглянемо двомісний предикат $A(x, y)$, означений на множині $M = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ за допомогою табл. 1.4. Значенням предиката $A(a_i, a_j)$ є елемент на перетині рядка, що відповідає a_i, та стовпчика, що відповідає a_j.

Таблиця 1.4

$x \setminus y$	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	**0**	**1**	**1**	**0**
a_2	**0**	**1**	**1**	**1**
a_3	**0**	**0**	**1**	**1**
a_4	**0**	**0**	**1**	**0**

Таблиці істинності для чотирьох відповідних одномісних предикатів, отримуваних з $A(x, y)$ навішуванням одного квантора, наведено у табл. 1.5.

Таблиця 1.5

y	$\forall xA(x, y)$	y	$\exists xA(x, y)$	x	$\forall yA(x, y)$	x	$\exists yA(x, y)$
a_1	**0**	a_1	**0**	a_1	**0**	a_1	**1**
a_2	**0**	a_2	**1**	a_2	**0**	a_2	**1**
a_3	**1**	a_3	**1**	a_3	**0**	a_3	**1**
a_4	**0**	a_4	**1**	a_4	**0**	a_4	**1**

У всіх чотирьох випадках до вільної змінної, що залишилася, можна застосовувати один із кванторів і, зв'язавши таким чином обидві змінні, перетворити відповідні предикати на висловлення.

У результаті отримаємо такі висловлення:

$\forall x(\forall yA(x, y)) = \mathbf{0}$, $\forall y(\forall xA(x, y)) = \mathbf{0}$, $\exists y(\forall xA(x, y)) = \mathbf{1}$,
$\exists x(\forall yA(x, y)) = \mathbf{0}$, $\exists x(\exists yA(x, y)) = \mathbf{1}$, $\exists y(\exists xA(x, y)) = \mathbf{1}$,
$\forall y(\exists xA(x, y)) = \mathbf{0}$, $\forall x(\exists yA(x, y)) = \mathbf{1}$.

Неважко переконатися, що перестановка однакових кванторів зумовлює рівносильні висловлення. Дійсно, обидва висловлення $\forall x(\forall y A(x, y))$ і $\forall y(\forall x A(x, y))$ істинні тоді й тільки тоді, коли предикат $A(x, y)$ набуває значення 1 на всіх кортежах значень (a, b) з M^2. Висловлення $\exists x(\exists y\, A(x, y))$ і $\exists y(\exists x\, A(x, y))$ істинні тоді й тільки тоді, коли існує принаймні одна пара (a, b) така, що $A(a, b) = 1$.

Водночас усі чотири висловлення з різнойменними кванторами є нерівносильними. Особливо слід наголосити, що суттєвим є порядок слідування різнойменних кванторів.

Висловлення $\forall x(\exists y A(x, y))$ і $\exists y(\forall x A(x, y))$ нерівносильні. Наприклад, у термінах табличного задання предиката $A(x, y)$ істинність першого висловлення $\forall x(\exists y A(x, y))$ означає, що кожен рядок таблиці істинності містить принаймні одну одиницю. Друге ж висловлення $\exists y(\forall x A(x, y))$ істинне тоді й лише тоді, коли в таблиці є стовпчик, що складається тільки з одиниць. ◄

Неважко поширити всі наведені вище міркування й висновки на предикати більшої арності. Навішування одного квантора завжди зменшує кількість вільних змінних і арність предиката на одиницю. Застосування кванторів до всіх змінних предиката перетворює його на висловлення (іноді таку предикатну формулу називають **замкненою**).

Зауваження. Треба звернути увагу на те, що термін "предикат" має різні тлумачення в лінгвістичному та математичному контекстах. У лінгвістичному (синтаксичному) контексті він тлумачиться як присудок-властивість у певному реченні; математичне (семантичне) тлумачення (яке є абстракцією від лінгвістичного) полягає в тому, що термін *предикат* визначається як функція в множину булевих значень, яка задана на множині предметних значень (це питання буде розглянуто детальніше в останньому розділі посібника).

Завдання для самостійної роботи

1. Записати формулою логіки предикатів таке твердження:
Для кожного x $P(x)$ – хибне; *$P(x)$ – хибне для кожного x*.

2. Указати вільні та зв'язані змінні у виразі. Для кожної зв'язаної змінної визначити, яким саме квантором її зв'язано:

(а) $P(x) \to \forall y\,(Q(y) \vee \exists z\, P(z) \sim \neg P(y))$;

(б) $\exists x\,(P(y) \to P(x) \wedge \exists z(Q(z) \sim \exists y(Q(y) \vee Q(x))) \wedge \forall x(P(x) \to \neg(\exists y\, Q(y)))$;

(в) $\forall x\,(x^2 y > 0 \to y > 0)$; (г) $x > 3 \wedge \forall x\, \forall y\,(xy^2 > 0)$;

(д) $\forall x\, \forall y\,(x < y \to \exists z\,(x < z \wedge z < y))$.

3. Предметна область – це множина R дійсних чисел. Визначити, є вираз висловленням чи пропозиційною формою. У першому випадку вказати, істинним чи хибним є висловлення, у другому – навісити квантори так, щоб дістати істинне висловлення:

(а) $\exists y \forall x(xz = xy)$; (б) $\exists p \forall x(x^2 + px + q > 0)$;

(в) $\exists x \forall y \exists z(xy = z)$; (г) $\exists y \forall x(xy > 0) \to \exists z(z^2 < 0)$.

4. Нехай предметною областю є множина N натуральних чисел. Проаналізувати область дії кванторів і знайти значення висловлення:

(а) $\forall x \forall y(\exists z\,(z > x \wedge z < y) \sim x < y)$;

(б) $\forall x \forall y \exists z((z > x \wedge z < y) \sim x < y)$.

5. Навести приклади тверджень як математичного, так і нематематичного змісту, у яких є кванторні вирази *для кожного* та *існує*, значення яких змінюються при зміні порядку слідування цих виразів.

6. Порівняти області дії квантора й значення істинності виразів

$$\forall x(x > 3) \to (2 > 3) \text{ та } \forall x((x > 3) \to (2 > 3)).$$

1.8. Формули логіки предикатів. Рівносильність формул. Пренексні формули. Тотожно істинні формули

Наведемо індуктивне означення поняття **формули логіки предикатів** (**предикатної формули**, або просто **формули**).

1. Якшо P – символ елементарного n-місного предиката, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – предметні змінні, то вираз

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

– формула. Такі формули називають **елементарними**, або **атомарними**.

2. Якщо A та B – формули, то

$$(\neg A), (A \wedge B), (A \vee B), (A \to B), (A \sim B)$$

– теж формули.

3. Якщо A – формула, а x – предметна змінна в A, то

$$(\forall x(A)) \text{ і } (\exists x(A))$$

– теж формули.

4. Інших формул, крім утворених за правилами 1–3, немає.

Це означення дозволяє стверджувати, що всі формули алгебри висловлень є формулами логіки предикатів, оскільки висловлення – це нульмісні предикати. За допомогою означення неважко також переконатися, що вирази

$$(\forall x(\exists y\,(A(x, y)) \to (B(x) \vee (\exists z(C(x, z)))))),$$
$$(\forall x(\forall y(A(x, y) \wedge B(x)) \to (\exists y(C(x, y)))))$$

є формулами логіки предикатів. Для зручності можна запровадити деякі домовленості про скорочення кількості дужок у формулах. По-перше, залишимо всі умови скорочення кількості дужок, які було прийнято в алгебрі висловлень, виходячи з пріоритету логічних операцій. По-друге, випускатимемо всі зовнішні дужки. Вважатимемо, що квантори мають більший пріоритет, ніж логічні операції. Випускатимемо також дужки, що позначають область дії квантора, якщо остання є елементарною формулою. Нарешті, не писатимемо дужки між кванторами, що йдуть один за одним. Правила асоціативності залишаються такими самими, як і для пропозиційної логіки. Що стосується кванторних операцій, то вони виконуються в порядку, зворотному до їх написання (справа наліво).

Нехай $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – деяка формула логіки предикатів, а множина M – деяка предметна область. Для **інтерпретації** $\boldsymbol{F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ **в** $\boldsymbol{M}$ необхідно задати значення символів елементарних предикатів у M як n-місних предикатів у M. За наявності такої логічної (істиннісної) інтерпретації формули F у M можливі три основні ситуації.

1. Існує набір значень змінних, для якого формула F набуває значення **1**. У цьому разі формулу F називають **виконуваною в області** M.

2. Якщо формула F набуває значення 1 (виконувана) для всіх наборів значень з області M, то її називають **тотожно істинною в** M.

3. Якщо формула F невиконувана в області M, то її називають **тотожно хибною в** M.

Наведені означення можна узагальнити, якщо розглядати різні предметні області, а саме: якщо для формули F існує область M, в якій вона виконувана, то формулу F називають **виконуваною**; формулу, тотожно істинну в будь-яких областях M, називають **тотожно істинною**, або **логічно загальнозначущою**; формула, невиконувану в усіх областях M, називають **тотожно хибною**, або **суперечністю**.

Приклад 1.21. Формула

$$\exists x A(x, y) \to \forall x A(x, y)$$

виконувана й тотожно істинна в усіх одноелементних областях M. Формула

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee \neg F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

тотожно істинна, а формула

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge \neg F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

тотожно хибна.

Тотожно істинними є формули $\forall x P(x) \to P(y)$ і $P(y) \to \exists x P(x)$.◄

Формули F_1 і F_2 називають **рівносильними** (**еквівалентними**), якщо за всіх можливих підстановок значень замість їхніх змінних вони набувають однакових значень; позначають $F_1 = F_2$ або $F_1 \equiv F_2$.

Зауваження. Слід розуміти відмінність відношення рівносильності $\equiv$ від операції еквівалентності $\sim$. Операція еквівалентності $\sim$ є операцією булевої алгебри, яка двом булевим предикатам ставить у відповідність новий предикат, у той час як рівносильність є бінарним відношенням на множині формул. Утім, ці поняття поєднані в тому сенсі, що **рівносильність формул** F_1 і F_2 свідчить про тотожну істинність формули $F_1 \sim F_2$ і навпаки, тотожна істинність формули $F_1 \sim F_2$ свідчить про рівносильність F_1 і F_2. Зазначимо також, що **всі тотожно істинні** (**усі тотожно хибні**) **формули рівносильні** між собою.

Множина всіх тотожно істинних формул логіки предикатів є складовою частиною всіх формальних математичних теорій, тому її дослідження й опис – важлива задача математичної логіки. Значення цієї множини підкреслює також той факт, що їй, як було зазначено вище, належать усі рівносильні співвідношення (тотожності) логіки предикатів.

Як і в логіці висловлень, постають дві проблеми: перша – опис або побудова множини всіх тотожно істинних формул, друга – перевірка тотожної істинності заданої формули логіки предикатів.

Якщо існує процедура розв'язання другої проблеми, то на її основі можна сформулювати такий алгоритм, що породжує шукану множину T тотожно істинних формул. Послідовно будуємо всі формули, кожну з них за відомою процедурою перевіряємо на тотожну істинність і вносимо до множини T ті, для яких результат перевірки позитивний.

Однак на відміну від логіки висловлень, де така процедура існує та зводиться до обчислення значень формули на скінченній множині значень її параметрів, у логіці предикатів області визначення предметних і предикатних змінних формул нескінченні.

Метод обчислення значення формули шляхом підстановки значень замість змінних і послідовного виконання зазначених дій є зручним для встановлення виконуваності заданої формули або доведення нерівносильності певних формул. Для цього достатньо підібрати одну відповідну підстановку, тобто побудувати контрприклад. Застосовувати цей метод можна також, коли предметна область M скінченна. Пов'язано це з тим, що для скінченної множини $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ кванторні формули можна перетворити на рівносильні їм формули логіки висловлень:

$$\forall x P(x) = P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \ldots \wedge P(a_n),$$

$$\exists x P(x) = P(a_1) \vee P(a_2) \vee \ldots \vee P(a_n).$$

Замінивши всі квантори за допомогою наведених співвідношень, будь-яку формулу логіки предикатів можна перетворити на рівносильну пропозиційну форму, або формулу логіки висловлень. Істинність останньої на скінченній множині M можна перевірити за допомогою скінченної кількості підстановок й обчислень.

Для доведення ж рівносильності предикатних формул, заданих на нескінченних предметних областях, прямий перебір непридатний, і доводиться застосовувати різні опосередковані методи.

Наприклад, вище за допомогою простих міркувань було доведено рівносильність формул, що описують переставність однойменних кванторів у двомісних предикатах, тобто доведено тотожну істинність формул

$$\forall x \forall y A(x, y) \sim \forall y \forall x A(x, y) \text{ та } \exists x \exists y A(x, y) \sim \exists y \exists x A(x, y).$$

Приклад 1.22. Аналогічними міркуваннями доведемо рівносильність, що описує дистрибутивність квантора $\forall x$ відносно кон'юнкції

$$\forall x(A(x) \wedge B(x)) = \forall x A(x) \wedge \forall x B(x).$$

Нехай ліва частина цього співвідношення істинна для деяких предикатів A та B. Тоді для будь-якого $a \in M$ істинною є кон'юнкція $A(a) \wedge B(a)$. Тому $A(a)$ та $B(a)$ одночасно істинні для довільних a, отже, формула $\forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$ істинна. Якщо ж ліва частина хибна, то це означає, що для деякого $a \in M$ хибним є або $A(a)$, або $B(a)$. Тому хибне або $\forall x A(x)$, або $\forall x B(x)$, а отже, хибною є й права частина. ◄

Подібним методом можна довести дистрибутивність квантора $\exists x$ відносно диз'юнкції:

$$\exists x(A(x) \vee B(x)) = \exists x A(x) \vee \exists x B(x).$$

Приклад 1.23. Доведемо, що квантори $\forall x$ і $\exists x$ недистрибутивні щодо диз'юнкції і кон'юнкції. Дійсно, істинні лише імплікації

$$\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \to \forall x(A(x) \vee B(x)),$$
$$\exists x(A(x) \wedge B(x)) \to \exists x A(x) \wedge \exists x B(x).$$

Якщо один із предикатів $A(x)$ або $B(x)$ тотожно істинний, то ліва й права частини першої імплікації одночасно істинні. Якщо ж існуватимуть такі значення $a, b \in M$, що $A(a)$ та $B(b)$ хибні, то ліва частина хибна, а права може бути або хибною, або істинною. Для її істинності достатньо, щоб для кожного $a \in M$ істинним був принаймні один із предикатів. Це означає, що знак імплікації $\to$ не можна замінити на знак еквівалентності $\sim$, отже, ліва і права частини першої імплікації нерівносильні. ◄

Пропонуємо самостійно проаналізувати другу імплікацію та довести її істинність.

Приклад 1.24. Доведемо ще одне корисне й популярне в логіці та математиці рівносильне співвідношення:

$$\neg (\exists x P(x)) = \forall x(\neg P(x)).$$

Нехай для деякого предиката P і предметної області M ліва частина істинна. Тоді не існує $a \in M$, для якого $P(a)$ істинне. Отже, для всіх $a \in M$ $P(a)$ хибне, тобто $\neg P(a)$ істинне. Тому права частина істинна. Якщо ж ліва частина хибна, то існує $b \in M$, для якого $P(b)$ істинне, тобто $\neg P(b)$ – хибне. Отже, права частина також хибна. ◄

Аналогічно можна довести рівносильність

$$\neg (\forall x P(x)) = \exists x(\neg P(x)).$$

Приклад 1.25.

1. Побудувавши відповідну інтерпретацію (контрприклад), довести, що формули A та B логіки предикатів не є рівносильними: $A = \exists x\ (P(x) \wedge Q(x))$, $B = \exists x\ P(x) \wedge \exists x\ Q(x)$.

Для предметної області $M = \{a, b\}$ визначимо предикати P і Q так: $P(a) = \mathbf{0}$, $P(b) = \mathbf{1}$ та $Q(a) = \mathbf{1}$, $Q(b) = \mathbf{0}$. Тоді формула A буде хибною, а формула B – істинною.

2. Довести чи спростувати твердження про рівносильність таких формул A та B логіки предикатів:

(а) $A = \forall x(P(x) \to (Q(x) \to R(x)))$, $B = \forall x(P(x) \to (R(x) \to Q(x)))$;

(б) $A = \forall x(P(x) \to (Q(x) \to R(x)))$, $B = \forall x(Q(x) \to (R(x) \to P(x)))$.

Формули A та B першої пари рівносильні. Це твердження можна довести, перебравши, наприклад, усі вісім можливих комбінацій значень предикатів P, Q і R для довільного об'єкта x із предметної області та переконавшись, що в усіх восьми випадках формули

$$(P(x) \to (Q(x) \to R(x))) \text{ і } (P(x) \to (R(x) \to Q(x)))$$

набувають однакових значень.

Цю рівносильність можна обґрунтувати й такими міркуваннями. Формула

$$(P(x) \to (Q(x) \to R(x)))$$

набуває значення $\mathbf{0}$ тоді й тільки тоді, коли для якогось x із предметної області виконується $P(x) = \mathbf{1}$, $Q(x) = \mathbf{1}$ і $R(x) = \mathbf{0}$. Друга формула

$$(P(x) \to (R(x) \to Q(x)))$$

також набуває значення $\mathbf{0}$ лише за тих самих умов.

Формули A та B другої пари нерівносильні. Контрприклад: для предметної області $M = \{a\}$ покладемо

$$P(a) = Q(a) = \mathbf{1} \text{ і } R(a) = \mathbf{0}.$$

За цих умов формула A набуває значення **0**, а формула B – значення **1**.

3. Перевірити, чи випливає в логіці предикатів із наведених нижче припущень зроблений з них висновок, тобто чи коректні міркування. Якщо міркування правильні, то побудувати відповідний дедуктивний ланцюжок; якщо ж некоректні, – то відповідний контрприклад.

Припущення: 1) деякі вписані в коло чотирикутники є прямокутниками; 2) кожний прямокутник є паралелограмом.

Висновок: отже, деякі вписані в коло чотирикутники є паралелограмами.

Уведемо на множині M усіх чотирикутників такі предикати: $P(x)$ – x – *чотирикутник, вписаний у коло*, $Q(x)$ – x – *прямокутник*, $R(x)$ – x – *паралелограм*. Тоді припущення можна записати у вигляді таких предикатних формул:

1) $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$, 2) $\forall x(Q(x) \rightarrow R(x))$,

а висновок – у вигляді формули $\exists x(P(x) \wedge R(x))$.

Із припущення 1) випливає, що для якогось $a \in M$ виконується

$$P(a) \wedge Q(a) = 1, \text{ тобто } P(a) = 1 \text{ та } Q(a) = 1.$$

Звідси та із припущення 2) маємо

$$R(a) = 1.$$

Отже, $P(a) \wedge R(a) = 1$, тому формула $\exists x(P(x) \wedge R(x))$ істинна в M. ◄

Формула A перебуває в **пренексній формі**, якщо вона має вигляд $Qx_1 \ldots Qx_n\, B$, де Qx_k – кванторний префікс $\exists x_k$ або $\forall x_k$, B – безкванторна формула.

Формулу в пренексній формі називають **пренексною формулою.**

Розглянемо важливі рівносильні співвідношення, які дозволяють змінювати області дії кванторів. Нехай B – предикатна формула, що **не містить вільних входжень змінної** x. Тоді справджуються такі рівносильності:

1) $\forall xA(x) \vee B = \forall x(A(x) \vee B)$; 2) $\forall xA(x) \wedge B = \forall x(A(x) \wedge B)$;
3) $B \rightarrow \forall xA(x) = \forall x(B \rightarrow A(x))$; 4) $\forall xA(x) \rightarrow B = \exists x(A(x) \rightarrow B)$;
5) $\exists xA(x) \vee B = \exists x(A(x) \vee B)$; 6) $\exists xA(x) \wedge B = \exists x(A(x) \wedge B)$;
7) $B \rightarrow \exists xA(x) = \exists x(B \rightarrow A(x))$; 8) $\exists xA(x) \rightarrow B = \forall x(A(x) \rightarrow B)$.

Ці співвідношення означають, що формулу, яка не містить вільних входжень x, можна виносити за межі області дії квантора, що зв'язує x. З іншого боку, ці самі рівносильності дають змогу включати відповідну формулу B до області дії квантора за змінною x, від якої B не залежить.

Приклад 1.26. Знайдемо пренексну форму для формули

$$\forall x \forall y A(x, y) \wedge \exists x B(x) \rightarrow \neg \exists x A(x, y).$$

Спочатку проаналізуємо, які змінні є вільними, а які – зв'язаними. Вільна змінна для всієї формули – лише y. Змінні x та y зв'язані в різних підформулах цієї формули. Оскільки є різні квантори зі змінною x, то спочатку замінимо цю змінну у двох останніх кванторах на нові змінні, наприклад z і t. Також треба змінити зв'язану змінну y, наприклад на v. Отримуємо формулу

$$\forall x \forall v A(x, v) \wedge \exists z B(z) \rightarrow \neg \exists x A(t, y).$$

У підформулі

$$\forall x \forall v A(x, v) \wedge \exists z B(z)$$

послідовно виносимо квантори згідно з правилами 2) і 6); квантор, який виноситься, підкреслюватимемо:

$\forall x \forall v A(x,v) \wedge \underline{\exists z} B(z)$ = (за правилом 6).

$\exists z(\underline{\forall x} \forall v A(x,v) \wedge B(z))$ = (за правилом 2).

$\exists z(\forall x(\underline{\forall v} A(x,v) \wedge B(z)))$ = (за правилом 2).

$\exists z(\forall x(\forall v(A(x,v) \wedge B(z))))$ = (знімаємо зовнішні дужки).

$\exists z \forall x \forall v(A(x,v) \wedge B(z))$.

Перетворення застосовані коректно, оскільки формули не містять вільних змінних, які б потрапляли в розширену область дії кванторів. ◄

Завдання для самостійної роботи

1. Довести, що формула логіки предикатів

$$\forall x \exists y\ (P(x) \vee \neg P(y))$$

логічно загальнозначуща. Чи є такою наступна формула?

$$\exists y \forall x\ (P(x) \vee \neg P(y)).$$

2. Довести, що формула тотожно істинна:

(а) $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\exists x P(x) \wedge \exists x\, Q(x))$;

(б) $(\forall x\, P(x) \rightarrow \exists x Q(x)) \sim \exists x(P(x) \rightarrow Q(x))$.

3. Довести чи спростувати твердження про те, що запропонована формула тотожно істинна:

(а) $\exists x P(x) \wedge \exists x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow \exists x Q(x)$;

(б) $\exists xP(x) \wedge \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow \exists xQ(x)$;

(в) $\forall xP(x) \wedge \exists x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow \exists xQ(x)$;

(г) $\forall x(P(x) \rightarrow (Q(x) \rightarrow R(x))) \rightarrow \forall x(P(x) \vee Q(x) \rightarrow R(x))$.

4. Довести, що формули A та B логіки предикатів рівносильні:

(а) $A = \exists x(P(x) \vee Q(x))$, $B = \exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$;

(б) $A = \neg (\forall x\, P(x))$, $B = \exists x\, (\neg P(x))$.

5. Побудувавши відповідну інтерпретацію (контрприклад), довести, що формули A та B логіки предикатів не є рівносильними:

(а) $A = \exists x(P(x) \wedge Q(x))$, $B = \exists x\, P(x) \wedge \exists xQ(x)$;

(б) $A = \forall x(P(x) \vee Q(x))$, $B = \forall x\, P(x) \vee \forall xQ(x)$;

(в) $A = \exists xP(x) \rightarrow \exists x\, Q(x)$, $B = \exists x\, (P(x) \rightarrow Q(x))$.

6. Довести чи спростувати твердження про рівносильність формул A та B логіки предикатів:

(а) $A = \forall y\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(y))$, $B = \forall y(\forall x\, P(x) \rightarrow Q(y))$;

(б) $A = \forall x(P(x) \rightarrow Q(y))$, $B = \forall x(P(x)) \rightarrow Q(y)$;

(в) $A = \exists x(P(x) \rightarrow Q(y))$, $B = \exists x(P(x)) \rightarrow Q(y)$.

7. Побудувати пренексну форму для формул:

(а) $\forall xA(x) \rightarrow \forall y(\exists zB(x,y,z) \rightarrow \neg \forall xA(x) \wedge \exists xC(x, y))$;

(б) $\forall x \neg \exists yA(x,y) \rightarrow \forall xB(x) \rightarrow \neg \exists yA(x, y)$;

(в) $\neg\forall xA(x) \wedge \exists xB(x) \vee \forall x(\forall yC(x,y) \rightarrow A(y))$;

(г) $\forall xA(x) \rightarrow \forall y(\forall zB(x,y,z) \rightarrow \neg \forall xA(x))$.

8. Визначити, які з тверджень 1–5 логічно еквівалентні:

1. Неправильно, що всі числа, кратні 4, є точними квадратами.

2. Усі числа, кратні 4, не є точними квадратами.

3. Не всі числа, кратні 4, є точними квадратами.

4. Існує число, кратне 4, яке не є точним квадратом.

5. Деякі числа, не кратні 4, не є точними квадратами.

У подальших вправах перевірити, чи випливають у логіці предикатів із припущень зроблені з них висновки, тобто чи коректними були здійснені міркування. Якщо міркування правильне, то побудувати відповідний дедуктивний ланцюжок; якщо ж міркування некоректне, то побудувати відповідний контрприклад.

9.

1) *Кожне число*, *кратне* 51, *кратне* 17 *і кратне* 3.

2) *Кожне число кратне* 3 *тільки тоді*, *коли сума цифр його запису в десятковій системі числення кратна* 3.

3) *Сума цифр запису числа* 10712 *не кратна* 3. *Отже*, 10712 *не кратне* 51.

10.

1) *Якщо хтось може розв'язати дану задачу*, *то знайдеться здібний студент*, *який зробить це*.

2) *Петренко – здібний студент*, *але не зміг розв'язати цю задачу. Отже*, *ніхто не здатен розв'язати дану задачу*.

1.9. Секвенції і секвенційні форми для логіки предикатів

Логіка предикатів, на відміну від логіки висловлень, вводить нові логічні операції – квантори. Розглянемо секвенційні правила для кванторів.

За означенням індексована формула ${}_1\exists A(x)$ є істинною за її інтерпретації в області M, якщо є значення предметної змінної x, яке робить істинним формулу $A(x)$. Таке значення x позначимо y. Однак у секвенційному численні немає прив'язки до конкретної області M, тому будемо тлумачити y як певну предметну змінну. Іншими словами, формулу ${}_1\exists A(x)$ можна замінити на формулу ${}_1A(x)$, де y – нова змінна. Ураховуючи наявність у секвенції інших формул множини $\sum$, отримуємо правило

$$_1\exists \ \frac{{}_1\exists xA(x), \sum}{{}_1A(y), \sum}$$

за умови, що нова змінна y не входить до $\sum \cup \{\exists xA(x)\}$.

Розглянемо тепер правило для ${}_0\exists A(x)$. За означенням хибність цієї формули означає хибність формули $A(x)$ за всіх значень x із області предметної інтерпретації. У секвенції такі значення задаються її вільними змінними, тому здається, що правило можна записати у вигляді

$$\frac{{}_0\exists xA(x), \sum}{{}_0A(z_1), \ldots, {}_0A(z_m), \sum},$$

де $\{z_1, \ldots, z_m\}$ – усі вільні змінні $\sum \cup \{\exists xA(x)\}$.

Однак у такому правилі не враховано два моменти:

1) що відбуватиметься за відсутності вільних предметних змінних у множині формул $\sum \cup \{\exists x A(x)\}$;

2) чи буде правило правильним, якщо в процесі виведення з'являться нові вільні змінні?

У першому випадку, якщо вільних змінних немає, то беремо довільну нову змінну, наприклад z_1. У другому випадку ситуація складніша, оскільки на значеннях нових змінних формула $A(x)$ також має бути хибною. Щоб урахувати цей момент, у правилі залишаємо формулу ${}_0\exists A(x)$, яка при розгортанні зможе врахувати значення нових змінних. Таким чином, виправлене правило матиме вигляд

$${}_0\exists \ \frac{{}_0\exists x A(x), \sum}{{}_0A(z_1), \ldots, {}_0A(z_m), \sum, {}_0\exists x A(x)},$$

де $\{z_1, \ldots, z_m\}$ – усі вільні змінні $\sum \cup \{\exists x A(x)\}$; якщо вільних змінних немає, то беремо довільну нову змінну z_1.

Зазначимо, що в цьому правилі спрощення не відбувається, але з'являються нові простіші формули, які, можливо, зроблять секвенцію замкненою.

Дуально будують секвенційні правила для універсального квантора.

Зауваження. Обговоримо питання про введення нових змінних у правилах ${}_1\exists$ та ${}_0\exists$ розкриття кванторів. Ці нові змінні можна тлумачити як константи в тому сенсі, що їх значення вже не будуть змінюватись. Тому для таких змінних можна використовувати позначення, які застосовуються для предметних констант: a, b, c, d, e, … . Іншими словами, нові змінні мають подвійну природу: з одного боку, це змінні, а з іншого – їх можна тлумачити як константи. Тому правило ${}_1\exists$ можна записати у вигляді

$${}_1\exists \ \frac{{}_1\exists x A(x), \sum}{{}_1A(a), \sum}$$

за умови, що нова змінна (константа) a не входить до $\sum \cup \{\exists x A(x)\}$, і казати, що константа a підтверджує істинність предиката A.

Аналогічно правило ${}_0\exists$ також можна подати формулою

$$_0\exists \ \frac{_0\exists x A(x), \sum}{_0A(z_1), ..., \ _0A(z_m), \sum, \ _0\exists x A(x)},$$

де $\{z_1, \ldots, z_m\}$ – усі вільні змінні $\sum \cup \{\exists x A(x)\}$; якщо вільних змінних немає, то беремо довільну нову змінну (константу) z_1.

Проте такі константи в секвенційних правилах трактуються як змінні, а в інтерпретаціях їх можна розуміти як константи (зауваження зроблено з метою додаткового роз'яснення правил).

У **секвенційних правилах** (формах) для логіки предикатів висновки пишемо над рискою, засновки – під рискою:

$$_1\neg \ \frac{_1\neg A, \sum}{_0A, \sum} \qquad _0\neg \ \frac{_0\neg A, \sum}{_1A, \sum}$$

$$_1\vee \ \frac{_1A \vee B, \sum}{_1A, \sum \qquad _1B, \sum} \qquad _0\vee \ \frac{_0A \vee B, \sum}{_0A, \ _0B, \sum}$$

$$_1\wedge \ \frac{_1A \wedge B, \sum}{_1A, _1B, \sum} \qquad _0\wedge \ \frac{_0A \wedge B, \sum}{_0A, \Sigma \quad _0B, \sum}$$

$$_1\to \ \frac{_1A \to B, \sum}{_0A, \sum \qquad _1B, \sum} \qquad _0\to \ \frac{_0A \to B, \sum}{_1A, \ _0B, \sum}$$

$$_1\leftrightarrow \ \frac{_1A \leftrightarrow B, \sum}{_0A, \ _0B, \sum \qquad _1A, _1B, \sum} \qquad _0\leftrightarrow \ \frac{_0A \leftrightarrow B, \sum}{_0A, \ _1B, \sum \qquad _1A, _0B, \sum}$$

$$_1\exists \ \frac{_1\exists x A(x), \sum}{_1A(y), \sum}$$

за умови, що нова змінна y не входить до $\sum \cup \{\exists x A(x)\}$.

$$_0\exists \ \frac{_0\exists x A(x), \sum}{_0A(z_1), ..., \ _0A(z_m), \sum, \ _0\exists x A(x)},$$

де $\{z_1, \ldots, z_m\}$ – усі вільні змінні $\sum \cup \{\exists x A(x)\}$; якщо вільних змінних немає, то береться довільна нова змінна z_1.

$$_1\forall \ \frac{_1\forall x A(x), \sum}{_1A(z_1), ..., \ _1A(z_m), \sum, \ _1\forall x A(x)},$$

де $\{z_1,\ldots, z_m\}$ – усі вільні змінні $\sum\cup\{\forall xA(x)\}$; якщо вільних змінних немає, то беремо довільну нову змінну z_1.

$$_0\forall\ \frac{{}_0\forall xA(x),\sum}{{}_0A(y),\sum}$$

за умови, що нова змінна y не входить до $\sum\cup\{\forall xA(x)\}$.

Припускатимемо, що в атомарних формулах відображені всі змінні, кількість яких дорівнює арності предиката. Однак у формулах правил вільні змінні не вказуватимемо, тобто записи A та $A(x)$ не міститимуть список усіх вільних змінних (те саме стосується формул B і множини формул $\sum$).

Приклад 1.27.

1. Довести формулу $\forall x(A(x)\to B(x))\to(\forall xA(x)\to\exists xB(x))$.

► Формулюємо розмічену секвенцію:

$$_0\forall x(A(x)\to B(x))\to(\forall xA(x)\to\exists xB(x)).$$

Головною операцією є друга імплікація, тому застосовуємо правило $_0\!\to$:

$$({}_0\!\to)\frac{{}_0\forall x(A(x)\to B(x))\to(\forall xA(x)\to\exists xB(x))}{{}_1\forall x(A(x)\to B(x)),\ {}_0\forall xA(x)\to\exists xB(x)}.$$

Отримано нову секвенцію із двох формул. До другої формули доцільно застосувати правило $_0\!\to$:

$$({}_0\!\to)\frac{{}_0\forall x(A(x)\to B(x))\to(\forall xA(x)\to\exists xB(x))}{({}_0\!\to)\dfrac{{}_1\forall x(A(x)\to B(x)),\ {}_0\forall xA(x)\to\exists xB(x)_*}{{}_1\forall x(A(x)\to B(x)),\ {}_1\forall xA(x),\ {}_0\exists xB(x)}}.$$

У новій секвенції доцільно застосувати правило $_1\forall$ до другої формули $_1\forall xA(x)$. Це правило вимагає виявити всі вільні змінні в секвенції. У даному випадку вільних змінних немає, тому беремо довільну нову змінну y, яку підставляємо до формули $A(x)$ замість x. Маємо:

$$({}_0\!\to)\frac{{}_0\forall x(A(x)\to B(x))\to(\forall xA(x)\to\exists xB(x))}{({}_0\!\to)\dfrac{{}_1\forall x(A(x)\to B(x)),\ {}_0\forall xA(x)\to\exists xB(x)_*}{({}_1\forall)\dfrac{{}_1\forall x(A(x)\to B(x)),\ {}_1\forall xA(x)_*,\ {}_0\exists xB(x)}{{}_1\forall x(A(x)\to B(x)),\ {}_1A(y),\ {}_1\forall xA(x),\ {}_0\exists xB(x)}}}.$$

Далі до першої формули можна застосувати правило $_1\forall$, однак тепер маємо вільну змінну y. Отримуємо:

$$\begin{array}{rl}
 & {}_0\forall x(A(x)\to B(x))\to(\forall xA(x)\to\exists xB(x)) \\ \hline
(_0\to) & {}_1\forall x(A(x)\to B(x)),\ {}_0\forall xA(x)\to\exists xB(x)_* \\ \hline
(_0\to) & {}_1\forall x(A(x)\to B(x)),\ {}_1\forall xA(x)_*,\ {}_0\exists xB(x) \\ \hline
(_1\forall) & {}_1\forall x(A(x)\to B(x))_*,\ {}_1A(y),\ {}_1\forall xA(x),\ {}_0\exists xB(x) \\ \hline
(_1\forall) & {}_1A(y)\to B(y),{}_1\forall x(A(x)\to B(x)), \\
 & {}_1A(y),\ {}_1\forall xA(x),\ {}_0\exists xB(x)
\end{array}$$

(остання секвенція розміщена на двох рядках).

До останньої формули секвенції застосуємо правило $_0\exists$, враховуючи, що в секвенції єдиною вільною змінною є y:

$$\begin{array}{rl}
 & {}_0\forall x(A(x)\to B(x))\to(\forall xA(x)\to\exists xB(x)) \\ \hline
(_0\to) & {}_1\forall x(A(x)\to B(x)),\ {}_0\forall xA(x)\to\exists xB(x)_* \\ \hline
(_0\to) & {}_1\forall x(A(x)\to B(x)),\ {}_1\forall xA(x)_*,\ {}_0\exists xB(x) \\ \hline
(_1\forall) & {}_1\forall x(A(x)\to B(x))_*,\ {}_1A(y),\ {}_1\forall xA(x),\ {}_0\exists xB(x) \\ \hline
(_1\forall) & {}_1A(y)\to B(y),{}_1\forall x(A(x)\to B(x)), \\
 & {}_1A(y),\ {}_1\forall xA(x),\ {}_0\exists xB(x)_* \\ \hline
(_0\exists) & {}_1A(y)\to B(y),{}_1\forall x(A(x)\to B(x)), \\
 & {}_1A(y),\ {}_1\forall xA(x), B(y),\ {}_0\exists xB(x)
\end{array}.$$

Тепер до першої формули застосуємо правило $_1\to$. Оскільки отримані секвенції доволі великі, то запишемо їх у кілька рядків:

$$\begin{array}{rl}
 & {}_0\forall x(A(x)\to B(x))\to(\forall xA(x)\to\exists xB(x)) \\ \hline
(_0\to) & {}_1\forall x(A(x)\to B(x)),\ {}_0\forall xA(x)\to\exists xB(x)_* \\ \hline
(_0\to) & {}_1\forall x(A(x)\to B(x)),\ {}_1\forall xA(x)_*,\ {}_0\exists xB(x) \\ \hline
(_1\forall) & {}_1\forall x(A(x)\to B(x))_*,\ {}_1A(y),\ {}_1\forall xA(x),\ {}_0\exists xB(x) \\ \hline
(_1\forall) & {}_1A(y)\to B(y),{}_1\forall x(A(x)\to B(x)), \\
 & {}_1A(y),\ {}_1\forall xA(x),\ {}_0\exists xB(x)_* \\ \hline
(_0\exists) & {}_1A(y)\to B(y),{}_1\forall x(A(x)\to B(x)), \\
 & {}_1A(y),\ {}_1\forall xA(x),\ {}_0B(y),\ {}_0\exists xB(x) \\ \hline
(_1\to) & \begin{array}{ll}
{}_0A(y)_\times, & {}_1B(y)_\times,{}_1 \\
{}_1\forall x(A(x)\to B(x)), & \forall x(A(x)\to B(x)), \\
{}_1A(y)_\times, & {}_1A(y), \\
{}_1\forall xA(x), & {}_1\forall xA(x), \\
{}_0B(y),\ {}_0\exists xB(x) & {}_0B(y)_\times,\ {}_0\exists xB(x) \\ \hline
\times & \times
\end{array}
\end{array}.$$

Усі отримані секвенції замкнені, тому початкова формула є всюди істинною. ◄

2. Чи є всюди істинною формула?

$$(\forall xA(x) \to \exists xB(x)) \to \forall x(A(x) \to B(x)).$$

► У цьому й подальших прикладах не вказуватимемо назву застосованого правила, оскільки воно легко визначається за головною операцією формули, індексованої знаком *. Формулюємо розмічену секвенцію та починаємо будувати дерево виведення:

$$\dfrac{{}_0(\forall xA(x) \to \exists xB(x)) \to \forall x(A(x) \to B(x))}{\dfrac{{}_1\forall xA(x) \to \exists xB(x)^*,\ {}_0\forall x(A(x) \to B(x))}{{}_0\forall xA(x)^*,\ {}_0\forall x(A(x) \to B(x)) \qquad {}_1\exists xB(x)^*,\ {}_0\forall x(A(x) \to B(x))}}.$$

Отримано дві секвенції, які не мають вільних змінних. Застосування правила ${}_0\forall$ до першої формули першої секвенції вводить нову змінну y; при застосуванні правила ${}_1\exists$ до першої формули другої секвенції можна взяти ту саму нову (для другої секвенції) змінну y. Дістанемо:

$$\dfrac{{}_0(\forall xA(x) \to \exists xB(x)) \to \forall x(A(x) \to B(x))}{\dfrac{{}_1\forall xA(x) \to \exists xB(x)^*,\ {}_0\forall x(A(x) \to B(x))}{\dfrac{{}_0\forall xA(x)^*,\ {}_0\forall x(A(x) \to B(x))}{{}_0A(y),\ {}_0\forall x(A(x) \to B(x))} \qquad \dfrac{{}_1\exists xB(x)^*,\ {}_0\forall x(A(x) \to B(x))}{{}_1B(y),\ {}_0\forall x(A(x) \to B(x))}}}.$$

До обох нових секвенцій входить формула

$${}_1B(y),\ \ {}_0\forall x(A(x) \to B(x)),$$

яку розкриваємо за правилом ${}_0\forall$ із використанням нової вільної змінної z. Далі застосовуємо правило ${}_0\!\to$. Маємо:

$$\dfrac{{}_0(\forall xA(x) \to \exists xB(x)) \to \forall x(A(x) \to B(x))}{\dfrac{{}_1\forall xA(x) \to \exists xB(x)^*,\ {}_0\forall x(A(x) \to B(x))}{\dfrac{{}_0\forall xA(x)^*,\ {}_0\forall x(A(x) \to B(x))}{\dfrac{{}_0A(y),\ {}_0\forall x(A(x) \to B(x))}{\dfrac{{}_0A(y),\ {}_0A(z) \to B(z)}{\dfrac{{}_0A(y),\ {}_1A(z),\ {}_0B(z)}{!}}}} \qquad \dfrac{{}_1\exists xB(x)^*,\ {}_0\forall x(A(x) \to B(x))}{\dfrac{{}_1B(y),\ {}_0\forall x(A(x) \to B(x))}{\dfrac{{}_1B(y),\ {}_0A(z) \to B(z)}{\dfrac{{}_1B(y),\ {}_1A(z),\ {}_0B(z)}{!}}}}}}.$$

Отримані секвенції ${}_0A(y), {}_1A(z), {}_0B(z)$ та ${}_1B(y), {}_1A(z), {}_0B(z)$ містять лише атомарні формули, але не є замкненими. Це означає, що можна побудувати контрприклади, які спростовують початкову формулу. Кожна із секвенцій має дві вільні змінні y та z. Тому оберемо модель із двох констант a та b, вважаючи їх відповідно значеннями y та z. Перша секвенція ${}_0A(y), {}_1A(z), {}_0B(z)$ визначає значення базових предикатів A та B: $A(a)=0,\ \ A(b)=1, B(b)=0.$ Значення $B(a)$ секвенція не визначає, тому воно можу бути довільним (позначаємо знаком *). Будуємо таблицю, що задає модель (інтерпретацію предикатних символів):

x	$A(x)$	$B(x)$
a	0	*
b	1	0

Обчислимо значення формули

$$(\forall xA(x)\to\exists xB(x))\to\forall x(A(x)\to B(x))$$

у цій моделі. Оскільки вільних змінних немає, то початковий стан змінних задається порожньою множиною. У наведеній формулі головною операцією є імплікація, тому обчислюємо значення: антецедента $-\forall xA(x)\to\exists xB(x)$; консеквентна – $\forall x(A(x)\to B(x))$ на початковому стані. Антецедент сформовано за допомогою імплікації, тому обчислюємо $\forall xA(x)$ та $\exists xB(x)$.

Бачимо, що в нашій моделі $\forall xA(x)$ набуває значення 0, відповідно $\forall xA(x)\to\exists xB(x)$ отримує значення 0 (тут значення консеквента не є важливим), отже, значення

$$(\forall xA(x)\to\exists xB(x))\to\ \forall x(A(x)\to B(x))\ =0,$$

тобто формула спростовна.

Аналогічно будують модель для незамкненої секвенції ${}_1B(y), {}_1A(z), {}_0B(z).$ Ця модель також задає контрприклад. ◄

3. Чи є всюди істинною формула $\exists x(A(x)\to B(x))\to(A(x)\to\exists xB(x))$?

► Зауважимо, що у формулі є вільна змінна x. Будуємо секвенційне виведення цієї формули (коментарі для правил виведення пишемо у фігурних дужках):

$$\dfrac{{}_0\exists x(A(x)\to B(x))\to(A(x)\to\exists xB(x))}{\dfrac{{}_1\exists x(A(x)\to B(x)),\ \ {}_0(A(x)\to\exists xB(x))^*}{\dfrac{{}_1\exists x(A(x)\to B(x))^*,\ \ {}_1A(x),\ \ {}_0\exists xB(x)}{{}_1A(y)\to B(y))^*,\ \ {}_1A(x),\ \ {}_0\exists xB(x))}}}.$$

$$\dfrac{{}_1A(y)\to B(y))^*,\ \ {}_1A(x),\ \ {}_0\exists xB(x))}{\dfrac{\begin{array}{c}{}_0A(y),\ \ {}_1A(x),\ \ {}_0\exists xB(x)^*\\ \{\text{тут вільні } x,y\}\end{array}}{\dfrac{\begin{array}{c}{}_0A(y),\ \ {}_1A(x),\ \ {}_0B(x), {}_0B(y),\\ {}_0\exists xB(x)\\ \{\text{тут вільні } x,y,z\}\end{array}}{!}}\qquad\dfrac{\begin{array}{c}{}_1B(y),\ \ {}_1A(x),\ \ {}_0\exists xB(x)^*\\ \{\text{тут вільні } x,y\}\end{array}}{\dfrac{{}_1B(y),\ \ {}_1A(x),\ \ {}_0\exists xB(x)^*}{\dfrac{\begin{array}{c}{}_1B(y)_\times,\ \ {}_1A(x),\ \ {}_0B(y)\ {}_\times,\\ {}_0B(x), {}_0\exists xB(x)\end{array}}{\times}}}}$$

У лівій секвенції ${}_0A(y),\ {}_1A(x),\ {}_0B(x), {}_0B(y),\ {}_0\exists xB(x)$ є неатомарна формула ${}_0\exists xB(x),$ але застосування правила ${}_0\exists$ не змінює секвенцію. Отже, секвенція не є замкненою. Щоб отримати контрприклад, будуємо модель із двома константами *a* та *b*, вважаючи їх відповідно значеннями *x* та *y*. Секвенція визначає значення базових предикатів *A* та *B*:

$$A(b)=0, A(a)=1,\ \ B(a)=0, B(b)=0.$$

Будуємо таблицю, яка задає модель (інтерпретацію предикатних символів):

z	$A(z)$	$B(z)$
a	1	0
b	0	0

Обчислимо значення формули

$$\exists x(A(x)\to B(x))\to(A(x)\to\exists xB(x))$$

у такій моделі, вважаючи *a* значенням *x*. У цій формулі головною операцією є імплікація, тому обчислюємо значення антецедента $\exists x(A(x)\to B(x))$ і консеквента. Головною операцією антецедента є квантор існування, тому обчислюємо формулу $A(x)\to B(x)$ за значень *x*, рівних *a* та *b*. Маємо, що

$$A(a)\to B(a)=0\ \text{ та }\ A(b)\to B(b)=1.$$

Отже, значення $\exists x(A(x)\to B(x))$ дорівнює 1.

Тепер обчислюємо консеквент

$$A(x)\to\exists xB(x).$$

Тут $A(x)$ отримує значення 1, а $\exists xB(x)$ – значення 0. Тому $A(x)\to\exists xB(x)$ матиме значення 0, як і вся формула в цілому. Таким чином, формула спростовна.

Зазначимо, що якби *A* не залежало від *x*, то формула $\exists x(A\to B(x))\to(A\to\exists xB(x))$ була б істинною. Дійсно,

$$\dfrac{{}_0\exists x(A\to B(x))\to(A\to\exists xB(x))}{\dfrac{{}_1\exists x(A\to B(x)),\ {}_0(A\to\exists xB(x))^*}{\dfrac{{}_1\exists x(A\to B(x))^*,\ {}_1A,\ {}_0\exists xB(x)}{\dfrac{{}_1A\to B(x)_*,\ {}_1A,\ {}_1\exists xB(x)}{\dfrac{{}_0A_\times,\ {}_1A_\times,\ {}_0\exists xB(x)}{\times}\qquad\dfrac{{}_1B(x),\ {}_1A,\ {}_0\exists xB(x)^*}{\dfrac{{}_1B(x)_\times,\ {}_1A,\ {}_0B(x)_\times,\ {}_0\exists xB(x)}{\times}}}}}}.$$

4. Чи є всюди істинною формула

$$\exists xA(x)\vee B(x)\to\exists x(A(x)\wedge B(x))?$$

► Будуємо секвенційне виведення:

$$\dfrac{{}_0\exists xA(x)\vee B(x)\to\exists x(A(x)\wedge B(x))}{\dfrac{{}_1\exists xA(x)\vee B(x)^*,\ {}_0\exists x(A(x)\wedge B(x))}{{}_1\exists xA(x),\ {}_0\exists x(A(x)\wedge B(x))\qquad {}_1B(x),\ {}_0\exists x(A(x)\wedge B(x))}}.$$

Тепер будуємо виведення для першої секвенції:

$$\dfrac{{}_1\exists xA(x)^*,\ {}_0\exists x(A(x)\wedge B(x))}{\dfrac{{}_1A(y),\ {}_0\exists x(A(x)\wedge B(x))_*}{\dfrac{{}_1A(y),\ {}_0A(y)\wedge B(y)^*\ {}_0\exists x(A(x)\wedge B(x))}{\dfrac{{}_1A(y)_\times,\ {}_0A(y)_\times,\ {}_0\exists x(A(x)\wedge B(x))}{\times}\qquad {}_1A(y),\ {}_0B(y),\ {}_0\exists x(A(x)\wedge B(x))}}}.$$

Залишилось побудувати виведення для другої секвенції:

$$\dfrac{{}_1A(y),\ {}_0B(y),\ {}_0\exists x(A(x)\wedge B(x))_*}{\dfrac{{}_1A(y),\ {}_0B(y),\ {}_0A(y)\wedge B(y)^*,\ {}_0\exists x(A(x)\wedge B(x))}{\dfrac{{}_1A(y)_\times,\ {}_0B(y),\ {}_0A(y)_\times,\ {}_0\exists x(A(x)\wedge B(x))}{\times}\qquad \dfrac{{}_1A(y),\ {}_0B(y),\ {}_0B(y),\ {}_0\exists x(A(x)\wedge B(x))}{!}}}.$$

Отримали незамкнену секвенцію, яка дозволяє побудувати таку модель:

z	$A(z)$	$B(z)$
a	1	0

На цій моделі початкова формула спростовна. ◄

5. Чи є всюди істинною наступна формула?

$$\exists y\forall xA(x,y)\to\forall x\exists yA(x,y).$$

► Будуємо секвенційне виведення:

$$\dfrac{{}_0\exists y\forall xA(x,y)\to\forall x\exists yA(x,y)}{\dfrac{{}_1\exists y\forall xA(x,y)^*,\ {}_0\forall x\exists yA(x,y)}{\dfrac{{}_1\forall xA(x,z),\ {}_0\forall x\exists yA(x,y)_*}{\dfrac{{}_1\forall xA(x,z)^*,\ {}_0\exists yA(t,y)}{\dfrac{{}_1\forall xA(x,z),\ {}_1A(z,z),\ {}_1A(t,z),\ {}_0\exists yA(t,y)^*}{\dfrac{{}_1\forall xA(x,z),\ {}_1A(z,z),\ {}_1A(t,z)_\times,\ {}_0A(t,z)_\times,\ {}_0A(t,t),\ {}_0\exists yA(t,y)^*}{\times}}}}}}.$$

Дерево виведення замкнене, тому формула є всюди істинною.

6. Чи є всюди істинною формула

$$\forall x\exists yA(x,y)\to\exists y\forall xA(x,y)?$$

Будуємо секвенційне виведення (використовуємо для введених змінних позначення як для констант: a, b, c, d, e, …):

$$\frac{{}_0\forall x\exists yA(x,y)\to\exists y\forall xA(x,y)}{{}_1\forall x\exists yA(x,y)^*,\ {}_0\exists y\forall xA(x,y)}.$$

$$\{\text{вільних змінних немає, вводимо } a\}$$

$$\overline{{}_1\forall x\exists yA(x,y),\ {}_1\exists yA(a,y)^*,\ {}_0\exists y\forall xA(x,y)}$$

$$\{\text{вводимо нову змінну } b\}$$

$$\overline{{}_1\forall x\exists yA(x,y),\ {}_1A(a,b),\ {}_0\exists y\forall xA(x,y)^*}$$

$$\{\text{підставляємо замість } y \text{ усі вільні змінні } -a,b\}$$

$$\overline{{}_1\forall x\exists yA(x,y),\ {}_1A(a,b),\ {}_0\exists y\forall xA(x,y),\ {}_0\forall xA(x,a)^*,\ {}_0\forall xA(x,b)}$$

$$\{\text{вводимо нову змінну } c\}$$

$$\overline{{}_1\forall x\exists yA(x,y),\ {}_1A(a,b),\ {}_0\exists y\forall xA(x,y),\ {}_0A(c,a),\ {}_0\forall xA(x,b)_*}$$

$$\overline{{}_1\forall x\exists yA(x,y)_*,\ {}_1A(a,b),\ {}_0\exists y\forall xA(x,y),\ {}_0A(c,a),\ {}_0A(d,b)}$$

$$\overline{{}_1\forall x\exists yA(x,y),\ {}_1\exists yA(b,y)_*,\ {}_1A(a,b),\ {}_0\exists y\forall xA(x,y),\ {}_0A(c,a),\ {}_0A(d,b)}$$

$$\{\text{вводимо нову змінну } e\}$$

$$\overline{{}_1\forall x\exists yA(x,y),\ {}_1A(b,e)_*,\ {}_1A(a,b),\ {}_0\exists y\forall xA(x,y),\ {}_0A(c,a),\ {}_0A(d,b)}$$

$$\ldots$$

Так можна побудувати нескінченний контрприклад. Зокрема, однією з можливих спростовних інтерпретацій є інтерпретація на натуральних числах, де $A(x, y)$ інтерпретують як $x < y$:

$$\forall x\exists y(x<y)\to\exists y\forall x(x<y).$$

Ця формула є спростовною.

Існує також скінченний контрприклад, коли $A(x, y)$ задається таблицею

A	a	b
a	**0**	**1**
b	**1**	**0**

Із двох останніх прикладів випливає, що при перестановці кванторів формули можуть бути не еквівалентними, тобто формула $\forall x\exists yA(x,y)\leftrightarrow\exists y\forall xA(x,y)$ не є всюди істинною. ◄

Зауваження. Можливі випадки, за яких процес побудови секвенції є нескінченним і контрприклад побудувати не вдається.

Завдання для самостійної роботи

Наведені задачі виконувати з використанням секвенційного числення для логіки предикатів.

1. Застосувати секвенційне числення для розв'язку завдань 1–6 із п. 1.8.

2. Чи є тотожно істинними формули?

(а) $(A(x) \to \forall xB(x)) \to (\forall xA(x) \to B(x))$;

(б) $(A(x) \to \exists xB(x)) \to \exists x(A(x) \to B(x))$;

(в) $(\exists xA(x) \to B(x)) \to (A(x) \to \exists xB(x))$;

(г) $(\exists xA(x) \to B(x)) \to (A(x) \to \exists xB(x))$;

(д) $(\forall xA(x) \to B(x)) \to (A(x) \to \forall xB(x))$;

(е) $\exists x(A(x) \to B(x)) \to (A(x) \to \forall xB(x))$;

(є) $(A(x) \to \forall xB(x)) \to \exists x(A(x) \to B(x))$;

(ж) $\exists xA(x) \wedge B(x) \to \exists x(A(x) \wedge B(x))$;

(з) $\exists xA(x) \wedge B(x) \to \forall x(A(x) \wedge B(x))$;

(и) $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \to \exists xA(x) \wedge B(x)$;

(і) $\exists xA(x) \vee B(x) \to \exists x(A(x) \vee B(x))$;

(ї) $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \to \exists xA(x) \vee B(x)$;

(й) $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \to \exists xA(x) \wedge B(x)$;

(к) $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \to \exists xA(x) \wedge B(x)$;

(л) $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \to \exists xA(x) \wedge B(x)$;

(м) $A(x) \wedge \forall xB(x) \to \forall x(A(x) \vee B(x))$.

5. Довести рівносильності:

(а) $\neg \forall xA(x) \sim \exists x \neg A(x)$; (б) $\forall x \forall yA(x, y) \sim \forall y \forall xA(x, y)$;

(в) $\exists x \exists yA(x, y) \sim \exists y \exists xA(x, y)$;

(г) $\exists x(A(x) \vee B(x)) \sim \exists xA(x) \vee \exists xB(x)$;

(д) $\forall x(A(x) \wedge B(x)) \sim \forall xA(x) \wedge \forall xB(x)$.

Розділ 2
МНОЖИНИ ТА ВІДНОШЕННЯ

Основи теорії множин було закладено відомим німецьким математиком Георгом Кантором у другій половині XIX ст. Появу цієї теорії з ентузіазмом сприйняли багато авторитетних математиків. Вони побачили в ній засоби створення метамови математики, тобто формальної універсальної системи понять і принципів, за допомогою якої можна було б викласти з єдиних позицій зміст різноманітних традиційно далеких один від одного розділів математики. Перші такі досить успішні спроби було зроблено незабаром після виникнення канторівської теорії множин.

Однак пізніші дослідники виявили в теорії Кантора чимало суперечностей – **парадоксів**, або **антиномій**, теорії множин. Виникла кризова ситуація. Одні математики, посилаючись на штучність сформульованих антиномій, вважали за краще не помічати суперечності або не надавати їм великого значення. Інші – зосередили зусилля на пошуках більш обґрунтованих і точних принципів і концепцій, на яких можна було б побудувати несуперечливу теорію множин.

У результаті було запропоновано кілька формальних (або аксіоматичних) систем, що стали фундаментом сучасної теорії множин, отже, і всієї класичної математики. Важливість цих досліджень підкреслює і той факт, що значний внесок до становлення аксіоматичної теорії множин зробили такі видатні математики й мислителі минулого століття, як Б. Рассел, Д. Гільберт, К. Гедель та ін.

Сьогодні теорія множин – це математична теорія, на якій ґрунтується більшість розділів сучасної математики, як неперервної, так і дискретної.

2.1. Поняття множини. Способи задання множин

Для наших цілей достатньо викласти основи **інтуїтивної**, або **наївної**, теорії множин, яка в головних своїх положеннях зберігає ідеї й результати її засновника Г. Кантора.

В інтуїтивній теорії множин поняття **множина** належить до первинних понять, тобто його не можна безпосередньо означити через інші простіші терміни чи об'єкти. Тому такі поняття зазвичай пояснюють на прикладах, апелюючи до уяви та інтуїції. Такими поняттями в математиці є також *число*, *пряма*, *точка*, *площина* тощо. Водночас треба зазначити, що відсутність строгих означень зовсім не означає, що не можна будувати строгі обмежені моделі цих понять. Такі означення роблять через опис зв'язків з іншими поняттями.

Канторівський вираз: *Множина – це об'єднання в єдине ціле певних об'єктів, які чітко розрізняються нашою інтуїцією чи нашою думкою*, – безумовно не можна вважати строгим математичним означенням. Це, скоріше, пояснення поняття множини, яке заміняє термін *множина* на термін *об'єднання*. Іншими синонімами основного слова *множина* є *сукупність*, *набір*, *колекція* тощо. Прикладами множин можуть бути: множина десяткових цифр, множина літер українського алфавіту, множина мешканців Києва, множина парних чисел, множина розв'язків якогось рівняння тощо.

На письмі множини позначають зазвичай великими літерами. Для деяких множин у математиці використовують сталі позначення. Наприклад, Z – множина цілих чисел, N – множина натуральних чисел, Q – множина раціональних чисел, R – множина дійсних чисел тощо.

Об'єкти, з яких складається задана множина, називаються її **елементами**. Елементи множин позначатимемо малими літерами латинського алфавіту. Той факт, що об'єкт a є елементом множини M, записують так: $a \in M$ (читають: *a належить множині M* або *a – елемент множини M*). **Знак належності** елемента множині $\in$ є стилізацією першої літери грецького слова εστι (бути). Те, що елемент a не належить множині M, позначають так: $a \notin M$ або $a \overline{\in} M$.

Запис $a, b, c, \ldots \in M$ використовують для скорочення запису $a \in M, b \in M, c \in M, \ldots$.

Множину називають **скінченною**, якщо кількість її елементів скінченна, тобто існує натуральне число k, що є кількістю елементів цієї множини; інакше множина є **нескінченною**. Кількість елементів скінченної множини A традиційно позначають через $|A|$.

Для **задання множини**, утвореної із будь-яких елементів, використовуватимемо два способи. В основі обох лежить позначення множини за допомогою фігурних дужок.

1. Якщо $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – деякі об'єкти, то множину цих об'єктів позначають як $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, де у фігурних дужках міститься перелік усіх елементів відповідної множини. Так можна задавати лише скінченні множини. Порядок запису елементів множини в такому позначенні неістотний.

Приклад 2.1. Множину всіх десяткових цифр записують як $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, множину основних арифметичних операцій – як $\{+, -, \times, /\}$, а множину розв'язків нерівності – як $(x-1)^2 \leq 0$ – $\{1\}$. ◄

Зазначимо, що одна з основних ідей канторівської теорії множин – розгляд множини як нового самостійного об'єкта математичного дослідження. Тому потрібно розрізняти такі два різні об'єкти, як елемент a та множина $\{a\}$, яка складається з єдиного елемента a. Зокрема, множини можуть бути елементами якоїсь іншої множини. Наприклад, множина

$$D = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$

усіх можливих пар з елементів a, b, c складається із трьох елементів, її задано цілком коректно.

2. Другий спосіб задання множин ґрунтується на зазначенні загальної властивості або породжувальної процедури для всіх об'єктів, що утворюють описувану множину.

У загальному випадку задання множини M має вигляд

$$M = \{a \mid P(a)\}.$$

M – це множина всіх тих і тільки тих елементів a,
для яких виконується умова P.

Через $P(a)$ позначено або властивість, яку мають елементи множини M, або деяку породжувальну процедуру, що описує спосіб отримання елементів множини M з уже відомих її елементів чи інших об'єктів. Замість вертикальної риски іноді пишуть двокрапку.

Приклад 2.2.

1. Множину всіх непарних цілих чисел можна задати так: $S = \{n \mid n$ – непарне ціле число$\}$ або $S = \{n \mid n = 2k + 1,\ k \in Z\}$. Множина $F = \{f_i \mid f_{i+2} = f_{i+1} + f_i,\ i \in N,\ f_1 = f_2 = 1\}$ – це множина чисел Фібоначчі.

2. З яких елементів складається множина

$$B = \{y \mid y = x + z, x, z \in A\},$$

якщо $A = \{1, 2, 3\}$?

$B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. ◄

Другий спосіб задання множин загальніший. Наприклад, уведену вище множину D усіх пар з елементів a, b, c можна задати так:

$$D = \{\{x, y\} \mid x \in \{a, b, c\}, y \in \{a, b, c\} \text{ та } x \neq y\}.$$

Дві множини A та B називають **рівними** (записують $A = B$), якщо вони складаються з тих самих елементів.

Приклад 2.3.

1. Які з наведених співвідношень є правильними?

(а) $\{1, 2, 3\} = \{1, 2, 2, 3\}$; (б) $\{1, 2, 3\} = \{1, \{2\}, 3\}$;
(в) $\{1, 2, 3\} = \{1, 3, 2\}$; (г) $\{1, 2, 3\} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$.

(а) та (б) – правильні.

2. Які з наведених співвідношень є правильними?

(а) $1 \in \{1, 2, 3\}$; (б) $1 \in \{\{1, 2, 3\}\}$;
(в) $1 \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$; (г) $\{1\} \in \{1, 2, 3\}$;
(д) $\{1\} \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$; (е) $\{1, 2\} \in \{1, 2, 3\}$;
(є) $\{1, 2\} \in \{1, 2\}$; (ж) $\{1, 2\} \in \{\{1, 2\}\}$;
(з) $\{1, 2\} \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$; (и) $\{1, 2\} \in \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$;
(і) $a \in \{a\}$; (ї) $a \in \{\{a\}\}$.

(а), (д), (ж), (и), (і) – правильні. ◄

Для зручності та однорідності виконання математичних викладок уводять поняття множини, яка не містить жодного елемента. Таку множину називають **порожньою множиною** і позначають $\varnothing$. Наприклад, якщо досліджують множину об'єктів, які мають задовольняти певні властивості, і з'ясовують, що таких об'єктів не існує, то зручніше сказати, що шукана множина порожня, ніж оголосити її неіснуючою. Порожню множину можна позначати за допомогою будь-якої суперечливої властивості, наприклад $\varnothing = \{ x \mid x \neq x\}$ тощо. Водночас твердженням *множина М – непорожня* можна замінювати рівносильне йому твердження *існують елементи, що належать множині М*.

Приклад 2.4.

1. Які з наведених співвідношень є правильними?

(а) $\varnothing = \{0\}$; (б) $\varnothing = \{\ \}$; (в) $\varnothing = \{\{\ \}\}$;
(г) $\{1, \varnothing\} = \{1\}$; (д) $|\varnothing| = 0$; (е) $|\{\varnothing\}| = 0$;

(є) $|\{\varnothing\}| = 1$; (ж) $|\{\{\varnothing\}\}| = 2$; (з) $|\{\varnothing, \{\varnothing\}\}| = 2$;
(и) $|\{\varnothing, 1\}| = 1$; (і) $|\{\{\varnothing\}, \{\varnothing, 1\}\}| = 3$; (ї) $|\{\varnothing, \{1, 2\}\}| = 3$.

(б), (д), (є), (з) – правильні.

2. Які з наведених співвідношень є правильними?

(а) $0 \in \varnothing$; (б) $\{\varnothing\} \in \{\varnothing\}$; (в) $\{\{\varnothing\}\} \in \{\{\{\varnothing\}\}\}$;
(г) $\varnothing \in \varnothing$; (д) $\varnothing \in \{1\}$; (е) $\{\varnothing\} \in \{\varnothing, \{1\}\}$;
(є) $\varnothing \in \{\varnothing\}$; (ж) $\varnothing \in \{\{\varnothing\}\}$; (з) $\varnothing \in \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

(в), (є), (з) – правильні. ◄

2.2. Підмножини

Дві множини A та B називають **рівними** (записують $A = B$), якщо вони складаються з однакових елементів.

Множина A називається **підмножиною** множини B (записують $A \subseteq B$ або $B \supseteq A$) тоді й тільки тоді, коли кожний елемент множини A належить також множині B. Кажуть також, що множина A міститься в множині B. Знаки $\subseteq$ і $\supseteq$ називають **знаками включення.**

Неважко переконатись, що $A = B$ тоді й тільки тоді, коли одночасно виконуються два включення: $A \subseteq B$ і $B \subseteq A$. Крім того, якщо $A \subseteq B$ і $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$. Останні два факти часто використовують у доведеннях тверджень про рівність двох заданих множин.

Якщо $A \subseteq B$, але $A \neq B$, то пишуть $A \subset B$ і називають множину A **власною** (**строгою**, **істинною**) **підмножиною** множини B. Знак $\subset$ (або $\supset$), на відміну від знака $\subseteq$ (або $\supseteq$), називають **знаком строгого включення**.

Очевидно, що для будь-якої множини A виконується включення $A \subseteq A$. Крім того, вважають, що порожня множина є підмножиною будь-якої множини A, тобто $\varnothing \subseteq A$ (зокрема $\varnothing \subseteq \varnothing$).

Слід чітко розуміти різницю між знаками $\in$ та $\subseteq$ і не плутати ситуації їх використання. Якщо $\{a\} \subseteq M$, то $a \in M$, і навпаки. Однак із включення $\{a\} \subseteq M$ не випливає $\{a\} \in M$. Для будь-якого об'єкта x виконується $x \notin \varnothing$. Наприклад, для множини D (2.1) та її елементів виконуються такі співвідношення:

$\{a, b\} \in D$, $\{\{a, b\}, \{b, c\}\} \subseteq D$, $a \in \{a, b\}$, $\{c\} \notin \{a, c\}$, $\{a\} \subseteq \{a, b\}$.

Приклад 2.5.

1. Які з наведених співвідношень є правильними?

(а) $1 \subseteq \{1, 2, 3\}$; (б) $1 \subseteq \{\{1, 2, 3\}\}$;
(в) $\{1\} \subseteq \{1, 2, 3\}$; (г) $\{a\} \subseteq \{a, b\}$;
(д) $\varnothing \subseteq \{1, 2, 3\}$; (е) $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$;
(є) $\{1\} \subseteq \{\{1\}, \{2, 3\}\}$; (ж) $\{1, 2\} \subseteq \{\{1\}, 1, 2, 3\}$;
з) $\{1, 2\} \subseteq \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$.

(в), (г), (е), (ж), (з) – правильні.

2. Нехай $A = \{1, 2, \{1\}\}$. Які з наведених співвідношень є правильними?

(а) $1 \in A$; (б) $\{1\} \in A$; (в) $\{\{1\}\} \in A$;
(г) $\{1\} \subseteq A$; (д) $\{\{1\}\} \subseteq A$; (е) $\{2\} \in A$;
(є) $\{2\} \subseteq A$; (ж) $\{\{2\}\} \subseteq A$; (з) $\{1, 2\} \in A$;
(и) $\{1, 2\} \subseteq A$; (і) $\varnothing \in A$; (ї) $\varnothing \subseteq A$;
(й) $\{\varnothing\} \in A$; (к) $\{\varnothing\} \subseteq A$; (л) $\{\varnothing, 1\} \subseteq A$.

(а), (б), (г), (д), (є), (и), (ї) – правильні.

3. Нехай $A = \{\varnothing, 1, \{1\}, \{2\}\}$. Які зі співвідношень попередньої задачі є правильними?

(а), (б), (г), (д), (е), (ж), (і), (ї), (к), (л) – правильні.

4. Які з наведених співвідношень є правильними:

(а) $\varnothing \subseteq \varnothing$; (б) $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$; (в) $\{\varnothing\} \subseteq \varnothing$;
(г) $\{\varnothing\} \subseteq \{\{\varnothing\}\}$; (д) $\varnothing \subseteq \{1\}$; (е) $\{\varnothing\} \subseteq \{\varnothing\}$;
(є) $\{\{\varnothing\}\} \subseteq \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$; (ж) $\{\{\varnothing\}\} \subseteq \{\varnothing\}$

(а), (б), (д), (е), (є) – правильні.

5. Які з наведених тверджень правильні:

(а) якщо $A \in B$ і $B \in C$, то $A \in C$;

(б) якщо $A \in B$ і $B \subseteq C$, то $A \in C$;

(в) якщо $A \subseteq B$ і $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$;

(г) якщо $A \subseteq B$ і $B \in C$, то $A \subseteq C$?

У тих випадках, коли твердження неправильне, разом із контрприкладами побудуйте окремі приклади, для яких воно виконується.

Тільки б, в – правильні.

(а) Контрприклад:

$$\text{для } A = \{1\},\ B = \{\{1\}, 2\},\ C = \{\{\{1\}, 2\}, 3\}$$

твердження хибне.

Приклад, коли твердження виконується:

$$A = \{1\}, B = \{\{1\}, 2\}, C = \{\{\{1\}, 2\}, \{1\}\}.$$

(г) Контрприклад: для

$$A = \{1\}, B = \{1, 2\}, C = \{\{1, 2\}, 3\}$$

твердження хибне.

Приклад, коли твердження виконується:

$$A = \{1\}, B = \{1, 2\}, C = \{\{1, 2\}, 1\}.$$

6. Чи є наведене твердження правильним: якщо $A \notin B$ і $B \notin C$, то $A \notin C$?

Ні. Контрприклад: для $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $C = \{\{1\}, 3\}$ це твердження хибне. ◄

Множину всіх підмножин множини A (скінченної чи нескінченної) називають **булеаном** множини A та позначають $\beta(A)$.

Для булеана множини A використовують також інші позначення: 2^A, $P(A)$, $B(A)$ або $\mathrm{M}(A)$.

Наприклад, для множини $A = \{a, b\}$ маємо

$$\beta(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}.$$

Приклад 2.6.

1. Для заданої множини A побудувати множину всіх підмножин множини A, тобто її булеан $\beta(A)$.

(а) $A = \{1, 2, 3\}$; (б) $A = \{\varnothing\}$; (в) $A = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

► (а) $\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$;

(б) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$; (в) $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$. ◄

2. Визначити множину $\beta(\beta(\{1, 2\}))$.

► $\beta(\beta(\{1, 2\})) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{1\}\}, \{\{2\}\}, \{\{1, 2\}\}, \{\varnothing, \{1\}\}, \{\varnothing, \{2\}\}, \{\varnothing, \{1, 2\}\}, \{\{1\}, \{2\}\}, \{\{1\}, \{1, 2\}\}, \{\{2\}, \{1, 2\}\}, \{\varnothing, \{1\}, \{2\}\}, \{\varnothing, \{1\}, \{1, 2\}\}, \{\varnothing, \{2\}, \{1, 2\}\}, \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}, \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}\}$. ◄

Завдання для самостійної роботи

1. Які з наведених співвідношень правильні?

(а) $\{2, 1, 3\} = \{1, 1, 2, 2, 3\}$; (б) $\{1, 2, \{3\}\} = \{1, \{2\}, \{3\}\}$;
(в) $\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1, 2\}$; (г) $\{1, 2, 3\} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}$.

2. Із яких елементів складається множина B, якщо $A = \{1, 2, 3\}$?

(а) $B = \{ y \mid y = x + z, x, z \in A\}$; (б) $B = \{ y \mid x = y + z, x, z \in A\}$;
(в) $B = \{ y \mid y = x\,z, x, z \in A\}$.

3. Які з наведених співвідношень правильні?

(а) $\varnothing = \{0\}$; (б) $\varnothing = \{\ \}$; (в) $\{2, \varnothing\} = \{2\}$;

(г) $|\varnothing| = 0$; (д) $|\{\varnothing\}| = 0$; (е) $|\{\varnothing\}| = 1$;

(є) $|\{\{\varnothing, \varnothing\}\}| = 2$; (ж) $|\{\varnothing, \{\varnothing\}\}| = 2$.

4. Які з наведених співвідношень правильні?

(а) $2 \in \{1, 2, 3\}$; (б) $2 \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$;

(в) $\{2\} \in \{1, 2, 3\}$; (г) $\{2\} \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$;

(д) $\{1, 3\} \in \{1, 2, 3\}$; (е) $\{1, 3\} \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$;

(є) $a \in \{a\}$; (ж) $\{2, 3\} \in \{2, 3\}$;

(з) $\{1, 3\} \in \{\{1, 3\}\}$.

5. Які з наведених співвідношень правильні:

(а) $0 \in \varnothing$; (б) $\varnothing \in \varnothing$; (в) $\varnothing \in \{\varnothing, 1\}$; (г) $\varnothing \in \{\varnothing\}$;

(д) $\varnothing \in \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$; (е) $\{\varnothing\} \in \{\{\{\varnothing\}\}\}$?

6. Які з наведених співвідношень правильні?

(а) $2 \subseteq \{1, 2, 3\}$; (б) $\{2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$;

(в) $\{1, 1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$; (г) $\{1\} \subseteq \{\{1\}, \{1, 2, 3\}\}$;

(д) $\{1, 2, 3\} \subseteq \{\{1\}, \{1, 2\}, \{3\}\}$; (е) $\varnothing \subseteq \{1, 2, 3\}$.

7. Нехай $A = \{1, 2, \{2\}\}$. Які з наведених співвідношень правильні?

(а) $2 \in A$; (б) $\{2\} \in A$; (в) $\{\{1\}\} \in A$; (г) $\{1\} \subseteq A$;

(д) $\{\{1\}\} \subseteq A$; (е) $\{1\} \in A$; (є) $\{2\} \subseteq A$; (ж) $\{\{1\}\} \subseteq A$;

(з) $\{1, 2\} \in A$; (и) $\{1, 2\} \subseteq A$; (й) $\{\varnothing\} \in A$; (і) $\varnothing \in A$;

(ї) $\varnothing \subseteq A$; (к) $\{\varnothing\} \subseteq A$; (л) $\{\varnothing, 2\} \subseteq A$; (м) $\{\varnothing, \{2\}\} \subseteq A$

8. Які з наведених співвідношень правильні?

(а) $\varnothing \subseteq \varnothing$; (б) $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$; (в) $\{\varnothing\} \subseteq \varnothing$;

(г) $\{\varnothing\} \subseteq \{\{\varnothing\}\}$; (д) $\varnothing \subseteq \{1\}$; (е) $\{\varnothing\} \subseteq \{\varnothing\}$;

(є) $\{\{\varnothing\}\} \subseteq \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$; (ж) $\{\{\varnothing\}\} \subseteq \{\varnothing\}$; (з) $\{\{\varnothing\}\} \subseteq \{\{\{\varnothing\}\}\}$.

9. Чи існує така одноелементна множина B, що для деякої множини A одночасно виконуються співвідношення $A \in B$ і $A \subseteq B$?

10. Для множини A побудувати множину всіх її підмножин, тобто булеан $\beta(A)$:

(а) $A = \{2, 3, 4\}$; (б) $A = \{\varnothing, 1\}$;

(в) $A = \{1, \{1\}, \{1, 2\}\}$; (г) $A = \{\varnothing, \{2, 3\}\}$.

11. Визначити множину: (а) $\beta(\beta(\{2, 3\}))$; (б) $\beta(\beta(\beta(\varnothing)))$.

2.3. Операції над множинами та їхні властивості

Для множин можна ввести низку операцій (теоретико-множинних), результатом виконання яких також є множини. За допомогою цих операцій можна конструювати нові множини із заданих.

Нехай A та B – якісь множини.

Об'єднанням множин A та B (позначають $A \cup B$) називають множину тих елементів, які належать принаймні одній із множин A чи B. Символічно операцію об'єднання множин записують так:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ або } x \in B\}, \text{ чи } x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B).$$

Приклад 2.7. $\{a, b\} \cup \{c, d,\} = \{a, b, c, d,\}$, $\{a, c\} \cup \varnothing = \{a, c\}$, $\{a, b, c\} \cup \{a, c, d, e\} = \{a, b, c, d, e\}$. ◄

Перетином множин A та B (позначчють $A \cap B$) називають множину, що складається із тих і тільки тих елементів, які належать множинам A та B одночасно, тобто

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ та } x \in B\}, \text{ або } x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B).$$

Приклад 2.8. $\{a, b, c\} \cap \{a, c, d, e\} = \{a, c\}$, $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \varnothing$. ◄

Кажуть, що множини A та B **не перетинаються**, якщо $A \cap B = \varnothing$.

Різницею множин A та B (позначають $A \setminus B$) називають множину тих елементів, які належать множині A та не належать множині B. Отже,

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ та } x \notin B\}, \text{ або } x \in A \setminus B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge \neg (x \in B).$$

Приклад 2.9. $\{b, c\} \setminus \{a, d, c\} = \{b\}$, $\{a, c, d, e\} \setminus \{a, b, c\} = \{d, e\}$, $\{a, b\} \setminus \varnothing = \{a, b\}$, $\{a, b\} \setminus \{a, b, c, d\} = \varnothing$. ◄

Симетричною різницею множин A та B (позначають $A \Delta B$, $A \oplus B$ або $A \div B$) називають множину, що складається зі всіх елементів множини A, які не містяться у B, а також усіх елементів множини B, які не містяться в A, тобто

$$A \Delta B = \{x \mid (x \in A \text{ та } x \notin B \text{), або (} x \in B \text{ та } x \notin A)\}, \text{ або}$$

$$x \in A \Delta B \Leftrightarrow ((x \in A) \wedge \neg (x \in B))(\neg (x \in A) \wedge (x \in B)).$$

Приклад 2.10.

1. $\{a, b, c\} \Delta \{a, c, d, e\} = \{b, d, e\}$, $\{a, b\} \Delta \{a, b\} = \varnothing$, $\{a, b\} \Delta \varnothing = \{a, b\}$.

2. Нехай $A = \{1, 3, 5, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ і $C = \{2, 4, 7\}$. Обчислити:

(а) $A \cup B$; (б) $(A \cup C) \setminus B$; (в) $A \cap B \cap C$;
(г) $(A \setminus C) \cup (B \setminus A)$; (д) $A \Delta B$; (е) $(B \setminus C) \cap (A \setminus B)$.

► (а) $\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$; (б) $\{4, 6\}$; (в) $\varnothing$;
(г) $\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$; (д) $\{2, 6, 7\}$; (е) $\varnothing$. ◄

Уведені теоретико-множинні операції можна проілюструвати **діаграмою Венна** (або **діаграмою Ейлера**) (рис. 2.1).

Тут A та B – множини точок двох кругів. Тоді множина $A \cup B$ складається із точок областей **I**, **II**, **III**, $A \cap B$ – область **II**, $A \setminus B$ – область **I**, $B \setminus A$ – область **III**, $A \Delta B$ складається із точок областей **I** та **III**.

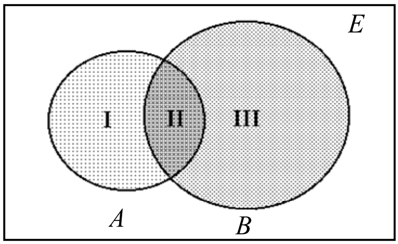


Рис. 2.1

У конкретній математичній теорії буває зручно вважати, що всі розглядувані множини є підмножинами деякої фіксованої множини, яку називають **універсальною множиною**, або **універсумом**, і позначають через E (або U). Наприклад, в елементарній алгебрі такою універсальною множиною можна вважати множину дійсних чисел R, у вищій алгебрі – множину комплексних чисел C, в арифметиці – множину цілих чисел Z, у традиційній планіметрії – множину всіх точок площини або множину всіх геометричних об'єктів, тобто множину множин точок на площині тощо.

Якщо зафіксовано універсальну множину E, то **доповненням** множини A (воно є підмножиною універсальної множини E й позначається $\overline{A}$) називають множину всіх елементів універсальної множини, що не належать множині A, тобто

$$\overline{A} = \{x \mid x \in E \text{ та } x \notin A\}, \text{ або } x \in \overline{A} \Leftrightarrow \neg (x \in A).$$

Зауважимо, що $\overline{A} = E \setminus A$.

Приклад 2.11.

1. Якщо за універсальну множину взяти множину N усіх натуральних чисел, то доповненням $\overline{P}$ множини P усіх парних натуральних чисел буде множина всіх непарних натуральних чисел.

2. Нехай $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{2, 3, 6\}$, $B = \{1, 4, 6, 7\}$ і $C = \{1, 2, 3, 6\}$. Обчислити:

(а) $\overline{A}$; (б) $\overline{B \cup C}$; (в) $A \cap \overline{C}$;

(г) $\overline{(A \cup C)} \cup (\overline{(A \cup B)}$; (д) $\overline{(A \cap \overline{B})} \cup B$; (е) $(C \setminus B) \cap (A \setminus \overline{C})$.

► (а) $\{1, 4, 5, 7\}$; (б) $\{5\}$; (в) $\varnothing$;
(г) $\{4, 5, 7\}$; (д) $\{1, 4, 5, 6, 7\}$; (е) $\{2, 3\}$. ◄

Зазначимо у вигляді тотожностей **основні властивості** введених вище **теоретико-множинних операцій**:

1. Асоціативність:
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

2. Комутативність: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$.

3. Дистрибутивність:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C). \tag{2.1}$$

4. Ідемпотентність: $A \cup A = A$; $A \cap A = A$.

5. Інволютивність: $\overline{\overline{A}} = A$.

6. Правила (закони) де Моргана:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}; \ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Наведемо також інші корисні **теоретико-множинні тотожності:**

$$A \cup \varnothing = A, A \cap \varnothing = \varnothing; A \cup E = E, \qquad A \cap E = A;$$
$$A \cup \overline{A} = E, A \cap \overline{A} = \varnothing; \ \overline{E} = \varnothing, \ \overline{\varnothing} = E. \tag{2.2}$$

Окремо запишемо **властивості операції симетричної різниці**:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus A \cap B) = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B),$$

$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ – **асоціативність,**

$A \Delta B = B \Delta A$ – **комутативність,**

$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$ – **дистрибутивність перетину**),

$A \Delta A \varnothing, A \Delta E = \overline{A}, \ A \Delta \varnothing = A.$

Приклад 2.12. Покажемо істинність однієї із наведених тотожностей – правила де Моргана $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Як зазначалось, рівність двох множин $A = B$ має місце тоді й тільки тоді, коли одночасно виконуються два включення:

$$A \subseteq B \text{ і } B \subseteq A.$$

Для доведення теоретико-множинного включення однієї множини в іншу слід розглянути довільний елемент першої множини і шляхом коректних міркувань обґрунтувати, що цей елемент належить також другій із цих множин.

Побудуємо такий ланцюжок логічних міркувань (за кожним знаком $\Rightarrow$ або $\Leftrightarrow$ записано відповідне пояснення):

$x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow$ – **за означенням доповнення множини**;

$\neg(x \in A \cup B) \Leftrightarrow$ – **за означенням об'єднання множин**;

$\neg((x \in A) \vee (x \in B)) \Leftrightarrow$ – **за законом де Моргана**, див. п. 1.3;

$\neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B) \Leftrightarrow$ – **за означенням доповнення множини**;

$x \in \overline{A} \wedge x \in \overline{B} \Leftrightarrow$ – **за означенням перетину множин** $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$.

Усі кроки описаних вище міркувань були рівносильними. Це означає, що із твердження $x \in \overline{A \cup B}$ випливає $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$, і навпаки. Отже, обґрунтовано обидва включення:

$$\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B} \text{ і } \overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}. \blacktriangleleft$$

Аналогічно можна довести всі інші наведені теоретико-множинні тотожності.

Ці тотожності дають змогу спрощувати різні складні вирази над множинами.

Приклад 2.13. Послідовно застосовуючи тотожності із (2.1) і (2.2), маємо:

$$(A \cap B \cap C \cap \overline{D}) \cup (\overline{A} \cap C) \cup (\overline{B} \cap C) \cup (C \cap D) =$$
$$= (A \cap B \cap C \cap \overline{D}) \cup ((\overline{A} \cup \overline{B} \cup D) \cap C) =$$
$$= ((A \cap B \cap \overline{D}) \cup (\overline{A \cap B \cap \overline{D}})) \cap C = E \cap C = C. \blacktriangleleft$$

Ще одним методом доведення теоретико-множинних співвідношень (рівностей або включень) є **метод логічних таблиць.**

Значення твердження, що об'єкт є елементом множини M (тобто $x \in M$), позначатимемо символом 1. В іншому разі, якщо $x \notin M$, писатимемо 0.

Приклад 2.14.

1. Доведемо методом логічних таблиць теоретико-множинну рівність $A \setminus (B \,\Delta\, C) = (A \setminus \overline{B}) \,\Delta\, (A \setminus C)$.

За допомогою індексів занумеруємо порядок виконання операцій у лівій та правій частинах, як це було зроблено у прикладах 1.5 та 1.6. Матимемо $A \setminus_2 (B \Delta_1 C) = (A \setminus_1 \overline{B}) \Delta_3 (A \setminus_2 C)$.

Як і раніше, запис (k) у таблиці позначатиме результат операції з номером k.

Будуємо відповідні логічні таблиці:

$x\in A$	$x\in B$	$x\in C$	**Ліва частина**		**Права частина**		
			$x\in(1)$	$x\in(2)$	$x\in(1)$	$x\in(2)$	$x\in(3)$
0	0	0	0	**0**	1	0	**0**
0	0	1	1	**0**	1	0	**0**
0	1	0	1	**0**	0	0	**0**
0	1	1	0	**0**	0	0	**0**
1	0	0	0	**1**	1	0	**1**
1	0	1	1	**0**	1	0	**0**
1	1	0	1	**0**	0	1	**0**
1	1	1	0	**1**	0	1	**1**

Правило заповнення таблиць розглянемо для випадку

$$(x\in A) \wedge (x\notin B) \wedge (x\in C).$$

За таких умов виконується $x\in B \Delta C$ (у таблиці цей факт позначено $x\in(1)$). Тоді зі співвідношень $x\in A$ та $x\in B \Delta C$ випливає, що $x\notin A \setminus (B \Delta C)$, тобто x не є елементом множини в лівій частині.

За тих самих умов у правій частині матимемо послідовно: $x\in \overline{B}$ (оскільки $x\notin B$), $x\notin A \setminus \overline{B}$ (оскільки $x\in A$ та $x\in \overline{B}$), $x\notin A \setminus C$) (оскільки $x\in A$ та $x\in C$) і, нарешті, $x\notin(A \setminus \overline{B}) \Delta (A \setminus C)$ (оскільки $x\notin A \setminus \overline{B}$ та $x\notin A \setminus C$).

Повний збіг значень в останніх (виділених) стовпцях таблиць, що відповідають лівій і правій частинам даної теоретико-множинної рівності, свідчить, що ця рівність справджується.

2. Для доведення теоретико-множинного включення (напр., $M1 \subseteq M2$) за допомогою методу логічних таблиць аналогічно попередньому прикладу будуємо логічні таблиці для множин $M1$ та $M2$. Включення справджується, якщо в будь-якому рядку цих двох таблиць імплікація значення, що відповідає множині $M1$, і значення, що відповідає $M2$, є істинною (тобто твердження $\forall x((x\in M1) \to (x\in M2))$ – істинне).

Побудуємо відповідні логічні таблиці для доведення такого теоретико-множинного включення: $A \setminus (B \cup C) \subseteq (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Маємо $A \setminus_2 (B \cup_1 C) \subseteq (A \setminus_1 B) \cup_3 (A \setminus_2 C)$.

Імплікації виділених значень у всіх рядках таблиці є істинними, тому включення справджується.

Аналіз отриманих логічних таблиць свідчить також, що в наведеному співвідношенні знак включення $\subseteq$ не можна замінити на знак рівності. Наприклад, для випадку $(x \in A) \wedge (x \notin B) \wedge (x \in C)$ (відповідний рядок таблиці – (1,0,1)) такий об'єкт x є елементом правої множини, однак він не належить лівій множині. ◄

$x \in A$	$x \in B$	$x \in C$	**Ліва частина**		**Права частина**		
			$x \in (1)$	$x \in (2)$	$x \in (1)$	$x \in (2)$	$x \in (3)$
0	0	0	0	**0**	0	0	**0**
0	0	1	1	**0**	0	0	**0**
0	1	0	1	**0**	0	0	**0**
0	1	1	1	**0**	0	0	**0**
1	0	0	0	**1**	1	1	**1**
1	0	1	1	**0**	1	0	**1**
1	1	0	1	**0**	0	1	**1**
1	1	1	1	**0**	0	0	**0**

3. Перевірити (довести чи спростувати) правильність такого твердження:

(а) якщо $A \cap B \subseteq \overline{C}$ і $A \cup C \subseteq B$, то $A \subseteq \overline{C}$;

(б) $A \cap B \subseteq C$ тоді й тільки тоді, коли $A \subseteq \overline{B} \cup C$;

(в) якщо $A \cap B \subseteq C$, то $A \subseteq C$ і $B \subseteq C$.

(а) Позначимо елементарні твердження $x \in A$, $x \in B$ та $x \in C$ через a, b, c, відповідно. Тоді перевірка правильності сформульованого твердження зводиться до з'ясування коректності такого логічного висновку: $(a \wedge b) \to (\neg c), (a \vee c) \to b \vdash a \to (\neg c)$.

Тобто слід визначити, чи є тавтологією формула

$$((a \wedge b) \to (\neg c)) \wedge ((a \vee c) \to b) \to (a \to (\neg c)).$$

Побудовою таблиці істинності або методом відшукання контрприкладу переконуємось, що остання формула є тавтологією. Отже, твердження правильне.

(б) Використаємо ті самі елементарні твердження, що й у попередньому пункті. Відповідна до наведеного твердження формула

$$((a \wedge b) \to c)) \sim (a \to (\neg\, b \vee c))$$

є тавтологією, що свідчить про його правильність.

(в) Аналогічно попереднім пунктам запишемо відповідну наслідковість

$$a \wedge b \to c \ \ (a \to b) \wedge (b \to c).$$

Неважко переконатись, що ця наслідковість не виконується. Наприклад, для елемента x такого, що $x{\in}A$, $x{\notin}B$ та $x{\notin}C$, засновок $a \wedge b \to c$ буде істинним, а висновок $(a \to b) \wedge (b \to c)$ – хибним. ◄

Приклад 2.15.

1. Навести приклад множин A та B, які спростовують рівність $(A \setminus B) \cup B = A$. Сформулювати та довести необхідні й достатні умови для виконання цієї рівності.

Наприклад, $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$. Тоді $(A \setminus B) \cup B = \{1, 2, 3\} \neq A$.

Доведемо, що $(A \setminus B) \cup B = A$ тоді й тільки тоді, коли $B \subseteq A$.

Нехай $(A \setminus B) \cup B = A$. Розглянемо довільний елемент $x{\in} B$. З вивідностей у п. 1.4 маємо: $x{\in}B \Rightarrow (x{\in}A \setminus B \vee x{\in}B) \Leftrightarrow$ (за означенням об'єднання множин) $x{\in}(A \setminus B) \cup B$. Отже, за умовою $x{\in}A$ й виконується включення $B \subseteq A$.

Припустимо, що $B \subseteq A$. Для встановлення рівності

$$(A \setminus B) \cup B = A$$

доведемо такі два включення: $(A \setminus B) \cup B \subseteq A$ та $A \subseteq (A \setminus B) \cup B$.

$x{\in}(A \setminus B) \cup B \Leftrightarrow$ – за означенням **об'єднання множин**;

$(x{\in}(A \setminus B) \vee x{\in}B) \Leftrightarrow$ – за означенням **різниці множин**;

$((x{\in}A \wedge x{\notin}B) \vee x{\in}B) \Rightarrow$ – див. п. 1.4 і припущення $B \subseteq A$;

$(x{\in}A \vee x{\in}A) \Leftrightarrow$ – **ідемпотентність диз'юнкції** $x{\in}A$.

Навпаки, нехай $x{\in}A \Rightarrow$ (див. п. 1.4) $(x{\in}A \wedge (x{\in}B \vee x{\notin}B)) \Leftrightarrow$ – **дистрибутивність кон'юнкції щодо диз'юнкції**, див. п. 1.3);

$((x{\in}A \wedge x{\in}B) \vee (x{\in}A \wedge x{\notin}B)) \Rightarrow$ – див. п. 1.4;

$(x{\in}B \vee x{\in}A \setminus B) \Leftrightarrow$ – за означенням **об'єднання та властивістю комутативності об'єднання множин** $x{\in}(A \setminus B) \cup B$.

Отже, необхідні й достатні умови для виконання рівності $(A \setminus B) \cup B = A$ доведено.

2. Чи існують множини A, B і C, для яких одночасно виконуються такі співвідношення?

$$A \cap B \neq \varnothing,\ A \cap C = \varnothing,\ (A \cap B) \setminus C = \varnothing.$$

Ні. Доведення виконаємо методом від супротивного, тобто припустимо, що такі множини A, B і C існують. Тоді з умови $A \cap B \neq \varnothing$ випливає, що існує елемент $x \in A \cap B$, тобто $x \in A$ та $x \in B$. З другої умови отримаємо $x \notin C$. Отже, $x \in (A \cap B) \setminus C$, що суперечить останній умові. Отримана суперечність спростовує припущення про існування таких множин.

3. Довести, що $A \cap B \subseteq C$ тоді й тільки тоді, коли $A \subseteq \overline{B} \cup C$.

Нехай $A \cap B \subseteq C$ і $x \in A \Rightarrow$ – див. п. 1.4;

$(x \in A \wedge (x \in B \vee x \notin B)) \Leftrightarrow$ – **дистрибутивність кон'юнкції щодо диз'юнкції**, див. п. 1.3;

$((x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \notin B)) \Rightarrow$ – **означення перетину й доповнення множин і наслідковість** із п. 1.4;

$(x \in A \cap B \vee x \in \overline{B}) \Rightarrow$ – **припущення задачі й означення об'єднання множин** $x \in \overline{B} \cup C$.

Отже, доведено, що $A \subseteq \overline{B} \cup C$.

Навпаки, нехай $A \subseteq \overline{B} \cup C$. Маємо

$x \in A \cap B \Leftrightarrow$ – **означення перетину множин**;

$x \in A \wedge x \in B \Rightarrow$ – **припущення задачі**;

$(x \in \overline{B} \cup C \wedge x \in B) \Leftrightarrow$ – **означення об'єднання множин**;

$(x \in \overline{B} \vee x \in C) \wedge x \in B \Leftrightarrow$ – **дистрибутивність кон'юнкції щодо диз'юнкції**;

$(x \in \overline{B} \wedge x \in B) \vee (x \in C \wedge x \in B) \Leftrightarrow$ – **означення доповнення множини**;

$(\neg (x \in B) \wedge x \in B) \vee (x \in C \wedge x \in B) \Leftrightarrow$ – **властивість заперечення**, див. п. 1.3;

$\mathbf{0} \vee (x \in C \wedge x \in B) \Leftrightarrow$ – властивості елементів **0** і **1**, див. п. 1.3;

$C \wedge x \in B \Rightarrow$ – наслідковість із п. 1.4 $x \in C$.

Таким чином, доведено включення $A \cap B \subseteq C$.

Наведене твердження можна довести також за допомогою методів математичної логіки, обґрунтувавши рівносильність формул

$$((x \in A \wedge x \in B) \to x \in C) \text{ і } (x \in A \to (\neg x \in B \vee x \in C))$$

або (що те саме) тотожну істинність виразу

$$((x \in A \wedge x \in B) \to x \in C) \sim (x \in A \to (\neg x \in B \vee x \in C)).$$

4. Що можна сказати про множини A та B, якщо?

1) $A \,\Delta\, B = A$; 2) $A \,\Delta\, B = \overline{A}$.

У першому випадку A – довільна множина, а $B = \varnothing$. Обґрунтуємо це твердження методом від супротивного, тобто припустимо, що множина B непорожня та існує елемент $x \in B$. Якщо одночасно $x \in A$, то за означенням симетричної різниці множин матимемо, що $x \notin A \,\Delta\, B$, тобто $A \,\Delta\, B \neq A$, що суперечить умові задачі. Якщо ж припустити, що $x \in B$, але $x \notin A$, то за означенням симетричної різниці множин матимемо, що $x \in A \,\Delta\, B$. Отже, і цього разу задана рівність $A \,\Delta\, B = A$ не виконується. Таким чином, припущення, що $B \neq \varnothing$, суперечить умові задачі, тобто має місце рівність $B = \varnothing$.

Розв'язання другої задачі таке: A – довільна множина, а $B = E$ (або $\overline{B} = \varnothing$). Знову застосуємо метод від супротивного й припустимо, що множина $\overline{B}$ непорожня та існує елемент $x \in \overline{B}$. Якщо одночасно $x \in A$ (тобто $x \notin \overline{A}$), то за означенням симетричної різниці множин матимемо $x \in A \,\Delta\, B$, тобто $A \,\Delta\, B \neq \overline{A}$, що суперечить умові задачі. Якщо ж припустити, що $x \in \overline{B}$, але $x \notin A$ (або $x \in \overline{A}$), то отримаємо $x \notin A \,\Delta\, B$, тобто й цього разу задана в умові рівність не виконується. Отже, припустивши, що $B \neq E$, дійшли суперечності, тобто має місце рівність $B = E$. ◄

Завдання для самостійної роботи

1. Нехай $A = \{1, 3, 5, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ і $C = \{2, 4, 7\}$. Обчислити:

(а) $A \cup B$; (б) $(A \cup C) \setminus B$; (в) $A \cap B \cap C$;
(г) $(A \setminus C) \cup (B \setminus A)$; (д) $A \,\Delta\, B$; (е) $(B \setminus C) \cap (A \setminus B)$.

2. За допомогою діаграм Венна та методу логічних таблиць перевірити такі теоретико-множинні рівності:

(а) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
(б) $(A \cap B) \cup A = (A \cup B) \cap A = A$;
(в) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
(г) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;
(д) $A \cap (B \,\Delta\, C) = (A \cap B) \,\Delta\, (A \cap C)$;
(е) $A \,\Delta\, B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

3. Навести приклад множин A та B, які спростовують рівність

$$(A \cup B) \setminus B = A.$$

Сформулювати й довести необхідні й достатні умови для виконання цієї рівності.

4. Визначити множини:

(а) $\varnothing \cap \{\varnothing\}$; (б) $\{\varnothing\} \cap \{\varnothing\}$; (в) $\{\varnothing\} \cup \varnothing$;

(г) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \varnothing$; (д) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \{\varnothing\}$; (е) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \{\{\varnothing\}\}$.

5. Нехай A та B – довільні множини. Довести, що співвідношення, розміщені в одному рядку, рівносильні між собою, тобто з істинності одного з них випливає істинність усіх інших.

(а) $A \subseteq B$, $\overline{B} \subseteq \overline{A}$, $A \cup B = B$, $A \cap B = A$, $A \setminus B = \varnothing$;

(б) $A \subseteq B$, $\overline{A} \cup B = E$, $A \cap \overline{B} = \varnothing$;

(в) $A \cap B = \varnothing$, $A \subseteq \overline{B}$, $B \subseteq \overline{A}$;

(г) $A \cup B = E$, $\overline{A} \subseteq B$, $\overline{B} \subseteq A$.

6. Перевірити (довести чи спростувати) правильність твердження:

(а) якщо $A \cup C = B \cup C$, то $A = B$;

(б) якщо $A \cap C = B \cap C$, то $A = B$;

(в) якщо $A \,\Delta\, B = A \,\Delta\, C$, то $B = C$;

(г) якщо $A \cup C = B \cup C$ і $A \cap C = B \cap C$, то $A = B$;

(д) якщо $A \setminus C = B \setminus C$ і $C \setminus A = C \setminus B$, то $A = B$;

(е) якщо $A \setminus C = B \setminus C$ і $A \cap C = B \cap C$, то $A = B$.

7. Довести, що:

(а) $A \cup B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq C$ і $B \subseteq C$;

(б) $A \subseteq B \cap C \Leftrightarrow A \subseteq B$ і $A \subseteq C$;

(в) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow C \subseteq A$;

(г) $A \subseteq B \cup C \Leftrightarrow A \cap \overline{B} \subseteq C$;

(д) $(A \setminus B) \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$;

(е) $A \setminus B = A \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$.

8. Що можна сказати про множини A та B, якщо:

(а) $A \cup B = A \cap B$; (б) $A \setminus B = B \setminus A$; (в) $A \subseteq \overline{B}$ і $\overline{A} \subseteq B$;

(г) $A \cup B = \varnothing$; (д) $A \setminus B = A$; (є) $A \setminus B = B$;

(е) $A \setminus B = \varnothing$; (ж) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \cup B$.

9. Чи існують множини A, B і C, для яких одночасно виконуються такі співвідношення?

$$A \neq \varnothing,\ A \cap B = \varnothing,\ A \cap C = \varnothing,\ A \setminus (B \cup C) = \varnothing.$$

10. Довести тотожність $(A \cap B) \cup A = (A \cup B) \cap A = A$.

11. Сформулювати та довести необхідні й достатні умови для множин A та B, щоб виконувалася рівність

$$\beta(A) \cup \beta(B) = \beta(A \cup B).$$

12. Що можна сказати про множини A та B, якщо:

(а) $A \Delta B = B$; (б) $A \Delta B = \overline{B}$; (в) $A \Delta B = \varnothing$;

(г) $A \Delta B = E$; (д) $(A \setminus B) \Delta (B \setminus A) = \varnothing$; (е) $(A \cup B) \Delta A = B$?

2.4. Декартів (прямий) добуток множин

Декартовим (прямим) добутком множин A та B (позначають $A \times B$) називають множину всіх пар (a, b), у яких перша компонента належить множині A ($a \in A$), а друга – множині B ($b \in B$), тобто

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ та } b \in B\}, \text{ або } (a, b) \in A \times B \Leftrightarrow a \in A \wedge b \in B.$$

Декартів добуток можна природно узагальнити для довільної скінченної сукупності множин. Якщо $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – множини, то їхнім декартовим добутком називається множина

$$D = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\},$$

яка складається зі всіх наборів $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, у кожному з яких i-й член, що називається **i-ю координатою**, або **i-м компонентом** набору, належить множині A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Декартів добуток позначають $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

Щоб відрізняти набір $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ від множини, що складається з елементів $a_1, a_2, \ldots, a_n$, його записують не у фігурних, а в круглих дужках і називають **кортежем**, **вектором** або **впорядкованим набором.**

Довжиною кортежу називають кількість його координат.

Два кортежі $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ і $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ однакової довжини вважають **рівними** тоді й тільки тоді, коли рівні відповідні їхні координати, тобто $a_i = b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Отже, кортежі (a, b, c) і (a, c, b) різні, у той час як множини $\{a, b, c\}$ і $\{a, c, b\}$ рівні між собою.

Декартів добуток множини A на себе n разів, тобто множину $A \times A \times \ldots \times A$, називають **$n$-м декартовим (прямим) степенем** множини A та позначають A^n.

Вважають, що $A^0 = \varnothing$ ($n = 0$) і $A^1 = A$ ($n = 1$).

Приклад 2.16. 1. Якщо $A = \{a, b\}$ і $B = \{b, c, d\}$, то

$$A \times B = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, c), (b, d)\},$$
$$A^2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}.$$

2. Якщо R – множина дійсних чисел, або множина точок координатної прямої, то R^2 – це множина пар (a, b), де $a, b \in R$, або множина точок координатної площини.

Координатне зображення точок площини вперше запропонував французький математик і філософ Рене Декарт, тому введена теоретико-множинна операція й називається декартовим добутком.

3. Скінченну множину A, елементами якої є символи (літери, цифри, спеціальні знаки тощо), називають **алфавітом**. Елементи декартового степеня A^n називають **словами** довжиною n в алфавіті A. Множина

$$A^* = \{e\} \cup A \cup A^2 \cup A^3 \cup \ldots = \{e\} \cup \bigcup_{i \in N} A^i$$

– це **множина всіх слів у алфавіті** A; тут e – **порожнє слово** (слово довжиною 0), яке не містить жодного символу алфавіту A. Порожнє слово позначають також через ε.

Замість запису слів з A^n у вигляді кортежів $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ частіше використовують традиційну форму їх запису у вигляді послідовності символів $a_1a_2\ldots a_n$, $a_j \in A$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Наприклад,

010111, 011, 0010, 100 – слова в алфавіті $B = \{0, 1\}$,

67–35, 98))*–)+1, (4*50+12)/27 – слова в алфавіті

$C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, +, –, *, /, (,)\}$. ◄

Операція декартового добутку неасоціативна й некомутативна, тобто множини

$$(A \times B) \times C,\ A \times (B \times C) \text{ і } A \times B \times C,$$

а також множини

$$A \times B \quad \text{і} \quad B \times A$$

не рівні між собою. (Зауважимо, що в математиці множини $(A \times B) \times C$ і $A \times (B \times C)$ іноді ототожнюють з $A \times B \times C$, вважаючи, що кортежі $((a, b), c)$, $(a, (b, c))$ і (a, b, c) збігаються.)

Приклад 2.17.

1. Навести приклад множин A та B таких, що $A \times B \neq B \times A$.

Для яких множин виконується рівність?

Для будь-яких множин A та B таких, що $A \neq B$, виконується $A \times B \neq B \times A$. Рівність має місце, коли $A = B$.

2. Довести, що $(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B) \times (A \cap B)$.

$$(x, y)\in(A \times B) \cap (B \times A) \Leftrightarrow (x, y)\in A \times B \wedge (x, y)\in B \times A \Leftrightarrow$$
$$(x\in A \wedge y\in B) \wedge (x\in B \wedge y\in A) \Leftrightarrow (x\in A \wedge x\in B \wedge y\in A \wedge y\in B) \Leftrightarrow$$
$$(x\in A \cap B \wedge y\in A \cap B) \Leftrightarrow (x, y)\in(A \cap B) \times (A \cap B). \blacktriangleleft$$

Зв'язок декартового добутку з іншими теоретико-множинними операціями виражають такі тотожності:

$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$, $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$,
$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$, $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

Проекцією на i-ту вісь (або **i-ю проекцією**) кортежу

$$w = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

називають i-ту координату a_i кортежу w; позначають $\mathrm{Pr}_i w$.

Проекцією кортежу $w = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ на осі з номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ називають кортеж $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k})$; позначають

$$\mathrm{Pr}_{i_1, i_2, \ldots, i_k} w.$$

Нехай V – множина кортежів однакової довжини. **Проекцією множини** V на i-ту вісь (позначають $\mathrm{Pr}_i V$) називають множину проекцій на i-ту вісь усіх кортежів множини V:

$$\mathrm{Pr}_i V = \{ \mathrm{Pr}_i v \mid v\in V \}.$$

Аналогічно означають проекцію множини V на кілька осей:

$$\mathrm{Pr}_{i_1, i_2, \ldots, i_k} V = \{ \mathrm{Pr}_{i_1, i_2, \ldots, i_k} v \mid v\in V\}.$$

Приклад 2.18. $\mathrm{Pr}_{i_1, i_2, \ldots, i_k} (A_1 \times A_2 \times\ldots\times A_n) = A_{i_1}\times A_{i_2} \times\ldots\times A_{i_k}$.

Якщо $V = \{(a, b, c), (a, c, d), (a, b, d)\}$, то $\mathrm{Pr}_1 V = \{a\}$,
$\mathrm{Pr}_2 V = \{b, c\}$, $\mathrm{Pr}_{1,3} V = \{(a, c), (a, d)\}$,
$\mathrm{Pr}_{2,3} V = \{(b, c), (c, d), (b, d)\}$. $\blacktriangleleft$

Завдання для самостійної роботи

1. Для заданих множин $A = \{1, 2\}$ і $B = \{2, 3, 4\}$ визначити:
(а) $A \times B$; (б) $B \times A$; (в) B^2;
(г) $(B \setminus A) \times A$; (д) $A \times B \times A$; (е) $A \times (A \cup B)$.

2. Довести, що $(A \times B) \cup (B \times A) \subseteq (A \cup B) \times (A \cup B)$.

3. Сформулювати й довести необхідні та достатні умови виконання рівності $(A \cup B) \times (A \cup B) = (A \times B) \cup (B \times A)$.

4. Позначимо $D = \beta(M) \times \beta(M) \times \beta(M)$, де $M = \{1, 2\}$. Виписати всі такі кортежі $(A, B, C) \in D$, що:

(а) $A \cap B = C$; (б) $A \cup B \cup C = M$; (в) $A \cap B \neq B \cap C$.

5. Довести, що коли $B \neq \varnothing$, то:

(а) $\mathrm{Pr}_1(A \times B) = A$; (б) якщо $C \subseteq A \times B$, то $\mathrm{Pr}_1 C \subseteq A$.

2.5. Відповідності

Відповідністю між множинами A та B називають будь-яку підмножину $C \subseteq A \times B$.

Якщо $(a, b) \in C$, то кажуть, що **елемент** b **відповідає елементу** a за відповідності C.

Оскільки відповідності є множинами, то для їхнього задання використовують ті самі методи, що й для довільних множин.

Крім того, відповідність можна задавати (чи ілюструвати) за допомогою **графіка відповідності**. Нехай

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ і } B = \{a, b, c, d\},$$

а $C = \{(1, a), (1, d), (2, c), (2, d), (3, b), (5, a), (5, b)\}$ – відповідність між A та B. Позначимо числами 1, 2, 3, 4, 5 вертикальні прямі, а літерами a, b, c, d – горизонтальні прямі на координатній площині (рис. 2.2, a). Тоді виділені вузли на перетині цих прямих позначають елементи відповідності C і утворюють графік відповідності C.

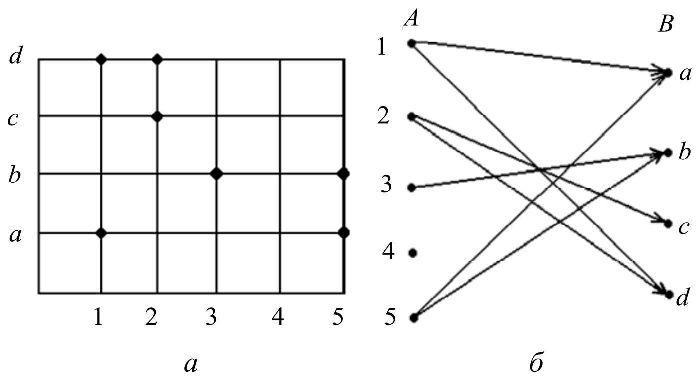


Рис. 2.2

Зручним методом задання невеликих скінченних відповідностей є **діаграма**, або **граф відповідності**. В одній колонці розміщують точки, позначені елементами множини A, у другій (праворуч) – точки, позначені елементами множини B. Із точки a першої колонки проводять стрілку в точку b другої колонки тоді й тільки тоді, коли пара (a, b) належить заданій відповідності. На рис. 2.2, *б* зображено діаграму відповідності C (див. попередній абзац).

Відповідність можна задавати, означаючи співвідношення, які мають задовольняти її обидві координати.

Приклад 2.19. Розглянемо на класичній координатній площині $R^2 = R \times R$ такі відповідності:

$$C_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\},\ C_2 = \{(x, y) \mid y = x^2\},$$
$$C_3 = \{(x, y) \mid |x| \le 1,\ |y| \le 1\}.$$

Графік відповідності C_1 – це коло радіусом 1 із центром у початку координат, графік C_2 – квадратична парабола, а графік C_3 – усі точки квадрата з вершинами (–1, –1), (–1, 1), (1, 1) і (1, –1). ◄

Нехай $C \subseteq A \times B$ – відповідність між множинами A та B.

Множину $\mathrm{Pr}_1 C$ називають **областю визначення**, а множину $\mathrm{Pr}_2 C$ – **областю значень** відповідності C (інші позначення – відповідно δ_C та ρ_C).

Образом елемента $a \in \mathrm{Pr}_1 C$ за відповідності C називають множину всіх елементів $b \in \mathrm{Pr}_2 C$, що відповідають елементу a; позначають $C(a)$. **Прообразом елемента** $b \in \mathrm{Pr}_2 C$ за відповідності C називають множину всіх тих елементів $a \in \mathrm{Pr}_1 C$, яким відповідає елемент b; позначають $C^{-1}(b)$. Якщо $D \subseteq \mathrm{Pr}_1 C$, то **образом множини** D за відповідності C називають об'єднання образів усіх елементів із D; позначають $C(D)$. Аналогічно означають **прообраз множини** $G \subseteq \mathrm{Pr}_2 C$; позначають $C^{-1}(G)$.

Відповідність $i_A = \{\, (a, a) \mid a \in A \,\}$ називають **тотожним перетворенням**, **діагональною** відповідністю або **діагоналлю** в A.

Оскільки відповідності – це множини, то до них можна застосовувати всі відомі теоретико-множинні операції: об'єднання, перетин, різницю тощо. Зокрема, для операції доповнення відповідності C між множинами A та B універсальною множиною є $A \times B$.

Додатково введемо для відповідностей дві специфічні операції.

Відповідністю, **оберненою** до заданої відповідності C між множинами A та B, називають таку відповідність D між множинами B та A, що $D = \{ (b, a) \mid (a, b) \in C \}$. Відповідність, обернену до відповідності C, позначають C^{-1}.

Приклад 2.20. Нехай задано множини $A = \{a, b, c, d\}$ і $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ та відповідності між A та B:

$$C_1 = \{(a, 1), (a, 3), (a, 5), (b, 1), (b, 3), (d, 3), (d, 4), (d, 5)\},$$
$$C_2 = \{(a, 4), (a, 5), (b, 2), (b, 3), (c, 1), (d, 2), (d, 3)\}.$$

Визначити множини

$$\mathrm{Pr}_1 C_1,\ \mathrm{Pr}_1 C_2,\ \mathrm{Pr}_2 C_1,\ C_1 \cup C_2,\ C_1 \setminus C_2,\ C_1 \cap C_2,\ \overline{C}_1,\ C_1 \Delta C_2,\ C_2^{-1}.$$

► $\mathrm{Pr}_1 C_1 = \{a, b, d\}$, $\mathrm{Pr}_1 C_2 = \{a, b, c, d\}$, $\mathrm{Pr}_2 C_1 = \{1, 3, 4, 5\}$,

$C_1 \cup C_2 = \{(a, 1), (a, 3), (a, 4), (a, 5), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (c, 1), (d, 2), (d, 3), (d, 4), (d, 5)\}$,

$C_1 \setminus C_2 = \{(a, 1), (a, 3), (b, 1), (d, 4), (d, 5)\}$,

$C_1 \cap C_2 = \{(a, 5), (b, 3), (d, 3)\}$,

$\overline{C}_1 = \{(a, 2), (a, 4), (b, 2), (b, 4), (b, 5), (c, 1), (c, 2), (c, 3), (c, 4), (c, 5), (d, 1), (d, 2)\}$,

$C_1 \Delta C_2 = \{(a, 1), (a, 3), (a, 4), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (d, 2), (d, 4), (d, 5)\}$,

$C_2^{-1} = \{(4, a), (5, a), (2, b), (3, b), (1, c), (2, d), (3, d)\}$. ◄

Якщо задано відповідності $C \subseteq A \times B$ і $D \subseteq B \times F$, то **композицією** (**суперпозицією**, **добутком**) **відповідностей** C і D (позначають $C \circ D$) називають таку відповідність H між множинами A та F, що $H = \{(a, b) \mid$ існує елемент $c \in B$, для якого $(a, c) \in C \wedge (c, b) \in D \}$.

Приклад 2.21.

1. Нехай задано множини $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ і $G = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, відповідність

$C = \{(a, 2), (a, 3), (b, 1), (c, 4), (c, 5), (d, 2), (d, 3)\}$ між A та B і відповідність між

$D = \{(1, \beta), (1, \gamma), (2, \alpha), (2, \gamma), (3, \gamma), (5, \alpha), (5, \beta)\}$ B і G.

Визначити відповідності $C \circ D$, $C \circ C^{-1}$, $D^{-1} \circ C^{-1}$.

$C \circ D = \{(a, \alpha), (a, \gamma), (b, \beta), (b, \gamma), (c, \alpha), (c, \beta), (d, \alpha), (d, \gamma)\}$,

$C \circ C^{-1} = \{(a, a), (a, d), (b, b), (c, c), (d, a), (d, d)\}$,

$D^{-1} \circ C^{-1} = \{(\alpha, a), (\gamma, a), (\beta, b), (\gamma, b), (\alpha, c), (\beta, c), (\alpha, d), (\gamma, d)\}$.

2. Що можна сказати про множини A та B, якщо

$$i_A \cap (A \times B) = \varnothing?$$

$A \cap B = \varnothing$. В іншому разі існував би елемент x, що належав би одночасно обом множинам A та B. Звідси отримаємо, що $(x, x) \in i_A$ (за означенням діагональної відповідності i_A) і $(x, x) \in A \times B$ (за означенням декартового добутку множин A та B), отже,

$$(x, x) \in i_A \cap (A \times B),$$

що суперечить умові задачі.

3. Нехай C_1 – відповідність між A та B, C_2 – відповідність між B і G. Довести, що $C_1 \circ C_2 = \varnothing$ тоді й тільки тоді, коли

$$\mathrm{Pr}_2 C_1 \cap \mathrm{Pr}_1 C_2 = \varnothing.$$

Доведемо необхідність методом від супротивного. Нехай $C_1 \circ C_2 = \varnothing$ і припустимо, що існує елемент

$$z \in \mathrm{Pr}_2 C_1 \cap \mathrm{Pr}_1 C_2 \Leftrightarrow (z \in \mathrm{Pr}_2 C_1 \wedge z \in \mathrm{Pr}_1 C_2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\exists x{:}(x, z) \in C_1 \wedge \exists y{:}(z, y) \in C_2) \Rightarrow (x, y) \in C_1 \circ C_2.$$

Останнє суперечить умові, отже, $\mathrm{Pr}_2 C_1 \cap \mathrm{Pr}_1 C_2 = \varnothing$. Навпаки, нехай $\mathrm{Pr}_2 C_1 \cap \mathrm{Pr}_1 C_2 = \varnothing$. Знову застосуємо метод доведення від супротивного і припустимо, що існує елемент $(x, y) \in C_1 \circ C_2$. Тоді

$$(\exists z{:}(x, z) \in C_1 \wedge (z, y) \in C_2) \Leftrightarrow (z \in \mathrm{Pr}_2 C_1 \wedge z \in \mathrm{Pr}_1 C_2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow z \in \mathrm{Pr}_2 C_1 \cap \mathrm{Pr}_1 C_2.$$

Отримано суперечність щодо умови. Отже, множина $C_1 \circ C_2$ не може містити елементів та є порожньою. ◄

Розглянемо окремі важливі випадки відповідностей C між множинами A та B.

Якщо $\mathrm{Pr}_1 C = A$, то відповідність C називається **всюди** (**скрізь**) **визначеною**. В іншому разі відповідність називають **частковою**.

Відповідність $f \subseteq A \times B$ називають **функціональною**, або **функцією** з A в B, якщо кожному елементові $a \in \mathrm{Pr}_1 f$ відповідає тільки один елемент із $\mathrm{Pr}_2 f$, тобто образом кожного елемента $a \in \mathrm{Pr}_1 f$ є єдиний елемент b з $\mathrm{Pr}_2 f$. Якщо f – функція з A в B, то кажуть, що функція має **тип** $A \to B$ і позначають $f : A \to B$.

Усюди визначену функціональну відповідність $f \subseteq A \times B$ називають **відображенням** з A в B; позначають, як і функцію $f : A \to B$. Відображення називають також усюди (скрізь) визначеними функціями.

Відображення типу $A \to A$ називають **перетворенням** множини A.

Через B^A позначають множину всіх відображень із A в B.

Оскільки функція і відображення є окремими випадками відповідності, то для них мають місце всі наведені вище означення: поняття областей визначення та значень, поняття образу та прообразу елементів і множин тощо. Зокрема, для функції f елементи множини $\mathrm{Pr}_1 f$ називають **аргументами** функції, образ $f(a)$ елемента $a \in \mathrm{Pr}_1 f$ – **значенням** функції f на a.

Відповідність C називають **сюр'єктивною** (**сюр'єкцією**), або **відповідністю** *на* множину B, якщо $\mathrm{Pr}_2 C = B$.

Відповідність C називають **ін'єктивною** (**ін'єкцією**), або **різнозначною відповідністю**, якщо для кожного елемента $b \in \mathrm{Pr}_2 C$ його прообраз $C^{-1}(b)$ складається тільки з одного елемента. Інакше кажучи, різним елементам множини A відповідають різні елементи множини B. Іноді ін'єкцію називають 1–1 відповідністю.

Відображення, яке є одночасно сюр'єктивним та ін'єктивним, називають **бієктивним**, або **бієкцією**. Бієктивні відображення називають часто також **взаємно однозначними відображеннями**, або **взаємно однозначними відповідностями** між множинами A та B.

Отже, відповідність є взаємно однозначною тоді й лише тоді, коли вона функціональна, усюди визначена, сюр'єктивна та ін'єктивна.

Приклад 2.22.

1. Нехай задано такі відповідності між множинами $A = \{a, b, c, d, e\}$ і $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$:

$C_1 = \{(a, 2), (a, 5), (b, 1), (b, 5), (c, 2), (d, 3), (d, 5)\}$,

$C_2 = \{(a, 3), (b, 2), (c, 3), (e, 3)\}$,

$C_3 = \{(a, 2), (b, 3), (c, 4), (d, 1), (e, 5)\}$,

$C_4 = \{(a, 2), (a, 3), (b, 1), (c, 4), (c, 5), (d, 1), (e, 2), (e, 4)\}$,

$C_5 = \{(a, 4), (b, 3), (c, 5), (d, 2), (e, 1)\}$.

Визначити, які з цих відповідностей усюди визначені, функціональні, ін'єктивні, сюр'єктивні, бієктивні (взаємно однозначні).

Усюди визначені – C_3, C_4, C_5; функціональні – C_2, C_3, C_5; ін'єктивні – C_3, C_5; сюр'єктивні – C_3, C_4, C_5; бієктивні (взаємно однозначні) – C_3, C_5.

2. Для скінченної множини $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ установити взаємно однозначну відповідність між множинами $\beta(A)$ і $\{0, 1\}^{|A|}$.

Довільній множині $M \in \beta(A)$ поставимо у відповідність двійковий вектор $(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \{0, 1\}^{|A|}$, означений так: $b_k = 1$, якщо $b_k \in M$, інакше $b_k = 0$, $k = 1,2,\ldots,n$.◄

Бієктивне відображення з A в A називають **підстановкою** множини A.

Для довільної відповідності C між A та A позначимо через $C^{(n)}$ відповідність $C \circ C \circ \ldots \circ C$ (n входжень літери C). Вважаємо, що $C^{(0)} = i_A$ та $C^{(1)} = C$.

Наведемо приклади відповідностей, відображень і функцій.

Приклад 2.23.

1. Відповідність між клітинками та фігурами на шахівниці у будь-який момент гри є функціональною, але не є відображенням, оскільки не всі поля шахівниці зайняті фігурами.

2. Відповідність між натуральними числами й сумами цифр їхнього десяткового запису є відображенням. Це відображення не є ін'єктивним, оскільки йому належать, наприклад, такі пари, як (17, 8) і (26, 8).

3. Відповідність, за якою кожному натуральному числу $n \in N$ відповідає число $3n$, є взаємно однозначною відповідністю між множиною всіх натуральних чисел і множиною натуральних чисел, кратних 3.

4. Відповідність між множиною точок координатної площини R^2 і множиною всіх векторів з початком у точці (0, 0) є взаємно однозначною.

5. Нехай f – відповідність між A та B. Довести, що f – усюди визначена тоді й тільки тоді, коли $i_A \subseteq f \circ f^{-1}$.

Нехай f – усюди визначена відповідність між A та B, а x – довільний елемент множини A ($x \in A$), тоді $(x, x) \in i_A$. Зі всюди визначеності f випливає, що існує такий елемент $y \in B$, що $(x, y) \in f$, тоді $(y, x) \in f^{-1}$ та $(x, x) \in f \circ f^{-1}$, отже, $i_A \subseteq f \circ f^{-1}$. Для доведення оберненого твердження розглянемо довільний елемент

$$x \in A \Leftrightarrow (x, x) \in i_A \Rightarrow$$

(з умови задачі) $(x, x) \in f \circ f^{-1} \Rightarrow (\exists y\text{: } (x, y) \in f \wedge (y, x) \in f^{-1})$.

Із останнього твердження випливає всюди визначеність f. ◄

Завдання для самостійної роботи

1. Нехай задано множини $A = \{a, b, c, d\}$ та $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ і відповідності між A та B:

$C_1 = \{ (a, 1), (a, 2), (a, 5), (b, 1), (b, 4), (d, 2), (d, 4), (d, 5)\}$,

$C_2 = \{ (a, 2), (a, 5), (b, 2), (b, 3), (c, 3), (d, 2), (d, 3)\}$,

$C_3 = \{ (b, 1), (b, 2), (b, 4), (c, 1), (c, 5), (d, 1), (d, 2)\}$.

Визначити:

(а) $\Pr_j C_i, j = 1, 2, i = 1, 2, 3$; (б) $C_1 \cup C_2, C_2 \cup C_3$;

(в) $C_1 \cap C_2, C_2 \cap (C_1 \cup C_3)$; (г) $C_1 \setminus C_2, C_3 \setminus (C_1 \cap C_3)$;

(д) $\overline{C}_1,\ C_2 \Delta C_3$; (е) $C_i^{-1},\ i = 1, 2, 3$.

Побудувати графіки та діаграми відповідностей C_1, C_2, C_3 і відповідностей із п. (б)–(е).

2. Нехай задано множини $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ і $G = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, відповідності між A та B

$C_1 = \{(a, 1), (a, 3), (b, 2), (c, 3), (c, 5), (d, 1), (d, 3)\}$,

$C_2 = \{(b, 2), (b, 5), (c, 1), (c, 4), (d, 1), (d, 2), (d, 5)\}$

і відповідності між B та G

$D_1 = \{(1, \beta), (1, \gamma), (2, \alpha), (2, \beta), (3, \gamma), (5, \alpha), (5, \gamma)\}$,

$D_2 = \{(1, \alpha), (2, \alpha), (2, \beta), (3, \beta), (4, \beta), (4, \gamma)\}$.

Визначити:

(а) $C_i \circ D_j, i, j = 1, 2$; (б) $C_i \circ C_j^{-1}, i, j = 1, 2$; (в) $C_2 \circ (D_1 \circ\ C_i^{-1}$.

3. Нехай задано такі відповідності між R і R:

$C_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$; $C_2 = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 3\}$;

$C_3 = \{(x, y) \mid y^2 - |x| \geq 0\}$.

Побудувати графік відповідності:

(а) $\overline{C_1 \cap C_2} \cap C_3$; (б) $C_2 \cup C_3$; (в) $C_1 \cap C_2 \cap C_3$.

4. Що можна сказати про множини A та B, якщо:

(а) $i_A \subseteq A \times B$; (б) $i_A \cap (A \times B) \neq \varnothing$;

(в) з $(a, b) \in A \times B$ випливає $(b, a) \in A \times B$;

(г) з $(a, b) \in A \times B$ випливає $a \neq b$;

(д) $A \times B \subseteq B \times A$; (е) $|A \times B| = 1$.

5. Нехай C_1 – відповідність між A та B, C_2 – відповідність між B і G. Довести, що коли $C_1 \circ C_2 = D$, то

$$\Pr_1 D \subseteq \Pr_1 C_1 \text{ та } \Pr_2 D \subseteq \Pr_2 C_2.$$

6. Що можна сказати про відповідність C між множинами A та B, якщо:

(а) для будь-якого $x \in A$ існує $y \in B$ такий, що $(x, y) \in C$;

(б) з $(x, y), (x, z) \in C$ випливає $y = z$;

(в) з $(x, y), (z, y) \in C$ випливає $x = z$;

(г) для будь-якого $y \in B$ існує $x \in A$ такий, що $(x, y) \in C$;

(д) для будь-якого $x \in A$ існує єдиний $y \in B$ такий, що $(x, y) \in C$, і навпаки, для будь-якого $t \in B$ існує єдиний $z \in A$ такий, що $(z, t) \in C$?

7. Нехай задано такі відповідності між множинами

$A = \{a, b, c, d, e\}$ і $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$:

$C_1 = \{(a, 3), (a, 4), (b, 1), (b, 5), (c, 2), (d, 2), (d, 5)\}$,

$C_2 = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3), (c, 4), (e, 5)\}$,

$C_3 = \{(a, 1), (b, 3), (c, 4), (d, 2), (e, 4)\}$,

$C_4 = \{(a, 2), (a, 3), (b, 2), (c, 3), (c, 5), (d, 1), (e, 3), (e, 4)\}$,

$C_5 = \{(a, 3), (b, 4), (c, 5), (d, 1), (e, 2)\}$.

Визначити, які з відповідностей усюди визначені, функціональні, ін'єктивні, сюр'єктивні, бієктивні (взаємно однозначні). Побудувати графіки та діаграми цих відповідностей.

8. Установити взаємно однозначну відповідність між множинами:

(а) A^k та A^{N_k}; (б) $\beta(A)$ та $\{0, 1\}^A$.

9. Нехай f – відповідність між A та B. Довести, що:

(а) f функціональна тоді й тільки тоді, коли $f^{-1} \circ f \subseteq i_B$;

(б) f є відображенням тоді й тільки тоді, коли

$$i_A \subseteq f \circ f^{-1} \text{ та } f^{-1} \circ f \subseteq i_B;$$

(в) f сюр'єктивна тоді й тільки тоді, коли $i_B \subseteq f^{-1} \circ f$;

(г) f ін'єктивна тоді й тільки тоді, коли $f \circ f^{-1} \subseteq i_A$;

(д) f взаємно однозначна тоді й тільки тоді, коли

$$f \circ f^{-1} = i_A \text{ та } f^{-1} \circ f = i_B.$$

2.6. Відношення. Властивості відношень

Підмножину R декартового степеня M^n деякої множини M називають **n-місним (n-арним) відношенням** на множині M. Кажуть, що елементи $a_1, a_2, \ldots, a_n \in M$ перебувають у відношенні R, якщо $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R$.

При $n = 1$ відношення $R \subseteq M$ називають **одномісним**, або **унарним**. Таке відношення часто називають також **ознакою**, або **характеристичною властивістю** елементів множини M. Кажуть, що елемент $a \in M$ має ознаку R, якщо $a \in R$ і $R \subseteq M$. Наприклад, ознаки *непарність* і *кратність* 7 виділяють із множини N натуральних чисел відповідно унарні відношення

$$R' = \{2k - 1 \mid k \in N\} \text{ і } R'' = \{7k \mid k \in N\}.$$

Найпопулярнішими в математиці є **двомісні**, або **бінарні** відношення, на вивченні властивостей яких зупинимося детальніше. Далі скрізь під словом **відношення** розумітимемо бінарне відношення. Якщо елементи $a, b \in M$ перебувають у відношенні R, тобто $(a, b) \in R$, то це часто записують також у вигляді aRb. Зауважимо, що бінарні відношення іноді розглядають як окремий випадок відповідностей (а саме – як відповідності між однаковими множинами), тому багато означень і понять для відношень подібні до аналогічних означень і понять для відповідностей.

Приклад 2.24. Наведемо приклади бінарних відношень на різних множинах.

1. Відношення на множині N натуральних чисел:

R_1 – відношення *менше чи дорівнює*, тоді

$$4\, R_1\, 9,\ 5\, R_1\, 5 \text{ і } 1\, R_1\, m \text{ для будь-якого } m \in N;$$

R_2 – відношення *ділиться на*, тоді

$$24\, R_2\, 3,\ 49\, R_2\, 7 \text{ і } m\, R_2\, 1 \text{ для будь-якого } m \in N;$$

R_3 – відношення *є взаємно простими*, тоді

$$15\, R_3\, 8,\ 366\, R_3\, 121,\ 1001\, R_3\, 612;$$

R_4 – відношення *складаються з однакових цифр*, тоді

$$127\, R_4\, 721,\ 230\, R_4\, 302,\ 3231\, R_4\, 3213311.$$

2. Відношення на множині точок координатної площини R^2:

R_5 – відношення *лежать на однаковій відстані від початку координат*, тоді

$$(3, 2)\, R_5\, (\sqrt{5}, -\sqrt{8}),\ (0, 0)\, R_5\, (0, 0);$$

R_6 – відношення *симетричні відносно осі ординат*, тоді

$$(-3, 2)\, R_6\, (3, 2),\ (1, 7)\, R_6\, (-1, 7)$$

і взагалі $(a, b)\, R_6\, (-a, b)$ для будь-яких $a, b \in R$;

R_7 – відношення *менше або дорівнює*. Вважаємо, що $(a, b)\, R_7\, (c, d)$, якщо $a \le c$ і $b \le d$. Зокрема,

$$(1, 7)\, R_7\, (20, 14),\ (-12, 4)\, R_7\, (0, 17),$$

а пари (2, –7) і (1, 4) та (3, –5) і (–3, 2) не належать відношенню R_7.

3. Відношення на множині студентів певного факультету:

R_8 – відношення *є однокурсником*,

R_9 – відношення *молодший за віком від*. ◄

Відношення можна задавати у ті самі способи, що й звичайні множини. Наприклад, якщо множина M скінченна, то довільне відношення R на M можна задати списком пар елементів, що перебувають у відношенні R.

Крім того, зручно задавати бінарне відношення R на скінченній множині $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ за допомогою **матриці бінарного відношення.** Це квадратна матриця C порядку n, у якій елемент c_{ij}, що стоїть на перетині i-го рядка та j-го стовпчика, позначають так: $c_{ij} = 1$, якщо $a_i R\, a_j$, і $c_{ij} = 0$ – в іншому разі.

Відношення можна задавати також за допомогою графіків і діаграм. **Графік відношення** означають і будують так само, як і графік відповідності. Поняття діаграми (або графа) відношення можна означити аналогічно відповідності. Однак частіше **діаграму** (**граф**) **відношення** R на скінченній множині

$$M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

означають так. Поставимо у взаємно однозначну відповідність елементам множини M деякі точки площини. Із точки a_i до точки a_j проводимо напрямлену лінію (стрілку) у вигляді відрізка чи кривої тоді й тільки тоді, коли a_iRa_j. Зокрема, якщо a_iRa_i, то відповідну стрілку, що веде з a_i в a_i, називають **петлею**.

Приклад 2.25. Для множини $M = \{2, 7, 36, 63, 180\}$ матриці відношень R_1, R_2, R_3 із прикладу 2.24 мають вигляд:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Діаграми (графи) відношень R_1, R_2, R_3 подано на рис. 2.3. ◄

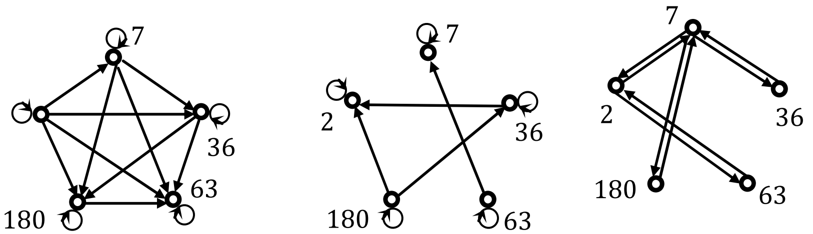


Рис. 2.3

Оскільки відношення на M є підмножинами множини M^2, то для них означені всі відомі теоретико-множинні операції. Наприклад, перетином відношень *більше або дорівнює* та *менше або дорівнює* є відношення *дорівнює*, об'єднанням відношень *менше* та *більше* є відношення *не дорівнює*, доповненням відношення *ділиться на* є відношення *не ділиться на* тощо. Стосовно операції доповнення для відношень на множині M універсальною множиною є M^2.

Аналогічно відповідностям для відношень можна означити поняття оберненого відношення та композиції відношень.

Відношення R^{-1} називають **оберненим** до відношення R, якщо $bR^{-1}a$ тоді й тільки тоді, коли aRb. Очевидно, що $(R^{-1})^{-1} = R$.

Наприклад, для відношення *більше або дорівнює* оберненим є відношення *менше або дорівнює*, для відношення *ділиться на* – відношення *є дільником*.

Композицією відношень R_1 і R_2 на множині M (позначають $R_1 \circ R_2$) називають таке відношення R на M, що aRb тоді й тільки тоді, коли існує елемент $c \in M$, для якого виконується aR_1c і cR_2b.

Наприклад, композицією відношень R_1 – *є сином* і R_2 – *є братом* на множині чоловіків є відношення $R_1 \circ R_2$ – *є небожем*.

Для відношення R на множині M через $R^{(k)}$ позначимо відношення $R \circ R \circ \ldots \circ R$ (k разів). Вважаємо, що $R^{(0)} = i_M$ і $R^{(1)} = R$.

Приклад 2.26.

1. На множині людей P означено такі відношення:

$$F = \{(x, y) \mid x, y \in P \text{ та } x - \text{батько } y\},$$
$$D = \{(x, y) \mid x, y \in P \text{ та } x - \text{донька } y\}.$$

Описати відношення:

(а) $F \circ F$; (б) $F^{-1} \circ D$.

(а) Нехай $(x, y)\in F^{\circ} F$, тоді $\exists z$: $(x, z)\in F \wedge (z, y)\in F$, тобто x – батько z і z – батько y. Отже, $F^{\circ} F$ – це множина таких (x, y), що x є батьком батька y (або x – дідусь y через батька).

(б) Нехай $(x, y)\in F^{-1} \circ D$, тоді $\exists z$: $(x, z)\in F^{-1} \wedge (z, y)\in D$, тобто z – батько x і z – донька y, що неможливо. Отже, $F^{-1} \circ D$ – порожня множина.

2. Довести, що для довільних відношень R_1 і R_2 виконується

$$(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1}.$$

$$(x, y)\in(R_1{\circ}R_2)^{-1} \Leftrightarrow (y, x)\in R_1{\circ}R_2 \Leftrightarrow \exists z\text{: } (y, z)\in R_1 \wedge (z, x)\in R_2 \Leftrightarrow \exists z\text{:}$$

$$(x, z)\in R_2^{-1} \wedge (z, y)\in R_1^{-1} \Leftrightarrow (x, y)\in R_2^{-1}{\circ}R_1^{-1}.$$

3. Для яких відношень виконується рівність $R^{-1} = \overline{R}$?

Для жодних. Оскільки, припустивши існування такого відношення R, матимемо: якщо $(x, x)\in R$, то $(x, x)\in R^{-1}$ та $(x, x)\notin \overline{R}$; якщо ж $(x, x)\notin R$, то знову дійдемо суперечності, тому що отримаємо $(x, x)\notin R^{-1}$ та $(x, x)\in \overline{R}$.

4. Визначити, для яких відношень R на множині M виконується співвідношення:

(а) $i_M{\circ}R = R$; (б) $i_M{\circ}R = i_M$; (в) $i_M \subseteq R{\circ}R^{-1}$.

(а) Для всіх R. Якщо $(x, y)\in i_M{\circ}R$, то $(x, x)\in i_M$ і $(x, y)\in R$, отже, $(x, y)\in R$. Якщо ж $(x, y)\in R$, то,ураховуючи $(x, x)\in i_M$, з означення композиції відношень матимемо $(x, y)\in i_M{\circ}R$.

(б) Тільки для $R = i_M$ (див. (а)).

(в) Для таких і тільки таких, що $\mathrm{Pr}_1R = M$. Нехай $\mathrm{Pr}_1R = M$, тоді для довільного елемента $x\in M$ послідовно маємо: $(x, x)\in i_M$ та $x\in \mathrm{Pr}_1R \Leftrightarrow \exists y$: $(x, y)\in R \Leftrightarrow (y, x)\in R^{-1} \Rightarrow (x, x)\in R{\circ}R^{-1}$. Доведемо обернене твердження. Візьмемо $x\in M$, тоді

$$(x, x)\in i_M \Rightarrow (x, x)\in R{\circ}R^{-1} \Leftrightarrow (\exists y\in M\text{: } (x, y)\in R \wedge (y, x)\in R^{-1}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists y\in M\text{: } (x, y)\in R.$$

Отже, $x\in \mathrm{Pr}_1R$ і доведено включення $M \subseteq \mathrm{Pr}_1R$. Обернене включення випливає із означення проекції відношення.

5. Довести, що коли $R_1 \subseteq R_2$, тоді для довільного відношення Q виконується $Q \circ R_1 \subseteq Q \circ R_2$.

Нехай $(x, y)\in Q{\circ}R_1$, тоді існує z такий, що $(x, z)\in Q$ і $(z, y)\in R_1$. Ураховуючи умову, матимемо $(x, z)\in Q$ і $(z, y)\in R_2$, отже, за означенням композиції відношень отримаємо $(x, y)\in Q{\circ}R_2$. ◄

Наведемо **властивості**, за якими класифікують відношення.

Нехай R – відношення на множині M.

1. Відношення R називається **рефлексивним**, якщо для всіх $a \in M$ виконується aRa.

Очевидно, що відношення R_1, R_2, R_4, R_5, R_7 – рефлексивні.

2. Відношення R називають **антирефлексивним** (**іррефлексивним**), якщо для жодного $a \in M$ не виконується aRa.

Відношення *більше*, *менше*, *є сином* антирефлексивні, а відношення R_6 не є ні рефлексивним, ні антирефлексивним.

Усі елементи головної діагоналі матриці C для рефлексивного відношення на скінченній множині M дорівнюють 1, а для антирефлексивного відношення вони дорівнюють 0.

3. Відношення R називають **симетричним**, якщо для всіх $a, b \in M$ таких, що aRb, маємо bRa.

4. Відношення R називають **антисиметричним**, якщо для всіх $a, b \in M$ таких, що aRb і bRa, маємо $a = b$.

Наприклад, відношення R_3, R_4, R_5, R_6, R_8 – симетричні, а відношення R_1, R_2, R_7 – антисиметричні.

Неважко переконатися, що відношення R симетричне тоді й тільки тоді, коли $R = R^{-1}$.

5. Відношення R називають **транзитивним**, якщо із співвідношень aRb і $bR\,c$ випливає aRc.

Наприклад, відношення R_1, R_2, R_4, R_5, R_7, R_8, R_9 транзитивні, а відношення R_3, R_6 не транзитивні.

Неважко переконатися, що відношення R транзитивне тоді й тільки тоді, коли $R \circ R \subseteq R$ (**критерій транзитивності відношення**).

Зауважимо, що коли відношення R має будь-яку з наведених вище властивостей, тоді обернене відношення R^{-1} також має ту саму властивість. Отже, операція обернення зберігає всі п'ять властивостей відношень.

Відношення R на множині M називають **толерантним** (**відношенням толерантності**, або просто **толерантністю**), якщо воно рефлексивне й симетричне.

Для довільного відношення R означимо нову операцію. Відношення R^+ називають **транзитивним замиканням** відношення R на M, якщо $a\,R^+b$, $a, b \in M$, тоді й тільки тоді, коли в множині M існує така послідовність елементів $a_1, a_2, \ldots, a_k$, що

$$a_1 = a,\ a_k = b \text{ і } a_1\, R\, a_2,\ a_2\, R\, a_3,\ \ldots,\ a_{k-1}\, R\, a_k.$$

Зокрема, k може дорівнювати 2; отже, якщо aRb, то $a\,R^+b$. Тому $R \subseteq R^+$.

Іншим рівносильним означенням цього поняття є таке: **транзитивним замиканням** відношення R на множині M називають найменше транзитивне відношення на M, що включає R.

Наприклад, нехай M – множина точок на площині й aRb, $a, b \in M$, якщо точки a та b з'єднані відрізком. Тоді cR^+d, коли існує ламана лінія, що з'єднує точки c і d, $c, d \in M$.

Можна довести, що відношення R транзитивне тоді й тільки тоді, коли $R^+ = R$. Крім того, справджується рівність

$$R^+ = R^{(1)} \cup R^{(2)} \cup \ldots \cup R^{(k)} \cup \ldots .$$

Відношення $R^+ \cup i_M$ позначають через R^* і називають **рефлексивним транзитивним замиканням** відношення R на множині M.

Приклад 2.27.

1. Навести приклад двох антирефлексивних відношень R_1 і R_2 на множині $M = \{1, 2, 3\}$, композиція $R_1 \circ R_2$ яких не буде антирефлексивним відношенням. Наприклад,

$$R_1 = \{(1, 2)\},\ R_2 = \{(2, 1)\}.$$

2. Довести, що композиція $R_1 \circ R_2$ симетричних відношень R_1 і R_2 є симетричним відношенням тоді й тільки тоді, коли

$$R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1.$$

Нехай для симетричних відношень R_1 і R_2 їхня композиція $R_1 \circ R_2$ є симетричним відношенням. Розглянемо довільний елемент $(x, y) \in R_1 \circ R_2$, тоді $(y, x) \in R_1 \circ R_2$. Звідси матимемо таку послідовність рівносильних тверджень:

$$(y, x) \in R_1 \circ R_2 \Leftrightarrow (\exists z\colon (y, z) \in R_1 \wedge (z, x) \in R_2) \Leftrightarrow (\exists z\colon$$
$$(z, y) \in R_1 \wedge (x, z) \in R_2) \Leftrightarrow (x, y) \in R_2 \circ R_1.$$

Отже, доведено рівність $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.

Навпаки, припустимо, що для симетричних відношень R_1 і R_2 виконується $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$. Розглянемо довільний елемент $(x, y) \in R_1 \circ R_2$, тоді матимемо:

$$(x, y) \in R_2 \circ R_1 \Leftrightarrow (\exists z\colon (x, z) \in R_2 \wedge (z, y) \in R_1) \Leftrightarrow (\exists z\colon$$
$$(z, x) \in R_2 \wedge (y, z) \in R_1) \Leftrightarrow (y, x) \in R_1 \circ R_2.$$

Симетричність $R_1 \circ R_2$ доведено.

3. Довести, що відношення R на множині M транзитивне тоді й тільки тоді, коли $R \circ R \subseteq R$.

Припустимо, що R – транзитивне відношення, $(x, y)\in R\circ R$, тоді існує z такий, що $(x, z)\in R$ і $(z, y)\in R$, отже, $(x, y)\in R$ (за властивістю транзитивності R). Навпаки, нехай виконується включення $R\circ R \subseteq R$. Розглянемо елементи $(x, y)\in R$ і $(y, z)\in R$, тоді $(x, z)\in R\circ R$ і з умови отримаємо $(x, z)\in R$. Отже, R – транзитивне відношення.

4. Довести, що композиція $R_1 \circ R_2$ транзитивних відношень R_1 і R_2 є транзитивним відношенням, якщо $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.

Нехай для транзитивних відношень R_1 і R_2 виконується рівність $R_1\circ R_2 = R_2\circ R_1$. Розглянемо елементи $(x, y)\in R_1\circ R_2$ і $(y, z)\in R_1\circ R_2$. Тоді

$$(x, z)\in(R_1\circ R_2)\circ(R_1\circ R_2).$$

Використовуючи асоціативність операції композиції (для будь-яких відношень R_1, R_2, R_3 виконується $(R_1\circ R_2)\circ R_3 = R_1\circ(R_2\circ R_3)$), умову даної задачі, результат попередньої, а також приклад 2.25(5), отримаємо:

$$(R_1\circ R_2)\circ(R_1\circ R_2) = R_1\circ(R_2\circ R_1)\circ R_2 = R_1\circ(R_1\circ R_2)\circ R_2 =$$
$$= (R_1\circ R_1)\circ(R_2\circ R_2) \subseteq R_1\circ R_2.\text{ Отже, } (x, z)\in R_1\circ R_2.$$

5. Знайти помилку в наведених міркуваннях. Якщо R – симетричне й транзитивне відношення на множині M, то R – рефлексивне, оскільки із того, що $(a, b)\in R$, послідовно випливає

$$(b, a)\in R \text{ і } (a, a)\in R.$$

Якщо $\mathrm{Pr}_1 R \neq M$, то із симетричності й транзитивності відношення R не випливає його рефлексивність. Наприклад, відношення

$$R = \{(1, 3), (3, 1), (1, 1), (3, 3)\}$$

є симетричним і транзитивним, але не є рефлексивним на множині $M = \{1, 2, 3\}$.

6. Довести, що відношення

$$T = \{(x, y) \mid |x - y| < 1,\ x, y\in R\}$$

на множині дійсних чисел R є толерантним.

Рефлексивність T випливає із того, що для всіх дійсних x виконується нерівність $|x - x| < 1$, отже, $(x, x)\in T$. Симетричність T випливає із рівності $|x - y| = |y - x|$.

7. Довести, що для транзитивного відношення R виконується $R^{(k)} \subseteq R$ для всіх $k \geq 1$.

Доведення здійснимо методом математичної індукції. Для $k = 1$ твердження справджується, оскільки за означенням $R^{(1)} = R$. Припустимо, що для транзитивного відношення R виконується $R^{(k)} \subseteq R$ для всіх $k \leq n$. Застосувавши до припущення індукції $R^{(n)} \subseteq R$ результат задачі із прикладу 2.25(5), маємо $R^{(n)} \circ R \subseteq R \circ R$, тобто $R^{(n+1)} \subseteq R \circ R$. За критерієм транзитивності для відношення R виконується $R \circ R \subseteq R$. Отже, $R^{(n+1)} \subseteq R$.

8. Довести, що $R^+ = R^{(1)} \cup R^{(2)} \cup \ldots \cup R^{(k)} \cup \ldots$.

Якщо $(a, b) \in R^+$, то за означенням транзитивного замикання існує послідовність елементів $a_1, a_2, ..., a_k$ така, що $a_1 = a$, $a_k = b$ і $a_1 R a_2, a_2 R a_3, ..., a_{k-1} R a_k$. Звідси робимо висновок, що $a_1 R^{(k-1)} a_k$, тобто $a R^{(k-1)} b$ для деякого k ($k \geq 2$). Отже,

$$(a, b) \in R^{(1)} \cup R^{(2)} \cup \ldots \cup R^{(k)} \cup \ldots$$

Навпаки, нехай $(a, b) \in R^{(1)} \cup R^{(2)} \cup \ldots \cup R^{(k)} \cup \ldots$. Тоді $(a, b) \in R^{(k)}$ для якогось k, $k = 1, 2, ...$ З означення відношення $R^{(k)}$ і властивостей операції композиції випливає, що існує набір елементів $z_1, z_2, ..., z_{k+1}$, для яких виконуються співвідношення $z_1 = a$, $z_{k+1} = b$ і $z_i R z_{i+1}$ для $i = 1, 2, ..., k$. Отже, $(a, b) \in R^+$. ◄

Деякі відношення посідають особливе місце в математиці. Розглянемо ці відношення окремо в наступних параграфах.

Завдання для самостійної роботи

1. Нехай на множині всіх людей P означено відношення:

$$F = \{(x, y) \mid x, y \in P \text{ та } x - \text{батько } y\},$$
$$D = \{(x, y) \mid x, y \in P \text{ та } x - \text{донька } y\}.$$

Описати такі відношення:

(а) $D \circ F$; (в) $F \circ D$; (д) $D \circ F^{-1}$; (є) $F^{-1} \circ F$;

(б) $D \circ D$; (г) $D^{-1} \circ F^{-1}$; (е) $F^{-1} \circ D^{-1}$; (ж) $D^{-1} \circ F$.

2. Довести, що для довільного відношення R на множині M виконується:

(а) $\mathrm{Pr}_2 R = \mathrm{Pr}_1 R^{-1}$; (б) $\mathrm{Pr}_1 R = \mathrm{Pr}_2 R^{-1}$;

(в) $\mathrm{Pr}_1 R = M \Leftrightarrow i_M \subseteq R \circ R^{-1}$; (г) $\mathrm{Pr}_2 R = M \Leftrightarrow i_M \subseteq R^{-1} \circ R$.

3. Довести, що для довільних відношень R_1 і R_2 виконується $R_1 \circ R_2 = \varnothing$ тоді й тільки тоді, коли $\mathrm{Pr}_2 R_1 \cap \mathrm{Pr}_1 R_2 = \varnothing$.

4. Визначити, для яких відношень R на множині M виконується рівність:

(а) $R \circ i_M = i_M$; (б) $R \circ i_M = R$; (в) $R^{-1} \circ R = i_M$; (г) $R \circ i_M \circ R = i_M$;

(д) $i_M \circ R \circ i_M = i_M$; (е) $R \circ R = i_M$.

5. На множині $M = \{1, 2, 3, 4\}$ задано відношення:

$R_1 = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (4, 2), (4, 4)\}$;

$R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\}$;

$R_3 = \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (1, 2), (3, 1), (3, 3), (4, 1)\}$;

$R_4 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$;

$R_5 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (4, 1), (4, 3)\}$.

Визначити, які з цих відношень:

(а) рефлексивні; (б) антирефлексивні; (в) симетричні;

(г) антисиметричні; (д) транзитивні.

Побудувати графіки, графи й матриці заданих відношень.

6. Проінтерпретуйте властивості відношень за допомогою їх матриць, графіків і діаграм.

7. Довести, що коли $R_1 \subseteq R_2$, тоді для довільного відношення Q виконується:

(а) $R_1 \circ Q \subseteq R_2 \circ Q$; (б) $R_1^{-1} \subseteq R_2^{-1}$.

8. Довести, що відношення R на множині M є рефлексивним тоді й лише тоді, коли:

(а) $i_M \subseteq R$; (б) $i_M \cap R = i_M$; (в) $i_M \cup R = R$.

9. Навести приклад двох антирефлексивних відношень R_1 і R_2 на множині $M = \{1, 2, 3\}$, композиція $R_1 \circ R_2$ яких буде рефлексивним відношенням.

10. Довести, що відношення R є симетричним тоді й тільки тоді, коли:

(а) $R = R^{-1}$; (б) $R^{-1} \subseteq R$; (в) $R \subseteq R^{-1}$.

11. Довести, що композиція $R_1 \circ R_2$ симетричних відношень R_1 і R_2 є симетричним відношенням тоді й тільки тоді, коли $R_2 \circ R_1 \subseteq R_1 \circ R_2$.

12. Довести, що відношення R на множині M антисиметричне тоді й тільки тоді, коли $R \cap R^{-1} \subseteq i_M$.

13. Довести, що об'єднання $R_1 \cup R_2$ антисиметричних відношень R_1 і R_2 на множині M є антисиметричним відношенням тоді й лише тоді, коли $R_1 \cap R_2^{-1} \subseteq i_M$.

14. Довести, що рефлексивне відношення R є транзитивним тоді й тільки тоді, коли $R \circ R = R$.

15. Довести, що перетин транзитивних відношень є транзитивним відношенням.

16. Довести, що для довільних толерантних відношень R_1 і R_2 відношення

$$R_1 \cup R_2,\ R_1 \cap R_2,\ R_1^{-1},\ R_1 \circ R_2 \cup R_2 \circ R_1 \text{ і } R_1 \circ R_2 \cap R_2 \circ R_1$$

будуть також толерантними.

17. Побудувати толерантні відношення R_1 і R_2 на множині $M = \{1, 2, 3\}$, композиція $R_1 \circ R_2$ яких не є толерантним відношенням.

18. Довести, що для довільного транзитивного відношення R і для будь-якого $k = 0, 1, 2, \ldots$ відношення $R^{(k)}$ є транзитивним.

19. Довести, що коли R – рефлексивне і транзитивне відношення, тоді $R^{(k)} = R$ для всіх натуральних k.

20. Довести, що для довільного відношення R на скінченній множині M ($|M| = n$) має місце рівність $R^{+} = R^{(1)} \cup R^{(2)} \cup \ldots \cup R^{(n)}$.

21. Довести, що відношення R транзитивне тоді й тільки тоді, коли $R^{+} = R$.

22. Нехай C – матриця відношення R, заданого на скінченній множині M ($|M| = n$). Побудувати матрицю $C^{(k)}$ відношення $R^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

2.7. Відношення еквівалентності

Відношення R на множині M називають **відношенням еквівалентності** (або просто **еквівалентністю**), якщо воно рефлексивне, симетричне й транзитивне.

Зважаючи на важливість відношення еквівалентності, дамо розгорнуте означення цього поняття. Відношення R на множині M є **відношенням еквівалентності**, або **еквівалентністю**, якщо воно має такі властивості:

1) aRa для всіх $a \in M$ (рефлексивність);

2) якщо aRb, то bRa для $a, b \in M$ (симетричність);

3) якщо aRb і bRc, то aRc для $a, b, c \in M$ (транзитивність).

Приклад 2.28.

1. Відношення рівності i_M на будь-якій множині M є відношенням еквівалентності. Рівність – це мінімальне відношення еквівалентності, оскільки з видаленням принаймні одного елемента з i_M відношення припиняє бути рефлексивним, отже, і відношенням еквівалентності.

2. Відношення подібності на множині всіх трикутників є еквівалентністю.

3. Важливу роль відіграє в математиці відношення *мають однакову остачу при діленні на k*, або *конгруентні за модулем k*, яке є відношенням еквівалентності на множині N натуральних чисел для будь-якого фіксованого $k \in N$. **Відношення конгруентності за модулем** k часто позначають

$$a \equiv b \pmod{k}$$

a та b конгруентні за модулем k.

Цьому відношенню належать, наприклад, пари натуральних чисел (17, 22), (1221, 6), (42, 57) для $k = 5$, тобто $17 \equiv 22 \pmod 5$, $1221 \equiv 6 \pmod 5$, $42 \equiv 57 \pmod 5$.

4. На множині $M = N \times N$ означимо відношення R:

$$((a, b), (c, d)) \in R \Leftrightarrow a + d = b + c.$$

Довести, що R – відношення еквівалентності на множині M.

Рефлексивність R випливає із того, що $a + b = b + a$; симетричність – із того, що коли $a + d = b + c$, то $c + b = d + a$. Для обґрунтування транзитивності розглянемо пари $((a, b), (c, d)) \in R$ і $((c, d), (e, f)) \in R$. Тоді, додавши почленно рівності $a + d = b + c$ і $c + f = d + e$, отримаємо $a + f = b + e$, тобто $((a, b), (e, f)) \in R$.

5. Нехай $M = N \times N$. Означимо на множині M відношення R: $(a, b)\, R\, (c, d)$ тоді й тільки тоді, коли $ab = cd$. Довести, що R є еквівалентністю на M. Виписати всі елементи класів еквівалентності $[(1, 1)]$, $[(2, 2)]$, $[(4, 3)]$, $[(1, 23)]$ і $[(6, 8)]$ за відношенням R.

Для доведення, що R є еквівалентністю на множині M, див. попередню задачу. Класу еквівалентності $[(a, b)]$ належать усі такі пари (c, d) натуральних чисел, що $cd = ab$. Отже,

$[(1, 1)] = \{(1, 1)\}$,

$[(2, 2)] = \{(1, 4), (4, 1), (2, 2)\}$,

$[(4, 3)] = \{(1, 12), (12, 1), (2, 6), (6, 2), (3, 4), (4, 3)\}$,

$[(1, 23)] = \{(1, 23), (23, 1)\}$,

$[(6, 8)] = \{(1, 48), (48, 1), (2, 24), (24, 2), (3, 16), (16, 3), (4, 12), (12, 4), (6, 8), (8, 6)\}$.

6. Довести, що об'єднання $R_1 \cup R_2$ двох еквівалентностей R_1 і R_2 є еквівалентністю тоді й тільки тоді, коли $R_1 \cup R_2 = R_1 \circ R_2$.

Нехай відношення R_1, R_2 і $R_1 \cup R_2$ є еквівалентностями. Доведемо рівність $R_1 \cup R_2 = R_1 \circ R_2$. Розглянемо елемент $(a, b) \in R_1 \cup R_2$, тоді $(a, b) \in R_1$ або $(a, b) \in R_2$. Із рефлексивності R_1 і R_2 маємо $(b, b) \in R_2$ та $(a, a) \in R_1$, отже, в обох ситуаціях отримаємо $(a, b) \in R_1 \circ R_2$. Для доведення оберненого включення розглянемо довільний елемент $(a, b) \in R_1 \circ R_2$. Тоді існує елемент c такий, що $(a, c) \in R_1$ і $(c, b) \in R_2$. Використавши властивості операції об'єднання, матимемо $(a, c) \in R_1 \cup R_2$ і $(c, b) \in R_1 \cup R_2$. За умовою відношення $R_1 \cup R_2$ транзитивне, тому $(a, b) \in R_1 \cup R_2$. Необхідність доведено.

Припустимо, що для еквівалентностей R_1 і R_2 виконується рівність $R_1 \cup R_2 = R_1 \circ R_2$. Рефлексивність і симетричність об'єднання $R_1 \cup R_2$ неважко вивести з рефлексивності й симетричності R_1 і R_2.

Для доведення транзитивності відношення $R_1 \cup R_2$ розглянемо пари $(a, b) \in R_1 \cup R_2$ і $(b, c) \in R_1 \cup R_2$. Останні умови рівносильні такій сукупності співвідношень:

– або 1) $(a, b) \in R_1$ і $(b, c) \in R_1$, – або 2) $(a, b) \in R_1$ і $(b, c) \in R_2$,

– або 3) $(a, b) \in R_2$ і $(b, c) \in R_1$, – або 4) $(a, b) \in R_2$ і $(b, c) \in R_2$.

Для 1) або 4) із транзитивності R_1 і R_2 отримаємо, відповідно $(a, c) \in R_1$ або $(a, c) \in R_2$, звідки матимемо $(a, c) \in R_1 \cup R_2$.

У випадку 2) маємо $(a, c) \in R_1 \circ R_2$, тому $(a, c) \in R_1 \cup R_2$ (за умовою).

Нарешті, для 3) послідовно отримаємо: $(b, a) \in R_2$ і $(c, b) \in R_1$

$$\text{(симетричність } R_1 \text{ і } R_2) \Rightarrow (c, a) \in R_1 \circ R_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (c, a) \in R_1 \cup R_2 \Rightarrow (a, c) \in R_1 \cup R_2$$

(оскільки $R_1 \cup R_2$ – симетричне відношення).

7. Довести, що для довільного відношення еквівалентності R виконується рівність $R \circ R = R$.

Нехай $(a, b) \in R \circ R$, тоді існує c такий, що $(a, c) \in R$ і $(c, b) \in R$. Оскільки R транзитивне, то $(a, b) \in R$. З іншого боку, якщо $(a, b) \in R$, то із рефлексивності R маємо $(b, b) \in R$, отже, $(a, b) \in R \circ R$.

8. Довести, що композиція $R_1 \circ R_2$ двох еквівалентностей R_1 і R_2 є еквівалентністю, якщо $R_1 \circ R_2 = R_1 \cup R_2$.

Рефлексивність композиції легко вивести із рефлексивності R_1 і R_2: для довільного елемента $a \in M$ $(a, a) \in R_1$ і $(a, a) \in R_2$, отже, $(a, a) \in R_1 \circ R_2$. Для доведення симетричності розглянемо елемент $(a, b) \in R_1 \circ R_2$, тоді послідовно матимемо:

$$(a, b) \in R_1 \cup R_2 \Leftrightarrow ((a, b) \in R_1 \vee (a, b) \in R_2) \Leftrightarrow ((b, a) \in R_1 \vee$$
$$\vee (b, a) \in R_2) \Leftrightarrow (b, a) \in R_1 \cup R_2 \Leftrightarrow (b, a) \in R_1 \circ R_2.$$

Для обґрунтування транзитивності $R_1 \circ R_2$ візьмемо пари $(a, b) \in R_1 \circ R_2$ і $(b, c) \in R_1 \circ R_2$, тоді за умовою $(a, b) \in R_1 \cup R_2$ і $(b, c) \in R_1 \cup R_2$. Далі див. доведення достатності в прикл. 2.26 (6). ◄

Сукупність множин $\{B_i \mid i \in I\}$ називають **розбиттям** множини A, якщо

$$\bigcup_{i \in I} B_i = A \text{ та } B_i \cap B_j = \varnothing \text{ для } i \neq j.$$

Множини B_i, $i \in I$, є підмножинами множини A. Їх називають **класами**, **суміжними класами**, **блоками** чи **елементами** розбиття. Очевидно, що кожний елемент $a \in A$ належить одній і тільки одній множині B_i, $i \in I$.

Припустимо, що на множині M задано відношення еквівалентності R. Виконаємо таку побудову. Виберемо якийсь елемент $a \in M$ та утворимо підмножину

$$S_a^R = \{x \mid x \in M \text{ і } a\, R\, x\},$$

що складається зі всіх елементів множини M, еквівалентних елементу a. Потім візьмемо другий елемент $b \in M$ такий, що $b \notin S_a^R$ і утворимо множину

$$S_b^R = \{\, x \mid x \in M \text{ і } b\, R\, x \,\}$$

з елементів, еквівалентних b і т. д. Таким чином одержимо сукупність множин (можливо, нескінченну)

$$\left\{S_a^R, S_b^R, \ldots\right\}.$$

Побудовану сукупність $\{S_i^R \mid i \in I\}$ називають **фактормножиною** множини M за еквівалентністю R і позначають M/R.

Приклад 2.29.

1. Фактормножина за відношенням рівності E для будь-якої множини M має вигляд $M/E = \{\{a\} \mid a \in M\}$.

2. Фактормножина для відношення *конгруентні за модулем* 3 на множині N натуральних чисел складається із трьох класів

$$\{3k \mid k \in N\},\ \{3k-1 \mid k \in N\} \text{ і } \{3k-2 \mid k \in N\}. ◄$$

Доведемо, що фактормножина M/R є розбиттям множини M. Оскільки за побудовою кожний елемент множини M належить принаймні одній із множин S_i^R, $i \in I$, то

$$\bigcup_{i \in I} S_i^R = M.$$

Тепер припустимо, що для деяких $S_a^R \neq S_b^R$ існує елемент $c \in S_a^R \cap S_b^R$. Тоді із $c \in S_a^R$ випливає aRc, а із $c \in S_b^R$ – bRc. Із симетричності та транзитивності відношення R виводимо aRb і bRa. Із співвідношення aRb і правила побудови множини S_a^R маємо $S_a^R \subseteq S_b^R$, а з bRa та правила побудови множини S_b^R одержуємо протилежне включення $S_b^R \subseteq S_a^R$. Отже, $S_a^R = S_b^R$, і з одержаної суперечності випливає справедливість сформульованого твердження.

Очевидно, що будь-які два елементи з одного класу S_i^R еквівалентні, а будь-які два елементи із різних класів фактормножини M/R нееквівалентні. Класи S_i^R називають **класами еквівалентності** за відношенням R. Клас еквівалентності, що містить елемент $a \in M$, часто позначають через $[a]_R$.

Потужність $|M/R|$ фактормножини M/R називають **індексом розбиття**, або **індексом відношення еквівалентності** R.

З іншого боку, припустимо, що для множини M задано деяке розбиття $\{S_i \mid i \in I\}$. Побудуємо відношення T на множині M за таким правилом: $a\,T\,b$ для $a, b \in M$ тоді й тільки тоді, коли елементи a та b належать одному класу даного розбиття. Неважко переконатись, що відношення T рефлексивне, симетричне і транзитивне, тобто є еквівалентністю на множині M.

Отже, існує взаємно однозначна відповідність між усіма можливими еквівалентностями на множині M і всіма розбиттями цієї множини. Інакше кажучи, кожному відношенню еквівалентності на множині M відповідає єдине розбиття даної множини на класи і, навпаки, кожне розбиття множини M однозначно задає певне відношення еквівалентності на M.

Нехай R – відношення еквівалентності на множині M. Відображення множини M на фактормножину M/R, що кожному елементу $a \in M$ ставить у відповідність клас еквівалентності $[a]_R$, якому належить елемент a, називають **канонічним** (**природним**) **відображенням** множини M на фактормножину M/R.

Завдання для самостійної роботи

1. На множині $N \times N$ означимо відношення Q:

$$((a, b), (c, d)) \in Q \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c.$$

Довести, що Q – відношення еквівалентності на множині $N \times N$.

2. Нехай $M = N \times N$. Означимо на множині M відношення Q: $(a, b)\ Q\ (c, d)$ тоді й тільки тоді, коли $a + b = c + d$. Довести, що Q є еквівалентністю на M. Виписати всі елементи класів еквівалентності $[(1, 1)]$, $[(2, 2)]$, $[(4, 3)]$, $[(1, 23)]$ і $[(6, 8)]$ за відношенням R.

3. На множині N натуральних чисел означимо відношення R: mRn тоді й тільки тоді, коли $m/n = 2^k$ для деякого цілого k.

(а) Довести, що R – відношення еквівалентності на N.

(б) Скільки різних класів еквівалентності є серед $[1]_R$, $[2]_R$, $[3]_R$ і $[4]_R$?

(в) Скільки різних класів еквівалентності є серед $[6]_R$, $[7]_R$, $[12]_R$, $[24]_R$, $[28]_R$, $[42]_R$ і $[48]_R$?

4. Нехай у множині M зафіксовано деяку підмножину $K \subseteq M$. Означимо відношення R на $\beta(M)$: $A\ R\ B$ тоді й тільки тоді, коли $A \cap K = B \cap K$, $A, B \in \beta(M)$.

(а) Довести, що R – відношення еквівалентності на $\beta(M)$.

(б) Для $M = \{1, 2, 3\}$ і $K = \{1, 2\}$ знайти класи еквівалентності за відношенням R.

(в) Для $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ і $K = \{1, 2, 3\}$ визначити $[A]_R$, де $A = \{2, 3, 4\}$.

(г) Для $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ і $K = \{1, 2, 3\}$ визначити кількість класів еквівалентності та кількість підмножин множини M у кожному класі еквівалентності за відношенням R.

(д) Визначити кількість класів еквівалентності та кількість підмножин множини M у кожному класі еквівалентності за відношенням R, якщо $|M| = n$ і $|K| = m$.

5. Довести, що перетин будь-якої сукупності відношень еквівалентності на множині M є еквівалентністю на M.

6. Навести приклад двох еквівалентностей R_1 і R_2 на множині $M = \{1, 2, 3\}$ таких, що $R_1 \cup R_2$ не є еквівалентністю на множині M.

7. Навести приклад двох еквівалентностей R_1 і R_2 на множині $M = \{1, 2, 3\}$ таких, що $R_1 \circ R_2$ не є еквівалентністю на M.

8. Побудувати найменше відношення еквівалентності Q на множині $M = \{1, 2, 3, 4\}$, що включає задане відношення R:

(а) $R = \{(2, 4), (3, 1)\}$; (б) $R = \{(2, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 3)\}$.

9. Навести приклад відношення R на множині $M = \{1, 2, 3\}$, для якого виконується $R^+ = R$ і яке не є еквівалентністю.

10. Довести, що коли R – рефлексивне і транзитивне відношення на множині M, тоді $R \cap R^{-1}$ є відношенням еквівалентності на множині M.

11. Довести, що для довільного відношення еквівалентності R три наведені твердження рівносильні:

$$1)\ (x, y) \in R; \quad 2)\ [x]_R \cap [y]_R \neq \varnothing; \quad 3)\ [x]_R = [y]_R.$$

12. Побудувати всі можливі розбиття множини:

$$(а)\ M = \{a, b, c\}; \quad (б)\ M = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}.$$

13. Нехай M – скінченна множина. Яке відношення еквівалентності на M має:

(а) найбільший індекс; (б) найменший індекс?

14. Нехай R – відношення еквівалентності на скінченній множині M ($|M| = n$) і $|R| = k$. Довести, що $k - n$ – завжди парне число.

2.8. Відношення порядку

Відношення R на множині M називають **відношенням часткового (нестрогого) порядку**, якщо воно рефлексивне, антисиметричне і транзитивне, тобто:

1) $a\,R\,a$ для всіх $a \in M$ – **рефлексивність**;
2) коли $a\,R\,b$ і $b\,R\,a$, то $a = b$ – **антисиметричність**;
3) коли $a\,R\,b$ і $b\,R\,c$, то $a\,R\,c$ – **транзитивність**.

Множину M, на якій задано деякий частковий порядок, називають **частково впорядкованою**.

Елементи a, $b \in M$ назвемо **порівнюваними** за відношенням R, якщо виконується aRb або bRa.

Частково впорядковану множину M, у якій будь-які два елементи порівнювані між собою, називають **лінійно впорядкованою** множиною, або **ланцюгом**. Відповідне відношення R, задане на лінійно впорядкованій множині, називають **лінійним** (**досконалим**) **порядком**. Отже, відношення R на множині M називають відношенням **лінійного порядку**, якщо воно рефлексивне, антисиметричне, транзитивне й для будь-якої пари елементів a, $b \in M$ виконується aRb або bRa.

Для позначення відношень порядку використовуватимемо знаки $\leq$ *і* $\geq$, які повторюють звичайні математичні знаки нерівностей, тобто для відношення порядку R замість aRb записуватимемо $a \leq b$ або $b \geq a$ та читатимо відповідно *a менше або дорівнює b* або *b більше або дорівнює a*. Очевидно, що $\leq$ – обернене відношення до $\geq$.

За кожним відношенням часткового порядку $\leq$ на довільній множині M можна побудувати інше відношення $<$ на M, вважаючи, що $a < b$ тоді й лише тоді, коли $a \leq b$ і $a \neq b$. Це відношення називають **відношенням строгого порядку** на множині M. Зрозуміло, що відношення строгого порядку антирефлексивне, транзитивне, а також задовольняє умову сильної антисиметричності (асиметричності), тобто для жодної пари a, $b \in M$ не може одночасно виконуватись $a < b$ і $b < a$.

З іншого боку, за довільним відношенням строгого порядку $<$ на множині M однозначно можна побудувати відповідне відношення часткового (нестрогого) порядку $\leq$, поклавши $a \leq b$ тоді й тільки тоді, коли $a < b$ або $a = b$, a, $b \in M$. З огляду на такий простий зв'язок між відношеннями часткового (нестрогого) і строгого порядку можна обмежитися вивченням лише одного з них, наприклад $\leq$.

Приклад 2.30.

1. Традиційні відношення $\leq$ і $<$ ($\geq$ і $>$) – це відношення відповідно часткового й строгого порядку на множинах чисел N, Z і R. Більш того, множини N, Z і R, а також будь-які їхні підмножини лінійно впорядковані за відношеннями $\leq$ або $\geq$.

2. Частковим порядком є відношення рівності i_M на будь-якій множині M. Цей порядок іноді називають **тривіальним**.

3. Відношення нестрогого включення $\subseteq$ є відношенням часткового порядку, а відношення $\subset$ – відношенням строгого порядку на множині $\beta(A)$ усіх підмножин (булеані) заданої множини A.

4. Задамо відношення $\le$ і $<$ на множині R^n кортежів дійсних чисел довжиною n так:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \le (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

тоді й тільки тоді, коли $a_1 \le b_1$, $a_2 \le b_2$, …, $a_n \le b_n$; аналогічно $(a_1, a_2, \ldots, a_n) < (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ тоді й лише тоді, коли

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \le (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

і принаймні для однієї координати $i = 1, 2, \ldots, n$ виконується $a_i < b_i$. Тоді $(2, 3.7, 4) < (7, 24, 10)$, а кортежі $(1, 4, -1.7)$ і $(2, 2, 4)$ непорівнювані. Аналогічно можна ввести частковий порядок на множинах N^n, Z^n і Q^n.

5. Зафіксуємо строгий порядок розташування символів у довільному скінченному алфавіті $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, наприклад, покладемо, що $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Тоді природним чином можна означити **лексикографічний порядок** на множині A^m усіх слів довжиною m в алфавіті A, а саме: вважатимемо

$$a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_m} < a_{j_1}a_{j_2}\ldots a_{j_m}$$

тоді й тільки тоді, коли $a_{i_s} = a_{j_s}$ для $s = 1, 2, \ldots, k-1$ і $a_{i_k} < a_{j_k}$ для певного k, $k = 1, 2, \ldots, m$.

Лексикографічний порядок можна поширити на множину A^* всіх слів у алфавіті A, якщо доповнити алфавіт A додатковим (порожнім) символом p і вважати, що $p < a_i$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, n$. При порівнюванні двох слів різної довжини спочатку слово меншої довжини доповнюють праворуч такою кількістю порожніх символів p, щоб воно зрівнялося за довжиною з другим словом, після чого обидва слова порівнюють як слова однакової довжини.

Нехай $A = \{a, b, c\}$ і $a < b < c$, тоді

$$aac < aba,\ ab < abab,\ b < cba \text{ тощо.}$$

Лексикографічний порядок лежить в основі впорядкування всіх словників, енциклопедій, індексів (предметних або іменних покажчиків), довідників, списків, таблиць тощо.

6. У множині N натуральних чисел відношення *ділить* – це частковий порядок. Маємо $4 \leq 28$, $11 \leq 132$, $5 \leq 5$, $1 \leq n$ для будь-якого $n \in N$. Пари чисел 7 і 22, 13 і 35 непорівнювані. ◄

Нехай M – частково впорядкована множина, A – деяка її непорожня підмножина. **Верхньою гранню** підмножини $A \subseteq M$ у множині M називають елемент $b \in M$ такий, що $a \leq b$ для всіх $a \in A$. Елемент b називають **найбільшим елементом** множини M, якщо b – верхня грань множини M.

Аналогічно елемент c частково впорядкованої множини M називають **нижньою гранню** підмножини $A \subseteq M$, якщо $c \leq a$ для будь-якого $a \in A$. Елемент c – **найменший** у множині M, якщо c – нижня грань самої множини M.

Отже, найбільший і найменший елементи, а також верхня й нижня грані (якщо вони існують) порівнювані відповідно зі всіма елементами даної множини M або підмножини A.

Елемент $x \in M$ називають **максимальним** у множині M, якщо не існує такого елемента $a \in M$, що $x < a$. Відповідно елемент $y \in M$ називають **мінімальним** у множині M, якщо не існує такого елемента $a \in M$, що $a < y$.

Очевидно, що коли в частково впорядкованій множині M існує найбільший елемент, то це єдиний максимальний елемент множини M. Аналогічно найменший елемент множини M – єдиний її мінімальний елемент. Зауважимо також, що частково впорядкована множина M може не мати найбільшого (найменшого) елемента й водночас мати один або кілька максимальних (мінімальних) елементів. У лінійно впорядкованій множині поняття найбільшого й максимального (найменшого й мінімального) елементів збігаються.

Приклад 2.31.

1. У множині Z цілих чисел із традиційним відношенням порядку множина N натуральних чисел має найменший елемент (число 1) і не має найбільшого елемента. Будь-яке від'ємне число, а також 0, є нижніми гранями для N.

2. У довільній множині M із тривіальним порядком i_M (відношенням рівності) кожен елемент $a \in M$ є одночасно максимальним і мінімальним. Найбільшого й найменшого елементів у множині M немає.

3. Булеан $\beta(A)$ множини A з відношенням часткового порядку $\subseteq$ містить найменший елемент – порожню множину – і найбільший елемент – саму множину A. У множині D усіх непорожніх підмножин множини A (тобто в множині $\beta(A)\backslash\{\varnothing\}$) немає найменшого елемента, але всі одноелементні множини $\{a\}$, $a \in A$, є мінімальними елементами множини D.

4. У множині M усіх натуральних дільників числа $n \in N$, частково впорядкованій за відношенням "ділить", число 1 – найменший елемент, а n – найбільший. ◄

Завдання для самостійної роботи

1. Означимо відношення R на множині цілих чисел Z так: mRn тоді й тільки тоді, коли $m - n$ – невід'ємне парне число. Довести, що R – частковий порядок на Z. Чи є R лінійним порядком?

2. Нехай M – довільна множина. Означимо відношення R на множині $\beta(M) \times \beta(M)$: $(A,B)\, R\, (C,D)$ тоді й тільки тоді, коли $A \,\Delta\, B \subseteq C \,\Delta\, D$, A, B, C, $D \in \beta(M)$. Чи є R відношенням часткового порядку?

3. Нехай $\leq_A$ – частковий порядок на множині A, $\leq_B$ – частковий порядок на множині B. Назвемо **прямим добутком** частково впорядкованих множин A та B множину $A \times B$ із заданим на ній відношенням $\leq$: $(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 \leq_A a_2$ та $b_1 \leq_B b_2$. Довести, що $\leq$ – частковий порядок на $A \times B$.

4. Довести чи спростувати таке твердження: якщо $\leq_A$ – лінійний порядок на множині A, а $\leq_B$ – лінійний порядок на множині B, то відношення $\leq$, означене в попередній задачі, є лінійним порядком на множині $A \times B$.

5. Нехай M – довільна множина. Означимо відношення R на множині $\beta(M) \times \beta(M)$: $(A,B)\, R\, (C,D)$ тоді й тільки тоді, коли $A \subseteq C$ і $B \subseteq D$, A, B, C, $D \in \beta(M)$. Визначити, чи є R:

(а) відношенням часткового порядку;

(б) відношенням лінійного порядку?

6. Нехай R – транзитивне відношення на множині M. Довести, що R є частковим порядком на M тоді й тільки тоді, коли

$$R \cap R^{-1} = i_M.$$

7. Довести, що об'єднання $R_1 \cup R_2$ відношень часткового порядку R_1 і R_2 на множині M є частковим порядком на множині M тоді й тільки тоді, коли $R_1 \circ R_2 \cup R_2 \circ R_1 \subseteq R_1 \cup R_2$ і $R_1 \cap R_2^{-1} = i_M$.

8. Нехай $\leq$ і $<$ – традиційні відношення порядку на множині натуральних чисел N. Довести, що:

(а) $< \circ < \neq <$; (б) $\leq \circ < = <$; (в) $\leq \circ \geq = N^2$.

9. Довести, що будь-яка непорожня скінченна частково впорядкована множина A містить мінімальний і максимальний елементи.

10. Довести, що скінченна частково впорядкована множина має найменший (найбільший) елемент тоді й тільки тоді, коли вона містить рівно один мінімальний (максимальний) елемент. Чи це так для нескінченних частково впорядкованих множин?

11. Знайти всі множини M, для яких існує повний порядок R на M такий, що R^{-1} також є повним порядком на M.

2.9. Парадокси теорії множин

Слово **парадокс** має грецьке походження та перекладається українською як *несподіваний*, *дивний*. Це слово вживають щодо висловлення (положення, ідеї), яке суттєво відрізняється від загальноприйнятого традиційного уявлення. Уживання терміна "парадокс" стосовно суперечностей, виявлених різними математиками в теорії множин Г. Кантора, є наївною спробою зменшити їх значення й надати їм характеру логічних курйозів, штучних, неприродних конструкцій. Точніше суть явища передає назва **антиномії теорії множин**, оскільки термін *антиномія* є синонімом терміна *суперечність*. Однак за традицією називатимемо сформульовані нижче положення парадоксами.

Парадокс Б. Рассела. Для будь-якої множини M коректним є питання, чи належить множина M собі як окремий елемент, тобто чи є множина M елементом самої себе, чи ні. Наприклад, множина всіх множин є множиною й тому належить сама собі, а множина всіх будинків у місті не є будинком, множина студентів в аудиторії не є студентом.

Отже, коректно поставити сформульоване питання й щодо множини всіх множин, які не будуть власними елементами. Нехай M – множина всіх тих множин, що не є елементами самих себе. Розглянемо питання: а чи є сама множина M елементом самої себе? Якщо припустити, що $M \in M$, то із означення множини M випливає $M \notin M$. Якщо ж припустимо, що $M \notin M$, то з того самого означення дістанемо $M \in M$.

Близьким до парадокса Рассела є **парадокс цирульника**. Цирульник – це мешканець міста, який голить тих і тільки тих мешканців міста, які не голяться самі. Виникає проблема з визначенням множини C усіх тих мешканців міста, яких голить цирульник. Міркуючи аналогічно тому, як це було зроблено в парадоксі Рассела, дійдемо висновку, що цирульник голить себе в тому й тільки в тому випадку, коли він не голить сам себе, тобто цирульник належить множині C тоді й лише тоді, коли він не належить C.

Багато хто із математиків на початку XX ст. не надавав цим парадоксам особливого значення, оскільки в той час теорія множин була відносно новою галуззю математики й не зачіпала інтересів більшості фахівців. Однак їхні більш відповідальні та проникливі колеги зрозуміли, що виявлені парадокси стосуються не тільки теорії множин і побудованих на ній розділів класичної математики, але й безпосередньо пов'язані з логікою взагалі, яка є головним інструментом математики.

Зокрема, парадокс Рассела можна переформулювати в термінах логіки й таким чином додати до відомих із давніх часів логічних парадоксів: парадокса брехуна (людина, яка завжди каже неправду, одного разу мовить: *Те*, *що я сказав*, *– брехня*), парадокса всемогутньої істоти (чи **може** всемогутня істота створити такий камінь, який вона **не зможе** підняти?) тощо.

Гостро постало питання про обґрунтування засад математики. На початку двадцятого століття виникли три основні напрями досліджень з обґрунтування сучасної математики. Коротко подамо суть кожного з них.

1. Логіцизм. Основною тезою логіцизму є положення, що першооснова математики – це логіка, а математика – лише частина логіки, тобто всі математичні істини складають власну підмножину множини всіх логічних істин.

Основні ідеї й методи логіцизму було вперше викладено у великій праці А. Уайтхеда і Б. Рассела "Принципи математики", що вийшла друком на початку другого десятиріччя XX ст.

Незважаючи на те що в межах логіцизму проблему обґрунтування математики не було остаточно розв'язано, усе ж було зроблено чимало для з'ясування деяких важливих аспектів логічної структури математики.

2. Інтуїціонізм. Основними засадами інтуїціонізму є такі:

1) основою математики вважають поняття натурального числа, причому систему натуральних чисел покладають інтуїтивно відомою;

2) усі інші математичні об'єкти будують на основі натуральних чисел суто конструктивно за допомогою скінченної кількості застосувань скінченної кількості конкретних операцій.

Доведення існування математичного об'єкта зводиться до побудови конкретного алгоритму, тобто визнаються лише конструктивні доведення існування математичних об'єктів. Зокрема, не визнається доведення існування математичних об'єктів методом від супротивного;

3) закон виключеного третього незастосовний до нескінченних множин (закон виключеного третього – це логічна аксіома, згідно з якою із двох тверджень *А* та *не А* тільки одне істинне);

4) визнається абстракція потенційної нескінченності та відкидається абстракція актуальної нескінченності.

Обґрунтування математики в межах інтуїціонізму натрапляє на дві основні перешкоди: значну частину її важливих розділів не вдається побудувати засобами інтуїціонізму або ж така побудова має досить громіздкий і штучний вигляд, який не задовольняє переважну більшість як математиків-теоретиків, так і практиків.

Наступним кроком у розвитку інтуїціонізму є конструктивний напрям (або **конструктивізм**), що розвивається на основі уточненого поняття алгоритму.

3. Формалізм. Засновником формалізму вважають Д. Гільберта. Цей напрям є подальшим поглибленням аксіоматичного методу в математиці. Основою будь-якої аксіоматичної теорії є перелік неозначуваних (первинних) понять і список аксіом, тобто положень, які беруть за вихідні та істинність яких декларують із самого початку. Додатково означають логічні правила, за допомогою яких з одних тверджень (зокрема аксіом) дістають інші.

Гільберт і його послідовники вважали, що кожен розділ математики можна повністю формалізувати, тобто за допомогою формальних виразів (формул) подати всі аксіоми, а всі математичні (логічні) доведення звести до суто формальних перетворень над формулами.

Саме на основі ідей формалізму Е. Цермело 1908 року побудував першу формальну аксіоматичну теорію множин (**систему Цермело–Френкеля**, або *ZF*). Пізніше було запропоновано багато видозмін і вдосконалень *ZF* і кілька інших аксіоматичних теорій множин.

Проаналізувавши всі парадокси теорії множин, можна дійти висновку, що всі вони зумовлені необмеженим застосуванням **принципу абстракції** (або **принципу згортання**), згідно з яким для будь-якої властивості $P(x)$ існує відповідна множина елементів x, які мають властивість P. Якщо відкинути це припущення, то всі відомі парадокси теорії множин стають неможливими. Наприклад, із парадокса Рассела випливало б, що не існує множина множин, які не є елементами самих себе.

В усіх існуючих аксіоматичних теоріях множин неможливість антиномій ґрунтується на обмеженнях принципу згортання, тобто на обмеженні допустимих множин.

Розділ 3
КОМБІНАТОРИКА

Комбінаторика (інша назва – **комбінаторний аналіз**) – це розділ сучасної дискретної математики, що вивчає способи вибору й розміщення певних предметів, досліджує властивості та формулює методи обчислення кількостей різноманітних конфігурацій, які можна утворити з цих предметів. Оскільки конкретний вигляд (матеріальна сутність) предметів, які обирають і розміщують, не має для комбінаторного аналізу жодного значення, то при формулюванні та розв'язуванні задач комбінаторики використовують загальні поняття й терміни теорії множин і відношень. Особливо слід наголосити, що всі множини, з якими має справу комбінаторика, скінченні. Далі скрізь у цьому розділі під словами **множина** чи **підмножина** розумітимемо скінченні множини.

Користуючись мовою теорії множин, можна сказати, що комбінаторика вивчає різноманітні властивості множин, які можна утворити з підмножин певної скінченної множини. При цьому кожного разу задають певні правила, за якими формуються ці множини і підмножини.

Кількість елементів (потужність) основної скінченної множини називають **розмірністю** комбінаторної задачі.

Комбінаторні задачі мають давню історію. Однак тривалий час комбінаторика не привертала до себе уваги математиків. Пояснюється це значною мірою тим, що, оскільки комбінаторні задачі формулюють для скінченних множин, то для переважної більшості таких задач існує тривіальний метод їх розв'язання – перебір. Пошук зручніших алгоритмів і методів для задач малої розмірності не викликає інтересу в дослідників, тому що виграш порівняно з тривіальним алгоритмом перебору незначний. Водночас комбінаторні задачі великої розмірності навіть за умови застосування найефективніших алгоритмів потребують такої кількості операцій (обсягу обчислень), що стають практично нерозв'язними.

Ситуація кардинально змінилася з появою ЕОМ. З'явилась реальна можливість для розв'язання комбінаторних задач достатньо великої розмірності. Виявилося, що для таких задач різноманітні вдосконалення й оптимізація відповідних алгоритмів зумовлюють істотний виграш у часі та пам'яті. Це, у свою чергу, дає змогу додатково збільшити розмірність задач, які можна розв'язувати за допомогою "хороших" алгоритмів. Розробка й дослідження загальних принципів побудови оптимальних комбінаторних алгоритмів для розв'язування різноманітних комбінаторних задач – одні з найважливіших проблем сучасної теорії та практики програмування.

3.1. Комбінаторні обчислення для основних теоретико-множинних операцій. Формула включення-виключення

Якщо A та B – довільні скінченні множини, то безпосередньо із означення теоретико-множинних операцій випливають співвідношення $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$ і $|B \setminus A| = |B| - |A \cap B|$.

Як і раніше, через $|M|$ позначено кількість елементів скінченної множини M.

Очевидно також, що коли множини A та B не перетинаються, тобто $A \cap B = \varnothing$, то $|A \cup B| = |A| + |B|$. Зокрема,

$$|A \Delta B| = |A \setminus B| + |B \setminus A|.$$

Для довільних множин A та B маємо

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

А для трьох множин A, B, C справджується така рівність:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - \\ - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C|. \qquad (3.1)$$

При обчислюванні за формулою (3.1) потрібно послідовно додавати й віднімати певні кількості. Тому метод обчислення за цією формулою дістав назву **методу (принципу) включення та виключення.**

Приклад 3.1.

1. Зі 100 студентів факультету англійську мову знає 61 студент, французьку – 43, німецьку – 26, англійську і французьку – 25, англійську й німецьку – 17, французьку й німецьку – 14, усі три мови знають 8 студентів. Скільки студентів не знають жодної з трьох мов?

Позначимо через A, B, C множини студентів, які знають англійську, французьку та німецьку мову. Тоді кількість студентів, які знають принаймні одну мову, згідно з (3.1) становить

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| -$$
$$- (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C| =$$
$$= 61 + 43 + 26 - (25 + 17 + 14) + 8 = 92.$$

Отже, шукана кількість дорівнює $100 - 92 = 8$.

2. Знайти кількість натуральних чисел, що не перевищують 1000 і не діляться ні на 3, ні на 5, ні на 7.

Позначимо через A_k множину натуральних чисел, що не перевищують 1000 і діляться на k. Множиною натуральних чисел, що не перевищують 1000 і діляться або на 3, або на 5, або на 7, є множина

$$A_3 \cup A_5 \cup A_7,$$

а шуканою множиною є

$$E \setminus (A_3 \cup A_5 \cup A_7),$$

де множина-універсум E – всі натуральні числа від 1 до 1000. Тоді

$$|E \setminus (A_3 \cup A_5 \cup A_7)| = |E| - |E \cap (A_3 \cup A_5 \cup A_7)| =$$
$$= |E| - |A_3 \cup A_5 \cup A_7|$$

(див. співвідношення (2.3)).

$|E| = 1000$, а вираз $|A_3 \cup A_5 \cup A_7|$ обчислюють за (3.1). Крім того, $|A_k| = [1000/k]$ і $A_k \cap A_l = A_m$, де m – найменше спільне кратне чисел k і l (через $[x/y]$ позначено цілу частину від ділення x на y). ◄

Нарешті, розглянемо останню теоретико-множинну операцію – прямий добуток. Якщо $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – скінченні множини, то

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|. \tag{3.2}$$

Формулу (3.2) часто називають **основним правилом комбінаторики** (або **правилом множення**).

Нехай потрібно виконати одну за одною n дій. Якщо першу дію можна виконати k_1 способами, другу – k_2 способами і т. д., а n-ту – k_n способами, то всі n дій разом можна виконати $k_1k_2\ldots k_n$ способами.

Приклад 3.2.

1. Кількість слів довжиною m в алфавіті A ($|A| = n$) становить $|A^m| = |A|^m = n^m$. Цей результат випливає також із того, що побудову одного зі слів довжиною m можна розкласти на m кроків (або дій): перший крок – вибір першої літери слова, другий –

вибір другої літери слова і т. д., m-й – вибір останньої літери. Кожну з цих дій можна виконати n способами.

2. З'ясуємо, скількома способами можна розподілити k різних предметів серед n осіб.

Нехай A – множина осіб, серед яких розподіляють предмети. Кожному варіанту розподілу поставимо у відповідність кортеж $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k})$, де a_{i_j} – особа, яка одержала j-й предмет. Установлена відповідність взаємно однозначна, отже, множина варіантів розподілу містить таку саму кількість елементів, що й множина всіх кортежів довжиною k, утворених з елементів множини A. Тому шукане число становить $|A^k| = |A|^k = n^k$.

3. Нехай A та B – скінченні множини, $|A| = n$, $|B| = m$. Обчислимо кількість усіх можливих відображень множини A в множину B. Кожне відображення $\varphi: A \to B$ можна повністю задати його табл. 3.1, де $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – елементи множини A, а $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)$ – відповідні образи. Кожен з образів можна обрати m способами.

Таблиця 3.1

a_1		…	a_{n-1}	a_n
$\varphi(a_1)$	$\varphi(a_2)$	…	$\varphi(a_{n-1})$	$\varphi(a_n)$

Отже, існує m^n способів утворення рядка значень для відображення φ у табл. 3.1, тому кількість відображень типу $A \to B$ становить $|B^A| = m^n = |B|^{|A|}$.

4. Скількома способами можна розмістити на шахівниці 8 тур так, щоб вони не били одна одну?

8! Є вісім способів розташувати першу туру на першій вертикалі шахівниці, сім способів розташувати другу туру на другій вертикалі і т.д., один спосіб розташувати восьму туру на останній вертикалі.

5. Скільки існує n-значних десяткових чисел,

(а) усі цифри яких парні;

(б) у запису яких є принаймні одна парна цифра;

(в) у запису яких немає цифри 7;

(г) у запису яких обов'язково є цифра 5?

(а) $4 \cdot 5^{n-1}$. Першу цифру такого числа можна обрати чотирма способами (2, 4, 6 або 8), а кожну наступну – п'ятьма.

(б) $9 \cdot 10^{n-1} - 5^n$. Від кількості всіх n-значних десяткових чисел слід відняти кількість n-значних чисел, усі цифри яких непарні.

(в) $8 \cdot 9^{n-1}$.

(г) $9 \cdot 10^{n-1} - 8 \cdot 9^{n-1}$ (див. (б) і (в)).

6. Визначити, скільки різних натуральних дільників має число:

(а) $2^{1001} \cdot 3^{2015} \cdot 7^{2002}$; (б) 4004^{2124}.

(а) Довільний дільник даного числа має вигляд $2^n \cdot 3^m \cdot 7^k$, де n може набувати значення в діапазоні від 0 до 1001 (тобто є 1002 варіанти обрати n), m – від 0 до 2015, а k – від 0 до 2002. Отже, шукана кількість дільників дорівнює $1002 \cdot 2016 \cdot 2003$.

(б) Слід розкласти число 4004 на прості множники й застосувати міркування, наведені в попередньому пункті.

7. Нехай множина A містить n елементів, а множина B – m елементів. Визначити кількість:

(а) відповідностей; (б) усюди визначених відповідностей;

(в) функціональних відповідностей між множинами A та B.

(а) Оскільки відповідність C між A та B – це довільна підмножина декартового добутку $A \times B$, то кількість таких відповідностей дорівнює кількості елементів булеана множини $A \times B$, яка містить nm елементів. Це число дорівнює 2^{nm}, оскільки для будь-якої підмножини $M \subseteq A \times B$ і для довільного елемента $a \in A \times B$ (nm варіантів вибору) можливі лише дві ситуації: або елемент a належить множині M, або елемент a не належить множині M.

(б) Будь-яка відповідність C між A та B однозначно задається множиною образів $C(a)$, $a \in A$. Для всюди визначеної відповідності C кожна з цих множин (що є підмножиною множини B) має бути непорожньою. Кількість непорожніх підмножин множини B дорівнює $2^m - 1$. За правилом множення кількість усюди визначених відповідностей дорівнюватиме $(2^m - 1)^n$.

(в) Множиною образів $f(a)$ функціональної відповідності f між A та B для кожного $a \in A$ може бути або деяка одноелементна підмножина множини B, або порожня множина. Отже, є $m + 1$ варіант обрати образ для кожного з n елементів множини A, тому кількість функціональних відповідностей дорівнює $(m + 1)^n$.

8. Нехай множина M містить n елементів. Визначити кількість:

(а) відношень; (б) рефлексивних відношень;

(в) нерефлексивних відношень;

(г) антирефлексивних відношень;

(д) симетричних відношень;

(е) антисиметричних відношень;

(є) рефлексивних і антисиметричних відношень;

(ж) рефлексивних і несиметричних відношень на множині M.

Нехай $m = n^2$, $k = n^2 - n$, $l = k/2$.

(а) 2^m. Кількість відношень на множині M дорівнює кількості елементів булеана множини $M \times M$, яка містить $m = n^2$ елементів.

(б) 2^k. Будь-яке рефлексивне відношення R на множині M можна подати у вигляді $R = i_M \cup R'$, де R' – множина недіагональних елементів із $M \times M$. Кількість варіантів обрати R' дорівнює кількості елементів булеана множини $(M \times M) \setminus i_M$, що містить $k = n^2 - n$ елементів.

(в) Ця кількість дорівнює різниці кількостей усіх відношень і рефлексивних відношень на M, тобто $2^m - 2^k$.

(г) 2^k (див. (б)).

(д) Будь-яке симетричне відношення на M однозначно задається вибором довільної підмножини діагоналі i_M та довільної підмножини з елементів, розташованих над (або під) діагоналлю. Кількість елементів, з яких здійснюється вибір, становить $n + l = n(n + 1)/2$, тому кількість симетричних відношень $2^{n+l} = 2^{n(n+1)/2}$.

(е) Для того щоб утворити антисиметричне відношення R, слід узяти довільну підмножину діагоналі i_M (2^n способів) і додати до неї деяку множину недіагональних елементів, ураховуючи те, що з пари (a, b) і (b, a) симетричних недіагональних елементів до R може входити або лише один із цих елементів, або жоден (3^l способів, оскільки кількість таких пар дорівнює l). Отже, існує $2^n \cdot 3^l = 2^n \cdot 3^{n(n-1)/2}$ антисиметричних відношень на множині M.

(є) $3^{n(n-1)/2}$ (див. попередній пункт).

(ж) Нехай P – множина рефлексивних відношень, а C – множина симетричних відношень на множині M. Тоді множина рефлексивних і несиметричних відношень на множині M – це

$P \setminus C$. $|P \setminus C| = |P| - |P \cap C| = 2^k - 2^l$ (див. п. (б) і (д)). ◄

Завдання для самостійної роботи

1. Нехай M – скінченна множина і $A, B \subseteq M$. Розташуйте у порядку неспадання такі величини:

(а) $|B|, |A \cup B|, |\varnothing|, |A \cap B|, |M|$;

(б) $|A \backslash B|, |A| + |B|, |A \Delta B|, |\varnothing|, |A \cup B|$.

2. Довести нерівності:

(а) $|A \cup B| \leq |A| + |B|$;
(б) $|A \backslash B| \leq |A|$;

(в) $|A \Delta B| \leq |A| + |B|$;
(г) $|A \backslash B| \geq |A| - |B|$;

(д) $|A \Delta B| \leq |A \cup B|$;
(е) $|A| < |\beta(A)|$;

(є) $|A \cap B| \leq |A|$;
(ж) $|A \cap B| \leq |A \cup B|$.

3. Нехай A – скінченна множина, a – елемент, а B – підмножина множини A. Яких підмножин множини A більше:

(а) тих, що містять елемент a, чи тих, що не містять елемента a;

(б) тих, що містять множину B, чи тих, що не перетинаються із множиною B;

(в) тих, що включають множину B, чи тих, що не включають множину B?

4. У групі 27 студентів. Із них 16 відвідують семінар **А**, 12 – семінар **Б**, а 7 студентів не відвідують жодного семінару.

(а) Скільки студентів відвідують семінари **А** та **Б**?

(б) Скільки студентів відвідують лише семінар **А**?

5. Обстеження читацьких смаків студентів показало, що 60 % студентів читають журнал **А**, 50 % – журнал **Б**, 50 % – журнал **В**, 30 % – журнали **А** та **Б**, 20 % – журнали **Б** і **В**, 40 % – журнали **А** та **В**, 10 % – журнали **А**, **Б** і **В**. Скільки відсотків студентів:

(а) читають принаймні один журнал;

(б) не читають жодного з журналів;

(в) читають точно два журнали;

(г) читають не менше двох журналів?

6. Знайти кількість і суму чотиризначних натуральних чисел, що не діляться на жодне з таких чисел:

(а) 2, 5, 11; (б) 6, 10, 18.

7. Знайти кількість простих чисел, що не перевищують 120.

8. Під час екзаменаційної сесії з чотирьох іспитів не менше 70 % студентів склали іспит з дискретної математики, не менше 75 % – з математичного аналізу, не менше 80 % – з алгебри й не менше 85 % – з програмування. Яка мінімальна кількість студентів, що склали одночасно всі чотири іспити?

9. Номер автомашини складається із трьох літер українського алфавіту (що містить 33 літери) і чотирьох цифр. Скільки можна скласти різних номерів автомашин?

10. Скількома способами можна розмістити на шахівниці розміром $m \times n$ дві різнокольорові тури так, щоб вони не били одна одну?

11. Скільки існує n-значних десяткових чисел,

(а) які починаються із двох однакових цифр;

(б) у яких сусідні цифри різні;

(в) усі цифри яких непарні;

(г) у запису яких є принаймні одна непарна цифра;

(д) у запису яких немає цифри 9;

(е) у запису яких обов'язково є цифра 3?

12. Скількома способами в множині A з n елементів можна вибрати дві підмножини, що не перетинаються?

13. Визначити, скільки різних натуральних дільників має число:

(а) $3^{2015} \cdot 5^{2016} \cdot 11^{2017}$; (б) 2448^{2124}; (в) 3124^{4004}; (г) 9216^{2331}.

14. На одній прямій дано n точок, а на іншій, паралельній першій, – m точок. Скільки існує трикутників, вершинами яких є ці точки?

15. Нехай множина A містить n елементів, а множина B – m елементів. Визначити кількість:

(а) сюр'єктивних відповідностей;

(б) ін'єктивних відповідностей;

(в) бієктивних відповідностей

між множинами A та B.

16. Нехай множина M містить n елементів. Визначити кількість:

(а) неантирефлексивних відношень;

(б) несиметричних відношень;

(в) неантисиметричних відношень;

(г) рефлексивних і симетричних відношень;

(д) рефлексивних і антисиметричних відношень;

(е) антирефлексивних і симетричних відношень;

(є) антирефлексивних і несиметричних відношень;

(ж) антирефлексивних і антисиметричних відношень

на множині M.

3.2. Сполуки, перестановки та розміщення

Позначимо через $B_k(M)$ множину всіх k-елементних підмножин даної скінченної множини M, а через $C(n, k)$ – кількість елементів множини $B_k(M)$, де $n = |M|$ і $0 \le k \le n$. Зокрема, $B_0(M)$ складається лише з одного елемента – порожньої множини $\varnothing$, $B_1(M)$ складається з n елементів – одноелементних підмножин множини M, а $B_n(M)$ містить лише один елемент – саму множину M. Отже, $C(n, 0) = C(n, n) = 1$ і $C(n, 1) = n$.

Кількість усіх k-елементних підмножин множини M, яка складається з n елементів, становить

$$C(n, k) = \frac{(n-k+1)(n-k+2)...(n-1)n}{k(k-1)...2\cdot 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (3.3)$$

Довільну k-елементну підмножину n-елементної множини називають **сполукою** (або **комбінацією**) *з* n **елементів за** k. Формула (3.3) дає змогу обчислити кількість таких сполук.

Для кількості сполук з n по k крім уведеного позначення $C(n, k)$ використовують також позначення C_n^k, nCk, (n, k) або $\binom{n}{k}$.

Приклад 3.3. Підрахуємо, скількома способами можна заповнити картку *Лото* (6 *із* 49). Очевидно, їхня кількість дорівнює кількості сполук із 49 елементів (чисел) по 6, тобто

$$C(49, 6) = \frac{49\cdot 48\cdot 47\cdot 46\cdot 45\cdot 45\cdot 44}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} = 13\,983\,816. \blacktriangleleft$$

Нехай множина M містить n елементів.

Перестановкою множини M називають будь-який утворений з елементів множини M кортеж довжиною n, в якому кожен елемент із M зустрічається лише один раз. Позначимо через P_n кількість усіх перестановок множини M.

Послідовно утворюватимемо кортежі довжиною n з елементів множини M ($|M| = n$). Є n можливостей для вибору першої координати кортежу. Після того, як обрано елемент для першої координати, залишиться $n-1$ елемент, з яких можна вибрати другу координату кортежу і т. д. За основним правилом комбінаторики всі n дій разом можна виконати

$$n(n-1)(n-2)\dots 2\cdot 1 = n!$$

способами. Отже, є $n!$ кортежів довжиною n, утворених з елементів множини M, і $P_n = n!$

Приклад 3.4.

1. Скільки п'ятизначних чисел можна утворити із цифр 0, 1, 2, 3, 4? Кожну цифру можна використовувати в числі тільки один раз.

Існує $P_5 = 5!$ перестановок зазначених цифр. Однак частина з цих перестановок матиме на першому місці цифру 0, тобто відповідатиме чотиризначним числам. Кількість чисел вигляду $0abcd$, де (a, b, c, d) – перестановка з цифр 1, 2, 3, 4, становить $P_4 = 4!$ Отже, шуканим числом є $P_5 - P_4 = 5! - 4! = 96$.

2. Визначити, скількома способами можна вибрати з натуральних чисел від 1 до 100 три натуральні числа так, щоб їх сума була парною.

$C(50, 3) + 50C(50, 2)$. Сума трьох чисел парна, якщо або всі вони парні (кількість таких трійок $C(50, 3)$), або два з них непарні (таких пар $C(50, 2)$) і одне парне (що обирається із 50 можливих).

3. Скільки є перестановок цифр 0, 1, 2, …, 9, у яких цифра 3 займає третє місце, а цифра 5 – п'яте?

8! Зафіксуємо в кожній перестановці цифру 3 на третьому місці, а цифру 5 – на п'ятому. На всіх інших восьми позиціях розташуємо всіма можливими способами решту вісім цифр.

4. Скількома способами можна розташувати n нулів і k одиниць так, щоб жодні дві одиниці не стояли поруч?

$C(n + 1, k)$. Запишемо спочатку всі n нулів. Існує $n + 1$ місце (одне – перед першим нулем, $n - 1$ – між нулями й одне – після останнього нуля), на які можна записувати по одній одиниці, щоб вони не стояли поруч. Отже, для кожного заданого розташування слід обрати k місць з $n + 1$ можливих. ◄

Кортеж довжиною k, утворений з елементів множини M ($|M| = n$), у якому елементи не повторюються, називають **розміщенням з** n **по** k ($0 \le k \le n$). Різні розміщення з n по k відрізняються або складом елементів, або їхнім порядком.

Кількість розміщень із n по k позначають $A(n, k)$ або A_n^k .

Кількість усіх k-елементних підмножин множини M з n елементів дорівнює $C(n, k)$. Із кожної з цих підмножин можна утворити стільки кортежів, скільки існує різних перестановок її елементів. За попередньою теоремою їхня кількість дорівнює k! Отже, загальна кількість кортежів довжиною k, які можна побудувати з n елементів, дорівнює $k!C(n, k)$.

$$A(n, k) = k!C(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!},$$

тобто $A(n, k) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$.

Приклад 3.5. Визначити, скільки тризначних чисел можна утворити з цифр 0, 1, 2, 3, 4 за умови, що цифри кожного числа різні.

Існує $A(5, 3)$ кортежів довжиною 3, координати яких обрано із зазначених цифр. Виключимо із них кортежі, перша координата яких дорівнює 0. Таких кортежів – $A(4, 2)$. Отже, шукане число дорівнює $A(5, 3) - A(4, 2) = 5 \cdot 4 \cdot 3 - 4 \cdot 3 = 48$. ◄

Нехай задано множину M, що складається з n елементів, і такі цілі числа

$$k_1, k_2, \ldots, k_m, \text{ що } k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n \text{ і } k_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m.$$

Скільки існує розбиттів $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ множини M (див. п. 2.7) таких, що $|A_i| = k_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$? Позначимо шукане число через $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$.

Усі зазначені розбиття множини M на m класів можна дістати таким чином: візьмемо довільну k_1-елементну підмножину множини M (це можна зробити $C(n, k_1)$ способами); серед $n - k_1$ елементів, що залишилися, візьмемо k_2-елементну підмножину (це можна зробити $C(n - k_1, k_2)$ способами) і т. д. Загальна кількість способів вибору різних множин $A_1, A_2, \ldots, A_m$ за правилом множення становить

$$C(n,k_1)\cdot C(n-k_1,k_2)\cdot C(n-k_1-k_2,k_3)\cdot\ldots\cdot C(n-k_1-k_2-\ldots-k_{m-1}, k_m) =$$

$$= \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!}\cdot\frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!}\cdot\frac{(n-k_1-k_2)!}{k_3!(n-k_1-k_2-k_3)!}\cdot\ldots\cdot$$

$$\frac{(n-k_1-k_2-\ldots-k_{m-1})!}{k_m!(n-k_1-k_2-\ldots-k_m)!} = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}.$$

(Нагадаємо, що $0! = 1$.) Отже,

$$C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}. \tag{3.4}$$

Кількість різних перестановок, які можна утворити з n елементів, серед яких є k_1 елементів першого типу, k_2 елементів другого типу і т. д., k_m елементів m-го типу, дорівнює

$$C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m).$$

Візьмемо перестановку W – довільну із зазначених перестановок – і замінимо в ній усі k_1 однакових елементів першого типу різними елементами. Тоді, виконуючи $k_1!$ перестановок нововведених елементів, одержимо $k_1!$ відповідних перестановок з n елементів. Потім замінимо в перестановці W усі k_2 елементів другого типу різними елементами. Переставляючи ці елементи, одержимо $k_2!$ відповідних перестановок і т. д. Отже, за допомогою описаної процедури з кожної перестановки W можна утворити $k_1!k_2! \ldots k_m!$ різних перестановок довжиною n. Зробивши так для всіх зазначених перестановок, дістанемо всі $n!$ можливих перестановок з n елементів. Якщо позначимо шукану кількість через L, то з наведених міркувань одержимо $L \cdot k_1!k_2! \ldots k_m! = n!$

Отже, $L = \dfrac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}$, тобто $L = C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$.

Приклад 3.6.

1. Скільки різних слів можна утворити, переставляючи літери слова *математика*?

Маємо 10 елементів – *м*, *а*, *т*, *е*, *м*, *а*, *т*, *и*, *к*, *а*, серед яких є два елементи *м* (першого типу), три елементи *а* (другого типу), два елементи *т* (третього типу) та по одному елементу інших типів – *е*, *и* та *к*. За доведеною теоремою з цих елементів можна утворити

$$C_{10}(2, 3, 2, 1, 1, 1) = \frac{10!}{2!3!2!1!1!1!} = 151200$$

перестановок (або слів).

2. Нехай дано n символів a, m символів b і k символів c. Визначити кількість різних слів,

(а) які можна скласти зі всіх цих символів;

(б) які складаються зі всіх цих символів і у яких жодні два символи c не стоять поруч.

(а) $(n + m + k)!/(n!m!k!)$.

(б) Розглянемо довільне слово w, утворене зі всіх символів a та b. Кількість таких слів $(n + m)!/(n!m!)$, а довжина кожного з них – $m + n$. У слові w існує $n + m + 1$ позицій, на які можна записувати по одному символу c, щоб вони не опинились поруч. Це можна зробити $C(n + m + 1, k)$ способами. Отже, шукана кількість – $C(n + m + 1, k)(n + m)!/(n!m!)$. ◄

Завдання для самостійної роботи

1. Скількома способами можна розподілити k екзаменаційних білетів між n студентами?

2. Скількома способами з 6 інженерів і 14 робітників можна створити бригаду, яка складалася б із 2 інженерів і 5 робітників?

3. Визначити, скількома способами можна вибрати з натуральних чисел від 1 до 100 три натуральні числа так, щоб їх сума:

(а) була непарною; (б) ділилася на три.

4. Скількома способами можна вибрати з n чоловік групу людей для роботи, якщо група має складатися не менше ніж із p чоловік?

5. Скільки є перестановок цифр 0, 1, 2, …, 9, у яких цифра 2 займає друге місце, а цифра 5 – п'яте або шосте?

6. Скількома способами можна посадити за круглий стіл n чоловіків і m жінок так, щоб жодні дві жінки не сиділи поруч?

7. Скількома способами можна роздати 28 кісток доміно чотирьом гравцям так, щоб кожний одержав 7 кісток?

8. Нехай дано n символів a, m символів b. Визначити кількість різних слів,

(а) які можна скласти зі всіх цих символів;

(б) які складаються зі всіх цих символів і у яких жодні два символи b не стоять поруч.

9. Скільки різних слів можна утворити, переставляючи літери в слові?

(а) комбінаторика; (б) філологія;

(в) мінімум; (г) абракадабра?

10. Скількома способами можна переставити літери слова *кавоварка* так, щоб голосні та приголосні чергувалися? Розв'язати ту саму задачу для слова *палеонтолог*.

11. Визначити, скількома способами можна переставити літери наведеного слова так, щоб приголосні йшли за абеткою:

(а) абракадабра; (б) монолог; (в) амальгама.

12. Скільки слів довжиною 5 можна утворити з літер *a*, *b*, *c*, якщо:

(а) кожна із літер зустрічається у слові без обмежень;

(б) літеру *a* можна використати в слові лише один раз;

(в) літеру *a* можна використати в слові не більше двох разів?

13. У скількох перестановках літер *a*, *a*, *a*, *a*, *b*, *b*, *b*, *c*, *c* не зустрічається жодне з підслів *aaaa*, *bbb*, *cc*?

14. У скількох перестановках літер *a*, *a*, *b*, *b*, *c*, *c* жодна літера не збігається з літерою, що стоїть на такому самому місці у слові *aabbcc*?

3.3. Біном Ньютона та поліномна формула

Має місце рівність

$(a+b)^n = C(n, 0)a^n + C(n, 1)a^{n-1}b + C(n, 2)a^{n-2}b^2 + \ldots + C(n, n)b^n$

або
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)a^{n-k}d^k. \quad (3.5)$$

Щоб переконатись у справедливості цієї рівності, для будь-яких чисел *a*, *b* і *n* розглянемо добуток

$$(a+b)(a+b)(a+b)\ldots(a+b) \text{ (}n\text{ множників).} \quad (3.6)$$

Розкриваючи дужки, отримаємо суму двочленів вигляду $a^k b^{n-k}$. Причому двочлен $a^k b^{n-k}$ дістанемо тоді й тільки тоді, коли із *k* співмножників у добутку (3.6) оберемо доданок *a*, а з решти $n - k$ множників – доданок *b*. Цей вибір можна здійснити $C(n, k)$ способами. Отже, двочлен $a^k b^{n-k}$ входить до розкладання виразу (3.6) $C(n, k)$ разів, що й доводить справедливість формули (3.5).

Формулу (3.5) називають **біномом Ньютона**, відповідне твердження – **біномною теоремою**, а числа $C(n, k)$ – **біномними коефіцієнтами.**

Приклад 3.7.

1. Знайти розкладання бінома $(1 - x^3)^5$.

$$1 - 5x^3 + 10x^6 - 10x^9 + + 5x^{12} - x^{15}.$$

2. Знайти коефіцієнти при x^3 та x^5 у многочлені

$$(1+x)^3 + (1+x)^4 + (1+x)^5 + \ldots + (1+x)^{15}.$$

Коефіцієнт при x^3 дорівнює $C(3, 3) + C(4, 3) + ... + C(15, 3)$, а при x^5 – $C(5, 5) + C(6, 5) + ... + C(15, 5)$.

3. Обмежившись двома членами е розкладанні бінома, наближено обчислити $(0,997)^8$.

$$(0,997)^8 = (1 - 0,003)^8 = 1 - 8\cdot 0,003 = 0,976. \blacktriangleleft$$

Наведемо деякі цікаві й важливі співвідношення для біномних коефіцієнтів, які називають **біномними тотожностями**.

1) $C(n, k) = C(n, n - k)$.

2) $C(n, k + 1) = C(n, k) + C(n, k - 1)$.

3) $C(n, 0) + C(n, 1) + C(n, 2) + \ldots + C(n, n - 1) + C(n, n) = 2^n$.

4) $C(n, 0) - C(n, 1) + C(n, 2) - \ldots + (-1)^n C(n, n) = 0$. (3.7)

5) $C(n, 0) + C(n, 2) + C(n, 4) + \ldots + C(n, k) = 2^{n-1}$, де $k = 2[n/2]$.

6) $C(n, 1) + C(n, 3) + C(n, 5) + \ldots + C(n, m) = 2^{n-1}$, де $m = 2[(n - 1)/2] + 1$.

У справедливості тотожностей 1) і 2) легко переконатися, застосовуючи (3.3).

Тотожність 3) дістанемо, якщо в біномі Ньютона (3.5) покладемо $a = b = 1$. Вона випливає також із того, що $C(n, k)$ – це кількість k-елементних підмножин множини з n елементів, тому сума в лівій частині тотожності 3) дорівнює кількості всіх підмножин множини з n елементів. За теоремою 1.1 ця кількість дорівнює 2^n.

Якщо в біномі Ньютона покласти $a = 1$ і $b = -1$, то дістанемо тотожність 4). Тотожності 5) і 6) можна отримати за допомогою відповідно додавання й віднімання тотожностей 3) та 4).

Тотожність 2) дає змогу обчислювати біномні коефіцієнти для $n + 1$, виходячи з біномних коефіцієнтів для n. Цю процедуру часто виконують за допомогою трикутної таблиці, яку називають **трикутником Паскаля**:

1	$n = 0$
1 1	$n = 1$
1 2 1	$n = 2$
1 3 3 1	$n = 3$
1 4 6 4 1	$n = 4$
1 5 10 10 5 1	$n = 5$
………………	……

У n-му рядку трикутника Паскаля стоять біномні коефіцієнти розкладу $(a + b)^n$, причому кожний коефіцієнт (окрім крайніх двох, які дорівнюють 1) дорівнює сумі двох відповідних коефіцієнтів з попереднього рядка.

Приклад 3.8.

1. Знайти n, коли відомо, що:

(а) у розкладанні $(1 + x)^n$ коефіцієнти при x^4 та x^{10} однакові;

(б) коефіцієнти п'ятого, шостого й сьомого членів розкладання бінома $(1 + x)^n$ утворюють арифметичну прогресію.

(а) Маємо $C(n, 4) = C(n, 10)$. Звідси, скориставшись тотожністю 1 з (3.7), дістанемо $n = 14$.

(б) Розв'язавши рівняння $C(n, 5) - C(n, 4) = C(n, 6) - C(n, 5)$ (див. (3.3)), отримаємо $n = 7$ або $n = 14$.

2. Розв'язати рівняння

$$C(k + 3, k + 1) = C(k + 1, k - 1) + C(k, k - 2) + C(k + 1, k)$$

відносно натурального k.

Скориставшись (3.3), отримаємо рівносильне рівняння

$$(k + 3)(k + 2) = (k + 1)k + k(k - 1) + 2(k + 1).$$

Коренями останнього будуть числа 4 та –1. Отже, $k = 4$.

3. Довести тотожність $C(n, 1) + 2C(n, 2) +\ldots+ nC(n, n) = n2^{n-1}$.

Використавши рівність $kC(n, k) = nC(n - 1, k - 1)$, яку можна отримати із (3.3), перетворимо ліву частину до вигляду

$$nC(n - 1, 0) + nC(n - 1, 1) + \ldots + nC(n - 1, n - 1)$$

і застосуємо тотожність 3 із (3.7). ◄

Поліномна формула:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)^n = \sum_{\substack{k_1, k_2, \ldots, k_m \geq 0 \\ k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n}} C_n(k_1, k_1, \ldots, k_m,) a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m} \quad (3.8)$$

Перемножимо $(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)$ n разів:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)(a_1 + a_2 + \ldots + a_m) \ldots (a_1 + a_2 + \ldots + a_m). \quad (3.9)$$

Одержимо доданки вигляду

$$a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m}$$

такі, що $k_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$ і $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$.

Кількість членів типу $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m}$ дорівнює кількості варіантів вибору k_1 множників із (3.9) першого типу (із цих множників до одночлену ввійде k_1 множників a_1), відтак вибору із решти $n - k_1$ множників із (3.9) k_2 множників другого типу (із цих множників до одночлену увійде k_2 множників a_2) і т. д.

Отже, шукана кількість дорівнює кількості розбиттів n множників у добутку (3.9) на m класів, кількість елементів у яких дорівнює відповідно $k_1, k_2, \ldots, k_m$. За (3.4) ця кількість становить

$$C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}.$$

Для $m = 2$ тотожність (3.8) перетворюється на біном Ньютона (3.5).

Приклад 3.9.

1. Користуючись поліномною формулою, обчислити $(x + y + z)^3$.

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3xy^2 + 3y^2z + 3xz^2 + 3yz^2 + 6xyz.$$

2. Знайти коефіцієнт при x^8 у розкладанні полінома

$$(1 + x^2 - x^3)^9.$$

Довільний член розкладання полінома має вигляд

$$C_9(k_1, k_2, k_3)1^{k_1}(x^2)^{k_2}(-x^3)^{k_3} = C_9(k_1, k_2, k_3)(-1)^{k_3}x^{2k_2+3k_3},$$

де k_1, k_2, k_3 – невід'ємні цілі числа, а $k_1 + k_2 + k_3 = 9$. Потрібно знайти ті з них, для яких виконується $2k_2 + 3k_3 = 8$. Ці умови задовольняють тільки дві трійки чисел: $k_1 = 5, k_2 = 4, k_3 = 0$ і $k_1 = 6, k_2 = 1, k_3 = 2$. Отже, шуканий коефіцієнт

$$C_9(5, 4, 0)(-1)^0 + C_9(6, 1, 2)(-1)^2 = C_9(5, 4, 0) + C_9(6, 1, 2) = 378. \blacktriangleleft$$

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти розкладання бінома:

(а) $(2x - 4)^4$; (б) $(a/2 + 2b)^5$; (в) $(2 - x^4)^5$; (г) $(a + 2b)^7$.

2. Знайти коефіцієнти при x^3 та x^5 у многочлені

$$x(2 - 3x)^5 + x^3(1 + 2x^2)^7 - x^2(5 + 3x^3)^4.$$

3. Знайти коефіцієнт при x^m у розкладанні

$$(1 + x)^k + (1 + x)^{k+1} + \ldots + (1 + x)^n.$$

Розглянути випадки $m < k$ і $m \geq k$.

4. Обмежившись двома членами у розкладанні бінома, наближено обчислити $(2{,}003)^{10}$.

5. Знайти n, коли відомо, що:

(а) у розкладанні $(1 + x)^n$ коефіцієнти при x^5 та x^{12} однакові;

(б) восьмий член розкладання $(2x + 3)^n$ має найбільший коефіцієнт.

6. Розв'язати рівняння відносно натурального k:

(а) $C(k, k - 3) + C(k, k - 2) = 15(k - 1)$;

(б) $C(k + 1, k - 1) + C(k, k - 2) = 9k + 10$;

(в) $C(k, 3) + C(k, 4) = 11C(k + 1, 2)$.

7. Розв'язати систему рівнянь відносно натуральних n і m:

(а) $C(n, m) = C(n, m + 2)$, $C(n, 2) = 153$;
(б) $C(n + 1, m - 1) : C(n + 1, m) = 3 : 5$;
(в) $C(n + 1, m) = C(n + 1, m + 1)$.

8. Довести тотожність:
(а) $C(n, 1) + 6C(n, 2) + 6C(n, 3) = n^3$;
(б) $1 + 7C(n, 1) + 12C(n, 2) + 6C(n, 3) = (n + 1)^3$;
(в) $C(n, 1) + 14C(n, 2) + 36C(n, 3) + 24C(n, 4) = n^4$;
(г) $C(n, 0) + 2C(n, 1) + 2^2C(n, 2) + \ldots + 2^nC(n, n) = 3^n$;
(д) $C(n, 1) - 2C(n, 2) + \ldots + (-1)^{n-1}nC(n, n) = 0$.

9. Користуючись поліномною теоремою, обчислити

$$(x + 2y + 3z)^3.$$

10. Знайти коефіцієнт при x^k у розкладі полінома:
(а) $(1 + x^2 + x^3)^7$, $k = 11$;
(б) $(1 + 2x^2 - 3x^4)^{10}$, $k = 8$.

3.4. Урнова модель. Сполуки із повтореннями

Розглянемо одну важливу й популярну в комбінаториці модель, яку називатимемо **урновою моделлю**.

Нехай є k урн і n однакових предметів (наприклад куль). Підрахуємо, скількома способами можна розподілити ці предмети по урнах. Для цього розташуємо урни послідовно та занумеруємо їх від 1 до k. Тоді кожному розподілу предметів в урнах можна поставити у відповідність кортеж $(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ довжиною k, i-та координата якого дорівнює кількості предметів, що потрапили в урну з номером i. Ця відповідність є, безумовно, взаємно однозначною. Тому шукана кількість розподілів збігається із кількістю таких кортежів. Для підрахунку останньої виконаємо перетворення (теж взаємно однозначне) кортежів. Кортеж $(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ замінимо на кортеж із нулів і одиниць за таким правилом. Спочатку запишемо послідовність, що складається з m_1 одиниць, за нею запишемо нуль, далі – послідовність із m_2 одиниць, знову нуль і т. д. Закінчується кортеж послідовністю з m_k одиниць. Кожен отриманий таким способом кортеж складатиметься з n одиниць (оскільки $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$) і $k - 1$ нулів, і множина цих кортежів взаємно однозначно відповідатиме множині розподілів n предметів по k урнах.

Наприклад, для $n = 7$ і $k = 3$ розподілу (5, 1, 1) (5 предметів у першій урні та по одному предмету в другій і третій) відповідає кортеж

$$(1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1),$$

а розподілу (0, 4, 3) – кортеж

$$(0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1).$$

У свою чергу, кортеж

$$(1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1)$$

– це запис розподілу, за яким у першій урні міститься 3, у другій – 0 і в третій – 4 предмети.

Кількість кортежів, що складаються з n одиниць і $k - 1$ нулів, обчислити неважко. Вона дорівнює кількості способів обрання n позицій серед $n + k - 1$ координат цих кортежів, на які буде записано одиниці (на всі інші автоматично записуються нулі). Отже, шукана кількість дорівнює $C(n + k - 1, n)$.

До запропонованої моделі зводяться й задачі, у яких накладено певні умови на розподіли n однакових предметів по k урнах. Наприклад, якщо потрібно, щоб у результаті розподілу кожна урна містила не менше ніж t предметів ($t \geq 1$), то спочатку слід у кожну урну покласти по t предметів, потім $n - tk$ предметів, що залишились, розподіляти так як раніше. У цьому разі кількість різних розподілів

$$C(n - tk + k - 1, n - tk) \text{ або } C(n - tk + k - 1, k - 1).$$

Зокрема, якщо накладено умову, щоб при кожному розподілі жодна з урн не залишилася порожньою (тобто $t = 1$), то кількість способів дорівнюватиме

$$C(n - 1, n - k) \text{ або } C(n - 1, k - 1).$$

Урнову модель можна також використати для визначення кількості невід'ємних цілих розв'язків рівняння

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n,$$

де k і n – фіксовані натуральні числа. Кожному із розв'язків $(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ цього рівняння поставимо у відповідність певний розподіл n однакових предметів по k урнах, а саме розподіл, за яким у першу урну потрапило t_1 предметів, у другу – t_2 предметів і т. д., в останню – t_k предметів. Отже, шукана кількість розв'язків дорівнюватиме $C(n + k - 1, n)$.

Приклад 3.10.

1. Скількома способами можна розкласти 12 однакових куль по п'яти різних пакетах, якщо жоден пакет не має бути порожнім?

За наведеною вище формулою ця кількість становить

$$C(12 - 1, 5 - 1) = C(11, 4).$$

2. Скільки є способів розміщення 57 пасажирів у 5 вагонах поїзда, якщо рівно 2 вагони виявляться порожніми?

Кількість варіантів обрати 2 вагони, що будуть порожніми, дорівнює $C(5, 2)$. А способів розміщення 57 пасажирів у 3 вагонах поїзда так, щоб серед них не було порожніх, дорівнює $C(56, 2)$. Отже, за правилом множення шукана кількість дорівнює $C(5, 2)\cdot C(56, 2)$.

3. Скількома способами можна розкласти 15 однакових куль по 5 урнах так, щоб виявилося не більше двох порожніх урн?

Множину варіантів розподілу слід розбити на ситуації, коли порожніми є дві, одна або жодна з урн.

$$C(5, 2)C(14, 2) + C(5, 1)C(14, 3) + C(5, 0)C(14, 4) = 3731.$$

Зауважимо, що $C(5, 0) = 1$.

4. Довести, що кількість розв'язків рівняння

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n$$

у натуральних числах дорівнює $C(n - 1, m - 1)$.

Ця кількість збігається із кількістю розподілів n предметів по m урнах за умови, що жодна з урн не залишається порожньою (тут x_i – кількість предметів, що потрапили в урну з номером i).

5. Скількома способами 4 червоні, 4 білі та 4 сині кулі можна розкласти в 6 різних пакетів (деякі пакети можуть бути порожніми)?

Кількість способів розподілити 4 кулі одного кольору по 6 пакетах дорівнює $C(9, 5)$, тому за правилом множення шукана кількість – $(C(9, 5))^3$. ◄

Нехай задано n груп (сортів) елементів, кожна з яких складається з однакових між собою елементів. **Сполукою** (або **комбінацією**) **з** n **по** k **елементів із повтореннями** називають невпорядкований набір, що містить k елементів, причому кожний із цих елементів належить до однієї із заданих n груп.

Наприклад, якщо $n = 2$ і перша група елементів складається з літер a, а друга – з літер b, то з елементів цих двох груп можна утворити такі чотири сполуки по 3 елементи з повтореннями: *aaa*, *aab*, *abb*, *bbb* (підкреслимо, що у сполуках порядок розташування елементів неістотний).

Кількість сполук з n по k елементів з повтореннями позначатимемо $\underline{C}(n, k)$. Задачу визначення цієї кількості можна також звести до урнової моделі, а саме до задачі розподілу k однакових предметів по n урнах. Зв'язок між сполуками й розподілами встановимо таким чином. Кожному розподілу $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ предметів по урнах поставимо у відповідність сполуку з повтореннями, що містить m_1 елементів першої групи, m_2 предметів другої групи і т. д., m_n елементів n-ї групи. Отже,

$$\underline{C}(n, k) = C(n + k - 1, k) = C(n + k - 1, n - 1). \qquad (3.10)$$

Аналогічно задачам розподілу з накладеними на них додатковими умовами можна розв'язувати й задачі обчислення кількостей сполук із повтореннями, для яких мають виконуватися певні умови. Наприклад, такою умовою може бути вимога, щоб у кожну зі сполук гарантовано входило принаймні по одному елементу з t фіксованих груп тощо.

Приклад 3.11.

1. Скількома способами можна вибрати 5 тістечок (однакових або різних) у кондитерській, де є 11 різних сортів тістечок?

За (3.10) ця кількість становить

$$C(11 + 5 - 1, 11 - 1) = C(15, 10).$$

2. Скількома способами можна вибрати 7 тістечок у кондитерській, де є 12 різних сортів тістечок за умови, що серед кожних семи обраних буде щонайменше 2 тістечка певного фіксованого сорту?

Отримавши 2 тістечка певного сорту, нам залишається вибрати ще 5, що можна зробити $C(18, 11)$ способами. Остання кількість і буде шуканою. ◄

Завдання для самостійної роботи

1. Скількома способами можна розкласти 17 однакових куль по 6 різних пакетах, якщо жоден пакет не має бути порожнім?

2. Скільки є способів розміщення k пасажирів у n вагонах поїзда, за яких рівно m вагонів виявиться порожніми?

3. Скількома способами можна розкласти:

(а) 19 однакових куль по 7 урнах так, щоб виявилося не більше двох порожніх урн;

(б) 20 однакових куль по 5 урнах так, щоб у кожній урні виявилося не менше двох куль?

4. Довести, що кількість розв'язків рівняння

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n$$

у невід'ємних цілих числах дорівнює кількості розв'язків рівняння

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n + m$$

у натуральних числах.

5. Скількома способами 5 червоних, 7 білих і 9 синіх куль можна розкласти в 6 різних пакетів (деякі пакети можуть бути порожніми)?

6. Скількома способами можна розмістити n білих, m червоних і k синіх куль по p урнах? Скільки є таких розміщень, де в першій урні міститься l_1 білих, l_2 червоних і l_3 синіх куль?

7. У $2n$ урнах розподілено n білих і n чорних однакових куль, причому в кожній урні є принаймні одна куля. Скількома різними способами можна це зробити?

8. Скількома способами можна укласти букет з 11 квіток, якщо квітковий магазин пропонує 25 різних сортів квітів? Скільки існує таких способів, щоб у кожному букеті було обов'язково щонайменше три троянди?

9. Скількома способами можна вибрати k тістечок у кондитерській, де є n різних сортів тістечок, так, щоб серед обраних k тістечок обов'язково були тістечка кожного із n сортів ($k \geq n$)?

10. Скількома способами можна вибрати 5 літер з набору?

(а) а, а, а, а, а, б, б, б, б, б;

(б) а, а, а, а, а, б, б, б, б, б, в, в, в, в, в;

(в) а, а, а, а, а, б, б, в, в, в.

Розділ 4
ТЕОРІЯ ГРАФІВ

Роком виникнення теорії графів вважають 1736, коли Леонард Ейлер опублікував розв'язання задачі про кенігсберзькі мости, а також знайшов загальний критерій існування ейлерового циклу в графі (див. п. 4.10). Картинка у вигляді набору точок на площині та ліній, проведених між деякими з них, стала зручною й наочною формою зображення найрізноманітніших об'єктів, процесів і явищ (див. п. 4.12). Нині теорія графів – важливий розділ дискретної математики.

4.1. Поняття графа. Способи задання графів

Нехай V – непорожня скінченна множина, а $V^{(2)}$ – множина всіх двохелементних підмножин (невпорядкованих пар різних елементів) множини V.

Графом (**неорієнтованим графом**) G називають пару множин (V, E), де E – довільна підмножина множини $V^{(2)}$ ($E \subseteq V^{(2)}$); позначають $G = (V, E)$.

Елементи множини V називають **вершинами** графа G, а елементи множини E – його **ребрами**. Відповідно V називають **множиною вершин**, а E – **множиною ребер** графа G.

Традиційно ребра $\{v,w\}$ записують за допомогою круглих дужок (v, w) (іноді просто vw).

Граф, що складається з однієї вершини, називають **тривіальним**, а граф $G = (V, \varnothing)$ – **порожнім**.

Нехай задано граф $G = (V, E)$. Якщо $(v, w) \in E$, то кажуть, що **вершини** v і w **суміжні**, інакше вершини v і w **несуміжні**. Якщо $e = (v, w)$ – ребро графа, то вершини v і w називають **кінцями** ребра e. У цьому разі кажуть також, що ребро e **з'єднує** вершини v і w. Вершину v і ребро e називають **інцидентними**, якщо v – кінець ребра e. Два ребра називають **суміжними**, якщо вони мають спільну вершину.

Існує кілька способів задання графів.

Один із них – задати кожну із множин V та E за допомогою переліку їхніх елементів.

Приклад 4.1. $G_1 = (V_1, E_1)$, де $V_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ і $E_1 = \{(v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_4)\}$ – граф із чотирма вершинами й п'ятьма ребрами, а $G_2 = (V_2, E_2)$, де

$V_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ і

$E_2 = \{(v_1, v_2), (v_2, v_4), (v_1, v_5), (v_3, v_2), (v_3, v_5), (v_4, v_1), (v_5, v_4)\}$ – граф із п'ятьма вершинами й сімома ребрами. ◄

Граф $G = (V, E)$ зручно зображати за допомогою рисунка на площині, який називають **діаграмою** графа G. Вершинам графа G ставлять у бієктивну відповідність точки площини. Точки, що відповідають вершинам v і w, з'єднують лінією (відрізком або кривою) тоді й тільки тоді, коли v і w – суміжні вершини. Зрозуміло, що діаграма графа змінює вигляд залежно від вибору відповідних точок на площині.

Приклад 4.2. На рис. 4.1 подано діаграми графів G_1 і G_2 із попереднього прикладу.

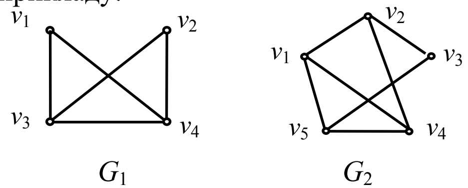


Рис. 4.1 ◄

Графи можна задавати також за допомогою матриць.

Занумеруємо всі вершини графа G натуральними числами від 1 до n. **Матрицею суміжності** A графа G називають квадратну $n \times n$-матрицю, у якій елемент a_{ij} i-го рядка та j-го стовпця дорівнює 1, якщо вершини v_i та v_j з номерами i та j суміжні, і дорівнює 0 в іншому випадку.

Приклад 4.3. Для графів G_1 і G_2 маємо відповідно

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{та} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} ◄$$

Очевидно, що матриці суміжності графів симетричні.

Занумеруємо всі вершини графа G числами від 1 до n, а всі його ребра – числами від 1 до m. **Матрицею інцидентності** B

графа G називають $n \times m$-матрицю, у якій елемент b_{ij} i-го рядка та j-го стовпця дорівнює 1, якщо вершина v_i з номером i інцидентна ребру e_j з номером j, і дорівнює 0 в іншому випадку.

Приклад 4.4. Для графів G_1 і G_2 маємо такі матриці інцидентності (ребра графів занумеровано в тому порядку, у якому їх виписано в прикладі 4.1):

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ і } B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \blacktriangleleft$$

Нарешті, ще одним способом задання графів є **списки суміжності.** Кожній вершині графа відповідає свій список. До списку, що відповідає вершині v, послідовно записують усі суміжні їй вершини.

Приклад 4.5. Для графів G_1 і G_2 маємо такі списки суміжності:

G_1:	G_2:
v_1: v_3, v_4	v_1: v_2, v_4, v_5
v_2: v_3, v_4	v_2: v_1, v_3, v_4
v_3: v_1, v_2, v_4	v_3: v_2, v_5
v_4: v_1, v_2, v_3	v_4: v_1, v_2, v_5
	v_5: v_1, v_3, v_4 ◄

Вибір і зручність того чи іншого способу задання графів залежить від особливостей розв'язуваної задачі.

Завдання для самостійної роботи

1. Нехай задано граф $G = (V, E)$:
(а) $V = \{1, 2, 3, 4\}$, $E = \{(1, 3), (2, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2)\}$;
(б) $V = \{a, b, c, d, e\}$,
$E = \{(a, d), (b, c), (b, e), (c, e), (d, b), (d, e), (e, a)\}$;
(в) $V = \{A, B, C, D\}$,
$E = \{(A, B), (A, D), (B, C), (B, D), (C, A), (C, D)\}$.

Побудувати діаграму, матриці суміжності та інцидентності, а також списки суміжності для кожного із цих графів.

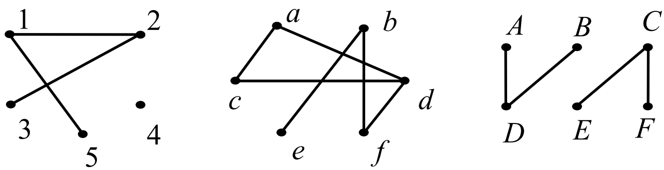
2. Нехай $V = \{a, b, c, d, e\}$. Граф $G = (V, E)$ задано за допомогою матриці суміжності A:

$$\text{(а) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \text{(б) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{(в) } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \text{(г) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Визначити множину ребер E графа G та побудувати його діаграму, матрицю інцидентності та списки суміжності.

2. Граф G задано його діаграмою:



(а) (б) (в)

Визначити множину вершин V і множину ребер E, матриці суміжності й інцидентності, а також списки суміжності графа G.

4. Нехай задано матрицю суміжності A деякого графа G. Як за допомогою матриці A визначити:

(а) кількість вершин графа G; (б) кількість ребер графа G;

(в) матрицю інцидентності графа G?

4.2. Підграфи. Ізоморфізм графів. Операції для графів

Граф $G_1 = (V_1, E_1)$ називають **підграфом** графа $G = (V, E)$, якщо

$$V_1 \subseteq V \quad \text{та} \quad E_1 \subseteq E.$$

Важливі класи становлять підграфи, які можна отримати в результаті застосування до заданого графа операцій вилучення вершини або вилучення ребра.

Операція вилучення вершини v із графа $G = (V, E)$ полягає у вилученні з множини V елемента v, а з множини E – усіх ребер, інцидентних v.

Операція вилучення ребра e з графа $G = (V, E)$ – це вилучення елемента e з множини E. При цьому всі вершини зберігаються.

Графи $G_1 = (V_1, E_1)$ і $G_2 = (V_2, E_2)$ називають **ізоморфними**, якщо існує таке взаємно однозначне відображення φ множини вершин V_1 на множину вершин V_2, що ребро $(v, w) \in E_1$ тоді й тільки тоді, коли ребро $(\varphi(v), \varphi(w)) \in E_2$.

Відображення φ називають **ізоморфним відображенням**, або **ізоморфізмом**, графа G_1 на граф G_2.

Таким чином, ізоморфні графи відрізняються лише ідентифікаторами (іменами) своїх вершин. Із погляду теорії графів ця відмінність неістотна, тому зазвичай ізоморфні графи ототожнюють і, зображаючи графи у вигляді діаграм, або зовсім не ідентифікують їхні вершини, або нумерують вершини натуральними числами.

Приклад 4.6. Неважко переконатися, що всі графи на рис. 4.2, ізоморфні між собою, а графи на рис. 4.3 – не ізоморфні.

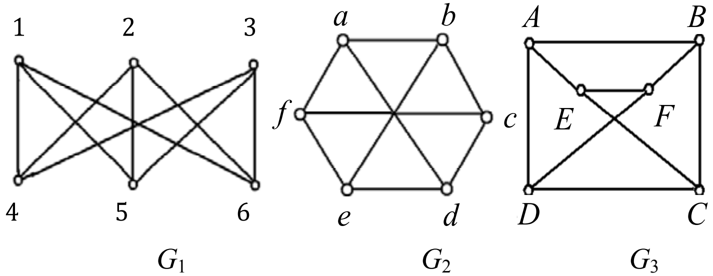


Рис. 4.2

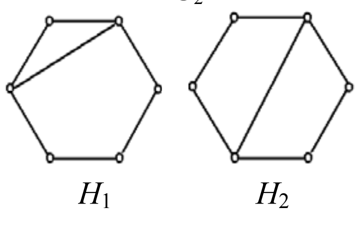


Рис. 4.3 ◄

Наприклад, відображення φ множини вершин

$$V_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$$

графа G_1 на множину вершин

$$V_2 = \{a, b, c, d, e, f\}$$

графа G_2, за яким $\varphi(1) = a$, $\varphi(2) = c$, $\varphi(3) = e$, $\varphi(4) = f$, $\varphi(5) = d$, $\varphi(6) = b$, є ізоморфізмом графа G_1 на граф G_2. Аналогічно можна побудувати ізоморфне відображення графа G_2 на граф G_3.

Відношення ізоморфізму є відношенням еквівалентності на сукупності графів.

Граф $G = (V, E)$ називають **повним**, якщо будь-які дві його вершини суміжні (тобто $E = V^{(2)}$). Повний граф із n вершинами позначають K_n.

Приклад 4.7.

1. Скільки ребер містить повний граф із n вершинами?

Оскільки в повному графі будь-які дві його вершини з'єднані ребром, то кількість його ребер становить $C(n, 2) = n(n-1)/2$.

2. Чи існує повний граф, у якого кількість ребер дорівнює:

(а) 15; (б) 18; (в) 199…900…0 (k дев'яток і k нулів)?

(а) Кількість ребер повного графа з n вершинами дорівнює $n(n-1)/2$. Рівняння $n(n-1)/2 = 15$ має корені 6 і –5. Отже, існує повний граф із 6 вершинами, кількість ребер у якому дорівнює 15.

(б) Рівняння $n(n-1)/2 = 18$ не має натуральних коренів, тому такий повний граф не існує.

(в) Розглянемо рівняння

$n(n-1) = 2\cdot199\ldots900\ldots0 = 200\ldots0\cdot199\ldots9$ (k нулів і k дев'яток).

Число у правій частині цього рівняння можна подати у вигляді $2\cdot10^k(2\cdot10^k-1)$, тобто $n = 2\cdot10^k$. Отже, такий повний граф існує й має $2\cdot10^k$ вершин. ◄

Для графів можна означити операції об'єднання, перетину й доповнення.

Об'єднанням графів $G_1 = (V_1, E_1)$ і $G_2 = (V_2, E_2)$ називають граф $G = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$; позначають $G = G_1 \cup G_2$.

Об'єднання $G = G_1 \cup G_2$ називають **прямою сумою** графів G_1 і G_2, якщо $V_1 \cap V_2 = \varnothing$.

Перетином і **різницею** графів $G_1 = (V, E_1)$ і $G_2 = (V, E_2)$ з однаковими множинами вершин називають відповідно графи $G' = (V, E_1 \cap E_2)$ і $G'' = (V, E_1 \setminus E_2)$; позначають $G' = G_1 \cap G_2$ і $G'' = G_1 \setminus G_2$.

Доповненням графа $G = (V, E)$ називають граф

$$\overline{G} = (V, V^{(2)} \setminus E).$$

Отже, граф $\overline{G}$ має ту саму множину вершин V, що й граф G, а вершини графа $\overline{G}$ суміжні тоді й лише тоді, коли вони несуміжні в G. Для графа G із n вершинами виконується $\overline{G} = K_n \setminus G$.

Графи G_1 і G_2 ізоморфні тоді й тільки тоді, коли ізоморфні їхні доповнення $\overline{G_1}$ і $\overline{G_2}$.

Приклад 4.8. Об'єднання й перетин графів H_1 і H_2 із прикладу 4.6 подано на рис. 4.4, а доповнення графів G_2 і H_2 – на рис. 4.5.

Граф G, ізоморфний своєму доповненню $\overline{G}$, називають **самодоповнювальним**.

Приклад 4.9.

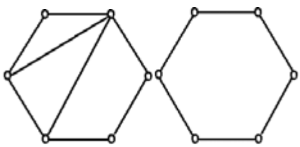
1. Граф $G = (V, E)$, у якому

$$V = \{a, b, c, d\} \text{ і } E = \{(a, b), (b, c), (c, d)\},$$

самодоповнювальний.

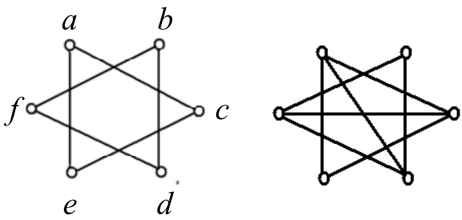
2. Чому дорівнює кількість ребер у графі $\overline{G}$, якщо граф G має n вершин і k ребер?

$n(n-1)/2 - k$ (див. приклад 4.7(1)).



$H_1 \cup H_2$ $H_1 \cap H_2$

Рис. 4.4



$\overline{G_2}$ $\overline{H_2}$

Рис. 4.5 ◄

3. Визначити, скільки існує попарно неізоморфних графів, які мають 8 вершин і 25 ребер.

Доповнення кожного з таких графів матиме 8 вершин і 3 ребра (див. попередній пункт). Існує тільки 5 попарно неізоморфних графів з такими параметрами. Доповнення кожного із цих п'яти графів задовольняють умову задачі.

4. Довести, що кількість вершин будь-якого само доповнювального графа дорівнює або $4k$, або $4k + 1$, $k \in N$.

Якщо m – кількість ребер самодоповнювального графа $G = (V, E)$ з n вершинами, то $n(n-1)/2 - m = m$, тобто

$$n(n-1) = 4m.$$

Із того, що число $n(n-1)$ кратне 4, випливає, що $n = 4k$ або

$$n = 4k + 1,\ k \in N.\ \blacktriangleleft$$

Завдання для самостійної роботи

1. Накресліть діаграму повного графа з n вершинами K_n для:
(а) $n = 2$; (б) $n = 3$; (в) $n = 4$; (г) $n = 5$.

2. Чи існує повний граф, у якого кількість ребер дорівнює:
(а) 21; (б) 27; (в) 500…0500…0 (у кожній групі k нулів);
(г) $8k^2 + 2k$, $k \in N$?

3. Довести, що для довільного графа G об'єднання $G \cup \overline{G}$ є повним графом.

4. Нехай графи $G_1 = (V, E_1)$ і $G_2 = (V, E_2)$ задано за допомогою матриць суміжності A_1 та A_2, відповідно ($|V| = n$). Визначити матрицю суміжності A для графа:

(а) $G_1 \cup G_2$; (б) $G_1 \cap G_2$; (в) $G_1 \setminus G_2$; (г) $\overline{G_1}$.

5. Довести, що ізоморфне відображення φ графа $G_1 = (V_1, E_1)$ на граф $G_2 = (V_2, E_2)$ установлює певне взаємно однозначне відображення ψ множини ребер E_1 на множину ребер E_2.

6. Довести, що ізоморфні графи мають однакову кількість вершин та однакову кількість ребер.

7. Довести, що графи ізоморфні тоді й тільки тоді, коли ізоморфні їхні доповнення.

8. Визначити, скільки існує попарно неізоморфних графів, які мають:

(а) 8 вершин і 26 ребер;

(б) 5 вершин і 78 ребер;

(в) 6 вершин і 12 ребер.

9. Знайти нетривіальний самодоповнювальний граф із найменшою кількістю вершин.

10. Довести, що довільний самодоповнювальний граф містить або $4k^2 - k$, або $4k^2 + k$ ребер, $k \in N$.

4.3. Графи та бінарні відношення

Між множиною всіх графів із множиною вершин V і множиною всіх антирефлексивних симетричних бінарних відношень на V існує взаємно однозначна відповідність: графу $G = (V, E)$ відповідає таке відношення R на V, що $(v, w)\in R$ тоді й тільки тоді, коли $(v, w)\in E$, $v, w \in V$. Зокрема, порожньому графу $G = (V, \varnothing)$ відповідає порожнє відношення на V ($R = \varnothing$), а повному графу – відношення $(V \times V) \setminus i_V$, де i_V – діагональне (тотожне) відношення: $i_V = \{(v, v) \mid v \in V\}$.

Очевидно, що операціям об'єднання, перетину й доповнення графів відповідають аналогічні операції для відношень. Якщо графам G_1 і G_2 відповідають відношення R_1 і R_2, то графам $G_1 \cup G_2$, $G_1 \cap G_2$ і $\overline{G_1}$ – відношення $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$ і $\overline{R_1} \setminus i_V = (V \times V) \setminus (R_1 \cup i_V)$.

Якщо R – транзитивне відношення, то у відповідному графі G для кожної пари ребер $(v, w), (w, u)\in E$ існує замикальне ребро $(v, u)\in E$.

4.4. Степені вершин графа

Степенем $\delta(v)$ **вершини** v називають кількість інцидентних їй ребер. Вершину степеня 0 називають **ізольованою**, а вершину степеня 1 – **кінцевою** (або **висячою**).

Кубічним називають граф, степені всіх вершин якого дорівнюють 3.

У будь-якому графі $G = (V, E)$ виконується рівність

$$\sum_{v\in V}\delta(v) = 2\left|E\right|. \tag{4.1}$$

Справедливість цього твердження випливає з того, що кожне ребро графа інцидентне двом вершинам, тому воно вносить у суму степенів усіх вершин рівно дві одиниці.

Приклад 4.10.

1. Як визначити степінь певної вершини графа G за його матрицею суміжності A?

Степінь вершини v із номером i дорівнює сумі елементів i-го рядка матриці A, оскільки ця сума визначає кількість вершин, суміжних із вершиною v.

2. Нехай A – матриця суміжності графа G із n вершинами. Довести, що i-й діагональний елемент матриці A^2 дорівнює степеню $\delta(v_i)$ i-ї вершини графа G, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Елемент $a_{ii}^{(2)}$ матриці A^2

$$a_{ii}^{(2)} = \sum_k a_{ik} a_{ki} = \sum_k a_{ik}^2 = \sum_k a_{ik},$$

оскільки $a_{ik} = a_{ki}$ і $a_{ij} \in \{0, 1\}$.

Отже, $a_{ii}^{(2)} = \delta(v_i)$ (див. попередню задачу).

3. Довести, що в будь-якому графі з n вершинами ($n \geq 2$) завжди знайдуться принаймні дві вершини з однаковими степенями.

Припустимо, що існує граф G із n вершинами, усі степені вершин якого попарно різні. Ці степені можуть дорівнювати 0, 1, 2, ..., $n - 1$. Однак якщо в графі G є вершина степеня 0 (ізольована), то в ньому не може бути вершини степеня $n - 1$. Отже, степені принаймні двох вершин збігаються.

4. Визначити, чи існує граф із шістьма вершинами, степені яких дорівнюють:

(а) 1,1,2,3,4,4; (б) 2,3,3,4,4,4; (в) 0,0,2,3,3,4.

(а) Такий граф не існує, тому що сума степенів усіх його вершин непарна, що суперечить рівності (4.1).

(б) Такий граф існує, його матриця суміжності

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(в) Граф із такими степенями вершин не існує. За умовою він має дві ізольовані вершини, отже, максимальне значення степеня для будь-якої з решти чотирьох вершин – 3, тобто в такому графі не може бути вершини зі степенем 4.

5. Довести, що доповнення жодного кубічного графа не є кубічним графом.

Припустимо, що такий кубічний граф G із n вершинами існує. Тоді із того, що степені всіх вершин графа G і його доповнення дорівнюють 3, випливає, що $(n - 1) - 3 = 3$, тобто $n = 7$. Звідси

$$\sum_i \delta(v_i) = 2 \cdot 7 = 21,$$

що суперечить рівності (4.1). ◄

Завдання для самостійної роботи

1. Чому дорівнює степінь кожної вершини у повному графі з n вершинами?

2. Як визначити степінь певної вершини графа G за його матрицею інцидентності B?

3. Скільки вершин має бути в кубічному графі? Скільки ребер у такому графі?

4. У графі з n вершинами тільки дві вершини мають однакові степені. Чи можуть обидві ці вершини мати степінь 0 або степінь $n - 1$?

5. У футбольному турнірі беруть участь 15 команд. Довести, що в будь-який момент знайдеться команда, яка зіграла парну кількість матчів.

6. Довести, що в ізоморфних графів кількість вершин степеня k однакова для довільного k.

7. Визначити, чи існує граф із шістьма вершинами, степені яких дорівнюють:

(а) 1, 1, 2, 3, 4, 5; (б) 1, 1, 3, 3, 3, 5;
(в) 1, 2, 3, 3, 4, 5; (г) 0, 2, 3, 3, 4, 4.

4.5. Шлях у графі. Зв'язність графів

Маршрутом (або **шляхом**) у графі $G = (V, E)$ називають послідовність

$$v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, e_k, v_{k+1} \tag{4.2}$$

вершин v_i і ребер e_i таку, що кожні два сусідні ребра в ній мають спільну вершину, отже, $e_i = (v_i, v_{i+1})$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Вершину v_1 називають **початком**, а вершину v_{k+1} – **кінцем** шляху. Усі інші вершини цього шляху називають **проміжними**, або **внутрішніми**.

Найчастіше маршрут записують лише як послідовність вершин, що входять до його складу, тобто замість послідовності (4.2) пишуть $v_1, v_2, \ldots, v_{k+1}$.

Кількість k ребер у маршруті називають його **довжиною**. Кажуть, що цей маршрут **з'єднує** вершини v_1 і v_{k+1}, або **веде** із вершини v_1 до вершини v_{k+1}.

Маршрутом довжиною 0 вважають послідовність, що складається з єдиної вершини.

Маршрут, у якому всі ребра попарно різні, називають **ланцюгом**, а той, у якому всі вершини попарно різні, – **простим ланцюгом.**

Маршрут (4.2) називають **замкненим** (або **циклічним**), якщо $v_1 = v_{k+1}$. Замкнений ланцюг називають **циклом**, а замкнений простий ланцюг – **простим циклом**.

Граф, усі ребра якого утворюють простий цикл довжиною n, позначають C_n. Простий цикл довжиною 3 називають **трикутником**.

Граф називають **зв'язним**, якщо будь-яку пару його вершин можна з'єднати деяким маршрутом.

Компонентою зв'язності (або **зв'язною компонентою**) графа G називають його зв'язний підграф такий, що не є власним підграфом жодного іншого зв'язного підграфа графа G.

Відстанню між вершинами v і w зв'язного графа (позначають $d(v, w)$) називають довжину найкоротшого простого ланцюга, що з'єднує вершини v і w.

Оскільки кожна вершина графа $G = (V, E)$ з'єднана сама із собою маршрутом довжиною 0, то для всіх $v \in V$ виконується рівність $d(v, v) = 0$.

Ексцентриситетом $e(v)$ довільної вершини v зв'язного графа $G = (V, E)$ називають найбільшу з відстаней між вершиною v і всіма іншими вершинами графа G, тобто $e(v) = \max\limits_{w \in V} \{d(v, w)\}$.

Діаметром зв'язного графа G (позначають $D(G)$) називають максимальний зі всіх ексцентриситетів вершин графа G. Мінімальний зі всіх ексцентриситетів вершин зв'язного графа G називають його **радіусом** і позначають $R(G)$.

Вершину v називають **центральною**, якщо $e(v) = R(G)$.

Центром графа G називається множина всіх його центральних вершин.

Вершини v і w графа G називаються **зв'язаними**, якщо в G існує маршрут, що їх з'єднує.

Відношення зв'язаності Z рефлексивне, транзитивне й симетричне, тобто є відношенням еквівалентності на множині V. Розглянемо фактор множину

$$V/Z = \{V_1, V_2, \ldots, V_t\}.$$

Підграфи $G_i = (V_i, E_i)$, де $E_i = E \cap V_i^{(2)}$, очевидно, є компонентами зв'язності графа G. Крім того, виконується

$$G = G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_t.$$

Цей факт можна сформулювати у вигляді такого твердження.

Будь-який граф можна однозначно зобразити у вигляді прямої суми своїх компонент зв'язності.

Якщо граф G зв'язний, то всі його вершини попарно зв'язані, тобто $V/Z = \{V\}$ і G має єдину зв'язну компоненту, яка збігається із самим графом G.

Приклад 4.11.

1. У графі G на рис. 4.6 послідовність

1, (1,3), 3, (3,4), 4, (4,2), 2, (2,7), 7, (7,5), 5

або, у простішому варіанті, послідовність

1, 3, 4, 2, 7, 5

є маршрутом, що веде з вершини 1 у вершину 5. Цей маршрут є простим ланцюгом і його довжина дорівнює 5. А маршрут

1, 3, 4, 1, 2, 7, 5, 1

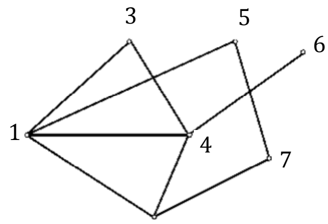


Рис. 4.6

є циклом, але не є простим циклом. Крім того, граф G є зв'язним і

$$d(1, 6) = 2,\ d(3, 7) = 3,\ d(5, 6) = 3,\ d(3, 4) = 1.$$

Значення ексцентриситетів вершин цього графа G:

$$e(1) = 2,\ e(2) = 2,\ e(3) = 3,\ e(4) = 2,\ e(5) = 3,\ e(6) = 3,\ e(7) = 3.$$

Отже, $D(G) = 3$ і $R(G) = 2$. Центром графа G є множина вершин

$$\{1, 2, 4\}.$$

2. Довести, що для будь-якого графа $G = (V, E)$ або він сам, або його доповнення $\overline{G}$ є зв'язним графом.

Якщо G – зв'язний граф, то твердження справджується. Нехай $G = (V, E)$ – незв'язний граф і $G_1 = (V_1, E_1)$ – одна з його компонент зв'язності. Розглянемо графи

$$G_1 \text{ і } G' = (V', E'), \quad \text{де } V' = V \setminus V_1 \text{ і } E' = E \setminus E_1.$$

Для будь-якої пари вершин $v \in V_1$ і $w \in V'$ у графі $\overline{G}$ існує ребро (v, w), адже ці вершини несуміжні в графі G. Оскільки для кожної пари вершин $v_1, v_2 \in V_1$ графа G_1 і довільної вершини $w \in V'$ існують ребра (v_1, w) і (v_2, w), які належать множині ребер графа $\overline{G}$, то в графі $\overline{G}$ такі вершини v_1 і v_2 зв'язані. Аналогічно встановлюємо зв'язність у графі $\overline{G}$ будь-якої пари вершин w_1 і w_2 із множини V'. Отже, усі пари вершин графа $\overline{G}$ зв'язані між собою.

3. Довести, що коли G – незв'язний граф, то граф $\overline{G}$ зв'язний і $D(\overline{G}) \leq 2$.

Дійсно, якщо G – незв'язний граф, то з попередньої задачі випливає, що $\overline{G}$ зв'язний, і для будь-яких двох вершин v та w графа $\overline{G}$ виконується або $d(v, w) = 1$, або $d(v, w) = 2$.

4. Довести, що коли в графі G тільки дві вершини v і w мають непарні степені, тоді ці вершини зв'язані в графі G.

Якщо v і w незв'язані, то вони містяться у різних компонентах зв'язності G_1 і G_2. Тоді сума степенів усіх вершин підграфа G_1 (або G_2) буде непарною, що суперечитиме формулі (4.1).

5. Довести, що самодоповнювальний граф завжди зв'язний.

Якщо припустити, що існує незв'язний самодоповнювальний граф G, то із прикладу 4.11 (2) випливає, що його доповнення $\overline{G}$ – зв'язний граф. А це суперечить умові ізоморфізму графів G та $\overline{G}$. ◄

Доведемо таке важливе твердження щодо зв'язних графів.

Нехай $G = (V, E)$ – зв'язний граф і e – деяке його ребро. Розглянемо граф G', отриманий із G вилученням ребра e.

а) Якщо ребро e належить деякому циклу графа G, то граф G' зв'язний.

б) Якщо ребро e не належить жодному циклу графа G, то граф G' незв'язний і має рівно дві компоненти зв'язності.

Доведення. а) Розглянемо дві довільні вершини v і w графа G'.

Якщо маршрут M, що з'єднує вершини v і w у зв'язному графі G, не містить ребра e, то він з'єднуватиме вершини v та w також у графі G'. Якщо ж ребро e належить маршруту M і $e = (u_1, u_2)$, то маршрут, що веде з v у w у графі G', можна побудувати так:

беремо маршрут, що веде з v в u_1, додаємо до нього ту частину циклу, що містить ребро e, яка залишилась у графі G' і з'єднує вершини u_1 і u_2; відтак завершуємо його маршрутом з u_2 у w. Отже, граф G' зв'язний.

б) Нехай ребро $e = (u_1, u_2)$ не належить жодному циклу графа G. Тоді в графі G' вершини u_1 та u_2 будуть незв'язаними й належатимуть двом різним компонентам зв'язності G_1 та G_2 графа G'. Крім того, у графі G' стануть незв'язаними ті й тільки ті вершини, які були з'єднані в графі G маршрутом, що містив ребро e. Отже, кожна вершина v у G' буде зв'язана або з вершиною u_1, або з вершиною u_2, тобто v належатиме або G_1, або G_2. Твердження доведено.

Завдання для самостійної роботи

1. Спростувати твердження: якщо деякий ланцюг, що веде із вершини v у вершину w, проходить через вершину u ($u \neq v$ і $u \neq w$), то він містить простий ланцюг, що веде з v у w і проходить через u.

2. Довести, що будь-який найкоротший ланцюг, який веде із вершини v у вершину w ($v \neq w$), є простим ланцюгом.

3. Довести, що в графі, степені всіх вершин якого більші 1, є цикл.

4. Побудувати граф, центр якого:

(а) складається тільки з однієї вершини;

(б) складається тільки із двох вершин;

(в) складається із трьох вершин і не збігається із множиною всіх вершин;

(г) збігається із множиною всіх вершин.

5. Довести, що для довільного графа G виконуються нерівності

$$R(G) \le D(G) \le 2R(G).$$

6. Довести, що діаметр довільного самодоповнювального графа дорівнює або 2, або 3.

7. Довести, що в ізоморфних графів кількість простих циклів довжиною l однакова для всіх l.

4.6. Перевірка зв'язності графів

Зв'язність заданого графа G зручно перевіряти за допомогою його матриці суміжності A.

Нехай A – матриця суміжності графа $G = (V, E)$ з n вершинами ($|V| = n$). Тоді елемент $a_{ij}^{(k)}$ i-го рядка та j-го стовпчика матриці A^k дорівнює кількості шляхів довжиною k, які ведуть у графі G із вершини v_i у вершину v_j.

Звідси отримаємо такий метод перевірки зв'язності графа G. У графі G вершини v_i і v_j ($i \neq j$) зв'язані тоді й тільки тоді, коли елемент i-го рядка та j-го стовпчика матриці

$$A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{n-1}$$

не дорівнює нулю.

Це випливає із тієї простої властивості, що коли в графі G із n вершинами існує шлях між вершинами v_i і v_j ($i \neq j$), тоді між цими вершинами обов'язково існує шлях довжиною не більше $n - 1$.

Крім того, щоб вилучити умову $i \neq j$ для встановлення зв'язності між будь-якими вершинами графа G, можна використовувати матрицю

$$M^{(n)} = I_n + A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{n-1},$$

де I_n – одинична матриця порядку n (нагадаємо, що будь-яка вершина зв'язана сама із собою шляхом довжиною 0).

Таким чином, граф G зв'язний тоді й тільки тоді, коли в матриці $M^{(n)}$ немає нульових елементів.

Граф $G^* = (V, E^*)$ називають **транзитивним замиканням** графа $G = (V, E)$, якщо $(v, w) \in E^*$, тоді й тільки тоді, коли вершини v і w зв'язані в графі G.

Отже, транзитивне замикання графа G є повним графом тоді й тільки тоді, коли граф G зв'язний.

Якщо графу $G = (V, E)$ відповідає відношення R на V, то графу G^* відповідатиме рефлексивне транзитивне замикання R^* відношення R (див. п. 2.6).

Побудуємо для графа G^* $n \times n$-матрицю A^* за таким правилом: (i, j)-й елемент матриці A^* дорівнює 1 тоді й тільки тоді, коли відповідний елемент матриці $M^{(n)}$ не дорівнює 0; усі інші елементи матриці A^* дорівнюють 0.

Матрицю A^* називають **матрицею досяжності** графа G (інші назви: **матриця зв'язності**, **матриця зв'язку**).

Матрицю досяжності A^* можна обчислити також в інший спосіб. Позначимо через $A^{(1)}$ булеву матрицю, елементи якої повністю збігаються з елементами матриці A, але їх розглядають не як числа 0 і 1, а як символи булевого (логічного) алфавіту **0** і **1** (див. п. 1.1). Уведемо операцію булевого множення $C \wedge D$ матриць C і D, які складаються з булевих елементів **0** і **1**, так:

(i, j)-й елемент матриці $C \wedge D$

$$f_{ij} = \bigvee_{t=1}^{n} (c_{it} \wedge d_{tj}),$$

де c_{it} і d_{tj} – відповідні елементи матриць C і D, а операції $\vee$ і $\wedge$ – це операції диз'юнкції та кон'юнкції (див. п. 1.1).

Позначимо через $A^{(m)}$ матрицю $A^{(1)} \wedge A^{(1)} \wedge \ldots \wedge A^{(1)}$ (m разів).

Якщо $A^{(1)}$ – булева матриця, що відповідає матриці суміжності A графа $G = (V, E)$, то елемент $b_{ij}^{(m)}$ $(i \neq j)$ матриці $A^{(m)}$ дорівнює **1** тоді й тільки тоді, коли в графі G існує принаймні один шлях довжиною m, що веде ѕз вершини v_i у вершину v_j.

Отже, матрицю досяжності A^* графа G із n вершинами можна обчислити за формулою

$$A^* = I_n^{(1)} \vee A^{(1)} \vee A^{(2)} \vee \ldots \vee A^{(n-1)}$$

(операція диз'юнкції виконується для матриць поелементно).

Таким чином, граф G зв'язний тоді й тільки тоді, коли всі елементи його булевої матриці досяжності A^* дорівнюють **1**.

Приклад 4.12. Нехай A – матриця суміжності графа G. Довести, що діагональний елемент $a_{ii}^{(3)}$ матриці A^3 дорівнює подвоєній кількості трикутників графа G, які містять вершину з номером i.

Елемент $a_{ii}^{(3)}$ дорівнює кількості шляхів довжиною 3 у графі G, що починаються й закінчуються у вершині i (отже, кожен такий шлях є трикутником). Ця кількість удвічі більша від кількості трикутників з вершиною i, тому що існують два способи обійти кожен із цих трикутників, починаючи й завершуючи обхід у вершині i. ◄

Завдання для самостійної роботи

1. Користуючись наведеними алгоритмами, з'ясувати, чи є зв'язними графи, задані матрицями суміжності в завданні для самостійної роботи 4.1.2.

2. Нехай A – матриця суміжності графа G. Довести, що сума всіх діагональних елементів $a_{ii}^{(3)}$ матриці A^3 у шість разів перевищує кількість трикутників у графі G.

3. Нехай A – матриця суміжності зв'язного графа G. Довести, що відстань $d(v_i, v_j)$ між вершинами v_i і v_j $(i \neq j)$ дорівнює найменшому натуральному числу k, для якого елемент $a_{ij}^{(k)}$ i-го рядка та j-го стовпчика матриці A^k відмінний від 0.

4.7. Деякі важливі класи графів. Дерева та двочасткові графи

Граф без циклів називають **ациклічним**, ациклічний зв'язний граф – **деревом**, довільний ациклічний граф – **лісом**.

Очевидно, що зв'язними компонентами лісу є дерева, тому кожен ліс можна зобразити у вигляді прямої суми дерев.

Дерева – це особливий і дуже важливий клас графів. Особлива роль дерев визначається як широким їх застосуванням у різних галузях науки і практики, так і тим особливим положенням, яке дерева займають у самій теорії графів. Останнє випливає з граничної простоти будови дерев. Часто при розв'язуванні різних задач теорії графів їх дослідження починають із дерев.

Існують також інші, рівносильні наведеному, означення дерева, які можна розглядати як його характеристичні властивості (або критерії).

Для графа $G = (V, E)$, $|V| = n$, $|E| = m$, такі твердження рівносильні:

1) G – дерево (ациклічний зв'язний граф);

2) G – зв'язний граф і $m = n - 1$;

3) G – ациклічний граф і $m = n - 1$;

4) для будь-яких вершин v і w графа G існує лише один простий ланцюг, що їх з'єднує;

5) G – такий ациклічний граф, що якщо будь-які його несуміжні вершини v і w з'єднати ребром (v, w), то одержаний граф міститиме рівно один цикл.

Приклад 4.13.

1. Для довільного дерева $T = (V, E)$ з n вершинами виконується

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2(n-1).$$

Із вищенаведених тверджень маємо, що дерево T із n вершинами має $n - 1$ ребро, тому дана рівність випливає з (4.1).

2. Будь-яке нетривіальне дерево $T = (V, E)$ має принаймні дві кінцеві вершини.

Припустимо, що дерево T має менше двох кінцевих вершин. Тоді степінь лише однієї вершини може дорівнювати 1, а степені всіх інших – не менші 2. Отже,

$$\sum_{v \in V} \delta(v) \geq 2(n-1) + 1 = 2n - 1,$$

що суперечить результату попередньої задачі.

3. Ліс F, який має n вершин і складається з k дерев, містить $n - k$ ребер.

Дійсно, якщо дерево T_i лісу F має n_i вершин, то воно містить $n_i - 1$ ребро, $i = 1, 2, \ldots, k$. Додаючи кількості ребер кожного з дерев T_i, дістанемо кількість $n - k$ ребер у F.

4. У графі G із n вершинами, який має більше ніж $n - 1$ ребро, є принаймні один цикл.

Розглянемо довільний граф G із n вершинами та кількістю ребер, яка перевищує $n - 1$. Припустимо, що G – ациклічний граф. Тоді G – ліс, що складається з k дерев ($k \geq 1$). За попередньою задачею кількість ребер у такому графі дорівнює $n - k$; тоді $n - k > n - 1$, тобто $k < 1$, що неможливо. ◄

5. Чи може зв'язний граф із n вершинами та $n - 1$ ребром мати цикл? Відповідь обґрунтувати.

Ні. За наведеними вище твердженнями зв'язний граф з n вершинами і $n - 1$ ребром є деревом, тобто є ациклічним графом.

6. Описати всі дерева, доповнення яких також є деревами.

Рівність $n(n–1)/2 – (n – 1) = n – 1$ (див. приклад 4.9 (2)) виконується для $n = 1$ або $n = 4$, що відповідає тривіальному графу або графу з прикладу 4.9 (1). ◄

Кістяковим (**каркасним**) **деревом** зв'язного графа $G = (V, E)$ називають дерево $T = (V, E_T)$ таке, що $E_T \subseteq E$.

Кістяковим (**каркасним**) **лісом** незв'язного графа $G = (V, E)$ називають сукупність кістякових (каркасних) дерев зв'язних компонент графа G.

Приклад 4.14.

1. Для отримання кістякового дерева зв'язного графа $G = (V, E)$ слід вилучити $|E| - |V| + 1$ ребро.

Кількість ребер, що залишаться в кістяковому дереві графа G, дорівнюватиме $|V| - 1$, отже, має бути вилучено

$$|E| - (|V| - 1) = |E| - |V| + 1 \text{ ребро.}$$

2. Нехай граф $G = (V, E)$ має k компонент зв'язності. Для отримання його кістякового лісу з графа G потрібно вилучити $|E| - |V| + k$ ребер.

Для доведення цього твердження потрібно застосувати результат попередньої задачі до кожної компоненти зв'язності графа G, відтак підсумувати результати. ◄

Число $|E| - |V| + k$ називають **цикломатичним числом** графа G і позначають $\nu(G)$.

Граф $G = (V, E)$ називають **двочастковим**, якщо існує таке розбиття $\{V_1, V_2\}$ множини його вершин V на дві підмножини (**частки**), що для довільного ребра $(v,w) \in E$ або $v \in V_1$ і $w \in V_2$, або $v \in V_2$ і $w \in V_1$.

Двочастковий граф $G = (V, E)$ називають **повним двочастковим**, якщо для будь-якої пари вершин його часток $v \in V_1$ і $w \in V_2$ маємо $(v, w) \in E$. Якщо $|V_1| = m$ і $|V_2| = n$, то повний двочастковий граф G позначають $K_{m,n}$.

Відомо таке твердження (теорема Кеніга): граф є двочастковим тоді й тільки тоді, коли всі його цикли мають парну довжину.

Завдання для самостійної роботи

1. Довести властивості цикломатичного числа $\nu(G)$ графа G:

(а) Для довільного графа G виконується $\nu(G) \geq 0$.

(б) Граф G є лісом тоді й тільки тоді, коли $\nu(G) = 0$.

(в) Граф G має рівно один простий цикл тоді й тільки тоді, коли $\nu(G) = 1$.

(г) Кількість циклів у графі G не менша ніж $\nu(G)$.

2. Описати всі дерева, які є самодоповнювальними графами.

3. Довести, що граф G зв'язний тоді й тільки тоді, коли він має кістякове дерево.

4. Довести, що граф (простий цикл парної довжини C_{2k}) є двочастковим графом.

5. Скільки ребер містить повний двочастковий граф $K_{n,m}$?

6. Довести, що будь-яке дерево є двочастковим графом. Які дерева є повними двочастковими графами?

7. Який вигляд має доповнення графа $K_{n,m}$?

8. Чи для кожного натурального числа k існує повний двочастковий граф, кількість ребер якого дорівнює k ($k \geq 2$)?

9. Чому дорівнюють діаметр і радіус повного двочасткового графа $K_{n,m}$?

4.8. Плоскі та планарні графи

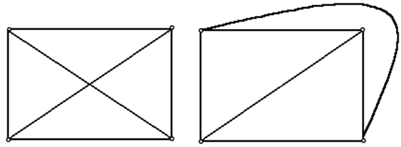
Часто не має особливого значення, як зобразити граф у вигляді рисунка на площині (діаграми), оскільки ізоморфні графи подібні за структурою й містять ту саму інформацію. Однак існують ситуації, коли потрібно, щоб зображення графа на площині задовольняло певні умови. Наприклад, якщо граф є моделлю якоїсь електронної схеми чи транспортної мережі, де вершини позначають окремі елементи схеми чи станції, а ребра – відповідно електричні проводи і шляхи, то бажано таким чином розташувати ці ребра на площині, щоб уникнути перетинів. Так виникає поняття плоского графа.

Граф називають **плоским**, якщо його діаграму можна зобразити на площині таким чином, щоб лінії, які відповідають ребрам графа, не перетиналися (тобто мали спільні точки тільки у вершинах графа). Таке зображення називають **плоскою картою** графа.

Граф називають **планарним**, якщо він ізоморфний деякому плоскому графу.

Наприклад, граф на рис. 4.7 *а* – планарний, оскільки він ізоморфний графу, що зображений поруч (рис. 4.7 *б*). Простий цикл, дерево та ліс – також планарні графи.

Про планарні графи кажуть, що вони **укладаються на площині** (мають **плоске укладання**).



а **Рис. 4.7** *б*

Жордановою кривою називатимемо неперервну лінію, що не перетинає сама себе. **Гранню** плоского графа називають множину точок площини, кожну пару яких можна з'єднати жордановою кривою, що не перетинає ребер графа. **Межею грані** вважають замкнений маршрут, що обмежує цю грань.

Отже, плоский граф розбиває всю множину точок площини на грані так, що кожна точка належить деякій грані. Зазначимо, що плоский граф має одну, причому єдину, необмежену грань (на рис. 4.8 це грань 5). Називатимемо її **зовнішньою**, а всі інші грані – **внутрішніми**.

Множину граней плоского графа позначатимемо через P.

Степенем грані r називають довжину циклічного шляху, що обмежує грань r, тобто довжину межі грані r (позначають Δ_r).

Приклад 4.15.

1. На рис. 4.8 зображено плоский граф із п'ятьма гранями.

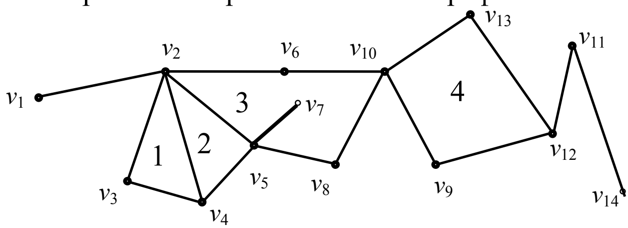


Рис. 4.8

У цьому графі

$$v_3, (v_3, v_2), v_2, (v_2, v_4), v_4, (v_4, v_3), v_3 \text{ –}$$

циклічний шлях, що обмежує грань 1,

$$v_2, (v_2, v_5), v_5, (v_5, v_7), v_7, (v_7, v_5), v_5, (v_5, v_8),$$
$$v_8, (v_8, v_{10}), v_{10}, (v_{10}, v_6), v_6, (v_6, v_2), v_2$$

– циклічний шлях для грані 3. Отже, $\Delta_1 = 3$ і $\Delta_3 = 7$.

2. Довести, що для плоского графа $G = (V, E)$ виконується рівність

$$\sum_{r \in P} \Delta_r = 2|E|.$$

Кожне ребро плоского графа або розділяє дві різні грані, або лежить усередині однієї грані (напр.=, на рис. 4.8 це ребро (v_5, v_7)). Отже, кожне ребро графа G або входить у межі тільки двох граней, або є елементом межі лише однієї грані, але при циклічному обході цієї грані таке ребро проходять двічі. Тому кожне ребро плоского графа вносить у розглядувану суму дві одиниці.

3. Довести, що для будь-якого зв'язного плоского графа $G = (V, E)$ виконується формула Ейлера

$$|V| - |E| + |P| = 2. \tag{4.3}$$

Нехай $G = (V, E)$ – зв'язний плоский граф із $n = |V|$ вершинами, а $T = (V, E_T)$ – деяке його кістякове дерево. Дерево T має тільки одну грань (зовнішню). Кількість ребер дерева T становить $|E_T| = |V| - 1$. Отже, для кістякового дерева T формула (4.3) виконується.

Послідовно проводитимемо в дереві T ребра графа G із множини $E \setminus E_T$. При цьому на кожному кроці процедури кількість вершин $|V|$ залишатиметься незмінною, а кількості ребер і граней (див. п. 4.7) одночасно збільшуватимуться на одиницю. Таким чином, формула Ейлера (4.3) виконується після кожної такої операції, тому вона справджується й для графа G, який отримаємо на завершення всієї процедури.

4. Довести, що для довільного зв'язного планарного графа $G = (V, E)$ із не менше ніж трьома вершинами виконується нерівність

$$|E| \le 3|V| - 6.$$

Оскільки в графі G немає петель і кратних ребер, то степінь Δ_r будь-якої грані не менше 3, тобто

$$\sum_{r \in P} \Delta_r \ge 3|P|.$$

Ураховуючи співвідношення з прикладу 4.15(2) і формулу Ейлера, маємо

$$\sum_{r \in P} \Delta_r = 2|E| \ge 3(|E| - |V| + 2),$$

звідки $|E| \le 3\,|V| - 6$.

5. Довести, що в будь-якому планарному графі є принаймні одна вершина, степінь якої не перевищує 5.

Якщо припустити, що степені всіх вершин планарного графа $G = (V, E)$ більші ніж 5, то дістанемо нерівність

$$2|E| = \sum_{v \in V} \delta(v) \ge 6|V|,$$

яка суперечить результату попередньої задачі. ◄

Максимальним планарним графом називають планарний граф, який при додаванні до нього будь-якого ребра перестає бути планарним.

Плоский зв'язний граф, кожну грань якого (включаючи й зовнішню) обмежено трикутником, називають **тріангуляцією**.

Можна довести, що граф є максимальним плоским графом тоді й тільки тоді, коли він – тріангуляція.

Приклад 4.16.

1. Чи існує планарний граф, який має:

(а) 7 вершин і 16 ребер; (б) 8 вершин і 18 ребер?

(а) Ні, оскільки для нього не виконується нерівність із прикладу 4.15 (4).

(б) Так, це тріангуляція.

2. Довести, що будь-яка тріангуляція з n вершинами ($n \geq 3$) містить $3n - 6$ ребер і має $2n - 4$ граней.

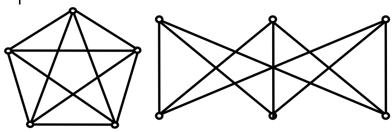
Із прикладу 4.15(2) для тріангуляції матимемо

$$3|P| = 2|E|.$$

Використовуючи цю рівність, із формули Ейлера (4.3) дістанемо

$$|E| = 3n - 6 \text{ і } |P| = 2n - 4. \blacktriangleleft$$

При дослідженні плоских графів особливе місце займають графи K_5 і $K_{3,3}$, зображені на рис. 4.9.



K_5 **Рис. 4.9** $K_{3,3}$

Доведемо, що графи K_5 і $K_{3,3}$ не є планарними.

Доведемо, що граф K_5 непланарний. Припустимо супротивне, тобто що $K_5 = (V, E)$ – планарний граф. Тоді із прикладу 4.15(4) випливає, що $|E| \leq 3|V| - 6$. Однак для графа

$$K_5 \ |E| = 10 \text{ і } |V| = 5,$$

тобто має виконуватись $10 \leq 3 \cdot 5 - 6 = 9$, що неможливо. Отже, припущення про те, що K_5 – планарний граф, неправильне.

Аналогічно методом від супротивного доведемо, що граф $K_{3,3}$ непланарний. У графі $K_{3,3}$ жодні три вершини не є вершинами трикутника. Отже, $\Delta_r \geq 4$ для всіх граней $r \in P$. Припускаючи, що граф $K_{3,3}$ планарний, з формули Ейлера (4.3) отримаємо

$$|P| = |E| - |V| + 2 = 9 - 6 + 2 = 5.$$

Тоді $$2|E| = \sum_{r \in P} \Delta_r \geq 4|P| = 4 \cdot 5 = 20, \text{ тобто } |E| \geq 10,$$

що неправильно для графа $K_{3,3}$.

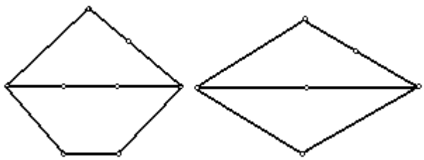
Значення графів K_5 і $K_{3,3}$ полягає в тім, що вони є єдиними істотно непланарними графами. Усі інші непланарні графи містять підграфи, подібні до K_5 або $K_{3,3}$. Характер цієї подібності розкривається за допомогою таких понять.

Нехай $e = (v, w)$ – ребро графа G, а u не є вершиною G. Вилучимо ребро e з графа G і додамо до нього нові ребра $e_1 = (v, u)$ та $e_2 = (v, u)$. Цю операцію називатимемо **підрозбиттям ребра** e.

Графи називають **гомеоморфними**, якщо їх можна отримати з одного графа за допомогою послідовного підрозбиття його ребер.

На рис. 4.10 зображено два гомеоморфні графи, G і G'.Очевидно, що коли граф G планарний, то будь-який граф, гомеоморфний G, також планарний.

Критерій планарності сформульовано у славетній теоремі К. Куратовського: граф G планарний тоді й тільки тоді, коли він не містить підграфів, гомеоморфних K_5 або $K_{3,3}$.



G **Рис. 4.10** G'

У теорії графів існують також інші критерії планарності. Наведемо ще один з них.

Елементарним стягуванням графа $G = (V, E)$ називають вилучення в ньому деякого ребра $(v_i, v_j)\in E$ та злиття вершин v_i і v_j в одну вершину v, причому v інцидентна всім тим відмінним від (v_i, v_j) ребрам графа G, які були інцидентні або вершині v_i , або вершині v_j.

Кажуть, що граф G **стягується** до графа G', якщо G' можна отримати із G за допомогою послідовності елементарних стягувань.

Граф G з рис. 4.10 стягується до графа G' поруч.

Критерій планарності можна сформулювати у вигляді такого твердження: граф планарний тоді й тільки тоді, коли він не містить підграфів, що стягуються до K_5 або $K_{3,3}$.

Наведені критерії дають змогу перевірки планарності графів. Існують алгоритми, які, установивши планарність графа, будують для нього можливе плоске укладання.

Завдання для самостійної роботи

1. Скільком граням може належати вершина степеня k плоского графа?

2. Довести, що будь-яке дерево є планарним графом. Скільки граней має дерево?

3. Чому дорівнює степінь єдиної грані дерева з n вершинами?

4. Довести, що кількість граней будь-якого плоского укладання зв'язного планарного графа з n вершинами та m ребрами є величиною сталою й дорівнює $m - n + 2$, тобто

$$|P| = |E| - |V| + 2.$$

Отже, число $|P|$ – це інваріант для заданого планарного графа G, тобто воно не залежить від способу укладання графа на площині.

5. Знайти зв'язний плоский граф із n вершинами та m ребрами, для якого $m > 3n - 6$.

6. Довести, що для довільного плоского графа $G = (V, E)$ із k компонентами зв'язності виконується рівність

$$|V| - |E| + |P| = k + 1 \text{ (узагальнена формула Ейлера).}$$

7. Довести, що кількість внутрішніх граней довільного плоского графа G дорівнює цикломатичному числу $\nu(G)$ графа G.

8. Чи існує планарний граф, який має: (а) 7 вершин і 15 ребер; (б) 8 вершин і 19 ребер?

9. Чи існує плоский граф із шістьма вершинами, що має дев'ять граней?

10. Довести, що для зв'язного плоского графа з n вершинами ($n \geq 3$) і m ребрами, який не містить трикутників, виконується нерівність $m \leq 2n - 4$.

11. Довести, що граф є максимальним плоским графом тоді й тільки тоді, коли він є тріангуляцією.

4.9. Розфарбування графів

Нехай $G = (V, E)$ – довільний граф, а $N_k = \{1, 2, \ldots, k\}$.

Будь-яке відображення $f : V \to N_k$, яке кожній вершині $v \in V$ ставить у відповідність деяке натуральне число $f(v) \in N_k$, називають **розфарбуванням** графа G. Число $f(v)$ називають **кольором**, або **номером фарби**, вершини v.

Розфарбування f графа G називають **правильним**, якщо для будь-яких його суміжних вершин v і w виконується $f(v) \neq f(w)$.

Мінімальне число k, для якого існує правильне розфарбування графа G, називають **хроматичним числом** графа G і позначають $\chi(G)$.

Мінімальним правильним розфарбуванням графа G називають правильне розфарбування для $k = \chi(G)$.

Для певних типів графів визначити хроматичні числа нескладно. Наприклад, 1-хроматичними є порожні графи $G = (V, \varnothing)$ і тільки вони. Хроматичне число повного графа K_n дорівнює n, а хроматичне число довільного двочасткового графа – 2. 2-хроматичні графи часто називають **біхроматичними**.

Неважко обґрунтувати такі твердження.

Якщо кожна зв'язна компонента графа G потребує для свого правильного розфарбування не більше k фарб, то $\chi(G) \leq k$.

Граф є біхроматичним тоді й тільки тоді, коли він двочастковий. Зокрема, усі дерева та прості цикли парної довжини C_{2k} біхроматичні. Водночас $\chi(C_{2k+1}) = 3$.

Приклад 4.17. Доведемо, що для довільного графа G виконується нерівність $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$, де $\Delta(G)$ – найбільший зі степенів вершин графа G.

Доведення проведемо індукцією за кількістю n вершин графа G. Для тривіального графа ($n = 1$) і графів із двома вершинами нерівність виконується.

Нехай твердження теореми виконується для всіх графів із кількістю вершин t ($t \geq 2$). Розглянемо довільний граф G із $t + 1$ вершиною. Вилучимо з нього деяку вершину v. Дістанемо граф G', степені всіх вершин якого не перевищують $\Delta(G)$. Отже, за припущенням індукції для правильного розфарбування G' потрібно не більше ніж $\Delta(G) + 1$ фарб. Правильне розфарбування для G дістанемо з правильного розфарбування графа G', якщо пофарбуємо вершину v у колір, відмінний від кольорів усіх суміжних із v вершин. Оскільки таких вершин не більше ніж $\Delta(G)$, то для правильного розфарбування графа G достатньо $\Delta(G) + 1$ фарб. ◄

Так склалося історично, що окреме місце у теорії графів займають дослідження з розфарбування планарних графів. Це пов'язано зі відомою **проблемою** (**гіпотезою**) **чотирьох фарб**.

Грані плоскої карти назвемо **суміжними**, якщо їхні межі мають принаймні одне спільне ребро.

Гіпотеза чотирьох фарб виникла у зв'язку з розфарбуванням друкованих географічних карт (звідси й термін *плоска карта*) і була сформульована так: **грані довільної плоскої карти можна розфарбувати не більше ніж чотирма фарбами так, що будь-які суміжні грані матимуть різні кольори**.

Згодом з'явилось інше, рівносильне, формулювання гіпотези чотирьох фарб: **для правильного розфарбування вершин довільного планарного графа потрібно не більше чотирьох фарб**.

Ця гіпотеза виникла в середині XIX ст. Більше ста років дослідники намагалися її довести чи спростувати. У результаті багаторічних досліджень виявилось, що для розв'язання проблеми чотирьох фарб потрібно перевірити її справедливість для скінченної кількості графів певного вигляду. Кількість варіантів, які потрібно було перебрати, була настільки великою, що тільки за допомогою потужної ЕОМ, яка неперервно працювала протягом більше двох місяців, у 1976 р. справедливість гіпотези чотирьох фарб було підтверджено. Однак такий фізичний, експериментальний спосіб доведення не зовсім влаштовує багатьох професіональних математиків, тому вони продовжують пошуки аналітичного доведення гіпотези.

Набагато простіше можна отримати такі результати.

Приклад 4.18. Довести, що для правильного розфарбування довільного планарного графа потрібно не більше шести фарб.

Доведення виконаємо індукцією за кількістю n вершин графа. Для $n \le 6$ твердження очевидне.

Припустимо, що хроматичне число всіх планарних графів із t вершинами не перевищує 6 ($t \ge 6$). Розглянемо довільний планарний граф G із $t + 1$ вершиною. Згідно із прикладом 4.15(5) у графі G існує вершина v, степінь якої не більше 5. Вилучимо вершину v із графа G. Отримаємо граф G', вершини якого за припущенням індукції можна правильно розфарбувати не більше ніж у шість кольорів. Тоді правильне розфарбування для G отримаємо з одержаного правильного розфарбування графа G', надаючи вершині v колір, відмінний від кольорів усіх суміжних із нею вершин. Оскільки таких вершин не більше п'яти, то для виконання цієї процедури достатньо шести фарб. Отже,

$$\chi(G) \le 6. \blacktriangleleft$$

Пропонуємо самостійно переконатись у справедливості такого твердження: для довільного планарного графа G виконується

$$\chi(G) \leq 5.$$

Граф G називають **критичним**, якщо хроматичне число підграфа G', отриманого в результаті вилучення будь-якої вершини із G, строго менше, ніж хроматичне число графа G.

Критичний граф G, для якого $k = \chi(G)$, називають k-**критичним**.

Приклад 4.19.

1. Доведемо, що будь-який повний граф є критичним.

$\chi(K_n) = n$, а після вилучення довільної вершини з K_n (див. п. 4.2) отримаємо повний граф K_{n-1}, хроматичне число якого дорівнює $n - 1$.

2. Довести, що довільний критичний граф є зв'язним.

Припустимо, що деякий критичний граф G є незв'язним і має кілька компонент зв'язності. Вилучимо довільну вершину з тієї компоненти зв'язності графа G, хроматичне число якої не перевищує хроматичні числа решти компонент зв'язності. Отримаємо суперечність, оскільки після такого вилучення хроматичне число графа G не зміниться. ◄

Наостанок зауважимо, що існують планарні графи, хроматичне число яких дорівнює 4. Найпростішим таким графом є K_4. Отже, гіпотезу чотирьох фарб не можна вдосконалити, перетворивши на гіпотезу трьох фарб.

Різноманітні алгоритми відшукання правильних розфарбувань графів можна знайти у підручниках з теорії графів.

Завдання для самостійної роботи

1. Визначити хроматичне число:

(а) повного графа K_n;

(б) повного двочасткового графа $K_{n,m}$;

(в) довільного двочасткового графа;

(г) простого циклу довжиною $2k$;

(д) простого циклу довжиною $2k + 1$, $k \in N$;

(е) дерева.

2. Довести, що для правильного розфарбування довільного кубічного графа достатньо чотирьох фарб.

3. Чому дорівнює хроматичне число повного графа K_n, з якого вилучено одне ребро?

4. Довести, що граф G біхроматичний тоді й тільки тоді, коли він не містить циклів непарної довжини.

5. Довести, що для довільного планарного графа G виконується нерівність $\chi(G) \le 5$.

6. Знайти графи, які мають різні хроматичні числа й у яких:

(а) кількість вершин степеня k однакова для всіх $k \ge 0$;

(б) кількість простих циклів довжиною l однакова для всіх l;

(в) виконуються обидві умови з п. (а) та (б).

7. Знайти всі 2-критичні й 3-критичні графи.

4.10. Обходи графів

Появу теорії графів як розділу математики пов'язують із задачею про кенігсберзькі мости. Сім мостів міста Кенігсберга було розташовано на р. Прегель так, як зображено на рис. 4.11, *а* (B і C – береги, A та D – острови).

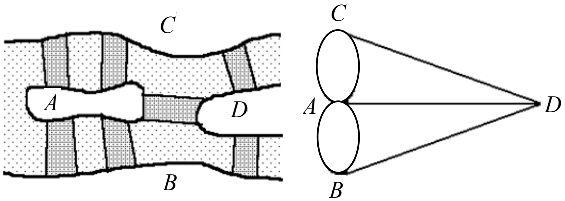


Рис. 4.11

а *б*

Задача полягає в тім, чи можна, починаючи з будь-якої точки (A, B, C або D), здійснити прогулянку (обхід) через усі мости так, щоб пройти кожен міст тільки один раз і повернутися у вихідну точку.

Оскільки істотними є тільки переходи через мости, то план міста можна зобразити у вигляді графа G (із *кратними* ребрами), вершинами якого є береги й острови (точки A, B, C і D), а ребрами – мости (рис. 4.11, *б*). Тоді задачу про кенігсберзькі мости мовою теорії графів можна сформулювати так: чи існує в графі G цикл, який містить усі ребра графа? Інше відоме формулювання проблеми: чи можна накреслити фігуру, що зображає граф G, не відриваючи олівця від паперу й не повторюючи ліній двічі, почавши й закінчивши процедуру в одній із вершин фігури? Уперше відповідь на це запитання дав Л. Ейлер у 1736 р. Його роботу, у якій викладено розв'язок задачі, вважають початком теорії графів.

Цикл, що містить усі ребра графа, називають **ейлеровим**. Зв'язний граф, що має ейлерів цикл, називають **ейлеровим**.

Ейлер довів таку теорему: зв'язний граф G є ейлеровим тоді й тільки тоді, коли степені всіх його вершин парні.

Оскільки для графа G на рис. 4.11, *б* умови теореми Ейлера не виконуються, то в задачі про кенігсберзькі мости відповідь негативна.

Приклад 4.20. Довести, що для довільного зв'язного графа існує циклічний маршрут, який починається з будь-якої вершини й містить усі ребра графа, причому кожне з них – двічі.

Подвоїмо кожне ребро графа G, перетворивши його на мультиграф G' (див. п. 4.11). Степені всіх вершин G' парні, тому за теоремою Ейлера в G' існує цикл, що містить усі його ребра. Циклу відповідає шуканий циклічний маршрут у графі G. ◄

Якщо G – ейлерів граф, то будь-який його ейлерів цикл не єдиний і може відрізнятися від інших ейлерових циклів цього графа або початковою вершиною, або порядком проходження вершин (а можливо, і тим, і іншим).

Для знаходження якогось ейлерового циклу в ейлеровому графі G можна застосувати **алгоритм Фльорі**. Фіксуємо довільну початкову вершину циклу. На кожному кроці процедури до шуканого циклу обираємо (доки це можливо) те ребро, після вилучення якого граф не розіб'ється на дві нетривіальні зв'язні компоненти. Кожне обране ребро вилучаємо із G. Процедуру завершуємо, коли всі ребра буде вичерпано. Сформульований алгоритм будує ейлерів цикл графа G.

Існує ще один різновид обходу графа, який має різноманітні практичні застосування й називається гамільтоновим циклом. Простий цикл, який проходить через усі вершини графа, називають **гамільтоновим циклом**. Граф називають **гамільтоновим**, якщо він має гамільтонів цикл.

Незважаючи на певну подібність означень ейлерових і гамільтонових графів, на жаль, для розпізнавання гамільтоновості графів на сьогодні не існує таких простих і вичерпних критеріїв та алгоритмів, як для ейлерових графів. Є кілька теорем, що формулюють достатні умови існування гамільтонового циклу в заданому графі. Доведення таких теорем зазвичай містять і алгоритми побудови відповідних гамільтонових циклів.

Незамкнений ланцюг, що містить усі ребра графа, називають **ейлеровим**, а простий незамкнений ланцюг, що містить усі вершини графа, – **гамільтоновим ланцюгом**.

Приклад 4.21*.* Навести приклади ейлерового графа, який не є гамільтоновим, а також гамільтонового графа, який не є ейлеровим.

Граф $G = (V, E)$, де

$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $E = \{(1,2), (1,3), (2,3), (3,4), (3,5), (4,5)\}$,

є ейлеровим, однак не є гамільтоновим. А будь-який повний граф K_n для непарного n є гамільтоновим, але не ейлеровим. ◄

Завдання для самостійної роботи

1. Визначити, які з повних графів K_n є ейлеровими.

2. Для яких значень n і m повний двочастковий граф $K_{n,m}$ є ейлеровим?

3. Довести, що зв'язний граф має ейлерів ланцюг тоді й тільки тоді, коли він має тільки дві вершини з непарними степенями.

4. Довести, що не для всіх зв'язних графів існує циклічний маршрут, який містить кожне ребро графа тричі. Сформулювати умови існування такого маршруту.

5. Довести, що в повному графі K_n існує гамільтонів цикл для довільного $n \geq 3$.

4.11. Орієнтовані графи

Крім моделі, розглянутої у попередніх параграфах, у теорії графів досліджують також інші типи графів. Наприклад, **мультиграф** – граф, у якому дозволяються **кратні ребра**, тобто будь-які дві вершини можна з'єднати кількома ребрами. **Псевдограф** – це мультиграф, який може мати **петлі**, тобто ребра, що з'єднують вершину саму із собою. **Гіперграф** – граф, у якому ребрами можуть бути не лише двоелементні, але й довільні підмножини множини вершин. Нарешті, важливою для різноманітних практичних застосувань є модель, яку називають **орієнто-**

ваним графом (або **орграфом**). Подамо короткий огляд основних понять і результатів для орграфів.

Орієнтованим графом (**орграфом**) G називають пару множин (V, E), де $E \subseteq V \times V$. Елементи множини V називають **вершинами**, а елементи множини E – **дугами** орграфа $G = (V, E)$. Отже, дуга – це впорядкована пара вершин; V називають **множиною вершин**, E – **множиною дуг** орграфа G.

Якщо $e = (v, w)$ – дуга, то вершину v називають **початком**, а вершину w – **кінцем** дуги e. Кажуть, що дуга e **веде** із вершини v у вершину w, або виходить із v і заходить у w. Дугу e та вершини v і w називають **інцидентними** між собою, а вершини v і w – **суміжними**.

Дугу (v, v), у якій початок і кінець збігаються, називають **петлею**. Надалі розглядатимемо тільки орграфи без петель.

Як і звичайний граф, орграф $G = (V, E)$ можна задавати переліком елементів скінченних множин V і E, діаграмою або за допомогою матриць.

Діаграма орграфа відрізняється від діаграми звичайного графа тим, що дуги орграфа зображають напрямленими лініями (відрізками чи кривими), які йдуть від початку до кінця дуги. Напрямок лінії позначають стрілкою.

Поставимо у відповідність усім вершинам орграфа $G = (V, E)$ натуральні числа від 1 до n; дістанемо множину вершин V у вигляді $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. **Матрицею суміжності** A орграфа G називають квадратну матрицю порядку n, у якій елемент i-го рядка та j-го стовпчика a_{ij} дорівнює 1, якщо $(v_i, v_j) \in E$, і дорівнює 0 в іншому разі.

Занумеруємо всі вершини орграфа $G = (V, E)$ числами від 1 до n, а дуги – числами від 1 до m. **Матрицею інцидентності** B орграфа G називають $n \times m$-матриця, у якій елемент i-го рядка та j-го стовпчика b_{ij} дорівнює 1, якщо вершина v_i є початком дуги e_j, b_{ij} дорівнює -1, якщо вершина v_i є кінцем дуги e_j, і b_{ij} дорівнює 0, якщо вершина v_i і дуга e_j неінцидентні.

Орграфи $G_1 = (V_1, E_1)$ і $G_2 = (V_2, E_2)$ називають **ізоморфними**, якщо існує таке взаємно однозначне відображення φ множини V_1 на множину V_2, що дуга $(v, w) \in E_1$ тоді й тільки тоді, коли дуга $(\varphi(v), \varphi(w)) \in E_2$.

Напівстепенем виходу вершини v (позначають $\delta^+(v)$) орграфа G називають кількість дуг орграфа G, початком яких є вершина v.

Напівстепенем заходу вершини v (позначають $\delta^{-}(v)$) орграфа G називають кількість дуг орграфа G, кінцем яких є вершина v.

Приклад 4.22.

1. Довести, що для довільного орграфа $G = (V, E)$ виконується рівність

$$\sum_{v\in V}\delta(v) = \sum_{v\in V}\delta^{-}(v).$$

У будь-якому орграфі G кількість початків його дуг, очевидно, збігається з кількістю їхніх кінців.

2. Чи існує орграф із п'ятьма вершинами, напівстепені виходу вершин якого дорівнюють 4, 2, 1, 0, 1, а відповідні напівстепені заходу – 3, 2, 1, 1, 2?

Ні, адже не виконується рівність із попереднього пункту.

3. Чи існує орграф із чотирма вершинами, напівстепені виходу вершин якого дорівнюють 3, 1, 3, 0, а відповідні напівстепені заходу – 1, 2, 1, 3?

Так, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – його матриця суміжності. ◄

Чималу частку властивостей і тверджень стосовно звичайних графів можна без змін сформулювати й для орграфів. Зокрема, це стосується цілих розділів (таких, наприклад, як планарність або розфарбування графів), у яких властивість орієнтації ребер неістотна. Певні особливості в означеннях, постановках задач і методах їх розв'язання виникають при дослідженні проблем, пов'язаних із маршрутами, зв'язністю, обходами графів тощо.

Маршрутом, або **шляхом**, в орграфі $G = (V, E)$ називають таку послідовність його вершин і дуг

$$v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots , e_k, v_{k+1}, \tag{4.4}$$

що $e_i = (v_i, v_{i+1})$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Кажуть, що цей маршрут **веде** з вершини v_1 у вершину v_{k+1}. Кількість k дуг у маршруті (4.4) називають його **довжиною**.

Як і для графів, розглянутих вище, маршрут (4.4) можна записувати лише як послідовність вершин, що входять до його складу, тобто $v_1, v_2, \ldots , v_{k+1}$.

Маршрут, у якому всі дуги попарно різні, називають **ланцюгом**, а маршрут, у якому всі вершини попарно різні, – **простим**

ланцюгом. Маршрут (4.4) називають **замкненим** (або **циклічним**), якщо $v_1 = v_{k+1}$. Замкнений ланцюг називають **циклом**, а замкнений простий ланцюг – **простим циклом**, або **контуром**.

Орграф називають **ациклічним** (або **безконтурним**), якщо він не має жодного циклу.

Якщо існує маршрут, який веде з вершини v у вершину w, то кажуть, що вершина w **досяжна** з вершини v. Тоді **відстанню** $d(v, w)$ від вершини v до вершини w називають довжину найкоротшого маршруту, що веде з v у w.

Вершину v орграфа G називають **джерелом**, якщо з неї досяжна будь-яка інша вершина орграфа G. Вершину w називають **стоком**, якщо вона досяжна з будь-якої іншої вершини орграфа G. Вершина v орграфа G називають **тупиковою**, якщо жодна із вершин орграфа G не досяжна з v. Вершину v орграфа G називають **недосяжною**, якщо вона не досяжна з жодної вершини орграфа G.

Повним орграфом (або **турніром**) називають орграф, у якому будь-які дві вершини інцидентні одній і тільки одній його дузі.

Приклад 4.23.

1. Для довільного повного орграфа $G = (V, E)$ з n вершинами $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ виконуються такі рівності:

(а) $\sum_{i=1}^{n} \delta^+(v_i) = |E|$; (б) $|E| = n(n-1)/2$; в) $\sum_{i=1}^{n}(m-1-\delta^+(v_i)) = \sum_{i=1}^{n}\delta^+(v_i)$.

(а) У будь-якому орграфі G (зокрема повному) кількість дуг $|E|$ збігається з кількістю початків цих дуг (і, відповідно, з кількістю кінців усіх дуг).

(б) Кількість дуг у повному орграфі G збігається з кількістю ребер у відповідному неорієнтованому повному графі G', тобто в графі, який отримаємо з G, замінивши в ньому всі орієнтовані дуги на неорієнтовані ребра (див. приклад 4.7 (1)).

(в) У повному орграфі з n вершинами для всіх вершин виконуються рівності

$$n - 1 - \delta^+(v_i) = \delta^-(v_i),\ i = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Отже, сума в лівій частині рівності є кількістю кінців усіх дуг повного орграфа G, а сума в правій частині – кількістю початків усіх його дуг. Ці кількості, очевидно, збігаються.

2. Довести, що в будь-якому повному орграфі $G = (V, E)$ є принаймні одне джерело.

Для доведення твердження застосуємо метод математичної індукції за кількістю вершин повного орграфа. База індукції: у повному орграфі з двома вершинами одна з них є джерелом (а інша – стоком). Припустимо, що будь-який повний орграф із n вершинами має джерело. Розглянемо довільний повний орграф $G = (V, E)$ з $n + 1$ вершиною. Вилучивши одну з його вершин v, отримаємо повний орграф із n вершинами, для якого справджується припущення індукції. Отже, у ньому є принаймні одне джерело. Нехай це буде вершина w. Повернемо на місце вилучену вершину v зі всіма відповідними дугами. Оскільки граф G повний, то його вершини v і w з'єднані дугою. Якщо ця дуга веде з v у w (тобто $(v, w)\in E$), то джерелом у графі G буде вершина v. В іншому разі, коли $(w, v)\in E$, джерелом залишиться вершина w. ◄

3. Нумерацією орграфа $G = (V, E)$ з n вершинами називатимемо взаємно однозначне відображення

$$f : V \to N_n,$$

яке кожній вершині $v\in V$ ставить у відповідність натуральне число $f(v)$ із множини $N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Довести, що для ациклічного орграфа $G = (V, E)$ існує така нумерація f, що для будь-якої дуги $(v, w)\in E$ виконується

$$f(v) < f(w).$$

Цю нумерацію називають **правильною нумерацією**, або **топологічним сортуванням** вершин орграфа G.

Неважко довести (методом від супротивного), що ациклічний орграф G завжди має принаймні один стік. Нехай u_1 – стік орграфа G. Покладемо $f(u_1) = n$ і вилучимо з G вершину u_1. Дістанемо ациклічний орграф G_1, у якому існуватиме стік u_2. Покладемо $f(u_2) = n - 1$ і вилучимо u_2 з G_1. Продовжуючи цю процедуру, отримаємо шукану правильну нумерацію. ◄

Послідовність (4.4) називають **напівмаршрутом**, якщо кожна дуга e_i цієї послідовності є такою, що або $e_i = (v_i, v_{i+1})$, або $e_i = (v_{i+1}, v_i)$ (можна вважати, що при побудові напівмаршруту ми ігноруємо орієнтацію дуг орграфа). Аналогічно означають **напівланцюг**, **напівцикл** і **півконтур**.

Орграф називають **сильно зв'язним**, якщо будь-які дві його вершини досяжні одна з одної. Орграф називають **однобічно зв'язним**, якщо для будь-яких двох його вершин принаймні одна досяжна з іншої. Орграф називають **слабко зв'язним**, якщо для будь-яких двох його вершин існує напівмаршрут, що веде з однієї вершини в іншу. Маршрут в орграфі G називають **кістяковим**, якщо він містить усі вершини орграфа G.

Орграф, у якому є джерело й немає жодного півконтуру, називають **кореневим деревом**.

Вхідне дерево – це орграф, який має стік і не має жодного півконтуру.

Орграф називають **функціональним**, якщо напівстепінь виходу кожної його вершини дорівнює 1. Орграф називають **ін'єктивним**, якщо напівстепінь заходу кожної його вершини дорівнює 1.

Ейлеровим контуром в орграфі G називають контур, що містить усі дуги орграфа G. **Ейлеровим орграфом** називають орграф, у якому є ейлерів контур. **Ейлеровим ланцюгом** називають незамкнений ланцюг, що містить усі дуги орграфа.

Нижченаведене твердження можна довести так само, як і для звичайних графів.

Слабко зв'язний орграф $G = (V, E)$ є ейлеровим тоді й тільки тоді, коли напівстепінь виходу будь-якої його вершини дорівнює напівстепеню її заходу.

Гамільтоновим контуром називають контур, що містить усі вершини орграфа. Орграф, який має гамільтонів контур, називають **гамільтоновим орграфом**.

Простий незамкнений ланцюг, що містить усі вершини орграфа, називають **гамільтоновим**.

Повний орграф завжди гамільтонів.

Орграф $G = (V, E)$ називають **транзитивним**, якщо з $(v, w)\in E$ і $(w, u)\in E$ випливає $(v, u)\in E$.

Існує взаємно однозначна відповідність між множиною всіх безконтурних транзитивних орграфів $G = (V, E)$ із множиною вершин $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ і петлями в кожній вершині та множиною всіх відношень часткового порядку на V. Ця бієкція встановлюється так: орграфу $G = (V, E)$ відповідає відношення R на V таке, що $(v_i, v_j)\in R$ тоді й тільки тоді, коли $(v_i, v_j)\in E$, $v_i, v_j \in V$.

Завдання для самостійної роботи

1. Нехай задано орграф $G = (V, E)$:

(а) $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

$E = \{(1, 3), (2, 1), (2, 5), (3, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 2)\}$;

(б) $V = \{a, b, c, d\}$, $E = \{(a, c), (a, d), (b, a), (b, d), (c, b), (d, c)\}$.

Побудувати діаграму, матриці суміжності та інцидентності для кожного з цих орграфів.

2. Як визначити напівстепені виходу та заходу певної вершини орграфа G за його матрицею суміжності A?

3. Чи існує орграф із трьома вершинами, напівстепені виходу вершин якого дорівнюють 2, 2 і 0, а відповідні напівстепені заходу – 2, 1 та 1?

4. Довести, що відношення досяжності на множині вершин орграфа транзитивне.

5. Довести, що в повному орграфі може бути не більше однієї недосяжної й не більше однієї тупикової вершини.

6. Довести, що в будь-якому повному орграфі є принаймні один стік.

7. Довести, що для транзитивного повного орграфа завжди існує правильна нумерація.

8. Нехай A – матриця суміжності орграфа G. Довести, що елемент $a_{ij}^{(k)}$ i-го рядка та j-го стовпчика матриці A^k дорівнює кількості шляхів довжиною k, які ведуть в орграфі G з вершини з номером i у вершину з номером j.

4.12. Граф як модель. Застосування теорії графів

Останнім часом графи й пов'язані з ними методи досліджень використовують практично в усіх розділах сучасної математики, зокрема в дискретній математиці.

Граф – це математична модель найрізноманітніших об'єктів, явищ і процесів, досліджуваних і використовуваних у науці, техніці та на практиці. Коротко опишемо найвідоміші застосування теорії графів.

Наприклад, у вигляді графа можна зображувати такі об'єкти:

• електричні та транспортні мережі;

• інформаційні й комп'ютерні мережі;

• карти автомобільних, залізничних і повітряних шляхів, газо- й нафтопроводів;

• моделі кристалів;

• структури молекул хімічних речовин;

• моделі ігор;

• різні математичні об'єкти (відношення, частково впорядковані множини, ґратки, автомати, ланцюги Маркова, алгоритми та програми);

• лабіринти;

• плани діяльності чи плани виконання певних робіт (розклади);

• генеалогічні дерева тощо.

Наведемо приклади застосування теорії графів:

• пошук зв'язних компонент у комунікаційних мережах;

• пошук найкоротших, найдешевших і найдорожчих шляхів у комунікаційних мережах;

• побудова кістякового дерева, тобто досягнення зв'язності з найменшою можливою кількістю ребер;

• пошук максимальної течії для транспортної мережі, у якій означено вхідні та вихідні вершини і пропускні спроможності ребер;

• ізоморфізм графів: ідентичність структур молекул (ізометрія);

• відшукання циклів графів:

  – гамільтонів цикл: обійти всі вершини графа, побувавши в кожній з них лише один раз (задача комівояжера);
  – ейлерів цикл: обійти всі ребра (здійснити контроль дієздатності всіх ланок мережі);

• розфарбування графів: розфарбування географічних карт, укладання розкладів, розміщення ресурсів тощо;

• планарність графів: проектування друкованих електронних та електричних схем, транспортних розв'язок тощо;

• знаходження центрів графа – вершин, максимальна відстань від яких до решти вершин графа мінімальна (*столиць*) тощо.

Розділ 5
ТЕОРІЯ АВТОМАТІВ

Однією з найпопулярніших і найпоширеніших математичних моделей, які активно й успішно використовувались і використовуються в теорії та практиці сучасної комп'ютерної науки (інформатики), є скінченний автомат. Варто назвати лише деякі найважливіші приклади застосування цієї моделі.

1. Опис функціонування та логічного проектування найрізноманітніших схем і пристроїв дискретної дії. Зокрема, скінченний автомат широко використовують для розробки й аналізу схем і пристроїв обчислювальної техніки як модель для інтерпретування мікропрограм виконання команд ЕОМ тощо.

2. Скінченний автомат – зручний і ефективний засіб для опису та створення важливого компонента стандартного компілятора мови програмування, який називають **лексичним аналізатором**. Цей програмний модуль відповідає за розбивку вхідного тексту на логічні одиниці: ідентифікатори, ключові (резервовані) слова, константи, спеціальні знаки тощо.

3. Скінченний автомат є складовою частиною програмного забезпечення, призначеного для перегляду великих текстових масивів даних (наприклад набору web-сторінок) з метою пошуку в них потрібної інформації. Ключем для такого пошуку служать або ключові слова, або певні послідовності символів (образи).

4. Модель скінченного автомата використовують у програмному забезпеченні для розробки й аналізу поведінки різноманітних систем, що можуть перебувати у скінченній кількості відмінних один від одного станів. Прикладами таких систем можуть бути протокол безпечного (захищеного) обміну інформацією, протокол, що організує та контролює процедури електронної торгівлі та інших фінансових операцій у комп'ютерних мережах тощо.

5.1. Поняття скінченного автомата. Методи задання автоматів

Скінченним автоматом (далі – просто **автоматом**) називають систему

$$A = (X, Y, U, \delta, \lambda),$$

у якій $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ та $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ – скінченні **множини** (**алфавіти**) відповідно **вхідних і вихідних сигналів**, $U = \{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$ – **множина внутрішніх станів** автомата. Функції δ та λ описують алгоритм функціонування (поведінку) автомата A. Функцію δ: $U \times X \to U$ називають **функцією переходів**, а λ: $U \times X \to Y$ – **функцією виходів** автомата A.

Необхідно підкреслити одну особливість моделі автомата, яка випливає з її подальшої фізичної інтерпретації. Вважаємо, що автомат A функціонує в дискретному часі, тобто час функціонування автомата розбито на відрізки однакової довжини – **такти**. Межі тактів t називають моментами абстрактного дискретного **автоматного часу** й нумерують натуральними числами, починаючи з одиниці. Значення вхідних і вихідних сигналів та значення станів автомата можуть змінюватися тільки в моменти автоматного часу $t = 1, 2, \ldots$.

Якщо позначимо через

$$x(t) \in X, y(t) \in Y, a(t) \in U$$

значення вхідного й вихідного сигналів і стану автомата в момент автоматного часу t, то робота автомата A описуватиметься співвідношеннями

$$a(t + 1) = \delta(a(t), x(t)), y(t) = \lambda(a(t), x(t)). \tag{5.1}$$

Співвідношення (5.1) називають **канонічними рівняннями** автомата A.

Перше із канонічних рівнянь можна прочитати так: стан автомата A в будь-який момент автоматного часу $t + 1$ однозначно визначається сигналом, поданим на вхід автомата, і станом автомата A в попередній момент автоматного часу. При цьому кажемо, що автомат A переходить зі стану $a(t)$ у стан $a(t + 1)$.

У математичній моделі автомата можна вважати, що такий перехід відбувається миттєво (стрибкоподібно). За фізичної інтерпретації розглядуваної моделі слід брати до уваги, що зазначений перехід відбувається поступово й потребує певного фізикного часу. Однак вважатимемо, що цей час завжди менший від тривалості такту введеного дискретного часу; отже, від моменту t до моменту $t + 1$ весь перехідний процес завершується.

Крім зміни станів, результатом роботи автомата є також видача вихідних сигналів за законом, визначеним другим канонічним рівнянням автомата.

Якщо у автоматі A виділено стан, у якому автомат A перебуває в момент автоматного часу $t = 1$, то цей стан називають **початковим** (зазвичай початковим станом уважають a_1), а автомат A називають **ініціальним** і позначають A/a_1. Надалі не вказуватимемо явно залежність змінних і результатів функцій переходів і виходів від автоматного часу t, крім тих випадків, коли це потрібно.

Для розв'язання задач теорії автоматів зручно використовувати різні способи (методи) задання автоматів. Опишемо два найпоширеніші. У цих методах істотним є те, що функції δ та λ автомата A мають скінченні області визначення.

Табличний спосіб. Функції δ і λ можна задавати за допомогою двох таблиць, які називають відповідно **таблицею переходів** і **таблицею виходів** автомата A. Загальна структура обох таблиць однакова: рядки таблиць позначено вхідними сигналами $x_1, x_2, \ldots, x_m$, а стовпчики – станами $a_1, a_2, \ldots, a_s$. На перетині i-го рядка та j-го стовпчика в таблиці переходів записують стан $\delta(a_j, x_i)$, а в таблиці виходів – вихідний сигнал $\lambda(a_j, x_i)$. Іноді для задання автомата використовують одну **суміщену таблицю переходів/виходів**, у якій на перетині i-го рядка та j-го стовпчика записують відповідну пару a_k / y_l, де $a_k = \delta(a_j, x_i)$ та $y_l = \lambda(a_j, x_i)$.

Графічний спосіб задання автомата за допомогою орієнтованого мультиграфа називають **графом**, або **діаграмою автомата** (**автоматним графом**, **автоматною діаграмою**). Вершини графа позначають символами станів автомата A. Якщо $\delta(a_i, x_k) = a_j$ та $\lambda(a_i, x_k) = y_l$, то в графі автомата проводять орієнтовану дугу (або стрілку) з вершини a_i у вершину a_j й позначають її символами x_k/y_l. Задання автомата за допомогою графа особливо наочне, якщо кількість його станів порівняно невелика.

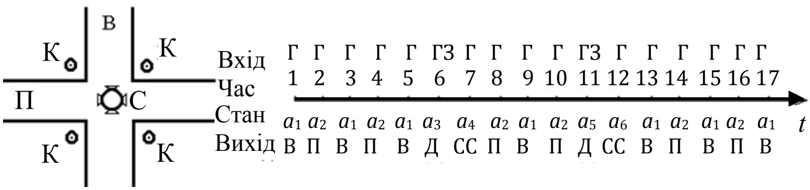
Зрозуміло, що досить легко можна перейти від одного способу задання до іншого.

Автомат A називають **детермінованим**, якщо функції δ і λ всюди визначені, і **недетермінованим**, якщо δ і λ – усюди визначені відповідності між $U \times X$ і U та $U \times X$ та Y, відповідно, але вони не задовольняють умову функціональності. Автомат A називають **частковим**, якщо функції δ і λ не є всюди визначеними.

Приклад 5.1.

1. Розглянемо автомат D, який регулює дорожній рух на перехресті вулиць В і П.

В автомат дорожнього руху D з періодом одна хвилина надходить тактовий сигнал Г генератора синхроімпульсів, що послідовно перемикає сигнали світлофора С, дозволяючи транспорту рух відповідно вулицями В і П (рис. 5.1, *а*). Крім світлофора є також кнопка виклику К, за допомогою якої пішохід може надіслати автомату запит З на призупинення руху на перехресті. При надходженні запиту З і по завершенні поточного інтервалу часу в одну хвилину автомат перериває генерування послідовності сигналів В і П на дві хвилини, сигналом Д запалює транспарант, що дозволяє перехід пішоходам, а по вичерпанні двох хвилин формує сигнал скидання СС, повертаючи автомат до відновлення формування послідовності сигналів В та П. Таким чином, автомат D виробляє вихідні сигнали В, П, Д і СС для дозволу руху транспорту по вулицях В і П, дозволу переходу пішоходам та скидання кнопки виклику. Роботу автомата D ілюструє часова діаграма на рис. 5.1, *б*.



а **Рис. 5.1** *б*

Таблиці переходів і виходів автомата дорожнього руху мають такий вигляд:

δ	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
x_1	a_2	a_1	a_4	a_2	a_6	a_1
x_2	a_3	a_5	a_4	a_2	a_6	a_1

λ	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
x_1	y_2	y_1	y_4	y_2	y_4	y_1
x_2	y_3	y_3	y_4	y_2	y_4	y_1

Тут використано позначення:

x_1 = Г, x_2 = З & Г, y_1 = В, y_2 = П, y_3 = Д, y_4 = Д & СС):

Граф автомата дорожнього руху подано на рис. 5.2.

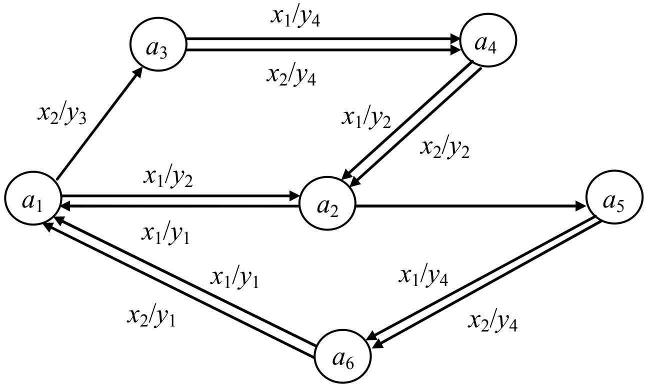


Рис. 5.2

2. Побудуємо автомат *S*, який описує алгоритм функціонування послідовного двійкового суматора. На вхід автомата надходять пари розрядів двійкових чисел, що додаються, починаючи з молодших розрядів. На виході автомата має з'являтися розряд результату додавання. Потрібно також фіксувати й ураховувати ситуацію наявності чи відсутності перенесення в наступний розряд. Ці дві ситуації відображають два стани автомата *S*: початковому стану a_1 відповідає ситуація *немає перенесення*, а стану a_2 – ситуація *є перенесення*.

Вхідні сигнали $x_0 = (0, 0)$, $x_1 = (0, 1)$, $x_2 = (1, 0)$ і $x_3 = (1, 1)$ задають чотири можливі комбінації розрядів, що додаються. Граф автомата *S* подано на рис. 5.3.

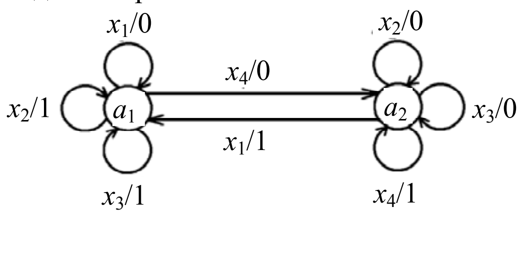


Рис. 5.3

3. Побудуємо суміщену таблицю переходів/виходів автомата A, на виході якого з'являється сигнал 1 тоді й лише тоді, коли на його вхід було подано послідовність символів, що відповідає ідентифікатору якоїсь мови програмування; в іншому разі вихідним сигналом є 0. Вхідні сигнали автомата A: x_1 – літера, x_2 – цифра, x_3 – будь-який інший символ.

П – початковий стан автомата A. Автомат перебуває у стані T, коли на його вхід подається послідовність символів, що відповідає ідентифікатору, в іншому разі він перебуває у стані H.

δ/λ	П	T	H
x_1	$T/1$	$T/1$	$H/0$
x_2	$H/0$	$T/1$	$H/0$
x_3	$H/0$	$H/0$	$H/0$

4. Побудувати автомат-пошуковець S для $X = Y = \{0, 1\}$, на виході якого з'являється сигнал 1 тоді й лише тоді, коли чотири останні вхідні сигнали – це 0110.

Позначимо через 0 стан, що відповідає очікуванню бажаної (шуканої) четвірки символів, через 1 – стан, що фіксує появу на вході автомата першого 0 четвірки, через 2 – стан, що відповідає появі пари 01, через 3 – стан, що відповідає появі 011, і через 4 – стан, у який автомат переходить, коли останніми вхідними сигналами є 0110. Суміщену таблицю переходів/виходів автомата-пошуковця S наведено нижче:

δ/λ	0	1	2	3	4
0	1/0	1/0	1/0	4/1	1/0
1	0/0	2/0	3/0	0/0	2/0

5. Побудувати таблиці переходів і виходів, граф автомата P, що за допомогою своїх станів запам'ятовує два останні символи (двійкові розряди), які було подано на його вхід. Вихідним сигналом є останній символ, що "забувається".

δ/λ	00	01	10	11
0	00/0	10/0	00/1	10/1
1	01/0	11/0	01/1	11/1

Для зручності стани автомата P позначено чотирма можливими варіантами значень двох останніх символів (двійкових розрядів) вхідного слова, тобто автомат P перебуває в стані ab, якщо двома останніми вхідними символами були ab, $a, b \in \{0, 1\}$. ◄

Завдання для самостійної роботи

1. Побудувати таблиці переходів і виходів, граф автомата P, що за допомогою своїх станів запам'ятовує три останні символи (двійкові розряди), які було подано на його вхід. Вихідним сигналом є останній символ, що "забувається".

2. Побудувати таблиці переходів і виходів, граф автомата B, на виході якого з'являється сигнал 1 тоді й лише тоді, коли на його вхід була подана послідовність символів, що відповідає числовій константі – дійсному числу зі знаком і фіксованою крапкою; в іншому разі вихідним сигналом є 0. Вхідні сигнали автомата B: x_1 – знак, x_2 – цифра, x_3 – крапка, x_4 – будь-який інший символ.

3. Побудувати автомат затримки, тобто такий, вихідний сигнал якого в момент часу $t + 1$ дорівнює вхідному сигналу в момент часу t, $X = Y = \{0, 1\}$.

4. Побудувати автомат для $X = Y = \{0, 1\}$, на виході якого з'являється сигнал 1 тоді й лише тоді, коли п'ять останніх вхідних сигналів – це 01101.

5. Побудувати генератор парності, тобто автомат, що функціонує в алфавітах $X = Y = \{0, 1\}$ і реалізує такий алгоритм. На його вхід надходять слова довжиною 3, розділені якимось символом a, $a \in X$. На виході автомат має повторити вхідну трійку символів, замінивши розділовий символ a на 1 тоді й лише тоді, коли кількість одиниць у даній трійці парна.

6. Побудувати автомат, що перевіряє відповідність лівих і правих дужок у вхідному слові, яке задає певний алгебричний вираз. Найбільша дозволена вкладеність дужок – n. Вхідні сигнали автомата: x_1 – ліва дужка, x_2 – права дужка, x_3 – будь-який інший символ, x_4 – символ, що позначає кінець виразу.

7. Побудувати автомат, що керує роботою ліфта в чотириповерховому будинку. Станами автомата є номери поверхів. Вхідний сигнал – номер потрібного поверху, вихідний сигнал – напрямок руху (угору, униз, не рухатись).

5.2. Автоматне відображення

Нехай у процесі функціонування заданого автомата A вхідний сигнал у момент автоматного часу $t = 1$ дорівнює $x_{i_1} \in X$, у наступний момент $t = 2$ – $x_{i_2} \in X$ і т. д., а в момент $t = k$ на вхід автомата A подається сигнал $x_{i_k} \in X$. Інакше кажучи, $x(1) = x_{i_1}$, $x(2) = x_{i_2}$, …, $x(k) = x_{i_k}$. У такому разі говоритимемо, що на вхід автомата A подано **вхідне слово** $x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k} \in X^*$.

Для заданого автомата A його функції переходів δ і виходів λ можна природно поширити з множини $U \times X$ на множину $U \times X^*$, даючи змогу визначати стан і вихідний сигнал у автоматі A після подання на його вхід довільного вхідного слова $p = x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k} \in X^*$. Вважатимемо, що

$$\delta(a_l, p) = \delta(\delta(\ldots(\delta(\delta(a_l, x_{i_1}), x_{i_2}), \ldots), x_{i_{k-1}}), x_{i_k}),$$
$$\lambda(a_l, p) = \lambda(\delta(\ldots(\delta(\delta(a_l, x_{i_1}), x_{i_2}), \ldots), x_{i_{k-1}}), x_{i_k}).$$

Іноді **розширені функції переходів і виходів** автомата позначають особливим чином, наприклад δ* і λ*, але ми цього не робитимемо й залишимо для розширених функцій ті самі позначення, що й для основних.

Розширену функцію переходів δ можна також означити індуктивно:

1) $\delta(a_l, x)$ для $x \in X$ визначають за таблицею переходів автомата A;

2) для довільного слова $p \in X^*$ і довільного вхідного сигналу

$$x \in X \ \delta(a_l, px) = \delta(\delta(a_l, p), x).$$

Спираючись на останнє означення, розширену функцію виходів λ можна означити співвідношенням

$$\lambda(a_l, px) = \lambda(\delta(a_l, p), x), p \in X^*, x \in X. \tag{5.2}$$

Для порожнього слова $e \in X^*$ вважають, що $\delta(a_l, e) = a_l$ і $\lambda(a_l, e) = e$.

Нехай A/a_1 – ініціальний автомат. Для довільного вхідного слова $p = x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}$ означимо відповідне вихідне слово $q \in Y^*$ так:

$$q = \lambda(a_1, x_1)\lambda(a_1, x_{i_1}, x_{i_2})\lambda(a_1, x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3})...\lambda(x_{i_1}, x_{i_2} ... x_{i_k}).$$

Так означену відповідність між вхідними словами p і вихідними словами q називають **автоматним відображенням**, що індукується (ініціюється, реалізується) автоматом A/a_1; позначають φ_A. Рівносильним означенням автоматного відображення $\varphi_A : X^* \to Y^*$ є такі рекурентні співвідношення:

$$\varphi_A(e) = e,\ \varphi_A(px) = \varphi_A(p)\lambda(a_1, px),\ p \in X^*,\ x \in X. \qquad (5.3)$$

Автоматне відображення часто називають також **поведінкою**, або **зовнішньою поведінкою**, автомата.

Автоматне відображення має дві важливі властивості, що випливають безпосередньо з його означення:

1) $|p| = |\varphi_A(p)|$ для будь-якого слова $p \in X^*$. Через $|w|$ позначено довжину слова w.

2) Якщо $p = p_1p_2$ і $\varphi_A(p) = q_1q_2$, де $|p_1| = |q_1|$, то $q_1 = \varphi_A(p_1)$.

Назвемо сформульовані властивості **умовами автоматності** відображення φ_A.

Поняття автоматного відображення можна узагальнити, аналогічно означивши відповідність між вхідними й вихідними словами, індуковану автоматом A/a_i, тобто автоматом A, що починає роботу зі стану a_i. Позначатимемо таке автоматне відображення через φ_A^i.

Із наведених означень і умов автоматності випливає важлива властивість автоматних відображень φ_A^i: якщо $p = p_1p_2 \in X^*$ і $a_{i_1} = \delta(a_i, p_1)$, то

$$\varphi_A^i(p) = \varphi_A^i(p_1, p_2) = \varphi_A^i(p_1)\varphi_A^{i_1}(p_2). \qquad (5.4)$$

Усі наведені означення можна наочно проілюструвати за допомогою графа автомата. Якщо зафіксувати деякий стан $a_i \in U$ у автоматі A, то будь-яке слово $p = x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k} \in X^*$ однозначно визначає шлях довжиною k, що веде з вершини a_i і складається з k дуг, позначених послідовно вхідними сигналами $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$. Тоді стан $\delta(a_i, p)$ – остання вершина цього шляху, $\lambda(a_i, p)$ – вихідний сигнал, яким позначено останню його дугу, а $\varphi_A^i(p)$ – слово, утворене з послідовності k вихідних сигналів, які написані на k дугах шляху.

Приклад 5.2. Для автомата дорожнього руху D із прикладу 5.1(1) і для вхідних слів $p_1 = x_1x_1x_2$ та $p_2 = x_2x_2x_1x_2$ маємо:

$$\delta(a_1, p_1) = a_3,\ \delta(a_3, p_1) = a_5,\ \delta(a_4, p_2) = a_1,$$
$$\lambda(a_1, p_1) = y_3,\ \lambda(a_4, p_2) = y_1,\ \lambda(a_2, p_2) = y_3.$$

Крім того,

$$\varphi_D(p_1) = y_2y_1y_3,\ \varphi_D(p_2) = y_3y_4y_2y_3,$$
$$\varphi_D^{\,2}(p_1) = y_1y_2y_3,\ \varphi_D^{\,4}(p_2) = y_2y_3y_4y_1.$$

Для автомата-пошуковця S із прикладу 5.1 (4) матимемо: $\delta(0, 0100101) = 2$, $\delta(3, 10101100) = 1$, $\lambda(1, 0100101) = 0$, $\lambda(3, 1010110) = 1$, $\varphi_S(0100101) = 0000000$, $\varphi_S(1010110110) = 0000001001$. ◄

Завдання для самостійної роботи

1. Дати індуктивне означення розширеної функції виходів.

2. За допомогою методу математичної індукції довести умови автоматності для автоматного відображення φ_A.

3. Методом математичної індукції за довжиною слова p_2 довести властивість (5.4) автоматного відображення.

4. Знайти значення автоматного відображення φ_D на даному вхідному слові для автомата дорожнього руху D із прикладу 5.1(1):

(а) $\varphi_D^{\,1}(x_1x_2x_1x_1x_2)$; (б) $\varphi_D^{\,1}(x_2x_1x_1x_2x_2x_2)$;

(в) $\varphi_D^{\,2}(x_2x_1x_2x_2x_2x_1x_2x_1x_2)$.

5. Знайти значення автоматного відображення φ_S на вхідному слові для автомата S із прикладу 5.1 (2):

(а) $\varphi_S^{\,1}(x_1x_2x_1x_3x_2)$; (б) $\varphi_S^{\,1}(x_2x_1x_1x_4x_2x_2)$; (в) $\varphi_S^{\,2}(x_2x_4x_2x_4x_2x_3x_2x_1x_2)$.

5.3. Ізоморфізм і невідрізнюваність автоматів

Нехай $A_1 = (X, Y, U_1, \delta_1, \lambda_1)$ і $A_2 = (X, Y, U_2, \delta_2, \lambda_2)$ – скінченні автомати. Взаємно однозначне відображення $\gamma{:}U_1 \to U_2$ називають **ізоморфізмом** (або **ізоморфним відображенням**) автомата A_1 на автомат A_2, якщо для будь-яких $x \in X_1$ і $a \in U_1$ виконуються умови

$$\gamma(\delta_1(a, x)) = \delta_2(\gamma(a), x),\ \lambda_1(a, x)) = \lambda_2(\gamma(a), x). \tag{5.5}$$

Автомати, для яких існує ізоморфізм, називають **ізоморфними**.

Означаючи ізоморфізм для ініціальних автоматів, вважають, що відображення γ переводить початковий стан одного автомата в початковий стан іншого автомата.

Уведене поняття має для автоматів той самий сенс, що й для графів. Як ізоморфні графи відрізняються один від одного тільки назвами своїх вершин, так ізоморфні автомати відрізняються лише іменами (назвами) своїх станів.

Розглянемо пару автоматів

$$A = (X, Y, U_1, \delta_1, \lambda_1) \text{ та } B = (X, Y, U_2, \delta_2, \lambda_2),$$

які мають однакові вхідні й вихідні алфавіти. Отже, усі автоматні відображення, які індукують автомати A та B, мають однакові типи, тобто області визначення й області значень відображень збігаються. Це дає змогу ввести для автоматів такого типу деякі означення.

Стан $a_i \in U_1$ автомата A та стан $b_j \in U_2$ автомата B називають **невідрізнюваними**, якщо для довільного слова $p \in X^*$ виконується рівність $\varphi_A{}^i(p) = \varphi_B{}^j(p)$.

Наведене означення можна застосовувати й тоді, коли $A = B$. У цьому разі вводять відношення невідрізнюваності для різних станів того самого автомата A: стани a_i, $a_j \in U_1$ автомата A називають **невідрізнюваними**, якщо $\varphi_A{}^i(p) = \varphi_A{}^j(p)$ для будь-якого $p \in X^*$.

Автомати A та B називають **невідрізнюваними**, якщо для будь-якого стану $a \in U_1$ автомата A існує невідрізнюваний стан $b \in U_2$ автомата B і, навпаки, для будь-якого стану $d \in U_2$ автомата B існує невідрізнюваний стан $c \in U_1$ автомата A. Ініціальні автомати невідрізнювані, коли їхні початкові стани невідрізнювані.

Невідрізнюваність автоматів означає, що будь-яке автоматне відображення (поведінку), яке реалізує один з автоматів, може реалізувати інший автомат. Інакше кажучи, невідрізнювані автомати за зовнішньою поведінкою подібні між собою.

Неважко переконатися, що відношення невідрізнюваності H рефлексивне, симетричне і транзитивне, отже, є відношенням еквівалентності (на множині станів чи множині автоматів). У зв'язку з цим часто в літературі з теорії автоматів невідрізнюваність називають еквівалентністю, тобто використовують поняття **еквівалентні стани**, **еквівалентні автомати**. Термінологічно це не зовсім зручно й не зовсім коректно, оскільки назву властивості відношення використовують як назву самого відношення. Однак у теорії автоматів ці терміни стали загальноприйнятими, тому далі будемо говорити про еквівалентні стани й еквівалентні автомати, маючи на увазі відношення невідрізнюваності.

Зв'язок наведених вище означень і понять установлює таке важливе твердження: будь-які ізоморфні автомати A_1 і A_2 є невідрізнюваними. Для його обґрунтування слід довести, що для будь-якого стану a автомата A_1 стани a та $\gamma(a)$ є невідрізнюваними, де γ – ізоморфізм автоматів A_1 і A_2.

У різних розділах математики в множині (класі) еквівалентних між собою об'єктів часто означають стандартних представників – **канонічні**, або **нормальні**, **форми**. Зведенням до канонічної форми можна перевірити (або встановити) еквівалентність або нееквівалентність певних об'єктів множини. Такою канонічною формою в теорії автоматів є мінімальний автомат.

Для множини (класу) K всіх невідрізнюваних між собою скінченних автоматів **мінімальним**, або **зведеним**, автоматом називають такий, що належить цій множині, й усі різні стани якого попарно нееквівалентні.

Завдання для самостійної роботи

1. Довести, що відношення невідрізнюваності є відношенням еквівалентності.

2. Побудувати приклад невідрізнюваних автоматів, які не ізоморфні.

5.4. Основні проблеми теорії автоматів

Стосовно зовнішніх умов функціонування розрізняють два типи поведінки і два відповідні типи скінченних автоматів.

Перший тип поведінки – це розглянуте вище й уже знайоме нам перетворення вхідних слів на вихідні, тобто реалізація автоматних відображень. Автомати, що реалізують зазначений тип поведінки, називають **автоматами-перетворювачами**.

Другий тип поведінки – це розпізнання певних множин вхідних слів. **Автомат-розпізнавач**, або **автомат-акцептор**, для будь-якого вхідного слова p дає змогу визначити, належить це слово певній множині чи ні. У разі позитивної відповіді на поставлене запитання кажуть, що слово p **розпізнається**, або **сприймається** автоматом, інакше вважають, що слово p не розпізнається (відкидається).

Найпоширенішу модель ініціального автомата-розпізнавача $A = (X, Y, U, \delta, \lambda)$ означають так. Множину станів U розбивають на дві підмножини: U_1 та U_2. Вважають, що слово $p \in X^*$ розпізнається автоматом A, якщо $\delta(a_1, p) \in U_1$; в іншому разі ($\delta(a_1, p) \in U_2$) слово p відкидається.

Існує кілька можливостей інтерпретування зазначених типів автоматів. Наприклад, автомат-перетворювач можна розглядати як пристрій, що перекодовує (перекладає) слова з однієї мови на іншу, або як пристрій, що реалізує алгоритм розв'язання задач певного типу, перетворюючи умови задачі (вхідні слова) на записи відповідних розв'язків (вихідні слова). Можна інтерпретувати автомат-перетворювач і як пристрій, що реалізує певний зворотний зв'язок: автомат одержує інформацію із зовнішнього середовища у вигляді вхідних слів і виробляє відповідні керувальні послідовності у вигляді вихідних слів тощо. Автомат-розпізнавач можна інтерпретувати як аналізатор, що розпізнає (сприймає) певні синтаксичні конструкції (правильні слова, речення, програми тощо).

Основними проблемами теорії автоматів для кожного з типів поведінки й типів автоматів вважають проблеми аналізу та синтезу.

Проблема аналізу полягає в тому, щоб за заданим автоматом визначити його поведінку й дослідити певні її властивості. Як правило, розв'язання проблеми аналізу принципових труднощів не становить, оскільки зазвичай разом із заданням автомата наводять правила опису його поведінки.

У **задачі синтезу** потрібно, виходячи із заданих умов поведінки, побудувати (синтезувати) автомат, що реалізує цю поведінку. Очевидно, що одна з перших проблем, яка виникає при розв'язанні задачі синтезу – це дослідження питання, які з умов поведінки взагалі можуть бути реалізовані у автоматах, зокрема у скінченних автоматах. Відтак постає проблема побудови власне алгоритму синтезу.

5.5. Зображення подій у автоматах

Наступні параграфи присвячено проблемам аналізу та синтезу для автоматів-розпізнавачів. Оскільки для такого типу автоматів нас цікавитиме для кожного вхідного слова w лише значення розширеної функції переходів на цьому слові (тобто стан, у який автомат перейде, отримавши на вхід слово w), то доцільно розглянути ще одну модель автомата, яку називають автоматом без виходів.

Автомат без виходів $A = (X, U, \delta, a_1, F)$ означають так: перші три об'єкти X, U і δ мають той самий зміст, що й раніше, $a_1 \in U$ – початковий стан, F – множина заключних станів автомата A, $F \subseteq U$. У найближчих параграфах будемо розглядати без додаткових застережень ініціальні скінченні автомати без виходів.

Множину P слів у вхідному алфавіті X, тобто $P \subseteq X^*$, називатимемо **подією** в алфавіті X.

Цей термін став традиційним у теорії автоматів, хоча він не містить нічого принципово нового: можна було б користуватися просто терміном *множина слів у алфавіті X*. Інший термін для цього самого поняття – **мова**.

Подія P **зображувана в автоматі** $A = (X, U, \delta, a_1, F)$ (або автомат A *зображує* подію P), якщо $\delta(a_1, w) \in F$, тоді й тільки тоді, коли $w \in P$.

Кожному автомату $A = (X, U, \delta, a_1, F)$ відповідає зображувана в ньому подія P. Подію P зручно проілюструвати за допомогою графа автомата A: подія P складається зі всіх вхідних слів, відповідні шляхи яких у графі автомата A ведуть із вершини a_1 у вершини з множини F.

Подію P називають **зображуваною** (в автоматі), якщо існує автомат A, який її зображує. Інші терміни для цього поняття: множина, або мова, яка **визначає**, **допускає** чи **розпізнає** автомат.

Можлива ситуація, коли $a_1 \in F$. У цьому разі вважатимемо, що події P, зображуваній у автоматі A, належить порожнє слово e. Порожнє слово не слід плутати з порожньою подією. Автомат A зображує порожню подію, якщо не існує жодного вхідного слова, яке переводить автомат A з початкового стану a_1 в будь-який із заключних станів. Порожню подію будемо позначати символом порожньої множини $\varnothing$.

Будь-яка скінченна множина слів $P = \{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$ в алфавіті X (скінченна подія) зображувана в скінченному автоматі.

Приклад 5.3.

1. На рис. 5.4 подано граф автомата A, що зображує скінченну подію $P = \{x_1x_2x_1x_1,\ x_1x_1x_2,\ x_1x_1x_1x_2,\ x_1x_1x_1\}$. Нижче виписано всі підслова слів множини P і відповідні до них стани шуканого автомата A. Заключні стани автомата A позначено подвійними кругами (кожен з них відповідає одному зі слів події P).

$$e - a_1,\ x_1 - a_2,\ x_1x_1 - a_3,\ x_1x_2 - a_4,\ x_1x_1x_1 - a_5,\ x_1x_1x_2 - a_6,$$
$$x_1x_2x_1 - a_7,\ x_1x_1x_1x_2 - a_8,\ x_1x_2x_1x_1 - a_9.$$

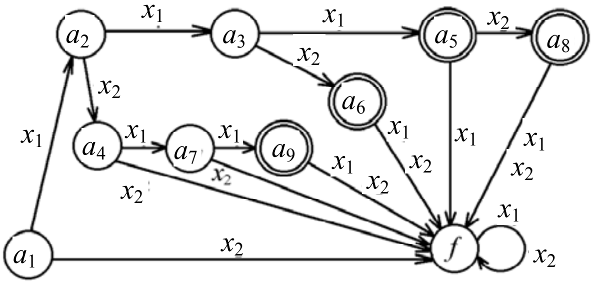


Рис. 5.4

2. Побудувати автомат-розпізнавач, який зображує подію в алфавіті $B = \{0, 1\}$, що складається зі всіх слів, які починаються з 00 і закінчуються парою символів 11, тобто мають вигляд $00w11$, $w \in B^*$.

Таблиця переходів цього автомата має такий вигляд (1 – початковий, 5 – заключний стани):

δ	1	2	3	4	5	f
0	2	3	3	3	f	f
1	f	f	4	5	5	5

Зауваження. Радимо для наочності та кращого розуміння алгоритмів функціонування будувати за наведеними у прикладах таблицями переходів автоматів їхні діаграми (графи).

3. Побудувати скінченний автомат для розпізнавання, чи є вхідний набір символів ідентифікатором якоїсь мови програмування.

У більшості мов програмування ідентифікатор – це послідовність літер і цифр, що починається з літери. Позначимо через x_1 вхідний сигнал, що відповідає літері, x_2 – вхідний сигнал, що відповідає цифрі, і через x_3 – вхідний сигнал, що відповідає будь-якому іншому символу вхідного алфавіту (див. таблицю переходів відповідного автомата: заключним станом автомата є стан 2).

δ	1	2	f
x_1	2	2	f
x_2	f	2	f
x_3	f	f	f

◄

Завдання для самостійної роботи

1. Побудувати автомат-розпізнавач, що зображує скінченну подію P:

(а) $P = \{x_1x_1x_1x_2, x_1x_1x_2x_2x_1, x_1x_1x_1x_1x_2, x_1x_1x_1x_2x_1x_1\}$;

(б) $P = \{e, x_1x_2x_1x_1x_2x_2, x_1x_1x_2x_1x_1x_2, x_1x_2x_1x_1\}$.

2. Нехай подія P зображувана в скінченному автоматі A та $e \notin P$. Як побудувати новий скінченний автомат A', що зображує подію $P \cup \{e\}$?

3. Побудувати автомат-розпізнавач, який зображує подію в алфавіті $B = \{0, 1\}$, що складається зі всіх слів, які починаються й закінчуються парами символів 00 або 11, тобто мають вигляд $00w00$ або $11p11$, $w, p \in B^*$.

4. Побудувати скінченний автомат для розпізнавання певної синтаксичної конструкції:

(а) число з фіксованою крапкою;

(б) простий арифметичний вираз;

(в) коментарі.

5.6. Алгебра регулярних подій

У попередньому параграфі ми навели приклад класу подій – клас скінченних подій, які завжди зображувані в скінченних автоматах. Однак існують події, незображувані в скінченних автоматах. Зрозуміло, що в скінченних автоматах зображувані не тільки скінченні події. Бажано було б мати засоби, за допомогою яких можна було б описувати події, зображувані в скінченних автоматах. Один із таких засобів, запропонований С.-К. Кліні, розвинутий і вдосконалений В. М. Глушковим, Р. Ф. Мак-Нотоном та іншими, має назву **мови регулярних виразів**.

Нехай $P_1, P_2 \subseteq X^*$ – події в алфавіті X. Розглянемо три операції над подіями, які називатимемо **регулярними операціями**.

1. Об'єднання (іноді **диз'юнкція**) подій $P_1 \cup P_2$ – це звичайне теоретико-множинне об'єднання.

2. Множення (**конкатенація**) подій P_1P_2 – це подія, яка складається зі всіх таких слів w_1w_2, що $w_1 \in P_1$ і $w_2 \in P_2$. Зазвичай операцію множення подій використовують без спеціального позначення. Для зручності посилання на цю операцію позначатимемо її через $\cdot$.

3. Ітерацією події P називають подію

$$P^* = \{e\} \cup P \cup P^2 \cup \ldots \cup P^n \cup \ldots = \bigcup_{n=0}^{\infty} P^n.$$

Тут через P^0 позначено подію $\{e\}$, а через P^n – подію $PP\ldots P$ (n разів). Іноді операцію ітерації події P позначають $\{P\}$.

Звернемо увагу на те, що введене вище позначення X^* для множини всіх слів у алфавіті

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$$

і позначення X^* операції ітерації для події X мають той самий смисл. Дійсно, подія

$$X^* = (\{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \ldots \cup \{x_m\})^*$$

складається зі всіх слів (включаючи порожнє слово) в алфавіті X. Через P^+ позначатимемо подію $P^* \backslash \{e\}$.

Окремо зазначимо деякі важливі події. Подію, яка містить усі слова в алфавіті X, тобто X^*, назвемо **загальною**. Подію, яка не містить жодного слова, назвемо **порожньою**, або **неможливою** й позначимо символом порожньої множини $\varnothing$.

Використовуючи регулярні операції, круглі дужки та події в алфавіті X як операнди, одержуватимемо вирази, що задають певні події в алфавіті X. Щоб зменшити кількість дужок у виразах, домовимося про такі пріоритети для регулярних операцій: спочатку виконується ітерація, відтак – множення і, нарешті, – об'єднання.

Приклад 5.4.

1. Виписати всі слова події P^* в алфавіті $X = \{a, b\}$, довжина яких дорівнює k.

(а) $P = \{ab, bb\}$, $k = 6$. (б) $P = \{aa, b\}$, $k = 5$.

(а) *ababab*, *ababbb*, *abbbab*, *abbbbb*, *bbabab*, *bbabbb*, *bbbbab*, *bbbbbb*.

(б) *aaaab*, *aabaa*, *baaaa*, *aabbb*, *baabb*, *bbaab*, *bbbaa*, *bbbbb*.

2. Визначити, чи належать події P слова v і w.

(а) $P = \{000\}^*\{1\}^*\{0\}$, $v = 00011110$, $w = 11100$.

(б) $P = \{001, 11\}^*\{0, 11\}$, $v = 11001110$, $w = 1001011$.

(а) Слово v належить події P, тому що для його підслів маємо $000\in\{000\}^*$, $1111\in\{1\}^*$ і $0\in\{0\}$. Слово w не належить події P, оскільки слова події P, що містять принаймні один символ 1, закінчуються тільки одним символом 0.

(б) $v\in P$, $w\notin P$. ◄

Вирази називають **рівносильними** (**еквівалентними**), якщо вони задають ту саму подію. Рівносильність виразів позначатимемо за допомогою знака =. Безпосередньо із означень випливають такі властивості регулярних операцій.

Нехай P, Q і T – довільні події. Тоді:

1) $(P \cup Q) \cup T = P \cup (Q \cup T)$, $(PQ)T = P(QT)$ – **асоціативність**;

2) $P \cup Q = Q \cup P$ (комутативність об'єднання);

3) $P(Q \cup T) = PQ \cup PT$, $(P \cup Q)T = PT \cup QT$ – **дистрибутивність**;

4) $P \cup P = P$ – **ідемпотентність об'єднання**;

5) $(P^*)^* = P^*$, $P^*P^* = P^*$ – **ідемпотентність ітерації**;

6) $PP^* = P^*P$; (5.6)

7) $P^* = \{e\} \cup PP^* = (\{e\} \cup P)^*$, $\{e\}P = P\{e\} = P$, $\{e\}^* = \{e\}$ – **властивості події** $\{e\}$);

8) $P\varnothing = \varnothing P = \varnothing$, $P \cup \varnothing = P$, $\varnothing^* = \{e\}$ – **властивості порожньої події** $\varnothing$;

9) $(P \cup Q)^* = (P^* \cup Q^*)^* = (P^*Q^*)^*$;

10) $(P^* \cup Q)^* = (P \cup Q)^*$;

11) $P^* = (\{e\} \cup P \cup P^2 \cup \ldots \cup P^{n-1})(P^n)^*$.

Зазначимо, що операція множення подій некомутативна.

Події $\{x_i\}$, де $x_i\in X$, називають **елементарними**. До елементарних подій належить також подія $\{e\}$.

Подія P називається **регулярною**, якщо вона є результатом застосування скінченної кількості операцій об'єднання, множення та ітерації до елементарних подій.

Точніше індуктивне означення регулярних подій таке:

1) елементарні події $\{e\}$ та $\{x_i\}$, $x_i\in X$, $i = 1, 2, \ldots, m$ – регулярні;

2) якщо P_1 і P_2 – регулярні події, то $P_1 \cup P_2$, P_1P_2 та P_1* – регулярні події;

3) інших регулярних подій, окрім побудованих за правилами 1) і 2), немає.

Із означення випливає, що кожну регулярну подію можна зобразити (задати) деяким виразом (формулою), що складається зі скінченної кількості регулярних подій (операндів) і знаків регулярних операцій. Такі вирази називають **регулярними**. Регулярним виразом для порожньої події вважатимемо символ $\varnothing$.

Регулярні вирази **рівносильні** (**еквівалентні**), якщо вони задають ту саму регулярну подію.

Усі наведені вище рівносильні співвідношення (5.6) справедливі й для регулярних подій, тобто мають місце також для довільних регулярних виразів. Як завжди в алгебрах, ці рівносильності дають змогу виконувати рівносильні перетворення (зокрема оптимізацію, або спрощення) регулярних виразів.

Очевидно, що будь-яка подія

$$\{x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}\},$$

що складається з одного слова в алфавіті X*, регулярна, оскільки вираз

$$\{x_{i_1}\}\{x_{i_2}\}\ldots\{x_{i_k}\},$$

що зображує цю подію, регулярний. Більш того, будь-яка скінченна подія

$$P = \{w_1, w_2, \ldots, w_t\}$$

є регулярною та її можна задати виразом

$$\{w_1\}\cup\{w_2\}\cup \ldots \cup\{w_t\}.$$

Регулярною є також загальна подія X*, оскільки

$$X^* = (\{x_1\}\cup\{x_2\}\cup \ldots \cup\{x_m\})^*.$$

Зауважимо, що для зручності та компактності запису регулярних виразів часто випускають фігурні дужки в позначеннях елементарних подій і замість подій (множин) $\{x_i\}$ записують просто

$$x_i,\ i = 1, 2, \ldots, m,$$

а замість $\{e\}$ – e. Іноді для більшої коректності замість $\{x_i\}$ пишуть $\boldsymbol{x_i}$ або $\mathbf{x}_i$.

Має місце така центральна теорема теорії автоматів (Кліні): подія P зображувана в скінченному автоматі тоді й тільки тоді, коли вона регулярна. Теорема Кліні визначає ту центральну роль, яку відіграють регулярні події й відповідні регулярні вирази в теорії автоматів.

Приклад 5.5.

1. Написати регулярний вираз у алфавіті $X = \{0, 1\}$, який задає подію, що складається зі всіх слів таких і тільки таких,

(а) у яких кількість символів 0 кратна трьом;

(б) які містять рівно три символи 1;

(в) що містять 01011 як підслово.

(а) $\{1*01*01*01*\}*$;

(б) $0*10*10*10*$;

(в) $\{0, 1\}*01011\{0, 1\}*$.

2. Написати регулярний вираз у алфавіті $X = \{0, 1, 2\}$, який задає подію, що складається зі всіх слів таких і тільки таких, у яких п'ятим символом з кінця є 2.

$\{0, 1, 2\}*2\{0, 1, 2\}^4$.

3. Описати звичайними словами мову (подію) P у алфавіті $X = \{a, b\}$, задану регулярним виразом:

(а) $a\{a, b\}*bb$; (б) $\{a\}*\{b\}*a\{e, bb\}*$.

(а) Подія P – це множина всіх слів у алфавіті $X = \{a, b\}$, які починаються символом a та закінчуються парою символів bb.

(б) Будь-яке слово даної події починається з довільної кількості (зокрема 0) символів a, за якими йде довільна кількість символів b, і завершується або символом a, або підсловом abb.

4. Побудувати автомат, що розпізнає множину всіх слів у алфавіті $\{0, 1\}$,

(а) що закінчуються на 00; (б) що містять три нулі поспіль;

(в) що містять 01011 як підслово.

Нижче подано таблиці переходів таких автоматів. У кожному з них початковим є перший стан, а заключним – останній.

(а)

δ	1	2	3
0	2	3	3
1	1	1	1

(б)

δ	1	2	3	4
0	2	3	4	4
1	1	1	1	4

(в)

δ	1	2	3	4	5	6
0	2	2	4	2	4	2
1	1	3	1	5	6	1

Завдання для самостійної роботи

1. Нехай P, Q, R і S – події в алфавіті X. Довести, що коли $P \subseteq R$ і $Q \subseteq S$, то $PQ \subseteq RS$. Чи правильним є обернене твердження?

2. Визначити всі можливі події P і Q в алфавіті $\{0, 1\}$, для яких $PQ = \{01, 010, 0101, 0111, 01000, 010111\}$.

3. Виписати всі слова події P^*, довжина яких не перевищує k:

(а) $P = \{ab, b\}$, $k = 5$; (б) $P = \{a, ab, ba\}$, $k = 7$;

(в) $P = \{aa, aba, baa\}$, $k = 9$.

4. Скільки слів довжиною k містить подія, задана регулярним виразом r?

(а) $r = (a \cup b)^*$, $k = 3$; (б) $r = (aa \cup b)^*$, $3 \le k < 7$;

(в) $r = (a \cup b)^*$, $k = n$; (г) $r = (aa \cup b)^*$, $k = n$.

5. Довести, що коли $P \subseteq Q$, то $P^* \subseteq Q^*$.

6. Нехай $P = \{aa, ba\}$ і $Q = \{aa, ba, aaaa\}$. Довести, що

$$P^* = Q^*.$$

7. Нехай $P = \{aa, ba\}$ і $Q = \{aa, ba, aaa\}$. Довести, що

$$P^* \subset Q^*.$$

8. Навести приклад таких подій P і Q, що:

(а) $P \subset Q$, однак $P^* = Q^*$; (б) $P^* = Q^*$, однак $P \not\subset Q$ (символ $\not\subset$ позначає, що не виконується жодне зі співвідношень $\supset, \supseteq, \subset, \subseteq, =$).

9. Нехай для непорожньої події P виконується рівність $P^2 = P$. Довести, що: (а) $e \in P$; (б) $P^* = P$.

10. Написати регулярний вираз у алфавіті $X = \{0, 1\}$, який задає подію, що складається зі всіх слів таких і тільки таких,

(а) у яких кількість символів 0 кратна 3;

(б) які містять рівно 3 символи 1;

(в) які закінчуються на 00 або на 11;

(г) які містять 00 або 11 тільки один раз;

(д) які містять парну кількість 1;

(е) у яких сьомим символом є 0;

(є) у яких третім символом від кінця є 1;

(ж) у яких нулі утворюють підслова парної довжини.

11. Описати словами подію, задану регулярним виразом:

(а) $a(a \cup b)^*$; (б) $(aa \cup ab \cup ba \cup bb)^*$;
(в) $(a \cup b)^*a(e \cup bbb)$; (г) $(a(a \cup bb)^*)^*$;
(д) $(a(aa)^*b(bb)^*)^*$; (е) $(b(bb)^*)^*(a(aa)^*b(bb)^*)^*$.

12. Побудувати скінченний автомат, що відшукує у вхідному тексті (слові) певний фрагмент, тобто автомат, що переходить у заключний стан тоді й тільки тоді, коли вхідне слово в алфавіті $X = \{a, b\}$ завершується підсловом.

(а) *abba*; (б) *bbbaba*; (в) *aabbaaa*; (г) *baabbba*.

13. Довести такі рівносильні співвідношення для регулярних виразів:

(а) $(a \cup b)^*ab(a \cup b)^* \cup b^*a^* = (a \cup b)^*$;
(б) $(ab)^*a = a(ba)^*$;
(в) $(a^* \cup b)^* = (a \cup b)^*$;
(г) $(a^*b)^*a^* = a^*(ba^*)^*$;
(д) $((a \cup bb)^*aa)^* = e \cup (a \cup bb)^*aa$;
(е) $(aa)^*(e \cup a) = a^*$;
(є) $(a^*bbb)^*a^* = a^*(bbba^*)^*$;
(ж) $a(ba \cup a)^*b = aa^*b(aa^*b)^*$.

14. Довести чи спростувати твердження про рівносильність таких регулярних виразів:

(а) $(ab \cup a)^*a = a(ba \cup a)^*$;
(б) $(ab \cup a)^*ab = (aa^*b)^*$;
(в) $(a \cup b)^*b = (a^*b)^*$;
(г) $b(ab \cup b)^*a = aa^*b(aa^*b)^*$;
(д) $(a \cup b)^* = a^*(ba^*)^*$;
(е) $a(a \cup b)^* \cup b(a \cup b)^* \cup e = (a \cup b)^*$.

Розділ 6
СЕМАНТИЧНІ ЗАСАДИ ЛОГІКИ ПРЕДИКАТІВ

У попередніх розділах, які стосувались математичної логіки, увагу було зосереджено переважно на синтаксичних аспектах. Тепер детальніше розглянемо семантичні аспекти логіки.

6.1. Класи *n*-арних і квазіарних функцій

Основним поняттям логіки із семантичного погляду є поняття **предиката**, яке інтуїтивно можна тлумачити як відображення значень змінних у значення істинності.

Наприклад, розглянемо предикат, що задається виразом

якщо $x > y$ та $y > z$, то $x > z$.

Тут вільними змінними є змінні x, y, z. Якщо такий предикат інтерпретується над множиною цілих чисел, то його значення слід обчислювати за наявності значень цих змінних. Нехай x має значення 17, y – 11, z – 3. Це означає, що визначено певний стан змінних, який записуватимемо у вигляді $[x \mapsto 17, y \mapsto 11, z \mapsto 3]$. Стан змінних також називають **інтерпретацією**, **оцінкою** або **розподілом** змінних.

Таким чином, розглянутий предикат є відображенням множини станів змінних у значення істинності. Множину значень істинності позначають $Bool = \{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}$ або $Bool = \{T, F\}$. Щоб зберегти однотипність позначень з іншими розділами посібника, уживатимемо позначення $\{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}$. Розглядаючи предикат як указану функцію, будемо називати стани змінних **даними** (з області визначення предиката).

Застосувавши предикат до даного (стану змінних)

$$[x \mapsto 17, y \mapsto 11, z \mapsto 3],$$

отримуємо істиннісне значення **1**.

Наведені міркування дають змогу формально означити поняття стану змінних. Нехай V – множина змінних (імен), M – множина предметних (базових) значень. Тоді довільна часткова функція із V у M називають **станом змінних**, **іменованими даними**, **квазіарними даними**, або просто **даними**. Множину таких даних позначатимемо $D = V \to M = {}^V M$.

Якщо іменами є цілі числа, то квазіарне дане вигляду

$$[1 \mapsto a_1, 2 \mapsto a_2, \ldots\ n \mapsto a_n]$$

називатимемо n-арним даним. Такі дані зазвичай позначають у вигляді кортежа $(a_1, a_2, \ldots\ a_n)$. Кортеж є елементом декартового добутку M^n. Відповідно квазіарні дані є елементами узагальненого часткового декартового добутку ${}^V M$.

Уведені позначення дають змогу означити класи n-арних та квазіарних функцій. Функція, визначена на класі n-арних даних, називають ***n*-арною**, а функцію, визначену на класі квазіарних даних, – **квазіарною**.

Спеціальними класами таких функцій є предикати та ординарні функції. Предикат p: $M^n \to Bool$ називають ***n*-арним предикатом**, а предикат q: ${}^V M \to Bool$ – **квазіарним предикатом**. Функцію f: $M^n \to M$ називають ***n*-арною ординарною функцією**, а функцію g: ${}^V M \to M$ – **квазіарною ординарною функцією**. Термін *ординарний* часто пропускатимемо.

Розглянемо предикат над цілими числами, який задається виразом

якщо $x > y$ та $z > t$, то $x + z > y + t$.

Із яких предикатів і функцій побудовано цей предикат? Бачимо, що тут фігурують бінарний предикат > та бінарна функція +. Однак якого типу є функції x+z та y+t? Оскільки функції визначені над станами змінних, то вони є квазіарними. Ці квазіарні функції отримано підстановкою (суперпозицією) квазіарних функцій розіменування (узяття значення) змінних у бінарну функцію +. Функції розіменування позначатимемо $'x$, $'y$, $'z$, $'t$. Наприклад, на стані

$$[x \mapsto 17, y \mapsto 11, z \mapsto 3]$$

значення змінних $'x$, $'y$, $'z$ дорівнюють відповідно 17, 11, 3, значення змінної $'t$ не визначено. Позначатимемо це таким чином:

$$'x\ ([x \mapsto 17, y \mapsto 11, z \mapsto 3]) \downarrow = 17,$$

$$'y([x \mapsto 17, y \mapsto 11, z \mapsto 3]) \downarrow = 11,$$

$$'z([x \mapsto 17, y \mapsto 11, z \mapsto 3\ ]) \downarrow = 3,$$
$$'t([x \mapsto 17, y \mapsto 11, z \mapsto 3]) \uparrow.$$

Тут символ $\downarrow$ означає, що значення функції визначено, а символ $\uparrow$ – що воно не визначено.

Позначаючи підстановку квазіарних предикатів (функцій) у n-арний предикат як S_P^n, отримуємо, що предикат $x > y$ подають як $S_P^2(>,'x,'y)$. Відповідно подають також інші предикати. Тут S_P^n – операція над квазіарними предикатами. Її задають формулою

$$S_P^2(p, g_1, ..., g_n)(d) = p(g_1(d), ..., g_n(d)),$$

де p – n-арний предикат, $g_1, \ldots, g_n$ – квазіарні ординарні функції, d – номінативне дане.

Яким чином побудовано предикат, що заданий виразом

якщо $x > y$ та $y > z$, то $x > z$?

Очевидно, що його побудовано із квазіарних предикатів

$$S_P^2(>,'x,'y),\ S_P^2(>,'y,'z) \text{ та } S_P^2(>,'x,'z)$$

за допомогою спеціальної операції над предикатами, яку називають **імплікацією** й позначають символом $\to$. Операції подібного типу називатимемо **композиціями** предикатів, а відповідне подання предиката – **композиційною формулою** (інколи вживають також назви **композиційний терм**, **операторний терм**, **семантичний терм**). Остаточно отримуємо таку композиційну формулу:

$$S_P^2(>,'x,'y)\ \&\ S_P^2(>,'y,'z) \to S_P^2(>,'x,'z).$$

Приклад 6.1.

1. Обчислити предикат

$$S_P^2(>,'x,'y)\ \&\ S_P^2(>,'y,'z) \to S_P^2(>,'x,'z).$$

на номінативному даному $d = [x \mapsto 17, y \mapsto 11, z \mapsto 3\ ]$.

Спираючись на означення композицій суперпозиції, обчислюємо спочатку

$$S_P^2(>,'x,'z)(d) = >('x(d),'z(d)) = >(17,3) = 1.$$

За означенням композиції імплікації отримуємо, що

$$S_P^2(>,'x,'z)\ \&\ S_P^2\ (>,'y,'z) \to S_P^2(>,'x,'z)(d) = 1.$$

2. Обчислити вказаний предикат на номінативному даному

$$d = [x \mapsto 1, y \mapsto 11, z \mapsto 3].$$

Спочатку обчислюємо

$$S_P^2(>,'x,'z)(d) = >('x(d),'z(d)) = >(1,3) = \mathbf{0}.$$

Оскільки консеквент хибний, то обчислюємо антицедент. Для цього обчислюємо значення

$$S_P^2(>,'x,'y)(d) = >('x(d),'y(d)) = >(1,11) = \mathbf{0},$$

$$S_P^2(>,'y,'z)(d) = >('y(d),'z(d)) = >(11,3) = 1.$$

Звідси

$$S_P^2(>,'x,'y)\,\mathbf{\&}\,S_P^2('>,'y,'z)(d) = \mathbf{0},$$

$$\big(S_P^2(>,'x,'y)\,\mathbf{\&}\,S_P^2('>,'y,'z) \to S_P^2(>,'x,'z)\big)(d) = 1. \blacktriangleleft$$

Для функцій вводимо композицію **суперпозиції** квазіарних ординарних функцій у n-арну функцію:

$$S_F^n(f, g_1,..., g_n)(d) = f(g_1(d),..., g_n(d)),$$

де f – n-арна функція, $g_1,\ldots, g_n$ – квазіарні ординарні функції, d – номінативне дане.

Приклад 6.2. Написати композиційну формулу для предиката, що поданий виразом

якщо $x > y$ та $z > t$, то $x + z > y + t$,

та обчислити його значення на номінативному даному

$$d = [x \mapsto 17,\, y \mapsto 11,\, z \mapsto 5,\, t \mapsto 3].$$

Указаний вираз можна задати композиційною формулою

$$S_P^2(>,'x,'y)\,\mathbf{\&}\,S_P^2('>,'y,'z) \to S_P^2(>, S_F^2(+,'x,'z), S_F^2(+,'y,'t).$$

Обчислюємо

$$S_P^2\big(>, S_F^2(+,'x,'z), S_F^2(+,'y,'t)(d) = >(S_F^2(+,'x,'z)(d), S_F^2(+,'y,'t)(d)\big) =$$

$$= >\big(+\,\big('x(d),'z(d)\big), +\,(y(d))\big) = >\big(+(17,5), +\,(11,3) = > (22,14)\big) = 1.$$

Це означає, що

$$S_P^2(>,'x,'y)\,\mathbf{\&}\,S_P^2('>,'y,'z) \to S_P^2\big(>, S_F^2(+,'x,'z), S_F^2(+,'y,'t)\big)(d) = \mathbf{1}. \blacktriangleleft$$

Підсумовуючи розглянуті приклади, доходимо висновку, що семантика логіки предикатів спирається на дві алгебри (алгебричні системи): алгебру предметних значень із n-арними операціями та алгебру квазіарних предикатів і функцій з композиціями як операцій.

Композиції поділяємо на два класи, які буде означено в наступних параграфах: пропозиційні композиції і композиції квантифікації.

Завдання для самостійної роботи

1. Побудувати композиційні формули для предикатів:

якщо $x = y$ та $y = z$, *то* $x = z$;

якщо $x > y$ та $z > t$, то $x \times z > y \times t$.

2. Обчислити значення предикатів, отриманих у попередньому завданні, на таких номінативних даних:

$d = [x \mapsto 17, y \mapsto 11, z \mapsto 5, t \mapsto 3]$;

$d = [x \mapsto 12, y \mapsto 11, z \mapsto 55, t \mapsto 33, v \mapsto 13]$.

6.2. Пропозиційні композиції

Пропозиційний рівень розгляду характеризується тим, що тут ми не проникаємо до внутрішньої структури об'єктів дослідження. На цьому рівні предикати розглядають як функції вигляду

$$p : A \to \{\mathbf{1}, \mathbf{0}\},$$

де A – абстрактна множина, тобто її елементи неструктуровані.

Предикат p на множині A назвемо **істинним***,* якщо $p(d) = \mathbf{1}$ для всіх $d \in A$.

Для довільних предикатів p, $q : A \to \{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}$ пишемо $p \Rightarrow q$, якщо з умови $p(d) = \mathbf{1}$ випливає $q(d) = \mathbf{1}$ для довільних $d \in A$.

На пропозиційному рівні засобом утворення складніших висловлень чи предикатів із простіших є **логічні операції** (композиції), які не враховують структурованості даних – **пропозиційні композиції,** або **логічні зв'язки**. Зазначимо, що на відміну від булевих операцій, які означають на множині булевих значень, тут логічні зв'язки тлумачать як операції над предикатами. Тому ці операції задаємо не таблицями істинності, а значеннями предикатів на довільному $d \in A$.

Основними логічними зв'язками є **диз'юнкція** $\vee$, **кон'юнкція** $\&$, **імплікація** $\to$, **заперечення** $\neg$ та **еквіваленція** $\sim$.

Указані композиції задамо так (p, q – предикати, d – довільне значення з A):

$$(p \vee q)(d) = \begin{cases} \mathbf{1}, \text{ якщо } p(d) = \mathbf{1} \text{ або } q(d) = \mathbf{1}, \\ \mathbf{0}, \text{ якщо } p(d) = \mathbf{0} \text{ та } q(d) = \mathbf{0}. \end{cases}$$

$$(p \,\&\, q)(d) = \begin{cases} \mathbf{1}, \text{ якщо } p(d) = \mathbf{1} \text{ та } q(d) = \mathbf{1}, \\ \mathbf{0}, \text{ якщо } p(d) = \mathbf{0} \text{ або } q(d) = \mathbf{0}. \end{cases}$$

$$(p \to q)(d) = \begin{cases} \mathbf{1}, \text{ якщо } p(d) = \mathbf{0} \text{ або } q(d) = \mathbf{1}, \\ \mathbf{0}, \text{ якщо } p(d) = \mathbf{1} \text{ та } q(d) = \mathbf{0}. \end{cases}$$

$$(\neg p)(d) = \begin{cases} \mathbf{1}, \text{ якщо } p(d) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{0}, \text{ якщо } p(d) = \mathbf{1}. \end{cases}$$

$$(p \sim q)(d) = \begin{cases} \mathbf{1}, \text{ якщо } p(d) = q(d), \\ \mathbf{0}, \text{ якщо } p(d) \neq q(d). \end{cases}$$

Укажемо основні властивості пропозиційних композицій.

1) Комутативність $\vee$, & та ~:

$p \vee q = q \vee p$; $p \,\&\, q = q \,\&\, p$; $p \sim q = q \sim p$.

2) Асоціативність $\vee$, & та ~:

$(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$; $(p \,\&\, q) \,\&\, r = p \,\&\, (q \,\&\, R)$;

$(p \sim q) \sim r = p \sim (q \sim r)$.

3) Дистрибутивність $\vee$ відносно & та & відносно $\vee$:

$(p \vee q) \,\&\, r = (p \,\&\, r) \vee (q \,\&\, r)$; $(p \,\&\, q) \vee r = (p \vee r) \,\&\, (q \vee r)$.

4) Зняття подвійного заперечення: $\neg\neg p = p$.

5) Ідемпотентність $\vee$ та &: $p = p \vee p$; $p = p \,\&\, p$.

6) Закони де Моргана:

$\neg(p \vee q) = (\neg p) \,\&\, (\neg q)$; $\neg(p \,\&\, q) = (\neg p) \vee (\neg q)$.

7) Зведення $\to$ та ~ до $\neg$, $\vee$ та &:

$p \to q = (\neg p) \vee q$; $p \sim q = (p \to q) \,\&\, (q \to p)$.

8) Закони поглинання: $P \Rightarrow p \vee q$; $p \,\&\, q \Rightarrow p$.

9) Закон (правило) *modus ponens*: $p \,\&\, (p \to q) \Rightarrow q$.

10) Основоположні закони логіки виражають такі істинні предикати:

– **закон тотожності**: $p \sim p$;

– **закон виключеного третього**: $(\neg p) \vee p$;

– **закон суперечливості**: $\neg(p \,\&(\neg p))$.

Завдання для самостійної роботи

1. Виразити композиції & та ~ через композиції $\neg$ та $\vee$.

2. Довести наведені вище основні властивості пропозиційних композицій.

6.3. Композиції квантифікації

У класичній логіці квантори зазвичай вводять на синтаксичному рівні при означенні формул, їхня семантична роль як логічних операцій розкривається при інтерпретації формул.

Тут означимо композиції квантифікації $\exists x$ та $\forall x$ для квазіарних предикатів. Для цього замість абстрактної множини значень A, що розглядалась для пропозиційного випадку, візьмемо множину квазіарних даних ${}^{V}M$.

Для квазіарного даного d запис $d\,\nabla x \mapsto a$ означає нове квазіарне дане, у якому предметне ім'я (змінна) x отримує значення a; для інших змінних залишається те значення, яке вони мали в d.

Предикати $\exists x(p)$ та $\forall x(p)$ позначатимемо $\exists xp$ та $\forall xp$. Задамо їх так (p: ${}^{V}M \to Bool$, $d \in {}^{V}M$):

$$(\exists xp)(d) = \begin{cases} \mathbf{1}, & \text{якщо існує } b \in M: \ p(d\,\nabla x \mapsto b) = \mathbf{1}, \\ \mathbf{0}, & \text{якщо } P(d\,\nabla x \mapsto a) = \mathbf{0} \text{ для всіх } a \in M. \end{cases}$$

$$(\forall xp)(d) = \begin{cases} \mathbf{1}, & \text{якщо } p(d\,\nabla x \mapsto a) = \mathbf{1} \text{ для всіх } a \in M, \\ \mathbf{0}, & \text{якщо існує } b \in M: \ p(d\nabla x \mapsto b) = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Основні властивості композицій $\exists x$ та $\forall x$:

1) Комутативність однотипних кванторів:

$$\exists x \exists yp = \exists y \exists xp; \quad \forall x \forall yp = \forall y \forall xp.$$

2) Закони де Моргана для кванторів:

$$\neg \exists xp = \forall x \neg p; \quad \neg \forall xp = \exists x \neg p.$$

3) Неістотність квантифікованих імен:

$$\exists x \exists xp = \exists xp; \quad \exists x \forall xp = \forall xp; \quad \forall x \exists xp = \exists xp; \ \forall x \forall xp = \forall xp.$$

4) Закони $p \Rightarrow \exists xp$ та $\forall xp \Rightarrow p$.

5) Закон $\exists y \forall xp \Rightarrow \forall x \exists yp$.

6) Закони дистрибутивності кванторів щодо $\vee$ та &:

$\exists xp \vee \exists xq = \exists x(p \vee q)$; $\forall xp \& \forall xq = \forall x(p \,\&\, q)$;

$\exists x(p\&q) \Rightarrow \exists xp\&\exists xq$; $\forall xp \vee \forall xq \Rightarrow \forall x(p \vee q)$.

Зауважимо, що назва **логіка першого порядку** пов'язана із тим, що квантори застосовують лише до імен компонентів у квазіарних даних (до предметних імен). Якщо квантори застосовують до предикатів (функцій), то отримуємо логіки другого порядку.

6.4. Алгебричні системи та алгебри предикатів

Семантика логіки предикатів першого порядку задається двома типами алгебр: алгеброю предметних значень (у нашому випадку – алгебричною системою) та алгеброю предикатів.

Алгебричною системою (АС) назвемо об'єкт вигляду

$$\boldsymbol{A} = (M, Fn^M, Pr^M),$$

де M – непорожня множина предметних значень, яку називають **носієм**, або **основою** АС, Fn^M та Pr^M – множини n-арних функцій і предикатів, заданих на M.

Нехай Fs та Ps – довільні множини, які відповідно називають множинами функціональних (ФС) і предикатних символів (ПС). Нехай

$$\boldsymbol{I}^{Fs}: Fs \to Fn^M \text{ та } \boldsymbol{I}^{Ps}: Ps \to Pr^M$$

– відображення інтерпретації функціональних і предикатних символів. Кожен функціональний і предикатний символ має свою арність. Уведені поняття дозволяють узагальнити поняття алгебричної системи, яку тепер розглядатимемо як кортеж

$$\boldsymbol{A} = (M, \boldsymbol{I}^{Fs}, \boldsymbol{I}^{Ps}).$$

Для кожного $F \in Fs$ функцію $f \in Fn^M$ таку, що $\boldsymbol{I}^{Fs}(F) = f$, назвемо **значенням** ФС F за інтерпретації $\boldsymbol{I}^{Fs}$ на АС

$$\boldsymbol{A} = (M, \boldsymbol{I}^{Fs}, \boldsymbol{I}^{Ps})$$

і позначатимемо цю функцію $F_{\boldsymbol{A}}$. Предикат $p \in Pr^M$ такий, що $\boldsymbol{I}^{Ps}(P) = p$, назвемо **значенням** ПС P при інтерпретації $\boldsymbol{I}^{Ps}$ на АС $\boldsymbol{A}$ та позначимо цей предикат $P_{\boldsymbol{A}}$. Функцію $F_{\boldsymbol{A}}$ називають базовою, а предикат $P_{\boldsymbol{A}}$ – базовим предикатом. Якщо функція $F_{\boldsymbol{A}}$ є функцією-константою на A, то ФС F називають **константним символом.**

Зауважимо, що за інтерпретації функціонального чи предикатного символу арність отриманої функції чи предиката дорівнює арності відповідного символу.

Алгебричні системи задають властивості предметних значень за допомогою n-арних функцій і предикатів, заданих на M. Однак основними класами предикатів і функцій є класи квазіарних ординарних предикатів та функцій, які позначимо відповідно

$$FnQ^M = {}^VM \to M \quad \text{та} \quad PrQ^M = {}^VM \to Bool.$$

Їхні властивості задаються за допомогою композицій квазіарних предикатів і функцій. Для мов першого порядку достатньо поняття алгебри квазіарних предикатів, а саме: кортеж

$$\boldsymbol{A1} = (PrQ^{M}, \neg, \vee, \&, \to, \sim, \exists x, \forall x)$$

називають **алгеброю квазіарних предикатів першого порядку**.

Яким чином пов'язані алгебрична система та алгебра предикатів? Фактично – через третю алгебру, основними операціями якої є суперпозиції в n-арні функції і предикати. Ця алгебра відіграє допоміжну роль, тому тут не розглядатимемо її детально.

Для логіки першого порядку алгебра предикатів є фіксованою, різні інтерпретації формул задаються за допомогою алгебричних систем.

Завдання для самостійної роботи

1. Виразити композицію $\forall x$ через композиції $\neg$ та $\exists x$.

2. Довести наведені вище основні властивості композицій $\exists x$ та $\forall x$.

6.5. Мови першого порядку та їх інтерпретації

Уведені раніше алгебри (алгебрична система предметних значень та алгебра квазіарних предикатів) фактично визначають мову логіки предикатів першого порядку, або просто **мову першого порядку.**

Сигнатура мови (множини символів) складається з таких типів символів:

– **предметні імена** (змінні) x, y, z,... з деякої множини V;

– **функціональні символи** f_0, f_1, f_2,... заданої арності з деякої множини Fs;

– **предикатні символи** p_0, p_1, p_2,... заданої арності з деякої множини Ps;

– **символи логічних операцій** (композицій) $\neg$, $\vee$ та $\exists$;

– **символ рівності** = предметних значень.

У множині Fs може виділятися підмножина константних символів $Cn \subseteq Fs$. Символ рівності = завжди інтерпретуємо як предикат рівності, причому таку рівність трактуємо як **тотожність**.

Символи $\neg$, $\vee$, $\exists$, = і предметні імена назвемо базовими **логічними** символами. Функціональні та предикатні символи, окрім =, назвемо **нелогічними** символами. Множини Fs та Ps утворюють **сигнатуру** мови першого порядку.

Основними конструкціями мови першого порядку є **терми** та **формули**. Терми використовують для позначення, назви об'єктів предметної області, формули – для запису тверджень про такі об'єкти.

Індуктивне означення **терму** таке:

1) кожне предметне ім'я та кожна константа є термом; такі терми назвемо **атомарними**;

2) якщо $t_1,..., t_n$ – терми, F – n-арний функціональний символ, то $F(t_1...t_n)$ – терм.

Атомарною формулою називають вираз вигляду $P(t_1...t_n)$, де P – n-арний предикатний символ, $t_1,..., t_n$ – терми.

Індуктивне визначення **формули** таке:

1) кожна атомарна формула є формулою;

2) якщо Φ та Ψ – формули, то $(\neg \Phi)$ та $(\Phi \vee \Psi)$ – формули;

3) якщо Φ – формула, x – предметне ім'я, то $(\exists x\Phi)$ – формула.

Дужки можна опускати, ураховуючи пріоритет операцій та їх асоціативність. Пріоритет символів логічних зв'язок вважаємо нижчим за пріоритет предикатних символів, а пріоритет предикатних символів – нижчим за пріоритет функціональних символів. Квантори мають вищий пріоритет ніж бінарні логічні зв'язки. Для бінарних функціональних і предикатних символів зазвичай застосовуємо інфіксну форму запису. Те саме – для атомарних формул. Для формул вигляду $\neg (t_1 = t_2)$ уживатимемо скорочення $t_1 \neq t_2$.

Вирази $\Phi \& \Psi$, $\Phi \to \Psi$ та $\Phi \sim \Psi$ вважаємо відповідно скороченнями формул

$\neg (\neg \Phi \vee \neg \Psi)$, $\neg \Phi \vee \Psi$ та $\neg (\neg (\neg \Phi \vee \Psi) \vee \neg (\neg \Psi \vee \Phi))$.

Користуємося також символом $\forall$, вважаючи вираз $\forall x\Phi$ скороченням формули $\neg \exists x \neg \Phi$.

Скорочення термів і формул називатимемо просто термами та формулами. Множини термів і формул мови першого порядку позначатимемо відповідно Tr та Fr. Формули й терми визначають мову логіки L.

У формулі вигляду $\exists x\Phi$ або $\forall x\Phi$ формулу Φ називають **областю дії** квантора за x. Вираз вигляду $\exists x$ або $\forall x$ називають **кванторним префіксом.**

Входження імені (змінної) x до формули Φ **зв'язане**, якщо воно міститься в області дії деякого квантора за x, інакше таке входження x у Φ **вільне**. Якщо існує вільне входження імені x до формули Φ, то x – **вільне ім'я** (**вільна змінна**) формули Φ.

Формулу Φ із вільними іменами $x_1,.., x_n$ позначаємо $\Phi(x_1,.., x_n)$.

Формула **замкнена**, якщо вона не має вільних імен.

Терм, який не містить входжень предметних імен, називають **замкненим термом**. Зокрема, таким є кожний константний символ.

Наведемо приклади мов першого порядку.

Приклад 6.3.

1. Мова арифметики L_{ar} визначається сигнатурою

$$0, 1, +, \times, =,$$

де 0 та 1 – константні символи, + та $\times$ – бінарні функціональні символи, = – бінарний предикатний символ.

Терм мови арифметики назвемо **арифметичним термом**, а формулу мови арифметики – **арифметичною формулою.**

Наприклад,

$1 + 1$ – **замкнений арифметичний терм**;

$x \times (y + z)$ – **арифметичний терм**;

$\exists z(x + z = y)$ – **арифметична формула**.

2. Мова теорії множин L_{set} визначається сигнатурою $\in$, =, де $\in$ та = – бінарні предикатні символи.

Наприклад,

$z\in x$ – **атомарна формула**;

$\forall z(z\in x\rightarrow z\in y)$ – **формула**;

$\exists x\neg\exists y(y\in x)$ – **замкнена формула мови** $L_{set.}$

Зауважимо, що останні дві формули відповідно означають $x \subseteq y$ та *існує* $\varnothing$.

3. Мова теорії впорядкованих множин L_{ord} визначається сигнатурою <, =, де < та = – бінарні предикатні символи.

Наприклад,

$x < y$ – **атомарна формула**;

$z < x \to x < y \to z \in y$ – **формула**;

$\forall x \exists y(y < x)$ – **замкнена формула мови** L_{ord}. ◄

Зв'язані імена у формулах можна замінювати іншими предметними іменами, але при цьому може виникнути **колізія** – ситуація, за якої вільні імена стали зв'язаними. Наприклад, із формули

$$\exists z(x + z = y)$$

можна отримати формулу

$$\exists t(x + t = y),$$

коли колізії немає, і формулу

$$\exists x(x + x = y),$$

коли колізія змінила смисл формули.

Вільні входження предметних імен до формули або терму можна замінювати термами. Позначимо

$$\Phi_{x_1,\ldots,x_n}[t_1,\ldots, t_n]$$

формулу, отриману із формули Φ заміною всіх вільних входжень імен $x_1,.., x_n$ на терми $t_1,..., t_n$, відповідно. Для термів аналогічно вводимо позначення

$$t_{x_1,\ldots,x_n}\ [t_1,\ldots, t_n].$$

У загальному випадку формули

$$\Phi_{x,y}[a, b] \text{ та } (\Phi_x[a])_y[b]$$

– різні. Наприклад, якщо Φ – це формула $x \in y$, то $\Phi_{x,y}[y, z]$ – формула $y \in z$, $(\Phi_x[y])_y[z]$ – формула $z \in z$.

При заміні вільних входжень предметних імен термами можливі колізії, за яких вільне ім'я стає зв'язаним. Наприклад, нехай Φ – це формула $\exists z(x + z = y)$. Тоді

$\Phi_x[u]$ – це формула $\exists z(u + z = y)$;

$\Phi_x[z]$ – це формула $\exists z(z + z = y)$.

Отже, маємо колізію.

Звідси терм t **допустимий для заміни вільного імені** x **у формулі** Φ, якщо за такої заміни не виникають колізії.

Інтерпретацією, або **моделлю** мови L, називатимемо АС із доданою сигнатурою вигляду $\boldsymbol{A} = (M, \boldsymbol{I}^{Fs}, \boldsymbol{I}^{Ps})$.

Множину A називають **областю інтерпретації**.

Значення символів і виразів мови L задамо на $\boldsymbol{A}$ таким чином.

Предметні імена інтерпретуємо як імена елементів (змінні) на M. Символи логічних операцій інтерпретуємо як відповідні логічні операції (композиції). Константні символи інтерпретуємо як конкретні елементи множини M, тобто як функції-константи на M. Предикатні та функціональні символи інтерпретуємо як предикати та функції відповідної арності, визначені на M, причому бінарний предикатний символ = завжди інтерпретуватимемо як предикат рівності на M.

Для інтерпретації термів і формул мови L задамо відображення

$$\boldsymbol{J}^{Tr}: Tr \to FnQ^M \text{ та } \boldsymbol{J}^{Fr}: Fr \to PrQ^M,$$

яке індуктивно визначають за допомогою $\boldsymbol{I}^{Fs}$ та $\boldsymbol{I}^{Ps}$.

Для термів маємо:

$\boldsymbol{J}^{Tr}(x) = {'}\boldsymbol{x}$;

$\boldsymbol{J}^{Tr}(F(t_1,..,t_n)) = \boldsymbol{I}^{Fs}(F)(\boldsymbol{J}^{Tr}(t_1),..., \boldsymbol{J}^{Tr}(t_n)) = F_A(\boldsymbol{J}^{Tr}(t_1),..., \boldsymbol{J}^{Tr}(t_n))$.

Для атомарних формул маємо:

$\boldsymbol{J}^{Fr}(P(t_1...t_n)) = \boldsymbol{I}^{Ps}(P)(\boldsymbol{J}^{Fr}(t_1),..., \boldsymbol{J}^{Fr}(t_n)) = P_A(\boldsymbol{J}^{F}(t_1),..., \boldsymbol{J}^{F}(t_n))$.

Для формул маємо:

Нехай $\boldsymbol{J}^{Fr}(\Phi) = p$. Тоді $\boldsymbol{J}^{Fr}(\neg\Phi) = \neg p$, $\boldsymbol{J}^{Fr}(\exists x\Phi) = \exists \boldsymbol{x} p$.

Нехай $\boldsymbol{J}^{Fr}(\Phi) = p$ та $\boldsymbol{J}^{Fr}(\Psi) = q$. Тоді $\boldsymbol{J}^{Fr}(\Phi\vee\Psi) = p \vee q$.

Зауважимо, тут ми неявно використовуємо введені раніше композиції суперпозиції:

$F_A(g_1,..., g_n)$, по суті, означає $S_F^n(F_A, g_1,..., g_n)$,

$P_A(g_1,..., g_n)$ означає $S_P^n(P_A, g_1,..., g_n)$.

Терми та формули за заданої інтерпретації визначають спеціальні підкласи квазіарних функцій і предикатів, які називають X-арними функціями та предикатами. Тут X – множина імен (змінних) $\{v_1,..., v_n\}$. Значення X-арних функцій і предикатів визначаються лише значеннями змінних із X, інші змінні не впливають на значення функцій і предикатів. Клас X-арних даних позначаємо M^X.

Уведені визначення дають змогу стверджувати, що кожний терм із вільними іменами $v_1,..., v_n$ інтерпретується як $\{v_1,..., v_n\}$-арна функція на M, кожна формула з вільними іменами $v_1,..., v_n$

– як $\{v_1,..., v_n\}$-арна функція на M. Зокрема, кожний замкнений терм інтерпретується як функція-константа на M, кожна замкнена формула – як предикат-константа на M.

Функцію, що є значенням терму t на АС $\boldsymbol{A} = (M, \boldsymbol{I}^{Fs}, \boldsymbol{I}^{Ps})$, позначаємо t_A; предикат, що є значенням формули Ф на АС $\boldsymbol{A} = (M, \boldsymbol{I}^{Fs}, \boldsymbol{I}^{Ps})$, позначаємо Φ_A. Це означає, що

$$\boldsymbol{J}^{Tr}(t) = t_A, \boldsymbol{J}^{Fr}(\Phi) = \Phi_A.$$

Формулу Ф назвемо **істинною за інтерпретації $\boldsymbol{A}$**, або **істинною на $\boldsymbol{A}$**, або **$\boldsymbol{A}$-істинною**, якщо предикат Φ_A є істинним.

Останнє означає: X-арний предикат $\Phi_{\boldsymbol{A}}$ такий, що для всіх $d \in M^X$ маємо $\Phi_A(d) = \mathbf{1}$.

Те, що формула Ф істинна на АС $\boldsymbol{A}$, позначатимемо $\boldsymbol{A} \models \Phi$.

Формулу Ф називають **всюди істинною**, якщо вона істинна за кожної інтерпретації.

Те, що Ф усюди істинна, позначатимемо $\models \Phi$.

Формулу Ф назвемо **виконуваною за інтерпретації $\boldsymbol{A}$**, або **виконуваною на** *АС* $\boldsymbol{A}$, або **$\boldsymbol{A}$-виконуваною**, якщо предикат Φ_A є виконуваним. Це означає: X-арний предикат Φ_A є таким, що для деякого $d \in M^X$ виконується $\Phi_A(d) = \mathbf{1}$.

Формулу Ф називають **виконуваною**, якщо вона виконувана за деякої інтерпретації.

Приклад 6.4.

1. Формула $x = x$ усюди істинна.

2. Формула $\forall x \forall y(x = y)$ істинна на всіх 1-елементних АС і тільки на них; формула $\neg\forall x \forall y(x = y)$ істинна на всіх k-елементних АС, де $k > 1$, і тільки на них.

Замиканням формули Ф із вільними іменами $x_1,..., x_n$ назвемо замкнену формулу $\forall x_1...\forall x_n\Phi$, яку позначатимемо $\overline{\Phi}$.

Із наведених означень випливає **семантична теорема замикання:**

Для всіх інтерпретацій $\boldsymbol{A}$ та формули Ф

$$\boldsymbol{A} \models \Phi \Leftrightarrow \boldsymbol{A} \models \overline{\Phi}.$$

3. Кожна формула вигляду $\Phi_x[t] \to \exists x\Phi$ усюди істинна. ◄

Формула Ф мови L k-**істинна**, якщо $\boldsymbol{A} \vDash Ф$ для кожної k-елементної інтерпретації $\boldsymbol{A}$ мови L.

Формула Ф **скінченно-істинна**, якщо Ф є k-істинною для кожного $k > 0$. Отже, скінченно-істинна формула є істинною за кожної скінченної інтерпретації.

Приклад 6.5.

1. Формула

$$\exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_k((x_1 \neq x_2)\&\ldots\&(x_1 \neq x_k)\&(x_2 \neq x_3)\&\ldots\&(x_{k1} \neq x_k)),$$

яку позначимо E_k, стверджує, що існує не менше k різних елементів області інтерпретації. Отже, E_k є n-істинною для всіх $n \geq k$.

2. Формула

$$\exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_k \forall y((y = x_1) \vee \ldots \vee (y = x_k)),$$

яку позначимо G_k, стверджує, що існує не більше k різних елементів області інтерпретації. Отже, G_k є n-істинною для всіх $1 \leq n \leq k$.

3. Формула $E_k\&G_k$ k-істинна, але не є n-істинною для кожного $n \neq k$.

Завдання для самостійної роботи

1. Навести приклади природних 2-елементних інтерпретацій $L_{ar.}$

2. Указати формули L_{set}, які означають:

1) $X \subset Y$; 2) $X = Y \cup Z$;

3) $X = 2^Y$; 4) $X = (Y \cap Z) \setminus S$.

3. Довести чи спростувати твердження:

1) $\vDash \forall x \exists y A \rightarrow \exists y \forall x A$; 2) $\vDash \exists y \forall x A \rightarrow \forall x \exists y A$;

3) $\vDash \forall x A \vee \forall x B \rightarrow \forall x(A \vee B)$; 4) $\vDash \forall x(A \vee B) \rightarrow \forall x A \vee \forall x B$;

5) $\vDash \exists x A \vee \exists x B \rightarrow \exists x(A \vee B)$; 6) $\vDash \exists x(A \vee B) \rightarrow \exists x A \vee \exists x B$;

7) $\vDash \forall x A \& \forall x B \rightarrow \forall x(A \& B)$; 8) $\vDash \forall x(A \& B) \rightarrow \forall x A \& \forall x B$;

9) $\vDash \exists x A \& \exists x B \rightarrow \exists x(A \& B)$; 10) $\vDash \exists x(A \& B) \rightarrow \exists x A \& \exists x B$;

11) $|= \exists x A \vee B \rightarrow A \vee \exists x B$; 12) $\vDash A \& \forall x B \rightarrow \forall x A \& B$;

13) $|= \forall x A \vee \exists x B \rightarrow \exists x A \vee \forall x B$; 14) $\vDash \exists x A \vee \forall x B \rightarrow \forall x A \vee \exists x B$.

6.6. Виразність в алгебричних системах. Арифметичні предикати, множини, функції

Нехай $\boldsymbol{A} = (M, \boldsymbol{I}^{Fs}, \boldsymbol{I}^{Ps})$ – деяка АС. Квазіарний предикат $p \in PrQ^{M}$ **виразний формулою** Φ **в інтерпретації** $\boldsymbol{A}$, якщо p – суть предикат $\Phi_{\boldsymbol{A}}$.

Предикат p **виразний в** *АС* $\boldsymbol{A}$, якщо p виразний деякою формулою Ф.

Множину, що є областю істинності предиката, виразного в АС $\boldsymbol{A}$, називаєть **виразною в АС $\boldsymbol{A}$ множиною**.

Функцію, графік якої – виразна в АС $\boldsymbol{A}$ множина, називають **виразною в АС $\boldsymbol{A}$ функцією**.

Приклад 6.6.

1. Предикат $x = 0$ в АС $(\boldsymbol{N}, \times, =)$, $(\boldsymbol{Q}, \times, =)$ та $(\boldsymbol{R}, \times, =)$ виражається формулою

$$\forall y(x \times y = x).$$

2. Предикат $x = 1$ в АС $(\boldsymbol{N}, \times, =)$, $(\boldsymbol{Z}, \times, =)$ та $(\boldsymbol{R}, \times, =)$ виражається формулою

$$\forall y(x \times y = y).$$

3. Предикат $x = 0$ в АС $(\boldsymbol{N}, +, =)$, $(\boldsymbol{Z}, +, =)$ та $(\boldsymbol{R}, +, =)$ виражається формулою

$$x + x = x.$$

4. Предикат $x = 1$ в АС $(\boldsymbol{N}, +, =)$ виражається формулою

$$\forall u \forall v(x = u + v \to u = u + u \vee v = v + v) \,\&\, \neg\, x = x + x.$$

5. Предикат $y = x + 4$ в АС $(\boldsymbol{R}, y = x + 2, =)$ виражається формулою

$$\exists z(y = z + 2 \,\&\, z = x + 2).$$

6. Предикат $|\, x–y \,| = 2$ в АС $(\boldsymbol{Z}, |\, x - y \,| =1, =)$ виражається формулою

$$\exists z(|\, x - z \,| = 1 \,\&|\, z - y \,| = 1\& \neg\;\; x = y.$$

7. Предикат $|\, x - y| = 3$ в АС $(\boldsymbol{Q}, y = x + 3, =)$ виражається формулою

$$y = x + 3 \vee x = y + 3.$$

8. Предикат $z = x + 1$ виражається в АС $(Z, <, =)$ формулою

$$(x < z)\& \neg\, \exists v(x < v \,\&\, v < z).$$

Тут $\boldsymbol{N}$ – множина натуральних, $\boldsymbol{Z}$ – множина цілих, $\boldsymbol{Q}$ – множина раціональних, а $\boldsymbol{R}$ – множина дійсних чисел.

Множину натуральних чисел $\boldsymbol{N}$ із виділеними константами 0 та 1, означеними на $\boldsymbol{N}$ стандартними бінарними операціями (функціями) додавання + і множення × та стандартним бінарним предикатом рівності, назвемо **стандартною інтерпретацією**, або **стандартною моделлю** мови арифметики.

Арифметичну формулу, яка істинна на $\boldsymbol{N}$, називають **істинною арифметичною формулою** (скорочено ІАФ).

Кожна всюди істинна арифметична формула є ІАФ, але не кожна ІАФ усюди істинна. Наприклад, формула $\neg\,\exists x(x + 1 = 0)$ є ІАФ, але вона не істинна на $\boldsymbol{Z} = (\boldsymbol{Z}, 0, 1, +, \times, =)$ та на $\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{R}, 0, 1, +, \times, =)$.

Предикати, множини та функції, виразні в $\boldsymbol{N} = (N, 0, 1, +, \times, =)$, назвемо **арифметичними**. Отже, функція f арифметична, якщо її графік є арифметичною множиною. Звідси маємо: арифметична формула Φ виражає функцію f, якщо Φ виражає предикат $y = f(x_1, \ldots, x_n)$.

Приклад 6.7.

1. Предикати x *є* **парним числом** та x **ділиться на** y арифметичні, вони виражаються формулами

$$\exists y(x = y + y) \text{ та } \exists z(x = y \times z).$$

2. Предикат x *є* **простим числом** арифметичний. Він виражається арифметичною формулою

$$\forall y \forall z(x = y \times z \rightarrow y = 1 \vee z = 1) \& \neg\, x = 1.$$

3. Предикати $x \leq y$ та $x < y$ арифметичні. Вони виражаються арифметичними формулами

$$\exists z(x + z = y) \text{ та } \exists z(x + z = y \& x \neq y).$$

4. Предикат $x \leq y$ в АС $\boldsymbol{N} = (N, 0, 1, +, \times, =)$, $\boldsymbol{R} = (R, 0, 1, +, \times, =)$ та $\boldsymbol{Z} = (Z, 0, 1, +, \times, =)$ виражається різними арифметичними формулами. Дійсно, маємо:

для $\boldsymbol{N}$ $\quad \exists z(x + z = y)$;

для $\boldsymbol{R}$ $\quad \exists z(x + z \times z = y)$,

для $\boldsymbol{Z}$ $\quad \exists z \exists u \exists v \exists w(x + z \times z + u \times u + v \times v + w \times w = y)$. ◄

Використовуючи наведений приклад, у записах арифметичних формул надалі вживатимемо скорочення вигляду $x \leq y$ та $x < y$.

Приклад 6.8. Арифметичними є такі функції:
Функції $x + y$, $x \times y$ та $x \dot{-} y$ виражаються формулами

$$z = x + y,\ z = x \times y \text{ та } y + z = x.$$

Функція $[x/y]$ виражається формулою

$$z \times y \le x \,\&\, x < (z + 1) \times y.$$

Функція mod(x, y) виражається формулою

$$\exists u(x = \mathrm{z} + u \times y \,\&\, z < y).$$

Функція $[\sqrt{x}\,]$ виражається формулою

$$z \times z \le x \,\&\, z < (z + 1) \times (z + 1). ◄$$

Завдання для самостійної роботи

1. Указати формули відповідної мови, що виражають такі предикати:
1) mod(x,3) = 0 та x = 2 в АС (***N***; +, =);
2) x **парне** та x **непарне** в АС (***Z***; +, =);
3) $y = x + 9$ в АС (***N***; $y = x + 3$, =);
4) $| x–y | = 6$ в АС (***R***; $| x – y | = 2$, =);
5) $x = 0$ та $x = 1$ в АС (***N***; <, =);
6) $x = 1$ та $x = –1$ в АС (***Z***; ×, =).
2. Указати формулу L_{ar}, що виражає предикат:
1) *існує більше чотирьох парних чисел*;
2) *існує не менше чотирьох непарних чисел*;
3) *не існує простих чисел*, *кратних* 4;
4) *існують прості числа*, *кратні* 5;
5) *множина непарних чисел нескінченна*;
6) *існує єдине парне просте число*;
7) *кожне парне число*, *більше ніж* 2, *є сумою двох простих чисел*.
3. Указати формулу L_{ar}, що виражає функцію:
1) $| x - y |$; 2) mod(x, [y/z]); 3) *НСD*(x, y); 4) *НСК*(x, y).

6.7. Аксіоматичні системи логік першого порядку

Розглянемо аксіоматичні системи гільбертівського типу.
Спочатку означимо поняття формальної системи.

Під **формальною системою** (ФС) розуміють трійку (L, A, P), де L – мова формальної системи, A – множина **аксіом**, P – множина **правил виведення**.

Мова задається **алфавітом** і правилами побудови її слів, які називають **формулами**. Кожна аксіома є формулою. Правила виведення ФС діють на множині формул.

Формулу, що отримують із аксіом за допомогою правил виведення, називають **теоремою**. Правила виведення записують у вигляді

$$P_1, P_{2,}..., P_n \vdash P, \text{ де } P_1, P_{2,}...,$$

де P_n – засновки, P – висновок.

Під **виведенням** розумітимемо скінченну послідовність формул $\Phi_1, \Phi_{2,}..., \Phi_m$, де кожна із формул є або аксіомою, або її отримано із попередніх формул цієї послідовності за допомогою деякого правила виведення.

Аксіоматичні системи логік першого порядку називають численнями першого порядку, або теоріями першого порядку. Під **теорією першого порядку** розумітимемо формальну систему $T = (L, A, P)$, де L – мова першого порядку, A – множина **аксіом**, розбита на множину **логічних** аксіом і множину **власних** аксіом, P – множина **правил виведення**.

Логічні аксіоми є в усіх теоріях першого порядку, власні аксіоми визначають специфіку тієї чи іншої теорії.

Множина логічних аксіом задається такими схемами аксіом:

$Ax1$) $\neg\, \Phi \vee \Phi$ – пропозиційні аксіоми;

$Ax2$) $\Phi_x[t] \to \exists x\Phi$ – аксіоми підстановки;

$Ax3$) $x = x$ – аксіоми тотожності;

$Ax4$) $x_1 = y_1 \to ... \to x_n = y_n \to F(x_1 ... x_n) = F(y_1 ... y_n)$ та
$x_1 = y_1 \to ... \to x_n = y_n \to P(x_1 ... x_n) \to P(y_1 ... y_n)$ – аксіоми рівності.

Множина ***P*** складається із таких правил виведення:

П1) $\Phi \vdash \Psi \vee \Phi$ – **правило розширення**;

П2) $\Phi \vee \Phi \vdash \Phi$ – **правило скорочення**;

П3) $\Phi \vee (\Psi \vee \Xi) \vdash (\Phi \vee \Psi) \vee \Xi$ – **правило асоціативності**;

П4) $\Phi \vee \Psi, \neg\, \Phi \vee \Xi \vdash \Psi \vee \Xi$ – **правило перетину**;

П5) $\Phi \to \Psi \vdash \exists x\Phi \to \Psi$, якщо x не вільна в Ψ, – **правило $\exists$-введення**.

Теоремою теорії першого порядку ***T*** називають формулу, яка виводиться із аксіом за допомогою скінченної кількості застосувань правил виведення. Множину теорем теорії ***T*** позначатимемо Th(***T***).

Те, що формула А – теорема, позначатимемо ***T*** $\vdash A$, або $\vdash A$, якщо ***T*** мається на увазі.

Абстрагуючись від наборів символів логічних операцій, способів запису термів і формул, наборів логічних аксіом і правил виведення, можна сказати, що **теорія першого порядку визначається сигнатурою мови та множиною власних аксіом**.

Сигнатурою теорії першого порядку називають сигнатуру мови цієї теорії. Формулу мови теорії називатимемо також формулою теорії.

Розглянемо кілька прикладів теорій першого порядку.

Приклад 6.9.

1. Теорію першого порядку, що не містить власних аксіом, називають **численням предикатів першого порядку** (скорочено ЧП-1).

2. Особливе місце серед формальних теорій займає теорія натуральних чисел – **формальна арифметика**. Таку теорію позначимо Ar. Мовою Ar є мова L_{ar}. Власні аксіоми Ar:

Ar1) $\neg(x + 1 = 0)$; Ar2) $x + 1 = y + 1 \to x = y$;

Ar3) $x + 0 = x$; Ar4) $x + (y + 1) = (x + y) + 1$;

Ar5) $x \times 0 = 0$; Ar6) $x \times (y + 1) = x \times y + x$;

Ar7) $A_x[0] \,\&\, \forall x(A \to A_x[x+1]) \to \forall xA$ – аксіоми індукції.

Кожна власна аксіома формальної арифметики є ІАФ. ◄

Неважко довести, що **логічні аксіоми є всюди істинними формулами**. Як наслідок цього факту, а також того, що правила виведення зберігають властивість усюди істинності, маємо, що **кожна теорема ЧП-1 є всюди істинною формулою**.

Моделлю теорії першого порядку ***T*** називають інтерпретацію мови теорії, на якій істинні всі власні аксіоми теорії ***T***.

Приклад 6.10.

1. Моделлю ЧП-1 є кожна інтерпретація його мови.

2. Моделлю формальної арифметики *Ar* є ***N*** – стандартна інтерпретація L_{ar}. Таку модель називають **стандартною моделлю** формальної арифметики.

Формулу Ф називають **істинною** в теорії $\boldsymbol{T}$, якщо Ф істинна на кожній моделі теорії $\boldsymbol{T}$.

Справедливі такі твердження:

Кожна теорема теорії першого порядку $\boldsymbol{T}$ істинна в $\boldsymbol{T}$ (теорема істинності).

Кожна тавтологія є теоремою (теорема тавтології).

У наведених нижче прикладах використаємо теорему тавтології (ТТ).

Приклад 6.11.

1. $\vdash \forall xA \to A$.

$(Ax2) \vdash \neg A \to \exists x \neg A$, звідки за ТТ $\vdash \neg\exists x \neg A \to \mathrm{A}$, тобто

$$\vdash \forall x\mathrm{A} \to \mathrm{A}.$$

2. (**правило $\forall$-введення**). Якщо $\vdash A \to B$ та x не вільне в A, то

$$\vdash A \to \forall xB.$$

Якщо $\vdash A \to B$, то $\vdash \neg B \to \neg A$ за ТТ, звідки $\vdash \exists x \neg B \to \neg A$ за П5. Тоді $\vdash \neg\neg A \to \neg\exists x \neg B$ за ТТ, отже, $\vdash A \to \forall xB$.

3. (правила $\exists$-дистрибутивності та $\forall$-дистрибутивності). *Якщо* $\vdash A \to \mathrm{B}$, то маємо $\vdash \exists xA \to \exists xB$ та $\vdash \forall xA \to \forall xB$.

Маємо $\vdash A \to B$ (умова) та $\vdash B \to \exists xB$ (аксіома $Ax2$), звідки за ТТ $\vdash A \to \exists xB$, тому за П5 дістаємо $\vdash \exists xA \to \exists xB$.

Із умови маємо $\vdash \neg B \to \neg A$ за ТТ, отже $\vdash \neg A \to \exists x \neg A$ $(Ax2)$, звідки за ТТ $\vdash \neg B \to \exists x \neg A$.

За П5 $\vdash \exists x \neg B \to \exists x \neg A$, тому за ТТ $\vdash \neg\exists x \neg \mathrm{A} \to \neg\exists x \neg B$, тобто $\vdash \forall xA \to \forall xB$.

Наведені приклади дають змогу ввести похідні правила виведення:

– **правило $\forall$-вв**: $A \to B \vdash A \to \forall xB$, якщо x не вільне в A;

– **правило $\exists$-дис**: $A \to \mathrm{B} \vdash \exists xA \to \exists xB$;

– **правило $\forall$-дис**: $A \to \mathrm{B} \vdash \forall xA \to \forall xB$.

4. (**правило усоблення**). Якщо $\vdash \forall x\mathrm{A}$, то $\vdash A$.

За п. 1 $\vdash \forall xA \to A$. Звідси та з умови $\vdash \forall xA$ за МР $\vdash A$.

5. (**правило узагальнення**). Якщо $\vdash A$, то $\vdash \forall xA$.

Якщо $\vdash A$, то за П1 $\vdash \forall xA \vee A$, звідки за ТТ $\vdash \neg A \rightarrow \forall xA$. Тоді $\vdash \exists x \neg A \rightarrow \forall xA$ за П5, тобто $\vdash \forall xA \vee \forall xA$.

Тепер $\vdash \forall xA$ за П2.

6. $\vdash \exists x\exists yA \leftrightarrow \exists y\exists xA$.

Із аксіоми Ax2 $\vdash A \rightarrow \exists xA$ за $\exists$-дис маємо $\vdash \exists yA \rightarrow \exists y\exists xA$, далі за П5 $\vdash \exists x\exists yA \rightarrow \exists y\exists xA$.

Аналогічно $\vdash \exists y\exists xA \rightarrow \exists x\exists yA$, тому за ТТ $\vdash \exists x\exists yA \leftrightarrow \exists y\exists xA$.

7. $\vdash \exists x\forall yA \rightarrow \forall y\exists xA$. Маємо $\vdash A \rightarrow \exists xA$ ($Ax2$), звідки $\vdash \forall yA \rightarrow \forall y\exists xA$ за $\forall$-дис. За П5 маємо $\vdash \exists x\forall yA \rightarrow \forall y\exists xA$.

8. $\vdash \exists x(A \vee B) \rightarrow \exists xA \vee \exists xB$. Маємо

$$\vdash A \rightarrow \exists xA \ (Ax2) \text{ та } \vdash B \rightarrow \exists xB \ (Ax2),$$

звідки за ТТ маємо $\vdash A \vee B \rightarrow \exists xA \vee \exists xB$.

Тепер за П5 $\vdash \exists x(A \vee B) \rightarrow \exists xA \vee \exists xB$.

9. $\vdash \exists xA \vee \exists xB \rightarrow \exists x(A \vee B)$. За ТТ маємо $\vdash A \rightarrow A \vee B$ та $\vdash B \rightarrow A \vee B$, звідки $\vdash \exists xA \rightarrow \exists x(A \vee B)$ та $\vdash \exists xB \rightarrow \exists x(A \vee B)$ за $\exists$-дис.

Тепер $\vdash \exists xA \vee \exists xB \rightarrow \exists x(A \vee B)$ за ТТ.

10. $\vdash \forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall xB)$ за умови *x не вільне в A*.

Маємо $\vdash \forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$ (п. 1), звідки за ТТ дістаємо $\vdash \forall x(A \rightarrow B) \,\&\, A \rightarrow B$.

За правилом $\forall$-введення $\vdash \forall x(A \rightarrow B) \,\&\, A \rightarrow \forall xB$, звідки за ТТ $\vdash \forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall xB)$.

11. (правило симетрії). Для довільних термів a та b

$$\vdash a = b \leftrightarrow b = a.$$

Маємо $\vdash x = y \rightarrow x = x \rightarrow x = x \rightarrow y = x$,

аксіома рівності для ПС =

звідки $\vdash x = x \rightarrow x = x \rightarrow y = x \rightarrow y = x$ за ТТ.

Однак $\vdash x = x$ ($Ax3$), тому послідовно за МР

$$\vdash x = x \rightarrow y = x \rightarrow y = x \quad \text{та} \quad \vdash x = y \rightarrow y = x.$$

Аналогічно $\vdash y = x \rightarrow x = y$, тому $\vdash x = y \leftrightarrow y = x$ за ТТ. Звідси за ПП $\vdash a = b \leftrightarrow b = a$.

12 (**правило транзитивності**). Для довільних термів a, b та c

$$\vdash a = b \to b = c \to a = c.$$

Маємо $\vdash y = x \to y = z \to y = y \to x = z$,

аксіома рівності для предикатного символу =

звідки $\vdash y = y \to y = x \to y = z \to x = z$ за ТТ.

Однак $\vdash y = y$ ($Ax3$), тому за МР $\vdash y = x \to y = z \to x = z$.

Згідно із правилом симетрії $\vdash x = y \to y = x$, тому $\vdash x = y \to y = z \to x = z$ за ТТ. За ПП $\vdash a = b \to b = c \to a = c$. ◄

Нехай $\boldsymbol{T}$ – довільна теорія першого порядку із множиною власних аксіом $\boldsymbol{Ax}$, Г – деяка множина формул. Розширення теорії $\boldsymbol{T}$ із множиною власних аксіом $\boldsymbol{Ax} \cup \Gamma$ позначають $\boldsymbol{T}[\Gamma]$. Теорію, отриману із $\boldsymbol{T}$ додаванням **А** як нової аксіоми, позначимо $\boldsymbol{T}$[**А**].

Теорема дедукції. Нехай A – замкнена формула. Тоді для довільної формули B маємо:

$$\boldsymbol{T} \vdash A \to B \Leftrightarrow \boldsymbol{T}[A] \vdash B.$$

Теорію першого порядку $\boldsymbol{T}$ називають **несуперечливою**, якщо не існує формули Ф такої, що $\boldsymbol{T} \vdash \Phi$ та $\boldsymbol{T} \vdash \neg\Phi$.

Несуперечливу теорію першого порядку T називають **максимальною** (інколи кажуть **повною**), якщо для кожної замкненої формули Ф маємо або $\boldsymbol{T} \vdash \Phi$, або $\boldsymbol{T} \vdash \neg\Phi$.

Приклад 6.12. Позначимо S замкнену формулу

$$\forall x \forall y (x = y),$$

істинну тільки на 1-елементних інтерпретаціях. Тоді $\neg S$ істинна на всіх n-елементних інтерпретаціях, де $n > 1$. Якщо $\vdash S$, то $\models S$, що неможливо; якщо ж $\vdash \neg S$, то $\models \neg S$, що також неможливо.

Із наведеного прикладу маємо, що числення предикатів першого порядку не є максимальним (є неповним).

Завдання для самостійної роботи

1. Побудувати виведення в численні предикатів:

1) $\vdash \neg \forall x B \leftrightarrow \exists x \neg B$ та $\vdash \neg \exists x B \leftrightarrow \forall x \neg B$;

2) $\vdash \forall xA \leftrightarrow \forall x \neg \neg A$;

3) $\vdash \forall x \forall yA \leftrightarrow \forall y \forall xA$;

4) $\vdash \forall xA \vee \forall xB \to \forall x(A \vee B)$;

5) $\vdash \forall xA \& \forall xB \leftrightarrow \forall x(A \& B)$;

6) $\vdash \exists x(A \& B) \to \exists xA \& \exists xB$;

7) $\vdash \forall x(A \& B) \to \forall xA \& B$;

8) $\vdash \exists xA \vee B \leftrightarrow \exists x(A \vee B)$, якщо *x не вільна* у B;

9) $\vdash \forall xA \vee B \leftrightarrow \forall x(A \vee B)$, якщо *x не вільна* у B;

10) $\vdash \exists xA \& B \leftrightarrow \exists x(A \& B)$ за умови *x не вільне у B*;

11) $\vdash \forall xA \& B \leftrightarrow \forall x(A \& B)$ за умови *x не вільне у B*;

12) $\vdash (A \to \forall xB) \to (\forall xA \to B)$;

13) $\vdash \forall x(A \to B) \to (\forall xA \to \forall xB)$;

14) $\vdash \forall x(A \to B) \to (\exists xA \to \exists xB)$;

15) $\vdash (\forall xA \to \forall xB) \to \exists x(A \to B)$;

16) $\vdash (\exists xA \to \exists xB) \to \exists x(A \to B)$.

2. Чи є істотною умова замкненості формули **A** в теоремі дедукції?

3. Доведіть, що теорія першого порядку $\boldsymbol{T}$ суперечлива тоді й тільки тоді, коли $\boldsymbol{T} \vdash A$ для кожної формули A мови теорії $\boldsymbol{T}$.

4. Нехай A - замкнена формула. Доведіть таке твердження:

– якщо неправильно $\boldsymbol{T} \vdash$A, то $\boldsymbol{T}[A]$ несуперечлива;

– $\boldsymbol{T} \vdash A$ тоді й тільки тоді, коли $\boldsymbol{T}[\neg A]$ суперечлива.

Список літератури

1. *Глушков В. М.* Введение в кибернетику / В. М. Глушков. – К. : Изд-во АН УССР, 1964.
2. *Глушков В. М.* Алгебра, языки, программирование / В. М. Глушов, Г. Е. Цейтлин, Е. Л. Ющенко. – 3-е изд., перераб. и доп. – К. : Наук. думка, 1989.
3. *Єжов І. І.* Елементи комбінаторики / І. І. Єжов, А. В. Скороход, М. Й. Ядренко. – К. : Вища шк., 1972.
4. *Калужнин Л. А.* Введение в общую алгебру / Л. А. Калужин. – М. : Наука, 1973.
5. *Калужнін Л. А.* Алгоритми і математичні машини / Л. А. Калужнін, В. С. Королюк. – К. : Вища шк., 1964.
6. *Кривий С. Л.* Дискретна математика : вибрані питання / С. Л. Кривий. – К. : Вид. дім "Києво-Могилянська акад.", 2007.
7. *Кривий С. Л.* Збірник задач з дискретної математики : вибрані питання / С. Л. Кривий, О. М. Ходзинський. – К. : Бізнесполіграф, 2008.
8. *Кук Д.* Компьютерная математика / Д. Кук, Д. Бейз. – М. : Наука, 1990.
9. *Нікітченко М. С.* Прикладна логіка / М. С. Нікітченко, С. С. Шкільняк. – К. : ВПЦ "Київ. ун-т", 2013.
10. *Нікітченко М. С.* Математична логіка та теорія алгоритмів / М. С. Нікітченко, С. С. Шкільняк. – К. : ВПЦ "Київ. ун-т", 2008.
11. *Кузнецов О. П.* Дискретная математика для инженера / О. П. Кузнецов, Г. М. Адельсон-Вельский. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Энергоатомиздат, 1988.
12. *Трохимчук Р. М.* Дискретна математика / Р. М. Трохимчук. – К. : Вид. дім "Персонал", 2010.
13. *Трохимчук Р. М.* Збірник задач і вправ з дискретної математики / Р. М. Трохимчук. – К. : ВПЦ "Київ. ун-т", 2008.
14. *Трохимчук Р. М.* Збірник задач і вправ з теорії множин і відношень : навч. посіб. / Р. М. Трохимчук. – К. : ВПЦ "Київ. ун-т", 2012.
15. *Хромой Я. В.* Математична логіка / Я. В. Хромой. – К. : Вища шк., 1983.
16. *Хромой Я. В.* Збірник задач і вправ з математичної логіки / Я. В. Хромой. – К. : Вища шк., 1978.

ЗМІСТ