Міністерство освіти і науки України
Державний університет телекомунікацій
Кафедра вищої математики

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина 2

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ТА БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Київ – 2019

УДК 51
ББК 22.1

Вища математика. Ч.2. Інтегральне числення функцій однієї та багатьох змінних / О.В. Барабаш, Г.М Власик , Н.Б. Дахно, І.В. Замрій, О.В. Свинчук, В.В. Шкапа. – К.: ДУТ, 2019. – 232 с.

Схвалено до друку вченою радою
Державного університету телекомунікацій
(протокол № 5 від 21 жовтня 2019 року)

Рецензенти:

Працьовитий М.В. – доктор фізико-математичних наук, професор, декан фізико-математичного факультету Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова;
Романюк А.С. – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач відділу теорії функцій Інституту математики Національної Академії Наук України.

Навчальний посібник відповідає програмі дисципліни «Вища математика» з розділів «Інтегральне числення функцій однієї змінної» та «Інтегральне числення функцій багатьох змінних» Державного університету телекомунікацій. У посібнику розглядаються теми з чотирьох напрямів: «Невизначений інтеграл», «Визначений інтеграл», «Кратні інтеграли», «Криволінійні і поверхневі інтеграли».

Посібник містить стислі основні теоретичні положення, методичні рекомендації для розв'язання задач, питання та завдання з відповідями для самоперевірки, задачі підвищеної складності, розрахункові індивідуальні роботи та зразки їх виконання, а також типові контрольні роботи з кожної теми.

Посібник розрахований для студентів вищих технічних навчальних закладів всіх форм навчання (денної, заочної та дистанційної).

ЗМІСТ

ВСТУП

Як відомо, українська вища освіта в останні роки активно приєднується до Болонської системи. Основні завдання Болонського процесу націлені на створення єдиної освітньої європейської системи. Одне із завдань реформи – ввести систему співставлення дипломів і рівне визнання їх у всіх країнах так званої «Зони європейської вищої освіти».

В цілому, головна суть Болонського процесу полягає в усуненні перешкод для студентів і викладачів в межах Європи, в налагодженні співпраці між країнами і створенні загального освітнього простору.

В основі Болонської системи лежить кредитно-модульна організація навчального процесу. Така організація приводить до запровадження нових форм і методів поточного і підсумкового контролю, а це, у свою чергу, вимагає значного посилення ролі самостійної роботи студента.

Болонський процес дозволяє створити найбільш оптимальні, чітко сформульовані, об'єктивні, надійні, науково обґрунтовані критерії традиційних та нових форм контролю. Ця система враховує індивідуальні особливості студента, своєчасність, неперервність, конкретність термінів виконання завдань, можливість самоконтролю з боку студентів. Все це робить процес контролю знань зрозумілим і прозорим.

У зв’язку з цим навчальний посібник готувався з урахуванням вимог кредитно-модульної системи у відповідності до положень Болонського процесу. Основний принцип, яким керувались автори при підготовці даного посібника для студентів технічних вузів, – підвищення рівня фундаментальної математичної підготовки студентів з посиленням її прикладної технічної спрямованості. Це не тільки навчальний посібник, але й коротке керівництво до розв’язування задач. Основи теорії, викладені в навчальному посібнику, супроводжуються великою кількістю задач, які наводяться з розв’язуванням, та задачами для самостійної роботи. Задачі з розв’язанням розглядаються протягом всього викладання навчального матеріалу. Задачі для самостійної роботи розглядаються в кінці кожної теми.

Навчальний посібник «Вища математика. Частина 2. Інтегральне числення функцій однієї та багатьох змінних» є теоретичною основою для подальшого вивчення інших розділів вищої математики та спеціальних технічних дисциплін у відповідності до навчальних планів та освітньо-професійних програм.

У навчальному посібнику розглядаються чотири основних напрями. В першому викладаються невизначені інтеграли, основні методи інтегрування, детально розглядається інтегрування основних типів інтегралів. В другому – розглядаються визначені інтеграли, невласні інтеграли з необмеженими межами інтегрування та невласні інтеграли від необмежених функцій. Особливістю даного розділу є детальний розгляд застосування визначеного інтеграла для обчислення площ, об’ємів та інших технічних величин. В третьому – розглядаються поняття подвійного та потрійного інтегралів та основні підходи до інтегрування функцій багатьох змінних. В четвертому – розглядаються криволінійні інтеграли першого й другого роду, а також поверхневі інтеграли другого роду. Особливістю викладення матеріалу є те, що тут наведено алгоритми їх розв'язання.

Даний навчальний посібник розрахований для студентів технічних навчальних закладів і може бути використаний студентами як денної, так і заочної форм навчання.

КООРДИНАТИ НА ПЛОЩИНІ ТА В ПРОСТОРІ

Координати на площині

Прямокутними декартовими координатами точки M називають числа, що визначаються формулами

$$x = OM_x, \quad y = OM_y,$$

де OM_x – величина відрізка, яку відтинає перпендикуляр, що опускається з точки M на вісь Ox; відповідно OM_y – величина відрізка, яку відтинає перпендикуляр, що опускається з точки M на вісь Oy (Рис.1).

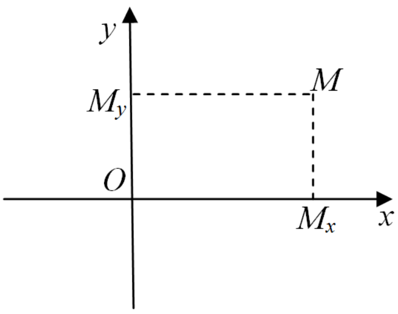


Рис.1

Полярна система координат на площині визначається точкою O (*полюс*), та променем OP (*полярна вісь*), що виходить з неї.

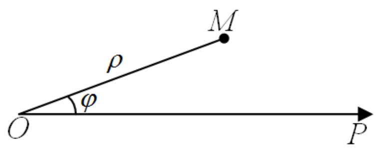


Рис.2

Полярними координатами точки M називають відстань $\rho = |OM|$ (*полярний радіус*) від точки M до полюса O та величину кута φ (*полярний кут*) між полярною віссю OP та променем OM. Полярний кут має нескінченну кількість значень, головним його значенням називають значення, що задовольняє умову $0 \le \varphi < 2\pi$ (Рис.2).

При відповідному виборі прямокутної та полярної системи координат (Рис.3) зв'язок між декартовими координатами x і y точки M та її полярними координатами ρ і φ виражається формулами

$$x = \rho \cos x, \quad y = \rho \sin x;$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

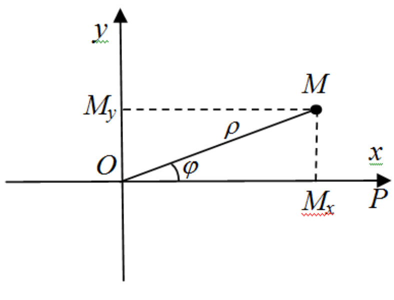


Рис.3

Координати в просторі

Нехай M – довільна точка, що задана в декартовій системі координат (Рис.4). Проведемо через неї три площини, які є перпендикулярними до координатних площин. Позначимо точки перетину цих площин з осями координат відповідно через M_x, M_y, M_z. Нехай OM_x, OM_y, OM_z – величини отриманих відрізків.

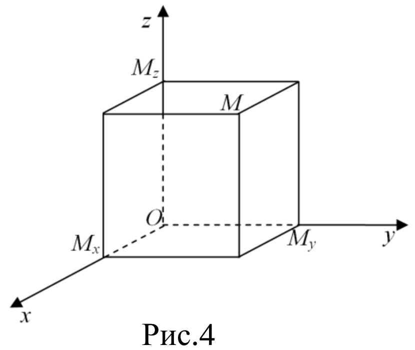


Рис.4

Прямокутними декартовими координатами точки M називають числа, що визначаються формулами

$$x = OM_x, \quad y = OM_y, \quad z = OM_z.$$

Число x називається першою координатою або *абсцисою*, число y – другою координатою або *ординатою*, число z – третьою координатою або *аплікатою* точки M.

Циліндричні координати. У площині Π зафіксуємо точку O і промінь, що виходить із неї (Рис.5). Через точку O проведемо пряму, яка є перпендикулярною до площини Π та вкажемо на ній додатній напрямок. Отриману вісь позначимо через Oz.

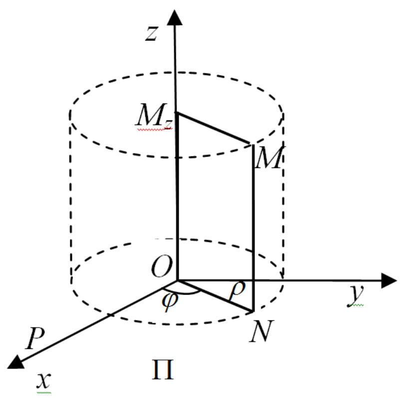


Рис.5

Нехай M – довільна точка простору, N – її проекція на площину Π, M_z – проекція на вісь Oz. Позначимо через ρ і φ полярні координати точки N в площині Π відносно полюса O та полярної осі OP.

Циліндричними координатами точки M називають числа ρ, φ, z, де ρ, φ – полярні координати точки N ($\rho \geq 0,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi$), $z = OM_z$. Запис $M(\rho, \varphi, z)$ означає, що точка М має циліндричні координати ρ, φ, z.

Назва «циліндричні координати» пояснюється тим, що поверхня, для якої $\rho = const$, є циліндром.

Якщо вибрати прямокутну та циліндричну системи координат (Рис.5), то декартові координати x, y, z точки M будуть пов'язані з її циліндричними координатами ρ, φ, z формулами

$$x=\rho\cos\varphi,\ \ y=\rho\sin\varphi,\ \ z=z\,.$$

Сферичні координати. Зафіксуємо площину Π з точкою O і піввіссю Ox, вісь Oz перпендикулярна площині Π (Рис.6)

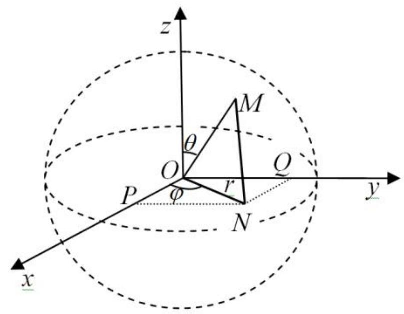


Рис.6

Нехай M – довільна точка простору (відмінна від O), N – проекція її на площину Π, r – відстань від точки M до початку координат, θ – кут, що утворюється відрізком OM та віссю Oz, φ – кут, на який потрібно повернути вісь Ox проти руху годинникової стрілки (якщо дивитись з додатного напрямку вісі Oz), щоб вона співпала з променем ON; θ – широта, φ – довгота.

Сферичними координатами точки M називаються три числа r,θ,φ, тому записують $M(r,\theta,\varphi)$.

Назва «сферичні координати» походить від того, що поверхня, для якої $r=const$, є сферою.

Для того, щоб відповідність між точками простору і трійками сферичних координат r,θ,φ було взаємно однозначною, величини r,θ,φ визначають в межах: $0\le r<+\infty,\ \ 0\le\theta\le\pi,\ \ 0\le\varphi<2\pi$.

Якщо обрати прямокутну декартову та сферичну системи координат, як показано на рис.6, то декартові координати x,y,z точки M будуть пов'язані з її сферичними координатами r,θ,φ формулами:

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\ \ y=\rho\sin\theta\sin\varphi,\ \ z=r\cos\theta\,.$$

1. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

1.1. Невизначений інтеграл

Невизначений інтеграл та його властивості. Таблиця основних невизначених інтегралів.

Поняття невизначеного інтеграла

Означення. *Функція $F(x)$, що визначена на проміжку (a,b), називається* ***первісною заданої функції*** $f(x)$ *на цьому проміжку, якщо для довільного значення $x \in (a,b)$ виконується рівність:*

$$F'(x) = f(x) \tag{1.1}$$

Наприклад, функція $F(x) = x^5$ – первісна функції $f(x) = 5x^4$ на проміжку $(-\infty,+\infty)$, оскільки $(x^5)' = 5x^4$ для всіх $x \in (-\infty;+\infty)$.

Якщо $F(x)$ – первісна функції $f(x)$, то функція

$$\Phi(x) = F(x) + C \tag{1.2}$$

також є її первісною, де C – довільна стала.

Вираз (1.2), в якому функція $F(x)$ задовольняє умову (1.1) , визначає множину всіх первісних даної функції $f(x)$ на заданому проміжку (a,b).

Означення. ***Невизначеним інтегралом*** *від заданої функції* $f(x)$ *називається множина всіх її первісних:*

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Символ $\int$ називається *знаком невизначеного інтеграла*, функція $f(x)$ – *підінтегральною функцією*, вираз $f(x)dx$ – *підінтегральним виразом*, x – *змінною інтегрування*.

Термін «*інтеграл*» походить від латинського слова *integralis* – цілісний.

Слово «*невизначений*» підкреслює, що до загального виразу первісної входить сталий доданок, який можна взяти довільно.

Операція знаходження первісної заданої функції називається *інтегруванням*. Вона є оберненою до операції диференціювання, тому правильність результату інтегрування можна завжди перевірити диференціюванням первісної.

Властивості невизначеного інтеграла

1. Похідна від невизначеного інтегралу дорівнює підінтегральній функції:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

2. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює сумі цієї функції та довільної сталої:

$$\int d\varphi(x) = \varphi(x) + C.$$

3. Сталий множник можна виносити за знак невизначеного інтеграла:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

4. Якщо $f_1(x)$ та $f_2(x)$ мають первісні, то функція $f_1(x) \pm f_2(x)$ також має первісну, причому:

$$\int \left(f_1(x) \pm f_2(x) \right) dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx.$$

5. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то для довільних $a, b \in R$:

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Наслідок 1. $\displaystyle\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C.$

Наслідок 2. $\displaystyle\int f(x+b)dx = F(x+b) + C.$

6. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$ і $u = \varphi(x)$ – диференційовна функція, то:

$$\int f(u)du = F(u) + C\cdot$$

Таблиця найпростіших інтегралів

1. $\int 1 \cdot dx = \int dx = x + C$;

2. $\displaystyle\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \ (\alpha \neq -1)$;

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

4. $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \ (a > 0)$;

5. $\int e^x dx = e^x + C$;

6. $\int \cos x dx = \sin x + C;$

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C;$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C;$

10. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} arcctg \frac{x}{a} + C;$

11. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C;$

12. $\int \frac{du}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C;$

13. $\int \frac{du}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C.$

Зауважимо, що всі вказані формули справедливі в тих проміжках, в яких визначені відповідні функції.

Безпосереднє інтегрування

Обчислення невизначеного інтеграла з використанням таблиці інтегралів та властивостей інтегралів називають *безпосереднім інтегруванням.* Для обчислення невизначеного інтеграла виконують *тотожні перетворення* підінтегральної функції, щоб звести інтеграл до табличного. Також використовують *метод підведення під знак диференціала*, який випливає з властивості 7. Цей метод в багатьох випадках дозволяє зводити інтеграли до табличних.

Приклад. Знайти невизначені інтеграли:

1. $\left(\int x^3 - 6x^2 + 4x - 5\right)dx$, **2.** $\int \left(\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$, **3.** $\int \left(\frac{x^2}{x^2 - 9} \right) dx$, **4.** $\int \sin^2 x dx$.

Розв'язання:

$$\textbf{1.} \int \left(x^3 - 6x^2 + 4x - 5\right)dx = \int x^3 dx - 6\int x^2 dx + 4\int x dx - 5\int dx =$$

$$= \frac{x^4}{4} - 6\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} - 5x + C = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + 2x^2 - 5x + C.$$

2. $$\int\left(\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)dx=\frac{1}{2}\int\sqrt{x}dx+3\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\frac{1}{2}\int x^{\frac{1}{2}}dx+3\int x^{-\frac{1}{3}}dx=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+3\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+C=\frac{1}{3}\sqrt{x^3}+\frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2}+C.$$

3. $$\int\left(\frac{x^2}{x^2-9}\right)dx=\int\left(\frac{(x^2-9)+9}{x^2-9}\right)dx=\int\left(1+\frac{9}{x^2-9}\right)dx=$$

$$=\int dx+9\int\left(\frac{1}{x^2-9}\right)dx=x+9\cdot\frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C=x+\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C.$$

4. $$\int\sin^2 xdx=\frac{1}{2}\int(1-\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos 2xdx=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x+C.$$

Метод підстановки (метод заміни змінної)

Інтегрування шляхом введення нової змінної (*метод підстановки*) базується на формулі:

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=\left|\begin{array}{c}x=\varphi(t)\\ dx=\varphi'(t)dt\\ t=\varphi^{-1}(x)\end{array}\right|=\int f(t)dt=\Phi(t)+C=\Phi(\varphi^{-1}(x))+C$$

де $x=\varphi(t)$ – диференційовна функція змінної *t*.

Приклад. Знайти невизначені інтеграли

1. $\int\sqrt{2x+1}dx$, **2.** $\int\frac{xdx}{x^2+1}$, **3.** $\int\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$,

4. $\int\sin^2 x\cdot\cos xdx$, **5.** $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}$

Розв'язання:

1. $$\int\sqrt{2x+1}dx=\frac{1}{2}\int\sqrt{2x+1}d(2x+1)=\left|\begin{array}{c}Заміна:\\ 2x+1=u\\ x=\frac{1}{2}u-1\\ dx=\frac{1}{2}du\end{array}\right|=\frac{1}{2}\int\sqrt{u}du=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C=$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{(2x+1)^3}+C.$$

2. $$\int\frac{xdx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{2xdx}{x^2+1}=\begin{vmatrix}\text{\textit{Заміна}}:\\ x^2+1=u\\ 2xdx=du\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}=\frac{1}{2}\ln|u|+C=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|+C.$$

3. $$\int\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}=\begin{vmatrix}\text{\textit{Заміна}}:\\ t=\sqrt{x}\\ t^2=x\\ 2tdt=dx\end{vmatrix}=\int\frac{2tdt}{t(1+t^2)}=2\int\frac{dt}{1+t^2}=2arctgt+C=2arctg\sqrt{x}+C.$$

4. $$\int\sin^2x\cdot\cos xdx=\begin{vmatrix}\text{\textit{Заміна}}:\\ t=\sin x\\ dt=\cos xdx\end{vmatrix}=\int t^2dt=\frac{t^3}{3}+C=\frac{\sin^3x}{3}+C.$$

5. $$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}=\begin{vmatrix}\text{\textit{Заміна}}:\\ t-x=\sqrt{x^2+\alpha}-\text{\textit{підстановка Ейлера}}\\ t=x+\sqrt{x^2+\alpha},\\ dt=\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+\alpha}}\right)dx=\frac{\sqrt{x^2+\alpha}+x}{\sqrt{x^2+\alpha}}dx=\frac{tdx}{\sqrt{x^2+\alpha}}\\ \frac{dt}{t}=\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}\end{vmatrix}=$$

$$=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|x+\sqrt{x^2+\alpha}|+C.$$

Отримали формулу 13 з таблиці інтегралів:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|x+\sqrt{x^2+\alpha}|+C \qquad (1.3)$$

Метод інтегрування частинами

Якщо дві функції $u=u(x)$ і $v=v(x)$ диференційовані від x, то має місце формула:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx. \qquad (1.4)$$

Зауваження. Формула (1.4) випливає з формули для диференціала добутку двох функцій $d(uv) = udv + vdu$.

Формулу (1.4) можна записати скорочено:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

В якості u зазвичай обирається функція, яка після диференціювання спрощується, а в якості dv – все, що залишилося.

Приклад. Знайти невизначений інтеграл $\int \ln x\sqrt{x}dx$.

Розв'язання:

$$\int \underset{u}{\ln x}\underset{dv}{\sqrt{x}dx} = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & dv = \sqrt{x}dx \\ \textit{диференціал} & \textit{первісна} \\ du = \dfrac{dx}{x} & v = \dfrac{2x^{3/2}}{3} \;\; (C = 0!) \end{array} \right| = \underset{u}{\ln x}\underset{v}{\frac{2x^{3/2}}{3}} - \int \underset{v}{\frac{2x^{3/2}}{3}}\underset{du}{\frac{1}{x}dx} =$$

$$= \frac{2x^{3/2}}{3}\ln x - \frac{2}{3}\int x^{1/2}dx = \frac{2x^{3/2}}{3}\ln x - \frac{2}{3}\cdot\frac{2x^{3/2}}{3} + C = \frac{2\sqrt{x^3}}{3}\ln x - \frac{4}{9}\sqrt{x^3} + C.$$

Рекомендації до застосування методу інтегрування частинами

Метод інтегрування частинами доцільно застосовувати, коли інтеграл, який знаходиться праворуч у формулі (1.4) буде простіше, ніж заданий. Цей метод використовують, наприклад, коли під знаком інтегралу знаходиться добуток многочлена на одну з функцій $\sin x$, $\cos x$, e^x, $\ln x$, $arctgx$ і т.д.. В цьому допоможуть правила:

Позначимо через $P(x)$ многочлен відносно змінної x.

1. В інтегралах вигляду $\int P_n(x)\sin\alpha x dx$, $\int P_n(x)\cos\alpha x dx$, $\int P_n(x)e^{\alpha x}dx$, $\int P_n(x)a^{\alpha x}dx$ за u береться многочлен $P_n(x)$, за dv – вираз, що лишився, тобто $\sin\alpha x dx, \cos\alpha x dx, e^{\alpha x}dx$ або $a^{\alpha x}dx)$. Це приводить до зниження степеня многочлена $P_n(x)$. Якщо степінь многочлена більше 1, то інтегрування частинами застосовується багаторазово.

2. В інтегралах вигляду $\int P_n(x)\ln x dx$; $\int P_n(x)\arcsin x dx$; $\int P_n(x)\arccos x dx$; $\int P_n(x) arctgx dx$ за u береться функція $\ln x(\arcsin x, \arccos x, arctgx)$, а за dv – $P_n(x)dx$.

3. При обчисленні інтегралів вигляду $I=\int a^{\alpha x}\sin\beta dx$, $I=\int a^{\alpha x}\cos\beta x dx$, де $\alpha, \beta \in R$, після двократного застосування формули інтегрування частинами утворюється лінійне рівняння відносно шуканого інтеграла I, який знаходять під час розв'язування цього ж рівняння.

Приклади. Знайти невизначені інтеграли

1. $\int (2x+1)\cos x dx$, **2.** $\int \arccos x dx$, **3.** $\int e^{2x} sin 3x dx$,

4. $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$, **5.** $\int \sqrt{x^2+\alpha}dx$.

Розв'язання:

1. $$\int (2x+1)\cos x dx = \left| \begin{array}{ll} \textit{Інтегруємо частинами}: & \\ u=2x+1 & dv=\cos x dx \\ \textit{диференціал} & \textit{інтеграл} \\ du=2dx & v=\int \cos x dx=\sin x \end{array} \right| =$$

$$=(2x+1)\sin x - 2\int \sin x dx =$$

$$=(2x+1)\sin x - 2(-\cos x) + C = (2x+1)\sin x + 2\cos x + C.$$

2. $$I=\int \arccos x dx = \left| \begin{array}{ll} \textit{Інтегруємо частинами}: & \\ u=\arccos x & dv=dx \\ du=-\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} & v=x \end{array} \right| = x\cdot\arccos x + \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Розглянемо окремо інтеграл в правій частині:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{array}{l} \textit{Заміна}: \\ t=1-x^2 \\ dt=-2xdx \\ -\dfrac{dt}{2}=xdx \end{array} \right| = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2}2\sqrt{t}+C = -\sqrt{t}+C = -\sqrt{1-x^2}+C.$$

Отримали:

$$I = x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C.$$

$$\mathbf{3.}\ I=\int e^{2x}sin3xdx=\left|\begin{matrix}\text{Інтегруємо частинами}: & \\ u=e^{2x} & dv=\sin 3xdx \\ du=2e^{2x} & v=-\dfrac{1}{3}\cos 3x\end{matrix}\right|=$$

$$=-\frac{1}{3}e^{2x}cos3x+\frac{2}{3}\int e^{2x}cos3xdx=\left|\begin{matrix}\text{Інтегруємо частинами}: & \\ u=e^{2x} & dv=\cos 3xdx \\ du=2e^{2x} & v=\dfrac{1}{3}\sin 3x\end{matrix}\right|=$$

$$=-\frac{1}{3}e^{2x}cos3x+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}e^{2x}sin3x+\frac{2}{2}\int e^{2x}sin3xdx\right)=\frac{2sin3x-3cos3x}{9}e^{2x}-\frac{4}{5}I\ .$$

Таким чином, відносно інтеграла I одержали лінійне рівняння:

$$I=\frac{2sin3x-3cos3x}{9}e^{2x}-\frac{4}{9}I.$$

Отже,

$$I=\frac{2sin3x-3cos3x}{13}e^{2x}.$$

$$\mathbf{4.}\ I=\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\left|\begin{matrix}\text{Інтегруємо частинами}: & \\ u=\sqrt{a^2-x^2} & dv=dx \\ du=\dfrac{-xdx}{\sqrt{a^2-x^2}} & v=x\end{matrix}\right|=x\sqrt{a^2-x^2}+\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=$$

$$=x\sqrt{a^2-x^2}+\int\frac{a^2-a^2+x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=x\sqrt{a^2-x^2}+\int\frac{a^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}-\int\frac{a^2-x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=$$

$$=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}-\int\sqrt{a^2-x^2}dx=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}-I;$$

$$I=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}-I;$$

$$2\cdot I=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a};$$

$$I=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C;$$

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

Зауваження. Цей інтеграл можна знайти за допомогою підстановки $x=a\sin t$.

5. $$I=\int\sqrt{x^2+\alpha}dx=\left|\begin{array}{ll}\textit{Інтегруємо частинами}: & \\ u=\sqrt{x^2+\alpha} & dv=dx \\ du=\dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+\alpha}} & v=x\end{array}\right|=x\sqrt{x^2+\alpha}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}=$$

$$=x\sqrt{x^2+\alpha}-\int\frac{\left(x^2+\alpha\right)-\alpha dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}=x\sqrt{x^2+\alpha}-\int\frac{\left(x^2+\alpha\right)dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}+\alpha\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}=$$

$$=x\sqrt{x^2+\alpha}-\int\sqrt{x^2+\alpha}dx+\alpha\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}=$$

З формули (1.3) маємо значення другого інтеграла в правій частині:

$$=x\sqrt{x^2+\alpha}-\int\sqrt{x^2+\alpha}dx+\alpha\ln|x+\sqrt{x^2+\alpha}|+C=$$

$$=x\sqrt{x^2+\alpha}-I+\alpha\ln|x+\sqrt{x^2+\alpha}|+C,$$

Отримали рівняння відносно шуканого інтеграла I

$$I=x\sqrt{x^2+\alpha}-I+\alpha\ln|x+\sqrt{x^2+\alpha}|+C,$$

$$2I=x\sqrt{x^2+\alpha}+\alpha\ln|x+\sqrt{x^2+\alpha}|+C,$$

Звідки

$$I=\frac{1}{2}\Big(x\sqrt{x^2+\alpha}+\alpha\ln|x+\sqrt{x^2+\alpha}|\Big)+C.$$

Отже

$$\int\sqrt{x^2+\alpha}=\frac{1}{2}\Big(x\sqrt{x^2+\alpha}+\alpha\ln|x+\sqrt{x^2+\alpha}|\Big)+C. \qquad (1.5)$$

Інтегрування раціональних дробів

Деякі відомості про многочлени

Означення. ***Многочленом*** *(поліномом або раціональною функцією) називається функція*

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n \ ,$$

де натуральне число n *називається* ***степенем многочлена****, дійсні або комплексні числа* $a_0, a_1, ..., a_n$ *називаються* ***коефіцієнтами многочлена.***

Незалежна змінна x також може бути як дійсною, так і комплексною.

Ми будемо розглядати лише многочлени з дійсними коефіцієнтами $a_0, a_1, ..., a_n \in R$.

Означення. ***Коренем многочлена*** $P_n(x)$ *називається таке число* $x = c$ *(дійсне або комплексне), при якому значення многочлена дорівнює нулю, тобто* $P_n(c) = 0$.

Теорема (про розклад многочлена на лінійні множники). *Будь-який многочлен* n*-го степеня* $P_n(x)$ *можна представити у вигляді*

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n) \tag{1.6}$$

де $x_1, x_2, ..., x_n$ *– корені многочлена ,* a_0 *– коефіцієнт многочлена при* x^n*. Розклад (1.6) є для многочлена* $P_n(x)$ *єдиним з точністю до перестановки множників.*

Приклади.

1. $5x^4 - 40x^3 + 115x^2 - 140x + 60 = 5(x-2)(x-2)(x-1)(x-3).$

2. $x^3 + x^2 + 9x + 9 = (x+1)(x+3i)(x-3i).$

Якщо деякі з лінійних множників однакові, то об’єднуючи їх, розклад (1.6) можна переписати у вигляді:

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2}...(x - x_l)^{k_l} \ ,$$

де $k_1 + k_2 + ... + k_l = n$ і серед коренів $x_1, x_2, ..., x_l$ немає однакових. У цьому випадку корінь x_1 називається *коренем кратності* k_1 або k_1*-кратним коренем,* x_2 *– коренем кратності* k_2 і т.д. Корінь кратності 1 називається *простим коренем*.

Теорема (про кратні корені многочлена). *Многочлен з числовими коефіцієнтами, степінь якого не менше 1, має* n *коренів, якщо кожен з коренів враховувати стільки разів, яка його кратність.*

Теорема (про розклад многочлена з дійсними коефіцієнтами на множники). *Многочлен* n*-го степеня* $P_n(x)$ *з дійсними коефіцієнтами* *можна представити у вигляді добутку свого старшого коефіцієнта* a_0 *і декількох многочленів з дійсними коефіцієнтами, лінійних виду* $x-c$*, які відповідають його дійсним кореням, і квадратних виду* x^2+px+q*, які відповідають парам комплексно спряжених коренів:*

$$P_n\left(x\right)=a_0\left(x-x_1\right)^{k_1}\ldots\left(x-x_l\right)^{k_l}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{m_1}\ldots\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{m_s} \qquad (1.7)$$

де k_i, $i=1,2,\ldots,l$ *– кратності дійсних коренів многочлена,* m_j, $j=1,2,\ldots,s$ *– кратності комплексно спряжених коренів,* $k_1+k_2+\ldots+k_l+2\left(m_1+m_2+\ldots+m_s\right)=n$ *– сталі,* a_0, x_i, p_j, q_j *– дійсні числа, причому* $p_j^2-4q_j<0$. *Розклад (1.7) є для многочлена* $P_n\left(x\right)$ *єдиним з точністю до перестановки множників.*

Раціональні дроби. Розклад правильного раціонального дробу у суму елементарних дробів

Означення. ***Дробовою раціональною функцією*** *або просто раціональним дробом називається відношення двох многочленів*

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n}, \quad (P_m(x)\neq 0,\, Q_n(x)\neq 0\ ).$$

Раціональний дріб називається **правильним**, якщо степінь чисельника менший степеня знаменника: $m<n$, і неправильним, якщо $m\geq n$.

Приклади.

1. $\dfrac{2}{x^3-1}$ – правильний.

2. $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ – неправильний.

Кожний неправильний раціональний дріб можна представити у вигляді суми многочлена і правильного раціонального дробу:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=L_k(x)+\frac{R_l(x)}{Q_n(x)},\ l<n.$$

Приклади.

1. $\dfrac{x^3-1}{x^2+1}=x-\dfrac{x+1}{x^2+1}$ **.**

2. $\dfrac{x^4-3}{x^2+2x+1}=x^2-2x+3-\dfrac{4x-6}{x^2+2x+1}$ **.**

Серед правильних раціональних дробів виділяють так звані найпростіші або елементарні дроби.

Означення. ***Елементарними раціональними дробами*** *називаються правильні раціональні дроби вигляду:*

1. $\dfrac{A}{x-a}$,

2. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, $(k\in N, k>1)$,

3. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$, ($p^2-4q<0$),

4. $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$, ($k\in N, n>1$, $p^2-4q<0$),

A, B, a, p, q – дійсні числа.

Теорема (про розкладання правильного раціонального дробу на елементарні). *Нехай знаменник правильного раціонального дробу* $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ *розкладено на множники*

$$Q_n(x)=a(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}....(x-a_s)^{k_l}\times$$
$$\times(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}(x^2+p_2x+q_2)^{m_2}....(x^2+p_rx+q_r)^{m_s},$$

тоді цей дріб $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ *можна представити у вигляді:*

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{(x-a_1)^2}+...+\frac{A_k}{(x-a)^k}+\frac{B_1}{x-a_2}+\frac{B_2}{(x-a_2)^2}+...+\frac{B_l}{(x-a_2)^l}+$$
$$+...+\frac{M_1+N_1x}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{M_2+N_2x}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+...+\frac{M_m+N_mx}{(x^2+p_1x+q_1)^m} \qquad (1.8)$$

де A_i, B_i, M_i, N_i – дійсні числа $(i=1,2,...)$.

З формули (1.8) бачимо, що кожному лінійному множнику знаменника $Q_n(x)$ відповідає така ж кількість доданків, яка і степінь множника.

Метод невизначених коефіцієнтів

Одним з найбільш простих методів визначення коефіцієнтів в розкладі правильного дробу на найпростіші (1.8) є *метод невизначених коефіцієнтів*.

Для знаходження коефіцієнтів $A_i, B_i, M_i, N_i \, (i = 1, 2, ...)$ в розкладі (1.8) необхідно всі доданки правої частини привести до спільного знаменника $Q_n(x)$. В отриманій тотожності знаменники рівні, тому рівні і чисельники. Многочлени в чисельниках рівні, коли рівні коефіцієнти при відповідних степенях x. Прирівнюючи коефіцієнти при відповідних степенях x, отримаємо систему лінійних рівнянь для визначення шуканих коефіцієнтів.

Приклад. Розкласти на елементарні доби раціональний дріб

$$\frac{2x-1}{x^3+x^2-2x}.$$

Розв'язання: Маємо

$$\frac{2x-1}{x^3+x^2-2x} = \frac{2x-1}{x(x^2+x-2)} = \frac{2x-1}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2} =$$

$$\frac{A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A(x^2+x-2)+B(x^2+2x)+C(x^2-x)}{x(x-1)(x+2)} =$$

$$= \frac{x^2(A+B+C)+x(A+2B-C)-2A}{x(x-1)(x+2)}.$$

Прирівняємо многочлени, які стоять в чисельниках лівої і правої частини:

$$2x-1 = x^2(A+B+C)+x(A+2B-C)-2A.$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$$\left.\begin{array}{l|l} x^2 & A+B+C=0; \\ x^1 & A+2B-C=2; \\ x^0 & -2A=-1; \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{l} A=\dfrac{1}{2} \\ 2A+3B=2 \\ B=\dfrac{1}{3} \\ C=-A-B=-\dfrac{5}{6} \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{1}{2}; \\ B=\dfrac{1}{3}; \\ C=-\dfrac{5}{6}. \end{cases}$$

Отже, $\dfrac{2x-1}{x^3+x^2-2x} = \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{3(x-1)} - \dfrac{5}{6(x+2)}$.

Інтегрування елементарних раціональних дробів

Розглянемо інтеграли від елементарних раціональних дробів.

1) Інтегрування елементарних раціональних дробів виду 1:

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{dx}{x-a} = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = \left|x-a=u\right| =$$

$$= A\int \frac{du}{u} = A\ln|u| + C = A\ln|x-a| + C.$$

2) Інтегрування елементарних раціональних дробів виду 2:

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int \frac{dx}{(x-a)k} = A\int \frac{d(x-a)}{(x-a)^k} = \left|x-a=u\right| =$$

$$= A\int \frac{du}{u^k} = A\frac{u^{-k+1}}{-k+1} + C = -\frac{A}{(n-1)u^{n-1}} + C = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C.$$

3) Інтегрування елементарних раціональних дробів виду 3:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \left| \begin{array}{l} x+\frac{p}{2}=t \\ x=t-\frac{p}{2} \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{A(t-\frac{p}{2})+B}{(t-\frac{p}{2})^2 + p(t-\frac{p}{2})+q}dt =$$

$$= \int \frac{At+B-A\frac{p}{2}}{t^2 - tp + \frac{p^2}{4} + pt - \frac{p^2}{2} + q}dt = \int \frac{(At+D)dt}{t^2 + \underbrace{(q-\frac{p^2}{4})}_{a^2}} =$$

$$\int \frac{(At+D)dt}{t^2+a^2} = A\int \frac{tdt}{t^2+a^2} + D\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \left| tdt = \frac{1}{2}d(t^2+a^2) \right| =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2} + D\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{A}{2}\ln\left|t^2+a^2\right| + \frac{D}{a}arctg\frac{t}{a} + C =$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left|t^2+q-\frac{t^2}{4}\right| + \frac{D}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}arctg\frac{t}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C =$$

$$=\frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\frac{B-A\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C=$$

$$=\frac{A}{2}\ln\left|\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2\right|+\frac{D}{a}arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{a}+C.$$

4) Інтегрування елементарних раціональних дробів виду 4:

$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx=\left|\begin{array}{l} x+\frac{p}{2}=t \\ x=t-\frac{p}{2} \\ dx=dt \\ q-\frac{p^2}{4}=a^2 \\ B-A\frac{p}{2}=D \end{array}\right|=\frac{A}{2}\underbrace{\int\frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^n}}_{I_1}+D\underbrace{\int\frac{du}{(u^2+a^2)^n}}_{I_2}.$$

Інтеграл I_1 обчислюється безпосередньо:

$$I_1=\int\frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^n}=\left|\ t^2+a^2=u\ \right|=\int\frac{du}{u^n}=$$

$$=-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}+C=-\frac{1}{(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}}+C.$$

Інтеграл I_2 обчислюється за допомогою рекурентної формули:

$$I_n=\int\frac{du}{(u^2+a^2)^n}\ ,$$

$$I_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\left(\frac{u}{(u^2+a^2)^n}+(2n-1)I_n\right),$$

яка приводить до відомого інтеграла

$$I=\int\frac{dt}{t^2+m^2}=\frac{1}{m}arctg\frac{t}{m}+C\ .$$

Інтегрування раціональних дробів

Основні правила інтегрування раціональних дробів:

1. Якщо, раціональний дріб неправильний, то його представляємо у вигляді суми многочлена та правильного раціонального дробу. Отже, інтегрування неправильного раціонального дробу зводиться до інтегрування многочлена та правильного раціонального дробу.
2. Розкладаємо знаменник правильного раціонального дробу на множники.
3. Правильний раціональний дріб представляють у вигляді суми елементарних дробів. Отже, інтегрування правильного раціонального дробу зводиться до інтегрування елементарних дробів.

Приклад. Обчислити інтеграли:

1. $\int \frac{x-2}{x^2\left(x^2+4\right)}dx$ **,** **2.** $\int \frac{x^4-3x^3-5x^2+30x-22}{x^3-x^2-8x+12}dx$ **.**

Розв'язання:

1. Під знаком інтеграла – правильний раціональний дріб. Розкладемо його на елементарні раціональні дроби:

$$\frac{x-2}{x^2\left(x^2+4\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+4}=\frac{Ax\left(x^2+4\right)+B\left(x^2+4\right)+\left(Cx+D\right)x^2}{x^2\left(x^2+4\right)}\ .$$

Прирівняємо многочлени, які стоять в чисельниках лівої і правої частини:

$$x-2=Ax\left(x^2+4\right)+B\left(x^2+4\right)+\left(Cx+D\right)x^2\ .$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$$\left.\begin{array}{l|c} x^3 & A+C=0; \\ x^2 & B+D=0; \\ x^1 & 4A=1; \\ x^0 & 4B=-2; \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} C=-\frac{1}{4}; \\ D=\frac{1}{2}; \\ A=\frac{1}{4}; \\ B=\frac{-1}{2}. \end{cases}$$

Отже, $\dfrac{x-2}{x^2\left(x^2+4\right)}=\dfrac{1}{4x}-\dfrac{1}{2x^2}+\dfrac{-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2+4}=\dfrac{1}{4x}-\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{1}{4}\dfrac{x-2}{x^2+4}.$

$$\int\frac{x-2}{x^2\left(x^2+4\right)}dx=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2}-\frac{1}{4}\int\frac{x-2}{x^2+4}dx.$$

Обчислимо кожний інтеграл:

$$\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x}=\frac{1}{4}\ln|x|+C\ ;\ \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{2x}+C\ ;$$

$$\frac{1}{4}\int\frac{x-2}{x^2+4}dx=\frac{1}{8}\int\frac{2x-4}{x^2+4}dx=\frac{1}{8}\int\frac{2xdx}{x^2+4}-\frac{4}{8}\int\frac{dx}{x^2+4}=$$

$$=\frac{1}{8}\int\frac{d\left(x^2+4\right)}{x^2+4}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+2^2}=\frac{1}{8}\ln\left(x^2+4\right)-\frac{1}{4}arctg\,\frac{x}{2}+C.$$

Остаточно маємо:

$$\int\frac{x-2}{x^2\left(x^2+4\right)}dx=\ln|x|-\frac{1}{2x}+\frac{1}{8}\ln\left(x^2+4\right)-\frac{1}{4}arctg\,\frac{x}{2}+C.$$

2. $\displaystyle\int\frac{x^4-3x^3-5x^2+30x-22}{x^3-x^2-8x+12}dx=\int\left(x-2+\frac{x^2+2x+2}{x^3-x^2-8x+12}\right)dx=$

$$=\frac{x^2}{2}-2x+\int\frac{x^2+2x+2}{x^3-x^2-8x+12}dx\,.$$

Звертаємо увагу, що $x^3-x^2-8x+12=(x-2)^2(x+3)$. Розкладемо отриманий раціональний дріб на елементарні:

$$\frac{x^2+2x+2}{x^3-x^2-8x+12}=\frac{x^2+2x+2}{(x-2)^2(x+3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{x+3}=$$

$$=\frac{A(x-2)(x+3)+B(x+3)+C(x-2)^2}{(x-2)^2(x+3)}=$$

$$=\frac{A(x^2+x-6)+B(x+3)+C(x^2-4x+4)}{(x-2)^2(x+3)}=$$

$$=\frac{x^2(A+C)+x(A+B-4C)+(-6A+3B-4C)}{(x-2)^2(x+3)}.$$

Прирівнявши коефіцієнти при відповідних степенях *x*, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих параметрів A, B та C.

$$\begin{cases} A+C=1 \\ A+B-4C=2 \\ -6A+3B-4C=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{4}{5} \\ B=2 \\ C=\dfrac{1}{5} \end{cases}$$

Маємо:

$$\int \frac{x^2+2x+2}{x^3-x^2-8x+12}dx=\int\left(\frac{4}{5(x-2)}+\frac{2}{(x-2)^2}+\frac{1}{5(x+3)}\right)dx=$$

$$=\frac{4}{5}\ln|x-2|-\frac{2}{x-2}+\frac{1}{5}\ln|x+3|+C.$$

Отже:

$$\int \frac{x^4-3x^3-5x^2+30x-22}{x^3-x^2-8x+12}dx=\frac{x^2}{2}-2x+\frac{4}{5}\ln|x-2|-\frac{2}{x-2}+\frac{1}{5}\ln|x+3|+C.$$

Інтегрування ірраціональних функцій

Якщо в раціональному дробі деякі доданки в чисельнику або знаменнику замінити коренями від раціональних функцій, то одержана функція буде називатись *ірраціональною*.

У деяких випадках інтеграли від ірраціональних функцій можна раціоналізувати (тобто за допомогою певної підстановки привести до інтегралів від раціональних функцій).

1. Якщо в невизначеному інтегралі

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}$$

виділити повний квадрат у підкореневому виразі, то шляхом заміни $u=x+b$, в залежності від знака A, отримаємо один з інтегралів:

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C\,,$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + \alpha}} = \ln|u + \sqrt{u^2 + \alpha}| + C\,.$$

Приклад: $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 + 6x + 4}}$.

Розв'язання:

$$3x^2 + 6x + 4 = 3(x^2 + 2x + 1) - 3 + 4 = 3(x+1)^2 + 4 = 3\left((x+1)^2 + 1/3\right),$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 + 6x + 4}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3\left((x+1)^2 + 1/3\right)}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2 + 1/3}} =$$

$$= \begin{vmatrix} \textit{Заміна}: \\ u = x + 1 \\ du = dx \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 1/3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln|u + \sqrt{u^2 + 1/3}| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \ln|x + 1 + \sqrt{(x+1)^2 + 1/3}| + C.$$

2. Невизначений інтеграл

$$\int \sqrt{Ax^2 + Bx + C}\,dx$$

в залежності від знака A зводиться до одного з інтегралів методом виділення повного квадрата:

$$\int \sqrt{a^2 - u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a} + C\,,$$

$$\int \sqrt{u^2 + \alpha}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 + \alpha} + \frac{\alpha}{2}\ln|u + \sqrt{u^2 + \alpha}| + C\,.$$

.

Приклад: $\int \sqrt{x^2 + 6x + 13}\,dx$.

Розв'язання:

$$\int \sqrt{x^2 + 6x + 13}\,dx = \int \sqrt{\left(x^2 + 6x + 9\right) - 9 + 13}\,dx = \int \sqrt{(x+3)^2 + 4}\,dx =$$

$$=\left|\begin{array}{l}\textit{Заміна}: \\ u=x+3 \\ du=dx\end{array}\right|=\int\sqrt{u^2+4}du=\frac{u}{2}\sqrt{u^2+4}+\frac{4}{2}\ln|u+\sqrt{u^2+4}|+C=$$

$$=\frac{x+3}{2}\sqrt{(x+3)^2+4}+2\ln|x+3+\sqrt{(x+3)^2+4}|+C=$$

$$\frac{x+3}{2}\sqrt{x^2+6x+13}+2\ln|x+3+\sqrt{x^2+6x+13}|+C.$$

3. Невизначений інтеграл

$$\int\frac{ax+b}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}dx$$

зводиться до інтеграла вигляду:

$$\int\frac{f'(x)dx}{f(x)}=\int\frac{df(x)}{f(x)}=\ln|f(x)|+C,$$

$$\int\frac{f'(x)dx}{\sqrt{f(x)}}=\int f^{-1/2}df(x)=\frac{f^{1/2}(x)}{1/2}+C=2\sqrt{f(x)}+C.$$

4. Інтеграл вигляду

$$\int R\left(x,x^{\frac{p_1}{q_1}},x^{\frac{p_2}{q_2}},...,x^{\frac{p_n}{q_n}}\right)dx$$

де R – раціональна функція, $p_1,q_1,p_2,q_2,...p_n,q_n$ – цілі числа, за допомогою підстановки

$$x=t^n,$$

де n – найменше спільне кратне чисел $q_1,q_2,...,q_n$, зводиться до інтегралу від раціональної функції.

5. Інтеграл вигляду

$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}},...,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}\right)dx$$

де R– раціональна функція, $p_1,q_1,p_2,q_2,...p_n,q_n$ – цілі числа, за допомогою підстановки

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^n,$$

де n – найменше спільне кратне чисел $q_1,q_2,...,q_n$, зводиться до інтегралу від раціональної функції.

Приклади:

1. $\int\frac{\sqrt[6]{x}dx}{x(\sqrt[3]{x+\sqrt[4]{x}})}$, **2.** $\int\frac{x+3}{x-3}\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}dx$

Розв'язання:

1.Заданий інтеграл представимо у вигляді

$$\int\frac{x^{1/6}dx}{x^{4/3}+x^{5/4}}.$$

Найменшим загальним знаменником дробових показників степеня $\frac{1}{6}$, $\frac{4}{3}$ та $\frac{5}{4}$ буде $q=12$. Підстановка: $x=t^{12}\Rightarrow dx=12t^{11}dt$. Тоді

$$\int\frac{x^{1/6}dx}{x^{4/3}+x^{5/4}}=\int\frac{t^2\cdot12t^{11}\cdot dt}{t^{16}+t^{15}}=12\int\frac{dt}{t^2(t+1)}=-12\int\frac{t^2-1-t^2}{t^2(t+1)}dt=$$

$$=-12\left[\int\frac{t-1}{t^2}dt-\int\frac{dt}{t+1}\right]=-12\left[\int\frac{dt}{t}-\int\frac{dt}{t^2}-\int\frac{dt}{t+1}\right]=$$

$$=-12\left(\ln t+\frac{1}{t}-\ln(t+1)\right)+C=-12\left(\frac{1}{t}+\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|\right)+C=$$

$$=\ln\left(\frac{t+1}{t}\right)^{-12}-\frac{12}{t}+C=\ln\frac{\left(\sqrt[12]{x}+1\right)^{-12}}{x}-\frac{12}{\sqrt[12]{x}}+C.$$

2. Підстановка: $\frac{x+3}{x-3}=t^2$. Визначимо x та dx:

$$x+3=xt^2-3t^2\Rightarrow3(1+t^2)=x(t^2-1)\Rightarrow x=\frac{3(1+t^2)}{t^2-1},$$

$$dx=\frac{6t(t^2-1)-3(1+t^2)\cdot 2t}{(t^2-1)^2}dt=\frac{-12t}{(t^2-1)^2}dt \ .$$

Тому

$$\int\frac{x+3}{x-3}\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}dx=\int t^2\cdot t\frac{-12t}{(t^2-1)^2}dt=-12\int\frac{t^4}{(t^2-1)^2}dt \ .$$

Останній інтеграл будемо знаходити методом заміни: Нехай $u=t^3$, $dv=\frac{t}{(t^2-1)^2}dt$, тоді $du=3t^2dt$, $v=\frac{-1}{2(t^2-1)}$. Отже,

$$\int\frac{t^4}{\left(t^2-1\right)^2}dt=\frac{-t^3}{2\left(t^2-1\right)}+\int\frac{3t^2dt}{2\left(t^2-1\right)}=\frac{-t^3}{2\left(t^2-1\right)}+$$

$$+\frac{3}{2}\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=\frac{-t^3}{2(t^2-1)}+\frac{3t}{2}+\frac{3}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C \ .$$

Повертаючись від змінної t до змінної x, одержимо:

$$\int\frac{x+3}{x-3}\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}dx=\frac{\left(15-x\right)}{12}\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}+\frac{3}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-3}}\right|+C \ .$$

6. Інтеграл від диференціального бінома

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx,$$

де m,n,p – раціональні числа; a,b – сталі, відмінні від нуля, зводиться до інтегралу від раціональної функції в наступних випадках:

1) якщо $p>0$ – ціле число, робимо підстановку $x=t^s$, де s – найменший спільний знаменник дробів m і n;

2) якщо $\frac{m+1}{n}$ – ціле число, робимо підстановку $a+bx^n=t^r$, де r – знаменник дробу p;

3) якщо $\dfrac{m+1}{n}+p$ – ціле число, робимо підстановку $ax^{-n}+b=t^r$ ($a+bx^n=t^r x^n$), де r – знаменник дробу p.

Приклад. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

Розв'язання:

$$\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx=\int x^{-\frac{2}{3}}(1+x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}dx=\left|\begin{array}{c}\textit{Заміна}: \\ m=\dfrac{2}{3};n=\dfrac{1}{3};p=\dfrac{1}{2} \\ m+n=1\in Z \\ x=t^3;dx=3t^2dt\end{array}\right|=\int t^{-2}(1+t)^{\frac{1}{2}}3t^2dt=$$

$$\int (1+t)^{\frac{1}{2}}dt=\frac{(1+t)^{\frac{3}{2}}2}{3}+C=\frac{2}{3}(1+\sqrt[3]{x})^{\frac{3}{2}}+C.$$

7. Інтеграли виду:

1) $\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})dx$.

Підінтегральний вираз раціоналізується за допомогою підстановки:

$$x=a\sin t\,(x=a\cos t),\ dx=a\cos tdt,$$

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=a\cos t.$$

Приклад. $\int x^2\sqrt{4-x^2}dx$.

Розв'язання:

$$\int x^2\sqrt{4-x^2}dx=\left|\begin{array}{c}\textit{Заміна}: \\ x=2\sin t,\quad dx=2\cos tdt \\ \sin t=\dfrac{x}{2},\quad t=\arcsin\dfrac{x}{2}, \\ \sqrt{4-x^2}=2\cos t\end{array}\right|=\int (2\sin t)^2\cdot 2\cos t\cdot 2\cos tdt=$$

$$=\int 4\sin^2 t\cdot 4\cos^2 tdt=4\int \sin^2 2tdt=4\int \frac{1-\cos 4t}{2}dt=2\int dt-2\int \cos 4tdt=$$

$$=2t-\frac{1}{2}\sin 4t+C=2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sin 4\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)+C=$$

$$=2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{x}{4}\left(x^2-2\right)\sqrt{4-x^2}+C.$$

2) $\int R(x,\sqrt{a^2+x^2})dx$.

Підінтегральний вираз раціоналізується за допомогою підстановки:

$$x=a\cdot tgt\ \ (x=a\cdot ctgt),\quad dx=\frac{a}{\cos^2 t}dt,$$

$$\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2+a^2tg^2t}=a\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}=\frac{a}{\cos^2 t}.$$

Приклад. $\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}dx$.

Розв'язання:

$$\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}dx=\left|\begin{array}{c}\textit{Заміна}:\\ x=tgt,\quad dx=\dfrac{dt}{\cos^2 x}\\ \sqrt{x^2+1}=\dfrac{1}{\cos t}\end{array}\right|=\int\frac{\dfrac{dt}{\cos^2 x}}{tg^2t\cdot\dfrac{1}{\cos t}}=\int\frac{\cos tdt}{tg^2t\cdot\cos^2 t}=$$

$$=\int\frac{dt}{tg^2t\cdot\cos t}=\int\frac{\cos^2 tdt}{\sin^2 t\cdot\cos t}=\int\frac{\cos tdt}{\sin^2 t}=\left|\begin{array}{l}\textit{Заміна}:\\ \sin t=u\\ \cos tdt=du\end{array}\right|=\int\frac{du}{u^2}=-\frac{1}{u}+C=$$

$$=-\frac{1}{\sin t}+C=\left|\begin{array}{c}\textit{Повернемось}\\ \textit{до заміни}:\\ x=tgt,\ \ t=arctgx\end{array}\right|=-\frac{1}{\sin(arctgx)}+C.$$

3) $\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})dx$.

Підінтегральний вираз раціоналізується за допомогою підстановки

$$x=\frac{a}{\cos t}\ \ (x=\frac{a}{\sin t}),\quad dx=\frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt,$$

$$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t}-a^2}=a\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}-1}=a\sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}}=a\sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}=atgt.$$

Приклад. $\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x^4}dx$.

Розв'язання:

$$\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x^4}dx = \left| \begin{array}{c} \textit{Заміна}: \\ x=\frac{5}{\cos t}, \quad dx=\frac{5\sin t dt}{\cos^2 x} \\ \cos t=\frac{5}{x}, \quad t=\arccos\frac{5}{x} \\ \sqrt{x^2-25}=5tgt \end{array} \right| = \int \frac{5tgt}{\left(\frac{5}{\cos t}\right)^4}\cdot\frac{5\sin t dt}{\cos^2 x} =$$

$$= \int \frac{5^2 \frac{\sin t}{\cos t}\cdot \sin t dt}{5^4 \frac{1}{\cos^4 x}\cdot \cos^2 t} = \frac{1}{25}\int \sin^2 t \cos t dt = \frac{1}{25}\frac{\sin^3 t}{3}+C=$$

$$= \frac{1}{75}\sin^3\left(\arccos\frac{5}{x}\right)+C = \frac{1}{75}\frac{\sqrt{(x^2-25)^3}}{x^3}+C.$$

Інтегрування деяких тригонометричних функцій

1. Невизначені інтеграли

$$\int \sin\alpha x \cos\beta x dx, \ \int \sin\alpha x \sin\beta x dx, \ \int \cos\alpha x \cos\beta x dx$$

за допомогою тригонометричних формул перетворення добутку в суму:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)),$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)),$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)),$$

зводяться до інтегралів

$$\int \cos kx dx = \frac{\sin kx}{k}+C, \ \int \sin kx dx = -\frac{\cos kx}{k}+C.$$

Приклад. $\int \sin 3x \cdot \cos 7x dx$.

Розв'язання:

$$\int \sin 3x \cdot \cos 7x dx = \frac{1}{2}\int \left(\sin(3-7)x + \sin(3+7)\right) x dx = \frac{1}{2}\int \left(\sin(-4)x + \sin 10x\right) dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \sin 4x dx + \frac{1}{2}\int \sin 10x dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cos 4x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}\cos 10x + C =$$

$$= -\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{20}\cos 10x + C.$$

2. Невизначені інтеграли вигляду

$$I = \int \sin^m x \cos^n x dx, \quad m,n \in N,$$

1) якщо $m,\ n$ – парні, знаходяться за допомогою тригонометричних формул:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}; \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}; \quad \sin x \cdot \cos x = \frac{\sin 2x}{2}.$$

Приклад. $\int \sin^4 x dx$.

Розв'язання:

$$\int \sin^4 x dx = \frac{1}{2^2}\int \left(1-\cos 2x\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2}\left(1+\cos 4x\right)\right) dx = \frac{1}{4}\left(x - \sin 2x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x\right) + C =$$

$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

2) якщо хоч одне з чисел $m,\ n$ – непарне, то від непарної степені виділяється множник і вводиться нова змінна. Наприклад, якщо $n = 2k+1$, то

$$I=\int \sin^m x\cos^n xdx=\int \sin^m x\cos^{2k+1} xdx=\int \sin^m x\cos^{2k} x\cos xdx=$$

$$=\int \sin^m x(1-\sin^2 x)^k \cos xdx=\begin{vmatrix} \textit{Заміна} \\ t=\sin x \\ dt=\cos xdx \end{vmatrix}=\int t^m (1-t^2)^k dt\,.$$

$$I=\int \cos^m x\sin^n xdx=\int \cos^m x\sin^{2k+1} xdx=\int \cos^m x\sin^{2k} x\sin xdx=$$

$$=\int \cos^m x(1-\cos^2 x)^k \sin xdx=\begin{vmatrix} \textit{Заміна} \\ t=\cos x \\ dt=-\sin xdx \end{vmatrix}=-\int t^m (1-t^2)^k dt.$$

Приклади. **1.** $\int \sin^4 x\cos xdx$, **2.** $\int \sin^5 x\cos^4 xdx$,

3. $\int \dfrac{\sin^3 x}{2+\cos x}dx$.

Розв'язання:

1. $$\int \sin^4 x\cos xdx=\begin{vmatrix} \textit{Заміна}: \\ \sin x=t, \\ \cos xdx=dt \end{vmatrix}=\int t^4 dt=\frac{t^5}{5}+C=\frac{\sin^5 x}{5}+C\,,$$

2. $$\int \sin^5 x\cos^4 xdx=\int \cos^4 x\sin^4 x\sin xdx=\begin{vmatrix} \textit{Заміна}: \\ \cos x=t, \\ \sin xdx=-dt, \\ \sin^2 x=1-\cos^2 x \end{vmatrix}=$$

$$=-\int t^4\left(1-t^2\right)^2 dt=-\int (t^8-2t^6+t^4)dt=-\frac{t^9}{9}+\frac{2t^7}{7}-\frac{t^5}{5}+C=$$

$$=-\frac{\cos^9 x}{9}+\frac{2\cos^7 x}{7}-\frac{\cos^5 x}{5}+C\,.$$

3. $$\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}dx=\int \frac{\sin^2 x\sin x}{2+\cos x}dx=\int \frac{1-\cos^2 x}{2+\cos x}\sin xdx=\begin{vmatrix} \textit{Заміна}: \\ \cos x=t; \\ \sin xdx=-dt \end{vmatrix}=$$

$$=\int\frac{1-t^2}{2+t}(-dt)=\int\frac{t^2-1}{t+2}dt=\int\left(t-2+\frac{3}{t+2}\right)dt=$$

$$=\frac{t^2}{2}-2t+3\ln|t+2|+C=\frac{t^2}{2}-2\cos x+3\ln|\cos x+2|+C$$

3) якщо *m, n* – парні, але хоча б одне з них від'ємне, то підстановка має вигляд $tgx=t,\ \frac{dx}{\cos^2 x}=dt,\ \left(ctgx=t,\ -\frac{dx}{\sin^2 x}=dt\right).$

Приклад. $\int\frac{\sin^2 xdx}{\cos^4 x}$.

Розв'язання:

$$\int\frac{\sin^2 xdx}{\cos^4 x}=\begin{vmatrix}\mathit{Заміна}:\\ tgx=t\\ \frac{dx}{\cos^2 x}=dt\end{vmatrix}=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\frac{dx}{\cos^2 x}=\int t^2dt=\frac{t^3}{3}+C=\frac{tg^3x}{3}+C\,.$$

3. Інтеграл вигляду

$$I=\int R(tgx,ctgx)dx\,,$$

де R – раціональна функція відносно tgx і $ctgx$, розв'язується за допомогою підстановки

$$tgx=t,\ ctgx=\frac{1}{t},\quad dx=\frac{dt}{1+t^2}.$$

Приклад. $\int tg^5 xdx$.

Розв'язання:

$$\int tg^5 x dx = \left| \begin{array}{c} \textit{Заміна}: \\ tgx = t, \\ x = arctgt, \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{t^5 dt}{1+t^2} = \int (t^3 - t + \frac{t}{1+t^2})dt =$$

$$= \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\ln\left|t^2+1\right| + C = \frac{tg^4 x}{4} - \frac{tg^2 x}{2} + \frac{1}{2}\ln\left|tg^2 x + 1\right| + C.$$

4. Інтеграл вигляду

$$I = \int R(\sin x, \cos x)dx,$$

де $R(\sin x, \cos x)$ – раціональна функція від $\sin x$ та $\cos x$, приводиться до інтегралу від раціональної функції нового аргументу підстановкою $tg\frac{x}{2} = t$. Така підстановка називається *універсальною*. Тоді

Отримаємо інтеграл

$$I = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}; \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} == \int R_1(t)dt,$$

де $R_1(t)$ – раціональна функція від змінної t.

Цю підстановку застосовують до інтегралів $\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c}$, де хоча б один з коефіцієнтів *a* або *b* не дорівнюють нулю, а також інтегралів виду :

$$\int \frac{dx}{a\sin x}, \int \frac{dx}{b\cos x}, \int \frac{dx}{b\cos x + c}.$$

Приклад. $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x}$.

Розв'язання:

$$\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x}=\left|\begin{array}{c} \textit{Заміна}: \\ tg\frac{x}{2}=t,\quad dx=\frac{2}{1+t^2}dt, \\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2}, \\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array}\right|=\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2\cdot\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{4t-1+t^2}{1+t^2}}=$$

$$=2\int \frac{dt}{t^2+4t-1}=2\int \frac{dt}{(t+2)^2-5}=2\cdot\frac{1}{2\sqrt{5}}\cdot\ln\left|\frac{t+2-\sqrt{5}}{t+2-\sqrt{5}}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}+2-\sqrt{5}}{tg\frac{x}{2}+2-\sqrt{5}}\right|+C.$$

5. Інтеграл вигляду

$$I=\int R(\sin^2 x,\cos^2 x)dx,$$

де $R(\sin^2 x,\cos^2 x)$ – раціональна функція від $\sin^2 x$ та $\cos^2 x$, приводиться до інтегралу від раціональної функції нового аргументу підстановкою:

$$tgx=t,\quad \sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2},\ \cos^2 x=\frac{1}{1+t^2},\ dx=\frac{dt}{1+t^2},$$

Приклад. $\int \frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x}$.

Розв'язання:

$$\int \frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x}=\left|\begin{array}{c} \textit{Заміна}: \\ tgx=t,\ x=arctgt \\ dx=\frac{1}{1+t^2}dt, \\ \sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2}, \\ \cos^2 x=\frac{1}{1+t^2} \end{array}\right|=\int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{4-3\frac{1}{1+t^2}+5\frac{t^2}{1+t^2}}=$$

$$=\int\frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{4+4t^2-3+5t^2}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{9t^2+1}=\frac{1}{3}arctg3t+C=\frac{1}{3}arctg(3tgx)+C.$$

Задачі для самостійного розв'язування

1. Обчислити інтеграли:

1. $\int\frac{\sqrt{x^5}-4}{x}dx,$ 2. $\int\frac{4-\sin^3 x}{\sin^2 x}dx,$ 3. $\int\frac{\sin 2x}{\cos x}dx,$

4. $\int\frac{dx}{2x^2+5},$ 5. $\int\frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}},$ 6. $\int\frac{(x+1)dx}{1-x},$

7. $\int(x^3-3x^2+5x-4)dx,$ 8. $\int\frac{dx}{x^2+3}$; 9. $\int(3+\cos x)dx,$

10. $\int(x-9)^{11}dx$, 11. $\int\frac{dx}{(5-x)^{32}},$ 12. $\int e^{2x+5}dx,$

13. $\int\cos\frac{2x}{3}dx,$ 14. $\int\frac{dx}{\cos^2(4x-7)},$ 15. $\int\sqrt[5]{x}dx$.

2. Обчислити інтеграли методом підстановки (заміни):

1. $\int\frac{t^3}{t^4-9}dt,$ 2. $\int tgx,$ 3. $\int\frac{dx}{x\ln^2 x},$

4. $\int\frac{e^x}{e^x-8}dx,$ 5. $\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx,$ 6. $\int x\sqrt{x^2-3}dx,$

7. $\int\frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx,$ 8. $\int 5^{\sin x}\cos xdx,$ 9. $\int\frac{e^x}{\sqrt{4-e^{2x}}}dx,$

10. $\int\frac{tg7x}{\cos^2 7x}dx,$ 11. $\int\frac{\ln(x-1)}{x-1}dx,$ 12. $\int\frac{1}{(1+x^2)arctgx}dx,$

13. $\int x\sqrt{x-1}dx$, 14. $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x+3}},$ 15. $\int\frac{(2x-3)dx}{\sqrt[3]{(2x+5)^2}+2\sqrt[3]{2x+5}+4}$

,

16. $\int\sin^3 x\cos xdx,$ 17. $\int\sqrt[3]{\cos^2 x}\cdot\sin xdx,$ 18. $\int\frac{\sin x}{1+\cos x}dx$.

3. Обчислити інтеграли методом інтегрування частинами:

1. $\int x\cos 2xdx,$ 2. $\int x^3 e^{\frac{x}{3}}dx,$ 3. $\int\arcsin tdt,$

4. $\int x\arccos x dx$, 5. $\int x^2 \ln x dx$, 6. $\int x^2 \sin x dx$,

7. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$; 8. $\int \cos x \cdot \ln \sin x dx$, 9. $\int \ln^2 x dx$,

10. $\int \frac{\cos 2x}{e^{3x}} dx$, 11. $\int e^{2x} \sin 5x dx$, 12. $\int (x+2)e^{-x} dx$.

5. Обчислити інтеграли від раціональних, ірраціональних та тригонометричних функцій:

1. $\int \frac{5}{x^2-4x+3} dx,$ **2.** $\int \frac{x+1}{x^2+x-6} dx,$ **3.** $\int \frac{3x^3+2x-3}{x^3-x} dx,$

4. $\int \frac{5xdx}{2+x^2},$ **5.** $\int \frac{1}{x^2-4x+5} dx,$ **6.** $\int \frac{x}{x^2+8x+20} dx,$

7. $\int \frac{(x+5)dx}{x^2-2x+5},$ **8.** $\int \frac{5x^3+10x^2+x+4}{x^2+2x+10} dx,$ **9.** $\int \sin^2 x dx,$

10. $\int \sin 2x \cdot \sin 4x dx,$ **11.** $\int \frac{1}{\sin x+\cos x} dx,$ **12.** $\int \frac{(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt[3]{x}} dx$**,**

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$**,** **14.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$**,** **15.** $\int \frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt{2x+1}} dx$

.

Відповіді

1.1. $\frac{2}{5}\sqrt{x^5}-4\ln|x|+C$**,** **1.2.** $-4ctgx+\cos x+C$**,** **1.3.** $-2\cos x+C$**,**

1.4. $\frac{1}{\sqrt{10}} arctg \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{5}}+C$**,** **1.5.** $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{3}+C$**, 1.6.** $x+\ln|x-1|+C$**,**

1.7. $\frac{x^4}{4}-x^3+\frac{5x^2}{2}-4+C$**,** **1.8.** $\frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{x}{\sqrt{3}}+C$**,** **1.9.** $3x+\sin x+C$**,**

1.10. $\frac{(x-9)^{12}}{12}+C$**,** **1.11.** $\frac{1}{31(5-x)^{31}}+C$**,** **1.12.** $\frac{1}{2}e^{2x+5}+C$**,**

1.13. $\frac{3}{2}\sin\frac{2x}{3}+C$**,** **1.14.** $\frac{tg(4x-7)}{4}+C$**,** **1.15.** $\frac{5x^{6/5}}{6}+C$**.**

2.1. $\frac{1}{4}\ln|t^4-9|+C$**,** **2.2.** $-\ln|\cos x|+C$**,** **2.3.** $-\frac{1}{\ln|x|}+C$**,**

2.4. $\ln|e^x-8|+C$**,** **2.5.** $\frac{1}{2}e^{\sqrt{x}}+C$**,** **2.6.** $\frac{1}{3}(x^2-3)^{3/2}+C$**,**

2.7. $\frac{2}{3}\ln^{3/2}|x|+C$, **2.8.** $5^{\sin x}\ln 5+C$, **2.9.** $\arcsin\frac{e^x}{2}+C$, **2.10.** $\frac{tg^2 7x}{14}+C$,

2.11. $\frac{1}{2}\ln^2(x-1)+C$, **2.12.** $\ln|arctgx|+C$, **2.13.** $\frac{2}{5}(x-1)^{5/2}+\frac{2}{3}(x-1)^{3/2}+C$,

2.14. $2\sqrt{x+3}-2\ln|\sqrt{x+3}+1|+C$, **2.16.** $\frac{\sin^4}{4}+C$, **2.17.** $-\frac{3\cos^{5/3}x}{5}+C$,

2.18. $-\ln|1+\cos x|+C$.

3.1. $\frac{x}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$, **3.2.** $3e^{x/3}(x^3-9x^2+54x-162)+C$,

3.3. $\sqrt{1-x^2}+x\arcsin x+C$, **3.4.** $\frac{1}{4}(-x\sqrt{1-x^2}+2x^2\arccos x+\arcsin x)+C$,

3.5. $\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+C$, **3.6.** $2x\sin x-(x^2-2)\cos x+C$, **3.7.** $-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C$,

3.8. $\sin x\ln|\sin x|-\sin x+C$, **3.9.** $x\ln^2 x-2x\ln x+2x+C$,

3.10. $\frac{1}{13}e^{-3x}(2\sin 2x-3\cos 2x)+C$, **3.11.** $\frac{1}{29}e^{2x}(2\sin 5x-5\cos 5x)+C$,

3.12. $-e^{-x}(x+3)+C$.

4.1. $-\frac{5}{2}\ln\left|\frac{1-x}{3-x}\right|+C$, **4.2.** $\frac{3}{5}\ln|2-x|+\frac{2}{5}\ln|x+3|+C$,

4.3. $3x+\ln|1-x|+3\ln|x|-4\ln|x+1|+C$, **4.4.** $\frac{5}{2}\ln|x^2+2|+C$,

4.5. $-arctg(2-x)+C$, **4.6.** $\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+20|-2arctg\frac{x-1}{2}+C$,

4.7. $\frac{1}{2}\ln|x^2-2x+5|+6arctg\frac{x-1}{3}+C$,

4.8. $\frac{5x^2}{2}+\frac{49}{2}\ln|x^2+2x+10|++\frac{53}{3}arctg\frac{x+1}{3}+C$, **4.9.** $\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+C$,

4.10. $\frac{\sin 2x}{4}-\frac{\sin 6x}{12}+C$, **4.11.** $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\ln\left|tg\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}\right|-\ln\left|tg\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}\right|\right)+C$,

4.12. $\frac{1}{70}(42x^{5/3}+120x^{7/6}++105x^{2/3})+C$, **4.13.** $\arcsin\frac{x+1}{2}+C$,

4.14. $\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right|+C$, **4.15.** $x+\frac{3}{5}(2x+1)^{5/6}+C$.

1.2. Визначений інтеграл

Задачі, що приводять до поняття визначеного інтегралу

Поняття визначеного інтеграла виникло через необхідність розв'язування низки геометричних і фізичних задач. Розглянемо деякі з них.

1. **Задача про площу криволінійної трапеції.** Нехай на відрізку $[a,b]$ задано неперервну функцію $y = f(x),\ f(x) \geq 0,$ для всіх $x \in [a,b]$. Плоску фігуру $aABb$, обмежену прямими $x = a,\ x = b,$ віссю Ox та графіком функції $y = f(x),$ називають *криволінійною трапецією* (Рис.7). Обчислимо площу S цієї фігури.

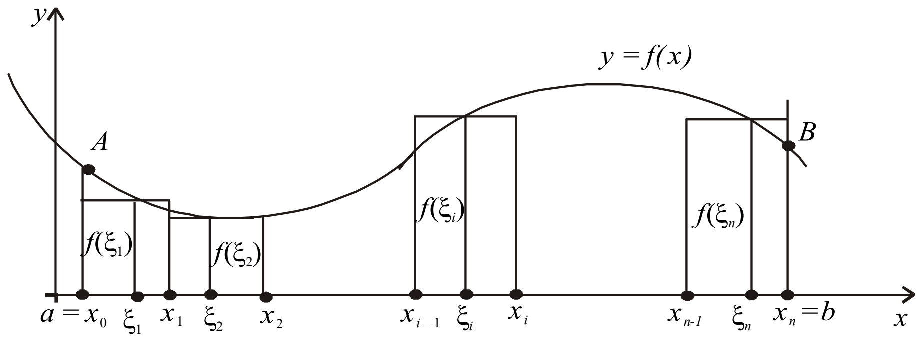


Рис. 7

Розіб'ємо проміжок $[a,b]$ на n довільних частин точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$ Виберемо на кожному з утворених відрізків $[x_{i-1}, x_i]$ довільну точку ξ_i і обчислимо $f(\xi_i).$ Побудуємо прямокутники з основою $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ і висотою $f(\xi_i).$ Сума добутків $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ дорівнює площі ступінчастої фігури, яка наближено дорівнює площі S даної трапеції:

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{1.9}$$

Нехай $\max_i \Delta x_i$ – довжина найбільшого з утворених внаслідок розбиття відрізків. Якщо $\max_i \Delta x_i \to 0,$ то кількість частинних відрізків необмежено зростає, а довжина кожного з цих відрізків прямує до нуля. Отже, за таких дій точність формули (1.9) підвищується, площа трапеції визначається граничною рівністю

$$S = \lim_{\max\limits_i \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

2. **Задача про шлях**. Нехай точка рухається по прямій зі швидкістю $v = v(t),$ де $v(t)$ – неперервна функція по часу $t.$ Визначимо шлях $s,$ який пройде точка за проміжок часу $[a,b],\ a<b,$ від моменту часу $t=a$ до моменту $t=b.$

Для цього розіб'ємо відрізок $[a,b]$ точками $a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = b$ на *n* довільних проміжків часу $[t_{i-1}, t_i],$ довжина яких $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}, i = 1,2,...,n.$ Виберемо на кожному з утворених відрізків $[t_{i-1}, t_i]$ довільну точку ξ_i і обчислимо $v(\xi_i).$ Якщо відрізок $[t_{i-1}, t_i]$ настільки малий, що швидкість $v(t)$ при $t \in [t_{i-1}, t_i]$ майже не змінюється, то можна вважати, що швидкість на цьому відрізку часу є сталою і рівною $v(\xi_i).$ Тоді шлях, пройдений точкою за час $\Delta t_i,$ наближено дорівнює добутку $v(\xi_i)\Delta t_i,$ а весь шлях, пройдений точкою за час $[a,b],$ задається наближеною формулою

$$s \approx \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i.$$

Нехай $\max\limits_i \Delta t_i$ – довжина найбільшого з утворених відрізків часу. Якщо $\max\limits_i \Delta t_i \to 0,$ то кількість частинних відрізків необмежено зростає, а довжина кожного з цих відрізків прямує до нуля. Отже, шлях *s,* який пройде точка за проміжок часу $[a,b],$ визначається формулою

$$s = \lim_{\max\limits_i \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i.$$

Розглянуті задачі різні за своїм змістом, але розв'язуються одним і тим же методом: кожна задача зводиться до відшукання границі суми. Аналогічно можна розв'язати ряд інших задач, наприклад, про роботу змінної сили, про обсяг випуску продукції тощо. Усі вони приводять до поняття визначеного інтеграла.

Означення визначеного інтеграла. Умови існування

Розглянемо неперервну на відрізку $[a,b]$, функцію $f(x)$. Розіб'ємо цей відрізок на *n* довільних частин точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ і виберемо на кожному відрізку $[x_{i-1}, x_i]$ довільну точку ξ_i, а довжину кожного такого відрізку позначимо через Δx_i. Складемо суму вигляду

$$f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \qquad (1.10)$$

Сума вигляду (1.10) називається *інтегральною сумою* для функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$.

Означення. ***Визначеним інтегралом*** *називається число, до якого прямує границя інтегральної суми вигляду (1.10), складеної для функції* $f(x)$ *на відрізку* $[a,b]$, *за умови, що довжина найбільшого відрізка* Δx_i *прямує до нуля.*

$$\lim_{\max\limits_i \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx. \qquad (1.11)$$

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то границя (1.11) існує і не залежить від способу розбиття відрізка $[a,b]$ і ні від вибору точок ξ_i.

Числа *a* і *b* називають *межами інтегрування*: *a – нижня межа*, *b – верхня межа*, $f(x)$ – *підінтегральна функція*, $f(x)dx$ – *підінтегральний вираз*, $[a,b]$ – *проміжок інтегрування*.

Функцію, для якої на відрізку $[a,b]$ існує визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, називають **інтегрованою** на цьому проміжку.

Геометричний зміст визначеного інтеграла

Визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, де $f(x)$ – невід'ємна і неперервна функція, чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої прямими $x = a$ і $x = b$, віссю Ox і графіком функції $y = f(x)$.

Фізичний зміст визначеного інтеграла

Шлях s, пройдений точкою за проміжок часу від $t=a$ до $t=b$, дорівнює визначеному інтегралу від швидкості $v(t)$:

$$s=\int_a^b v(t)dt.$$

Необхідна умова інтегрованості. Якщо функція $f(x)$ інтегрована на відрізку $[a,b]$, то вона обмежена на цьому відрізку.

Обернене твердження неправильне. Наприклад, функція Діріхле

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{якщо } x - \text{ раціональне},\\ 0, & \text{якшо } x - \text{ ірраціональне},\end{cases}$$

на будь-якому відрізку є обмеженою, але не інтегрованою.

Достатні умови інтегрованості. Функція $f(x)$ інтегрована на відрізку $[a,b]$, якщо вона задовольняє принаймні одну з таких умов:

1) функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$;
2) функція $f(x)$ обмежена на відрізку $[a,b]$ і неперервна на ньому скрізь, крім скінченної кількості точок розриву;
3) функція $f(x)$ обмежена і монотонна на відрізку $[a,b]$.

Надалі розглядатимемо визначені інтеграли лише від неперервних функцій.

Властивості визначеного інтеграла

1. Величина визначеного інтеграла не залежить від позначення змінної інтегрування:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=...=\int_a^b f(z)dz.$$

2. Інтеграл від сталої:

$$\int_a^b cdx=c(b-a).$$

Зокрема:

$$\int_a^b 0\cdot dx=0,\ \int_a^b 1\cdot dx=b-a.$$

3. Визначений інтеграл з рівними нижньою і верхньою межами інтегрування дорівнює нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

4. При перестановці меж інтегрування визначений інтеграл змінює знак на протилежний:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

5. Якщо функція $f(x)$ інтегрована на $[a,b]$ і k – довільне число, то постійний множник можна виносити за знак визначеного інтеграла:

$$\int_a^b k f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

6. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ інтегровані на $[a,b]$, то інтегрована на $[a,b]$ також їх сума (різниця):

$$\int_a^b \left(f(x) \pm g(x) \right) dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

7. Якщо функція $f(x)$ інтегрована на $[a,b]$ і $a < c < b$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

8. Якщо функція $f(x)$ інтегрована на відрізку $[a,b]$ і $f(x) \geq 0 \ \ \forall x \in [a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

9. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ інтегровані на $[a,b]$ і $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

10. Якщо функція $f(x)$ інтегрована на $[a,b]$ і $m \leq f(x) \leq M \ \ \forall x \in [a,b]$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

11. Якщо функція $f(x)$ інтегрована на $[a,b]$, то

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

12. Якщо функція $f(x)$ інтегрована на відрізку $[-a,a]$, то

а) $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx,$ якщо $f(x)$ – парна функція;

б) $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0,$ якщо $f(x)$ – непарна функція.

13. Теорема (про середнє значення функції). Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a,b]$, то існує таке число $c\in[a,b]$, що виконується рівність:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = f(c)(b-a),$$

де число $f(c)$ – середнє значення функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$.

Інтеграл зі змінною верхньою межею. Формула Ньютона-Лейбніца

Розглянемо одну з основних теорем інтегрального числення: будь-яка неперервна на відрізку $[a,b]$ функція має первісну.

Нехай на відрізку $[a,b]$ задано неперервну функцію $f(x)$. Ця функція інтегрована на будь-якому відрізку $[a,x]$, $a\le x\le b$. Отже, існує визначений інтеграл

$$\int\limits_{a}^{x} f(t)dt,$$

який називають ***визначеним інтегралом зі змінною верхньою межею***. Очевидно, він є функцією від x. Позначимо його через

$$\Phi(x) = \int\limits_{a}^{x} f(t)dt.$$

Теорема (основна властивість функції $\Phi(x)$). *Похідна визначеного інтеграла зі змінною верхньою межею по верхній межі дорівнює значенню підінтегральної функції для цієї межі:*

$$\Phi'(x) = \left(\int\limits_{a}^{x} f(t)\,dt\right)' = f(x).$$

Доведення: Надамо аргументу x функції $\Phi(x)$ приросту Δx, тоді

$$\Phi(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt=\Phi(x)+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt,$$

де $\Delta\Phi(x)=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$ – приріст функції $\Phi(x)$ у точці x.

Застосуємо до інтеграла $\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$ теорему про середнє значення (див. властивість 14)

$$\Delta\Phi(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt=f(c)(x+\Delta x-x)=f(c)\Delta x,$$

де точка c міститься між точками x і $x+\Delta x$.

Отже,

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c)\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(c)=f(x),$$

оскільки $\Delta x\to 0$, то $x+\Delta x\to x$, тому і $c\to x$.

Наслідок*:* Для будь-якої неперервної на відрізку $[a,b]$ функції $f(x)$ існує первісна функція. При цьому однією з первісних функцій є визначений інтеграл зі змінною верхньою межею $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt.$

Теорема про основну властивість функції $\Phi(x)$ розкриває глибинний зв'язок між невизначеним і визначеним інтегралами і дає змогу вивести формулу для обчислення визначеного інтеграла без відшукання границь відповідних інтегральних сум.

Теорема (Ньютона-Лейбніца). *Якщо $F(x)$ – первісна неперервної функції $f(x)$, $x\in[a,b]$, то справедлива* ***формула Ньютона-Лейбніца:***

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a).$$

Доведення: Нехай $F(x)$ – первісна функції $f(x)$ тоді

$$\int_a^x f(t)dt=F(x)+C, \tag{1.12}$$

де C – константа.

Покладемо у рівності (1.12) послідовно значення $x=a$ і $x=b$. Маємо

$$\int_a^a f(t)dt = F(a)+C,$$

звідси $0=F(a)+C$ або $C=-F(a)$, та

$$\int_a^b f(t)dt = F(b)+C. \tag{1.13}$$

Підставимо $C=-F(a)$ у рівність (1.13). Отримаємо

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a).$$

Формулу Ньютона-Лейбніца записують ще наступним чином:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$$

Значущість цієї формули полягає в тому, що вона встановлює зв'язок між задачею знаходження первісної та задачею обчислення границі інтегральних сум.

Методи обчислення визначених інтегралів

Для обчислення визначених інтегралів, як і невизначених, використовують методи безпосереднього інтегрування, заміни змінної та інтегрування частинами.

Метод безпосереднього інтегрування

Метод безпосереднього інтегрування полягає у використанні таблиці інтегралів, властивостей невизначеного інтеграла.

Приклад. Обчислити визначений інтеграл: $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

Розв'язання: Використаємо формулу Ньютона-Лейбніца.

Первісною для функції $\frac{1}{1+x^2}$ є $arctg\ x$.

Отже,

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = arctg\ x\Big|_0^1 = arctg\ 1 - \text{arctg } 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Метод заміни змінної

За допомогою підстановки $x=\varphi(t)$ інтеграл зводиться до іншого визначеного інтеграла з новою змінною t, яка буде змінюватись на відрізку $[t_1, t_2]$, де $a=\varphi(t_1)$, $b=\varphi(t_2)$. Таким чином,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

де функції $\varphi(t)$ і $\varphi'(t)$ неперервні на відрізку $[t_1, t_2]$, а тому і функція $f(\varphi(t))$ є визначена і неперервна на цьому ж відрізку.

Часто замість заміни $x=\varphi(t)$ застосовують підстановку $t=\psi(x)$. У цьому випадку межі t_1 і t_2 визначаються безпосередньо за формулами $t_1=\psi(a)$, $t_2=\psi(b)$.

Приклад. Обчислити визначені інтеграли: 1) $\int_2^7 \frac{xdx}{\sqrt{x+2}}$; 2) $\int_0^{\sqrt{5}} \sqrt{5-x^2}dx$.

Розв'язання: 1) Застосуємо метод заміни змінної. Введемо заміну $\sqrt{x+2}=t$ та змінимо межі інтегрування. Отримаємо:

$$\int_2^7 \frac{xdx}{\sqrt{x+2}} = \left| \begin{matrix} \sqrt{x+2}=t, & x=t^2-2, & t_1=\sqrt{2+2}=2, \\ x+2=t^2, & dx=2tdt, & t_2=\sqrt{7+2}=3 \end{matrix} \right| = \int_2^3 \frac{\left(t^2-2\right)\cdot 2tdt}{t} =$$

$$= 2\int_2^3 \left(t^2-2\right)dt = 2\left(\frac{t^3}{3}-2t\right)\Bigg|_2^3 = 2\left(\frac{3^3}{3}-2\cdot 3-\frac{2^3}{3}+2\cdot 2\right) =$$

$$= 2\left(9-6-\frac{8}{3}+4\right) = 2\left(7-\frac{8}{3}\right) = 2\cdot\frac{21-8}{3} = \frac{26}{3} = 8\frac{2}{3}.$$

2) Застосуємо тригонометричну підстановку виду $x=\sqrt{5}\sin t$. Отримаємо:

$$\int_0^{\sqrt{5}} \sqrt{5-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} x=\sqrt{5}\sin t,\;\; 0=\sqrt{5}\sin t,\;\; \sin t=0, \qquad t_1=0, \\ dx=\sqrt{5}\cos t dt,\;\; \sqrt{5}=\sqrt{5}\sin t,\;\; \sin t=1,\;\; t_2=\dfrac{\pi}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{5-5\sin^2 t}\sqrt{5}\cos t dt = 5\int_0^{\pi/2} \cos t\cdot\cos t dt = 5\int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt =$$

$$=5\int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{5}{2}\int_0^{\pi/2}\left(1+\cos 2t\right)dt = \frac{5}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} =$$

$$=\frac{5}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi-\frac{1}{2}\sin 0\right)=\frac{5}{2}\left(\frac{\pi}{2}+0-0\right)=\frac{5\pi}{4}.$$

Метод інтегрування частинами

Якщо функції $u=u(x)$ і $v=v(x)$ – функції від x, що мають на відрізку $[a,\,b]$ неперервні похідні, то

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx,$$

або

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Доведення: Оскільки функція uv – первісна функції $(uv)' = u'v+uv',$ то за формулою Ньютона-Лейбніца отримаємо:

$$\int_a^b (u'v+uv')dx = uv\Big|_a^b,$$

$$\int_a^b vdu + \int_a^b udv = uv\Big|_a^b, \text{ або } \int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Приклад. Обчислити визначені інтеграли:

1) $\int_0^{\pi/6} (2-x)\sin 3x dx$; 2) $\int_1^{e^2} \sqrt{x}\ln x dx.$

Розв'язання: 1) Для обчислення інтеграла застосуємо метод інтегрування частинами.

$$\int_0^{\pi/6}(2-x)\sin 3x dx = \left| \begin{matrix} u = 2-x, & du = -dx, \\ dv = \sin 3x dx, & v = -\dfrac{1}{3}\cos 3x \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{1}{3}(2-x)\cos 3x \Big|_0^{\pi/6} - \frac{1}{3}\int_0^{\pi/6}\cos 3x dx =$$

$$= -\frac{1}{3}(2-x)\cos 3x \Big|_0^{\pi/6} - \frac{1}{9}\sin 3x \Big|_0^{\pi/6} =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(2-\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}(2-0)\cos 0 - \frac{1}{3}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

2) Позначимо $u = \ln x$. Отримаємо:

$$\int_1^{e^2}\sqrt{x}\ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x, & du = \dfrac{1}{x}dx, \\ dv = \sqrt{x}dx, & v = \dfrac{2\cdot x^{\frac{3}{2}}}{3} \end{matrix} \right| = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\ln x \Big|_1^{e^2} - \frac{2}{3}\int_1^{e^2}\frac{x\sqrt{x}}{x}dx =$$

$$= \frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x \Big|_1^{e^2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\Big|_1^{e^2} = \left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x - \frac{4}{9}x\sqrt{x}\right)\Big|_1^{e^2} =$$

$$\int_1^{e^2}\sqrt{x}\ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x, & du = \dfrac{1}{x}dx, \\ dv = \sqrt{x}dx, & v = \dfrac{2\cdot x^{\frac{3}{2}}}{3} \end{matrix} \right| = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\ln x \Big|_1^{e^2} - \frac{2}{3}\int_1^{e^2}\frac{x\sqrt{x}}{x}dx =$$

$$= \frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x \Big|_1^{e^2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\Big|_1^{e^2} = \left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x - \frac{4}{9}x\sqrt{x}\right)\Big|_1^{e^2} =$$

$$= \frac{2}{3}e^2\sqrt{e^2}\ln e^2 - \frac{4}{9}e^2\sqrt{e^2} - \frac{2}{3}\ln 1 + \frac{4}{9} = \frac{4}{3}e^3 - \frac{4}{9}e^3 + \frac{4}{9} = \frac{8}{9}e^3 + \frac{4}{9} = \frac{4}{9}\left(2e^3+1\right).$$

Застосування визначеного інтеграла до розв’язування задач геометрії та фізики

1. Обчислення площі плоскої фігури в декартових координатах.

Площа криволінійної трапеції, яка обмежена неперервною функцією $y = f(x)$, прямими $x = a$, $x = b$ і віссю абсцис, обчислюється за допомогою наступних формул:

$$S = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b ydx, \tag{1.14}$$

якщо $\forall x \in [a, b]$ $f(x) \geq 0$;

$$S = -\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b ydx, \tag{1.15}$$

якщо $\forall x \in [a, b]$ $f(x) \leq 0$;

$$S = \int_a^b |f(x)|dx, \tag{1.16}$$

якщо функція $y = f(x)$ на відрізку $[a, b]$ змінює знак.

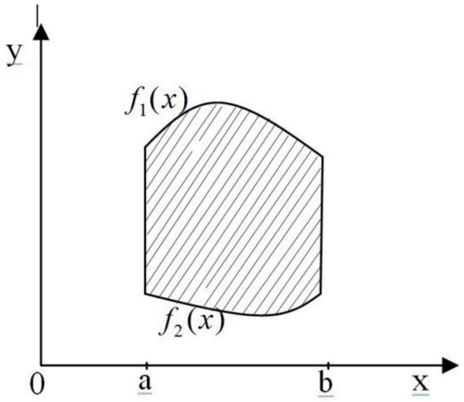


Рис.7

Якщо плоска фігура обмежена двома неперервними лініями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ і двома прямими $x = a$, $x = b$, а також $\forall x \in [a, b]$ виконується умова $f_1(x) \geq f_2(x)$ (Рис.7), то площа цієї фігури обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b \left(f_1(x) - f_2(x) \right) dx. \tag{1.17}$$

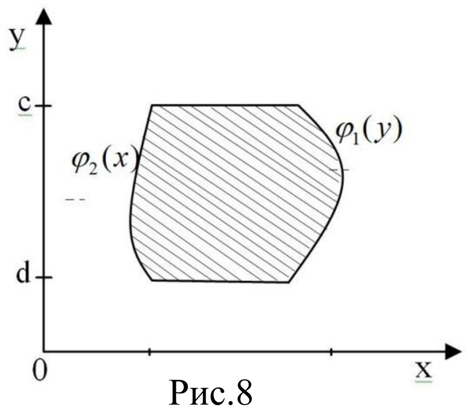


Рис.8

Якщо плоска фігура обмежена двома неперервними лініями $x = \varphi_1(y)$, $x = \varphi_2(y)$ і двома прямими $y = c$, $y = d$, а також $\forall y \in [c, d]$ виконується умова $\varphi_1(x) \geq \varphi_2(x)$ (Рис.8), то площа цієї фігури обчислюється за формулою

$$S=\int_c^d\left(\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\right)dx.$$

Приклад. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

1) $y=\sqrt{x}$ – вітка параболи, прямою $x=4$ і віссю *Ox*;

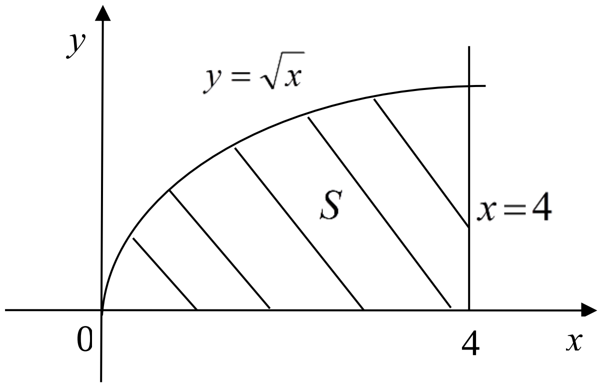


Рис.9

2) параболою $y=x^2-3$ і віссю *Ox*;

3) косинусоїдою $y=\cos x$, осями координат і прямою $x=\pi$;

4) параболою $y=x^2-2$ і прямою $y=x$.

Розв'язання. 1) Зробимо схематичний малюнок фігури, площу якої необхідно обчислити (Рис.9). Для обчислення площі цієї фігури застосуємо формулу (1.14), оскільки $\forall x\in[0,\ 4]\ \sqrt{x}>0$. Тоді

$$S=\int_0^4\sqrt{x}dx=\int_0^4 x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^4==\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Bigg|_0^4=\frac{2}{3}\left(2^3-0\right)=\frac{16}{3}\ \text{(кв. од.)}$$

2) Зробимо схематичний малюнок фігури (Рис.10). Функція $y=x^2-3<0\ \forall x\in\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$.

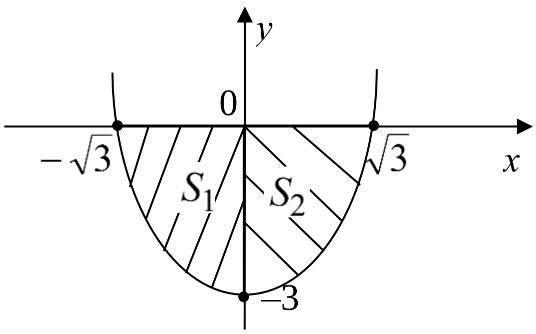


Рис.10

Для обчислення площі даної фігури застосуємо формулу (1.15) і, враховуючи симетричність фігури $\left(S_1=S_2\right)$, одержимо

$$S=2S_2=-\int_0^{\sqrt{3}}\left(x^2-3\right)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+3x\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}}=$$

$$=-\frac{3\sqrt{3}}{3}+3\sqrt{3}=3\sqrt{3}-\sqrt{3}=2\sqrt{3}\ \text{(кв. од.)}$$

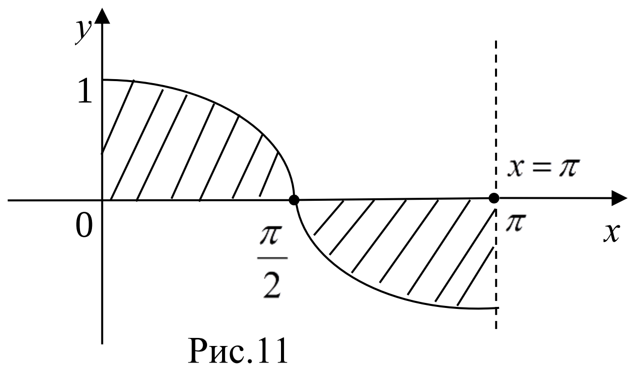


Рис.11

3) Побудуємо схематично фігуру (Рис.11). Функція $y=\cos x$ змінює своє значення на відрізку $[0,\ \pi]$, тобто

$$|\cos x|=\begin{cases}\cos x, & x\in\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right];\\ -\cos x, & x\in\left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right].\end{cases}$$

Для обчислення площі даної фігури застосуємо формулу (1.16). Отримаємо:

$$S=\int_0^{\pi}|\cos x|dx=\int_0^{\pi/2}\cos xdx+\int_{\pi/2}^{\pi}(-\cos x)dx=\int_0^{\pi/2}\cos xdx-\int_{\pi/2}^{\pi}\cos xdx=$$

$$=\sin x\Big|_0^{\pi/2}-\sin x\Big|_{\pi/2}^{\pi}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0-\sin\pi+\sin\frac{\pi}{2}=1+1=2\ \text{(кв. од.)}.$$

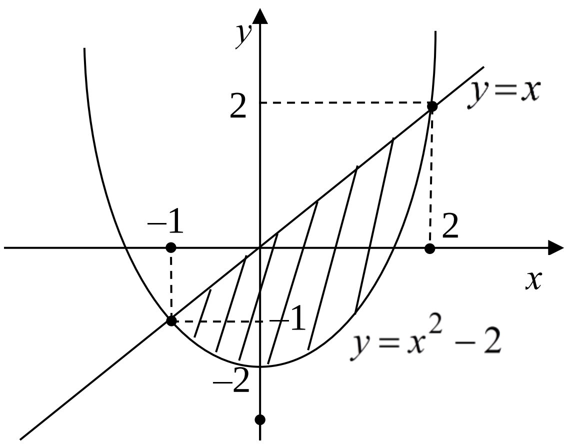


Рис.12

4) Щоб зробити схематичний малюнок даної фігури (Рис.12), знайдемо точки перетину ліній:

$$\begin{cases}y=x,\\ y=x^2-2,\end{cases}\Rightarrow x=x^2-2\Rightarrow x^2-x-2=0,$$

$$x_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+2}=\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2}=\{-1;\ 2\},$$

$$y_{1,2}=\{-1;\ 2\}.$$

Для всіх $x\in[-1,\ 2]$ виконується умова $x>x^2-2$. Для обчислення площі фігури застосуємо формулу (1.17). Отримаємо:

$$S=\int_{-1}^{2}\left(x-x^2+2\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+2x\right)\Bigg|_{-1}^{2}=$$

$$=\left(2-\frac{8}{3}+4\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-2\right)=6-\frac{8}{3}+2-$$

$$-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=8-3-\frac{1}{2}=5-\frac{1}{2}=\frac{9}{2}\ \text{(кв. од.)}$$

2. *Обчислення площі в полярних координатах.*

Площа криволінійного сектора, обмеженого кривою $\rho=\rho(\varphi)$ і двома радіусами-векторами $\varphi=\alpha$ і $\varphi=\beta$ $(\alpha<\beta)$, обчислюється за формулою

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left(\rho(\varphi)\right)^{2}d\varphi=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^{2}d\varphi. \qquad (1.18)$$

Приклад. Обчислити площу фігури, обмеженою кардіоїдою (Рис.13): $\rho=a(2+\cos\varphi)$.

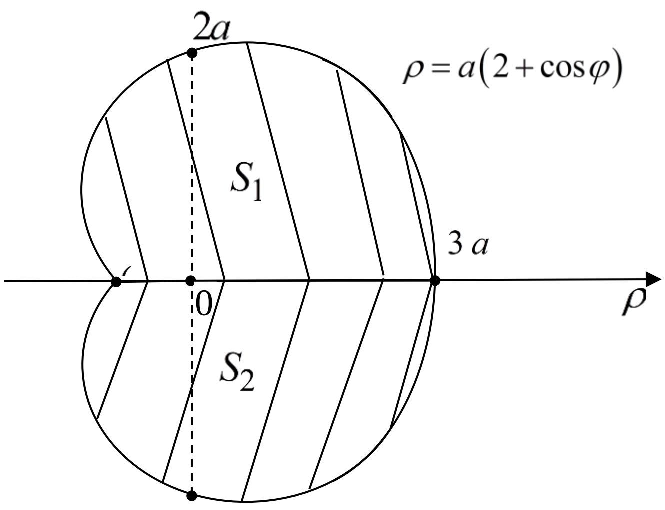


Рис.13

Розв'язання:

Кардіоїду $\rho=a(2+\cos\varphi)$ в полярній системі координат побудуємо по точках. Складемо таблицю:

φ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ρ	$3a$	$2a$	a	$2a$	$3a$

$S_1=S_2,\quad S=2S_1,\quad 0\le\varphi\le\pi.$

Для обчислення площі застосуємо формулу (1.18). Кут φ змінюється від 0 до 2π.

$$S=\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}a^{2}\left(2+\cos\varphi\right)^{2}d\varphi=\frac{1}{2}a^{2}\int_{0}^{2\pi}\left(4+4\cos\varphi+\cos^{2}\varphi\right)d\varphi=$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}a^{2}\int_{0}^{\pi}\left(4+4\cos\varphi+\frac{1+\cos2\varphi}{2}\right)d\varphi=a^{2}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{9}{2}+4\cos\varphi+\cos2\varphi\right)d\varphi=$$

$$=a^{2}\left(\frac{9}{2}\varphi+4\sin\varphi+\frac{1}{4}\sin2\varphi\right)\Bigg|_{0}^{\pi}=a^{2}\left(\frac{9}{2}\pi+4\sin\pi+\frac{1}{4}\sin2\pi-4\sin0-\frac{1}{4}\sin0\right)=$$

$$=a^{2}\cdot\frac{9\pi}{2}=\frac{9\pi a^{2}}{2}\text{ (кв. од.).}$$

3. *Довжина дуги кривої.*

Якщо плоска крива задана рівнянням $y = f(x),\ x \in [a,b]$, функція $f(x)$ і $f'(x)$ похідна неперервні на $[a,b]$, то довжина дуги цієї кривої виражається інтегралом

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x) \right)^2} dx.$$

4. Обчислення об'єму тіла обертання.

Нехай $S(x)$ – площа поперечного перерізу тіла площиною, перпендикулярною до осі *Ох* у точці з абсцисою $x,\ x \in [a,b]$, причому $S(x)$– неперервна функція на відрізку$[a,b]$. Тоді об'єм тіла виражається інтегралом

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

Об'єм тіла обертання криволінійної трапеції навколо осі *Ох*, якщо вона обмежена неперервною лінією $y = f(x),\ x \in [a, b]$, віссю *Ох* і прямими $x = a$ і $x = b$, обчислюється за формулою

$$V = \pi \int_a^b \left(f(x) \right)^2 dx = \pi \int_a^b y^2 dx. \qquad (1.19)$$

Якщо криволінійна трапеція, яка обмежена неперервною лінією $x = \varphi(y),\ y \in [c,\ d]$, віссю ординат і прямими $y = c$ і $y = d$, обертається навколо осі *Оу*, то об'єм тіла обертання обчислюється за формулою

$$V = \pi \int_c^d \left(\varphi(y) \right)^2 dy = \pi \int_c^d x^2 dy.$$

Приклад. Обчислити об'єм тіла обертання криволінійної трапеції навколо осі *Ох*, якщо вона обмежена лініями $y = \dfrac{2}{x},\ y = 0,\ x = 2,\ x = 6.$

Розв'язання: Побудуємо схематичний малюнок (Рис.14) і для обчислення об'єму тіла застосуємо формулу (1.19):

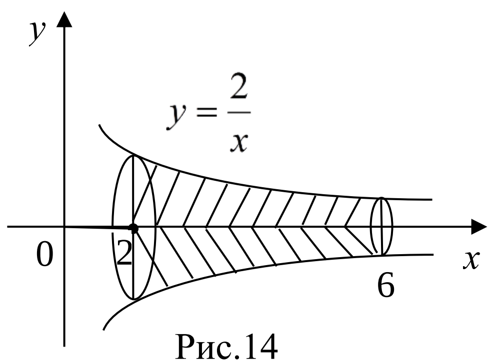


Рис.14

$$V = \pi \int_2^6 \left(\frac{2}{x} \right)^2 dx = \pi \cdot 4 \cdot \int_2^6 \frac{dx}{x^2} = 4\pi \int_2^6 x^{-2} dx =$$

$$= 4\pi \left(\frac{x^{-1}}{-1} \right) \Bigg|_2^6 = -4\pi \left(\frac{1}{x} \right) \Bigg|_2^6 = -4\pi \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} \right) =$$

$$= 4\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)=\frac{4\pi}{3}\text{ (куб. од.).}$$

5. *Площа поверхні обертання.*

Площа поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox дуги кривої $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$, визначають за формулою

$$P = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx.$$

6. *Робота змінної сили.*

Нехай матеріальна точка M переміщується вздовж осі Ox під дією змінної сили $F = F(x)$, напрямленої паралельно цій осі. Роботу, яку виконує сила під час переміщення точки M з положення $x = a$ в положення $x = b$, визначають за формулою

$$A = \int_a^b F(x)dx.$$

7. *Координати центра мас.*

Координати центра мас однорідної криволінійної трапеції, утвореної кривою $y = f(x)$, прямим $x = a,\ x = b$ та $y = 0$, визначається за формулами

$$x_c = \frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx};\qquad y_c = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b (f(x))^2 dx}{\int_a^b f(x)dx}.$$

1.3. Невласні інтеграли

Для практичного застосування важливе значення має розширення поняття визначеного інтеграла у випадку нескінченного проміжку інтегрування, а також, якщо функція необмежена на скінченному проміжку інтегрування. Зрозуміло, що безпосередньо поширити поняття визначеного інтеграла на ці випадки неможливо. Тому треба шукати інші методи і вводити нові означення визначеного інтеграла в кожному з цих випадків

Означення. ***Невласними*** *називаються інтеграли з нескінченними межами інтегрування та інтеграли від розривних функцій.*

Для їх обчислення формулу Ньютона-Лейбніца застосовувати вже не можна.

Невласні інтеграли першого роду (інтеграли з нескінченними межами інтегрування)

Поняття невласного інтеграла першого роду

Нехай функція $f(x)$ визначена на нескінченному проміжку X $\left(X=\left[a,\ +\infty\right),\right.$ або $X=(-\infty,\ b]$, або $X=(-\infty,\ +\infty)\big)$. Тоді, якщо функція $f(x)$ інтегрована (зокрема, неперервна) на кожному відрізку $[a,\ b]\subset X$, то вирази

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx,\ \int_{a}^{+\infty} f(x)dx \text{ і } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

називають **невласними інтегралами з нескінченними межами інтегрування** або **невласними інтегралами першого роду**.

Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на нескінченному проміжку $x\in\left[a,\ +\infty\right)$, то невласний інтеграл з нескінченною верхньою межею визначається наступним чином:

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx=\lim_{B\to+\infty}\int_{a}^{B} f(x)dx.$$

Аналогічно визначається невласний інтеграл із нескінченною нижньою межею:

$$\int_{+\infty}^{b} f(x)dx=\lim_{A\to-\infty}\int_{A}^{b} f(x)dx,$$

а також інтеграл з обома нескінченними межами:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\lim_{A\to-\infty}\int_{A}^{c} f(x)dx+\lim_{B\to+\infty}\int_{c}^{B} f(x)dx,$$

де c – довільна точка осі Ox.

Якщо всі границі у правих частинах існують і скінченні, то відповідні невласні інтеграли називають ***збіжними***. В іншому випадку – ***розбіжними***.

Ознаки збіжності невласного інтеграла першого роду

Часто немає потреби обчислювати невласний інтеграл, а необхідно встановити збіжний чи розбіжний даний інтеграл. Для цього достатньо порівняти даний інтеграл із іншим невласним інтегралом, про який відомо, збіжний він чи розбіжний.

1. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні на $[a,b)$ і задовольняють умову $0 \le f(x) \le g(x)$, а в точці $x = b$ мають розрив другого роду. Тоді

•зі збіжності інтеграла $\int\limits_a^b g(x)dx$ випливає збіжність інтеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$;

•із розбіжності інтеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ випливає розбіжність інтеграла $\int\limits_a^b g(x)dx$.

2. Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні на $[a,b)$, а в точці $x = b$ вони мають розрив другого роду. Тоді, якщо існує границя

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = k,\ 0 < k < \infty,$$

то обидва інтеграли $\int\limits_a^b f(x)dx$ і $\int\limits_a^b g(x)dx$ збіжні або розбіжні одночасно.

3. Якщо в точці $x = b$ розрив другого роду і інтеграл $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ збігається, то збігається й інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Невласні інтеграли другого роду (інтеграли від розривних функцій)

Поняття невласних інтегралів другого роду

Нехай функція $f(x)$ має розрив другого роду в точці $x = a$ ($x = b$), причому вона визначена на скінченному проміжку $X = (a,\ b]$ ($X = (a,\ b]$) і обмежена на ньому. Тоді, якщо функція $f(x)$ інтегрована (зокрема, неперервна) на кожному відрізку $[a+\varepsilon,\ b]$ $\left(\text{або } [a,\ b-\varepsilon]\right)$, де $\varepsilon > 0$ таке, що $a+\varepsilon < b$ $\left(\text{або } a < b-\varepsilon\right)$, то вираз $\int\limits_a^b f(x)dx$ називають **невласним інтегралом від необмеженої функції** або **невласним інтегралом другого роду**.

Отже, за означенням

$$\int\limits_a^b f\left(x\right)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^b f\left(x\right)dx \quad \left(\int\limits_a^b f\left(x\right)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f\left(x\right)dx\right).$$

Якщо в точці $x = c$ – розрив другого роду, причому $a < c < b$, тоді за означенням

$$\int\limits_a^b f\left(x\right)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{c-\varepsilon} f\left(x\right)dx + \lim_{\delta\to 0}\int\limits_{c+\delta}^b f\left(x\right)dx.$$

Якщо границі у правих частинах існують і скінченні, то відповідні невласні інтеграли називаються ***збіжними***. В іншому випадку – ***розбіжними***.

Ознаки збіжності невласного інтеграла другого роду

1. Якщо на проміжку $[a,\ +\infty)$ функції $f\left(x\right)$ і $g\left(x\right)$ неперервні і задовольняють умову $0 \le f(x) \le g(x)\ \ \forall x \in [a,b)$, то

- зі збіжності інтеграла $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ випливає збіжність інтеграла $\int\limits_a^\infty f(x)dx$,
- із розбіжності інтеграла $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ випливає розбіжність інтеграла $\int\limits_a^\infty g(x)dx$.

2. Якщо існує $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = k,\ 0 < k < \infty\ \left(f(x) > 0,\ g(x) > 0\right)$, то обидва інтеграли $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ і $\int\limits_a^\infty g(x)dx$ збіжні або розбіжні одночасно.

3. Якщо інтеграл $\int\limits_a^\infty |f(x)|dx$ збігається, то збігається й інтеграл

$$\int\limits_a^\infty f(x)dx.$$

Зауваження: Зі збіжності інтеграла $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ не випливає збіжність інтеграла $\int\limits_a^\infty |f(x)|dx$.

Приклади. Дослідити на збіжність інтеграли:

$$1)\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^5};\ 2)\int\limits_{-\infty}^0 e^{-x}dx;\ 3)\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[4]{x}};\ 4)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1};\ 5)\int\limits_0^3\frac{dx}{x^2};\ 6)\int\limits_1^4\frac{dx}{\sqrt[3]{x-4}};\ 7)\int\limits_{-1}^1\frac{dx}{\sqrt[5]{x^3}}.$$

Розв'язання: 1) Невласний інтеграл з нескінченною верхньою межею:

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^5}=\lim_{B\to+\infty}\int\limits_1^B x^{-5}dx=\lim_{B\to+\infty}\left(\frac{x^{-4}}{-4}\Big|_1^B\right)=\lim_{B\to+\infty}\left(-\frac{1}{4x^4}\Big|_1^B\right)=\lim_{B\to+\infty}\left(-\frac{1}{4B^4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}.$$

Отже, невласний інтеграл збіжний.

2) Невласний інтеграл з нескінченною нижньою межею:

$$\int\limits_{-\infty}^0 e^{-x}dx=\lim_{A\to-\infty}\int\limits_A^0 e^{-x}dx=\lim_{A\to-\infty}\left(-e^{-x}\Big|_A^0\right)=\lim_{A\to-\infty}\left(-e^0+e^{-A}\right)=-1+e^{+\infty}=-1+\infty=\infty.$$

Отже, невласний інтеграл розбіжний.

3) Невласний інтеграл з нескінченною верхньою межею:

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[4]{x}}=\lim_{B\to+\infty}\int\limits_1^B x^{-\frac{1}{4}}dx=\lim_{B\to+\infty}\left(\frac{4x^{\frac{3}{4}}}{3}\Big|_1^B\right)=\frac{4}{3}\lim_{B\to+\infty}\left(\sqrt[4]{x^3}\Big|_1^B\right)=$$

$$=\frac{4}{3}\lim_{B\to+\infty}\left(\sqrt[4]{B^3}-1\right)=\frac{4}{3}(\infty-1)=\infty.$$

Отже, невласний інтеграл розбіжний.

4) Невласний інтеграл з нескінченними межами інтегрування. Будемо вважати, що $c=0$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}=\lim_{A\to-\infty}\int_{A}^{0}\frac{dx}{x^2+1}+\lim_{B\to+\infty}\int_{0}^{B}\frac{dx}{x^2+1}=\lim_{A\to-\infty}\left(arctgx\Big|_{A}^{0}\right)+\lim_{B\to+\infty}\left(arctgx\Big|_{0}^{B}\right)=$$

$$=\lim_{A\to-\infty}\left(arctg0-arctgA\right)+\lim_{B\to+\infty}\left(arctgB-arctg0\right)=-arctg\left(-\infty\right)+arctg\left(+\infty\right)=$$

$$=2arctg\left(\infty\right)=2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi.$$

Отже, невласний інтеграл збіжний.

5) Функція $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x^2}$ має розрив у точці $x=0.$ Тому

$$\int_{0}^{3}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{0+\varepsilon}^{3}x^{-2}dx=\lim_{\varepsilon\to0}\left(\frac{x^{-1}}{-1}\Big|_{0+\varepsilon}^{3}\right)=\lim_{\varepsilon\to0}\left(-\frac{1}{x}\Big|_{0+\varepsilon}^{3}\right)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{0+\varepsilon}\right)=-\frac{1}{3}+\infty=\infty.$$

Отже, невласний інтеграл розбіжний.

6) Функція $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-4}}$ має розрив у точці $x=4.$ Тому

$$\int_{1}^{4}\frac{dx}{\sqrt[3]{x-4}}=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{1}^{4-\varepsilon}\left(x-4\right)^{-\frac{1}{3}}dx=\lim_{\varepsilon\to0}\left(\frac{3\cdot\left(x-4\right)^{\frac{2}{3}}}{2}\Big|_{1}^{4-\varepsilon}\right)=$$

$$=\frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to0}\left(\sqrt[3]{\left(x-4\right)^2}\Big|_{1}^{4-\varepsilon}\right)=\frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to0}\left(\sqrt[3]{\left(4-\varepsilon-4\right)^2}-\sqrt[3]{9}\right)=\frac{3}{2}\left(0-\sqrt[3]{9}\right)=-\frac{3\sqrt[3]{9}}{2}.$$

Отже, невласний інтеграл збіжний.

7) Функція $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$ має розрив у точці $x=0.$ Тому

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[5]{x^3}}=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{-1}^{0-\varepsilon}x^{-\frac{3}{5}}dx+\lim_{\varepsilon\to0}\int_{0+\varepsilon}^{1}x^{-\frac{3}{5}}dx=\lim_{\varepsilon\to0}\left(\frac{5x^{\frac{2}{5}}}{2}\Big|_{-1}^{0-\varepsilon}\right)+\lim_{\varepsilon\to0}\left(\frac{5x^{\frac{2}{5}}}{2}\Big|_{0+\varepsilon}^{1}\right)=$$

$$=\frac{5}{2}\lim_{\varepsilon\to0}\left(\sqrt[5]{x^2}\Big|_{-1}^{0-\varepsilon}\right)+\frac{5}{2}\lim_{\varepsilon\to0}\left(\sqrt[5]{x^2}\Big|_{0+\varepsilon}^{1}\right)=$$

$$=\frac{5}{2}\lim_{\varepsilon\to0}\left(\sqrt[5]{\left(0-\varepsilon\right)^2}-1\right)+\frac{5}{2}\lim_{\varepsilon\to0}\left(1-\sqrt[5]{\left(0+\varepsilon\right)^2}\right)=-\frac{5}{2}+\frac{5}{2}=0.$$

Отже, невласний інтеграл збіжний.

Приклади. Дослідити на збіжність інтеграли:

$$1)\ \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha},\ \text{якщо}\ \alpha>0;\ 2)\ \int_a^b\frac{dx}{(b-x)^\alpha},\ \text{якщо}\ \alpha>0.$$

Розв'язання: 1) Дослідимо збіжність даного невласного інтеграла для різних значень α.

Нехай $\alpha=1$. Маємо:

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{B\to+\infty}\int_1^B\frac{dx}{x}=\lim_{B\to+\infty}\left(\ln x\Big|_1^B\right)=\lim_{B\to+\infty}(\ln B-\ln 1)=\infty-0=\infty.$$

Отже, невласний інтеграл розбіжний.

Нехай $\alpha>1$. Маємо:

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{B\to+\infty}\int_1^B x^{-\alpha}dx=\lim_{B\to+\infty}\left(\frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\Big|_1^B\right)=\lim_{B\to+\infty}\left(\frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}\Big|_1^B\right)=$$

$$=\lim_{B\to+\infty}\left(\frac{1}{1-\alpha}\cdot\left(\frac{1}{B^{\alpha-1}}-1\right)\right)=-\frac{1}{1-\alpha}=\frac{1}{\alpha-1}.$$

Отже, невласний інтеграл збіжний.

При $0<\alpha<1$ одержимо

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{B\to+\infty}\left(\frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\Big|_1^B\right)=\lim_{B\to+\infty}\left(\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^B\right)=\frac{1}{1-\alpha}\lim_{B\to+\infty}\left(B^{1-\alpha}-1\right)=\frac{1}{1-\alpha}(\infty-1)=\infty.$$

Отже, невласний інтеграл розбіжний.

Висновок: Невласний інтеграл

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha-1}, & \text{при}\ \ \alpha>1\\ \infty, & \text{при}\ \ \alpha\le 1\end{cases},$$

тобто при $\alpha>1$ інтеграл збіжний, а при $\alpha\le 1$ – розбіжний.

2) Функція $f(x)=\dfrac{1}{(b-x)^{\alpha}}$ в точці $x=b$ має розрив. Тому інтеграл $\int\limits_a^b \dfrac{\alpha x}{(b-x)^{\alpha}}$ є невласним інтегралом. Дослідимо збіжність цього інтеграла для довільних значень α.

При $\alpha=1$ отримаємо:

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{b-x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon}\frac{dx}{b-x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\ln|b-x|\Big|_a^{b-\varepsilon}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln|b-x|\Big|_{b-\varepsilon}^{a}\right)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln|b-a|-\ln|b-b+\varepsilon|\right)=\ln|b-a|-(-\infty)=+\infty.$$

Отже, невласний інтеграл розбіжний.

При $\alpha>1$ отримаємо:

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^{\alpha}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon}(b-x)^{-\alpha}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{(b-x)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Bigg|_a^{b-\varepsilon}\right)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(b-x)^{\alpha-1}}\Bigg|_a^{b-\varepsilon}\right)\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(b-b+\varepsilon)^{\alpha-1}}-\frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\alpha-1}\left(\infty-\frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}}\right)=\infty.$$

Отже, невласний інтеграл розбіжний.

При $0<\alpha<1$ отримаємо:

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^{\alpha}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon}(b-x)^{-\alpha}dx=-\frac{1}{\alpha-1}\lim_{\varepsilon\to 0}\left((b-x)^{1-\alpha}\Big|_a^{b-\varepsilon}\right)=$$

$$=-\frac{1}{\alpha-1}\left((b-b+\varepsilon)^{1-\alpha}-(b-a)^{1-\alpha}\right)=\frac{1}{\alpha-1}(b-a)^{1-\alpha}=\frac{(b-a)^{1-\alpha}}{\alpha-1}.$$

Отже, невласний інтеграл збіжний.

Висновок: Невласний інтеграл

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^{\alpha}}=\begin{cases}\dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{\alpha-1}, & при\ \ \alpha<1\\ \infty, & при\ \ \alpha\ge 1\end{cases},$$

тобто інтеграл збіжний при $\alpha<1$ і розбіжний при $\alpha\ge 1$.

Приклади. Дослідити на збіжність інтеграли:

$$1)\int_1^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^5+1}};\quad 2)\int_1^{+\infty}\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}dx;\quad 3)\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3+4};\quad 4)\int_0^1\frac{e^x dx}{\left(1-x\right)^2}.$$

Розв'язання. Для дослідження збіжності невласних інтегралів застосуємо ознаки збіжності та збіжність невласних інтегралів з попереднього прикладу.

1) Розглянемо дві функції $f\left(x\right)=\dfrac{x}{\sqrt{x^5+1}}$ і $g\left(x\right)=\dfrac{x}{\sqrt{x^5}}=\dfrac{1}{x^{3/2}}$.

При $x\geq 1$ для даних функцій виконується нерівність $\dfrac{x}{\sqrt{x^5+1}}<\dfrac{1}{x^{3/2}}$, а невласний інтеграл $\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^{3/2}}$ збіжний при $\alpha=\dfrac{3}{2}>1$. Тоді збіжним буде і невласний інтеграл $\int_1^{\infty}\dfrac{xdx}{\sqrt{x^5+1}}$.

2) Розглянемо дві функції $f\left(x\right)=\dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}$ і $g\left(x\right)=\dfrac{1}{x}$. При $x\geq 2$ вираз $\ln\left(x^2+1\right)>1$ і має місце нерівність $\dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}>\dfrac{1}{x}$. Невласний інтеграл $\int_2^{+\infty}\dfrac{dx}{x}$ при $\alpha=1$ розбіжний, то буде розбіжним і невласний інтеграл $\int_2^{+\infty}\dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}dx$.

3) Якщо $x\geq 1$, то виконується нерівність $\dfrac{1}{x^3+4}<\dfrac{1}{x^3}$, і інтеграл $\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^3}$ збіжний при $\alpha=3>1$. Тоді збіжним буде і невласний інтеграл $\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^3+4}$.

4) Функція $f\left(x\right)=\dfrac{e^x}{\left(1-x\right)^2}$ має в точці $x=1$ нескінченний розрив. При $0\leq x<1$ має місце нерівність $\dfrac{e^x}{\left(1-x\right)^2}>\dfrac{1}{\left(1-x\right)^2}$, і невласний інтеграл $\int_0^1\dfrac{dx}{\left(1-x\right)^2}$ розбіжний при $\alpha=2>1$, тому буде розбіжним і невласний інтеграл $\int_0^1\dfrac{e^x}{\left(1-x\right)^2}dx$.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Обчислити визначені інтеграли:

1. $\int\limits_1^2 \left(x^3 - \frac{1}{x^4} \right) dx,$ 2. $\int\limits_0^8 \left(\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x} \right) dx,$ 3. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 5x} dx,$

4. $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi \, d\varphi,$ 5. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 5},$ 6. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{5 + 4x - x^2}},$ 7. $\int\limits_1^3 2^{2x-3} dx.$

2. Обчислити визначені інтеграли методом заміни:

1. $\int\limits_{\pi^2/4}^{\pi^2} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx,$ 2. $\int\limits_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx,$ 3. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x \cos^3 x dx,$

4. $\int\limits_0^1 \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}},$ 5. $\int\limits_0^4 \frac{1}{1 + \sqrt{2x+1}} dx,$ 6. $\int\limits_0^3 \frac{xdx}{\sqrt{25 - x^2}},$

7. $\int\limits_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1 + \ln x}};$ 8. $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{(x^2+1)^2},$ 9. $\int\limits_3^{10} \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x+6}}.$

3. Обчислити визначені інтеграли методом інтегрування частинами:

1. $\int\limits_1^2 \ln(2x+3) dx,$ 2. $\int\limits_0^1 e^{2y} y dy,$ 3. $\int\limits_0^1 x arctg x dx,$

4. $\int\limits_0^{\pi/4} x \sin 4x dx,$ 5. $\int\limits_0^6 (x+2)\cos 3x dx;$ 6. $\int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x^5} dx.$

4. Дослідити на збіжність невласні інтеграли 1-го роду.

1. $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^5},$ 2. $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x}},$ 3. $\int\limits_0^\infty \sin x,$ 4. $\int\limits_1^\infty e^{-2x} dx,$ 5. $\int\limits_0^\infty x e^{-x^2} dx,$

6. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+4},$ 7. $\int\limits_0^\infty \frac{arctg x dx}{x^2+1},$ 8. $\int\limits_e^\infty \frac{dx}{x \ln x},$ 9. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^5}}.$

5. Дослідити на збіжність невласні інтеграли 2-го роду:

1. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}},$ 2. $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}},$ 3. $\int\limits_0^1 x \ln x dx,$ 4. $\int\limits_1^e \frac{dx}{x \ln x},$

5. $\int\limits_{-1}^2 \frac{dx}{x},$ 6. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2},$ 7. $\int\limits_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}},$ 8. $\int\limits_0^{\pi/4} ctg x dx,$ 9. $\int\limits_3^6 \frac{dx}{x^2 - 7x + 10},$

6. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

1. $y=-\dfrac{x^2}{9},\ x=0,\ x=3,\ y=-1;$ 2. $y=\dfrac{1}{1+x^2},\ y=\dfrac{x^3}{2};\quad x=0;$

3. $y=\ln x,\ x=e,\ y=0.$

Відповіді

1.1. $\dfrac{83}{24}$, **1.2.** $\dfrac{100}{3}$, **1.3.** $\dfrac{1}{5}$, **1.4.** $\dfrac{\pi}{4}$, **1.5.** $-arctg2+arctg3$,

1.6. $\arcsin\dfrac{2}{3}$, **1.7.** $\dfrac{15}{4\ln 2}$.

2.1. 2, **2.2.** $e^{1/2}+e$, **2.3.** $\dfrac{1}{4}$, **2.4.** $-\dfrac{\pi}{4}+arctge$, **2.5.** $2-\ln 2$, **2.6.** $\sqrt{34}-5$,

2.7. 2, **2.8.** $\dfrac{2+\pi}{4}$, **2.9.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\ln\dfrac{21-8\sqrt{5}}{11}-\ln\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)$.

3.1. $-\dfrac{5}{2}\ln 5+\dfrac{7}{2}\ln 7$, **3.2.** $\dfrac{1}{4}+\dfrac{e^2}{4}$, **3.3.** $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\pi}{4}$, **3.4.** $\dfrac{\pi}{16}$,

3.5. $\dfrac{8}{3}\sin 18-\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{9}\cos 18$, **3.6.** $-\dfrac{\ln 2}{64}+\dfrac{15}{256}$.

4.1. розбіжний, **4.2.** $-\dfrac{3}{2}$, **4.3.** розбіжний, **4.4.** $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2e^2}$, **4.5.** 0.5,

4.6. $\dfrac{\pi}{2}$, **4.7.** $\dfrac{\pi^2}{8}$, **4.8.** розбіжний, **4.9.** $\dfrac{3}{2}$.

5.1. $\arcsin\dfrac{\sqrt{14}}{2}$, **5.2.** 1, **5.3.** розбіжний, **5.4.** розбіжний, **5.5.** $\ln 2$,

5.6. розбіжний, **5.7.** $\dfrac{8}{3}$, **5.9.** розбіжний. **6.1.** 2, **6.2.** $\dfrac{2\pi-1}{8}$, **6.3.** 1.

2. ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

2.1. Кратні інтеграли

Означення подвійного інтеграла

Розглянемо в площині Oxy замкнену область S, обмежену замкненою лінією L (Рис.15).

Нехай в області S визначена функція $z = f(x, y)$. Розіб'ємо область S довільним чином на n частин $s_1, s_2, \ldots, s_n$, діаметрами $d_1, d_2, ..., d_n$ і площами $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$. Найбільший з діаметрів позначимо d. В кожній i-й області s_i візьмемо точку $M_i(x_i, y_i)$. Значення функції в цій точці $f(x_i, y_i)$ помножимо на площину Δs_i відповідної області і всі добутки додамо. Отримана сума

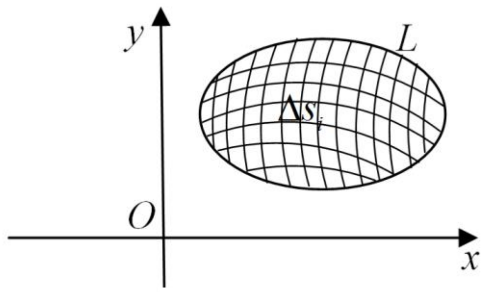


Рис.15

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta s_i . \qquad (2.1)$$

називається *інтегральною сумою для функції* $f(x, y)$ в області S.

Означення. ***Подвійним інтегралом*** *від функції $f(x, y)$ по області S називається скінчена границя I інтегральної суми I_n (2.1), коли найбільший діаметр d прямує до нуля:*

$$I = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta s_i . \qquad (2.2)$$

Позначення подвійного інтеграла:

$$I = \iint_S f(x, y) ds, \text{ або } I = \iint_S f(x, y) dx dy .$$

Функція, для якої границя (2.2) існує і є скінченною, називається **інтегрованою**.

Якщо функція $z = f(x, y)$ неперервна в області S, то вона є інтегрованою в цій області.

Подвійний інтеграл є прямим узагальненням поняття звичайного визначеного інтеграла на випадок функції двох змінних.

Геометричний та механічний зміст подвійного інтеграла

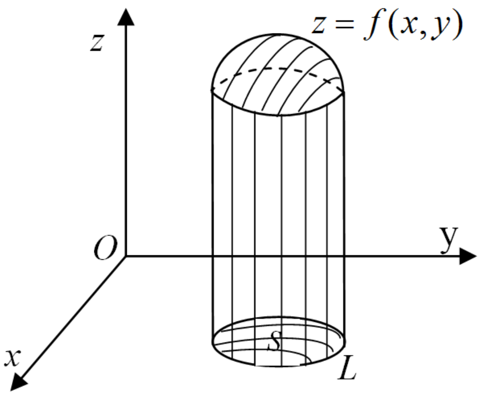


Рис.16

1) Якщо $f(x,y) > 0$, то подвійний інтеграл від функції $z = f\left(x,y\right)$ по області S дорівнює об'єму тіла, обмеженого зверху поверхнею $z = f\left(x,y\right)$, з боків – циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні вісі Oz, а направляючою є лінія L (границя області S), знизу площиною $z = 0$.

2) Якщо $f(x,y) > 0$, то подвійний інтеграл від функції $z = f\left(x,y\right)$ по області S дорівнює масі фігури S, якщо підінтегральну функцію $f(x,y)$ вважати щільністю в точці $M\left(x,y\right)$.

Властивості подвійного інтегралу:

1. $\iint\limits_D c \cdot f(x,y)ds = c\iint\limits_D f(x,y)ds$.

2. $\iint\limits_D \left(f_1(x,y) \pm f_2(x,y)\right)ds = \iint\limits_D f_1(x,y)ds \pm \iint\limits_D f_2(x,y)ds$.

3. $\iint\limits_D f(x,y)ds = \iint\limits_{D_1} f(x,y)ds + \iint\limits_{D_2} f(x,y)ds$, якщо $D = D_1 \bigcup D_2$, $D_1 \bigcap D_2 = \varnothing$.

4. $\iint\limits_D ds = S$, S – площа області D.

Обчислення подвійного інтеграла в декартовій прямокутній системі координат

Розрізняють два основних типа *областей інтегрування в площині*:

1) *область першого типу* S_1 (Рис.17), тобто область $A_1A_2B_1B_2$, обмежена зліва і справа прямими $x = a$, $x = b$, $(a < b)$ відповідно, знизу кривою

$y=\varphi_1(x)$, зверху кривою $y=\varphi_2(x)$ $(\varphi_1(x)<\varphi_2(x))$, кожна з яких перетинається з вертикаллю $x=\alpha$ $(a\le\alpha\le b)$ тільки в одній точці.

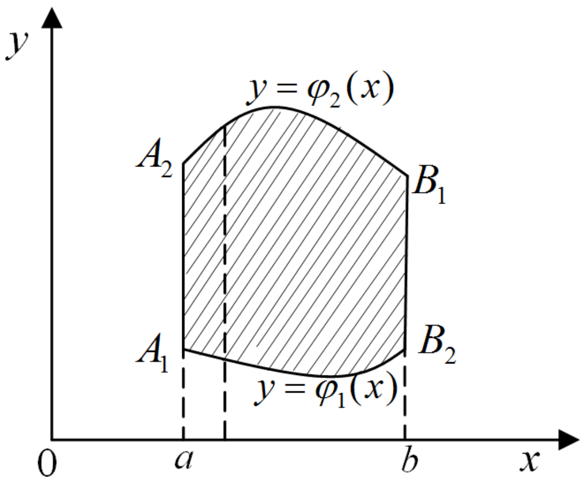


Рис.17

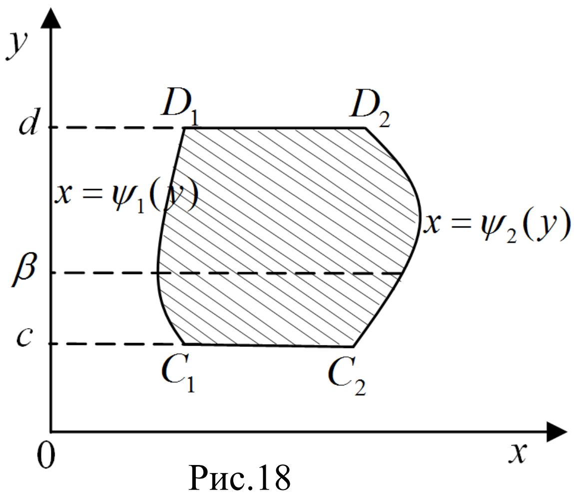


Рис.18

2) *область другого типу* S_2 (Рис.18), тобто область $C_1C_2D_1D_2$, обмежена знизу і зверху прямими $y=c,\ y=d$ відповідно, зліва кривою $x=\psi_1(y)$, справа кривою $x=\psi_2(y)$ $(\psi_1(y)<\psi_2(y))$ кожна з яких перетинається з горизонталлю $y=\beta$ $(c\le\beta\le d)$ тільки в одній точці.

Зауваження: В деяких випадках A_1 і A_2, B_1 і B_2, C_1 і C_2, D_1 і D_2 можуть зливатись в одну точку.

Нехай функція $f(x,y)$ неперервна в області S_1.

Означення. *Вираз*

$$I_{S_1}=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx,$$

*називають **двократним (повторним)** інтегралом від функції* $f(x,y)$ *по області* S_1.

Спочатку обчислюється інтеграл, що стоїть у дужках, причому інтегрування виконується по y, а x вважається сталим. У результаті інтегрування виходить неперервна функція від x:

$$\Phi(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

Цю функцію ми інтегруємо по *x* в межах від *a* до *b*:

$$I_{S_1}=\int_a^b \Phi(x)dx\,.$$

У результаті виходить деяке стале число.

Теорема. *Подвійний інтеграл від неперервної функції* $f(x,y)$ *області* S_1 *дорівнює двократному інтегралу від цієї функції по області* S_1*, тобто*

$$\iint_{S_1} f(x,y)dxdy=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx\,. \qquad (2.3)$$

Аналогічно для області S_2 отримаємо:

$$\iint_{S_2} f(x,y)dxdy=\int_c^d\left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx\right)dy\,. \qquad (2.4)$$

У випадку, коли область S можна розглядати як область першого виду S_1 і як другого виду S_2, то при виконанні вказаних умов можна застосувати обидві формули (2.3), (2.4). Тому:

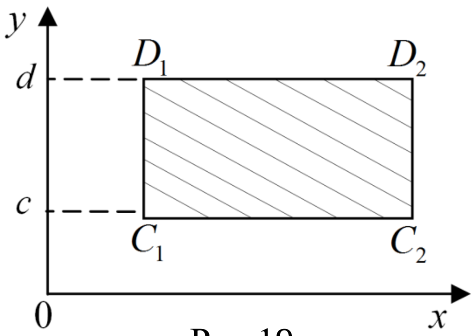


Рис.19

$$\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx\right)dy\,.$$

Якщо функція $f(x,y)$, інтегрована в прямокутнику $[a,b;\ c,d]$, може бути представлена у вигляді добутку функції тільки від x на функцію тільки від y: $f(x,y)=\varphi(x)\psi(y)$, то

$$\iint_{S_2} f(x,y)dxdy=\int_a^b\varphi(x)dx\int_c^d\psi(y)dy\,.$$

Приклад: Обчислити $\iint_S xydxdy$, де область S є прямокутником $[4,\ 8;\ 1{,}2]$.

Розв’язання:

$$\iint_S xydxdy = \int_1^2 \left(\int_4^8 xydx \right) dy = \int_4^8 xdx \int_1^2 ydy = \left(\frac{x^2}{2} \Big|_4^8 \right) \left(\frac{y^2}{2} \Big|_1^2 \right) = \frac{64-16}{2} \cdot \frac{4-1}{2} = 36 .$$

Приклад: Обчислити $\iint_S x^2 ydxdy$, де S – область, обмежена лініями $y = -x^2,\ x = y^2$.

Розв'язання: Дані лінії перетинаються в двох точках $O(0,0), M(1,-1)$. Область S можна розглядати як область першого типу S_1, і як область другого типу S_2. Розглядаємо її як область першого типу, отримаємо наступні границі інтегрування: $a = 0,\ b = 1,\ \ y = \varphi_1(x) = -\sqrt{x},\ y = \varphi_2(x) = -x^2$.

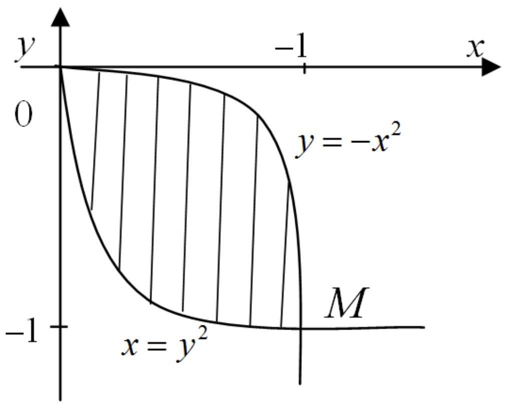


Рис.20

По формулі отримаємо:

$$\iint_S x^2 ydxdy = \int_0^1 (\int_{-\sqrt{x}}^{-x^2} x^2 ydy) dx =$$

$$\int_0^1 x^2 (\int_{-\sqrt{x}}^{-x^2} ydy) dx = \int_0^1 x^2 \left(\frac{y^2}{2} \Big| \right)_{-\sqrt{x}}^{x^2} dx =$$

$$= \int_0^1 x^2 \frac{x^4 - x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^6 - x^3) dx =$$

$$= \frac{1}{2} (\frac{1}{7} - \frac{1}{4}) = -\frac{3}{56}.$$

Заміна змінних у подвійному інтегралі

Нехай функція $f(x, y)$ неперервна в деякій замкненій і обмеженій області D, тоді існує інтеграл

$$I = \iint_D f(x, y) dxdy .$$

При заміні змінних: $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ область D площини xOy відображається в область G площини uOv; елемент площини $dxdy$ відобразиться в елемент площі $|I(u, v)| dudv$, де визначник

$$I(u,v)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

називають ***функціональним визначником*** або ***якобіаном***.

Отже, якщо функції $\varphi(u,\ v)$ та $y=\psi(u,\ v)$ неперервні в області G разом із своїми частинними похідними першого порядку, то має місце рівність

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_G \left[f\left(\varphi(u,v),\psi(u,v)\right)\right]\cdot\left|I(u,v)\right|dudv. \qquad (2.5)$$

Обчислення подвійного інтеграла у полярній системі координат

Часто для обчислення подвійних інтегралів використовують полярні координати: $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$. Тоді якобіан переходу $I(r,\ \varphi)=r$, а елемент площі $dxdy=rdrd\varphi$. І формула (2.5) прийме вигляд:

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D'} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi. \qquad (2.6)$$

Перехід в подвійному інтегралі до полярних координат доцільно використовувати в тих випадках, коли підінтегральна функція залежить від x^2+y^2 або від $arctg\,\dfrac{y}{x}$, а також у випадках, коли межа області D містить дуги кіл та промені, що виходять із початку координат.

Приклад. Обчислити $\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2}dxdy$, якщо область D – коло радіуса $R=2$ з центром у початку координат: $x^2+y^2\le 4$.

Розв'язання. Знайдемо рівняння межі області у полярних координатах:

$$\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=4\Rightarrow\rho^2=4\Rightarrow\rho=2.$$

Тому $0\le\rho\le 2,\ \ 0\le\varphi\le 2\pi$.

За формулою (2.6)

$$\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2}dxdy=\iint_D \sqrt{4-\left(x^2+y^2\right)}dxdy=$$

$$=\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \sqrt{4-\rho^2}\rho d\rho = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \sqrt{4-\rho^2} d\left(4-\rho^2\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\left(4-\rho^2\right)^{3/2}\Bigg|_0^2 d\varphi = -\frac{1}{3}\int_0^{2\pi} 4^{3/2} d\varphi = \frac{1}{3}4\sqrt{4}\varphi\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{8}{3}2\pi = \frac{16\pi}{3}.$$

Означення потрійного інтеграла, умови існування

Нехай у просторі задана деяка замкнена область V і функція $f(x,y,z)$, визначена в цій області. Розіб'ємо область V довільним чином на n областей $v_1, v_2, ..., v_n$, з діаметрами $d_1, d_2, ..., d_n$ і об'ємами $\Delta v_1, \Delta v_2, ..., \Delta v_n$. Найбільший з діаметрів позначимо d. В кожній i-й області v_i візьмемо точку $M_i\left(x_i, y_i, z_i\right)$ і утворимо добуток $f\left(x_i, y_i, z_i\right)\Delta v_i$.

Інтегральною сумою для функції вигляду $f(x,y,z)$ по області V називається сума вигляду $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta v_i$.

Означення. ***Потрійним інтегралом*** *від функції* $f(x,y,z)$ *по області* V *називається скінчена границя її інтегральної суми, коли максимальний діаметр* d *прямує до 0:*

$$I = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta v_i.$$

Якщо функція $f(x,y,z)$ неперервна в обмеженій області V, то вказана границя існує і вона скінчена.

Позначення потрійного інтеграла:

$$I = \iiint_V f(x,y,z)dV,\ I = \iiint_V f(x,y,z)dxdydz$$

Основні властивості потрійних інтегралів аналогічні властивостям подвійних інтегралів.

Обчислення потрійного інтеграла в декартовій прямокутній системі координат

Нехай поверхня, що обмежує область V знизу, має рівняння $z=\psi_1(x,y)$, а поверхня, що обмежує цю область зверху, має рівняння $z=\psi_2(x,y)$. Припустимо, що область S – проекція області V на площину Oxy, обмежена лініями: $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$, $x=a$, $x=b$ (тобто область інтегрування V визначається нерівностями $a\le x\le b$, $\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)$, $\psi_1(x,y)\le z\le\psi_2(x,y)$), де $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\psi_1(x,y),\psi_2(x,y)$ – неперервні функції своїх аргументів.

Тоді *трикратний інтеграл* I_V *від функції* $f(x,y,z)$ *по області* V *визначається так:*

$$I_V=\iiint\limits_V f(x,y,z)=\int\limits_a^b\left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\left(\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)}f(x,y,z)dz\right)dy\right)dx\,.$$

Зауважимо, що в результаті інтегрування по z і підстановки меж, у внутрішніх дужках отримаємо функцію залежну тільки від x та y. Далі обчислюється подвійний інтеграл від отриманої функції по області S, як це було розглянуто вище.

Теорема. *Потрійний інтеграл від функції* $f(x,y,z)$ *по області* V *дорівнює трикратному інтегралу по цій же області, тобто*

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dv=\int\limits_a^b\left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\left(\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)}f(x,y,z)dz\right)dy\right)dx\,.$$

Приклад. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_G zdxdydz$, якщо область G обмежена координатними і площиною $x+y+z=1$.

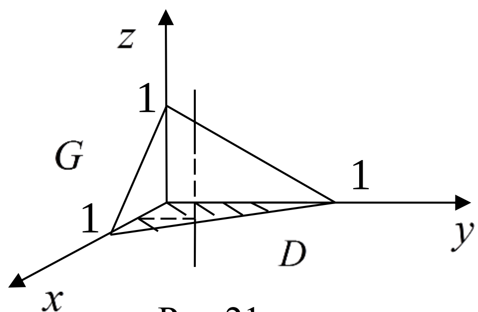


Рис.21

Розв'язання: Побудуємо область G (Рис.21). Область G є тетраедр, обмежений координатними площинами $x=0$, $y=0$ з боків, координатною площиною $z=0$ знизу і площиною $x+y+z=1$ зверху. Проекцією області G на площину Oxy є трикутник, обмежений лініями $x=0,\ y=0,\ y=1-x$.

Область G правильна в

напрямку осі Oz; z змінюється від $z=0$ до $z=1-x-y$. Її проекція D правильна в напрямі осі Oy, y змінюється від $y=0$ до $y=1-x$. Таким чином,

$$G=\left\{(x,y,z):0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x,\ 0\le z\le 1-x-y\right\}.$$

Отже:

$$\iiint\limits_D zdxdydz=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y} zdz=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left.\frac{z^2}{2}\right|_0^{1-x-y} dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(1-x-y\right)^2 dy=-\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(1-x-y\right)^2 d\left(1-x-y\right)=$$

$$=-\frac{1}{6}\int_0^1\left.\left(1-x-y\right)^3\right|_0^{1-x} dx=\frac{1}{6}\int_0^1\left(1-x\right)^3 dx=\frac{1}{24}.$$

Заміна змінних у потрійному інтегралі

Нехай система функцій

$$\begin{cases} x=x(\xi,\eta,\omega) \\ y=y(\xi,\eta,\omega) \\ z=z(\xi,\eta,\omega) \end{cases}$$

здійснює взаємно-однозначне відображення області V в системі координат $\left(x,y,z\right)$ в область V_1 в системі координат $(\xi,\ \eta,\ \omega)$. Тоді перехід від змінних x,y,z до змінних $\xi,\ \eta,\ \omega$ в потрійному інтегралі здійснюється за формулою:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dv=\iiint\limits_{V_1} f\left[x(\xi,\eta,\omega),y(\xi,\eta,\omega),z(\xi,\eta,\omega)\right]\cdot\left|I(\xi,\eta,\omega)\right|d\xi d\eta d\omega, \quad (2.7)$$

де $\left|I(\xi,\ \eta,\ \omega)\right|$ – якобіан перетворення елемента об’єму області, причому

$$I(\xi,\eta,\omega)=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\xi} & \frac{\partial x}{\partial\eta} & \frac{\partial x}{\partial\omega} \\ \frac{\partial y}{\partial\xi} & \frac{\partial y}{\partial\eta} & \frac{\partial y}{\partial\omega} \\ \frac{\partial z}{\partial\xi} & \frac{\partial z}{\partial\eta} & \frac{\partial z}{\partial\omega} \end{vmatrix}$$

Обчислення потрійного інтеграла у циліндричній та сферичній системі координат

У випадку переходу до циліндричних координат

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}, \quad r \ge 0, 0 \le \varphi \le 2\pi,$$

якобіан приймає значення:

$$I(r,\varphi,z) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r,$$

У випадку переходу до сферичних координат

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}, \; r \ge 0, 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \theta \le \pi$$

якобіан дорівнює $I(r,\theta,\varphi) = r^2 \cdot \sin\theta$.

Приклад. Обчислити $\iiint\limits_G z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, якщо область G обмежена циліндром $x^2+y^2=2x$ і площинами $y=0,\ z=0,\ z=2$.

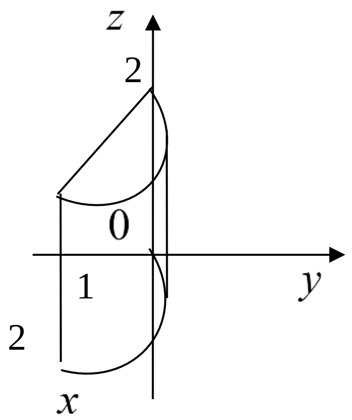


Рис.22

Розв'язання. Знайдемо рівняння межі області в циліндричних координатах (Рис.22): рівняння кола $x^2+y^2=2x$, яке лежить в основі циліндра, має вигляд: $\rho = 2cos\varphi$.

Оскільки в циліндричній системі координат

$$x^2+y^2=\rho^2,$$

то підінтегральна функція

$$z\sqrt{x^2+y^2} = z\sqrt{\rho^2} = z\rho$$

$$\iiint\limits_G z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz=\iiint\limits_{G'} z\rho^2 d\rho d\varphi dz=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \rho^2 d\rho \int\limits_0^2 zdz=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \rho^2 d\rho \left.\frac{z^2}{2}\right|_0^2=$$

$$=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left.\frac{\rho^3}{3}\right|_0^{2\cos\varphi} d\varphi=\frac{16}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi d\varphi=\frac{16}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2\varphi\right)d\sin\varphi=$$

$$=\frac{16}{3}\left.\left(\sin\varphi-\frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{16}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{16}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{32}{9}.$$

Приклад. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz$, де область V є сферою $x^2+y^2+z^2\le 4$.

Розв'язання: Перейдемо до сферичних координат:

$$\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi \\ y=r\sin\theta\sin\varphi \\ z=r\cos\theta \end{cases}.$$

Так, як V є сферою, то $0\le\varphi\le 2\pi, 0\le\theta\le\pi$. Знайдемо, як змінюється r:

$$(r\sin\theta\cos\varphi)^2+(r\sin\theta\sin\varphi)^2+(r\cos\theta)^2=$$

$$=r^2(\sin^2\theta\left(\cos\varphi^2+\sin\varphi^2\right)+\cos\theta^2)=$$

$$=r^2(\sin^2\theta+\cos\theta^2)=r^2\le 4\Rightarrow 0\le r\le 2.$$

Так, як якобіан дорівнює $I(r,\theta,\varphi)=r^2\cdot\sin\theta$, отримаємо:

$$\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz=\int\limits_0^2 dr\int\limits_0^{\pi} d\theta\int\limits_0^{2\pi} r^2 r^2\sin\theta d\varphi=\int\limits_0^2 r^4 dr\int\limits_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int\limits_0^{2\pi} d\varphi=$$

$$=\left(\left.\frac{r^5}{5}\right|_0^2\right)\left(-\cos\theta\Big|_0^{\pi}\right)\left(\varphi\Big|_0^{2\pi}\right)=\frac{32}{5}(1+1)2\pi=\frac{128\pi}{5}.$$

Приклад. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V zdxdydz$, де область V, обмежена верхньою частиною конуса $\dfrac{x^2+y^2}{9}=\dfrac{z^2}{4}$ і площиною $z=2$.

Розв'язання: Введемо циліндричні координати:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}.$$

Рівняння конуса прийме вигляд: $\dfrac{r^2}{9}=\dfrac{z^2}{4}$ або $z=\pm\dfrac{2r}{3}$.

Нові змінні змінюються в наступних межах:

$$0\le r\le 3,\ \ 0\le\varphi\le 2\pi,\ \ \frac{2}{3}r\le z\le 2.$$

Знаходимо:

$$\iiint\limits_V zdxdydz=\int\limits_0^3\{\int\limits_0^{2\pi}(\int\limits_{\frac{2r}{3}}^{2} rzdz)d\varphi\}dr=\int\limits_0^3\{\int\limits_0^{2\pi}(r\frac{z^2}{2}\Big|_{\frac{2r}{3}}^{2})d\varphi\}dr=$$

$$=\int\limits_0^3\{\int\limits_0^{2\pi}(r(2-\frac{2r^2}{9})d\varphi\}dr=\int\limits_0^3\{(2r-\frac{2r^3}{9})\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\}dr=\int\limits_0^3(2r-\frac{2r^3}{9})(\varphi\Big|_0^{2\pi})dr=$$

$$=\int\limits_0^3(2r-\frac{2r^3}{9})2\pi dr=2\pi(2\frac{r^2}{2}-\frac{2r^4}{9\cdot 4})\Big|_0^3=2\pi(r^2-\frac{r^4}{18})\Big|_0^3=$$

$$=2\pi(9-\frac{81}{18})=2\pi(9-\frac{9}{2})=9\pi.$$

Застосування кратних інтегралів до задач геометрії та фізики

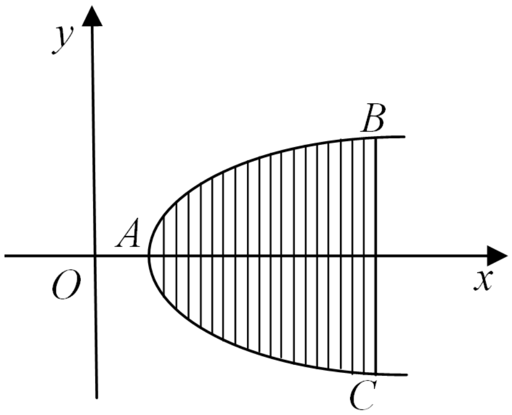


Рис.22

1) Площа плоскої області.

Площа плоскої області S обчислюється за формулою:

$$S=\iint\limits_S ds=\int\limits_S dxdy.$$

Приклад. Обчислити площу області, що обмежена лініями $x = y^2 + 1$, $x = 5$.

Розв'язання: Дана область обмежена параболою $x = y^2 + 1$ та прямою $x = 5$ (Рис.22).

Розв'язуючи систему рівнянь:

$$\begin{cases} x = y^2 + 1, \\ y = 0, \end{cases}$$

знаходимо точку $A(1,0)$ – перетин параболі з віссю Ox.

З системи рівнянь

$$\begin{cases} x = y^2 + 1, \\ x = 5, \end{cases}$$

знаходимо дві точки перетину параболі з прямою $x = 5$: $B(5,2)$, $C(5,-2)$. Область ABC можна розглядати як область першого S_1 виду та як область другого виду S_2.

Будемо розглядати область ABC як область першого вигляду і застосуємо формулу (2.3):

$$S = \iint\limits_{ABC} dxdy = \int_1^5 dx \int_{-\sqrt{x-1}}^{\sqrt{x-1}} dy = \int_1^5 \left(y\Big|_{-\sqrt{x-1}}^{\sqrt{x-1}} \right) dx = \int_1^5 \left(\sqrt{x-1} + \sqrt{x-1} \right) dx =$$

$$= 2\int_1^5 \sqrt{x-1}\,dx = 2\frac{(x-1)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_1^5 = \frac{4}{3}\left((5-1)^{3/2} - (1-1)^{3/2} \right) = 10\frac{3}{2}.$$

Зауваження: Якщо розглядати область ABC як область другого вигляду отримаємо:

$$S = \int_{-2}^{2} dy \int_{y^2+1}^{5} dx = \int_{-2}^{2} \left(5 - y^2 - 1 \right) dy = \int_{-2}^{2} \left(4 - y^2 \right) dy = 4y\Big|_{-2}^{2} - \frac{y^3}{3}\Bigg|_{-2}^{2} = 16 - \frac{16}{2} = 10\frac{2}{3}.$$

2) Об'єм циліндроїда

Об'єм циліндроїда (Рис.23), обмеженого зверху неперервною поверхнею $z = f(x,y)$, знизу площиною $z = 0$ і з боків

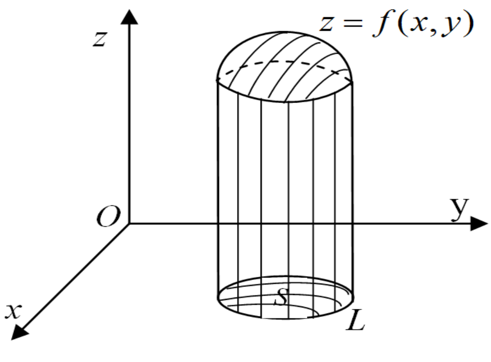


Рис.23

прямою циліндричною поверхнею, що вирізає на площині Oxy область S, обчислюється за формулою:

$$V = \iint_S f(x, y)dxdy \ .$$

Приклад. обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнею $x^2 + y^2 - z = 0$, координатними площинами і площинами $x = a,\ \ y = b\ (a > 0,\ b > 0)$.

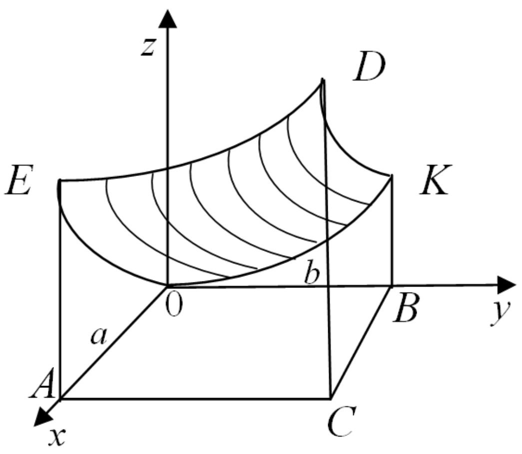


Рис.24

Розв'язання: Дана поверхня є параболоїдом обертання з вершиною в початку координат і віссю, співпадаючою з віссю Oz (Рис.24).

Область, що вирізається площинами $x = 0,\ y = 0,\ x = a,\ y = b$, є прямокутником $OACB$.

Так, як $z = x^2 + y^2$, то маємо:

$$V = \iint_S (x^2 + y^2)dxdy = \int_0^a (\int_0^b (x^2 + y^2)dy)dx = \int_0^a \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_0^b dx =$$

$$= \int_0^a \left(x^2 b + \frac{b^3}{3} \right)\Bigg|_0^b dx == \left(\frac{x^3 b}{3} + \frac{b^3}{3}x \right)\Bigg|_0^a = \frac{ba^3 + b^3 a}{3} = \frac{ab}{3}(a^2 + b^2).$$

3) Площа поверхні.

Площина S поверхні, заданої в *явному вигляді* $z = f(x, y)$, обчислюється за формулою:

$$S = \iint_P \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\, dxdy \ ,$$

де P – проекція заданої поверхні на площину Oxy.

Якщо поверхня задана *неявним рівнянням* $F(x, y, z) = 0$, то площина цієї поверхні виражається інтегралом:

$$S = \iint_P \frac{\sqrt{F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2}}{|F_z'^2|} dxdy \ .$$

Якщо поверхня задана *параметричними рівняннями*:

$$x = x(u,v), \; y = y(u,v), \; z = z(u,v), \tag{2.8}$$

де $(u,v) \in P$ і P – обмежена замкнена область, в якій функції (2.8) неперервні і диференційовані. Тоді

$$S = \iint_P \sqrt{EG - F^2}\, dudv,$$

де $E = x_u'^2 + y_u'^2 + z_u'^2$, $G = x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2$, $F = x_u' x_v' + y_u' y_v' + z_u' z_v'$.

4) Маса і статичні моменти пластини

Якщо S – область площини Oxy, що зайнята пластиною, а $p(x, y)$ – поверхнева густина в точці $P(x, y)$, то маса пластини m виражається формулою:

$$m = \iint_S p(x,y)dxdy, \tag{2.9}$$

а статичні моменти M_x і M_y відносно осей Ox і Oy визначаються подвійними інтегралами:

$$M_x = \iint_S yp(x,y)dxdy, \quad M_y = \iint_S xp(x,y)dxdy. \tag{2.10}$$

Якщо $C_0(x_0, y_0)$ – центр тяжіння платини, то $x_0 = \dfrac{M_y}{m}$, $y_0 = \dfrac{M_x}{m}$.

5) Координати центра ваги пластини.

Якщо $C(x_0, y_0)$ – центр ваги пластинки, то

$$x_0 = \frac{M_y}{m}, \quad y_0 = \frac{M_x}{m},$$

де m – маса пластинки, M_x, M_y – її статичні моменти щодо осей координат, визначаються відповідно формулами (2.9), (2.10).

У випадку однорідної платини формули (2.9), (2.10) приймуть вигляд:

$$x_0 = \frac{\iint_S xdxdy}{\iint_S dxdy}, \quad y_0 = \frac{\iint_S ydxdy}{\iint_S dxdy}.$$

6) Об'єм тіла.

Об'єм області V виражається формулою:

$$V = \iiint_V dxdydz\ .$$

В сферичних координатах цей інтеграл має вигляд:

$$V = \iiint_{V_1} r^2 \sin\theta drd\theta d\varphi\ ,$$

а в циліндричних

$$V = \iiint_{V_2} rdrd\varphi dz\ .$$

Невласні кратні інтеграли

Означення. *Інтеграл по області* $\int_D f(M)d\mu$ *називають* ***невласним,*** *якщо область інтегрування* D *необмежена або підінтегральна функція* $f(M)$ *необмежена в деяких точках* M *області інтегрування.*

Невласні інтеграли по області можуть бути збіжними або розбіжними.

Випадок нескінченної області

Якщо функція $f(M)$ – неперервна в нескінченій області D, то розглядають

$$\int_D f(M)d\mu = \lim_{D_n \to D} \int_{D_n} f(M)d\mu \qquad (2.11)$$

де D_n – обмежена область така, що $D_n \subset D_{n+1} \subset D$ і $D_n \to D$, тобто D_n розширюється за довільним законом і для довільної точки із області D існує D_n, що містить цю точку.

Якщо границя правої частини рівності (2.11) існує і не залежить від вибору області D_n, то відповідний невласний інтеграл по області D називається *збіжним*. Якщо ця границя не існує або дорівнює нескінченності, то невласний інтеграл називають *розбіжним*.

Якщо підінтегральна функція $f(M)$ невід'ємна в області D, то для збіжності невласного інтеграла необхідно і достатньо, щоб границя правої частини рівності (2.11) існувала хоча би для одного вибору областей D_n.

Випадок розривної (необмеженої) функції

Якщо функція $f(M)$ неперервна в замкненій обмеженої області D за виключенням точки M_0, то розглядають

$$\int_D f(M)d\mu = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{D_\varepsilon}(M)d\mu\,, \qquad (2.12)$$

де D_ε – область, яка одержується із області D шляхом видалення області діаметром ε, яка містить точку M_0.

Якщо границя правої частини (2.12) існує і не залежить від виду видалених областей діаметром ε, то відповідний невласний інтеграл називається збіжним, в протилежному випадку – розбіжним.

Якщо $f(M)\ge 0$, то границя в (2.12) не залежить від виду видаленої області. В цьому випадку найчастіше видаляють окіл радіуса ε точки M_0.

Якщо в області інтегрування підінтегральна функція має розриви другого роду (стає необмеженою) на деякій лінії L або поверхні S, то ця особливість видаляється із області інтегрування, а потім видалена частина стягується до особливості.

Приклад. Дослідити збіжність інтеграла $\iint_D e^{-2(x^2+y^2)}dxdy$, де область D – площина xOy.

Розв'язання: Заданий інтеграл є невласним подвійним інтегралом по необмеженій області D, підінтегральна функція не від'ємна. Позначимо через D_R – коло радіуса R з центром в початку координат. Тоді рівність (2.11) прийме вигляд:

$$\iint_D e^{-2(x^2+y^2)}dxdy = \lim_{R\to\infty}\iint_{D_R} e^{-2(x^2+y^2)}dxdy\,.$$

Обчислимо подвійний інтеграл по області D_R переходом до полярної системи координат:

$$\iint_{D_R} e^{-2(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R e^{-2r^2}\cdot rdr\right)d\varphi = 2\pi\cdot\frac{1}{4}\left(1-e^{-2R^2}\right).$$

Отже, $\iint_D e^{-2(x^2+y^2)}dxdy = \lim_{R\to\infty}\frac{\pi}{2}\left(1-e^{-2R^2}\right)=\frac{\pi}{2}$.

Приклад. Дослідити збіжність інтеграла:

$$\iint_D \frac{dxdy}{\left[4-(x^2+y^2)\right]^{2/3}}.$$

Розв'язання: Задано невласний подвійний інтеграл по обмеженій області від функції, яка необмежена на колі $x^2+y^2=4$ і невід'ємна.

Позначимо через D_ε коло радіуса $\mathrm{R}=2-\varepsilon$ з центром в початку координат. Тоді за формулою (2.12) отримаємо:

$$\iint_D \frac{dxdy}{[4-(x^2+y^2)]^{2/3}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{D_\varepsilon} \frac{dxdy}{[4-(x^2+y^2)]^{2/3}}.$$

Обчислимо подвійний інтервал по області D_ε переходом до полярних координат:

$$\iint_{D_\varepsilon} \frac{dxdy}{\left[4-(x^2+y^2)\right]^{2/3}} = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2-\varepsilon}\frac{rdr}{(4-r^2)^{2/3}}\right)d\phi = 2\pi\cdot\left(-\frac{1}{2}\int_0^{2-\varepsilon}\frac{d(4-r^2)}{(4-r^2)^{2/3}}\right)=$$

$$=-\pi\cdot(4-r^2)^{1/3}\Big|_0^{2-\varepsilon} = -\pi\left[\left(4-(2-\varepsilon)^2\right)^{1/3}-4^{1/3}\right]=\pi\left[4^{1/3}-\left(4\varepsilon-\varepsilon^2\right)^{1/3}\right].$$

Отже,

$$\iint_D \frac{dxdy}{\left[4-(x^2+y^2)\right]^{2/3}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\pi\left[4^{1/3}-\left(4\varepsilon-\varepsilon^2\right)^{1/3}\right]=4^{1/3}\cdot\pi,$$

тому інтеграл є збіжним.

Зауваження: При дослідженні збіжності невласних інтегралів по області часто застосовують порівняльні ознаки. Наприклад, якщо D є площиною, то для збіжності інтеграла $\int_D f(M)d\mu$ істотно лише поведінка $f(M)$ для великих $r=\sqrt{x^2+y^2}$. Тому потрібно використовувати інтеграл $\iint_{r>r_0} r^{-p}\cdot dxdy$, який збігається $p>2$ і розбігається при $p<2$.

Аналогічно в тривимірному просторі інтеграл від r^{-p} на нескінченності збігається лише при $p>3$.

При дослiджені невласних інтегралів по області від функції, яка необмежена в ізольованій точці M_0 області D, часто використовують порівняння з інтегралами $\iint\limits_{r>r_0} r^{-p}\cdot dxdy$ на площині та $\iiint\limits_{r<r_0} r^{-p}dxdydz$ в просторі.

Перший із вказаних інтегралів збігається при $p<2$, а другий – при $p<3$.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Обчислити подвійні інтеграли

1. $\iint\limits_{D} e^{x+y}dxdy \quad (0\le x\le 1, 0\le y\le 1)$,

2. $\iint\limits_{D} \frac{x^2}{1+y^2}dxdy \quad (0\le x\le 1, 0\le y\le 1)$

3. $\iint\limits_{D} x\sin(x+y)dxdy \quad (0\le x\le 1, 0\le y\le 1)$

4. $\int\limits_2^4 dx\int\limits_x^{2x}\frac{y}{x}dy$,

5. $\iint\limits_{D}\frac{x^2}{y^2}dxdy$, де D – область ,обмежена прямими $x=2, y=x$ і гіперболою $xy=1$.

2. Змінити порядок інтегрування:

1. $\int\limits_0^1 dy\int\limits_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$, 2. $\int\limits_{-1}^1 dx\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$.

3. Обчислити потрійні інтеграли:

1. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^2 dy\int\limits_0^3 dz$, 2. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^2 dy\int\limits_0^3 (x+y+z)dz$

3. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x dy\int\limits_0^y xyzdz$, 4. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x dy\int\limits_0^{xy} x^3y^3zdz$

5. $\iiint\limits_V y\cos(z+x)dxdydz$, де V – область, обмежена циліндром $y=\sqrt{x}$ і площинами $y=0,\ z=0,\ x+z=\dfrac{\pi}{2}$.

6. $\iiint\limits_V \dfrac{1}{(x+y+z+1)^3}dxdydz$, де V – область, обмежена площинами $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1$.

4. За допомогою переходу до полярних координат обчислити подвійні інтеграли:

1. $\iint\limits_D (2-2x-3y)dxdy$, де D коло $x^2+y^2\le 4$.

2. $\iint\limits_D arctg\dfrac{y}{x}dxdy$, де D – частина кола $x^2+y^2\le 9$, $x^2+y^2\ge 1$, $y\ge\dfrac{x}{\sqrt{3}}$, $y\le x\sqrt{3}$.

5. За допомогою переходу до циліндричних координат, обчислити інтеграли:

1. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int\limits_0^2 dz$, 2. $\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{\sqrt{2x-x^2}}dy\int\limits_0^2 z(x^2+y^2)dz$.

6. За допомогою переходу до сферичних координат обчислити інтеграли:

1. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}}dy\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}\sqrt{x^2+y^2+z^2}dz$

2. $\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz$, де область V визначається нерівностями: $z\ge 0,\ \rho^2\le x^2+y^2+z^2\le R^2$.

Відповіді

1.1. $(e-1)^2$**,** **1.2.** $\dfrac{\pi}{12}$**,** **1.3.** $\sin1+\cos1-\cos2$**,** **1.4.** 9**,** **1.5.** $-\dfrac{9}{4}$**.**

2.1. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_x^{x^2} f(x,y)dy$**,** **2.2.** $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dx$**.**

3.1. 6. **3.2.** 18, **3.3.** $\frac{1}{48}$, **3.4.** $\frac{1}{144}$, **3.5.** $\frac{1}{2}$, **3.6.** $-\frac{3}{16}$.

4.1. 8π, **4.2.** $\frac{1}{12}\left(\frac{\pi^2}{2}-1\right)$.

5.1. π. **5.2.** $\frac{16}{15}$.

6.1. $\frac{\pi}{2}$, **6.2.** $\frac{4\pi}{15}\left(R^{10}-\rho^{10}\right)$.

2.2. Криволінійні інтеграли

Криволінійні інтеграли є узагальненням поняття визначеного інтеграла на випадок, коли областю інтегрування є довільна крива на площині або в просторі. Криві, по яких ведеться інтегрування *(криві інтегрування)*, повинні задовольняти певні умови.

Криволінійні інтеграли першого роду

Неперервна крива $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$ називається *гладкою* на відрізку $\alpha \le t \le \beta$, якщо функції $x(t),\ y(t),\ z(t)$ мають на цьому відрізку неперервні похідні $x'(t),\ y'(t), z'(t)$, які одночасно не дорівнюють нулю. Якщо неперервна крива складається із скінченного числа гладких кривих, її називають *кусково-гладкою*.

Нехай L – кусково-гладка просторова крива $L \subset R^3$, яка обмежена точками A і B (Рис.25). Нехай в кожній точці $M(x, y, z)$ цієї кривої визначена неперервна функція $f(x, y, z) = F(M)$. Розіб'ємо криву L на n частин точками $A = A_0, A_1, A_2, ..., A_n = B$. Позначимо через Δl_i довжину дуги $A_{i-1}A_i$. На кожній дузі $A_{i-1}A_i$ візьмемо точку M_i і складемо суму

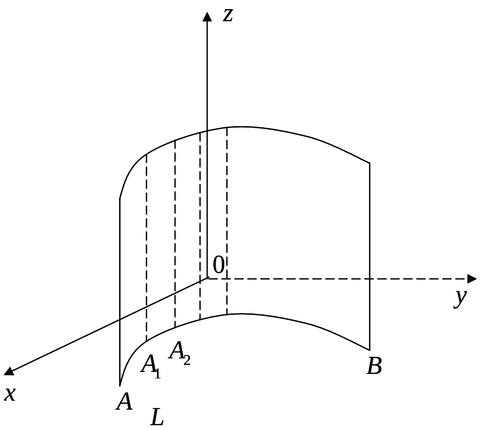


Рис.25

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta l_i. \tag{2.13}$$

Ця сума називається **інтегральною сумою для функції** $f(x, y, z)$ **по дузі** AB **кривої** L, яка відповідає даному розбиттю дуги L на частини L_i і даному вибору проміжних точок M_i **.**

Покладемо $\lambda = \max \Delta l_i,\ i = \overline{1,n}$.

Означення. ***Криволінійним інтегралом першого роду*** *або* ***криволінійним інтегралом по дузі*** AB *від функції* $f(x, y, z)$ *називається границя інтегральної суми* (2.13), *коли* $\lambda \to 0$*:*

$$\int_{AB} f(x, y, z)dl = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta l_i$$

і позначається

$$\int_L f(x,y,z)dl \text{ або } \int_{AB} f(x,y,z)dl\text{.}$$

В цьому випадку функція $f(x,y,z)$ називається **інтегрованою по кривій** L, дуга AB кривої L називається **контуром інтегрування**, точка A називається **початковою**, точка B – **кінцевою точками інтегрування.**

Якщо AB – плоска крива ($AB \subset R^2$), то

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta l_i$$
.

Теорема (умова існування криволінійного інтеграла першого роду). *Криволінійний інтеграл першого роду по дузі* AB *кривої* L *від обмеженої функції* $f(x,y,z)$ *існує, якщо:*

1) *дуга* AB *кривої* L *є гладкою або кусково-гладкою;*

2) *функція* $f(x,y,z)$ *має на дузі* AB *кривої* L *скінчену кількість точок розриву першого роду.*

Спеціальні властивості криволінійного інтеграла І-го роду:

1. Криволінійний інтеграл першого роду не залежить від напряму інтегрування по дузі AB кривої L .

$$\int_{AB} f(M)dl = \int_{BA} f(M)dl\,.$$

2. $\int_{AB} (f_1(M) \pm f_2(M))dl = \int_{AB} f_1(M)dl \pm \int_{AB} f_2(M)dl\,.$

3. $\int_{AB} cf(M)dl = c\int_{AB} f(M)dl, \quad c = const.$

4. Якщо шлях інтегрування L розбитий на частини $L_1, L_2, ..., L_n$, то

$$\int_L f(M)dl = \int_{L_1} f(M)dl + \int_{L_2} f(M)dl + ... + \int_{L_n} f(M)dl$$

5. Криволінійний інтеграл першого роду по замкненому контуру L не залежить від вибору початкової точки на цьому контурі.

Обчислення криволінійного інтеграла першого роду

Обчислення криволінійного інтеграла першого роду зводиться до обчислення визначеного інтеграла:

1) якщо крива $AB \subset R^3$ ***задана параметрично***

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t_1 \le t \le t_2, \\ z = z(t), \end{cases}$$

то криволінійний інтеграл знаходиться заформулою

$$\int_{AB} f(x,y,z)dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y^2(t)+z^2(t)}dt$$
.

Аналогічно, якщо крива $AB \subset R^2$ ***задана параметрично***

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t_1 \le t \le t_2,$$

тоді

$$\int_{\text{AB}} f(x,y)dl = \int_{t_1}^{t_2} f\left(x(t),y(t)\right)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt.$$

Приклад. Обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду $\int_L (2z - \sqrt{x^2+y^2})dl$, де L – перший виток конічної гвинтової лінії

$$\begin{cases} x = t\cos t, \\ y = t\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi. \\ z = t, \end{cases}$$

Розв'язання:

Знаходимо похідні для кожної з функцій:

$$x'(t) = \cos t - t\sin t,\ y'(t) = \sin t + t\sin t,\ z'(t) = 1.$$

Знаходимо диференціал дуги dl:

$$dl = \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt = \sqrt{t^2+2}dt$$
.

Межі інтегрування визначені за умовою $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{\pi}{2}$. Отже,

$$\int_L (2z-\sqrt{x^2+y^2})dl = \int_0^{2\pi}\left(2t-\sqrt{(t\cos t)^2+(t\sin t)^2}\right)\sqrt{t^2+2}dt =$$

$$=\int_0^{2\pi} t\sqrt{t^2+2}dt = \frac{1}{2}\int_1^{2\pi}\left(t^2+2\right)^{\frac{1}{2}} d(t^2+2) = \frac{1}{3}\left(t^2+2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^{2\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\left(1+2\pi^2\right)^{\frac{3}{2}}-1\right).$$

2) якщо крива $AB \subset R^2$ ***задана рівнянням*** $y = y(x),\ \ a \le x \le b,$ то

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_a^b f\left(x, y(x)\right)\sqrt{1+y'^2(x)}dx. \tag{2.14}$$

Аналогічно, якщо крива $AB \subset R^2$ ***задана рівнянням*** $x = x(y),\ \ c \le y \le d,$ то

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_c^d f[x(y),y]\sqrt{1+x'^2(y)}dy.$$

Приклад. Обчислити криволінійний інтеграл $\int_L (x-y)dl$, де L – відрізок $y=\frac{3}{4}x$ від $A(0,0)$ до $B(4,3)$.

Розв'язання: Дуга кривої $L \subset R^2$ задана у явному вигляді рівнянням $y=\frac{3}{4}x$.

Виразимо підінтегральну функцію y через x:

$$x-y = x-\frac{3}{4}x = \frac{1}{4}x.$$

Знайдемо диференціал дуги dl:

$$dl = \sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}dx = \sqrt{1+\frac{9}{16}}dx = \frac{5}{4}dx.$$

Межі інтегрування визначені за умовою $x=0$, $x=4$. Отже,

$$\int_L (x-y)dl = \int_0^4 \frac{1}{4}x\frac{5}{4}dx = \frac{5}{16}\frac{x^2}{2}\Big|_0^4 = \frac{5}{2}.$$

Приклад. Обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду $\int\limits_L x dl$, де L – відрізок прямої, що з'єднує точки $A(0;0)$, $B(1;2)$.

Розв'язання: Запишемо рівняння прямої *AB*, що проходить через дві точки *A* і *B*:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

$$AB:\ \frac{x-0}{1-0}=\frac{y-0}{2-0}\Rightarrow\frac{x}{1}=\frac{y}{2}\Rightarrow y=2x.$$

Знаходимо диференціал дуги dl:

$$dl=\sqrt{1+y'^2}dx=\sqrt{1+2^2}dx=\sqrt{5}dx.$$

Межі інтегрування визначені за умовою $x=0$, $x=1$. Отже,

$$\int\limits_L x dl=\int\limits_0^1 x\sqrt{5}dx=\sqrt{5}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

3) якщо крива $AB\subset R^2$ ***задається у полярній системі координат*** рівнянням

$$\rho=\rho(\varphi),\ \alpha\le\varphi\le\beta,$$

то

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f[\rho(\varphi)\cos\varphi,\rho(\varphi)\sin\varphi]\sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}d\varphi.$$

Приклад. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_L (x+y)dl$, де L – пелюсток лемніскати Бернуллі $\rho=a\sqrt{\sin 2\varphi}$, розташований у першому координатному куті (Рис.26).

Розв'язання: Знаходимо похідну

$$\rho'(\varphi)=\frac{a\cos 2\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}}.$$

Знаходимо диференціал дуги dl:

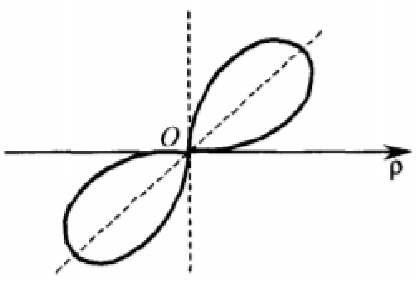


Рис.26

$$\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi)=a^2\sin 2\varphi+\frac{a^2\cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi}=\frac{a^2}{\sin 2\varphi},$$

$$dl=\sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}=\frac{a}{\sqrt{\sin 2\varphi}}d\varphi .$$

У першому координатному куті полярна координата φ змінюється від 0 до $\frac{\pi}{2}$. Отже,

$$\int\limits_L (x+y)dl=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi)\frac{a}{\sqrt{\sin 2\varphi}}d\varphi=\left|\rho=a\sqrt{\sin 2\varphi}\right|=$$

$$=a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin 2\varphi}(\cos\varphi+\sin\varphi)\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}}=a^2(\sin\varphi-\cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=a^2(1+1)=2a^2.$$

Застосування криволінійного інтеграла першого роду

У геометрії

1) *довжина дуги* AB обчислюється за формулою

$$l=\int\limits_{AB}dl, \tag{2.15}$$

Приклад. Знайти довжину дуги однієї арки циклоїди

$$L:\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t),\quad 0\le t\le 2\pi.\end{cases}$$

Розв'язання: Обчислимо dl. Маємо:

$$x'(t)=a(1-\cos t),\quad y'(t)=a\sin t,$$

$$dl=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}dt=$$

$$=a\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}dt=a\sqrt{2(1-\cos t)}dt=$$

$$=2a\sqrt{\sin^2\frac{t}{2}}dt=2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt.$$

За формулою (2.15) довжина дуги

$$l=\int_L dl=2a\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=-4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=8a.$$

2) *площа циліндричної поверхні,* визначеної функцією $z=f\left(x,y\right)$ дорівнює

$$S=\int_{AB} f\left(x,y\right)dl;$$

Приклад. Обчислити $\int_{AB}(x^2+2y^2)dl$, де AB – відрізок прямої між точками $A(0;1)$ і $B(1;0)$.

Розв'язання: Знайдемо рівняння прямої AB, що проходить через дві точки:

$$AB\text{:}\ \frac{x-0}{1-0}=\frac{y-1}{0-1}\Rightarrow\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}\Rightarrow y=1-x.$$

За формулою (2.14) обчислимо криволінійний інтеграл:

$$\int_{AB}(x^2+2y^2)dl=\int_0^1\left(x^2+2(1-x)^2\right)dx=\sqrt{2}\int_0^1\left(x^2+2-4x+2x^2\right)dx=$$

$$=\sqrt{2}\int_0^1\left(3x^2-4x+2\right)dx=\sqrt{2}\left(\frac{3x^3}{3}-\frac{4x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_0^1=\sqrt{2}\left(1-2+2\right)=\sqrt{2}.$$

Отже, площа циліндричної поверхні, визначеної еліптичним параболоїдом $z=x^2+2y^2$, вздовж відрізка прямої $y=1-x$ дорівнює $S=\sqrt{2}$.

У фізиці

3) *маса матеріальної дуги* AB, в кожній точці якої задана густина $\mu(x,y,z)$, обчислюється за формулою

$$m=\int_{AB}\mu(x,y,z)dl.$$

Аналогічно, для випадку $AB\subset R^2$, густина дуги $\mu(x,y)$ обчислюється за формулою

$$m=\int\limits_{AB}\mu(x,y)dl\,; \qquad (2.16)$$

Приклад. Обчислити масу кривої $L:\ y=\dfrac{x^4}{4},\ 0\le x\le 1$, якщо густина в кожній її точці $\mu(x,y)=x^5+8xy$.

Розв'язання: Використаємо формулу (2.16) для обчислення маси дуги. Знайдемо $dl=\sqrt{1+y'^2(x)}dx=\sqrt{1+x^6}dx$. Тоді

$$m=\int\limits_L(x^5+8xy)dl=\int\limits_0^1\left(x^5+8x\cdot\frac{x^4}{4}\right)\sqrt{1+x^6}dx=\int\limits_0^1 3x^5\sqrt{1+x^6}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\sqrt{1+x^6}\,d(x^6+1)=\frac{1}{3}\left(1+x^6\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

4) *координати центру маси* $C\left(x_c,y_c\right)$ кривої L:

$$x_c=\frac{M_y}{m};\quad y_c=\frac{M_x}{m}, \qquad (2.17)$$

де $M_x=\int\limits_L y\rho(x,y)dl,\ \ M_y=\int\limits_L x\rho\left(x,y\right)dl$ – *статичні моменти кривої* L відносно осей Ox і Oy.

Приклад. Знайти координати центра маси півкола однорідної густини $\rho(x,y)=\rho_0$ радіуса $R=2$.

Розв'язання: Рівняння кола $x^2+y^2=4$ запишемо в параметричній формі: $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, $t\in[0,\pi]$. Використаємо формули (2.16) і (2.17). Оскільки дуга симетрична відносно осі Oy, то $x_c=0$.

$$m=\int\limits_0^{\pi}\rho_0\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2+a^2}dt=\rho_0\int\limits_0^{\pi}\sqrt{(2\sin t)^2+(2\cos t)^2+a^2}dt=$$

$$=2\rho_0\int\limits_0^{\pi}dt=2\pi\rho_0.$$

Знаходимо статичний момент кривої L відносно осі Ox:

$$M_x=\int\limits_L y\rho(x,y)dl=\int\limits_0^{\pi}2\rho_0\sin t\,dt=2\rho_0\int\limits_0^{\pi}\sin t\,dt=2\rho_0(-\cos t)\Big|_0^{\pi}=4\rho_0.$$

$$y_c=\frac{M_x}{m}=\frac{4\rho_0}{2\pi\rho_0}=\frac{2}{\pi}.$$

Отже, координати центра маси півкола $\left(0;\frac{2}{\pi}\right)$.

5) *моменти інерції кривої* L відносно координатних осей і початку координат:

$$I_x=\int\limits_L y^2\rho(x,y)\,dl; \qquad (2.18)$$

$$I_y=\int\limits_L x^2\rho(x,y)\,dl;$$

$$I_0=\int\limits_L \left(x^2+y^2\right)\rho(x,y)\,dl.$$

Приклад. Знайти момент інерції відносно осі Ox однорідної дуги кола

$$\begin{cases} x=2\cos t; \\ y=2\sin t \end{cases},0\le t\le\frac{\pi}{2}.$$

Розв'язання: Використаємо формулу (2.18) для обчислення моменту інерції відносно осі Ox дуги кола.

$$I_x=\int\limits_L y^2dl=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cdot\sqrt{4\sin^2+4\cos^2 t}\,dt=8\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=$$

$$=4\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=4\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cdot 0\right)=2\pi.$$

Криволінійні інтеграли другого роду (по координатах)

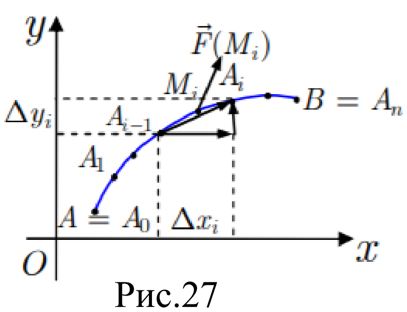


Рис.27

Нехай задана кусково-гладка крива $L\subset R^3$, яка обмежена точками A і B,в кожній точці якої задана вектор-функція

$$\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+ +Q(x,y,z)\vec{j}+$$

$R(x,y,z)\vec{k}$, де функції $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ – неперервні на кривій L (Рис.27).

Розіб'ємо криву L на n частин точками $A=A_0, A_1, A_2,...,A_n=B$. Кожній частині дузі $A_{i-1}A_i$ поставимо у відповідність вектор

$\overrightarrow{A_{i-1}A_i} = \overrightarrow{\Delta S_i} = (\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i)$. Позначимо його довжину через Δl_i, тобто $\left|\overrightarrow{\Delta S_i}\right| = \Delta l_i$. Покладемо $\lambda = \max \Delta l_i,\ i = \overline{1,n}$. На кожній частинній дузі $A_{i-1}A_i$ візьмемо точку M_i і обчислимо скалярний добуток:

$$\left(\vec{F}(M_i), \overrightarrow{\Delta S_i}\right) = P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i + R(M_i)\Delta z_i.$$

Складемо суму

$$I_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}(M_i), \overrightarrow{\Delta S_i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i + R(M_i)\Delta z_i\right),$$

яка називається *інтегральною сумою* від вектор-функції $\vec{F}(x,y,z)$ вздовж кривої L від точки A до точки B.

Означення. *Якщо існує границя інтегральної суми* $\lim\limits_{\lambda \to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\vec{F}(M_i), \overrightarrow{\Delta S_i}\right)$, *яка не залежить від способу розбиття дуги* AB *та від вибору на ній точок* M_i, *то ця границя називається* ***криволінійним інтегралом другого роду*** *від функції* $\vec{F}(x,y,z)$ *по дузі* AB *кривої* L.

Криволінійний інтеграл другого роду позначається:

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz \quad \text{або}$$

$$\int\limits_{L} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

Отже, за означенням

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n}\left(P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i + R(M_i)\Delta z_i\right).$$

Якщо крива $AB \subset R^2$, то криволінійний інтеграл по дузі AB кривої L від вектора-функції $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ визначається за формулою:

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n}\left(P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i\right).$$

Криволінійний інтеграл другого роду залежить від вибору направлення обходу кривої. Якщо змінити напрямам обходу, то інтеграл змінить знак:

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = -\int_{BA} Pdx + Qdy + Rdz\,.$$

Криволінійні інтеграли першого та другого роду пов'язані формулою:

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{AB} \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right)dl$$

де α, β, γ – кути між осями координат і напрямом дотичної до лінії AB, що відповідає направленню інтегрування для інтеграла лівої частини.

Обчислення криволінійного інтеграла другого роду

Обчислення криволінійного інтеграла другого роду зводиться до обчислення визначеного інтеграла:

1) якщо крива $AB \subset R^3$ задана *параметрично*

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$$

і початковій точці відповідає значення параметра $t = t_A$, а кінцевій точці $t = t_B$, то

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int_{t_A}^{t_B} \left(P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + +Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)dt\right);$$

Аналогічно, якщо крива $AB \subset R^2$ задана *параметрично*

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

і початковій точці відповідає значення параметра $t = t_A$, а кінцевій точці – $t = t_B$, то

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy =$$

$$= \int\limits_{t_A}^{t_B} \left(P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) y'(t) \right) dt; \tag{2.19}$$

Приклад. Знайти криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_{L} ydx - xdy$, де L – еліпс, заданий параметричними рівняннями $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ з додатним напрямом обходу.

Розв'язання: Згідно з формулою (2.19) маємо

$$\int\limits_{L} ydx - xdy = \int\limits_{0}^{2\pi} \left(b\sin t \cdot \left(-a\sin t \right) - a\cos t \cdot b\cos t \right) dt =$$

$$= -ab \int\limits_{0}^{2\pi} \left(\sin^2 t + \cos^2 t \right) dt = -ab \int\limits_{0}^{2\pi} dt = -2\pi ab.$$

2) якщо крива $AB \subset R^2$ задана *явно* рівнянням $y = y(x)$ і початковій точці відповідає значення параметра $x = x_A$, а кінцевій точці $-x = x_B$, то

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{x_A}^{x_B} \left(P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) y'(x) \right) dx. \tag{2.20}$$

Аналогічно, якщо крива $AB \subset R^2$ задана *явно* рівнянням $x = x(y)$ і початковій точці відповідає значення параметра $y = y_A$, а кінцевій точці – $y = y_B$, то

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{y_A}^{y_B} \left(P(x(y), y) x'(y) + Q(x(y), y) \right) dy.$$

Зауваження. Нижня межа визначених інтегралів у правій частині наведених формул для обчислення криволінійних інтегралів другого роду не обов'язково менша за верхню.

Приклад. Знайти криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_L y(x-y)dx + xdy$, де L– дуга параболи $y = 2x^2$, яка обмежена точками $A(0,0)$ та $B(1,2)$.

Розв'язання: Згідно з формулою (2.20)

$$\int\limits_L y\left(x-y\right)dx + xdy = \int\limits_0^1 \left(2x^2\left(x-2x^2\right) + x\cdot 4x\right)dx = \int\limits_0^1 \left(2x^3 - 4x^4 + 4x^2\right)dx = \frac{31}{30}.$$

Приклад. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L ydx + x^2dy$, де L – відрізок прямої від точки $A(1;1)$ до точки $B(2,3)$.

Розв'язання:

Запишемо рівняння прямої, що проходить через точки A і B:

$$AB:\ \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} \Rightarrow 2x-2 = y-1 \Rightarrow y = 2x-1.$$

Тоді $dy = 2\,dx$. Скористаємось формулою(2.20):

$$\int\limits_L y\,dx + x^2\,dy = \int\limits_1^2 \left(2x-1+2x^2\right)\,dx = \left(2\cdot\frac{x^2}{2} - x + 2\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= 4-2+\frac{16}{3} - 1 + 1 - \frac{2}{3} = 2 + \frac{14}{3} = \frac{20}{3}.$$

Приклад. Обчислити інтеграл $\int\limits_L \left(x+y\right)dx - xdy$ вздовж ламаної OBA, де $O(0;0)$, $A(4;2)$ і $B(2;0)$.

Розв'язання: Вздовж ламаної OBA, маємо:

OB : $y = 0$, $dy = 0$,

BA: $y = x-2,\ dy = dx$.

Тому, згідно з формулою (2.20), маємо:

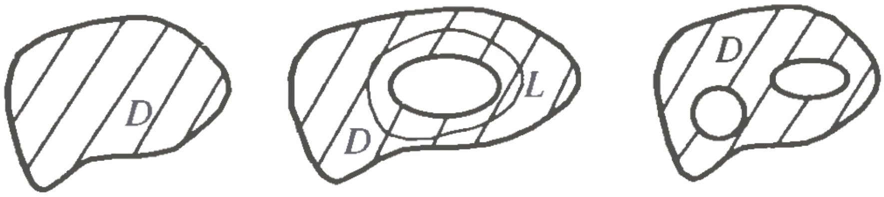
$$\int\limits_L \left(x+y\right)dx - xdy = \int\limits_{OB} \left(x+y\right)dx - xdy + \int\limits_{BA} \left(x+y\right)dx - xdy =$$

$$= \int\limits_0^2 xdx + \int\limits_2^4 \left(x+x-2-x\right)dx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right)\Bigg|_2^4 = 2+2 = 4.$$

Криволінійний інтеграл другого роду по замкненій кривій

Означення: *Область* $D \subset R^2$ *називається* ***однозв'язною****, якщо для будь-якого замкненого контуру* $L \subset D$ *обмежена цим контуром область також цілком лежить в області* D.

Однозв'язність області означає відсутність в ній «дірок». На малюнку наведено області: а) однозв'язна, б) двозв'язна, в) тризв'язна.



а) б) в)

Припустимо, що контур L однозв'язної області D називається *додатно орієнтованим* L^+ або L, якщо на ньому вибрано такий напрямок обходу, при якому область D залишається зліва від спостерігача. У протилежному випадку – *від'ємно орієнтованим* L^-.

Криволінійний інтеграл по замкненому додатно орієнтованому контуру $L \subset R^2$ позначається

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy .$$

Означення. *Область* $G \subset R^3$ *називається* ***поверхнево-однозв'язною*** *або* ***однозв'язною****, якщо на будь-який замкнений контуру можна натягнути поверхню, що цілком лежить в області* G.

Криволінійний інтеграл по замкненому додатно орієнтованому контуру $L \subset R^3$ позначається

$$\oint_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz .$$

Приклад. Обчислити криволінійний інтеграл $\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, де L – коло $x^2 + y^2 = R^2$.

Розв'язання: Запишемо рівняння кола у параметричному вигляді: $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$. Знаходимо диференціали: $dx = -R\sin t dt$, $dy = R\cos t dt$

Отримаємо інтеграл:

$$\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{R\cos t \cdot R\cos t - R\sin t \cdot (-R\sin t)}{R^2} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi .$$

Теорема: *Якщо функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ та їх частинні похідні першого порядку неперервні в замкненій однозв'язній області $D \subset R^2$, яка обмежена кусково-гладкою додатно орієнтованою кривою L, то має місце формула*

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy . \qquad (2.21)$$

Формула називається *формулою Гріна*. Формулу можна використовувати для будь-якої області, яку можна розбити на скінченне число областей вказаного в теоремі типу.

Приклад. Обчислити криволінійний інтеграл за формулою Гріна.

$$I = \oint_L (x - 2y)dx + (x + y)dy \text{, де } L \text{ – коло } x^2 + y^2 = R^2 .$$

Розв'язання: За умовою $P = x - 2y$, $Q = x + y$. Обчислимо частинні похідні: $\frac{\partial P}{\partial y} = -2$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$. За формулою Гріна маємо(2.21):

$$I = \iint_D (1 + 2)dxdy = 3\iint_D dxdy = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^R dx = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \cdot x\Big|_0^R = 3R \cdot y\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi R}{2}.$$

Незалежність криволінійного інтеграла другого роду від форми шляху інтегрування

Теорема: *Нехай функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ та їх частинні похідні $\frac{\partial P}{\partial y}$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}$ неперервні в замкненій однозв'язній області D. Тоді наступні чотири твердження рівносильні:*

1. $\oint_L Pdx + Qdy = 0$, *де L – будь-який замкнений контур, що лежить в області D;*

2. $\int\limits_{AB} Pdx+Qdy$ *не залежить від форми шляху, що з'єднує точки* A *і* B, $AB\subset D$*;*

3. $Pdx+Qdy=du(x,y)$, *тобто вираз* $Pdx+Qdy$ *є повним диференціалом деякої функції* $u(x,y)$*, визначеної в області* D*;*

4. *у всіх точках області* D

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}. \tag{2.22}$$

Наслідок: Має місце формула

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_{AB} du(x,y)=u(B)-u(A)=u(x,y)\Big|_A^B .$$

Теорема. *Нехай функції* $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ *та їх частинні похідні першого порядку неперервні в замкненій поверхнево-однов'язній області* G*. Тоді наступні чотири твердження рівносильні:*

1. $\oint\limits_{L} Pdx+Qdy+Rdz=0$, *де* L − *будь-який замкнений контур, що лежить в області* G*;*

2. $\int\limits_{AB} Pdx+Qdy+Rdz$ *не залежить від форми шляху, що з'єднує точки* A *і* B, $AB\subset G$*;*

3. $Pdx+Qdy+Rdz=du(x,y,z)$, *тобто вираз* $Pdx+Qdy+Rdz$ *є повним диференціалом деякої функції* $u(x,y)$*, визначеної в області* G*;*

4. *у всіх точках області* G *виконуються рівності*

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y},\ \frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}.$$

Наслідок. Має місце формула

$$\int\limits_{AB} Pdx+Qdy+Rdz=\int\limits_{AB} du(x,y,z)=u(B)-u(A)=u(x,y,z)\Big|_A^B .$$

Приклад. Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду

$$\int\limits_{(-1;1)}^{(2,8)} \left(3y\sqrt[3]{y}-10x\right)dx+4(x\sqrt[3]{y}+1)dy,$$

попередньо переконавшись, що він не залежить від шляху інтегрування.

Розв'язання: Дійсно, маємо $P=3y\sqrt[3]{y}-10x$, $Q=4(x\sqrt[3]{y}+1)$. Тоді

$$\frac{\partial P}{\partial y}=3\cdot\frac{4}{3}\sqrt[3]{y}=4\sqrt[3]{y},\ \frac{\partial Q}{\partial x}=4\sqrt[3]{y},\ \forall x,y\in R,$$

а отже виконується умова (2.22) і даний інтеграл не залежить від шляху інтегрування. Знаходимо функцію $u=u(x,y)$ як розв’язок системи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=3y\sqrt[3]{y}-10x, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=4(x\sqrt[3]{y}+1), \end{cases} .$$

Обчислюємо даний інтеграл. Послідовно одержуємо:

$$u=\int(3y\sqrt[3]{y}-10x)dx+\varphi(y)=3xy\sqrt[3]{y}-5x^2+\varphi(y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=3x\cdot\frac{4}{3}\sqrt[3]{y}+\varphi'(y)=4x\sqrt[3]{y}+\varphi'(y),$$

$$4x\sqrt[3]{y}+\varphi'(y)=4(x\sqrt[3]{y}+1),$$

$$\varphi'(y)=4\Rightarrow\varphi(x)=4y+C,$$

$$u=3xy\sqrt[3]{y}-5x^2+4y.$$

$$\int\limits_{(-1;1)}^{(2,8)}\left(3y\sqrt[3]{y}-10x\right)dx+4(x\sqrt[3]{y}+1)dy=u(2,8)-u(-1,1)=$$

$$=3\cdot2\cdot8\cdot2-20+32-(-3-5+4)=96+12+4=112.$$

Знаходження функції за її повним диференціалом

Нехай відомо, що вираз $Pdx+Qdy$ є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$, тобто

$$Pdx+Qdy=du(x,y).$$

Тоді виконується умова $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$. Потрібно знайти функцію $u(x,y)$.

З виразу $du=Pdx+Qdy$ випливає

$$u(x,y)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}Pdx+Qdy,$$

де точки $M_0(x_0,y_0), M(x,y)\in D$, D – область визначення функцій $P(x,y), Q(x,y)$ і криволінійний інтеграл не залежить від форми шляху інтегрування, а тільки від початкової та кінцевої точок цього шляху. Цей шлях вибираємо у вигляді ламаної, складеної з відрізків прямих, паралельних осям координат. Отже, *формула для знаходження функції за її повним диференціалом*

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy\,,$$

де M_0M – ламана, яка з'єднує точки $M_0(x_0,y_0),\,M(x,y)$ так, що відрізки ламаної паралельні осям координат.

Аналогічно знаходимо *формулу для знаходження функції за її повним диференціалом* для тривимірного випадку. Якщо $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}$, то $P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=du(x,y,z)$ і тоді

$$u(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0,z_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y,z_0)dy+\int_{z_0}^{z}R(x,y,z)dz\,,$$

де M_0M – ламана, яка з'єднує точки $M_0(x_0,y_0,z_0),\,M(x,y,z)$ так, що сторони ламаної паралельні осям координат.

Приклад. Перевірити, чи є вираз $\left(e^{2y}-5y^3e^x\right)dx+\left(2xe^{2y}-15y^2e^x\right)dy$ повним диференціалом деякої функції двох змінних, і якщо так, знайти цю функцію.

Розв'язання: Для того щоб вираз $Pdx+Qdy$ був повним диференціалом функції двох змінних, необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}\,.$$

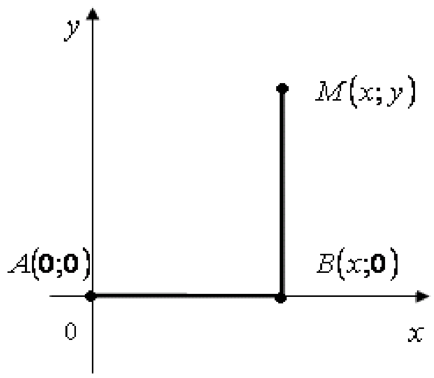


Рис.28

Маємо

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2e^{2y}-15y^2e^x\,,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=2e^{2y}-15y^2e^x\,,$$

тобто, даний вираз є повним диференціалом деякої функції $\Phi(x,y)$, яку знайдемо за формулою $\Phi(x,y)=\int_{AM}Pdx+Qdy$, де A – фіксована точка $M(x,y)$ – змінна точка. Криволінійний інтеграл від даного виразу не залежить від форми шляху інтегрування, тому шлях інтегрування

AM виберемо так, як вказано на рис. 28 (на відрізку AB маємо $y=0$ і $dy=0$, а на відрізку BM маємо $dx=0$):

$$\Phi(x;y)=\int\limits_{ABM}\left(e^{2y}-5y^3e^x\right)dx+\left(2xe^{2y}-15y^2e^x\right)dy=$$

$$=\int\limits_{AB}\left(e^{2y}-5y^3e^x\right)dx+\left(2xe^{2y}-15y^2e^x\right)dy+\int\limits_{BM}\left(e^{2y}-5y^3e^x\right)dx+\left(2xe^{2y}-15y^2e^x\right)dy=$$

$$=\int\limits_0^x dx+\int\limits_0^y\left(2xe^{2y}-15y^2e^x\right)dy=x\Big|_0^x+\left(xe^{2y}-5y^3e^x\right)\Big|_0^y=xe^{2y}-5y^3e^x\ .$$

Загальний вигляд всіх таких функцій можна записати у вигляді:

$$\Phi(x;y)=xe^{2y}-5y^3e^x\ .$$

Застосування криволінійного інтеграла другого роду

а) *площа плоскої області* D, що обмежена кривою L, обчислюється за формулами:

$$S=-\oint\limits_L ydx, \tag{2.23}$$

$$S=\oint\limits_L xdy\ , \tag{2.24}$$

$$S=\frac{1}{2}\oint\limits_L xdy-ydx\ . \tag{2.25}$$

Формули (2.23), (2.24) отримуються з формули Гріна при відповідному виборі функцій $P(x,y)$ та $Q(x,y)$, а третя отримана з перших двох шляхом додавання їх лівих частин.

Приклад. Обчислити площу еліпса $\begin{cases}x=a\cos t;\\ y=b\sin t;\end{cases}\quad t\in\left[0,2\pi\right]$.

Розв'язання: Знайдемо диференціали: $dy=b\cos tdt;\ dx=-a\sin tdt$.

За формулою (2.25) маємо:

$$S=\frac{1}{2}\oint\limits_L xdy-ydx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(a\cos tb\cos t-b\sin t\left(-a\sin t\right)\right)dt=$$

$$=\frac{ab}{2}\int\limits_0^{2\pi}dt=\frac{ab}{2}t\Bigg|_0^{2\pi}=\pi ab\,.$$

В окремому випадку $a=b$, площа круга $S=\pi a^2$.

б) *робота* A сили $\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж кривої L обчислюється за формулою:

$$A=\int_L Pdx+Qdy+Rdz\,.$$

Аналогічно, *робота* A сили $\vec{F}(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж кривої L обчислюється за формулою:

$$A=\int_L Pdx+Qdy\,. \tag{2.26}$$

Приклад. Знайти роботу сили $\vec{F}=yx\vec{i}+\left(y+x\right)\vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки по кривій $L: y=x$ із точки $O\left(0,0\right)$ до точки $B\left(1,1\right)$.

Розв'язання: За формулою (2.26): $P=xy$, $Q=x+y$. Тоді

$$A=\int_{OB} yxdx+\left(y+x\right)dy=\int_0^1\left(x^2dx+\left(x+x\right)dx\right)=$$

$$=\int_0^1\left(x^2+2x\right)dx=\frac{x^3}{3}+2\frac{x^2}{2}\bigg|_0^1=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}\,.$$

Задачі для самостійного розв'язування

Завдання 1. Обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду:

1) $\int_L \frac{dl}{x-y}$, L – відрізок прямої *AB* від точки $A(0;-2)$ до точки $B(4;0)$;

2) $\int_L \left(xy+2x\right)dl,\ L: y=2x-1,$ від точки $A(0;-1)$ до точки $B(2;3)$.

3) $\int_L \left(xyz\right)dl,$ L – чверть кола, утвореного перетином сфери $x^2+y^2+z^2=R^2$ та циліндра $x^2+y^2=\frac{R^2}{4}$, що лежить у першому октанті;

4) $\int\limits_L (x+y)dl$, де L – контур трикутника з вершинами $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(0,0)$;

5) $\int\limits_L xydl$, де L – чверть еліпса $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $0\le\varphi\le \pi/2$;

6) $\int\limits_L \frac{z^2dl}{x^2+y^2}$, де L – перший виток гвинтової лінії $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, $z=2t$;

7) $\int\limits_L xydl$, де L – контур прямокутника з вершинами $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(4,2)$, $D(0,2)$;

8) $\int\limits_L \left(x^2+y^2\right)^n dl$, де L– коло $x^2+y^2=R^2$, $x=a\cos t$, $y=b\sin t$;

9) $\int\limits_L \sqrt{2y}dl$ де L – перша арка циклоїди $x=a(t-\sin t)$, $y=a\left(1-\cos t\right)$, $\left(0\le t\le 2\pi\right)$;

10) $\int\limits_L \frac{y}{x+3z}dl$ де L – дуга лінії $x=t$, $y=\frac{t^2}{\sqrt{2}}$, $z=\frac{t^3}{3}$ від точки $O(0,0,0)$ до точки $B\left(\sqrt{2},\sqrt{2},\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$.

Завдання 2. Обчислити довжину гвинтової лінії $x=4a\cos t$, $y=4a\sin t$, $z=3at$, $0\le t\le 2\pi$.

Завдання 3. Обчислити довжину дуги гвинтової лінії $x=ae^t\cos t,$ $y=ae^t\sin t,$ $z=ae^t$ від точки $O(0,0,0)$ до точки $A(a,0,a)$.

Завдання 4. Обчислити масу матеріальної дуги $y=\ln x$ між точками з абсцисами $x_1=\sqrt{3},$ $x_2=\sqrt{8}$, щільність якої у кожній точці дорівнює квадрату абсциси цієї точки.

Завдання 5.Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду:

1) $\int\limits_{AB} ydx+\left(x+z\right)dy+\left(x-y\right)dz$, де AB – відрізок прямої, що з’єднує точки $A\left(1;-1;1\right)$, $B\left(2;3;4\right)$;

2) $\int\limits_L xydx+\left(y-x\right)dy,$ якщо $L: y=x^3$, від точки $O(0;0)$ до точки $A(1;1)$;

3) $\int\limits_L 2ydx-3xdy,$ якщо $L:\ y=5x^3-4x^2+3,$ від точки $A(0;3)$ до точки $B(1;4)$;

4) $\int\limits_L xdx+ydy+\left(x+y+1\right)dz,$ якщо L – відрізок прямої від точки $A(1;1;1)$ до точки $B(2;3;4)$;

5) $\int\limits_L ydx-xdy$, де L – верхня половина еліпса $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ і обхід здійснюється за годинниковою стрілкою;

6) $\int\limits_{OA}\left(x^2-y\right)dx-y^2dy$ від точки $O(0;0)$ до $A(1;1)$, що сполучені між собою:

а) відрізком *OA* прямої $y=x$;

б) дугою параболи $y=x^2$;

в) дугою параболи $y^2=x$;

г) ламаною *OBA*, де $B(0;1)$.

Завдання 6. Обчислити площу астроїди $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t, \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$ за допомогою криволінійного інтеграла 2-го роду.

Завдання 7. Обчислити роботу сили $\vec{F}$ при переміщенні одиничної маси вздовж кривої L від точки *A* до точки *B*:

1) $\vec{F}=y\vec{i}+\left(y-x\right)\vec{j}$, $L:\ y=a-\dfrac{x^2}{a}$, $A(-a;0)$, $B(0;a)$;

2) $\vec{F}=z\vec{i}+x\vec{j}+y\vec{k}$, $L:\ x=t, y=t^2, z=t^3$, $A(0;0;0)$, $B(1;1;1)$.

Завдання 8. Обчислити роботу сили $\vec{F}=(x-y)\vec{i}+x\vec{j}$ при переміщенні одиничної маси вздовж додатно орієнтованого квадрата:

$$L:\ x=a,\ x=-a,\ y=a,\ y=-a\ .$$

Завдання 9. Переконатися, що результат інтегрування не залежить від шляху інтегрування та обчислити інтеграли.

1) $\int\limits_{(-2;-1)}^{(3;0)} (x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy$;

2) $\int\limits_{(0;1)}^{(2;3)} (x+y)dx+\left(x-y\right)dy$;

3) $\int\limits_{(1,-1,2)}^{(2,1,3)} xdx-y^2dy+zdz$;

4) $\int\limits_{(1,2,3)}^{(3,2,1)} yzdx+xzdy+xydz.$

Завдання 10. Переконатися, що вирази є повними диференціалами деяких функцій, і знайти ці функції.

1) x^2dx-y^2dy ;

2) $4\left(x^2-y^2\right)\left(xdx-ydy\right)$;

3) $\dfrac{(x+2y)dx+ydy}{(x+y)^2}$;

4) $\left(2x\cos y-y^2\sin x\right)dx+\left(2y\cos x-x^2\sin y\right)dy$;

5) $\left(x^2-2yz\right)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2xy)dz$.

Завдання 11. У задачах обчислити криволінійні інтеграли 2-го роду:

1) за допомогою формули Гріна;

2) безпосереднім інтегруванням:

1) $\oint\limits_{L}(x+y)dx-2xdy$, де L – контур трикутника зі сторонами $x=0$, $y=0$, $x+y=a$;

2) $\oint\limits_{L}\frac{1}{y}dx-\frac{1}{y}dy$, де L – контур трикутника з вершинами $A(1,0)$, $B(2,1)$, $C(2,2)$;

3) $\oint\limits_{L}2(x^2+y^2)dx+\left(x+y\right)^2dy$, де L – контур трикутника з вершинами $A(1,1)$, $B(2,2)$, $C(1,3)$;

4) $\oint\limits_L xy^2dy - x^2ydx$, де L – коло $x^2 + y^2 = R^2$;

5) $\oint\limits_L \left(1 - x^2\right)ydx - x(1 + y^2)dy$, де L – коло $x^2 + y^2 = R^2$.

Відповіді

1.1. $\sqrt{5}\ln 2$, **1.2.** $\frac{22\sqrt{5}}{3}$, **1.3.** $\frac{R^4\sqrt{3}}{32}$, **1.4.** $\sqrt{2}+1$, **1.5.** $\frac{4ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$,

1.6. $\frac{16\sqrt{2}\pi^3}{3}$, **1.7. 24,** **1.8.** $2\pi a^{2n+1}$, **1.9.** $4\pi a\sqrt{a}$, **1.10.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. $10a\pi$. **3.** $a\sqrt{3}$. **4.** $\frac{19}{3}$.

5.1. 16,5, **5.2.** $\frac{-1}{20}$, **5.3.** $-26\frac{7}{12}$, **5.4.** 13, **5.5.** $-2\pi ab$,

5.6. а) – 0,5, **б)** $-\frac{1}{3}$, **в)** 0,5, **г)** 1.

6. $\frac{3}{8}\pi a^2$. **7.1** $\frac{11}{6}a^2$, **7.2.** $\frac{91}{60}$. **8.** $8a^2$.

9.1. 62, **9.2.** 4, **9.3.** $\frac{10}{3}$, **9.4.** 0.

10.1. $u = \frac{x^3+y^3}{3} + C$, **10.2.** $u = (x^2-y^2)^2 + C$, **10.3.** $u = \ln|x+y| - \frac{y}{x+y} + C$,

10.4. $u = x^2\cos y + y^2\cos x + C$, **10.5.** $u = \frac{1}{3}\left(x^2+y^2+z^2\right) - 2xyz + C$.

11.1. $-\frac{3a^2}{2}$, **11.2.** 2, **11.3.** $-\frac{4}{3}$, **11.4.** $\frac{\pi R^4}{2}$, **11.5.** $\frac{\pi R^4}{2}$.

2.3. Поверхневі інтеграли

Поверхневі інтеграли першого роду (по площі поверхні)

Означення поверхневого інтеграла першого роду

Поверхневі інтеграли першого роду є узагальненням подвійних інтегралів, подібно до того, як криволінійні інтеграли першого роду є узагальненням звичайних визначених інтегралів.

Означення: *Поверхня називається **гладкою**, якщо в кожній її точці існує дотична площина і при переході від точки до точки положення цієї дотичної площини змінюється неперервно. Поверхня називається **кусково-гладкою**, якщо вона складається із скінченої кількості неперервно сполучених гладких поверхонь.*

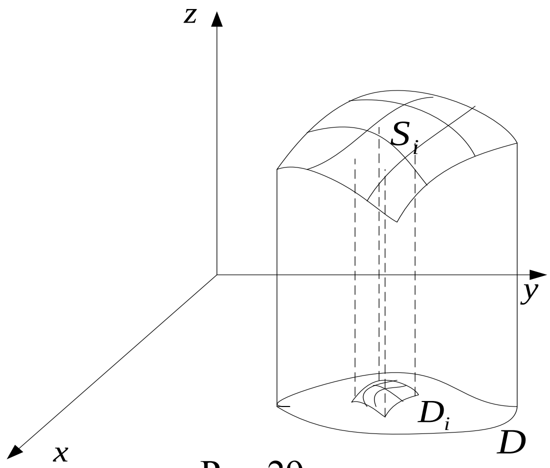


Рис.29

Нехай у просторі задана деяка (гладка чи кусково-гладка) поверхня S і на поверхні S задана неперервна обмежена функція $f(M)=f(x,y,z)$ (Рис.29). Розіб’ємо поверхню S кусково-гладкими кривими на n довільних частин S_i без спільних внутрішніх точок, кожна з яких має площу ΔS_i. В кожній частині S_i виберемо довільну точку $M_i(x_i,y_i,z_i)$ і складемо інтегральну суму для функції $f(x,y,z)$ по поверхні S:

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i,y_i,z_i\right)\Delta S_i .$$

Позначимо через λ_n максимальний з діаметрів часткових поверхонь:

$$\lambda_n = \max_{i=\overline{1,n}} diam S_i .$$

Означення: *Скінчена границя інтегральної суми* $\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i,y_i,z_i\right)\Delta S_i$ *при* $\lambda_n \to 0$, *якщо вона існує і не залежить ні від способу розбиття поверхні* S *на часткові поверхні, ні від вибору проміжних точок в них, називається*

поверхневим інтегралом першого роду *від функції* $f(x,y,z)$ *по поверхні* S *і позначається символом* $\iint\limits_S f(x,y,z)dS$. *За означенням*

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i .$$

В цьому випадку функція $f(x,y,z)$ називається ***інтегрованою по поверхні*** S, поверхня S – називається ***областю інтегрування***, символ dS називається ***диференціалом поверхні***.

Поверхневі інтеграли мають всі властивості подвійних інтегралів, оскільки у випадку коли S – плоска фігура, такий інтеграл стає звичайним подвійним інтегралом.

Обчислення поверхневого інтеграла першого роду

Обчислення поверхневого інтеграла першого роду зводиться до обчислення подвійного інтеграла по проекції поверхні S на координатну площину.

Нехай поверхня S, задана рівнянням $z = z(x,y)$ і будь-яка пряма, паралельна осі Oz, перетинає цю поверхню лише в одній точці, тобто поверхня S однозначно проектується на площину Oxy. Проекцією поверхні S на площину Oxy є область D_{xy}, тобто $pr_{Oxy}S = D_{xy}$. Функція $z = z(x,y)$ неперервна разом із своїми частинними похідними першого порядку в цій області. Тоді має місце формула:

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \iint\limits_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy. \qquad (2.27)$$

Аналогічно:

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \iint\limits_{D_{xz}} f(x,y(x,z),z)\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}dxdz, \qquad (2.28)$$

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \iint\limits_{D_{yz}} f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}dydz. \qquad (2.29)$$

Приклад. Обчислити поверхневий інтеграл першого роду $\iint\limits_S \left(x^2 - 2y^2 + 3z\right) dS$, де S – частина площини $x + y + z = 2$ в першому октанті.

Розв'язання: 1) Зобразимо поверхню S (Рис.30) та її проекцію D_{xy} (Рис.31) на площину Oxy .

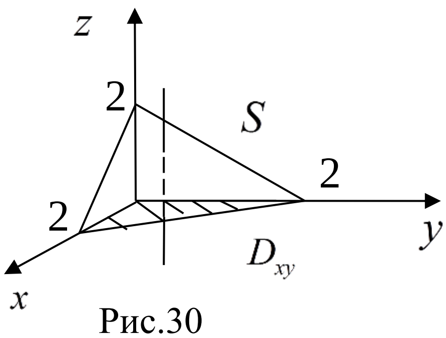


Рис.30

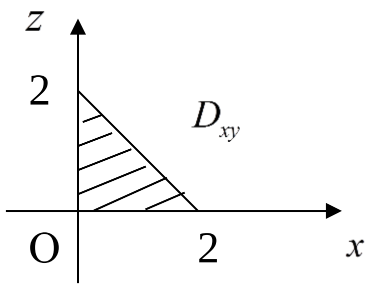


Рис.31

2) Рівняння поверхні $S : x + y + z = 2$. Тоді

$$z = 2 - x - y\,,\ \frac{\partial z}{\partial x} = -1\,,\ \frac{\partial z}{\partial y} = -1\,.$$

Диференціал поверхні $dS = \sqrt{1+1+1}dxdy = \sqrt{3}\ dxdy$.

3) Для обчислення даного поверхневого інтегралу використаємо формулу (2.27).

$$\iint\limits_S \left(x^2 - 2y^2 + 3z\right) dS = \iint\limits_{D_{xy}} \left(x^2 - 2y^2 + 3\left(2 - x - y\right)\right)\sqrt{3}dxdy =$$

$$= \sqrt{3}\iint\limits_{D_{xy}} \left(x^2 - 2y^2 + 6 - 3x - 3y\right) dxdy = \sqrt{3}\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-x} \left(x^2 - 2y^2 + 6 - 3x - 6y\right) dy =$$

$$= \sqrt{3}\int\limits_0^2 \left(x^2 y - \frac{2y^3}{3} + 6y - 3xy - 3y^2 \right)\Bigg|_0^{2-x} =$$

$$= \sqrt{3}\int\limits_0^2 \left(x^2\left(2-x\right) - \frac{2\left(2-x\right)^3}{3} + 6\left(2-x\right) - 3x\left(2-x\right) - 3\left(2-x\right)^2 \right) dx =$$

$$= \sqrt{3}\int\limits_0^2 \left(-\frac{5}{3}x^3 - 2x^2 + 8x - \frac{16}{3} \right) dx = \sqrt{3}\left(-\frac{5}{3}\cdot\frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - \frac{16}{3}x \right)\Bigg|_0^2 =$$

$$=\sqrt{3}\left(-\frac{20}{3}-\frac{16}{3}+16-\frac{32}{3}\right)=\sqrt{3}\left(-\frac{68}{3}+\frac{48}{3}\right)=-\frac{20\sqrt{3}}{3}.$$

Застосування поверхневих інтегралів першого роду

1) Обчислення площ поверхонь.

Якщо функція $f(x,y,z)\equiv 1$ на поверхні S, то площа P поверхні S

$$P=\iint_S dS$$

Якщо перейти в цій формулі до подвійного інтеграла, дістанемо відому формулу

$$P=\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy\,.$$

2) Обчислення маси, координат центра маси, моменту інерції матеріальної поверхні з відомою поверхневою густиною розподілу речовини $\rho(x,y,z)$.

Відповідні формули аналогічні таким самим формулам для матеріальної пластини:

1) маса матеріальної поверхні $m=\iint_S \rho(x,y,z)dS$;

2) координати центра маси поверхні

$$x_C=\frac{Myz}{m}=\frac{1}{m}\iint_S x\rho dS;\quad y_C=\frac{Mxz}{m}=\frac{1}{m}\iint_S y\rho dS;\quad z_C=\frac{Mxy}{m}=\frac{1}{m}\iint_S z\rho dS;$$

де Mxz, Myz, Mxy — статичні моменти поверхні S відносно площин Oxz, Oyz, Oxy відповідно;

3) моменти інерції поверхні відносно координатних осей і початку координат:

$$I_x=\iint_S\left(y^2+z^2\right)\rho dS;\quad I_y=\iint_S\left(x^2+z^2\right)\rho dS;\; I_z=\iint_S\left(x^2+y^2\right)\rho dS;$$

$$I_0=\iint_S\left(x^2+y^2+z^2\right)\rho dS\,.$$

Поверхневі інтеграли другого роду (по координатах)

Означення поверхневого інтеграла другого роду

Перш ніж визначити поняття поверхневого інтеграла другого роду, введемо поняття сторони поверхні.

Означення: *Гладка поверхня S називається* ***двосторонньою****, якщо обхід по будь-якому замкненому контуру, що лежить на поверхні S і не має спільних точок з її межею, не змінює напрям нормалі до поверхні. Гладка поверхня S називається* ***односторонньою****, якщо на поверхні існує замкнений контур, при обході по якому напрям нормалі змінюється на протилежний.*

Нехай в точках двосторонньої поверхні S задана неперервна функція $f(x,y,z)$. Виберемо на поверхні деяку сторону. Розіб'ємо поверхню S мережею довільно проведених кривих на частини $S_1, S_2, ..., S_n$.

В кожній з частин S_i виберемо довільну точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$, обчислимо значення заданої функції в цій точці. Помножимо це значення на площу проекції ΔS_i частини S_i на площину Oxy. При цьому число ΔS_i береться із знаком (+), якщо в точках S_i нормаль, що відповідає вибраній стороні поверхні, утворює з віссю Oz гострий кут і із знаком (–), якщо вказана нормаль утворює з віссю Oz тупий кут. Складемо суму всіх таких добутків:

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i, y_i, z_i\right) \Delta S_i ,$$

яка називається *інтегральною сумою*. Позначимо через $\lambda_n = \max\limits_{i=\overline{1,n}} diam S_i$ максимальний діаметр поверхонь S_i, $i = \overline{1,n}$.

Означення. ***Інтегралом другого роду*** *від функції $f(x,y,z)$ по поверхні S називається границя інтегральної суми, коли $\lambda_n \to 0$,*

$$\iint_S f(x,y,z)dxdy = \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i .$$

Аналогічним чином визначаються інтеграли: $\iint\limits_S f(x,y,z)dxdz,\ \iint\limits_S f(x,y,z)dydz$, причому для вибору знака проекції елемента використовуємо кут між нормаллю, відповідної сторони і віссю Ox або Oy.

Найбільш загальним видом інтеграла другого роду є інтеграл:

$$\iint\limits_G P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy,$$

де P,Q,R – функції від x,y,z неперервні в точках двосторонньої поверхні S.

Інтеграл другого роду має ті самі властивості, що і інтеграл першого роду за винятком одного: при зміні сторони поверхні інтеграл другого роду змінює знак.

Інтеграли першого і другого роду пов'язані формулами:

$$\iint\limits_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy = \\ = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS, \tag{2.30}$$

де $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – направляючі косинуси нормалі, направленої в ту сторону поверхні, по якій береться інтеграл другого роду.

Обчислення поверхневих інтегралів другого роду

Обчислення поверхневого інтеграла другого роду зводиться до обчислення поверхневого інтеграла першого роду, а отже до обчислення подвійного інтеграла.

1. Метод проектування на всі три координатні площини.

Нехай поверхня S задана рівнянням $F(x,y,z)=0$ і однозначно проектується на всі три координатні площини. Тоді рівняння $F(x,y,z)=0$ поверхні S однозначно розв'язується відносно кожного з аргументів x,y,z так, що

$$x = x(y,z),\ y = y(x,z),\ z = z(x,y) \tag{2.31}$$

Позначимо $pr_{Oxy}=D_{xy}$, $pr_{Oxz}=D_{xz}$, $pr_{Oyz}=D_{yz}$. Підставимо формули (2.31) в формулу з означення поверхневого інтеграла другого роду. Отримаємо наступну ***формулу для обчислення поверхневого інтеграла другого роду***:

$$\iint\limits_{G} P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dxdz+R(x,y,z)dxdy=$$
$$=\pm\iint\limits_{Dyz} P\big(x(y,z),y,z\big)dydz\pm\iint\limits_{Dxz} Q\big(x,y(x,z),z\big)dxdz\pm\iint\limits_{Dxy} R\big(x,y,z(x,y)\big)dxdy. \qquad (2.32)$$

Знак в кожному з доданків правої частини формули (2.32) вибирається таким, який мають $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ на орієнтованій поверхні S.

2. Метод проектування на одну з координатних площин.

Нехай незамкнена поверхня S однозначно проектується на площину Oxy в область D_{xy}. Тоді поверхню S можна задати рівнянням $z=z(x,y)$. В цьому випадку поверхневий інтеграл другого роду перетворюється на подвійний інтеграл по області D_{xy}:

$$\iint\limits_{S} R\big(x,y,z\big)dxdy=\iint\limits_{Dxy} R\big(x,y,z(x,y)\big)dxdy, \qquad (2.33)$$

де в правій частині стоїть подвійний інтеграл по області D_{xy}. Якщо вибрати нижню сторону поверхні S (нормаль до вибраної сторони поверхні утворює з віссю Oz тупий кут), то одержаний подвійний інтеграл беруть зі знаком «мінус», тобто

$$\iint\limits_{S} R\big(x,y,z\big)dxdy=-\iint\limits_{Dxy} R\big(x,y,z(x,y)\big)dxdy.$$

Аналогічні формули можна отримати, якщо проектувати поверхню S на площини Oyz, зі знаком «+», коли нормаль до поверхні S, утворює з віссю Ox гострий кут

$$\iint\limits_{S} P(x,y,z)dydz=\iint\limits_{Dyz} P(x(y,z),y,z)dydz, \qquad (2.34)$$

та знаком «–», коли кут тупий

$$\iint\limits_{S} P(x,y,z)dydz=-\iint\limits_{Dyz} P(x(y,z),y,z)dydz,$$

D_{yz} – проекція поверхні S на площину Oyz.

При проектуванні поверхні S на площину Oxz, відповідно

$$\iint_S Q(x,y,z)dxdz = \iint_{D_{xz}} Q(x,y(x,z),z)dxdz$$

$$\iint_S Q(x,y,z)dxdz = -\iint_{Dxz} Q(x,y(x,z),z)dxdz.$$

Якщо поверхня неоднозначно проектується на будь-яку координатну площину, то цю поверхню розбивають на частини, які проектуються взаємно однозначно, а інтеграл обчислюють як суму інтегралів по одержаних частинах поверхні S.

Зауваження. У випадку, коли потрібно обчислити інтеграл другого роду

$$\iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy$$

по поверхні S, яка задана рівнянням $z = z(x,y)$, можна скористатися формулою:

$$\iint_{S_\pm} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy =$$

$$= \pm\iint_{D_{xy}} \left(P(x,y,z(x,y))\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right) + Q(x,y,z(x,y))\left(-\frac{\partial z}{\partial y}\right) + R(x,y,z(x,y)) \right) dxdy.$$

Якщо сторона поверхні верхня, тобто нормаль до цієї поверхні утворює з віссю Oz гострий кут, то вибираємо знак «+», якщо нижня то «–».

Приклад. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $\iint_S (y^2+z^2)dxdy$, де S – верхня сторона поверхні $z=\sqrt{a^2-x^2}$, відсіченої площинами $y=0, y=b$.

Розв'язання:

Нормаль в точці M відповідна вказаній стороні поверхні утворює з віссю Oz гострий кут (точніше $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$) (Рис.32), тому в формулі потрібно взяти знак «+». Проекцією S_1

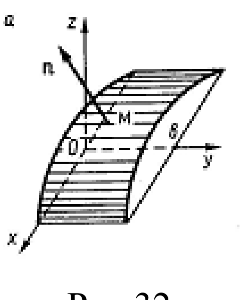


Рис.32

даної поверхні на площину Oxy є прямокутник визначений нерівностями $-a \le x \le a,\ 0 \le y \le b$.

За формулою (2.33) знаходимо

$$\iint_S (y^2+z^2)dxdy = \iint_{S_1} (y^2 + (\sqrt{a^2-x^2})^2)dxdy = \int_{-a}^{a} dx \int_0^b (y^2+a^2-x^2)dy =$$

$$\int_{-a}^{a} (\frac{y^3}{3} + a^2 y - x^2 y)\Big|_0^b dx = \int_{-a}^{a} (\frac{b^3}{3} + a^2 b - x^2 b)dx = \left(\frac{b^3}{3}x + a^2 bx - \frac{x^3}{3}b\right)\Big|_{-a}^{a} = \frac{2}{3}ab(b^2+2a^2)$$

Приклад. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду

$$I = \iint_S xdxdy + xdydz + zdxdy,$$

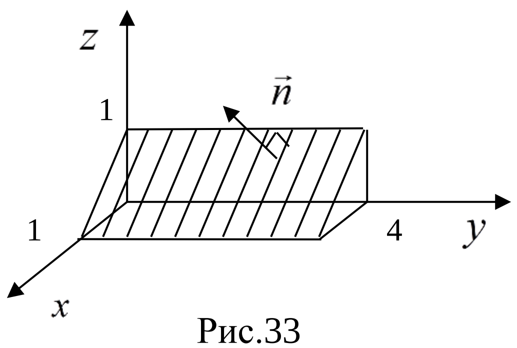


Рис.33

де S – верхня сторона частини площини $x+z-1=0$, яка лежить в першому октанті і відтинається площинами $y=0$ і $y=4$.

Розв'язання:

1) Зобразимо поверхню S (Рис.33).

Оскільки розглядається її верхня сторона, то вектор нормалі $\vec{n}$ утворює гострий кут з віссю Oz.

2) Будемо використовувати метод проектування на всі три координатні площини за формулою(2.32). Спроектуємо S на координатні площини:

$pr_{Oyz} = D_{yz}$ – прямокутник $0 \le y \le 4,\ 0 \le z \le 1$;

$pr_{Oxy} = D_{xy}$ – прямокутник $0 \le y \le 4,\ 0 \le x \le 1$;

$pr_{Oxz} = D_{xz}$ – порожня множина, тому що площина $x+z-1=0$ перпендикулярна площині Oxz.

3) Розв'яжемо рівняння поверхні відносно кожного з аргументів x, y, z:

$$x(y,z) = 1-z,\ y(x,z) = 0,\ z(x,y) = 1-x.$$

4) Отже, за формулою (2.32)

$$I = \iint_S xdxdy + xdydz + zdxdy =$$

$$=\iint\limits_{Dyz} x(y,z)\,dydz+\iint\limits_{Dxz} y(x,z)\,dxdz+\iint\limits_{Dxy} z(x,y)\,dxdy=$$

$$=\iint\limits_{Dyz}(1-z)\,dydz+\iint\limits_{Dxz}0dxdz+\iint\limits_{Dxy}(1-x)\,dxdy=$$

$$=\int_0^4 dy\int_0^1(1-z)\,dz+\int_0^4 dy\int_0^1(1-x)\,dx=$$

$$=2\int_0^4 dy\int_0^1(1-x)\,dx=2\int_0^4\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 dy=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^4 dy=4.$$

Оскільки нормальний вектор $\vec{n}$ утворює із осями Oz і Ox гострі кути, то у формулі (2.32) в кожному доданку вибрали знак «+».

Застосування поверхневого інтеграла другого роду

Якщо вектор-функція $\vec{F}(x,y,z)=\vec{v}(x,y,z)$ є швидкість руху рідини, яка протікає через поверхню S в сторону, визначену напрямом вектора нормалі $\vec{n}$, то кількість рідини Π, що протікає через поверхню S в одиницю часу, обчислюється за формулою:

$$\Pi=\iint\limits_S(\vec{v},\vec{n})\,dS\,.$$

Поверхневі інтеграли другого роду по замкненій поверхні. Формула Стокса. Формула Остроградського-Гаусса.

Формула Стокса

Означення. *Поверхня S називається xyz* ***-проектованою,*** *якщо вона однозначно проектується на кожну координатну площину прямокутної системи координат $Oxyz$. Така поверхня може бути задана за допомогою будь-якого з рівнянь:*

$$z=z(x,y),\;\;(x,y)\in D_{xy}\,,$$

$$x=x(y,z),\;\;(y,z)\in D_{yz}\,,$$

$$y=y(x,z),\;\;(x,z)\in D_{xz}\,.$$

Теорема. *Нехай гладка* xyz*-проектована орієнтована поверхня* S *обмежена кусково-гладким контуром* L *і розташована всередині області* G*, в якій функції* $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ *мають неперервні перші частинні похідні. Тоді справедлива формула, яка називається* ***формулою Стокса***

$$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdz+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)dydz \quad (2.35)$$

де контур L *обходиться в додатному напрямі.*

Формула Стокса виражає криволінійний інтеграл другого роду по замкненому контуру L через поверхневий інтеграл другого роду по поверхні S, обмеженій контуром L.

Згідно формулі (2.30) формулу Стокса (2.35) можна переписати у вигляді:

$$\oint_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=$$
$$=\iint_S\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]dS \quad (2.36)$$

де $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ – направляючи косинуси нормалі до поверхні S, причому напрям нормалі визначається так, щоб зі сторони нормалі обхід контуру L здійснювати проти руху годинникової стрілки.

Формула *Стокса* може бути записана наступним чином:

$$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint_S\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}dS.$$

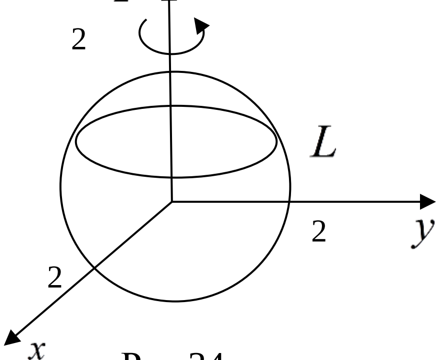


Рис.34

Приклад. Обчислити за формулою Стокса криволінійний інтеграл

$$I=\oint_L ydx+z^2dy+x^2dz,$$

де контур L – коло, по якому перетинаються сфера $x^2+y^2+z^2=4$ і площина $z=\sqrt{3}$, причому напрям обходу контуру L обирається проти годинникової стрілки, якщо дивитися з точки $(0,0,2)$ (Рис.34).

Розв'язання:

Маємо $P(x,y,z)=y$, $Q(x,y,z)=z^2$, $R(x,y,z)=x^2$, тоді

$$\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=-2z, \quad \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=-2x, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}=-1.$$

За орієнтовану поверхню S, яку обмежує коло L, візьмемо верхню сторону частини сфери $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ при $\sqrt{3}\le z\le 2$. Тоді за формулою Стокса:

$$I=\oint_L ydx+z^2dy+x^2dz=-\iint_S 2zdydz+2xdxdz+dxdy.$$

Будемо використовувати для обчислення поверхневого інтеграла другого роду в правій частині рівності метод проектування на всі три координатні площини за формулою (2.32). Нехай $\vec{n}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ – одиничний вектор нормалі верхньої сторони поверхні S.

Частина сфери $x^2+y^2+z^2=4$ при $\sqrt{3}\le z\le 2$ проектується на координатні площини Oyz, Oxz, Oxy відповідно в області:

$$D_{yz}=\left\{(y,z):-\sqrt{4-z^2}\le y\le\sqrt{4-z^2};-\sqrt{3}\le z\le\sqrt{3}\right\},$$

$$D_{zx}=\left\{(x,z):-\sqrt{4-z^2}\le x\le\sqrt{4-z^2};-\sqrt{3}\le z\le\sqrt{3}\right\},$$

$$D_{xy}=\left\{(x,y):x^2+y^2\le 1\right\}.$$

Оскільки на область D_{yz} проектуються дві частини поверхні S: $x=\sqrt{4-y^2-z^2}$, для якої $\cos\alpha\ge 0$, і $x=-\sqrt{4-y^2-z^2}$, для якої $\cos\alpha\le 0$, то для поверхневого інтеграла другого роду $I_1=-\iint_S 2zdydz$ одержимо:

$$I_1=-\left(\iint_{D_{yz}} 2zdydz-\iint_{D_{yz}} 2zdydz\right)=0.$$

$$I_2=-\iint_S 2xdzdx=-\left(\iint_{D_{xz}} 2xdxdz-\iint_{D_{xz}} 2xdxdz\right)=0.$$

Оскільки $\cos\gamma > 0$, то

$$I_3 = -\iint\limits_S dxdy = -\iint\limits_{D_{xy}} dxdy = -S\left(D_{xy}\right) = -\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho d\rho = -2\pi \left.\frac{\rho^2}{2}\right|_0^1 = -\pi.$$

Отже, $I = I_1 + I_2 + I_3 = -\pi$.

Формула Остроградського-Гаусса

Нехай замкнена тривимірна область G обмежена замкненою поверхнею S_1, рівняння якої $z_1 = z_1(x, y)$, зверху – поверхнею S_2: $z_2 = z_2(x, y)$, а з боків – циліндричною поверхнею S_3 з твірними, паралельними Oz (Рис.35).

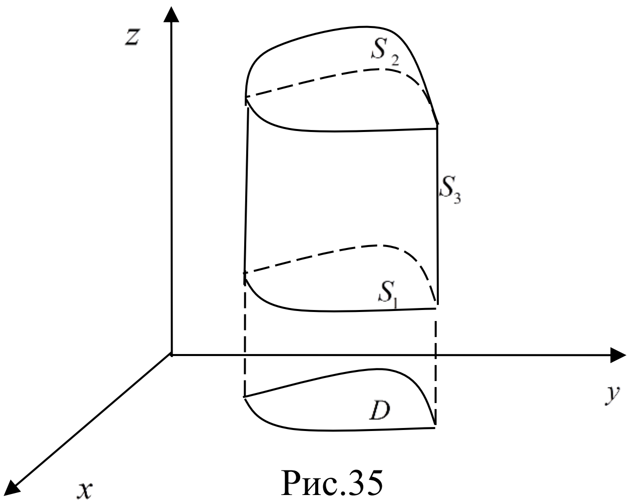


Рис.35

Теорема. *Нехай функції* $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ *і їх частинні похідні* $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ *неперервні в замкненій області* G*, обмеженій кусково-гладкою поверхнею* S. *Тоді справедлива формула* ***Остроградського-Гаусса:***

$$\iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy, \qquad (2.37)$$

де поверхневий інтеграл береться по зовнішній стороні поверхні.

Формула Остроградського-Гаусса (2.37) встановлює зв’язок між поверхневим інтегралом по замкненій поверхні і потрійним інтегралом по просторовій області, обмеженій цією поверхнею. Формула Остроградського-Гаусса є просторовим аналогом формули Гріна.

Наслідок. *Якщо функції* P, Q, R *такі, що* $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1$*, то інтеграл в лівій частині* (2.37) *дорівнює об’єму області* G*, тобто* $\iiint\limits_G dxdydz = V(G)$*, і з формули* (2.37) *випливає формула для обчислення об’єму області* G *за допомогою інтеграла по її поверхні:*

$$V(G)=\iint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy.$$

Приклад. Обчислити поверхневий інтеграл

$$I=\iint_S x^2dydz+3ydxdz-2zxdydx,$$

де S – зовнішня сторона піраміди, обмеженої площинами $x=0,\ y=0,\ z=0$, $x+y+z=1$.

Розв'язання: Оскільки поверхня S замкнена, то для обчислення інтеграла I використаємо формулу Остроградського-Гаусса (2.37).

Маємо

$$P=x^2, Q=3y, R=-2xz,$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}=2x, \frac{\partial Q}{\partial y}=3, \frac{\partial R}{\partial z}=-2x.$$

Згідно з формулою (2.37), маємо

$$I=\iiint_G\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=\iiint_G(2x+3-2x)dxdydz=$$

$$=3\iiint_G dxdydz=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}dz=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(1-x-y\right)dy=$$

$$=\int_0^1 dx\left(y-xy-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1-x}=\int_0^1\left(1-x-x\left(1-x\right)-\frac{\left(1-x\right)^2}{2}\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left(1-x-x\left(1-x\right)-\frac{\left(1-x\right)^2}{2}\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{2}-x+\frac{x^2}{2}\right)dx=\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{1}{6}.$$

Задачі для самостійного розв'язування

Завдання 1. Обчисліть поверхневі інтеграли першого роду:

1.1) $\iint_S(xy-x+4z)dS$, де S – частина площини $x+y+z=2$, розташована в першому октанті;

1.2) $\iint\limits_S x^2 y dS$, де S – бічна поверхня конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, що відтинається площиною $z=2$;

1.3) $\iint\limits_S z dS$, де S – частина поверхні $3z = x^2 + y^2$, розміщена між площинами $z=0$, $z=3$;

1.4) $\iint\limits_S (x+2y+3z) dS$, де S – частина площини $2x+4y+3z=12$, розміщена в першому октанті;

1.5) $\iint\limits_S x^2 dS$, де S – частина поверхні $z-1=-x^2-y^2$, розміщена над площиною Oxy;

1.6) $\iint\limits_S y^2 dS$, де S – півсфера $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$;

1.7) $\iint\limits_S z dS$, де S – бічна поверхня конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, що відтинається площиною $z=1$;

1.8) $\iint\limits_S \left(x^2+y^2\right) dS$, де S – півсфера $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$;

1.9) $\iint\limits_S (x=5y+2z) dS$, де S – частина площини $x+y+z=3$, розміщена в першому октанті;

1.10) $\iint\limits_S xy dS$, де S – частина поверхні $z-9=-x^2-y^2$, розміщена над площиною Oxy.

Завдання 2. Обчисліть поверхневі інтеграли другого роду:

2.1) $\iint\limits_S (x^2+y^2) dxdy$, де S – зовнішня сторона частини параболоїда $z=1-x^2-y^2$, яка розміщена над площиною Oxy;

2.2) $\iint\limits_S z dxdy$, де S – зовнішня сторона сфери $x^2+y^2+z^2=1$;

2.3) $\iint\limits_S (y-z) dydz$, де S – зовнішня сторона конічної поверхні $z^2=x^2+y^2$ $(0 \le z \le 2)$;

2.4) $\iint_S (xy-1)dxdz$, де S – зовнішня сторона тетраедра, обмеженого площинами $3x-y+z=3$, $x=0$, $y=0$, $z=0$;

2.5) $\iint_S xyzdxdy$, де S – зовнішня сторона параболоїда $z=x^2+y^2$, що відтинається площиною $z=1$;

2.6) $\iint_S xdydz+ydxdz+zdxdy$, де S – зовнішня сторона сфери $x^2+y^2+z^2=9$;

2.7) $\iint_S (x^2+y^2)dxdy$, де S – зовнішня сторона конічної поверхні $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(0\le z\le 2)$;

2.8) $\iint_S 2dxdy+ydxdz-x^2zdydz$, де S – зовнішня сторона частини еліпсоїда $4x^2+y^2+4z^2=4$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$;

2.9) $\iint_S ydydz+xdxdz+zdxdy$, де S – зовнішня сторона трикутника, утвореного при перетині площини $x-y-z=1$ з координатними площинами;

2.10) $\iint_S xzdxdy+xydydz+yzdxdz$, де S – зовнішня сторона трикутника, вирізаного із площини $x+y+z=1$ координатними площинами.

Завдання 3. Використовуючи формулу Остроградського-Гаусса, обчисліть поверхневі інтеграли:

3.1) $\iint_S x^2dydz+y^2dxdz+z^2dxdy$, де S – зовнішня сторона піраміди, обмеженої площинами $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$;

3.2) $\iint_S x^2dydz+3ydxdz-2xzdxdy$, де S – зовнішня сторона піраміди, обмеженої площинами $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z-1=0$;

3.3) $\iint_S x^2dydz+xdxdz+xzdxdy$, де S – зовнішня сторона поверхні $y=x^2+z^2$, $x=0$, $y=1$, $z=0$, $(x\ge 0)$;

3.4) $\iint_S 2xdydz-ydxdz+zdxdy$, де S – зовнішня сторона поверхні $9-z=x^2+y^2$, $0\le z\le 9$;

3.5) $\iint\limits_S yzdydz - xdxdz - ydxdy$, де S – зовнішня сторона конуса $y^2 = x^2 + z^2$, $y = 0$, $y = 1$.

Завдання 4. Обчисліть користуючись формулою Стокса, криволінійний інтеграл по замкненому контуру L (напрям на L відповідає додатному напряму його проекції на площину Oxy):

4.1) $\oint\limits_L zdx - ydz$, $L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x + z = 5. \end{cases}$

4.2) $\oint\limits_L xydx + yzdy + zxdz$, $L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$

4.3) $\oint\limits_L (z^2 - x^2)dx - (x^2 - y^2)dy + (y^2 + z^2)dz$, $L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x^2 + y^2 = z^2, \quad z \geq 0. \end{cases}$

4.4) $\oint\limits_L (x - 2z)dx + (x + 3y + z)dy + (5x + y)dz$, L – контур трикутника ABC, де $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$.

4.5) $\oint\limits_L (2x + y)dx - 2ydy$, L – контур трикутника ABC, де $A(0,-1)$, $B(0,2)$, $C(2,0)$.

Відповіді.

1.1) $\frac{14\sqrt{3}}{3}$; **1.2)** 0; **1.3)** $\frac{27}{8}\pi\left(\frac{10\sqrt{5}}{3} + \frac{2}{15}\right)$; **1.4)** $24\sqrt{29}$; **1.5)** $\frac{\pi}{16}\left(\frac{10\sqrt{5}}{3} + \frac{2}{15}\right)$; **1.6)** 54π; **1.7)** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; **1.8)** $\frac{64\pi}{3}$; **1.9)** 36; **1.10)** 0.

2.1) $\frac{\pi}{2}$; **2.2)** $\frac{4}{3}\pi$; **2.3)** $-\frac{16}{3}$; **2.4)** $\frac{3}{8}$; **2.5) 0;** **2.6)** 108π;

2.7) 8π; **2.8)** $\frac{13\pi}{12} + \frac{4}{5}$; **2.9)** $-\frac{1}{2}$; **2.10)** $\frac{1}{8}$. **3.1)** $\frac{1}{4}$; **3.2)** $\frac{1}{2}$; **3.3)** $\frac{2}{5}$;

3.4) $\frac{8}{\pi}$; **3.5)**0. **4.1)** -2π; **4.2)** $-\pi$; **4.3)**0; **4.4)** -3; **4.5)**3.

3. ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ДОМАШНІХ ЗАВДАНЬ.

3.1 Варіанти індивідуальної розрахунково-графічної роботи з теми «Невизначений інтеграл»

Варіант 1

1. Обчислити невизначені інтеграли:

а) $\int\left(\sin 2x+\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)dx$, б) $\int\frac{dx}{x^2-3x+2}$, в) $\int\frac{(x+1)dx}{x^2+2x+2}$.

2. Обчислити методом заміни: $\int\frac{dx}{(\arcsin x)^3\sqrt{1-x^2}}$.

3. Обчислити методом інтегрування частинами: $\int x^3e^{2x}dx$.

Варіант 2

1. Обчислити невизначені інтеграли:

а) $\int\left(\frac{1}{(1+x)^3}+5+e^{3x+1}\right)dx$, б) $\int\frac{xdx}{x^2-3x+2}$, в) $\int\frac{dx}{x^2+2x+2}$.

2. Обчислити методом заміни: $\int\frac{\sin 2xdx}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$.

3. Обчислити методом інтегрування частинами: $\int x^2\cos xdx$.

Варіант 3

1. Обчислити невизначені інтеграли:

а) $\int\left(\frac{1}{\cos^2(5x+1)}+\frac{1}{x}+2^{5x+1}\right)dx$, б) $\int\frac{dx}{x^2+x-2}$, в) $\int\frac{(x+1)dx}{x^2+2x+5}$.

2. Обчислити методом заміни: $\int\frac{\sin^3 xdx}{\sqrt[4]{\cos x}}$.

3. Обчислити методом інтегрування частинами: $\int x^3\ln xdx$.

Варіант 4

1. Обчислити невизначені інтеграли:

а) $\int\left(\frac{1}{5x+1}+\frac{1}{3x}+\cos 5x\right)dx$, б) $\int\frac{xdx}{x^2+x-2}$, в) $\int\frac{dx}{x^2+2x+5}$.

2. Обчислити методом заміни: $\int \frac{\sin^3 x dx}{1+\cos^2 x}$.

3. Обчислити методом інтегрування частинами: $\int \arcsin x dx$.

Варіант 5

1. Обчислити невизначені інтеграли:

а) $\int \left(\frac{1}{(5-7x)^3} + \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} \right) dx$, б) $\int \frac{dx}{x^2-x-2}$, в) $\int \frac{(x+1)dx}{x^2+2x+10}$.

2. Обчислити методом заміни: $\int \frac{\sin x dx}{2\sin^2 x + 3\cos^2 x}$.

3. Обчислити методом інтегрування частинами: $\int \ln(x+1)dx$.

Варіант 6

1. Обчислити невизначені інтеграли:

а) $\int \left(\frac{1}{4x-1} - \frac{4}{x^2+16} \right) dx$, б) $\int \frac{xdx}{x^2-x-2}$, в) $\int \frac{dx}{x^2+2x+10}$.

2. Обчислити методом заміни: $\int e^{\sin x} \sin 2x dx$.

3. Обчислити методом інтегрування частинами: $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$.

Варіант 7

1. Обчислити невизначені інтеграли:

а) $\int \left(\frac{1}{\sin^2(x-5)} + \frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}{x} \right) dx$, б) $\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$, в) $\int \frac{(x+1)dx}{x^2+2x+17}$.

2. Обчислити методом заміни: $\int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x}$.

3. Обчислити методом інтегрування частинами: $\int x^3 \sin x \cos x dx$.

Варіант 8

1. Обчислити невизначені інтеграли:

а) $\int \left(5 + \frac{10}{x} + 4^{2x+1} \right) dx$, б) $\int \frac{xdx}{x^2-5x+6}$, в) $\int \frac{dx}{x^2+2x+17}$.

2. Обчислити методом заміни: $\int \frac{x - arctgx}{1+x^2}dx$.

3. Обчислити методом інтегрування частинами: $\int x^4 e^{4x} dx$.

Варіант 9

1. Обчислити невизначені інтеграли:

а) $\int \left(\sin(2-3x) + \frac{1}{(x+3)^4} \right) dx$, б) $\int \frac{dx}{x^2 + x - 6}$, в) $\int \frac{(x+1)dx}{x^2 + 2x + 26}$.

2. Обчислити методом заміни: $\int \frac{\cos x \sin 2x dx}{3\cos^2 x + 2}$.

3. Обчислити методом інтегрування частинами: $\int x^2 \cos x dx$.

Варіант 10

1. Обчислити невизначені інтеграли:

а) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} + e^{x+1} \right) dx$, б) $\int \frac{xdx}{x^2 + x - 6}$, в) $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 26}$.

2. Обчислити методом заміни: $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx$.

3. Обчислити методом інтегрування частинами: $\int x^2 arctgx dx$.

Варіант 11

1. Обчислити невизначені інтеграли:

а) $\int \left(\frac{5}{x} + 4 + \frac{2}{\cos^2 3x} \right) dx$, б) $\int \frac{dx}{x^2 - x - 6}$, в) $\int \frac{(x-1)dx}{x^2 - 2x + 2}$.

2. Обчислити методом заміни: $\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$.

3. Обчислити методом інтегрування частинами: $\int x^3 e^{x^2} dx$.

Варіант 12

1. Обчислити невизначені інтеграли:

а) $\int \left((x+7)^{12} + \cos(16x) \right) dx$, б) $\int \frac{xdx}{x^2 - x - 6}$, в) $\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 2}$.

2. Обчислити методом заміни: $\int \frac{1}{4\sin x + 3\cos x + 5} dx$.

3. Обчислити методом інтегрування частинами: $\int \sqrt{x} \ln x \, dx$.

Варіант 13

1. Обчислити невизначені інтеграли:

а) $\int \left(x^2 + x + 5 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$, б) $\int \frac{dx}{x^2 - 7x + 12}$, в) $\int \frac{(x-1)dx}{x^2 - 2x + 5}$.

2. Обчислити методом заміни: $\int \sqrt[3]{arctgx} \frac{dx}{1+x^2}$.

3. Обчислити методом інтегрування частинами: $\int x^2 \ln x dx$.

Варіант 14

1. Обчислити невизначені інтеграли:

а) $\int \left(\frac{1}{\cos^2 2x} + x + x^2 \right) dx$, б) $\int \frac{xdx}{x^2 - 7x + 12}$, в) $\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 5}$.

2. Обчислити методом заміни: $\int \frac{x - \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

3. Обчислити методом інтегрування частинами: $\int xarctgxdx$.

Варіант 15

1. Обчислити невизначені інтеграли:

а) $\int \left(\frac{x + \sqrt{x}}{x^{2/3}} + 1 \right) dx$, б) $\int \frac{dx}{x^2 + x - 12}$, в) $\int \frac{(x-1)dx}{x^2 - 2x + 10}$.

2. Обчислити методом заміни: $\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}$.

3. Обчислити методом інтегрування частинами: $\int x\ln x dx$.

Варіант 16

1. Обчислити невизначені інтеграли:

а) $\int \left((2x+1)^3 + x^{-1} + \frac{5}{\sqrt{x}} \right) dx$, б) $\int \frac{xdx}{x^2 + x - 12}$, в) $\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 10}$.

2. Обчислити методом заміни: $\int \frac{(\ln x - 1)dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

3. Обчислити методом інтегрування частинами: $\int x^2 5^x dx$.

Варіант 17

1. Обчислити невизначені інтеграли:

а) $\int \left(5^x + \cos(3x+4) + 8\right)dx$, б) $\int \frac{dx}{x^2 - x - 12}$, в) $\int \frac{(x-1)dx}{x^2 - 2x + 17}$.

2. Обчислити методом заміни: $\int \cos^3 x \sin^4 x\, dx$.

3. Обчислити методом інтегрування частинами: $\int arctgx\, dx$.

Варіант 18

1. Обчислити невизначені інтеграли:

а) $\int \left(10x^{-1} + \frac{2}{\sin^2 x} + e^{4-5x}\right)dx$, б) $\int \frac{xdx}{x^2 - x - 12}$, в) $\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 17}$.

2. Обчислити методом заміни: $\int x \sin x^2 (\cos x^2)^2 dx$.

3. Обчислити методом інтегрування частинами: $\int x^2 e^{-x} dx$.

Варіант 19

1. Обчислити невизначені інтеграли:

а) $\int \left(\frac{1}{\cos^2(1-x)} + \cos(3x+1) + 1\right)dx$, б) $\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 3}$, в) $\int \frac{(x-1)dx}{x^2 - 2x + 26}$.

2. Обчислити методом заміни: $\int \frac{x}{\sqrt{25 - x^2}} dx$.

3. Обчислити методом інтегрування частинами: $\int \ln^2 x dx$.

Варіант 20

1. Обчислити невизначені інтеграли:

а) $\int \left(\frac{x^2 + e^{3x} + 8}{2}\right)dx$, б) $\int \frac{xdx}{x^2 - 4x + 3}$, в) $\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 26}$.

2. Обчислити методом заміни: $\int \frac{xdx}{x^4 + 4}$.

3. Обчислити методом інтегрування частинами: $\int x^3 e^{-2x} dx$.

Варіант 21

1. Обчислити невизначені інтеграли:

а) $\int \left(x + arctg\frac{\pi}{10} + \sin(8x-1) \right) dx$, б) $\int \frac{dx}{x^2+2x-3}$, в) $\int \frac{(x+2)dx}{x^2+4x+5}$.

2. Обчислити методом заміни: $\int \sin^3 x \cos^4 x dx$.

3. Обчислити методом інтегрування частинами: $\int x^3 5^{x^2} dx$.

Варіант 22

1. Обчислити невизначені інтеграли:

а) $\int \left(\frac{1}{x} + e^{5x+1} + \sqrt{x^5} \right) dx$, б) $\int \frac{xdx}{x^2+2x-3}$, в) $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

2. Обчислити методом заміни: $\int e^{\cos x} \sin 2x dx$.

3. Обчислити методом інтегрування частинами: $\int \ln(x^2+1) dx$.

Варіант 23

1. Обчислити невизначені інтеграли:

а) $\int \left(x^{-1} + e^{4-7x} + \cos 2x \right) dx$, б) $\int \frac{dx}{x^2+4x+3}$, в) $\int \frac{(x+2)dx}{x^2+4x+8}$.

2. Обчислити методом заміни: $\int \frac{arctg^2 x\, dx}{1+x^2}$.

3. Обчислити методом інтегрування частинами: $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$.

Варіант 24

1. Обчислити невизначені інтеграли:

а) $\int \left(\frac{1}{\cos^2(4-x)} + \frac{1}{x^3} + 4 \right) dx$, б) $\int \frac{xdx}{x^2+4x+3}$, в) $\int \frac{dx}{x^2+4x+8}$.

2. Обчислити методом заміни: $\int \frac{\cos^3 x\, dx}{1+\sin^2 x}$.

3. Обчислити методом інтегрування частинами: $\int \frac{\lg x}{x^3}dx$.

Варіант 25

1. Обчислити невизначені інтеграли:

а) $\int \left(\frac{3}{\sin^2(8-5x)} + \frac{\sqrt{x}+1}{x} \right) dx$, б) $\int \frac{dx}{x^2-2x-3}$, в) $\int \frac{(x+2)dx}{x^2+4x+13}$.

2. Обчислити методом заміни: $\int e^{\sin x} \cos x \, dx$.

3. Обчислити методом інтегрування частинами: $\int \frac{\ln^2 x dx}{x^2}$.

Варіант 26

1. Обчислити невизначені інтеграли:

а) $\int \left(\frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}+1} + x^{-1} + 4 \right) dx$, б) $\int \frac{xdx}{x^2-2x-3}$, в) $\int \frac{dx}{x^2+4x+13}$.

2. Обчислити методом заміни: $\int \frac{x^2}{x^6+9}dx$.

3. Обчислити методом інтегрування частинами: $\int x \sin x$.

Варіант 27

1. Обчислити невизначені інтеграли:

а) $\int \left(e^{\frac{4x+2}{3}} + 4(2x+3)^9 \right) dx$, б) $\int \frac{dx}{x^2+3x+2}$, в) $\int \frac{(x+2)dx}{x^2+4x+20}$.

2. Обчислити методом заміни: $\int e^{e^x+x}dx$.

3. Обчислити методом інтегрування частинами: $\int arctgx dx$.

Варіант 28

1. Обчислити невизначені інтеграли:

а) $\int \left(\frac{x^2-1}{x+1} + (4x-2)^{32} \right) dx$, б) $\int \frac{xdx}{x^2+3x+2}$, в) $\int \frac{dx}{x^2+4x+20}$.

2. Обчислити методом заміни: $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx$.

3. Обчислити методом інтегрування частинами: $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}}$.

Варіант 29

1. Обчислити невизначені інтеграли:

а) $\int\left(\frac{1}{x^2+16}+\cos(17x-4)\right)dx$, б) $\int\frac{dx}{x^2+5x+6}$, в) $\int\frac{(x+2)dx}{x^2+4x+29}$.

2. Обчислити методом заміни: $\int\frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}\arcsin^3 2x}$.

3. Обчислити методом інтегрування частинами: $\int(x^2-2x+2)\ln x dx$.

Варіант 30

1. Обчислити невизначені інтеграли:

а) $\int\left(\frac{3}{\sqrt{9-4x^2}}+\sin\left(\frac{2x}{3}\right)+2\right)dx$, б) $\int\frac{xdx}{x^2+5x+6}$, в) $\int\frac{dx}{x^2+4x+29}$.

2. Обчислити методом заміни: $\int\frac{\cos x dx}{\sqrt{\sin x}}$.

3. Обчислити методом інтегрування частинами: $\int x^2 e^{4x}dx$.

3.2. Варіанти індивідуальної розрахунково-графічної роботи з теми «Визначений інтеграл»

Варіант 1

1. Обчислити визначений інтеграл: $\int_1^4\sqrt{x}dx$.
2. Обчислити площу кривої, яка обмежена кривими $y^2=9x$, $y=3x$.
3. Знайти об'єм тіла обертання фігури, яка обмежена прямими $y=2x,\ x=5$ і $y=0$ обертається навколо осі Ox.
4. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність: $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^6}$.

Варіант 2

1. Обчислити визначений інтеграл: $\int_1^2 \left(x^3 + \frac{1}{x^5} \right) dx.$
2. Обчислити площу кривої, яка обмежена кривими $y = 4 - x^2$, $y = -x.$
3. Знайти об'єм тіла обертання фігури, яка обмежена прямими $y = 3x,$ $y = 4$ і $x = 0$ обертається навколо осі Oy.
4. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність: $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^3}.$

Варіант 3

1. Обчислити визначений інтеграл: $\int_0^2 e^{\frac{x}{2}} dx.$
2. Обчислити площу кривої, яка обмежена кривими $y = x^3$, $x = 3$ і віссю Ox.
3. Знайти об'єм тіла обертання фігури, яка обмежена параболою $y^2 = 4x$ і прямою $x = 4,$ обертається навколо осі Ox.
4. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність: $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}.$

Варіант 4

1. Обчислити визначений інтеграл: $\int_0^{\pi/4} \sin 4x dx.$
2. Обчислити площу кривої, яка обмежена кривими $y = x^3$, $y = 8$ і віссю Oy.
3. Знайти об'єм тіла обертання фігури, яка обмежена параболою $y^2 = 3x$ і прямими $y = 4,$ $x = 0,$ обертається навколо осі Oy.
4. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність: $\int_1^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}.$

Варіант 5

1. Обчислити визначений інтеграл: $\int_1^3 \left(\frac{1}{3}x^2 - 2x + 4 \right) dx$.
2. Обчислити площу кривої, яка обмежена кривими $y^2 = 4x$, $y^2 = 16x$, $x = 2$.
3. Знайти об'єм тіла обертання фігури, яка обмежена однією дугою синусоїди $y = \sin x$ і віссю *Ox*, обертається навколо осі *Ox*.
4. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$.

Варіант 6

1. Обчислити визначений інтеграл: $\int_1^3 \frac{dx}{x^4}$.
2. Обчислити площу кривої, яка обмежена кривими $y^2 = 8x$, $x^2 = y$.
3. Знайти об'єм тіла обертання фігури, яка обмежена однією дугою синусоїди $y = \sin 2x$ і віссю *Ox*, обертається навколо осі *Ox*.
4. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність: $\int_1^{+\infty} \frac{xdx}{x^2 + 3}$.

Варіант 7

1. Обчислити визначений інтеграл: $\int_0^{\pi/2} \sin^2 xdx$.
2. Обчислити площу кривої, яка обмежена кривими $y = x^2 - 6$, $y = x$.
3. Знайти об'єм тіла обертання фігури, яка обмежена однією дугою косинусоїди $y = \cos x$ і віссю *Ox*, обертається навколо осі *Ox*.
4. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність: $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2 + 16}$.

Варіант 8

1. Обчислити визначений інтеграл: $\int_1^3 \frac{dx}{2x + 5}$.

2. Обчислити площу кривої, яка обмежена кривими $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$ та віссю Ox.
3. Знайти об'єм тіла обертання фігури, яка обмежена однією дугою косинусоїди $y = \cos\frac{x}{2}$ і віссю Ox, обертається навколо осі Ox.
4. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність: $\int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$.

Варіант 9

1. Обчислити визначений інтеграл: $\int_{1}^{2} \frac{xdx}{3x^2 + 4}$.
2. Обчислити площу кривої, яка обмежена кривими $xy = 2$, $y = \frac{1}{2}x$ і $x = 5$.
3. Знайти об'єм тіла обертання фігури, яка обмежена параболою $x^2 = 5y$ і прямими $y = 0$, $x = 2$, обертається навколо осі Ox.
4. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність: $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{4x + 5}$.

Варіант 10

1. Обчислити визначений інтеграл: $\int_{\pi/2}^{\pi} ctg\frac{x}{2}dx$.
2. Обчислити площу кривої, яка обмежена кривими $xy = 4$, $y = x$, $x = 6$.
3. Знайти об'єм тіла обертання фігури, яка обмежена параболою $x^2 = 3y$ і прямою $y = 7$, обертається навколо осі Oy.
4. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність: $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2 + 9}$.

Варіант 11

1. Обчислити визначений інтеграл: $\int_{0}^{\pi/8} tg2xdx.$

2. Обчислити площу кривої, яка обмежена кривими $y = e^{x}$, $y = e^{-x}$, $x = 3.$

3. Знайти об'єм тіла обертання фігури, яка обмежена параболою $y = \frac{x^2}{2}$ і прямою $y = 4x,$ обертається навколо осі Ox.

4. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність: $\int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}.$

Варіант 12

1. Обчислити визначений інтеграл: $\int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+3}.$

2. Обчислити площу кривої, яка обмежена кривими $y = e^{x}$, осями координат і $x = 4.$

3. Знайти об'єм тіла обертання фігури, яка обмежена параболою $y = \frac{x^2}{3}$ і прямою $y = 2x,$ обертається навколо осі Oy.

4. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність: $\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{3x+2}.$

Варіант 13

1. Обчислити визначений інтеграл: $\int_{6}^{9} \frac{dx}{x^2-5}.$

2. Обчислити площу кривої, яка обмежена кривими $y = e^{2x}$, осями координат і $x = -2.$

3. Знайти об'єм тіла обертання фігури, яка обмежена параболою $x = y^2$ і прямою $y = \frac{x}{2},$ обертається навколо осі Ox.

4. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність: $\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-x^2}dx.$

Варіант 14

1. Обчислити визначений інтеграл: $\int\limits_{0}^{\sqrt{7}} \frac{dx}{\sqrt{7-x^2}}.$
2. Обчислити площу кривої, яка обмежена кривими $y = e^{-\frac{x}{2}}$, осями координат і $x = 4.$
3. Знайти об'єм тіла обертання фігури, яка обмежена параболою $x = 2y^2$ і прямою $y = \frac{x}{3}$, обертається навколо осі Oy.
4. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність: $\int\limits_{-\infty}^{0} x^2 e^{-x^3}dx.$

Варіант 15

1. Обчислити визначений інтеграл: $\int\limits_{-1}^{1} \left(3x^2 + 2x - 5\right)dx.$
2. Обчислити площу кривої, яка обмежена кривими $y = e^{-\frac{x}{3}}$, осями координат і $x = -3.$
3. Знайти об'єм тіла обертання фігури, яка обмежена кубічною параболою $y = x^3$ і прямою $y = x$, обертається навколо осі Ox.
4. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність: $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x}.$

Варіант 16

1. Обчислити визначений інтеграл: $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 5x dx.$
2. Обчислити площу кривої, яка обмежена кривими $y = tgx$, віссю Ox і $x = \frac{\pi}{3}.$

3. Знайти об’єм тіла обертання фігури, яка обмежена кубічною параболою $y = x^3$ і прямою $y = 4x,$ обертається навколо осі Oy.
4. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність: $\int_{-3}^{4} \frac{dx}{\sqrt{x+3}}.$

Варіант 17

1. Обчислити визначений інтеграл: $\int_{1}^{3} \frac{dx}{x^2 - 2x + 3}.$
2. Обчислити площу кривої, яка обмежена кривими $y = tg 2x,$ віссю Ox і $x = -\frac{\pi}{8}.$
3. Знайти об’єм тіла обертання фігури, яка обмежена параболою $y^2 = 4 - x$ і прямою $x = -2,$ обертається навколо осі Ox.
4. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність: $\int_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}.$

Варіант 18

1. Обчислити визначений інтеграл: $\int_{4}^{9} \frac{dx}{\sqrt{x} + 3}.$
2. Обчислити площу кривої, яка обмежена кривими $y = 2x,$ $x = 1,$ $x = 4$ і віссю Ox.
3. Знайти об’єм тіла обертання фігури, яка обмежена параболою $y = -x^2 + 5x - 4$ і прямою $y = 0$ обертається навколо осі Ox.
4. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність: $\int_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt[5]{x+2}}.$

Варіант 19

1. Обчислити визначений інтеграл: $\int_{0}^{4} \frac{dx}{4 + \sqrt{2x+1}}.$
2. Обчислити площу кривої, яка обмежена кривими $y = -3x,$ $x = -5,$ $x = -2$ і віссю Ox.

3. Знайти об’єм тіла обертання фігури, яка обмежена параболою $y^2 = 2 - x$ і прямою $x = 0$ обертається навколо осі *Oy*.
4. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність: $\int\limits_{-2}^{0} \frac{dx}{(x+2)^3}$.

Варіант 20

1. Обчислити визначений інтеграл: $\int\limits_{1}^{6} \frac{xdx}{\sqrt{3+x}}$.
2. Обчислити площу кривої, яка обмежена кривими $y = 5x - x^2$, $x = -1,\ \ x = 2$ та віссю *Ox*.
3. Знайти об’єм тіла обертання фігури, яка обмежена параболою $y = 4x^2$ і прямими $x = 0$, $y = 4$ обертається навколо осі *Oy*.
4. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність: $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{(x-1)^2}$.

Варіант 21

1. Обчислити визначений інтеграл: $\int\limits_{5}^{12} \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx$.
2. Обчислити площу кривої, яка обмежена кривими $y = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$, $x = -1,\ x = 2$ та віссю *Ox*.
3. Знайти об’єм тіла обертання фігури, яка обмежена кривою $y = \ln x$ і прямими $x = 0$, $y = 0$ обертається навколо осі *Oy*.
4. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність: $\int\limits_{-5}^{-2} \frac{dx}{(x+5)^3}$.

Варіант 22

1. Обчислити визначений інтеграл: $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{9x+7}}$.
2. Обчислити площу кривої, яка обмежена кривими $y = 3x^2$, $y = x^3$.

3. Знайти об'єм тіла обертання фігури, яка обмежена параболою $y = 5x - x^2$ і прямою $y = 0$ обертається навколо осі Ox.
4. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність: $\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-2)^3}}$.

Варіант 23

1. Обчислити визначений інтеграл: $\int_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+5}$.
2. Обчислити площу кривої, яка обмежена кривими $y = x^2$, $y = \frac{2}{1+x^2}$.
3. Знайти об'єм тіла обертання фігури, яка обмежена параболою $y = -x^2 + 3x + 4$ і прямою $y = 0$ обертається навколо осі Ox.
4. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність: $\int_0^{1/3} \frac{dx}{x \ln^3 x}$.

Варіант 24

1. Обчислити визначений інтеграл: $\int_0^3 \frac{dx}{8+\sqrt{x+1}}$.
2. Обчислити площу кривої, яка обмежена кривими $xy = 6$, $x + y - 7 = 0$.
3. Знайти об'єм тіла обертання фігури, яка обмежена кривою $x = 2\sqrt{y}$ і прямими $x = 6$, $y = 0$ обертається навколо осі Ox.
4. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність: $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

Варіант 25

1. Обчислити визначений інтеграл: $\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{\left(2-x^2\right)^3}dx$.
2. Обчислити площу кривої, яка обмежена кривими $\rho^2 = 4\cos 2\varphi$.
3. Знайти об'єм тіла обертання фігури, яка обмежена кривою $y = e^{-x}$ і прямими $x = 0$, $y = 0$, $x = \ln 2$ обертається навколо осі Ox.

4. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність: $\int\limits_0^{\infty}\frac{(2x+1)dx}{4x^2+4x+5}$.

Варіант 26

1. Обчислити визначений інтеграл: $\int\limits_{\sqrt{3}}^{3}\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}$.
2. Обчислити площу кривої, яка обмежена кривими $\rho=2(1-\cos\varphi)$.
3. Знайти об'єм тіла обертання фігури, яка обмежена прямими $x=6-y^2$ і $x=0$ обертається навколо осі *Oy*.
4. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність: $\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\frac{\sin x dx}{\sqrt[7]{\cos^2 x}}$.

Варіант 27

1. Обчислити визначений інтеграл: $\int\limits_4^5\frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$.
2. Обчислити площу кривої, яка обмежена кривими $\rho=3(1-\sin\varphi)$.
3. Знайти об'єм тіла обертання фігури, яка обмежена кривою $y=\ln 2x$ і прямими $x=0$, $y=0$, $y=2$ обертається навколо осі *Oy*.
4. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність: $\int\limits_0^{\infty}\frac{\sqrt{arctg\ x}dx}{x^2+1}$.

Варіант 28

1. Обчислити визначений інтеграл: $\int\limits_{\sqrt{6}/2}^{\sqrt{6}}\frac{\sqrt{6-x^2}}{x^2}dx.$
2. Обчислити площу кривої, яка обмежена кривими $\rho=4(1+\cos\varphi)$.
3. Знайти об'єм тіла обертання фігури, яка обмежена параболою $x=4-y^2$ і прямою $x=0$ обертається навколо осі *Oy*.
4. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність: $\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos x}}$.

Варіант 29

1. Обчислити визначений інтеграл: $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{\left(4+x^2\right)^3}}$.
2. Обчислити площу кривої, яка обмежена кривими $\rho = 2\cos\varphi$.
3. Знайти об'єм тіла обертання фігури, яка обмежена однією дугою синусоїди $y = \sin 2x, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, обертається навколо осі Ox.
4. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність: $\int\limits_1^5 \frac{dx}{\sqrt[5]{4x - x^2 - 4}}$.

Варіант 30

1. Обчислити визначений інтеграл: $\int\limits_1^3 xe^{2x}dx$.
2. Обчислити площу кривої, яка обмежена кривими $\rho = 3\sin\varphi$.
3. Знайти об'єм тіла обертання фігури, яка обмежена однією дугою синусоїди $y = \sin 2x, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, обертається навколо осі Ox.
4. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність: $\int\limits_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{64 - x^6}}$.

3.3. Варіанти індивідуальної розрахунково-графічної роботи з теми «Кратні інтеграли»

Варіант 1

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D xdxdy$ якщо область D обмежена даними лініями: $x = 0, \quad y = x^3, \quad x + y = 2$.
2. Обчислити: $\mathrm{I} = \iiint\limits_V f(x)g(y)h(z)dxdydz$, якщо $f(x) = x\cos 3x$, $g(y) = \frac{arctgy}{1+y^2}$, $h(z) = \frac{1}{(z+1)^3}$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le y \le 1$, $1 \le z \le 2$.

Варіант 2

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{D} \sin(x+y)\,dxdy$ якщо область D обмежена даними лініями: $x=y,\ \ y=0,\ \ x+y=\dfrac{\pi}{2}.$

2. Обчислити: $\mathrm{I}=\iiint\limits_{V} f(x)g(y)h(z)dxdydz$, якщо $f(x)=x\ln x$, $g(y)=\dfrac{y^3}{\sqrt{5+y^4}}$, $h(z)=\dfrac{1}{z^2}$, $1\le x\le 2$, $-1\le y\le 0$, $1\le z\le 3$.

Варіант 3

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{D} x^2 ydxdy$ якщо область D обмежена даними лініями: $y=0,\ \ y=1-x^2$.

2. Обчислити: $\mathrm{I}=\iiint\limits_{V} f(x)g(y)h(z)dxdydz$, якщо $f(x)=arctgx$, $g(y)=\dfrac{\ln y}{y}$, $h(z)=e^{3z+1}$, $0\le x\le 1$, $1\le y\le e$, $1\le z\le 2$.

Варіант 4

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{D} x^3 ydxdy$ якщо область D обмежена даними лініями: $y=x,\ \ y^2=x$.

2. Обчислити: $\mathrm{I}=\iiint\limits_{V} f(x)g(y)h(z)dxdydz$, якщо $f(x)=\ln 2x$, $g(y)=\dfrac{(\arcsin y)^3}{\sqrt{1-y^2}}$, $h(z)=\sin z\sin 3z$, $\dfrac{1}{2}\le x\le \dfrac{e^3}{2}$, $0\le y\le 1$, $0\le z\le \dfrac{\pi}{4}$.

Варіант 5

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{D} \left(1-y^2-x^2\right)dxdy$ якщо область D обмежена даними лініями: $x=1,\ \ y=x,\ \ y=2x.$

2. Обчислити: $\mathrm{I}=\iiint\limits_V f(x)g(y)h(z)dxdydz$, якщо $f(x)=xarctgx$, $g(y)=\dfrac{\sin\sqrt{y}}{\sqrt{y}}$, $h(z)=\dfrac{1}{z^2+2z+5}$, $0\le x\le 1$, $\dfrac{\pi^2}{4}\le y\le \pi^2$, $0\le z\le 2$.

Варіант 6

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D (x+y)dxdy$ якщо область D обмежена даними лініями: $y=1,\ \ x=0,\ \ y=\sqrt{x}.$

2. Обчислити: $\mathrm{I}=\iiint\limits_V f(x)g(y)h(z)dxdydz$, якщо $f(x)=x\sin x$, $g(y)=\dfrac{e^{1/y}}{y^2}$, $h(z)=\dfrac{1}{z^2-4z-5}$, $0\le x\le \pi$, $1\le y\le 2$, $4\le z\le 5$.

Варіант 7

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D (x+2y)dxdy$ якщо область D обмежена даними лініями: $x=2,\ \ y=x,\ \ y=2x.$

2. Обчислити: $\mathrm{I}=\iiint\limits_V f(x)g(y)h(z)dxdydz$, якщо $f(x)=xe^{2x}$, $g(y)=\sin y\cos^4 y$, $h(z)=\dfrac{z^3}{z+4}$, $0\le x\le 1$, $0\le y\le \dfrac{\pi}{2}$, $0\le z\le 2$.

Варіант 8

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D y\ln x dxdy$ якщо область D обмежена даними лініями: $xy=1,\ \ x=2,\ \ y=\sqrt{x}.$

2. Обчислити: $\mathrm{I}=\iiint\limits_V f(x)g(y)h(z)dxdydz$, якщо $f(x)=x^2e^x$, $g(y)=\dfrac{tg^2 y}{\cos^2 y}$, $h(z)=\cos 2z\sin z$, $0\le x\le 2$, $0\le y\le \dfrac{\pi}{4}$, $0\le z\le \dfrac{\pi}{3}$.

Варіант 9

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{D}\left(x^3+y^3\right)dxdy$ якщо область D обмежена даними лініями: $x=4,\;\; x=2y,\;\; x=y$.
2. Обчислити: $\mathrm{I}=\iiint\limits_{V} f(x)g(y)h(z)dxdydz$, якщо $f(x)=\arcsin x$, $g(y)=\dfrac{e^y}{1+e^{2y}}$, $h(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$, $0\le x\le 1,\; 0\le y\le 1,\; 3\le z\le 4$.

Варіант 10

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{D}\left(1+2x+2y\right)dxdy$ якщо область D обмежена даними лініями: $y=x,\;\; y=0,\;\; x+y=1$.
2. Обчислити: $\mathrm{I}=\iiint\limits_{V} f(x)g(y)h(z)dxdydz$, якщо $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$, $g(y)=\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}-1}$, $h(z)=\dfrac{z^2-1}{z^2+1}$, $1\le x\le e$, $4\le y\le 9$, $0\le z\le 1$.

Варіант 11

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{D} xydxdy$ якщо область D обмежена даними лініями: $x+y=2,\;\; y=x^3,\;\; y=0$.
2. Обчислити: $\mathrm{I}=\iiint\limits_{V} f(x)g(y)h(z)dxdydz$, якщо $f(x)=x\arcsin x$, $g(y)=\dfrac{1}{y\ln y}$, $h(z)=\dfrac{1}{(2z+4)^2}$, $0\le x\le 1,\; 2\le y\le e^2$, $0\le z\le 1$.

Варіант 12

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D (4-y)dxdy$ якщо область D обмежена даними лініями: $y=1,\ 4y=x^2,\ x\geq 0$.

2. Обчислити: $\mathrm{I}=\iiint\limits_V f(x)g(y)h(z)dxdydz$, якщо $f(x)=(x+1)\sin x$, $g(y)=\dfrac{\ln(y+1)}{y+1}$, $h(z)=\dfrac{z+2}{z^2+4z+8}$, $\dfrac{\pi}{2}\leq x\leq \pi$, $0\leq y\leq 1$, $-2\leq z\leq 1$.

Варіант 13

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D x^3y^2dxdy$ якщо область D обмежена даними лініями: $x^2+y^2=4$.

2. Обчислити: $\mathrm{I}=\iiint\limits_V f(x)g(y)h(z)dxdydz$, якщо $f(x)=(x+2)\ln x$, $g(y)=\dfrac{1}{1+\sqrt{2y+1}}$, $h(z)=\dfrac{z-2}{z^2-4z-12}$, $1\leq x\leq e^2$, $0\leq y\leq 4$, $2\leq z\leq 3$.

Варіант 14

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D (x^2+y)dxdy$ якщо область D обмежена даними лініями: $y=x^2,\ y^2=x$.

2. Обчислити: $\mathrm{I}=\iiint\limits_V f(x)g(y)h(z)dxdydz$, якщо $f(x)=xe^{-x}$, $g(y)=\dfrac{y}{\sqrt{2+4y}}$, $h(z)=\dfrac{z}{(z-2)(z-3)}$, $0\leq x\leq 1$, $1\leq y\leq 4$, $4\leq z\leq 5$.

Варіант 15

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \cos(x+y)dxdy$ якщо область D обмежена даними лініями: $x=0,\ y=\pi,\ y=x$.

2. Обчислити: $\mathrm{I}=\iiint\limits_V f(x)g(y)h(z)dxdydz$, якщо $f(x)=arctg(x-1)$, $g(y)=\frac{y^2}{y^3+1}$, $h(z)=\sin 2z\sin z$, $0\le x\le 1$, $1\le y\le e$, $0\le z\le \frac{\pi}{3}$.

Варіант 16

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \cos(x+y)dxdy$ якщо область D обмежена даними лініями: $x=0,\ \ y=\pi,\ \ y=x$.

2. Обчислити: $\mathrm{I}=\iiint\limits_V f(x)g(y)h(z)dxdydz$, якщо $f(x)=\arccos x$, $g(y)=\frac{\sqrt{y}}{1+y}$, $h(z)=\frac{z^3}{z^2+1}$, $0\le x\le \frac{1}{2}$, $0\le y\le 1$, $0\le z\le 2$.

Варіант 17

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$ якщо область D обмежена даними лініями: $x^2+y^2=1,\ \ x\ge 0,\ \ y\ge 0$.

2. Обчислити: $\mathrm{I}=\iiint\limits_V f(x)g(y)h(z)dxdydz$, якщо $f(x)=x^2\ln x$, $g(y)=\frac{y}{\sqrt{1+3y}}$, $h(z)=\frac{1}{\sqrt[5]{(3-z)^4}}$, $1\le x\le 2$, $0\le y\le 5$, $0\le z\le 2$.

Варіант 18

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D x^2y^2\sqrt{1-x^3-y^3}dxdy$ якщо область D обмежена даними лініями: $x^3+y^3=1,\ \ x=0,\ \ y=0$.

2. Обчислити: $\mathrm{I}=\iiint\limits_V f(x)g(y)h(z)dxdydz$, якщо $f(x)=x\ln x^2$, $g(y)=\frac{1}{e^y-e^{-y}}$, $h(z)=\frac{1}{z+z^2}$, $1\le x\le 3$, $\ln 2\le y\le \ln 3$, $1\le z\le 2$.

Варіант 19

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ якщо область D обмежена даними лініями: $x^2+y^2=1,\ \ x\ge 0,\ \ y\ge 0$.

2. Обчислити: $\mathrm{I}=\iiint\limits_V f(x)g(y)h(z)dxdydz$, якщо $f(x)=x\sin(x-\frac{\pi}{2})$, $g(y)=\frac{\sqrt[4]{1+\ln y}}{y}$, $h(z)=\cos^5 z\sin 2z$, $0\le x\le \pi$, $1\le y\le e$, $0\le z\le \frac{\pi}{2}$.

Варіант 20

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \sqrt{x^2-y^2}dxdy$ якщо область D обмежена даними лініями: $x=1,\ \ y=x,\ \ y=-x$.

2. Обчислити: $\mathrm{I}=\iiint\limits_V f(x)g(y)h(z)dxdydz$, якщо $f(x)=(2x+1)\sin x$, $g(y)=\frac{1-e^y}{1+e^y}$, $h(z)=\sin^5 z$, $0\le x\le \pi$, $0\le y\le \ln 3$, $0\le z\le \frac{\pi}{2}$.

Варіант 21

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D ydxdy$ якщо область D обмежена даними лініями: $x=0,\ \ y=x^3,\ \ x+y=2$.

2. Обчислити: $\mathrm{I}=\iiint\limits_V f(x)g(y)h(z)dxdydz$, якщо $f(x)=x\arccos x$, $g(y)=\frac{y}{\sqrt{5+4y}}$, $h(z)=\frac{1}{z+z^3}$, $0\le x\le \frac{1}{2}$, $1\le y\le 5$, $1\le z\le 2$.

Варіант 22

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D y^2xdxdy$ якщо область D обмежена даними лініями: $y=0,\ \ x=1-y^2$.

2. Обчислити: $\mathrm{I}=\iiint\limits_V f(x)g(y)h(z)dxdydz$, якщо $f(x)=\dfrac{\ln(2x+1)}{x^2}$, $g(y)=\dfrac{\sin y}{\cos^2 y}$, $h(z)=\dfrac{1}{\sqrt{z+9}-\sqrt{z}}$, $0\le x\le 2$, $0\le y\le \dfrac{\pi}{2}$, $0\le z\le 16$.

Варіант 23

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D y^3 x dxdy$ якщо область D обмежена даними лініями: $y=x,\ \ y=x^2$.
2. Обчислити: $\mathrm{I}=\iiint\limits_V f(x)g(y)h(z)dxdydz$, якщо $f(x)=(x+1)e^{2x+3}$, $g(y)=\dfrac{\ln^2(y+2)}{y+2}$, $h(z)=\dfrac{1}{\sqrt{5+4z-z^2}}$, $-1\le x\le 1$, $-1\le y\le 1$, $0\le z\le 2$.

Варіант 24

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D (x+y)dxdy$ якщо область D обмежена даними лініями: $x=1,\ \ y=0,\ \ y=x^2$.
2. Обчислити: $\mathrm{I}=\iiint\limits_V f(x)g(y)h(z)dxdydz$, якщо $f(x)=(3x+2)\ln x^2$, $g(y)=\cos y e^{2\sin y}$, $h(z)=\dfrac{\left(\sqrt{z}-2\right)^2}{z}$, $1\le x\le 2$, $0\le y\le \dfrac{\pi}{2}$, $1\le z\le 4$.

Варіант 25

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D (y+2x)dxdy$ якщо область D обмежена даними лініями: $y=2,\ \ y=x,\ \ y=\dfrac{1}{2}x$.
2. Обчислити: $\mathrm{I}=\iiint\limits_V f(x)g(y)h(z)dxdydz$, якщо $f(x)=(x+1)arctg\dfrac{x}{4}$, $g(y)=\dfrac{e^{3\ln y}}{y}$, $h(z)=\dfrac{z-2}{z^3+2z}$, $0\le x\le 4$, $1\le y\le e$, $1\le z\le 4$.

Варіант 26

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D x\ln y\,dxdy$ якщо область D обмежена даними лініями: $xy=1,\ \ y=2,\ \ y=x^2$.
2. Обчислити: $\mathrm{I}=\iiint\limits_V f(x)g(y)h(z)dxdydz$, якщо $f(x)=(x-5)e^{-x+3}$, $g(y)=\sin 2y\sin^2 y$, $h(z)=\dfrac{1}{\sqrt{z^2+2z+5}}$, $3\le x\le 5,\ 0\le y\le\dfrac{\pi}{2},\ 0\le z\le 1.$

Варіант 27

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D xydxdy$ якщо область D обмежена даними лініями: $x+y=2,\ \ x=y^3,\ \ x=0$.
2. Обчислити: $\mathrm{I}=\iiint\limits_V f(x)g(y)h(z)dxdydz$, якщо $f(x)=x^2\cos 3x$, $g(y)=\dfrac{1}{y(4-\ln^2 y)}$, $h(z)=\dfrac{1}{(11+5z)^3}$, $\dfrac{\pi}{6}\le x\le\pi$, $1\le y\le e^2,\ -2\le z\le -1.$

Варіант 28

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D (4-x)dxdy$ якщо область D обмежена даними лініями: $x=1,\ \ 4x=y^2,\ \ y\ge 0$.
2. Обчислити: $\mathrm{I}=\iiint\limits_V f(x)g(y)h(z)dxdydz$, якщо $f(x)=x^2\sin 2x$, $g(y)=y\sqrt{1+y^2}$, $h(z)=(e^z-1)^2e^z$, $0\le x\le\dfrac{\pi}{6},\ 0\le y\le 1,\ 0\le z\le 1.$

Варіант 29

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D y^3x^2dxdy$ якщо область D обмежена даними лініями: $x^2+y^2=4$.

2. Обчислити: $\mathrm{I}=\iiint\limits_V f(x)g(y)h(z)dxdydz$, якщо $f(x)=x2^x$, $g(y)=\cos^3 y$,

$h(z)=\dfrac{1}{z^3+8}$, $0\le x\le 1$, $0\le y\le \dfrac{\pi}{2}$, $0\le z\le 1$.

Варіант 30

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \left(y^2+x\right)dxdy$ якщо область D обмежена даними лініями: $y=x^2$, $y^2=x$.

2. Обчислити: $\mathrm{I}=\iiint\limits_V f(x)g(y)h(z)dxdydz$, якщо $f(x)=x\ln x$, $g(y)=\sin y\cos^4 y$, $h(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$, $1\le x\le 2$, $0\le y\le \dfrac{\pi}{2}$, $3\le z\le 4$.

3.4. Варіанти індивідуальної розрахунково-графічної роботи з теми «Криволінійні інтеграли»

Варіант 1

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду вздовж заданої лінії L.

$$\int\limits_L xy\,dl, \text{ де } L-\text{дуга кола } x=3\cos t,\ y=3\sin t,\ 0\le t\le \frac{\pi}{2}.$$

2. Знайти масу дуги півкола $x^2+y^2=1$, $y\ge 0$, якщо густина його в точці $(x;y)$ дорівнює y.

3. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду по замкненому контуру L, який утворюється при перетині зазначених ліній (рухаючись по контуру в додатному напрямі). Зробити малюнок.

$\oint\limits_L (2x+y)dx-xy\,dy$, де L – контур, утворений лініями $x=0$, $y=1$, $x+y=3$.

4. Обчисліть роботу сили $\vec{F}=X\vec{i}+Y\vec{j}$ по переміщенню матеріальної точки з точки A в точку B вздовж лінії $y=f(x)$.

$X=x^2y-xy^2$, $Y=x^2+y^2$, $A(-1;2)$, $B(4;32)$, $y=2x^2$.

5. Обчисліть за допомогою формули Гріна криволінійний інтеграл по замкненому контуру L, на якому вибраний додатний напрямок.

$\oint\limits_L xydx - y^2\,dy$, де L – замкнений контур, утворений кривими $y = x^2$, $y = 2x^2$, $x = 0$.

Варіант 2

1.Обчислити криволінійний інтеграл першого роду вздовж заданої лінії L.

$\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{x+y}}$, де L – відрізок прямої $3x - y + 1 = 0$ між $A(0;1)$ і $B(2;7)$.

2. Знайти масу дуги параболи $y^2 = 4x,\ (0 \le x \le 1)$, якщо лінійна густина параболи в точці $(x;y)$ дорівнює $|y|$.

3. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду по замкненому контуру L, який утворюється при перетині зазначених ліній (рухаючись по контуру в додатному напрямі). Зробити малюнок.

$\oint\limits_L (y^2 - 3x^2)dx + x^2 y\,dy$, де L – контур, утворений лініями $y = 0$, $x = 2$, $y = 2x$.

4. Обчисліть роботу сили $\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j}$ по переміщенню матеріальної точки з точки A в точку B вздовж лінії $y = f(x)$.

$X = xy$, $Y = 2x + y$, $A(1;1)$, $B(-2;8)$, $y = x^3$.

5. Обчисліть за допомогою формули Гріна криволінійний інтеграл по замкненому контуру L, на якому вибраний додатний напрямок.

$\oint\limits_L 2(x^2 + y^2)dx + (x+y)^2\,dy$, де L – контур трикутника з вершинами $A(1;1),\ B(2;2),\ C(1,3)$.

Варіант 3

1.Обчислити криволінійний інтеграл першого роду вздовж заданої лінії L.

$\int\limits_L xy^2 dl$, де L – відрізок прямої $x - y + 2 = 0$ між $A(0;2)$ і $B(3;5)$.

2. Знайти масу дуги параболи $y=\dfrac{x^2}{2}$, що лежить між точками $\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$ і $(2;2)$, якщо лінійна густина дорівнює $\dfrac{y}{x}$.

3. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду по замкненому контуру *L*, який утворюється при перетині зазначених ліній (рухаючись по контуру в додатному напрямі). Зробити малюнок.

$\oint\limits_L (y+3x^2)dx - x\,dy$, де *L*– контур, утворений лініями $x=2$, $y=4$, $y=4-x^2$.

4. Обчисліть роботу сили $\vec{F}=X\vec{i}+Y\vec{j}$ по переміщенню матеріальної точки з точки A в точку B вздовж лінії $y=f(x)$.

$X=2xy$, $Y=-x^2$, $A(0;0)$, $B(2;1)$, $y=\dfrac{x^2}{4}$.

5. Обчисліть за допомогою формули Гріна криволінійний інтеграл по замкненому контуру *L*, на якому вибраний додатний напрямок.

$\oint\limits_L (xy+x+y)dx+(xy+x-y)\,dy$, де L – еліпс $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

Варіант 4

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду вздовж заданої лінії *L*.

$\int\limits_L y^2 dl$, де L – відрізок прямої $2x-y+1=0$ між $A(0;1)$ і $B(1;3)$.

2. Знайти масу дуги кривої $y=1-\ln\cos x$ між точками з абсцисами $x=0$, $x=\dfrac{\pi}{4}$, якщо густина маси в кожній точці кривої дорівнює 1.

3. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду по замкненому контуру *L*, який утворюється при перетині зазначених ліній (рухаючись по контуру в додатному напрямі). Зробити малюнок.

$\oint\limits_L (2x+y)dx+xy\,dy$, де*L* – контур, утворений лініями $x=2$, $y=3$, $y=3-x$.

4. Обчисліть роботу сили $\vec{F}=X\vec{i}+Y\vec{j}$ по переміщенню матеріальної точки з точки A в точку B вздовж лінії $y=f(x)$.

$X=x^3+y^3$, $Y=xy$, $A(0;2)$, $B(4;0)$, $y=\dfrac{x}{2}-2$.

5. Обчисліть за допомогою формули Гріна криволінійний інтеграл по замкненому контуру *L*, на якому вибраний додатний напрямок.

$\oint\limits_L -3ydx+2x\,dy$, де *L* – контур трикутника з вершинами $A(1;2)$, $B(3;1)$, $C(2,5)$

.

Варіант 5

1.Обчислити криволінійний інтеграл першого роду вздовж заданої лінії *L*.

$\int\limits_L xy^2dl$, де *L* – дуга кола $x=5cos\,t$, $y=5\,sin\,t$, $0\le t\le\frac{\pi}{6}$.

2. Знайти масу дуги параболи $y=2x^2$ від точки $(1;1)$ до точки $(2;8)$, якщо лінійна густина дорівнює $\rho(x,y)=\frac{y}{x}$.

3. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду по замкненому контуру *L*, який утворюється при перетині зазначених ліній (рухаючись по контуру в додатному напрямі). Зробити малюнок.

$\oint\limits_L (x-y)dx-x\sqrt{y}\;dy$, де *L* – контур, утворений лініями $y=0$, $x=2$, $y=x^2$.

4. Обчисліть роботу сили $\vec{F}=X\vec{i}+Y\vec{j}$ по переміщенню матеріальної точки з точки A в точку B вздовж лінії $y=f(x)$.

$X=x^2-2xy$, $Y=2xy+y^2$, $A(1;1)$, $B(2;4)$, $y=x^2$.

5. Обчисліть за допомогою формули Гріна криволінійний інтеграл по замкненому контуру *L*, на якому вибраний додатний напрямок.

$\oint\limits_L (x-y)^2dx+(x+y)^2dy$, де *L* – контур трикутника з вершинами $A(0;0)$, $B(2;0)$, $C(4,2)$.

Варіант 6

1.Обчислити криволінійний інтеграл першого роду вздовж заданої лінії *L*.

$\int\limits_L \sqrt{3x+y}\,dl$, де *L* – відрізок прямої $2x+y=4$ між $A(0;4)$ і $B(2;0)$.

2. Знайти масу дуги параболи $y^2=2x$ від точки $(1;\sqrt{2})$ до точки $(2;2)$, якщо лінійна густина дорівнює $\rho(x,y)=\frac{x}{y}$.

3. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду по замкненому контуру L, який утворюється при перетині зазначених ліній (рухаючись по контуру в додатному напрямі). Зробити малюнок.

$\oint\limits_L (2x+y)dx+(x-y)dy$, де L – контур, утворений лініями $x=0$, $y=3$, $y=2x+1$.

4. Обчисліть роботу сили $\vec{F}=X\vec{i}+Y\vec{j}$ по переміщенню матеріальної точки з точки A в точку B вздовж лінії $y=f(x)$.

$X=x-y^2$, $Y=x+y^2$, $A(0;-3)$, $B(2;1)$, $y=2x-3$.

5. Обчисліть за допомогою формули Гріна криволінійний інтеграл по замкненому контуру L, на якому вибраний додатний напрямок.

$\oint\limits_L x^2ydx+x^3\,dy$, де L – контур, обмежений параболами $y=x^2$, $x=y^2$.

Варіант 7

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду вздовж заданої лінії L.

$\int\limits_L \frac{dl}{(y-x)^2}$, де L – відрізок прямої $2x-y+1=0$ між $A(0;1)$ і $B(2;5)$.

2. Знайти масу дуги косинусоїди $y=2\cos\frac{x}{2}$ між точками з абсцисами $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, якщо лінійна густина $\rho(x;y)=x$.

3. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду по замкненому контуру L, який утворюється при перетині зазначених ліній (рухаючись по контуру в додатному напрямі). Зробити малюнок.

$\oint\limits_L (x+y^2)dx+x\,dy$, де L – контур, утворений лініями $x=0$, $y=1$, $x=2y^2$.

4. Обчисліть роботу сили $\vec{F}=X\vec{i}+Y\vec{j}$ по переміщенню матеріальної точки з точки A в точку B вздовж лінії $y=f(x)$.

$X=x^2-xy$, $Y=xy+y^2$, $A(1;1)$, $B(2;8)$, $y=x^3$.

5. Обчисліть за допомогою формули Гріна криволінійний інтеграл по замкненому контуру L, на якому вибраний додатний напрямок.

$\oint\limits_L y dx-(y+x^2)dy$, де L – замкнений контур, утворений параболою $y=2x-x^2$ та віссю *Ox*.

Варіант 8

1.Обчислити криволінійний інтеграл першого роду вздовж заданої лінії L.

$\int\limits_L \left(x^2+y^2\right)dl$, де L – відрізок прямої $y=x+2$ між $A(0;2)$ і $B(2;4)$.

2. Знайти масу дуги кривої $y=1-\ln(x^2-1)$ між точками з абсцисами $x=3$ і $x=4$, якщо густина кривої в кожній точці дорівнює квадрату абсциси точки.

3. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду по замкненому контуру *L*, який утворюється при перетині зазначених ліній (рухаючись по контуру в додатному напрямі). Зробити малюнок.

$\oint\limits_L (y-2x)dx-y\,dy$, де *L*– контур, утворений лініями $x=2$, $y=2$, $y=2-x$.

4. Обчисліть роботу сили $\vec{F}=X\vec{i}+Y\vec{j}$ по переміщенню матеріальної точки з точки A в точку B вздовж лінії $y=f(x)$.

$X=2-y$, $Y=x$, $A(0;0)$, $B(\pi;0)$, $y=\sin x$.

5. Обчисліть за допомогою формули Гріна криволінійний інтеграл по замкненому контуру *L*, на якому вибраний додатний напрямок.

$\oint\limits_L (x+y)dx-(x-y)\,dy$, де L – еліпс $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$.

Варіант 9

1.Обчислити криволінійний інтеграл першого роду вздовж заданої лінії L.

$\int\limits_L \frac{y^2}{x}dl$, де L – відрізок прямої $x-y+2=0$ між $A(1;3)$ і $B(2;4)$.

2. Знайти масу дуги кривої $y=\sqrt{x^3}$ між точками з абсцисами $x=0$, $x=4$, якщо лінійна густина $\rho(x;y)=\frac{2y^2}{x}$.

3. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду по замкненому контуру *L*, який утворюється при перетині зазначених ліній (рухаючись по контуру в додатному напрямі). Зробити малюнок.

$\oint\limits_L (y-x)dx+(x^2+y)dy$, де*L* – контур, утворений лініями $y=0$, $x=1$, $y=2x^2$.

4. Обчисліть роботу сили $\vec{F}=X\vec{i}+Y\vec{j}$ по переміщенню матеріальної точки з точки A в точку B вздовж лінії $y=f(x)$.

$X=x^4+4xy^3$, $Y=6x^2y^2-5y^4$, $A(0;1)$, $B(-1;2)$, $y=-x+1$.

5. Обчисліть за допомогою формули Гріна криволінійний інтеграл по замкненому контуру *L*, на якому вибраний додатний напрямок.

$\oint\limits_L e^x(1-\cos y)dx-e^x(y-\sin y)\,dy$, де *L* – контур, обмежений прямими $x=0$, $x=\pi$, $y=0$, $y=\sin x$.

Варіант 10

1.Обчислити криволінійний інтеграл першого роду вздовж заданої лінії *L*.

$\int\limits_L x\sqrt{y}\;dl$, де *L* – дуга кола $x=4\cos t$, $y=4\sin t$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$.

2. Знайти масу дуги кривої $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x$ між точками з абсцисами $x=1$, $x=e$, якщо лінійна густина $\rho(x,y)=xy$.

3. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду по замкненому контуру *L*, який утворюється при перетині зазначених ліній (рухаючись по контуру в додатному напрямі). Зробити малюнок.

$\oint\limits_L (y-2x^2)dx-x\,dy$, де *L*– контур, утворений лініями $x=2$, $y=4$, $y=4-x^2$.

4. Обчисліть роботу сили $\vec{F}=X\vec{i}+Y\vec{j}$ по переміщенню матеріальної точки з точки A в точку B вздовж лінії $y=f(x)$.

$X=3xy$, $Y=x+y^2$, $A(2;0)$, $B(4;2)$, $y=x-2$.

5. Обчисліть за допомогою формули Гріна криволінійний інтеграл по замкненому контуру *L*, на якому вибраний додатний напрямок.

$\oint\limits_L (e^x\sin y-2y)dx+(e^x\cos y-2)dy$, де *L* – контур, обмежений верхнім півколом $x^2+y^2=2x$ та віссю *Ox*.

Варіант 11

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду вздовж заданої лінії L.

$\int_L \left(x^2+y\right)dl$, де L – відрізок прямої $x-y+2=0$ між $A(0;2)$ і $B(3;5)$.

2. Знайти масу дуги кривої $y=e^x$ між точками з абсцисами $x=0$, $x=1$, якщо лінійна густина $\rho(x,y)=y$.

3. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду по замкненому контуру L, який утворюється при перетині зазначених ліній (рухаючись по контуру в додатному напрямі). Зробити малюнок.

$\oint_L (y-x)dx+(x+y)dy$, де L– контур, утворений лініями $x=2$, $y=1$, $y=2x+1$.

4. Обчисліть роботу сили $\vec{F}=X\vec{i}+Y\vec{j}$ по переміщенню матеріальної точки з точки A в точку B вздовж лінії $y=f(x)$.

$X=y$, $Y=\dfrac{x}{y}$, $A(0;1)$, $B(-1;e)$, $y=e^{-x}$.

5. Обчисліть за допомогою формули Гріна криволінійний інтеграл по замкненому контуру L, на якому вибраний додатний напрямок.

$\oint_L x^2ydx-xy^2dy$, де L – контур, обмежений колом $x^2+y^2=9$.

Варіант 12

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду вздовж заданої лінії L.

$\int_L \dfrac{y}{x^2}dl$, де L – відрізок прямої $3x-y+1=0$ між $A(1;4)$ і $B(2;7)$.

2. Знайти масу дуги параболи $y=\dfrac{1}{2}x^2$ між точками з абсцисами $x=\sqrt{2}$, $x=\sqrt{3}$, якщо лінійна густина $\rho(x,y)=\dfrac{x}{y}$.

3. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду по замкненому контуру L, який утворюється при перетині зазначених ліній (рухаючись по контуру в додатному напрямі). Зробити малюнок.

$\oint_L (y^2-2x)dx+(x+y)dy$, де L – контур, утворений лініями $x=0$, $y=2$, $x=y^2$.

4. Обчисліть роботу сили $\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j}$ по переміщенню матеріальної точки з точки A в точку B вздовж лінії $y = f(x)$.

$X = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$, $Y = \dfrac{x-y}{x^2-y^2}$, $A(2;0)$, $B(-2;0)$, $y = \sqrt{4-x^2}$.

5. Обчисліть за допомогою формули Гріна криволінійний інтеграл по замкненому контуру L, на якому вибраний додатний напрямок.

$\oint\limits_L y^2dx + x^2dy$, де L – контур трикутника, обмеженого прямими $y = x$, $x = 1$, $y = 0$.

Варіант 13

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду вздовж заданої лінії L.

$\int\limits_L xy\,dl$, де L – дуга кривої $x = 3 + 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{4}$.

2. Знайти масу дуги кривої $y = e^x$ між точками з абсцисами $x = \ln\sqrt{15}$, $x = \ln\sqrt{24}$, якщо лінійна густина $\rho(x, y) = y$.

3. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду по замкненому контуру L, який утворюється при перетині зазначених ліній (рухаючись по контуру в додатному напрямі). Зробити малюнок.

$\oint\limits_L (y^2 - 3x^2)dx - x^3dy$, де L – контур, утворений лініями $x = 0$, $y = 3$, $y = 3x$.

4. Обчисліть роботу сили $\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j}$ по переміщенню матеріальної точки з точки A в точку B вздовж лінії $y = f(x)$.

$X = \dfrac{y}{x^2}$, $Y = \dfrac{1}{x}$, $A(1;2)$, $B(2;1)$, $y = -x + 3$.

5. Обчисліть за допомогою формули Гріна криволінійний інтеграл по замкненому контуру L, на якому вибраний додатний напрямок.

$\oint\limits_L xy^2dx + x^3\,dy$, де L – контур трикутника з вершинами $A(0;0)$, $B(2;0)$, $C(1{,}1)$.

Варіант 14

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду вздовж заданої лінії L.

$\int\limits_L x^2y\,dl$, де L – дуга кола $x=2cost$, $y=2sint$, $0\le t\le\frac{\pi}{3}$.

2. Знайти масу дуги кривої $y=\arcsin x-\sqrt{1-x^2}$ між точками з абсцисами $x=0$, $x=1$, якщо лінійна густина $\rho(x,y)=x$.

3. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду по замкненому контуру *L*, який утворюється при перетині зазначених ліній (рухаючись по контуру в додатному напрямі). Зробити малюнок.

$\oint\limits_L (x^2+y)dx-x^2dy$, де *L* – контур, утворений лініями $x=2$, $y=1$, $y=x^2+1$.

4. Обчисліть роботу сили $\vec{F}=X\vec{i}+Y\vec{j}$ по переміщенню матеріальної точки з точки A в точку B вздовж лінії $y=f(x)$.

$X=e^x+xy$, $Y=e^y-x$, $A(0;0)$, $B(2;1)$, $y=\frac{1}{2}x$.

5. Обчисліть за допомогою формули Гріна криволінійний інтеграл по замкненому контуру *L*, на якому вибраний додатний напрямок.

$\oint\limits_L (x^2-4y)dx+(2xy+3)\,dy$, де L – контур, обмежений параболою $y=x^2+1$і прямою $y=x+1$.

Варіант 15

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду вздовж заданої лінії L.

$\int\limits_L (x+y)^2dl$, де L – відрізок прямої $2x+y=2$ між $A(0;2)$ і $B(1;0)$.

2. Знайти масу дуги параболи $y=4-x^2$ між точками з абсцисами $x=-1$, $x=\sqrt{2}$, якщо лінійна густина $\rho(x,y)=\frac{x}{y}$.

3. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду по замкненому контуру *L*, який утворюється при перетині зазначених ліній (рухаючись по контуру в додатному напрямі). Зробити малюнок.

$\oint\limits_L (2x+y)dx+xy\,dy$, де *L*– контур, утворений лініями $x=1$, $y=2$, $y=2x-2$.

4. Обчисліть роботу сили $\vec{F}=X\vec{i}+Y\vec{j}$ по переміщенню матеріальної точки з точки A в точку B вздовж лінії $y=f(x)$.

$X=x+y$, $Y=xy$, $A(1;2)$, $B(2;1)$, $y=\frac{2}{x}$.

5. Обчисліть за допомогою формули Гріна криволінійний інтеграл по замкненому контуру *L*, на якому вибраний додатний напрямок.

$\oint\limits_L x^3dx + \frac{x^2y}{2}dy$, де L – контур трикутника з вершинами $A(0;0)$, $B(0;1)$, $C(1,0)$.

Варіант 16

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду вздовж заданої лінії *L*.

$\int\limits_L \sqrt{y+1}\,dl$, де L – відрізок прямої $2x - y = 2$ між $A(0;-2)$ і $B(1;0)$.

2. Знайти масу дуги кривої $y^2 = (x-1)^3$ між точками з абсцисами $x = 1$, $x = 3$, якщо лінійна густина $\rho(x,y) = x\sqrt[3]{y^2}$.

3. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду по замкненому контуру *L*, який утворюється при перетині зазначених ліній (рухаючись по контуру в додатному напрямі). Зробити малюнок.

$\oint\limits_L (x+y)dx - x\sqrt{y}\,dy$, де L – контур, утворений лініями $y = 0$, $x = 1$, $y = 4x^2$.

4. Обчисліть роботу сили $\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j}$ по переміщенню матеріальної точки з точки A в точку B вздовж лінії $y = f(x)$.

$X = 3x - y^2$, $Y = y - x^3$, $A(0;0)$, $B(8;2)$, $y = \sqrt[3]{x}$.

5. Обчисліть за допомогою формули Гріна криволінійний інтеграл по замкненому контуру *L*, на якому вибраний додатний напрямок.

$\oint\limits_L xydx + dy$, де L – замкнений контур, утворений лініями $y = x^2$, $y = 1$, $x = 0$.

Варіант 17

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду вздовж заданої лінії *L*.

$\int\limits_L \sqrt{x}y\,dl$, де L – дуга кривої $x = 3 + \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

2. Знайти масу дуги гіперболи $xy = 4$ між точками з абсцисами $x = 1$, $x = 4$, якщо лінійна густина $\rho(x,y) = \frac{x^2}{y^3}$.

3. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду по замкненому контуру *L*, який утворюється при перетині зазначених ліній (рухаючись по контуру в додатному напрямі). Зробити малюнок.

$\oint\limits_L xy\,dx-(x-2y)dy$, де L – контур, утворений лініями $x=0$, $y=1$, $y=3-x$.

4. Обчисліть роботу сили $\vec{F}=X\vec{i}+Y\vec{j}$ по переміщенню матеріальної точки з точки A в точку B вздовж лінії $y=f(x)$.

$X=2xy$, $Y=x^2-y^2$, $A(1;-1)$, $B(4;-2)$, $y=\sqrt{x}$.

5. Обчисліть за допомогою формули Гріна криволінійний інтеграл по замкненому контуру *L*, на якому вибраний додатний напрямок.

$\oint\limits_L y^3dx-x^3\,dy$, де L – замкнений контур, утворений лініями $y=\sqrt{x}$, $y=-x^2$, $x=2$.

Варіант 18

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду вздовж заданої лінії *L*.

$\int\limits_L x^2y\,dl$, де L – відрізок прямої $x-y+2=0$ між $A(0;2)$ і $B(2;4)$.

2. Знайти масу дуги півкола $x^2+y^2=1$, $y\ge 0$, якщо густина його в точці $(x;y)$ дорівнює y.

3. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду по замкненому контуру *L*, який утворюється при перетині зазначених ліній (рухаючись по контуру в додатному напрямі). Зробити малюнок.

$\oint\limits_L (x-3y^2)dx+\dfrac{x}{y}dy$, де L– контур, утворений лініями $x=0$, $y=1$, $x=4y^2$.

4. Обчисліть роботу сили $\vec{F}=X\vec{i}+Y\vec{j}$ по переміщенню матеріальної точки з точки A в точку B вздовж лінії $y=f(x)$.

$X=y^2-4x$, $Y=x^2y$, $A(1;1)$, $B(2;8)$, $y=x^3$.

5. Обчисліть за допомогою формули Гріна криволінійний інтеграл по замкненому контуру *L*, на якому вибраний додатний напрямок.

$\oint\limits_L -y^2dx+\dfrac{x^3}{3}dy$, де L – контур прямокутника $0\le x\le 1$, $0\le y\le 2$.

Варіант 19

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду вздовж заданої лінії L.

$\int\limits_L (y-x)dl$, де L – дуга кривої $x=5\cos t,\ y=5(1+\sin t),\ 0\le t\le \pi$.

2. Знайти масу дуги параболи $y^2=4x,\ (0\le x\le 1)$, якщо лінійна густина параболи в точці $(x;y)$ дорівнює $|y|$.

3. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду по замкненому контуру L, який утворюється при перетині зазначених ліній (рухаючись по контуру в додатному напрямі). Зробити малюнок.

$\oint\limits_L (y-3x^2)dx - x^2y\,dy$, де L – контур, утворений лініями $x=0$, $y=2$, $y=2x$.

4. Обчисліть роботу сили $\vec{F}=X\vec{i}+Y\vec{j}$ по переміщенню матеріальної точки з точки A в точку B вздовж лінії $y=f(x)$.

$X=2x-y$, $Y=x^2+xy$, $A(4;2)$, $B(1;1)$, $y=\sqrt{x}$.

5. Обчисліть за допомогою формули Гріна криволінійний інтеграл по замкненому контуру L, на якому вибраний додатний напрямок.

$\oint\limits_L (xy+x^2+y)dx+(xy+x-y^3)\,dy$, де L – замкнений контур, утворений лініями $y=\sqrt{x}$, $y=x$.

Варіант 20

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду вздовж заданої лінії L.

$\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{y+5}}$, де L – відрізок прямої $2x-y=4$ між $A(0;-4)$ і $B(2;0)$.

2. Знайти масу дуги параболи $y=\frac{x^2}{2}$, що лежить між точками $\left(1;\frac{1}{2}\right)$ і $\left(2;2\right)$, якщо лінійна густина дорівнює $\frac{y}{x}$.

3. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду по замкненому контуру L, який утворюється при перетині зазначених ліній (рухаючись по контуру в додатному напрямі). Зробити малюнок.

$\oint\limits_L (2x+y^2)dx+3\sqrt{x}\,dy$, де L– контур, утворений лініями $x=0$, $y=2$, $x=y^2$.

4. Обчисліть роботу сили $\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j}$ по переміщенню матеріальної точки з точки A в точку B вздовж лінії $y = f(x)$.

$X = x^3$, $Y = 2x - y$, $A(2;-8)$, $B(1;-1)$, $y = -x^3$.

5. Обчисліть за допомогою формули Гріна криволінійний інтеграл по замкненому контуру L, на якому вибраний додатний напрямок.

$\oint\limits_L (3x^2 + y)dx + (x^3 - xy)\,dy$, де L – контур, утворений лініями $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$, $y = \dfrac{3-x}{2}$.

Варіант 21

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду вздовж заданої лінії L.

$\int\limits_L x\sqrt{y}\,dl$, де L– дуга кривої $x = \cos t$, $y = 4 + \sin t$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{6}$.

2. Знайти масу дуги кривої $y = 1 - \ln\cos x$ між точками з абсцисами $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{4}$, якщо густина маси в кожній точці кривої дорівнює 1.

3. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду по замкненому контуру L, який утворюється при перетині зазначених ліній (рухаючись по контуру в додатному напрямі). Зробити малюнок.

$\oint\limits_L (\sqrt{y} + 2x)dx + \dfrac{y}{x}dy$, де L– контур, утворений лініями $x = 1, y = 0$, $y = 4x^2$.

4. Обчисліть роботу сили $\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j}$ по переміщенню матеріальної точки з точки A в точку B вздовж лінії $y = f(x)$.

$X = x^4 + 1$, $Y = xy - y^3$, $A(1;3)$, $B(3;1)$, $y = \dfrac{3}{x}$.

5. Обчисліть за допомогою формули Гріна криволінійний інтеграл по замкненому контуру L, на якому вибраний додатний напрямок.

$\oint\limits_L (yx^3 + e^y)dx + (xy^3 + xe^y - \sin y)\,dy$, де L– контур, утворений лініями $x = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $y = 1$.

Варіант 22

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду вздовж заданої лінії L.

$\int\limits_L (x+2y)\,dl$, де L – дуга кола $x=4\cos t,\ y=4\sin t,\quad \frac{\pi}{4}\le t\le\frac{3\pi}{4}$.

2. Знайти масу дуги параболи $y=2x^2$ від точки $(1;1)$ до точки $(2;8)$, якщо лінійна густина дорівнює $\rho(x,y)=\frac{y}{x}$.

3. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду по замкненому контуру L, який утворюється при перетині зазначених ліній (рухаючись по контуру в додатному напрямі). Зробити малюнок.

$\oint\limits_L (2x+y)dx+(y-x)dy$, де L – контур, утворений лініями $x=1, y=0$, $y=4-x$.

4. Обчисліть роботу сили $\vec{F}=X\vec{i}+Y\vec{j}$ по переміщенню матеріальної точки з точки A в точку B вздовж лінії $y=f(x)$.

$X=y$, $Y=x$, $A(0;3)$, $B(3;0)$, $y=\sqrt{9-x^2}$.

5. Обчисліть за допомогою формули Гріна криволінійний інтеграл по замкненому контуру L, на якому вибраний додатний напрямок.

$\oint\limits_L (2-y)^2dx-(4x-\cos y-2xy+x^2)dy$, де L– контур, утворений лініями $x=1$, $x=2$, $y=0$, $x+y=2$.

Варіант 23

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду вздовж заданої лінії L.

$\int\limits_L \sqrt{x}y\,dl$, де L – дуга кривої $x=1+3\cos t,\ y=3\sin t,\quad 0\le t\le\frac{\pi}{2}$.

2. Знайти масу дуги параболи $y^2=2x$ від точки $(1;\sqrt{2})$ до точки $(2;2)$, якщо лінійна густина дорівнює $\rho(x,y)=\frac{x}{y}$.

3. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду по замкненому контуру L, який утворюється при перетині зазначених ліній (рухаючись по контуру в додатному напрямі). Зробити малюнок.

$\oint\limits_L (y^2 - 3x^2)dx + x^2 dy$, де L– контур, утворений лініями $y = 4$, $x = 1$, $y = 2x$.

4. Обчисліть роботу сили $\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j}$ по переміщенню матеріальної точки з точки A в точку B вздовж лінії $y = f(x)$.

$X = x^2 y - xy^2$, $Y = x^2 + y^2$, $A(-1;2)$, $B(4;32)$, $y = 2x^2$.

5. Обчисліть за допомогою формули Гріна криволінійний інтеграл по замкненому контуру L, на якому вибраний додатний напрямок.

$\oint\limits_L (e^x \sin y - y + x)dx + (e^x \cos y + y - 2)dy$, де L – контур, обмежений колом $x^2 + y^2 = 4y$.

Варіант 24

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду вздовж заданої лінії L.

$\int\limits_L \frac{y^2}{x} dl$, де L – відрізок прямої $x - y + 2 = 0$ між $A(1;3)$ і $B(2;4)$.

2. Знайти масу дуги косинусоїди $y = 2\cos\frac{x}{2}$ між точками з абсцисами $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, якщо лінійна густина $\rho(x;y) = x$.

3. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду по замкненому контуру L, який утворюється при перетині зазначених ліній (рухаючись по контуру в додатному напрямі). Зробити малюнок.

$\oint\limits_L (x + 2y)dx - y\,dy$, де L – контур, утворений лініями $y = 2$, $x = 1$, $y = x - 1$.

4. Обчисліть роботу сили $\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j}$ по переміщенню матеріальної точки з точки A в точку B вздовж лінії $y = f(x)$.

$X = xy$, $Y = 2x + y$, $A(1;1)$, $B(-2;8)$, $y = x^3$.

5. Обчисліть за допомогою формули Гріна криволінійний інтеграл по замкненому контуру L, на якому вибраний додатний напрямок.

$\oint\limits_L \ln\sin y dx + x^2 dy$, де L– контур, утворений лініями $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$, $y = \frac{1}{x}$.

Варіант 25

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду вздовж заданої лінії L.

$\int\limits_L (2y-x)dl$, де L – дуга кривої $x=3\cos t,\ \ y=3(1+\sin t),\quad 0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$.

2. Знайти масу дуги кривої $y=1-\ln(x^2-1)$ між точками з абсцисами $x=3$ і $x=4$, якщо густина кривої в кожній точці дорівнює квадрату абсциси точки.

3. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду по замкненому контуру L, який утворюється при перетині зазначених ліній (рухаючись по контуру в додатному напрямі). Зробити малюнок.

$\oint\limits_L (y-x^2)dx - x\,dy$, де$L$– контур, утворений лініями $y=1, x=1,\ y=2x^2+1$.

4. Обчисліть роботу сили $\vec{F}=X\vec{i}+Y\vec{j}$ по переміщенню матеріальної точки з точки A в точку B вздовж лінії $y=f(x)$.

$X=2xy$, $Y=-x^2$, $A(0;0)$, $B(2;1)$, $y=\dfrac{x^2}{4}$.

5. Обчисліть за допомогою формули Гріна криволінійний інтеграл по замкненому контуру L, на якому вибраний додатній напрямок.

$\oint\limits_L (e^x\cos y+y^2)dx-(e^x\sin y-x)dy$, де L – контур, обмежений лініями $y=x$, $y=2x$, $x=1$.

Варіант 26

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду вздовж заданої лінії L.

$\int\limits_L (y-x)^2 dl$, де L – відрізок прямої $2x-y+1=0$ між $A(0;1)$ і $B(4;9)$.

2. Знайти масу дуги кривої $y=\sqrt{x^3}$ між точками з абсцисами $x=0$, $x=4$, якщо лінійна густина $\rho(x;y)=\dfrac{2y^2}{x}$.

3. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду по замкненому контуру L, який утворюється при перетині зазначених ліній (рухаючись по контуру в додатному напрямі). Зробити малюнок.

$\oint\limits_L (y^2-2x)dx+xy\,dy$, де L– контур, утворений лініями $x=1,\ \ y=0, y=3x$.

4. Обчисліть роботу сили $\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j}$ по переміщенню матеріальної точки з точки A в точку B вздовж лінії $y = f(x)$.

$X = x^3 + y^3$, $Y = xy$, $A(0;2)$, $B(4;0)$, $y = \dfrac{x}{2} - 2$.

5. Обчисліть за допомогою формули Гріна криволінійний інтеграл по замкненому контуру L, на якому вибраний додатний напрямок.

$\oint\limits_L xydx - y^2\,dy$, де L – замкнений контур, утворений кривими $y = x^2$, $y = 2x^2$, $x = 0$.

Варіант 27

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду вздовж заданої лінії L.

$\int\limits_L xy\,dl$, де L – дуга кривої $x = 1 + 2\cos t,\ y = 1 - 2\sin t,\quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

2. Знайти масу дуги кривої $y = e^x$ між точками з абсцисами $x = 0$, $x = 1$, якщо лінійна густина $\rho(x, y) = y$.

3. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду по замкненому контуру L, який утворюється при перетині зазначених ліній (рухаючись по контуру в додатному напрямі). Зробити малюнок.

$\oint\limits_L (x - y^2)dx + \left(\dfrac{x}{y} + y\right)dy$, де L– контур, утворений лініями $x = 0, y = 2$, $x = 2y$.

4. Обчисліть роботу сили $\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j}$ по переміщенню матеріальної точки з точки A в точку B вздовж лінії $y = f(x)$.

$X = x^2 - 2xy$, $Y = 2xy + y^2$, $A(1;1)$, $B(2;4)$, $y = x^2$.

5. Обчисліть за допомогою формули Гріна криволінійний інтеграл по замкненому контуру L, на якому вибраний додатний напрямок.

$\oint\limits_L x^2 ydx + x^3\,dy$, де L – контур, обмежений параболами $y = x^2$, $x = y^2$.

Варіант 28

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду вздовж заданої лінії L.

$\int\limits_L x^2y^2dl$, де L – відрізок прямої $x-y+2=0$ між $A(0;2)$ і $B(3;5)$.

2. Знайти масу дуги параболи $y=\frac{1}{2}x^2$ між точками з абсцисами $x=\sqrt{2}$, $x=\sqrt{3}$, якщо лінійна густина $\rho(x,y)=\frac{x}{y}$.

3. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду по замкненому контуру *L*, який утворюється при перетині зазначених ліній (рухаючись по контуру в додатному напрямі). Зробити малюнок.

$\oint\limits_l y^2dx-xy\,dy$, де L – контур, утворений лініями $x=2$, $y=1$, $y=x+1$.

4. Обчисліть роботу сили $\vec{F}=X\vec{i}+Y\vec{j}$ по переміщенню матеріальної точки з точки A в точку B вздовж лінії $y=f(x)$.

$X=x-y^2$, $Y=x+y^2$, $A(0;-3)$, $B(2;1)$, $y=2x-3$.

5. Обчисліть за допомогою формули Гріна криволінійний інтеграл по замкненому контуру *L*, на якому вибраний додатний напрямок.

$\oint\limits_L (xy+x+y)dx+(xy+x-y)\,dy$, де L – коло $x^2+y^2=2x$.

Варіант 29

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду вздовж заданої лінії *L*.

$\int\limits_L (x-3y)\,dl$, де L – дуга кривої $x=1+2\cos t$, $y=2\sin t$, $\frac{\pi}{2}\le t\le\pi$.

2. Знайти масу дуги кривої $y=e^x$ між точками з абсцисами $x=\ln\sqrt{15}$, $x=\ln\sqrt{24}$, якщо лінійна густина $\rho(x,y)=y$.

3. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду по замкненому контуру *L*, який утворюється при перетині зазначених ліній (рухаючись по контуру в додатному напрямі). Зробити малюнок.

$\oint\limits_L (2x+y)dx-x\,dy$, де L– контур, утворений лініями $y=1$, $x=1$, $y=1-x^2$.

4. Обчисліть роботу сили $\vec{F}=X\vec{i}+Y\vec{j}$ по переміщенню матеріальної точки з точки A в точку B вздовж лінії $y=f(x)$.

$X=x^2-xy$, $Y=xy+y^2$, $A(1;1)$, $B(2;8)$, $y=x^3$.

5. Обчисліть за допомогою формули Гріна криволінійний інтеграл по замкненому контуру L, на якому вибраний додатний напрямок.

$\oint\limits_L (x-y)^2 dx + (x+y)^2 dy$, де L – контур трикутника з вершинами $A(0;0)$, $B(2;0)$, $C(4,2)$.

Варіант 30

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду вздовж заданої лінії L.

$\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{4x+y}}$, де L – відрізок прямої $3x+y=3$ між $A(0;3)$ і $B(1;0)$.

2. Знайти масу дуги кривої $y=\arcsin x-\sqrt{1-x^2}$ між точками з абсцисами $x=0$, $x=1$, якщо лінійна густина $\rho(x,y)=x$.

3. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду по замкненому контуру L, який утворюється при перетині зазначених ліній (рухаючись по контуру в додатному напрямі). Зробити малюнок.

$\oint\limits_L xy\,dx-(x+y)dy$, де L– контур, утворений лініями $x=0$, $y=1$, $y=4-x$.

4. Обчисліть роботу сили $\vec{F}=X\vec{i}+Y\vec{j}$ по переміщенню матеріальної точки з точки A в точку B вздовж лінії $y=f(x)$.

$X=x^4+4xy^3$, $Y=6x^2y^2-5y^4$, $A(0;1)$, $B(-1;2)$, $y=-x+1$.

5. Обчисліть за допомогою формули Гріна криволінійний інтеграл по замкненому контуру L, на якому вибраний додатний напрямок.

$\oint\limits_L x^2 y dx - xy^2 dy$, де L – контур, обмежений колом $x^2+y^2=9$.

3.5 Варіанти індивідуальної розрахунково-графічної роботи з теми «Поверхневі інтеграли»

Варіант 1

1. Обчисліть поверхневий інтеграл першого роду $\iint\limits_S (3x-y+4z)dS$, де S – частина площини, розміщена в першому октанті.

2. Обчисліть поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_S x^2 dydz + y^2 dxdz$, де S – поверхня сторона конуса $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$, розташованого над площиною xOy .

3. Обчисліть поверхневий інтеграл

$$\iint\limits_S (x+2z)dydz - (y-z)dxdy, \; S:\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ z = x, \quad z = 0 (z \geq 0), \end{cases}$$

через зовнішню сторону замкненої поверхні S, що обмежує тіло G, за допомогою формули Остроградського-Гаусса.

4. Обчисліть за допомогою формули Стокса криволінійний інтеграл

$$\oint\limits_L zdx + xdy + ydz, \; L:\begin{cases} z = 17(x^2 + y^2) - 3, \\ z = 68x - 3 \end{cases}$$

по замкненому контуру L. Напрям на L відповідає додатному напряму його проекції на площину Oxy.

Варіант 2

1. Обчисліть поверхневий інтеграл першого роду $\iint\limits_S xydS$, де S – частина поверхні $z = x^2 + y^2$, що відтинається площиною $z = 1$.

2. Обчисліть поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_S \left(\frac{dydz}{x} + \frac{dxdz}{y} + \frac{dxdy}{z} \right)$, де S – зовнішня сторона сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

3. Обчисліть поверхневий інтеграл

$$\iint\limits_S 2xdydz + zdxdy, \; S:\begin{cases} z = x^2 + y^2 + 1, \\ x^2 + y^2 = 4, \quad z = 0, \end{cases}$$

через зовнішню сторону замкненої поверхні S, що обмежує тіло G, за допомогою формули Остроградського-Гаусса.

4. Обчисліть за допомогою формули Стокса криволінійний інтеграл

$$\oint\limits_L ydx - xdy + zdz, \; L:\begin{cases} z = 13((x-2)^2 + y^2) - 5, \\ z = -52x + 60 \end{cases}$$

по замкненому контуру L. Напрям на L відповідає додатному напряму його проекції на площину Oxy.

Варіант 3

1. Обчисліть поверхневий інтеграл першого роду $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\,dS$, де S – півсфера $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$.
2. Обчисліть поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_S (y-z)dydz+(x-y)dxdy$, де S – зовнішня сторона конічної поверхні $x^2=y^2+z^2$, $0\le x\le 2$.
3. Обчисліть поверхневий інтеграл

$$\iint\limits_S 2xdydz+2ydxdz+zdxdy,\ S:\begin{cases} y=x^2, \quad y=4x^2, \quad y=1(x\ge 0), \\ z=y, \quad z=0, \end{cases}$$

через зовнішню сторону замкненої поверхні S, що обмежує тіло G, за допомогою формули Остроградського-Гаусса.
4. Обчисліть за допомогою формули Стокса криволінійний інтеграл

$$\oint\limits_L zy^2dx+xz^2dy+x^2ydz,\ L:\begin{cases} z=7-5(x^2+y^2), \\ z=10x+7 \end{cases}$$

по замкненому контуру L. Напрям на L відповідає додатному напряму його проекції на площину Oxy.

Варіант 4

1. Обчисліть поверхневий інтеграл першого роду $\iint\limits_S xdS$, де S – частина поверхні $z=2-\dfrac{x^2+y^2}{2}$, розміщена над площиною Oxy.
2. Обчисліть поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_S (9+y^2+z^2)dydz$, де S – зовнішня сторона параболоїда $6x=y^2+z^2$, що відтинається площиною $x=6$.
3. Обчисліть поверхневий інтеграл

$$\iint_S 3xdydz - zdxdz\,,\ S: \begin{cases} z = 6 - x^2 - y^2, \\ z^2 = x^2 + y^2, (z \geq 0), \end{cases}$$

через зовнішню сторону замкненої поверхні S, що обмежує тіло G, за допомогою формули Остроградського-Гаусса.

4. Обчисліть за допомогою формули Стокса криволінійний інтеграл

$$\oint_L z^2 dx\,,\ L: \begin{cases} z = 3(x^2 + y^2) + 9, \\ z = -12x + 9 \end{cases}$$

по замкненому контуру L. Напрям на L відповідає додатному напряму його проекції на площину Oxy.

Варіант 5

1. Обчисліть поверхневий інтеграл першого роду $\iint_S xyzdS$, де S – частина поверхні $z = x^2 + y^2$, розміщена між площинами $z = 0$, $z = 2$.

2. Обчисліть поверхневий інтеграл другого роду $\iint_S (2y - z)dydz + (z - x)dxdz$, де S – верхня сторона трикутника, вирізаного із площини $2x - y + z = 2$, координатними площинами.

3. Обчисліть поверхневий інтеграл

$$\iint_S (z + y)dydz + ydxdz - 3dxdy\,,\ S: \begin{cases} 2y = x^2 + z^2, \\ y = 2, \end{cases}$$

через зовнішню сторону замкненої поверхні S, що обмежує тіло G, за допомогою формули Остроградського-Гаусса.

4. Обчисліть за допомогою формули Стокса криволінійний інтеграл

$$\oint_L 2xzdx - ydy + zdz\,,\ L: \begin{cases} z = 4(x^2 + (y + 3)^2) - 1, \\ z = 24x + 39 \end{cases}$$

по замкненому контуру L. Напрям на L відповідає додатному напряму його проекції на площину Oxy.

Варіант 6

1. Обчисліть поверхневий інтеграл першого роду $\iint\limits_S ydS$, де S – частина поверхні $z = 1 - x^2 - y^2$, розміщена над площиною Oxy.

2. Обчисліть поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_S \frac{dxdz}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, де S – зовнішня частина циліндричної поверхні $x^2 + y^2 = 9$, розміщена між площинами $z = 0$, $z = 4$.

3. Обчисліть поверхневий інтеграл

$$\iint\limits_S xdydz - (2x + 3y)dxdz + ydxdy, \ S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \quad z = 0, \\ x + 2y + 3z = 6, \end{cases}$$

через зовнішню сторону замкненої поверхні S, що обмежує тіло G, за допомогою формули Остроградського-Гаусса.

4. Обчисліть за допомогою формули Стокса криволінійний інтеграл

$$\oint\limits_L ydx - xdy + zdz, \ L: \begin{cases} z = 4(x^2 + y^2) + 21, \\ z = -16x + 21 \end{cases}$$

по замкненому контуру L. Напрям на L відповідає додатному напряму його проекції на площину Oxy.

Варіант 7

1. Обчисліть поверхневий інтеграл першого роду $\iint\limits_S (x^2 + y^2)dS$, де S – частина поверхні $z = x^2 + y^2$, що відтинається площиною $z = 1$.

2. Обчисліть поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_S (x + y)dydz + (y + z)dxdy$, де S – верхня сторона трикутника, вирізаного із площини $3x + y + 3z - 3 = 0$ координатними площинами.

3. Обчисліть поверхневий інтеграл

$$\iint\limits_S 2(z - y)dxdz + (x - z)dxdy, \ S: \begin{cases} z = x^2 + y^2 + 1, \quad z = 0, \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$$

через зовнішню сторону замкненої поверхні S, що обмежує тіло G, за допомогою формули Остроградського-Гаусса.

4. Обчисліть за допомогою формули Стокса криволінійний інтеграл

$$\oint\limits_L y^2dx + z^2dz\,,\ L:\begin{cases} z = 5(x^2 + (y-2)^2) - 8, \\ z = -20x + 17 \end{cases}$$

по замкненому контуру L. Напрям на L відповідає додатному напряму його проекції на площину Oxy.

Варіант 8

1. Обчисліть поверхневий інтеграл першого роду $\iint\limits_S (x - 3y + 2z)dS$, де S – частина площини $x + 2y + 4z = 4$, розміщена в першому октанті.

2. Обчисліть поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_S \frac{\sqrt{x^2 + y^2}dxdy}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}$, де S – верхня сторона півсфери $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$.

3. Обчисліть поверхневий інтеграл

$$\iint\limits_S xdydz + zdxdz - ydxdy\,,\ S:\begin{cases} z = 4 - 2(x^2 + y^2), \\ z = 2(x^2 + y^2), \end{cases}$$

через зовнішню сторону замкненої поверхні S, що обмежує тіло G, за допомогою формули Остроградського-Гаусса.

4. Обчисліть за допомогою формули Стокса криволінійний інтеграл

$$\oint\limits_L z^3dx + x^3dy + y^3dz\,,\ L:\begin{cases} z = 8(x^2 + y^2) - 11, \\ z = 32x - 11 \end{cases}$$

по замкненому контуру L. Напрям на L відповідає додатному напряму його проекції на площину Oxy.

Варіант 9

1. Обчисліть поверхневий інтеграл першого роду $\iint\limits_S xdS$, де S – частина площини $z = y$, обмежена площинами $x + y = 2$, $x = 0$, $y = 0$.

2. Обчисліть поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_S (y^2+z^2)\sqrt{4+y^2+z^2}\,dydz$, де S – зовнішня сторона поверхні параболоїда $4x = y^2 + z^2$, що відтинається площиною $x = 4$.

3. Обчисліть поверхневий інтеграл

$$\iint\limits_S zdydz - 4ydxdz + 2xdxdy\,,\ S:\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ z = 1, \end{cases}$$

через зовнішню сторону замкненої поверхні S, що обмежує тіло G, за допомогою формули Остроградського-Гаусса.

4. Обчисліть за допомогою формули Стокса криволінійний інтеграл

$$\oint\limits_L z^2dx + x^2dy + y^2dz\,,\ L:\begin{cases} z = 2((x-3)^2 + y^2) + 5, \\ z = -12x + 25 \end{cases}$$

по замкненому контуру L. Напрям на L відповідає додатному напряму його проекції на площину Oxy.

Варіант 10

1. Обчисліть поверхневий інтеграл першого роду $\iint\limits_S zdS$, де S – частина поверхні $z = 4 - x^2 - y^2$, розміщена над площиною Oxy.

2. Обчисліть поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_S \sqrt{x^2 + 2y^2}\,dxdy$, де S – верхня сторона півсфери $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

3. Обчисліть поверхневий інтеграл

$$\iint\limits_S 4xdydz - 2ydxdz - zdxdy\,,\ S:\begin{cases} 3x + 2y = 12, \\ 3x + y = 6, \quad y = 0, \\ x + y + z = 6, \quad z = 0, \end{cases}$$

через зовнішню сторону замкненої поверхні S, що обмежує тіло G, за допомогою формули Остроградського-Гаусса.

4. Обчисліть за допомогою формули Стокса криволінійний інтеграл

$$\oint\limits_L -ydx + xdy\,,\ L:\begin{cases} z = 5(x^2 + y^2) + 17, \\ z = 30x + 17 \end{cases}$$

по замкненому контуру L. Напрям на L відповідає додатному напряму його проекції на площину Oxy.

Варіант 11

1. Обчисліть поверхневий інтеграл першого роду $\iint\limits_S \frac{5x+2z}{3}dS$, де S – частина площини $2x+y+2z-2=0$, розміщена в першому октанті.

2. Обчисліть поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_S (2x+y)dydz+(x-2)dxdy$, де S – верхня сторона площини $x+y-2z-2=0$, розташована між координатними площинами.

3. Обчисліть поверхневий інтеграл

$$\iint\limits_S 8xdydz-8ydxdz+xdxdy,\ S:\begin{cases} x+y=1, \quad x=0, \quad y=0, \\ z=x^2+y^2, \quad z=0, \end{cases}$$

через зовнішню сторону замкненої поверхні S, що обмежує тіло G, за допомогою формули Остроградського-Гаусса.

4. Обчисліть за допомогою формули Стокса криволінійний інтеграл

$$\oint\limits_L (x+y)dx+(x-z)dy+(y+z)dz,\ L:\begin{cases} z=3((x+2)^2+y^2)-2, \\ z=12x+13 \end{cases}$$

по замкненому контуру L. Напрям на L відповідає додатному напряму його проекції на площину Oxy.

Варіант 12

1. Обчисліть поверхневий інтеграл першого роду $\iint\limits_S \frac{dS}{(1+x+y)^2}$, де S – частина площини $x+y+z=1$, розміщена в першому октанті.

2. Обчисліть поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_S zdxdy$, де S – верхня частина поверхні $z=1-(x^2+y^2)$, розташована над площиною xOy.

3. Обчисліть поверхневий інтеграл

4. $$\iint\limits_S zdydz+xdxdz-zdxdy,\ S:\begin{cases} 4z=x^2+y^2, \\ z=4, \end{cases}$$

через зовнішню сторону замкненої поверхні S, що обмежує тіло G, за допомогою формули Остроградського-Гаусса.

5. Обчисліть за допомогою формули Стокса криволінійний інтеграл

$$\oint_L ydx - xdy - 4dz\,,\ L: \begin{cases} z = 7(x^2 + y^2) - 19, \\ z = 28x - 19 \end{cases}$$

по замкненому контуру L. Напрям на L відповідає додатному напряму його проекції на площину Oxy.

Варіант 13

1. Обчисліть поверхневий інтеграл першого роду $\iint_S zdS$, де S – частина поверхні циліндра $x^2 + z^2 = 4$, що відтинається площинами $y = 0$, $y = 3$.
2. Обчисліть поверхневий інтеграл другого роду $\iint_S x^2 dydz$, де S – зовнішня сторона сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
3. Обчисліть поверхневий інтеграл

$$\iint_S 6xdydz - 2ydxdz - zdxdy\,,\ S: \begin{cases} z = 3 - 2(x^2 + y^2), \\ z^2 = x^2 + y^2, (z \ge 0). \end{cases}$$

через зовнішню сторону замкненої поверхні S, що обмежує тіло G, за допомогою формули Остроградського-Гаусса.

4. Обчисліть за допомогою формули Стокса криволінійний інтеграл

$$\oint_L (x + 3y + 2z)dx + (2x + z)dy + (x - y)dz\,,\ L: \begin{cases} z = 7((x+1)^2 + y^2) + 4, \\ z = 14x + 18 \end{cases}$$

по замкненому контуру L. Напрям на L відповідає додатному напряму його проекції на площину Oxy.

Варіант 14

1. Обчисліть поверхневий інтеграл першого роду $\iint_S (x^2 + y^2)dS$, де S – бічна поверхня конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, що відтинається площиною $z = 5$.

2. Обчисліть поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_S zdxdy$, де S – зовнішня сторона еліпсоїда $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{3^2}+\frac{z^2}{4^2}=1$.

3. Обчисліть поверхневий інтеграл

$$\iint\limits_S (z+y)dydz+(x-z)dxdz+zdxdy\ ,\ S:\begin{cases} x^2+4y^2=4, \\ 3x+4y+z=12, \quad z=1, \end{cases}$$

через зовнішню сторону замкненої поверхні S, що обмежує тіло G, за допомогою формули Остроградського-Гаусса.

4. Обчисліть за допомогою формули Стокса криволінійний інтеграл

$$\oint\limits_L x^2y^3dx+dy+zdz\ ,\ L:\begin{cases} z=13(x^2+y^2)-1, \\ z=52x-1 \end{cases}$$

по замкненому контуру L. Напрям на L відповідає додатному напряму його проекції на площину Oxy.

Варіант 15

1. Обчисліть поверхневий інтеграл першого роду $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}dS$, де S – бічна поверхня конуса $z^2=x^2+y^2$, що відтинається площиною $z=3$.

2. Обчисліть поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_S yzdydz+xzdxdz$, де S – верхня сторона площини $x+2y+z=4$, розташована між координатними площинами.

3. Обчисліть поверхневий інтеграл

$$\iint\limits_S (y+2z)dydz+(2-y)dxdz+3xdxdy,\ S:\begin{cases} 3z=27-2(x^2+y^2), \\ z^2=x^2+y^2, \quad z=0, \end{cases}$$

через зовнішню сторону замкненої поверхні S, що обмежує тіло G, за допомогою формули Остроградського-Гаусса.

4. Обчисліть за допомогою формули Стокса криволінійний інтеграл

$$\oint\limits_L ydx+(x-1)^2dy+zdz\ ,\ L:\begin{cases} z=5(x^2+y(y-1)^2)+1, \\ z=-10x+11 \end{cases}$$

по замкненому контуру L. Напрям на L відповідає додатному напряму його проекції на площину Oxy.

Варіант 16

1. Обчисліть поверхневий інтеграл першого роду $\iint\limits_S \frac{dS}{x^2+y^2+z^2}$, де S – частина поверхні циліндра $x^2+y^2=1$, що відтинається площинами $z=0$ і $z=2$.
2. Обчисліть поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_S z^2dxdy$, де S – зовнішня сторона еліпсоїда $x^2+y^2+2z^2=2$.
3. Обчисліть поверхневий інтеграл

$$\iint\limits_S (y+6x)dydz+(5x+2y)dxdz+4ydxdy,\ S:\begin{cases} y=x, \quad y=2x, \quad x=2, \\ z=x^2+y^2, \quad z=0, \end{cases}$$

через зовнішню сторону замкненої поверхні S, що обмежує тіло G, за допомогою формули Остроградського-Гаусса.

4. Обчисліть за допомогою формули Стокса криволінійний інтеграл

$$\oint\limits_L xyzdx+(x+y+z)dy-x^2y^2dz,\ L:\begin{cases} z=11(x^2+y^2)+12, \\ z=-44x+12 \end{cases}$$

по замкненому контуру L. Напрям на L відповідає додатному напряму його проекції на площину Oxy.

Варіант 17

1. Обчисліть поверхневий інтеграл першого роду $\iint\limits_S (x^2+y^2)dS$, де S – сфера $x^2+y^2+z^2=1$.
2. Обчисліть поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_S (y^2+z^2)dydz$, де S – верхня сторона параболоїда $x=4-y^2-z^2$, розміщена над Oyz.
3. Обчисліть поверхневий інтеграл

$$\iint\limits_S ydydz+5ydxdz+zdxdy\,,\ S:\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ z=x,\quad z=0,(z\ge 0),\end{cases}$$

через зовнішню сторону замкненої поверхні S, що обмежує тіло G, за допомогою формули Остроградського-Гаусса.

4. Обчисліть за допомогою формули Стокса криволінійний інтеграл

$$\oint\limits_L (x-2z)dx+(x+3y+z)dy+(5x+y)dz\,,\ L:\begin{cases}z=5-4((x+1)^2+y^2),\\ z=8x-3\end{cases}$$

по замкненому контуру L. Напрям на L відповідає додатному напряму його проекції на площину Oxy.

Варіант 18

1. Обчисліть поверхневий інтеграл першого роду $\iint\limits_S x^2y^2dS$, де S – півсфера $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

2. Обчисліть поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_S (x-y+z)dxdz$, де S – верхня сторона площини $x+y+z=3$ між координатними площинами $x=0$, $y=0$, $z=0$.

3. Обчисліть поверхневий інтеграл

$$\iint\limits_S zdydz+(3y-z)dxdz-zdxdy\,,\ S:\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ z=x^2+y^2+2,\quad z=0,\end{cases}$$

через зовнішню сторону замкненої поверхні S, що обмежує тіло G, за допомогою формули Остроградського-Гаусса.

4. Обчисліть за допомогою формули Стокса криволінійний інтеграл

$$\oint\limits_L (-ydx+xdy+3dz)\,,\ L:\begin{cases}z=3(x^2+y^2)+7,\\ z=18x+7\end{cases}$$

по замкненому контуру L. Напрям на L відповідає додатному напряму його проекції на площину Oxy.

Варіант 19

1. Обчисліть поверхневий інтеграл першого роду $\iint\limits_S ydS$, де S – півсфера $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$.

2. Обчисліть поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_S (x^2+y^2)dydz$, де S – нижня сторона циліндра $x^2+y^2=4$ між площинами $z=0$, $z=2$.

3. Обчисліть поверхневий інтеграл

$$\iint\limits_S ydydz+(x+2y)dxdz+xdxdy,\ S:\begin{cases} x^2+y^2=2x, \\ z=x^2+y^2, \quad z=0, \end{cases}$$

через зовнішню сторону замкненої поверхні S, що обмежує тіло G, за допомогою формули Остроградського-Гаусса.

4. Обчисліть за допомогою формули Стокса криволінійний інтеграл

$$\oint\limits_L (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz,\ L:\begin{cases} z=2-3(x^2+(y+1)^2), \\ z=-6y-4 \end{cases}$$

по замкненому контуру L. Напрям на L відповідає додатному напряму його проекції на площину Oxy.

Варіант 20

1. Обчисліть поверхневий інтеграл першого роду $\iint\limits_S \frac{dS}{(1+x+y)^2}$, де S – частина площини $x+y+z=1$, розміщена в першому октанті.

2. Обчисліть поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_S x^2dxdz$, де S – верхня сторона еліпсоїда $y=3\sqrt{1-\frac{x^2}{4^2}-\frac{z^2}{5^2}}$.

3. Обчисліть поверхневий інтеграл

$$\iint\limits_S (x+y+z)dydz+(2x-x)dxdz+(3z+y)dxdy,\ S:\begin{cases} y=2x, \quad y=2, \quad x=1, \\ z=x^2+y^2, \quad z=0, \end{cases}$$

через зовнішню сторону замкненої поверхні S, що обмежує тіло G, за допомогою формули Остроградського-Гаусса.

4. Обчисліть за допомогою формули Стокса криволінійний інтеграл

$$\oint_L x^2y^3dx + dy + zdz\ ,\ L:\begin{cases} z = 2(x^2+y^2)-13, \\ z = 8y-13 \end{cases}$$

по замкненому контуру L. Напрям на L відповідає додатному напряму його проекції на площину Oxy.

Варіант 21

1. Обчисліть поверхневий інтеграл першого роду $\iint_S xdS$, де S – півсфера $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$.
2. Обчисліть поверхневий інтеграл другого роду $\iint_S (x^2+y^2)dxdy$, де S – верхня сторона півсфери $x^2+y^2+z^2=16$ $(z \ge 0)$.
3. Обчисліть поверхневий інтеграл

$$\iint_S 7xdydz + zdxdz + (x-y+5z)dxdy\ ,\ S:\begin{cases} z = x^2+y^2, \\ z = 2y, \end{cases}$$

через зовнішню сторону замкненої поверхні S, що обмежує тіло G, за допомогою формули Остроградського-Гаусса.

4. Обчисліть за допомогою формули Стокса криволінійний інтеграл

$$\oint_L ydx + zdy + xdz\ ,\ L:\begin{cases} z = 9((x+1)^2+y^2)-7, \\ z = 18x+11 \end{cases}$$

по замкненому контуру L. Напрям на L відповідає додатному напряму його проекції на площину Oxy.

Варіант 22

1. Обчисліть поверхневий інтеграл першого роду $\iint_S (x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2)dS$, де S – поверхня, що відтинається від конуса $z\sqrt{x^2+y^2}$ площиною $z=2$.
2. Обчисліть поверхневий інтеграл другого роду $\iint_S x^2dydz$, де S – верхня сторона півсфери $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$.

3. Обчисліть поверхневий інтеграл

$$\iint_S (x+z)dydz + ydxdy,\ S: \begin{cases} z = 8 - x^2 - y^2, \\ z = x^2 + y^2, \end{cases}$$

через зовнішню сторону замкненої поверхні S, що обмежує тіло G, за допомогою формули Остроградського-Гаусса.

4. Обчисліть за допомогою формули Стокса криволінійний інтеграл

$$\oint_L (x^2 - yz)dx + (y^2 - zx)dy + (z^2 - xy)dz,\ L: \begin{cases} z = 9(x^2 + y^2) + 17, \\ z = -36x + 17 \end{cases}$$

по замкненому контуру L. Напрям на L відповідає додатному напряму його проекції на площину Oxy.

Варіант 23

1. Обчисліть поверхневий інтеграл першого роду $\iint_S (x^2 + 3y)dS$, де S – поверхня, що відтинається від параболоїда $x^2 + y^2 = 2z$ площиною $z = 1$.

2. Обчисліть поверхневий інтеграл другого роду $\iint_S x^2 dydz$, де S – нижня сторона півсфери $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

3. Обчисліть поверхневий інтеграл

$$\iint_S (2y - 3z)dydz + (3x + 2z)dxdz + (x + y + z)dxdy,\ S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 4 - x - y, \quad z = 0, \end{cases}$$

через зовнішню сторону замкненої поверхні S, що обмежує тіло G, за допомогою формули Остроградського-Гаусса.

4. Обчисліть за допомогою формули Стокса криволінійний інтеграл

$$\oint_L y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz,\ L: \begin{cases} z = 8(x^2 + y^2) + 3, \\ z = 16y + 3 \end{cases}$$

по замкненому контуру L. Напрям на L відповідає додатному напряму його проекції на площину Oxy.

Варіант 24

1. Обчисліть поверхневий інтеграл першого роду $\iint\limits_S dS$, де S – півсфера $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$.

2. Обчисліть поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_S xdydz+ydxdz+zdxdy$, де S – зовнішня сторона куба, утвореного площинами $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=1$, $y=1$, $z=1$.

3. Обчисліть поверхневий інтеграл

$$\iint\limits_S (2y-15x)dydz+(z-y)dxdz-(x-3y)dxdy\,,\ S:\begin{cases} z=x^2+y^2+1, \quad z=0, \\ x^2+y^2=\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

через зовнішню сторону замкненої поверхні S, що обмежує тіло G, за допомогою формули Остроградського-Гаусса.

4. Обчисліть за допомогою формули Стокса криволінійний інтеграл

$$\oint\limits_L (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz\,,\ L:\begin{cases} z=10(x-1)^2+10y^2, \\ z=21-20x \end{cases}$$

по замкненому контуру L. Напрям на L відповідає додатному напряму його проекції на площину Oxy.

Варіант 25

1. Обчисліть поверхневий інтеграл першого роду $\iint\limits_S (y+z+\sqrt{4-x^2})dS$, де S – поверхня циліндра $x^2+y^2=4$, що знаходиться між площинами $z=0$, $z=4$.

2. Обчисліть поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_S zdxdy$, де S – зовнішня сторона еліпсоїда $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{4}=1$.

3. Обчисліть поверхневий інтеграл

$$\iint\limits_S (3x-y-z)dydz+3ydxdz+2zdxdy\,,\ S:\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ z=2y, \end{cases}$$

через зовнішню сторону замкненої поверхні S, що обмежує тіло G, за допомогою формули Остроградського-Гаусса.

4. Обчисліть за допомогою формули Стокса криволінійний інтеграл

$$\oint_L (y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz\,,\ L:\begin{cases} z=12(x^2+y^2), \\ z=24x+2 \end{cases}$$

по замкненому контуру L. Напрям на L відповідає додатному напряму його проекції на площину Oxy.

Варіант 26

1. Обчисліть поверхневий інтеграл першого роду $\iint_S xdS$, де S – частина площини $z=y$, обмежена площинами $x+y=2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

2. Обчисліть поверхневий інтеграл другого роду $\iint_S xzdxdy+xydydz+yzdxdz$, де S – зовнішня сторона трикутника, вирізаного із площини $x+y+2z=6$ координатними площинами.

3. Обчисліть поверхневий інтеграл

$$\iint_S x^3dydz+y^3dxdz+4zdxdy\,,\ S:\begin{cases} y=2x, \quad y=2, \quad x=1, \\ z=x^2+y^2, \quad z=0, \end{cases}$$

через зовнішню сторону замкненої поверхні S, що обмежує тіло G, за допомогою формули Остроградського-Гаусса.

4. Обчисліть за допомогою формули Стокса криволінійний інтеграл

$$\oint_L ydx-xdy+zdz\,,\ L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4, \\ x^2+y^2=z^2, \quad z>0 \end{cases}$$

по замкненому контуру L. Напрям на L відповідає додатному напряму його проекції на площину Oxy.

Варіант 27

1. Обчисліть поверхневий інтеграл першого роду $\iint_S \left(z+2x+\frac{4}{3}y\right)dS$, де S – частина площини $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$, розміщена в першому октанті.

2. Обчисліть поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_S (5x-4y)dxdz$, де S – верхня сторона трикутника, вирізаного із площини $2x+y-z=4$ координатними площинами.

3. Обчисліть поверхневий інтеграл

$$\iint\limits_S 5xdydz+3ydxdz+2zdxdy\,,\ S:\begin{cases} x^2+y^2=2x, \\ z=x^2+y^2, \quad z=0, \end{cases}$$

через зовнішню сторону замкненої поверхні S, що обмежує тіло G, за допомогою формули Остроградського-Гаусса.

4. Обчисліть за допомогою формули Стокса криволінійний інтеграл

$$\oint\limits_L zdx-xdy+xdz\,,\ L:\begin{cases} z=x^2+y^2-10, \\ z=-1 \end{cases}$$

по замкненому контуру L. Напрям на L відповідає додатному напряму його проекції на площину Oxy.

Варіант 28

1. Обчисліть поверхневий інтеграл першого роду $\iint\limits_S 3xyzdS$, де S – частина площини $x+2y+3z=1$, розміщена в першому октанті.

2. Обчисліть поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_S z^2dxdy$, де S – зовнішня сторона півсфери $x^2+y^2+z^2=25$ $(z\geq 0)$

3. Обчисліть поверхневий інтеграл

$$\iint\limits_S x^2dydz+y^2dxdz+z^2dxdy\,,\ S:\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=x^2+y^2+2, \quad z=0, \end{cases}$$

через зовнішню сторону замкненої поверхні S, що обмежує тіло G, за допомогою формули Остроградського-Гаусса.

4. Обчисліть за допомогою формули Стокса криволінійний інтеграл

$$\oint\limits_L y^2dx+z^2dy+x^2dz\,,\ L:\begin{cases} x+y+z=3, \\ x=0, \quad y=0, \quad z=0 \end{cases}$$

по замкненому контуру L. Напрям на L відповідає додатному напряму його проекції на площину Oxy.

Варіант 29

1. Обчисліть поверхневий інтеграл першого роду $\iint\limits_S (x^2-3y)dS$, де S – частина сфери $x^2+y^2+z^2=4$, розміщена в першому октанті.

2. Обчисліть поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_S 5ydydz+xydxdz+zdxdy$, де S – зовнішня сторона трикутника, утвореного при перетині площини $x-y-z=3$ з координатними площинами.

3. Обчисліть поверхневий інтеграл

$$\iint\limits_S xdydz+ydxdz+(1-z)dxdy\,,\ S:\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ z=x, \quad z=0,(z\ge 0), \end{cases}$$

через зовнішню сторону замкненої поверхні S, що обмежує тіло G, за допомогою формули Остроградського-Гаусса.

4. Обчисліть за допомогою формули Стокса криволінійний інтеграл

$$\oint\limits_L x^2y^3dx+dy+zdz\,,\ L:\begin{cases} x^2+y^2=3^2, \\ z=0 \end{cases}$$

по замкненому контуру L. Напрям на L відповідає додатному напряму його проекції на площину Oxy.

Варіант 30

1. Обчисліть поверхневий інтеграл першого роду $\iint\limits_S \frac{dS}{(1+x+y)^2}$, де S – частина площини $2x+y+3z=1$, розміщена в першому октанті.

2. Обчисліть поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_S 3zydydz+ydxdz+4xzdxdy$, де S – зовнішня сторона куба, утвореного площинами $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=4$, $y=4$, $z=4$.

3. Обчисліть поверхневий інтеграл

$$\iint\limits_S 5xdydz + 3ydxdz + 2zdxdy\,,\; S:\begin{cases} y = x^2, \quad y = 4x^2, \quad y = 1(x \geq 0), \\ z = y, \quad z = 0, \end{cases}$$

через зовнішню сторону замкненої поверхні S, що обмежує тіло G, за допомогою формули Остроградського-Гаусса.

4. Обчисліть за допомогою формули Стокса криволінійний інтеграл

$$\oint\limits_L (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz\,,\; L:\begin{cases} z = 12(x^2 + y^2), \\ z = 24x + 2 \end{cases}$$

по замкненому контуру L. Напрям на L відповідає додатному напряму його проекції на площину Oxy.

4. ЗРАЗКИ ВИКОНАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ДОМАШНІХ ЗАВДАНЬ

4.1. Зразок виконання індивідуального домашнього завдання з теми «Невизначений інтеграл»

1. Обчислити невизначені інтеграли:

а) $\int\left(\frac{1}{9x^2+25}+\cos\left(\frac{3x}{5}\right)+2^{3x+1}+1\right)dx$, б). $\int\frac{dx}{x^2+7x+12}$, в) $\int\frac{(x+3)dx}{x^2+6x+13}$.

2. Обчислити методом заміни: $\int\frac{\cos x dx}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$.

3. Обчислити методом інтегрування частинами: $\int x^2 4^{5x} dx$.

Розв'язання:

1. Обчислити невизначені інтеграли:

а). $\int\left(\frac{1}{9x^2+25}+\cos\left(\frac{3x}{5}\right)+2^{3x+1}+1\right)dx$

$$\int\left(\frac{1}{9x^2+25}+\cos\left(\frac{3x}{5}\right)+2^{3x+1}+1\right)dx=\int\frac{1}{9x^2+25}dx+\int\cos\left(\frac{3x}{5}\right)dx+$$

$$+\int 2^{3x+1}dx+\int dx=\int\frac{1}{(3x)^2+25}dx+\int\cos\left(\frac{3x}{5}\right)dx+\int 2^{3x+1}dx+\int dx=$$

$$=\frac{1}{15}arctg\frac{3x}{5}+\frac{5}{3}\sin\frac{3x}{5}+\frac{2^{3x+1}\ln 2}{3}+x+C$$

б). $\int\frac{dx}{x^2+7x+12}$.

Розкладемо знаменник на множники. Для цього знайдемо корені квадратного тричлена $x^2+7x+12=0$:

$$D=49-4\cdot 12=1$$

$$x_1=\frac{-7+1}{2}=-3;\qquad x_2=\frac{-7-1}{2}=-4\,.$$

$$\int\frac{dx}{x^2+7x+12}=\int\frac{dx}{(x+3)(x+4)}$$

Підінтегральну функцію представимо у вигляді двох найпростіших раціональних дробів. Для цього застосуємо метод невизначених коефіцієнтів:

$$\frac{1}{(x+3)(x+4)}=\frac{A}{(x+3)}+\frac{B}{(x+4)}=\frac{A(x+4)+B(x+3)}{(x+3)(x+4)}=$$

$$=\frac{Ax+4A+Bx+3B}{(x+3)(x+4)}=\frac{x(A+B)+(4A+3B)}{(x+3)(x+4)}$$

Прирівняємо коефіцієнти при відповідних степенях x і отримаємо систему лінійних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів A і B:

$$\begin{cases}A+B=0,\\4A+3B=1,\end{cases}\qquad\begin{cases}A=-B,\\-4B+3B=1,\end{cases}\qquad\begin{cases}A=-B,\\-B=1,\end{cases}\qquad\begin{cases}A=1,\\B=-1.\end{cases}$$

$$\frac{1}{(x+3)(x+4)}=\frac{1}{(x+3)}-\frac{1}{(x+4)}.$$

Можемо обчислити шуканий інтеграл:

$$\int\frac{dx}{x^2+7x+12}=\int\frac{dx}{(x+3)(x+4)}=\int\frac{dx}{(x+3)}-\int\frac{dx}{(x+4)}=$$

$$=\ln|x+3|+\ln|x+4|+C=\ln|(x+3)(x+4)|+C=\ln|x^2+7x+12|+C.$$

в) $\int\frac{xdx}{x^2+6x+13}$.

Знайдемо корені знаменника: $D=36-4\cdot13=36-52=-16<0$.

Так як дискримінант від'ємний, то вираз в знаменнику не має дійсних коренів. Тому в знаменнику виділимо повний квадрат:

$$\int\frac{(x+3)}{x^2+6x+13}dx=\int\frac{(x+3)}{x^2+6x+9-9+13}dx=\int\frac{(x+3)}{(x+3)^2+4}dx=$$

$$\left|\begin{array}{l}\textit{Заміна}:\\t=(x+3)^2+4\\dt=2(x+3)dx\\\frac{dt}{2}=(x+3)dx\end{array}\right|=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln|t|+C=\frac{1}{2}\ln|(x+3)^2+4|+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x^2+6x+13|+C$$

2. Обчислити методом заміни:

$$\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \left| \begin{array}{c} \textit{Заміна}: \\ t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin(\sin x) + C = x + C .$$

3. Обчислити методом інтегрування частинами: $\int x^2 4^{5x} dx$.

Так як многочлен $P(x) = x^2$ має другу степінь, то інтегрувати частинами потрібно буде два рази, кожен раз понижуючи степінь многочлена на один.

$$\int x^2 4^{5x} dx = \left| \begin{array}{ll} \multicolumn{2}{l}{\textit{Інтегруємо} \quad \textit{частинами}:} \\ u = x^2 & dv = 4^{5x} dx \\ du = 2x dx & v = \dfrac{4^{5x}\ln 4}{5} \end{array} \right| = x^2 \frac{4^{5x}\ln 4}{5} - \int 2x \frac{4^{5x}\ln 4}{5} dx =$$

$$= x^2 \frac{4^{5x}\ln 4}{5} - \frac{2\ln 4}{5} \int x 4^{5x} dx = \left| \begin{array}{ll} \multicolumn{2}{l}{\textit{Інтегруємо} \quad \textit{частинами}:} \\ u = x & dv = 4^{5x} dx \\ du = dx & v = \dfrac{4^{5x}\ln 4}{5} \end{array} \right| =$$

$$= x^2 \frac{4^{5x}\ln 4}{5} - \frac{2\ln 4}{5} \left(x \cdot \frac{4^{5x}\ln 4}{5} - \int \frac{4^{5x}\ln 4}{5} dx \right) =$$

$$= x^2 \frac{4^{5x}\ln 4}{5} - \frac{2\ln^2 4}{25} x 4^{5x} + \frac{2\ln^2 4}{25} \int 4^{5x} dx =$$

$$= x^2 \frac{4^{5x}\ln 4}{5} - \frac{2\ln^2 4}{25} x 4^{5x} + \frac{2\ln^2 4}{25} \cdot \frac{4^{5x}\ln 4}{5} + C =$$

$$= x^2 \frac{4^{5x}\ln 4}{5} - \frac{2\ln^2 4}{25} x 4^{5x} + \frac{2\ln^3 4}{125} \cdot 4^{5x} + C .$$

4.2 Зразок виконання індивідуального домашнього завдання з теми «Визначений інтеграл»

1. Обчислити визначені інтеграли:

1) $\int_1^e \frac{\ln x - 1}{x} dx$; 2) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$; 3) $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx.$

Розв'язання:

1) Для обчислення даного інтеграла, використовуємо безпосереднє інтегрування:

$$\int_1^e \frac{\ln x - 1}{x}dx = \int_1^e \frac{\ln x}{x}dx - \int_1^e \frac{dx}{x} = \int_1^e \ln x d\ln x - \int_1^e \frac{dx}{x} =$$

$$= \left.\frac{\ln^2 x}{2}\right|_1^e - \ln x\Big|_1^e = \frac{1}{2} - 0 - (1-0) = -\frac{1}{2};$$

2) Для обчислення даного інтеграла, використаємо метод заміни змінної. Скористаємося універсальною тригонометричною підстановкою $tg\frac{x}{2} = t$. Тоді

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x} = \left| \begin{array}{lll} tg\frac{x}{2} = t, & x = 2arctg\ t, & x = 0 \to t = 0 \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}, & \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, & x = \frac{\pi}{2} \to t = 1 \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left(2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} =$$

$$= 2\int_0^1 \frac{dt}{3+t^2} = \left.\frac{2}{\sqrt{3}} arctg\frac{t}{\sqrt{3}}\right|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}} arctg\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\pi}{9}.$$

3) Використаємо метод інтегрування частинами. Покладемо $u = \arcsin x,\ \ dv = \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$. Тоді $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\ \ dv=2\sqrt{1+x}$. Отже,

$$\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}dx = 2\sqrt{1+x}\arcsin x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$

$$2\sqrt{2}\arcsin 1 - 2\arcsin 0 - 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \pi\sqrt{2} + 4\sqrt{1-x}\Big|_0^1 = \pi\sqrt{2} - 4.$$

2. Обчислити площу фігури, яка обмежена параболами $x = y^2 - 2y - 3$ та $x = 5 + 4y - y^2$.

Розв'язання:

Для зручності запишемо функції у вигляді $x + 4 = \left(y-1\right)^2$, $-\left(x-9\right) = \left(y-2\right)^2$ і зробимо рисунок (Рис.36).

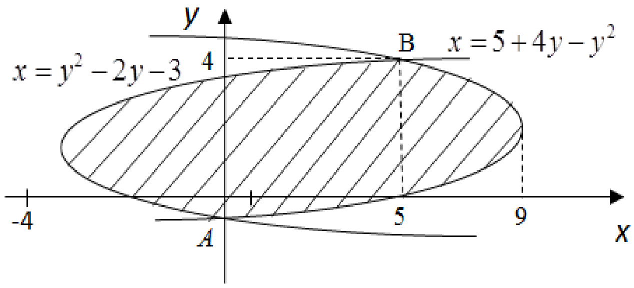


Рис.36

Інтегруватимемо за змінною y (у разі інтегрування за змінною x область інтегрування слід розбити на три частини). Знайдемо ординати точок A і B, для чого розв'яжемо рівняння

$$y^2-2y-3=5+4y-y^2;$$
$$y^2-3y-4=0;$$
$$y_A=-1,\ \ y_B=4.$$

$$S=\int_{-1}^{4}\left(5+4y-y^2-\left(y^2-2y-3\right)\right)dy=\int_{-1}^{4}\left(8+6y-2y^2\right)dy=$$

$$=\left(8y+3y^2-\frac{2y^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{4}=32+48-\frac{128}{3}-\left(-8+3+\frac{2}{3}\right)=\frac{125}{3}.$$

3. Обчислити об'єм тіла обертання криволінійної трапеції навколо осі *Oy*, якщо вона обмежена лініями $y=2x^2,\ \ y=8,\ x=0.$

Розв'язання:

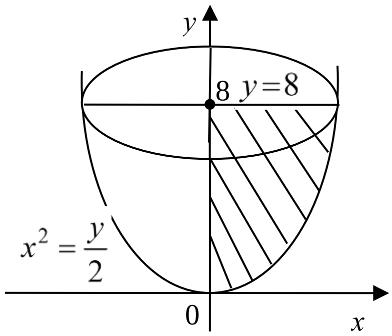


Рис.37

Зробимо схематичний рисунок (Рис.37). Для обчислення об'єму тіла застосуємо формулу $V=\pi\int_c^d x^2dy.$ Отже,

$$V=\pi\int_0^8 x^2dy=\pi\int_0^8\frac{y}{2}dy=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^8=\frac{\pi\cdot 64}{4}=$$

$$=16\pi\text{ (куб. од.)}.$$

4. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

1) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$; 2) $\displaystyle\int_0^1\frac{e^x}{\sqrt{1-\cos x}}dx.$

Розв'язання:

1) За означенням невласного інтеграла першого роду маємо

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{A\to\infty}\int_1^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{A\to\infty}\ \text{arctg}\ x\Big|_1^A=\lim_{A\to\infty}\left(\text{arctg}\,A-\text{arctg}\ 1\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

Отже, інтеграл збігається і дорівнює $\frac{\pi}{4}$.

2) При $x \to 0$ підінтегральна функція є необмеженою. Враховуючи еквівалентність $\sqrt{1-\cos x} = \sqrt{2}\sin\frac{x}{2} \sim \sqrt{2}\frac{x}{2}$ при $x \to 0$, порівняємо підінтегральну функцію з функцією $g(x) = \frac{1}{x}$:

$$k = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{e^x}{\sqrt{1-\cos x}}}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{xe^x}{\sqrt{1-\cos x}} = \lim_{x\to 0}\frac{xe^x}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}x} = \lim_{x\to 0}\sqrt{2}e^x = \sqrt{2}.$$

Оскільки $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ є розбіжним, то й вихідний інтеграл також розбіжний.

4.3. Зразок виконання індивідуальних домашніх завдань з теми «Кратні інтеграли»

1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D xy^2 dxdy$ якщо область D обмежена даними лініями: $y = x^2$, $y = x$.

2. Обчислити: $\mathrm{I} = \iiint_V f(x)g(y)h(z)dxdydz$, якщо $f(x) = \frac{\ln x}{x^3}$, $g(y) = \frac{\sin y}{1+\cos^2 y}$, $h(z) = \frac{1}{z^2+6z+13}$, $1 \le x \le 2$, $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$, $3 \le z \le 4$.

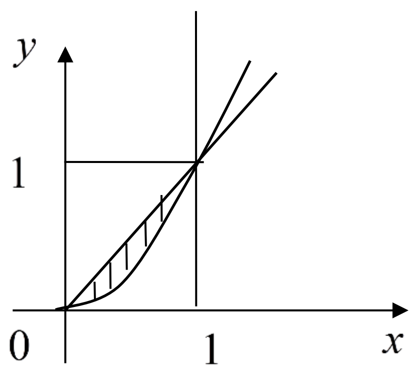


Рис.38

Розв'язання:

1. Область D, обмежена лініями $x = 0$, $x = 1$, $y = x$, $y = x^2$, є правильною як у напрямі осі Oy, так і в напрямі осі Ox (Рис.37). Виберемо напрям осі Oy. За формулою (1)

$$\iint\limits_D xy^2dxdy = \int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} xy^2dy =$$

$$= \int_0^1 xdx\int_{x^2}^{x} y^2dy = \int_0^1 x\left(\int_{x^2}^{x} y^2dy\right)dx =$$

$$= \int_0^1 x\left(\left.\frac{y^3}{3}\right|_{x^2}^{x}\right)dx = \frac{1}{3}\int_0^1 x\left(x^3 - x^6\right)dx = \frac{1}{3}\int_0^1\left(x^4 - x^7\right)dx = \frac{1}{40}.$$

2. $\mathrm{I} = \iiint\limits_V f(x)g(y)h(z)dxdydz = \int_1^e \frac{\ln x}{x^3}dx\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y}{1+\cos^2 y}dy\int \frac{1}{z^2+6z+13}dz$.

Отримали три однократних інтеграла. Обчислимо кожний окремо.

а) $$\int_1^e \frac{\ln x}{x^3}dx = \left|\begin{array}{ll} \textit{Інтегруємо чаастинами}: & \\ u = \ln x & du = \frac{1}{x}dx \\ dv = \frac{1}{x^3}dx & v = -\frac{1}{2x^2} \end{array}\right| = \left.\left(-\frac{1}{2x^2}\cdot\ln x\right)\right|_1^e - \int_1^e\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\cdot\frac{1}{x}dx =$$

$$-\frac{1}{2e^2} + \frac{1}{2}\int_1^e \frac{1}{x^3}dx = -\frac{1}{2e^2} - \frac{1}{2}\left.\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\right|_1^e = -\frac{1}{2e^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{e^2} - 1\right) = -\frac{1}{4e^2} - 1.$$

б) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y}{1+\cos^2 y}dy = \left|\begin{array}{ll} \textit{Заміна}: & \\ t = \cos y & t_1 = \cos 0 = 1 \\ dt = -\sin y dy & t_2 = \cos\frac{\pi}{2} = 0 \end{array}\right| = \int_1^0 \frac{-dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \left. arctgt\right|_0^1 = arctg0 - arctg1 = 0 - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$$

в) $$\int_{-3}^{-1} \frac{1}{z^2+6z+13}dz = \int_{-3}^{-1} \frac{1}{z^2+6z+9-9+13}dz = \int_{-3}^{-1} \frac{1}{(z+3)^2+4}dz =$$

$$= \left.\frac{1}{2}arctg\frac{z+3}{2}\right|_{-3}^{-1} = \frac{1}{2}\left(arctg0 - arctg1\right) = \frac{1}{2}\left(0 - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{8}.$$

$$\mathrm{I}=\iiint\limits_V f(x)g(y)h(z)dxdydz=\int\limits_1^e \frac{\ln x}{x^3}dx\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin y}{1+\cos^2 y}dy\int\limits_{-3}^{-1}\frac{1}{z^2+6z+13}dz=$$

$$=\left(-\frac{1}{4e^2}-1\right)\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\pi^2}{32}\cdot\left(-\frac{1}{4e^2}-1\right).$$

4.4 Зразок виконання індивідуального домашнього завдання з теми «Криволінійні інтеграли»

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_L xy^2 dl$ вздовж заданої лінії L, якщо :

а) L – частина кола $x=2\cos t$; $y=2\sin t$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$;

б) L – відрізок прямої $y=2x+3$ між точками $A(0;3)$ і $B(2;7)$.

Розв'язання:

а) Контур інтегрування AB задано параметричними рівняннями, тому для обчислення інтеграла використаємо формулу

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t);y(t))\cdot\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}dt.$$

Знайдемо похідні: $\begin{cases}x=2\cos t\\ y=2\sin t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_t'=-2\sin t\\ y_t'=2\cos t\end{cases}$. Тоді

$$dl=\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}=\sqrt{4\sin^2 t+4\cos^2 t}=\sqrt{4(\sin^2 t+\cos^2 t)}=\sqrt{4\cdot 1}=2.$$

$$\int\limits_L xy^2 dl=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t\cdot(2\sin t)^2 2\,dt=16\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cdot\cos t\,dt=16\cdot\left.\frac{\sin^3 t}{3}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{16}{3}\cdot\left(\sin^3\frac{\pi}{2}-\sin^3 0\right)=\frac{16}{3}\cdot(1-0)=\frac{16}{3}.$$

б) Контур інтегрування L задано рівнянням $y=2x+3$, де $0\le x\le 2$, тому для обчислення інтеграла використаємо формулу

$$\int\limits_L f(x,y)dl=\int\limits_a^b f(x;y(x))\cdot\sqrt{1+(y_x')^2}dx.$$

Оскільки $y_x'=2$, то $\sqrt{1+(y_x')^2}=\sqrt{1+2^2}=\sqrt{5}$. Отже,

$$\int\limits_{AB} x\cdot y^2 dl=\int\limits_0^2 x\cdot(2x+3)^2\cdot\sqrt{5}dx=\sqrt{5}\cdot\int\limits_0^2 x\cdot(4x^2+12x+9)dx=$$

$$=\sqrt{5}\cdot\int\limits_0^2(4x^3+12x^2+9x)dx=\sqrt{5}\cdot\left(4\cdot\frac{x^4}{4}+12\cdot\frac{x^3}{3}+9\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2=$$

$$=\sqrt{5}\cdot\left(x^4+4x^3+9\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2=\sqrt{5}\cdot(16+32+18)=66\sqrt{5}\,.$$

2. Знайти масу дуги кривої $y=\dfrac{2x\sqrt{x}}{3}$ від точки $O(0;0)$ до точки $A\left(4;\dfrac{16}{3}\right)$, якщо лінійна густина в точці M кривої дорівнює довжині частини дуги OM .

Розв'язання: Крива задана в декартовій системі координат:

$$y=\frac{2x\sqrt{x}}{3}=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}},\quad 0\le x\le 4\,.$$

Знайдемо довжину частини дуги *OM*. Спочатку визначимо похідну:

$$y'=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}\,.$$

$$\rho(M)=l_{OM}=\int\limits_0^x\sqrt{1+(\sqrt{x})^2}dx=\int\limits_0^x(1+x)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{3/2}\Bigg|_0^x=\frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3}-\frac{2}{3}\,.$$

$$m=\int\limits_L\rho(x;y)dl=\frac{2}{3}\int\limits_0^4\left((1+x)^{\frac{3}{2}}-1\right)\cdot\sqrt{1+x}dx=\frac{2}{3}\int\limits_0^4\left((1+x)^2-(1+x)^{\frac{1}{2}}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{(1+x)^3}{3}-\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{3/2}\right)\Bigg|_0^4=\frac{2}{9}\cdot 5^3-\frac{2}{3}\cdot 5^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{2}{9}-\frac{2}{3}\right)=\frac{254-30\sqrt{5}}{9}\,.$$

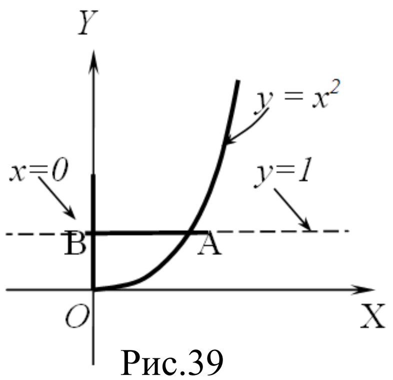


Рис.39

3. Обчислити інтеграл $\int\limits_L y^2dx-xy\,dy$, якщо L – замкнений контур, утворений лініями $y=x^2$, $y=1$ та $x=0$ (рухаючись по контуру в додатному напрямі).

Розв'язання:

За умовою L – замкнений контур, який складається з фрагментів параболи $y=x^2$ та прямих ліній $y=1$ і $x=0$, тобто $L=OA+AB+BO$ (Рис.39), де $O(0;0)$, $A(1;1)$, $B(0;1)$.

$$\oint_L y^2dx-xydy=\int_{OA} y^2dx-xydy+$$

$$+\int_{AB} y^2dx-xydy+\int_{BO} y^2dx-xydy=I_1+I_2+I_3$$

$$I_1=\int_{OA} y^2dx-xydy=\begin{bmatrix} OA: y=x^2\Rightarrow dy=2xdx \\ x_0=0; \quad x_A=1 \end{bmatrix}=\int_0^1\left(\left(x^2\right)^2-x\cdot x^2\cdot 2x\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left(x^4-2\cdot x^4\right)dx=-\int_0^1 x^4dx=-\frac{x^5}{5}\bigg|_0^1=-\frac{1}{5}.$$

$$I_2=\int_{AB} y^2dx-xydy=\begin{bmatrix} AB: \ y=1\Rightarrow dy=0 \\ x_A=1; \ x_B=0 \end{bmatrix}=\int_1^0 1dx=x\bigg|_1^0=-1.$$

$$I_3=\int_{BO} y^2dx-xydy=\begin{bmatrix} BO: \ \ x=0\Rightarrow dx=0 \\ y_B=1; \quad y_O=0 \end{bmatrix}=\int_1^0 0dy=0.$$

Отже, $\oint_L y^2dx-xydy=-\frac{1}{5}-1+0=-\frac{6}{5}$.

4. Обчисліть роботу сили $\vec{F}=y^2x^3\vec{i}+(y+x^2)\vec{j}$ при перенесенні матеріальної точки по параболі $y=x^2$ від точки $O(0;0)$ до точки $B(1;1)$.

Розв'язання:

$$A=\int_{OB} y^2x^3dx+(y+x^2)dy=\begin{bmatrix} y=x^2 \\ dy=2xdx \\ 0\le x\le 1 \end{bmatrix}=\int_0^1 (x^4\cdot x^3dx+(x^2+x^2)2xdx)=$$

$$=\int_0^1 (x^7+4x^3)dx=\left(\frac{x^8}{8}+4\cdot\frac{x^4}{4}\right)\bigg|_0^1=\frac{9}{8}.$$

5. За допомогою формули Гріна обчислити криволінійний інтеграл:

а) $\oint_L 2xdx+(y-2x^2)dy$, де L – контур прямокутника, обмеженого лініями $x=0$, $x=4$, $y=-1$, $y=3$ (Рис.40);

б) $\oint_L (3y+tgx)dx+(\ln^2 y+5x)dy$, де L – контур трикутника, обмеженого лініями $x=0$, $y=0$, $x-y=2$, $y=3$ (Рис.41).

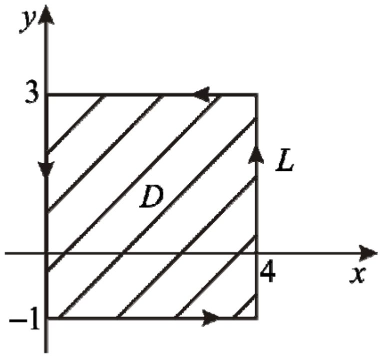


Рис.40

Розв'язання:

а) Застосуємо до розв'язання прикладу *формулу Гріна*

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy .$$

Тут $P(x,y) = 2$, $Q(x,y) = y - 2x^2$.

Знайдемо частинні похідні: $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = -4x$.

За формулою Гріна:

$$\oint_L 2xdx + (y - 2x^2)dy = -4x\iint_D xdxdy = \left\{\begin{matrix} \text{перейдемо до} \\ \text{повторного} \\ \text{інтеграла} \end{matrix}\right\} = -4\int_0^4 xdx\int_{-1}^3 dy =$$

$$= -4\int_0^4 xdx \cdot y\Big|_{-1}^3 = -16\int_0^4 xdx = -8x^2\Big|_0^4 = -128 .$$

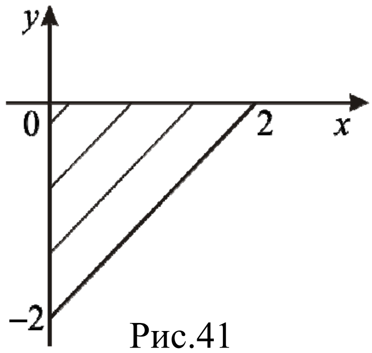


Рис.41

б) Застосуємо до розв'язання прикладу *формулу Гріна*.

Тут $P(x,y) = 3y + tgy$, $Q(x,y) = \ln^2 y + 5x$.

Знайдемо частинні похідні: $\frac{\partial P}{\partial y} = 3$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 5$. За формулою Гріна:

$$\oint_L (3y + tgx)dx + (\ln^2 y + 5x)dy = \iint_D (5-3)dxdy = 2\iint_D dxdy = 2\int_0^2 dx\int_{x-2}^0 dy =$$

$$= 2\int_0^2 (2-x)dx = 2\left(2x\Big|_0^2 - \frac{x^2}{2}\Big|_0^2\right) = 2(4-2) = 4 .$$

4.5 Зразок виконання індивідуального домашнього завдання з теми «Поверхневі інтеграли»

1.Обчисліть поверхневий інтеграл першого роду $\iint_S (x - 2y + 3z)dS$,де S – частина площини $2x + y + 4z = 8$, розміщена в першому октанті (Рис.42).

Розв'язання:

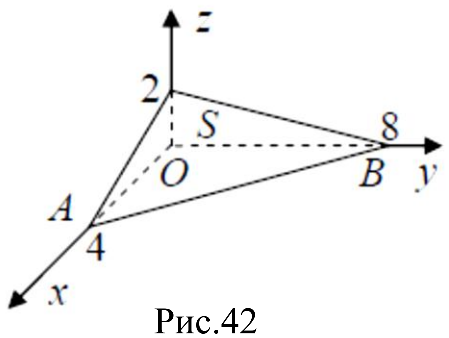


Рис.42

Запишемо рівняння площини у вигляді $z = 2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y$.

Застосуємо формулу (2.27), знайшовши:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{2},\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{4}.$$

$$dS = \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2}\,dxdy = \frac{\sqrt{21}}{4}\,dxdy$$

Проекцією площини $2x + y + 4z = 8$ на площину Oxy є трикутник AOB, обмежений прямими $2x + y = 8$, $x = 0$, $y = 0$. Отже,

$$\iint_S (x - 2y + 3z)\,dS = \iint_{D_{xy}} \left(x - 2y + 3\left(2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y\right)\right)\frac{\sqrt{21}}{4}dxdy =$$

$$= \frac{\sqrt{21}}{4}\iint_{D_{xy}}\left(6 - \frac{1}{2}x - \frac{11}{4}y\right)dxdy = \frac{\sqrt{21}}{4}\int_0^4 dx \int_0^{8-2x}\left(6 - \frac{1}{2}x - \frac{11}{4}y\right)dy =$$

$$= \frac{\sqrt{21}}{4}\int_0^4\left(\left(6y - \frac{1}{2}xy - \frac{11}{8}y^2\right)\Big|_0^{8-2x}\right)dx = \frac{\sqrt{21}}{4}\int_0^4\left(48 - 12x - 4x + x^2 - \frac{11}{8}(8-2x)^2\right)dx =$$

$$= \frac{\sqrt{21}}{4}\left(48x - 8x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{11}{16}\frac{(8-2x)^3}{3}\right)\Bigg|_0^4 = \frac{\sqrt{21}}{4}\left(192 - 128 + \frac{64}{3} - \frac{352}{3}\right) = -8\sqrt{21}.$$

2. Обчисліть поверхневий інтеграл другого роду $\iint_S ydxdz$, де S – верхня сторона параболоїда $z = x^2 + y^2$ при $z \le 2$.

Розв'язання.

Використаємо формулу

$$\iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy =$$

$$= \pm\iint_{D_{xy}} (P(x,y,z(x,y))(-z'_x) +$$

$$+Q(x,y,z(x,y))(-z'_y) + R(x,y,z(x,y)))dxdy$$

В даному поверхневому інтегралі

$$P(x,y,z)=0\,,\; Q(x,y,z)=0\,,\; R(x,y,z)=0\,.$$

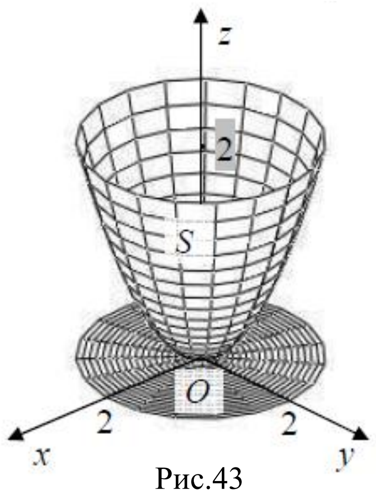


Рис.43

Проекцією поверхні S на площину Oxy є область D_{xy} ,обмежена колом $x^2+y^2=2$. З рівняння поверхні $z'_x=2x$, $z'_y=2y$. Тому

$$\iint_S ydxdz=\iint_{D_{xy}} y(-2y)dxdy=-2\iint_{D_{xy}} y^2dxdy\,.$$

Перед подвійним інтегралом ставимо знак «+», так як, за умовою задачі вибирається верхня сторона параболоїда. Переходимо до полярної системи координат, обчислюємо:

$$-2\iint_{D_{xy}} y^2dxdy=-2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}\rho^3\sin^2\varphi d\rho=-2\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}\rho^3d\rho=$$

$$=-2\int_0^{2\pi}\left(\sin^2\varphi\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^{\sqrt{2}}\right)d\varphi=-\int_0^{2\pi}(1-\cos 2\varphi)d\varphi=\left(-\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{2\pi}=-2\pi.$$

3.Обчисліть поверхневий інтеграл $\iint_S x^3dydz+y^3dxdz+z^3dxdy$ через зовнішню сторону замкненої поверхні S – зовнішня сторона сфери $x^2+y^2+z^2=a^2$, за допомогою формули Остроградського-Гаусса.

Розв'язання.

Використовуючи формулу Остроградського-Гаусса, знаходимо:

$$P(x,y,z)=x^3,\; Q(x,y,z)=y^3,\; R(x,y,z)=z^3,$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}=3x^2,\; \frac{\partial Q}{\partial y}=3y^2,\; \frac{\partial R}{\partial z}=3z^2.$$

$$I=\iint_S x^3dydz+y^3dxdz+z^3dxdy=3\iiint_G (x^2+y^2+z^2)dxdydz\,.$$

Перейдемо до сферичних координат:

$$\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi, \\ y=r\sin\theta\sin\varphi, \\ z=r\cos\theta, \end{cases} 0\le r\le a,\; 0\le\varphi\le 2\pi,\; 0\le\theta\le\pi,\; J=r^2\sin\theta,$$

де J – сталий множник при переході до сферичних координат.

Одержимо:

$$I = 3\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{a}r^4dr = \frac{3a^5}{5}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi = -\frac{6\pi a^5}{5}\cos\theta\Big|_0^{\pi} = \frac{12\pi a^5}{5}.$$

4. Обчисліть за допомогою формули Стокса криволінійний інтеграл

$$\oint_L (z-2y+x^3)dx + (2x+z+y^2)dy + (x+y+z^4)dz,$$

по замкненому контуру L – крива перерізу циліндра $x^2+y^2=Rx$ і сфери $x^2+y^2+z^2=R^2$ при $z\geq 0$, у напрямі проти годинникової стрілки, якщо дивитися з додатного напряму осі Oz.

Розв'язання. Скористаємося формулою Стокса:

$$P(x,y,z) = z-2y+x^3,\ Q(x,y,z) = 2x+z+y^2,\ R(x,y,z) = x+y+z^4.$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2,\ \frac{\partial P}{\partial z} = 1,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 2,\ \frac{\partial Q}{\partial z} = 1,\ \frac{\partial R}{\partial x} = 1,\ \frac{\partial R}{\partial y} = 1.$$

В якості поверхні S соберемо частину сфери $z=\sqrt{R^2+x^2+y^2}$, що знаходиться в середині циліндра $x^2+y^2=Rx$. Проекцією цієї поверхні на площину Oxy буде круг $D: x^2+y^2\leq R \Leftrightarrow \left(x-\frac{R}{2}\right)^2+y^2\leq\frac{R^2}{4}$.

$$\oint_L (z-2y+x^3)dx + (2x+z+y^2)dy + (x+y+z^4)dx =$$

$$= \iint_S (2+2)dxdy + (1-1)dydz + (1-1)dxdz =$$

$$= 4\iint_D dxdy = \pi R^2,$$

оскільки, $\iint_D dxdy$ – це площа круга радіуса $\frac{R}{2}$, яку знаходимо за формулою πr^2 при радіусі $r=\frac{R}{2}$.

5. ЗРАЗКИ ТИПОВИХ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ

Зразок типової контрольної роботи з теми «Невизначений інтеграл»

1 рівень

1. Розклад правильного раціонального дробу $\dfrac{x^2+4x-8}{x^3+4x}$ на суму елементарних дробів має вигляд:

А) $\dfrac{3}{x}+\dfrac{x+2}{x^2+4}$; **Б)** $\dfrac{-5}{x}+\dfrac{-x+2}{x^2+4}$; **В)** $\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x+2}+\dfrac{-2}{x-2}$;

Г) $\dfrac{-2}{x}+\dfrac{3x+4}{x^2+4}$ **.**

2.Невизначений інтеграл $\int \sin(3x+2)\,dx$ дорівнює:

А) $\cos(3x+2)+C$**,** **Б)** $-\cos(3x+2)+C$**,**

В) $-\dfrac{1}{3}\cos(3x+2)+C$**,** **Г)** $-\dfrac{1}{2}\cos(3x+2)+C$ **.**

3. Яка з функцій є первісною для функції $f(x)=4x^3$?

А) $F(x)=4x^4$; **Б)** $F(x)=12x^2$; **В)** $F(x)=4x+1$; **Г)** $F(x)=x^4$.

2 рівень

4. Невизначений інтеграл $\int x\sin\dfrac{x}{2}\,dx$ дорівнює:

А) $-2x\cos\dfrac{x}{2}+4\sin\dfrac{x}{2}+C$. **Б)** $x\cos\dfrac{x}{2}-2\sin\dfrac{x}{2}+C$ **.**

В) $-2x\cos\dfrac{x}{2}-4\sin\dfrac{x}{2}+C$ **.** **Г)** $-2x\cos\dfrac{x}{2}-2\sin\dfrac{x}{2}+C$ **.**

5. Невизначений інтеграл $\int arctg\,x\,dx$ дорівнює:

А) $arctg\,x-2\ln\left(1+x^2\right)+C$ **.** **Б)** $x\,arctg\,x+\ln\left(1+x^2\right)+C$ **.**

В) $x\,arctg\,x-\dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C$ **.** **Г)** $arctg\,x-\dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C$ **.**

6. Невизначений інтеграл $\int \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{4-e^{4x}}}\,dx$ дорівнює:

А) $\dfrac{e^{2x}}{2}+\dfrac{\ln\sqrt{4-e^{4x}}}{4}+C$ **.** **Б)** $\dfrac{e^{2x}}{2}\cdot\dfrac{\ln\sqrt{4-e^{4x}}}{4}+C$ **.**

В) $\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{e^{2x}}{2}+C$**.** **Г)** $e^{2x}\cdot\arcsin e^{2x}+C$**.**

3 рівень

Обчислити інтеграли

7. $\int \frac{3x-2}{\sqrt{x}}dx$, **8.** $\int \frac{(\ln x-5)^4}{x}dx$, **9.** $\int x4^{2x}dx$, **10.** $\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

Зразок контрольної роботи з теми «Визначений інтеграл»

1 рівень

1. Обчислити визначений інтеграл: $\int_1^3 (x^2-3x+3)dx.$

2. Обчислити визначений інтеграл методом підстановки (заміни змінних): $\int_1^3 \frac{xdx}{3+x^2}.$

3. Обчислити визначений інтеграл методом інтегрування частинами: $\int_0^{\pi/4} x\cos 2x dx.$

2 рівень

4. Обчислити або встановити розбіжність невласного інтеграла: $\int_0^{\infty} e^{-x}dx.$

5. Обчислити або встановити розбіжність невласного інтеграла: $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}.$

3 рівень

6. Обчислити площу фігури, обмежену лініями $y=x^2-5x$; $3x+y+2=0.$ Зобразити отриману фігуру.

Зразок типової контрольної роботи з теми «Кратні інтеграли»

1 рівень

1. Вказати формули переходу від декартової системи координат до циліндричної. Чому дорівнює якобіан переходу?

2. Перехід у подвійному інтегралі до полярних координат $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ використовують у випадках, коли:

а) функція $f(x,y)$ містить $x^2 + y^2$; б) D є колом або частиною кола; в) $f(x,y)$ містить $arctg\dfrac{y}{x}$; г) D – коло; д) підінтегральна функція залежить від $x^2 + y^2$ або $arctg\dfrac{y}{x}$.

3. Обчислити подвійний інтеграл:

$$\iint\limits_D xe^y dxdy, \quad D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, 1 \le y \le 2\}.$$

4. Обчислити потрійний інтеграл:

$$\iiint\limits_V x^2 \sin 2y dxdydz, \quad D = \{(x,y,z) \mid 2 \le x \le 3, 0 \le y \le \pi, 0 \le 1\}.$$

5. Обчислити повторні інтеграли:

$$\text{а) } \int_0^2 \left(\int_0^1 (x^2 + 2y) dx \right) dy; \qquad \text{б) } \int_2^4 \left(\int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2} \right) dx.$$

6. Записати рівняння ліній, що обмежують область інтегрування заданого інтеграла та зобразити цю область:

$$\int_1^3 \left(\int_{x^2}^{x+9} f(x,y) dy \right) dx.$$

2 рівень

7. Поміняти порядок інтегрування

$$\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{x}} f(x,y) dy \right) dx$$

8. Обчислити інтеграл $\iint\limits_D e^{x/y} dxdy$, де D – область, що обмежена лініями $y^2 = x,\ x = 0,\ y = 1$.

3 рівень

9. Обчислити інтеграл $\mathrm{I} = \iiint\limits_V x^2 y^2 z dxdydz$, якщо $V: \begin{cases} 0 \le x \le 1; \\ 0 \le y \le x; \\ 0 \le z \le xy. \end{cases}$

10. Від потрійного інтеграла $\iiint\limits_V dxdydz$, (область V обмежена циліндричною поверхнею $x^2+z^2=4$ і площинами $y=0, z=0, y=x$) перейти до трикратного інтеграла і знайти об’єм області V.

Зразок типової контрольної роботи з теми «Криволінійні інтеграли»

1 рівень

1. Вкажіть, які з формул використовують для позначення криволінійного інтеграла першого роду вздовж кривої.

а) $\int\limits_{AB} f(x,y)dl$; б) $\int\limits_{AB} f(x,y)dx$; в) $\int\limits_{L} f(x,y)dl$;

г) $\int\limits_{AB} f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2+y'(t))^2}dt$; д) $\int\limits_{AB} f(x,y,z)dl$.

2. Якою з формул слід скористатися для обчислення диференціалу dl для функції $y=y(x),\ a\le x\le b$ при переході від криволінійного інтеграла першого роду до визначеного інтеграла?

а) $dl=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt$; б) $dl=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}dt$;

в) $dl=y'(x)dx$; г) $dl=\sqrt{1+(y'(x))^2}dx$.

3. Обчислити диференціал дуги для функції $y=1-x$.

а) $dl=\sqrt{1+(y'(x))^2}dx=0$; б) $dl=\sqrt{1+(y'(x))^2}dx=2$;

в) $dl=\sqrt{1+(y'(x))^2}dx=\sqrt{2}$; г) $dl=\sqrt{1+(y'(x))^2}dx=1$.

4. Записати визначений інтеграл, який відповідає заданому криволінійному інтегралу першого роду $\int\limits_L xydl$ вздовж відрізка прямої $x+y=1,\ 1\le x\le 4$.

а) $\int\limits_L xydl=\int\limits_0^4 xy\sqrt{2}dx$; б) $\int\limits_L xydl=\int\limits_0^4 (1-x^2)dx$;

в) $\int\limits_L xydl=\int\limits_0^4 (x-x^2)\sqrt{2}dx$; г) $\int\limits_L xydl=\int\limits_0^4 x(1-x)dx$.

5. Властивості криволінійного інтегралу другого роду аналогічні властивостям визначеного інтегралу.

а) правильно; б) неправильно.

6. У криволінійному інтегралі другого роду за додатний напрям руху вздовж кривої вибирають напрям:

а) за годинниковою стрілкою; б) проти годинникової стрілки.

7. Обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду $\int\limits_L (x-y)dl$ вздовж заданої лінії L – відрізок прямої $y=2-2x$ між точками $A(1;0)$ і $B(2;-2)$.

8. Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду $\int\limits_L (2x+y)dx+(x+y)dy$ вздовж заданої лінії L – пряма $3x+y=2$ між точками $A(1;-1)$ і $B(2;-4)$.

2 рівень

9. Обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду $\int\limits_L (x-3y)dl$ вздовж заданої лінії L – дуга кривої $x=1+2\cos t$, $y=2\sin t$, $\frac{\pi}{2}\le x\le \pi$.

10. Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду $\int\limits_L (2x-y)^2dx+x^2dy$ вздовж заданої лінії L – ламана ABC, де $A(1;-1)$, $B(1;2)$, $C(3;2)$.

3 рівень

11. Переконатися, що результат інтегрування не залежить від шляху інтегрування та обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду.

$$\int\limits_{(0,1)}^{(3,2)} 3x^2y^2dx+2x^3ydy\,.$$

Зразок контрольної роботи з теми «Поверхневі інтеграли»

1 рівень

1. Встановіть відповідність:

1) $\iint\limits_{S} f(x,y,z)dS = \iint\limits_{D_{yz}} f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}dydz;$	**а)** формула для обчислення маси матеріальної поверхні;
2) $m = \iint\limits_{S} \rho(x,y,z)dS$;	**б)** формула Остроградського-Гаусса;
3) $\iiint\limits_{G}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz = \iint\limits_{S} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$;	**в)** формула для обчислення поверхневого інтеграла другого роду;
4) $\iint\limits_{S}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)dS =$ $\pm\iint\limits_{Dyz} P(x(y,z),y,z)dydz \pm$ $\pm\iint\limits_{Dxz} Q(x,y(x,z),z)dxdz \pm \iint\limits_{Dxy} R(x,y,z(x,y))dxdy$;	**г)** площа поверхні S, якщо на ній функція $f(x,y,z)\equiv 1$;
5) $P = \iint\limits_{S} dS$;	**г)** формула Стокса;
6) $\oint\limits_{L} Pdx+Qdy+Rdz = \iint\limits_{S}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz +$ $+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdz+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)dydz.$	**д)** формула для обчислення поверхневого інтегралу першого роду при проектуванні S на площину Oyz.

2. Напишіть необхідні умови для застосування:

а) формули Остроградського-Гаусса;

б) формули Стокса.

2 рівень

3. Обчисліть поверхневий інтеграл першого роду $\iint\limits_{S} \frac{dS}{(1+x+y)^2}$, де S – частина площини $5x+4y+z=1$, розміщена в першому октанті.

4. Обчисліть поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_{S} xzydydz + 8xydxdz + 3zdxdy$, де S – зовнішня сторона куба, утвореного площинами $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=9$, $y=9$, $z=9$.

3 рівень

5. Знайти моменти інерції даної однорідної матеріальної поверхні півсфери $x^2+y^2+z^2=R^2$, $z \ge 0$ відносно осі Oz та площини основи.

6. ЗАДАЧІ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

Задачі підвищеної складності з теми «Невизначений інтеграл»

1. Використовуючи метод інтегрування частинами довести формули:

1) $\int \sqrt{a^2-u^2}du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a} + C$.

2) $\int \sqrt{u^2 \pm a^2}du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$.

2. Для функції $f(x)=(1+x^2)^{-1}, x\in R$, знайти первісну на R, яка проходить через точку $(1,\pi)$.

3. Обчислити наступні інтеграли:

1) $\int \frac{x^3dx}{(x-1)^{12}},\ x\neq 1,$ 2) $\int \frac{x^5}{(1+x^2)^2}dx,$ 3) $\int \frac{P(x)dx}{(x-a)^n},\ x\neq a,$

4) $\int \frac{P(x)dx}{(x-a)^n},\ x\neq a, a\in R, n\in N, P-$ многочлен,

5) $\int x^3\sqrt{1-x^2}dx,\ x\in(-1,1),$ 6) $\int \ln(1+x+x^2)dx,$

7) $\int \frac{x^2}{1+x^2}arctgxdx;$

8) $\int x^2\ln\frac{x-1}{x}dx, x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty),$

9) $\int \frac{dx}{(x+1)^3(x-1)^2},\ x\in(1,+\infty), \left(\text{заміна: } t=\frac{x-1}{x+1}\right)$

10) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}},\ x\in(1,+\infty), \left(\text{заміна: } t^3=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2\right).$

Задачі підвищеної складності з теми «Визначений інтеграл»

1. Обчислити визначені інтеграли: 1) $\int_{\pi/6}^{\pi/4}\sec^2 xdx;$ 2) $\int_0^1\left(e^x-1\right)^4 e^xdx.$

2. Дослідити на збіжність невласні інтеграли й обчислити їхні значення: 1) $\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x^2-1}$; 2) $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{dx}{\cos^2 x}$.
3. Дослідити на збіжність невласні інтеграли: 1) $\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$; 2) $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{xdx}{x^3+1}$.
4. Знайти площу фігури,яка міститься в середині параболи $x^2=4y+4$ і кола $x^2+y^2=16$.
5. Обчислити об'єм тіла обертання,утвореного обертанням кривої $x=a\cos^3\varphi,\ y=a\sin^3\varphi$ навколо осі Oy.
6. Обчислити площу поверхні кругового конуса.
7. Знайти центр маси трикутника.
8. Вертикальна гребля має форму трапеції, верхня основа якої дорівнює 70 м, нижня – 50 м, а висота – 20 м. Чому дорівнює тиск води на греблю?

Задачі підвищеної складності з теми «Кратні інтеграли»

1. Обчислити інтеграли:

а) $\iint\limits_{A} xydxdy, \quad A=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le a^2,\ x\ge 0\right\},$

б) $\iiint\limits_{A} xydxdydz, \quad A=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le 1,\ x\ge 0, y\ge 0, 0\le z\le 1\right\},$

в) $\iiint\limits_{A}(xyz)^2\,dxdydz, \quad A=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le x\le y\le z\le 1\right\}.$

2. Обчислити наступні інтеграли:

а) $\int\limits_{0}^{1}\left(\int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\left(1-y^2\right)^{\frac{3}{2}}dy\right)dx$, б) $\int\limits_{0}^{1}\left(\int\limits_{\frac{1}{2}}^{y^{1/5}}\sqrt{1-x^3}\,dx\right)dy$,

в) $\int\limits_{\pi}^{2\pi}\left(\int\limits_{y-\pi}^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx\right)dy$, г) $\int\limits_{0}^{1}\left(\int\limits_{x}^{1}x^3\cos y^2 dy\right)dx$,

д) $\int\limits_{0}^{1}\left(\int\limits_{\arcsin y}^{\arcsin\sqrt{y}}\frac{x}{\sin x}dx\right)dy$.

3. Змінити порядок інтегрування:

а) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left(\int\limits_{-1}^{\sin x} f(x,y)dy\right)dx+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}}\left(\int\limits_{\sin x}^{1} f(x,y)dy\right)dx$,

б) $\int\limits_{-2}^{0}\left(\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy\right)dx+\int\limits_{0}^{2}\left(\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy\right)dx+\int\limits_{0}^{2}\left(\int\limits_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy\right)dx$.

4. Обчислити наступні інтеграли використовуючи заміну змінних:

а) $\iint\limits_A xy^2dxdy, \quad A=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0\right\}$,

б) $\iint\limits_A \left(\frac{y}{x}\right)^2 dxdy, \quad A=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 2x\right\}$,

в) $\iint\limits_A \arcsin\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2\pi}dxdy, \quad A=\left\{(x,y)\,|\,\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2\right\}$.

Задачі підвищеної складності з теми «Криволінійні інтеграли»

1. Нехай G – множина точок в площині, для якої ∂G - проста замкнута кусково-гладка крива, яка пробігає проти часової стрілки. Використовуючи формулу Гріна, довести, що:
$$\int\limits_G\left(x^2+y^2\right)dxdy=\frac{1}{3}\int\limits_{\partial G}\left(x^3dy-y^3dx\right).$$
2. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L yzdx+z\sqrt{R^2-y^2}dy+xydz$, де L – дуга гвинтової лінії $x=R\cos t$, $y=R\sin t$, $z=\frac{at}{2\pi}$ від точки перетину лінії з площиною $z=0$ до точки її перетину з площиною $z=a$.
3. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L\omega$ від форми ω по орієнтовній кривій L, де
$$\omega=(xy-y)dx+(xy+x)dy,$$
L – додатний обхід границі множини

$$\left\{(x,y)\mid x^2+\frac{y^2}{4}\le 1,\ y\ge 0\right\}.$$

4. Нехай $G=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\right\}$ і

$$\omega=\frac{xdy=ydx}{x^2+y^2},\qquad x^2+y^2\ne 0.$$

Довести, що:

1) $d\omega=0,\quad x^2+y^2\ne 0$;

2) $\int\limits_{\partial G}\omega=2\pi$ (обхід ∂G проти часової стрілки).

Пояснити, чому отриманий результат не суперечить формулі Гріна.

5. Обчисліть площу астроїди $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, використовуючи криволінійний інтеграл.
6. Знайдіть масу чверті еліпса $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, розташованої в першій чверті, якщо густина в кожній точці дорівнює ординаті цієї точки.
7. Визначте координати центра мас однорідної дуги циклоїди $x=a(t-\sin t)$, $y=a(t-\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$.
8. Обчислити довжину дуги L, якщо:

$$L=(x,y,z)\mid x=a\cos\varphi,\ y=b\sin\varphi,\ z=b\varphi,\ \varphi\in[0,2\pi],\ a,b\in(0,+\infty).$$

Задачі підвищеної складності з теми «Поверхневі інтеграли»

1. Обчисліть поверхневий інтеграл першого роду $\iint\limits_S x^2 dS$, де S – частина сфери $x^2+y^2+z^2=4$, розміщена в першому октанті.
2. Обчисліть поверхневий інтеграл першого роду $\iint\limits_S xdS$, де S – частина поверхні $z=2-\frac{\left(x^2+y^2\right)}{2}$, розміщена над площиною Oxy.
3. Обчисліть поверхневий інтеграл першого роду $\iint\limits_S zdS$, де S – бічна поверхня конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, вирізану циліндром $x^2+y^2=2x$.

4. Обчисліть поверхневий інтеграл першого роду $\iint\limits_S (xy + yz + zx)dS$, де S – частина конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, вирізана поверхнею $x^2 + y^2 = 2ax$.
5. Обчисліть поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_S (y - z)dydz + (z - x)dxdz + (x - y)dxdy$, де S – зовнішня сторона конічної поверхні $z^2 = x^2 + y^2$ $(0 \le z \le a)$.
6. Обчисліть поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_S x^2 dydz + y^2 dxdz + z^2 dxdy,$ де S – зовнішня сторона сфери $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.
7. Обчисліть поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_S yzdxdy + xzdydz + xydxdz,$ де S – зовнішня сторона поверхні, розташованої в першому октанті і такої, що складається із циліндра $x^2 + y^2 = H^2$ та площин $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = H$.
8. Обчисліть поверхневий інтеграл другого роду $\iint\limits_S y^2 zdxdy + xzdydz + x^2 ydxdz,$ де S – зовнішня сторона поверхні, розташованої в першому октанті і складеної із параболоїда обертання $z = x^2 + y^2$, циліндра $x^2 + y^2 = 1$ і площин $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = H$.
9. Використовуючи формулу Остроградського-Гаусса, обчисліть поверхневий інтеграл $\iint\limits_S xzdydz + x^2 ydxdz + y^2 zdxdy$, де S – зовнішня сторона поверхні, що розташована в 1-му октанті і складається з параболоїда обертання $z = x^2 + y^2$, циліндра $x^2 + y^2 = 1$ і $x^2 + y^2 = 1$ і координатних площин.
10. Обчисліть користуючись формулою Стокса, криволінійний інтеграл по замкненому контуру L (напрям на L відповідає додатному напряму його проекції на площину Oxy):

$$\oint\limits_L (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz, \; L: \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{h} = 1 \;\; (a > 0, \;\; h > 0). \end{cases}$$

7. ПИТАННЯ НАВЧАЛЬНОЇ ПРОГРАМИ ТА ЗАДАЧІ ДЛЯ ПІДГОТОВКИ ДО ЗАЛІКУ

7.1. Невизначений інтеграл

1. Означення первісної функції та невизначеного інтеграла.

2. Таблиця інтегралів.

3. Властивості невизначеного інтеграла та правила інтегрування.

4. Метод безпосереднього інтегрування.

Приклад. Знайти $\int (x^N - 2^{Nx})dx$

5. Метод підстановки (заміни змінної).

Приклади. Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+N}}$, 2) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{N^2-x^2}}$.

6. Метод інтегрування частинами.

Приклад. Знайти інтеграли:

1) $\int xe^{Nx}dx$, 2) $\int x^2 \ln(Nx+1)dx$.

7. Означення раціонального дробу та найпростіших раціональних дробів.

8. Інтегрування раціональних дробів.

Приклад. Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{Ndx}{(x+1)^k}$, $(k \geq 2,$ ціле$)$, 2) $\int \frac{xdx}{(x+N)(2-x)}$.

9. Інтегрування ірраціональностей виду $R\left((ax+b)^{\alpha}, (ax+b)^{\beta}\right)$,де α і β – дробові-раціональні числа.

Приклад. Знайти інтеграл $\int \frac{3\sqrt[6]{x}}{x(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}dx$.

10. Інтегрування виразів, що містять тригонометричні функції.

Приклад. 1) $\int \frac{dx}{1+tgx}$, 2) $\int 2\cos^2 5xdx$, 3) $\int \sin^4 x \cos^3 xdx$.

7.2. Визначений інтеграл

1. Інтегральні суми.

2. Умови існування визначеного інтегралу.

3. Властивості визначеного інтегралу.

4. Обчислення інтегралу. Формула Ньютона-Лейбніца.

Приклад. Обчислити $\int_1^N (x^2-2x+3)dx$ **.**

5. Заміна змінної у визначеному інтегралі.

6. Інтегрування частинами.

Приклади. Обчислити визначені інтеграли:

1) $\int_1^3 \frac{xdx}{N^2+x^2}$; 2) $\int_1^2 \frac{\ln Nx}{x^3}dx$; 3) $\int_0^{\frac{\pi}{2N}} x\cos Nxdx$;

4) $\int_3^7 \frac{6dx}{\sqrt{4x-3}+2}$; 5) $\int_0^5 \frac{5dx}{\sqrt{4x+1}+3}$.

7. Геометричні застосування визначеного інтегралу: обчислення площ, об'ємів тіл обертання, довжин дуг кривих.

Приклади. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями:

1) $y=(x-2)^3$, $y=4x-8$;

2) $y=4-x^2$, $y=x^2-2x$;

3) $y=(x+1)^2$, $y^2=x+1$.

Приклади. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y=-x^2+3x+4, y=0$.

8. Поняття невласних інтегралів.

Приклади. Обчислити або встановити розбіжність невластивих інтегралів:

1) $\int_0^{+\infty} e^{-Nx}dx$, 2) $\int_0^N \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

7.3. Кратні інтеграли

1. Означення подвійного інтеграла.

2. Геометричний та механічний зміст подвійного інтеграла.

3. Властивості подвійного інтеграла.

4.Обчислення подвійного інтеграла в декартовій прямокутній системі координат.

Приклади. Обчислити інтеграли

а) $\iint\limits_{S} x^N y^3 dxdy$, де область S є прямокутником $[1,3;\ 2,4]$.

б) $\iint\limits_{S} e^{-y^2} dxdy$ де область S є трикутником з вершинами в точках $O(0,0),\ A(0,N),\ B(1,1)$.

5. Заміна змінних у подвійному інтегралі.

6. Обчислення подвійного інтеграла у полярній системі координат.

Приклад. Обчислити інтеграл

$\iint\limits_{S} \sqrt{N^2 - x^2 - y^2}\, dxdy$, де S область обмежена лініями $x^2 + y^2 = 1,\ \ x^2 + y^2 = N^2$.

7. Означення потрійного інтеграла.

8. Обчислення потрійного інтеграла в декартовій прямокутній системі координат.

Приклади. Обчислити потрійний інтеграл

а) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^N dy \int\limits_0^2 (x + y + z) dz$,

б) $\iiint\limits_{V} y dxdydz$, де V – трикутна піраміда, що обмежена площиною $2x + y + z - 4 = 0$ та площинами координат.

9. Заміна змінних в потрійному інтегралі.

10. Обчислення потрійного інтеграла у циліндричній та сферичній системах координат.

Приклад. Обчислити потрійний інтеграл

$\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz$, де область V є сферою $x^2+y^2+z^2 \le N^2$.

11. Застосування кратних інтегралів до задач геометрії та фізики.

Приклад. Подвійним інтегруванням знайти об’єм тіла, обмеженого поверхнями: $z = xy$, циліндром $y=\sqrt{x}$ і площинами $x+y=2, y=0$ і $z=0$.

Приклад. Подвійним інтегруванням знайти об’єм тіла, обмеженого площинами координат, площинами $x=4, y=4$ і параболоїдом обертання $z=x^2+y^2+1$.

Приклад. Обчислити площу поверхні конуса $x^2+y^2-z^2=0$, що міститься в середині циліндра $x^2+y^2-2Rx=0$.

Приклад. Знайти об’єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2+z^2=b^2, 0<a<b$, $x^2+y^2=z^2$

(проектуємо на вісь Oyz)

Приклад. Знайти об’єм тіла, обмеженого циліндрами $z=4-y^2$, $z=y^2+2$ і поверхнями $x=-1, x=2$.

12. Невласні інтеграли.

Приклад. Дослідити чи збігається інтеграл:

$\iint\limits_S \dfrac{dxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$, де S коло $x^2+y^2 \le R^2$.

7.4. Криволінійні інтеграли

1. Означення криволінійного інтеграла першого роду.
2. Формула для обчислення криволінійного інтеграла першого роду за допомогою визначеного інтеграла, якщо рівняння кривої інтегрування задані в параметричній формі.
3. Формула для обчислення криволінійного інтеграла першого роду за допомогою визначеного інтеграла, якщо рівняння кривої інтегрування задано у вигляді $y=y(x)$ або $x=x(y)$.
4. Формула для обчислення обчислити довжини дуги і маси кривої.

5. Що називається криволінійним інтегралом другого роду?
6. Формула для обчислення криволінійний інтеграл другого роду за допомогою визначеного інтеграла.

Приклади. Обчислити криволінійні інтеграли:

1. $\int\limits_L \frac{dl}{x-y}$, де L– відрізок прямої $y=\frac{1}{2}x-2$, що лежить між точками *A(0,–2), B(4,0).*

2. $\int\limits_L xydl$, де L контур прямокутника з вершинами *A(0,0), B(4,0), C(4,2), D(0,2).*

3. $\int\limits_L (x^2+y^2)^n dl$, де L коло $x=a\cos t,\ y=a\sin t$.

Приклад. Знайти масу відрізка лінії $y=\ln x$ між точками з абсцисами $x_{1,}\ x_2$, якщо густина лінії в кожній точці дорівнює квадрату абсциси точки.

7. Означення однозв'язної області і просторово-однозв'язної області.
8. Формула Гріна.

Приклади. Обчислити криволінійні інтеграли по координатах безпосередньо і за формулою Гріна:

1. $\int\limits_L xdy$, де L контур трикутника, утвореного осями координат, і прямою $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ в додатковому напрямку.

2. $\int\limits_L (x^2+y^2)dy$, де L контур чотирьохкутника з вершинами (вказані в порядку обходу) *A(0,0), B(2,0), C(4,4), D(0,4).*

3. $\int\limits_L ydx+xdy$, де L - чверть кола ($x=R\cos t, y=R\sin t,\ 0\le t\le\frac{\pi}{2}$).

4. $\int\limits_L ydx-xdy$, де L - еліпс $x=a\cos t, y=b\sin t$, по якому рухаємось в додатковому напрямку.

9. Сформулюйте умови незалежності криволінійного інтеграла другого роду від форми кривої – шляху інтегрування.
10. Як знайти функцію двох або трьох змінних за її повним диференціалом?

Приклади .

1. Довести, що інтеграл $\int\limits_L (yx^3+e^y)dx+(\frac{x^4}{4}+xe^y-2y)dy$ дорівнює нулю.

2. Довести, що інтеграл $\int\limits_L \left(f(x+y)+f(x-y)\right)dx+\left(f(x+y)-f(x-y)\right)dy$ взятий по замкненому контуру, дорівнює нулю незалежно від вигляду підінтегральної функції.

11. Формула площі плоскої фігури та роботи змінної сили при переміщенні матеріальної точки вздовж заданої кривої.

7.5. Поверхневі інтеграли

1. Означення поверхневого інтеграла першого роду від функції $f(x,y,z)$ по поверхні S.
2. Формули переходу від поверхневого інтеграла першого роду до подвійного інтеграла.
3. Знаходження площі поверхні за допомогою поверхневого інтеграла першого роду.
4. Знаходження маси матеріальної поверхні за допомогою поверхневого інтеграла першого роду.
5. Знаходження статичних моментів та моментів інерції матеріальної поверхні за допомогою поверхневого інтеграла першого роду.

Приклади. Обчисліть поверхневі інтеграли першого роду:

1) $\iint\limits_S (xy-Nx+z)dS$, де S – частина площини $x+y+z=N$, розташована в першому октанті;

2) $\iint\limits_S Nx^2ydS$, де S – бічна поверхня конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, що відтинається площиною $z=N$;

3) $\iint\limits_S (z - Nx)dS$, де S – частина поверхні $Nz = x^2 + y^2$, розміщена між площинами $z = 0, z = N$.

6. Означення двосторонньої та односторонньої поверхні.
7. Приклади двосторонньої та односторонньої поверхні.
8. Означення поверхневого інтегралу другого роду.
9. Формули переходу від поверхневого інтеграла другого роду до подвійного інтеграла.
10. Як при переході від поверхневого інтеграла другого роду до подвійного інтеграла визначається знак подвійного інтеграла?

Приклади. Обчисліть поверхневі інтеграли другого роду:

1) $\iint\limits_S xyzdxdy$, де S – зовнішня сторона сфери $x^2 + y^2 + z^2 = N$;

2) $\iint\limits_S (xy - N)dxdz$, де S – зовнішня сторона тетраедра, обмеженого площинами $x + y + z = N, x = 0, y = 0, z = 0$;

3) $\iint\limits_S (xy - Nz)dxdy$, де S – зовнішня сторона параболоїда $z = x^2 + y^2$, що відтинається площиною $z = N$;

4) $\iint\limits_S xzdxdy + xydydz + yzdxdz$, де S – зовнішня сторона трикутника, вирізаного із площини $x + y - z = N$ координатними площинами.

11. Формула Остроградського-Гаусса.
12. Необхідні умови для застосування формули Остроградського-Гаусса.

Приклади. Використовуючи формулу Остроградського-Гаусса, обчисліть поверхневі інтеграли:

1) $\iint\limits_S Nx^2dydz + ydxdz + z^2dxdy$, де S – зовнішня сторона піраміди, обмеженої площинами $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x + y + z = N$;

2) $\iint\limits_S xdydz + Nydxdz - Nxzdxdy$, де S – зовнішня сторона піраміди, обмеженої площинами $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x - Ny + z - N = 0$;

3) $\iint\limits_S xdydz + ydxdz + xzdxdy$, де S – зовнішня сторона поверхні $Ny = x^2 + z^2,\ x = 0,\ y = N,\ z = 0,\ (x \geq 0)$.

13. Формула Стокса.
14. Необхідні умови для застосування формули Стокса.
15. Що означає відповідність між орієнтацією поверхні та контуру, який її обмежує?

Приклади. Обчисліть користуючись формулою Стокса, криволінійний інтеграл по замкненому контуру L (напрям на L відповідає додатному напряму його проекції на площину Oxy):

1) $\oint\limits_L (z^2 - x^2)dx - N(x^2 - y^2)dy + (y^2 - z^2)dz$, $L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = N, \\ x^2 + y^2 = z^2, \quad z \geq 0. \end{cases}$

2) $\oint\limits_L (x - Nz)dx + (x + Ny + z)dy + (x + y)dz$, L – контур трикутника ABC, де $A(\mathrm{N},0,0)$, $B(0,\mathrm{N},0)$, $C(0,0,\mathrm{N})$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Барковський В.В. Вища математика для економістів: навч. посіб. для студ. вищ. навч. заклад. / В.В. Барковський, Н.В. Барковська. – 5-те вид., перероб. та доп. – К.: Центр учбової літератури, 2010. – 448 с.
2. Валєєв К.Г., Вища математика: навч. мет. посібник для самост. вивч. дис. / К.Г. Валєєв, І.А. Джалладова, О.І. Лютий та ін. – Вид. 2-ге, перероб. і доп. – К.: КНЕУ, 2002. – 606 с.
3. Денисюк В.П. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч.1. / В.П. Денисюк, В.К. Репета. – К.: НАУ, 2013. – 472 с.
4. Денисьєвський М.О. Збірник задач з математичного аналізу. Функції кількох змінних. / М.О. Денисьєвський, А.В. Чайковський. – К.: ВПЦ «Київський університет», 2012. – 176 с.
5. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз: Підручник. У 2 ч. Ч.2. / А.Я. Дороговцев. – К.: Либідь, 1994. –304 с.
6. Дубовик В.П. Вища математика: Збірник задач / В.П. Дубовик, І.І. Юрик, І.П Вовкодав та ін. – Київ: А.С.К., 2001. – 480 с.
7. Дубовик В.П. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. зак. / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – 4-те вид. – К.: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.
8. Жалдак М.І. Математичний аналіз. Функції багатьох змінних. Навч. посібник. / М.І. Жалдак, Г.О. Михалін, С.Я. Деканов. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2007. – 429 с.
9. Кривуца В.Г. Вища математика. Практикум. / В.Г. Кривуца, В.В. Барковський, Н.В. Барковська. – К.: ЦУЛ, 2003. – 536 с.
10. Шкіль М.І. Математичний аналіз: Підруч. для студ. вищ. навч. закл. У 2 ч. / М.І. Шкіль. – 3-те вид. – К.: Вища школа, 2005. – 448 с.

Навчальне видання

Барабаш Олег Володимирович

Власик Ганна Миколаївна

Дахно Наталія Борисівна

Замрій Ірина Вікторівна

Свинчук Ольга Василівна

Шкапа Вікторія Вікторівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина 2

Інтегрування функцій однієї та багатьох змінних

Навчальний посібник