

**М. Б. ГУМЕН, В. М. СПІВАК, С. К. МЕЩАНИНОВ,
Г. Г. ВЛАСЮК, Т. Ф. ГУМЕН**

ОСНОВИ ТЕОРІЇ ПРОЦЕСІВ В ІНФОРМАЦІЙНИХ СИСТЕМАХ

Книга 1

Аналіз детермінованих процесів

**Підручник для студентів
технічних спеціальностей вищих
навчальних закладів**

**Київ
«Кафедра»
2017**

УДК 519.7(075.8)
ББК 22.18я73
Г94

Затверджено Вченою радою Дніпровського
Державного технічного університету, як
підручник для студентів технічних
спеціальностей вищих навчальних закладів
(протокол № 35 від 26 05.2016 р.)

Рецензенти:

Ткачов В. В., завідувач кафедри автоматизації та комп'ютерних систем
державного ВНЗ «Національний гірничий університет»,
д. т. н., професор, заслужений діяч науки і техніки України;
Коваленко О. В., завідувач кафедри радіоелектроніки Дніпропетровського
Національного університету ім.О. Гончара, д.ф.-м.н., професор.

Г94 Гумен М. Б. ОСНОВИ ТЕОРІЇ ПРОЦЕСІВ В ІНФОРМАЦІЙНИХ СИСТЕМАХ:
підручник (у 2-х кн.). Кн.1. Аналіз детермінованих процесів / М. Б. Гумен, В. М.
Співак, С. К. Мещанінов, Г. Г. Власюк, Т. Ф. Гумен. – 2-е вид., зі змінами і доповн. – К:
Кафедра, 2017. – 281 с.

ISBN 978-617-7301-28-7 (заг.)
ISBN 978-617-7301-29-4 (Кн.1)

У підручнику викладено базові аспекти теорії систем, процесів і сигналів, висвітлено ймовірнісні, часові, кореляційні та спектральні характеристики детермінованих процесів і сигналів, особливості характеристик стаціонарних випадкових та модульованих процесів, викладено методи оцінювання перетворень процесів і сигналів різноманітних систем у рамках спектрально-кореляційної теорії процесів. Розглянуто стаціонарні лінійні та нелінійні перетворювачі процесів, що є матеріальними носіями інформації. Дослідження виконано методами часової та частотної областей з використанням часових та спектральних характеристик процесів.

Видання може бути корисним не тільки для студентів вищих навчальних закладів відповідного профілю, а також спеціалістів із проектування та експлуатації інформаційно-вимірювальних та експертних систем, діагностичних комплексів, систем керування складними об'єктами та технологічними процесами неруйнівного контролю, систем передачі та обробки даних, розпізнавання образів тощо.

УДК 519.7(075.8)

ББК 22.18я73
ISBN 978-617-7301-28-7 (заг.)
ISBN 978-617-7301-29-4 (Кн.1)

© Гумен М. Б., Співак В. М.,
Власюк Г. Г., Гумен Т. Ф., 2010
© Гумен М. Б., Співак В. М.,
Мещанінов С. К., Власюк Г. Г.,
Гумен Т. Ф., 2017

ЗМІСТ

Передмова	5
Глава 1 Поняття, класифікація та визначення сигналів, процесів та систем.....	6
1.1 Класифікація процесів і сигналів.....	6
1.2 Математична модель системи, процесу та сигналу.....	17
1.3 Класифікація систем.....	24
1.4 Модульовані процеси та системи.....	38
1.5 Завдання для поточного тестування.....	50
1.5.1 Запитання для поточного контролю.....	50
1.5.2 Задачі для індивідуального та самостійного розв'язування	51
Глава 2 Періодичні процеси та їх спектральні та енергетичні характеристики.....	53
2.1 Загальна оцінка характеристик періодичних процесів.....	53
2.2 Енергетичні характеристики періодичних процесів.....	54
2.3 Спектральний аналіз періодичних процесів.....	60
2.4 Закономірності розподілу потужності в спектрі періодичних процесів.....	77
2.5 Характеристики форми періодичних процесів	83
2.6 Завдання для поточного тестування.....	91
2.6.1 Запитання для поточного контролю.....	91
2.6.2 Задачі для індивідуального та самостійного розв'язування	94
Глава 3 Неперіодичні процеси та їх спектральні та енергетичні характеристики.....	97
3.1 Гармонічний аналіз та синтез неперіодичних процесів.....	97
3.2 Характерні властивості спектральної щільності комплексних амплітуд.....	102
3.3 Взаємозв'язок спектральних та енергетичних характеристик ...	116
3.4 Перетворення процесів і спектрів	129
3.5 Визначення ширини спектрів та тривалості процесів.....	146
3.6 Завдання для поточного тестування.....	160
3.6.1 Запитання для поточного контролю.....	160
3.6.2 Задачі для індивідуального та самостійного розв'язування	163
Глава 4 Кореляційний аналіз процесів.....	166
4.1 Визначення поняття кореляції.....	166
4.2 Кореляційна функція періодичного процесу.....	169

4.3	Взаємні кореляційні функції періодичних процесів.....	177
4.4	Інтегральне перетворення Фур'є взаємної кореляційної функції періодичних процесів.....	181
4.5	Кореляційний аналіз неперіодичних процесів.....	184
4.6	Завдання для поточного тестування.....	197
4.6.1	Запитання для поточного контролю.....	197
4.6.2	Задачі для індивідуального та самостійного розв'язування...	199
Глава 5 Модульовані процеси.....		202
5.1	Модуляція як вид перетворення процесів.....	202
5.2	Амплітудно-модульовані процеси.....	207
5.2.1	Математична модель та основні параметри.....	207
5.2.2	Однотональний амплітудно-модульований процес.....	210
5.2.3	Багатотональний АМ- процес.....	216
5.2.4	Коефіцієнт корисної дії.....	222
5.2.5	Амплітудно-модульовані процеси з подавленою носійною	224
5.2.6	Односмугові амплітудно-модульовані процеси.....	228
5.3	Неперервні процеси з кутовою модуляцією.....	233
5.3.1	Загальні принципи кутової модуляції	233
5.3.2	Математичні моделі процесів із кутовою модуляцією.....	235
5.3.3	Однотональні неперервні КМ-процеси.....	238
5.3.4	Спектральний аналіз та кореляційна функція однотональних вузькосмугових КМ-процесів	242
5.3.5	Спектральні та енергетичні характеристики однотональних КМ- процесів за довільних значень індексу модуляції.....	246
5.3.6	Багатотональна кутова модуляція.....	254
5.3.7	Порівняльна характеристика модульованих процесів.....	256
5.4	Процеси з лінійною частотною модуляцією.....	261
5.5	Завдання для поточного тестування.....	269
5.5.1	Запитання для поточного контролю.....	269
5.5.2	Задачі для індивідуального та самостійного розв'язування	274
Список рекомендованої літератури.....		278

Передмова

Здатність спеціалістів адаптуватися до сприйняття нових технічних рішень та завдань визначається рівнем їх базової підготовки, що формується цілим рядом фундаментальних та професійно-орієнтованих дисциплін. Важливим є і завдання правильно зорієнтувати майбутнього фахівця на стадії вивчення дисциплін фаху та навчити студентів самостійно працювати над вивченням навчальної дисципліни.

Запропонований читачеві підручник «Основи теорії процесів у інформаційних системах» є продуктом плідної співпраці науково-педагогічних працівників Національного авіаційного університету, НТУУ «Київський політехнічний інститут імені Г. Сікорського» та Дніпровського державного технічного університету. Цей підручник відображає майже всі напрямки сучасної та класичної теорій систем, процесів та сигналів і є переробленим та доповненим виданням підручника «Теорія процесів інформаційних систем» за загальною редакцією академіка НАН України М. З. Згуровського видавництва «Освіта України» 2010 року.

У книзі 1 «Аналіз детермінованих процесів» цього підручника в доступній формі висвітлені класичні розділи теорії детермінованих процесів та сигналів і особливості та практична значимість їхніх спектральних та кореляційних характеристик.

При поданні матеріалу та його підборі автори намагалися звести математичні викладки до мінімально необхідних і довести проблему, що розглядається, до розуміння усіма студентами, але з різним рівнем підготовки, зрілості та інтересів.

Не менш важливе завдання - спонукати читача до самостійної творчої роботи. З цією метою у підручнику наведено велику кількість прикладів і графічних ілюстрацій, які акцентують увагу на особливостях проблем, підходів до їх вирішення та дають змогу читачеві самостійно розібратися в них. У кожному пункті наведені висновки, які призвані сконцентрувати його увагу на ключових ідеях, принципах та результатах.

Для засвоєння матеріалу підручника студентам необхідно оволодіти знаннями із загальнонаукових дисциплін, передусім з вищої математики, фізики і теорії електричних кіл.

Безумовно підручник не охоплює, власне і не міг охопити, всіх аспектів теорії детермінованих процесів і сигналів. Тому користуватися ним рекомендується паралельно з прослуховуванням лекцій, роботою на практичних та лабораторних заняттях, самостійним опрацюванням відповідних тем за різними посібниками і підручниками, список яких подається.

1 Поняття, класифікація та визначення сигналів, процесів та систем

1.1 Класифікація процесів і сигналів

Принципи класифікації. Основою класифікації процесів є три основних принципи, кожний з яких ґрунтується на

- виділенні істотних властивостей математичних моделей процесів і сигналів;
- можливості точно передбачити миттєві значення процесу чи сигналу в будь-які моменти часу або однозначно визначити значення його параметрів;
- характері розвитку в часі (в необхідних випадках і просторі) фізичного явища, що є матеріальним носієм інформації.

Згідно з першим принципом розрізняють *одновимірні й багатовимірні, періодичні й неперіодичні, дійсні та комплексні* процеси і сигнали, з другим – *детерміновані й випадкові*, з третім – *неперервні, дискретні та цифрові процеси і сигнали*.

Дійсні та комплексні процеси і сигнали. Миттєві значення процесу чи сигналу (функціональні залежності, що їх описують) можуть бути як дійсними, так і комплексними величинами. Отже, йдеться про дійсні та комплексні моделі. У деяких випадках один і той самий процес чи сигнал можна описувати як дійсною, так і комплексною функціями. Використання того чи іншого способу залежить від математичної доцільності. Так, струм генератора гармонічних коливань можна описати дійсною $i(t) = I_m \cos(\omega t + \alpha_i)$ та комплексною $i(t) = \dot{I}_m e^{j\omega t}$ моделями. Проте деякі процеси і сигнали можна описувати тільки з використанням комплексних функцій дійсного аргументу.

- ◆ **Комплексними є процеси і сигнали, математична модель яких задається у вигляді комплексної функції дійсного аргументу.**

Для зображення процесів і сигналів у комплексній формі в інженерній практиці широко застосують **перетворення Гільберта**. Згідно з цим перетворенням будь-якому дійсному процесу (сигналу) $s(t)$ може відповідати комплексний процес (сигнал):

$$\bullet z(t) = s(t) + j\tilde{s}(t) = S_m(t)e^{j\psi(t)} = \sqrt{s^2(t) + \tilde{s}^2(t)} e^{j \arctg \frac{\tilde{s}(t)}{s(t)}}, \quad (1.1)$$

де дійсний $s(t)$ та спряжений йому процес (сигнал) $\tilde{s}(t)$ задовольняють перетворенню Гільберта:

$$\tilde{s}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\lambda)}{t - \lambda} d\lambda; \quad s(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{s}(\lambda)}{t - \lambda} d\lambda. \quad (1.2)$$

Процес (сигнал) $\bullet z(t)$ називається **аналітичним**, а його модуль

$$S_m(t) = |\bullet z(t)| = \sqrt{s^2(t) + \tilde{s}^2(t)} \quad (1.3)$$

та аргумент

$$\psi(t) = \arctg[\tilde{s}(t) / s(t)] \quad (1.4)$$

відповідно **обвідною** та **повною фазою** довільного дійсного процесу (сигналу) $s(t)$.

Похідна від повної фази за часом

$$\omega(t) = \frac{d}{dt} \arctg \frac{\tilde{s}(t)}{s(t)} = \frac{\tilde{s}'(t)s(t) - s'(t)\tilde{s}(t)}{s^2(t) + \tilde{s}^2(t)} \quad (1.5)$$

є **миттєвою частотою** процесу (сигналу) $s(t)$.

На комплексній площині аналітичний процес і сигнал зображуються радіусом-вектором, довжина якого є модулем аналітичного процесу чи сигналу, а

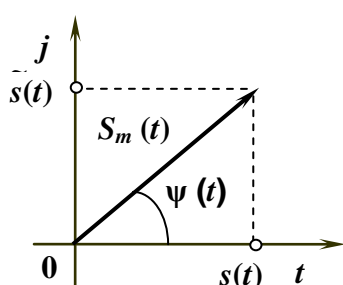


Рисунок 1.1– Геометрична інтерпретація аналітичного сигналу.

кут нахилу до дійсної осі – його аргументом. Як модуль, так і кут нахилу радіус-вектора є функцією часової змінної. У цьому разі проекція вектора на дійсну вісь дає миттєве значення процесу чи сигналу $s(t)$, а на уявну вісь – спряженого $\tilde{s}(t)$ (рис. 1.1).

Неважко встановити, що гармонічному процесу в косинусній формі $s_1(t) = \cos \omega t$ відповідає спряжений процес $\tilde{s}_1(t) = \sin \omega t \text{sign}(\omega)$, а в синусній - $s_2(t) = \sin \omega t \rightarrow \tilde{s}_2(t) = -\cos \omega t \text{sign}(\omega)$, де функція $\text{sign}(\omega)$ є знаковою і додатною для всіх значень $\omega > 0$ та від'ємною, коли $\omega < 0$.

► **Приклад.** Гармонічному процесу $s(t) = S_m \cos(\omega_0 t + \alpha_s)$ відповідає спряжений $\tilde{s}(t) = S_m \sin(\omega_0 t + \alpha_s)$. Обвідна заданого дійсного початкового гармонічного процесу $S_m(t) = |\dot{z}(t)| = \sqrt{s^2(t) + \tilde{s}^2(t)} = S_m$ є сталою і дорівнює його амплітуді. Повна фаза $\psi(t) = \arctg[\tilde{s}(t)/s(t)] = \omega_0 t + \alpha_s$, а миттєва частота $\omega(t) = \omega_0$.

Отримані за перетворенням Гільберта значення обвідної, повної фази та миттєвої частоти збігаються з параметрами комплексних миттєвих значень гармонічних коливань, які ґрунтуються на понятті “комплексна амплітуда”. Справді, гармонічному процесу $s(t) = S_m \cos(\omega_0 t + \alpha_s)$ відповідає аналітичний процес

$$\dot{z}(t) = s(t) + j\tilde{s}(t) = S_m(t) \cos(\omega_0 t + \alpha_s) + j S_m \sin(\omega_0 t + \alpha_s) = \dot{S}_m e^{j\omega_0 t},$$

де $\dot{S}_m e^{j\omega_0 t} = \dot{z}(t)$ і є комплексне миттєве значення заданого гармонічного процесу.

◆ **Комплексне миттєве значення гармонічного процесу чи сигналу (його символічне зображення) є окремим випадком комплексного зображення на основі перетворення Гільберта, справедливого для будь-яких негармонічних процесів і сигналів.**



Одно- та багатовимірні процеси і сигнали. Типовими прикладами одновимірного процесу є зміна температури повітря, наприклад, в аудиторії, напруги на виході підсилювача, потоку рідини в системі водозабезпечення тощо. Характерною особливістю таких

процесів є те, що всі вони описуються однією функцією часу. Ці процеси називають **одновимірними**.

Багатовимірний процес чи сигнал $s(t) = \{s_1(t), s_2(t), \dots, s_n(t)\}$ є сукупністю одновимірних $s_1(t), s_2(t), \dots, s_n(t)$. Ціле число n називають розмірністю такого процесу і сигналу. Важливо зазначити, що багатовимірний процес і сигнал є *упорядкованою сукупністю* одновимірних, тобто багатовимірні процеси і сигнали з різним порядком слідування компонентів - різні. Зокрема, $\{i_1, i_2\} \neq \{i_2, i_1\}$. Поняття "багатовимірний процес чи сигнал" доцільно застосовувати тоді, коли системи аналізуються *машинними методами* за допомогою комп'ютера.

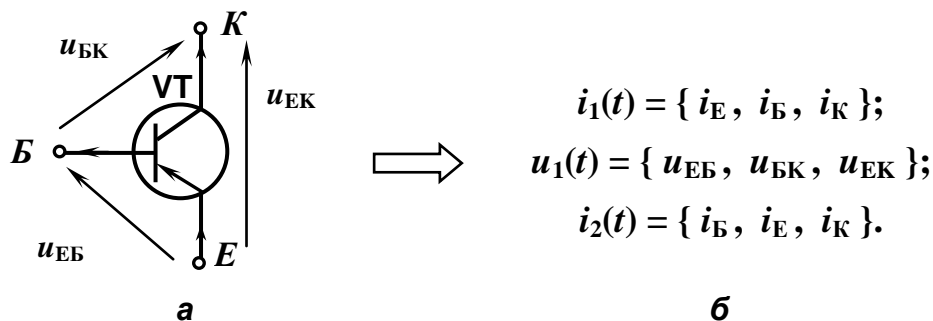


Рисунок 1.2 - Біполярний транзистор (а) та відповідні багатовимірні сигнали (б).

Проілюструвати це поняття можна на прикладі системи струмів та напруг на виводах біполярного транзистора (рис. 1.2). Певною мірою багатовимірним відносно реалізацій є випадковий процес.

Періодичні і неперіодичні процеси і сигнали. Такі процеси і сигнали дуже поширені при дослідженні інформаційних систем.

- ♦ **Періодичним у часі називається нескінченно подовжений процес чи сигнал, миттєві значення якого повторюються через однаковий проміжок часу.**

Співвідношення

$$s(t) = s(t + T), \quad \forall t \tag{1.6}$$

є **умовою періодичності** довільного процесу чи сигналу $s(t)$. Символ $\forall t$ означає справедливість умови для всіх допустимих значень часової змінної t (рис. 1.3). Найменшу сталу величину T , що задово-

льняє умову (1.6), називають **періодом** процесу і сигналу, а величину $f=1/T$, обернену періоду, яка відповідає числу періодів за одиницю часу – **циклічною частотою**.

У системі СІ циклічна частота виражається в **герцах**: [1Гц=1/с]. На практиці застосовують також кратні одиниці виміру частоти: **кілогерц** (кГц), **мегагерц** (МГц) і **гігагерц** (ГГц).

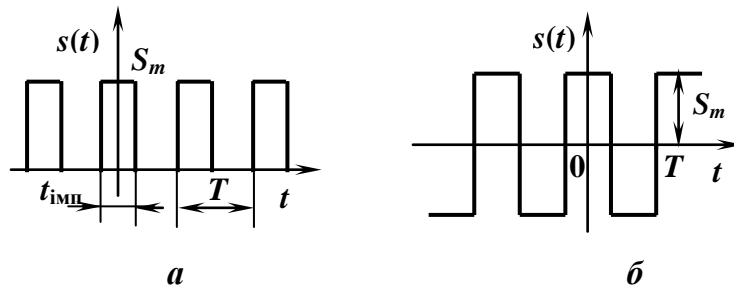


Рисунок 1.3 – Приклади періодичних процесів і сигналів:
а – періодична послідовність імпульсів; б – процес типу “меандр”.

► **Приклад. Гармонічний процес і сигнал.** Це один із важливих, з практичного погляду, представників періодичних процесів і сигналів, для яких математична модель задовольняє умову періодичності (1.6) і подається у синусній або косинусній формах:

$$s_1(t) = S_{m1} \cos(\omega t + \alpha_1); \quad s_2(t) = S_{m2} \sin(\omega t + \alpha_2),$$

де S_m - амплітудне (максимальне) значення, ω - кутова частота $\omega = 2\pi/T$, рад/с, f - циклічна частота $f = 1/T$, Гц; α_1, α_2 - початкова фаза. Кутова частота дорівнює швидкості зміни в часі фази (аргументу) гармонічної функції і є основним атрибутом тільки гармонічного коливання.

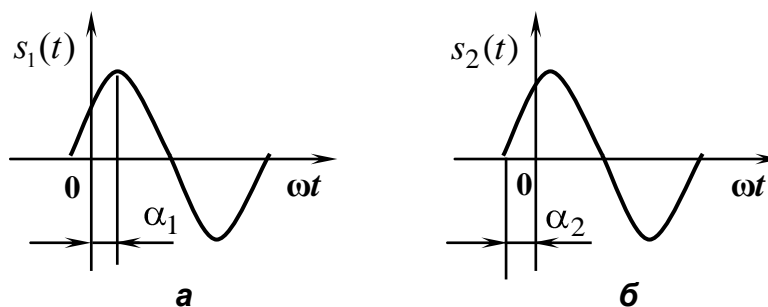


Рисунок 1.4 - До визначення початкової фази гармонічного коливання: а - косинусна форма; б – синусна форма.

Для косинусної форми початкова фаза α_1 - абсциса відстані від осі ординат до найближчого додатного максимуму. Якщо цей максимум розміщується праворуч від осі ординат, то початкова фаза $\alpha_1 < 0$, якщо ліворуч, то $\alpha_1 > 0$. На рис. 1.4, а початкова фаза $\alpha_1 < 0$.

Якщо процес чи сигнал описується синусною функцією, то початкова фаза α_2 - абсциса найближчої точки перетину з віссю абсцис графіка функції при його переході з від'ємної напівхвилі до додатної. Значення абсциси, а отже, початкової фази вважають додатним, коли така точка розміщується ліворуч від осі ординат, і від'ємним – якщо праворуч. Для гармонічного коливання, зображеного на рис. 1.10, б, $\alpha_2 > 0$.

Різницю початкових фаз двох гармонічних коливань називають **зсувом фаз** і, як правило, позначають через φ . Якщо $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1 > 0$, то вважають, що друге коливання випереджає перше або перше відстає від другого на φ градусів чи радіан.

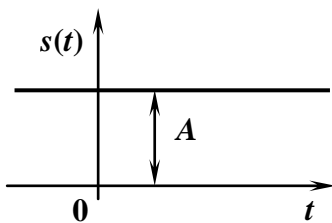


Рисунок 1.5 –
Постійний процес.

Для $\varphi = 0$ - процеси чи сигнали називають *синфазними*; коли $\varphi = +90^\circ$ чи -90° , вони знаходяться у *квадратурі*, а якщо $\varphi = \pm 180^\circ$ - у *протифазі*. ■

► **Приклад.** *Постійний процес і сигнал* (рис. 1.5). Єдиний параметр постійного процесу і сигналу – амплітуда A є величиною сталою і відображає його миттєві значення у будь-який момент часу. Постійний процес і сигнал можна вважати різновидом періодичного процесу і сигналу нескінченного періоду чи нульової частоти. ■

Періодичні, як і нескінченно подовжені в часі, процеси і сигнали певною мірою є ідеалізацією реальних, які характеризуються скінченною тривалістю. Тому вони не є періодичними.

Процес і сигнал вважають неперіодичним, якщо умова (1.6) для мате-матичної моделі такого процесу не виконується. Різновидом неперіодичних процесів і сигналів є імпульсні.

◆ **Процес чи сигнал називається імпульсним, якщо його миттєві значення досить малі за межами деякого часового інтервалу - тривалості імпульсу.**

Отже, імпульсні процеси і сигнали існують лише в межах певним чином визначеного проміжку часу. Інакше кажучи, миттєві зна-

чення таких процесів і сигналів дуже малі в будь-якій точці часової осі, за винятком її деякої скінченної області.

Серед імпульсних процесів і сигналів особливе місце належить *відео-* та *радіоімпульсам*.

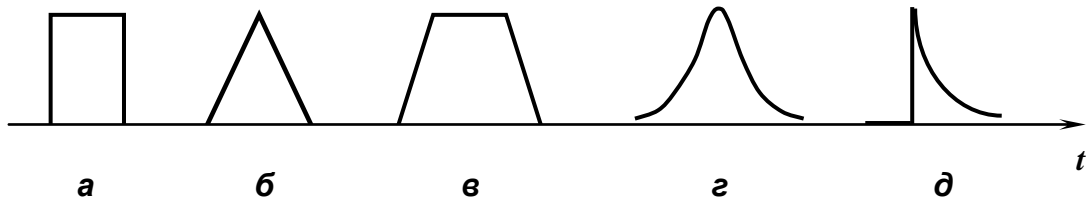


Рисунок 1.6 - Види відеоімпульсів: а - прямокутний; б - трикутний; в - трапецієподібний; г - імпульс Гауса; д – експонентний.

Відео- та радіоімпульси. Характерною особливістю відеоімпульсів є їхній порівняно повільний розвиток як у часі, так і просторі. Внаслідок цього спектри відеоімпульсів містять низькочастотні (НЧ) складові. Відеоімпульси, відповідають можливостям органів чуття людини, які можуть реагувати на досить повільну зміну стану подразників. Так, органи слуху реагують на подразнення з частотою від 20 Гц до 20 кГц, зору – одиниці мегагерц.

Математичні моделі відеоімпульсів графічно зображують у формі прямокутника, трапеції, тощо (рис. 1.6). Тому розрізняють відповідно прямокутний, трапецієподібний імпульси.

Якщо поза межами тривалості імпульсу його миттєві значення дорівнюють нулю, то такий процес описується *фінітною функцією* (рис. 1.6, а - в).

У деяких випадках відеоімпульс передається безпосередньо по каналу зв'язку, а в інших - він попередньо перетворюється в високочастотне коливання, як правило, гармонічної форми з миттєвими значеннями, що змінюються в часі за законом відеоімпульсу.

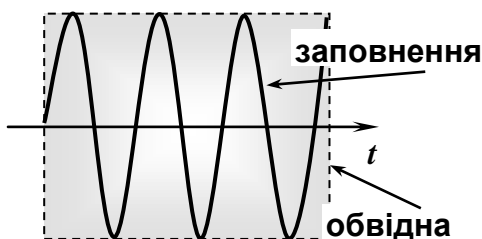


Рисунок 1.7 - Прямокутний радіоімпульс.

Якщо $s_B(t)$ – математична модель відеоімпульсу, то радіоімпульс, що йому відповідає, описується функцією $s_p(t) = s_B(t) \cos(\omega_{ВЧ}t + \varphi_{ВЧ})$. Тоді $s_B(t)$ називають *обвідною* радіоімпульсу, а $\cos(\omega_{ВЧ}t + \varphi_{ВЧ})$ - його *заповненням*, частота якого $\omega_{ВЧ} \gg \omega_{max}$ і $\varphi_{ВЧ}$ - початкова фаза, де – ω_{max} є максимальною частотою в спектрі відеоі-

мпульсу.

мпульсу. Слід зауважити, що на відміну від відеоімпульсу графік радіоімпульсу (див. рис. 1.7) є симетричним відносно осі абсцис.

Важливе значення в теоретичних дослідженнях систем відіграють **одиничний ступінчастий** та **одиничний імпульсний процеси і сигнали**. Насправді такі процеси і сигнали не існують, а визначаються як граничні форми інших і не відповідають повною мірою означенню імпульсних процесів і сигналів.

► **Приклад.** *Одиничний ступінчастий процес і сигнал.* Математичну модель такого процесу і сигналу

$$s(t) = \sigma(t) = 1(t) \Rightarrow \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 0,5 \text{ чи } 1, & t = 0; \\ 1, & t > 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

записують з використанням функції Хевісайда або сигма-функції $\sigma(t) = 1(t)$. Його графічне зображення подано на рис. 1.8, а. Такий процес можна отримати на виході джерела постійного струму чи напруги за його миттєвої комутації в момент часу $t=0$.

◆ **Перехідна характеристика $h(t)$ лінійної системи** – це її реакція за нульових початкових умов на одиничний ступінчастий процес чи сигнал.

Отже, за умови, що

$$x(t) = \sigma(t) \Rightarrow y(t) = F\{\sigma(t)\} = h(t).$$

Для систем, які фізично реалізуються, перехідна характеристика $h(t)=0$ для всіх $t < 0$. Інакше кажучи, реакція зазначеної системи не може відбутися раніше моменту прикладання дії до неї.

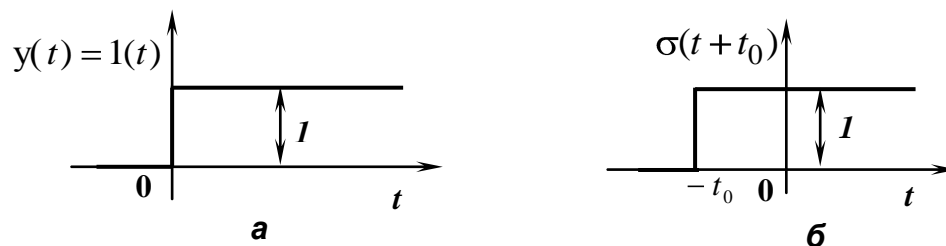


Рисунок 1.8 - Одиничний ступінчастий процес і сигнал (а) та його зсунута копія (б).

Одиничний ступінчастий процес і сигнал $\sigma(t)$ можна розглядати як граничну форму, наприклад, дійсного експонентного процесу і сигналу $\tilde{\sigma}(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} e^{-\alpha t}$ для всіх додатних значень часової змінної і за умови, що $\alpha < 0$.



► Приклад. *Одиничний імпульсний процес і сигнал, або дельта-імпульс*, аналітично описується функцією Дірака $\delta(t)$, тому його ще називають *імпульсом Дірака*. Дельта-імпульс $\delta(t)$ - це процес чи сигнал, миттєві значення якого дорівнюють нулю, якщо аргумент $t \neq 0$, а $\delta(t) = \infty$, якщо $t = 0$ (рис. 1.9, а).

Слід зазначити, що наведений математичний опис не досить точний, тому важливо з'ясувати, для чого призначені такі імпульси.

Одиничний імпульсний процес і сигнал характеризуються такими особливостями:

- *площа, обмежена графіком такого імпульсу, дорівнює одиниці, тобто*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\lambda) d\lambda = 1;$$

- *інтеграл від добутку дельта-функції на деяку іншу дорівнює значенню цієї іншої функції для значення аргументу, що визначається моментом прикладання дельта-імпульсу:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \delta(\lambda) d\lambda = f(0).$$

Це рівняння відображає *стробувальну, фільтрувальну* чи *пінцетну властивість* імпульсу Дірака, або функції Дірака.

Дельта-імпульс виду $s(t) = A\delta(t)$ характеризується площею A :

$$\int_{-\infty}^{\infty} A\delta(\lambda) d\lambda = A.$$

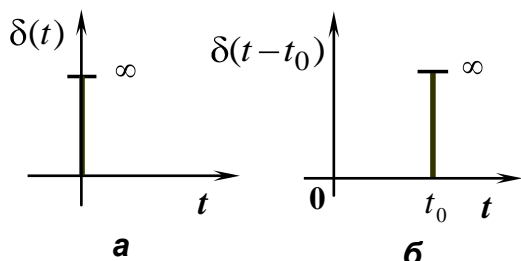


Рисунок 1.9 - Дельта - імпульс (а) та його зміщена копія (б).

Зміщений вправо на величину t_0

дельта-імпульс (рис. 1.9, б) зображається математичною моделлю

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty, & t = t_0; \\ 0, & t \neq t_0. \end{cases}$$

Відповідно до стробувальної властивості інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \delta(\lambda - t_0) d\lambda = f(t_0),$$

тобто дорівнює значенню функції f для моменту часу, де зосереджений (прикладається) дельта-імпульс $\delta(t - t_0)$.

- ◆ Отже, *множення дельта-функції на довільну змінює площу функції Дірака, яка тепер визначається значенням довільної функції часового аргументу в момент прикладання дельта-функції.*

Так, якщо площа імпульсу $\delta(t - t_0)$ - одиниця, то площа $f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0)$ буде $f(t_0)$.

Ще одне істотне зауваження: *інтегрування добутку відповідно до стробувальної властивості дельта-функції дає відлікове (дискретне) значення $f(t_0)$ функції $f(t)$.*

У теорії систем, важливою математичною операцією є **операція згортання** двох функцій (процесів і сигналів, які описуються функціями), наприклад, $f_1(t)$ і $f_2(t)$:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^t f_1(\lambda) f_2(t - \lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^t f_1(t - \lambda) f_2(\lambda) d\lambda.$$

Якщо однією з цих функцій узяти функцію Дірака, то відповідно до стробувальної властивості операція згортки дає такий результат:

$$f(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^t f(\lambda) \delta(t - \lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^t f(t - \lambda) \delta(\lambda) d\lambda = f(t).$$

- ◆ *Згортання функції Дірака з будь-якою іншою функцією відтворює (поновлює) цю іншу функцію.*



► **Приклад.** *Періодичну послідовність дельта-імпульсів аналітично описують вибірковою функцією* виду

$$\delta_{\Pi}(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(t - iT) = \delta(t) + \delta(t - T) + \dots + \delta(t - kT) + \dots$$

Помножимо довільну неперервну функцію $f(t)$ на вибірккову. В результаті отримаємо також періодичну послідовність дельта-імпульсів із періодом T , але кожен із них матиме іншу площу, яка дорівнює миттєвому значенню початкової функції в моменти відліку $-kT, \dots, -2T, -T, 0, T, 2T, \dots, kT, \dots$:

$$f(t)\delta_{\Pi}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(t)\delta(t - kT) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\delta(t - kT).$$

Ця операція є операцією відліку значень неперервної функції в моменти виникнення дельта-імпульсів. Її практична реалізація дає змогу подавати неперервне коливання сукупністю його відлікових (дискретних) значень в моменти часу, визначених у певний спосіб. Таку операцію називають **дискретизацією в часі**, а результат її застосування - **дискретним процесом чи сигналом**.



Розглянуті приклади хоча і розкривають особливі властивості одиничного імпульсного процесу і сигналу, проте не виявляють найголовнішу:

- ♦ **реакцію лінійної системи на одиничний імпульсний процес чи сигнал за умови, що її початкові запаси енергії дорівнюють нулю, називають імпульсною характеристикою $g(t)$ системи.**

Отже, якщо дія $x(t) = \delta(t)$, то реакція $y(t) = F\{x(t)\}$ лінійної системи, що не збуджена попередньо і не має внутрішніх запасів енергії, є її імпульсною характеристикою $g(t) = F\{\delta(t)\}$.

Імпульсну та перехідну характеристики часто називають **часовими характеристиками** лінійної системи, які визначають її властивості у часовій області.

Для систем, що фізично реалізуються, імпульсна характеристика $g(t)=0$, коли $t < 0$.

Між одиничними імпульсним та ступінчастим процесами і сигналами існує взаємний однозначний зв'язок:

$$\delta(t) = \frac{d\sigma(t)}{dt}; \quad \sigma(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\lambda) d\lambda .$$

1.2 Математична модель системи, процесу та сигналу

Загальні положення. Поняття “*система*”, “*процес*” і “*сигнал*” вживаються дуже часто, майже в усіх сферах діяльності людини.

Слово “процес” у перекладі з латинської “*processus*” означає просування. Серед розмаїття смислового значення поняття “процес”, наведемо таке:

- ◆ **Процес – це послідовна зміна етапів, яких-небудь явищ, дій, команд тощо.**

Для систем передавання, приймання, накопичення, збереження та перетворення інформації поняття “процес” пов’язане з такими поняттями як *інформація*, “*повідомлення*” та “*сигнал*”.

Під інформацією зазвичай розуміють сукупність відомостей про будь-які події, явища та предмети, що нас оточують. Такі відомості стають доступними, можуть передаватися або зберігатися, якщо вони подані в певній формі. Наприклад, тексту телеграми чи листа; голосу людини; звучання оркестру, сирени; зображення на екрані монітора тощо. Все це і є повідомлення.

Передавання повідомлень на відстань, а значить і інформації, як сукупності знаків чи символів, що утворюють деяку форму, збереження повідомлень можливе тільки за допомогою деякого матеріального носія (бумаги, магнітної плівки тощо) чи фізичного процесу, зокрема, коливання часток повітря навколо музикального інструменту, мікрофону, в гортані людини; переміщення та взаємодії електричних зарядів у газах, рідинах та твердих тілах, поширення електромагнітних хвиль.

- ◆ **Будь-які фізичні процеси чи різноманітні стани фізичних об'єктів, що відображають повідомлення, називають сигналом.**

Слово **“система”** в перекладі з грецької **“system”** означає ціле, складене з частин; з'єднання. Найбільш узагальненим визначенням системи є таке:

- ◆ **система – це сукупність закономірно зв'язаних один з одним та взаємно-обумовлених елементів, що є відповідним цілісним утворенням.**

Отже, визначальним для системи є наявність відповідних відносин та зв'язків між її елементами. Серед різноманітних типів систем, наприклад, біологічних, механічних, абстрактних тощо предметом наших інтересів будуть інформаційні системи, елементи яких виявляють відносини один до одного через таку загальну функцію, як наприклад, реєстрація, збереження та перетворення інформації.

Систематичне дослідження систем, процесів і сигналів, їх вивчення можливе на основі емпіричного чи фізичного підходів або їх поєднання. Слід підкреслити, що обидва підходи є рівноцінними, доповнюють один одного. У той же час, виходячи з цілого ряду суттєвих чинників, доцільно застосовувати теоретичний підхід, що ґрунтується на **принципі математичного моделювання** і передбачає вивчення об'єкта на основі його **математичної моделі**.

Головними з таких чинників є:

- **неможливість проведення експерименту з різних причин (економічних, технічних тощо);**
- **абстрагування від конкретної природи носія повідомлення та системи, в зв'язку з тим, що одна і та ж модель у рівній мірі може відображати, наприклад, струм, натяг магнітної плівки, систему зв'язку чи систему контролю за рухом літаків;**
- **відображення тільки тих властивостей об'єкта, які об'єктивно є найбільш важливими в конкретному випадку, ігноруючи велику кількість другорядних;**
- **передбачення чи прогнозування результатів у нестабільних, різнофакторних умовах.**

Математичні моделі дозволяють також проводити класифікацію систем, процесів і сигналів, порівнювати їх між собою, встановлювати тотожність чи несхожість, а в кінцевому підсумку систематизовано їх вивчати.

- ◆ **Математична модель** – сукупність математичних елементів (числа, змінні, вектори, множини тощо) і відношень між ними (рівняння, графіки, функції), яка адекватно відображає властивості досліджуваного об'єкта (технічної системи, процесу) з урахуванням поставлених під час його вивчення та дослідження завдань.

Вивчати системи, процеси та сигнали можна ґрунтуючись на так званому **детерміністичному** та **статистичному підходах**. Основу останнього складають, як відомо, ідеї та методи теорії ймовірностей, математичної статистики, випадкових процесів. Статистичний підхід до розв'язування задач збереження, перетворення, передачі інформації в системах та пристроях зв'язку різного призначення є об'єктивною реальністю і дає змогу не тільки краще зрозуміти проблему, а і використовувати отримані результати для розробки нової високоякісної апаратури.

Ось чому предметом наших інтересів бідуть такі основні питання:

- ***властивості та характеристики процесів, як матеріальних носіїв інформації, а також принципи їх математичного опису;***
- ***властивості та математичні моделі фізичних систем, що виконують різноманітні перетворення над процесами і сигналами;***
- ***ідеї та методи аналізу перетворень процесів і сигналів у системах зв'язку різного призначення.***

Математична модель процесу і сигналу. Будь-яке фізичне явище розвивається в просторі та часі. Ось чому математична модель процесу, в тому числі, що відображає повідомлення (сигнал), в загальному визначенні є функціональною залежністю з часовим t та простором l аргументами. В подальшому такі залежності ми будемо позначати, як правило, латинськими літерами: $s(t, l)$; $y(t, l)$; $u(t, l)$; $i(t, l)$; $z(t, l)$ тощо.

Модель з двома аргументами t, l є ознакою провідних ліній зв'язку, процесів на поверхні твердих тіл (акустичні хвилі), радіохвиль тощо. Однак, у більшості випадків процес або сигнал може бути ототожнений із явищем, яке розвивається тільки в часі. У цьому разі функціональна залежність включає тільки один аргумент t , а інший l опускається. Наприклад $u_{\text{вх}}(t)$ – напруга на вході підсилювача, струм підмагнічування магнітної головки, звуковий тиск на мембрану мікрофона тощо.

► **Приклад.** Гармонічний процес (рис.1.1, а) подається тригонометричною функцією в косинусній формі:

$$s_1(t) = S_m \cos(\omega_1 t + \alpha_1).$$

Основними параметрами такого процесу є амплітуда S_m , початкова фаза α_1 , кутова ω_1 (циклічна f_1) частота або період $T_1 = 1/f_1 = 2\pi/\omega_1$.

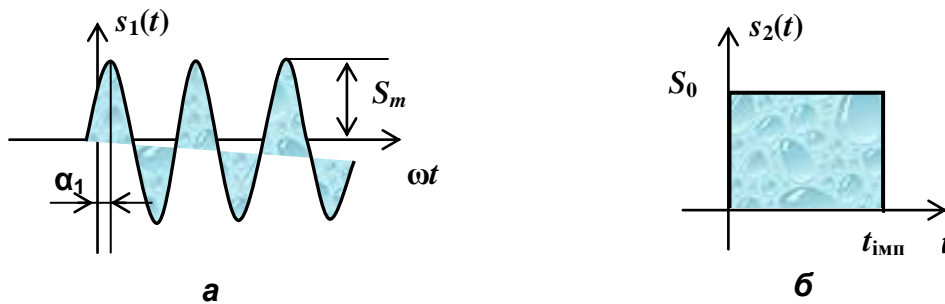


Рисунок 1.10 - Гармонічний (а) та імпульсний процеси (б).

► **Приклад.** Процес у вигляді прямокутного імпульсу (рис. 1.10, б) описується функцією

$$s_2(t) = \begin{cases} S_0, & 0 \leq t \leq t_{\text{имп}}; \\ 0, & t \geq t_{\text{имп}}, \quad t < 0. \end{cases}$$

Серед параметрів виділимо максимальне значення S_0 та тривалість імпульсу $t_{\text{имп}}$.



Ці приклади показують, що математична модель процесу і сигналу визначається не тільки видом функціональної залежності, але і деякими основними параметрами, що відбивають їхні властивості.

Узагальнена форма математичної моделі процесу і сигналу є такою:

$$s(t, l) = s(t, l; a_1, \dots, a_n), \quad (1.8)$$

де через a_1, a_2, \dots, a_n позначені параметри процесу і сигналу.

♦ **Значення, яке приймає процес і сигнал у поточний (дискретний) момент часу, називають миттєвим значенням процесу і сигналу.**

Так, на рис. 1.11 $s(t_1), s(t_2)$ – миттєві значення процесу $s(t)$ довільної форми, що відповідають моментам часу t_1 та t_2 відповідно.

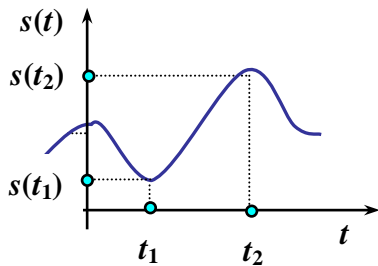


Рисунок 1.11 - Миттєві значення процесу.

Очевидно, що для повного опису процесу і сигналу слід вказувати не тільки вид функціональної залежності, його основні параметри, а і область можливих (допустимих) значень функції (миттєвих значень) та її аргументу.

Так, у вищенаведеному прикладі гармонічного процесу (рис. 1.10, а), його миттєві значення можуть бути будь-якими в діапазоні $[-S_m, S_m]$, в той же час для іншого процесу $s_2(t)$ (рис. 1.10, б) характерна точна визначеність його миттєвих значень: 0 або S_0 .

Математична модель системи. Як би не різнились системи (зв'язку, керування, радіомовлення, телебачення тощо), в їх структурі завжди можна виділити місця прикладання корисних процесів, які підлягають перетворенню, а також точки системи звідки перетворені процеси поступають для подальших операцій над ними. Перші, як відомо, називаються **входами**, другі – **виходами системи**. Відповідно процеси на вході – **діючими, вхідними, збуджуючими**, а на виході – **вихідними, реакціями, відгуками**.

Зазначимо, що на систему діють небажані процеси різноманітної природи (**завади**), які є причиною спотворення корисних процесів, а значить, і закладеної в них інформації. Природа завад також різна. Так, запис на одній доріжці магнітної плівки можна вважати завадою по відношенню до запису іншої при відтворенні звуку чи зображення; атмосферні явища, які впливають, зокрема, на якість зображення на екрані телевізора тощо. Звичайно кількість вхідних та вихідних процесів, а також завад може бути довільною.

У подальшому будемо використовувати такі позначення:

$$x(t) = X(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$$

- для сукупності вхідних процесів і сигналів;

$$y(t) = Y(t) = \{y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)\}$$

- для реакцій;

$$\eta(t) = H(t) = \{\eta_1(t), \eta_2(t), \dots, \eta_k(t)\}$$

- для завад.

Характер перетворень діючих процесів і сигналів, вид реакцій на них визначається властивостями системи (структурою, початковим станом, кількістю елементів та їхніми параметрами тощо), які в загальному випадку можемо виразити так званим **системним оператором** F . Цей оператор і відображає зв'язок між діями (корисні процеси $x(t)$ і завади $\eta(t)$) та реакціями $y(t)$ системи:

$$y(t) = F[x(t); \eta(t)]. \quad (1.9)$$

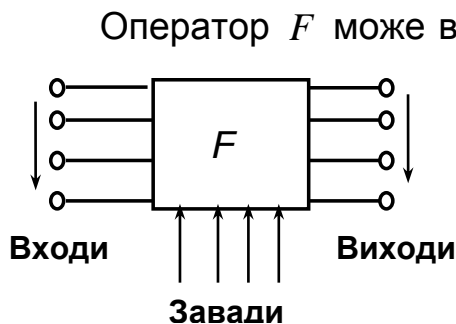


Рисунок 1.12 - Узагальнена структура системи.

Оператор F може включати операції інтегрування, додавання, задаватись ймовірнісною функцією, бути постійною величиною, алгебраїчним тощо.

Для повного математичного опису системи окрім оператора F слід вказати області D_x можливих вхідних та D_y вихідних процесів (сигналів). У найпростішому випадку визначення цих областей зводиться до того, що встановлюється характер вхідних і вихідних процесів і сигналів, які можуть бути неперервними чи дискретними, детермінованими чи випадковими тощо.

Таким чином,

- ◆ **математична модель системи - це опис (1.9) разом з допустими областями D_x та D_y .**

Графічно систему подають “чорною скринькою” (рис.1.12).

► **Приклад.** Послідовний електричний коливальний контур збуджується гармонічним процесом $x(t) = X_m \cos(\omega t + \alpha)$. Реакція контуру $y(t)$ на таке збудження є розв’язком диференційного рівняння:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{dy(t)}{dt} + \omega_{\text{рез}}^2 y(t) = \omega_{\text{рез}}^2 x(t).$$

Тоді,

D_x – електрична напруга гармонічної форми з амплітудою X_m , частотою ω та початковою фазою α ;

D_y - електрична напруга на ємнісному елементі в усталеному режимі роботи контура, також гармонічна з параметрами U_{mC} , ω та α_C ;

F – оператор диференціювання, додавання, множення.



► **Приклад.** Інтегруюча система, властивості якої визначаються імпульсною характеристикою $g(t) = \alpha e^{-\alpha t}$, збуджується прямокутним відеоімпульсом (рис. 1.10, б). Реакція системи на таке збудження обчислюється за інтегралом Дюамеля або згортки:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t g(t - \lambda)x(\lambda)d\lambda.$$

Отже, у цьому разі: F – операція згортки; D_x - неперервний відеоімпульс; D_y - неперервний процес довільної форми.



► **Приклад.** Деяка система перетворює одновимірний аналоговий процес за таким законом:

$$y(t) = 15dx(t) / dt.$$



Рисунок 1.13 - Функціональна схема системи.

Тоді, системний оператор: $F = 15 \cdot d / dt$. Цьому виразу можна поставити у відповідність структурну схему, що утворена каскадним з'єднанням ідеального підсилювача і диференціатора (рис. 1.13).



ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. Емпіричний та фізичний



Слід запам'ятати:

1. Визначення понять: мате-

підходи до систематизованого вивчення систем, процесів і сигналів є рівноцінними.

2. Математична модель процесу і сигналу визначається як функціональною залежністю, так і певними параметрами, що відображають його властивості.

3. Характер перетворень дій, вид реакцій на них визначається властивостями системи.

4. Для повного математичного опису системи крім системного оператора слід зазначити області можливих вхідних та вихідних сигналів.



Треба вміти:

1. Визначити поняття: математична модель системи, процесу і сигналу, миттєве значення процесу і сигналу.

2. Визначити основні параметри гармонічного сигналу та прямокутного відеоімпульсу за їхніми математичними моделями.

матична модель системи, процесу і сигналу, миттєве значення процесу і сигналу.

2. Основні чинники, що визначають доцільність використання математичних моделей під час дослідження систем, процесів і сигналів

3. Повним описом процесу і сигналу є певна функціональна залежність, їхні основні параметри, область можливих значень функції та її аргументів.

4. Основними параметрами гармонічного процесу чи сигналу є амплітуда, початкова фаза, кутова (або циклічна) частота, а прямокутного відеоімпульсу - максимальне значення S_m та тривалість імпульсу $t_{\text{имп}}$.

4. Математичні моделі:

- гармонічного сигналу

$$s_1(t) = S_m \cos(\omega_1 t + \alpha_1);$$

- прямокутного відеоімпульсу

$$s_2(t) = \begin{cases} S_m, & 0 \leq t \leq t_{\text{имп}}; \\ 0, & t \geq t_{\text{имп}}, \quad t < 0. \end{cases}$$

1.3 Класифікація систем

Основні принципи класифікації. Будемо виходити з того, що система є об'єктом виконання функцій над процесами, як матеріальними носіями повідомлень, і враховувати:

- особливості, суттєві сторони математичних моделей систем;
- співвідношення між розмірами системи та значенням довжини хвилі, що відповідає максимальній робочій частоті в спектрі процесу чи сигналу;
- форму подання характеру розвитку процесів і сигналів у часі та просторі.

Так, беручи до уваги суттєві сторони математичних моделей, розрізняють стаціонарні та нестаціонарні системи, лінійні та нелінійні, детерміновані та випадкові (статистичні).

Стаціонарні та нестаціонарні системи.

- ◆ Система називається стаціонарною, якщо її вихідна реакція не залежить від того, в який момент часу прикладається дія.

Системний оператор F такої системи не є функцією часової змінної t . Якщо $x(t)$ є причиною $y(t)$, то в стаціонарній системі реакції $y(t \pm t_0)$ відповідає дія $x(t \pm t_0)$ для будь-якого значення t_0 , що вказує на момент прикладання дії. Відповідно до (1.9)

$$y(t \pm t_0) = F\{x(t \pm t_0)\}. \quad (1.10)$$

Таким чином, якщо $x(t)$ та $y(t)$ задовольняють (1.9), то для стаціонарної або інакше **інваріантної в часі системи** для $x(t \pm t_0)$ та $y(t \pm t_0)$ є справедливим (1.10).

Параметри всіх елементів стаціонарної системи не змінюються в часі. Це системи з постійними параметрами.

Якщо ж інваріантність властивостей системи відносно моменту прикладання дії не задовольняється (відсутня), то її називають **нестационарною** чи **системою із змінними в часі параметрами**. Оператор F такої системи є функцією часу: $F = F(t)$.

► **Приклад.** Система характеризується співвідношенням:

$$y(t) = \frac{d}{dt} x(t).$$

Тоді для діючого процесу $x(t \pm t_0)$ маємо:

$$\left. \frac{d}{dt} x(t \pm t_0) \right|_{\substack{t_1 = t \pm t_0 \\ dt_1 = dt}} = \frac{d}{dt_1} x(t_1) = y(t_1) = \frac{d}{d(t \pm t_0)} x(t \pm t_0) = y(t \pm t_0).$$

Умова стаціонарності (1.10) виповнюється, значить така система є стаціонарною з незалежним від t_0 оператором $F = d/dt = d/dt_1$.

Отже, для стаціонарної системи оператор F не є функцією часу, хоча може містити операції інтегрування та диференціювання відносно часової змінної.



► **Приклад.** Математична модель системи: $y(t) = t \frac{d}{dt} x(t)$.

Для дії $x(t \pm t_0)$ реакція

$$y(t \pm t_0) = t \frac{d}{dt} x(t \pm t_0) = (t_1 \mp t_0) \frac{d}{d(t_1 \mp t_0)} x(t_1) \neq y(t_1).$$

Для інваріантної системи $y(t_1) = t_1 \frac{d}{dt_1} x(t_1)$.

Отже, система є нестаціонарною. Це підтверджується залежністю від часової змінної t оператора системи $F = t \frac{d}{dt} = f(t)$.



Зазначимо, що система вважається нестаціонарною, якщо параметр хоча б одного з її елементів змінюється в часі. Передбачається, що така зміна може бути зумовлена цілеспрямованими діями (операціями), факторами або завадами, що також можливо. У першому випадку, керована зміна використовується для реалізації різноманітних перетворень процесів і сигналів (наприклад, модуляції, множення частоти, параметричного підсилення), які знаходять практичне застосування, наприклад у радіотехнічних системах для передавання, обробки, збереження повідомлень. Прикладами подібних елементів є конденсатор змінної ємності, мембрана в електродинамічному мікрофоні тощо.

Некерована зміна за рахунок впливу завод різної природи (хаотичний тепловий рух електронів у вузлах кристалевої решітки матеріалу, неоднорідність властивостей речовини, вплив одного каналу системи зв'язку на інший тощо) можуть бути проаналізовані на

основі положень теорії ймовірностей із урахуванням статистичного характеру цих змін.

Лінійні та нелінійні системи. Класифікація систем базується, зокрема, на тому, що різні системи по-різному ведуть себе при дії на них суми декількох процесів.

Припустимо, що реакція системи на окремі дві незалежні дії $x_1(t)$ та $x_2(t)$ – відповідно $y_1(t)$ та $y_2(t)$.

- ◆ Система задовольняє принцип суперпозиції (накладання), отже, є лінійною, якщо вхідному сумарному збудженню $x(t) = a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$ для всіх x_1, x_2, a_1, a_2 відповідає реакція виду $y(t) = a_1y_1(t) + a_2y_2(t)$, що є зваженою алгебраїчною сумою реакцій на кожен дію окремо.

У наведених співвідношеннях для реакції та дії a_1, a_2 – постійні величини.

У загальному випадку діями та реакціями можуть бути будь-які змінні, що характеризують процеси в системі або її стан (наприклад, електричні напруга і струм).

Таким чином, відповідно до принципу суперпозиції

- ◆ **реакція лінійної системи на суму незалежних дій дорівнює алгебраїчній сумі реакцій на кожен дію окремо.**

► **Приклад.** Деяка система (рис. 1.14) виконує обробку вхідного процесу за законом: $y(t) = (\frac{d}{dt} + a)x(t)$.

Визначити чи є така система лінійною?

Якщо $x_1(t) \Rightarrow y_1(t) = (\frac{d}{dt} + a)x_1(t)$, $x_2 \Rightarrow y_2(t) = (\frac{d}{dt} + a)x_2(t)$, то

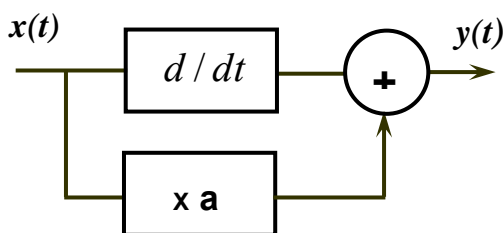


Рисунок 1.14 – Структурна схема лінійної системи.

згідно з принципом суперпозиції

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) + x_2(t) \Rightarrow \\ y(t) &= (\frac{d}{dt} + a)(x_1 + x_2) = \\ &= (\frac{d}{dt} + a)x_1 + (\frac{d}{dt} + a)x_2 = y_1 + y_2. \end{aligned}$$

Отже, система лінійна, а диференціювання, додавання, множення на постійне число є лінійними операціями.



Таким чином, оператор зв'язку F між реакціями та діями лінійних об'єктів є лінійним. Більше того, на відміну від нелінійних він не залежить від рівнів (значень) змінних (в тому числі реакцій та дій), що визначають процеси в об'єкті (коло, система, елемент).

Принцип суперпозиції означає також, що під час дослідження лінійних систем будь-який процес можна розглядати як суму складових, відповідний вибір яких забезпечує, з одного боку, ефективність процедури дослідження, з іншого – оцінку властивостей системи через зміни процесів, які вони виконують.

Зміни процесів і сигналів поділяють на **перетворення** та **спотворення**.

◆ **Перетворення** - це зміни процесів і сигналів у системі, що є бажаними і відповідають її функціональному призначенню.

Такі зміни не пов'язані зі спотворенням інформації. Якщо зміни ведуть до втрат інформації, то їх називають *спотвореннями*.

► **Приклад.**

Припустимо, що діючий процес є гармонічним: $x(t) = X_m \cos \omega_0 t$.

Реакція лінійної стаціонарної системи з оператором $F = F_0 = \text{const}$

$$y(t) = F_0 x(t) = F_0 X_m \cos \omega_0 t = Y_m \cos \omega_0 t$$

є також гармонічною тієї ж частоти ω_0 , але з іншою амплітудою $Y_m = F_0 X_m$.



Очевидно, що при розкладанні процесу чи сигналу довільної форми, який діє на лінійну стаціонарну систему, на суму гармонічних складових згідно з принципом суперпозиції її реакція буде складатись також із гармонічних складових із тими самими частотами. Вважається, що лінійна стаціонарна система не змінює **гармонічного спектра** дії.

Зазначимо, що принцип суперпозиції та наслідки, які випливають з нього, виконуються для лінійних як стаціонарних, так і

нестаціонарних систем, тобто систем як із постійними, так і змінними в часі параметрами.

► **Приклад.** Деяка система характеризується співвідношенням:

$$y(t) = t \frac{d}{dt} x(t).$$

Раніше було встановлено, що вона відноситься до класу нестаціонарних систем. У той же час така система є лінійною, оскільки для неї виконується принцип суперпозиції:

$$t \frac{d}{dt} (x_1 + x_2) = t \frac{d}{dt} x_1 + t \frac{d}{dt} x_2 = y_1 + y_2.$$

◉

Лінійні нестаціонарні системи ще називають **параметричними**. Такі системи, на відміну від лінійних стаціонарних, змінюють (трансформують) гармонічний спектр діючих процесів і сигналів.

► **Приклад.** Розглянемо параметричну систему з системним оператором $F = F(t) = F_0 + \Delta F \cos \omega_1 t$.

Реакція на вказану раніше гармонічну дію

$$\begin{aligned} y(t) &= (F_0 + \Delta F \cos \omega_1 t) X_m \cos \omega_0 t = F_0 X_m \cos \omega_0 t + \Delta F X_m \cos \omega_1 t \cos \omega_0 t = \\ &= F_0 X_m \cos \omega_0 t + \frac{1}{2} \Delta F X_m (\cos(\omega_1 + \omega_0)t + \cos(\omega_1 - \omega_0)t) = \\ &= Y_{m0} \cos \omega_0 t + Y_m \cos(\omega_1 + \omega_0)t + Y_m \cos(\omega_1 - \omega_0)t \end{aligned}$$

містить нові гармонічні складові із частотами $\omega_1 + \omega_0$ і $\omega_1 - \omega_0$. Подібні зміни процесів і сигналів називають *перетворенням частоти*, що зумовлено появою в реакції складової з **проміжною частотою** $\omega_{пч} = \omega_1 - \omega_0$.

◉

◆ **Системи, властивості яких не задовольняють принцип суперпозиції, називаються нелінійними.**

► **Приклад.** Реакція та дія ідеального квадратора задовольняють таке співвідношення: $y(t) = x^2(t)$.

Дія на його вході суми $x_1 + x_2$ процесів на виході спричинює реакцію

$$y(t) = (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2,$$

замість $x_1^2 + x_2^2 = y_1 + y_2$ відповідно до принципу суперпозиції. Наявність складової $2x_1x_2$ вказує на те, що ця система є нелінійною.



Характерною ознакою нелінійних систем є залежність її параметрів та параметрів елементів системи від рівнів процесів, що в них протікають. При математичному описі таких систем отримують оператор F , що є функцією рівнів (амплітудних значень) процесів. Іншою важливою властивістю нелінійних систем є перетворення гармонічних спектрів.

► **Приклад.** Реакція на гармонічну дію нелінійної системи з оператором $F = F(x) = F_0 + ax$ дорівнює

$$\begin{aligned} y(t) &= (F_0 + ax(t))x(t) = F_0 X_m \cos \omega_0 t + aX_m^2 \cos^2 \omega_0 t = \\ &= F_0 X_m \cos \omega_0 t + aX_m^2 \frac{1}{2} (1 + \cos 2\omega_0 t) = F_0 X_m \cos \omega_0 t + \frac{aX_m^2}{2} + \frac{aX_m^2}{2} \cos 2\omega_0 t \end{aligned}$$

і містить постійну та дві гармонічні складові з частотами ω_0 та $2\omega_0$. Дві спектральні складові відсутні у діючому процесі, що є підтвердженням перетворення спектра.

Операція, за якої змінна величина перетворюється у постійну, називається **випрямленням**, а пристрої, що виконують таку операцію, – **випрямлячами**. Пристрої зміни частоти називають **помножувачами**.



З погляду перетворення гармонічних спектрів потрібно підкреслити принципову відмінність між параметричними системами та нелінійними стаціонарними. Структура спектра на виході нелінійної стаціонарної системи, залежить не тільки від форми дії, а і від її амплітудного значення. А от у параметричній системі структура спектра реакції не залежить від амплітудного значення діючого процесу.

Системи із зосередженими та розподіленими параметрами. Передача процесів і сигналів у будь-якій реальній системі здійснюється з кінцевою швидкістю, яка є швидкістю поширення електромагнітних хвиль, що в свою чергу дорівнює швидкості світла.

Процеси, як матеріальні носії інформації, в більшості випадків є фізичними явищами, що розвиваються як у часі, так і просторі. Це означає, що параметри системи в цілому та її елементів, зокрема,

будуть для одного й того ж моменту часу різними в різних точках. Кажуть, що вони є розподіленими вздовж просторової координати.

- ◆ **Системи, характерною ознакою яких є розвиток процесів і сигналів у них як у просторі, так і у часі, називаються системами із розподіленими параметрами.**

У випадках, коли процеси, що відбуваються в системі, можуть описуватися функцією однієї змінної (часу чи просторової координати), йдеться про **системи із зосередженими параметрами**. Таке можливе, коли характерний розмір системи (наприклад, найбільша довжина з'єднувального дроту або друкованої доріжки) значно менше довжини хвилі процесів, які обробляються системою. Тоді час $t_p = d/c$, необхідний для поширення хвилі вздовж системи, набагато менше характерного часу протікання процесів у ній.

Властивості систем із зосередженими параметрами не залежать від довжини з'єднувальних провідників, а властивості її елементів відображаються залежностями між змінними, які характеризують їх стан у часі відносно полюсів, за допомогою яких вони з'єднуються. Вважається, що будь-яке коливання змінних у часі для таких систем передається вздовж елемента практично миттєво.

Нехай електричний струм $i(t) = I_m \cos \omega t$ проходить через двохполюсник довжиною d . За кінцевої швидкості поширення зарядів від вивода 1 двополюсника до 2 в будь-який момент часу $i_2(t) = i_1(t) + i(t_0)$, де t_0 - час проходження зарядів по елементу. Для системи із зосередженими параметрами такий час $t_0 = 0$, а складова $i(t_0) = 0$. Тоді $\forall t: i_2(t) = i_1(t)$. Тоді $t_0 \ll T = 1/f$ або $ct_0 \ll Tc = c/f$, де c – швидкість світла, а T – період гармонічного струму. Враховуючи, що $ct_0 = d$; $c/f = \lambda_c$, для системи із зосередженими параметрами маємо: $d \ll \lambda_c$.

У радіотехніці зосереджені системи, як моделі реальних об'єктів, застосовуються до робочих частот у декілька сотен мегагерц, а їх аналіз здійснюється на основі законів Кірхгофа. У надвисокому частотному діапазоні розміри пристроїв того ж порядку, що і довжина хвилі λ_c . За таких умов необхідно враховувати кінцевий час поширення коливань вздовж елементів системи і розглядати їх як системи з розподіленими параметрами.

► **Приклад.** Максимальна робоча частота для каналів телефонного зв'язку $f_{\max} \approx 3,5$ кГц. Довжина хвилі, яка відповідає цій частоті, $\lambda_c \approx 100$ км. Тоді, очевидно, що такі елементи каналу як підсилювачі, мікрофони, фільтри тощо, потрібно розглядати як системи із зосередженими параметрами. В той же час кабельні мережі каналу, довжина яких може перевищувати 100 км, вважаються системами із розподіленими параметрами.



Детерміновані та стохастичні системи. Властивості кожної системи визначаються цілим рядом факторів, головними серед яких є структура системи та властивості її елементів. Як і система в цілому, так і її окремі елементи характеризуються одним чи сукупністю параметрів, які фактично і визначають реакцію системи на корисні дії. Зрозуміло, що на вид реакції впливають не тільки корисні дії, а і стан системи в момент їх прикладання, небажані або дестабілізуючі фактори тощо. Можна очікувати, що навіть за однієї і тієї самої дії реакція конкретної системи в окремому досліді будуть відрізнятися. Більше того, така відмінність реакцій (результатів досліду) не може бути передбачена чи визначена завчасно. Ось така “невизначеність”, неоднозначність або випадковість і є характерною ознакою стохастичних (недетермінованих) систем. Дуже часто такі системи називають **системами з випадковими параметрами**, підкреслюючи той факт, що їх параметри є випадковими величинами чи випадковими функціями.

- ◆ Будь-яка система називається **недетермінованою** чи **стохастичною**, якщо заданій дії на неї може відповідати декілька можливих реакцій, але яка конкретно однозначно вказати неможливо.

Кажуть, що ймовірність появи однієї з можливих реакцій стохастичної системи менша за одиницю.

- ◆ Якщо кожному вхідному процесу чи сигналу $x(t)$ відповідає єдиний, і ніякий інший, вихідний процес чи сигнал $y(t)$, то система називається **детермінованою**.

Розглянуті раніше системи є прикладами детермінованих або нестохастичних систем. Слід пам'ятати, що реакція детермінованої системи на випадкову дію носить також випадковий характер.

Стохастичним системам властиві ряд специфічних ознак, які потрібно враховувати на етапах проектування та виготовлення. Наприклад, стохастична система, яка за номінальних значень параметрів є стійкою, у випадку їх значного відхилення може стати нестійкою. В той же час використання високоточних елементів в системі може значно збільшити її собівартість.

Зазначимо, що як стохастичні так і детерміновані системи є моделями реальних систем, у тому числі і інформаційних.

► **Приклад.** Реакція $y(t)$ і дія $x(t)$ системи задовольняють таке функціональне співвідношення: $y(t) = rx(t) + n(t)$, де r - випадковий параметр, $n(t)$ - випадковий процес, зокрема адитивна завада, що накладається на корисний процес. Така стохастична модель характерна для каналів зв'язку із загальним замиранням.



► **Приклад.** Диференціальне рівняння з випадковими коефіцієнтами

$$(a_n(t) + r_n) \frac{d^n y(t)}{dt^n} + (a_{n-1}(t) + r_{n-1}) \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + (a_0(t) + r_0) y(t) = x(t),$$

де $y(t)$ - детермінована чи випадкова функція; $a_n(t)$, $a_{n-1}(t)$, ..., $a_0(t)$ - детерміновані функції; r_n , r_{n-1} , ..., r_0 - випадкові коефіцієнти, описує процеси у вузлах та пристроях різних за фізичною природою каналів зв'язку, наприклад, штучної повітряної лінії чи кабельної штучної лінії.



Неперервні (аналогові), дискретні та цифрові системи. Такий розподіл реальних систем є результатом застосування різних форм відображення характеру розвитку процесу і сигналу: неперервної, дискретної та цифрової, кожній з яких можна поставити у відповідність аналогову, дискретну та цифрову системи.

Отже, *аналоговою* є система обробки неперервних процесів і сигналів. Системний оператор такої системи в загальному випадку є алгебро-інтегро-диференційним відносно неперервного аргументу. Зазначимо, що обробка неперервних процесів і сигналів аналогови-

ми системами не потребує додаткових перетворень, які є обов'язковими, як для дискретних, так і цифрових систем. Так, обробка неперервних процесів дискретними системами неможлива без реалізації операції **дискретизації в часі** та зворотної операції **поновлення в часі**.

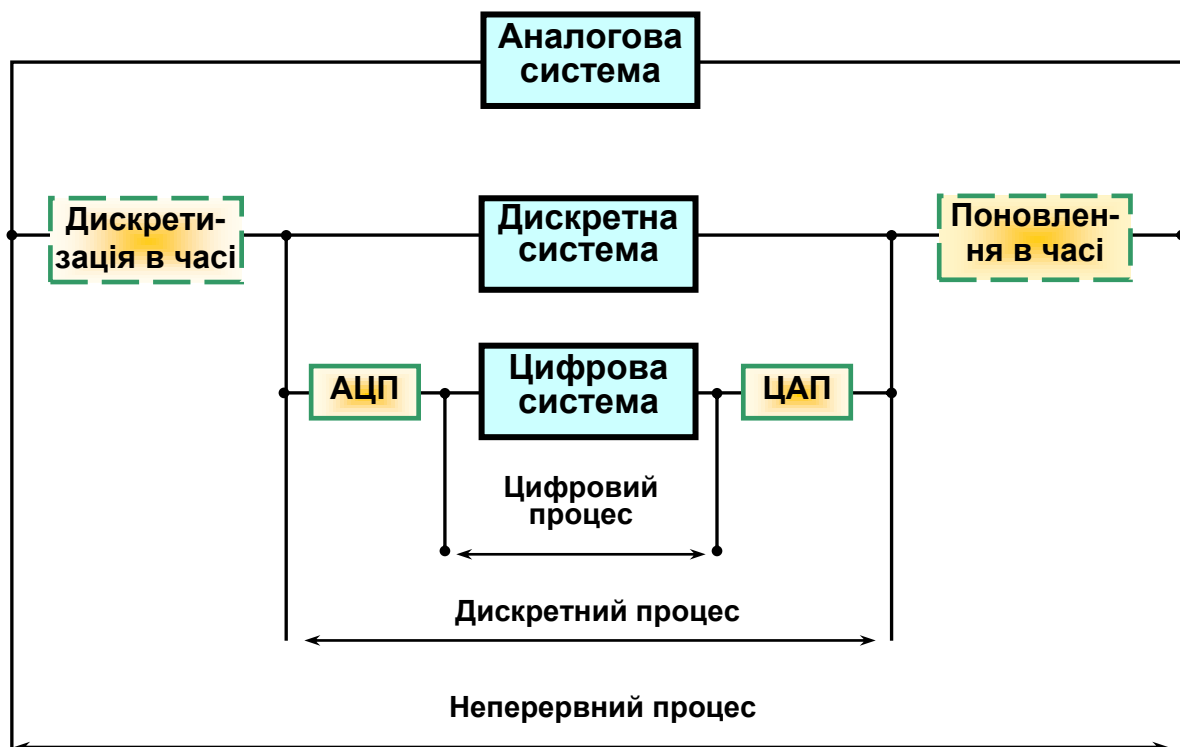


Рисунок 1.15 – Системи, процеси та їхні перетворення.

Використання цифрових систем потребує додаткових перетворень: **квантування** і **кодування** цифрами та **декодування** і **відтворення** аналогового процесу чи сигналу (цифро-аналогове перетворення, рис. 1.15). Практична реалізіція вказаних додаткових перетворень пов'язана з вирішенням ряду нових, не характерних для аналогових систем, завдань: вибір кроку квантування за рівнем та кількості розрядів коду, вибір частоти дискретизації тощо.

На відміну від аналогових процеси в дискретних та цифрових системах описуються **різницевами рівняннями**, які є особливою формою диференціальних рівнянь.

Найчастіше використовуються кінцеві різниці першого, другого, третього і більших порядків.

Так, наприклад, для функції $x(t)$

$$\Delta x[k] = \frac{x[k] - x[k-1]}{\Delta t} \approx \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x[k] - x[k-1]}{\Delta t} \quad (1.11)$$

- кінцева різниця першого порядку;

$$\Delta^2 x[k] = \frac{\dot{x}[k] - \dot{x}[k-1]}{\Delta t} \approx \frac{dx^2(t)}{dt^2} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\dot{x}[k] - \dot{x}[k-1]}{\Delta t} \quad (1.12)$$

- кінцева різниця другого порядку тощо. В (1.11) і (1.12) через $x[k]$ позначено відлік функції $x(t)$ в момент часу t_k , а через Δt - крок дискретизації Δ .

► Приклад. Отримати різницеве рівняння, що відповідає лінійному диференційному рівнянню з постійними коефіцієнтами

$$a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = x(t),$$

яке, як відомо, описує властивості лінійної динамічної системи першого порядку.

Відповідно до диференційного рівняння та згідно з (1.11) маємо

$$a_1 \Delta y[k] + a_0 y[k] = a_1 \frac{y[k] - y[k-1]}{\Delta t} + a_0 y[k] = x[k].$$

Прості перетворення дають шукане різницеве рівняння

$$\left(\frac{a_1}{\Delta t} + a_0\right) y[k] - \frac{a_1}{\Delta t} y[k-1] = x[k],$$

яке і є математичною моделлю дискретної (цифрової) лінійної інваріантної в часі системи.

Реакція такої системи в будь-який дискретний момент часу є розв'язком різницевого рівняння:

$$y[k] = \left\{ x[k] - \frac{a_1}{\Delta t} y[k-1] \right\} / \left(\frac{a_1}{\Delta t} + a_0 \right).$$

◻

У загальному випадку алгоритм роботи лінійної дискретної системи математично описується наступним різницеvim рівнянням:

$$y[k] = - \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j y[k-j] + \sum_{i=0}^{M-1} \beta_i x[k-i], \quad (1.13)$$

де, як і коефіцієнти, так і відлікові значення дії та реакції можуть бути величинами дійсними, комплексними, детермінованими чи випадковими. Стаціонарна система характеризується постійними, а нестаціонарна – змінними в часі коефіцієнтами.

► **Приклад.** *Лінійна стаціонарна дискретна система описується різницеvim рівнянням*

$$y[k] = 0,8y[k-1] + x[k].$$

Вхідний процес системи

$$x[k] = \begin{cases} 1, & k = 0; \\ 0, & k > 0. \end{cases}$$

Початкове значення реакції $y[-1] = 0$. Визначити перших три відлікових значення реакції?

Згідно з (1.13) маємо:

$$y[0] = 0,8y[-1] + x[0] = 0 + 1 = 1;$$

$$y[1] = 0,8y[0] + x[1] = 0,8 + 0 = 0,8;$$

$$y[2] = 0,8y[1] + x[2] = 0,8 \times 0,8 + 0 = 0,64.$$

Вхідний та вихідний процеси є дійсними.



Якщо алгоритм (1.13) роботи дискретної системи реалізується на аналогових елементах (наприклад, лінія затримки, операційний підсилювач тощо), то для такої системи будуть характерні недоліки аналогової.

Цифрова система є сукупністю програмних та апаратних засобів цифрової обробки процесів і сигналів. У такій системі дія та реакція є цифровими, так що в її пристроях циркулюють тільки коди.

Основними перевагами цифрових систем перед аналоговими та дискретними на аналогових елементах є: висока стабільність по відношенню до дії дестабілізуючих факторів (температура, вологість тощо); висока точність обробки процесів і сигналів та можливість її

ефективного контролю (принципово точність цифрових пристроїв обмежується характеристиками АЦП та ЦАП, що використовуються).

ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. Поділ на стаціонарні та не-стаціонарні системи ґрунтується на тому, чи є системні оператори функцією часової змінної.

2. Параметри всіх елементів стаціонарної системи не залежать від часової змінної, а нестаціонарної - змінюється в часі параметр хоча б одного з її елементів.

3. Різні системи по-різному ведуть себе у разі дії на них суми кількох сигналів. Реакція тільки лінійної системи на суму незалежних дій дорівнює алгебраїчній сумі реакцій на кожен дію окремо.

4. Задовольняють принципу суперпозиції та наслідки, які впливають з нього, лінійні як з постійними, так і змінними в часі параметрами.

5. Структура спектра на виході нелінійної стаціонарної системи залежить не тільки від форми діючого сигналу, а й від його максимального значення. У лінійній стаціонарній системі структура спектра реакції не залежить від цього значення.

6. Характерною ознакою не-



Слід запам'ятати:

1. Визначення систем: стаціонарної та нестаціонарної, лінійної та нелінійної, детермінованої та стохастичної, аналогової, дискретної та цифрової.

2. Формулювання принципу суперпозиції.

3. Оператор зв'язку між реакціями та діями лінійних об'єктів є лінійним.

4. Перетворення та спотворення – це певні зміни процесів і сигналів.

5. Лінійна стаціонарна система не змінює гармонічний спектр дії.

6. Аналіз електричних систем із зосередженими параметрами здійснюють на основі законів Кірхгофа. Основою теоретичного дослідження систем із розподіленими параметрами є закони електромагнітного поля.

8. Максимальна робоча частота для каналів телефонного зв'язку становить $f_{\max} \approx 3,5$ кГц.

9. Математичну модель лінійної дискретної системи:

лінійних систем є залежність її параметрів від рівнів процесів, що в них відбуваються.

7. Зосереджені системи та системи із розподіленими параметрами є моделями реальних систем залежно від співвідношення між їхніми розмірами та значенням довжини хвилі, що визначається максимальною частотою в спектрі оброблюваного сигналу.

8. Оброблення неперервних сигналів цифровими системами потребує цифро-аналогого перетворення.

$$y[k] = \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j y[k-j] + \sum_{i=0}^{M-1} \beta_i x[k-i].$$



Треба вміти:

1. Визначати тип системи за математичною моделлю.
2. Визначати гармонічний спектр реакції за системним оператором.
3. Записати різницеве рівняння лінійної динамічної системи на основі її диференційного рівняння.
4. Обчислювати відлікові значення реакції лінійної дискретної системи.

1.4 Модульовані процеси та сигнали

Модульовані процеси і сигнали. Як різновид неперіодичних процесів і сигналів модульовані є результатом їх перетворення, яке називають **модуляцією**. Модуляція, як і підсилення, фільтрація, множення частоти тощо, - один із видів перетворення процесів і сигналів, які застосовують в системах передачі інформації. Це зумовлено рядом причин.

По-перше, процеси як носії інформації є низькочастотними коливаннями. З погляду ефективності, надійності систем та їхньої економічності слід орієнтуватися на роботу з високочастотними коливаннями. Так, у разі використання для передавання повідомлень у вільному просторі високочастотних коливань істотно зменшуються їх загасання, вплив завад, а отже, і втрати інформації. З іншого боку, звичайне радіомовлення не можна було б здійснити на частотах кількох кілогерц через дуже великі розміри передавальних антен для генерування при цьому колосальної потужності.

По-друге, необхідність модуляції диктується вимогою забезпечення високої пропускну здатності системи та її завадостійкості. Такі вимоги можна, зокрема, реалізувати у багатоканальній лінії зв'язку, яка забезпечує обслуговування групи незалежних користувачів. При цьому кожному користувачеві надається окремий канал (частотний діапазон), що не перекривається іншими, а потім відповідними пристроями на боці споживача із великої кількості повідомлень виділяються необхідні.

Практична реалізація цієї ідеї - організація передавання телевізійних програм різних компаній на багатьох каналах. Якщо ці програми передавати безпосередньо без будь-яких перетворень, то вони накладатимуться одна на одну і, як результат, відбуватиметься взаємний вплив та виникнення спотворень.

Отже, щоб ефективно, надійно та економічно передавати інформацію потрібно перенести спектри низькочастотних (НЧ-) процесів і сигналів із низькочастотної в ділянку високих частот. Цьому і сприяє таке перетворення, як модуляція.

У модуляції будь-якого виду в загальному випадку беруть участь дві величини. Одна з них містить усю інформацію, що передається, і є низькочастотним коливанням $s_M(t) = s_{НЧ}(t)$, яке називають **модулюючим (модулювальним) коливанням**. Друга є додатковою величиною та високочастотним коливанням і називається **носійним (модульованим) процесом чи сигналом**.

Якщо хоча б один із параметрів носійного (високочастотного) коливання змінюється під дією модулювального (низькочастотного), що є носієм інформації, то носійне коливання набуває нової властивості – стає носієм інформації. Параметр модульованого коливання, в якому закладено інформацію, називають *інформативним*.

- ◆ **Модуляцією** називають процес керування параметрами носійного коливання іншим.
- ◆ **Модуляція** – це такий вид перетворення процесів і сигналів, коли один із параметрів заданого процесу чи сигналу змінюється за законом іншого.

Математична модель носійного коливання

$$s_{\text{нос}}(t) = f(t; a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = s_{\text{ВЧ}}(t)$$

є такою, що завжди можна виділити деяку сукупність параметрів $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$, які визначають властивості цього коливання, зокрема, його форму.

Як носійний можна застосовувати будь-який високочастотний процес: імпульсну послідовність, неперервне коливання довільної форми. Використовуючи як носійне імпульсні коливання (рис. 1.16, а), можна змінювати амплітуду імпульсу (**амплітудно-імпульсна модуляція - АІМ**, рис. 1.16, б), ширину або тривалість (**широотно-імпульсна модуляція - ШІМ**, рис. 1.16, в), і місце-знаходження на часовій осі (**фазоімпульсна модуляція - ФІМ**).

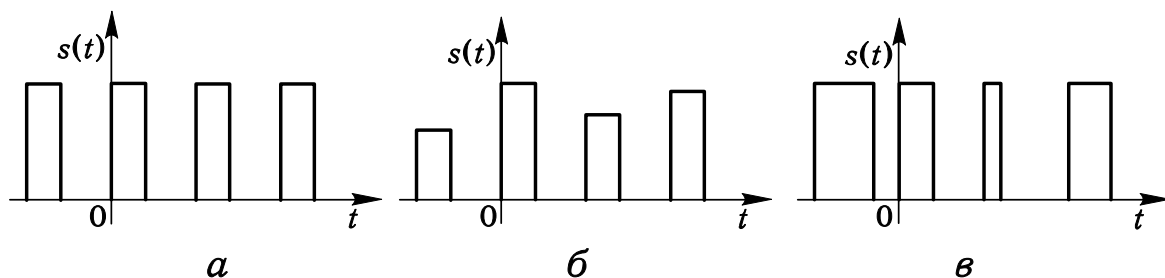


Рисунок 1.16 - Види імпульсної модуляції: а - послідовність імпульсів; б - амплітудно-імпульсна; в - широко-імпульсна.

У інформаційних системах часто як носійний використовують звичайний гармонічне коливання $s_{\text{нос}}(t) = S_m \cos(\omega_{\text{ВЧ}}t + \varphi)$, в якому можна змінювати амплітуду S_m , частоту ω та початкову фазу φ . Тоді відповідно до назв модульованих параметрів отримують **амплітудно-модульований (АМ-**, рис. 1.17, а), **частотно-модульований (ЧМ-**, рис. 1.17, б) та **фазомодульований (ФМ-**, рис. 1.17, в) процеси і сигнали.

Крім модуляції одного може відбуватися модуляція кількох параметрів. Слід зазначити, що модульовальне (низькочастотне коливання), також може мати різноманітний характер зміни в часі, зокрема як дискретний (імпульсний), так і неперервний. Водночас потрібно чітко уявляти, що в будь-якій системі модуляції для її надійної роботи частоти модульованого та модульовального коливань не є довільними, а задовольняють такій вимозі:

- ◆ **максимальна частота в спектрі носійного коливання $f_{\text{max нос}}$ має бути набагато більшою від максимальної частоти $f_{\text{maxНЧ}}$ у спектрі низькочастотного коливання.**

► **Приклад.** Під час передавання мови чи музики спектр повідомлення обмежується частотами $f_{\text{min}}=30\dots 50$ Гц та $f_{\text{max}}=3\dots 10$ кГц. Тоді на най-

довшій хвилі $\lambda=2000$ м радіомовного частотного діапазону з частотою носійної $f_{\text{нос}}=f_{\text{max.ВЧ}}=c/\lambda=3 \cdot 10^8/2000=1,5 \cdot 10^5=150$ кГц це відношення $f_{\text{max.НЧ}}/f_{\text{max.ВЧ}}=10/150 \approx 0,065 \Rightarrow 6,5\%$. Якщо передавати ті самі повідомлення в діапазоні коротких хвиль ($f_{\text{max.ВЧ}}=15 \dots 20$ МГц), то таке відношення не перевищить сотих часток відсотка.

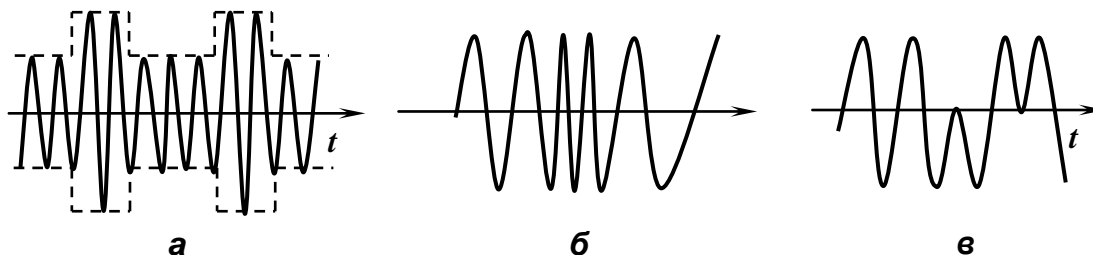


Рисунок 1.17 - Приклади неперервних модульованих процесів і сигналів: а – АМ-процес; б – ЧМ-процес; в – ФМ-процес.

Детерміновані та випадкові процеси і сигнали. Один із принципів класифікації процесів і сигналів ґрунтується на наявності чи відсутності можливості точно передбачати закон зміни процесу і сигналу або значення його параметрів у майбутньому на основі апріорних даних. Якщо про процес чи сигнал відомо все, можна точно передбачити його миттєві значення в будь-які моменти часу, відома форма або точний опис у вигляді цілком визначеної аналітичної функції тощо, то процес і сигнал вважають *детермінованим*. Такий процес чи сигнал не містить ніякої невизначеності, тому не є носієм інформації.

♦ **Детермінованим, або регулярним називають будь-який процес чи сигнал, параметри і миттєві значення якого в довільний момент часу можна передбачити з імовірністю одиниця.**

Прикладом детермінованого процесу чи сигналу може бути послідовність імпульсів, форма, амплітуда і розташування у часі яких відомі.

Детерміновані процеси і сигнали подаються математичним ви-

разом (наприклад, $s(t) = a(t) \cos[\omega_0 t + \varphi_0]$), обчислюваль-

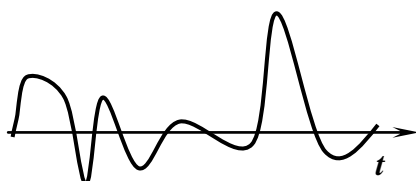


Рисунок 1.18 – Графічне зображення детермінованого сигналу.

ним алгоритмом, графіком (рис. 1.18), таблицею числових даних тощо.

Детермінованих процесів і сигналів у природі не існує через неминучу і непередбачувану (випадкову) зміну їхніх основних параметрів унаслідок взаємодії джерела повідомлень із різними об'єктами, що його оточують, наявністю мікроскопічних флуктуаційних процесів у матеріалах та інших небажаних явищ.

Слово “випадковий” засвідчує той факт, що якщо багаторазово спостерігати випадковий процес чи сигнал, то кожного разу його перебіг буде дещо іншим. Ці варіації пов'язані з наявністю другорядних відносно корисного процесу чи сигналу факторів, які на них впливають, але не можуть бути точно визначені. Так, в апаратах магнітного запису та звукотехнічній апаратурі – це нерівномірність товщини магнітного носія, дрейф швидкості носія, недосконалість контактів в апаратурі тощо. Усе це змушує розглядати реальні явища як випадкові процеси, для яких не можна задати достатню кількість параметрів, які описували б реальне явище як точно визначену функцію часу.

До випадкових процесів відносять також завади, що створюються різними установками, атмосферними розрядами, випромінюванням сонця або зірок. Для багатоканального магнітного запису, наприклад, це впливи сусідніх каналів та доріжок запису.

◆ **Випадковим називають процес чи сигнал, перебіг якого завчасно передбачити неможливо.**

Випадковий процес і сигнал визначається випадковою функцією аргументу, миттєве значення якої є випадковою величиною. Значення випадкової величини завчасно невідоме і може бути передбачене з імовірністю, меншою за одиницю.

Випадковий процес чи сигнал характеризується не однією, а множиною функцій, які називають його **реалізаціями (траєкторіями, вибірковими функціями)**:

$$\xi(t) = \{ \xi^{(k)}(t), t \in T; \xi^{(k)}(t) \in D_{\xi} \},$$

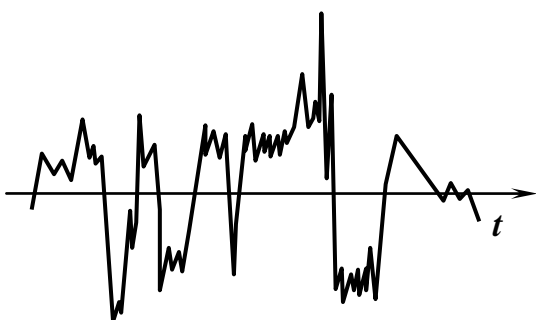


Рисунок 1.19 - Реалізація випадкового процесу.

де T – область визначення часового аргументу t , а множина D_{ξ} , якій належать миттєві значення випадково-

го процесу чи сигналу $\xi(t)$, – область значень випадкового процесу чи сигналу. Кожна реалізація випадкового процесу чи сигналу (рис. 1.19) є не випадковою функцією.

Випадковим процесом і сигналом вважається: послідовність радіоімпульсів на вході радіолокатора, коли їхні параметри випадково змінюються через зміну умов поширення; електрична напруга, що відповідає голосу диктора, звучанню оркестру тощо.

Теоретичне дослідження випадкових процесів і сигналів здійснюють відповідно до положень теорії випадкових процесів, основою якої є статистичний підхід.

Аналогові, дискретні та цифрові процеси і сигнали. Процес чи сигнал є **неперервним**, коли його миттєві значення можуть набувати будь-яких значень у межах можливих і визначатися для будь-якого значення часового чи просторового аргументу. Вважають, що множина значень аргументу та функції неперервного процесу і сигналу є континуальною множиною, наприклад, температура речовин у доменній печі, тиск води в мережі водопостачання, напруга на виході підсилювача гармонічних коливань тощо.

Неперервні процеси і сигнали ще називають **аналоговими**, або **континуальними**, або **довільними за величиною та неперервними в часі**.

Одновимірний аналоговий процес і сигнал наочно зображується своїм графіком (осцилограмою), причому цей графік може містити точки розриву першого роду (рис. 1.20).

Спочатку використовувалися лише аналогові процеси і сигнали. Підвищення вимог до технічних систем, розширення сфер їх

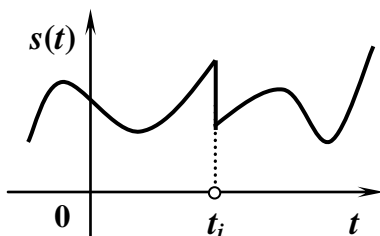


Рисунок 1.20 – Неперервний процес.

практичного застосування зумовили пошук нових принципів побудови таких систем. У ряді випадків на зміну аналоговим прийшли імпульсні системи, робота яких ґрунтується на використанні **дискретних процесів і сигналів**.

Найпростіша модель дискретного процесу чи сигналу $s_d(t)$ є лічильною множиною дискретних значень $\{t_i\}$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) часової змінної t , для кожного з яких визначене відлікове (дискретне) значення $s(t_i) = s_i$ процесу чи сигналу з області його можливих значень. Ці процеси і сигнали називають ще **довільними за величиною та дискретними в часі**,

як такі, що можуть набувати будь-яких значень, визначених лише у точно зазначені моменти часу.

Інтервал між сусідніми відліками часу $\Delta = t_{i+1} - t_i$ називають **кроком дискретизації**, а перетворення аналогового процесу і сигналу в дискретний - **дискретизацією в часі**.

Як правило, крок дискретизації для окремого процесу чи сигналу постійний (рис. 1.21).

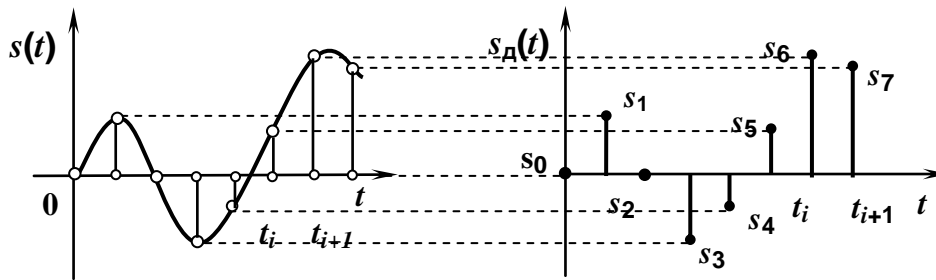


Рисунок 1.21 – Дискретизація в часі неперервного процесу.

По суті будь-який дискретний процес чи сигнал (йдеться про процес як фізичне явище, а не математичну модель) - аналоговий. Типовим дискретним сигналом у цьому розумінні є відомості про температуру повітря, що передаються радіостанціями кілька разів на добу. Хоча температура повітря змінюється в часі неперервно і досить плавно, відомості про неї (дискретний сигнал) є результатом дискретизації в часі неперервного процесу.

Згідно з теоремою Котельникова, дискретний процес чи сигнал еквівалентний неперервному (аналоговому) з обмеженим спектром, або аналоговий процес чи сигнал може бути точно відновлений за дискретним, якщо крок дискретизації

$$\Delta \leq \frac{1}{2F_{\max}} \Rightarrow \frac{1}{\Delta} = f_d \geq 2F_{\max}, \quad (1.14)$$

де F_{\max} - **максимальна частота** в спектрі неперервного процесу чи сигналу; f_d - **частота дискретизації**, що визначається кількістю відліків миттєвих значень аналогового процесу чи сигналу за одиницю часу.

Способи зображення дискретних у часі процесів і сигналів можуть бути різними. Наприклад, аналоговому процесу чи сигналу $s(t)$, який повільно змінюється в часі, може відповідати його дискретний

образ, що має вигляд послідовності прямокутних відеоімпульсів однакової тривалості (рис. 1.22, а), а висота кожного імпульсу, пропорційна відліковому значенню $s(t_i)$.

Можна також зберігати висоту імпульсів однаковою, але змінювати їхню тривалість відповідно до відлікових значень (рис. 1.22, б).

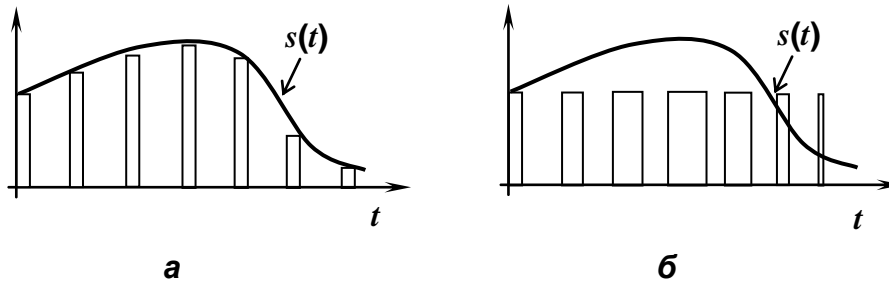


Рисунок 1.22 – Дискретизація аналогового процесу: а – при зміні висоти імпульсів; б – при зміні тривалості імпульсів.

Ці приклади є наочним підтвердженням того, що дискретними процесами і сигналами є й імпульсні послідовності.

Використання дискретних у часі процесів і сигналів дає змогу підвищити **завадостійкість системи**, тобто її здатність зберігати в допустимих межах показники якості при дії завад і реальну **пропускну здатність**, що визначається максимальною кількістю інформації, яка може бути передана із заданою точністю за одиницю часу системою, а також здійснювати багатоканальний зв'язок із часовим розділенням каналів, коли повідомлення передається лише у визначені моменти часу з кроком Δ від різних джерел різним споживачам.

Цифрові процеси і сигнали є результатом аналого-цифрового перетворення дискретних за часом та неперервних за значенням процесів і сигналів. Аналого-цифрове перетворення передбачає здійснення операцій **квантування** і **кодування**.

- ◆ **Квантування** – це заміна довільного значення певного параметра (величини) найближчим відповідно до шкали дозволених значень.

Такі допустимі (дозволені) дискретні значення називають **рівнями квантування**: h_1, h_2, \dots, h_N , а різницю Δh між двома

сусідніми значеннями h_{i+1} і h_i - **кроком квантування**. Його значення, а отже, й кількість рівнів квантування, в конкретному випадку не повинні бути меншими, ніж потрібно, щоб запобігти значним втратам інформації через неточність опису аналогового процесу. Так, для цифрових пристроїв телефонних каналів розрізняють $256=2^8$ рівнів квантування аналогового коливання; систем високоякісного звукозапису та цифрового телебачення $4096 = 2^{12}$ або $16384 = 2^{14}$ рівнів. Квантування дискретного процесу чи сигналу веде до **квантованого за рівнем і дискретного за часом процесу чи сигналу**.

Наступний крок – відображення відлікового значення дискретного за часом і квантованого за значенням процесу чи сигналу числом (кодом).

- ◆ **Цифровий процес чи сигнал** - це послідовність чисел (кодів), кожне (кожен) з яких є результатом аналого-цифрового перетворення відлікових (дискретних) значень аналогового процесу чи сигналу, взятих через інтервал дискретизації Δ .

Для зручності технічної реалізації й обробки, використовують двійкові коди з обмеженою кількістю розрядів. Як правило, технічно цифрові процеси і сигнали відображаються послідовністю відеоімпульсів. Для цього ідеально підходить двійкова система числення. Наприклад, одиниці може відповідати високий, а нулю – низький рівень потенціалу, або навпаки.

Кількість рівнів квантування N та кількість розрядів m відповідного двійкового коду взаємозв'язані:

$$m \geq \text{int}(\log_2 N), \quad (1.15)$$

де функція $\text{int}(B)$ визначає цілу частину числа B .

- **Приклад.** Визначити дискретний та цифровий сигнали на основі аналогового (рис. 1.23, а), область визначення якого 1 с, з такими параметрами: інтервал дискретизації $\Delta = 0,125$ с; крок квантування $\Delta h = 0,5$.

Згідно з інтервалом дискретизації кількість відліків дискретного сигналу на інтервалі визначення заданого аналогового дорівнює дев'яти:

$$t_0 = 0; t_1 = \Delta = 0,125 \text{ с}; t_2 = 2\Delta = 0,25 \text{ с};$$

$$t_3 = 3\Delta = 0,375 \text{ с}; t_4 = 4\Delta = 0,5 \text{ с}; t_5 = 5\Delta = 0,625 \text{ с}; t_6 = 6\Delta = 0,75 \text{ с};$$

$$t_7 = 7\Delta = 0,875 \text{ с}; t_8 = 8\Delta = 1,0 \text{ с}.$$

Сукупність відлікових значень

$$s(t_0) = s_{\text{д}}(0) = 0,5; s(t_1) = s_{\text{д}}(\Delta) = 1,2; s(t_2) = s_{\text{д}}(2\Delta) = 1,3;$$

$$s(t_3) = s_{\text{д}}(3\Delta) = 0,7; s(t_4) = s_{\text{д}}(4\Delta) = 0,0; s(t_5) = s_{\text{д}}(5\Delta) = -0,7;$$

$$s(t_6) = s_{\text{д}}(6\Delta) = -0,95; s(t_7) = s_{\text{д}}(7\Delta) = -0,7; s(t_8) = s_{\text{д}}(8\Delta) = -0,25$$

є дискретним сигналом, або дискретним у часі та довільним за величиною (рис. 1.23, б).

Далі знаходимо кількість рівнів квантування

$$N = [(S_{\text{max}} - S_{\text{min}}) / \Delta h] + 1 = [(1,5 - (-1,0)) / 0,5] + 1 = 6.$$

Перший рівень у десятковій системі числення зображується числом (кодом) 0,0; другий – 0,5; третій – 1,0; четвертий – 1,5; п'ятий – мінус 0,5; шостий – мінус 1,0. Квантування дискретного процесу (рис. 1.23, б) з урахуванням кількості та значень рівнів квантування дає квантований за величиною та дискретний в часі сигнал (рис. 1.23, в). Подаючи його відлікові значення числами (кодами) отримаємо цифровий сигнал.

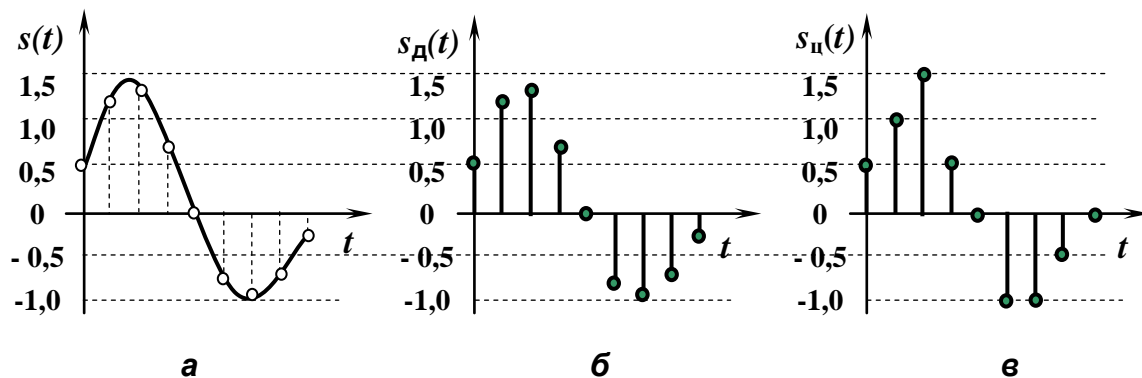


Рисунок 1.23 – Сигнали: а – аналоговий; б – дискретний; в – цифровий.

У десятковій системі числення це така послідовність чисел:

$$s_{\Pi}(t) = \left\{ \begin{array}{l} s_{\Pi}(0) = 0,5; \quad s_{\Pi}(\Delta) = 1,0; \quad s_{\Pi}(2\Delta) = 1,5; \quad s_{\Pi}(3\Delta) = 0,5; \quad s_{\Pi}(4\Delta) = 0,0; \\ s_{\Pi}(5\Delta) = -1,0; \quad s_{\Pi}(6\Delta) = -1,0; \quad s_{\Pi}(7\Delta) = -0,5; \quad s_{\Pi}(8\Delta) = 0,0 \end{array} \right\}.$$

Відповідно до (1.15) кількість розрядів двійкового коду $m = \text{int}(\log_2 6) = 3$. Вибираємо чотирирозрядний двійковий код (перший зліва для відображення знаку: наприклад, 0 – знак «+»; 1 – знак «-»):

$$s_{\Pi}(t) = \left\{ \begin{array}{l} s_{\Pi}(0) = 0001; \quad s_{\Pi}(\Delta) = 0010; \quad s_{\Pi}(2\Delta) = 0011; \quad s_{\Pi}(3\Delta) = 0001; \\ s_{\Pi}(4\Delta) = 0000; \quad s_{\Pi}(5\Delta) = 1010; \quad s_{\Pi}(6\Delta) = 1010; \\ s_{\Pi}(7\Delta) = 1001; \quad s_{\Pi}(8\Delta) = 0000. \end{array} \right\}.$$



ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. Один і той самий процес і сигнал можна описувати як дійсними, так і комплексними функціями.
2. Періодичні, як і нескінченно подовжені в часі, процеси і сигнали певною мірою є ідеалізацією реальних.
3. Комплексне миттєве значення гармонічного коливання є окремим випадком його комплексного зображення на основі перетворення Гільберта.
4. Характерною особливістю відеоімпульсів є їхній порівняно повільний розвиток як у часі, так і в просторі.
5. Модуляція – один із видів



Слід запам'ятати:

1. Принципи класифікації процесів і сигналів.
2. Визначення процесів і сигналів: комплексного, періодичного, імпульсного, детермінованого, випадкового, аналогового, дискретного та цифрового.
3. Геометричну інтерпретацію аналітичного сигналу.
4. Визначення понять: імпульсна та перехідна характеристики.
5. Згортання функції Дірака з будь-якою іншою функцією повнює цю іншу функцію.
6. Особливості одиничних ступінчастого та імпульсного проце-

перетворення сигналів. У модуляції будь-якого виду беруть участь мінімум два процеси.

6. Дискретизація в часі дає змогу здійснювати багатоканальний зв'язок з часовим розділенням каналів.

 **Треба вміти:**

1. Визначити поняття: одновимірні й багатовимірні, періодичні й неперіодичні, дійсні та комплексні, детерміновані й випадкові, неперервні, дискретні та цифрові, імпульсні сигнали; відео- та радіо-імпульси, аналітичний сигнал, обвідна, повна фаза, модуляція, миттєва частота, дискретизація в часі, крок дискретизації, квантування, крок квантування.

2. Визначити початкову фазу гармонічного сигналу за його графічним зображенням для косуносної та синусної форм.

3. Визначити поняття: синфазні, квадратурні та протифазні сигнали.

4. Визначити обвідну, повну фазу та миттєву частоту довільного дійсного сигналу.

5. Визначити крок дискретизації згідно з теоремою Котельникова.

6. Визначити розрядність двійкового коду за кількістю

снів і сигналів.

7. Імпульсна та перехідна характеристика є характеристиками тільки лінійних систем.

8. Для надійної роботи системи модуляції потрібно, щоб максимальна частота в спектрі носійного коливання була набагато більшою за найбільшу частоту в спектрі модулюючого коливання.

9. Формули:

$\bullet S_m e^{j\omega_0 t} = \bullet s(t)$ - комплексне миттєве значення гармонічного коливання;

$s(t) = s(t + T), \forall t$ - умова періодичності процесу і сигналу;

$\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\delta(\lambda - t_0)d\lambda = f(t_0)$ - стробувальна властивість дельта-імпульсу;

$\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\delta(\lambda)d\lambda = 1$ - площа, обмежена дельта-імпульсом;

$\delta(t) = \frac{d\sigma(t)}{dt}; \sigma(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\lambda)d\lambda$ -

зв'язок між одиничним імпульсним та ступінчастим процесами і сигналами;

$\Delta \leq \frac{1}{2F_{\max}} \Rightarrow \frac{1}{\Delta} = f_{\Delta} \geq 2F_{\max}$ -

крок дискретизації за теоремою Котельникова;

Глава 1 Поняття, класифікація та визначення сигналів, процесів та систем

рівнів квантування.

$m \geq \text{int}(\log_2 N)$ - зв'язок між кількостями розрядів двійкового коду та рівнів квантування.

1.5 Завдання для поточного тестування

1.5.1 Питання для поточного контролю

- Що таке інформація, повідомлення і сигнал?
- Що таке система?
- Що таке принцип математичного моделювання?
- Дайте визначення математичної системи, процесу і сигналу.
- Що таке системний оператор?
- Дайте визначення стаціонарної та нестаціонарної системи.
- Сформулюйте принцип суперпозиції.
- За якими двома основними властивостями розрізняються лінійні та нелінійні системи?
- За якими трьома властивостями розрізняються лінійні стаціонарні та параметричні системи?
- За якими ознаками розрізняються системи із розподіленими та зосередженими параметрами?
- Дайте визначення детермінованої та стохастичної системи.
- Назвати характерні ознаки неперервних, дискретних і цифрових систем.
- Три основні принципи класифікації процесів і сигналів.
- Визначення комплексного і дійсного процесів і сигналів.
- Що таке аналітичний сигнал?
- Що таке обвідна, повна фаза та миттєва частота?
- Назвати три основні параметри гармонічного коливання.
- Як по графічному зображенні визначається початкова фаза гармонічних процесів і сигналів?
- Як співвідносяться початкові фази двох гармонічних коливань, що є синфазними, або знаходяться в квадратурі чи протифазі?

- Дайте визначення імпульсного процесу і сигналу.
- За якими ознаками розрізняються відео- та радіоімпульси?
- У чому полягає стробувальна властивість одиничного імпульсного процесу і сигналу?
- Як пов'язані між собою одиничний імпульсний та одиничний ступінчастий процеси і сигнали?
- Як поновити довільний сигнал на основі дельта імпульсів?
- Що таке вибіркова функція?
- Дайте визначення перехідної та імпульсної характеристик.
- Зв'язок між імпульсною та перехідною характеристиками?
- Що таке модуляція?
- Що таке інформативний параметр?
- Назвати види модульованих сигналів у разі використання як носійного звичайного гармонічного коливання.
- Назвати види модульованих сигналів у разі використання як імпульсного носія.
- Якими мають бути максимальні частоти в спектрах носійного і модульовального коливань?
- Що таке детермінований та випадковий процеси?
- Як називають процеси і сигнали довільні за значенням та дискретні в часі?
- Що таке крок дискретизації та крок квантування?
- За яких умов подання аналогового процесу і сигналу дискретним не є адекватним?
- Як оцінити кількість розрядів двійкового коду за кількістю рівнів квантування?

1.5.2 Задачі для індивідуального та самотійного розв'язування

1. Визначити, чи можна подати моделлю із зосередженими параметрами пристрій, що здійснює оброблення сигналів із максимальною частотою $F_{\max}=1000$ МГц в його спектрі?

2. Математична модель системи має такий вигляд: $y(t)=t[dx(t)/dt]$. Визначити, до якого класу відноситься ця система?

3. До якого класу належать системи із такими операторами: а) $F=d/dt$; б) $F=F_0+\Delta F\cos\omega t$; в) $F=F_0+\Delta Fx(t)$, де $\Delta F, F_0$ – скаляри?

4. Системний оператор F змінюється за законом $F(u_{\text{вх}})=F_0+au_{\text{вх}}$. Які зміни гармонійного сигналу $u_{\text{вх}}(t)=U_{\text{мвх}}\cos\omega_0 t$ здійснює ця система?

5. Реакція системи на вхідний сигнал $x(t)=10\cos 100\pi t+5\sin 200\pi t$ має такий вигляд: $y(t)=10\cos 100\pi t$. Визначити частоту вхідного сигналу, а також тип цієї системи.

6. На вході трьох різних систем діє гармонічний сигнал $u_{\text{вх}}(t)=5\cos 100\pi t$. Реакція першої з них $u_{\text{вих1}}(t)=5\sin(100\pi t+\pi/4)$, другої - $u_{\text{вих2}}(t)=5\cos 200\pi t$, а третьої $u_{\text{вих3}}(t)=5\sin 100\pi t+10\cos 200\pi t$. Визначити зміни сигналів у цих системах. Якими ще системами вони можуть бути здійснені?

7. Максимальна частота оброблюваного системою сигналу $F_{\text{max}}=6,5$ МГц. Визначити, чи можна її розглядати як систему із зосередженими параметрами.

10. Записати математичну модель відеоімпульсу прямокутної форми на основі функції Хевісайда $\sigma(t)$.

11. Визначити обвідну та повну фазу аналітичного сигналу, який відповідає дійсному сигналу $s(t) = A_{m1} \cos\omega_1 t + A_{m2} \cos\omega_2 t$.

12. Зобразити графіки двох гармонічних коливань $s_1(t) = S_{m0} \sin(\omega t + \alpha_1)$ і $s_2(t) = S_{m0} \cos(\omega t + \alpha_2)$ із ненульовими значеннями початкових фаз в єдиній системі координат для таких випадків: а) $\alpha_1 < 0, \alpha_2 < 0$; б) $\alpha_1 < 0, \alpha_2 > 0$; в) $\alpha_1, \alpha_2 > 0; \alpha_1 - \alpha_2 > 0$.

13. Зобразити в єдиній системі координат графіки двох гармонічних квадратурних та протифазних коливань.

14. На вхід системи, яка здійснює обробку сигналів за законом $y(t)=dx/dt$, подається сигнал $x(t)=X_m\cos^2\omega t$. Визначити гармонічний спектр реакції $y(t)$.

15. На вхідний сигнал системи $u_{\text{вх}}(t)=10\cos 100\pi t+5\sin 200\pi t$, а вихідний $u_{\text{вих}}(t)=10\cos 100\pi t$. Визначити частоту вихідного сигналу та зміни, які здійснює система над вхідним сигналом.

16. Отримати відлікові значення сигналу $s(t) = S_0 e^{-\alpha t} \sigma(t)$ з використанням вибіркової функції $\delta_{\Pi}(t)$.

2 Періодичні процеси та їх спектральні та енергетичні характеристики

2.1 Загальна оцінка характеристик періодичних процесів

Аналіз процесів і сигналів у різноманітних системах, їх практичне застосування для розв'язування будь-яких завдань можливе за наявності достовірної інформації про властивості як систем, так і процесів, що в них протікають.

Математична модель процесу є його повним описом. Однак такий опис може бути складним. У більшості практичних застосувань достатньо знати деякі з основних характеристик чи параметрів процесу, які відображають їхні властивості, виходячи перш за все з постановки задачі.

Під час дослідження систем, процесів і сигналів оперують з великою кількістю характеристик та параметрів, які можна розподілити між трьома групами:

- енергетичні характеристики;
- спектральні характеристики;
- часові характеристики.

Часові характеристики та параметри визначають властивості процесів у часовій області, тобто області часової змінної t , спектральні – у частотній області частотної змінної $\omega = 2\pi f$, де ω - кутова або кругова частота, f - циклічна частота.

Прикладом часової характеристики імпульсного процесу є їхня **тривалість** $t_{\text{імп}}$, або шпаруватість $Q = T/t_{\text{імп}}$ імпульсної періодичної послідовності з періодом T . Особливими часовими характеристиками випадкових процесів є **моментні функції**.

Найуживанішими спектральними характеристиками процесів і сигналів є **спектральна щільність** або такий параметр, як **ширина спектра** $\Delta\omega_{\text{сп}}$.

Окрім наведених для оцінювання процесів використовують і ряд інших характеристик. Так, найбільш загальними для випадкових

процесів є їхні ймовірнісні характеристики – **функція розподілу ймовірності** або **функція щільності ймовірності**.

Енергетичні характеристики визначають спроможність (здатність) процесу виконувати ту чи іншу роботу (функцію). Це, наприклад, – енергія процесу, його потужність тощо.

ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. У більшості практичних застосувань достатньо знати деякі з основних характеристик чи параметрів процесу, які відображають їхні властивості, виходячи з постановки задачі.



Треба вміти:

1. Розподіляти параметри процесів між трьома групами: енергетичними, часовими та спектральними.



Слід запам'ятати:

1. Усі параметри та характеристики процесів поділяються між трьома групами: енергетичні, часові та спектральні.

2. Часові характеристики та параметри визначають властивості процесів у часовій області, спектральні – в частотній, а енергетичні дають змогу оцінити їхню здатність виконувати ту чи іншу роботу.

2.2 Енергетичні характеристики періодичних процесів

Основними енергетичними характеристиками будь-яких процесів є енергія, миттєва та середня потужності, а також енергія взаємодії двох процесів.

Миттєва потужність $p(t)$ будь-якого детермінованого процесу $s(t)$ визначається його квадратом

$$p(t) = s^2(t) \quad (2.1)$$

- для дійсного процесу; квадратом модуля

$$p(t) = |s(t)|^2 \quad (2.2)$$

2.2 Енергетичні характеристики періодичних процесів

- процесу комплексного, де $|s(t)|$ є модуль комплексного процесу $s(t)$.

Енергія E_s процесу $s(t)$, визначеного на часовому інтервалі $[t_1, t_2]$, знаходиться за такими співвідношеннями:

$$E_s = \int_{t_1}^{t_2} s^2(t) dt \quad (2.3)$$

- для дійсного процесу;

$$E_s = \int_{t_1}^{t_2} |s(t)|^2 dt \quad (2.4)$$

- для процесу комплексного.

Для періодичних та нескінченно подовжених у часі процесів, коли $t_1 = -\infty$, а $t_2 = \infty$, інтеграли (2.3) та (2.4) невизначені. У цьому разі енергія обчислюється на обмеженому (заданому) часовому інтервалі (для періодичного процесу - на періоді). Ось чому на практиці енергетичні властивості процесів кінцевої тривалості оцінюють через енергію та миттєву потужність, а періодичних або нескінченно подовжених у часі – середню та миттєву потужність.

Середня потужність P_{cp} процесу $s(t)$ визначається як границя, до якої прямує відношення енергії процесу на обмеженому проміжку часу до величини цього проміжку за умови, що останній необмежено зростає:

$$P_{cp} = \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} s^2(t) dt \quad (2.5)$$

- для дійсних процесів;

$$P_{cp} = \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |s(t)|^2 dt \quad (2.6)$$

- для процесів комплексних.

Інтеграли (2.4) і (2.5) відображають математичну операцію усереднення в часі. Для періодичних процесів, у тому числі і гармоніч-

них, така операція усереднення здійснюється на часовому інтервалі, який збігається з періодом:

$$P_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt. \quad (2.7)$$

Загальна розмірність потужності [амплітуда²], енергії - [амплітуда².с]. Одиницею виміру, зокрема, електричної потужності, як відомо, є ватт (Вт), а енергії – джоуль (Дж).

► **Приклад.**

Гармонічний детермінований процес $s(t) = S_m \cos(\omega_0 t + \alpha_s)$ із амплітудним значенням (амплітудою) S_m , кутовою частотою ω_0 та початковою фазою α_s є дійсним і характеризується такими енергетичними характеристиками:

- миттєва потужність

$$p(t) = s^2(t) = S_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \alpha_s) = \frac{1}{2} S_m^2 + \frac{1}{2} S_m^2 \cos 2(\omega_0 t + \alpha_s) = p_{=} + p_{\approx}$$

містить постійну та змінну складові. Остання змінюється за гармонічним законом, але має вдвічі більшу частоту;

- середня потужність

$$P_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{S_m^2}{2} dt + \frac{1}{T} \int_0^T \frac{S_m^2}{2} \cos 2(\omega_0 t + \alpha_s) dt = \frac{1}{2T} S_m^2 t \Big|_0^T = \frac{S_m^2}{2} = S_{\text{д}}^2,$$

$S_{\text{д}} = S_m / \sqrt{2}$ - діюче, ефективне або середньоквадратичне значення гармонічного процесу;

- енергія за період

$$E_{\text{сТ}} = P_{\text{cp}} T = S_{\text{д}}^2 T.$$

- ◆ *Середня потужність гармонічного процесу дорівнює квадрату його ефективного значення або половині квадрата максимального значення (амплітудного значення) і не залежить як від його частоти, так і початкової фази.*



2.2 Енергетичні характеристики періодичних процесів

► Приклад.

Для періодичної з періодом T послідовності прямокутних відеоімпульсів тривалості $t_{\text{імп}}$ та амплітуди S_m (рис. 2.1) середня потужність

$$P_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{t_{\text{імп}}} S_m^2 dt = \frac{S_m^2}{T} t_{\text{імп}} = \frac{S_m^2}{Q} = \frac{P_{\text{ср.імп}}}{Q}$$

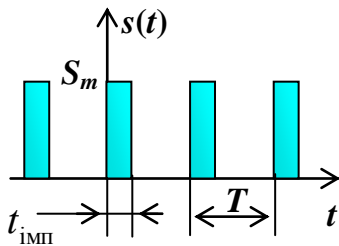


Рисунок 2.1 - Періодична послідовність прямокутних відеоімпульсів.

відрізняється від середньої потужності одного імпульсу $P_{\text{ср.імп}}$ в $1/Q$ разів, де $Q = T/t_{\text{імп}}$ відношення періоду до тривалості, як відомо, називається **шпаруватістю** періодичної послідовності.

■

Шпаруватість, як і період, є **часовим параметром** процесів і сигналів. Для обчислювальних систем та цифрової техніки значення шпаруватості знаходиться в межах $1 \dots 10$; в системах радіотехніки $10 \leq Q \leq 100$; в радіолокаційних системах - $100 \leq Q \leq 1000$.

Параметрами серії імпульсів, окрім шпаруватості і періоду T , є частота слідування імпульсів $f = 1/T$ та тривалість паузи $t_{\text{п}} = T - t_{\text{імп}}$.

Енергетичною характеристикою двох процесів чи сигналів є **взаємна енергія** або **енергія взаємодії** E_B .

За означенням для двох детермінованих дійсних процесів або сигналів $s_1(t)$ та $s_2(t)$ на інтервалі $[t_1, t_2]$ енергія взаємодії

$$E_B = E_{s_1 s_2} = 2 \int_{t_1}^{t_2} s_1(\lambda) s_2(\lambda) d\lambda. \quad (2.8)$$

У разі комплексних процесів або сигналів

$$E_B = E_{s_1 s_2} = 2 \int_{t_1}^{t_2} s_1(\lambda) s_2^*(\lambda) d\lambda = 2 \int_{t_1}^{t_2} s_1(\lambda) s_2(\lambda) d\lambda, \quad (2.9)$$

де через s_1^*, s_2^* позначені комплексно-спряжені процеси і сигнали відповідно до $s_1(t)$ та $s_2(t)$. Для періодичних процесів і сигналів із відомих причин енергію взаємодії визначають на періоді.

► **Приклад.**

Для періодичних процесів $s_1(t) = \cos \omega_1 t$ і $s_2(t) = \sin \omega_1 t$ визначити енергію кожного процесу та енергію взаємодії.

Енергія першого процесу за період

$$E_1 = \int_0^T \cos^2 \omega_1 t dt = \frac{1}{2} \int_0^T dt + \frac{1}{2} \int_0^T \cos 2\omega_1 t dt = \frac{1}{2} T + \frac{1}{2 \cdot 2\omega_1} \sin 2\omega_1 t \Big|_0^T = \frac{T}{2}.$$

Енергія другого процесу

$$E_2 = \int_0^T \sin^2 \omega_1 t dt = \frac{1}{2} \int_0^T dt - \frac{1}{2} \int_0^T \cos 2\omega_1 t dt = \frac{T}{2}.$$

Енергія взаємодії за період заданих процесів

$$E_B = 2 \int_0^T \cos \omega_1 \lambda \cdot \sin \omega_1 \lambda d\lambda = \int_0^T \sin 2\omega_1 \lambda d\lambda = -\frac{1}{2\omega_1} \cos 2\omega_1 \lambda \Big|_0^T = 0.$$



Таким чином, гармонічні процеси і сигнали $\cos \omega_1 t$ та $\sin \omega_1 t$ тієї самої частоти характеризуються нульовим значенням енергії взаємодії за період. Очевидно, що пара процесів або сигналів (функцій) $\cos k\omega_1 t$ та $\sin k\omega_1 t$ за будь-яких цілих чисел $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ наділені такою самою властивістю. Зрозуміло, що інтервалом ортогональності періодичних процесів і сигналів є період.

- ◆ **Процеси чи сигнали, взаємна енергія яких на нескінченному часовому інтервалі $(-\infty, \infty)$ або його відрізьку кінцевої тривалості $[t_1, t_2]$ дорівнює нулю, називаються ортогональними, а сам інтервал (відрізок) - інтервалом ортогональності.**

Інтеграл від добутку двох функцій (2.8) чи (2.9) в математиці називають **скалярним добутком**. Тоді два процеси або сигнали

2.2 Енергетичні характеристики періодичних процесів

$s_1(t)$ і $s_2(t)$ є ортогональними на деякому часовому інтервалі, якщо їхній скалярний добуток ($s_1 \cdot s_2$) на цьому інтервалі дорівнює нулю.

Якщо будь-яка пара деякої довільної сукупності процесів чи сигналів (функцій) задовольняє умові ортогональності, то таку сукупність називають **системою ортогональних процесів (сигналів)**.

Наведемо приклад такої системи, складовими якої є періодичні процеси або сигнали:

$$1; \cos\omega_1 t, \sin\omega_1 t; \cos 2\omega_1 t, \sin 2\omega_1 t; \cos 3\omega_1 t, \sin 3\omega_1 t; \dots$$

ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. Енергетичні властивості процесів і сигналів кінцевої тривалості оцінюють через енергію та миттєву потужність, а періодичних або нескінченно подовжених у часі – середню та миттєву потужність.

2. Для періодичних процесів і сигналів, у тому числі і гармонічних, операція усереднення здійснюється на часовому інтервалі, який збігається з періодом.

3. Для різних за призначенням систем значення шпаруватості періодичних послідовностей імпульсів є різним.



Треба вміти:

1. Визначити поняття: миттєва та середня потужності, енергія та енергія взаємодії дійсних та комплексних періодичних процесів і сигналів,



Слід запам'ятати:

1. Визначення понять: миттєва та середня потужності, енергія та енергія взаємодії дійсних та комплексних періодичних процесів і сигналів, шпаруватість періодичної послідовності, скалярний добуток, ортогональні процеси і сигнали, інтервал ортогональності.

2. Усі енергетичні характеристики періодичних процесів і сигналів визначаються за період.

3. Середня потужність гармонічного процесу (сигналу) дорівнює квадрату його ефективного значення або половині квадрата максимального значення.

4. Пара процесів або сигналів $\cos k\omega_1 t$ та $\sin k\omega_1 t$ за будь-яких цілих чисел $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ є ортогональними.

5. Формули:

$$p(t) = s^2(t), \quad p(t) = |s(t)|^2$$

- миттєва потужність відповід-

шпаруватість періодичної послідовності, скалярний добуток процесів чи сигналів, ортогональні процеси і сигнали, інтервал ортогональності.

2. Записати формули миттєвої потужності, енергії та середньої потужності дійсного та комплексного сигналів, середньої потужності періодичного гармонічного процесів і сигналів, енергії взаємодії двох дійсних та комплексних процесів і сигналів.

3. Визначати енергетичні характеристики періодичних сигналів і процесів.

4. Довести, що процеси або сигнали будь-якої пари $\cos k\omega_1 t$ і $\sin k\omega_1 t$ за будь-яких цілих чисел $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ є ортогональними.

но дійсного та комплексного процесу і сигналу;

$$E_s = \int_{t_1}^{t_2} s^2(t) dt, \quad E_s = \int_{t_1}^{t_2} |s(t)|^2 dt$$

- енергія дійсного та комплексного процесу і сигналу;

$$P_{cp} = \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} s^2(t) dt -$$

- середня потужність дійсного процесу і сигналу;

$$P_{cp} = \lim_{t_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |s(t)|^2 dt$$

- середня потужність комплексного процесу і сигналу;

$$P_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt$$

- середня потужність періодичного процесу і сигналу.

2.3 Спектральний аналіз періодичних процесів

Загальні положення. Дослідження процесів і сигналів за їхньою зміною в часі та просторі не є єдино можливим. У багатьох випадках доцільно застосовувати підхід, що базується на розкладанні довільного процесу чи сигналу на сукупність елементарних складових, які в сумі дають початковий довільний процес чи сигнал. Особливо ефективним цей спосіб є при аналізі процесів і сигналів у лінійних системах, для яких є справедливим принцип суперпозиції.

2.3 Спектральний аналіз періодичних процесів

Прийнято сукупність введених елементарних процесів (сигналів) називати **спектральними складовими** або **базисом розкладання процесу (сигналу)** чи просто його **спектром**.

Спектр (латинською мовою **spectrum**) - представлення, образ. Загалом спектр - це сукупність усіх значень деякої фізичної величини, що повністю характеризує речовину, об'єкт, явище; сукупність різних точок зору з деякої проблеми, що обговорюється; склад білого світла тощо.

♦ **Спектр процесу (сигналу)** - це сукупність процесів (сигналів) заданої форми, які в сумі дають початковий процес (сигнал).

Розрізняють спектри **дискретні, неперервні** та **змішані**. Дискретний спектр характеризується лічильною, неперервний нелічильною множиною нескінченної або обмеженої кількості спектральних складових. Для змішаного спектра характерне об'єднання дискретного та неперервного спектрів.

Добре відомо, що процеси і сигнали, які тривають в часі та просторі нескінченно довго, наприклад, такі, як періодичні, подаються дискретними спектрами, тобто у вигляді лічильної суми або, як кажуть, ряду виду

$$s(t) = \sum_i \alpha_i e_i(t) = \alpha_1 e_1(t) + \alpha_2 e_2(t) + \dots + \alpha_i e_i(t) + \dots, \quad (2.10)$$

де $e_i(t)$ - спектральні складові.

Для неперіодичних процесів і сигналів характерним є неперервний або змішаний спектри. При цьому процес або сигнал подається континуальною (нелічильною) множиною елементарних складових:

$$s(t) = \int \alpha(\lambda) e(\lambda, t) d\lambda. \quad (2.11)$$

Вагові коефіцієнти α_i і $\alpha(\lambda, t)$ в (2.10) та (2.11) називають **спектральними функціями, спектральними характеристиками** або **спектральними параметрами** довільного процесу і сигналу $s(t)$.

Очевидно, що за визначеного базису розкладання, довільний процес і сигнал повністю описується спектральними характеристиками або спектральними функціями.

Вибір системи елементарних процесів і сигналів (функцій, що їх описують) багато в чому залежить від:

- наявності методу, що дозволяє легко (з мінімальними затратами) обчислювати спектральні параметри α_i і $\alpha(\lambda)$;
- наявності раціонального способу визначення реакції системи на дію у вигляді елементарного процесу (сигналу) $e_i(t)$, $e(t, \lambda)$;
- необхідності точного чи приблизного розкладання довільного процесу або сигналу на елементарні.

Можна застосовувати різні системи елементарних складових. У сучасній теорії та практиці процесів, сигналів та систем найпоширеніші базиси ортогональних процесів (сигналів і функцій), що є **власними функціями** системи.

Системи ортогональних процесів і сигналів (функцій). Означення ортогональності вже розглядалось в контексті визначення енергії взаємодії двох процесів і сигналів. Наведемо узагальнення основних означень, що стосуються властивостей ортогональних базисів.

Розглянемо нескінченну систему функцій

$$e_0(t), e_1(t) \dots e_k(t) \dots, \quad (2.12)$$

причому таку, що кожна з цих функцій тотожно не обертається в нуль на часовому відрізку $[t_1, t_2]$. Це фактично означає, що процес чи сигнал, який описується функцією $e_i(t)$ на інтервалі $[t_1, t_2]$ характеризується ненульовим значенням енергії.

Тоді, подібно до (2.8) та (2.9), така система функцій є попарно ортогональною на відрізку $[t_1, t_2]$, якщо

$$\int_{t_1}^{t_2} e_i(\lambda) e_j(\lambda) d\lambda = 0, \quad i \neq j \quad (2.13)$$

- для дійсних функцій (процесів і сигналів);

2.3 Спектральний аналіз періодичних процесів

$$\int_{t_1}^{t_2} e_i(\lambda) e_j^*(\lambda) d\lambda = \int_{t_1}^{t_2} e_i(\lambda) e_j(\lambda) d\lambda = 0, \quad i \neq j \quad (2.14)$$

- для функцій (процесів і сигналів), які приймають комплексні значення.

Умови (2.13) та (2.14) виражають попарну ортогональність процесів і сигналів системи (2.12).

► Приклад.

Визначити, чи є процеси $s_1(t) = \exp(j\omega_0 t)$ та $s_2(t) = \exp(-j\omega_0 t)$ ортогональними та на якому часовому відрізку?

Задані процеси є комплексними. Згідно з (2.9) енергія взаємодії таких процесів

$$\begin{aligned} E_B &= 2 \int_{t_1}^{t_2} s_i(t) s_j^*(t) dt = 2 \int_{t_1}^{t_2} e^{j\omega_0 t} e^{j\omega_0 t} dt = 2 \int_{t_1}^{t_2} e^{2j\omega_0 t} dt = \\ &= 2 \int_{t_1}^{t_2} \cos 2\omega_0 t dt + j2 \int_{t_1}^{t_2} \sin 2\omega_0 t dt. \end{aligned}$$

Очевидно, що коли інтервал $[t_1, t_2]$ збігається з періодом $T = 2\pi/\omega_0$, або кратний йому, то як перший, так і другий інтеграли обертаються в нуль. Тоді енергія взаємодії процесів $E_B = 0$, що задовольняє умову ортогональності (2.14) комплексних процесів $s_1(t)$ та $s_2(t)$.

На відрізку ортогональності $[0, T]$ значення енергії кожного із вказаних комплексних процесів однакові. Дійсно, згідно з (2.4)

$$E_{s1} = \int_{t_1}^{t_2} |s_1(\lambda)|^2 d\lambda = \int_0^T |e^{j\omega_0 \lambda}|^2 d\lambda = \int_0^T 1^2 d\lambda = T = E_{s2},$$

де враховано, що модулі процесів $s_1(t) = \exp(j\omega_0 t)$ та $s_2(t) = \exp(-j\omega_0 t)$ однакові і дорівнюють одиниці.

◻

► Приклад.

Визначити енергію E_s дійсного процесу $s(t)$, поданого рядом виду (2.10), за умови, що складові $e_i(t)$ задовольняють умову ортогональності (2.13).

Згідно з (2.3) енергія процесу

$$E_s = \int_{t_1}^{t_2} s^2(\lambda) d\lambda = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i e_i(\lambda) \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j e_j(\lambda) d\lambda = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \int_{t_1}^{t_2} e_i e_j d\lambda.$$

Відповідно до умови ортогональності (2.13) інтеграл у останньому співвідношенні не дорівнює нулю за однакових значень індексів i та j .

Тоді

$$E_s = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^2 \int_{t_1}^{t_2} e_i^2(\lambda) d\lambda = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^2 E_{ei}.$$

- ◆ Таким чином, енергія довільного процесу, як суми ортогональних, є зваженою сумою енергій кожного ортогонального процесу окремо з ваговими коефіцієнтами α_i , що визначаються спектральними характеристиками довільного процесу.

◻

► **Приклад.**

Обчислити енергію процесу $s(t) = \cos\omega_1 t + \sin\omega_1 t$.

Такий процес є сумою пари ортогональних процесів $s_1(t) = \cos\omega_1 t$ і $s_2(t) = \sin\omega_1 t$, енергія кожного з яких дорівнює $T/2 = 2\pi/2\omega_1 = \pi/\omega_1$. Згідно зі зробленим висновком енергія заданого процесу $s(t)$ дорівнює сумі енергій складових процесів, тобто T . Такий же результат дає безпосереднє обчислення за формулою (2.3):

$$\begin{aligned} E_s &= \int_0^T (\cos \omega_1 \lambda + \sin \omega_1 \lambda)^2 d\lambda = \int_0^T (\cos^2 \omega_1 \lambda + \sin^2 \omega_1 \lambda) d\lambda + \\ &+ 2 \int_0^T \cos \omega_1 \lambda \sin \omega_1 \lambda d\lambda = \int_0^T 1 d\lambda + \int_0^T 2 \sin(2\omega_1 \lambda) d\lambda = T + 0 = T. \end{aligned}$$

◻

Ряд (2.10) за умови, що його складові $e_i(t)$ є неперервними, характеризуються кінцевою енергією E_{ei} та ортогональні на відріжку $[t_1, t_2]$, а коефіцієнти α_i обчислюється за формулою

$$\alpha_i = \frac{1}{E_{ei}} \int_{t_1}^{t_2} s(\lambda) e_i(\lambda) d\lambda \quad (2.15)$$

- для дійсних процесів і сигналів; і формулою

$$\alpha_i = \frac{1}{E_{ei}} \int_{t_1}^{t_2} s(\lambda) e_i^*(\lambda) d\lambda \quad (2.16)$$

- для комплексних називають **узагальненим рядом Фур'є**.

Такий ряд характеризується дуже важливою властивістю:

- ◆ **за заданої системи $e_i(t)$ та фіксованого числа складових (членів) узагальнений ряд Фур'є забезпечує найкращу можливу апроксимацію процесу або сигналу $s(t)$ за критерієм середньоквадратичної похибки:**

$$\Delta E_s = \int_{t_1}^{t_2} [s(\lambda) - \sum_{i=0}^N \alpha_i e_i(\lambda)]^2 d\lambda .$$

Коли деякий процес чи сигнал подано сумою елементарних процесів чи сигналів $e_i(t)$, то кажуть, що виконано спектральне розкладання довільного процесу і сигналу в заданому базисі. Визначення ж спектральних характеристик називають **спектральним аналізом** процесу або сигналу. Обернена операція відтворення початкового процесу або сигналу $s(t)$ за його спектральними характеристиками в базисі $\{e_i(t)\}$ називається **поновленням** або **синтезом** процесу або сигналу.

За необхідності точного розкладання довільного процесу (сигналу) на суму ортогональних складових на практиці найчастіше використовують базиси із гармонічних процесів і сигналів або їхні символічні (комплексні) зображення. Це обумовлено рядом чинників. *По-перше*, гармонічне коливання є найпростішим процесом (сигналом), що визначений для всіх значень часової змінної та не підлягає подальшому спектральному аналізу. *По-друге*, гармонічний процес (сигнал) зберігає форму при проходженні через лінійну стаціонарну систему. І *по-третьє*, ряд методів аналізу лінійних систем, зокрема, символічний, орієнтовані на гармонічні дії.

Для забезпечення приблизного розкладання довільного процесу і сигналу використовують і інші системи ортогональних функцій: поліноми Чебишева, Ерміта, Лагерра, Лежандра тощо. Предметом наших інтересів буде гармонічний аналіз.

Процеси і сигнали, як власні функції системи. Очевидно, що використання ортогональних систем вирішує проблему оптимального спектрального аналізу процесів і сигналів тільки наполовину. Дуже важливо в якості базису розкладання вибирати такі ортогональні процеси і сигнали, які інваріантні відносно перетворень, що виконуються фізичними системами. У цьому разі реакція $y(t)$ за формою буде такою, як і діючий процес або сигнал $x(t)$:

$$y(t) = F\{x(t)\} = Kx(t),$$

де K – коефіцієнт пропорційності. Тоді процес або сигнал $x(t)$ називають **власною функцією** фізичної системи або оператора F , що описує її властивості, а сам оператор F - **власним** або **характеристичним значенням** системи.

Відомо, що усталена реакція лінійної стаціонарної системи на гармонічний процес чи сигнал є гармонічною тієї самої частоти. Отже, гармонічний процес і сигнал є власною функцією лінійної інваріантної системи (ЛІВ).

► **Приклад.**

Визначити реакцію ЛІВ системи на дію комплексного експонентного сигналу $x(t) = e^{j\omega t}$.

Згідно з інтегралом Дюамеля реакція

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^t g(\lambda)x(t-\lambda)d\lambda = \int_{-\infty}^t g(\lambda)e^{j\omega(t-\lambda)}d\lambda = \\ &= \int_{-\infty}^t g(\lambda)e^{-j\omega\lambda}d\lambda]e^{j\omega t} = F\{x(t)\} = Kx(t). \end{aligned}$$



Отже, комплексний процес і сигнал $e^{j\omega t}$ є власною функцією ЛІВ системи, а комплексний коефіцієнт

2.3 Спектральний аналіз періодичних процесів

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) e^{-j\omega\lambda} d\lambda = F(j\omega)$$

- її власним значенням.

У теорії лінійних систем, як відомо, $F(j\omega)$ називають **комплексною частотною функцією (КЧФ)** системи.

► Приклад.

Визначити реакцію ЛІВ системи на діюсигналу, поданого узагальненим рядом Фур'є (2.10) в базисі комплексних експонентних процесів $e^{j\omega_i t}$.

За умовою діючий сигнал $x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} X_i e^{j\omega_i t}$, реакція на кожен складову якого $y_i(t) = F(j\omega_i) X_i e^{j\omega_i t}$.

Тоді згідно з принципом суперпозиції загальна реакція на дію сигналу $x(t)$ дорівнює

$$y(t) = F\{x(t)\} = \sum y_i(t) = \sum_{i=0}^{\infty} F(j\omega_i) X_i e^{j\omega_i t} = \sum_{i=0}^{\infty} Y_i e^{j\omega_i t}.$$

■

Таким чином, знаючи спектральні характеристики X_i періодичного або нескінченно подовженого в часі діючого процесу і сигналу в базисі експонентних функцій відповідні характеристики реакції ЛІВ системи можна обчислити за допомогою операції множення комплексної частотної функції $F(j\omega_i)$ на відповідну спектральну характеристику дії.

Спектральні характеристики неперіодичних процесів і сигналів, зокрема кінцевої тривалості, є комплексними функціями неперервної ω , а не дискретної частоти ω_i , а тому в базисі експонентних функцій спектральна характеристика реакції $Y(j\omega) = F(j\omega)X(j\omega)$.

Комплексна частотна функція ЛІВ системи є основною характеристикою, що відображає взаємозв'язок між спектральними характеристиками реакції і дії в базисі комплексних експонентних процесів відносно частоти $\omega = 2\pi f$, тобто – в частотній області.

Вираз виду $A_m e^{j\alpha} e^{j\omega t} = A_m e^{j(\alpha + j\omega t)} = \dot{A}_m e^{j\omega t}$ є комплексним миттєвим значенням (символічним зображенням) гармонічного процесу і сигналу $s_1(t) = A_m \cos(\omega t + \alpha_1)$ в косинусній або

$s_2(t) = A_m \sin(\omega t + \alpha_2)$ в синусній формах. Тому КЧФ $F(j\omega)$ в частотній області відображає перетворення над спектральними характеристиками дії і в базисі гармонічних функцій.

Підсумовуючи, зазначимо:

- спектральні характеристики процесів і сигналів пов'язані з базисом розкладання;
- оптимальним є вибір ортогональних та власних функцій системи в якості спектральних складових;
- серед різноманітних систем ортогональних функцій, які можуть використовуватися для спектрального подання довільних процесів і сигналів, особливе місце, з ряду названих причин, займають гармонічні. Ось чому в подальшому, якщо додатково не буде обумовлено інше, йдеться про гармонічний аналіз процесів і сигналів та відповідні ним спектральні характеристики.

Періодичний процес і сигнал характеризується дискретним спектром і може бути описаний узагальненим рядом Фур'є (2.10). В базисі гармонічних функцій періодичний процес і сигнал подається нескінченною сумою лічених гармонічних коливань з відповідними значеннями амплітуди, початкової фази та частоти.

Частоти гармонічних спектральних складових періодичного процесу і сигналу задовольняють **умову кратності**:

$$f_k / f_n = k / n; f_k = kf_1; k = 0,1,2,3,\dots n = 1,2,3,\dots, \quad (2.17)$$

де k та n - цілі числа.

Гармонічні складові з вказаними частотами називають **гармоніками**. Коливання з нульовим значенням частоти $f = f_0 = 0$ ($\omega = \omega_0 = 0$) є **нульовою гармонікою** або постійною складовою, з частотами $f = f_1$ ($\omega = \omega_1$) - **першою**, $f = f_2 = 2f_1$ ($\omega = \omega_2 = 2\omega_1$) - **другою**.

Складові з номерами два і більше називають **вищими гармоніками**. Частота першої гармоніки завжди визначається періодом періодичного процесу (сигналу): $f_1 = 1/T$ ($\omega_1 = 2\pi/T$).

Згідно з (2.17) значення частот гармонік відносяться одне до одного як цілі числа, які є номерами гармонік.

- ◆ **Спектр, який складається із гармонічних коливань кратних частот (гармонік), називається гармонічним дискретним спектром або просто спектром гармонік.**

Дискретний гармонічний спектр є характерною ознакою періодичних процесів і сигналів. Якщо частоти гармонічних складових дискретного спектра не задовольняють умову кратності, то такий процес і сигнал є неперіодичним нескінченно подовженим у часі. Подібні процеси і сигнали називають **квазіперіодичними**.

► **Приклад.**

Визначити, чи є детермінований процес, який містить чотири гармонічні складові з частотами 1,2 кГц, 2,7 кГц, 3,6 кГц та 7,8 кГц, періодичним?

Згідно з (2.17) відношення значень частот складових

$$\frac{1,2}{2,7} = \frac{12}{27}, \frac{1,2}{3,6} = \frac{12}{36}, \frac{1,2}{7,8} = \frac{12}{78}, \frac{2,7}{3,6} = \frac{27}{36}, \frac{2,7}{7,8} = \frac{27}{78}, \frac{3,6}{7,8} = \frac{36}{78}$$

є відношенням цілих чисел. Отже, задані гармонічні складові є гармоніками, а процес періодичним.

Оскільки найбільшим спільним дільником чисел 12, 27, 36 та 78 є число 3, то поділивши на нього названі числа, отримаємо номери гармонік 4, 9, 12 та 26, частоти яких відповідно 1,2 кГц, 2,7 кГц, 3,6 кГц та 7,8 кГц.

Тоді частота першої гармоніки $f_1 = \frac{1,2}{4} = \frac{2,7}{9} = \frac{3,6}{12} = \frac{7,8}{26} = 0,3$ кГц.



► **Приклад.**

Визначити, чи є детермінований процес, який містить три гармонічні складові з частотами 1,2 кГц, $\sqrt{2}$ кГц та 3,5 кГц, періодичним?

Згідно з (2.17) відношення значень частот складових

$$\frac{1,2}{\sqrt{2}} = \frac{12}{10\sqrt{2}}, \frac{1,2}{3,5} = \frac{12}{35}, \frac{\sqrt{2}}{3,5} = \frac{10\sqrt{2}}{35}$$

не є відношенням цілих чисел. Отже, задані гармонічні складові не є гармоніками, а процес вважається квазіперіодичним.



У базисі гармонічних функцій узагальнений ряд Фур'є (2.10) для періодичного процесу і сигналу називають **рядом Фур'є**, коефіцієнти α_i якого є спектральними характеристиками періодичного процесу і сигналу і містять інформацію про амплітуди та початкові фази гармонік.

На практиці для визначення спектральних характеристик періодичного процесу і сигналу використовуються три основні форми ряду Фур'є:

- **тригонометрична форма:**

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t) \quad (2.18)$$

де коефіцієнти a_n та b_n визначають спектральні властивості періодичного детермінованого процесу і сигналу і обчислюються за формулами:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos n\omega_1 t dt; \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin n\omega_1 t dt; \quad (2.19)$$

- **амплітудно-фазова форма:**

$$s(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cos(n\omega_1 t + \alpha_n); \quad (2.20)$$

- **комплексна форма:**

$$s(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{mn} e^{jn\omega_1 t}. \quad (2.21)$$

де $\omega_1 = 2\pi f_1$ – кругова частота першої гармоніки, n – номер гармоніки.

Згідно з (2.18) та (2.20) процес чи сигнал містить дві складові: постійну та змінну.

Постійна складова періодичного процесу і сигналу

$$\frac{a_0}{2} = \frac{A_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(\lambda) d\lambda \quad (2.22)$$

є їхнім середнім значенням.

Тригонометрична та амплітудно-фазова форми ряду Фур'є основані на системі тригонометричних функцій

$$1; \cos\omega_1 t, \sin\omega_1 t; \cos 2\omega_1 t, \sin 2\omega_1 t; \cos 3\omega_1 t, \sin 3\omega_1 t; \dots,$$

а комплексна (2.21) – на сукупності комплексних:

$$\dots e^{-j2\omega_1 t}, e^{-j\omega_1 t}, 1, e^{j\omega_1 t}, e^{j2\omega_1 t}, \dots$$

При використанні амплітудно-фазової або комплексної форм ряду Фур'є спектральні характеристики визначають на базі комплексних амплітуд

$$\dot{A}_{mn} = A_{mn} e^{-j\alpha_n} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jn\omega_1 t} dt, \quad (2.23)$$

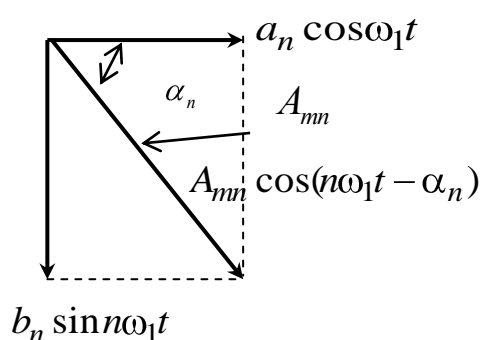


Рисунок 2.2 – До взаємозв'язку коефіцієнтів ряду Фур'є.

які дають повну інформацію про амплітуди A_{mn} та початкові фази α_n гармонічних складових.

Взаємозв'язок між різними формами спектральних характеристик періодичного процесу і сигналу в базисі гармонічних функцій для n -ї гармоніки, показано на рис. 2.2. При цьому є очевидними наступні співвідношення:

$$A_{mn} = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \alpha_n = -\arctg \frac{b_n}{a_n}, \quad a_n = A_{mn} \cos \alpha_n, \quad b_n = A_{mn} \sin \alpha_n. \quad (2.24)$$

Відповідно до (2.22) та (2.23) амплітуду A_{mn} і початкову фазу α_n гармоніки з номером n та коефіцієнти a_n і b_n можна розглядати як модуль і аргумент та дійсну і уявну частини відповідно комплексного числа $\dot{A}_{mn} = a_n - jb_n$.

Отже, амплітуди та початкові фази гармонік і є тими спектральними параметрами (характеристиками) періодичних процесів і сигналів, які підлягають визначенню при їх спектра-

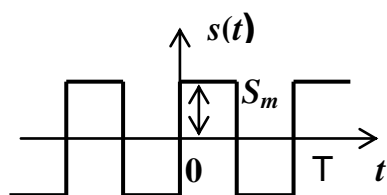


Рисунок 2.3 – Процес на зразок "меандр".

льному аналізу, оскільки частоти гармонік відомі згідно з умовою кратності (2.17).

Сукупність амплітуд спектральних складових ще називають **амплітудним**, а початкових фаз – **фазовим спектром**.

► **Приклад.**

Визначити спектральні параметри періодичного сигналу у вигляді прямокутного коливання (рис. 2.3), яке зветься **меандром** (у перекладі з грецької – “**орнаментр**”).

Такі сигнали широко застосовується в вимірювальних системах та комплексах.

Оскільки заданий сигнал $s(t)$ описується непарною функцією, симетричною відносно осі абсцис, то відповідно до (2.22) постійна складова $a_0=0$. Нульове значення приймають і косинусні складові в (2.18), оскільки згідно з (2.19) $a_n(n = 1,2,3,...) = 0$. Отже, заданий сигнал подається тільки синусними складовими для форми (2.18) з амплітудами

$$\begin{aligned} b_n = A_{mn} &= -\frac{2}{T} \int_{-T/2}^0 S_m \sin n\omega_1 t dt + \frac{2}{T} \int_0^{T/2} S_m \sin n\omega_1 t dt = 2 \cdot \frac{2}{T} \int_0^{T/2} S_m \sin n\omega_1 t dt = \\ &= -\frac{4S_m}{n\omega_1 T} \cos n\omega_1 t \Big|_0^{T/2} = \frac{4S_m}{n\omega_1 T} (1 - \cos \frac{n\omega_1 T}{2}) = \\ &= \frac{2S_m}{\pi n} (1 - \cos \pi n) \Rightarrow \begin{cases} 0 & n = 2,4,6,8...; \\ \frac{4S_m}{\pi n} & n = 1,3,5... \end{cases} \end{aligned}$$

Тоді початкові фази гармонік із непарними номерами $\alpha_n(n = 1,3,5...) = -\pi/2$.

Остаточно маємо спектральне зображення заданого сигналу:

$$s(t) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} A_{mn} \cos(n\omega_1 t - \frac{\pi}{2}) = \frac{4S_m}{\pi} (\sin \omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_1 t \dots).$$



Наведений приклад є ілюстрацією наступних тверджень, справедливих для періодичних процесів і сигналів:

- ◆ *постійна складова будь-якого непарного періодичного процесу і сигналу, симетричного відносно осі абсцис, дорівнює нулю;*
- ◆ *початкові фази всіх ненульових гармонік непарного періодичного процесу і сигналу дорівнюють $-\pi/2$;*
- ◆ *періодичний непарний симетричний відносно осі абсцис процес і сигнал містить гармоніки тільки з непарними номерами $n=1, 3, 5, \dots$.*

Поновлення періодичних процесів і сигналів за їхніми спектрами згідно з комплексною формою ряду Фур'є потребує значень амплітуд і початкових фаз гармонік, що відповідають як додатним, так і від'ємним значенням індекса n . Згідно з (2.24) та відповідно до (2.19) амплітуди гармонік із однаковими за значенням, але протилежними за знаком, номерами характеризуються однаковими амплітудами, а їхні початкові фази рівні за величиною, але протилежні за знаком. Кажуть, що спектр амплітуд є парною функцією номера гармоніки, а спектр початкових фаз – непарною функцією:

$$A_{m(-n)} = A_{mn}; \quad \alpha_{-n} = -\alpha_n.$$

Спектральні діаграми. Спектральні характеристики процесів і сигналів дуже зручно подавати у вигляді відповідних графічних зображень, які називаються **спектральними діаграмами**. Для періодичного процесу і сигналу спектральні діаграми є графічним зображенням значень амплітуд та початкових фаз гармонік (за амплітудно-фазової чи комплексної форм ряду Фур'є) або коефіцієнтів a_n, b_n .

Графічне зображення амплітуд гармонік (амплітудного спектра) називають **спектральною діаграмою амплітуд**, а їх початкових фаз (фазового спектра) – **спектральною діаграмою початкових фаз**.

Спектральна діаграма амплітуд (фаз) є сукупністю вертикальних ліній, перпендикулярних частотній осі абсцис і зосереджених в точках, що відповідають частотам гармонік. Висоти ліній співвідносяться відповідно до амплітуд та початкових фаз гармонік, а відстань між лініями є сталою і визначається частотою першої гармоніки (рис. 2.4). Особлива форма спектральних діаграм періодичних

процесів і сигналів зумовила і широкоживану назву їхніх спектрів – **лінійчасті спектри**.

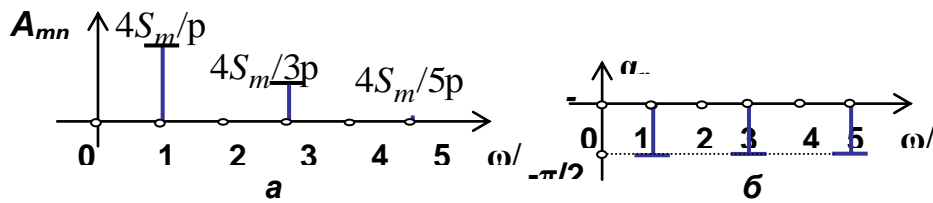


Рисунок 2.4 – Спектральні діаграми амплітуд (а) та початкових фаз (б) меандра.

На даному прикладі прослідковується ряд властивостей спектральних характеристик (спектрів) та спектральних діаграм детермінованих періодичних процесів і сигналів.

- Незалежно від властивостей періодичного процесу чи сигналу амплітуди гармонік із збільшенням номера гармоніки зменшуються.
- Починаючи з деякого номера n , амплітуди гармонік приймають настільки малі значення, що ними можна знехтувати.
- Враховуючи, що потужність гармонічного процесу і сигналу визначається квадратом його амплітуди, за його амплітудним спектром можна судити про діапазон частот, у межах якого зосереджені найбільш енергетично значимі гармонічні складові.

Ширина спектра. З огляду на вказані особливості амплітудних спектрів періодичних процесів і сигналів, а також на те, що реальні системи перетворюють процеси і сигнали з допустимими спотвореннями в межах обмеженого частотного діапазону, який називають **смужкою пропускання системи** $\Delta\omega_c(\Delta f_c)$, при поновленні процесів і сигналів використовують обмежену, а нескінченну теоретично, кількість спектральних складових. За таких умов процес і сигнал подається **обмеженим спектром**.

- ◆ Діапазон частот, в межах якого зосереджений обмежений спектр процесу чи сигналу, називається **шириною спектра** $\Delta\omega_{сп}(\Delta f_{сп})$.

Ширина спектра, як частотний діапазон, обмежується знизу частотою $\omega_{\min}(f_{\min})$ і зверху – частотою $\omega_{\max}(f_{\max})$. Очевидним є наступне співвідношення:

$$\Delta\omega_{\text{сп}} = \omega_{\max} - \omega_{\min}; \quad \Delta f_{\text{сп}} = f_{\max} - f_{\min}. \quad (2.25)$$

Практично за ширину спектра беруть діапазон частот, в межах якого зосереджені гармоніки з сумарним енергетичним ефектом, що становить не менше 90% енергії (потужності) всього процесу чи сигналу. Це так званий **енергетичний критерій** визначення **ефективної ширини спектра**. Ширину спектра, що відповідає 95% повної енергії, називають **активною шириною спектра**.

Зазначимо, що такий параметр процесів і сигналів, як ширина спектра, обов'язково повинен бути узгодженим із смугою пропускання системи для забезпечення отримання достовірної інформації. Так, канали телефонного зв'язку характеризуються смугою пропускання від 100 Гц до 3,4 кГц, оскільки функціонально призначені для передавання мовних повідомлень (голосу людини), для яких енергетично значимі гармоніки, зосереджені всередині вказаного частотного діапазону.

ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. Спектральні характеристики процесів і сигналів пов'язані з базисом розкладання.
2. Оптимальним є вибір у якості спектральних складових ортогональних процесів і сигналів, що є власними функціями системи.
3. Серед різноманітних систем ортогональних складових, які можна використовувати для



Слід запам'ятати:

1. Визначення понять: спектр процесу і сигналу, дискретний, неперервний та змішаний спектри, процеси і сигнали, що є власними функціями системи, спектральний аналіз та синтез процесів і сигналів, характеристичне значення системи, узагальнений ряд Фур'є.
2. Періодичні та нескінченно подовжені в часі неперіодичні процеси і сигнали подаються дис-

спектрального зображення до- вільних процесів і сигналів, чі- льне місце належить комплекс- ним експонентним і гармоніч- ним.

4. Під час спектрального аналізу періодичних процесів і сигналів амплітуди та початкові фази гармонік і є тими спектра- льними характеристиками, які підлягають визначенню.

5. Спектральне подання пе- ріодичного процесу і сигналу є залежним від вигляду їхньої симетрії.

6. Такий параметр процесів і сигналів, як ширина спектра, обов'язково повинен бути узго- дженим із смугою пропускання системи.

7. За амплітудним спектром періодичного процесу і сигналу можна судити про діапазон ча- стот, у межах якого зосере- джені найбільш енергетично значимі гармонічні складові.

8. Поновлення періодичних процесів і сигналів за їхніми спектрами згідно з комплекс- ною формою ряду Фур'є потре- бує значень амплітуд і початко- вих фаз гармонік, що відпові- дають як додатним, так і від'ємним значенням індекса n .



Треба вміти:

1. Визначити поняття: дис- кретний, неперервний та змі-

кретними спектрами. Для процесів і сигналів кінцевої тривалості ха- рактерним є неперервний або змішаний спектри.

3. Енергія довільного сигналу (процесу) як суми ортогональних є зваженою сумою енергій кожно- го ортогонального сигналу (про- цесу) з ваговими коефіцієнтами, що визначаються спектральними характеристиками довільного си- гналу (процесу).

4. Узагальнений ряд Фур'є за- безпечує найкращу можливу ап- роксимацію довільного процесу і сигналу за критерієм середньок- вадратичної похибки для задано- го базису розкладання та фіксо- ваної кількості членів ряду.

5. Умову ортогональності пари дійсних та комплексних процесів і сигналів.

6. Визначення понять: гармоні- ка, спектр гармонік, квазіперіоди- чний сигнал, спектральна діагра- ма, амплітудний і фазовий спект- ри, ширина спектра, активна і ефективна ширина спектра.

7. Спектр гармонік є характер- ною ознакою періодичних проце- сів і сигналів.

8. Неперіодичний нескінченно подовжений у часі процес і сигнал характеризуються дискретним га- рмонічним спектром, спектральні складові якого не є гармоніками.

9. Умову кратності для частот гармонік.

2.3 Спектральний аналіз періодичних процесів

шаний спектри, ортогональні процеси і сигнали, процеси і сигнали, що є власними функціями лінійної системи, спектральний аналіз та синтез процесів і сигналів, характеристичне значення системи, узагальнений ряд Фур'є.

2. Довести, що КЧФ є власною функцією лінійної системи.

3. Визначити поняття: гармоніка, спектр гармонік, квазіперіодичний сигнал, спектральна діаграма, амплітудний і фазовий спектри, ширина спектра, активна і ефективна ширина спектра.

4. Записати тригонометричну, амплітудно-фазову та комплексну форми ряду Фур'є.

5. За спектрами визначити, які з сигналів є періодичними або квазіперіодичними.

6. Довести співвідношення взаємозв'язку між різними формами ряду Фур'є.

7. Записати формулу для постійної складової дійсного періодичного процесу і сигналу.

8. Визначити спектральні параметри періодичних процесів і сигналів із урахуванням різних видів симетрії.

9. Будувати спектральні діаграми амплітуд і початкових фаз.

10. Сутність енергетичного критерію визначення ширини спектра.

11. Тригонометричну, амплітудно-фазову та комплексну форми ряду Фур'є.

12. Зі збільшенням номера амплітуди гармонік зменшуються.

13. Для періодичного симетричного відносно осі абсцис сигналу амплітуди гармонік із непарними номерами дорівнюють нулю.

2.4 Закономірності розподілу потужності в спектрі періодичних процесів

Як відмічалось раніше, основною енергетичною характеристикою періодичних процесів і сигналів є середня потужність за період:

$$P_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} p(\lambda) d\lambda = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(\lambda) d\lambda. \quad (2.26)$$

Використовуючи амплітудно-фазову форму ряду Фур'є (2.20), згідно з (2.26) маємо:

$$P_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cos(n\omega_1\lambda - \alpha_n) \right]^2 d\lambda.$$

При піднесенні до квадрата підінтегрального виразу отримаємо такі складові:

1. $A_0^2 / 4$;

2. $A_{mn}^2 \cos^2(n\omega_1\lambda - \alpha_n) = \frac{A_{mn}^2}{2} + \frac{A_{mn}^2}{2} \cos(2n\omega_1\lambda - 2\alpha_n)$;

3. $A_0 A_{mn} \cos(n\omega_1\lambda - \alpha_n)$;

4.

$$2A_{mn} \cos(n\omega_1\lambda - \alpha_n) A_{mk} \cos(k\omega_1\lambda - \alpha_k) = \\ = A_{mn} A_{mk} \{ \cos[(n+k)\omega_1\lambda - (\alpha_n + \alpha_k)] + \cos[(n-k)\omega_1\lambda - (\alpha_n - \alpha_k)] \}.$$

Інтеграл від функції косинуса в межах, що визначається її періодом, набуває нульового значення. Тому при інтегруванні наведених складових на періоді всі члени з косинусами обертаються в нуль. В результаті отримаємо:

$$P_{\text{cp}} = \left(\frac{A_0}{2}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{mn}^2}{2} = (S_{\text{cp}})^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{2}A_{\text{д}})^2}{2} = P_{\text{cp}=\text{}}^2 + P_{\text{cp}\sim}^2, \quad (2.27)$$

де $P_{\text{cp}=\text{}}^2$ та $P_{\text{cp}\sim}^2$ - відповідно середня потужність постійної та змінної складових періодичного процесу або сигналу. Враховано, що середня за період потужність гармонічного процесу чи сигналу дорівнює

квадрату його ефективного значення або половині квадрата його амплідуного значення.

- ◆ **Середня за період потужність періодичного процесу і сигналу дорівнює сумі середніх потужностей його гармонік.**

Відповідно до (2.27) середня потужність гармоніки тим більше, чим більше її амплітуда. Отже, потужність періодичного процесу і сигналу розподіляється по частотному діапазону (між гармоніками) прямопропорційно квадрату амплітуд гармонік.

- ◆ **Сукупність середніх потужностей гармонік періодичного процесу і сигналу називають спектром потужностей.**

Така характеристика дає інформацію про енергетичну значимість кожної гармоніки або її вклад в повну потужність процесу і сигналу.

Співвідношення (2.27) називають **рівністю Парсеваля** для періодичного процесу або сигналу, яке і відображає взаємозв'язок між його енергетичними та спектральними характеристиками.

- ◆ **Середня потужність періодичного процесу і сигналу визначається тільки амплітудами гармонік і незалежить від їхніх початкових фаз.**

Прирівнюючи праві частини виразів (2.26) та (2.27), отримуємо формулу, що встановлює взаємозв'язок між власне процесом (сигналом) $s(t)$ і його енергетичними та спектральними характеристиками у часовій та частотній областях:

$$P_{\text{ср}} = \underbrace{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(\lambda) d\lambda}_{\text{часова область}} = \underbrace{\frac{A_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{mn}^2}{2}}_{\text{частотна область}} = \frac{A_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{нд}^2. \quad (2.28)$$

- ◆ **Середню потужність періодичного процесу і сигналу можна визначити через квадрат функції, що описує про-**

2.4 Закономірності розподілу потужності в спектрі періодичних процесів

цес і сигнал, або за їхніми спектральним характеристиками.

► **Приклад.** Визначити спектр потужностей та його особливості для періодичної послідовності уніполярних імпульсів прямокутної форми (рис. 2.6, а) з парною симетрією відносно моменту часу $t=0$ та відомими параметрами: періодом T , тривалістю імпульсу $t_{\text{імп}}$ та ширинатістю Q .

Постійна складова процесу згідно з (2.22)

$$\frac{A_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-t_{\text{імп}}/2}^{t_{\text{імп}}/2} S_m d\lambda = \frac{S_m t_{\text{імп}}}{T} = \frac{S_m}{Q}.$$

Комплексні амплітуди гармонік змінної складової згідно з (2.23)

$$\begin{aligned} \dot{A}_{mn} &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(\lambda) e^{-jn\omega_1 \lambda} d\lambda = -\frac{2S_m}{Tjn\omega_1} e^{-jn\omega_1 \lambda} \Big|_{-t_{\text{імп}}/2}^{t_{\text{імп}}/2} = \frac{2S_m}{Tjn\omega_1} (e^{\frac{jn\omega_1 t_{\text{імп}}}{2}} - e^{-\frac{jn\omega_1 t_{\text{імп}}}{2}}) = \\ &= \frac{2S_m}{Q} \frac{\sin(n\omega_1 t_{\text{імп}}/2)}{n\omega_1 t_{\text{імп}}/2} = \frac{2S_m}{Q} \frac{\sin n\pi/Q}{n\pi/Q}. \end{aligned}$$

Модулі комплексних амплітуд визначають значення амплітуд гармонік з номерами $n=0, 1, 2, 3, \dots$, а їх аргументи – початкові фази:

$$A_{mn} = \frac{2S_m}{Q} \left| \frac{\sin(n\pi/Q)}{n\pi/Q} \right|; \quad (2.29)$$

$$\alpha_n = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \sin(n\pi/Q) \geq 0; \\ \pi, & \text{якщо } \sin(n\pi/Q) < 0. \end{cases} \quad (2.30)$$

Співвідношення враховують знакозмінність функції $\sin x/x$ та невід'ємність амплітуди гармонічного коливання. Тому початкові фази гармонік, частоти яких належать частотним інтервалам визначення визначення від'ємних значень комплексних амплітуд, збільшені на 180° .

Спектральні діаграми амплітуд та початкових фаз, що відповідають (2.29) та (2.30), показані на рис. 2.5 але тільки для фізично значимих (додатних) значень частоти. Особливістю спектральної діаграми амплітуд є її пелюсткова структура.

Аналіз формули (2.29) свідчить про те, що деякі гармоніки випадають із спектра, тобто їхні амплітуди дорівнюють нулю. Номери та частоти цих гармонік визначаються значеннями аргумента функції $\frac{\sin n\pi/Q}{n\pi/Q}$, за яких вона дорівнює нулю. Останнє справедливо для всіх чисел n_k , які задовольняють таку умову:

$$\frac{n_k \pi}{Q} = \pi k \Rightarrow n_k = Qk, \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (2.31)$$

Отже, в спектрі послідовності відсутні гармоніки з номерами, кратними значенню шпаруватості. Частоти таких гармонік дорівнюють $\omega_{0k} = 2\pi k / t_{\text{імп}}$ і називаються вони **нулями амплітудного спектра**.

Дійсно, частота гармоніки з номером n_k дорівнює $\omega_{0k} = n_k \omega_1$. З урахуванням (2.31)

$$\omega_{0k} = n_k \omega_1 = Qk \omega_1 = Tk \omega_1 / t_{\text{імп}} = 2\pi k \omega_1 / t_{\text{імп}} \omega_1 = 2\pi k / t_{\text{імп}}. \quad (2.32)$$

Очевидно, що кількість гармонік, які розміщуються між сусідніми нулями, дорівнює шпаруватості періодичної послідовності:

$$\frac{2\pi}{t_{\text{імп}} \omega_1} = \frac{\omega_1 T}{t_{\text{імп}} \omega_1} = Q.$$

У разі збільшення шпаруватості амплітуди гармонік зменшуються та вирівнюються і прямують до $2S_m / Q$, а їхня кількість істотно зростає. Зазначимо, що подібний ефект досягається збільшенням періоду (рис. 2.6, б) або зменшенням тривалості імпульсу (рис. 2.6, в).

У першому випадку ширина спектра залишається без змін, а зменшується відстань між гармоніками; в другому – кількість гармонік зростає за рахунок збільшення шпаруватості спектра, а відстань між гармоніками не змінюється.

Середня потужність всього процесу:

$$P_{\text{ср}} = \frac{2}{T} \int_0^{t_{\text{імп}}} S_m^2 d\lambda = \frac{S_m^2 t_{\text{імп}}}{T} = \frac{S_m}{Q}.$$

2.4 Закономірності розподілу потужності в спектрі періодичних процесів

Середня потужність нульової гармоніки та першої гармоніки:

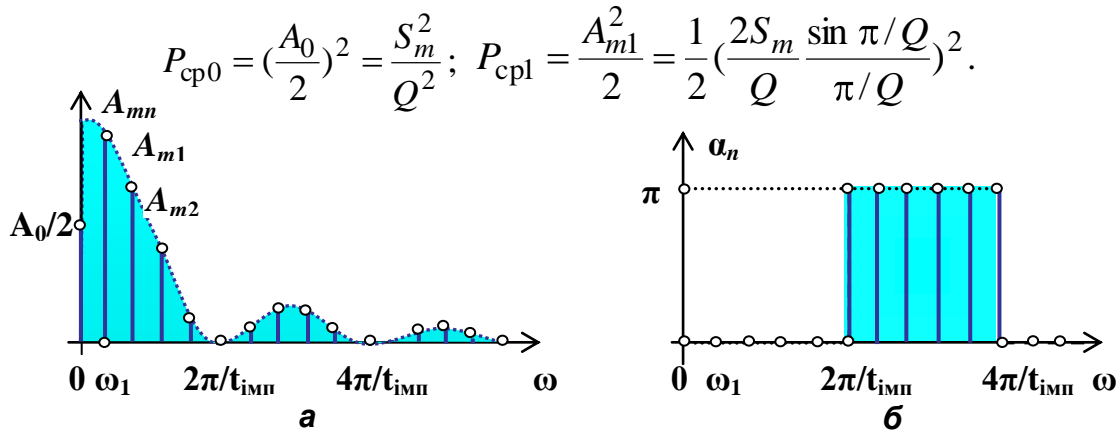


Рисунок 2.5 – Спектральна діаграма амплітуд (а) та початкових фаз (б) періодичної послідовності прямокутних імпульсів.

Припустімо, що шпаруватість $Q=2$. Тоді, потужність процесу $P_{cp} = S_m^2/2$, потужність постійної складової $P_{cp0} = S_m^2/4$, а першої гармоніки $P_{cp1} = 2S_m^2/\pi^2$. Потужність постійної складової становить 50 % потужності послідовності, а потужність першої – близько 40%, тоді

$$\frac{P_{cp1}}{P_{cp}} \cdot 100\% = \frac{2S_m^2}{\pi^2} \frac{2}{S_m^2} \cdot 100\% \approx 40,5\%.$$

Таким чином, потужність двох складових – нульової та першої гармонік, зосереджених згідно з (2.31) у частотному діапазоні $[0, 2\pi/t_{имп}]$, що обмежується першим нулем, - складає 90 % потужності всього процесу. В зв'язку з чим ширина спектра за енергетичним критерієм відносно 90 %-го рівня (ефективна ширина спектра) дорівнює $\Delta\omega_{сп. еф} = 2\pi/t_{имп} = \omega_1 Q$.

Активна ширина спектра обмежується другим нулем $\omega_{02} = 4\pi/t_{имп}$, і вдвічі перевищує ефективну ширину спектра. Отже, двократне розширення частотного діапазону веде до зростання потужності зосереджених у ньому гармонік послідовності всього приблизно на 5%. Це потребує збільшення вдвічі смуги пропускання системи обробки такого процесу. Очевидно, що завадостійкість системи зменшується, оскільки за таких умов завади можуть збільшити свою енергію вдвоє. Ось чому не виправдане розширення смуги пропускання систем є небажаним.

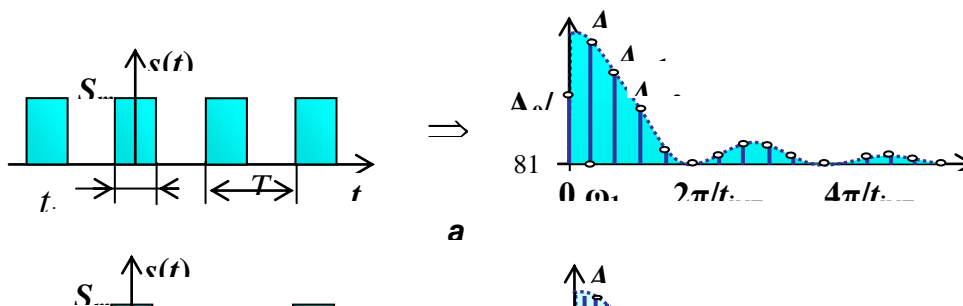


Рисунок 2.6 – Вплив періоду та тривалості на спектр періодичної послідовності прямокутних відеоімпульсів.

ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. Середню потужність періодичного сигналу можна визначити через квадрат функції, що описує його у часовій області, або за спектральними характеристиками.

2. Кількість гармонік між сусідніми нулями амплітудного спектра періодичної послідовності прямокутних відеоімпульсів дорівнює її шпаруватості. У разі збільшення шпаруватості амплітуди гармонік зменшуються і прямують до $2S_m/Q$, а їхня кількість істотно зростає. Подібний ефект досягається збільшенням періоду або зменшенням тривалості імпульсу.

3. Невиправдане розширення смуги пропускання системи є



Слід запам'ятати:

1. Визначення понять: спектр потужності, нуль амплітудного спектра періодичної послідовності прямокутних відеоімпульсів.

2. Середня за період потужність періодичного сигналу дорівнює сумі середніх потужностей його гармонік, визначається тільки амплітудами гармонік і не залежить від їхніх початкових фаз.

3. Формули:

$$P_{cp} = \left(\frac{A_0}{2}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{mn}^2}{2} \quad \text{рівність Парсеваля;}$$

Парсеваля;

$\omega_{0k} = 2\pi k / t_{iMP}$ - частоти нулів амплітудного спектра періодичної послідовності прямокутних відео імпульсів.

небажаним.



Треба вміти:

1. Визначити поняття: спектр потужності, нуль амплітудного спектра періодичної послідовності прямокутних відеоімпульсів.
2. Записати рівність Парсеваля

2.5 Характеристики форми періодичних процесів

Властивості процесів і сигналів довільної форми, в тому числі і періодичних негармонічних (надалі – періодичних), часто подають величинами, значення яких дають змогу оцінити наскільки вони відрізняються від гармонічних, зважаючи на значне поширення гармонічних процесів як у теорії, так і практиці.

Для характеристики форми періодичних процесів і сигналів у системах електроенергетики або інформаційно-вимірювальних системах використовують спеціальні коефіцієнти: **форми** k_{ϕ} , **амплітуди** k_a , **спотворення** $k_{\text{сп}}$ і **гармонік** k_r . Ці параметри відображають властивості не тільки періодичних процесів і сигналів, а й систем, у яких вони відбуваються. Так, якщо досліджується вхідний процес або сигнал, то це параметри процесу або сигналу. Щодо реакції, то це параметр як процесу (сигналу), так і системи.

- ◆ **Коефіцієнт форми** – це відношення середньоквадратичного значення $S_{\text{ск}}$ періодичного процесу або сигналу $s(t)$ до його середнього за період значення $S_{\text{сп}}$:

$$k_{\phi} = S_{\text{ск}} / S_{\text{сп}}. \quad (2.33)$$

Періодичні процеси і сигнали можна усереднювати на період за формулою (2.22). Тоді маємо постійну складову $S_{\text{ср}}$ періодичного процесу або сигналу $s(t)$. Періодичний процес і сигнал можна усереднювати за його абсолютним значенням (за модулем). Результатом такої операції є середнє за модулем значення

$$S_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_0^T |s(t)| dt, \quad (2.34)$$

яке і використовується у (2.32).

Якщо періодичний процес або сигнал є уніполярним на періоді, тобто на періоді набуває або тільки додатних, або тільки від'ємних значень, то середнє за модулем значення (2.34) збігається з постійною складовою (2.22).

Якщо функція, що описує періодичний процес або сигнал, має однаковий знак на половині періоду і є симетричною відносно осі абсцис, то середнє за модулем значення (2.33) дорівнює середньому значенню за половину періоду:

$$S_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_0^T |s(t)| dt = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} s(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} s(t) dt. \quad (2.35)$$

Для гармонічного процесу і сигналу середнє за модулем значення $S_{\text{cp}} = (2/\pi)S_m$.

Середньоквадратичне (ефективне чи діюче) значення за період дійсних періодичних процесів і сигналів визначається таким співвідношенням:

$$S_{\text{ck}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [s(t)]^2 dt}. \quad (2.36)$$

Відомо, що для гармонічного процесу і сигналу $S_{\text{ck}} = S_m / \sqrt{2}$. Тоді для такого процесу (сигналу) $k_{\phi} = \pi / (2\sqrt{2}) \approx 1,11$.

Якщо процес або сигнал подається рядом Фур'є, то, враховуючи (2.36), згідно з (2.26)

$$S_{\text{ck}} = \sqrt{P_{\text{cp}}} = \sqrt{(S_{\text{=}})^2 + \sum_{n=1}^{\infty} A_{nd}^2}, \quad (2.37)$$

де A_{nd} – діюче значення n -ї гармоніки; $S_{\text{=}} = A_0 / 2$ – амплітуда постійної складової або нульової гармоніки.

Оскільки з енергетичного погляду постійна складова є еквівалентом діючого значення гармонічного процесу і сигналу, то відповідно до виразу (2.37)

2.5 Характеристики форми періодичних процесів

- ♦ **середньоквадратичне значення періодичного процесу і сигналу дорівнює корню квадратному з суми квадратів діючих значень його гармонік і не залежить від їхніх початкових фаз.**

Коли періодичним процесом або сигналом є електричний струм $i(t)$, що складається з гармонік $I_0, I_1, I_2, \dots, I_k, \dots$, то його середньоквадратичне значення

$$I_{\text{ск}} = I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_k^2 + \dots}, \quad (2.38)$$

якщо електрична напруга $u(t)$ з гармоніками $U_0, U_1, U_2, \dots, U_k, \dots$ –

$$U_{\text{ск}} = U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_k^2 + \dots}. \quad (2.39)$$

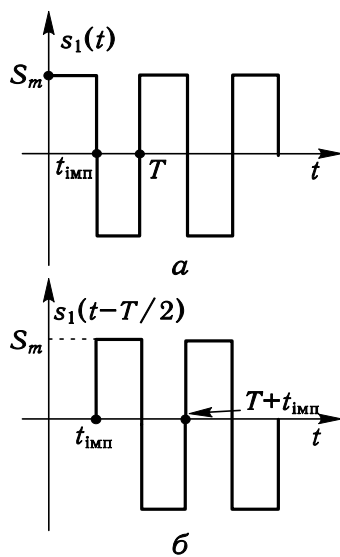


Рисунок 2.7 - До подання прямокутного відео-імпульсу меандром.

Із енергетичного погляду середньоквадратичне значення за період T періодичного негармонічного струму – це таке значення постійного струму, під час проходження якого через провідник із опором R за час T розсіюється така сама кількість енергії, що і при дії періодичного струму.

► **Приклад.** *Визначити середні за модулем, середньоквадратичні значення і коефіцієнти форми періодичних негармонічних процесів, зображених на рис. 2.7, а.*

Процес, поданий на рис. 2.7 а, наділений симетрією відносно осі абсцис. Тому його середнє за модулем значення за період дорівнює середньому значенню за інтервал від 0 до $T/2$. Згідно з (2.35) та (2.26) із урахуванням геометричної інтерпретації інтеграла для цього процесу

$$S_{\text{ср}} = (2/T)S_m T/2 = S_m;$$

$$S_{\text{ск}} = \sqrt{(2/T)S_m^2 T/2} = S_m = S_{\text{ср}}. \quad (2.40)$$

Тоді згідно з (2.33) коефіцієнт форми меандра $k_{\text{ф}} = 1$.

Постійна складова меандра, як визначено раніше, дорівнює нулю.

Періодична послідовність прямокутних відеоімпульсів (див. рис. 2.4) є процесом одного знака на періоді. Тому середнє за модулем значення цього процесу дорівнює його постійній складовій, тобто $S_{cp} = S_{=} = S_m / Q$, де Q – шпаруватість послідовності.

Середньоквадратичне значення цієї послідовності

$$S_{ск} = \sqrt{P_{cp}} = S_m / \sqrt{Q}, \quad (2.41)$$

а її коефіцієнт форми

$$k_{\phi} = (S_m / \sqrt{Q}) / (S_m / Q) = \sqrt{Q}. \quad (2.42)$$

Отже, *чим більша шпаруватість послідовності прямокутних відеоімпульсів, тим більше форма такого процесу відрізняється від гармонічного.*

◼

◆ **Коефіцієнт амплітуди** – це відношення максимального значення S_{max} періодичного процесу або сигналу $s(t)$ до його середньоквадратичного за період значення $S_{ск}$:

$$k_a = S_{max} / S_{ск}. \quad (2.43)$$

Для гармонічного процесу і сигналу $k_a = \sqrt{2} = 1,41$.

При проходженні через нелінійну систему форма гармонічного вхідного процесу або сигналу змінюється. Реакцією буде періодичний негармонічний процес і сигнал із певною кількістю спектральних складових. Це наслідок нелінійних спотворень, які спричинює нелінійна система. Зазвичай такі спотворення оцінюють коефіцієнтами спотворення $k_{сп}$ та гармонік $k_{г}$.

◆ **Коефіцієнт спотворення** – це відношення діючого значення основної (першої) гармоніки періодичного процесу або сигналу до його середньоквадратичного значення:

$$k_{сп} = \frac{S_{ск1}}{S_{ск}} = \frac{S_{ск1}}{S_0^2 + \sqrt{S_{ск1}^2 + S_{ск2}^2 + \dots + S_{скn}^2 + \dots}}. \quad (2.44)$$

2.5 Характеристики форми періодичних процесів

Для гармонічного процесу і сигналу $k_{\text{сп}} = 1$. Напруг промислових енергетичних мереж не є ідеальним гармонічним коливанням (синусоїдами). Коефіцієнт спотворення таких коливань із точністю до долей відсотка дорівнює одиниці.

- ◆ **Коефіцієнт гармонік** – це подане у відсотках відношення середньоквадратичних значень вищих і першої гармонік спектра періодичного процесу або сигналу:

$$k_{\Gamma} = \frac{S_{\text{СК}}}{S_{\text{СК1}}} = \frac{\sqrt{S_{\text{СК2}}^2 + S_{\text{СК3}}^2 + S_{\text{СК4}}^2 + \dots}}{S_{\text{СК1}}} 100\% . \quad (2.45)$$

Для гармонічного процесу і сигналу $k_{\Gamma} = 0$. За встановленими стандартами напруга промислових енергетичних мереж вважається практично синусоїдальною, якщо середньоквадратичне значення всіх вищих гармонік не перевищує 5% діючого (ефективного) значення першої (основної) гармоніки промислової напруги. Для високоякісних інформаційних систем, наприклад, запису та відтворення звуку коефіцієнт гармонік $k_{\Gamma} = 0,01 \dots 0,001\%$.

Якщо періодичний процес або сигнал не має постійної складової, то

$$k_{\Gamma} = (1 / k_{\text{сп}}) \sqrt{1 - k_{\text{сп}}^2} . \quad (2.46)$$

► **Приклад.** Визначити коефіцієнти амплітуди, спотворення та гармонік періодичного процесу $s(t) = 100\sin\omega_1 t + 30\sin 2\omega_1 t$.

Досліджуваний процес складається з двох гармонік, а отже, є періодичним. Згідно з (2.36) середньоквадратичне значення цього процесу

$$S_{\text{СК}} = \sqrt{S_{\text{СК1}}^2 + S_{\text{СК2}}^2} = \sqrt{(S_{m1} / \sqrt{2})^2 + (S_{m2} / \sqrt{2})^2} = \sqrt{100^2 / 2 + 30^2 / 2} = 73,8.$$

Максимальне значення обчислимо за умовою визначення екстремумів функції: $ds(t) / d(\omega_1 t) = 100 \cos \omega_1 t + 60 \cos 2\omega_1 t = 0$.

Звідси, врахувавши, що $\cos 2\omega_1 t = 2 \cos^2 \omega_1 t - 1$, дістанемо квадратне рівняння $120 \cos^2 \omega_1 t + 100 \cos \omega_1 t - 2 = 0$, розв'язування якого дає один допустимий корінь $\cos \omega_1 t = 0,404 \Rightarrow \Rightarrow \omega_1 t = 66^\circ 10'$. Тоді $S_{\text{max}} = 100 \sin \omega_1 t + 30 \sin 2\omega_1 t |_{\omega_1 t = 66^\circ 10'} = 116,7$.

Згідно з (2.42) коефіцієнт амплітуди $k_a = S_{\max} / S_{\text{СК}} = 116,7 / 73,8 = 1,58$.

Коефіцієнт спотворень заданого процесу

$$k_{\text{СП}} = S_{\text{СК1}} / S_{\text{СК}} = (100 / \sqrt{2}) / 73,8 = 0,96,$$

а коефіцієнт гармонік у відсотках

$$k_{\text{СП}} = (S_{\text{СК2}} / S_{\text{СК1}}) 100\% = [(30 / \sqrt{2}) / (100 / \sqrt{2})] \cdot 100\% = 30\%.$$

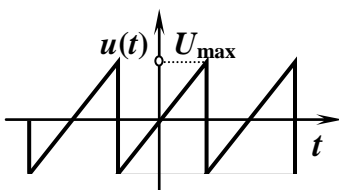


Рисунок 2.8 - Пилкоподібне коливання.

Коефіцієнти форми $k_{\text{Ф}}$ та амплітуди k_a використовують як перевідні під час оброблення результатів вимірювання періодичних негармонічних величин, наприклад струмів і напруг, різними вимірювальними приладами, системами та комплексами.

Зазвичай електровимірювальні прилади вимірюють середнє, максимальнє, або середньоквадратичне значення періодичного сигналу. Так, прилади електродинамічної, електромагнітної та теплової систем реагують на діючі значення вимірюваної величини. Магнітоелектричні прилади вимірюють постійну складову, а доповнені пристроями випрямлення – середнє за модулем значення. Водночас їх градуують, як правило, в діючих (ефективних або середньоквадратичних) значеннях гармонічних величин. Тому при вимірюванні такими приладами (пристроями) аналогічних значень негармонічних періодичних процесів і сигналів потрібно знати k_a або $k_{\text{Ф}}$.

► **Приклад.** Вольтметром, який проградуєвано в діючих значеннях гармонічних коливань, досліджується періодична напруга пилкоподібної форми (рис. 2.8). За показаннями приладу, яке становить $U_{\text{СК}} = 10$ В, визначити максимальнє, середньоквадратичне та середнє значення напруги за умови, що вольтметр реагує на значення: а) максимальнє; б) середнє.

Можна показати, що досліджувана напруга характеризується такими значеннями коефіцієнтів форми та амплітуди: $k_a = 1,73$, $k_{\text{Ф}} = 1,15$.

Якщо прилад вимірює максимальнє значення, то зведемо його показання до такої самої величини гармонічної напруги:

2.5 Характеристики форми періодичних процесів

$U_{m\text{ гарм}} = 1,41U_{\text{ск}} = 1,41 \cdot 10 = 14,1 = U_{\text{max}}$. Тоді відповідно до (2.42) та (2.32) середньоквадратичне значення заданої напруги $U_{\text{ск}} = U_{\text{max}} / k_a = 14,1 / 1,73 = 8,15$ В, а її середнє за модулем значення $U_{\text{ср}} = U_{\text{ск}} / k_{\phi} = 8,15 / 1,15 = 7,08$ В.

У разі вимірювання середнього значення результати зведемо до середнього за модулем гармонічної напруги $U_{\text{ср.гарм}} = U_{\text{ск}} / 1,11 = 10 / 1,11 = 9,01$ В. Обчислене $U_{\text{ср.гарм}} = 9,01$ В тепер визначає середнє за модулем значення заданого коливання: $U_{\text{ср}} = U_{\text{ср.гарм}} = 9,01$ В. Тоді середньоквадратичне значення цього коливання $U_{\text{ск}} = k_{\phi} U_{\text{ср}} = 1,15 \cdot 9,01 = 10,36$ В, а максимальне $U_{\text{max}} = U_{\text{ск}} k_a = 10,36 \cdot 1,73 = 17,93$ В.

Отже, за однакових показань вольтметри різних систем для одного й того самого процесу дають різні амплітудні, середньоквадратичні та середні за модулем значення. З цього випливає, що під час дослідження певного процесу приборами різних систем їхні покази мають бути різними.



ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. Коефіцієнти форми, амплітуди, спотворення і гармонік параметри відображають властивості не тільки періодичних процесів і сигналів, а й систем, у яких вони відбуваються.

2. За однакових показань вимірювальні прилади напруги чи струму різних систем для одного й того самого процесу дають різні амплітудні, середньоквадратичні та середні за модулем значення.

3. Коефіцієнти форми k_{ϕ} та амплітуди k_a використовують як перевідні під час оброблення



Слід запам'ятати:

1. Визначення понять: коефіцієнти форми, амплітуди, спотворення та гармонік, середнє за період, середнє за половину періоду, середнє за модулем значення.

2. Середньоквадратичне значення періодичного сигналу дорівнює кореню квадратному з суми квадратів діючих значень його гармонік і не залежить від їхніх початкових фаз.

3. Якщо періодичний процес або сигнал є уніполярним на періоді, то середнє за модулем значення збігається з його постійною складовою. У разі, якщо періоди-

результатів вимірювання періодичних негармонічних величин, різними вимірювальними приладами, системами та комплексами.

4. Чим більша шпаруватість послідовності прямокутних відеоімпульсів, тим більше форма такого процесу або сигналу відрізняється від гармонічного.

5. Реакцією нелінійної системи на гармонічну вхідну дію буде періодичний негармонічний процес і сигнал із певною кількістю нових спектральних складових. Це наслідок нелінійних спотворень, які спричинює нелінійна система.



Треба вміти:

1. Визначити поняття: коефіцієнти форми, амплітуди, спотворення та гармонік, середнє за період, середнє за половину періоду, середнє за модулем значення.

2. Записати формули коефіцієнтів форми, амплітуди, спотворення та гармонік, середнього за період, середнього за половину періоду, середнього за модулем значення.

3. Визначити коефіцієнти форми, амплітуди, спотворення та гармонік, середнє за період, середнє за половину періоду, середнє за модулем значення для різних видів періодичних

чний процес або сигнал має однаковий знак на половині періоду і є симетричним відносно осі абсцис, то середнє за модулем значення дорівнює середньому значенню за половину періоду.

5. Формули:

$$S_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt$$

- середнє за період значення дійсного періодичного процесу і сигналу (постійна складова);

період значення дійсного періодичного процесу і сигналу (постійна складова);

$$S_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_0^T |s(t)| dt$$

- середнє за модулем значення;

модулем значення;

$$S_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_0^T |s(t)| dt = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} s(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} s(t) dt$$

- середнє за половину періоду;

$k_{\text{ф}} = S_{\text{СК}} / S_{\text{ср}}$ - коефіцієнт форми;

$k_{\text{а}} = S_{\text{макс}} / S_{\text{СК}}$ - коефіцієнт амплітуди;

$k_{\text{сп}} = S_{\text{СК1}} / S_{\text{СК}}$ - коефіцієнт спотворення;

$k_{\text{Г}} = S_{\text{СК.В}} / S_{\text{СК1}}$ - коефіцієнт гармонік.

2.5 Характеристики форми періодичних процесів

процесів і сигналів.

2.6 Завдання для поточного тестування

2.6.1 Питання для поточного контролю

- Назвіть основні групи характеристик і параметрів, з якими оперують під час дослідження систем, процесів і сигналів.
- На якій ідеї ґрунтуються спектральні методи?
- Що таке дискретний, неперервний і змішаний спектри?
- Дайте визначення ортогональних процесів і сигналів та інтервалу ортогональності.
- Яку операцію називають скалярним добутком і її фізичний зміст?
- Довести, що косинусний та синусний процеси і сигнали тієї самої частоти є ортогональними.
- Для яких процесів і сигналів справджується така умова:
$$\int_{t_1}^{t_2} e_i(\lambda) e_j(\lambda) d\lambda = 0, \quad i \neq j?$$
- Чому дорівнює енергія взаємодії комплексно-спряжених експонентних процесів або сигналів частоти ω_0 на інтервалі $[0, T]$, якщо $T = 2\pi / \omega_0$?
- Що таке узагальнений ряд Фур'є?
- Назвіть три основні чинники, що зумовили використання на практиці базисів із гармонічних коливань при спектральному аналізі.
- Які процеси і сигнали вважаються власними функціями лінійної системи?
- Поясніть сутність гармонічного аналізу детермінованих процесів і сигналів.

- Яка функція ЛІВ системи відображає взаємозв'язок між спектральними параметрами її реакції та дії?
- Сформулюйте алгоритм дослідження процесів і сигналів у лінійних колах чи системах спектральним методом.
- Характерною ознакою яких процесів і сигналів є спектр гармонік?
- Запишіть умову кратності для гармонічних спектральних складових.
- Чим відрізняються спектри періодичного та квазіперіодичного процесів і сигналів?
- Запишіть ряд Фур'є у тригонометричній, амплітудно-фазовій та комплексній формах.
- Запишіть співвідношення, що відображають взаємозв'язок між різними формами ряду Фур'є та наведіть їх графічну інтерпретацію.
- Чому дорівнює постійна складова періодичних коливань із таким видом симетрії: а) непарною; б) парною; в) парною із симетрією відносно осі абсцис?
- Що таке спектральна діаграма амплітуд і початкових фаз періодичного процесу і сигналу?
- Запишіть формули для миттєвої та середньої потужностей дійсного та комплексного періодичного процесу і сигналу.
- Запишіть рівність, яка установлює взаємний зв'язок між енергетичними та спектральними параметрами дійсного періодичного процесу або сигналу.
- Доведіть, що середня потужність періодичного процесу і сигналу визначається тільки амплітудами гармонік і не залежить від їхніх початкових фаз.
- Дайте визначення спектра потужностей.
- За якою формулою обчислюється середня потужність гармонічного процесу або сигналу: а) $P_{\text{cp}} = S_{\text{д}}^2$; б) $P_{\text{cp}} = S_m^2 / 2$; в) $P_{\text{cp}} = S_{\text{д}}^2 T$, де S_m , $S_{\text{д}}$ - відповідно амплітудне та ефективне (діюче) значення, T - його період?

- Як визначається середньоквадратичне значення періодичного процесу або сигналу через його спектр?
- Що таке нулі амплітудного спектра періодичної послідовності імпульсів?
- Чим визначається кількість гармонік, що розміщуються між сусідніми нулями в амплітудному спектрі періодичної послідовності прямокутних відеоімпульсів?
- Як співвідносяться потужності постійних складових у спектрах періодичних послідовностей прямокутних та трикутних відеоімпульсів із однаковими тривалістю, періодом та шпаруватістю?
- Дайте визначення коефіцієнта амплітуди, форми, спотворення та гармонік періодичних процесів і сигналів.
- Яких значень набуває коефіцієнт амплітуди та коефіцієнт гармонік гармонічного процесу або сигналу?

2.6.2 Задачі для індивідуального та самостійного розв'язування

1. Визначити спектр дійсного періодичного сигналу $s(t) = 100 \sin \omega t + 40 \cos 2\omega t$. Зобразити графік його амплітудного спектра.

2. Визначити, чи є періодичними такі сигнали:
а) $s(t) = 10 \cos 100t + 5 \cos 200\pi t$; б) $s(t) = 2 \cos 100t + \sqrt{2} \cos 800\sqrt{2}t$; в) $s(t) = 2 \cos(50\pi t + \pi/4) + 5 \cos(100\pi t - \pi/4)$; г) $s(t) = \cos 700\pi t + 5 \cos 800\pi t$;
д) $s(t) = 21 \cos 1,4 \cdot 10^3 \pi t + 5 \cos(2,1 \cdot 10^3 \pi t - \pi/3)$. Для періодичних сигналів обчислити період.

3. Визначити, чи є детермінований процес, який містить три гармонічні складові з частотами 1,2 кГц, 4,8 кГц та 10,8 кГц, періодичним?

4. Подати періодичний сигнал

$$s(t) = 80 \cos \omega_1 t + 60 \cos 2\omega_1 t - 15 \cos 3\omega_1 t - 12 \cos 4\omega_1 t + \\ + 100 \sin \omega_1 t - 20 \sin 2\omega_1 t + 30 \sin 3\omega_1 t - 8 \sin 4\omega_1 t$$

рядом Фур'є в тригонометричній, амплітудно-фазовій та комплексній формах. Побудувати спектральні діаграми амплітуд і початкових фаз гармонік та визначити середню потужність сигналу.

5. Визначити середню потужність на виході системи, якщо його вихідна напруга $u_{\text{вих}}(t) = 5 + 10\cos\omega t + 20\sin(3\omega t - 30^\circ)$.

6. Визначити коефіцієнт гармонік та форми сигналу $s(t) = 100\sin\omega_1 t + 30\sin 2\omega_1 t$.

7. Визначити коефіцієнти амплітуди, форми, спотворення та гармонік періодичного коливання $s(t) = 100\cos\omega_1 t - 30\sin 3\omega_1 t$.

8. Для детермінованих процесів $s_1(t) = 10\cos 100t + 5\cos 200\pi t$ і $s_2(t) = 100\cos 700\pi t - 30\sin 2100\pi t$ визначити енергію кожного та енергію взаємодії процесів. Визначити середньоквадратичне значення та середню потужність процесу $s(t) = 2\cos 20\pi t - 5\cos(60\pi t - \pi/4)$.

9. Визначити коефіцієнти амплітуди та форми пилкоподібного коливання, зображеного на рис. 2.8.

10. Вольтметром, який проградуєвано в діючих значеннях гармонічних коливань, досліджується періодична напруга $u(t) = 120 + 200\sin\omega_1 t + 50\sin(3\omega_1 t + \pi/6)$. За показаннями приладу, яке становить $U_{\text{СК}} = 189$ В, визначити максимальне, середньоквадратичне та середнє значення напруги за умови, що вольтметр реагує на значення: а) максимальне; б) ефективне змінної складової; в) середнє.

11. Як зміниться відстань між спектральними лініями в спектральній діаграмі амплітуд періодичної послідовності імпульсів при збільшенні: а) тривалості імпульсів; б) періоду?

12. Як зміняться амплітуди спектральних складових періодичної послідовності відеоімпульсів при збільшенні її шпаруватості?

13. Як зміниться частота першої гармоніки спектра періодичної послідовності імпульсів при зменшенні тривалості паузи за рахунок збільшення тривалості імпульсу?

14. Як співвідносяться потужності постійних складових в спектрі періодичних послідовностей прямокутних та трикутних відеоімпульсів із однаковими тривалістю імпульсу $t_{\text{ИП}}$, періодом T і шпаруватістю Q ?

2.6 Завдання для поточного тестування

15. Виконати гармонічний аналіз реакції $y(t)$ нелінійного елемента, математична модель якого $y(t) = x^2(t)$, якщо $x(t) = \cos\omega_0 t$.

16. Як зміниться постійна складова імпульсної послідовності прямокутної форми, якщо: а) період T збільшити до 200 мкс; б) тривалість імпульсу $t_{\text{імп}}$ зменшити до 10 мкс; в) амплітуду імпульсу U_m збільшити до 40 В? Дано: $U_m = 20$ В, $t_{\text{імп}} = 20$ мкс, $T = 100$ мкс.

17. Визначити період коливань імпульсної послідовності, якщо період $T = 15$ мкс, а тривалість паузи $t_{\text{п}} = 900$ мкс.

18. Визначити шпаруватість послідовності імпульсів, якщо тривалість імпульсів $t_{\text{імп}} = 10$ мкс, а тривалість паузи $t_{\text{п}} = 40$ мкс.

19. Визначити тривалість імпульсу, якщо частота слідування імпульсів становить 10 кГц, а шпаруватість дорівнює 2.

20. Визначити, якої потужності потрібно вибрати резистор, якщо його опір $R = 500$ Ом, амплітуда імпульсів прямокутної форми на резисторі становить 10 В, а шпаруватість послідовності дорівнює 2.

21. Визначити кількість гармонік у одній пелюстці амплітудного спектра періодичної послідовності прямокутних імпульсів, якщо період $T = 20$ мкс, тривалість імпульсу $t_{\text{імп}} = 10$ мкс, а амплітуда $S_m = 5$ В.

22. Визначити ефективну та активну ширину спектра періодичної послідовності прямокутних імпульсів, якщо період $T = 20$ мкс, тривалість імпульсу $t_{\text{імп}} = 10$ мкс, а амплітуда $S_m = 5$ В.

23. Як зміниться ефективна ширина спектра періодичної послідовності прямокутних імпульсів з періодом $T = 100$ мкс, тривалістю імпульсів $t_{\text{імп}} = 10$ мкс, амплітудою $S_m = 10$ В, якщо а) збільшити тривалість імпульсу до 20 мкс? б) зменшити період до 50 мкс за незмінної тривалості імпульсів? в) збільшити амплітуду імпульсів до 20 В? г) зменшити тривалість імпульсу до 5 мкс?

24. Як зміниться потужність в імпульсі і середня потужність імпульсної послідовності, якщо: а) збільшити тривалість імпульсу? б) зменшити частоту слідування за незмінної тривалості імпульсів? в) збільшити амплітуду імпульсів? г) зменшити тривалість імпульсу?

25. Як зміниться кількість гармонік у одній пелюстці амплітудного спектра періодичної послідовності імпульсів, якщо: а) збільшити тривалість імпульсів за незмінного періоду? б) зменшити період за

незмінної тривалості імпульсів? в) збільшити частоту слідування за незмінної тривалості імпульсів?

26. Які складові містять спектри імпульсних послідовностей, зображених на рис. 2.9

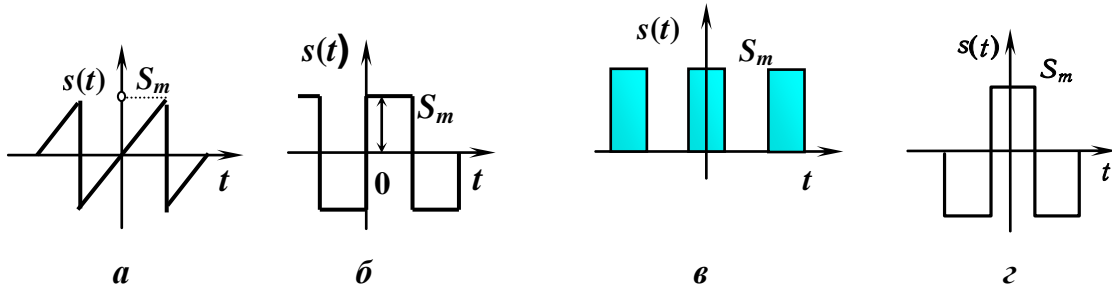


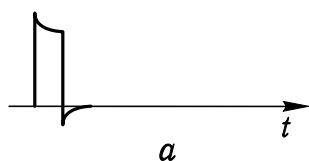
Рисунок 2.9 – Приклади імпульсних послідовностей.

3 Неперіодичні процеси та їх спектральні та енергетичні характеристики

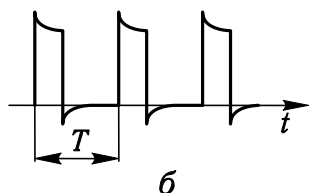
3.1 Гармонічний аналіз та синтез неперіодичних процесів

Для технічних систем особливо важливими є імпульсні процеси і сигнали, тобто неперіодичні процеси і сигнали кінцевої тривалості (див. рис. 3.1, *a*). Основною спектральною характеристикою такого детермінованого неперіодичного процесу або сигналу $s(t)$ у базисі комплексних експонентних складових є **спектральна щільність комплексних амплітуд** $S(j\omega)$. Взаємозв'язок між процесом або сигналом $s(t)$ та його спектральною щільністю $S(j\omega)$ встановлюється

парою інтегральних перетворень Фур'є:



$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt; \quad (3.1)$$



$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.2)$$

Рисунок 3.1 - Імпульсний процес (а) та його періодичний аналог (б).

Співвідношення (3.1) називають **прямим інтегральним перетворенням Фур'є**, а (3.2) – **оберненим**.

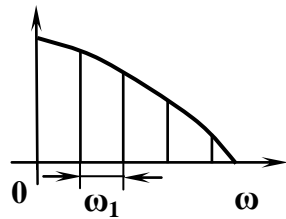
Один із можливих способів доведення співвідношень (3.1) та (3.2), хоча і не зовсім строгий з математичного погляду, ґрунтується на припущенні, що неперіодичний процес або сигнал кінцевої тривалості $s(t)$ можна отримати із періодичного $s_{\text{пер}}(t)$, спрямувавши його період T до нескінченності.

Нехай $s(t)$ – деякий імпульсний процес або сигнал (рис. 3.1, *a*). Утворимо на його основі періодичну послідовність імпульсів $s_{\text{пер}}(t)$ із періодом $T = 2\pi/\omega_1$ (рис. 3.1, *б*), яка допускає її подання однією з форм ряду Фур'є, наприклад, комплексною (2.21). Спектр процесу

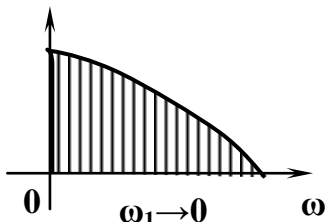
або сигналу $s_{\text{пер}}(t)$ є дискретним, а його спектральні параметри повністю визначаються комплексними амплітудами (2.23). Тоді

$$s_{\text{пер}}(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{A}_{mn} e^{jn\omega_1 t} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s_{\text{пер}}(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \right] e^{jn\omega_1 t}. \quad (3.3)$$

За необмеженого збільшення періоду T сигнал $s_{\text{пер}}(t)$ переходить у неперіодичний $s(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} s_{\text{пер}}(t)$. При



а



б

Рисунок 3.2 –
Граничний перехід
дискретного спектра в неперервний

цьому відстань $\Delta\omega = \omega_1 = 2\pi/T$ між сусідніми спектральними складовими (гармоніками) $n\omega_1$ і $(n+1)\omega_1$ прямує до нуля (стає нескінченно малою $d\omega$), а кількість гармонік $N = \Delta\omega_{\text{СП}}/\omega_1$ в обмеженому частотному діапазоні $\Delta\omega_{\text{СП}}$ – до нескінченності.

Спектральні лінії в лінійчастому спектрі (рис. 3.2, а) наблизяться одна до одної і зрештою зіллються, утворивши **суцільний, або неперервний, спектр** (рис. 3.2, б), що є функцією неперервної частоти ω , а не дискретної $n\omega_1$.

Оскільки величина T знаходиться у знаменнику виразу (2.23), то за необмеженого збільшення періоду комплексні амплітуди гармонічних складових неперервного спектра стають нескінченно малими

$d\dot{A}_m$:

$$\begin{aligned} \dot{A}_{mn} &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s_{\text{пер}}(t) e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{\omega_1}{\pi} \int_{-T/2}^{T/2} s_{\text{пер}}(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \Rightarrow \\ &\Rightarrow d\dot{A}_m = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt \right] d\omega. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Таким чином, при збільшенні періоду T до нескінченності періодичний сигнал або процес $s_{\text{пер}}(t)$ переходить в імпульсний $s(t)$ із нескінченно великою кількістю спектральних складових

$ds(t) = (1/2)d\dot{A}_m e^{j\omega t}$, амплітуди яких (див. (3.4)) є нескінченно малими, а частота ω кожної складової локалізована у смузі частот $d\omega$.

- ◆ Отже, **спектр неперіодичного процесу або сигналу кінцевої тривалості є неперервним, а сам процес або сигнал визначається нелічильною нескінченною або континуальною множиною комплексних експонентних складових, кожна з яких має нескінченно малу амплітуду $d\dot{A}_m$ та частоту ω , що належить частотному діапазону $d\omega$.**

Ураховуючи зазначене, у виразі (3.3) ω_1 можна замінити на $d\omega$, дискретну змінну $n\omega_1$ – на неперервну ω , а операцію додавання – операцією інтегрування. Тоді

$$s(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} s_{\text{неп}}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{A}_{mn} e^{jn\omega_1 t} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\dot{A}_m e^{j\omega t}. \quad (3.5)$$

Підставляючи (3.4) у (3.5), дістанемо:

$$s(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} s(\lambda) e^{-j\omega\lambda} d\lambda \right) d\omega \right] e^{j\omega t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.6)$$

Співвідношення (3.6) об'єднує в одному виразі як обернене (3.2), так і пряме (3.1) перетворення Фур'є.

У межах гармонічного аналізу неперіодичних процесів і сигналів пряме інтегральне перетворення Фур'є називають операцією **аналізу** заданого процесу або сигналу, а обернене – операцією **повнення (синтезу)** або **відтворення** цього процесу чи сигналу сумою комплексних експонентних складових.

- ◆ Таким чином, **процес або сигнал кінцевої тривалості $s(t)$ та його спектральна щільність $S(j\omega)$ у базисі комплексних експонентних складових взаємопов'язані через пряме та обернене інтегральне перетворення Фур'є.**

Пара інтегральних перетворень Фур'є дає змогу перетворювати подання процесів і сигналів функцією часової змінної в еквівалентне частотне у вигляді комплексної функції частоти і навпаки. Таку

взаємну відповідність між часовим і частотним зображенням процесу або сигналу надалі подаватимемо скороченим умовним записом:

$$s(t) \leftrightarrow S(j\omega).$$

Інтегральне перетворення Фур'є можна застосовувати безпосередньо для визначення спектральних параметрів тих процесів і сигналів, які описуються функціями з обмеженою кількістю максимумів і мінімумів, розривів першого роду, значень аргументу, що відповідають нескінченним значенням функції (все це умови Діріхле), а також функцій, які задовольняють умову **абсолютної інтегровності**:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t) dt < \infty; \quad \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < \infty. \quad (3.7)$$

Перший інтеграл у (3.7) належить до дійсного процесу або сигналу $s(t)$, а другий – до комплексного.

У практиці застосування корисною є й інша, менш жорстка, вимога для існування перетворення Фур'є, яку називають **умовою абсолютної інтегровності квадрата процесу і сигналу** (функції, що його описує):

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt < \infty; \quad \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt < \infty. \quad (3.8)$$

У теорії процесів і сигналів інтеграли (3.8) визначають енергію дійсного та комплексного процесів і сигналів, тому умову (3.8) задовольняють тільки процеси і сигнали з обмеженою енергією.

Умови (3.8) і (3.9) задовольняють не всі процеси і сигнали, зокрема такі, які описуються одиничною ступінчастою функцією $\sigma(t)$, комплексною експонентою, постійною або періодичною. Такі процеси і сигнали називають **абсолютно неінтегровними**.

ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. У межах гармонічного



Слід запам'ятати:

1. Основною спектральною

3.1 Гармонічний аналіз та синтез неперіодичних процесів

аналізу неперіодичних процесів і сигналів пряме інтегральне перетворення Фур'є є операцією аналізу заданого процесу або сигналу, а обернене – операцією його поновлення (синтезу) або відтворення сумою комплексних експонентних складових.

2. Пара інтегральних перетворень Фур'є дає змогу перетворювати подання процесів і сигналів функцією часової змінної в еквівалентне частотне у вигляді комплексної функції частоти і навпаки.



Треба вміти:

1. Обґрунтувати аналітично взаємозв'язок між неперіодичним процесом або сигналом і його спектральною щільністю комплексних амплітуд через інтегральне перетворення Фур'є.

2. Записати пряме та обернене перетворення Фур'є, умову абсолютної інтегровності сигналу та квадрата сигналу

характеристикою неперіодичного процесу або сигналу є спектральна щільність комплексних амплітуд.

2. Спектр неперіодичного процесу або сигналу кінцевої тривалості є неперервним.

3. Імпульсний процес або сигнал і його взаємопов'язані через інтегральне перетворення Фур'є.

4. Умову абсолютної інтегровності неперіодичного сигналу

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t) dt < \infty; \quad \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < \infty$$

та умову абсолютної інтегровності квадрата процесу і сигналу

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt < \infty; \quad \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt < \infty.$$

5. Формули:

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt \quad - \text{пря-$$

ме інтегральне перетворення Фур'є;

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad - \text{обер-$$

нене інтегральне перетворення Фур'є.

3.2 Характерні властивості спектральної щільності комплексних амплітуд

Фізичний зміст. Із порівняння виразів (3.5) і (3.6) випливає, що

$$d \dot{A}_m = (1/\pi)S(j\omega)d\omega. \quad (3.9)$$

Тоді, спектральна щільність є коефіцієнтом пропорційності між нескінченно малою комплексною амплітудою гармонічної складової з частотою ω неперіодичного процесу або сигналу і нескінченно вузькою смугою частот $d\omega$, у якій зосереджена ця спектральна складова.

Згідно з (3.9) спектральна щільність

$$S(j\omega) = \pi(d \dot{A}_m / d\omega); \quad S(jf) = (1/2)(d \dot{A}_m / df). \quad (3.10)$$

Із виразу (3.10) стає зрозумілим зміст терміну «спектральна щільність»:

- ◆ **величина $2S(jf)$ є комплексною амплітудою спектральної (гармонічної) складової процесу або сигналу, що припадає на одиницю частоти у нескінченно малому діапазоні частот df , до якого належить частота f .**

Формули (3.9) і (3.10) пояснюють також розмірність спектральної щільності: $[S(j\omega)] = [\text{амплітуда} / \text{Гц}] = [\text{амплітуда} \cdot \text{с}]$.

Форми подання спектральної щільності. Зіставивши вирази (3.2) і (2.23), дійдемо висновку, що при спрямуванні періоду T до нескінченності вони відрізняться лише множником $2/T$. Тому, спектральна щільність $S(j\omega)$ має всі характерні властивості коефіцієнтів

єнтів \dot{A}_{mn} комплексного ряду Фур'є (2.21), тобто комплексних амплітуд гармонік. Ось чому $S(j\omega)$ називають **спектральною щільністю комплексних амплітуд** дійсного детермінованого неперіодичного процесу і сигналу.

Звідси, принципово важливим є те, що

3.2 Характерні властивості спектральної щільності комплексних амплітуд

◆ спектральна щільність є комплексною функцією дійсної частоти.

Це дає змогу під час спектрального дослідження неперіодичних процесів і сигналів використовувати одну із трьох відомих форм подання комплексних величин:

$$\begin{aligned} S(j\omega) &= S(\omega)e^{-j\bar{\theta}_s(\omega)} = S(\omega)\cos\bar{\theta}_s(\omega) - jS(\omega)\sin\bar{\theta}_s(\omega) = \\ &= S_R(\omega) - jS_I(\omega), \end{aligned} \quad (3.11)$$

де $S(\omega)$ – модуль спектральної щільності, $\bar{\theta}_s(\omega)$ – її аргумент, а $S_R(\omega)$, $S_I(\omega)$ – відповідно дійсна та уявна частини.

Підставимо $e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t$ у (3.1):

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin \omega t dt. \quad (3.12)$$

Зіставивши вирази (3.11) і (3.12), отримаємо

$$S_R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos \omega t dt; \quad S_I(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin \omega t dt. \quad (3.13)$$

Складові різних форм подання спектральної щільності $S(j\omega)$ задовольняють такі співвідношення:

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \sqrt{S_R^2(\omega) + S_I^2(\omega)}; \quad \bar{\theta}_s(\omega) = \arctg[S_I(\omega)/S_R(\omega)]; \\ S_R(\omega) &= S(\omega)\cos\bar{\theta}_s(\omega); \quad S_I(\omega) = S(\omega)\sin\bar{\theta}_s(\omega). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Запишемо комплексні величини виразу (3.9) у показниковій формі: $dA_m e^{j\bar{\theta}_A(\omega)} = (1/\pi)S(\omega)e^{j\bar{\theta}_s(\omega)}d\omega$.

Звідси

$$\begin{cases} dA_m = \frac{1}{\pi} S(\omega)d\omega \Rightarrow S(\omega) = \pi \frac{dA_m}{d\omega} \Rightarrow S(f) = \frac{1}{2} \frac{dA_m}{df}; \\ \bar{\theta}_A(\omega) = \bar{\theta}_s(\omega). \end{cases} \quad (3.15)$$

Аналіз співвідношень (3.15) показує, що

- ◆ **модуль $S(\omega)$ комплексної спектральної щільності $S(j\omega)$ визначається амплітудами спектральних складових, а її аргумент $\bar{\alpha}_s(\omega)$ – початковими фазами.**

Тому модуль $S(\omega)$ спектральної щільності $S(j\omega)$ називають **амплітудним спектром**, або **спектром амплітуд**, а її аргумент $\bar{\alpha}_s(\omega)$ – **фазовим спектром** або **спектром фаз** неперіодичного процесу або сигналу $s(t)$. Перший дає інформацію про розподіл амплітуд, а другий – початкових фаз спектральних складових процесу або сигналу по частотному діапазону.

Із взаємозв'язку коефіцієнтів ряду Фур'є і спектральної щільності випливає, що

- ◆ **модуль $S(\omega)$ є парною, а аргумент $\bar{\alpha}_s(\omega)$ – непарною функцією частоти ω :**

$$S(-\omega) = S(\omega); \quad -\alpha_s(-\omega) = -\alpha_s(\omega). \quad (3.16)$$

Косинус, як відомо, є функцією парною, а синус – непарною. Добуток двох парних або двох непарних функцій дає функцію парну. Результатом добутку функції непарної на парну є функція непарна.

З цих причин і відповідно до співвідношень (3.14)

- ◆ **дійсна частина $S_R(\omega)$ спектральної щільності комплексних амплітуд є парною, а уявна $S_I(\omega)$ непарною функціями частоти:**

$$S_R(-\omega) = S_R(\omega); \quad S_I(-\omega) = -S_I(\omega). \quad (3.17)$$

Спряжена симетрія. Узагальненням властивостей (3.16) і (3.17) є властивість **спряженої симетрії** спектральної щільності:

- ◆ **для протилежних за знаком значень частоти значення спектральної щільності є комплексно-спряженими величинами:**

$$S(-j\omega) = S^*(j\omega). \quad (3.18)$$

3.2 Характерні властивості спектральної щільності комплексних амплітуд

Умову спряженої симетрії задовольняє також КЧФ стійкої системи, що фізично реалізується. Оскільки КЧФ пов'язана інтегральним перетворенням Фур'є з імпульсною характеристикою $g(t)$, то спектр дійсного процесу і сигналу, форма якого збігається з $g(t)$, буде таким самим, як і КЧФ.

Властивість спряженої симетрії (3.18) дає змогу розглядати спектральні параметри неперіодичних процесів і сигналів тільки для діапазону додатних значень частоти.

► Приклад.

Визначити спектральну щільність дійсного експонентного процесу $s(t) = Ae^{-\bar{\sigma}t}\sigma(t)$, $\bar{\sigma} > 0$ (рис. 3.3, а).

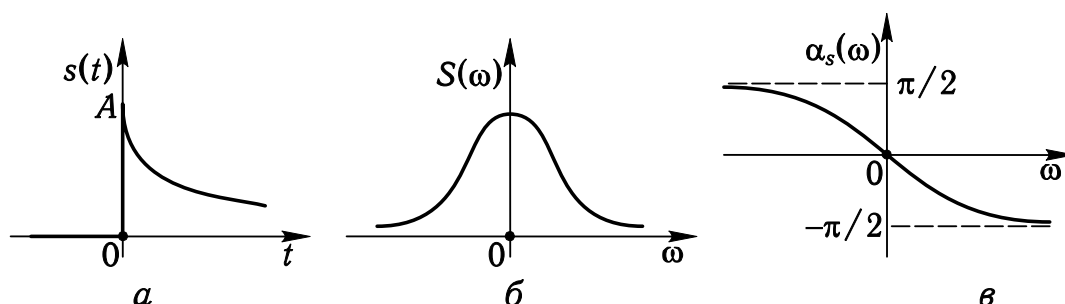


Рисунок 3.3 - Односторонній експонентний процес (а), його амплітудний (б) і фазовий (в) спектри.

Згідно з (3.2) спектральна щільність досліджуваного процесу

$$S_{\text{exp}}(j\omega) = \int_0^{\infty} Ae^{-\bar{\sigma}\lambda} e^{-j\omega\lambda} d\lambda = -\frac{A}{j\omega + \bar{\sigma}} e^{-j\omega\lambda} \Big|_0^{\infty} = \frac{A}{j\omega + \bar{\sigma}} =$$

$$= \frac{A}{\sqrt{\omega^2 + \bar{\sigma}^2}} e^{-j\arctg(\omega/\bar{\sigma})} = \frac{A(\bar{\sigma} - j\omega)}{\bar{\sigma}^2 + \omega^2} = \frac{A\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}^2 + \omega^2} - j \frac{A\omega}{\bar{\sigma}^2 + \omega^2}.$$

За формулою (3.14) обчислюємо модуль і аргумент:

$$S(\omega) = A/\sqrt{\omega^2 + \bar{\sigma}^2}; \quad \bar{\sigma}_s(\omega) = -\arctg(\omega/\bar{\sigma}). \quad (3.19)$$

Графіки амплітудного і фазового спектрів подано на рис. 3.3, б і в. ■

Спектральна щільність парних і непарних процесів і сигналів. У загальному випадку будь-який процес або сигнал є сумою двох складових – парного $s_{\text{пар}}(t)$ та непарного $s_{\text{нпар}}(t)$:

$$s(t) = s_{\text{пар}}(t) + s_{\text{нпар}}(t), \quad (3.20)$$

причому

$$s_{\text{пар}}(t) = (1/2)[s(t) + s(-t)]; \quad s_{\text{нпар}}(t) = (1/2)[s(t) - s(-t)].$$

Підставивши (3.20) в (3.1), дістанемо

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{пар}}(t)e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{нпар}}(t)e^{-j\omega t} dt = S_{\text{пар}}(j\omega) + S_{\text{нпар}}(j\omega).$$

Із урахуванням тригонометричної форми комплексної експоненти $\exp(-j\omega t)$ спектральна щільність парної складової

$$S_{\text{пар}}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{пар}}(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{пар}}(t)\cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{пар}}(t)\sin \omega t dt,$$

а непарної –

$$S_{\text{нпар}}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{нпар}}(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{нпар}}(t)\cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{нпар}}(t)\sin \omega t dt.$$

Оскільки інтеграл у симетричних межах від непарної функції дорівнює нулю, то з урахуванням співвідношень (3.13)

$$\begin{aligned} S_{\text{пар}}(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{пар}}(t)\cos \omega t dt = S_R(\omega); \\ S_{\text{нпар}}(j\omega) &= -j \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{нпар}}(t)\sin \omega t dt = -jS_I(\omega). \end{aligned} \quad (3.21)$$

- ◆ **Отже, дійсна частина $S_R(\omega)$ спектральної щільності $S(j\omega)$ є спектром парного $s_{\text{пар}}(t)$, а помножена на $(-j)$ уявна складова $S_I(\omega)$ – спектральною характеристикою (спектром) непарного $s_{\text{нпар}}(t)$ процесів і сигналів.**

Тоді спектральні характеристики парних неперіодичних процесів і сигналів повністю визначаються їхніми амплітудними спектрами

3.2 Характерні властивості спектральної щільності комплексних амплітуд

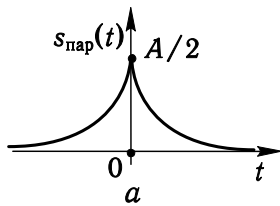
α і β є величинами дійсними. Фазовий спектр таких процесів і сигналів для всіх значень частоти дорівнює нулю.

Непарний сигнал або процес подається суто уявною спектральною щільністю з рівномірно розподіленим фазовим спектром, значення якого дорівнюють -90° .

◆ **Якщо сигнал або процес не задовольняє умову парної або непарної симетрії, то його спектральна щільність містить як дійсну, так і уявну частини.**

► **Приклад.** Визначити спектральну щільність дійсного одностороннього експонентного відеоімпульсу за його парною $s_{\text{пар}}(t)$ (рис. 3.4, а) та непарною $s_{\text{нпар}}(t)$ (рис. 3.4, б) складовими.

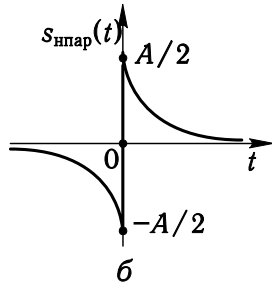
Математичні моделі парної та непарної складових заданого імпульсу є такими:



$$s_{\text{пар}}(t) = (A/2)e^{-\beta|t|};$$

$$s_{\text{нпар}}(t) = -(A/2)e^{\beta t}, -\infty < t \leq 0; (A/2)e^{\beta t}, 0 \leq t < \infty.$$

Спектральна щільність парної складової



$$S_{\text{пар}}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{2} e^{-\beta|\lambda|} e^{-j\omega\lambda} d\lambda =$$

$$\int_{-\infty}^0 \frac{A}{2} e^{\beta\lambda} e^{-j\omega\lambda} d\lambda + \int_0^{\infty} \frac{A}{2} e^{-\beta\lambda} e^{-j\omega\lambda} d\lambda =$$

$$= \frac{A}{2} \left(\frac{1}{\beta - j\omega} + \frac{1}{\beta + j\omega} \right) = \frac{A\alpha}{\alpha^2 + \omega^2},$$

Рисунок 3.4 - Парна (а) та непарна (б) складові одностороннього експонентного імпульсу.

а непарної -

$$S_{\text{нпар}}(j\omega) = \int_{-\infty}^0 \left(-\frac{A}{2}\right) e^{\beta t} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} \frac{A}{2} e^{-\beta t} e^{-j\omega t} dt =$$

$$= -j \frac{A\omega}{\omega^2 + \beta^2}$$

Співставивши $S_{\text{пар}}(j\omega)$ та $S_{\text{нпар}}(j\omega)$ із (3.19), дійдемо висновку, що $S_{\text{пар}}(j\omega)$ є дійсною частиною спектральної щільності одностороннього

експонентного імпульсу, а $S_{\text{нпар}}(j\omega)$ – добутком її уявної частини на $(-j)$. Тому спектральна щільність одностороннього експонентного імпульсу

$$S(j\omega) = S_{\text{пар}}(j\omega) + S_{\text{нпар}}(j\omega) = \frac{A\sigma}{\omega^2 + \sigma^2} - j \frac{A\omega}{\omega^2 + \sigma^2} = \frac{A}{j\omega + \sigma}.$$

◻

Зроблені зауваження (властивості спектральної щільності) є дуже важливими з практичного погляду, зокрема, при обчисленні спектральних характеристик цілого ряду процесів і сигналів, особливо таких, котрі не задовольняють умові абсолютної інтегровності.

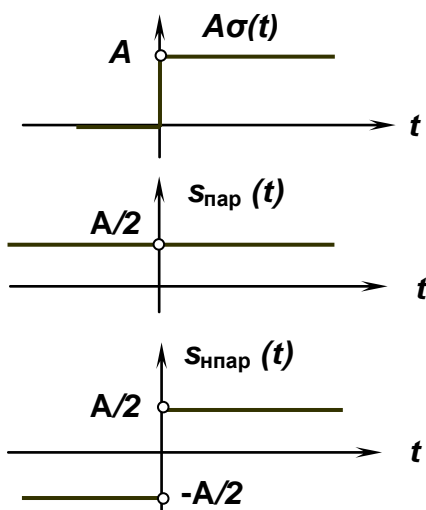


Рисунок 3.5 – Одиничний ступінчатий процес та його складові.

► **Приклад.** *Визначити спектральну щільність комплексних амплітуд процесу, моделлю якого є ступінчата функція $A\sigma(t)$ (рис. 3.5, а)*

Безпосереднє застосування перетворення Фур'є неможливе, оскільки такий процес не задовольняє умову абсолютної інтегровності (3.7) і навіть умову інтегровності квадрата процесу (3.8).

Представимо заданий процес $A\sigma(t)$ у сумою парної $s_{\text{пар}}(t) = A/2$ (для всіх значень t) та непарної

$$s_{\text{нпар}}(t) = \begin{cases} \frac{A}{2}, & t > 0; \\ -\frac{A}{2}, & t < 0; \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

складових.

Виходячи з вищезазначеного, спектральна щільність парної складової $s_{\text{пар}}(t)$ буде дійсною частиною $S_R(\omega)$ спектральної щільності $S(j\omega)$ заданого процесу $A\sigma(t)$, а непарної $s_{\text{нпар}}(t)$ складової – $jS_I(\omega)$ визначить її уявну частину $S_I(\omega)$.

3.2 Характерні властивості спектральної щільності комплексних амплітуд

Непарна складова $s_{\text{нпар}}(t)$ в точці $t=0$ має розрив першого роду і для неї неможливо безпосередньо застосувати перетворення (3.1). В таких випадках при обчисленні спектральної щільності користуються операцією граничного переходу, що застосовується до функції без розривів: $S(j\omega) = \lim_{c \rightarrow 0} S(c, j\omega)$.

У нашому випадку в якості такої функції можна використати $S(j\omega, c) = \frac{1}{2} \frac{1}{j\omega - c} + \frac{1}{2} \frac{1}{j\omega + c}$, яка є спектральною щільністю непарного

процесу $\tilde{s}_{\text{нпар}}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-ct}, & t > 0; \\ -\frac{1}{2} e^{ct}, & t < 0; \\ 0, & t = 0, \end{cases}$ оскільки

$s_{\text{нпар}}(t) = \lim_{c \rightarrow 0} \tilde{s}_{\text{нпар}}(t)$ за умови, що коефіцієнт c є додатним.

Спрямовуючи $c \rightarrow 0$, отримуємо спектральну щільність непарної складової заданого процесу:

$$S_{\text{нпар}}(j\omega) = -jS_I(\omega) = \lim_{c \rightarrow 0} S(j\omega, c) = \frac{1}{j\omega}. \quad (3.22)$$

Спектральна щільність $S_{\text{пар}}(j\omega) = S_R(\omega)$ парної складової як процесу, що також є процесом абсолютно неінтегровним, повинна бути такою, щоби згідно з оберненим перетворенням Фур'є

$$s_{\text{пар}}(t) = \frac{A}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{пар}}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Очевидно, що це можливо за умови, коли $S_{\text{пар}}(j\omega) = S_R(\omega) = A\pi\delta(\omega)$. Підстановка з урахуванням стробуючої властивості δ -функції підтверджує такий вибір.

Такий самий результат отримуємо з використанням операції граничного переходу. Парна складова $s_{\text{пар}}(t) = A/2$ процесу $A\sigma(t)$ є результатом граничного переходу двостороннього експонентного імпульсу $s(t) = (A/2)e^{-\alpha|t|}$: $s_{\text{пар}}(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} s(t)$. Тоді, спектральна щільність

$$S_{\text{пар}}(j\omega) = S_R(j\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} S(j\omega, \alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{A\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Аналіз останнього співвідношення показує, що із зменшенням частоти значення функції $S(j\omega, \alpha)$ на нульовій частоті прямує до нескінчен-

ності, а із збільшенням частоти – до нуля, але площа під її графіком залишається без змін і дорівнює

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega = A\alpha \frac{1}{\alpha} \lim_{\alpha \rightarrow 0} (\operatorname{arctg} \frac{\omega}{\alpha} \Big|_{-\infty}^{\infty}) = A\pi.$$

Така поведінка є характерною для дельта функції площею $A\pi$, а, отже, $S_{\text{пар}}(j\omega) = S_R(\omega) = A\pi\delta(\omega)$. Цей приклад засвідчує, що спектральна характеристика процесу незмінного в часі та амплітудою A описується дельта-функцією з частотним аргументом та площею $2\pi A$:

$$A \leftrightarrow 2\pi A\delta(\omega).$$

Сума спектральних щільностей парної та непарної складових заданого ступінчатого процесу дає його спектральну щільність амплітуд:

$$S(j\omega) = S_R(\omega) - jS_I(\omega) = A\pi\delta(\omega) + \frac{A}{j\omega}. \quad (3.23)$$

У випадку, коли висота сходинки дорівнює одиниці згідно з (3.23) отримаємо спектральну щільність комплексних амплітуд одиничного ступінчатого процесу в такому вигляді:

$$\sigma(t) \leftrightarrow S_{\sigma}(j\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \quad (3.24)$$

- відносно кругової частоти; та

$$\sigma(t) \leftrightarrow S_{\sigma}(j2\pi f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} \quad (3.25)$$

- відносно циклічної частоти.



Дуже часто під час теоретичних досліджень застосовується **інтегральна форма** подання одиничного ступінчатого процесу і сигналу, яку легко отримати на основі зворотного перетворення Фур'є спектральної щільності комплексних амплітуд. Відповідно до (3.2) та з урахуванням (3.38)

3.2 Характерні властивості спектральної щільності комплексних амплітуд

$$\sigma(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega.$$

Перший інтеграл згідно з фільтруючою властивістю δ -функції дорівнює $1/2$, а другий

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{j\omega} \cos \omega t d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{j\omega} \cdot j \sin \omega t d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega,$$

де враховано, що особливий інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega} \cos \omega t d\omega = 0. \quad (3.26)$$

Остаточно,

$$\sigma(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega = s_{\text{пар}}(t) + s_{\text{нпар}}(t). \quad (3.27)$$

Співвідношення (3.27) і є інтегральною формою одиничного ступінчатого процесу і сигналу.

Інтеграл виду

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega = \text{Si}(\infty) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & t \geq 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & t < 0 \end{cases} \quad (3.28)$$

також відноситься до класу особливих і називається **інтегральним синусом**.

Тригонометричні форми перетворення Фур'є. Алгебраїчне подання спектральної щільності (3.11) підставимо в (3.2) та скористаємося відомою формулою Ейлера. Тоді

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{S_R(\omega) \cos \omega t + S_I(\omega) \sin \omega t + \\ + j[S_R(\omega) \sin \omega t - S_I(\omega) \cos \omega t]\} d\omega. \quad (3.29)$$

Як інтеграл у симетричних межах від непарних підінтегральних функцій уявної частини (3.29)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [S_R(\omega) \sin \omega t - S_I(\omega) \cos \omega t] d\omega = 0. \quad (3.30)$$

Тоді відповідно до (3.29) і (3.30)

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [S_R(\omega) \cos \omega t + S_I(\omega) \sin \omega t] d\omega. \quad (3.31)$$

Вираз (3.31) і є однією з тригонометричних форм оберненого перетворення Фур'є.

Підінтегральні функції в (3.31) є парними, тому можна записати

$$s(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [S_R(\omega) \cos \omega t + S_I(\omega) \sin \omega t] d\omega. \quad (3.32)$$

Якщо для всіх $t < 0$ миттєві значення процесу або сигналу $s(t)$ дорівнюють нулю, то після обертання на мінус знака для змінної t в (3.32), дістанемо

$$\int_0^{\infty} S_R(\omega) \cos \omega t d\omega = \int_0^{\infty} S_I(\omega) \sin \omega t d\omega, \quad t \geq 0. \quad (3.33)$$

З урахуванням (3.33) співвідношення (3.32) записують у такому вигляді:

$$s(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} S_R(\omega) \cos \omega t d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} S_I(\omega) \sin \omega t d\omega. \quad (3.34)$$

- ◆ Отже, **дійсний сигнал або процес, який перетворюється на нуль при $t < 0$, повністю визначається тільки дійсною або тільки уявною частиною його спектральної щільності.**

На практиці використовують також іншу тригонометричну форму оберненого перетворення Фур'є, яка є результатом тригонометричних спрощень (3.32) з урахуванням (3.14):

$$s(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) \cos[\omega t - \alpha_s(\omega)] d\omega. \quad (3.35)$$

3.2 Характерні властивості спектральної щільності комплексних амплітуд

У результаті подібних перетворень виразу (3.23) отримаємо:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \sin(\omega t - \phi_s(\omega)) d\omega = 0. \quad (3.36)$$

Із співвідношень (3.30) і (3.36) випливає, що

- ◆ **дійсна і уявна частини спектральної щільності та амплітудний і фазовий спектри пов'язані між собою і тому не можуть змінюватися незалежно.**

Властивість двоїстості. Не менш важливою з практичного погляду є властивість *взаємозамінності змінних t і ω (властивість двоїстості)*.

Припустімо, що справедливою є відповідність $y(t) \leftrightarrow Y(j\omega)$, яка задовольняє (3.1) і (3.2). Тоді властивість двоїстості інтегрального перетворення Фур'є у загальному випадку подають такою відповідністю:

$$y(\omega) \leftrightarrow (1/2\pi)Y(-jt). \quad (3.37)$$

Отже, якщо $Y(j\omega)$ – спектральна щільність неперіодичного процесу або сигналу $y(t)$, то при заміні в його математичній моделі t на ω отримаємо функцією $y(\omega)$, що є спектром процесу або сигналу $(1/2\pi)Y(-jt)$, опис якого з точністю до постійного множника $1/2\pi$ визначається $Y(j\omega)$ при заміні в ній ω на $-t$.

Для доведення відповідності (3.37) спочатку ліву та праву частини прямого перетворення Фур'є (3.1) для процесу або сигналу $y(t)$ помножимо на $1/2\pi$ та змінимо знак ω на протилежний:

$$\frac{Y(-j\omega)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{j\omega t} dt. \quad (3.38)$$

Замінивши в (3.38) ω на t , а t на ω , дістанемо:

$$\frac{Y(-jt)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} y(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.39)$$

Звідси випливає, що $(1/2\pi)Y(-jt)$ – обернене перетворення Фур'є спектральної щільності $y(\omega)$.

Розглянемо обернене перетворення Фур'є (3.2) процесу або сигналу $y(t)$. Спочатку внесемо $1/2\pi$ під знак інтеграла і замінимо t на ω , а ω на t :

$$y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Y(jt)}{2\pi} e^{j\omega t} dt.$$

Змінивши в останньому інтегральному співвідношенні знак змінної t і врахувавши, що при перестановці меж інтегрування знак результату змінюється на протилежний, отримуємо:

$$y(\omega) = \int_{\infty}^{-\infty} \frac{Y(-jt)}{2\pi} e^{-j\omega t} d(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Y(-jt)}{2\pi} e^{-j\omega t} dt. \quad (3.40)$$

Звідси, $y(\omega)$ – спектральна щільність процесу або сигналу $(1/2\pi)Y(-jt)$.

Інтегральні співвідношення (3.39) і (3.40) доводять відповідність (3.37).

Властивість двоїстості перетворення Фур'є дає змогу оцінювати спектральні характеристики одних процесів, ґрунтуючись на часовому та частотному описі інших.

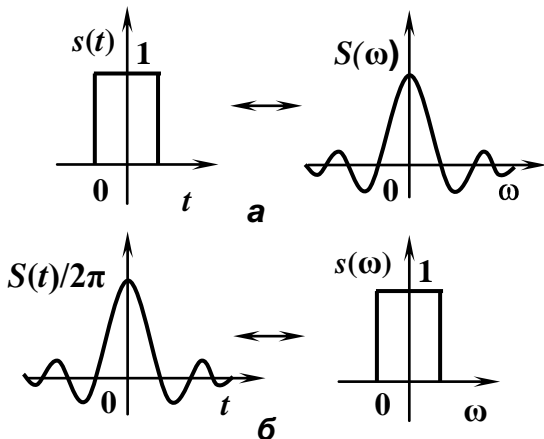


Рисунок 3.6 - До властивості двоїстості інтегрального перетворення Фур'є.

Графічну ілюстрацію властивості двоїстості показано на рис. 3.5. Як бачимо, спектр $s(\omega)$ процесу або сигналу $(1/2\pi)S(-jt)$ (див. рис. 3.6, б), форма якого збігається із спектром $S(j\omega)$ прямокутного парного відеоімпульсу $s(t)$ (див. рис. 3.5, а), повторює форму цього відеоімпульсу.

Початкові значення процесу або сигналу і спектра. Згідно з прямим перетворенням Фур'є (3.1) початкове значення спектральної щільності комплексних амплітуд (її значення на частоті $\omega = 0$)

$$S(j0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\lambda) d\lambda. \quad (3.41)$$

3.2 Характерні властивості спектральної щільності комплексних амплітуд

За геометричної інтерпретації інтеграла початкове значення спектральної щільності дорівнює площі під графіком процесу або сигналу $s(t)$.

Відповідно до оберненого перетворення Фур'є (3.2) початкове значення процесу або сигналу

$$s(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S(jf) df \quad (3.42)$$

також визначає площу, але обмежену графіком спектральної щільності та віссю частот.

► **Приклад.** *Визначити початкове значення спектру дійсного експонентного процесу за його описом у часовій та частотній областях.*

Початкове значення спектральної щільності $S(j\omega) = A/(j\omega + \alpha)$ дійсного експонентного процесу дорівнює $S(j0) = A/\alpha$. Такий самий результат отримаємо за його математичною моделлю $s(t) = Ae^{-\alpha t} \sigma(t)$, скориставшись (3.41):

$$S(j0) = \int_0^{\infty} Ae^{-\alpha t} dt = -(A/\alpha)e^{-\alpha t} \Big|_0^{\infty} = \frac{A}{\alpha}.$$

Початкове значення процесу за його спектральною щільністю

$$s(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{j\omega + \alpha} d\omega = Ae^{-\alpha t} \sigma(t) \Big|_{t=0} = A.$$



ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. Модуль спектральної щільності комплексних амплітуд визначається амплітудами спектральних складових, а її аргумент – початковими фазами.

2. Спектр дійсного сигналу,



Слід запам'ятати:

1. Характерні властивості спектральної щільності неперіодичних процесів і сигналів: комплексний характер, спряженої симетрії, парності модуля і дійсної частини та непарності аргумента і уявної частини, двоїстості.

форма якого збігається з імпульсною характеристикою фізично реалізованого ЛІВ кола, буде таким самим, як і його КЧФ.

3. Якщо сигнал не задовольняє умову парної та непарної симетрії, то його спектральна щільність містить як дійсну, так і уявну частини.

4. Дійсний сигнал, який перетворюється на нуль при $t < 0$, повністю визначається тільки дійсною або тільки уявною частиною його спектральної щільності.

5. Дійсна і уявна частини спектральної щільності комплексних амплітуд та амплітудний і фазовий спектри не можуть змінюватися незалежно.

2. Спектральна щільність парного процесу і сигналу є величиною дійсною, непарного – чисто уявною, довільного – містить як дійсну, так і уявну частини.

3. Початкове значення спектральної щільності визначається інтегралом від процесу або сигналу, а початкове значення процесу або сигналу – інтегралом від його спектральної щільності.

4. Формули:

$$s(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [S_R(\omega) \cos \omega t + S_I(\omega) \sin \omega t] d\omega;$$

$$s(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) \cos[\omega t - \alpha_s(\omega)] d\omega -$$

тригонометричні форми інтегрального перетворення Фур'є.



Треба вміти:

1. Пояснити фізичний зміст спектральної щільності комплексних амплітуд.

2. Записати тригонометричні форми інтегрального перетворення ряду Фур'є.

3. Використовувати характерні властивості спектральної щільності комплексних амплід для визначення спектральних характеристик різних неперіодичних процесів і сигналів.

3.3 Взаємозв'язок спектральних та енергетичних характеристик

Енергетичний спектр процесу і сигналу. За означенням енергія дійсного неперіодичного процесу або сигналу $s(t)$

3.3 Взаємозв'язок спектральних та енергетичних характеристик

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt, \quad (3.43)$$

а для комплексного процесу або сигналу

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt, \quad (3.44)$$

де $|s(t)|^2$ - квадрат модуля комплексної функції $s(t)$.

Разом із енергією енергетичною характеристикою процесів і сигналів є миттєва потужність:

$$p(t) = s^2(t). \quad (3.45)$$

Якщо спектральна характеристика $S(j\omega)$ і дійсний сигнал або процес $s(t)$ задовольняють пряме (3.1) і обернене (3.2) інтегральні перетворення Фур'є, то згідно з (3.43) енергія цього процесу

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt.$$

При зміні порядку інтегрування

$$E_s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{j\omega t} dt \right] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) S^*(j\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S^2(\omega) d\omega, \text{ де}$$

враховано, що внутрішній інтеграл є спектральною комплексно-спряженою характеристикою процесу або сигналу $s(t)$ відповідно до умови спряженої симетрії (3.18).

Остаточно, енергія дійсного процесу або сигналу

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S^2(\omega) d\omega. \quad (3.46)$$

Якщо досліджуваний процес або сигнал є комплексним, то його енергія

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S^2(\omega) d\omega. \quad (3.47)$$

Співвідношення (3.46) і (3.47), подібні до рівності Парсеваля (2.27), установлюють зв'язок між енергетичними та спектральними характеристиками неперіодичного процесу і сигналу та відомі як **формула Релея**.

Ця формула констатує важливий результат:

- ♦ **енергія неперіодичного процесу або сигналу визначається розподілом тільки амплітуд гармонічних складових по частотному діапазону та не залежить від розподілу початкових фаз.**

Вирази (3.46) і (3.47) показують, що енергію процесу або сигналу можна визначити у будь-який із двох рівнозначних способів: інтегруванням квадрата процесу або сигналу (модуля комплексного процесу або сигналу) або інтегруванням квадрата амплітудного спектра.

У разі якщо $s(t) = u(t)$ – напруга на резисторі з опором у 1 Ом, то ліва частина, наприклад формули (3.46), є енергією, яка виділяється на резисторі у вигляді тепла за час від $-\infty$ до ∞ . Тоді інтеграл правої частини (3.46) як площа, обмежена квадратом АЧХ, дає енергію, що розсіюється на цьому резисторі за напруги $u(t)$. Це і визначає фізичний зміст формули Релея.

Із урахуванням (3.15)

$$S^2(\omega) = (\pi dA_m / d\omega)^2 = 0,5(dA_m / df)^2. \quad (3.48)$$

За формулою Релея енергія процесу або сигналу є сумою $\sum (1/\pi)S^2(\omega)d\omega$ елементарних енергій $dE_s = (1/\pi)S^2(\omega)d\omega$.

Для гармонічної складової з амплітудою dA_m і частотою ω елементарна енергія

$$dE_s = (1/\pi)(\pi dA_m / d\omega)^2 d\omega = \pi(dA_m)^2 / d\omega. \quad (3.49)$$

Отже, *квадрат амплітуди гармонічної складової неперіодичного процесу і сигналу є пропорційним енергії цієї складової.*

Тоді відповідно до (3.48) і (3.49) квадрат модуля спектральної щільності (квадрат амплітудного спектра)

3.3 Взаємозв'язок спектральних та енергетичних характеристик

$$S^2(\omega) = \pi dE_s / d\omega \Rightarrow S^2(f) = 0,5 dE_s / df ,$$

а отже, визначає енергію dE_s , яка припадає на одиницю смуги частот df .

Таким чином, квадрат амплітудного спектра відображає розподіл енергії спектральних складових неперіодичного процесу і сигналу по частотному діапазону, а тому називається його **спектральною щільністю енергії** $W_s(\omega)[W_s(f)]$ або **енергетичним спектром**.

Отже, енергетичний спектр неперіодичного процесу і сигналу

$$W_s(\omega) = S^2(\omega) = \pi \frac{dE_s}{d\omega} \Rightarrow W_s(f) = S^2(f) = \frac{1}{2} \frac{dE_s}{df}. \quad (3.50)$$

Це ще одна із спектральних характеристик неперіодичного процесу і сигналу в частотній області (разом із спектральною щільністю комплексних амплітуд). Вона відіграє дуже важливу роль в інженерних оцінках, наприклад такого параметра процесів і сигналів, як *ширина спектра*. Проте слід пам'ятати, що енергетичний підхід до дослідження властивостей процесів і сигналів не враховує фазові співвідношення, а отже,

- ♦ **всі процеси і сигнали однакової форми, але з різним розміщенням на часовій осі, з енергетичного погляду є рівнозначними.**

Згідно з (3.50) енергетичний спектр неперіодичного процесу і сигналу має таку розмірність:

$$[W_s(\omega)] = [W_s(f)] = \left[\frac{\text{енергія}}{\text{Гц}} = \frac{\text{амплітуда}^2}{\text{Гц}} = \text{енергія} \cdot \text{с} \right].$$

► **Приклад.** Визначити енергетичний спектр $W_s(\omega)$ та енергію E_s парного прямокутного відеоімпульсу тривалістю $t_{\text{імп}}$ та амплітудою A .

Такий прямокутний відеоімпульс подамо різницею двох ступінчастих складових:

$$s(t) = A[\sigma(t + t_{\text{імп}}/2) - \sigma(t - t_{\text{імп}}/2)]. \quad (3.51)$$

Тоді згідно з прямим перетворенням Фур'є (3.1) спектральна щільність заданого відеоімпульсу

$$S(j\omega) = \int_{-t_{\text{імп}}/2}^{t_{\text{імп}}/2} A e^{-j\omega t} dt = \frac{A}{-j\omega} (e^{-j\omega t_{\text{імп}}/2} - e^{-j\omega t_{\text{імп}}/2}) =$$

$$= (2A/\omega) \sin(\omega t_{\text{імп}}/2) = At_{\text{імп}} [\sin(\omega t_{\text{імп}}/2)/(\omega t_{\text{імп}}/2)]. \quad (3.52)$$

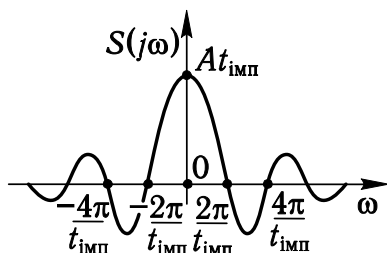


Рисунок 3.7 – Спектральна щільність прямокутного парного відеоімпульсу.

Її графік зображено на рис. 3.7. Оскільки $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x / x) = 1$, то початкове значення спектральної щільності $S(j0) = At_{\text{імп}}$, тобто площі прямокутного відеоімпульсу. На частотах $\omega_{0k} = 2\pi k / t_{\text{імп}}$ ($k = \pm 1, 2, 3, \dots$) спектральна щільність дорівнює нулю. Такі значення частоти називають її нулями.

Заданий імпульс є парним. Спектральна щільність парного процесу або сигналу, а отже, і досліджуваного, як відомо, є величиною дійсною. Вона повністю визначає модуль $S(\omega)$ спектральної щільності (3.52), тобто амплітудний спектр прямокутного відеоімпульсу, а її аргумент $\bar{b}_s(\omega)$ на всіх частотах дорівнює нулю.

Проте функція $\sin x / x$ набуває як додатних, так і від'ємних значень, а значення амплітудного спектра (амплітуди спектральних складових) від'ємними бути не можуть. Тому, визначивши амплітудний спектр заданого прямокутного відеоімпульсу (див. рис. 3.8, а) як абсолютне значення спектральної щільності (3.52)

$$S(\omega) = |S(j\omega)| = At_{\text{імп}} |\sin(\omega t_{\text{імп}}/2)/(\omega t_{\text{імп}}/2)|, \quad (3.53)$$

потрібно значення аргументу $\bar{b}_s(\omega)$ (фазового спектра) збільшити на 180° для всіх частотних інтервалів, обмежених тими нулями спектральної щільності, де вона набуває від'ємних значень (див. рис. 3.8, б).

Тоді можна записати:

$$\bar{b}_s(\omega) = \begin{cases} 0, & 2\pi k / t_{\text{імп}} \leq |\omega| \leq 2\pi(k+1) / t_{\text{імп}}; \quad k = 0, 2, 4, \dots; \\ \pi, & 2\pi m / t_{\text{імп}} \leq |\omega| \leq 2\pi(m+1) / t_{\text{імп}}; \quad m = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \quad (3.54)$$

3.3 Взаємозв'язок спектральних та енергетичних характеристик

Порівнявши співвідношення (3.52) з першим у (2.29), дійдемо висновку, що **амплітудні спектри одиночного прямокутного відеоімпульсу і періодичної послідовності таких імпульсів збігаються за формою.**

Згідно з формулою (3.50) енергетичний спектр прямокутного відеоімпульсу

$$W_s(\omega) = S^2(\omega) = A^2 t_{\text{імп}}^2 \left| \frac{\sin(\omega t_{\text{імп}}/2)}{\omega t_{\text{імп}}/2} \right|^2. \quad (3.55)$$

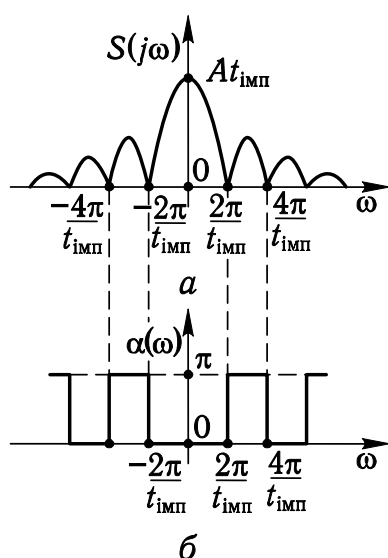


Рисунок 3.8 - Амплітудний (а) і фазовий спектри (б) прямокутного парного відеоімпульсу.

Як бачимо із його графічного зображення (див. рис. 3.9), найбільший внесок у повну енергію імпульсу вносять спектральні складові, частоти яких обмежені першим нулем $\omega_{01} = 2\pi/t_{\text{імп}}$ функції $(\sin x/x)^2$. Із зростанням частоти енергетична значимість складових зменшується обернено пропорційно квадрату частоти: $W_s(\omega) = O(1/\omega^2)$.

Дослідження показують, що в діапазоні частот $[0, \omega_{01} = 2\pi/t_{\text{імп}}]$ зосереджено 90% всієї енергії імпульсу, а в частотному інтервалі $[0, \omega_{02} = 4\pi/t_{\text{імп}}]$ - майже 95%.

Отже, розглянутий частотний діапазон за межами першої пелюстки не сприяє істотному збільшенню енергії імпульсу. Проте подвоєння смуги пропускання зменшує завадостійкість системи за рахунок збільшення потужності завад. Тому величину $\Delta\omega_{\text{сп.акт}} = 4\pi/t_{\text{імп}}$ називають **активною шириною** спектра прямокутного відеоімпульсу, визначену за енергетичним критерієм, а інтервал частот, обмежений першим нулем, - **ефективною шириною спектра.**

Згідно з (3.46) повна енергія прямокутного відеоімпульсу

$$E_s = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (A t_{\text{імп}})^2 \frac{\sin^2 \omega t_{\text{імп}}/2}{(\omega t_{\text{імп}}/2)^2} d\omega = \frac{1}{\pi} (A t_{\text{імп}})^2 \left[\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 \omega t_{\text{імп}}/2}{(\omega t_{\text{імп}}/2)^2} d\omega \right] = A^2 t_{\text{імп}},$$

де враховано, що інтеграл $\int_0^{\infty} (\sin^2 x/x^2) dx = \pi/2$.



Добуток ширини спектра процесу або сигналу на його тривалість називають **базою процесу або сигналу**. Ця безрозмірна величина є одним із відображень фундаментального для теорії процесів і сигналів принципу невизначеності, відповідно до якого добуток тривалості процесу або сигналу і ширини його спектра є сталою величиною порядку одиниця. Значення бази процесів і сигналів тісно пов'язане з означенням його ширини спектра та тривалості

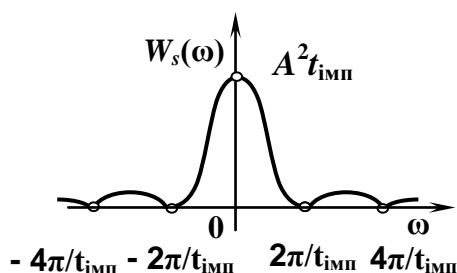


Рисунок 3.9 - Спектр енергії прямокутного відеоімпульсу.

(табл. 3.1). Так, відносно активної ширини спектра база прямокутного відеоімпульсу $C_B = \Delta f_{\text{сп.акт}} t_{\text{імп}} = (2/t_{\text{імп}}) t_{\text{імп}} = 2$.

У системах зв'язку слід використовувати процеси і сигнали з найменшими значеннями бази, що одночасно забезпечує як високу завадостійкість системи, так і її пропускну здатність.

Регулювати ці характеристики системи окремо через тривалість імпульсу або ширину спектра дуже проблематично, оскільки вимоги на ці параметри відповідно до *принципу невизначеності* суперечать одна одній. Так, пропускну здатність системи може підвищитися за рахунок зменшення тривалості або збільшення ширини спектра. Водночас забезпечити достатню завадостійкість системи можливо за рахунок зменшення ширини спектра.

Таблиця 3.1 Типові значення бази деяких процесів і сигналів

Тип процесу або сигналу (відеоімпульси)	База за енергетичним критерієм	База за рівнем 0,1 від максимального значення процесу або сигналу	База за рівнем 0,1 від максимального значення обвідної
Експонентний	1,16	3,64	3,64
Прямокутний	0,743	2,68	3,18
Трикутний	0,454	1,48	2,01
Косинусний	0,445	1,3	1,66
Дзвоновий	0,231	1,46	1.46

3.3 Взаємозв'язок спектральних та енергетичних характеристик

Взаємний енергетичний спектр. За означенням взаємна енергія (або енергія взаємодії) двох дійсних детермінованих неперіодичних процесів або сигналів $s_1(t)$ та $s_2(t)$ пропорційна їхньому скалярному добутку ($s_1 s_2$):

$$E_B = 2(s_1 s_2) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(t) dt. \quad (3.56)$$

Припустімо, що дійсні сигнали або процеси $s_1(t)$ та $s_2(t)$ задані своїми спектральними характеристиками відповідно $S_1(j\omega)$ та $S_2(j\omega)$. Тоді згідно з (3.56) та з урахуванням оберненого перетворення Фур'є (3.2) енергія взаємодії цих процесів або сигналів

$$E_B = 2 \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_2(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right) dt.$$

Звідси, змінивши порядок інтегрування за часом і частотою, отримаємо:

$$E_B = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_2(j\omega) \left(\int_{-\infty}^{\infty} S_1(j\omega) e^{j\omega t} dt \right) d\omega.$$

Згідно з умовою спряженої симетрії (3.18)

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_1(j\omega) e^{j\omega t} dt = S_1(-j\omega) = S_1^*(j\omega).$$

Остаточно

$$\begin{aligned} E_B &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_2(j\omega) S_1^*(j\omega) d\omega = 2 \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(t) dt \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_2(j\omega) S_1^*(j\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S_2(jf) S_1^*(jf) df. \end{aligned} \quad (3.57)$$

- ◆ **Скалярному добутку двох неперіодичних процесів або сигналів у часовій області відповідає скалярний добуток їх спектральних характеристик у частотній.**

Співвідношення (3.57) називають **узагальненою формулою Релєя** за прізвищем англійського фізика, відомого своїми працями з теорії коливань та хвиль. У цій формулі операцію комплексного sprzęження можна застосовувати до будь-якого з співмножників, що дає змогу записати її і у такому вигляді:

$$E_B / 2 = (s_1 s_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_2^*(j\omega) S_1(j\omega) d\omega. \quad (3.58)$$

Підставивши спектральні характеристики процесів і сигналів у показниковій формі $S_1(j\omega) = S_1(\omega)e^{-j\alpha_1(\omega)}$ і $S_2(j\omega) = S_2(\omega)e^{-j\alpha_2(\omega)}$ у формулу (3.57), дістанемо:

$$\begin{aligned} E_B / 2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\omega) S_2(\omega) e^{-j\beta_1(\omega)} e^{j\beta_2(\omega)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\omega) S_2(\omega) \cos(\beta_2 - \beta_1) d\omega + \\ &+ j \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} S_1(\omega) S_2(\omega) \sin(\beta_2 - \beta_1) d\omega}_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\omega) S_2(\omega) \cos(\beta_2 - \beta_1) d\omega, \end{aligned}$$

де враховано, що інтеграл у симетричних межах від непарної функції дорівнює нулю.

Отже, скалярний добуток

$$(s_1 s_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\omega) S_2(\omega) \cos[\beta_2(\omega) - \beta_1(\omega)] d\omega. \quad (3.59)$$

Співвідношення (3.59) є тригонометричною формою подання скалярного добутку двох процесів або сигналів, а отже, і формули Релєя.

Підінтегральна функція як добуток модулів спектрів процесів або сигналів і косинуса є функцією дійсною. Порівняння, наприклад, (3.58) і (3.59) дає змогу записати таке:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\omega) S_2(\omega) \cos[\beta_2(\omega) - \beta_1(\omega)] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{12}(\omega) d\omega, \quad (3.60)$$

де

$$W_{12}(\omega) = S_1(\omega)S_2^*(\omega)\cos[\phi_2(\omega) - \phi_1(\omega)] = \text{Re}[S_1(j\omega)S_2^*(j\omega)] \quad (3.61)$$

є **взаємним енергетичним спектром** або **спектральною щільністю енергії взаємодії** двох детермінованих неперіодичних процесів або сигналів.

Згідно з формулами (3.58) і (3.59) взаємний енергетичний спектр

$$W_{12}(\omega) = \pi dE_B / d\omega = 0,5dE_B / df \quad (3.62)$$

для кожного значення частоти f визначає енергію взаємодії спектральних складових двох процесів або сигналів із цією частотою, що припадає на одиницю частоти в частотному діапазоні df . Це власне і відображає фізичну сутність взаємного енергетичного спектра $W_{12}(\omega)$.

Отже, значення енергетичного спектра взаємодії визначають розподіл енергії взаємодії двох процесів або сигналів по частотному діапазону.

Згідно з формулою (3.62) розмірність взаємного енергетичного спектра $[W_{12}(\omega)] = [\text{енергія} \cdot \text{секунда} = \text{ампл.}^2 / \text{Гц} = \text{енергія} / \text{Гц}]$.

Аналіз формул (3.59) і (3.61) дає змогу зробити такий висновок:

♦ енергія взаємодії двох процесів або сигналів визначається не тільки їхніми амплітудними, а й фазовими спектрами.

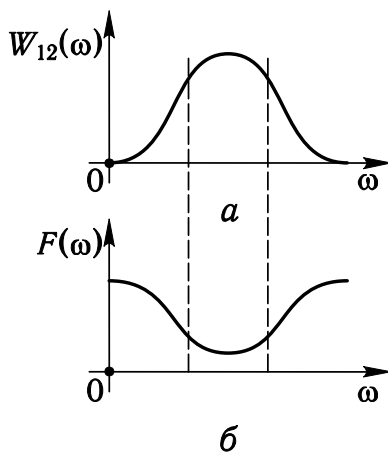


Рисунок 3.10 - До формування ортогональних процесів.

Звернімо увагу на особливості впливу амплітудного та фазового спектрів. Як випливає з наведених формул, у формуванні взаємної енергії двох процесів або сигналів головну роль відіграють гармонічні складові однакової частоти, різниця початкових фаз яких $\phi_2 - \phi_1$ не є кратною $\pi/2$. Якщо ця різниця $\phi_2 - \phi_1 = (2n + 1)\pi/2$, $n = 0, 1, 2, \dots$, то енергія взаємодії $E_B = 0$, а самі процеси або сигнали, як відомо, вважаються **ортогональними**.

Енергія взаємодії двох процесів або сигналів визначається тими ділянками частотного діапазону, де амплітудні спектри процесів або сигналів перекриваються.

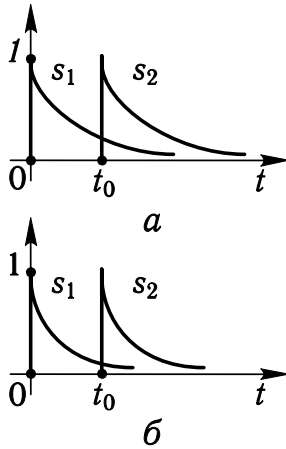


Рисунок 3.11 - Процеси з різним рівнем ортогональності.

Згідно з виразом (3.61) такі частотні ділянки визначаються частотами, для яких добуток амплітудних спектрів двох процесів або сигналів не дорівнює нулю: $S_1(\omega)S_2(\omega) \neq 0$.

На цьому ґрунтується один із підходів до формування процесів і сигналів із мінімальним енергетичним зв'язком, добиваючись у кінцевому підсумку їх ортогональності.

Очевидно, що таку ідею можна реалізувати селективною системою на зразок частотного фільтра, АЧХ якого має яскраво виражений мінімум у діапазоні частот, де енергетичний спектр $W_{12}(\omega)$ є максимальним (рис. 3.10). Слід зазначити, що тип фільтра (ФВЧ, ФНЧ, СФ тощо) багато в чому визначається властивостями процесів і сигналів $s_1(t)$ і $s_2(t)$.

► **Приклад.** Визначити взаємний енергетичний спектр двох дійсних експонентних процесів із однаковими параметрами, зміщених у часі на величину t_0 (рис. 3.11, а).

Спектральні щільності таких процесів:

$$S_1(j\omega) = e^{-\bar{\sigma}t} \sigma(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega + \bar{\sigma}}; \quad S_2(j\omega) = e^{-\bar{\sigma}(t-t_0)} \sigma(t-t_0) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega + \bar{\sigma}} e^{-j\omega t_0}.$$

Згідно з (3.61) взаємний енергетичний спектр цих процесів

$$W_{12}(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + \bar{\sigma}^2} \cos(-\arctg \frac{\omega}{\bar{\sigma}} - \omega t_0 + \arctg \frac{\omega}{\bar{\sigma}}) = \frac{\cos \omega t_0}{\omega^2 + \bar{\sigma}^2}. \quad (3.63)$$

Очевидно, що енергетичний спектр $W_{12}(\omega)$ залежатиме як від $\bar{\sigma}$ (визначає динаміку процесів), так і від часового зсуву t_0 .

Якщо зафіксувати $\bar{\sigma}$, то взаємний енергетичний спектр $W_{12}(\omega)$ повністю залежатиме від зсуву t_0 .

На рис. 3.12 зображено два характерних графіки для $W_{12}(\omega)$. Якщо $\bar{\sigma}t_0 \ll 1$ (рис. 3.12, а), то взаємний енергетичний спектр $W_{12}(\omega)$ має яскраво низькочастотний характер. Щоб зменшити скалярний добуток

3.3 Взаємозв'язок спектральних та енергетичних характеристик

процесів, тобто зробити енергію їхньої взаємодії мінімальною, слід застосувати ФВЧ, який не пропускати низькочастотні складові з частотами $\omega < \omega_{\text{н.гр}} \approx 1/b$ та виділяти високочастотні. Це призведе до зростання швидкості зміни процесів у часі за рахунок істотного зменшення впливу НЧ складових, а отже, зменшення тривалості процесів і ефекту їх перекриття (рис. 3.12, б). Як наслідок сигнали на виході ФВЧ будуть наближатися до ортогональних

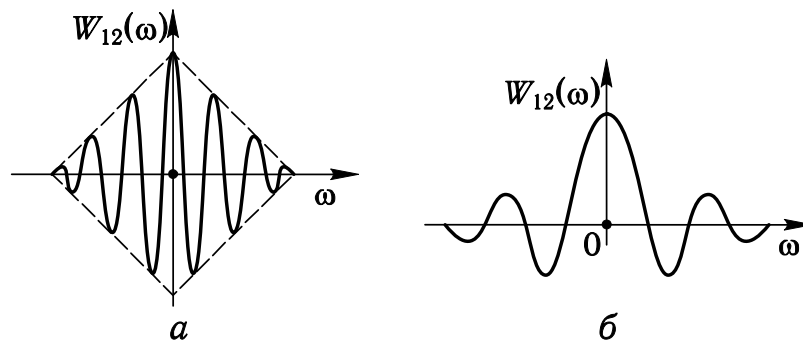


Рисунок 3.12 - Залежність взаємного енергетичного спектра двох експонентних процесів від значення величини зсуву між ними:
 $a - bt_0 \gg 1$; $b - bt_0 \ll 1$.

Очевидно, чим більше схожими є процеси або сигнали в межах певного часового інтервалу, тим більша енергія взаємодії. Це може бути, зокрема, за малих змін процесів і сигналів у часі. При цьому збільшується часовий інтервал, у межах якого добуток миттєвих значень процесів і сигналів не дорівнює нулю.



ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. Енергію неперіодичного процесу можна визначити у будь-який із двох рівнозначних способів: інтегруванням квадрата процесу або сигналу та інтегруванням квадрата його амплітудного спектра.

2. У інформаційних систе-



Слід запам'ятати:

1. Визначення понять: спектральна щільність енергії, взаємний енергетичний спектр, база сигналу або процесу.

2. Енергія взаємодії двох процесів або сигналів визначається їхніми як амплітудними, так і фазовими спектрами.

мах слід використовувати сигнали з найменшим значенням бази.

3. Усі процеси і сигнали однакової форми, але з різним розміщенням на часовій осі, з енергетичного погляду є рівнозначними.

4. Енергія взаємодії двох процесів або сигналів визначається не тільки амплітудними, а й фазовими спектрами.

5. Чим більше схожими є процеси або сигнали в межах певного часового інтервалу, тим більша енергія взаємодії.



Треба вміти:

1. Визначити поняття: спектральна щільність енергії, взаємний енергетичний спектр, база процесу або сигналу.

2. Пояснити фізичний зміст енергетичного та взаємного енергетичного спектрів.

3. Записати формулу та узагальнену формулу Релея.

4. Визначити енергію процесу та двох процесів як за їх описами часової області, так і за спектральними характеристиками.

3. Розмірності енергетичного спектра процесу і сигналу та взаємного енергетичного спектра.

4. Відповідно до принципу невизначеності добуток тривалості процесу або сигналу і ширини його спектра є сталою величиною порядку одиниця.

5. Мінімальним енергетичним зв'язком характеризуються ортогональні процеси або сигнали.

6. Формули:

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S^2(\omega) d\omega$$

- енергія дійсного процесу і сигналу;

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S^2(\omega) d\omega$$

- енергія комплексного процесу і сигналу;

$$E_B = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_2^*(j\omega) S_1(j\omega) d\omega$$

- енергія взаємодії двох процесів або сигналів (узагальнена формула Релея).

3.4 Перетворення процесів і спектрів

Додавання, підсилення та послаблення процесів. Подамо довільний процес $s(t)$ у вигляді зваженої суми:

$$s(t) = \sum_{k=1}^n \bar{b}_k s_k(t), \quad (3.63)$$

де вагові коефіцієнти \bar{b}_k є обмеженими та визначають внесок кожної складової $s_k(t)$.

Відповідно до (3.63) процес $s(t)$ можна вважати реакцією суматора на n вхідних процесів $s_k(t)$ із підсиленням складової, якщо $|\bar{b}_k| > 1$, або її послабленням, якщо $|\bar{b}_k| < 1$. Окрема складова реакції повторює форму вхідної складової з точністю до знака, коли $|\bar{b}_k| = 1$. Від'ємні значення \bar{b}_k відображають операцію інвертування, тобто операцію зміни знака вхідного процесу на протилежний.

Згідно з прямим перетворенням Фур'є (3.1) спектральна щільність сигналу (3.63)

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^n \bar{b}_k s_k(t) e^{-j\omega t} dt = \sum_{k=1}^n \left[\int_{-\infty}^{\infty} \bar{b}_k s_k(t) e^{-j\omega t} dt \right] = \sum_{k=1}^n \bar{b}_k S_k(j\omega).$$

◆ Отже, **спектр зваженої суми незалежних процесів дорівнює зваженій сумі спектрів її складових:**

$$\sum_{k=1}^n \bar{b}_k s_k(t) \leftrightarrow \sum_{k=1}^n \bar{b}_k S_k(j\omega). \quad (3.64)$$

Таким чином, додавання, підсилення та послаблення сигналів є лінійними перетвореннями.

Відповідність (3.64) у математиці називають **теоремою додавання**, для випадку підсилення або послаблення кожної складової – **теоремою масштабування**.

► **Приклад.** Визначити спектр ступінчастого процесу $A\sigma(t)$, $A > 0$ (рис. 3.13, а).

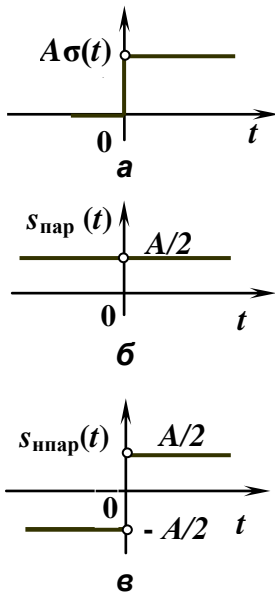


Рисунок 3.13 -
Ступінчастий сигнал
і його складові.

Застосувати безпосередньо перетворення Фур'є (11.56) не можна, оскільки такий процес не задовольняє умову абсолютної інтегрованості (3.7) і навіть умову інтегрованості квадрата процесу (3.8).

Подамо заданий процес сумою парного $s_{\text{пар}}(t) = A/2$ (рис. 3.13, б) та непарного $s_{\text{нпар}}(t) = \{A/2, t > 0; -A/2, t \leq 0\}$ (рис. 3.13, в) складових. Відповідно до властивостей спектральна щільність $S_R(\omega)$ парної складової $s_{\text{пар}}(t)$ буде дійсною частиною спектральної щільності $S(j\omega)$ заданого процесу $A\sigma(t)$, а непарна складова $s_{\text{нпар}}(t)$ – визначить її уявну частину $S_I(\omega)$.

Застосувати безпосередньо інтегральне перетворення (3.1) до непарної складової $s_{\text{нпар}}(t)$ також не можна, оскільки функція, яка її описує, в точці $t = 0$ має розрив першого роду. У таких випадках при обчисленні спектральної щільності $S(j\omega)$ застосовують операцію граничного переходу до спектральної щільності $S(c, j\omega)$ для функції без розривів: $S(j\omega) = \lim_{c \rightarrow 0} S(c, j\omega)$.

Граничний перехід у часовій області від непарного процесу, зображеного на рис. 3.13, б, при $\delta \rightarrow 0$ дає непарну складову, подану на рис. 3.13, в.

Для процесу, поданого на рис. 3.13, б, спектральна щільність

$$S(j\omega, c) = S(j\omega, \delta) = -jA\omega / (\omega^2 + \alpha^2). \quad (3.65)$$

Спрямувавши $\delta \rightarrow 0$, отримаємо спектральну щільність непарної складової заданого сигналу:

$$S_{\text{нпар}}(j\omega) = -jS_I(\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} S(j\omega, c) = A / j\omega. \quad (3.66)$$

Парна складова досліджуваного ступінчастого процесу також не задовольняє жодній із умов абсолютної інтегрованості і є постійним процесом. Спектральна щільність цього процесу $S_{\text{пар}}(j\omega) = S_R(\omega)$ має бути такою, щоб обернене перетворення Фур'є (3.2) від неї його поновлювало $s_{\text{пар}}(t)$:

3.4 Перетворення процесів і спектрів

$$s_{\text{пар}}(t) = \frac{A}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{пар}}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.67)$$

Очевидно, вираз (3.67) задовольняє співвідношення $S_{\text{пар}}(j\omega) = S_R(\omega) = A\pi\delta(\omega)$. Підстановка $A\pi\delta(\omega)$ в (3.67) з урахуванням стробувальної властивості δ -функції це підтверджує.

- ◆ Отже, *амплітудний спектр постійного процесу амплітудою A містить тільки одну дельтоподібну складову з необмеженою амплітудою на частоті $\omega = 0$, а його фазовий спектр дорівнює нулю:*

$$A \leftrightarrow 2\pi A\delta(\omega). \quad (3.68)$$

Цей висновок є обґрунтованим із фізичного погляду. Відомо, що енергія постійного процесу є необмеженою, а середня потужність $P_{\text{ср}}$ дорівнює квадрату його амплітуди. Постійний процесу можна вважати гармонічним, частота якого дорівнює нулю. Тоді відповідно до рівності Парсеваля вся потужність постійного процесу приходить тільки на одну нульову гармоніку з амплітудою A . Інших енергетично значимих гармонік немає як в усьому частотному діапазоні, так і в околі $d\omega$ частоти $\omega = 0$. Отже, *обмеженій потужності відповідає частотний інтервал нульової ширини, в якому і зосереджена єдина постійна складова з амплітудою A .*

Із урахуванням зазначеного спектральна щільність постійного процесу на всіх частотах, окрім однієї $\omega = 0$, дорівнює нулю, а на частоті $\omega = 0$ – нескінченності. Аналітично така щільність описується дельта-функцією $\delta(\omega)$ з певною площею.

Отже, за відповідністю (3.68) дельтоподібна спектральна щільність

$$2\pi A\delta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A e^{-j\omega t} dt.$$

Звідси інтегральна форма дельта-функції для частотної області така:

$$\delta(\omega) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt. \quad (3.69)$$

Спектральна щільність комплексних амплітуд заданого ступінчастого процесу є сумою спектрів його парної та непарної складових:

$$S(j\omega) = S_R(\omega) - jS_I(\omega) = A\pi\delta(\omega) + A/j\omega. \quad (3.70)$$

Якщо амплітуда A ступінчастого процесу дорівнює одиниці, то досліджуваним буде одиничний ступінчастий процес. Тоді згідно з (3.70) його спектральна щільність комплексних амплітуд

$$S_\sigma(j\omega) = \pi\delta(\omega) + 1/j\omega \leftrightarrow \sigma(t). \quad (3.71)$$

За переходу до циклічної частоти

$$S_\sigma(j2\pi f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} \leftrightarrow \sigma(t).$$

■

У теоретичних дослідженнях корисною є **інтегральна форма** зображення одиничного ступінчастого процесу:

$$\sigma(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega = \sigma_{\text{пар}}(t) + \sigma_{\text{нпар}}(t). \quad (3.72)$$

Як впливає з (3.72) парна складова $\sigma_{\text{пар}}(t)$ цього процесу для всіх значень $t \in (-\infty, \infty)$ дорівнює $1/2$, а непарна

$$\sigma_{\text{нпар}}(t) = \int_0^\infty \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega = \text{Si}(\infty) = \begin{cases} \pi/2, & t \geq 0; \\ -\pi/2, & t < 0. \end{cases} \quad (3.73)$$

Інтеграл (3.73) належить до класу особливих і називається **інтегральним синусом**.

Зсув процесу в часі. Такі перетворення сигналів є характерними, зокрема, для ліній затримки. Розглянемо сигнал $s(t-t_0)$, затриманий у часі на t_0 відносно процесу $s(t)$, спектральна щільність якого $S(j\omega)$. Тоді спектральні властивості затриманого процесу відповідно до (3.1) визначаються спектральною щільністю

$$\begin{aligned} S_{t_0}(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t-t_0)e^{-j\omega t} dt = \left(\int_{-\infty}^{\infty} s(\lambda)e^{-j\omega\lambda} d\lambda \right) e^{-j\omega t_0} = \\ &= S(j\omega)e^{-j\omega t_0} = S(\omega)e^{-j\alpha_s(\omega)}e^{-j\omega t_0} = S(\omega)e^{-j[\alpha_s(\omega)+\omega t_0]}, \end{aligned}$$

3.4 Перетворення процесів і спектрів

де $\lambda = t - t_0$ – нова змінна. Звідси, $s(t - t_0) \leftrightarrow S(j\omega)e^{-j\omega t_0}$. При зсуві ліворуч на $-t_0$ справедливою є така відповідність між спектром і сигналом: $s(t + t_0) \leftrightarrow S(j\omega)e^{j\omega t_0}$.

◆ Отже, **зсув процесу $s(t)$ в часі на величину $\pm t_0$ еквівалентний множенню його спектральної щільності на $\exp(\pm j\omega t_0)$:**

$$s(t \pm t_0) \leftrightarrow S(j\omega)e^{\pm j\omega t_0}. \quad (3.74)$$

Відповідність (3.74) називають **теоремою затримки**, або **зсуву**, для часової області.

Для практики важливою є не сама теорема зсуву, а наслідки, які з неї випливають. Згідно з (3.74) множення на $\exp\pm j\omega t_0$ змінює тільки фазовий спектр $b_s(\omega)$ початкового процесу на $\pm\omega t_0$. Фактично, початкова фаза кожної спектральної складової зміщеного процесу отримує додатковий фазовий зсув, прямо пропорційний частоті складової та значенню часового зсуву. Амплітудний спектр при зсуві сигналів залишається без змін. Отже, операція затримки (зсуву в часі) є лінійним перетворенням.

► **Приклад.** *Визначити спектр реакції $y(t)$ на дію $x(t)$ у вигляді одичного імпульсного процесу (δ -імпульсу) лінійної системи, математична модель якої подається таким рівнянням «вхід-вихід»: $y(t) = Kx(t) + x(t - t_3)$, де $K \neq 0$ – коефіцієнт, а t_3 – затримка вхідного процесу в часі.*

Структурна схема цієї системи (рис. 3.14) складається із підсилювача з коефіцієнтом підсилення K , лінії затримки та суматора. Якщо вхідним сигналом є дельта-імпульс, то за нульових початкових умов реакція заданої системи буде її імпульсною характеристикою $g(t) = K\delta(t) + \delta(t - t_3)$.

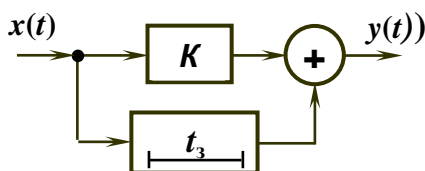


Рисунок 3.14 - Структурна схема лінійної системи.

характеристики)

Відповідно до теорем додавання, масштабування та зсуву для часової області спектральна щільність реакції на дельта-імпульс заданої системи (спектр імпульсної

$$S_g(j\omega) = KS_\delta(j\omega) + S_g(j\omega)e^{-j\omega t_3},$$

де $S_\delta(j\omega)$ – спектральна щільність дельта-імпульсу. Згідно з (3.1) та відповідно до стробувальної властивості дельта-функції

$$S_\delta(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t} \Big|_{t=0} = 1 \leftrightarrow \delta(t). \quad (3.75)$$

- ◆ Звідси випливає, *що амплітудний спектр дельта-імпульсу є рівномірно розподіленим в діапазоні частот від $-\infty$ до $+\infty$, а значення його фазового спектра на будь-якій частоті дорівнює нулю.*

Отже, всі спектральні складові дельта-імпульсу є рівнозначними, а ширина його спектра дорівнює нескінченності.

Із урахуванням (3.75) спектральна щільність реакції на дельта-імпульс заданої системи (спектр імпульсної характеристики)

$$S_g(j\omega) = K + e^{-j\omega t_3}. \quad (3.76)$$

Перша складова у виразі (3.76) є спектром підсиленого $K\delta(t)$, тобто дельта-імпульсу з площею K , а друга – спектром затриманого процесу $\delta(t - t_3)$.

Співвідношення (3.68) і (3.75) дають змогу зробити ще один важливий висновок:

- ◆ *дельта-імпульсу у часовій області відповідає рівномірний (постійний) спектр у частотній і, навпаки, дельтоподібному спектру відповідає постійний сигнал.*

Обернене перетворення (3.2), застосоване до $S_\delta(j\omega)$, поновлює дельта-імпульс:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_\delta(j\omega)e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.77)$$

Інтегральне співвідношення (3.77) в теорії сигналів розглянуть як одну з можливих форм аналітичного подання дельта-імпульсу у часовій області.

3.4 Перетворення процесів і спектрів

Диференціювання та інтегрування сигналів. У диференціюючих колах і системах реакція пропорційна похідній, а в інтегруючих – інтегралу від діючого процесу. При диференціюванні швидкість зміни сигналів у часі, як правило, збільшується, а інтегрування дає змогу уповільнити сигнал.

Припустімо, що сигнал $s(t)$ і його спектральна щільність комплексних амплітуд $S(j\omega)$ задовольняють інтегральні перетворення Фур'є (3.1) і (3.2): $s(t) \leftrightarrow S(j\omega)$. Визначимо спектральну щільність $S_d(j\omega)$ процесу $s_d(t) = ds(t)/dt$.

Відповідно до (3.2)

$$\begin{aligned} s_d(t) &= \frac{d}{dt} s(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) \frac{d}{dt} (e^{j\omega t}) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j\omega S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_d(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \end{aligned}$$

- ◆ Отже, **спектральну щільність здиференційованого сигналу визначають добутком співмножника $j\omega$ і спектральної щільності $S(j\omega)$ початкового процесу $s(t)$:**

$$ds(t)/dt \leftrightarrow S_d(j\omega) = j\omega S(j\omega) = \omega S(\omega) e^{-j\alpha_s(\omega)} e^{j\pi/2}. \quad (3.78)$$

Із відповідності (3.78) випливає, що після диференціювання процесу змінюється його амплітудний і фазовий спектри. При цьому зі зростанням частоти амплітуди високочастотних спектральних складових збільшуються. Їхній внесок у спектр здиференційованого процесу значно вагоміший, ніж низькочастотних. Фактично таке перетворення пов'язане з виділенням високочастотних складових, що функціонально притаманне ФВЧ. Крім того, кожна спектральна складова реакції отримує додатковий фазовий зсув 90° . Це і є причиною того, що здиференційований сигнал випереджає початковий і більш динамічніший за нього.

Методом індукції доводять, що при n -кратному диференціюванні процесу справедливою є така відповідність:

$$d^n s(t)/dt^n \leftrightarrow (j\omega)^n S(j\omega), \quad n = 2, 3, \dots \quad (3.79)$$

Вирази (3.78) і (3.79) є відображенням **теорему диференціювання** сигналів.

Перетворення сигналів на зразок диференціювання та відповідні зміни їхніх спектрів у деяких випадках значно спрощують визначення спектральних характеристик неперіодичних сигналів, зокрема таких, що описуються кусково-лінійними функціями.

Приклад.

Визначити спектральну щільність відеоімпульсу трикутної форми (рис. 3.15, а).

Диференціювання цього процесу дає відеоімпульс, зображений на рис. 3.15, б, а диференціювання відеоімпульсу – процес із двох дельта-імпульсів (рис. 3.15, в), математична модель якого є такою:

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} = \frac{2A}{t_{\text{імп}}} \left[\delta\left(t + \frac{t_{\text{імп}}}{2}\right) + \delta\left(t - \frac{t_{\text{імп}}}{2}\right) \right] - \frac{4A}{t_{\text{імп}}} \delta(t). \quad (3.80)$$

Згідно з теоремами диференціювання та затримки спектр здиференційованого процесу (3.80)

$$S_d(j\omega) = \frac{2A}{t_{\text{імп}}} \left(e^{j\frac{\omega t_{\text{імп}}}{2}} + e^{-j\frac{\omega t_{\text{імп}}}{2}} - 2 \right) = \frac{4A}{t_{\text{імп}}} \left(\cos \frac{\omega t_{\text{імп}}}{2} - 1 \right) = (j\omega)^2 S(j\omega).$$

Отже, спектральна щільність трикутного процесу

$$S(j\omega) = \frac{4A}{\omega^2 t_{\text{імп}}} \left(1 - \cos \frac{\omega t_{\text{імп}}}{2} \right) = \frac{At_{\text{імп}}}{2} \left[\frac{\sin(\omega t_{\text{імп}} / 4)}{\omega t_{\text{імп}} / 4} \right]^2. \quad (3.81)$$

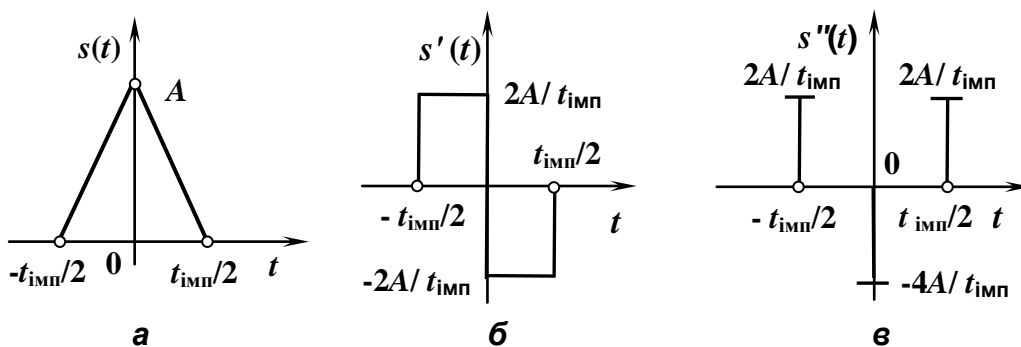


Рисунок 3.15 - Перетворення на зразок диференціювання: а - трикутний відеоімпульс; б - здиференційований процес; в - результат двократного диференціювання.

3.4 Перетворення процесів і спектрів

Аналіз виразу (3.81) показує, що за формою амплітудний і фазовий спектри парних трикутного та прямокутного відеоімпульсів збігаються. Якщо параметри цих процесів однакові, то відрізняються тільки нулі амплітудних спектрів. Для трикутного відеоімпульсу значення нулів його амплітудного спектра вдвічі перевищують відповідні значення нулів цього самого спектра прямокутного відеоімпульсу: $\omega_{0k} = 4\pi k / t_{\text{імп}}$, $k = 1, 2, 3, \dots$.

Не збігаються також початкові значення амплітудних спектрів. Так, для трикутного відеоімпульсу $S(0) = At_{\text{імп}}/2$.



У системах, наділених функціями інтегрування вхідних процесів, спектр реакції $S_{\text{інт}}(j\omega)$ можна визначити, поділивши спектральну щільність вхідного процесу $S(j\omega)$ на $j\omega$:

$$\int_{-\infty}^t s(\lambda) d\lambda \leftrightarrow S(j\omega) / j\omega = \frac{S(\omega)}{\omega} e^{-j\alpha_s(\omega)} e^{-j\pi/2}. \quad (3.82)$$

Отже, амплітуди спектральних складових зінтегрованого процесу, частоти яких прямують до нескінченності, зі збільшенням частоти зменшуються до нуля. Чим менша частота, тим більша амплітуда складової. Фактично відбувається виділення низько-частотних спектральних складових початкового процесу та послаблення внеску високочастотних, що властиво ФНЧ.

Початкова фаза кожної складової також змінюється, причому однаково на мінус 90° , тобто зменшується на 90° . Це є характерною ознакою затримки процесу в часі.

- ◆ Отже, **зінтегрований процес відстає від вхідного та змінюється в часі з меншою швидкістю, тобто є менш динамічнішим.**

Стиснення та розтягування процесів. За такого перетворення форма процесу зберігається, а змінюється його динаміка в часі. Тоді заданому процесу $s(t)$ (рис. 3.16, а) при здійсненні зазначених операцій відповідає процес $s_\alpha(t) = s(\alpha t)$, де коефіцієнт $\alpha > 1$, якщо початковий процес стискується (рис. 3.16, б), і $\alpha < 1$ – при його розтягуванні (уповільненні процесу в часі, див. рис.

3.16, в). Фактично маємо процес, що є результатом масштабування часового аргументу t початкового процесу $s(t)$.

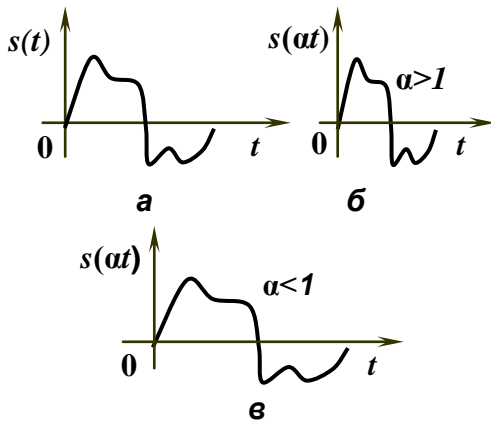


Рисунок 3.16 - Початковий (а), стиснутий (б) і розтягнутий (в) сигнали.

Відповідно до принципу невизначеності внаслідок зміни масштабу часової змінної відбуваються певні зміни масштабу частоти. При цьому прискоренню процесу (зменшенню його тривалості) відповідає збільшення ширини його спектра і, навпаки, уповільнення процесу в часі (збільшення тривалості) зумовлює зменшення ширини спектра. Зміна

масштабу часової змінної спричинює також зміну амплітуд спектральних складових.

Справді, нехай існує відповідність $s(t) \leftrightarrow S(j\omega)$. Тоді згідно з прямим перетворенням Фур'є (3.1) спектр процесу $s_\alpha(t) = s(\alpha t)$ є таким:

$$\begin{aligned}
 S_\alpha(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(\alpha t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(\lambda) e^{-j\omega \lambda / \alpha} d(\lambda / \alpha) = \\
 &= (1 / \alpha) \int_{-\infty}^{\infty} s(\lambda) e^{-j(\omega / \alpha) \lambda} d\lambda = (1 / \alpha) S(j \frac{\omega}{\alpha}). \leftrightarrow s(\alpha t).
 \end{aligned}
 \tag{3.83}$$

- ◆ Отже, при стисненні процесу в α разів саме у стільки разів збільшується діапазон частот, де зосереджені його спектральні складові, розширюється спектр процесу і зменшуються амплітуди складових.

Очевидно, що при розтягуванні процесу в часі ($\alpha < 1$) ширина спектра зменшується, а амплітуди спектральних складових збільшуються.

Співвідношення (3.83) є аналітичним поданням **теорему про зміну масштабу**, відповідно до якої будь-який спосіб зміни ширини спектра без зміни тривалості процесу зумовлює спотворення спектра.

3.4 Перетворення процесів і спектрів

► **Приклад.** Порівняти спектри і тривалості двох дійсних експонентних процесів: $s_1(t) = e^{-t} \sigma(t)$ і $s_2(t) = e^{-2t} \sigma(t)$.

Процес $s_2(t) = s_1(\alpha t)$ є результатом стиснення процесу $s_1(t)$. При цьому $\alpha=2$. За рівнем 0,1 тривалість першого процесу дорівнює одиниці, а другого – 0,5. Спектральні щільності заданих процесів є такими:

$$e^{-t} \leftrightarrow S_1(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}; \quad e^{-2t} \leftrightarrow S_2(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 2} = \frac{1}{2} \frac{1}{j(\omega/2) + 1}.$$

Звідси, наприклад, амплітуда постійної складової ($\omega = 0$) другого процесу вдвічі менша за амплітуду цієї самої складової першого процесу. Отримані результати узгоджуються з теоремою про зміну масштабу.



Добуток двох процесів. Розглянемо два процеси $s_1(t)$ і $s_2(t)$, для яких визначені такі відповідності: $s_1(t) \leftrightarrow S_1(j\omega)$ і $s_2(t) \leftrightarrow S_2(j\omega)$.

Спектральна щільність добутку цих процесів

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (3.84)$$

Підставивши в (3.84) подання процесу $s_2(t)$ через його спектральну щільність $S_2(j\omega)$, дістанемо

$$S(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} S_2(j\lambda) e^{j\lambda t} d\lambda \right] e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_2(j\lambda) \left[\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) e^{-j(\omega-\lambda)t} dt \right] d\lambda.$$

Оскільки інтеграл у квадратних дужках відповідно до (3.1) є спектральною щільністю процесу $s_1(t)$ відносно частоти $(\omega - \lambda)$, тобто $S_1[j(\omega - \lambda)]$, то спектр добутку двох процесів

$$S(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_2(j\lambda) S_1[j(\omega - \lambda)] d\lambda \quad (3.85)$$

Інтеграл у правій частині виразу (3.85) відображає згортання функцій $S_1(j\omega)$ і $S_2(j\omega)$.

- ◆ Отже, **спектральна щільність добутку двох процесів із точністю до співмножника $1/2\pi$ дорівнює згортці їхніх спектральних щільностей:**

$$s_1(t)s_2(t) \leftrightarrow S(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(j\lambda)S_2[j(\omega - \lambda)]d\lambda. \quad (3.86)$$

Із виразів (3.84) і (3.86) випливає, що початкове значення спектральної щільності добутку двох процесів, тобто її значення на частоті $\omega = 0$,

$$S(j0) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(j\lambda)S_2(-j\lambda)d\lambda. \quad (3.87)$$

Початкове значення (3.87) визначає енергію взаємодії двох процесів.

Перетворення спектрів на зразок «зсув по частоті». Один із ефективних способів побудови систем зв'язку ґрунтується на перенесенні (зсуві) спектрів процесів із однієї ділянки частотного діапазону в іншу. Яскравим прикладом практичної реалізації цієї ідеї є багатоканальні системи зв'язку з частотним ущільненням каналів (телебачення, телерадіовимірвальні системи тощо).

Перенесення спектра певного процесу на частоту $\pm\omega_0$ зумовлює зміну на цю величину як додатних, так і «від'ємних» частот усіх спектральних складових. Проте зміни спектральних характеристик завжди пов'язані з певними змінами самого процесу. Тому для реалізації такого перетворення спектра, як «зсув по частоті» потрібні певні перетворення і процесу.

Припустімо, що процес $s(t)$ і його спектральна щільність $S(j\omega)$ задовольняють інтегральне перетворення Фур'є. Визначимо процес $s_3(t)$, спектральна щільність якого $S_3(j\omega) = S[j(\omega \pm \omega_0)]$, тобто є зміщеною по осі частот праворуч ($S_3(j\omega) = S[j(\omega - \omega_0)]$) і ліворуч ($S_3(j\omega) = S[j(\omega + \omega_0)]$) від частоти $\omega = 0$ «копією» спектральної щільності $S(j\omega)$.

Згідно з оберненим перетворенням Фур'є (11.57)

3.4 Перетворення процесів і спектрів

$$s_3(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S[j(\omega \pm \omega_0)] e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} S[j\lambda] e^{j\lambda t} d\lambda}_{s(t)} e^{\mp j\omega_0 t} = s(t) e^{\mp j\omega_0 t},$$

де $\lambda = \omega \pm \omega_0$ – нова частотна змінна.

- ◆ Отже, **перенесення спектра на частоту $\pm \omega_0$ еквівалентне множенню процесу на комплексний експонентний процес $\exp(\mp j\omega_0 t)$:**

$$s(t) e^{\mp j\omega_0 t} \leftrightarrow S[j(\omega \pm \omega_0)]. \quad (3.88)$$

Відповідність (3.88) відома як **теорема зсуву спектра**.

Зазначимо, що при множенні на $\exp(\mp j\omega_0 t)$ кожна спектральна складова процесу $s(t)$ отримує додатковий фазовий зсув $\mp \omega_0 t$, а амплітуди складових не змінюються. За таких умов форма процесу залишається без змін, а змінюється тільки його розміщення на часовій осі.

- ◆ Таким чином, **при зсуві спектра відповідно до теореми зсуву форма амплітудного і фазового спектрів процесу не змінюється, вони переносяться в іншу ділянку частотного діапазону на частоту $\pm \omega_0$.**

► **Приклад.** Визначити спектр комплексного експонентного процесу $s(t) = e^{-j\omega_0 t}$.

Такий процес можна розглядати як результат множення постійного процесу $s_1(t) = 1$ на комплексний експонентний процес $\exp(-j\omega_0 t)$. За теоремою зсуву (3.88) спектральна щільність заданого процесу $S[j(\omega + \omega_0)]$ є зсунутою ліворуч на частоту $\omega = -\omega_0$ копією спектра постійного процесу $S_A(j\omega)$ (див. (3.68)). Оскільки тепер $A=1$, то спектральна щільність заданого комплексного експонентного процесу

$$S(j\omega) = S_A[j(\omega + \omega_0)]|_{A=1} = 2\pi \delta(\omega + \omega_0) \leftrightarrow e^{-j\omega_0 t}. \quad (3.89)$$

Аналогічні міркування дають змогу показати, що для комплексного експонентного процесу $s(t) = e^{j\omega_0 t}$ спектральна щільність

$$S(j\omega) = S_A[j(\omega - \omega_0)]|_{A=1} = 2\pi \delta(\omega - \omega_0) \leftrightarrow e^{j\omega_0 t}. \quad (3.90)$$

Слід зазначити, що комплексний експонентний процес належить до процесів, які не є абсолютно інтегровними.



► **Приклад.** *Визначити спектр гармонічного процесу.*

Гармонічний процес не є абсолютно інтегровним, тому визначимо його спектральну щільність за теоремами перетворення процесів і спектрів.

За косинусної форми подання гармонічний процес

$$s(t) = A_m \cos \omega_0 t = (A_m / 2)(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}),$$

тобто є сумою двох комплексних експонентних процесів із протилежними за знаком частотами та однаковими амплітудами.

Згідно з теоремами додавання (3.65) та з урахуванням відповідностей (3.89) і (3.90) спектральна щільність косинусного гармонічного процесу

$$S(j\omega) = A_m [\pi \delta(\omega - \omega_0) + \pi \delta(\omega + \omega_0)] \leftrightarrow A_m \cos \omega_0 t, \quad (3.91)$$

тобто є дійсною, містить тільки дві відмінні від нуля дельтоподібні спектральні складові з частотами $\pm\omega_0$, амплітуди яких дорівнюють нескінченності, а площі $A_m\pi$.

Якщо гармонічний процес подають у синусній формі

$$s(t) = A_m \sin \omega_0 t = (A_m / 2j)(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}),$$

то його спектральна щільність

$$S(j\omega) = -jA_m [\pi \delta(\omega - \omega_0) + \pi \delta(\omega + \omega_0)] \leftrightarrow A_m \sin \omega_0 t. \quad (3.92)$$

Отже, як впливає з (3.91) і (3.92), амплітудні спектри косинусного та синусного гармонічних процесів збігаються, а фазові відрізняються на мінус 90° .



► **Приклад.** *Визначити спектральну щільність радіоімпульсу.*

Радіоімпульс $s_p(t) = s_b(t) \cos(\omega_0 t + \phi_0)$ є добутком відеосигналу (відеоімпульсу) $s_b(t)$ та гармонічного коливання, частота якого значно перевищує максимальну частоту ω_{\max} в спектрі відеоімпульсу, тобто

3.4 Перетворення процесів і спектрів

$\omega_0 \gg \omega_{\max}$. Вважатимемо, що існує відповідність $s_B(t) \leftrightarrow S_B(j\omega)$. Тоді врахувавши, що гармонічний косинусний процес

$$\cos(\omega_0 t + \phi_0) = (1/2)e^{j\phi_0} e^{j\omega_0 t} + (1/2)e^{-j\phi_0} e^{-j\omega_0 t},$$

відповідно до теореми зсуву спектра та масштабування процесів отримаємо спектр радіоімпульсу:

$$S_p(j\omega) = \frac{1}{2} \{ e^{j\phi_0} S_B[j(\omega - \omega_0)] + e^{-j\phi_0} S_B[j(\omega + \omega_0)] \}. \quad (3.93)$$

Із співвідношення (3.93) випливає, що

- ◆ *перехід від відео- до радіоімпульсу означає перенесення спектра відеоімпульсу в високочастотну область на частоту ω_0 і $-\omega_0$ із зменшенням удвічі амплітуд спектральних складових відеоімпульсу.*



Радіоімпульс – це різновид амплітудно-модульованого коливання з гармонічним високочастотним заповненням, амплітуда якого змінюється за законом низькочастотного коливання (відеоімпульсу). Тому властивість інтегрального перетворення Фур'є, відображувану теоремою зсуву спектра, часто називають **властивістю модуляції**.

- **Приклад.** *Визначити ефективну ширину спектра радіоімпульсу, якщо відеоімпульсом є парний прямокутний сигнал, тривалість якого $t_{\text{імп}}$, а амплітуда A (див. рис. 3.6, а).*

Як відомо, ефективна ширина спектра прямокутного відеоімпульсу зверху обмежується першим нулем його амплітудного спектра $\omega_{\max} = \omega_{01} = 2\pi/t_{\text{імп}}$, а знизу – частотою $\omega_{\min} = 0$ (рис. 3.17, а). При переході до радіоімпульсу спектр парного прямокутного відеоімпульсу переноситься на частоту $\pm\omega_0$ таку, що $\omega_0 \gg 2\pi/t_{\text{імп}}$ (рис. 3.17, б). Тільки за такої умови спектри відео- та радіоімпульсів майже не перекриваються.

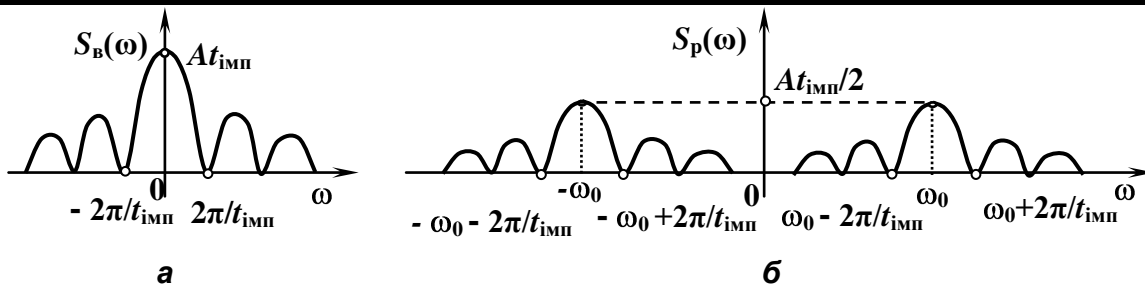


Рисунок 3.17 - Амплітудні спектри відео- (а) та радіоімпульсу (б) з прямокутною обвідною.

Для радіоімпульсу в діапазоні фізичних значень частоти (додатних частот) перший нуль його амплітудного спектра визначається двома частотами: $\omega_{01 \max} = \omega_0 + 2\pi/t_{\text{имп}}$ і $\omega_{01 \min} = \omega_0 - 2\pi/t_{\text{имп}}$. Відповідно ефективна ширина спектра

$$\Delta\omega_{\text{сп.еф}} = \omega_{01 \max} - \omega_{01 \min} = 4\pi/t_{\text{имп}}.$$

◆ Отже, *ширина спектра радіоімпульсу вдвічі перевищує ширину спектра відеоімпульсу.*



Добуток спектрів та процес. Розглянемо два процеси $s_1(t)$ і $s_2(t)$ та відповідні їм спектри $S_1(j\omega)$ і $S_2(j\omega)$. Новому спектру $S(j\omega) = S_1(j\omega)S_2(j\omega)$, очевидно, відповідає процес $s(t)$, що є певним перетворенням початкових процесів $s_1(t)$ і $s_2(t)$.

Справді, згідно з (3.2) процес

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(j\omega) S_2(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} s_1(\lambda) e^{-j\omega\lambda} d\lambda \right] S_2(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\lambda) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_2(j\omega) e^{j\omega(t-\lambda)} d\omega \right] d\lambda = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\lambda) s_2(t-\lambda) d\lambda = s_1(t) * s_2(t). \end{aligned}$$

Звідси випливає, що

◆ *добуткові спектрів відповідає згортка процесів.*

ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. Додавання, підсилення, послаблення, зсув у часі процесів є лінійними перетвореннями.

2. Здиференційований процес випереджає початковий і динамічніший за нього.

3. Зінтегрований процес відстає від вхідного та змінюється в часі з меншою швидкістю.

4. При стисненні процесу розширюється його спектр і зменшуються амплітуди складових, а при розтягуванні - ширина спектра зменшується, а амплітуди спектральних складових збільшуються.

5. Зсув спектра відповідно до теореми зсуву не спричинює зміни амплітудного та фазового спектрів процесу.

6. Перехід від відео- до радіоімпульсу означає перенесення спектра відеоімпульсу у високочастотну область на частоту носійного колювання із зменшенням удвічі амплітуд спектральних складових відеоімпульсу.



Треба вміти:

1. Визначити спектральні



Слід запам'ятати:

1. Спектр зваженої суми незалежних процесів дорівнює зваженій сумі спектрів її складових

2. Кожна спектральна складова зміщеного в часі процесу отримує додатковий фазовий зсув, прямо пропорційний частоті складової та значенню часового зсуву.

3. Спектральну щільність здиференційованого процесу визначають добутком $j\omega$ і спектральної щільності початкового процесу (теорема диференціювання).

4. У системах, наділених функціями інтегрування вхідних процесів, спектр реакції можна визначити, поділивши спектральну щільність вхідного процесу на $j\omega$ (теорема інтегрування).

5. Спектральна щільність добутку двох процесів із точністю до співмножника $1/2\pi$ дорівнює згортці їхніх спектральних щільностей.

6. Перенесення спектра певного процесу на деяку частоту пов'язане з таким перетворенням процесу, як модуляція (теорема зсуву спектра).

7. Добуткові спектрів відповідає згортка процесів.

характеристики неперіодичних сигналів, використовуючи теорему про перетворення сигналів і спектрів.

2. Обґрунтувати висновки, та наслідки теорем про перетворення сигналів і спектрів із фізичного погляду.

3. Довести відповідності між часовим та спектральними поданнями сигналів для різних теорем про перетворення сигналів і спектрів.

8. Ширина спектра радіоімпульсу вдвічі перевищує ширину спектра відеоімпульсу, що є обвідною радіоімпульсу.

9. Відповідності між часовим і спектральним зображенням процесів:

$A \leftrightarrow 2\pi A\delta(\omega)$ - для постійного процесу;

$$S_{\sigma}(j\omega) = \pi\delta(\omega) + 1/j\omega \leftrightarrow \sigma(t)$$

- для одиничного ступінчастого процесу;

$\delta(t) \leftrightarrow 1$ - для одиничного імпульсного процесу.

3.5 Визначення ширини спектрів та тривалості процесів

Установлено, що чим вузчий процес, тим ширший його спектр. Це висновок – один із проявів фундаментального положення теорії процесів і сигналів – **принципу невизначеності**, який установлює не тільки нижню межу добутку тривалості процесу та ширини спектра, а й дає змогу зрозуміти природу компромісів при розв'язуванні головної практичної проблеми – *вибору форми процесу чи ширини спектра, що одночасно задовольняє три критерії:*

- амплітуди спектральних складових із збільшенням частоти зменшуються і набувають значень, близьких до нуля на частотах, що перевищують певне значення; тривалість процесу має наближатися до оптимального значення відповідно до принципу невизначеності;
- процес повинен загасати достатньо швидко для мінімізації впливу на сусідні з ним процеси.

3.5 Визначення ширини спектрів та тривалості процесів

Задовольнити всі три вимоги одночасно неможливо. Проте ідея, закладена у принципі невизначеності, є визначальною при синтезі процесів, сигналів і систем для найрізноманітніших практичних застосувань. Так, для підвищення точності вимірювання моменту прикладання (появи) імпульсу потрібно використовувати короткі за тривалістю сигналу. Точність вимірювання частоти тим більше, чим вузкою є смуга пропускання пристрою вимірювання, а отже, і ширина спектра сигналу.

Таким чином, з одного боку, ми потребуємо короткотривалих (з малими значеннями тривалості Δt), а з другого – вузькосмугових процесів і сигналів (з малими значеннями ширини спектра $\Delta f_{\text{СП}}(\Delta\omega_{\text{СП}})$). Згідно з принципом невизначеності реалізувати одночасно ці наміри неможливо. Проте можна шукати процеси і сигнали такої форми, для яких добуток $\Delta t \Delta f_{\text{СП}}$ відповідно до принципу невизначеності набуває найменшого значення. Очевидно, що з цією проблемою тісно пов'язана і проблема визначення відповідних значень тривалості процесу або сигналу Δt і ширини його спектра $\Delta f_{\text{СП}}(\Delta\omega_{\text{СП}})$.

Теоретично спектри процесів і сигналів інформаційних систем загалом займають нескінченний діапазон частот від $-\infty$ до ∞ . Практично потрібно характеризувати процеси і сигнали обмеженим спектром, тобто сукупністю спектральних складових, зосереджених у частотному діапазоні, який знизу обмежується частотою $\omega_{\text{min}}(f_{\text{min}})$, а зверху – частотою $\omega_{\text{max}}(f_{\text{max}})$. Тоді, як відомо, ширина спектра $\Delta\omega_{\text{СП}} = \omega_{\text{max}} - \omega_{\text{min}}$; $\Delta f_{\text{СП}} = f_{\text{max}} - f_{\text{min}}$. Проте слід установити певні критерії, за якими визначатимуться мінімальна $\omega_{\text{min}}(f_{\text{min}})$ та максимальна $\omega_{\text{max}}(f_{\text{max}})$ частоти, а отже, і ширина спектра.

Поняття тривалості точно визначене тільки для процесів і сигналів, які описуються **фінітними функціями**, тобто функціями, значення яких дорівнюють нулю за межами обмеженого діапазону значень їхніх аргументів. Прикладами таких процесів і сигналів є прямокутний (див. рис. 1.12, а) або трикутний (див. рис. 1.12, б) імпульси. Для цих процесів і сигналів та схожих із ними вважається, що тривалість визначена за основою. Для інших, зокрема таких, як дійсний експонентний (див. рис. 1.12, в), поняття тривалості потрібно ввести.

На практиці тривалість процесів і сигналів та ширину спектрів визначають за певними **критеріями**, зокрема **енергетичним, інтегральним, заданого рівня** тощо, або із застосуванням

спрощених (штучних) прийомів. Кожен із підходів визначення цих параметрів належить до однієї з таких трьох основних груп: аналітичних, чисельних і інструментальних.

Аналітичні методи ґрунтуються на дослідженні математичних моделей процесів і сигналів, **чисельні** – на поданнях процесів і сигналів графіками, таблицями дискретних значень, а **інструментальні** потребують проведення фізичного експерименту.

Енергетичний критерій. Практичну ширину спектра визначають як діапазон частот $D_{\omega_{\text{СП}}} \in [\omega_{\text{min}}, \omega_{\text{max}}]$, у межах якого зосереджена основна частка всієї енергії процесу або сигналу E_s . Задаючись відносною часткою ε повної енергії, що приходить на діапазон $D_{\omega_{\text{СП}}}$, та враховуючи формулу Релея для фізичних частот, можна визначити цей частотний діапазон із такого співвідношення:

$$\frac{1}{\pi} \int_{\omega_{\text{min}}}^{\omega_{\text{max}}} S^2(\omega) d\omega = \varepsilon E_s = \frac{\varepsilon}{\pi} \int_0^{\infty} S^2(\omega) d\omega. \quad (3.94)$$

Співвідношення (3.94) визначає ширину спектра в енергетичному значенні.

У подібний спосіб можна встановити і тривалість Δt неперіодичного процесу і сигналу як часовий інтервал $[t_1, t_2]$, що задовольняє одну із таких умов:

$$\int_{t_1}^{t_2} s^2(t) dt = \varepsilon E_s = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt; \quad \int_{t_1}^{t_2} |s(t)|^2 dt = \varepsilon E_s = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt. \quad (3.95)$$

Першу задовольняють дійсні, а другу – комплексні процеси і сигнали.

Вибір нижньої межі інтегрування у співвідношеннях (3.95) залежить від властивостей неперіодичних процесів і сигналів. Якщо процес і сигнал починається при $t=0$, то нижня межа в обох інтегралах дорівнює нулю.

Як правило, для величини ε у виразах (3.94) і (3.95) вибирають значення 0,9 або 0,95. Якщо $\varepsilon = 0,9$, то ширина спектра і тривалість процесів і сигналів називають **ефективними**, якщо $\varepsilon = 0,95$ то **активними**.

3.5 Визначення ширини спектрів та тривалості процесів

У табл. 11.1 наведено значення добутку $\Delta t \Delta f_{\text{сп}}$, а отже, і бази процесу і сигналу, для $\varepsilon = 0,9$. Як бачимо, цей добуток є найбільшим для процесів і сигналів із розривами функцій, що їх описують (прямокутний і експонентний імпульси); менші значення $\Delta t \Delta f_{\text{сп}}$ маємо для процесів і сигналів із розривами в першій похідній (трикутний і косинусний), а найменше – у дзвонового імпульсу (імпульс Гаусса). Цей імпульс відрізняється від інших тим, що як функція, яка його подає, так і всі похідні від неї, є неперервними.

Метод моментів. Енергетичний підхід до визначення ширини спектра та тривалості процесу і сигналу потребує обчислення інтегралів, а тому не завжди є ефективним. У багатьох випадках його практична реалізація можлива тільки на ЕОМ. Крім того, цей критерій не є універсальним, оскільки не окреслює якими мають бути процеси і сигнали для забезпечення мінімального значення добутку $\Delta t \Delta f_{\text{сп}}$. Ось чому доцільніше використовувати визначення тривалості процесів і сигналів та ширини спектрів, які ґрунтуються на загальновідомих поняттях, зокрема таких поняттях теоретичної механіки, як *момент функції, момент інерції плоскої фігури, радіус інерції* тощо. Така можливість зумовлена тим, що графіки процесів і сигналів та спектрів є плоскими фігурами.

Розглянемо плоску фігуру як графічне подання на площині квадрата $s^2(t)$ деякого неперіодичного процесу і сигналу $s(t)$. Тоді за тривалість процесу і сигналу беруть радіус інерції r відносно вертикальної осі, що проходить через *центр ваги* t_0 .

Центр ваги t_0 фігури $s^2(t)$ визначають як відношення моменту площі фігури M_{st} до площі фігури Δ_{st} :

$$t_0 = M_{st} / \Delta_{st} = \int_{-\infty}^{\infty} t s^2(t) dt / \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt. \quad (3.96)$$

За означенням момент інерції відносно осі ординат

$$M_{it} = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 s^2(t) dt \quad (3.97)$$

і осі, що проходить паралельно їй через точку центра ваги t_0 на осі абсцис,

$$M_{it_0} = \int_{-\infty}^{\infty} (t - t_0)^2 s^2(t) dt = M_{it} - \frac{M_{st}^2}{\Delta_{st}}. \quad (3.98)$$

Урахувавши, що відповідно до положень теоретичної механіки $M_{it_0} = r^2 \Delta_{st}$, дістанемо величину, яка може слугувати мірою тривалості неперіодичного процесу і сигналу:

$$\Delta t = r = \sqrt{(M_{it} / \Delta_{st}) - M_{st}^2 / \Delta_{st}^2}. \quad (3.99)$$

Якщо у виразах (3.96) – (3.99) квадрат сигналу $s^2(t)$ замінити на квадрат модуля його спектральної щільності $S^2(\omega)$, нижню межу інтегрування $-\infty$ на 0, а часову змінну та індекс t на частоту ω , то за міру ширини спектра процесу і сигналу можна взяти величину

$$D_{\omega_{сп}} = \sqrt{(M_{i\omega} / D_{S\omega}) - M_{S\omega}^2 / D_{S\omega}^2}, \quad (3.100)$$

де $M_{i\omega}$ – момент інерції, момент площі $M_{S\omega}$ і площа фігури $D_{S\omega}$, визначені для квадрата модуля спектральної щільності.

Такий метод оцінювання тривалості процесу і сигналу та ширини спектра (назвемо його **методом моментів**) можна реалізувати, якщо моменти інерції є обмеженими величинами.

Із урахуванням (3.99) і (3.100) добуток

$$Df_{сп} \Delta t = \sqrt{(M_{i\omega} D_{S\omega} - M_{S\omega}^2) ((M_{it} D_{st} - M_{st}^2) / (2\pi^2 D_{st}^2))}. \quad (3.101)$$

Методами варіаційного числення доводиться, що для парних процесів і сигналів $s(t)$ найменше значення добутку $\Delta f_{сп} \Delta t = 0,046$.

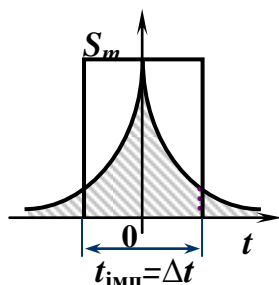


Рисунок 3.18 - До визначення тривалості сигналу за інтегральним

Доцільно зіставити це значення з добутком $\Delta f_{сп} \Delta t$ для дзвонового імпульсу. Для цього імпульсу такий добуток, але визначений тільки за енергетичним критерієм, є найменшим (див. табл. 11.1). Установлено, що для імпульсу Гаусса значення добутку $\Delta f_{сп} \Delta t$, обчисленого за формулою (3.101), дорівнює 0,048, тобто є дуже близьким до теоретичного мінімуму (значення 0,046).

3.5 Визначення ширини спектрів та тривалості процесів

Інтегральний критерій. Розглянемо абсолютно інтегрований нефінітний неперіодичний відеосигнал $s(t)$ і введемо для нього поняття площі S_{Δ} як інтеграл від сигналу в межах інтегрування, які встановлюються областю його визначення. Під час визначення такої площі для знакозмінних процесів і сигналів оперуватимемо з абсолютними значеннями.

Тепер розглянемо прямокутний відеоімпульс, амплітуда A якого дорівнює максимальному значенню S_m процесу або сигналу $s(t)$, а його тривалість $t_{\text{імп}}$ задовольняє умові еквівалентності площ S_{Δ} для заданого процесу або сигналу та $At_{\text{імп}} = S_m t_{\text{імп}}$ для прямокутного відеоімпульсу:

$$S_{\Delta} = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt = S_m t_{\text{імп}}.$$

Звідси

$$t_{\text{імп}} = S_{\Delta} / S_m = \frac{1}{S_m} \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt, \quad (3.102)$$

яке і є мірою тривалості Δt неперіодичного процесу або сигналу за інтегральним критерієм (див. рис. 3.18).

- ◆ Отже, **відповідно до інтегрального критерію тривалість процесу і сигналу визначається основою прямокутника, площа якого дорівнює площі процесу або сигналу, а висота – його максимальному значенню.**

Крайні частоти ω_{\min} і ω_{\max} , які визначають ширину обмеженого спектра за інтегральним критерієм, задовольняють таке інтегральне співвідношення:

$$\Delta\omega_{\text{сп}} = \omega_{\max} - \omega_{\min} = \frac{1}{S_{\max}} \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega, \quad (3.103)$$

де S_{\max} – максимальне значення амплітудного спектра, а інтеграл у правій частині визначає його площу.

► **Приклад.** Визначити за інтегральним критерієм значення бази двостороннього експонентного відеоімпульсу $s(t) = (A/2)e^{-\delta|t|}$ (див. рис. 3.4, а).

Амплітудний спектр двостороннього імпульсу $S(\omega) = A\delta/(\delta^2 + \omega^2)$, а його максимальне значення $S_{\max} = S(0) = A/\delta$.

Згідно з (3.103) ширина спектра

$$D\omega_{\text{сп}} = \frac{\delta}{A} \int_0^{\infty} \frac{A\delta}{\delta^2 + \omega^2} d\omega = \int_0^{\infty} \frac{\delta}{1 + (\omega/\delta)^2} d\left(\frac{\omega}{\delta}\right) = \alpha \arctg \frac{\omega}{\delta} \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi\delta}{2}.$$

Подамо математичну модель двостороннього імпульсу дещо у іншому вигляді:

$$s(t) = -(A/2)e^{\delta t}, \quad -\infty < t \leq 0; \quad s(t) = (A/2)e^{-\delta t}, \quad 0 \leq t < \infty.$$

Тоді згідно з (3.102) тривалість заданого імпульсу

$$Dt = \frac{1}{2A} \left[\int_{-\infty}^0 A e^{\delta t} dt + \int_0^{\infty} A e^{-\delta t} dt \right] = \frac{1}{2\delta} e^{\delta t} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{1}{2\delta} e^{-\delta t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\delta}.$$

База двостороннього імпульсу

$$C_B = Df_{\text{сп}} Dt = D\omega_{\text{сп}} Dt / 2\pi = (\pi\delta/2)[1/(2\pi\delta)] = 0,25.$$



Критерій заданого рівня. Для практичних застосувань корисним є приблизне оцінювання параметрів як процесів і сигналів, так і систем. Так, згідно з одним із спрощених підходів за ширину спектра $D\omega_{\text{сп}}$ беруть діапазон частот $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$, у межах якого модуль спектральної щільності $S(\omega)$ набуває значень, не менших за деяке наперед установлене $S_{\text{доп}}$. Це значення (установлений рівень) становить певну частку ξ від максимального значення S_{\max} амплітудного спектра процесу або сигналу.

Отже, згідно з критерієм заданого рівня крайні частоти ω_{\min} і ω_{\max} обмеженого спектра процесу і сигналу є коренями такого рівняння:

3.5 Визначення ширини спектрів та тривалості процесів

$$S(\omega) = S_{\text{доп.}} = \xi S_{\text{max}} \quad (3.104)$$

Для відеоімпульсів амплітудний спектр є максимальним на частоті $\omega = 0$ (рис. 3.19, б), а для радіоімпульсів (при перенесенні спектрів) – на частоті $\omega = \omega_0 \neq 0$ (рис. 3.19, а). Часто таку частоту називають **центральною**. У тих випадках, коли центральна частота амплітудного спектра дорівнює нулю, спектр процесу і сигналу знизу обмежується частотою $\omega_{\min} (f_{\min}) = 0$ (рис. 3.19, б).

Як правило, допустима частка встановлюється в 10% або 1%. Отже, маємо допустимі рівні відповідно 0,1 та 0,01. Використовують також й інші рівені, наприклад 0,606.

► **Приклад.** Визначити значення бази дзвонового імпульсу (імпульсу Гаусса).

Цей імпульс (див. рис. 3.20, а) описується функцією

$$s(t) = Ae^{-t^2/2\sigma^2}, \quad -\infty < t < \infty, \quad (3.105)$$

де A – амплітуда імпульсу, σ – стала, яка дорівнює такому значенню часової змінної t , за якого миттєве значення імпульсу менше максимального в $1/\sqrt{e} = 0,606$ разів. У теорії процесів і сигналів часовий інтервал $\Delta t = 2\sigma$ називають **тривалістю імпульсу Гаусса** за рівнем 0,606.

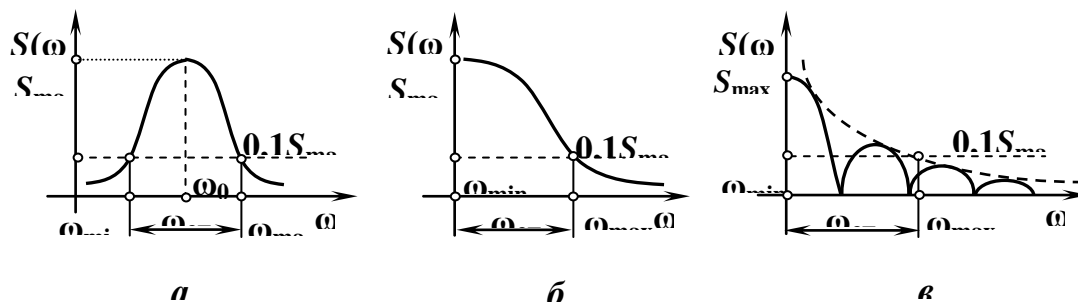


Рисунок 3.19 - До визначення ширини спектра за критерієм заданого рівня.

Відповідно до (3.1) спектр цього імпульсу

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-t^2/2\sigma^2} e^{-j\omega t} dt = Ae^{-\omega^2\sigma^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t/\sigma + j\omega\sigma)^2/2} dt =$$

$$= A\beta\sqrt{2}e^{-\omega^2\beta^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = A\beta\sqrt{2\pi}e^{-\omega^2/[2(1/\beta^2)]} = Be^{-\omega^2/2B^2}, \quad (3.106)$$

де $x = (t/\beta + j\omega\beta)/\sqrt{2}$, $\nu = 1/\beta$, $B = \sqrt{2\pi}A\beta$.

Порівнюючи вирази (3.105) і (3.106), дійдемо висновку, що імпульс Гаусса та його спектр подаються однаковими функціями. Звідси випливає, що ці співвідношення є дуальними: для того щоб отримати одне з них за заданим іншим, потрібно замінити змінні (t на ω чи навпаки) і врахувати, що $\nu = 1/\beta$, а $B = \sqrt{2\pi}A\beta$.

Величина $\nu = 1/\beta$ має зміст ширини спектра дзвонового імпульсу, обмеженого зверху $\omega_{\max} = \nu$, на якій його спектр набуває значень, мен-

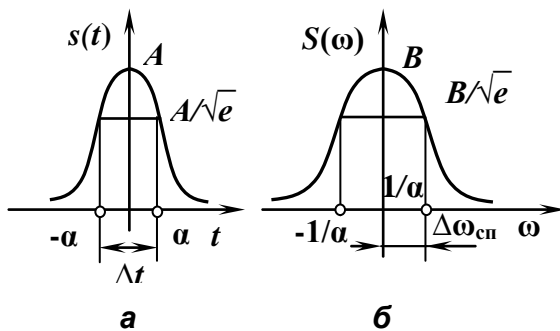


Рисунок 3.20 - Імпульс Гаусса (а) та його амплітудний спектр (б)

ших за максимальне B у $1/\sqrt{e} = 0,606$ разів (рис. 3.20, б). Це ширина спектра, яка визначена за рівнем 0,606.

Тоді для критерію за рівнем 0,606 добуток

$$\begin{aligned} \Delta f_{\text{сп}} \Delta t &= (\Delta\omega_{\text{сп}} / 2\pi) \Delta t = (\beta / 2\pi) 2\alpha \\ &= (1 / 2\pi\alpha) 2\alpha = 1 / \pi = 0,32. \end{aligned}$$

■

Значення амплітудних спектрів деяких сигналів змінюються з частотою немонотонно, тому є неоднозначними функціями частоти. Для таких немонотонних спектрів рівняння (3.104) має більше, ніж два корені, тому для визначення крайніх частот спектра ω_{\min} і ω_{\max} потрібні додаткові умови. Ось чому ширину спектра в таких випадках визначають за функцією $S_{\text{об}}(\omega)$, що описує обвідну немонотонного амплітудного спектра. При цьому крайні частоти обмеженого спектра є коренями рівняння $S_{\text{об}}(\omega) = \xi S_{\max}$.

► **Приклад.** За критерієм заданого рівня визначити ширину спектра $\Delta f_{\text{сп}}$ прямокутного відеоімпульсу тривалістю $t_{\text{імп}}$ та амплитудою A .

Амплітудний спектр прямокутного відеоімпульсу має пелюсткову структуру, змінюється з частотою немонотонно і набуває максимального значення на частоті $\omega_0 = 0$ (див. рис. 3.17, а). Отже, для цього відеоімпульсу $S_{\max} = S(0) = At_{\text{імп}}$, $\omega_{\min} = 0$, а ширина спектра $\Delta\omega_{\text{сп}}$ визнача-

3.5 Визначення ширини спектрів та тривалості процесів

ється тільки частотою ω_{\max} . Тоді для рівня, наприклад 0,1, допустиме значення $S_{\text{доп}} = 0,1S(0)$, а ω_{\max} задовольняє умову

$$At_{\text{імп}} \left| \sin(\omega t_{\text{імп}}/2) / (\omega t_{\text{імп}}/2) \right| = 0,1At_{\text{імп}}. \quad (3.107)$$

Чисельне розв'язування рівняння (3.107) дає декілька коренів, найменший із яких визначає таке значення ширини спектра прямокутного відеоімпульсу за рівнем 0,1:

$$\Delta\omega_{\text{сп}} = \omega_{\max 1} = 2,68 \cdot 2\pi / t_{\text{імп}} = 16,83 / t_{\text{імп}}. \quad (3.108)$$

Якщо визначати ширину спектра за обвідною $S_{\text{об}}(\omega) = At_{\text{імп}} / (\omega t_{\text{імп}} / 2) = 2A / \omega$ амплітудного спектра (3.53) і допустимим рівнем $S_{\text{доп}} = 0,1S(0)$ (див. рис. 3.19, в), то єдиний корінь рівняння $2A / \omega = 0,1At_{\text{імп}}$ визначить і одне значення для ширини спектра: $\Delta\omega_{\text{сп}} = \omega_{\max} = 20 / t_{\text{імп}}$.

Отже, залежно від вибраного підходу ширина спектра є різною. ■

Критерій заданого рівня у такий спосіб використовують також для визначення тривалості неперіодичних як відео-, так і радіосигналів, але таких, що не описуються фінітними функціями. Допустимий рівень установлюється для відеосигналів відносно найбільшого із миттєвих його значень, а для радіосигналів – відносно максимального значення обвідної.

► **Приклад.** За критерієм заданого рівня визначити тривалість Δt і ширину спектра $\Delta f_{\text{сп}}$ одностороннього дійсного експонентного сигналу $s(t) = Ae^{-\beta t} \sigma(t)$, $\beta > 0$ (рис. 3.3, а).

Максимальне значення цього сигналу дорівнює A при $t = 0$. Тоді для рівня 0,1 допустиме значення $S_{\text{доп}} = 0,1A$, а тривалість $\Delta t = t_{0,1}$ задовольняє таку умову: $s(t_{0,1}) = Ae^{-\beta t_{0,1}} = 0,1A$. Звідси

$$-\beta t_{0,1} = \ln 0,1 \Rightarrow \Delta t = t_{0,1} = \ln 10 / \beta = 2,3 / \beta. \quad (3.109)$$

Амплітудний спектр досліджуваного сигналу $S(\omega) = A / \sqrt{\omega^2 + \beta^2}$ набуває максимального значення $S_{\max} = A / \beta$ на частоті $\omega = 0$. Тоді для рі-

вня 0,1 ширина спектра $\Delta\omega_{\text{СП}} = \omega_{\text{max}} = \omega_{0,1}$ задовольняє таку умову:
 $S(\omega_{0,1}) = A / \sqrt{\omega_{0,1}^2 + \sigma^2} = 0,1A / \sigma$. Звідси

$$\Delta\omega_{\text{СП}} = \omega_{0,1} = \sqrt{996} \Rightarrow \Delta f_{\text{СП}} = \sqrt{996} / 2\pi = 1,5846. \quad (3.110)$$

Із урахуванням (3.109) і (3.110) база $\Delta f_{\text{СП}} \Delta t = 3,64$.



Спрощені підходи. Ширину спектра сигналів складної форми і таких, що не мають аналітичного опису можна оцінити приблизно (з деякою похибкою), якщо подати їх сумою певних складових (простішої чи поширеної на практиці форми). Спектральні та часові характеристики таких складових відомі, а за принципом невизначеності ширина спектра всього сигналу визначається складовою найменшої тривалості.

► **Приклад.** *Визначити ширину спектра сигналу, зображеного на рис. 3.21.*

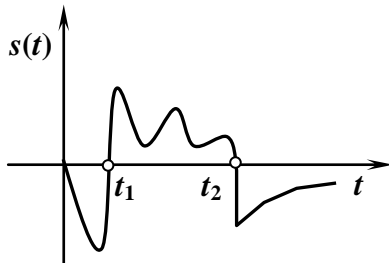


Рисунок 3.21 - Сигнал складної форми

Досліджуваний сигнал можна подати алгебраїчною сумою трьох складових. На часовому інтервалі $[0, t_1]$ – це майже синусний імпульс від'ємної полярності; на інтервалі $[t_1, t_2]$ – імпульс довільної форми з тривалістю $t_2 - t_1$; на напіввідкритому інтервалі $[t_2, \infty)$ – від'ємний експонентний імпульс. Оскільки найменшу

тривалість має синусний імпульс, то можна очікувати, що ширина спектра заданого сигналу буде близькою до ширини спектра саме цього імпульсу.

Установлено, що база синусного імпульсу, наприклад за енергетичним критерієм, дорівнює 0,445. Тоді ширина спектра заданого сигналу $\Delta f_{\text{СП}} = C_6 / t_1 = 0,445 / t_1$.



Визначення крайніх частот спектра телевізійного сигналу зображення – це один із прикладів спрощеного підходу до оцінювання ширини спектра. Оскільки основний фон зображення зберігається

3.5 Визначення ширини спектрів та тривалості процесів

впродовж декількох секунд, зрозумілою є така оцінка для мінімальної частоти $f_{\min} = 0$.

Максимальну частоту в спектрі сигналу зображення можна визначити, виходячи з подання телевізійного кадру послідовністю чорних та білих комірок прямокутної форми, що чередуються. Таке подання часто називають *шаховою структурою*. Загальна кількість комірок у кадрі $M = mn$, де m – кількість комірок по висоті a кадра, а n – кількість комірок по його ширині b .

Тривалість переходу від чорної до білої комірок шахової структури (довжина вказаних комірок) еквівалентна періоду гармонічного коливання. Тоді одному кадру з M елементів (комірок) відповідає $mn/2$ періодів.

За одну секунду передається N кадрів, кількість комірок у яких і визначить максимальну частоту в спектрі телевізійного сигналу зображення, а отже, і ширину його спектра:

$$f_{\max} = \Delta f_{\text{СП}} = mnN/2 = pn^2N/2, \quad (3.111)$$

де $p = b : a = m : n$ – формат кадру.

У сучасному телебаченні прийнятим є такий стандарт: $p = 4 : 3$; $N = 25$; $n = 625$. Тоді згідно з формулою (3.111) максимальна частота в спектрі сигналу зображення f_{\max} , а отже і ширина його спектра, приблизно дорівнює 6,5 МГц.

Спрощені підходи при визначенні спектрів і їхньої ширини застосовують для періодичних послідовностей обмеженої кількості відеоімпульсів. Такі послідовності називають **пачками відеоімпульсів**.

► **Приклад.** *Визначити спектр (спектральну щільність) і ширину спектра пачки із N прямокутних відеоімпульсів (рис. 3. 22).*

Пачку можна розглядати як суму одиночних прямокутних відеоімпульсів, зміщених відносно першого на часовий інтервал, кратний періоду.

Тоді згідно з теоремою затримки в часі (3.75) спектр пачки

$$S(j\omega) = S_{\Pi}(j\omega) + S_{\Pi}(j\omega)e^{-j\omega T} + \dots + S_{\Pi}(j\omega)e^{-j(N-1)\omega T},$$

де $S_{\Pi}(j\omega)$ – спектральна щільність прямокутного відеоімпульсу.

Скориставшись формулою геометричної прогресії, дістанемо

$$S(j\omega) = S_{\Pi}(j\omega) \frac{1 - e^{-jN\omega T}}{1 - e^{-j\omega T}} = S_{\Pi}(j\omega) \frac{\sin(N\omega T/2)}{\sin(\omega T/2)} e^{-j\frac{(N-1)\omega T}{2}}.$$

Звідси, амплітудний спектр пачки

$$S(\omega) = S_{\Pi}(\omega) [\sin(N\omega T/2)] / [\sin(\omega T/2)], \quad (3.112)$$

а фазовий

$$\phi_s(\omega) = \phi_{\Pi}(\omega) - (N-1)(\omega T/2).$$

Проаналізуємо вираз (11.157). Його чисельник перетворюється на нуль за умови, що аргумент синуса $N\omega T/2 = \pi k$; $k = 1, 2, \dots$. Звідси нульові частоти амплітудного спектра (3.112)

$$\omega_{0k} = 2\pi k / NT, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.113)$$

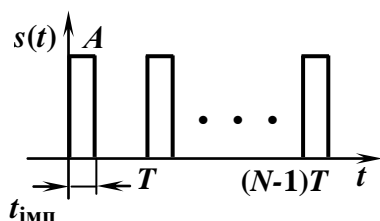


Рисунок 3.22 - Пачка прямокутних імпульсів.

З іншого боку, чисельник і знаменник (3.112) одночасно дорівнюють нулю, а їх відношення максимальне і збігається з числом імпульсів N у пачці, якщо $\omega T/2 = \pi n$; $n = 0, 1, 2, \dots$. Звідси знаходимо частоти максимумів амплітудного спектра пачки:

$$\omega_{\max} = 2\pi n / T; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.114)$$

Як впливає з виразів (3.113) і (3.114), у кожному частотному інтервалі $2\pi/T$ між двома сусідніми максимумами розміщується $(N-1)$ -е нульове значення амплітудного спектра.

Теоретичні дослідження показують, що амплітудний спектр пачки має пелюсткову структуру, подібну до структури спектра прямокутного відеоімпульсу. Його обвідною є амплітудний спектр відеоімпульсу (рис. 3.23).

Пелюстки на частотах максимумів (головні пелюстки) містять більшу частину спектральних складових, які у сумі відтворюють задану пачку. Ширина кожної головної пелюстки $\Delta\omega_{\Gamma\Pi} = 4\pi/NT$.

3.5 Визначення ширини спектрів та тривалості процесів

Як відомо, ширина пелюстки у спектрі прямокутного відеоімпульсу дорівнює $\Delta\omega_{\text{СП}} = 2\pi/t_{\text{ІМП}}$. Тоді в кожній пелюстці прямокутного відеоімпульсу число максимумів амплітудного спектра пачки

$$n_{\text{max}} = \Delta\omega_{\text{СП}} / \Delta\omega_{\text{Г.П}} = [2\pi/t_{\text{ІМП}}] / [2\pi/T] = T/t_{\text{ІМП}}, \quad (3.115)$$

тобто дорівнює шпаруватості послідовності.

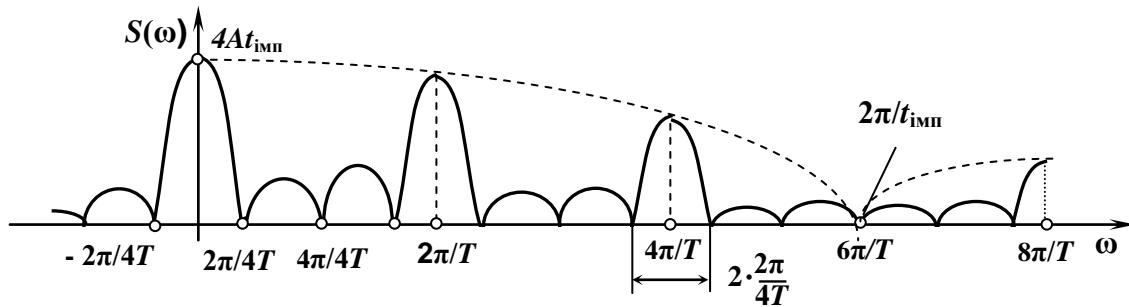


Рисунок 3.23 - Амплітудний спектр пачки з чотирьох прямокутних відеоімпульсів

Наведені співвідношення і зроблені висновки стосуються пачки відеоімпульсів будь-якої форми.



ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. Принцип невизначеності є визначальним при синтезі процесів, сигналів і інформаційних систем.
2. Практично слід використовувати процеси і сигнали такої форми, для яких добуток тривалості на ширину спектра має найменше значення.
3. Сутність підходів до визначення ширини спектра процесу або сигналу та його тривалості за енергетичним і інтегральним критерієм, критерієм



Слід запам'ятати:

1. Визначення понять: фінитна функція, момент функції, момент інерції плоскої фігури, радіус інерції.
2. Поняття тривалості точно визначене тільки для сигналів, які описуються фінитними функціями.
3. Імпульс Гауса та його спектр подаються однаковими функціями.
4. Для немонотонних процесів і сигналів та спектрів допустимий рівень при визначенні ширини

заданого рівня, методом моментів.

спектра чи тривалості встановлюється відносно максимального значення обвідної.



Треба вміти:

1. Визначити поняття: фінітна функція, момент функції, момент інерції плоскої фігури, радіус інерції.
2. Пояснити сутність підходів до визначення ширини спектра процесу або сигналу та його тривалості за енергетичним і інтегральним критерієм, критерієм заданого рівня, методом моментів.
3. Визначити ширину спектрів різних процесів і сигналів та їхні тривалості.
4. Вибирати сигнали певної форми для найрізноманітніших практичних застосувань.

3.6 Завдання для поточного тестування

3.6.1 Питання для поточного контролю

- Чим відрізняються процеси або сигнали з дискретним і неперервним спектрами?
- Чим відрізняються спектри двох процесів або сигналів однакової форми, зсунутих у часі відносно один одного?
- Що є основною спектральною характеристикою детермінованого неперіодичного процесу або сигналу?
- Яким інтегральним перетворенням визначається взаємозв'язок між неперіодичним процесом або сигналом та його спектральною щільністю комплексних амплітуд?
- Які умови задовольняють процеси і сигнали, що допускають безпосереднє застосування інтегрального перетворення Фур'є для визначення спектральної щільності комплексних амплітуд?
- Фізичний зміст спектральної щільності комплексних амплітуд.

3.6 Завдання для поточного тестування

- Яку властивість спектральної щільності комплексних амплітуд $S(j\omega)$ відображає таке співвідношення: $S(-j\omega) = S^*(j\omega)$?
- Які складові спектральної щільності $S(j\omega)$ задовольняють умови парної та непарної симетрії?
- Який взаємозв'язок між парною та непарною складовими неперіодичного процесу або сигналу і складовими спектральної щільності комплексних амплітуд?
- За якою формулою обчислюється тривалість двостороннього експонентного імпульсу за рівнем 0,01: а) $t_{\text{ІМП}} = \ln 10/\alpha$; б) $t_{\text{ІМП}} = 2\ln 100/\alpha$; в) $t_{\text{ІМП}} = 2,3/\alpha$; г) $t_{\text{ІМП}} = 4,6/\alpha$; д) $t_{\text{ІМП}} = \ln 100/\alpha$?
- За якою формулою визначається перший нуль спектра амплітуд прямокутного відеоімпульсу: а) $1/t_{\text{ІМП}}$; б) $1/\omega_1$; в) $2\pi/t_{\text{ІМП}}$; г) $4\pi/t_{\text{ІМП}}$?
- Зобразити графік фазового спектра трикутного парного відеоімпульсу.
- Подайте графічну ілюстрацію властивості двоїстості.
- Зобразити графік процесу або сигналу, амплітудний спектр якого має форму прямокутного відеоімпульсу?
- Запишіть співвідношення, якими визначаються початкові значення процесу і сигналу та спектра.
- Сформулюйте результат, який констатує формула Релея.
- Наведіть формули для визначення енергії процесу і сигналу в часовій та частотній областях.
- Фізичний зміст спектральної щільності енергії неперіодичного процесу або сигналу та енергії взаємодії двох неперіодичних процесів або сигналів?
- Чи залежить енергетичний спектр процесу і сигналу від аргументу його спектральної щільності комплексних амплітуд?
- Чи впливає фазовий спектр на енергію взаємодії двох процесів і сигналів?
- Розмірність енергетичного спектра.
- Чи можуть два ортогональних процеси або сигнали мати однаковий енергетичний спектр?

- Чи є додавання, підсилення та послаблення процесів і сигналів лінійними перетвореннями?
- Як зміниться фазовий спектр одиничного ступінчастого імпульсу при множенні на постійну величину A ?
- Яких значень набуває фазовий спектр постійного сигналу?
- Наведіть фізичне обґрунтування того, що амплітудний спектр постійного процесу і сигналу містить тільки одну дельтоподібну складову з необмеженою амплітудою на частоті $\omega = 0$.
- Запишіть інтегральні форми дельта-імпульсу для часової та частотної областей, а також одиничного ступінчастого імпульсу для часової області.
- Як впливає зсув процесу або сигналу в часі на його спектральну щільність?
- Із виділенням яких складових процесів і сигналів пов'язане таке перетворення: а) диференціювання; б) інтегрування?
- Як змінюються ширина спектра та амплітуди спектральних складових при а) розтягуванні процесу або сигналу; б) при стисненні процесу або сигналу?
- Чи можлива зміна тривалості процесу або сигналу без зміни його спектра?
- Доведіть, ґрунтуючись на теоремі про добуток двох процесів (сигналів), що початкове значення спектральної щільності добутку визначається енергією взаємодії цих двох процесів (сигналів).
- Чи змінюється форма амплітудного та фазового спектрів процесу або сигналу при його множенні на: а) гармонічне коливання; б) комплексний експонентний імпульс?
- У чому різниця амплітудних спектрів прямокутного відеоімпульсу та радіоімпульсу з прямокутною обвідною та гармонічним заповненням?
- Довести, що добуток спектрів відповідає згортка процесів і сигналів.
- Назвати три критерії, які повинні одночасно задовольнятися при виборі форми процесу або сигналу чи ширини спектра.
- Дайте визначення бази процесу і сигналу?

3.6 Завдання для поточного тестування

- Що таке фінітна функція?
- У чому полягає сутність енергетичного критерію для визначення ширини спектра чи тривалості процесу і сигналу?
- Поясніть, чому в системах зв'язку потрібно використовувати процеси і сигнали з найменшими значеннями бази.
- Сформулюйте основні положення методу моментів?
- Наведіть графічну ілюстрацію визначення тривалості відеоімпульсу чи ширини його спектра за інтегральним критерієм.
- У чому полягає сутність визначення тривалості процесу і сигналу або ширини спектра за критерієм заданого рівня?
- Як встановлюється допустимий рівень при використанні критерію заданого рівня для радіоімпульсів?
- Як змінюється ширина спектра прямокутного відеоімпульсу при збільшенні його амплітуди?
- Яку частку повної енергії прямокутного відеоімпульсу визначають спектральні складові, зосереджені в першій пелюстці та перших двох пелюстках його спектра амплітуд?
- Як зміниться база прямокутного відеоімпульсу при збільшенні його тривалості в п'ять разів?
- Що таке пачка відеоімпульсів?
- Як зміниться ширина спектра пачки прямокутних відеоімпульсів при збільшенні: а) кількості імпульсів у пачці; б) тривалості імпульсів?
- У скільки разів ширина спектра пачки з трьох прямокутних відеоімпульсів тривалістю t_{iMP} та шпаруватістю $\theta = 2$ відрізняється від ширини спектра одиночного прямокутного відеоімпульсу?

3.6.2 Задачі для індивідуального та самотійного розв'язування

1. Визначити взаємний енергетичний спектр двох експонентних імпульсів $\exp(-10^6 t)y(t)$, зміщених один відносно одного на час $t_0 = 0,1$ мкс. Запропонувати спосіб, що забезпечить кращу енергетичну відмінність цих імпульсів.

2. Визначити, який з трьох імпульсів експонентний $e^{-t/\tau}\sigma(t)$, двосторонній експонентний $e^{-|t|/\tau}$ чи трикутний тривалістю τ має найменшу базу.

3. Чи забезпечить в межах допустимих спотворень передачу інформації система з смугою пропускання 10 кГц, якщо носієм інформації є радіоімпульс із прямокутною обвідною та тривалістю $t_{\text{імп}} = 1$ мкс?

4. Визначити спектральну щільність комплексних амплітуд періодичної послідовності дельта-імпульсів. Додаткові дані: період послідовності T_0 , площа дельта-імпульсу A .

5. Зобразити графік сигналу $s(t)$, спектральна щільність якого $S(j\omega) = A/j\omega + A\pi\delta(\omega)$.

6. Визначити взаємний енергетичний спектр дійсного експонентного імпульсу $Ae^{-t/\tau}\sigma(t)$ та прямокутного відеоімпульсу тривалістю $t_{\text{імп}}$ та амплітудою A .

7. Спектральна щільність неперіодичного процесу $S(j\omega) = (A/j\omega)(1 - e^{-j\omega t_{\text{імп}}})$. Визначити енергетичний спектр такого процесу та інтервал кореляції τ_k .

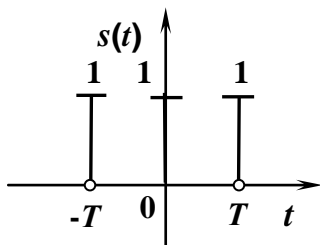


Рисунок 3.24 – Пачка з трьох дельта-імпульсів.

8. Спектральна щільність $S(j\omega) = A = \text{const}$. Установити, якою є математична модель сигналу $s(t)$:

а) $s(t) = (A/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega$; б) $s(t) = \delta(t)$; в)

г) $s(t) = A\delta(t)e^{-t}$; д) $s(t) = A\delta(t + t_3)$; е) $s(t) = A\delta(t)$?

9. Визначити ширину спектра радіоімпульсу $s(t) = 10e^{-10t} \cos 200t\sigma(t)$.

10. Використовуючи спектр дельта-імпульсу, визначити спектральну щільність імпульсу трикутної форми (див. рис. 3.15, а), якщо $t_{\text{імп}} = 2$, $A = 1$.

3.6 Завдання для поточного тестування

11. Пачка складається з трьох дельта-імпульсів, як зображено на рис. 3.24. Визначити амплітудний та фазовий спектри пачки. Побудувати графіки цих спектрів.

12. Визначити коефіцієнт гармонік та форми сигналу $s(t) = 100\sin\omega_1 t + 30\sin 2\omega_1 t$.

13. Визначити частоту, на якій фазовий спектр дійсного двостороннього відеоімпульсу дорівнює -45° . Додаткові дані: амплітуда імпульсу $A = 10$, коефіцієнт загасання $\tau = 1\text{ мс}$.

14. Визначити енергію, що розсіюється на резистивному елементі з опором $R = 1\text{ Ом}$ при проходженні сигналів із такими спектральними щільностями: а) $S_1(j\omega) = 1/(\alpha + j\omega)\text{ В/с}$; б) $S_2(j\omega) = 1/(\alpha + j\omega)^2\text{ В/с}$.

15. Визначити амплітудний спектр і його ширину пачки з двох прямокутних відеоімпульсів тривалістю $t_{\text{імп}}$ та шпаруватістю $\theta = 3$.

16. Визначити активну ширину спектра радіоімпульсу прямокутної форми, якщо тривалість імпульсу $t_{\text{імп}} = 1\text{ мкс}$, а частота заповнення $F_0 = F_{\text{ВЧ}} = 1000\text{ МГц}$.

17. Грунтуючись на теоремі про добуток процесів і сигналів, визначити спектральну щільність сигналу $s(t) = s_1(t)s_2(t)$, якщо спектральні щільності співмножників є такими: $S_1(j\omega) = 1/(\alpha_1 + j\omega)$; $S_2(j\omega) = 1/(\alpha_2 + j\omega)$.

18. Спектр вхідного процесу $S_{\text{вх}}(j\omega) = A$, а реакції $S_{\text{вих}}(j\omega) = A[\pi\delta(\omega) + (1/j\omega)]$. Яке функціональне перетворення над діючим процесом виконується системою?

19. Для сигналів $s_1(t)$ і $s_2(t)$ установлені такі відповідності: $s_1(t) \leftrightarrow S_1(j\omega)$, $s_2(t) \leftrightarrow S_2(j\omega)$. Визначити сигнал $s(t)$, спектральна щільність якого $S(j\omega) = S_1(j\omega)S_2(j\omega)$, якщо $s_1(t) = e^{-\alpha_1 t}\sigma(t)$, а $s_2(t) = e^{-\alpha_2 t}\sigma(t)$.

20. Два сигнали мають такі спектри: $S_1(j\omega) = j\sin(5\omega)/(3 + j\omega)$, $S_2(j\omega) = 1/[(1 + j\omega)(2 + j\omega)]$. Визначити, який із сигналів має найбільшу тривалість?

21. За спектральною щільністю прямокутного відеоімпульсу $S(j\omega) = (1 - e^{-j\omega t_{\text{IMP}}}) / j\omega$ визначити спектральну щільність відеоімпульсу трикутної форми $s(t) = t/t_{\text{IMP}}$, $0 \leq t \leq t_{\text{IMP}}$; $s(t) = 0$, $t < 0$, $t > t_{\text{IMP}}$.

4 Кореляційний аналіз процесів

4.1 Визначення поняття кореляції

Поряд із спектральними та енергетичними підходами до оцінки властивостей процесів (сигналів) на практиці застосовують і часовий, який ґрунтується на їхніх часових характеристиках. Останні дають необхідну інформацію про протікання процесу в часі. Зокрема це такі часові параметри, як тривалість обмеженого в часі процесу, період та шпаруватість періодичного процесу, а також кореляційні характеристики (функції).

Поняття кореляції є одним із основних у задачах аналізу як детермінованих, так і випадкових процесів, та дуже важливим, наприклад, у розв'язанні проблеми вибору оптимальних сигналів для певних застосувань.

Загалом кореляція характеризує взаємний зв'язок між двома миттєвими значеннями $s(t_k)$ і $s(t_{k+1})$ одного процесу $s(t)$ або миттєвими значеннями $s_1(t_k)$ і $s_2(t_{k+1})$ двох процесів $s_1(t)$ та $s_2(t)$, визначених відповідно в моменти часу t_k та t_{k+1} .

Для того, щоб зрозуміти, чим зумовлена необхідність у процесах або сигналах із спеціальними властивостями, розглянемо спрощену ідею роботи радіолокаційної системи, яка використовується для вимірювання дальності до цілі. Така інформація, зазвичай, закладена в параметр τ – затримку в часі між зондуючим імпульсом $x(t)$ та прийнятим $x(t - \tau)$ (рис. 4.1, а).

Як же практично визначити таку затримку? Припустімо, що форми зазначених двох імпульсів однакові за будь-яких значень затримки. Структурна схема пристрою, що може реалізувати таку функцію, показана на рис. 4.1, б. Система складається із набору елементів, кожний із яких затримує зондуючий імпульс на деякий фіксований, відомий і відмінний від інших проміжок часу $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$. Затри-

мані імпульси разом із прийнятим подаються на входи N пристроїв порівняння. Імпульс на виході m -го пристрою порівняння з'являється тільки тоді, коли затриманий $x(t - \tau_m)$ та прийнятий $x(t - \tau)$ імпульси співпадають в часі ("накривають один одного"). Тоді кажуть, що імпульси є "копіями". Знаючи номер того каналу, де відбулася вказана подія, можна визначити затримку τ , а значить і відстань до цілі (об'єкта).

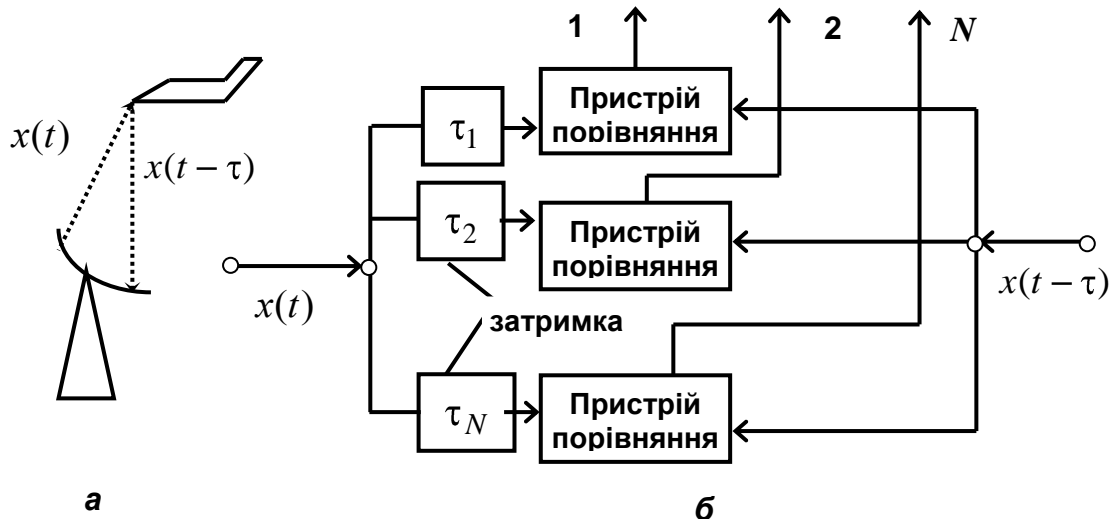


Рисунок 4.1 – Структурна схема радіолокаційної системи:
а - зонduючий та прийнятий імпульси; б – до визначення затримки.

Очевидно, що така система буде працювати тим надійніше та точніше, чим в більшій мірі відрізняються один від одного імпульси $x(t)$ та його зсунута в часі копія $x(t - \tau)$ (причому для різних значень τ). Якщо ж різниця не дуже велика, то це може привести до одночасної реакції декількох пристроїв порівняння, а значить і неоднозначності в визначенні затримки τ .

Цей приклад якісно показує, які процеси (сигнали) підходять для даного застосування, і ілюструє необхідність точного кількісного визначення ступеня відмінності процесу $x(t)$ і його зсунутої копії $x(t - \tau)$.

Ясно, що процес і його зсунута копія повністю збігаються, є схожими один на одного, за нульового значення зсуву. Тоді, коли $\tau = 0$, вказані процеси повністю перекриваються та покривають один одного. Кажуть, що між процесами має місце **повна кореляція** чи повний взаємний зв'язок. Із збільшенням величини зсуву заданий процес вже не буде повністю накривати свою зсунуту копію, а отже, кореляція на визначеному часовому інтервалі стане меншою.

Ступінь зв'язку (кореляції) залежить з одного боку від динаміки процесу (швидкості зміни в часі), з іншого – від величини зсуву τ (рис. 4.2). Більш швидкодіючим процесам, процесам меншої тривалості, відповідає і менше значення часового зсуву τ , за якого забезпечується необхідний рівень кореляції між процесом та його зсунутою копією (рис. 4.2, б). На рис. 4.2 площа області покриття заданого та зсунутого процесів пропорційна ступеню їх кореляції.

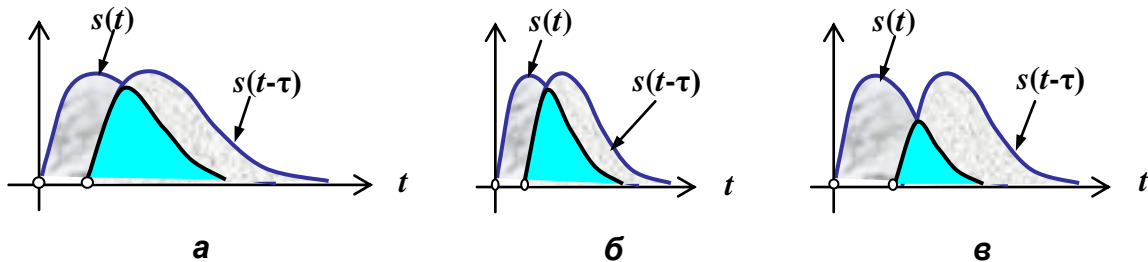


Рисунок 4.2 – Графічна інтерпретація кореляції.

Такі ж терміни і висновки вживають для оцінки того, наскільки корельовані миттєві значення $s_1(t_1)$ і $s_1(t_2)$ одного і того самого процесу для різних моментів часу t_1 , t_2 , таких, що $t_2 - t_1 = \tau$, або миттєві значення $s_1(t_1)$ і $s_2(t_2)$ двох різних процесів, визначені для одного процесу в момент часу t_1 , а для другого в момент часу t_2 або навпаки.

Ось цю інформацію і дають такі часові характеристики, як кореляційні функції: **автокореляційна функція** та **коефіцієнт автокореляції** для одного процесу (сигналу); **взаємна кореляційна функція** та **коефіцієнт взаємної кореляції** для двох процесів (сигналів).

ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. Поряд із спектральними та енергетичними підходами до оцінки властивостей процесів і сигналів на практиці застосовують і часовий, який ґрунтується на характеристиках, що дають інформацію про проті-



Слід запам'ятати:

1. Визначення поняття кореляція, повна кореляція.
2. Структурну схему радіолокаційної системи.



Треба вміти:

кання процесу (сигналу) в часі.

2. Ступінь кореляції залежить з одного боку від динаміки процесу, з іншого – зсуву між процесом (сигналом) та його зсунутою копією. Більш швидкодіючим процесам (сигналам) відповідає і менше значення часового зсуву, за якого забезпечується потрібний рівень кореляції.

1. Визначати поняття: кореляція та повна кореляція.

2. Подати графічну інтерпретацію кореляції.

3. Зобразити структурну схему радіолокаційної системи.

4.2 Кореляційна функція періодичного процесу

Розглянемо спочатку характеристики, які визначають кореляційні властивості одного періодичного процесу (сигналу).

Автокореляційна функція.

♦ **Автокореляційною функцією $K_s(\tau)$ періодичного детермінованого процесу $s(t)$ з періодом $T = 1/f$ визначається середнім за період значенням добутку процесу $s(t)$ та його зсунутої праворуч $s(t - \tau)$ ($\tau > 0$) або ліворуч $s(t + \tau)$ ($\tau < 0$) копії:**

$$K_s(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t)s(t - \tau)dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t)s(t + \tau)dt = \overline{s(t)s(t - \tau)} = \overline{s(t)s(t + \tau)}. \quad (4.1)$$

Відомо, що інтеграл від добутку двох процесів називається їхнім скалярним добутком. Він визначає енергію взаємодії двох процесів на визначеному часовому інтервалі. Віднесена до часового інтервалу енергія дає середню потужність взаємодії. Для періодичного процесу таким часовим інтервалом вважається період. Отже, згідно з (4.1) автокореляційна функція (АКФ) періодичного процесу визна-

чає середню за період потужність взаємодії процесу та його зсунутої періодичної копії.

► **Приклад.** Визначити автокореляційну функцію гармонічного процесу $s(t) = S_m \cos(\omega_0 t + \alpha_s)$?

Згідно з (4.1)

$$K_s(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} S_m \cos(\omega_0 t + \alpha_s) S_m \cos(\omega_0(t + \tau) + \alpha_s) dt =$$

$$= \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} S_m^2 \cos(2\omega_0 t + \tau + 2\alpha_s) dt = \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} S_m^2 \cos \omega_0 \tau dt = \frac{1}{2} S_m^2 \cos \omega_0 \tau .$$

◆ **АКФ гармонічного процесу є гармонічною відносно часового зсуву з тим самим періодом, що і у початкового процесу, а її амплітуда визначається середньою потужністю гармонічного процесу.**



Цей приклад є ілюстрацією однієї з можливих властивостей кореляційних характеристик періодичних процесів. Зупинимося на них.

◆ **Автокореляційна функція $K_s(\tau)$ періодичного процесу $s(t)$ є періодичною функцією відносно часового зсуву τ з тим самим періодом T , що і у початкового процесу:**

$$K_s(\tau) = K_s(\tau + T). \quad (4.2)$$

Дійсно, якщо $s(t)$ – періодичний процес, то і його “копія” $s(t + \tau)$ є процесом також періодичним із спектральними характеристиками, що визначаються рядом Фур’є, наприклад, у комплексній формі.

Підставивши (2.21) в (4.1), дістанемо:

$$K_s(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{mn} \cdot e^{jn\omega_1(t+\tau)} dt .$$

Зміна порядку операцій інтегрування та суми дає:

$$K_s(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{mn} e^{jn\omega_1\tau} \frac{1}{T_0} \int_{-T/2}^{T_0/2} s(t) e^{jn\omega_1 t} dt = \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{mn}^2 e^{jn\omega_1\tau}, \quad (4.3)$$

де враховано, що

$$\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{jn\omega_1 t} dt = A_{mn} = A_{m(-n)}$$

- комплексно-спряжена величина комплексної амплітуди A_{mn} .

Співвідношення (4.3) є рядом Фур'є у комплексній формі функції кореляції $K_s(\tau)$:

$$K_s(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A_{mn}^2}{2} e^{jn\omega_1\tau}, \quad (4.4)$$

що і підтверджує її періодичність.

Тригонометрична форма ряду (4.4) має такий вигляд:

$$K_s(\tau) = \left(\frac{A_{m0}}{2}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{mn}^2}{2} \cos(n\omega_1\tau). \quad (4.5)$$

◆ АКФ періодичного процесу може бути розкладена в ряд Фур'є з таким же числом гармонік, що і у періодичному процесі, з амплітудами, які дорівнюють потужностям гармонік, та нульовими початковими фазами:

Згідно з (4.4) та (4.5) АКФ періодичного процесу або сигналу визначається тільки частотами його гармонік та квадратами їхніх амплітуд, а отже, середніми потужностями гармонік, і не залежить від початкових фаз. У зв'язку з цим може існувати декілька періодичних процесів і сигналів із однаковим значенням періоду, які мають однакову автокореляційну функцію. Достатньо, щоб відповідні гармоніки мали однакові амплітуди, але різні початкові фази.

Отже, спектральні характеристики АКФ $K_s(\tau)$ дають інформацію про розподіл потужностей спектральних складових періодичного процесу і сигналу по частотному діапазону. Таким чином, такий роз-

поділ можна отримати або на основі процесу за теоремою Парсеваля, або за спектром АКФ.

- ◆ **Початкове значення $K_s(0)$ АКФ періодичного процесу є її максимумом і дорівнює середній за період потужності процесу та визначається сумою середніх потужностей його гармонічних складових.**

Відповідно до (4.1) та (4.5) за нульового зсуву ($\tau = 0$) між процесом та його копією маємо:

$$K_s(0) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t) dt = P_{cp} = \left(\frac{A_{m0}}{2}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{mn}^2}{2} = P_{cp=} + P_{cp\sim}, \quad (4.6)$$

що і підтверджує вказану властивість.

Отже, абсолютне значення АКФ для будь-якого τ не перевищує свого початкового значення $K_s(0)$, тобто повної середньої потужності процесу. Окрім того, для періодичного процесу максимальне значення $K_s(0)$ АКФ повторюється через однакові інтервали, що визначаються періодом T .

Екстремум АКФ $K_s(\tau)$ знайдемо, здиференціювавши (4.5).
Похідна

$$\frac{dK_s(\tau)}{d\tau} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{mn}^2}{2} (-n\omega_1) \sin n\omega_1\tau = 0$$

у моменти часу, кратні періоду:

$$n\omega_1\tau = k\pi \Rightarrow \tau = \frac{k\pi}{n\omega_1} = \frac{k}{2n}T \Rightarrow k_1T.$$

- ◆ **АКФ періодичного процесу задовольняє умову парності:**

$$K_s(-\tau) = K_s(\tau). \quad (4.7)$$

Згідно з (4.1) при зсуві ліворуч ($\tau < 0$) маємо:

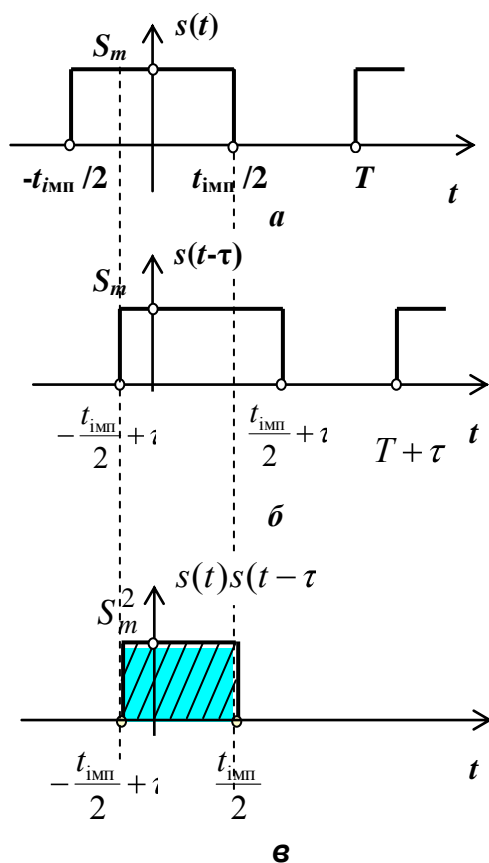
4.2 Корляційна функція періодичного процесу

$$K_s(-\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t)s(t - (-\tau))dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t)s(t + \tau)dt =$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t_1 - \tau)s(t_1)dt_1 = \overline{s(t_1)s(t_1 - \tau)} = K_s(\tau).$$

Із співвідношення (4.7) випливає, що при визначенні автокореляційної функції немає суттєвої різниці зсувати процес на величину τ праворуч або ліворуч. Графіки автокореляційних характеристик згідно з умовою парності є симетричними відносно осі ординат.

► **Приклад.** Визначити АКФ періодичної послідовності прямокутних відеоімпульсів із заданими параметрами: T - періодом, тривалістю імпульса - $t_{\text{імп}}$, амплітудою S_m , шпаруватістю Q .



Графічна інтерпретація процедури обчислень АКФ періодичної послідовності прямокутних відеоімпульсів показана на рис. 4.3.

На рис. 4.3, а зображено початковий процес: $s(t) = S_m, |t| \leq t_{\text{імп}}/2$; на рис. 4.3, б – його зсунута праворуч копія:

на рис. 4.3, в їх добуток:

$$s(t - \tau) = S_m, \quad -\frac{t_{\text{імп}}}{2} + \tau \leq t \leq \frac{t_{\text{імп}}}{2} + \tau;$$

$$s(t)s(t - \tau) = S_m^2, \quad -\frac{t_{\text{імп}}}{2} + \tau \leq t \leq \frac{t_{\text{імп}}}{2}.$$

Рисунок 4.3 – До визначення кореляційної функції.

Для конкретного значення τ в межах $0 \leq \tau \leq t_{\text{імп}}$ відповідне значення АКФ згідно з (4.1) визначиться площею заштрихованої області, поділеної на T :

$$K_s(\Phi) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{t_{\text{імп}}}{2} + \tau}^{\frac{t_{\text{імп}}}{2}} S_m^2 d\lambda = \frac{1}{T} S_m^2 \left(\frac{t_{\text{імп}}}{2} + \frac{t_{\text{імп}}}{2} - \Phi \right) =$$

$$= S_m^2 \frac{t_{\text{імп}}}{T} \left(1 - \frac{\tau}{t_{\text{імп}}}\right) = \frac{S_m^2}{Q} \left(1 - \frac{\tau Q}{T}\right).$$

Числові значення таких площ і дають ординати АКФ:

Враховуючи парність функції $K_s(\tau)$ отримаємо вираз АКФ заданої послідовності для одного періоду (рис. 4.4):

$$K_s(\tau) = K_s(\tau + kT) = \frac{S_m^2}{Q} \left(1 - \frac{|\tau|Q}{T}\right); \quad |\tau| \leq t_{\text{імп}}. \quad (4.8)$$

Згідно з (4.5) та з урахуванням амплітуд гармонік послідовності трикутних імпульсів знаходимо подання АКФ рядом Фур'є:

$$K_s(\tau) = \left[\left(\frac{S_m}{Q}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2S_m}{Q} \left| \frac{\sin [n\omega_1 t_{\text{імп}} / 2]}{[n\omega_1 t_{\text{імп}} / 2]} \right| \right)^2 \cos n\omega_1 \tau \right],$$

де $\omega_1 = 2\pi/T$ - частота слідування імпульсів.

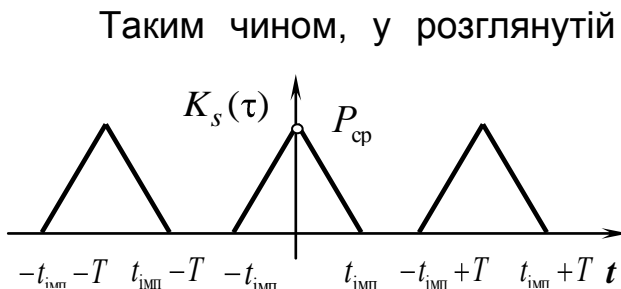


Рисунок 4.4 – Автокореляційна функція періодичної послідовності прямокутних відеоімпульсів.

Таким чином, у розглянутій раніше радіолокаційній системі (див. рис. 4.1) в пристроях порівняння потрібно апаратними засобами реалізувати обчислення значення кореляційної функції затриманого та прийнятого імпульсів. Пристрій із максимальним значенням АКФ і визначить затримку відстань до цілі τ .

Попередній приклад може слугувати ілюстрацією алгоритму графічного підходу до обчислення АКФ періодичних процесів. Із цією метою на періоді потрібно:

- зсунути графік процесу $s(t)$ на τ , наприклад, праворуч відносно його початкового положення;
- побудувати графік функції, що є добутком початкового процесу та зсунутого: $s(t)s(t - \tau)$;
- визначити середнє значення добутку $s(t)s(t - \tau)$, як площу, обмежену графіком функції добутку на періоді T ;

- повторити розрахунок для всіх значень часового зсуву τ на періоді;
- отримані результати на періоді екстраполювати на весь часовий нескінченно подовжений інтервал.

Нормована кореляційна функція (коефіцієнт автокореляції). На практиці дуже часто оперують замість абсолютних відносними величинами. Це стосується і характеристик процесів, що в багатьох випадках слугує більш наглядним відображенням їхніх властивостей та результатів дослідження.

- ◆ **Коефіцієнт автокореляції** $R_s(\tau)$ довільного детермінованого процесу, в тому числі і періодичного, є його нормованою АКФ і визначається відношенням автокореляційної функції до її початкового значення:

$$R_s(\tau) = \rho(\tau) = \frac{K_s(\tau)}{K_s(0)}. \quad (4.9)$$

Якщо розмірність значень АКФ $K_s(\tau)$ збігається з розмірністю середньої потужності, то значення коефіцієнта кореляції $R_s(\tau)$ – є безрозмірними. В той же час форма та властивості $R_s(\tau)$ будуть такими самими, як і у АКФ.

За повної кореляції процесу та його зсунутої копії, а така подія має місце, коли $\tau = 0$, коефіцієнт кореляції дорівнює одиниці. Із збільшенням величини зсуву τ , АКФ $K_s(\tau) \rightarrow 0$, а, отже, і $R_s(\tau) \rightarrow 0$. Таким чином, на періоді (для періодичних процесів і сигналів) коефіцієнт кореляції змінюється в межах від нуля до одиниці: $0 \leq |R_s(\tau)| \leq 1$. Значення одиниця відповідає повній кореляції, а нуль – її відсутності.

Перетворення Фур'є автокореляційної функції. З урахуванням (4.4) та відомого факту, що $2\pi\delta(\omega - \omega_1 n)$ є інтегральним перетворенням Фур'є експонентного процесу $e^{jn\omega_1\tau}$, дістанемо перетворення Фур'є кореляційної функції $K_s(\tau)$ періодичного процесу $s(t)$:

$$S_K(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{2} A_{mn}^2 \delta(\omega - n\omega_1). \quad (4.10)$$

Як впливає з (4.10) перетворення Фур'є АКФ є послідовністю дельта імпульсів, кожний площею $\pi A_{mn}^2 / 2$, пропорційною середній потужності гармоніки АКФ з частотою $n\omega_1$.

Функція частоти $S_K(\omega)$, з одного боку, дає інформацію про розподіл по частотному діапазону амплітуд гармонік кореляційної функції $K_s(\tau)$, з іншого - є спектральним зображенням середньої за період потужності періодичного процесу $s(t)$. Тому і називають таку функцію **спектральною щільністю потужності** періодичного процесу $s(t)$.

Очевидно, що зворотне перетворення Фур'є від $S_K(\omega)$ дає АКФ.

$$\begin{aligned} K_s(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_K(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{mn}^2 \delta(\omega - n\omega_1) e^{j\omega\tau} d\omega = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A_{mn}^2}{2} e^{jn\omega_1\tau}. \end{aligned}$$

За нульового значення зсуву ($\tau = 0$) відповідно до останнього співвідношення

$$K_s(0) = P_{cp} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_K(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S_K(f) df. \quad (4.11)$$

- ◆ **Середня потужність періодичного процесу визначається площею, обмеженою графіком його спектральної щільності потужності.**

Зазначимо і ще одне: наявність дельта-особливостей у спектрі кореляційної функції відповідно до властивостей інтегрального перетворення Фур'є є ще однією ознакою її періодичності, а отже, періодичності процесу, який вона характеризує.

ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:



Слід запам'ятати:

1. АКФ періодичного процесу може бути розкладена в ряд

1. Визначення понять: автокореляційна функція, коефіцієнт

4.2 Корляційна функція періодичного процесу

Фур'є з таким самим числом гармонік, що і у періодичному процесі, амплітуди яких дорівнюють потужностям гармонік процесу, а початкові фази - нулю.

2. Може існувати декілька періодичних процесів із одного і того самого періоду, які мають однакову автокореляційну функцію.

3. Спектр АКФ дає інформацію про розподіл потужностей гармонік періодичного процесу по частоті. Такий розподіл можна отримати і на основі процесу (сигналу) за теоремою Парсевалю.

автокореляції та спектральна щільність потужності періодичного процесу.

2. АКФ періодичного процесу визначає середню за період потужність взаємодії процесу та його зсунутої копії.

3. АКФ періодичного процесу є періодичною функцією відносно часового зсуву з тим самим періодом, що і у початкового процесу.

4. Амплітуда АКФ гармонічного процесу визначається його середньою потужністю.

5. Умову парності АКФ періодичного процесу.



Треба вміти:

1. Визначати поняття: автокореляційна функція, коефіцієнт автокореляції та спектральна щільність потужності періодичного процесу.

2. Визначати автокореляційну функцію, коефіцієнт автокореляції та спектральну щільність потужності різних періодичного процесів.

3. Обчислювати середню потужність періодичних процесів за АКФ.

4. Знаходити АКФ графічним методом.

4.3 Взаємні кореляційні функції періодичних процесів

Взаємні кореляційні функції (ВКФ) визначають характер та ступінь кореляційного зв'язку (кореляції) між двома різними періодичними процесами сигналами).

♦ **Взаємна кореляційна функція** двох детермінованих періодичних процесів $s_1(t)$ та $s_2(t)$ з однаковим періодом $T = 1/f$ визначається відношенням скалярного добутку за період одного процесу та зсунутої копії іншого до величини періоду.

У разі часового зсуву процесу $s_2(t)$ ліворуч ВКФ

$$K_{s_1s_2}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T s_1(t) s_2(t + \tau) dt, \quad (4.12)$$

а процесу $s_1(t)$ -

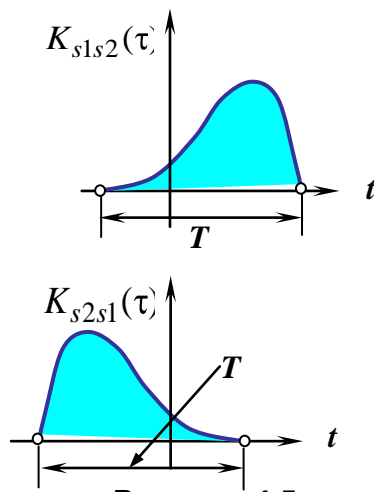


Рисунок 4.5 –
Ілюстрація умови
дзеркальної симетрії.

$$K_{s_2s_1}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T s_2(t) s_1(t + \tau) dt. \quad (4.13)$$

У загальному випадку взаємні кореляційні функції не задовольняють умову парної симетрії $K_{s_1s_2}(-\tau) \neq K_{s_1s_2}(\tau)$ та залежать від того, до якого процесу або сигналу застосовується операція часового зсуву (порядку слідування індексів у позначенні ВКФ): $K_{s_1s_2}(\tau) \neq K_{s_2s_1}(\tau)$.

Таким функціям властива **умова дзеркальної симетрії**, згідно з якою графік ВКФ $K_{s_1s_2}(\tau)$ є дзеркальним відносно осі ординат відображенням ВКФ $K_{s_2s_1}(\tau)$ і навпаки (рис. 4.5 для одного періоду):

$$K_{s_1s_2}(-\tau) = K_{s_2s_1}(\tau). \quad (4.14)$$

Дійсно, згідно з (4.12) та (4.13)

$$K_{s_1s_2}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T s_1(t) s_2(t + \tau) dt = \left\{ \begin{array}{l} t_1 = t + \tau \\ t = t_1 - \tau \\ dt = dt_1 \end{array} \right\} = \frac{1}{T} \int_0^T s_1(t_1 - \tau) s_2(t_1) dt_1 = K_{s_2s_1}(-\tau).$$

► **Приклад.** Визначити взаємну кореляційну функцію двох гармонічних процесів однакової частоти $s_1(t) = A_{m1} \cos \omega_1 t$ та $s_2(t) = A_{m2} \sin \omega_1 t$?

Згідно з (4.12)

$$\begin{aligned} K_{s_1s_2}(\tau) &= \frac{1}{T} \int_0^T A_{m1} \cos \omega_1 t A_{m2} \sin \omega_1 (t + \tau) dt = \frac{1}{T} \int_0^T A_{m1} A_{m2} \cos \omega_1 t \cos[\omega_1 (t + \tau) - \frac{\pi}{2}] dt = \\ &= \frac{A_{m1} A_{m2}}{2T} \left\{ \int_0^T \cos[\omega_1 t + \omega_1 (t + \tau) - \frac{\pi}{2}] dt + \int_0^T \cos(-\omega_1 \tau + \frac{\pi}{2}) dt \right\} = \\ &= \frac{A_{m1} A_{m2}}{2} \cos(\omega_1 \tau - \frac{\pi}{2}) = \frac{A_{m1} A_{m2}}{2} \sin \omega_1 \tau. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Отже, в данному випадку ВКФ є дійсною непарною функцією часового зсуву τ , що підтверджує раніше зроблений висновок про невиконання умови парної симетрії.

Згідно з (4.13)

$$\begin{aligned} K_{s_2s_1}(\tau) &= \frac{1}{T} \int_0^T s_2(t) s_1(t + \tau) dt = \frac{1}{T} \int_0^T A_{m2} \sin \omega_1 t A_{m1} \cos(\omega_1 (t + \tau)) dt = \\ &= \frac{A_{m1} A_{m2}}{2T} \left[\int_0^T \cos(\omega_1 t + \omega_1 \tau - \frac{\pi}{2}) dt + \int_0^T \cos(-\omega_1 \tau - \frac{\pi}{2}) dt \right] = \\ &= \frac{A_{m1} A_{m2}}{2} \cos(\omega_1 \tau + \frac{\pi}{2}) = -\frac{A_{m1} A_{m2}}{2} \sin(\omega_1 \tau). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Таким чином, $K_{s_1s_2}(\tau) \neq K_{s_2s_1}(\tau)$, що відповідає теорії. Виконується і умова дзеркальної симетрії:

$$K_{s_1s_2}(-\tau) = \frac{A_{m1} A_{m2}}{2} \sin(-\omega_1 \tau) = -\frac{A_{m1} A_{m2}}{2} \sin(\omega_1 \tau) = K_{s_2s_1}(\tau).$$

◻

- ♦ **Взаємна кореляційна функція двох періодичних процесів з однаковим періодом T є також періодичною з тим самим періодом T :**

$$K_{s_1s_2}(\tau) = K_{s_1s_2}(\tau + kT).$$

Для доведення подамо процес $s_2(t)$ рядом Фур'є, наприклад, у комплексній формі (див. (2.21)). Тоді:

$$K_{s_1s_2}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T s_1(t) \left[\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overset{\bullet}{A}_{m_2n} e^{jn\omega_1(t+\tau)} \right] dt.$$

Змінивши порядок інтегрування та додавання, дістанемо:

$$K_{s_1s_2}(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overset{\bullet}{A}_{m_2n} e^{jn\omega_1\tau} \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T s_1(t) e^{jn\omega_1 t} dt}_{\overset{*}{A}_{m_1n}/2} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\overset{*}{A}_{m_1n} \overset{\bullet}{A}_{m_2n}}{2} e^{jn\omega_1\tau}. \quad (4.17)$$

Вираз (4.17) є комплексною формою ряду Фур'є ВКФ в базисі комплексних експонентних складових із частотами, кратними основній $\omega_1 = 2\pi/T$, що і доводить її періодичність.

Запишемо (4.17) у амплітудно-фазовій формі:

$$K_{s_1s_2}(\tau) = \frac{A_{01}}{2} \frac{A_{02}}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_{m_1n} A_{m_2n} \cos(n\omega_1\tau - \alpha_{2n} + \alpha_{1n}).$$

Із останнього співвідношення випливає, що ВКФ періодичних процесів, на відміну від АКФ, частково зберігає інформацію про фазову структуру початкових процесів $s_1(t)$ та $s_2(t)$ у вигляді різниці початкових фаз відповідних гармонік. У той же час це ще не означає, що одній ВКФ може відповідати одна і тільки одна пара процесів.

Коефіцієнти ряду Фур'є (4.17) визначаються традиційно:

$$\frac{\overset{*}{A}_{m_1n} \overset{\bullet}{A}_{m_2n}}{2} = \frac{2}{T} \int_0^T K_{s_1s_2}(\tau) e^{jn\omega_1\tau} d\tau.$$

На відміну від автокореляційної функції ВКФ необов'язково досягає максимуму у випадку, коли $\tau = 0$. Можна показати, що для

4.3 Взаємні кореляційні функції періодичних процесів

будь-якого значення часового зсуву τ абсолютне значення ВКФ не перевищує середнього геометричного початкових значень АКФ двох процесів або сигналів: $|K_{s_1s_2}(\tau)| \leq \sqrt{K_{s_1}(0)K_{s_2}(0)}$.

Аналогічне співвідношення справедливе і для $K_{s_2s_1}(\tau)$.

Нормована взаємна кореляційна функція або коефіцієнт взаємної кореляції визначається таким співвідношенням:

$$R_{s_1s_2}(\tau) = r_{s_1s_2}(\tau) = \rho_{s_1s_2}(\tau) = \frac{K_{s_1s_2}(\tau)}{\sqrt{K_{s_1}(0)K_{s_2}(0)}}.$$

ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. ВКФ періодичних процесів, на відміну від АКФ, частково зберігає інформацію про їхню фазову структуру
2. Одна ВКФ може відповідати декільком парам процесів.



Треба вміти:

1. Визначати поняття: взаємна кореляційна функція
2. Записати умову дзеркальної симетрії для ВКФ.
3. Отримати ВКФ для різних періодичних процесів.



Слід запам'ятати:

1. Визначення понять: взаємна кореляційна функція, нормована ВКФ та коефіцієнт взаємної кореляції.
2. Умову дзеркальної симетрії для ВКФ:

$$K_{s_1s_2}(-\tau) = K_{s_2s_1}(\tau).$$

3. Взаємна кореляційна функція двох періодичних процесів із однаковим періодом є також періодичною з тим самим періодом.
- 4 ВКФ не задовольняють умову парної симетрії та залежать від того, до якого процесу застосовується операція зсуву.

4.4 Інтегральне перетворення Фур'є взаємної кореляційної функції періодичних процесів

За аналогією з АКФ інтегральне перетворення Фур'є взаємної кореляційної функції двох періодичних процесів (сигналів) (4.17) відповідно до його властивостей

$$S_{s_1 s_2}(\omega) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overset{*}{A_{m_1 n}} \overset{\bullet}{A_{m_2 n}} \delta(\omega - n\omega_1) \Rightarrow S_{s_1 s_2}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\overset{*}{A_{m_1 n}} \overset{\bullet}{A_{m_2 n}}}{4} \delta(f - nf_1)$$

є послідовністю спектральних складових у вигляді δ -імпульсів із частотами, кратними f_1 , та площами, які визначаються комплексними амплітудами процесів $s_1(t)$ та $s_2(t)$. У літературі за традицією $S_{s_1 s_2}(\omega)[S_{s_1 s_2}(f)]$ називають **взаємною спектральною щільністю потужності**. Однак така назва не є точною, оскільки потужність - величина дійсна, а добуток $\overset{*}{A_{m_1 n}} \overset{\bullet}{A_{m_2 n}}$ - комплексна.

Властивості коефіцієнтів комплексної форми ряду Фур'є визначають і деякі властивості взаємної спектральної щільності потужності двох періодичних процесів. Так, умова парності $\overset{*}{A_{m(-n)}} = \overset{\bullet}{A_{mn}}$ для коефіцієнтів призводить до такого співвідношення:
 $\overset{*}{A_{m_1 n}} \overset{\bullet}{A_{m_2 n}} = \overset{\bullet}{A_{m_1(-n)}} \overset{*}{A_{m_2(-n)}}$.

Отже,

- ◆ **для протилежних за знаком, але однакових за величиною, значень частоти значення взаємної спектральної щільності потужності є комплексно-спряженими величинами:**

$$S_{s_1 s_2}(f) = \overset{*}{S_{s_1 s_2}(-f)}. \quad (4.18)$$

Зважаючи на те, що $K_{s_1 s_2}(\tau) \leftrightarrow S_{s_1 s_2}(f)$, $K_{s_2 s_1}(-\tau) = \overset{*}{S_{s_2 s_1}(f)}$, а також з урахуванням властивості дзеркальної симетрії $K_{s_1 s_2}(\tau) = K_{s_2 s_1}(-\tau)$ та згідно з (4.18), дістанемо умову дзеркальної симетрії відносно взаємної спектральної щільності потужності:

$$S_{s_1 s_2}(f) = \overset{*}{S_{s_2 s_1}(f)} = S_{s_2 s_1}(-f). \quad (4.19)$$

4.3 Взаємні кореляційні функції періодичних процесів

- ◆ **Спектральні щільності потужності $S_{s_1s_2}(f)$ та $S_{s_2s_1}(f)$ для протилежних за знаком та однакових за величиною значень частоти є однаковими.**

Відповідно до визначення взаємної енергії та взаємної кореляційної функції початкове значення останньої

$$K_{s_1s_2}(0) = \frac{1}{T} \int_0^T s_1(t)s_2(t + \tau)dt = \frac{E_B / 2}{T} = P_{\text{ср.в}}$$

є середньою потужністю взаємодії двох періодичних процесів.
Згідно з оберненим інтегральним перетворенням Фур'є

4.4 Інтегральне перетворення Фур'є взаємної кореляційної функції періодичних процесів

$$K_{s_1s_2}(\tau)|_{\tau=0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{s_1s_2}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{s_1s_2}(f) df = P_{\text{ср.в.}} \quad (4.20)$$

◆ **Потужність взаємодії двох періодичних процесів на періоді визначається площею, обмеженою графіком їхньої взаємної спектральної щільності потужності.**

► **Приклад.** Взаємній кореляційній функції $K_{s_1s_2}(\tau)$ (4.15) гармонічних процесів $s_1(t) = A_{m1} \cos \omega_1 t$ та $s_2(t) = A_{m2} \sin \omega_1 t$ відповідає спектральна щільність потужності

$$S_{s_1s_2}(\omega) = -j \frac{\pi A_{m1} A_{m2}}{2} \delta(\omega - \omega_1) + j \frac{\pi A_{m1} A_{m2}}{2} \delta(\omega + \omega_1),$$

а ВКФ $K_{s_2s_1}(\tau)$ (4.16) процесів $s_2(t)$ та $s_1(t)$ взаємна спектральна щільність потужності

$$S_{s_2s_1}(\omega) = j \frac{\pi A_{m1} A_{m2}}{2} \delta(\omega - \omega_1) - j \frac{\pi A_{m1} A_{m2}}{2} \delta(\omega + \omega_1).$$

Отже, $S_{s_1s_2}(\omega) = S_{s_2s_1}^*(\omega) = S_{s_2s_1}(-\omega)$, що збігається з (4.19).

Початкове значення

$$\begin{aligned} K_{s_1s_2}(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{s_1s_2}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[-j \frac{\pi A_{m1} A_{m2}}{2} \delta(\omega - \omega_1) d\omega \right] + \\ &+ \frac{1}{2\pi} j \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi A_{m1} A_{m2}}{2} \delta(\omega + \omega_1) d\omega = -j \frac{A_{m1} A_{m2}}{2} + j \frac{A_{m1} A_{m2}}{2} = 0 = P_{\text{ср.в.}} \end{aligned}$$

Цей результат відповідає ортогональності гармонічних процесів $s_1(t)$ та $s_2(t)$.



ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. Інтегральне перетворення Фур'є ВКФ двох періодичних процесів є послідовністю δ -імпульсів із частотами, кратними основній, та площами, які визначаються комплексними амплітудами процесів.



Треба вміти:

1. Визначити поняття: взаємна спектральна щільність потужності періодичних процесів.

2. Записати умови парної та дзеркальної симетрії для взаємного спектра потужності.

3. Визначити взаємний спектр потужності періодичних процесів (сигналів).



Слід запам'ятати:

1. Визначення понять: взаємна спектральна щільність потужності періодичних процесів.

2. Умови парної

$$S_{s_1 s_2}(f) = S_{s_1 s_2}^*(-f)$$

та дзеркальної симетрії

$$S_{s_1 s_2}(f) = S_{s_2 s_1}^*(f) = S_{s_2 s_1}(-f).$$

для взаємного спектра потужності.

3. Початкове значення ВКФ є середньою потужністю взаємодії двох періодичних процесів.

4.5 Кореляційний аналіз неперіодичних процесів

Кореляційні властивості неперіодичних процесів, як і для періодичних, визначаються звичайними та нормованими авто- та взаємною кореляційними функціями.

Автокореляційна функція (АКФ) дійсного детермінованого неперіодичного процесу (сигналу) $s(t)$ є скалярним добутком процесу та його зсунутої копії

$$K_s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t-\tau)dt = (s(t)s(t-\tau)) \quad (4.21)$$

за умови зсуву копії праворуч на величину τ відносно початкового моменту часу $t=0$ або

$$K_s(\tau) = (s(t)s(t + \tau))$$

при зсуві тієї ж копії на таку саму величину зсуву ліворуч.

Якщо процес є комплексним, то його АКФ визначається за такою формулою:

$$K_s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) s^*(t - \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) s^*(t - \tau) dt, \quad (4.22)$$

де через $s^*(\cdot)$ позначено процес, комплексно-спряжений до $s(\cdot)$.

Згідно з (4.21) початкове значення функції автокореляції неперіодичного процесу або сигналу дорівнює його енергії:

$$K_s(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt. \quad (4.23)$$

Як відмічалось раніше, скалярний добуток двох детермінованих неперіодичних процесів визначає енергію їхньої взаємодії на заданому часовому інтервалі. Тоді, очевидно, що такий самий зміст мають миттєві значення кореляційної функції $K_s(\tau)$ стосовно процесу $s(t)$ та його копії $s(t + \tau)$ [$s(t - \tau)$]. Зрозуміло, що чим більше схожі процес та його зсунута копія на заданому часовому інтервалі, тим більшою є енергія взаємодії, а, отже, і відповідне значення кореляційної функції.

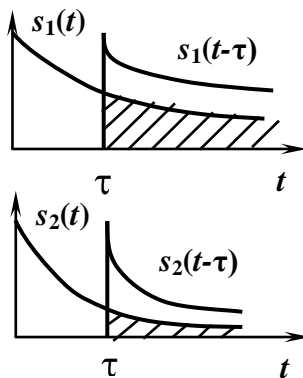


Рисунок 4.6 – До зв'язку динаміки процесу з кореляцією.

Ясно, що будь-який процес є найбільш схожим сам на себе, а зсунута копія і процес при зсуві $\tau=0$. Кажуть, що в цьому разі *об'єкти повністю корельовані або зв'язані лінійною залежністю*.

Таким чином, функція кореляції максимальна за зсуву $\tau=0$, тобто коли процес $s(t)$ повністю покриває свою відповідну копію $s(t \pm \phi)$ і її значення дорівнює енергії процесу. Із збільшенням зсуву τ , очевидно, копія $s(t \pm \phi)$ вже не буде повністю перекривати процес

$s(t)$ (див. рис. 4.2). Тому буде змінюватися енергія взаємодії та значення функції кореляції.

Можна припустити, що при зростанні τ процес $s(t)$ та його відповідна копія $s(t \pm \tau)$ будуть перекриватися все менше, буде зменшуватися їх енергія взаємодії та значення функції кореляції. Зрозуміло, що для фіксованого значення зсуву τ на значення кореляційної функції $K_s(\tau)$ (енергію взаємодії) впливає швидкість зміни в часі процесу (рис. 4.6). Швидкоплинним, а отже, короткотривалим процесам відповідають менші значення часового зсуву τ , в межах якого кореляційна функція відмінна від нуля, а, отже, вузла за тривалістю кореляційна функція.

- ◆ **Чим більше змінюється миттєве значення процесу, тим швидше змінюється і значення кореляційної функції $K_s(\tau)$, тим менше пов'язані (корельовані) миттєві значення процесу, що визначені в моменти часу, рознесені на величину τ .**

Згідно з (4.23) та формулою Релея (3.46) отримаємо співвідношення для обчислення початкового значення кореляційної функції неперіодичного процесу через енергетичний спектр:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S^2(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} W_s(\omega) d\omega = K_s(0). \quad (4.24)$$

- ◆ **Початкове значення функції автокореляції неперіодичного процесу визначається площею, обмеженою графіком квадрата модуля його спектральної щільності або енергетичного спектра.**

Функції автокореляції детермінованого неперіодичного процесу властиві всі раніше перелічені властивості АКФ періодичного процесу, за винятком властивості періодичності.

Залежно від виду процесу $s(t)$ його АКФ може бути як монотонно спадною, так і коливальною.

Тепер ще одне. Нехай $S(j\omega)$ є спектральною щільністю комплексних амплітуд процесу $s(t)$. Тоді, процесу $s(t - \tau)$ відповідає спектральна щільність $S(j\omega)e^{-j\omega\tau}$. Відповідно до відомого твер-

дження, що скалярному добутку детермінованих неперіодичних процесів відповідає скалярний добуток їх спектральних характеристик, дістанемо:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t-\tau)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) S^*(j\omega)d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)S(j\omega)e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega)e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_s(\omega)e^{j\omega\tau} d\omega .$$

Із урахуванням (4.21) приходимо до важливого результату:

$$K_s(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega)e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_s(\omega)e^{j\omega\tau} d\omega .$$

- ◆ **Енергетичний спектр процесу, а отже квадрат модуля спектральної характеристики та функція АКФ пов'язані інтегральним перетворенням Фур'є:**

$$K_s(\tau) \leftrightarrow S^2(\omega) = W_s(\omega) \tag{4.25}$$

У теорії процесів і сигналів перетворення (4.25) називають формулою Вінера-Хінчина. Ця формула принципово важлива з двох причин.

По-перше, вона дає змогу оцінити кореляційні властивості процесів, виходячи з розподілу їх енергії по частотному діапазону (за енергетичним спектром). Так, чим у ширшій смузі частот зосереджені більш енергетично значимі спектральні складові, тим менше тривалість функції автокореляції (у відповідності з принципом невизначеності), тобто тим менше τ , а, отже, інтервал часу, в межах якого АКФ відмінна від нуля. Це свідчить про більш широку можливість вимірювання моменту виникнення процесу.

Дійсно, чим швидше змінюється $K_s(\tau)$, тим більше відрізняються її миттєві значення, а отже і $K_s(0)$ та $K_s(\tau)$ для будь-якого τ , відмінного від нуля.

По-друге, формула (4.25) визначає, у який спосіб можна експериментально знайти енергетичний спектр. Часто зручніше спочатку визначити АКФ, а потім, використовуючи перетворення Фур'є, обчислити енергетичний спектр. Такий підхід знайшов широке поши-

рення під час дослідження властивостей процесів за допомогою ЕОМ у реальному вимірі часу.

У зв'язку з тим, що пряме перетворення Фур'є від АКФ $K_s(\tau)$ дає квадрат модуля $S^2(\omega)$ його спектральної щільності, то

- ◆ **АКФ неперіодичного процесу не містить інформації про його фазовий спектр, тобто фазові співвідношення між спектральними складовими. Знаючи спектральну щільність енергії процесу, ми можемо відтворити його тільки амплітудний спектр, проте відтворити фазовий спектр неможливо.**

Урахувавши вищезазначене, дійдемо висновку:

- ◆ **між АКФ та неперіодичним процесом не існує взаємно-однозначного зв'язку; одній АКФ можна поставити у відповідність різні процеси з однаковими амплітудними, але різними фазовими спектрами.**

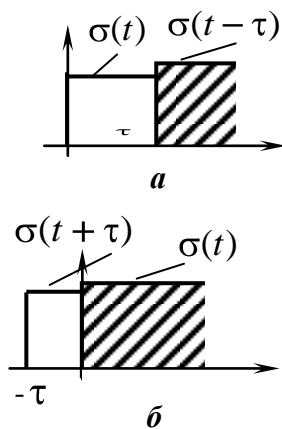


Рисунок 4.7 – Зсув копії процесу ліворуч (а) та праворуч (б).

► **Приклад.** Визначити АКФ та енергетичний спектр дійсного експонентного імпульсу $s(t) = Ae^{-\alpha t} \sigma(t)$.

Відповідно до означення АКФ обчислимо скалярний добуток $s(t) = Ae^{-\alpha t} \sigma(t)$ та його зсунутої копії $s(t - \tau) = Ae^{-\alpha(t-\tau)} \sigma(t - \tau)$:

$$K_s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-\alpha t} \sigma(t) Ae^{-\alpha(t-\tau)} \sigma(t - \tau) dt .$$

Зрозуміло, що добуток $\sigma(t)\sigma(t - \tau)$ залежить від значень τ . Якщо $\tau > 0$, то, очевидно (див. рис. 4.7, а):

$$\sigma(t)\sigma(t - \tau) = \begin{cases} \sigma(t - \tau), & t \geq \tau; \\ 0, & t < \tau. \end{cases}$$

Тоді

$$K_s(\tau) = \int_{\tau}^{\infty} A e^{-\alpha t} A e^{-\alpha(t-\tau)} dt = A^2 e^{\alpha\tau} \int_{\tau}^{\infty} e^{-2\alpha t} dt =$$

$$= -\frac{A^2 e^{\alpha\tau}}{2\alpha} e^{-2\alpha t} \Big|_{\tau}^{\infty} = \frac{A^2}{2\alpha} e^{-\alpha\tau}.$$

При $\tau < 0$ (див. рис. 4.7, б)

$$\sigma(t)\sigma(t-\tau) = \sigma(t)\sigma(t+\tau) = \begin{cases} \sigma(t), & t \geq 0; \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

а АКФ

$$K_s(\tau) = \int_0^{\infty} A^2 e^{-\alpha t} e^{-\alpha(t-\tau)} dt = A^2 e^{\alpha\tau} \int_0^{\infty} e^{-2\alpha t} dt = -\frac{A^2 e^{\alpha\tau}}{2\alpha} e^{-2\alpha t} \Big|_0^{\infty} = \frac{A^2}{2\alpha} e^{\alpha\tau}.$$

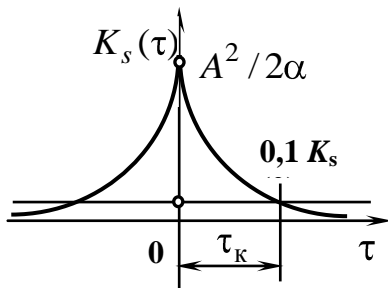


Рисунок 4.8 – Кореляційна функція дійсного експонентного імпульсу.

Об'єднавши ці співвідношення отримаємо формулу АКФ дійсного експонентного імпульсу для будь-яких значень τ :

$$K_s(\tau) = \frac{A^2}{2\alpha} e^{-\alpha|\tau|} \quad -\infty < \tau < \infty.$$

Графік АКФ зображено на рис. 4.8.

Зрозуміло, що для $\tau=0$ початкове значення АКФ $K_s(0) = A^2/2\alpha$ визначає енергію заданого процесу. Можна показати, якщо $\tau = 2,3\alpha$, то миттєве значення АКФ вдесятеро менше за початкове. Таке значення аргументу прийнято називати *інтервалом кореляції* за рівнем 0,1.

Пронормувавши АКФ за її максимальним значенням $K_s(0)$, дістанемо нормовану АКФ (коефіцієнт автокореляції) заданого імпульсу: $R_s(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$.

Спектральна щільність енергії дійсного експонентного імпульсу як перетворення Фур'є від його АКФ

$$\begin{aligned}
 W_s(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_s(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{A^2}{2\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau|} e^{-j\omega\tau} d\tau = \\
 &= \int_{-\infty}^0 e^{\alpha\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{1}{\alpha - j\omega} e^{(\alpha - j\omega)\tau} \Big|_{-\infty}^0 - \\
 &- \frac{1}{\alpha + j\omega} e^{-(\alpha + j\omega)\tau} \Big|_0^{\infty} = \left(\frac{1}{\alpha - j\omega} + \frac{1}{\alpha + j\omega} \right) \frac{A^2}{2\alpha} = \frac{A^2}{\alpha^2 + \omega^2} = S^2(\omega).
 \end{aligned}$$

■

Інтервал кореляції. Наведені раніше міркування показують, що миттєві значення АКФ як періодичного (на періоді), так і неперіодичного процесів (сигналів) із збільшенням значення аргументу (величини зсуву) зменшуються або монотонно, або коливально. Це, як відмічалось, є ознакою зменшення кореляційного зв'язку між миттєвими значеннями процесу (сигналу). Очевидно, що існує певне значення τ , за якого кореляційна функція або дорівнює нулю, або приймає значення, близькі, у певному розумінні, до нуля.

◆ **Інтервал кореляції τ_k** – це таке значення аргументу КФ, за якого миттєві значення одного або двох різних досліджуваних процесів у неспівпадаючі моменти часу є некорельованими величинами.

Теоретично встановлено, що некорельованість відповідає нульовому значенню нормованої КФ, а повна (лінійний функціональний зв'язок) - одиниці. Точне значення інтервалу кореляції можна визначити тільки для **фінітних** функцій, які відмінні від нуля в кінцевому діапазоні значень її аргументу (на зразок прямокутного відеоімпульсу). Тому в практичних застосуваннях інтервал кореляції обчислюють на основі певних критеріїв.

Так, згідно з **критерієм рівня** за інтервал кореляції τ_k беруть таке значення τ , для якого КФ не перевищує деякого попередньо заданого значення $\varepsilon < 1$: $\rho(\tau) \leq \varepsilon$, для $\tau \geq \tau_k$. Значення ε , які використовуються найчастіше такі: 0,05; 0,01; 0,1. Графічна ілюстрація такого підходу подана на рис. 4.9, а. Проте такий підхід є коректним

4.5 Кореляційний аналіз періодичних процесів

для неколивальних КФ. Якщо ж КФ має коливальний характер, то рівень ε відноситься до її обвідної (рис. 4.9, б).

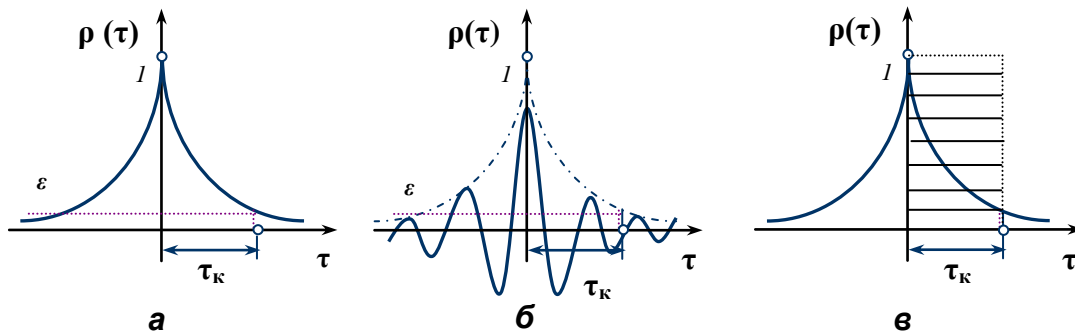


Рисунок 4.9 - Визначення інтервалу кореляції: а - за рівнем для неколивальної КФ; б - за рівнем для коливальної КФ; в - за інтегральним критерієм.

Відповідно до **інтегрального критерію** за інтервал кореляції беруть основу прямокутника, висота якого дорівнює одиниці, тобто максимальному значенню нормованої КФ $\rho(0)$, а площа збігається з площею, обмеженою графіком монотонної КФ та додатними напівосями координат (рис. 4.9, в):

$$\tau_k = \int_0^{\infty} \rho(\tau) d\tau.$$

Для коливальної КФ використовують абсолютний коефіцієнт кореляції

$$\tau_{a.k} = \int_0^{\infty} |\rho(\tau)| d\tau.$$

► **Приклад.** *Визначити функцію автокореляції процесу з рівномірним та обмеженим за частотою енергетичним спектром (рис. 4.10, а).*

Енергетичний спектр заданого процесу описується таким співвідношенням:

$$W_s(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < -\omega_0; \\ \omega_0, & -\omega_0 \leq \omega \leq \omega_0; \\ 0, & \omega > \omega_0. \end{cases}$$

АКФ знайдемо як зворотне перетворення Фур'є від енергетичного спектра:

$$K_s(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_s(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_0 e^{j\omega\tau} d\omega =$$

$$= \frac{W_0}{2\pi} \frac{1}{j\tau} (e^{j\omega_0\tau} - e^{-j\omega_0\tau}) = \frac{W_0}{\pi\tau} \sin \omega_0\tau = \frac{W_0\omega_0}{\pi} \frac{\sin \omega_0\tau}{\omega_0\tau}.$$

Таким чином, АКФ процесу, що розглядається, має пелюстковий вигляд (див. рис. 4.10, б) із нулями в точках $\tau_k = \pi k / \omega_0$ ($k = 1, 2, 3, 4, \dots$) = $k / (2f_0)$.

Відомо, що тривалість АКФ процесу і сигналу ототожнюють з інтервалом кореляції. Для отриманого виду АКФ, як правило, за такий інтервал беруть тривалість першої пелюстки: $\tau_k = 1 / (2f_0)$

Відповідно до принципу невизначеності добуток ширини спектра на тривалість $\Delta f_{сп} \Delta t = f_0 (1 / 2f_0) = 1 / 2$.

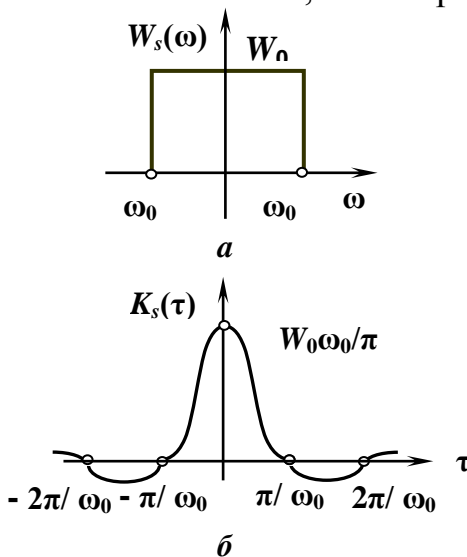


Рисунок 4.10 – Рівномірний спектр (а) та відповідна кореляційна функція (б).

Обмеження, що накладаються на АКФ. Взаємозв'язок між АКФ та

енергетичним спектром дає змогу встановити важливий критерій існування процесу з заданими кореляційними властивостями. Розглянемо АКФ

$$K_s(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < -\tau_k; \\ A, & -\tau_k \leq \tau \leq \tau_k; \\ 0, & \tau > \tau_k. \end{cases} \quad (4.26)$$

Енергетичний спектр, що відповідає цій АКФ, а отже амплітудний спектр деякого процесу, обчислимо як пряме перетворення Фур'є:

$$W_s(\omega) = \int_{-\tau_0}^{\tau_0} A e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{2A}{\omega} \sin \omega\tau_0 = 2A\tau_0 \frac{\sin \omega\tau_0}{\omega\tau_0} = S^2(\omega).$$

Зважаючи на те, що квадрат модуля $S^2(\omega)$, а отже і енергія процесу або сигналу, є величинами додатними, отримана знаковмін-

на функція не може бути енергетичним спектром будь-якого процесу.

Інакше,

◆ не існує процесу, кореляційні властивості якого визначаються постійною або рівномірно розподіленою в усьому інтервалі кореляції АКФ.

Це ще раз підтверджує відомий факт, що АКФ неперіодичного процесу для значень $\tau \neq 0$ не може перевищувати її початкове значення $K_s(0)$, яке визначає повну енергію процесу.

Взаємнокореляційна функція. Для двох різних неперіодичних процесів $s_1(t)$ та $s_2(t)$ взаємна кореляційна функція (ВКФ) є їхнім скалярним добутком:

$$K_{s_1s_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2(t+\tau)dt \quad (4.27)$$

- для дійсних процесів;

$$\begin{aligned} K_{s_1s_2}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2^*(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2^*(t+\tau)dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(t+\tau)dt \end{aligned} \quad (4.28)$$

- для комплексних процесів.

Очевидно, що наведені раніше властивості для ВКФ періодичних процесів справедливі і для неперіодичних, за виключенням властивості періодичності.

Раніше було встановлено, що скалярний добуток процесів є пропорційним скалярному добутку їхніх спектральних щільностей:

$$\begin{aligned} (s_1s_2) &= \frac{1}{2\pi} (s_1(j\omega) s_2^*(j\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{s_1s_2}(\omega)d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\omega)S_2(\omega) \cos(\alpha_1 - \alpha_2)d\omega. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Застосувавши цей результат тепер вже для процесів $s_1(t)$ та $s_{2\tau}(t) = s_2(t - \tau)$, дістанемо:

$$K_{s_1s_2}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(j\omega) S_{2\tau}^*(j\omega) d\omega.$$

Враховуючи, що спектральна щільність зсунутого в часі процесу $S_{2\tau}(j\omega) = S_2(j\omega)e^{-j\omega\tau}$, дістанемо:

$$K_{s_1s_2}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(j\omega) S_2^*(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{s_1s_2}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega, \quad (4.30)$$

де $W_{s_1s_2}(\omega)$ - взаємний енергетичний спектр двох наперіодичних процесів.

Таким чином,

- ♦ **взаємна кореляційна функція двох процесів та їхній взаємний енергетичний спектр пов'язані парю перетворень Фур'є:**

$$W_{s_1s_2}(\omega) \leftrightarrow K_{s_1s_2}(\tau).$$

Очевидно, що для $\tau = 0$ значення ВКФ $K_{s_1s_2}(0)$ визначає повну енергію взаємодії двох процесів. Слід звернути увагу і на таке: як і для періодичних суттєвим є порядок запису співмножників при визначенні ВКФ неперіодичних процесів $s_1(t)$ та $s_2(t)$, оскільки $K_{s_1s_2}(\tau) \neq K_{s_2s_1}(\tau)$.

Для взаємної кореляційної функції неперіодичних процесів справджується також властивість дзеркальної симетрії: $K_{s_1s_2}(\tau) = K_{s_2s_1}(-\tau)$. Ця властивість накладає певні вимоги на взаємні енергетичні спектри двох процесів:

$$W_{s_1s_2}(\omega) = W_{s_2s_1}^*(\omega), \quad (4.31)$$

тобто ВКФ $K_{s_1s_2}(\tau)$ та $K_{s_2s_1}(\tau)$ відповідають комплексно-спряжені пари взаємних енергетичних спектрів $W_{s_1s_2}(\omega)$ та $W_{s_2s_1}(\omega)$:

$$\begin{aligned}
 K_{s_2s_1}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t-\tau)s_2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{1\tau}(j\omega) S_2^*(j\omega)d\omega = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(j\omega) S_2^*(j\omega)e^{-j\omega\tau}d\omega = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{s_1s_2}(\omega)e^{-j\omega\tau}d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{s_2s_1}(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{s_1s_2}^*(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega.
 \end{aligned}$$

Що і підтверджує співвідношення (4.31).

Як впливає з (4.29) ВКФ, на відміну від АКФ, залежить і від фазової структури процесів $s_1(t)$ та $s_2(t)$. І за таких умов одній і тій самій ВКФ може відповідати декілька пар неперіодичних процесів.

► **Приклад.** Визначити ВКФ процесів із моделями у вигляді прямокутного та експонентного відеоімпульсів. Амплітуда імпульсів A , а їхня тривалість $t_{\text{імп}}$.

У разі якщо $0 \leq t \leq t_{\text{імп}}$ задані процеси описуються такими функціями: $s_1(t) = A$; $s_2(t) = Ae^{-\alpha t}$.

Для значень $\tau > 0$ процес $s_2(t)$ є затриманим відносно процесу $s_1(t)$. Тоді ВКФ

$$\begin{aligned}
 K_{s_1s_2}(\tau) &= \int_0^{t_{\text{імп}}} AAe^{-\alpha(t-\tau)}dt = A^2 e^{\alpha\tau} \int_{\tau}^{t_{\text{імп}}} e^{-\alpha t} dt = \\
 &= -\frac{A^2 e^{\alpha\tau}}{\alpha} e^{-\alpha t} \Big|_{\tau}^{t_{\text{імп}}} = \frac{A^2 e^{\alpha\tau}}{\alpha} (e^{-\alpha\tau} - e^{-\alpha t_{\text{імп}}}) = \frac{A^2}{\alpha} (1 - e^{-\alpha(t_{\text{імп}} - \tau)}).
 \end{aligned}$$

Якщо ж $\tau < 0$, то тоді експонентний імпульс випереджає прямокутний, і ВКФ визначається таким співвідношенням:

$$\begin{aligned}
 K_{s_1s_2}(\tau) &= \int_0^{t_{\text{імп}} - |\tau|} AAe^{-\alpha(t-|\tau|)}dt = -\frac{A^2 e^{\alpha|\tau|}}{\alpha} e^{-\alpha t} \Big|_0^{t_{\text{імп}} - |\tau|} = \\
 &= \frac{A^2 e^{\alpha|\tau|}}{\alpha} (1 - e^{-\alpha(t_{\text{імп}} - |\tau|)}).
 \end{aligned}$$

Очевидно, що аналогічний результат можна було б отримати через взаємний енергетичний спектр, використавши спектральні щільності комплексних амплітуд експонентного та прямокутного відеоімпульсів:

$$\begin{aligned}
 W_{s_1 s_2} &= S_1(j\omega) S_2^*(j\omega) = \frac{A}{j\omega} (e^{j\omega t_{\text{имп}}} - 1) \frac{A}{\alpha - j\omega} \leftrightarrow \\
 \leftrightarrow K_{s_1 s_2}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{j\omega} (-e^{-j\omega t_{\text{имп}}} + 1) \frac{A}{\alpha - j\omega} e^{j\omega\tau} d\omega = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{j\omega} \frac{A}{\alpha - j\omega} e^{-j\omega(t_{\text{имп}} - \tau)} d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{j\omega} \frac{A}{\alpha - j\omega} e^{j\omega\tau} d\omega.
 \end{aligned}$$



ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. Чим більше змінюється миттєве значення процесу, тим швидше змінюється і значення АКФ, тим менше зв'язані (корельовані) миттєві значення процесу, визначені в неспівпадаючі моменти часу.

2. Знаючи спектральну щільність енергії процесу, ми можемо відтворити тільки його амплітудний спектр

3. Чим у ширшій смузі частот зосереджені більш енергетично значимі спектральні складові, тим менше тривалість функції автокореляції.

4. Не існує процесу, кореляційні властивості якого визначаються постійною або рівномірно розподіленою в усьому



Слід запам'ятати:

1. Визначення понять: автокореляційна та взаємна кореляційна функції, енергетичний і взаємний енергетичний спектр неперіодичних процесів і сигналів, інтервал кореляції.

2. АКФ неперіодичного процесу не містить інформації про його фазовий спектр. Певній АКФ можна поставити у відповідність різні процеси з однаковими амплітудними, але різними фазовими спектрами.

4. АКФ неперіодичного процесу та ВКФ двох неперіодичних процесів та їхні енергетичні спектри пов'язані парою інтегральних перетворень Фур'є.

6. Початкове значення АКФ неперіодичного процесу визначає їхню енергію, а ВКФ – повну

інтервалі кореляції АКФ.

енергію взаємодії двох процесів.



Треба вміти:

1. Визначати поняття: автокореляційна та взаємна кореляційна функція, енергетичний і взаємний енергетичний спектр неперіодичних процесів і сигналів, інтервал кореляції.

2. Розв'язувати задачі на визначення кореляційних функцій та інтервалу кореляції неперіодичних процесів і сигналів різними методами

4.6 Завдання для поточного тестування

4.6.1 Питання для поточного контролю

- Що таке кореляція?
- Назвіть основні види кореляційних функцій.
- Наведіть структурну схему радіолокаційної системи.
- Від чого залежить ступінь кореляційного зв'язку?
- Дайте визначення авто- та взаємнокореляційної функції періодичних та неперіодичних процесів.
- Поясніть фізичний зміст АКФ періодичного та неперіодичного процесів і сигналів.
- Який вигляд має АКФ гармонічного коливання?
- Чому дорівнює амплітуда, частота та початкова фаза АКФ гармонічного коливання?
- Чи впливають на АКФ початкові фази гармонік періодичного процесу?
- Що визначає початкове значення АКФ періодичного та неперіодичного процесу?

- Поясніть, які із співвідношень справджуються для АКФ періодичного процесу: а) $K_s(-\tau) = K_s(\tau)$; б) $K_s(-\tau) = K_s(\tau + T)$; в) $K_s(\tau) = K_s(\tau + T)$?
- Сформулюйте алгоритм визначення АКФ періодичного процесу графічним методом.
- У яких межах змінюються значення нормованої кореляційної функції періодичного процесу?
- Запишіть співвідношення, яке визначає взаємозв'язок між спектральною щільністю потужності періодичного процесу та АКФ.
- Запишіть умову дзеркальної симетрії для ВКФ.
- Вкажіть, які із співвідношень справджуються для ВКФ процесів: а) $K_{s_1s_2}(-\tau) = K_{s_1s_2}(\tau)$; б) $K_{s_1s_2}(\tau) = K_{s_2s_1}(\tau)$; в) $K_{s_1s_2}(\tau) = K_{s_2s_1}(-\tau)$?
- Фізичний зміст ВКФ періодичних процесів.
- Запишіть формули для середньої потужності періодичного процесу через характеристики АКФ.
- Покажіть, що ВКФ періодичних процесів визначається як амплітудами, так і початковими фазами гармонік.
- Якого максимального значення набуває ВКФ процесів?
- Поясніть як пов'язані динамічні властивості процесу або сигналу із швидкістю зміни значень кореляційної функції.
- Запишіть формулу для визначення початкового значення КФ неперіодичного процесу через енергетичний спектр.
- Що таке енергетичний спектр неперіодичного процесу та як він пов'язаний із АКФ?
- Що таке взаємний енергетичний спектр двох неперіодичних процесів та як він пов'язаний із ВКФ?
- Поясніть у чому полягає практична значимість теореми Вінера-Хінчина.
- Дайте визначення інтервалу кореляції.
- У чому полягають методи визначення інтервалу кореляції за критерієм рівня та інтегральним критерієм.

- Чи існують реально процеси кореляційні властивості яких подаються сталими або рівномірно розподіленими АКФ?
- Яку умову задовольняють взаємні енергетичні спектри неперіодичних процесів?

4.6.2 Задачі для індивідуального та самотійного розв'язування

1. Визначити АКФ дійсного періодичного процесу $s(t) = 100 \sin \omega t + 40 \cos 2\omega t$.

2. Для періодичного процесу

$$s(t) = 80 \cos \omega_1 t + 60 \cos 2\omega_1 t - 15 \cos 3\omega_1 t - 12 \cos 4\omega_1 t + 100 \sin \omega_1 t - 20 \sin 2\omega_1 t + 30 \sin 3\omega_1 t - 8 \sin 4\omega_1 t.$$

3. Подати рядом Фур'є в тригонометричній, амплітудно-фазовій та комплексній формах його АКФ.

4. Визначити середню потужність періодичного процесу, АКФ якого $K(\tau) = 100 \sin \omega_1 \tau + 30 \sin 2\omega_1 \tau$.

5. Для детермінованих процесів $s_1(t) = 10 \cos 100t + 5 \cos 200\pi t$ і $s_2(t) = 100 \cos 700\pi t - 30 \sin 2100\pi t$ визначити енергію взаємодії процесів за ВКФ.

6. Визначити АКФ пилкоподібного коливання, зображеного на рис. 2.8.

7. Як зміниться початкове значення АКФ імпульсної послідовності прямокутної форми, якщо: а) період T збільшити до 200 мкс; б) тривалість імпульсу $t_{\text{имп}}$ зменшити до 10 мкс; в) амплітуду імпульсу U_m збільшити до 40 В? Дано: $U_m = 20$ В, $t_{\text{имп}} = 20$ мкс, $T = 100$ мкс.

8. Як зміняться амплітуди спектральних складових АКФ періодичної послідовності відеоімпульсів при збільшенні її шпаруватості?

9. За АКФ визначити, як співвідносяться потужності періодичних послідовностей прямокутних та трикутних відеоімпульсів із однаковими тривалістю імпульсу $t_{\text{имп}}$, періодом T і шпаруватістю Q ?

10. Визначити потужність періодичного процесу, якщо початкове значення його АКФ становить 10 Вт, а шпаруватість послідовності дорівнює 2.

11. Визначити аналітично спектральну щільність потужності періодичної послідовності імпульсів, АКФ якої зображена на рис. 4.4, з відомими періодом T , тривалістю імпульсу $t_{\text{имп}}$ та шпаруватістю Q .

12. Визначити аналітично ВКФ двох гармонічних процесів однакової частоти $s_1(t) = A_{m1} \cos(\omega_1 t + \pi/4)$ та $s_2(t) = A_{m2} \sin(\omega_1 t + \pi/2)$.

13. Визначити аналітично взаємний енергетичний спектр потіжності двох гармонічних процесів однакової частоти $s_1(t) = A_{m1} \cos(\omega_1 t + \pi/4)$ та $s_2(t) = A_{m2} \sin(\omega_1 t - \pi/2)$, визначивши попередньо їхню ВКФ.

14. Визначити АКФ та енергетичний спектр двостороннього дійсного експонентного імпульсу $s(t) = A_m e^{-\alpha|t|}$.

15. Визначити ВКФ процесів із моделями у вигляді експонентного відеоімпульсів. Амплітуда імпульсів A , а їхня тривалість $t_{\text{имп}}$.

16. Визначити ефективну та активну ширину спектральної щільності потужності періодичної послідовності прямокутних імпульсів, якщо період $T = 20$ мкс, тривалість імпульсу $t_{\text{имп}} = 10$ мкс, а амплітуда $S_m = 5$ В.

17. Визначити аналітично інтервал кореляції за критерієм рівня 0,5 для прямокутного відеоімпульсу.

18. Визначити аналітично інтервал кореляції за енергетичним критерієм для дійсного експонентного імпульсу.

19. Визначити аналітично інтервал кореляції за інтегральним критерієм для двостороннього експонентного відеоімпульсу.

20. Кореляційна функція неперіодичного процесу $s(t)$ описується виразом $K_s(\tau) = A^2 e^{-\alpha|\tau|}$. Визначити енергію цього процесу та його амплітудний спектр.

21. Визначити автокореляційну функцію та спектральну щільність енергії періодичного процесу

$$s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin(\omega_n t + \alpha_n)$$

22. Визначити ширину спектра процесу, автокореляційна функція якого $K_s(\tau) = A^2 e^{-\alpha|\tau|}$.

23. Визначити, чи може бути кореляційною функція $K_s(\tau) = A^2 e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$, ($\omega_0 \gg \alpha$).

24. Автокореляційна функція процесу $K_s(\tau) = A^2 e^{-\alpha|\tau|}$. Визначити інтервал кореляції та енергетичний спектр процесу.

25. Визначити, чи є для деякого процесу автокореляційною функція

$$K_s(\tau) = (\alpha^2 + \omega_0^2) A^2 e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 |\tau| \right) ?$$

26. Автокореляційна функція процесу $K_s(\tau) = \sum_{i=1}^n A_i^2 \cos \omega_i \tau$. Визначити енергетичний спектр процесу та ефективну ширину його спектра.

5 Модульовані процеси

5.1 Модуляція як вид перетворення процесів

Матеріальним втіленням інформації є **повідомлення**: текст, зображення на екрані монітора, звучання сирени, кодова комбінація, таблиця даних тощо. Для передачі повідомлення за певною адресою необхідне однозначне його відображення найчастіше яким-небудь фізичним процесом. Результат такого відображення - **сигнал**: електричний, світловий, тепловий, звуковий тощо. Продукт безпосереднього перетворення повідомлення в сигнал часто називають **первинним сигналом**. Але ефективна, економічна та надійна передача інформації до адресата через відповідне середовище (*лінію зв'язку, виту пару проводів, коаксіальний кабель, оптичне волокно, атмосферу* тощо) можлива тільки з використанням таких перетворень, як **модуляція** та **кодування**.

Модуляція - один із видів *фізичного кодування*, за якого повідомлення подається (кодується) зміною (модуляцією) параметрів певного носійного коливання (**носія**) за законом первинного сигналу. Змінювані параметри носія називають **інформативними**.

Загальні принципи модуляції. У перетворенні на зразок модуляція будь-якого виду беруть участь загалом дві величини. Одна з них містить в собі інформацію, що передається, є низькочастотним коливанням $s_M(t) = s_{НЧ}(t)$ і називається **модулювальним коливанням**. Друга є додатковою величиною та високочастотним і називається **носійним (модульованим) коливанням**.

Математична модель носійного коливання

$$s_{НОС}(t) = f(t; a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = s_{ВЧ}(t)$$

є такою, що завжди можна виділити деяку сукупність параметрів $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, які визначають властивості цього коливання, зокрема, його форму. Якщо хоча б один із параметрів носійного коливання змінюється під дією модулювального (низькочастотного), то носійне коливання отримує нову властивість – тепер воно стає носієм інформації.

♦ Процес керування параметрами носійного коливання називається модуляцією.

Як носії найчастіше використовують постійні стани (рис. 5.1, а), високочастотні гармонічні коливання (рис. 5.1, б) та імпульсні послідовності (рис. 5.1, в).

Для будь-якого повідомлення модуляцію на основі гармонічного носія прийнято називати **аналоговою**, а послідовності імпульсів - **імпульсною**.

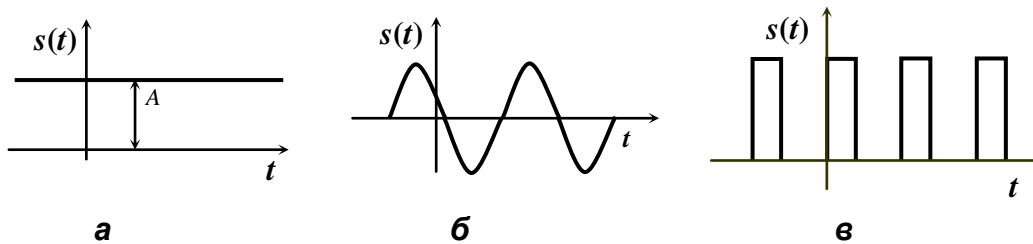


Рисунок. 5.1. - Види носіїв: а - постійний; б - гармонічне коливання; в - послідовність імпульсів.

У інформаційних системах (системах зв'язку, радіомовлення і телебачення тощо) дуже часто в якості носійного використовують гармонічне високочастотне коливання $s(t) = S_m \cos(\omega_{\text{вч}}t + \alpha_{\text{вч}})$, у якому можна змінювати амплітуду S_m , частоту ω та початкову фазу φ . Змінюючи амплітуду, отримуємо **амплітудно-модульований (АМ-) процес** (рис. 1.19, а) із інформативним параметром амплітудою; частоту - **частотно-модульований (ЧМ-) процес** (рис. 1.19, б), інформативний параметр - частота; початкову фазу – **фазомодульований (ФМ-) процес** (рис. 1.19, в), інформативний параметр – початкова фаза.

АМ і ЧМ є різновидом кутової модуляції (КМ).

При імпульсній модуляції роль носійного високочастотного коливання зазвичай виконує імпульсна послідовність прямокутних відеоімпульсів (див. рис. 5.1, в):

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi(t - t_k); \quad \phi(t - t_k) = \begin{cases} S_m, & t_k \leq t \leq t_k + t_{\text{имп}}; \\ 0, & t_k + t_{\text{имп}} < t \leq t_k + T, \end{cases}$$

де $t_k = kT$, T - період послідовності; $t_{\text{имп}}$ - тривалість імпульсу.

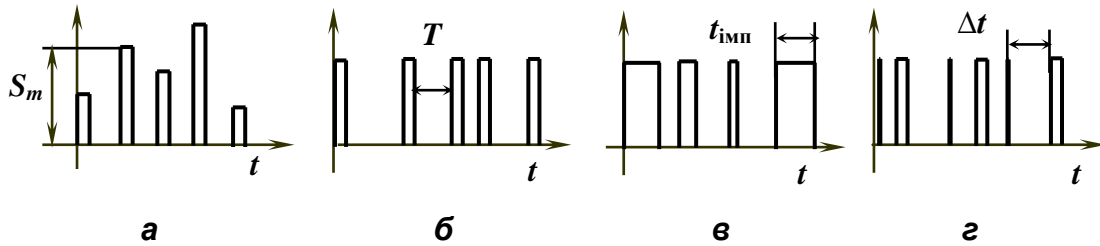


Рисунок 5.2. - Різновиди імпульсної модуляції: а - АІМ; б - ЧІМ; в - ШІМ; г - ФІМ

Розрізняють такі види імпульсної модуляції:

АІМ - амплітудно-імпульсна модуляція (рис. 5.2, а); інформативний параметр - амплітуда імпульсу S_m ;

ЧІМ - частотно-імпульсна модуляція (рис. 5.2, б); інформативний параметр - частота імпульсів $f_T = 1/T$;

ШИМ - широтно-імпульсна модуляція (рис. 5.2, в); інформативний параметр - тривалість імпульсу $t_{\text{имп}}$;

ФІМ - фазо-імпульсна (рис. 5.2, г) або інтервально-імпульсна модуляція; інформативний параметр - відстань Δt між першим (опорним, тактовим) і другим (інформаційним) імпульсами для кожного періоду. Таким чином, при ФІМ лінією зв'язку потрібно передавати як інформаційний, так і тактовий імпульси;

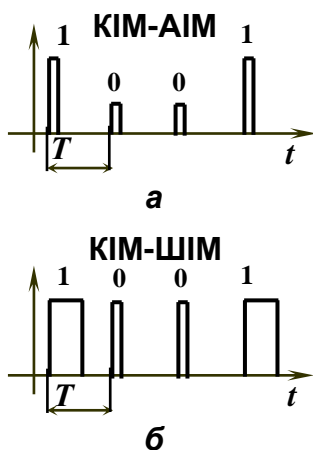


Рисунок 5.3. - Приклади КІМ-сигналів.

КІМ - кодо-імпульсна модуляція.

Відмітимо, що КІМ не вважається окремим видом модуляції, оскільки поєднує в собі будь-який вид зміни інформативного параметра імпульсного носія відповідно до коду, що є результатом **цифрового кодування** повідомлення (зазвичай двійковими чи двійково-десятковими кодами).

Отже, при КІМ спочатку кожне повідомлення оцифровується, тобто подається, наприклад, двійковим кодом певної розрядності (результат оцифровки одного елемента повідомлення називають **ковою групою**). Потім різні елементи кодової групи відображаються зміною певного параметра імпульсного носія. На рис. 5.3 зображені кодоімпульсні сигнали для елемента повідомлення, поданого чотирирозрядним двійковим кодом 1001 при відображенні двох різних елементів коду "1" та "0" зміною амплітуди імпульсної послідовності (рис. 5.3, а) та зміною її тривалості (рис. 5.3, б). У

5.1 Модуляція як вид перетворення процесів

першому випадку маємо кодоімпульсний сигнал із АМ (скорочено КІМ-АІМ), а у другому - кодоімпульсний сигнал із ШІМ (КІМ-ШІМ).

Таким чином, невід'ємними операціями КІМ є квантування за рівнем і дискретизація в часі. Інші види модуляції на основі імпульсного носія ведуть тільки до дискретних у часі відліків. При аналоговій модуляції зберігається неперервна структура повідомлення.

Необхідно звернути увагу і на те, що ШІМ і ФІМ є частковими випадками імпульсно-часової модуляції (ІЧМ) з різними варіантами її практичної реалізації (симетрична та ациклічна модуляції). Інформативним параметром ШІМ-сигналів може бути не тільки тривалість імпульсу, а і тривалість паузи. Період послідовності T є незмінним.

Багатоваріантність характерна і для АІМ. Так, АІМ-1 передбачає модуляцію амплітуди прямокутного імпульсу на відрізку його тривалості (модуляцію вершини) за законом модулюючої функції, а у разі АІМ-2 вершина імпульсу в зазначених межах є сталою.

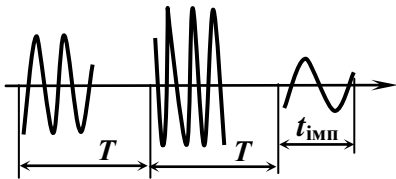


Рисунок 5.4 - АІМ-ЧМ – сигнал.

Використання як носія періодичної послідовності радіоімпульсів із гармонічним високочастотним заповненням дає змогу реалізувати модуляцію як параметрів відео-імпульсу, так і гармонічного заповнення. Наприклад, АІМ-ЧМ (див. рис. 5.4) - це процес, у якому модулюється амплітуда імпульсу та частота його гармонічного заповнення; ШІМ-ФМ - тривалість імпульсу та початкова фаза заповнення.

Слід відмітити, що і модульовальне (низькочастотне) коливання, може мати різноманітний характер зміни в часі, зокрема як дискретний (імпульсний), так і неперервний. У той же час необхідно чітко уявляти, що в будь-якій системі модуляції для її надійної роботи частоти модульованого та модулюючого коливань не є довільними, а задовольняють таку умову:

- **максимальна частота в спектрі носійного коливання $f_{\text{max.нос}}$ повинна бути набагато більшою за максимальну частоту $f_{\text{max.нч}}$ в спектрі низькочастотного коливання.**

Так, при передаванні телевізійними системами об'єктів, що рухаються, смуга частот повідомлення досягає 6,5 МГц, однак і носійна частота вибирається не меншою за 50...60 МГц, так що відношення

$f_{\max.нч} / f_{\max.вч}$ не перевищує 10%. Так, для першого телевізійного каналу для сигналу зображення $f_{\text{нос.зобр}} = 49,75$ МГц і звуку $f_{\text{нос.зв.супр.}} = 56,25$ МГц, а вже для тридцять п'ятого каналу - $f_{\text{нос.зобр}} = 583,25$ МГц, $f_{\text{нос.зв.супр.}} = 589,75$ МГц.

ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. Ефективна, економічна та надійна передача інформації до адресата через відповідне середовище можлива тільки з використанням таких перетворень, як модуляція та кодування.

2. Кодоімпульсна модуляція не вважається окремим видом модуляції, оскільки поєднує в собі будь-який вид зміни інформативного параметра імпульсного носія відповідно до коду, що є результатом цифрового кодування повідомлення.

3. Якщо хоча б один із параметрів носійного коливання змінюється під дією модулювального, то носійне коливання отримує нову властивість – воно стає носієм інформації



Слід запам'ятати:

1. Визначення понять: модуляція, аналогова та імпульсна модуляція, модулювальне та носійне коливання, інформативний параметр.

2. Основні види носійних коливань.

3. Класичні різновиди аналогової та імпульсної модуляції.

4. Невід'ємними операціями КІМ є квантування за рівнем і дискретизація в часі. Інші види модуляції на основі імпульсного носія ведуть тільки до дискретних у часі відліків.

5. У будь-якій системі модуляції для її надійної роботи максимальна частота в спектрі носійного коливання повинна бути набагато більшою за максимальну частоту в спектрі модулювального коливання.



Треба вміти:

1. Визначати поняття: модуляція, аналогова та імпульсна модуляція, модулювальне та носійне коливання, інформативний параметр.

2. Пояснити особливості кодоімпульсної модуляції.

5.2 Амплітудно-модульовані процеси

5.2.1 Математична модель та основні параметри

Будемо вважати, що для передавання інформації в якості носійного застосовують високочастотне гармонічне коливання

$$s_{\text{НОС}}(t) = S_{m0} \cos(\omega_{\text{ВЧ}}t + \varphi_{\text{ВЧ}}). \quad (5.1)$$

Якщо за законом повідомлення, що передається, модулюється амплітуда S_{m0} , а частота $\omega_{\text{ВЧ}}$ та початкова фаза $\varphi_{\text{ВЧ}}$ не змінюються, то маємо амплітудну модуляцію носійного коливання, а результуюче коливання є амплітудно-модульованим сигналом.

Форма аналітичного опису АМ-процесу в загальному випадку може бути подана у такому вигляді:

$$s_{\text{АМ}}(t) = S_m(t) \cos(\omega_{\text{ВЧ}}t + \varphi_{\text{ВЧ}}). \quad (5.2)$$

Відповідно до структури формули (5.2) АМ-процес є добутком обвідної $S_m(t)$ та гармонічного заповнення $\cos(\omega_{\text{ВЧ}}t + \varphi_{\text{ВЧ}})$. У більшості практичних застосувань обвідна змінюється набагато повільніше гармонічного заповнення.

При звичайній АМ-модуляції взаємозв'язок між обвідною $S_m(t)$ та модулювальним процесом $s_{\text{НЧ}}(t)$ визначається такою формулою:

$$S_m(t) = S_{m0}(1 + Ms_{\text{НЧ}}(t)), \quad (5.3)$$

де M - **коефіцієнт** або **індекс амплітудної модуляції**, який є основним параметром АМ-процесу. Вважається, що модулювальний процес не містить постійної складової.

Отже, згідно з (5.3), при звичайній АМ-модуляції миттєве значення обвідної змінюється навколо рівня S_{m0} за законом, що визначається пропорційною залежністю від керуючого модулювального коливання.

Із урахуванням (5.3) аналітичний опис АМ-процесу приймає такий вигляд:

$$s_{AM}(t) = S_{m0}(1 + Ms_{нч}(t)) \cos(\omega_{вч}t + \varphi_{вч}). \quad (5.4)$$

Звідси випливає, що

- **обвідна амплітудно-модульованого коливання змінюється за законом повідомлення, що передається, та в точності повторює модульовальне коливання;**
- **за нульового значення індекса модуляції АМ-процес є звичайним високочастотним гармонічним коливанням з амплітудою S_{m0} ;**

На рис. 5.5 зображено графік неперервного АМ-процесу.

Очевидно, що найбільша зміна обвідної «вниз» не може пере-

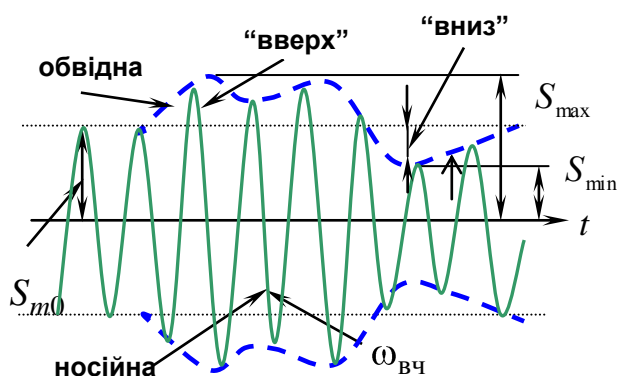


Рисунок 5.5 – Приклад амплітудно-модульованого сигналу.

вищувати амплітуду S_{m0} немодульованого сигналу, в той же час відхилення «вверх» може в принципі бути і більшим за S_{m0} залежно від амплітудного значення процесу $s_{нч}(t)$ та значення коефіцієнта модуляції M . При цьому стверджують, що **глибина модуляції** є малою у випадку малих значень

індекса модуляції, коли відносна зміна обвідної невелика, та значною – для великих значень M (близьких до одиниці).

Оскільки зміни амплітуди обвідної «вверх» та «вниз» можуть бути різними, інколи глибину модуляції вимірюють у відсотках, використовуючи для цього **відносний коефіцієнт модуляції вверх**

$$M_{\text{в}} = \frac{s_{\max}(t) - S_{m0}}{S_{m0}} \times 100\%$$

та **відносний коефіцієнт модуляції «вниз»**

$$M_{\text{н}} = \frac{S_{m0} - s_{\min}(t)}{S_{m0}} \times 100\%.$$

ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. При звичайній АМ-модуляції миттєве значення обвідної змінюється навколо рівня S_{m0} за пропорційною залежністю від модульовального коливання.

2. Найбільша зміна обвідної «вниз» не може перевищувати амплітуду S_{m0} немодульованого процесу, а відхилення «вверх» може в принципі бути і більшим за S_{m0} залежно від амплітудного значення модульовального коливання та значення коефіцієнта модуляції M .

3. За нульового значення індекса модуляції АМ-процес є звичайним високочастотним гармонічним коливанням.



Слід запам'ятати:

1. Визначення понять: відносний коефіцієнт модуляції «вверх» та «вниз».

2. Обвідна АМ-коливання змінюється за законом повідомлення, що передається, та в точності повторює модульовальне коливання;

3. Основним параметром АМ-процесу є коефіцієнт або індекс амплітудної модуляції.

4. Математичну модель АМ-процесу:

$$s_{AM}(t) = S_{m0}(1 + Ms_{HЧ}(t)) \times \cos(\omega_{ВЧ}t + \varphi_{ВЧ}).$$

5. Взаємозв'язок між обвідною $S_m(t)$ та модульовальним процесом $s_{HЧ}(t)$ при звичайній АМ-модуляції:

$$S_m(t) = S_{m0}(1 + Ms_{HЧ}(t)).$$



Треба вміти:

1. Визначати поняття: відносний коефіцієнт модуляції «вверх» та «вниз».

2. Записати математичну модель звичайного АМ-процесу та взаємозв'язок між обвідною $S_m(t)$ і модульовальним процесом $s_{HЧ}(t)$.

3. Навести графічне зображення звичайного АМ-коливання та його складових.

5.2.2 Однотональний амплітудно-модульований процес

Математична модель та параметри. Це один із найпростіших видів АМ-процесів, який є результатом модуляції амплітуди високочастотного гармонічного коливання гармонічним низькочастотним (рис. 5.6, а).

Математична модель однотонального АМ-процесу (ОАМ-процесу) є такою:

$$s_{AM}(t) = S_{m0}(1 + M \cos(\omega_{нч}t + \varphi_{нч})) \cos(\omega_{вч}t + \varphi_{вч}). \quad (5.5)$$

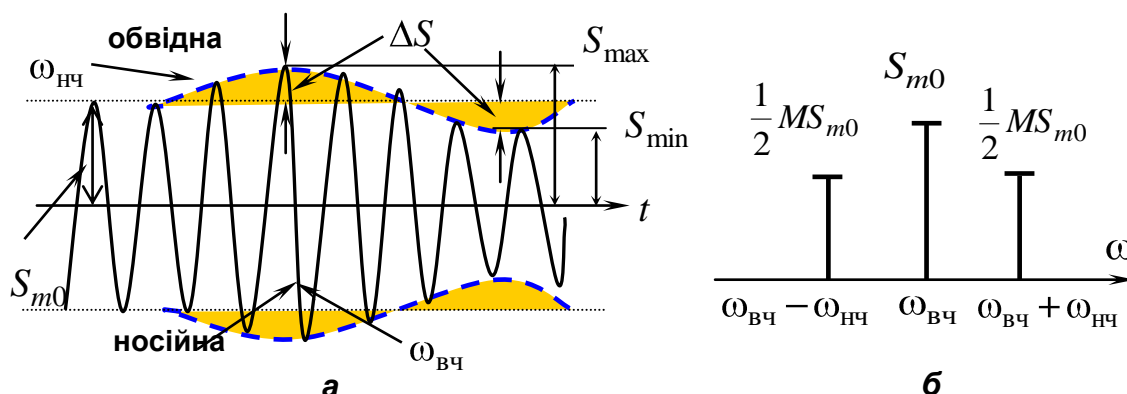


Рисунок 5.6 - Параметри однотонального АМ-процесу (а) та його амплітудний спектр (б).

Очевидно, що ОАМ-процес є симетричним відносно осі ординат із однаковими індексами модуляції “вверх” та “вниз”: $M_{в} = M_{н} = M$.

Тепер коефіцієнт модуляції є відношенням зміни ΔS амплітуди високочастотного заповнення до його амплітуди S_{m0} :

$$M = \Delta S / S_{m0}. \quad (5.6)$$

Амплітуда високочастотного заповнення змінюється від мінімального $S_{min} = S_{m0} - \Delta S = S_{m0}(1 - M)$ до максимального

5.2.2 Однотональний амплітудно-модульований процес

$S_{\max} = S_{m0} + \Delta S = S_{m0}(1 + M)$ значень. Тоді коефіцієнт амплітудної модуляції можна записати у такому вигляді:

$$M = (S_{\max} - S_{\min}) / (S_{\max} + S_{\min}). \quad (5.7)$$

Спектральні характеристики. Обчислимо гармонічний спектр однотонального АМ-процесу перетворенням співвідношення (5.5) з використанням відомих тригонометричних формул:

$$s_{AM}(t) = S_{m0} \cos(\omega_{ВЧ}t + \varphi_{ВЧ}) + \frac{S_{m0}M}{2} \cos[(\omega_{ВЧ} + \omega_{НЧ})t + \varphi_{ВЧ} + \varphi_{НЧ}] + \frac{S_{m0}M}{2} \cos[(\omega_{ВЧ} - \omega_{НЧ})t + \varphi_{ВЧ} - \varphi_{НЧ}]. \quad (5.8)$$

Як випливає з (5.8) однотональний АМ-процес містить три гармонічні спектральні складові:

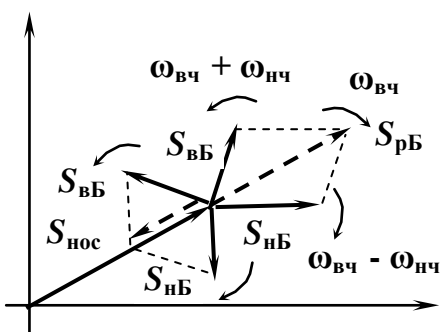
- носійне коливання з частотою $\omega_{ВЧ}$;
- верхнє бічне коливання з частотою $\omega_{ВЧ} + \omega_{НЧ}$;
- нижнє бічне коливання з частотою $\omega_{ВЧ} - \omega_{НЧ}$.

Частоти бічних гармонічних складових на частотній осі симетричні відносно частоти носійного коливання, а їх амплітуди однакові та з коефіцієнтом $M/2$ пропорційні амплітуді немодульованого високочастотного гармонічного коливання.

Спектральна діаграма амплітуд однотонального АМ-процесу показана на рис. 5.6, б.

Ширина спектра $\Delta\omega_{СП}$ однотонального АМ-процесу як різниця максимальної та мінімальної частот у його спектрі дорівнює подвоєному значенню частоти модульовального НЧ-процесу: $\Delta\omega_{СП} = 2\omega_{НЧ}$.

Фазовий спектр однотонального АМ-процесу визначається початковими фазами його гармонічних складових: нижня бічна спектральна складова має початкову фазу $\varphi_{ВЧ} - \varphi_{НЧ}$; верхня - $\varphi_{ВЧ} + \varphi_{НЧ}$, а носійне коливання $\varphi_{ВЧ}$.



Подання співвідношення (5.8) векторами, що обертаються на площині (див. рис. 5.7), наочно ілюструє особливості однотонального АМ-процесу (див. рис. 5.7). Вектор довжиною $S_{нос} = S_{m0}$, що

Рисунок 5.7 – Векторна інтерпретація однотонального АМ-сигналу.

відображає носійне коливання, обертається відносно початку координат із постійною швидкістю $\omega_{вч}$. Вектори бічних складових із однаковими довжинами $S_{нБ} = S_{вБ} = MS_{m0}/2$ обертаються відносно кінця першого вектора в протилежних напрямках із швидкістю $\omega_{нч}$, значно меншою за швидкість $\omega_{вч}$. Відносно початку координат швидкості зазначених векторів є такими: для верхньої бічної складової $\omega_{вч} + \omega_{нч}$, а для нижньої - $\omega_{вч} - \omega_{нч}$. Сумарний вектор бічних складових $S_{рБ}$, таким чином, завжди направлений вздовж вектора носійного коливання та обертається відносно початку координат із швидкістю $\omega_{вч}$. Тоді результуючий вектор, що відповідає однотоновальному АМ-процесу, обертається з постійною швидкістю $\omega_{вч}$, але його довжина $S_{нос} \pm S_{рБ}$ повільно змінюється за рахунок зміни довжини $S_{рБ}$ сумарного вектора бічних складових.

Енергетичні характеристики. Для будь-якого процесу його основними енергетичними характеристиками є *енергія, миттєва та середня потужності*. З практичного погляду цікавим є питання розподілу середньої потужності між спектральними складовими. Враховуючи те, що середня потужність будь-якого процесу дорівнює сумі середніх потужностей його спектральних складових, а також те, що середня потужність гармонічного коливання з амплітудою A_m дорівнює $A_m^2/2$, дістанемо середню потужність однотонового АМ-процесу:

$$P_{ср.АМ} = P_{ср.нос} + P_{ср.вБ} + P_{ср.нБ} = \frac{S_{m0}^2}{2} + \frac{(S_{m0}M/2)^2}{2} + \frac{(S_{m0}M/2)^2}{2} = \frac{S_{m0}^2}{2} + \frac{S_{m0}^2M^2}{4} = P_{ср.нос} \left(1 + \frac{M^2}{2}\right). \quad (5.9)$$

Зважаючи на те, що коефіцієнт амплітудної модуляції приймає значення від 0 до 1, дійдемо такого висновку:

♦ **Середня потужність однотонового АМ-процесу змінюється в межах від $P_{ср.нос}$ до $1,5 P_{ср.нос}$.**

Окрім того з (5.9) випливає, що навіть при 100% модуляції потужність обох бічних складових становить тільки 50% потужності немодульованого носійного коливання.

5.2.2 Однотональний амплітудно-модульований процес

Оскільки інформація, що передається, закладена в бічні складові, можна відмітити неефективність використання потужності в системах однотональної АМ-модуляції: *на випромінювання інформаційних складових йде тільки третина всієї середньої потужності АМ-процесу*. Однак, для того, щоб здійснити ефективну, надійну та економічну передачу інформації всеодно необхідно перенести спектри НЧ-процесу, як носія інформації, із низькочастотної ділянки частотного діапазону в область високих частот. Це і дозволяє зробити перетворення на зразок модуляції.

Тепер визначимо, в яких межах змінюється миттєва потужність однотонального АМ-процесу.

Як відзначалось раніше амплітуда високочастотного заповнення змінюється від мінімального $S_{\min} = S_{m0} - \Delta S = S_{m0}(1 - M)$ до максимального $S_{\max} = S_{m0} + \Delta S = S_{m0}(1 + M)$ значень. Тоді мінімальне значення миттєвої потужності

$$P_{\min} = S_{\min}^2 / 2 = S_{m0}^2 (1 - M)^2 / 2 = P_{\text{ср.нос}} (1 - M)^2,$$

а максимальне

$$P_{\max} = S_{\max}^2 / 2 = S_{m0}^2 (1 + M)^2 / 2 = P_{\text{ср.нос}} (1 + M)^2.$$

У разі 100% модуляції, коли $M = 1$, $P_{\min} = 0$, а $P_{\max} = 4P_{\text{ср.нос}}$.

Таким чином, пристрій, що формує однотональний АМ-процес, повинен бути розрахований на віддавання потужності в певні моменти часу, яка перевищує середню потужність носійного коливання у чотири рази. Але таку **пікову потужність** пристрій віддає тільки в ті моменти часу, коли амплітуда АМ-коливання вдвічі перевищує амплітуду S_{m0} .

У середньому за період модульовального НЧ-процесу потужність, що віддається, не перевищує $1,5P_{\text{ср.нос}}$ за повної модуляції ($M=1$) та $P_{\text{ср.нос}}$ за її відсутності ($M=0$).

- ◆ Отже, **використання ОАМ-процесів із малими значеннями коефіцієнта модуляції недоцільно з погляду неповного використання потужності пристрою, що його формує.**

Збільшення коефіцієнта модуляції не може принципово вирішити проблему, оскільки за значень $M > 1$ має місце **перемодуляція**,

яка спричинює зміну форми обвідної, її відмінність від форми модульовального НЧ-коливання, а значить, до спотворення інформації і її втрат.

Кореляційна функція. За означенням для детермінованого нескінченно подовженого в часі процесу $s_{AM}(t) = S_m(t) \cos(\omega_{вч}t + \varphi_{вч})$ з нульовою початковою фазою його кореляційна функція

$$\begin{aligned} K_{AM}(\tau) &= \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \left[\int_0^{T_0} s_{AM}(t) s_{AM}(t - \tau) dt \right] = \\ &= \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} S_m(t) \cos \omega_{вч}t S_m(t - \tau) \cos(\omega_{вч}t - \tau) dt = \\ &= \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \frac{1}{2} \int_0^{T_0} S_m(t) S_m(t - \tau) \cos(2\omega_{вч}t - \omega_{вч}\tau) dt + \\ &\quad + \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \frac{1}{2} \int_0^{T_0} S_m(t) S_m(t - \tau) \cos \omega_{вч}\tau dt. \end{aligned}$$

Згідно з властивістю симетрії АМ-процесу відносно осі абсцис (часової осі) перший інтеграл у останньому виразі дорівнює нулю.

Тоді

$$\begin{aligned} K_{AM}(\tau) &= \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \frac{1}{2} \int_0^{T_0} S_m(t) S_m(t - \tau) \cos \omega_{вч}\tau dt = \\ &= \frac{1}{2} K_m(\tau) \cos \omega_{вч}\tau, \end{aligned} \tag{5.10}$$

де $K_m(\tau)$ – кореляційна функція обвідної АМ-процесу.

- ◆ **Кореляційна функція АМ-процесу з точністю до постійного множника 1/2 визначається добутком кореляційних функцій обвідної $S_m(t)$ та високочастотної носійної (заповнення) $\cos(\omega_{вч}t + \varphi_{вч})$.**

Ураховуючи (5.3), дістанемо кореляційну функцію обвідної $S_m(t)$ однотонального АМ-процесу за нульових початкових фаз:

5.2.2 Однотональний амплітудно-модульований процес

$$\begin{aligned}
 K_m(\tau) &= \frac{1}{T_{\text{нч}}} \int_0^{T_{\text{нч}}} (S_{m0} + S_{m0}M \cos \omega_{\text{нч}} t)(S_{m0} + S_{m0}M \cos \omega_{\text{нч}} (t - \tau)) dt = \\
 &= \frac{1}{T_{\text{нч}}} \int_0^{T_{\text{нч}}} (S_{m0}^2 + S_{m0}^2 M \cos \omega_{\text{нч}} (t - \tau) + S_{m0}^2 M \cos(\omega_{\text{нч}} t) + \\
 &+ S_{m0}^2 M \cos(\omega_{\text{нч}} t) \cos(\omega_{\text{нч}} (t - \tau))) dt = S_{m0}^2 + \frac{S_{m0}^2 M^2}{2} \cos(\omega_{\text{нч}} \tau).
 \end{aligned}$$

Відповідно до (5.10) та з урахуванням останнього співвідношення кореляційна функція ОАМ-процесу

$$K_{\text{ОАМ}}(\tau) = \frac{1}{2} (S_{m0}^2 + \frac{S_{m0}^2 M^2}{2} \cos(\omega_{\text{нч}} \tau)) \cos(\omega_{\text{вч}} \tau). \quad (5.11)$$

Як бачимо, за структурою (5.11) збігається з математичною моделлю ОАМ-процесу. Тому кореляційна функція ОАМ-процесу є сумою трьох спектральних складових: носійного з частотою $\omega_{\text{вч}}$, верхнього бічного коливання з частотою $\omega_{\text{вч}} + \omega_{\text{нч}}$ та нижнього бічного коливання з частотою $\omega_{\text{вч}} - \omega_{\text{нч}}$. Амплітуди складових дорівнюють середнім потужностям спектральних складових обвідної $S_m(t) = S_{m0}(1 + M \cos(\omega_{\text{нч}} t + \varphi_{\text{нч}}))$ (див. (5.8)).

ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. Однотональний АМ-процес є симетричним відносно осі ординат із однаковими індексами модуляції “вверх” та “вниз”.

2. З енергетичного погляду використання систем із ОАМ-сигналами є неефективним.

3. Кореляційна функція АМ-сигналу з точністю до постійно-



Слід запам'ятати:

1. Визначення понять: однотональний АМ-процес, коефіцієнт модуляції ОАМ-процесу

2. Математичну модель однотонального АМ-процесу:

$$\begin{aligned}
 s_{\text{АМ}}(t) &= S_{m0}(1 + M \cos(\omega_{\text{нч}} t + \varphi_{\text{нч}})) \times \\
 &\times \cos(\omega_{\text{вч}} t + \varphi_{\text{вч}}).
 \end{aligned}$$

3. Спектр ОАМ-процесу складається з трьох гармонічних

го множника визначається добутком кореляційних функцій обвідної та високочастотної носійної



Треба вміти:

1. Визначати поняття: однотональний АМ-процес.

2. Зобразити графік ОАМ-процесу та визначати по ньому основні параметри, заповнення і обвідну.

3. Зобразити спектральні діаграми амплітуд і початкових фаз для ОАМ-процесу.

4. Визначити амплітуди, початкові фази та середні потужності спектральних складових ОАМ-процесу.

5. Навести векторну інтерпретацію ОАМ-процесу.

6. Визначити середню потужність, мінімальне та максимальне значення миттєвої потужності ОАМ-процесу, а також його та кореляційні характеристики.

складових: носійного коливання з частотою $\omega_{вч}$; верхнього бічного коливання з частотою $\omega_{вч} + \omega_{нч}$; нижнього бічного коливання з частотою $\omega_{вч} - \omega_{нч}$.

4. Пристрій, що формує однотональний АМ-процес, повинен бути розрахований на віддавання потужності в певні моменти часу, яка перевищує середню потужність носійного коливання у чотири рази.

5. Формули:

$$M = \Delta S / S_{m0};$$

$$M = (S_{\max} - S_{\min}) / (S_{\max} + S_{\min})$$

- коефіцієнт амплітудної модуляції ОАМ-процесу;

$$\Delta\omega_{СП} = 2\omega_{нч}$$

- ширина спектра ОАМ-процесу;

$$P_{\min} = P_{\text{ср.нос}} (1 - M)^2,$$

$$P_{\max} = P_{\text{ср.нос}} (1 + M)^2$$

- мінімальне та максимальне значення миттєвої потужності.

5.2.3 Багатотональний АМ-процес

Математична модель та спектр. На практиці однотональна АМ-модуляція застосовується дуже рідко. Більш реальними є випадки, коли модульоване коливання, а відповідно, і обвідна, мають довільну, відмінну від гармонічного коливання, форму. У цьому разі

5.2.3 Багатотональний АМ-процес

в якості модулювального процесу $s_{\text{НЧ}}(t)$ можна розглядати тригонометричну суму

$$s_{\text{НЧ}}(t) = \sum \alpha_i \cos(\omega_{\text{НЧ}i}t + \varphi_{\text{НЧ}i}) \quad (5.12)$$

гармонічних складових, частоти яких $\omega_{\text{НЧ}i}$ утворюють впорядковану зростаючу послідовність, у той час як амплітуди α_i та початкові фази $\varphi_{\text{НЧ}i}$ є довільними.

Підставивши (5.12) в (5.4), дістанемо:

$$s_{\text{АМ}}(t) = S_{m0} \left(1 + \sum_{i=1}^N M \alpha_i \cos(\omega_{\text{НЧ}i}t + \varphi_{\text{НЧ}i}) \right) \cos(\omega_{\text{ВЧ}}t + \varphi_{\text{ВЧ}}) =$$

$$S_{m0} \left(1 + \sum_{i=1}^N M_i \cos(\omega_{\text{НЧ}i}t + \varphi_{\text{НЧ}i}) \right) \cos(\omega_{\text{ВЧ}}t + \varphi_{\text{ВЧ}}). \quad (5.13)$$

Коливання виду (5.13) називають **багатотональним АМ-процесом**, а коефіцієнти $M_i = \alpha_i M$ – **парціальними (частинними) коефіцієнтами модуляції**.

Спектральний склад такого процесу визначимо подібно однотональному:

$$s_{\text{АМ}}(t) = S_{m0} \cos(\omega_{\text{ВЧ}}t + \varphi_{\text{ВЧ}}) + \sum_{i=1}^N \frac{M_i S_{m0}}{2} \cos((\omega_{\text{ВЧ}} + \omega_{\text{НЧ}i})t + \varphi_{\text{ВЧ}} + \varphi_{\text{НЧ}i}) + \sum_{i=1}^N \frac{M_i S_{m0}}{2} \cos((\omega_{\text{ВЧ}} - \omega_{\text{НЧ}i})t + \varphi_{\text{ВЧ}} - \varphi_{\text{НЧ}i}). \quad (5.14)$$

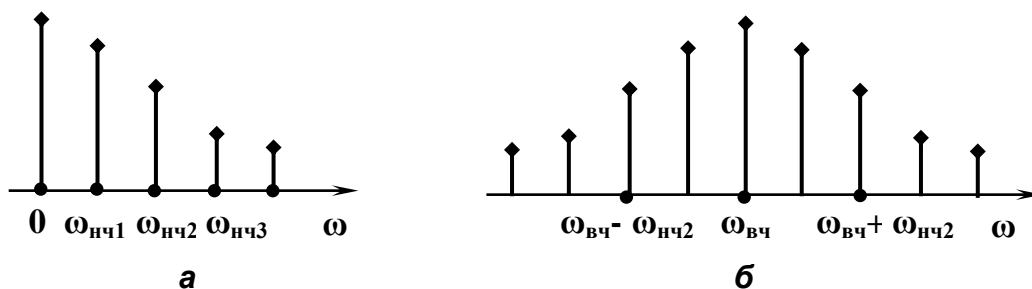


Рисунок 5.8 – Дискретні спектри модульовального (а) та багатотонального АМ-процесу (б).

Таким чином, багатоканальний АМ-процесу містить спектральна складову з частотою носійного коливання, а також верхні та нижні бічні складові відповідно з частотами $\omega_{\text{ВЧ}} + \omega_{\text{НЧ}i}$ та $\omega_{\text{ВЧ}} - \omega_{\text{НЧ}i}$. При цьому верхні та нижні бічні спектральні складові є масштабними ко-

п'яма спектральних складових модульовального НЧ-коливання з коефіцієнтами $S_{m0}M_i/2$, зсунутими в область високих частот на частоту $\omega_{ВЧ}$ (рис. 5.8).

Вищезазначене дає змогу дійти важливого висновку:

- ◆ **ширина спектра багатотонального АМ-процесу вдвічі перевищує значення найбільшої частоти в спектрі модульовального НЧ-коливання:**

$$\Delta\omega_{СП} = 2\omega_{НЧ\max}.$$

Тепер розглянемо випадок, коли спектр модульовального НЧ-процесу є неперервним. Оскільки, згідно з (5.2) АМ-процес є добутком обвідної $S_m(t)$ та високочастотного гармонічного заповнення $\cos(\omega_{ВЧ}t + \varphi_{ВЧ})$, то у частотній області йому відповідає згортка їхніх спектральних щільностей. Тоді, згідно з (5.4) спектральна щільність комплексних амплітуд багатотонального АМ-процесу

$$\begin{aligned} S_{AM}(j\omega) &= \frac{M}{2\pi} S_{НЧ}(j\omega) * S_{\cos}(j\omega) + S_{\cos}(j\omega) = \\ &= \frac{M}{2\pi} S_{НЧ}(j\omega) * \pi S_{m0} [\delta(\omega - \omega_{ВЧ})e^{j\varphi_{ВЧ}} + \delta(\omega + \omega_{ВЧ})e^{-j\varphi_{ВЧ}}] + S_{\cos}(j\omega) = \\ &= S_{\cos}(j\omega) + \frac{MS_{m0}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S_{НЧ}(j\lambda) \delta(\lambda - \omega - \omega_{ВЧ}) e^{-j\varphi_{ВЧ}} d\lambda + \\ &\quad + \frac{MS_{m0}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S_{НЧ}(j\lambda) \delta(\lambda - \omega + \omega_{ВЧ}) e^{+j\varphi_{ВЧ}} d\lambda. \end{aligned}$$

Із урахуванням фільтрувальної властивості δ – функції маємо:

$$\begin{aligned} S_{AM}(j\omega) &= \frac{S_{m0}M}{2} S_{НЧ}(j(\omega - \omega_{ВЧ}))e^{j\varphi_{ВЧ}} + \\ &\quad + \frac{S_{m0}M}{2} S_{НЧ}(j(\omega + \omega_{ВЧ}))e^{-j\varphi_{ВЧ}} + \\ &\quad + S_{m0}\pi [\delta(\omega - \omega_{ВЧ})e^{j\varphi_{ВЧ}} + \delta(\omega + \omega_{ВЧ})e^{-j\varphi_{ВЧ}}]. \end{aligned} \tag{5.15}$$

- ◆ Отже, **спектр багатотонального АМ-процесу містить сконцентровані в області частоти $\pm \omega_{ВЧ}$ складові, пара-**

метри яких визначаються високочастотним заповненням та спектром модульовального НЧ-процесу.

Якщо враховувати тільки спектр $S_m(j\omega)$ обвідної $S_m(t)$, то отримуємо спектр АМ-процесу без дельтоподібних складових високочастотного заповнення:

$$S_{AM}(j\omega) = \frac{S_{m0}M}{2} S_{НЧ}(j(\omega - \omega_{ВЧ})e^{j\varphi_{ВЧ}} + \frac{S_{m0}M}{2} S_{НЧ}(j(\omega + \omega_{ВЧ})e^{-j\varphi_{ВЧ}}. \quad (5.16)$$

Як впливає з співвідношень (5.15) та (5.16) у разі АМ-модуляції спектр НЧ-процесу, сконцентрований, зазвичай, в околі $\omega = 0$, переноситься в область високих частот (гармонічного заповнення) на частоту $\omega = \omega_{ВЧ}$. При цьому амплітуди спектральних складових зменшуються в $M/2$ разів, а ширина спектра збільшується вдвічі.

► **Приклад.** Визначити спектральну щільність радіоімпульсу, заповненням якого є парний прямокутний імпульс тривалістю $t_{\text{ІМП}}$ та амплітудою A .

Радіоімпульс $s_p(t) = s_B(t) \cos(\omega_{ВЧ}t + \varphi_{ВЧ})$ є добутком відеоімпульсу $s_B(t)$ та гармонічного коливання, частота якого значно перевищує максимальну частоту ω_{max} в спектрі прямокутного відеоімпульсу, тобто $\omega_{ВЧ} \gg \omega_{\text{max}}$. Отже, маємо багатотональний АМ-процес. Оскільки тепер $S_m(t) = s_B(t) \leftrightarrow S_B(j\omega) = S_m(j\omega)$, $S_{m0} = A$, а $\varphi_{ВЧ} = 0$ і $M = 1$, то відповідно до (5.15) спектральна щільність заданого процесу

$$S_p(j\omega) = \frac{A}{2} \{S_B[j(\omega - \omega_{ВЧ})] + S_B[j(\omega + \omega_{ВЧ})]\}. \quad (5.17)$$

Як відомо, для прямокутного відеоімпульсу спектральна щільність

$$S_B(j\omega) = t_{\text{ІМП}} \sin \frac{\omega t_{\text{ІМП}}}{2} / \frac{\omega t_{\text{ІМП}}}{2}.$$

Тоді згідно з (5.17) спектральна щільність заданого процесу

$$S_{AM}(j\omega) = S_p(j\omega) = \frac{At_{\text{имп}}}{2} \left[\frac{\sin \frac{(\omega - \omega_{\text{вч}})t_{\text{имп}}}{2}}{(\omega - \omega_{\text{вч}})t_{\text{имп}}} + \frac{\sin \frac{(\omega + \omega_{\text{вч}})t_{\text{имп}}}{2}}{(\omega + \omega_{\text{вч}})t_{\text{имп}}} \right].$$

Графіки спектрів обвідної та радіоімпульсу показані на рис. 5.9.

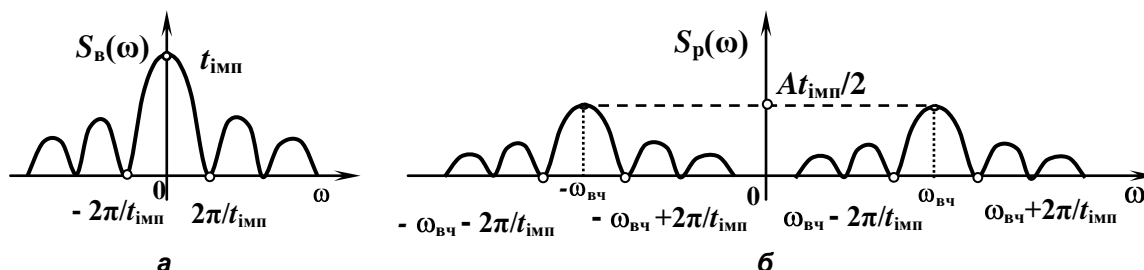


Рисунок 5.9 - Амплітудні спектри відео- (а) та радіоімпульсу (б) з прямокутною обвідною.

Ширина спектра прямокутного відеоімпульсу зверху обмежується першим нулем його амплітудного спектра, тобто частотою $\omega_{\text{max}} = \omega_{01} = 2\pi/t_{\text{имп}}$, а знизу – частотою $\omega_{\text{min}} = 0$ (рис. 5.9, а). При переході до радіоімпульсу спектр прямокутного відеоімпульсу переноситься на частоту $\pm \omega_{\text{вч}}$ таку, що $\omega_{\text{вч}} \gg 2\pi/t_{\text{имп}}$ (рис. 5.9, б). Тільки за такої умови спектри відео- та радіоімпульсів майже не перекриваються.

Для радіоімпульсу в діапазоні фізичних значень частоти (додатних частот) перший нуль його амплітудного спектра визначається двома частотами: $\omega_{01\text{max}} = \omega_{\text{вч}} + 2\pi/t_{\text{имп}}$ і $\omega_{01\text{min}} = \omega_{\text{вч}} - 2\pi/t_{\text{имп}}$. Відповідно ефективна ширина спектра $\Delta\omega_{\text{сп.еф}} = \omega_{01\text{max}} - \omega_{01\text{min}} = 4\pi/t_{\text{имп}}$.

◆ Отже, *ширина спектра радіоімпульсу вдвічі перевищує ширину спектра відеоімпульсу.*

□

Кореляційна функція. Як і у разі однотональної модуляції кореляційна функція багатотонального АМ-процесу з обвідною довільної форми обчислюється добутком кореляційної функції обвідної та високочастотного заповнення одиничної амплітуди (див. (5.10)).

► **Приклад.** *Визначити кореляційну функцію радіоімпульсу, якщо обвідною є парний прямокутний відеоімпульс, тривалість якого $t_{\text{имп}}$, а амплітуда A .*

Відповідно до (4.8) КФ відеоімпульсу прямокутної форми $K_{S_m}(\tau) = A_{m0}^2(t_{\text{імп}} - |\tau|)$ є відеоімпульсом трикутної форми. Тоді кореляційна функція заданого радіоімпульсу

$$K_{\text{АМ}}(\tau) = \frac{1}{2} \cos \omega_{\text{вч}} \tau \cdot A_{m0}^2 t_{\text{імп}} (t_{\text{імп}} - |\tau|)$$

є АМ-процесом із трикутною обвідною.



ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. Спектр багатотонального АМ-процесу містить складові, які визначаються спектрами модульовального НЧ-процесу і високочастотного гармонічного заповнення та концентруються в околі його частоти $\pm \omega_{\text{вч}}$.



Треба вміти:

1. Визначати поняття: багатотональний АМ-процес, парціальний коефіцієнт модуляції.

2. Визначати спектр, ширину спектра та кореляційні характеристики багатотональних АМ-процесів.



Слід запам'ятати:

1. Визначення понять: багатотональний АМ-процес, парціальний коефіцієнт модуляції.

2. Ширина спектра багатотонального АМ-процесу вдвічі перевищує максимальну частоту в спектрі модульовального коливання, а амплітуди спектральних складових – зменшуються удвічі.

3. Спектральні складові дискретного спектра багатотонального АМ-процесу.

4. Кореляційна функція багатотонального АМ-процесу обчислюється добутком кореляційної функції обвідної та високочастотного заповнення одиничної амплітуди.

5.2.4 Коефіцієнт корисної дії

Коефіцієнт корисної дії η АМ-процесу визначають як відношення середньої потужності його бічних складових до середньої потужності всього АМ-процесу.

Тоді згідно з (5.9)

$$\eta = \frac{P_{\text{ср.Б}}}{P_{\text{ср.АМ}}} = \frac{2S_{m0}^2 M^2 / 4}{S_{m0}^2 / 2 + 2 \frac{S_{m0}^2 M^2}{4}} = \frac{M^2}{2 + M^2} \quad (5.18)$$

- для однотонального АМ-процесу; а з урахуванням (5.14)

$$\eta = \frac{\sum_i M_i^2}{2 + \sum_i M_i^2} \quad (5.19)$$

- для багатотонального АМ-процесу.

Коефіцієнт корисної дії (ККД) набуває максимального значення у разі, якщо $M = 1$. Тоді для однотонального АМ-процесу ККД становить 33,3%. Отже, на генерування інформаційних складових такого АМ-процесу йде приблизно тільки третина всієї потужності, інші дві третини витрачаються на випромінювання носійної, що не містить інформації і з точки зору споживача є зайвою.

Очевидно, що підвищити енергетичну ефективність систем з АМ-процесами можна, сформувавши такий АМ-процес, спектр якого не містив би носійного коливання. Такий модульований процес називають **АМ-процесом із подавленою носійною**. Він є продуктом **балансної модуляції (БМ)**.

Дослідження показують, що при БМ використання потужності в три рази ефективніше, ніж при звичайній АМ. Однак, відомо, що наявність носійної в спектрі АМ-процесу є дуже важливим для спрощення технічної реалізації демодуляторів - пристроїв, що виділяють НЧ-коливання з модульованих у приймачах.

Демодулятори звичайних АМ-процесів, як правило, реалізують у вигляді нелінійних детекторів обвідної, що дає змогу виділяти з АМ-процесу модульовальне НЧ-коливання. Зазначимо, що на ККД при амплітудній модуляції впливає і ряд інших чинників. Зокрема, так званий *пик-фактор*, багатотонального коливання або коливання

5.2.4 Коефіцієнт корисної дії

складної (довільної) форми. Це явище оцінюють подібно до коефіцієнта амплітуди k_a (2.42).

Встановлено, що ККД при АМ не може перевищувати величини (за відсутності перемодуляції) $1/(1+k_a^2)$. Так, для більшості звукових сигналів, зокрема “некерованої мови” $k_a = 35$. Очевидно, що у цьому разі $\eta \leq 0,1\%$.

Для підвищення ККД вдаються до різних заходів. Так, у системах радіомовлення застосовують системи автоматичного регулювання (САР) підсилення для зменшення підсилення в ті моменти часу, коли інтенсивність завад дуже велика. Це дає змогу, зменшити пік-фактор до восьми.

Підвищення ККД та зменшення пік-фактору можливе за рахунок перемодуляції. Крім того, інколи корисно в організації систем з АМ-процесами застосовувати метод компандирування, який полягає в скороченні – розширенні динамічного діапазону сигналу. Початково перед модуляцією модульовальний процес пропускається через резистивне нелінійне коло для зменшення його динамічного діапазону та для зменшення пік-фактора. На приймальному боці після демодуляції вводять компенсуючий нелінійний пристрій (експандер), за допомогою якого здійснюється зворотна операція - розширення динамічного діапазону.

ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. На генерування інформаційних складових ОАМ-процесу йде приблизно тільки третина всієї потужності, інші витрачаються на випромінювання носійної, що не містить інформації.
2. Демодулятори звичайних АМ-процесів реалізують у вигляді нелінійних детекторів обвідної, що дає змогу виділяти з АМ-процесу модульовальне НЧ-



Слід запам'ятати:

1. Визначення понять: коефіцієнт корисної дії, АМ-процес із подавленою носійною, пік-фактор, командирівання
2. Способи підвищення ККД АМ-систем: застосування САР, пере модуляція, компандирування.
3. Формули для ККД:

КОЛИВАННЯ.



Треба вміти:

1. Визначати поняття: коефіцієнт корисної дії, АМ-процес із подавленою носійною, пік-фактор, командування

2. Обчислювати ККД одного та багатотональних АМ-процесів.

$$\eta = \frac{P_{\text{ср.Б}}}{P_{\text{ср.АМ}}} = \frac{M^2}{2 + M^2}$$

- для однотонового АМ-процесу;

$$\eta = \frac{\sum_i M_i^2}{2 + \sum_i M_i^2}$$

- для багатотонального АМ-процесу.

5.2.5 Амплітудно-модульовані процеси з подавленою носійною

Математична модель. Як відмічалось раніше, звичайна амплітудна модуляція з енергетичного погляду не є ефективною навіть

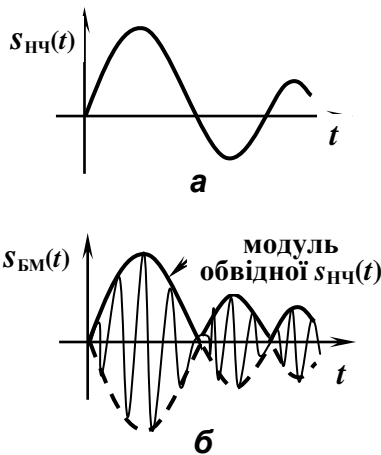


Рисунок 5.10 – Обвідна (а) та БМ-процес.

при застосуванні різноманітних засобів для підвищення її ККД. Зумовлено це, як відомо, тим що більша частина енергії, що передається, зосереджена в неінформаційній складовій АМ-процесу, якою є носійна. Проте, остання хоча й не містить інформації, але є дуже важливою під час поновлення (детектування) НЧ-процесу. Тому при звичайній АМ носійна генерується в канал зв'язку передавачем, а потім на боці приймача подавляється фільтром. Ось чому застосування звичайної АМ у супутникових системах є недоцільним, оскільки потужність джерел живлення є обмеженою.

Якщо звичайний АМ-процес описується співвідношенням (5.5), то при балансній модуляції

$$s_{\text{БМ}}(t) = S_m(t) \cos(\omega_{\text{ВЧ}}t + \varphi_{\text{ВЧ}}) = s_{\text{НЧ}}(t) \cos(\omega_{\text{ВЧ}}t + \varphi_{\text{ВЧ}}). \quad (5.20)$$

Отже, балансну модуляцію можна розглядати як операцію, при якій здійснюється безпосереднє множення носійного гармонічного

5.2.5. Амплітудно-модульовані процеси з подавленою носійною

ВЧ- коливання на керуюче НЧ-коливання. На рис. 5.10 зображено довільний НЧ модульовальний процес та відповідний БМ-процес.

Слід звернути увагу на те, що обвідна БМ-процесу є модулем $|s_{\text{НЧ}}(t)|$ модулюючого НЧ-коливання $s_{\text{НЧ}}(t)$. Тому, на відміну від звичайної АМ, для відтворення НЧ-процесу застосовуються не амплітудні детектори, що виділяють обвідну $|s_{\text{НЧ}}(t)|$, а *синхронні або когерентні*, які виділяють НЧ керуюче коливання.

Іншою особливістю БМ-процесу є те, що в ньому містяться тільки верхні та нижні бічні складові, а носійна відсутня. Дійсно, якщо $s(t) \leftrightarrow S_{\text{НЧ}}(j\omega)$, а $\cos(\omega_{\text{ВЧ}}t + \varphi_{\text{ВЧ}}) \leftrightarrow \pi[\delta(\omega - \omega_{\text{ВЧ}})e^{j\varphi_{\text{ВЧ}}} + \delta(\omega + \omega_{\text{ВЧ}})e^{-j\varphi_{\text{ВЧ}}}]$, то спектр БМ-процесу

$$S_{\text{БМ}}(j\omega) = \frac{1}{2\pi} S_{\text{НЧ}}(j\omega) * S_{\text{cos}}(j\omega) =$$

$$= \frac{1}{2} S_{\text{НЧ}}(j(\omega - \omega_{\text{ВЧ}}))e^{j\varphi_{\text{ВЧ}}} + \frac{1}{2} S_{\text{НЧ}}(j(\omega + \omega_{\text{ВЧ}}))e^{-j\varphi_{\text{ВЧ}}}.$$
(5.21)

Ширина спектра БМ-процесу, як і при звичайній АМ, визначається подвоєним значенням максимальної частоти в спектрі модульовального НЧ-коливання $2\omega_{\text{НЧ}}$ ($2\omega_{\text{НЧ max}}$).

Для демодуляції БМ-процесу (АМ-процесу з подавленою носійною) застосовується особливий вид перетворень, відомий під назвою синхронного або когерентного детектування, коли в спектр БМ-

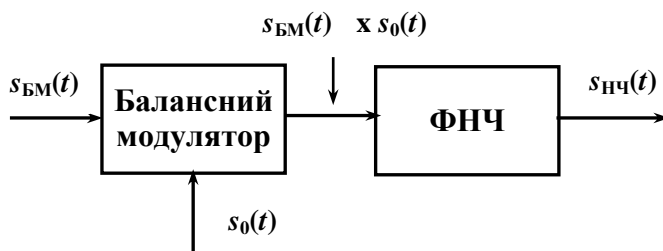


Рисунок 5.11 - Демодуляція БМ-сигналу.

процесу від окремого автогенератора на приймальній стороні вводиться відсутнє в ньому носійне коливання (рис. 5.11).

Для цього прийнятий БМ-процес подається на балансний модулятор, де він перемножається з ВЧ- коливанням $s_0(t)$, яке генерується місцевим генератором.

Вихідний процес балансного модулятора потім подається на вхід фільтра нижніх частот (ФНЧ) із частотою зрізу $\omega_{\text{НЧ}}$, на виході якого і формується НЧ-коливання, що містить інформацію. Але такий спосіб потребує, щоб частота ω_0 та початкова фаза φ_0 місцевого

генератора в точності збігалися з частотою $\omega_{\text{ВЧ}}$ та початковою фазою $\varphi_{\text{ВЧ}}$ носійного ВЧ-коливання.

Припустимо спочатку, що частота ω_0 та початкова фаза φ_0 місцевого генератора відрізняються від $\omega_{\text{ВЧ}}$ та $\varphi_{\text{ВЧ}}$ відповідно. Тоді процес на виході балансного модулятора

$$\begin{aligned} s_{\text{БМ}}(t)s_{\text{ВЧ}}(t) &= s_{\text{НЧ}}(t) \cos(\omega_{\text{ВЧ}}t + \varphi_{\text{ВЧ}}) \cos(\omega_0t + \varphi_0) = \\ &= \frac{1}{2} s_{\text{НЧ}}(t) \cos((\omega_{\text{ВЧ}} + \omega_0)t + \varphi_{\text{ВЧ}} + \varphi_0) + \\ &+ \frac{1}{2} s_{\text{НЧ}}(t) \cos((\omega_{\text{ВЧ}} - \omega_0)t + \varphi_{\text{ВЧ}} - \varphi_0). \end{aligned}$$

Якщо місцевий генератор синхронізовано з ВЧ носійною як за частотою, так і фазою, тобто коли $\omega_{\text{ВЧ}} = \omega_0$ та $\varphi_{\text{ВЧ}} = \varphi_0$, то

$$s_{\text{БМ}}(t)s_{\text{ВЧ}}(t) = \frac{1}{2} s_{\text{НЧ}}(t) + \frac{1}{2} s_{\text{НЧ}}(t) \cos(2\omega_{\text{ВЧ}}t + 2\varphi_{\text{ВЧ}}).$$

Перша складова в останньому співвідношенні характеризується спектром $S_{\text{НЧ}}(j\omega)$ із максимальною частотою $\omega_{\text{НЧ}}$, а друга - спектром, що є зсунутою на частоту $2\omega_{\text{ВЧ}}$ копією спектра НЧ-коливання. Тому друга складова не буде пропускатися ФНЧ, а на його виході сформується НЧ-процес $s_{\text{НЧ}}(t)$.

У разі, якщо існує тільки фазова похибка, тобто коли $\varphi_{\text{ВЧ}} \neq \varphi_0$, то на виході ФНЧ виділяється також НЧ-процес $(1/2)s_{\text{НЧ}}(t) \cos(\varphi_{\text{ВЧ}} - \varphi_0)$, але його амплітуда буде збільшуватись, зменшуватись чи навіть обертатися в нуль залежно від фазової похибки, що не є бажаним.

Отже,

- ◆ **основна проблема синхронного детектування – точна синхронізація частоти та фази місцевого генератора з частотою та фазою ВЧ носійного коливання.**

На практиці використовують і інші способи демодуляції БМ-процесів. Так, відповідно до одного з них на приймальному боці БМ-процес підносять до квадрату. Отриманий процес є ідентичним за частотною структурою процесові на виході демодулятора, зображеного на рис. 5.11, у разі виконання умов синхронізації місцевого генератора:

5.2.5. Амплітудно-модульовані процеси з подавленою носійною

$$s_{\text{НЧ}}^2(t) \cos^2(\omega_{\text{ВЧ}}t + \varphi_{\text{ВЧ}}) = \frac{1}{2} s_{\text{НЧ}}^2(t) + \frac{1}{2} s_{\text{НЧ}}^2(t) \cos(2\omega_{\text{ВЧ}}t + 2\varphi_{\text{ВЧ}}).$$

АМ з подавленою носійною (балансна модуляція) широко використовується в системах керування, де модулятор та демодулятор розміщуються на невеликих відстанях один від одного. У цьому разі один і той же генератор може виконувати роль як основного, так і місцевого.

При передаванні на великі відстані (наприклад, радіомовлення, талібачення, радіозв'язок) застосовують інші підходи, один із яких полягає у введенні в БМ-процес, що передається, так званої контрольної носійної з малою амплітудою та частотою $\omega_{\text{ВЧ}}$. Це носійне коливання використовується для синхронізації місцевого генератора. Однак, у будь-якому випадку, когерентні детектори є дуже складними в технічному відношенні та економічно не ефективними, особливо для систем із одним передавачем та багатьма приймачами (системи радіомовлення).

ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. Балансну модуляцію можна розглядати як операцію множення носійного гармонічного ВЧ- коливання на керуюче НЧ- коливання.
2. Обвідна БМ-процесу є модулем модульовального НЧ- коливання.
3. Для демодуляції БМ- процесу застосовується синхронне детектування.
4. Основна проблема синхронного детектування – точна синхронізація частоти та фази місцевого генератора з частотою та фазою ВЧ носійного ко-



Слід запам'ятати:

1. Математичну модель БМ- процесу:

$$s_{\text{БМ}}(t) = S_m(t) \cos(\omega_{\text{ВЧ}}t + \varphi_{\text{ВЧ}}) = s_{\text{НЧ}}(t) \cos(\omega_{\text{ВЧ}}t + \varphi_{\text{ВЧ}}).$$

2. Ширина спектра БМ- процесу визначається подвоєним значенням максимальної частоти в спектрі модульовального НЧ-коливання: $2\omega_{\text{НЧ}}$ ($2\omega_{\text{НЧ max}}$).
3. У БМ-процесі відсутня складова з частотою носійної.
4. Способи демодуляції БМ- процесів та їх сутність.

ливання.



Треба вміти:

1. Записати математичну модель БМ-процесу.
2. Пояснити принцип роботи когерентного детектора.

5.2.6 Односмугові амплітудно-модульовані процеси

Незважаючи на те, що при БМ істотно зменшується потужність передавача за рахунок подавлення носійної, необхідна смуга частот для передавання повідомлень залишається такою самою, що і при звичайній АМ (вдвічі більша за ширину спектра модулюючого НЧ-коливання), оскільки в обох випадках слід формувати нижні та верхні бічні складові, а отже, виділяти відповідні ділянки частотного діапазону, визначені смугами частот, що займають верхні бічні складові (верхня бічна смуга частот) та нижні бічні складові (нижня бічна смуга частот) відносно частоти $\omega_{ВЧ}$. Але як нижні, так і верхні бічні складові окремо повністю характеризують інформацію, що передається. Отже, для передавання всієї інформації достатньо виділити одну бічну (верхню або нижню) смугу частот (див. рис. 5.12).

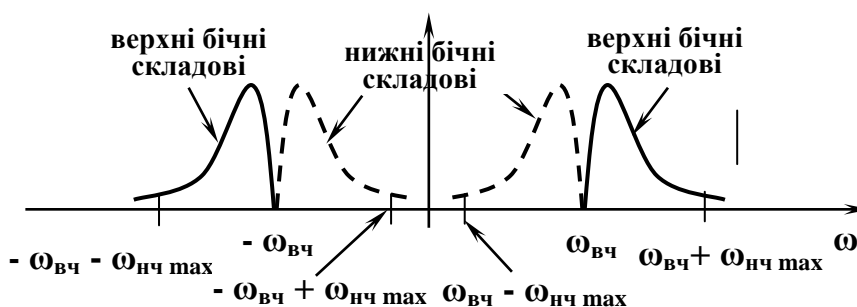


Рисунок 5.12 – До формування односмугового процесу.

Очевидно, це є дуже важливим з практичного погляду, оскільки скорочення займаної смуги частот дає змогу реалізувати частотне розділення каналів зв'язку, що забезпечує розміщення більшого числа каналів у заданому частотному діапазоні.

Така можливість реалізована в АМ-системах шляхом формування процесу з подавленою носійною та однією з бічних смуг час-

5.2.6 Односмугові амплітудно-модульовані процеси

тот (верхньою або нижньою). Цей вид модуляції відомий під назвою *односмугова АМ з подавленою носійною* або просто *односмугова модуляція*, а відповідні процеси називають *односмуговими з подавленою носійною* або *односмуговими процесами (ОС – процеси)*.

Отже, *ОС-процеси* більш економічно використовують смугу частот, а також ефективніші з енергетичного погляду за звичайний АМ-процеси.

У разі, якщо АМ є однотональною, то ОСП-сигнал описується таким співвідношенням (враховується верхня бічна складова для додатних частот):

$$\begin{aligned}
 s_{\text{ОСП}}(t) &= \frac{S_{m0}M}{2} \cos[(\omega_{\text{ВЧ}} + \omega_{\text{НЧ}})t + \varphi_{\text{ВЧ}} + \varphi_{\text{НЧ}}] = \\
 &= \frac{S_{m0}M}{2} \cos(\omega_{\text{ВЧ}} + \omega_{\text{НЧ}}) \underbrace{\cos(\omega_{\text{НЧ}}t + \varphi_{\text{НЧ}})}_{s_{\text{COS}}(t)} - \\
 &\quad - \frac{S_{m0}M}{2} \sin(\omega_{\text{ВЧ}}t + \varphi_{\text{ВЧ}}) \underbrace{\sin(\omega_{\text{НЧ}}t + \varphi_{\text{НЧ}})}_{s_{\text{SIN}}(t)} = \\
 &= S_m(t) \cos(\omega_{\text{ВЧ}}t + \varphi_{\text{ВЧ}} - \varphi(t)),
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

де обвідна

$$\begin{aligned}
 S_m(t) &= \sqrt{\left(\frac{S_{m0}M}{2}\right)^2 \cos^2(\omega_{\text{НЧ}}t + \varphi_{\text{НЧ}}) + \left(\frac{S_{m0}M}{2}\right)^2 \sin^2(\omega_{\text{НЧ}}t + \varphi_{\text{НЧ}})} = \\
 &= \frac{S_{m0}M}{2} = \text{const} \neq s_{\text{НЧ}}(t) = \cos(\omega_{\text{НЧ}}t + \varphi_{\text{НЧ}}),
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

а миттєва фаза

$$\begin{aligned}
 \varphi(t) &= \arctg \frac{(S_{m0}M / 2) s_{\text{SIN}}(t)}{(S_{m0}M / 2) s_{\text{COS}}(t)} = \arctg \frac{s_{\text{SIN}}(t)}{s_{\text{COS}}(t)} = \\
 &= \arctg \frac{\sin(\omega_{\text{НЧ}}t + \varphi_{\text{НЧ}})}{\cos(\omega_{\text{НЧ}}t + \varphi_{\text{НЧ}})} = \arctg[\text{tg}(\omega_{\text{НЧ}}t + \varphi_{\text{НЧ}})] = \omega_{\text{НЧ}}t + \varphi_{\text{НЧ}}.
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

Як впливає з (5.22), кожна складова ОСП-сигналу при однотональній АМ є добутком високочастотного та низькочастотного гармонічних коливань, що знаходяться в квадратурі. Тому одно-

нальний ОСП-сигнал можна розглядати як частковий випадок сигналу виду

$$\begin{aligned} s_{\text{ОСП}}(t) &= s_{\text{cos}}(t) \cos(\omega_{\text{ВЧ}}t + \varphi_{\text{ВЧ}}) - s_{\text{sin}}(t) \sin(\omega_{\text{ВЧ}}t + \varphi_{\text{ВЧ}}) = \\ &= S_m(t) \cos(\omega_{\text{ВЧ}}t + \varphi_{\text{ВЧ}} - \varphi(t)), \end{aligned} \quad (5.25)$$

в якому низькочастотні співмножники $s_{\text{cos}}(t)$ і $s_{\text{sin}}(t)$ називають *квадратурними компонентами* або *квадратурними складовими*.

Згідно з (5.23) у загальному випадку обвідна ОСП не збігається з $s_{\text{НЧ}}(t)$.

Аналітичне подання ОС-процесів дуже часто обґрунтовують із використанням перетворення Гільберта та поняття аналітичного сигналу, як одного з вузькосмугових сигналів.

Сигнал вважається смуговим, якщо його спектр зосереджується навколо частот $\pm f_{\text{ВЧ}} = \pm f_{\text{НОС}}$, де $f_{\text{НОС}}$ - частота високочастотного носійного коливання. Частоти спектральних складових смугового сигналу задовольняють таку умову:

$$f_{\text{НОС}} - F_{\text{max}} \leq |f| \leq f_{\text{НОС}} + F_{\text{max}},$$

де F_{max} – максимальна частота в спектрі смугового сигналу, що визначає ширину його спектра. Причому, якщо ширина спектра смугового сигналу набагато менше частоти носійної $f_{\text{НОС}}$, сигнал носить назву *вузькосмугового*: $F_{\text{max}} < f_{\text{НОС}}/10$. Можливі і інші оцінки. Наприклад, ширина спектра не повинна перевищувати однієї октави:

$$f_{\text{НОС}} + F_{\text{max}} < 2(f_{\text{НОС}} - F_{\text{max}}) \Rightarrow F_{\text{max}} < \frac{f_{\text{НОС}}}{3}.$$

Якщо звернутись до опису аналітичного сигналу $\psi(t) = s_c(t) - js_s(t) = S_m e^{-j\varphi(t)}$, в якому $s_c(t)$ та $s_s(t)$ є комплексноспряженими та задовольняють перетворенню Гільберта, то (5.25) можна записати у такому вигляді:

$$\begin{aligned} s_{\text{ОСП}}(t) &= \text{Re}[\psi(t)e^{j(\omega_{\text{ВЧ}}t + \varphi_{\text{ВЧ}})}] = \text{Re}[S_m(t)e^{j(\omega_{\text{ВЧ}}t + \varphi_{\text{ВЧ}} - \varphi(t))}] = \\ &= S_m(t) \cos(\omega_{\text{ВЧ}}t + \varphi_{\text{ВЧ}} - \varphi(t)), \end{aligned} \quad (5.26)$$

де обвідна $S_m(t)$ та миттєва фаза $\varphi(t)$ зв'язані такими співвідношеннями:

5.2.6 Односмугові амплітудно-модульовані процеси

$$S_m(t) = |\psi(t)| = \sqrt{s_c^2 + s_s^2}; \quad \varphi(t) = \operatorname{arctg} \frac{s_s(t)}{s_c(t)} = \arg \psi(t).$$

Таким чином, АМ ОСП-сигнал можна розглядати як дійсний сигнал (5.26), амплітуда та фаза якого змінюються з часом. Причому обвідна такого сигналу $S_m(t)$ є модулем аналітичного сигналу $\psi(t) = s_c(t) - js_s(t) = S_m(t)e^{-j\varphi(t)}$, а миттєва фаза $\varphi(t)$ - його аргументом, де $s_c(t) = s_{\text{НЧ}}(t)$, а $s_s(t) = \tilde{s}_{\text{НЧ}}(t)$ спряжена за Гільбертом до $s_{\text{НЧ}}(t)$ складова.

Односмугову модуляцію в системах можна реалізувати різними способами. Найбільш поширений полягає в тому, що спочатку за допомогою балансного модулятора формується БМ-сигнал, із якого потім відфільтровуються бічні складові тільки однієї бічної смуги частот. До фільтруючих систем, які при цьому використовуються, висуваються дуже жорсткі вимоги до селективності та стабільності смуги пропускання.

В інших системах односмугової модуляції фактично реалізується співвідношення (5.25). Початково в двох незалежних каналах формуються два БМ-процеси, носійні яких зсунуті одна відносно іншої на 90° . Потім за допомогою перетворень у відповідних фазозсувних колах отримують ОС-процес. Точність роботи таких систем, а точніше ступінь виділення однієї з бічних смуг у значній мірі залежить від синхронної роботи двох каналів. Слід також відмітити, що реалізація таких "фазових" методів є більш складною з технічного погляду, ніж при реалізації БМ чи АМ систем.

Виділення НЧ-коливання, як носія інформації, з модульованого односмугового сигналу здійснюється відповідною фільтрацією та синхронним детектуванням (рис. 5.13).

Смуговий фільтр з центральною частотою $(f_{\text{НОС}} - f_{\text{НЧ}})/2$ та смугою пропускання $\Delta f = f_{\text{НЧ max}}$ забезпечує виділення односмугового сигналу після його передавання каналом зв'язку. Після чого відфільтрований $\tilde{s}_{\text{ОСП}}(t)$ подається на балансний детектор, де перемножується з високочатотним сигналом $s_0(t)$ місцевого генератора. Це, як відомо, дає змогу сформувати НЧ-коливання $s_{\text{НЧ}}(t)$ та складову з частотою, що вдвічі перевищує $\omega_{\text{ВЧ}}$. ФНЧ виділяє $s_{\text{НЧ}}(t)$.

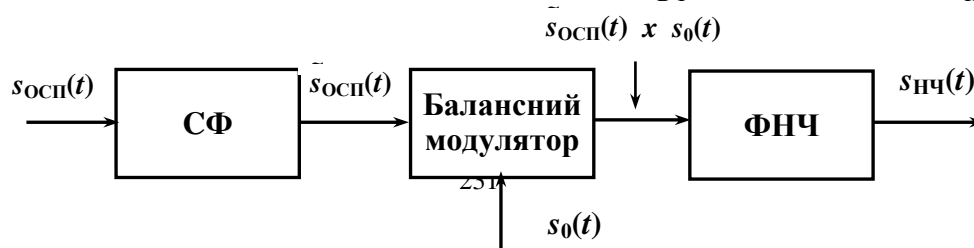


Рисунок 5.13 – Структурна схема односмугового демодулятора.

Як свідчить практика в системах односмугової модуляції, на відміну від систем із БМ, вимоги до стабільності місцевого генератора можуть бути менш жорсткими. У високоточних системах ОМ реалізуються всі ті способи підвищення точності відтворення інформації, що і в системах із БМ.

Незважаючи на те, що при ОМ забезпечується як зменшення потужності, що генерується, так і займаної смуги частот, її практичне використання не знайшло широкого поширення. Це зумовлено перш за все складністю систем ОМ та значною вартістю передавачів та приймачів. Проте, ОМ все ж використовується в багатоканальних системах зв'язку з частотним розділенням каналів. Так, наприклад, зв'язок на одній бічній смузі реалізується на завантажених ділянках діапазону коротких хвиль (від 3 до 30 МГц або 100...10 м) та діапазоні ультракоротких хвиль (30 МГц...300 ГГц або 10 м...1 мм).

ПІДСУМКИ**Необхідно зрозуміти:**

1. Для передавання інформації у повному об'ємі достатньо однієї бічної (верхньої або нижньої) смуги частот.

2. ОС-процес можна розглядати як дійсний з амплітудою та фазою, що змінюються в часі. У цьому разі обвідна $S_m(t)$ є модулем аналітичного сигналу $\psi(t) = s_c(t) - js_s(t)$, а миттєва фаза $\varphi(t)$ - його аргументом.

**Слід запам'ятати:**

1. Визначення понять: односмугова модуляція та односмуговий процес, квадратурна складова ОС-процесу, смуговий та вузькосмуговий процеси.

2. Математичну модель одного тонального ОС-процесу:

$$s_{\text{ОСП}}(t) = S_m(t) \cos(\omega_{\text{ВЧ}}t + \varphi_{\text{ВЧ}} - \varphi(t)) = \\ = \frac{S_{m0}M}{2} \cos((\omega_{\text{ВЧ}} - \omega_{\text{НЧ}})t + \varphi_{\text{ВЧ}} - \varphi_{\text{НЧ}}).$$

3. Структурну схему односмугового демодулятора.

**Треба вміти:**

1. Визначати поняття: односмугова модуляція та односмуговий процес, квадратурна складова ОС-процесу, смуговий та вузькосмуговий процеси.
2. Записати математичну модель однотонального ОС-процесу.
3. Зобразити структурну схему односмугового демодулятора та пояснити призначення кожного з елементів.
4. Пояснити сутність «фазових методів» побудови систем з ОС-процесами.

5.3 Неперервні процеси з кутовою модуляцією

5.3.1 Загальні принципи кутової модуляції

Амплітудна модуляція є лінійним перетворенням у тому розумінні, що при АМ структура спектра НЧ-коливання не змінюється, а переноситься в ВЧ-область на частоту $\omega_{ВЧ}$ високочастотного носія. При кутовій модуляції спектр НЧ-коливання не тільки переноситься в ВЧ-область, а змінюється і його структура: в спектрі з'являються нові спектральні складові, які не є лінійною комбінацією спектрів модулюючого та модульованого сигналів. Останнє є характерним для всіх форм нелінійних перетворень.

Отже,

◆ **кутова модуляція (КМ) відноситься до нелінійних перетворень.**

Для передавання інформації каналами зв'язку при неперервній кутовій модуляції, як і в системах з амплітудною модуляцією, в якості носія використовується високочастотне гармонічне коливання (5.1). Однак, на відміну від АМ, при КМ за законом НЧ-коливання, яке відображає інформацію, що передається, змінюється або частота $\omega_{ВЧ}$, або початкова фаза $\varphi_{ВЧ}$, а амплітуда S_{m0} залишається незмінною.

Кутова частота ω та початкова фаза φ гармонічного коливання визначають його повну фазу або фазовий кут:

$$\psi(t) = \omega t + \varphi. \quad (5.27)$$

Як впливає з (5.27), повна фаза гармонічного коливання є функцією часового аргумента та подається прямо пропорційною залежністю від часової змінної. Отже, значення повної фази (фазового кута) гармонічного коливання змінюються залежно від значень частоти та початкової фази. Ось чому процеси, в яких за законом НЧ- коливання змінюється повна фаза ВЧ гармонічного заповнення, отримали назву *процесів з кутовою модуляцією* або *КМ-процесів*.

Згідно з (5.27) початкова фаза

$$\varphi = \psi(t)|_{t=0}$$

та кутова частота

$$\omega = d\psi(t) / dt$$

є постійними величинами.

У разі, коли закон зміни повної фази відрізняється від лінійного на зразок (5.27), вводять поняття *миттєвої кутової частоти*

$$\omega(t) = d\psi(t) / dt, \quad (5.28)$$

такої, що повна фаза

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^t \omega(\lambda) d\lambda. \quad (5.29)$$

Тоді з урахуванням вищезазначеного узагальнена математична модель неперервних КМ-сигналів може бути записана у такому вигляді:

$$s_{\text{КМ}}(t) = S_{m0} \cos \psi[t, s_{\text{НЧ}}(t)]. \quad (5.30)$$

ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. Кутова модуляція (КМ) відноситься до нелінійних перетворень.



Слід запам'ятати:

1. Визначення понять: миттєва кутова частота та повна фаза.
2. При КМ за законом НЧ-

5.3 Неперервні процеси з кутовою модуляцією



Треба вміти:

1. Визначати поняття: миттєва кутова частота та повна фаза.
2. Записати узагальнену математичну модель КМ-процесу.

коливання, яке відображає інформацію, що передається, змінюється або частота $\omega_{\text{ВЧ}}$, або початкова фаза $\varphi_{\text{ВЧ}}$ високо частотного гармонічного носія, а його амплітуда S_{m0} залишається незмінною.

3. Узагальнену математичну модель КМ-процесу:

$$s_{\text{КМ}}(t) = S_{m0} \cos \psi[t, s_{\text{НЧ}}(t)].$$

5.3.2 Математичні моделі процесів із кутовою модуляцією

Фазомодульовані процеси. КМ-процеси – це загальна назва двох тісно пов'язаних між собою фазо (ФМ) - та частотно-модульованих (ЧМ).

- ◆ **Фазомодульованим процесом або ФМ-процесом** називають процес у вигляді (5.30), в якого повна фаза $\psi(t)$ змінюється за законом НЧ-коливання та пов'язана з ним такою залежністю:

$$\psi(t) = \omega_{\text{ВЧ}}t + ks_{\text{НЧ}}(t) + \varphi_{\text{ВЧ}}, \quad (5.31)$$

де k - деякий коефіцієнт пропорційності.

Підставивши (5.31) в (5.30), отримаємо математичну модель ФМ-сигналу:

$$s_{\text{ФМ}}(t) = S_{m0} \cos[\omega_{\text{ВЧ}}t + \varphi_{\text{ВЧ}} + ks_{\text{НЧ}}(t)]. \quad (5.32)$$

Здиференціювавши (5.31), дістанемо

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = \omega(t) = \omega_{\text{ВЧ}} + k \frac{ds_{\text{НЧ}}(t)}{dt} = \omega_{\text{ВЧ}} + \Delta\omega(t). \quad (5.33)$$

Як впливає з (5.32) і (5.33) зміна фазового кута прямо пропорційно $s_{НЧ}(t)$ при ФМ призводить до відхилення миттєвої частоти від $\omega_{ВЧ}$ прямо пропорційно похідній від модулюючого НЧ-коливання.

Якщо $s_{НЧ}(t) = 0$, то ФМ – сигнал є гармонічним ВЧ-коливанням. Оскільки співвідношення (5.31) відрізняється від лінійного (5.27), можна стверджувати, що при збільшенні миттєвих значень сигналу $s_{НЧ}(t)$ повна фаза $\psi(t)$ ФМ-сигналу $s_{ФМ}(t)$ буде зростати швидше, ніж у разі, якщо повна фаза $\psi(t)$ задовольняє (5.27). Зменшення значень модулюючого сигналу $s_{НЧ}(t)$ призводить до зменшення швидкості зростання $\psi(t)$. На рис. 5.14 наведено графіки ФМ-сигналу, керуючого НЧ-коливання та зміни приросту фазового кута $\Delta\psi$.

♦ **Максимальне відхилення повної фази ФМ-процесу від фази немодульованого ВЧ-коливання називають девіацією фази $\Delta\psi$.**

У разі, якщо сигнал $s_{НЧ}(t)$ є різнополярним (змінює знак), розрізняють *девіацію фази вгору* (відповідає додатним значенням $s_{НЧ}(t)$)

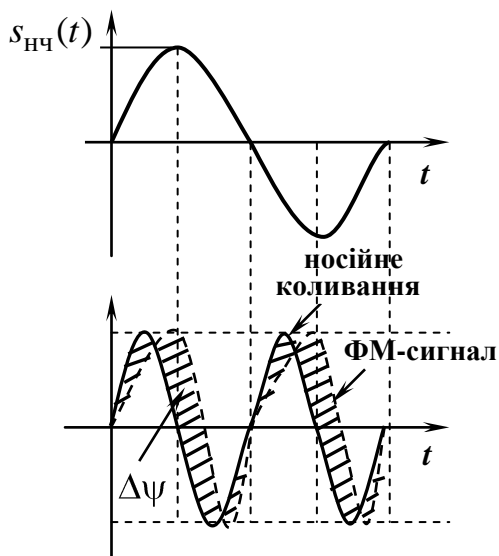


Рисунок 5.14 – До формування ФМ-сигналу.

$$\Delta\psi_{В} = k s_{\max}$$

та *девіацію фази вниз* (відповідає від'ємному значенню $s_{НЧ}(t)$)

$$\Delta\psi_{Н} = k s_{\min}.$$

Частотно модульовані процеси. При частотній модуляції за законом НЧ модульовального коливання змінюється миттєва кутова частота:

$$\omega_{ВЧ}(t) = \omega_{ВЧ} + k s_{НЧ}(t) = \omega_{ВЧ} + \Delta\omega(t), \quad (5.34)$$

де $\Delta\omega(t)$ - приріст частоти несучого ВЧ-коливання.

Відповідно до (5.29) при цьому повна фаза

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^t (\omega_{ВЧ} + k s_{НЧ}(\lambda)) d\lambda = \omega_{ВЧ} t + \varphi_{ВЧ} + k \int_{-\infty}^t s_{НЧ}(\lambda) d\lambda.$$

5.3.2 Математичні моделі процесів із кутовою модуляцією

Таким чином, зв'язок між модульовальною функцією та ЧМ-процесом можна записати у такому вигляді:

$$s_{\text{ЧМ}}(t) = S_{m0} \cos(\omega_{\text{ВЧ}}t + \varphi_{\text{ВЧ}} + k \int_{-\infty}^t s_{\text{НЧ}}(\lambda) d\lambda). \quad (5.35)$$

Порівнюючи співвідношення (5.32) та (5.35), які описують ФМ- та ЧМ-сигнали, дійдемо висновку, що для них справедливим є єдине подання математичної моделі:

$$s_{\text{КМ}}(t) = S_{m0} \cos[\omega_{\text{ВЧ}}t + \varphi_{\text{ВЧ}} + \varphi(t)]. \quad (5.36)$$

Останнє співвідношення і є узагальненою математичною моделлю сигналів із кутовою модуляцією.

В той же час між ФМ- та ЧМ- сигналом є принципова різниця: фазовий зсув ФМ-сигналу по відношенню до немодульованого коливання прямо пропорційний НЧ-коливанню $s_{\text{НЧ}}(t)$, в той же час для ЧМ-сигналу цей зсув прямо пропорційний інтегралу від НЧ-коливання.

Природнім параметром ЧМ-сигналу є *девіація частоти* $\Delta\omega$, тобто максимальне відхилення частоти ЧМ-сигналу від частоти $\omega_{\text{ВЧ}}$ немодульованого ВЧ-коливання.

Для знакозмінного сигналу виділяють *девіацію частоти вверх*

$$\Delta\omega_{\text{В}} = ks_{\text{max}} \quad (5.37)$$

та *девіацію частоти вниз*

$$\Delta\omega_{\text{Н}} = ks_{\text{min}}, \quad (5.38)$$

де s_{max} , s_{min} – пікові значення НЧ-коливання.

ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:



Слід запам'ятати:

1. Як частотна, так і фазова модуляції є різновидами модуляції кутової, коли за законом модульовального коливання

1. Визначення понять: фазо- та частотно-модульований процес, девіація фази та девіація частоти, девіація фази і частоти

змінюється фазовий кут.

2. Для ФМ зміна фазового кута прямо пропорційно модульовальному коливанию спричинює відхилення миттєвої частоти від частоти високочастотного носія прямо пропорційно похідній від нього.



Треба вміти:

1. Визначати поняття: фазово-частотно-модульований процес, девіація фази та девіація частоти, девіація фази і частоти вниз та ввєрх.

2. Записати математичні моделі ФМ- та ЧМ-процесів.

3. Пояснити різницю між ФМ- та ЧМ-процесами.

вниз та ввєрх.

2. Фазовий зсув ФМ-процесу по відношенню до немодульованого коливання прямо пропорційний модульовальному НЧ-коливанию, а для ЧМ-процесу - інтегралу від модульовального НЧ-коливання.

3. Математичні моделі:

$$s_{KM}(t) = S_{m0} \cos[\omega_{BЧ}t + \varphi_{BЧ} + \varphi(t)]$$

- КМ-процесу;

$$s_{ФМ}(t) = S_{m0} \cos[\omega_{BЧ}t + \varphi_{BЧ} + k s_{HЧ}(t)]$$

- ФМ-процесу;

$$s_{ЧМ}(t) = S_{m0} \cos(\omega_{BЧ}t + \varphi_{BЧ} + k \int_{-\infty}^t s_{HЧ}(\lambda) d\lambda)$$

- ЧМ-процесу.

5.3.3 Однотональні неперервні КМ-процеси

Для однотональної кутової модуляції модульовальне НЧ-коливання є звичайним гармонічним процесом. Тоді миттєва частота

$$\omega(t) = \omega_{BЧ} + \Delta\omega \cos(\omega_{HЧ}t + \varphi_{HЧ}), \tag{5.39}$$

де $\Delta\omega$ – девіація частоти, що може значно перевищувати $\omega_{HЧ}$, але завжди менше за $\omega_{BЧ}$.

Повна фаза такого процесу

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \omega_{BЧ}t + \varphi_{BЧ} + \int_{-\infty}^t \Delta\omega \cos(\omega_{HЧ}\lambda + \varphi_{HЧ}) d\lambda = \varphi_{BЧ}t + \varphi_{BЧ} + \\ &+ \frac{\Delta\omega}{\omega_{HЧ}} \sin(\omega_{HЧ}t + \varphi_{HЧ}) = \omega_{BЧ}t + \varphi_{BЧ} + m \sin(\omega_{HЧ}t + \varphi_{HЧ}) \end{aligned} \tag{5.40}$$

5.3.3 Однотональні неперервні ЧМ-процеси

Таким чином, однотональний ЧМ-процес

$$s_{\text{ОЧМ}}(t) = S_{m0} \cos[\omega_{\text{ВЧ}}t + \varphi_{\text{ВЧ}} + m \sin(\omega_{\text{НЧ}}t + \varphi_{\text{НЧ}})]. \quad (5.41)$$

Порівнявши (5.41) з описом ФМ-процесу при однотональній модуляції

$$s_{\text{ОФМ}}(t) = S_{m0} \cos[\omega_{\text{ВЧ}}t + \varphi_{\text{ВЧ}} + k s_{\text{НЧ}}(t)] = S_{m0} \cos[\omega_{\text{ВЧ}}t + \varphi_{\text{ВЧ}} + \Delta\psi(t)]$$

можна стверджувати, що при модуляції частоти за законом

$$\Delta\omega \cos(\omega_{\text{НЧ}}t + \varphi_{\text{НЧ}}) \quad (5.42)$$

ми отримуємо коливання, яке можна розглядати як ФМ процес із модуляцією фази за законом $\Delta\omega \cos(\omega_{\text{НЧ}}t + \varphi_{\text{НЧ}})$ з девіацією початкової фази $\Delta\psi = m$:

$$(m \sin(\omega_{\text{НЧ}}t + \varphi_{\text{НЧ}})) = k s_{\text{НЧ}}(t) = k A_m \sin(\omega_{\text{НЧ}}t + \varphi_{\text{НЧ}}). \quad (5.43)$$

Величину

$$m = \Delta\omega / \omega_{\text{НЧ}} \quad (5.44)$$

називають *індексом однотональної частотної модуляції*.

Слід звернути увагу на те, що індекс частотної однотональної модуляції не залежить від частоти $\omega_{\text{ВЧ}}$, а повністю визначається девіацією частоти $\Delta\omega$ та модулювальною частотою $\omega_{\text{НЧ}}$.

Згідно з (5.44) девіація частоти

$$\Delta\omega = m\omega_{\text{НЧ}}. \quad (5.45)$$

Отже, гармонічна ФМ з девіацією фази $\Delta\psi$, що дорівнює індексу m , еквівалентна частотній модуляції з девіацією частоти $\Delta\omega = m\omega_{\text{НЧ}}$, а це означає, що при однотональній кутовій модуляції за характером модульованого процесу важко зробити висновок, із якою модуляцією (фазовою чи частотною) ми маємо справу.

Однак слід пам'ятати, *ЧМ та ФМ процеси ведуть себе по різному при зміні частоти модуляції $\omega_{\text{НЧ}}$ та амплітуди НЧ (модулюючого) процесу.*

У разі ЧМ девіація $\Delta\omega$ є амплітудою модульовального коливання (див. (5.42)) і не залежить від $\omega_{\text{НЧ}}$; у разі ФМ девіація частоти згідно з (5.45) лінійно збільшується з частотою $\omega_{\text{НЧ}}$. З іншого боку, у

разі ЧМ девіація $\Delta\omega$ (див. (5.43)), а при ФМ – індекс m , змінюється пропорційно амплітуді НЧ-коливання.

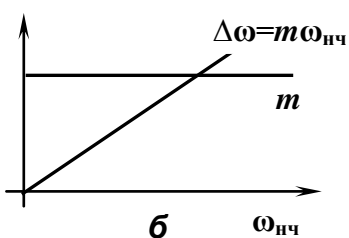
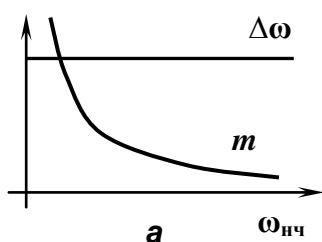


Рисунок 5.15 – Залежність від частоти модуляції індекса модуляції та девіації частоти: а- для ЧМ; б- для ФМ.

◆ Отже, якщо в якості модульовального коливання застосовується гармонічне коливання, то з'ясувати різницю між ФМ та ЧМ можливо тільки змінюючи частоту модуляції.

У разі ЧМ девіація $\Delta\omega$ не залежить від частоти модуляції $\omega_{нч}$, а визначається тільки амплітудою НЧ-коливання; індекс модуляції m з ростом частоти модуляції буде зменшуватись, а також змінюватиметься пропорційно амплітуді (див. рис. 5.15, а).

У разі ФМ індекс модуляції m залежить тільки від амплітуди НЧ- коливання та не залежить від його частоти $\omega_{нч}$; девіація частоти $\Delta\omega$ залежить як від амплітуди, так і частоти $\omega_{нч}$. У разі збільшення частоти $\omega_{нч}$ девіація

$\Delta\omega$ зростає (див. рис. 5.15, б).

ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:



Слід запам'ятати:

1. При однотональній кутовій модуляції за характером модульованого процесу важко зробити висновок, про яку модуляцію, фазову чи частотну, йдеться.

2. З'ясувати різницю між однотональною фазо- та частотною модуляціями можна тільки, змінюючи частоту модуляції.

3. Однотональні ЧМ- та ФМ-

1. Визначення понять: індекс однотональної частотної модуляції.

2. У разі однотональної ЧМ девіація частоти не залежить від частоти модуляції, а визначається амплітудою НЧ-коливання; індекс модуляції із збільшенням частоти модуляції буде зменшуватись, а також змінюватиметься прямо пропорційно амплітуді.

3. У разі однотональної ФМ

5.3.3 Однотональні неперервні КМ-процеси

процеси ведуть себе по-різному при зміні частоти модуляції та амплітуди модулювального процесу.



Треба вміти:

1. Визначати поняття: індекс однотональної частотної модуляції

2. Обґрунтувати залежності від частоти модуляції індексу модуляції та девіації частоти для ЧМ та ФМ.

3. Записати математичні моделі однотональних ЧМ- та ФМ-процесів.

4. Навести формули для обчислення миттєвої частоти та індексу однотональної частотної модуляції.

індекс модуляції залежить тільки від амплітуди НЧ-коливання та не залежить від його частоти; девіація частоти залежить як від амплітуди, так і частоти модулювального коливання: при її збільшенні девіація частоти зростає.

4. Математичні моделі:

$$s_{\text{ОЧМ}}(t) = S_{m0} \cos[\omega_{\text{ВЧ}}t + \varphi_{\text{ВЧ}} + m \sin(\omega_{\text{НЧ}}t + \varphi_{\text{НЧ}})]$$

- однотонального ЧМ-процесу;

$$s_{\text{ОФМ}}(t) = S_{m0} \cos[\omega_{\text{ВЧ}}t + \varphi_{\text{ВЧ}} + kA_m \sin(\omega_{\text{НЧ}}t + \varphi_{\text{НЧ}})]$$

- однотонального ФМ-процесу.

5. Формули:

$m = \Delta\omega / \omega_{\text{НЧ}}$ - індекс однотонального ЧМ-процесу.

5.3.4 Спектральний аналіз та кореляційна функція однотональних вузькосмугових КМ-процесів

Спектральний аналіз. Індекс частотної модуляції m може змінюватись в широких межах. Процеси, для яких $m \ll 1$, прийнято називати *вузькосмуговими* ЧМ- чи ФМ-процесами, а якщо $m \gg 1$, – *широкосмуговими*.

Розглянемо однотональний ЧМ-процес (5.41), для якого $m \ll 1$.

Припустимо, що $\varphi_{\text{ВЧ}} = \varphi_{\text{НЧ}} = 0$, тоді

5.3.4 Спектральний аналіз та кореляційна функція однотональних вузько-смугових КМ-процесів

$$s_{\text{КМ}}(t) = S_{m0} \cos(\omega_{\text{ВЧ}}t \cos(m \sin(\omega_{\text{НЧ}}t)) - \sin \omega_{\text{ВЧ}}t \sin(m \sin(\omega_{\text{НЧ}}t))).$$

Оскільки $m \ll 1$, то можемо записати таке:

$$\cos(m \sin(\omega_{\text{НЧ}}t)) \approx 1, \quad \sin(m \sin \omega_{\text{НЧ}}t) \approx m \sin \omega_{\text{НЧ}}t.$$

Ураховуючи також те, що $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$, а $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$, дістанемо:

$$\begin{aligned} s_{\text{КМ}}(t) &\approx S_{m0} \cos \omega_{\text{ВЧ}}t - m \sin \omega_{\text{ВЧ}}t \sin \omega_{\text{НЧ}}t = \\ &= S_{m0} \cos \omega_{\text{ВЧ}}t + \frac{S_{m0}m}{2} \cos(\omega_{\text{ВЧ}} + \omega_{\text{НЧ}})t - \frac{S_{m0}m}{2} \cos(\omega_{\text{ВЧ}} - \omega_{\text{НЧ}})t. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Таким чином,

- ♦ **вузькосмуговий однотональний КМ- процес містить три спектральні складові: носійне колювання та дві бічні складові (верхня з частотою $\omega_{\text{НЧ}} + \omega_{\text{ВЧ}}$ та нижня з частотою $\omega_{\text{ВЧ}} - \omega_{\text{НЧ}}$).**

Слід звернути увагу на те, що спектральний склад однотонального вузькосмугового КМ-процесу такий самий, як у однотонального АМ-процесу з коефіцієнтом амплітудної модуляції $M = m$. Проте, нижня бічна складова однотонального вузькосмугового КМ-процесу має додатковий фазовий зсув 180° (див. рис. 5.16, а). Це і забезпечує незмінність амплітуди такого процесу на відміну від АМ (рис. 5.16, б).

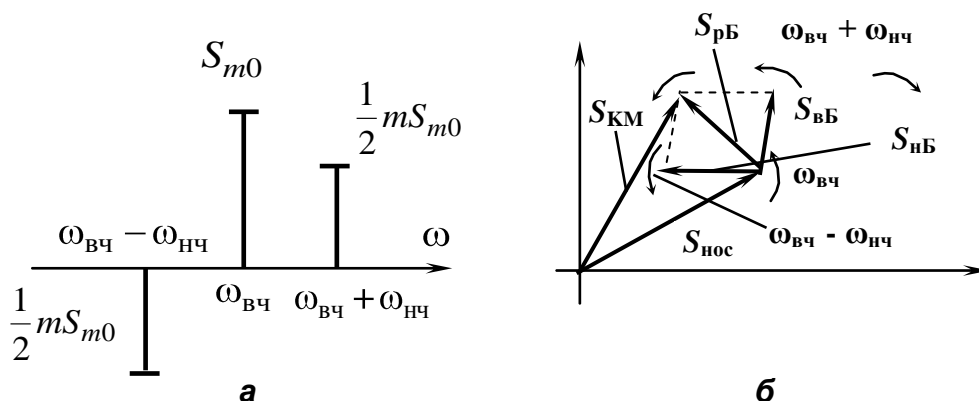


Рисунок 5.16 – Спектр вузькосмугового однотонального КМ-процесу (а) та його графічна інтерпретація (б).

Вектор довжиною $S_{\text{нос}} = S_{m0}$, що відображає носійне коливання, обертається відносно початку координат із постійною швидкістю $\omega_{\text{вч}}$. Вектори бічних складових із однаковими довжинами $S_{\text{нБ}} = S_{\text{вБ}} = mS_{m0}/2$ обертаються відносно кінця першого вектора в протилежних напрямках із швидкістю $\omega_{\text{нч}}$, значно меншою за швидкість $\omega_{\text{вч}}$. Відносно початку координат швидкості зазначених векторів є такими: для верхньої бічної складової $\omega_{\text{вч}} + \omega_{\text{нч}}$, а для нижньої - $\omega_{\text{вч}} - \omega_{\text{нч}}$. Причому вектор нижньої бічної складової має додатковий фазовий зсув у 180° . Сумарний вектор бічних складових $S_{\text{рБ}}$, таким чином, завжди обертається відносно початку координат із швидкістю $\omega_{\text{вч}}$ та має довжину, яка забезпечує співпадання довжини результуючого вектора, що відповідає однотональному вузькосмуговому КМ-процесу, та носійного коливання.

Зазначимо, що ширина спектра однотональних АМ- та вузькосмугового КМ-процесів збігаються: $\Delta\omega_{\text{СП}} = 2\omega_{\text{нч}}$.

► **Приклад.** Виконати спектральний аналіз процесу з кутовою однотональною модуляцією $s_{\text{КМ}}(t) = 8 \cos(10^6 t + 0,06 \sin 10^4 t)$.

Для заданого процесу $\omega_{\text{вч}} = 10^6$ рад/с, $\omega_{\text{нч}} = 10^4$ рад/с, а індекс частотної модуляції $m = 0,06 \ll 1$. Отже, ми маємо вузькосмуговий КМ-процес і для його спектрального аналізу можна скористатися співвідношенням (5.46) та зробленими висновками.

Тоді, амплітуда носійного коливання $S_{m_{\text{ЮС}}} = 8$, а його частота $\omega_{\text{вч}} = 10^6$ рад/с. Бічні складові мають амплітуду 0,24 та відповідно верхню $\omega_{\text{в}} = 1,01 \cdot 10^6$ рад/с та $\omega_{\text{н}} = 0,99 \cdot 10^6$ рад/с нижню бічні частоти. Початкові фази носійного та верхнього бічного коливань дорівнюють нулю, а нижнього мінус 180° .

Девіація частоти $\Delta\omega = m\omega_{\text{нч}} = 0,06 \cdot 10^4 = 0,0006 \cdot 10^6$ рад/с, а ширина спектра $\Delta\omega_{\text{СП}} = 2\omega_{\text{нч}} = 2 \cdot 10^4 \gg \Delta\omega$.

Тоді, мінімальне значення миттєвої частоти $\omega_{\text{min}} = \omega_{\text{вч}} - \Delta\omega = 10^6 - 0,0006 \cdot 10^6 = 0,99994 \cdot 10^6$ рад/с, а максимальне $\omega_{\text{max}} = 10^6 + 0,0004 \cdot 10^6$ рад/с.

5.3.4 Спектральний аналіз та кореляційна функція однотональних вузько-смугових КМ-процесів

Кореляційна функція. Відповідно до означення кореляційної функції та співвідношення (5.46)

$$\begin{aligned}
 K_{s_{\text{КМ}}}(\tau) &= \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \int_0^{T_0} s_{\text{КМ}}(t) s_{\text{КМ}}(t - \tau) dt = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s_{\text{ВЧ}}(t) s_{\text{ВЧ}}(t - \tau) dt + \\
 &+ \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s_{\text{ВБ}}(t) s_{\text{ВБ}}(t - \tau) dt - \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s_{\text{НБ}}(t) s_{\text{НБ}}(t - \tau) dt = \\
 &= K_{\text{ВЧ}}(\tau) + K_{\text{ВБ}}(\tau) + K_{\text{НБ}}(\tau).
 \end{aligned}$$

Враховавши, що складові досліджуваного КМ-процесу є гармонічними коливаннями, кореляційні функції яких є також гармонічними тієї самої частоти відносно τ , дістанемо

$$\begin{aligned}
 K_{s_{\text{КМ}}}(\tau) &= \frac{S_{m0}^2}{2} \cos \omega_{\text{ВЧ}} \tau + \frac{(S_{m0m})^2}{2} \cos(\omega_{\text{ВЧ}} + \omega_{\text{НЧ}}) \tau - \\
 &- \frac{(S_{m0m})^2}{2} \cos(\omega_{\text{ВЧ}} - \omega_{\text{НЧ}}) \tau.
 \end{aligned} \tag{5.47}$$

◆ Отже, **кореляційна функція однотонального вузькосмугового КМ-процесу є сумою кореляційних функцій його спектральних гармонічних складових.**

ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. Спектри однотонального вузькосмугового КМ-процесу і однотонального АМ-процесу для однакових значень коефіцієнтів амплітудної та частотної модуляції збігаються. Проте, нижня бічна складова однотонального вузькосмугового КМ-процесу має додатковий фазовий зсув 180° , що і забезпечує незмінність амплітуди такого



Слід запам'ятати:

1. Визначення понять: вузькосмуговий ЧМ-процес.
 2. Ширини спектрів однотональних АМ- та вузькосмугового КМ-процесів збігаються.
 3. Векторну діаграму вузькосмугового однотонального КМ-процесу.
 4. Кореляційна функція однотонального вузькосмугового КМ-

процесу на відміну від АМ.

процесу є сумою кореляційних функцій його спектральних гармонічних складових.



Треба вміти:

1. Визначати поняття: вузько- та широкосмуговий ЧМ-процес.
2. Проводити спектральний аналіз вузькосмугових процесів з однотональною кутовою модуляцією.
3. Зображати векторну діаграму вузькосмугового однотонального КМ-процесу.

5.3.5 Спектральні та енергетичні характеристики однотональних КМ-процесів за довільних значень індексу модуляції

Спектральні характеристики. Детальні дослідження показують, що спектр однотонального вузькосмугового КМ-процесу за структурою складніший за спектр однотонального АМ-процесу. Такий спектр містить окрім вказаних верхньої та нижньої бічних складових також і складові з частотами, що відповідають гармонікам модульовального НЧ коливання.

Основу аналізу КМ-процесів для довільних значень індекса модуляції складає апарат **функцій Бесселя**. Використання цього апарату дає змогу записати, наприклад, однотональний КМ-процес у такому вигляді (за умови, що початкові фази $\varphi_{\text{ВЧ}} = \varphi_{\text{НЧ}} = 0$):

$$\begin{aligned} s_{\text{КМ}}(t) &= S_{m0} \cos(\omega_{\text{ВЧ}}t + m \sin \omega_{\text{НЧ}}t) = \\ &= S_{m0} \cos \omega_{\text{ВЧ}}t \left\{ [J_0(m) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(m) \cos 2n\omega_{\text{НЧ}}t] \right\} - \\ &- S_{m0} \sin \omega_{\text{ВЧ}}t \left\{ 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(m) \sin(2n-1)\omega_{\text{НЧ}}t \right\}, \end{aligned} \quad (5.48)$$

де $J_n(m)$ – функції Бесселя першого роду n -го порядку від аргументу m .

Співвідношення (5.48) можна отримати, записавши (5.41) (за умови, що початкові фази $\varphi_{\text{ВЧ}} = \varphi_{\text{НЧ}} = 0$) як

$$\begin{aligned} s_{\text{КМ}}(t) &= S_{m0} \cos(\omega_{\text{ВЧ}}t + m \sin \omega_{\text{НЧ}}t) = S_{m0} \cos(\omega_{\text{ВЧ}}t) \cos(m \sin \omega_{\text{НЧ}}t) - \\ &- S_{m0} \sin(\omega_{\text{ВЧ}}t) \sin(m \sin \omega_{\text{НЧ}}t) \end{aligned}$$

та врахувавши, що

$$\begin{aligned} \cos(m \sin \omega_{\text{НЧ}}t) &= J_0(m) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(m) \cos 2n\omega_{\text{НЧ}}t, \\ \sin(m \sin \omega_{\text{НЧ}}t) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(m) \sin(2n-1)\omega_{\text{НЧ}}t. \end{aligned}$$

Співвідношення (5.48) можна записати в більш компактному вигляді:

5.3.5 Спектральні та енергетичні характеристики однотоновальних КМ-процесів задовільних значень індексу модуляції

$$s_{\text{КМ}}(t) == S_{m0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) \cos(\omega_{\text{ВЧ}} + n\omega_{\text{НЧ}})t. \quad (5.49)$$

- ◆ Таким чином, **спектр однотоновального КМ-процесу в загальному випадку складається з нескінченної кількості спектральних складових із частотами $\omega_{\text{ВЧ}} \pm n\omega_{\text{НЧ}}$. Амплітуди цих складових прямо пропорційні значенням функцій Бесселя $J_n(m)$.**

Складова з частотою $\omega_{\text{ВЧ}}$ та амплітудою $S_{m0}J_0(m)$ є носійним коливанням, а складові з частотами $\omega_{\text{ВЧ}} \pm n\omega_{\text{НЧ}}$ називають верхніми (для $n > 0$) та нижніми (для $n < 0$) бічними складовими, що розміщуються симетрично носійного коливання з амплітудами $J_{+n}(m)$ та $J_{-n}(m)$ відповідно.

Відомо, що функції Бесселя з додатними та від'ємними значеннями індекса n пов'язані між собою:

$$J_{-n}(m) = (-1)^n J_{+n}(m).$$

Звідси випливає, що початкові фази бічних коливань з частотами $\omega_{\text{ВЧ}} \pm n\omega_{\text{НЧ}}$ збігаються, якщо n парне, та відрізняються на 180° , якщо n – непарне число.

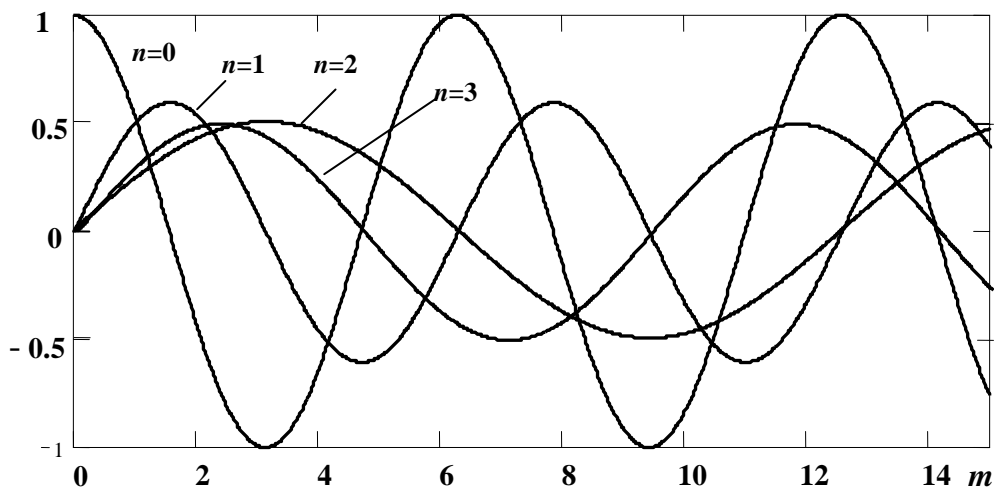


Рисунок 5.17 - Графічне зображення функцій Бесселя різних порядків.

Для детального аналізу та побудови спектральних діаграм, потрібно знати особливі властивості функцій Бесселя для різних значень m залежно від їх порядку (індекса) n . Лінії на рис. 5.17 є графіч-

ною ілюстрацією нулів, максимумів, мінімумів та асимптотичної поведінки функцій Бесселя $J_n(m)$.

Відмітимо характерні особливості:

- зі збільшенням аргумента значення функції поступово прямують до нуля, але з різною швидкістю; для малих значень аргумента ця швидкість є значно більшою;
- чим більше порядок функції Бесселя, тим довшою є область, в межах якої зі збільшенням аргумента значення функції дуже малі.

Отже,

- ◆ зі збільшенням індексу модуляції m кількість спектральних бічних складових зростає, а смуга частот, яку процес займає, розширюється.

Хоча теоретично кількість спектральних складових зі збільшенням індекса модуляції m зростає до нескінченності, практично для його заданого значення складові з номерами, більшими за $n = m + 1$, можна не враховувати в силу малих значень їхніх амплітуд $S_{m0}J_{m+1}(m)$. Із цього випливає така оцінка практичної ширини спектра процесу з кутовою однотональною модуляцією:

$$\Delta\omega_{\text{СП}} = 2(m+1)\omega_{\text{НЧ}} = 2m\omega_{\text{НЧ}} + 2\omega_{\text{НЧ}} = 2(\Delta\omega + \omega_{\text{НЧ}}). \quad (5.50)$$

Отже,

- ◆ процес з однотональною кутовою модуляцією займає смугу частот, що приблизно дорівнює подвоєній сумі дев'яти частоти та частоти модуляції $\omega_{\text{НЧ}}$ і не може бути меншим за $2\omega_{\text{НЧ}}$;
- ◆ для вузькосмугових процесів ($m \ll 1$) ширина спектра $\Delta\omega_{\text{СП}} = 2\omega_{\text{НЧ}} \gg \Delta\omega$, а у разі широкосмугового процесу - вдвічі перевищує дев'яці частоти:

$$\Delta\omega_{\text{СП}} \approx 2\Delta\omega. \quad (5.51)$$

Більш широка смуга частот КМ-процесів для значень $m \gg 1$ в порівнянні з АМ-процесами зумовлює їх практичне застосування в системах радіозв'язку, але тільки в діапазонах дуже високих частот (метрові та дециметрові хвилі). В ЧМ-радіомовленні максимальне

5.3.5 Спектральні та енергетичні характеристики однотональних ЧМ-процесів задовільних значень індексу модуляції

значення девіації, яке зумовлюється модулювальним процесом, складає 75 кГц. Якщо припустити, що максимальна частота звукового процесу $f_{\text{НЧ}} = 15$ кГц, то тоді індекс модуляції $m = 5$, а ширина спектра такого процесу становить приблизно 150 кГц. У цьому разі сусідні спектральні складові рознесені по частоті на 200 кГц. У той же час ця властивість (широкосмуговість) забезпечує і більш високу завадостійкість процесів із кутовою модуляцією в порівнянні з амплітудно-модульованими процесами. Тобто, на відміну від АМ-процесів кутова модуляція забезпечує кращу вірність приймання повідомлення, що передається, за рахунок підвищеної стійкості до дії завад та шумів. Відома, наприклад, властивість ЧМ-систем подавляти адитивну шумову заваду, що забезпечує на виході системи передачі інформації підвищене значення відношення процес/шум. Слід, однак, пам'ятати, що це досягається ціною розширення займаної смуги частот для розміщення інформації.

Відстань між бічними спектральними складовими в спектрі процесу з кутовою модуляцією визначається модулювальною частотою $\omega_{\text{НЧ}}$, а тому кількість цих складових у діапазоні $\Delta\omega_{\text{СП}}$ для широкосмугових процесів приблизно на одиницю більша за подвоєне значенням індекса модуляції m , а для вузькосмугових – дорівнює двом.

У цьому зв'язку, слід звернути увагу на особливості спектрів ЧМ та ФМ-процесів з однотональною модуляцією. Відомо, що у разі ЧМ девіація частоти $\Delta\omega$ не залежить від модулюючої частоти $\omega_{\text{НЧ}}$ та прямо пропорційна амплітуді НЧ-коливань. Тому збільшення $\omega_{\text{НЧ}}$ не спричинює істотного розширення спектра, як це повинно було б бути згідно з (5.50). Пояснюється це тим, що за ЧМ-модуляції таке збільшення $\omega_{\text{НЧ}}$ спричинює зменшення індекса модуляції m , а отже, згідно з (5.50) інтегрально варіація частоти модулюючого коливання майже не відбивається на ширині спектра. Однак, у цьому разі відстань між спектральними складовими збільшується, а їхня кількість зменшується. Якщо ж модулювальну частоту зменшувати, то кількість спектральних складових буде збільшуватися, зросте і індекс модуляції m , а ширина спектра $\Delta\omega_{\text{СП}}$ всеодно залишиться без змін.

Отже,

◆ незмінність практичної ширини спектра ЧМ-процесу є однією з переваг кутової модуляції.

► **Приклад.** *Однотональний ЧМ-процес характеризується такими параметрами: частота модуляції $f_{\text{нч}}=10$ кГц; девіація частоти $\Delta f = 40$ кГц. Обчислити: 1) ширину спектра $\Delta f_{\text{сп}}$; 2) кількість спектральних складових у діапазоні частот $\Delta f_{\text{сп}}$. Визначити зазначені величини у разі: а) збільшення частоти $f_{\text{нч}}$ вдвічі; б) збільшенні амплітуди модулюючого коливання вдвічі.*

Для визначення характеру початкового процесу обчислимо значення індекса модуляції $m = \Delta f / f_{\text{нч}} = 40/10 = 4$. Отже, маємо широкосмуговий ЧМ-процес, ширина спектра якого $\Delta f_{\text{сп}} = 2(\Delta f + f_{\text{нч}}) = 2(40+10) = 100$ кГц, а кількість бічних спектральних складових $N_{\text{б}} = \Delta f_{\text{сп}} / f_{\text{нч}} + 1 = 100/10 + 1 = 11$.

При збільшенні частоти модуляції вдвічі (тобто до 20 кГц) індекс модуляції $m = 40/20 = 2$ зменшиться вдвічі, але його значення ще відповідає широкосмуговому процесу. Тому згідно з (5.50) ширина спектра $\Delta f_{\text{сп}} = 2(2+1)20 = 120$ кГц, а кількість бічних спектральних складових $N_{\text{б}} = 2(m+1) + 1 = 2(2+1) + 1 = 7$.

Збільшення амплітуди спричинює зростання девіації вдвічі.

Тоді індекс модуляції $m = \Delta f / f_{\text{нч}} = 80/10 = 8 \gg 1$. Для такого індекса модуляції ширина спектра $\Delta f_{\text{сп}} = 2(80+10) = 180$ кГц, а кількість бічних складових $N_{\text{б}} = 2 \cdot (8+1) + 1 = 19$.



Підкреслимо, що у разі малих значень індекса модуляції ($m \ll 1$) ширина спектра ЧМ-процесу $2\omega_{\text{нч}}$ значно перевищує діапазон зміни миттєвої частоти, тобто подвоєну девіацію, а кількість спектральних складових у спектрі незначна. Ці особливості знаходять практичне застосування в системах відеозапису телевізійних процесів, де використовуються ЧМ-процеси з малими індексами модуляції.

Тепер розглянемо ФМ-процеси. Відомо, що для таких процесів індекс модуляції не змінюється при зміні частоти модулюючого процесу $\omega_{\text{нч}}$, а девіація частоти $\Delta\omega$ лінійно зростає зі збільшенням $\omega_{\text{нч}}$ (див. рис. 5.15, б). Тоді за незмінної амплітуди модулюючого процесу у разі зростання $\omega_{\text{нч}}$, ширина спектра $\Delta\omega_{\text{сп}}$ буде збільшуватись, буде збільшуватися відстань між спектральними складовими, а їхня кількість залишиться незмінною.

◆ **Істотна зміна ширини спектра ФМ-процесу є одним із недоліків фазової модуляції.**

5.3.5 Спектральні та енергетичні характеристики однотональних КМ-процесів задовільних значень індексу модуляції

► **Приклад.** Розв'язати завдання попереднього прикладу, вважаючи, що йдеться про фазомодульований процес із тими самими параметрами, як і у ЧМ-процесу.

Якщо врахувати, що ЧМ- та ФМ-процеси при однотональній модуляції еквівалентні для однакових значень відповідних параметрів та за умови, що девіація фази $\Delta\psi = m$, тоді для $f_{\text{нч}}=10$ кГц, $\Delta f = 40$ кГц ми отримаємо: $m = 4$, $\Delta f_{\text{сп}}=100$ кГц, а $N_{\text{Б}} = 11$ (як і у разі ЧМ-процесу).

При збільшенні частоти модуляції вдвічі індекс модуляції, як відомо, не зміниться, отже, не зміниться широкосмуговий характер ФМ-процесу і число бічних спектральних складових. Девіація частоти у цьому разі зростає вдвічі, збільшується і ширина спектра ($\Delta f_{\text{сп}} = 2(\Delta f + f_{\text{нч}}) = 2(80 + 20) = 200$ кГц. Якщо ж кількість бічних спектральних складових не змінюється, то розширення спектра спричинює збільшення відстані між складовими:

Збільшивши амплітуду вдвічі та залишивши без змін $f_{\text{нч}}$, ми змінимо як індекс модуляції, так і девіацію частоти ($m = 8$; $\Delta f = mf_{\text{нч}} = 8 \cdot 10 = 80$ кГц. Усе це спричинить як збільшення кількості спектральних складових, так і ширини спектра:

$$\Delta f_{\text{сп}} = 2(m+1)f_{\text{нч}} = 2 \cdot 9 \cdot 10 = 180 \text{ кГц}; N_{\text{Б}} = 19.$$



Використання частотної (кутової) модуляції за рахунок розширення займаної смуги частот дає змогу підвищити відношення сигнал/завада після демодуляції. За певних умов таке відношення на виході ЧМ-системи (широкосмугової) значно перевищує на її вході. Це пов'язане зі здатністю детекторів КМ-процесів подавляти адитивну заваду. Таке явище не спостерігається при детектуванні в системах із АМ. Однак, при частотному детектуванні слід рахуватися з явищем, яке отримало назву "поріг завадостійкості". Для того, щоб КМ-процес був наділений властивістю підвищеної завадостійкості потрібно, щоб такий процес перевищував пороговий рівень. Іншими словами, потужність КМ-процесу значно перевищувала потужність завади. Якість КМ-системи істотно погіршується, якщо відношення сигнал/завада для великих значень індекса модуляції m менше, ніж 10...13 дБ.

Енергетичні характеристики. Основними енергетичними характеристиками процесів, у тому числі і однотональних КМ-процесів з довільними значеннями індекса модуляції, вважаються енергія E_s , миттєва $p(t)$ та середня P_{cp} потужності. Оскільки амплітуда S_{m0} носійного коливання при кутовій модуляції не змінюється, то залишається без змін і середня за період носійного коливання потужність КМ-процесу.

Як зазначалося раніше, спектр КМ-процесу складається (див. (5.49) з носійного коливання з амплітудою $S_{m0}J_n(m)$ та бічних гармонічних складових з частотами $\omega_{вч} \pm n\omega_{нч}$ та амплітудами $S_{m0}J_n(m)$. Амплітуди усіх складових КМ-процесу визначаються функціями Бесселя першого роду порядку n від аргумента m . Тоді, згідно з рівністю Парсеваля

$$P_{cp.КМ} = P_{cp.нос} + P_{cp.Б} = [S_{m0}J_0(m)]^2 / 2 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{n=\infty} [S_{m0}J_n(m)]^2 / 2. \quad (5.52)$$

Відомо, що середня потужність потужність носійного процесу $P_{cp} = S_{m0}^2 / 2 = P_{cp.нос}$. Тоді, як випливає з (5.52) та з незмінності середньої потужності КМ-процесу, наявність бічних складових спричинює зменшення потужності носійного коливання до величини $P_{cp.нос} = [S_{m0}J_0(m)]^2 / 2$, а для деяких значень індекса модуляції, коли функція Бесселя нульового порядку $J_0(m) = 0$, - до нуля. Тобто, для певних значень індекса кутової модуляції m носій не коливання у спектрі КМ-процесу відсутнє.

Отже, у разі зміни індекса модуляції m у КМ-процесах відбувається перерозподіл потужності процесу $s_{КМ}(t)$ між носійним коливанням та бічними складовими. Більш того, за певних значень m носійна складова зникає і вся потужність КМ-процесу витрачається на передавання бічних складових, що містять передавану інформацію, тобто всі 100% випромінюваної потужності витрачаються на передавання корисної інформації. При кутовій модуляції потужність передавача, що формує процес $s_{КМ}(t)$, використовується повністю. Більш того, за певних значень m , коли вклад носійної істотно зменшується, коефіцієнт корисної дії системи з кутовою модуляцією значно зростає.

ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. Із збільшенням індексу модуляції кількість спектральних бічних складових однотонового КМ-процесу зростає, а смуга частот, яку процес займає, розширюється.

2. Кутова модуляція, на відміну від АМ, забезпечує кращу вірність приймання повідомлень за рахунок підвищеної стійкості до дії завад, але розширення смуги частот для розміщення інформації.

3. Незмінність практичної ширини спектра ЧМ-процесу є однією з переваг КМ.

4. За період носійного коливання середня потужність КМ-процесу залишається незмінною та перерозподіляється між його спектральними складовими.



Треба вміти:

1. Проводити спектральний аналіз однотонових КМ-процесів за довільних значень індекса модуляції та визначати його енергетичні характеристики.



Слід запам'ятати:

1. Спектр однотонового КМ-процесу в загальному випадку складається з нескінченної кількості спектральних складових із частотами $\omega_{\text{ВЧ}} \pm n\omega_{\text{НЧ}}$. Амплітуди цих складових прямо пропорційні значенням функцій Бесселя $J_n(m)$.

2. Характерні властивості функцій Бесселя $J_n(m)$ для різних значень m залежно від порядку (індекса) n .

4. Однотоновий КМ-процес займає смугу частот, що приблизно дорівнює подвоєній сумі девіації частоти та частоти модуляції; для вузькосмугових КМ-процесів ширина спектра $\Delta\omega_{\text{СП}} = 2\omega_{\text{НЧ}} \gg \Delta\omega$, а для широкосмугових - вдвічі перевищує девіацію частоти.

5. За певних значень індексу кутової модуляції в спектрі КМ-процесу відсутня складова, що відповідає носійному коливанню, і всі 100% випромінюваної потужності витрачаються на передавання корисної інформації.

5.3.6 Багатотональна кутова модуляція

Вищенаведені висновки та міркування стосовно структури та ширини спектра КМ-процесу, були зроблені для однотональної модуляції. У разі більш складних видів модульовальних процесів, що практично має місце, аналітичні дослідження процесів із кутовою модуляцією є досить громіздкими, складними, а в деяких випадках неможливими.

Як приклад можна навести систему запису повного кольорового телевізійного сигналу, який є далеко не гармонічним, більш того його частоти, середнє значення, амплітуда невизначені. Таким чином, такі параметри не можуть бути використані в якості основних під час опису системи з кутовою модуляцією. Параметри кутової модуляції в відеозаписувальних системах задаються, таким чином, через характерні характеристики телевізійного сигналу.

Найбільш загальний підхід до розв'язування поставленого завдання полягає в розкладанні модульовального процесу на суму низькочастотних коливань, частоти яких $\omega_{нч1}, \omega_{нч2}, \dots, \omega_{нчk}$, із подальшим визначенням так званих *парціальних індексів* кутової модуляції m_1, m_2, \dots, m_k .

Спектральний аналіз показує, що в спектрі багатотонального КМ-процесу процесу містяться такі складові:

- **носійна з частотою** $\omega_{вч}$;
- **бічні з частотами** $\omega_{вч} \pm n\omega_{нчk}$;
- **комбінаційні з частотами** $\omega_{вч} \pm p\omega_{нч1} \pm q\omega_{нч2} \pm r\omega_{нч3} \pm \dots$,

де p, q, r – довільні цілі числа, включаючи нуль.

Причому на спектральній діаграмі бічні складові розміщуються не завжди симетрично до носійної частоти. Проте, спектр ширококутового процесу з кутовою модуляцією зосереджується навколо носійної частоти, а його ширина

$$\Delta\omega_{сп} = 2(\Delta\omega_{max} + \omega_{нч max}), \quad (5.53)$$

де $\omega_{нч max}$ – найбільша із модульовальних частот, а $\Delta\omega_{max}$ – максимальна девіація частоти.

► **Приклад.** Розглянемо КМ-процес, промодульований негармонічним коливанням, що є сумою двох гармонічних коливань з частотами $\omega_{нч1}$ і $\omega_{нч2}$:

5.3.6 Багатотональна кутова модуляція

$$s_{\text{КМ}}(t) = S_{m0} \cos(\omega_{\text{Вч}}t + m_1 \sin \omega_{\text{Нч1}}t + m_2 \sin \omega_{\text{Нч2}}t),$$

де m_1 та m_2 – відповідні індекси модуляції.

Припустимо, що парціальні індекси модуляції m_1 та m_2 набагато менші за одиницю (це відповідає вузькосмуговому процесу). Тоді можна скористатися відомими співвідношеннями для обчислення косинуса та синуса: $\cos x \approx 1 - x^2 / 2$; $\sin x \approx 0$.

Виконавши громіздкі, але елементарні тригонометричні перетворення, в результаті отримаємо:

$$\begin{aligned} s_{\text{КМ}}(t) = & S_{m0} \left(1 - \frac{m_1^2 + m_2^2}{4}\right) \cos \omega_{\text{Вч}}t + \frac{m_1 S_{m0}}{2} [\cos(\omega_{\text{Вч}} + \omega_{\text{Нч1}})t - \\ & - \cos(\omega_{\text{Вч}} - \omega_{\text{Нч1}})t] + \frac{m_2 S_{m0}}{2} [\cos(\omega_{\text{Вч}} + \omega_{\text{Нч2}})t - \cos(\omega_{\text{Вч}} - \omega_{\text{Нч2}})t] + \\ & + \frac{m_1^2 S_{m0}}{8} [\cos(\omega_{\text{Вч}} + 2\omega_{\text{Нч1}})t + \cos(\omega_{\text{Вч}} - 2\omega_{\text{Нч1}})t] + \\ & + \frac{m_2^2 S_{m0}}{8} [\cos(\omega_{\text{Вч}} + 2\omega_{\text{Нч2}})t + \cos(\omega_{\text{Вч}} - 2\omega_{\text{Нч2}})t] + \\ & + \frac{m_1 m_2 S_{m0}}{2} [\cos(\omega_{\text{Вч}} + \omega_{\text{Нч1}} - \omega_{\text{Нч2}})t - \cos(\omega_{\text{Вч}} - \omega_{\text{Нч1}} + \omega_{\text{Нч2}})t - \\ & - \cos(\omega_{\text{Вч}} + \omega_{\text{Нч1}} + \omega_{\text{Нч2}})t - \cos(\omega_{\text{Вч}} - \omega_{\text{Нч1}} - \omega_{\text{Нч2}})t]. \end{aligned}$$

Отже, в спектрі процесу, що розглядається, містяться складові з носійною частотою, бічними частотами

$$\omega_{\text{Вч}} \pm \omega_{\text{Нч1}}, \omega_{\text{Вч}} \pm \omega_{\text{Нч2}}, \omega_{\text{Вч}} \pm 2\omega_{\text{Нч1}}, \omega_{\text{Вч}} \pm 2\omega_{\text{Нч2}},$$

а також комбінаційними частотами

$$\omega_{\text{Вч}} + \omega_{\text{Нч1}} + \omega_{\text{Нч2}}, \omega_{\text{Вч}} - \omega_{\text{Нч1}} + \omega_{\text{Нч2}}, \omega_{\text{Вч}} + \omega_{\text{Нч1}} - \omega_{\text{Нч2}}, \omega_{\text{Вч}} - \omega_{\text{Нч1}} - \omega_{\text{Нч2}}.$$

Як бачимо, амплітуди бічних складових із комбінаційними частотами залежать від добутку парціальних індексів модуляції.

ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. За інших однакових умов спектр процесів зі складною модуляцією значно багатший за спектр одно тональних КМ-процесів.



Треба вміти:

1. Визначати ширину спектра багатотонального КМ-процесу.



Слід запам'ятати:

1. У спектрі процесу з багатотональною кутовою модуляцією крім складових, що містяться в спектрі однотонального КМ-процесу, є складові з усіма комбінаційними частотами.

2. Формулу для обчислення ширини спектра багатотонального КМ-процесу:

$$\Delta\omega_{\text{сп}} = 2(\Delta\omega_{\text{max}} + \omega_{\text{нч max}}).$$

5.3.7 Порівняльна характеристика модульованих процесів

Енергетичний аналіз. Як відмічалось, середня потужність за період ВЧ-коливання АМ-сигналу не є величиною сталою, а змінюється в силу зміни амплітуди носійного коливання. З іншого боку, пікова потужність, що генерується передавачем АМ-сигналу, майже вчетверо більше за середню потужність, яку передавач віддає. Отже, передавач при АМ використовується не повністю. Коефіцієнт корисної дії АМ-системи, навіть з подавленням носійної або використанням однієї бічної смуги малий.

Потужність КМ-сигналу не змінюється на періоді коливань модульовального сигналу. При зміні індексу модуляції потужність розподіляється між складовими з частотою носійного коливання та бічними частотами, що забезпечує повне використання передавача КМ-сигналу за потужністю, на яку він розрахований.

◆ Таким чином, **з енергетичного погляду кутова модуляція має перевагу перед АМ.**

Спектральні характеристики та пропускна здатність. Очевидно, щоб розмістити в заданому частотному діапазоні якомога бі-

5.3.7 Порівняльна характеристика модульованих процесів

льшу кількість каналів передавання інформації з різними носійними частотами та найменшим впливом сусідніх каналів один на одного потрібно, щоби ширина спектра сигналу, що передається була найменшою.

Припустимо, що для передавання інформації застосовуються модульовані сигнали з різними носійними частотами, але однако-вими значеннями ширини спектра $\Delta f_{\text{сп}}$. Тоді в діапазоні Δf розмі-ститься $N = \Delta f / \Delta f_{\text{сп}}$ каналів, спектри яких не перекриваються. Зро-зуміло, що чим вужче спектр, тим більше N , тим вище пропускну здатність системи передавання інформації.

Порівнявши формули для визначення ширини спектра АМ- та КМ-сигналів, дійдемо висновку, що, за інших однакових умов, шири-на спектра КМ-сигналу в m разів відрізняється від ширини спектра АМ-сигналу. У випадках, коли $m \gg 1$ спектр КМ-сигналу стає насті-льки широким, що для його передавання, а значить розміщення де-кількох КМ-каналів, потрібно виділити великий частотний діапазон. У зв'язку з останнім кутова модуляція в системах радіомовлення за-стосовується в діапазонах надвисоких частот (ультракороткі хвилі – УКХ), а АМ – діапазонах наддовгих, довгих та середніх.

Отже, за кількістю каналів АМ має перевагу перед КМ.

Завадостійкість. Ясна річ, що вплив завади $\eta(t)$ на носійне коливання спричинює додаткову (шкідливу) модуляцію його інфор-мативних параметрів. Тому можна припустити, що різні параметри носійного коливання будуть по-різному реагувати на дію завад, а от-же, завадостійкість різних видів модуляції буде різною.

У якості критерію порівняння візьмемо відношення середніх по-тужностей сигналу, що передається (модульовальне НЧ-коливання) та завади: P_c / P_η .

Можна показати, що у разі однотональної АМ на виході каналу передачі

$$P_c / P_\eta \Big|_{\text{вих}} = \Delta A_m / \Delta H_m,$$

де ΔA_m - зміна амплітуди носійного ВЧ-коливання у разі «корисної» АМ, а ΔH_m – шкідливої.

За стовідсоткової АМ, коли індекс АМ дорівнює одиниці $\Delta A_m = A_m$, $\Delta H_m = H_m$, а

$$P_c / P_{\eta}|_{\text{ВИХ}} = A_m / H_m = P_c / P_{\eta}|_{\text{ВХ}}.$$

Отже, для однотонольної АМ відношення потужностей сигналу та завади на виході та вході каналу передачі дорівнює одиниці.

Дослідження показують, що для однотонольної ЧМ таке відношення

$$\frac{P_c / P_{\eta}|_{\text{ВИХ}}}{P_c / P_{\eta}|_{\text{ВХ}}} = \left(\frac{\Delta\omega}{\delta\omega} \right)^2,$$

де $\Delta\omega$, $\delta\omega$ - девіації частоти «корисної» та шкідливої ЧМ відповідно.

Оскільки, зазвичай, $\Delta\omega \gg \delta\omega$, то за однотонольної частотної модуляції завада пригнічується і тим сильніше, чим більше девіація «корисної» ЧМ. Тоді можна стверджувати, що однотонольна ЧМ забезпечує завадозахищеність більшу у $(\Delta\omega / \delta\omega)^2$ разів, ніж АМ.

У разі багатотонольного модульовального колювання та флуктуаційної адитивної завади, як показують дослідження, *ЧМ ефективніша за завадостійкістю, ніж АМ у $3m^2$ рази*. Слід, однак, пам'ятати, що у разі збільшення індекса модуляції збільшується в $(m + 1)$ рази ширина спектра ЧМ-процесу, що потребує і відповідної смуги пропуску ЧМ-системи. Підвищена завадостійкість ЧМ-систем має місце тільки тоді, коли відношення сигнал/завада перевищує порогове значення (10...13 дБ).

Кодоімппульсна модуляція (КИМ), як зазначалось раніше, потребує реалізації таких операцій, як квантування за рівнем, дискретизація в часі та кодування.

При квантуванні за рівнем з кроком квантування h_k дисперсія похибки квантування або інакше, потужність шуму квантування як завади $D(h_k) = P_{\eta} = h_k^2 / 12$. Потужність корисного процесу $X(t)$, підпорядкованого рівномірному закону розподілу ймовірності діапазоні $[0, X_{\max}]$, $P_c = X_{\max}^2 / 12$. Тоді відношення потужностей сигнал/завада

$$(P_c / P_{\eta})|_{\text{КИМ}} = (X_{\max} / h_k)^2 = N_k^2,$$

де N_k – кількість рівнів квантування.

5.3.7 Порівняльна характеристика модульованих процесів

Якщо квантований процес подається n розрядним двійковим кодом, то

$$(P_c / P_\eta)_{\text{КІМ}} = N_k^2 = 2^{2n}.$$

Із останнього співвідношення випливає, що

- ◆ **для збільшення завадостійкості КІМ потрібно збільшувати кількість рівнів квантування, а за заданого динамічного діапазону корисного процесу - зменшувати крок квантування або збільшувати розрядність двійкового коду.**

Проте, зменшення кроку квантування може спричинити зниження завадостійкості за рахунок впливу зовнішніх завад, оскільки, як показують дослідження, у цьому разі ймовірність правильного прийому кодових повідомлень зменшується при збільшенні кроку квантування.

Збільшення розрядності коду спричинює зростання часу на передавання повідомлень, тобто тривалості кадру або часу використання каналу передачі.

Таким чином, платою за високу завадостійкість КІМ є збільшення часу передавання повідомлень, а отже, зменшення пропускної здатності систем передачі.

Припустимо, що тривалість імпульсу для відображення одного елемента коду становить τ , а тривалість кадру відповідно до теореми Котельникова $T_k = 1/2F_c$, де F_c - максимальна частота в спектрі корисного процесу. Тоді ширина спектра КІМ-процесу $\Delta F_{\text{КІМ}}$ визначається максимальною частотою в спектрі імпульсу:

$$\Delta F_{\text{КІМ}} \approx \frac{1}{\tau} = \frac{1}{T_k / n} = \frac{n}{T_k} = 2F_c n.$$

Звідки випливає, що ширина спектра КІМ-процесу більша за ширину спектра корисного немодульованого процесу в $2n$ рази.

Тоді з урахуванням вищезазначеного дійдемо висновку, що

- ◆ **висока завадостійкість КІМ забезпечується значним збільшенням смуги частот для передавання КІМ-повідомлень.**

Як впливає з останнього співвідношення кількість розряду коду $n = \Delta F_{\text{КІМ}} / 2F_c$ можна вважати еквівалентом індекса ЧМ (див. (5.44) і (5.51)) $m = \Delta F_{\text{ЧМ}} / 2F_{\text{нч}}$. Тоді

$$(P_c / P_\eta) \Big|_{\text{КІМ}} = N_k^2 = 2^{2m}.$$

Таким чином, відношення сигнал/завада для АМ дорівнює одиниці, для ЧМ – пропорційне m^2 , а для КІМ - 2^{2m} . А це означає, що найбільшою завадостійкістю наділені КІМ-процеси.

ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. Підвищена завадостійкість ЧМ-систем має місце тільки тоді, коли відношення сигнал/завада на їхньому вході перевищує порогове значення (10...13 дБ).

2. Платою за високу завадостійкість КІМ є збільшення часу передавання повідомлень, зменшення пропускної здатності системи та значне збільшення її смуги пропускання.



Слід запам'ятати:

1. З енергетичного погляду кутова модуляція має перевагу перед АМ.

2. Найбільшою завадостійкістю наділені КІМ-процеси.

3. За кількістю частотних каналів найбільш доцільною є АМ.

4. Для збільшення завадостійкості КІМ потрібно збільшувати кількість рівнів квантування, а за заданого динамічного діапазону корисного процесу - зменшувати крок квантування або збільшувати розрядність двійкового коду.



Треба вміти:

1. Обґрунтувати кращу завадостійкість КІМ у порівнянні з АМ та ЧМ.

2. Визначати ширину спектра КІМ-процесів.

5.4 Процеси з лінійною частотною модуляцією

Принцип лінійної частотної модуляції (ЛЧМ). Розглянемо процес у вигляді радіоімпульсу з обвідною прямокутної форми, високочастотне заровнення якого має частоту, що змінюється за лінійним законом у часі:

$$\omega(t) = \omega_{\text{вч}} + \beta t, \quad (5.54)$$

де $\omega_{\text{вч}}$ - носійна частота, а β - параметр, що має розмірність рад/с² та встановлює швидкість зміни частоти в часі. Будемо вважати, що процес має тривалість $t_{\text{імп}}$ і є симетричним відносно осі ординат (рис. 5.18). Подібне коливання є різновидом процесів, які називають процесами з **лінійною частотною модуляцією (ЛЧМ)**. Фактично ЛЧМ-процес – це певна форма ЧМ-процесу.

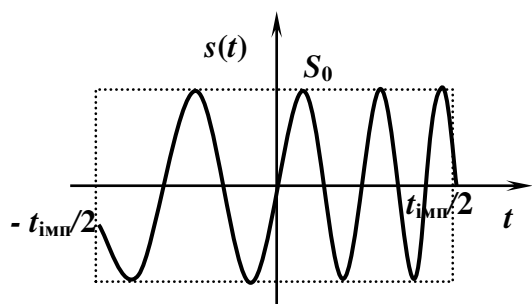


Рисунок 5.18 – ЛЧМ-сигнал.

Очевидно, що максимальне відхилення миттєвої частоти від частоти носійної за час $t_{\text{імп}}$, тобто девіація частоти для ЛЧМ-процесу,

$$\Delta\omega = \beta t_{\text{імп}}. \quad (5.55)$$

З урахуванням (5.54) миттєва повна фаза ЛЧМ-процесу за нульової початкової фази носійної є такою:

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^t \omega(\lambda) d\lambda = \omega_{\text{вч}} t + \frac{\beta t^2}{2}. \quad (5.56)$$

Тоді математична модель ЛЧМ процесу має такий вигляд:

$$s_{\text{ЛЧМ}}(t) = \begin{cases} 0, & t > \frac{t_{\text{імп}}}{2}; \quad t < -\frac{t_{\text{імп}}}{2}; \\ S_0 \cos\left(\omega_{\text{вч}} t + \frac{\beta t^2}{2}\right); & -\frac{t_{\text{імп}}}{2} < t < \frac{t_{\text{імп}}}{2}. \end{cases} \quad (5.57)$$

Процеси подібного типу широко застосовуються в радіолокаційних системах, оскільки наділені чудовою властивістю значно підвищувати надійність виявлення радіолокаційним приймачем слабких відбитих сигналів на фоні завади. Дійсно, припустимо, що ЛЧМ-процес проходить через лінію затримки, час затримки якої t_3 лінійно зменшується з ростом частоти процесу, що подається на її вхід. У результаті на виході лінії затримки майже одночасно з'являються НЧ-складові, що відповідають початку вхідного процесу, та ВЧ-компоненти, які мають місце в його кінці.

Таким чином, подаючи на вхід лінії затримки ЛЧМ-процес достатньо великої тривалості, можна досягти "стиснення процесу" в часі (рис. 5.19).

Зрозуміло, що за рахунок такого ефекту за високої добротності системи "стиснення" амплітуда вихідного процесу істотно збільшиться і може значно перевищувати рівень шумів та завад. Це спричинює збільшення відношення сигнал/завада, а отже, і надійність виявлення корисних процесів на рівні шумів.

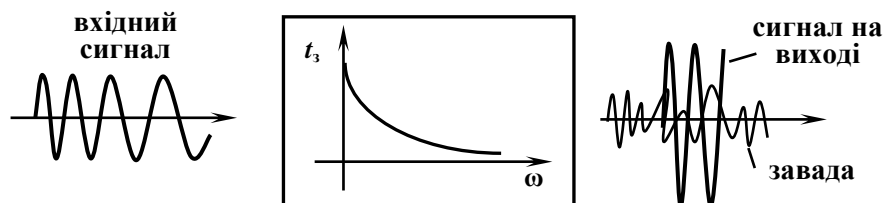


Рисунок 5.19 – Підвищення відношення процес/завада з використанням ЛЧМ-процесів.

Спектральні характеристики ЛЧМ-процесів. Для визначення спектральної щільності комплексних амплітуд ЛЧМ-процесу з математичною моделлю (5.57), скористаємося прямим перетворенням Фур'є. Тоді

$$S_{\text{ЛЧМ}}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{ЛЧМ}}(\lambda) e^{-j\omega\lambda} d\lambda = S_0 \int_{-t_{\text{імп}}/2}^{t_{\text{імп}}/2} \cos(\omega_{\text{вч}}\lambda + \frac{b\lambda^2}{2}) e^{-j\omega\lambda} d\lambda.$$

Врахувавши, що $\cos x = (e^{jx} + e^{-jx}) / 2$, дістанемо:

$$S_{\text{ЛЧМ}}(j\omega) = \frac{S_0}{2} \int_{-t_{\text{імп}}/2}^{t_{\text{імп}}/2} e^{j(\omega_{\text{вч}}\lambda + \frac{b\lambda^2}{2})} e^{-j\omega\lambda} d\lambda + \frac{S_0}{2} \int_{-t_{\text{імп}}/2}^{t_{\text{імп}}/2} e^{-j(\omega_{\text{вч}}\lambda + \frac{b\lambda^2}{2})} e^{-j\omega\lambda} d\lambda.$$

5.4 Процеси з лінійною частотною модуляцією

Очевидно, що перша складова останнього співвідношення визначає максимум тієї частини спектральної щільності, що зосереджується в області частоти $\omega_{\text{ВЧ}}$ носійного коливання, а друга - в області від'ємного значення частоти $-\omega_{\text{ВЧ}}$. Виходячи з властивостей симетрії спектральної щільності дійсних процесів ($S(-j\omega) = S^*(j\omega)$), достатньо обмежитись тільки першою складовою, яка визначає спектральну щільність для додатних значень частоти.

Не вдаючись до подробиць, наведемо кінцеву формулу, яка визначає спектральну щільність ЛЧМ-процесу для додатних значень частоти:

$$S_{\text{ЛЧМ}}(j\omega) = \frac{S_0}{2} \sqrt{\frac{\pi}{b}} \exp\left[-j\left(\frac{\omega - \omega_{\text{ВЧ}}}{2b}\right)^2\right] \times \quad (5.58)$$

$$\times [C(x_1) + C(x_2) + j(S(x_1) + S(x_2))].$$

У формулі (5.58) через $C(x)$ та $S(x)$ позначені відомі з курсу математики визначення інтегралів Френеля

$$C(x) = \int_0^x \cos \frac{\pi \lambda^2}{2} d\lambda \approx \frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)}{\pi x}; \quad S(x) = \int_0^x \sin \frac{\pi \lambda^2}{2} d\lambda \approx \frac{1}{2} - \frac{\cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)}{\pi x}$$

з межами інтегрування

$$x_1 = \frac{\frac{bt_{\text{ІМП}}}{2} + (\omega - \omega_{\text{ВЧ}})}{\sqrt{\pi b}}; \quad x_2 = \frac{\frac{bt_{\text{ІМП}}}{2} - (\omega - \omega_{\text{ВЧ}})}{\sqrt{\pi b}}. \quad (5.59)$$

Відповідно до (5.58) маємо амплітудний

$$S_{\text{ЛЧМ}}(\omega) = \frac{S_0}{2} \sqrt{\frac{\pi}{b}} \sqrt{[C(x_1) + C(x_2)]^2 + [S(x_1) + S(x_2)]^2} \quad (5.60)$$

та фазовий

$$\varphi_{\text{ЛЧМ}}(\omega) = \left[-\left(\frac{\omega - \omega_{\text{ВЧ}}}{2b} \right)^2 \right] + \arctg \frac{S(x_1) + S(x_2)}{C(x_1) + C(x_2)} \quad (5.61)$$

спектри.

Аналіз співвідношення (5.60) та (5.61) показує, що вид амплітудного та фазового спектрів ЛЧМ-процесу (5.57) повністю залежить від бази процесу

$$C_{\bar{\sigma}} = \Delta\omega t_{\text{імп}} = bt_{\text{імп}}^2. \quad (5.62)$$

Практичну значимість мають ЛЧМ-процеси, для яких $C_{\bar{\sigma}} \gg 1$. У цьому разі амплітудний спектр по формі наближається до прямокутного з центром у точці $\omega_{\text{ВЧ}}$ та тим меншими осциляціями на вершині в області частот $\Delta\omega$, чим більше база $C_{\bar{\sigma}}$.

Можна впевнитись у тому, що на центральній частоті $\omega_{\text{ВЧ}}$ (за умови, що $C_{\bar{\sigma}} \gg 1$)

$$S_{\text{ЛЧМ}}(\omega) = S_0 \sqrt{\frac{\pi}{2b}}. \quad (5.63)$$

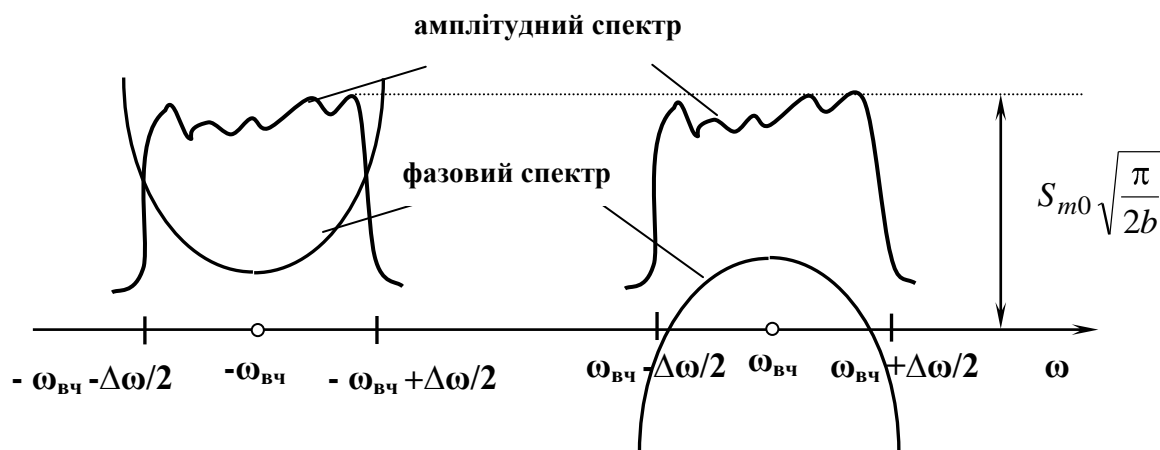


Рисунок 5.20 – Амплітудний та фазовий спектри ЛЧМ-процесу.

Співвідношення (5.63) залишається справедливим у інтервалі частот $[\omega_{\text{ВЧ}} - \Delta\omega/2, \omega_{\text{ВЧ}} + \Delta\omega/2]$.

Графік фазового спектра у цьому разі має форму квадратичної параболи також із центром у точці $+\omega_{\text{ВЧ}}$ та зсувом по осі ординат приблизно на $\pi/4$. Тоді фазовий спектр у області від'ємних частот

5.4 Процеси з лінійною частотною модуляцією

буде приймати протилежні за знаком значення фазового спектра для додатних значень частоти.

На рис. 5.20 подано типові структури амплітудного та фазового спектрів ЛЧМ-процесу (5.57) для всіх значень частоти, якщо $C_{\bar{\omega}} \gg 1$.

► **Приклад.** Прямокутний ЛЧМ-процес характеризується такими значеннями параметрів: амплітуда $S_0 = 20$ В, носійна частота $f_{\text{вч}} = 10$ ГГц, $t_{\text{імп}} = 2$ мкс, девіація частоти за час, що дорівнює тривалості імпульса, $\Delta f = 0,1$ ГГц. Обчислити основні параметри спектральних характеристик такого процесу.

Попередньо обчислимо базу процесу:

$$C_{\bar{\omega}} = \Delta\omega t_{\text{імп}} = 2\pi\Delta f t_{\text{імп}} = 6,28 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 10^{-6} = 1256 \gg 1.$$

Швидкість зміни частоти

$$b = \Delta\omega / t_{\text{імп}} = 2\pi\Delta f / t_{\text{імп}} = 6,28 \cdot 10^8 / 2 \cdot 10^{-6} = 3,14 \cdot 10^{14} \text{ рад/с}^2.$$

Оскільки база процесу набагато більше за одиницю, то в межах частотного діапазону, що визначається частотою носійної та девіацією частоти, $f_{\text{вч}} - \frac{\Delta f}{2}$, $f_{\text{вч}} + \frac{\Delta f}{2} \Rightarrow [9,95; 10,05 \text{ ГГц}]$ амплітудний спектр сталий і дорівнює

$$S_{\bar{\omega}} = S_0 \sqrt{\frac{\pi}{2b}} = 20 \sqrt{\frac{3,14}{2 \cdot 3,14 \cdot 10^{14}}} = 10^{-6} \sqrt{2} \text{ В} \cdot \text{с}.$$



Автокореляційна характеристика ЛЧМ-процесу. Для визначення функції автокореляції можна скористатися формулою

$$K_s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t+\tau)dt$$

або співвідношенням, яке встановлює взаємозв'язок між кореляційними та енергетичними характеристиками процесів через перетворення Фур'є,

$$K_s(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_s(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega, \quad (5.64)$$

де $W_s(\omega) = S^2(\omega)$ енергетичний спектр процесу $s(t)$.

Будемо вважати, що база ЛЧМ-процесу набагато більше за одиницю, а тому амплітудний спектр є рівномірно розподіленим у інтервалі частот $\Delta\omega$ навколо носійної частоти $\omega_{\text{ВЧ}}$, а за його межами спектр обертається в нуль. Тоді з урахуванням (5.63) ненульові значення енергетичного спектра такого процесу обчислюються за формулою:

$$W_{s\text{ЛЧМ}}(\omega) = S_{\text{ЛЧМ}}^2(\omega) = \frac{S_0^2 \pi}{2b}, \quad \omega_{\text{ВЧ}} - \frac{\Delta\omega}{2} \leq \omega \leq \omega_{\text{ВЧ}} + \frac{\Delta\omega}{2}. \quad (5.65)$$

Відповідно до (5.64) та з урахуванням функція автокореляції

$$K_{s\text{ЛЧМ}}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{s\text{ЛЧМ}}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{S_0^2 \pi}{2b} \int_{\omega_{\text{ВЧ}} - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_{\text{ВЧ}} + \frac{\Delta\omega}{2}} e^{j\omega\tau} d\omega.$$

У результаті математичних спрощень дістанемо:

$$K_{s\text{ЛЧМ}}(\tau) = \frac{S_0^2 t_{\text{ІМП}}}{2} \frac{\sin\left(\frac{bt_{\text{ІМП}}}{2} \tau\right)}{\frac{bt_{\text{ІМП}}}{2} \tau} \cos \omega_{\text{ВЧ}} \tau. \quad (5.66)$$

Враховуючи те, що $bt_{\text{ІМП}}/2 = \Delta\omega/2 < \omega_{\text{ВЧ}}$, вираз (5.66) для АКФ ЛЧМ-процесу можна вважати математичною моделлю високочастотного процесу частоти $\omega_{\text{ВЧ}}$, амплітуда якого змінюється за законом обвідної

$$K_{\text{об}}(\tau) = \frac{S_0^2 t_{\text{ІМП}}}{2} \frac{\sin(bt_{\text{ІМП}}\tau/2)}{bt_{\text{ІМП}}\tau/2}. \quad (5.67)$$

Обвідна (5.67) приймає нульові значення за таких значень аргумента:

5.4 Процеси з лінійною частотною модуляцією

$$\tau_k = \frac{2\pi k}{bt_{\text{імп}}} = \frac{k}{\Delta f} \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (5.68)$$

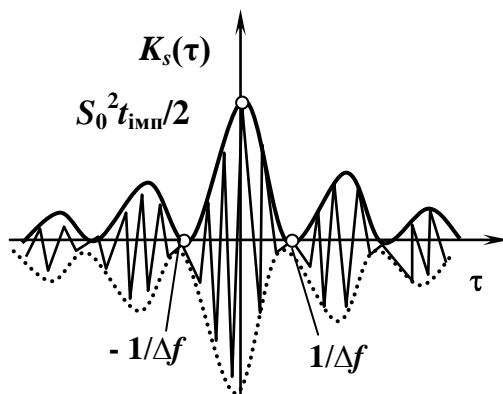


Рисунок 5.21 - Кореляційна функція ЛЧМ-процесу.

Графіки АКФ та її обвідної показані на рис. 5.21.

Формула (5.68) встановлює важливу властивість ЛЧМ-процесу: **ширина обвідної головної пелюстки функції автокореляції обернено пропорційна девіації частоти в імпульсі.**

Кореляційні властивості ЛЧМ-процесу можна оцінювати і коефіцієнтом кореляції або нормованою АКФ:

$$R_{\text{об}}(\tau) = \frac{K_{s\text{ЛЧМ}}(\tau)}{K_{s\text{ЛЧМ}}(0)} = \frac{\sin(bt_{\text{імп}}\tau/2)}{bt_{\text{імп}}\tau/2}.$$

Як відомо, значення аргумента τ , що відповідає деякому заданому значенню $K_{s\text{ЛЧМ}}(\tau)$ називають інтервалом кореляції. Отже, інтервал кореляції за першою пелюсткою кореляційної функції ЛЧМ-процесу дорівнює $\tau_1 = \frac{1}{\Delta f} = \frac{2\pi}{bt_{\text{імп}}}$.

Відомо, що ЛЧМ-процеси, які застосовуються в радіолокації, характеризуються досить великим значенням девіації частоти, а тому головна пелюстка АКФ буде достатньо вузькою, що позитивно позначається на розв'язанні проблеми виявлення радіолокаційних сигналів. Водночас, для ЛЧМ імпульсів характерним є недолік, що визначається його кореляційними властивостями: рівень другої пелюстки АКФ складає майже 20% від максимального значення АКФ. Тому за несприятливих умов (великий рівень шумів) це може призвести до неправильного визначення часового положення імпульсу, а значить і зниження надійності радіолокаційної системи.

Енергія процесу, як відомо, визначається початковим значенням автокореляційної функції. Тоді, згідно з (5.66) ЛЧМ-процес характеризується енергією

$$E_{s\text{ЛЧМ}} = K_{s\text{ЛЧМ}}(0) = \frac{S_0^2 t_{\text{імп}}}{2}.$$

ПІДСУМКИ



Необхідно зрозуміти:

1. Подаючи на вхід лінії затримки ЛЧМ-процес достатньо великої тривалості, можна досягти значного збільшення амплітуди вихідного корисного процесу відносно рівня шумів та завад.

2. Вигляд амплітудного та фазового спектрів ЛЧМ-процесу істотно залежить від його бази.

3. Великий рівень другої пелюстки АКФ ЛЧМ-процесів за значного рівня шумів може спричинювати неправильне визначення часового положення відбитого від об'єкта радіолокаційного імпульсу, а значить і зниження надійності радіолокаційної системи.



Треба вміти:

1. Визначати поняття: ЛЧМ-процес, девіація частоти, повна фаза та база ЛЧМ-процесу.

2. Визначати спектральні характеристики ЛЧМ-процесу та його основні параметри: девіацію частоти, повну фазу та базу.



Слід запам'ятати:

1. Визначення понять: ЛЧМ-процес, девіація частоти, повна фаза та база ЛЧМ-процесу.

2. Для ЛЧМ-процесів з великою $C_{\delta} \gg 1$ його амплітудний спектр по формі наближається до прямокутного з центром у точці $\omega_{\text{вч}}$ та тим меншими осциляціями на вершині в області частот $\Delta\omega$, чим більше база C_{δ} .

3. Ширина головної пелюстки обвідної функції автокореляції обернено пропорційна девіації частоти в імпульсі.

4. Математичну модель ЛЧМ-процесу:

$$s_{\text{ЛЧМ}}(t) = \begin{cases} 0, & t > \frac{t_{\text{імп}}}{2}; \quad t < -\frac{t_{\text{імп}}}{2}; \\ S_0 \cos(\omega_{\text{вч}}t + \frac{bt^2}{2}); & |t| \leq \frac{t_{\text{імп}}}{2}. \end{cases}$$

5. Формули:

$\Delta\omega = bt_{\text{імп}}$ - девіація частоти ЛЧМ-процесу;

$C_{\delta} = \Delta\omega t_{\text{імп}} = bt_{\text{імп}}^2$ - база ЛЧМ-процесу;

$\psi(t) = \omega_{\text{вч}}t + bt^2 / 2$ - повна фаза ЛЧМ-процесу.

5.5 Завдання для поточного тестування

5.5.1 Питання для поточного контролю

- Що таке модуляція?
- Назовіть види носіїв, що використовуються при модуляції.
- Чим відрізняються аналова модуляція від імпульсної?
- Що таке інформативний параметр?
- Сутність кодоімпульсної модуляції.
- Назовіть основні перетворення, які передбачає КІМ.
- Як співвідносяться частоти модулювального $f_{\text{НЧ}}$ та носійного $f_{\text{ВЧ}}$ процесів при АМ?
- Що є інформативним параметром АМ-процесів?
- Запишіть узагальнену модель АМ-процесу та аналітичний опис звичайної АМ.
- Дайте визначення індекса модуляції, відносних коефіцієнтів модуляції вверх та вниз для АМ-процесів.
- Сутність терміну «глибина АМ».
- Якими параметрами прийнято характеризувати глибину амплітудної модуляції?
- Поясніть, що є причиною спотворень повідомлень під час перемодуляції АМ-процесу.
- Чому для звичайної однотональної амплітудної модуляції коефіцієнт модуляції $0 \leq M \leq 1$?
- Чи може при звичайній амплітудній модуляції миттєве значення АМ – процесу змінюватися «вверх» та «вниз» більше, ніж на амплітуду носійного коливання S_{m0} ?
- Що таке однотональна амплітудна модуляція?
- Наведіть математичну модель ОАМ.

- Запишіть формули для обчислення індексу ОАМ через зміну амплітуди ΔS високочастотного гармонічного заповнення та її максимальне S_{\max} і мінімальне S_{\min} значення.
- Яким є спектр ОАМ-процесу: а) дискретним; б) неперервним; в) змішаним?
- З яких спектральних складових складається спектр ОАМ-процесу?
- Зобразити спектральні амплітудну та фазову спектральні діаграми ОАМ.
- Як визначаються параметри спектральних складових ОАМ?
- Чому дорівнює ширина спектра ОАМ і чи залежить вона від частоти носійного коливання?
- Наведіть векторну інтерпретацію ОАМ-процесу.
- Що таке пікова потужність?
- Запишіть формули для середньої і пікової потужностей ОАМ-процесу.
- У яких межах може змінюватися миттєва потужність та середня потужності ОАМ-процесів?
- Чим визначається розподіл потужності в спектрі ОАМ-процесу?
- Поясніть, з яких причин використання ОАМ-процесів із малими значеннями індексу модуляції є недоцільним.
- Яка частка середньої потужності йде на випромінювання інформативних складових ОАМ-процесу?
- Запишіть формулу для визначення кореляційної функції АМ-та ОАМ-процесів.
- Як визначаються амплітуди спектральних складових кореляційної функції ОАМ-процесу?
- Дайте визначення багатотональної модуляції.
- Запишіть математичну модель багатотонального АМ-процесу.
- Якими параметрами прийнято характеризувати глибину багатотональної модуляції?
- Що таке парціальний коефіцієнт АМ?

5.5 Завдання для поточного тестування

- З яких компонентів складається спектр багатотонального АМ-процесу та в околі якої частоти вони концентруються?
- Запишіть формулу для визначення ширини спектра багатотонального АМ-процесу.
- За якими чинниками однотональна АМ відрізняється від багатотональної?
- Чим відрізняються амплітудні спектри відео- та радіоімпульсів?
- У скільки разів ширина спектра радіоімпульсу перевищує ширину спектра відеоімпульсу?
- Дайте визначення коефіцієнта корисної дії АМ-процесів.
- Запишіть формули для визначення ККД одно- та багатотональних АМ-процесів.
- Що таке «пик-фактор» та його практичне значення?
- Наведіть умову, яку задовольняють ККД та коефіцієнт, що характеризує «пик-фактор».
- У чому полягає суть методу компадирування та з якою метою він застосовується.
- Назвіть методи підвищення ККД АМ-систем.
- Поясніть, чому застосування звичайної АМ у супутникових системах з енергетичного погляду є недоцільним.
- Що таке балансна модуляція?
- Запишіть математичну модель АМ-процесу з подавленою носійною.
- Чим відрізняються обвідні та спектри АМ-процесів із звичайною модуляцією та подавленою носійною?
- Які типи демодуляторів застосовуються для АМ-процесів та у чому полягає основна проблема демодуляції таких процесів.
- Поясніть принцип синхронного детектування.
- Що таке односмугова модуляція та односмуговий процес?
- Запишіть математичну модель однотонального ОС-процесу.
- Що таке квадратурні компоненти однотонального ОС-процесу?

- Чим відрізняються з енергетичного погляду звичайний АМ-процес, АМ-процес з одною бічною смугою та подавленою носійною?
- Наведіть структурну схему демодулятора ОС-процесів та поясніть призначення кожного з елементів.
- Яким є носійне коливання при кутовій модуляції та які його параметри вважаються інформативними?
- Запишіть формули для визначення миттєвої частоти та повної фази.
- Запишіть узагальнену математичну модель КМ-процесів.
- Дайте визначення ФМ- та ЧМ-процесів.
- Що спільного та чим відрізняються у загальному випадку частотна і фазова модуляції?
- Що таке девіація частоти та фази?
- Для яких процесів використовують такі параметри, як девіація частоти і фази вверх та вниз?
- Запишіть математичні моделі однотональних ФМ- та ЧМ-процесів.
- Подайте графіки залежностей від частоти модуляції індексу кутової модуляції та девіації частоти для однотональних ФМ- і ЧМ-процесів?
- Наведіть формулу для визначення індексу частотної модуляції.
- Поясніть, як залежить від частоти та амплітуди модульовального процесу девіація частоти та індекс модуляції однотональних ЧМ- та ФМпроцесів.
- Як зміниться девіація фази однотонального ФМ-процесу при збільшенні частоти модуляції чи зменшенні амплітуди модульовального процесу у два рази?
- Яких значень набуває індекс модуляції для вузько- та широко-смугових КМ-процесів?
- Чим відрізняються фазові спектри вузькосмугового однотонального КМ- та ОАМ-процесів?

5.5 Завдання для потосного тестування

- Подайте векторну інтерпретацію вузькосмугового однотонального КМ-процесу та поясніть, що забезпечує незмінність його амплітуди.
- Як визначається кореляційна функція вузькосмугового однотонального КМ-процесу через його спектр?
- Запишіть формулу для визначення ширини спектра однотональних КМ-процесів за довільних значень індексу модуляції.
- Чим відрізняється спектр однотонального КМ-процесу від спектра однотонального АМ-процесу.
- У чому полягає взаємозв'язок початкових фаз бічних компонент спектра однотонального КМ-процесу за довільних значень індексу модуляції?
- Яких значень набувають амплітуди спектральних складових однотонального КМ-процесу при збільшенні індексу модуляції?
- Поясніть, чому недоцільно на практиці враховувати спектральні складові КМ-процесу з номерами n , більшими за $m + 1$?
- Які ділянки діапазону електромагнітних хвиль відводяться для АМ та ЧМ – систем?
- Вплив на ширину спектра та його структуру ФМ – процесу параметрів модулювального сигналу.
- Поясніть, як залежить від частоти модулювального процесу ширина спектра та його структура широкосмугового ЧМ – процесу.
- Що є недоліком широкосмугових ФМ-процесів у порівнянні з широкосмуговим ЧМ-процесом?
- В чому полягає особливість енергетичних характеристик КМ – процесу?
- За яких умов у КМ-системах усі 100% випромінюваної потужності витрачаються на передавання корисної інформації?
- Особливості спектрів багатотональних КМ – процесів.
- Чи можливо при багатотональній кутовій модуляції забезпечити відсутність в його спектрі носійного компонента?
- Поясніть, чому з енергетичного погляду кутова модуляція має перевагу перед амплітудною.

- Як залежить завадостійкість КІМ від розрядності коду, кількості рівнів квантування та кроку квантування?
- За рахунок чого забезпечується більша завадостійкість КІМ у порівнянні з КМ та КМ?
- Запишіть формули для визначення відношення сигнал/завада та ширини смуги пропускання для АМ-, КМ- і КІМ-систем.
- Що таке ЛЧМ-процес?
- Дайте пояснення фізичного принципу, що дозволяє стискувати ЛЧМ – процес в часі.
- Наведіть формули для визначення миттєвої частоти, девіації частоти, повної фази та бази ЛЧМ-процесів.
- Запишіть математичну модель ЛЧМ – процесу.
- У чому полягає практична значущість ЛЧМ-процесів?
- Яку форму має амплітудний спектр ЛЧМ-процесу з великою базою?
- Подайте графік автокореляційної функції ЛЧМ-процесу з великою базою.
- Який взаємозв'язок між шириною головної пелюстки обвідної функції автокореляції ЛЧМ-імпульсу та девіації частоти в імпульсі?
- У чому полягає недосконалість ЛЧМ – процесу з погляду структури його функції автокореляції?

5.5.2 Задачі для індивідуального та самотійного розв'язування

1. Для АМ-процесу $s_{AM}(t) = 200(1 + 0,8 \cos 4 \cdot 10^3 pt)$ визначити ширину спектра та відносну частку потужності, зосереджену в носійному коливанні.
2. Яку кількість каналів для передання повідомлень $s_{AM}(t) = 10(1 + 0,5 \sin 2 \cdot 10^3 pt) \cos 6 \cdot 10^6 pt$ можна розмістити в такому частотному діапазоні від 10 до 20 м?
3. Для АМ – процесу

5.5 Завдання для потосного тестування

$$s_{AM}(t) = 130[1 + 0,25 \cos(10^2 t + 30^\circ) + 0,75 \cos(3 \cdot 10^2 t + 45^\circ)] \cos(10^5 t + 60^\circ)$$

подати спектральну діаграму амплітуд та початкових фаз і визначити пікову та середню потужність.

4. Визначити, чи можливо без істотних спотворень інформації передати АМ – процесом

$$s_{AM}(t) = 10(1 + 0,5 \sin 2 \cdot 10^3 pt + 0,25 \sin 4 \cdot 10^3 pt) \cos 2 \cdot 10^6 pt$$

повідомлення каналом зв'язку зі смугою пропускання 4кГц.

5. Коефіцієнт корисної дії АМ системи складає 20%. Амплітуда немодульованого колювання становить 75. Обчислити максимальне S_{max} та мінімальне значення S_{min} АМ-процесу.

6. Через резистор із опором 75 Ом протікає АМ – струм $i_{AM}(t) = 100(1 + 0,6 \cos 2 \cdot 10^3 pt) \cos 6 \cdot 10^6 pt$ А. Визначити середню та пікову потужність резистора.

7. АМ – процес $s_{AM}(t) = 10(1 + 0,5 \sin 2 \cdot 10^3 pt) \sin 10^6 pt$ передається каналом зв'язку. Визначити, яку кількість таких каналів можна розмістити в діапазоні частот від 100 кГц до 1 МГц?

8. На вході лінійної системи діє АМ – процес

$$s_{AM}(t) = 10(1 + 0,5 \sin 2 \cdot 10^3 pt + 0,25 \sin 4 \cdot 10pt) \cos 2 \cdot 10^6 pt \text{ B.}$$

Визначити межі потрібної смуги пропускання АМ-системи та потужність носійної.

9. Коефіцієнт корисної дії системи з амплітудною модуляцією дорівнює 20 %. Обчислити індекс модуляції та відносний енергетичний вклад спектральних складових.

10. Для АМ – процесу

$$s_{AM}(t) = 130[1 + 0,25 \cos(10^2 t + 30^\circ) + 0,75 \cos(3 \cdot 10^2 t + 45^\circ)] \cos(10^6 t + 60^\circ)$$

визначити коефіцієнт корисної дії.

11. Оцінити кількість радіоканалів АМ-мовних станцій, які можна розмістити в діапазоні частот від 0,5 до 1,5 МГц з – модуляцією.

12. Амплітуда однотональний АМ – процесу має амплітуду, що змінюється від $S_{\min} = 20\text{В}$ до $S_{\max} = 100$. Визначити середню потужність носійного коливання та бічних складових.

13. Багатотональний АМ – процес містить чотири спектральні складові, що визначаються частотами $f_{\text{НЧ}1}$, $f_{\text{НЧ}2}$. Амплітуди бічних коливань становлять відповідно 20 та 15, а амплітуда носійного - 50. Визначити парціальні коефіцієнти модуляції.

14. Передавач АМ-сигналів забезпечує середню потужність носійного складової $P_{\text{ср.нос}} = 4 \text{ кВт}$. Визначити пікове значення потужності P_{max} та коефіцієнт корисної дії, якщо індекс модуляції $M = 0,8$.

15. Для АМ-процесу $s(t) = 12(1 + 0,6\cos\omega_{\text{НЧ}1}t + 0,2\cos 2\omega_{\text{НЧ}1}t)\cos\omega_{\text{ВЧ}}t$ визначити найбільше та найменше миттєве значення.

16. Джерело АМ – процесу спричинює на резисторі з опором $R=2 \text{ кОм}$ напругу $u(t) = 75(1 + 0,4\cos 10^3 t)\cos 10^6 t$, В. Визначити мінімальне та максимальне значення потужності джерела, а також ККД.

17. Скільки каналів зв'язку для передачі процесу $s_{\text{АМ}}(t) = 10(1 + 0,5\sin 2 \cdot 10^3 pt + 0,25\sin 4 \cdot 10^3 pt)\cos 2 \cdot 10^6 pt$ можна реалізувати у діапазоні частот [100 Гц, 10 МГц].

18. Однотональний КМ – процес з частотою модуляції $f_{\text{НЧ}} = 12 \text{ кГц}$ та індексом модуляції $m = 25$ подається на коливальний контур з добротністю $Q=5$. Визначити частоту носійного коливання.

19. Визначити ширину спектра однотонального КМ – процесу з частотою модуляції $f_{\text{НЧ}} = 12 \text{ кГц}$ та індексом модуляції $m = 25$.

20. Девіація частоти $D_{\omega} = 6 \cdot 10^4 \text{ рад/с}$. Визначити найбільше з можливих значень частоти модуляції, за якого в спектрі КМ-процесу буде відсутнє носійне коливання.

21. Приймач КМ – процесу з миттєвою частотою $f(t) = f_{\text{рез}}(1 + 0,015\cos 2,8 \cdot 10^3 t)$ налаштовано на частоту $f_{\text{рез}} = 64 \text{ МГц}$. Визначити добротність приймача.

22. Передавання повідомлень здійснюється ЧМ-процесами з такими параметрами: індекс частотної модуляції $m = 25$, максима-

5.5 Завдання для потосного тестування

льна частота модульовального процесу $f_{\text{нч max}} = 10$ кГц. Визначити, яку кількість каналів передачі можна реалізувати в діапазоні частот від 10 МГц до 200 МГц?

23. Для КМ-процес $s_{\text{КМ}}(t) = 15 \cos(10^8 t + 3 \sin 10^6 t + 1,4 \sin 10^5 t + 45^\circ)$ визначити значення миттєвої частоти для $t = 1$ мкс.

24. Визначити максимальне та мінімальне значення миттєвої частоти для ЧМ-процесу $s_{\text{ЧМ}}(t) = 15 \cos(3 \cdot 10^4 t + 3 \sin 10^7 t + 60^\circ)$.

25. Визначити спектр та ширину спектра процесу $s_{\text{КМ}}(t) = 8 \cos(10^6 t + 0,06 \sin 10^4 t)$.

26. Однотональний ЧМ-процес характеризується такими параметрами: $f_{\text{нч}} = 7$ кГц, $f_{\text{вч}} = 180$ МГц, максимальне значення миттєвої частоти $f_{\text{вч}} = 182,5$ МГц. Визначити індекс частотної модуляції.

27. Обчислити середню потужність однотонального вузькосмугового КМ – процесу та його спектральних складових у разі, якщо $f_{\text{нч}} = 3$ кГц, $f_{\text{вч}} = 180$ МГц, а девіація частоти $\Delta f_{\text{вч}} = 180$ МГц.

28. ЧМ – передавач містить коливальний LC – контур із ємністю $C(t) = C_0 + C_m \cos \omega_{\text{нч}} t$, де $C_0 = 30$ пФ. Визначити максимальне значення ємності, що забезпечує такі параметри ЧМ – процесу: частота носія $f_{\text{вч}} = 28$ МГц, частота досліджуваного процесу $f_{\text{нч}} = 2$ кГц, індекс модуляції $m=0,4$.

29. Носійна частота ЧМ – процесу $f_{\text{вч}} = 50$ МГц, а частота модуляції $f_{\text{нч}} = 7$ кГц. Обчислити частоти f_{min} і f_{max} , які визначають ширину спектра заданого процесу, якщо індекс частотної модуляції $m=40$.

30. Зобразити спектральну діаграму процесу з кутовою модуляцією, у якого $f_{\text{вч}} = 45$ МГц, девіація частоти становить 0,3 кГц, а частота модуляції $f_{\text{нч}} = 4,5$ кГц.

31. Миттєва частота КМ – процесу $\omega(t) = 10^9 (1 + 10^{-4} \cos 2 \cdot 10^3 t)$, а його амплітуда становить 2,7. Визначити ширину спектра та середню потужність бічних складових.

32. Індекс модуляції ФМ-процесу $m=30$. Визначити кількість каналів, які можна реалізувати в діапазоні від 30 до 300 МГц, якщо максимальна частота в спектрі досліджуваного процесу $f_{\text{нчmax}} = 1,6$ кГц.

33. Центральна частота смугового фільтра приймача системи з частотним розділенням каналів $f_{\text{рез}} = 36$ МГц, а його добротність $Q=30$. Чи можливо використовувати такий фільтр для прийому ЧМ – сигналів, частота яких $f(t) = f_{\text{вч}}(1 + 0,015 \cos 2,8 \cdot 10^3 t)$?

34. Обчислити максимальне ψ_{max} та мінімальне ψ_{min} значення миттєвої частоти КМ – процесу $u_{\text{КМ}}(t) = U_0 \cos(3 \cdot 10^9 t + 2 \sin 10^7 t + 30^\circ)$.

35. Визначити індекс модуляції та записати математичну модель ЧМ – процесу, амплітуда якого становить 4,5, а миттєва частота $\omega(t) = 10^9 (1 + 10^{-4} \cos 2 \cdot 10^3 t)$

36. Визначити інтервал кореляції та енергію ЛЧМ – процесу з девіацією частоти $\Delta\omega = 10^9$ рад/с, базою 5000 та амплітудою 50.

37. Для ЛЧМ-процесу з девіацією частоти $\Delta\omega = 10^9$ рад/с, базою 5000 та амплітудою 50 визначити ширину спектра та амплітудний спектр.

38. Амплітуда ЛЧМ - процесу становить 10, а тривалість $t_{\text{имп}} = 15$ мкс. Визначити значення інтервалу кореляції.

39. Для ЛЧМ – імпульсу з тривалістю $t_{\text{имп}} = 15$ мкс, девіацією частоти $\Delta f = 25$ МГц та амплітудою 20 визначити його базу, швидкість зміни частоти та енергію.

40. Визначити базу та значення фазового спектра на границях смуги частот, що займає ЛЧМ – процес, з такими параметрами: амплітуда $S_0 = 10$ В, тривалість $t_{\text{имп}} = 15$ мкс, девіація частоти $\Delta f = 40$ МГц.

41. Наведіть графічне зображення КІМ-процесу із ЧМ, якщо результат вимірювання число 16 подається двійково-десятковим кодом.

42. Наведіть графічне зображення КІМ-процесу із ЧМ, якщо результат вимірювання число 18 подається двійковим кодом.