ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙ

КАФЕДРА ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Барабаш О.В., Мусієнко А.П., Собчук В.В.

ВИЩА МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ

Конспект лекцій

Частина 1

Київ – 2019

УДК 51.77
ББК 22.1
Б 24

Барабаш О.В., Мусієнко А.П., Собчук В.В. Вища математика для економістів. Конспект лекцій. Частина 1. – К.: ДУТ, 2019. – 224 с.

Схвалено до друку вченою радою
Державного університету телекомунікацій
(протокол № 10 від 2 грудня 2019 року)

Рецензенти:

Блудова Тетяна Володимирівна, доктор економічних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики Київського національного економічного університету імені Вадима Гетьмана.

Романюк Анатолій Сергійович, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач відділу теорії функцій Інституту математики Національної Академії Наук України.

Навчальний посібник розроблено згідно навчальної програми з дисципліни «Вища математика», що викладається для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня «Бакалавр» за спеціальностями 073 «Менеджмент», 075 «Маркетинг», 051 «Економіка», 076 «Підприємництво, торгівлі та біржова діяльність». Навчальний посібник являє собою сукупність лекцій, що викладались студентам Державного університету телекомунікацій зазначених спеціальностей підготовки протягом останніх п’яти років. У першій частині навчального посібника висвітлено такі розділи: лінійна алгебра та аналітична геометрія, диференційне числення, інтегральне числення.

Посібник розрахований для студентів денної та заочної форм навчання.

ЗМІСТ

ВСТУП 6

ЛЕКЦІЯ 1. ОПЕРАЦІЇ НАД МАТРИЦЯМИ 8

1. Вступ до курсу 8
2. Визначники, їх обчислення та властивості 10
3. Матриці та дії над ними 20
4. Знаходження оберненої матриці 24

ЛЕКЦІЯ 2. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА. РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ 31

1. Метод Крамера розв'язання СЛАР 31
2. Розв'язування СЛАР матричним методом 37
3. Розв'язування СЛАР методом Гаусса 40
4. Дослідження систем лінійних алгебраїчних рівнянь на сумісність. Теорема Кронекера-Капеллі 45

ЛЕКЦІЯ 3. ЗАСТОСУВАННЯ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ В ЗАДАЧАХ ЕКОНОМІКИ 50

1. Застосування алгебри матриць. 50
2. Економічні задачі, що зводяться до систем лінійних рівнянь 53

ЛЕКЦІЯ 4. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ 55

1. Вектори. Лінійні операції над векторами 55
2. Базис. Координати вектора 59
3. Скалярний, векторний, змішаний добутки векторів та розв'язання задач з їх допомогою 65

ЛЕКЦІЯ 5. ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ 71

1. Предмет аналітичної геометрії, її основні та найпростіші задачі 71
2. Пряма лінія на площині та її різні рівняння 73
3. Криві другого порядку 77

ЛЕКЦІЯ 6. ВИКОРИСТАННЯ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ ДО ЕКОНОМІЧНИХ ЗАДАЧ 80

1. Простір товарів, вектор цін 80
2. Застосування лінійної функціональної залежності. 82
3. Економічні задачі, пов'язані з використанням кривих другого порядку. 83

ЛЕКЦІЯ 7. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ. ФУНКЦІЇ ТА ГРАНИЦІ ФУНКЦІЙ 84
1. Функції, способи завдання, властивості, області визначення та значень функції 86
2. Нескінченно малі та нескінченно великі величини 91
3. Границя змінної та функцій....................93
4. Властивості границь 96
ЛЕКЦІЯ 8. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЙ 100
1. Перша та друга чудові границі....................100
2. Неперервність функцій 103
3. Класифікація розривів функції....................105
ЛЕКЦІЯ 9. ЗАСТОСУВАННЯ ФУНКЦІЙ В ЗАДАЧАХ ЕКОНОМІКИ 108
1. Основні виробничі функції....................108
2. Задачі, пов'язані з застосуванням основних виробничих функцій..........110
ЛЕКЦІЯ 10. ДИФЕРЕНЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ. ПРАВИЛА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ 118
1. Визначення, механічний та геометричний зміст похідної 119
2. Визначення диференціалу....................122
3. Правила диференціювання. Таблиця похідних 123
4. Похідні вищих порядків....................125
5. Основні теореми диференціального числення 127
ЛЕКЦІЯ 11. ДОСЛІДЖЕННЯ ГРАФІКА ФУНКЦІЇ 131
1. Зростання, спадання та екстремуми функції 131
2. Опуклість та угнутість графіка. Точку перегину 138
ЛЕКЦІЯ 12. ЗАГАЛЬНА СХЕМА ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ 141
1. Асимптоти кривої графіка функції 141
2. Загальна схема дослідження функції і побудови її графіка 143
ЛЕКЦІЯ 13. ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ....................149
1. Область визначення, границя, неперервність функції багатьох змінних....................149
2. Похідні та диференціали функції багатьох змінних 154
ЛЕКЦІЯ 14. ЗНАХОДЖЕННЯ ЕКСТРЕМУМІВ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ....................158
1. Частинні похідні вищих порядків....................159
2. Приклади застосування частинних похідних до аналізу бізнеса 159

3. Оптимізація. Визначення оптимальних значень аргументів функції багатьох змінних 161
4. Метод найменших квадратів 168

ЛЕКЦІЯ 15. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ. ПРАВИЛА ІНТЕГРУВАННЯ 172
1. Означення первісної та невизначеного інтегралу 172
2. Таблиця інтегралів 179
3. Основні методи інтегрування 180

ЛЕКЦІЯ 16. ОСОБЛИВОСТІ ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛІВ 184
1. Інтегрування раціональних дробів 185
2. Інтегрування виразів, що містять ірраціональності 190
3. Особливості інтегрування функцій, первісні яких не виражаються елементарними функціями 191
4. Означення та властивості визначеного інтеграла 192
5. Обчислення визначених інтегралів 196

ЛЕКЦІЯ 17. ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ 199
1. Загальні поняття 199
2. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними 204
3. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку 206
4. Лінійні диференціальні рівняння та рівняння Бернуллі 207

ЛЕКЦІЯ 18. ОСОБЛИВОСТІ ІНТЕГРУВАННЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ 1-ГО ТА 2-ГО ПОРЯДКІВ 211
1. Лінійні диференціальні рівняння та рівняння Бернуллі 212
2. Диференціальні рівняння другого порядку 214
3. Рішення диференціальних рівнянь на комп’ютері 219

ЛІТЕРАТУРА 222

ВСТУП

У будь-якій науці рівно стільки науки, скільки в ній математики.

(І. Кант)

Незалежний розвиток країни визначається рівнем освіти, культури та науки. Математична освіта є частиною як загальної, так і спеціальної освіти, яка грає фундаментальну роль в процесі освоєння природничих та технічних знань. Без математичної підготовки неможливо стати фахівцем у галузі фінансів, економіки, соціології, лінгвістики та ряду інших сфер прикладної діяльності. Свідоме володіння комп'ютерною технікою також неможливо без математичних знань.

Протягом всієї історії людства математика була засобом пізнання навколишнього світу, апаратом, за допомогою якого здійснюються розрахунки і ведуться дослідження практично у всіх природничих науках і цілому ряді гуманітарних наук. Особливе значення математичні знання мають при дослідження економічних процесів та явищ. Дослідження математичних моделей на основі матричної алгебри, систем лінійних алгебраїчних рівнянь, диференційних рівнянь дають змогу фахівцю усвідомити суть досліджуваних процесів та явищ, детально проаналізувати, надати практичні рекомендації, прогнозувати, тощо.

Навчальний посібник розроблено згідно навчальної програми з дисципліни «Вища та прикладна математика», що викладається для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня «Бакалавр» за напрямом 6.030601 «Менеджмент». Навчальний посібник являє собою сукупність лекцій, що викладались студентам Державного університету телекомунікацій зазначеного напряму підготовки протягом останніх п’яти років. У першій частині навчального посібника висвітлено такі розділи:

лінійна алгебра;

елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії;

вступ до матаналізу;

диференційне числення функції однієї змінної;

функції багатьох змінних;

інтегральне числення функції однієї змінної;

диференціальні рівняння.

Курс дисципліни «Вища та прикладна математика» містить в собі теоретичні відомості всіх традиційних розділів курсу вищої математики, рекомендованих Типовою Навчальною програмою Міністерства освіти і науки України для економічних спеціальностей. Більшість лекційного матеріалу, що представлено в навчальному посібнику, орієнтовано на використання під час практичних занять спеціального програмного забезпечення Maxima (розробки Масачусетського технологічного університету) та Excel.

Посібник розрахований для студентів денної та заочної форм навчання.

ЛЕКЦІЯ 1. ОПЕРАЦІЇ НАД МАТРИЦЯМИ

План лекції:

1. Вступ до курсу.
2. Визначники, їх обчислення та властивості.
3. Матриці та дії над ними.
4. Знаходження оберненої матриці.

Заключення.

1. Вступ до курсу

Дисципліна «Вища та прикладна математика» викладається для студентів ОКР «Бакалавр» на 1-му курсі протягом 2-х семестрів.

Розподіл навчального часу за семестрами.

Всього на вивчення дисципліни виділено **144** години аудиторних занять:

В кожному семестрі **36** год. лекцій та **36** год ПЗ.

Академічна звітність – екзамен після кожного семестру.

Протягом 1 семестру необхідно буде виконати 4 МКР (в 2-му семестрі – 3 МКР). Кожна МКР оцінюється в 100 балів. В кінці семестру виводиться середня модульна оцінка. Після здачі екзамену обчислюється семестрова оцінка, яка є середньою між середньою модульною та екзаменаційною.

Курс дисципліни ВПМ містить в собі теоретичні відомості всіх традиційних розділів курсу вищої математики, рекомендованих Типовою Навчальною програмою Міністерства освіти і науки України для економічних спеціальностей, а також основні поняття математичної логіки, комбінаторики, теорії графів, множин, математики в галузі фінансів та обліку. Під час практичних занять буде використовуватись програмне забезпечення Maxima (математичний пакет) та Excel.

Перелік розділів, що будуть вивчатись (короткий зміст дисципліни):

1-й семестр:

1. Лінійна алгебра.
2. Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії.
3. Вступ до матаналізу.
4. Диференційне числення функції однієї змінної.
5. Функції багатьох змінних.
6. Інтегральне числення функції однієї змінної.
7. Диференціальні рівняння.

2-й семестр:

8. Ряди.
9. Алгебра випадкових подій та основні теореми теорії ймовірностей.
10. Випадкові величини.
11. Числові характеристики вибіркової сукупності.
12. Перевірка статистичних гіпотез.

Література для вивчення курсу:

1. Барковський В.В., Барковська Н.В. Математика для економістів. Частина 1. Вища математика. – К.: Національна академія управління, 1999. – 399 с.
2. Барковський В.В., Барковська Н.В. Математика для економістів. Частина 2. Теорія ймовірностей та математична статистика. – К.: Національна академія управління, 1999. – 214 с.
3. Кривуца В.Г., Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика. Практикум. – К.: ЦУЛ, 2003. – 536 с.
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. В 2-х томах. – М.: Физматлит, 1985.

Обов’язково для студентів: взяти в бібліотеці посібник [1].

2. Визначники, їх обчислення та властивості

2.1. Різновиди матриць

Означення 1. *Матрицею називають **таблицю** упорядкованих чисел або будь-яких інших об'єктів, розташованих в m рядках та n стовпцях.*

Матриці позначають великими літерами, наприклад *A**,** B**,** C**...*** та круглими дужками.

Матриця, яка має m рядків та n стовпців, називається матрицею розміру $m\times n$ (перший множник завжди вказує кількість рядків). Така матриця має вигляд

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Кожен елемент a_{ij} матриці A має два індекси: перший індекс i вказує номер рядка, в якому знаходиться цей елемент, другий індекс j вказує номер стовпця, який містить цей елемент. Так, елемент a_{23} знаходиться на перетині другого рядка та третього стовпця матриці A.

Матриця розміру $m\times 1$ називається ***матрицею-стовпцем*** або ***вектором-стовпцем***. Матриця розміру $1\times n$ називається ***матрицею-рядком*** або ***вектором-рядком***.

Наприклад, нехай задані матриці

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 1 \\ 6 & 8 & 9 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix};\ D=\begin{pmatrix} 8 & 12 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Матриця A має розмір 2×3, матриця B розміру 3×4, C – матриця-стовпець розміру 4×1, D – матриця-рядок 1×4.

Матрицю називають ***квадратною порядку n***, якщо кількість її рядків однакова з кількістю стовпців і дорівнює n.

Наприклад, квадратна матриця A порядку n має вигляд

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Множина елементів a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn} квадратної матриці A порядку n утворюють ***головну діагональ матриці***, а множина елементів a_{1n}, $a_{2(n-1)}$, $a_{3(n-2)}$, …, a_{n1} утворює ***допоміжну*** (або ***неголовну***) ***діагональ матриці***.

Квадратна матриця, у якій $a_{ij} \neq 0$ лише при $i = j$ називається ***діагональною***. Діагональна матриця з елементами $a_{ii} = 1$ називається ***одиничною матрицею*** і найчастіше позначається E або I.

Наприклад, нехай задані матриці

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix};\ E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ 0=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

B – діагональна матриця 4-*го* порядку, E – одинична матриця порядку 3, 0 – нульова квадратна матриця порядку 3.

Для скорочення матриці можна записати у вигляді $\{a_{ij}\}$, коли розмір матриці A відомий, або $\{a_{ij}\}_{m\times n}$.

Матриці **А** та **В** називають ***рівними***, якщо:

1)вони мають однаковий розмір;
2)їх відповідні елементи рівні,
тобто $a_{ij} = b_{ij}$ для усіх i = 1, 2, ..., m: j = 1, 2 , ..., n.

*Я*кщо в матриці A рядки записати стовпцями із збереженням їх порядку, то одержану матрицю називають ***транспонованою*** і позначають A^T, а вказана операція перетворення матриці A називається ***транспонуванням матриці А***. Наприклад,

$$\text{якщо } B=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -3 & 8 & 9 \\ 11 & 4 & 1 \end{pmatrix},\ \text{тоді } B^T=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 11 \\ 4 & 8 & 4 \\ 5 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матриці широко використовуються в плануванні виробництва та транспортних перевезень. Вони дозволяють розробляти різні варіанти плана, полегшують дослідження залежності між різними економічними показниками.

Приклад 1. Мале підприємство виробляє 4 види продукції – *A*, *B*, *C* та *D*, використовуючи на кожну з них різну кількість двох матеріалів та праці (кількості робочих годин). Конкретна інформація вказана у таблиці.

Вироби:	***A***	***B***	***C***	***D***
Одиниць матеріалу *X*:	250	300	170	200
Одиниць матеріалу *Y*:	160	230	75	0
Кількість робочих годин:	80	85	120	100

У цій ситуації є 12 дійсних чисел, які можна впорядкувати і записати у вигляді матриці

$$F = \begin{pmatrix} 250 & 300 & 170 & 200 \\ 160 & 230 & 75 & 0 \\ 80 & 85 & 120 & 100 \end{pmatrix}$$

розміру 3×4. Кожен рядок та кожен стовпець цієї матриці має певний зміст. Наприклад, елементи другого рядка вказують кількість витраченого матеріалу *Y* на виробництво продукції *A*, *B*, *C* та *D*; елементи другого стовпця матриці вказують кількість витрачених матеріалів *X*, *Y* та робочих годин на виробництво продукції *B*.

2.2. Визначники

Визначником квадратної числової матриці *A* називають число, яке знаходять з елементів матриці *A* за певним правилом і позначають $|\boldsymbol{A}|$ або $\Delta(\boldsymbol{A})$ або $\det(\boldsymbol{A})$.

Правило знаходження визначника 2 порядку. Визначник другого порядку дорівнює різниці добутків елементів головної та допоміжної діагоналей:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}. \qquad (1)$$

Схему цієї формули можна зобразити таким чином

$$= a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Знак (+) вказує, що добуток елементів головної діагоналі треба брати зі своїм знаком, знак (–) означає, що добуток елементів неголовної діагоналі треба брати з протилежним знаком.

Приклад 1. Обчислити визначники

a) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$

Розв'язання. Будемо обчислювати задані визначники за формулою (1):

a) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - (-3) \cdot 4 = 10 + 12 = 22;$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 0 \cdot 2 = 12;$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 8 - 5 \cdot 6 = 16 - 30 = -14.$

Правило знаходження визначника 3-го порядку. Визначник третього порядку знаходять за формулою

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} -$$

$$-a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}-a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}-a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11}. \qquad (2)$$

Кожен доданок у правій частині (2) має 3 множники з різних рядків та стовпців. Три перших доданка із знаком (+) є добутками елементів головної діагоналі і елементів вершин трикутників з основами паралельними головній діагоналі (мал. 1, а). Три останні доданки у правій частині (2) мають від'ємний знак. Вони є добутками елементів неголовної діагоналі та елементів вершин трикутників із основами паралельними неголовній діагоналі (мал. 1, b)

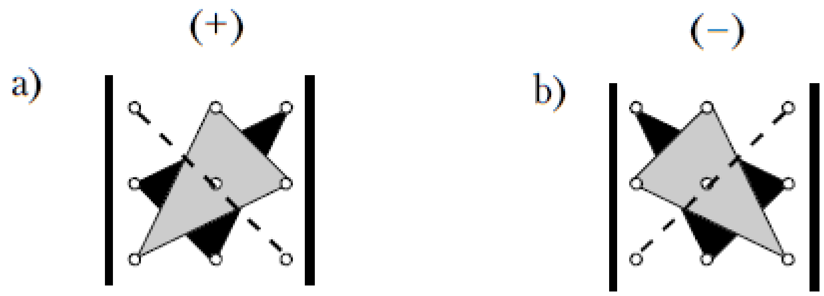


Рис. 1.

Ця схема обчислення визначника третього порядку називається ***правилом Саріуса.*** Існують також інші схеми обчислення визначника 3-го порядку.

Приклад 2. Обчислити визначник $\Delta=\begin{vmatrix}2 & -3 & 0\\ 1 & 4 & 3\\ -5 & 6 & 0\end{vmatrix}$

Розв'язання. Згідно з формулою (2) одержимо

$$\begin{vmatrix}2 & -3 & 0\\ 1 & 4 & 3\\ -5 & 6 & 0\end{vmatrix}=2\cdot4\cdot0+(-3)\cdot3\cdot(-5)+1\cdot6\cdot0-(-5)\cdot4\cdot0-1\cdot(-3)\cdot0-$$

$$-3\cdot6\cdot2=0+45+0-0-0-36=9.$$

Для обчислення визначників порядку $n > 3$ використовують алгебраїчні доповнення.

Означення 1. ***Мінором Mij елемента a_{ij} визначника n-го порядку*** *називається визначник* $(n-1)$ *порядку, який одержуємо з визначника* $|A|$ *шляхом викреслювання і-го рядка та j-го стовпця, на перетині яких знаходиться елемент* a_{ij}.

Означення 2. ***Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} визначника*** *називають мінор цього елемента, взятий зі знаком* $(-1)^{i+j}$, *тобто*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \tag{3}$$

Приклад 3. Знайти алгебраїчні доповнення до елементів a_{21},

та a_{33} визначника $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. Алгебраїчні доповнення до елементів a_{21} та a_{33} позначимо A_{21} та A_{33}, відповідно. Згідно з означенням 2

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -M_{21}; \qquad A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = M_{33} \tag{4}$$

Мінори M_{21} та M_{33} знайдемо згідно з означенням 1;

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - (-1) \cdot 1 = 12 + 1 = 13;$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 3 = 8 - 3 = 5.$$

Підставимо ці значення мінорів у відповідні до (4), одержимо шукані алгебраїчні доповнення

$$A_{21} = -13; \ \ A_{33} = 5.$$

Тепер можемо сформулювати правило обчислення визначника n-го порядку.

Правило. *Визначник n-го порядку дорівнює сумі добутків усіх елементів будь-якого стовпця (або рядка) на відповідні їм алгебраїчні доповнення.*

У випадку використання i-го рядка це правило математично можна записати так

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \ldots + a_{ik} A_{ik} + \ldots + a_{in} A_{in} \, . \qquad (5)$$

Рівність (5) називають ***розкладом визначника за елементами i-го рядка***. Визначник можна розкласти і за елементами k-го стовпця ($k = 1, 2, ..., n$).

Отже, обчислення визначника n-го порядку зводиться до обчислення визначників ($n - 1$) порядку шляхом розкладу визначника за елементами будь-якого рядка або стовпця.

Зауваження. Для скорочення обчислень визначника доцільно його розкласти за елементами такого рядка чи стовпця, який містить найбільшу кількість нулів. У такому випадку не треба знаходити алгебраїчні доповнення до елементів, що дорівнюють 0 (добуток 0 на будь-яке алгебраїчне доповнення дорівнює нулеві).

Таким чином, *для ефективного використання* методу обчислення визначника шляхом його розкладу за елементами будь-якого рядка або стовпця треба навчитись робити еквівалентні перетворення визначника, які дають можливість *одержати нулі у деякому рядку або стовпці.*

Виконання таких перетворень здійснюється з використанням деяких властивостей визначника.

2.3. Властивості визначників

1. ***Визначник при транспонуванні не змінюється.***

Пояснення дамо на прикладі визначників другого порядку. Нехай

$$\Delta(A)=\begin{vmatrix}3 & 4\\ -2 & 5\end{vmatrix}=15+8=23,\ \Delta\left(A^T\right)=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 4 & 5\end{vmatrix}=15+8=23.$$

Праві частини рівні, тому і ліві також рівні, тобто $\Delta(\mathrm{A}) = \Delta\left(A^T\right)$.

Наслідок. *У визначнику рядки та стовпці мають однакові властивості.*

2. ***Якщо у визначнику поміняти місцями будь-які два рядки (стовпці), то визначник змінить знак на протилежний.***

Наприклад $\begin{vmatrix}3 & 4\\ -2 & 5\end{vmatrix}=23;\ \begin{vmatrix}-2 & 5\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-8-15=-23,$ тому $\begin{vmatrix}3 & 4\\ -2 & 5\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-2 & 5\\ 3 & 4\end{vmatrix}.$

3. ***Якщо визначник має два однакових рядки (стовпця), то він дорівнює нулю.***

Дійсно, якщо ми поміняємо місцями рівні рядки (стовпці), то визначник не зміниться, але згідно властивості 2 він повинен змінити знак на протилежний. Тому визначник повинен дорівнювати 0.

Наприклад: $\begin{vmatrix}3 & -2\\ 3 & -2\end{vmatrix}=-6+6=0.$

4. ***Якщо у визначнику усі елементи одного рядка (стовпця) помножити на однакове дійсне число k, то визначник зросте також в k разів.***

Наприклад

$$\Delta(A)=\begin{vmatrix}4 & 5\\ 3 & 1\end{vmatrix}=4-15=-11,$$

$$\Delta(A_1)=\begin{vmatrix}k4 & k5\\ 3 & 1\end{vmatrix}=4k-15k=k(-11).$$

тобто $\Delta(A_1) = k\Delta(A)$, але $|A_1|$ одержано з визначника $|A|$ шляхом множення усіх елементів першого рядка на k.

Наслідок 1. *Спільний множник усіх елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника можна винести за знак визначника.*

Наслідок 2. *Якщо усі елементи будь-якого рядка (стовпця) визначника дорівнюють нулю, то визначник дорівнює нулю.*

5. ***Визначник, у якого відповідні елементи двох будь-яких рядків (стовпців) пропорційні, дорівнює нулю.***

Доведення цієї властивості випливає з властивостей 3 та 4.

6. ***Якщо у визначнику елементи i-го рядка (k-го стовпця) є сумою двох доданків, тоді він дорівнює сумі двох відповідних визначників.***

Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_1 & a_{12}+b_2 & a_{13}+b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

7. ***Якщо до всіх елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця) цього визначника, помножені на одне й те ж саме число, то визначник не зміниться.***

Приклад 4. Нехай заданий визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$.

Перетворимо визначник таким чином:

1) елементи першого рядка визначника помножимо на (–**3**) та додамо до відповідних елементів другого рядка визначника;

2) елементи першого рядка визначника помножимо на (–**2**) та додамо до відповідних елементів третього рядка визначника Δ. Отримаємо визначник, який позначимо Δ_1:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -8 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Перевіримо, що $\Delta_1 = \Delta$. Для цього обчислимо ці визначники.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot2\cdot2 + 2\cdot3\cdot2 + 1\cdot4\cdot1 - 1\cdot2\cdot2 - 1\cdot2\cdot2 - 4\cdot3\cdot3 =$$

$$= 12 + 12 + 4 - 4 - 4 - 36 = -16,$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\ -8 & -4 & 0\\ -4 & 0 & 0\end{vmatrix}=0+0+0-16-0-0=-16.$$

Отже, цей приклад ілюструє:

1) справедливість властивості 7;
2) цю властивість доцільно застосувати до перетворення визначників 4-го та вищих порядків, щоб одержати якомога більше нулів у якомусь стовпці (або рядку) і тим самим спростити обчислення заданого визначника.

Приклад 5. Обчислити визначник 4-го порядку $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 2 & -4\\ -3 & 2 & 1 & 5\\ 5 & 1 & -1 & 3\end{vmatrix}$.

Розв'язання. Перетворимо цей визначник таким чином, щоб зробити якомога більше нулів у якомусь стовпчику, краще у першому, бо там вже є один нуль. Для цього елементи першого рядка помножимо на 3 та додамо до відповідних елементів третього рядка, потім елементи першого рядка помножимо на (–5) та додамо до відповідних елементів четвертого рядка.

Одержимо визначник: $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 2 & -4\\ 0 & 8 & -5 & 14\\ 0 & -9 & 9 & -12\end{vmatrix}$.

Тепер визначник доцільно розкласти за елементами першого стовпця:

$$\Delta=1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & -4\\ 8 & -5 & 14\\ -9 & 9 & -12\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}1 & 2 & -4\\ 8 & -5 & 14\\ -3 & 3 & -4\end{vmatrix}.$$

Тут ми використали наслідок 1 властивості 4 і спростили визначник. Обчислимо його:

$$\Delta = 3(20 - 96 - 84 + 60 - 42 + 64) = 3(-78) = -234.$$

3. Матриці та дії над ними

Найпростішими діями з матрицями називають *множення матриці на число, їх додавання та віднімання, множення матриць*.

Добутком матриці A на число k називається матриця, елементи якої дорівнюють добуткам елементів матриці *A* та числа *k*:

$$kA=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & ka_{m3} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

Додавати та віднімати можна лише матриці однакового розміру.

Алгебраїчною сумою матриць A та B однакового розміру $m\times n$ називається матриця *C* розміру $m\times n$, елементи якої c_{ij} дорівнюють відповідній алгебраїчній сумі елементів a_{ij} та b_{ij} матриць *A* та *B*, тобто

$$A\pm B=C=\begin{pmatrix} a_{11}\pm b_{11} & a_{12}\pm b_{12} & \dots & a_{1n}\pm b_{1n} \\ a_{21}\pm b_{21} & a_{22}\pm b_{22} & \dots & a_{2n}\pm b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}\pm b_{m1} & a_{m2}\pm b_{m2} & \dots & a_{mn}\pm b_{mn} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Наприклад, якщо

$$A=\begin{pmatrix} 50 & 30 & 40 \\ 18 & 16 & 12 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 20 & 18 & 20 \\ 14 & 15 & 10 \end{pmatrix},$$

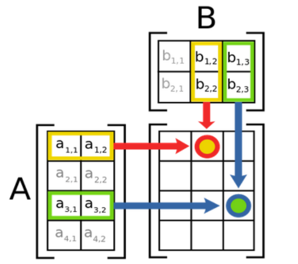
тоді

$$A+B=\begin{pmatrix} 50+20 & 30+18 & 40+20 \\ 18+14 & 16+15 & 12+10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 70 & 48 & 60 \\ 32 & 31 & 22 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо ще один приклад. Якщо матриця *F* відповідає виробничим параметрам за перший квартал року, а матриця *Q*, побудована по даним тих же параметрів за другий квартал року, тоді *F* + Q буде характеризувати ці параметри за перший та другий квартали, тобто за півроку.

Для знаходження добутку AB матриць *A* та *B* необхідно, щоб кількість стовпців матриці *A* (першого множника) дорівнювала кількості рядків матриці *B* (другого множника). Добутком *AB* матриці *A* розміру $m\times n$ і матриці *B* розміром $n\times p$ називається матриця *C* розміром $m\times p$, елементи якої c_{ij} дорівнюють сумі добутків елементів *i-го* рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B, тобто кожен елемент матриці C знаходять за формулою

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots + a_{in}b_{nj}\,. \qquad (7)$$



Зауваження. Добуток матриць взагалі не має властивості комутативності, тобто $AB \neq BA$. Якщо добуток двох матриць має властивість $AB = BA$**,** тоді кажуть, що матриці комутують.

Приклад 2. Знайти добуток матриць

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ та } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Розв'язання. У матриці A три стовпця, у матриці X три рядки, тому ці матриці можна множити. Добутком цих матриць буде матриця-стовпець

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}. \qquad (8)$$

Приклад 3. Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

знайти AB та BA.

Розв’язання

$$AB=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\2&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1&2\\3&2&1\\1&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1(-2)+2\cdot3+3\cdot1&1+4+9&2+2+6\\4(-2)+5\cdot3+6\cdot1&4+10+18&8+5+12\\2(-2)+1\cdot3+4\cdot1&2+2+12&4+1+8\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}7&14&10\\13&32&25\\3&16&13\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}-2&1&2\\3&2&1\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\2&1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+4+4&-4+5+2&-6+6+8\\3+8+2&6+10+1&9+12+4\\1+12+4&2+15+2&3+18+8\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}6&3&8\\13&17&25\\17&19&29\end{pmatrix}.$$

Отже, $AB\neq BA$.

Зауваження. Ділення матриць $\frac{A}{B}$ *розглядають як добуток* AB^{-1}, де B^{-1} – матриця, обернена до матриці *B*, визначення та знаходження якої розглянемо пізніше, після введення нових понять.

Приклад 4. ***(З теорії графів). Графом*** називають певну кількість точок (його вершин), деякі з них з'єднані лініями (ребрами). На малюнку 2 задані два графи з 4 та 5 вершинами.

Занумеруємо вершини цифрами 1, 2, 3, ... та визначимо матрицю *A* з елементами a_{ij} таким чином:

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{якщо існує ребро між вершинами } i \text{ та } j;\\ 0, & \text{якщо не існує ребро між вершинами } i \text{ та } j.\end{cases}$$

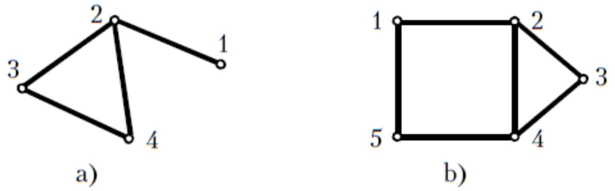


Рис. 2.

Така матриця в теорії графів отримала назву матриці суміжності.

Треба побудувати матриці A та A^2 для випадків a) та b), зображених на малюнку 1. Показати, що елемент з індексами ij матриці A^2 визначає кількість шляхів довжини 2 (двох послідовно пройдених ребер) з вершини i у вершину j графа.

Розв'язання. У випадку a) згідно з визначенням елементів a_{ij} одержуємо матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матриця A^2 буде мати вигляд

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо зміст елементів A^2 Елементи i-го рядка цієї матриці рівні кількості вказаних в умові напрямків з точки i. Так, точка i = 1 має лише один напрямок, що пов'язує її з вершиною 2, що не дорівнює j = 1, тобто a_{11} = 1, a_{12} = 0 тому, що не має інших ребер між точкою 1 та 2; a_{13} = 1 та a_{14} = 1 тому, що точка 1 має лише одне ребро, що зв'язує її з точкою 2, $2 \neq 3$, $2 \neq 4$.

У випадку b) згідно з визначенням елементів a_{ij} та вигляду поєднань вершин, зображених на малюнку 1 b) маємо:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$ Ця матриця квадратна п'ятого порядку, тому A^2 також буде квадратною матрицею п'ятого порядку, а саме

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Знаходження оберненої матриці

Нехай задана матриця A розміру $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Виберемо в ній довільно k рядків та k стовпців. Елементи, що знаходяться на перетині виділених рядків та стовпців, утворюють квадратну матрицю k-го порядку, визначник якої називають мінором k-го порядку матриці A. Обираючи різними способами k рядків та k стовпців, одержимо деяку кількість мінорів k-го порядку. Матриця має мінори будь-якого порядку: від першого (елементи матриці-мінори 1-го порядку) до найменшого із чисел m та n.

Розглянемо в матриці A ті її мінори різних порядків, які відмінні від нуля і нехай їх найбільший порядок = r.

Означення 1. ***Рангом матриці*** *називають найбільший порядок її мінорів, відмінних від нуля.*

Ранг матриці позначають $r(A)$ або r_A або просто r. Ранг матриці можна знаходити методом обвідних мінорів або простіше – методом елементарних перетворень.

Означення 2. ***Елементарними перетвореннями матриці*** *називають такі перетворення:*

1) перестановка рядків (стовпців) матриці;
2) множення всіх елементів рядка (стовпця) на число $\lambda \neq 0$;
3) додавання до елементів рядка(стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на деяке число.

Всі ці перетворення не змінюють ранг матриці, але з їх допомогою матрицю зводять до матриці, у якої нижче головної діагоналі всі елементи – нулі. Тоді ранг матриці дорівнює кількості елементів головної діагоналі, відмінних від нуля.

Приклад 1. Знайти ранг матриць:

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}$; b) $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$;

c) $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 5\\ 2 & 1 & -1 & 4\\ 2 & -2 & 6 & 3\end{pmatrix}$; d) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 3 & 6 & -3 & -1\\ 3 & 6 & -3 & 10\end{pmatrix}$.

Розв'язання. Ранг матриць будемо знаходити методом елементарних перетворень.

a) Елементи першого рядка матриці помножимо на (–3) і додамо до відповідних елементів другого рядка матриці A:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}\leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Звідси випливає, що ранг цієї матриці дорівнює 1 (нижче головної діагоналі – нуль та один елемент головної діагоналі $\neq 0$)

b) Зробимо такі перетворення, щоб нижче головної діагоналі були нулі:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}^{\times(-2),(-1)}\leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}(-1)\leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Звідси випливає, що $r(A) = 2$.

c) Знову робимо такі перетворення, щоб нижче головної діагоналі були нулі:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 5\\ 2 & 1 & -1 & 4\\ 2 & -2 & 6 & 3\end{pmatrix}^{\times(-2),(-2)}\leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 5\\ 0 & 3 & -7 & -6\\ 0 & 0 & 0 & -7\end{pmatrix}.$$

Оскільки можна третій та четвертий стовпці поміняти місцями і отримати третій елемент головної діагоналі, який $\neq 0$, то $r(A) = 3$.

d) Перетворимо матрицю аналогічно попередньому

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 3 & 6 & -3 & -1\\ 3 & 6 & -3 & 10\end{pmatrix}^{\times(-3),(-3)}\leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -10\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & -10\end{pmatrix}\times 10 \leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 2\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Звідси випливає, що $r(A) = 2$.

Означення 3. *Матриця* A^{-1} *називається* ***оберненою матрицею до матриці A****, якщо виконуються рівності*

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E\,, \tag{9}$$

тобто матриці A та A^{-1} комутують і їх добуток є одинична матриця.

Не всяка матриця має обернену. В алгебрі матриць доведено, що матриця A має обернену матрицю A^{-1} при виконанні двох умов:

1) матриця A квадратна;
2) визначник $|A|$ матриці A не дорівнює нулю.

Обернену матрицю A^{-1} до матриці A можна знаходити двома способами:

за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1}\\A_{11} & A_{11} & \dots & A_{n2}\\\dots & \dots & \dots & \dots\\A_{1n} & A_{21} & \dots & A_{nn}\end{pmatrix} \tag{10}$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} матриці A, (алгебраїчні доповнення до i-го рядка розташовані у i-му стовпці, ($i = 1, 2, \ldots, n$).

а також з використанням означення оберненої матриці та елементарних перетворень матриць.

Приклад 2. Знайти обернену матрицю до матриці

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\3 & 2 & -4\\2 & -1 & 5\end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Спочатку впевнимося, що матриця A має обернену A^{-1}.

Матриця A має три рядки та три стовпця, тому вона квадратна порядку 3. Її визначник

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot 2\cdot 5 + 2\cdot(-4)\cdot 2 + 3\cdot(-1)\cdot(-3) - 2\cdot 2\cdot(-3) - 3\cdot 2\cdot 5 - 5 - (-1)(-4)\cdot 1 =$$
$$= 10 - 16 + 9 + 12 - 30 - 4 = -19 \neq 0 .$$

Отже, матриця A має обернену A^{-1}, яку знайдемо за формулою (10). У даному випадку алгебраїчними доповненнями до елементів матриці A будуть:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 6;\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -23;\ A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -7;\ A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 11;\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -2;\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -5;\ A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4.$$

Таким чином, одержали

$$A^{-1} = \frac{-1}{19}\begin{pmatrix} 6 & -7 & -2 \\ -23 & 11 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Приклад 3. Знайти обернену матрицю до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 10 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Задана матриця A квадратна порядку 3, її визначник:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 10 \end{vmatrix} = 1\cdot 5\cdot 10 + 2\cdot 7\cdot 3 + 2\cdot 7\cdot 3 - 3\cdot 3\cdot 5 - 2\cdot 2\cdot 10 - 7\cdot 7\cdot 1 = 0$$

Отже, ця матриця оберненої не має.

Зауваження. Якщо матриця A квадратна другого порядку $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, визначник якої $|A| \neq 0$, то обернену до неї матрицю A^{-1} можна знайти за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}, \qquad (11)$$

тобто треба елементи головної діагоналі матриці A поміняти місцями, елементи неголовної діагоналі помножити на (–1) і одержану матрицю помножити на $\frac{1}{|A|}$.

Приклад 4. Знайти обернену матрицю до матриці $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Задана квадратна матриця другого порядку, її визначник

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot 6 - 4\cdot 1 = 12 - 4 = 8 \neq 0.$$

тому для знаходження A^{-1} можна застосувати формулу (11). Одержимо:

$$A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Приклад 5. ***(Модель міжгалузевого планування потреб та пропозицій).*** Таблицею задані показники взаємних потреб та пропозицій між різними галузями промисловості.

Галузеві пропозиції	**Галузеві потреби**			**Потреби інших галузей**	**Кількість усіх пропозицій**
	1	2	3		
1	20	48	18	14	100
2	30	12	54	24	120
3	30	36	36	72	180
Витрати праці	20	24	72		

а) Визначити матрицю потреб-пропозицій A.

b) Припустимо, що через три роки потреби інших галузей зростуть до 24, 33 та 75 показників для галузей 1, 2, 3, відповідно. Скільки продукції повинна виробити кожна галузь, щоб задовольнити ці потреби?

Розв'язання. a) Елементи шуканої матриці A дорівнюють відношенню потреб i-тої галузі до загальної кількості пропозицій цієї галузі. Тому для знаходження елементів i-го стовпця ($i = 1,2,3$) матриці A треба поділити потреби i-тої галузі, вказані у таблиці, на загальну кількість пропозицій цієї галузі.

Таким чином, ми одержуємо матрицю потреб-пропозицій вигляду

$$A = \begin{pmatrix} \frac{20}{100} & \frac{48}{120} & \frac{18}{180} \\ \frac{30}{100} & \frac{12}{120} & \frac{54}{180} \\ \frac{30}{100} & \frac{36}{120} & \frac{36}{180} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,1 \\ 0,3 & 0,1 & 0,3 \\ 0,3 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

b) Нехай E-одинична матриця третього порядку. Позначимо:

$$D = \begin{pmatrix} 24 \\ 33 \\ 75 \end{pmatrix} \text{ – матриця-стовпець нових потреб,}$$

X – матриця нових пропозицій,що відповідають новим потребам,

$$B = E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,1 \\ 0,3 & 0,1 & 0,3 \\ 0,3 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,4 & -0,1 \\ -0,3 & 0,9 & -0,3 \\ -0,3 & -0,3 & 0,8 \end{pmatrix}$$

Тоді

$$X = B^{-1} \cdot D \tag{12}$$

Для обчислення майбутніх пропозицій залишилось знайти B^{-1}. Матриця B квадратна третього порядку, її визначник

$$|B| = \begin{vmatrix} 0,8 & -0,4 & -0,1 \\ -0,3 & 0,9 & -0,3 \\ -0,3 & -0,3 & 0,8 \end{vmatrix} = 0,336 .$$

Для знаходження матриці B^{-1}, яка існує, знайдемо алгебраїчні доповнення елементів матриці B: $B_{11} = 0,63$; $B_{12} = 0,33$; $B_{13} = 0,36$; $B_{21} = 0,35$; $B_{22} = 0,61$; $B_{23} = 0,36$; $B_{31} = 0,21$; $B_{32} = 0,27$; $B_{33} = 0,6$.

Отже, обернена матриця B^{-1} має вигляд

$$B^{-1} = \frac{1}{0,336}\begin{pmatrix} 0,63 & 0,35 & 0,21 \\ 0,33 & 0,61 & 0,27 \\ 0,36 & 0,36 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

Підставимо D та знайдену B^{-1} у формулу (4), одержуємо

$$X = \frac{1}{0,336}\begin{pmatrix} 0,63 & 0,35 & 0,21 \\ 0,33 & 0,61 & 0,27 \\ 0,36 & 0,36 & 0,6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 24 \\ 33 \\ 75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 126,25 \\ 143,75 \\ 195 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, першій галузі треба виробити 126,25 одиниць продукції, другій галузі потрібно виробити 143,75 одиниць продукції, а третій галузі треба виробити 195 одиниць продукції через три роки.

Заключення.

Матриці та вектори є математичними об'єктами, що описують різні процеси та явища реального життя. Вони мають велике прикладне значення. Матриця характеризується визначником, який можна обчислити тільки для квадратної матриці. Якщо він дорівнює нулю, то матриця називається виродженою. В іншому випадку така матриця має обернену. Для подальшого застосування матриць має суттєве значення вміння виконувати операції над матрицями, знаходити їх визначники та обернені матриці.

ЛЕКЦІЯ 2. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА. РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

План лекції:

Вступ

1. Метод Крамера для розв'язання СЛАР.
2. Розв'язування СЛАР матричним методом.
3. Розв'язування СЛАР методом Гаусса.
4. Дослідження систем лінійних алгебраїчних рівнянь на сумісність. Теорема Кронекера-Капеллі.

Заключення.

Вступ.

В шкільному курсі алгебри розглядувалися тільки системи лінійних рівнянь, в яких кількість рівнянь дорівнювала кількості невідомих і ця кількість, як правило, не перевищувала 3. До систем лінійних алгебраїчних рівнянь з більшою кількістю невідомих зводяться багато прикладних задач (техніки та економіки). Зокрема, за допомогою систем лінійних алгебраїчних рівнянь проводять розрахунок складних електричних ланцюгів, прогнозування економічних процесів за допомогою метода найменших квадратів.

Наша мета – навчитися оперувати з системами лінійних алгебраїчних рівнянь самого загального вигляду з довільною кількістю рівнянь і довільною кількістю невідомих.

1. Метод Крамера розв'язання СЛАР

1.1. Основні поняття і означення в теорії розв'язання СЛАР.

Означення. ***Системою лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)****, що містить m рівнянь і n невідомих, називається система вигляду:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = в_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = в_2; \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_m x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = в_m. \end{cases} \qquad (1)$$

де m і n – довільні цілі додатні числа;

a_{ij} , $i = 1,2,...,m$, $j = 1,2,...,n$ – дійсні числа, які називаються коефіцієнтами системи;

b_i, $i = 1,2,\ldots,m$ – дійсні числа, які називаються вільними членами рівнянь системи. Перший індекс у коефіцієнта вказує номер рівняння, другий – номер невідомого, при якому знаходиться даний коефіцієнт.

Складемо з коефіцієнтів цієї системи матрицю *A*, яка називається ***основною матрицею СЛАР***:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Доповнимо матрицю A стовпцем вільних членів.

<u>Означення</u>. *Матриця системи, утворена приєднанням до неї стовпця вільних членів, називається* ***розширеною матрицею системи***. *Позначається:*

$$\tilde{\mathrm{A}} = (\mathrm{A}|\mathrm{B}) = (a_{ij}|b_i) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_4 \end{array}\right) \qquad (3)$$

Система лінійних алгебраїчних рівнянь (1) цілком визначається своєю розширеною матрицею (3).

Кількість рівнянь m ніяк не пов'язана з кількістю невідомих n, можливі випадки $m=n$, $m>n$, $m<n$.

<u>Означення</u>. Розв'язком *системи лінійних алгебраїчних рівнянь* (1) *називається набір з* n *чисел* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ *такий, що після заміни невідомих* $x_1, x_2, ..., x_n$ *числами* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ *кожне з рівнянь системи* (1) *перетворюється на тотожність* .

Якщо набір $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ є розв'язком СЛАР (1), то кажуть, що він задовольняє системі (1).

Існують системи з єдиним розв'язком і з кількістю розв'язків більше одного і такі, що не мають розв'язків.

<u>Означення.</u> *Система лінійних алгебраїчних рівнянь називається* ***сумісною****, якщо вона має хоча б один розв'язок. Система називається* ***несумісною****, якщо вона не має жодного розв'язку.*

<u>Означення.</u> *Сумісна система, що має єдиний розв'язок, називається* ***визначеною****. Сумісна система, що має більш одного розв'язку, називається* ***невизначеною****.*

<u>Приклад.</u>

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1; \\ x_1 + 2x_2 = 3. \quad II - I \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = -1; \\ x_2 = 2. \end{cases}$ система сумісна визначена

(має єдиний розв'язок)

2) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1; \\ 3x_1 + 3x_2 = 3. \quad II - 3I \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 1 - x_2; \\ x_2 \in R. \end{cases}$ система сумісна невизначена

(має більше одного розв'язку)

3) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1; & 2I \\ 2x_1 + 2x_2 = 3. \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 2; \\ 2x_1 + 2x_2 = 3. \end{cases}$ система несумісна

(не має розв’язків)

Вираз “розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь’’ означає: визначити чи сумісна вона чи не сумісна, у випадку сумісності знайти всі розв’язки.

В теорії систем лінійних алгебраїчних рівнянь розробляються методи, що дозволяють розв’язати будь-яку систему лінійних алгебраїчних рівнянь .

Означення. *Дві системи лінійних алгебраїчних рівнянь з однаковими невідомими* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *називаються* ***еквівалентними****, якщо вони обидві або сумісні або несумісні, або сумісні і множини їх розв’язків співпадають.*

Зауваження. Еквівалентні системи лінійних алгебраїчних рівнянь необов’язково мають однакову кількість рівнянь. Зокрема, система рівнянь може бути рівносильна одному рівнянню.

Еквівалентні системи дістають, зокрема, за допомогою елементарних перетворень даної системи. Елементарні перетворення системи лінійних алгебраїчних рівнянь відповідають елементарним перетворенням матриці (лекція № 1) за умови, що вони виконуються лише над рядками матриці.

Наступна теорема дає повну відповідь на запитання про сумісність системи (1), тобто про існування її розв’язку.

Теорема Кронекера-Капеллі. (Леопольд Кронекер (1823-1891) – німецький математик, Альфредо Капеллі (1855-1910) – італійський математик). *Система лінійних алгебраїчних рівнянь* ***сумісна*** *(має один або кілька розв’язків) тоді і тільки тоді, коли ранг основної матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці системи.*

СЛАР сумісна $\Leftrightarrow r(A) = r(\tilde{A})$.

Як тільки з’ясовано, сумісна дана система лінійних алгебраїчних рівнянь чи ні, виникає питання про її визначеність або невизначеність, тобто єдиний розв’язок має система або безліч розв’язків.

Теорема (про число розв’язків системи) 1. *Якщо ранг основної матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці системи і дорівнює числу невідомих, то система визначена, тобто має єдиний розв’язок.*

$$r(A) = r(\tilde{A}) = n \Rightarrow$$ **СЛАР визначена (має єдиний розв'язок)**

2. *Якщо ранг основної матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці системи, але менше числа невідомих, то система невизначена, тобто має безліч розв'язків.*

$$r(A) = r(\tilde{A}) < n \Rightarrow$$ **СЛАР невизначена (має безліч розв'язків)**

Як тільки з'ясовано число розв'язків даної сумісної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, виникає питання знаходження цих розв'язків.

1.2. Розв'язування СЛАР методом Крамера

Нехай задано систему лінійних алгебраїчних рівнянь, в якій кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих $m = n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = в_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = в_2; \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_n x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = в_n. \end{cases} \qquad (4)$$

Коефіцієнти системи (4) утворюють основну матрицю системи:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Визначник цієї матриці називається визначником системи (4) і позначають |A| або Δ(A) або просто Δ.

<u>Теорема</u> (Крамера) – (Габриель Крамер (1704 –1752) – Швейцарія).

Якщо в системі лінійних алгебраїчних рівнянь кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих і визначник матриці системи Δ відмінний від 0, то ця система має єдиний розв'язок, який може бути знайдений за формулами:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad ..., \qquad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \qquad (5)$$

де визначники $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$ отримані з визначника Δ заміною відповідного стовпця стовпцем вільних членів.

З теореми Крамера випливає:

1) Якщо визначник матриці системи $\Delta = 0$, то система може або взагалі не мати розв'язків , або мати їх нескінченну множину.

2) Якщо визначник матриці системи $\Delta = 0$ і хоча б один з визначників $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$ відрізняється від 0, то система несумісна, тобто не має розв'язків.

3) Якщо визначник матриці системи $\Delta = 0$ і визначники $\Delta_1 = \Delta_2 = ... = \Delta_n = 0$, то система або несумісна, або невизначена, тобто має нескінченну множину розв'язків.

Метод розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь за теоремою Крамера називається ***методом Крамера***. Формули (5) називаються формулами Крамера.

<u>Приклад</u>. Розв'язати систему методом Крамера.

$$\begin{cases} x_1 + \ x_2 - 4x_3 = 1; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5; \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 4. \end{cases}$$

<u>Розв'язання</u>:

Складемо і обчислимо визначник системи Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 9 + 8 + 24 - 6 - 4 = 21.$$

Оскільки $\Delta = 21 \neq 0$, то система невироджена, тому можна використовувати формули Крамера. Разом з тим, можна зробити висновок, що $rank(A) = rank(\widetilde{A}) = n$. Тому СЛАР має єдине рішення.

Складемо і обчислимо визначники $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 5 & 2 & -3 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 42; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 1 & 5 & -3 \\ 3 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 63;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 21.$$

За формулами Крамера (3)

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{42}{21} = 2; \\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{63}{21} = 3; \\ x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{21}{21} = 1. \end{cases}$$

<u>Відповідь:</u> $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1$.

2. Розв'язування СЛАР матричним методом

Нехай задано систему лінійних алгебраїчних рівнянь, в якій кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих $m = n$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_n x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (6)$$

Складемо з коефіцієнтів цієї системи основну матрицю A:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Разом з матрицею системи A розглянемо ще дві матриці

$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ – матриця-стовпець невідомих (або вектор невідомих);

$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ – матриця-стовпець вільних членів (або вектор вільних членів)

Згідно з правилом множення матриць систему (2) можна записати у вигляді

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Такий запис є матричною формою запису системи (6). Або скорочено

$$A\cdot X=B. \tag{7}$$

Рівняння (7) називається ***матричним рівнянням*** з невідомою матрицею X .

<u>Теорема</u> (про розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь у матричній формі). *Розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь* $A\cdot X=B$ *за умови* $|A|\neq 0$ *є єдиним і має вигляд*

$$X=A^{-1}\cdot B \tag{8}$$

де A^{-1} *– матриця, обернена до матриці* A.

Метод розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь за теоремою про розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь у матричній формі називається ***методом оберненої матриці***.

Приклад. Розв'язати систему методом оберненої матриці

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 - 4x_3 = 1; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5; \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 4. \end{cases}$$

Розв'язання :

Запишемо систему у матричній формі :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 21 \cdot$$

Оскільки $\Delta = 21 \neq 0$, то існує A^{-1}. Знайдемо A^{-1} (будь-яким методом):

$$\mathrm{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{21} & \frac{4}{21} & \frac{5}{21} \\ -\frac{13}{21} & \frac{16}{21} & -\frac{1}{21} \\ -\frac{8}{21} & \frac{5}{21} & \frac{1}{21} \end{pmatrix}.$$

За формулою (8)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{21} & \frac{4}{21} & \frac{5}{21} \\ -\frac{13}{21} & \frac{16}{21} & -\frac{1}{21} \\ -\frac{8}{21} & \frac{5}{21} & \frac{1}{21} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{21} & \frac{20}{21} & \frac{20}{21} \\ -\frac{13}{21} & \frac{80}{21} & -\frac{4}{21} \\ -\frac{8}{21} & \frac{25}{21} & \frac{4}{21} \end{pmatrix} = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 42 \\ 63 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot$$

Відповідь: $x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = 1.$

3. Розв'язування СЛАР методом Гаусса

Метод Крамера та матричний метод дуже цікаві в теоретичному плані, але в практичному застосуванні вони є обмеженими для систем з великою кількістю рівнянь внаслідок громіздких обчислень. Тому для розв'язування СЛАР найчастіше застосовують метод послідовного виключення невідомих, який є універсальним і може бути застосований для довільних сумісних систем. Цей метод був запропонований Карлом Фрідріхом Гауссом (1777-1855) і носить його ім'я. На цей час метод Гаусса залишається одним з найкращих методів розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Нехай маємо СЛАР з m рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{9}$$

Основна матриця системи A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Розширена матриця системи:

$$\tilde{\mathrm{A}} = (\mathrm{A}|\mathrm{B}) = (a_{ij}|b_i) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_4 \end{array}\right) \tag{10}$$

Система лінійних алгебраїчних рівнянь (9) цілком визначається своєю розширеною матрицею (10).

Наступне твердження очевидне.

Здійснюючи ***елементарні перетворення*** *над системою (9), ми здійснюємо елементарні перетворення відповідного вигляду над розширеною матрицею системи (10). Коли ж ми здійснюємо елементарні перетворення над розширеною матрицею(10), то такі ж самі перетворення будуть здійснюватись над самою системою (9).*

Теорема. (про елементарні перетворення розширеної матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь). *Якщо розширена матриця однієї СЛАР отримана з розширеної матриці іншої СЛАР за допомогою скінченного числа елементарних перетворень, то такі системи еквівалентні.*

Метод Гаусса полягає в наступному:

Для того щоб розв'язати систему (9), виписуємо розширену матрицю системи $\tilde{A}$ і над рядками матриці $\tilde{A}$ проводимо елементарні перетворення. Кожен раз після елементарного перетворення отримуємо розширену матрицю нової системи, яка еквівалентна початковій за теоремою про елементарні перетворення розширеної матриці СЛАР. При цьому намагаємося привести матрицю $\tilde{A}$ до трикутникового вигляду (під головною діагоналлю всі нулі).

Перетворення матриці $\tilde{A}$ до еквівалентної матриці трикутникового виду називається ***прямим ходом*** метода Гаусса.

Подальше перетворення розширеної матриці до матриці діагонального виду, з якого розв'язок системи (9) видно безпосередньо, називається ***зворотним ходом*** метода Гаусса.

Приклад. Розв'язати методом Гаусса систему

$$\begin{cases} x_1+x_2-4x_3=1; \\ x_1+2x_2-3x_3=5; \\ 3x_1-2x_2+4x_3=4. \end{cases}$$

Розв'язання. Випишемо розширену матрицю системи і виконаємо над її рядками елементарні перетворення:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 4 & 4 \end{array}\right)\left|\begin{array}{c} I \\ II \\ III \end{array}\right. \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 16 & 1 \end{array}\right)\left|\begin{array}{c} I \\ II-I \\ III-3I \end{array}\right. \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 21 & 21 \end{array}\right)\left|\begin{array}{c} I \\ II \\ III+5II \end{array}\right. \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)\left|\begin{array}{c} I \\ II \\ III:21 \end{array}\right. \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)\left|\begin{array}{c} I-II \\ II-III \\ III \end{array}\right. \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)\left|\begin{array}{c} I+4III \\ II \\ III \end{array}\right.$$

Остання розширена матриця відповідає системі

$$\begin{cases} x_1 = 2; \\ x_2 = 3; \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Особливості розв'язання сумісних невизначених СЛАР (ті, що мають безліч рішень, число невідомих більше числа рівнянь).

Невідомі СЛАР, які відповідають коефіцієнтам, розташованим на головній діагоналі отриманої матриці, називаються ***базисними,*** а всі інші – ***вільними***. Вільні невідомі переносяться в праві частини рівнянь. Матриця системи буде мати розмірність n – число рівнянь та число базисних невідомих. Елементарні перетворення здійснюється над розширеною матрицею системи. Рішення представляється для кожної базисної невідомої в залежності від вільних невідомих. Наприклад, в деякій СЛАР базисними невідомими є x_1 та x_2, а вільною невідомою є x_3. Рішення може бути представлено у вигляді:

$x_1 = 2 + 3 \cdot x_3;$
$x_2 = -5 - 2 \cdot x_3,$

де x_3 може приймати будь-яке дійсне значення.

<u>Приклад</u>. Розв'язати методом Гаусса систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 = 1; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$$

<u>Розв'язання.</u> СЛАР є сумісною та невизначеною, має безліч рішень. Позначимо x_1 та x_2 як базисні невідомі, а x_3 – вільною невідомою. СЛАР запишемо у вигляді:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 + 4x_3; \\ x_1 + 2x_2 = 5 + 3x_3. \end{cases}$$

Випишемо розширену матрицю системи і виконаємо над її рядками елементарні перетворення:

$$\sim\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1+4x_3 \\ 1 & 2 & 5+3x_3 \end{array}\right) \begin{array}{c} I \\ II \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1+4x_3 \\ 0 & 1 & 4-x_3 \end{array}\right) \begin{array}{c} I \\ II-I \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3+5x_3 \\ 0 & 1 & 4-x_3 \end{array}\right) \begin{array}{c} I-II \\ II \end{array}$$

Остання розширена матриця відповідає системі

$$\begin{cases} x_1 = -3 + 5x_3; \\ x_2 = 4 - x_3. \end{cases}$$

Вільна змінна x_3 може приймати будь-яке дійсне число. В залежності від цього значення розраховується пара базисних змінних x_1 та x_2.

<u>Приклад</u>. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=2; \\ x_1-x_2+x_3=0; \\ x_1+3x_2-x_3=-2; \\ 3x_1+4x_2+3x_3=0. \end{cases}$$

Розв'язання. Випишемо розширену матрицю системи і виконаємо над її рядками елементарні перетворення:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} I \\ II \\ III \\ IV \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & -2 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} II \\ I-II \\ III-II \\ IV-3II \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)\begin{array}{l} II \\ IV \\ III-4IV \\ II-3IV \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

(прямий хід метода Гаусса, отримали матрицю трикутно-трапецеїдального виду).

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

(зворотний хід метода Гаусса, отримали матрицю діагонального виду).

Остання розширена матриця відповідає системі

$$\begin{cases} x_1 = -1; \\ x_2 = 0; \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

яка і дає нам розв'язок початкової системи.

4. Дослідження систем лінійних алгебраїчних рівнянь на сумісність. Теорема Кронекера-Капеллі

Розглянемо довільну систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = в_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = в_2; \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_m x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = в_m. \end{cases} \qquad (1)$$

Складемо з коефіцієнтів цієї системи основну A і розширену $\tilde{A}$ матрицю:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Наступна теорема дає повну відповідь на запитання про сумісність системи (1), тобто про існування її розв'язку.

<u>Теорема Кронекера-Капеллі.</u> (Леопольд Кронекер (1823-1891) – німецький математик, Альфред Капеллі (185-1910) – італійський математик). *Система лінійних алгебраїчних рівнянь сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг основної матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці системи.*

$$\textbf{СЛАР сумісна} \Leftrightarrow r(A) = r(\tilde{A}).$$

Як тільки з'ясовано, сумісна дана система лінійних алгебраїчних рівнянь чи ні, виникає питання про її визначеність або невизначеність, тобто єдиний розв'язок має система або безліч розв'язків.

<u>Теорема (про число розв'язків системи)</u> 1. *Якщо ранг основної матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці системи і дорівнює числу невідомих, то система визначена, тобто має єдиний розв'язок.*

$$r(A) = r(\tilde{A}) = n \Rightarrow \textbf{СЛАР визначена (має єдиний розв'язок)}$$

2. *Якщо ранг основної матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці системи, але менше числа невідомих, то система невизначена, тобто має безліч розв'язків.*

$$r(A) = r(\widetilde{A}) < n \Rightarrow$$ **СЛАР невизначена (має безліч розв'язків)**

Як тільки з'ясовано число розв'язків даної сумісної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, виникає питання знаходження цих розв'язків.

Замінимо в неоднорідній системі (1) всі вільні члени нулями. Отримана таким чином система лінійних алгебраїчних рівнянь називається однорідною системою *асоційованою* з даною (або *зведеною* системою).

<u>Теорема.</u> ***(про структуру розв'язків неоднорідної СЛАР).*** *Загальний розв'язок неоднорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь дорівнює сумі деякого частинного розв'язку цієї системи і загального розв'язку однорідної системою асоційованої з даною.*

ЗР НСЛАР = ЧР+ ЗР ОСЛАР

З теорем випливає наступна

Схема дослідження неоднорідної системи

1. Дослідимо систему на сумісність, для чого визначимо ранг матриці системи. У випадку сумісності:

2 Дослідимо систему на визначеність.

3. Визначимо число вільних і базисних невідомих.

4. Виразимо базисні невідомі через вільні. Для цього застосуємо метод

Гаусса до матриці системи.

5. Знайдемо частинний розв'язок системи.

6. Знайдемо загальний розв'язок однорідної системи, асоційованої з даною.

(за схемою попереднього питання).

7. Знаходимо загальний розв'язок системи.

<u>Приклад.</u> Дослідити на сумісність, у випадку сумісності знайти розв'язки неоднорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1; \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 2; \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 \qquad = 3. \end{cases}$$

<u>Розв'язання</u>. 1) Дослідимо систему на сумісність, для чого визначимо ранги матриці і розширеної матриці системи:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 1 & 3 & 2 & -1\\ 2 & 5 & 1 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 3 & -2\\ 0 & 1 & 3 & -2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 3 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow r(A)=2,$$

$$\widetilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 2 & -1 & 2\\ 2 & 5 & 1 & 0 & 3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1\end{array}\right)\Rightarrow r(\widetilde{A})=2.$$

Оскільки $r(A)=r(\widetilde{A})=2$, то система сумісна.

2) Дослідимо систему на визначеність. Оскільки $r(A)=r(\widetilde{A})=2<n=4$, то система невизначена.

3) Визначимо число вільних і базисних невідомих.

$n=4,\ r=2,\ n-r=4-2=2$ – є два вільних невідомих: x_3 і x_4.

Невідомі x_1 і x_2 – базисні.

4) Виразимо базисні невідомі через вільні. Для цього застосуємо метод Гаусса до розширеної матриці системи:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & -7 & 5 & -1\\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1\end{array}\right),$$

звідки $\begin{cases}x_1=1+7x_3-5x_4;\\ x_2=1-3x_3+2x_4.\end{cases}$

5) Знайдемо частинний розв'язок системи. Надамо вільним невідомим значення, наприклад, $x_3=1,\ x_4=1$. Тоді $x_1=3,\ x_2=0$.

Отже, частинний розв'язок є $(3\quad 0\quad 1\quad 1)$.

6) Знайдемо частинний розв'язок однорідної системи, асоційованої з даною. (за схемою попереднього питання).

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0; \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 \qquad = 0. \end{cases}$$

1) Дослідимо на сумісність:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow r(A) = 2,$

2) Визначимо число вільних і базисних невідомих.

$n = 4,\ r = 2,\ n - r = 4 - 2 = 2$ – є два вільних невідомих: x_3 і x_4.

Невідомі x_1 і x_2 – базисні.

3) Виразимо базисні невідомі через вільні:

$$\begin{cases} x_1 = 7x_3 - 5x_4; \\ x_2 = -3x_3 + 2x_4. \end{cases}$$

4) Знаходимо загальний розв’язок однорідної системи.

Нехай $x_3 = \lambda_1,\ x_4 = \lambda_2$, де $\lambda_1, \lambda_2 \in R$. Тоді

$x_1 = 7\lambda_1,\ x_2 = -3\lambda_1,\ x_3 = \lambda_1,\ x_4 = 0;$

$x_1 = -5\lambda_2,\ x_2 = 2\lambda_2,\ x_3 = 0,\ x_4 = \lambda_2.$

5) Загальний розв’язок записуємо у вигляді матриці-рядка:

$X = \lambda_1(7 \quad -3 \quad 1 \quad 0) + \lambda_2(-5 \quad 2 \quad 0 \quad 1)$, де $\lambda_1, \lambda_2 \in R$.

7) Знаходимо загальний розв’язок системи.

$X = (3 \quad 0 \quad 1 \quad 1) + \lambda_1(7 \quad -3 \quad 1 \quad 0) + \lambda_2(-5 \quad 2 \quad 0 \quad 1), \lambda_1, \lambda_2 \in R.$

Заключення.

На даній лекції ми вивчили методи розв'язування СЛАР. Розв'язати СЛАР означає знайти значення невідомого вектору *X*. Після розв'язання необхідно зробити перевірку, яка полягає в підстановці значень xi у початкову СЛАР та отримання тотожностей в кожному рівнянні системи. Якщо тотожності не отримані, то рішення відбулось з помилкою.

Основними методами розв'язання є метод підстановки, метод Крамера, матричний метод, метод Гаусса та інші. Перші два методи використовуються для аналітичного розв'язання систем невеликої розмірності. Це пов'язано з труднощами знаходження визначників високого порядку. Для СЛАР 5-го та більш високих порядків найбільш привабливим є метод Гаусса, який передбачає послідовне застосування елементарних перетворень з рядками розширеної матриці для приведення її до трикутникового вигляду. Цей метод досить легко програмується на будь-якій алгоритмічній мові або в будь-якому програмному середовищі.

На практиці дослідники, аналітики, менеджери вирішують СЛАР за допомогою спеціалізованого математичного програмного забезпечення, такого, як Maxima, MathCad, MathLab, Maple, тощо. В більшості сучасних програмних середовищах є математична функція розв'язання СЛАР на основі введеної розширеної матриці системи.

ЛЕКЦІЯ 3. ЗАСТОСУВАННЯ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ В ЗАДАЧАХ ЕКОНОМІКИ

План лекції:

Вступ.

1. Застосування алгебри матриць.

2. Економічні задачі, що зводяться до системи лінійних рівнянь.

Заключення.

Вступ.

Методи лінійної алгебри досить часто застосовуються для знаходження розв'язків різного роду економічних задач. Метою даної лекції є ознайомлення студентів з застосуванням попередньо вивченими питаннями векторної алгебри та методами знаходження розв'язків систем лінійних алгебраїчних рівнянь до задач економіки.

1. Застосування алгебри матриць.

В економічних задачах, як правило, теорія матриць застосовується як засіб для збереження та обробки інформації у матричній формі.

Приклад 1.

Продаж мобільних телефонів трьох фірм (α,β,γ) здійснюють три спеціалізовані магазини (1,2,3). Обсяги реалізації телефонів (в тис. грн.) кожним магазином задано у вигляді матриць

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \gamma \end{array}$$

$$A=\begin{pmatrix} 300 & 50 & 150 \\ 250 & 100 & 340 \\ 20 & 220 & 100 \\ 420 & 20 & 250 \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} 200 & 10 & 250 \\ 60 & 30 & 420 \\ 10 & 50 & 160 \\ 200 & 10 & 300 \end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix} 425 & 40 & 160 \\ 250 & 64 & 240 \\ 90 & 260 & 40 \\ 360 & 40 & 240 \end{pmatrix},$$

Де в рядках зазначено суми, отримані кожним магазином за відповідний квартал року, а в стовпчиках – суми, отримані за продаж телефонів відповідної фірми (α,β,γ). Необхідно: 1) записати у вигляді матриці сукупні суми реалізації телефонів трьома магазинами, 2) визначити, телефон якої фірми дає найбільший прибуток від реалізації у кожному кварталі.

Розв'язання. Дані про сукупний продаж магазинів запишемо у вигляді матриці $A+B+C$.

$$A+B+C=\begin{pmatrix}300 & 50 & 150\\ 250 & 100 & 340\\ 20 & 220 & 100\\ 420 & 20 & 250\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}200 & 10 & 250\\ 60 & 30 & 420\\ 10 & 50 & 160\\ 200 & 10 & 300\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}425 & 40 & 160\\ 250 & 64 & 240\\ 90 & 260 & 40\\ 360 & 40 & 240\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}925 & 100 & 560\\ 560 & 194 & 1000\\ 120 & 530 & 300\\ 980 & 70 & 790\end{pmatrix}.$$

Порівнюючи елементи рядків отриманої матриці, бачимо, що найбільший прибуток в першому та третьому кварталах дає продаж телефонів фірми α, в другому кварталі – телефонів фірми γ, в третьому кварталі – телефонів фірми β.

Приклад 2

Випуск готової продукції п'яти підприємств зв'язку включає чотири види виробів $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$. Для їх виробництва використовується три різні типи комплектуючих (І, П, Ш). Дані щоденної продуктивності підприємствз кожного виробу (число виробів за день) і витрат комплектуючих на одиницю виробу, а також число днів роботи кожного підприємства і вартість у гривнях 1 шт. комплектуючого кожного типу, наведено в таблиці 1.

Таблиця 1.

Вироби	Продуктивність підприємств (шт./день)					Витрати комплектуючих		
	1	2	3	4	5	І	П	Ш
α	6	10	0	6	2	5	3	4
β	4	3	0	4	5	10	4	6
γ	0	15	10	3	4	2	5	5
δ	3	5	8	7	6	4	8	6
	Час роботи підприємств (дн.)					Ціна комплектуючих (грн.)		
	100	200	140	150	170	30	20	50

Необхідно визначити:

а) сумарну продуктивність кожного підприємства для кожного виробу за весь виробничий період;

б) потреби кожного підприємства у різних видах комплектуючих;

в) розміри кредитування підприємств для закупівлі комплектуючих.

Розв'язання. Розглянемо матрицю A, що характеризує продуктивність підприємств, матрицю B - витрат комплектуючих і матрицю C - матрицю цін, тоді

$$A=\begin{pmatrix}6 & 10 & 0 & 6 & 2\\ 4 & 3 & 0 & 4 & 5\\ 0 & 15 & 10 & 3 & 4\\ 3 & 5 & 8 & 7 & 6\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}5 & 10 & 2 & 4\\ 3 & 4 & 5 & 8\\ 4 & 6 & 5 & 6\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}30 & 20 & 50\end{pmatrix}.$$

а) Кожний стовпчик матриці A відповідає денній продуктивності окремого підприємства з кожного виду продукції. Щоб отримати річну продуктивність $j-$го підприємства $(j=1,2,3,4,5)$, необхідно помножити $j-$тий стовпець матриці A на кількість робочих днів цього підприємства. Час роботи кожного з підприємств запишемо у виді діагональної матриці

$$T=\begin{pmatrix}100 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 200 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 140 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 150 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 170\end{pmatrix}.$$

Тоді загальна продуктивність за виробничий період є добуток матриць $A\cdot T$.

$$A\cdot T=\begin{pmatrix}6 & 10 & 0 & 6 & 2\\ 4 & 3 & 0 & 4 & 5\\ 0 & 15 & 10 & 3 & 4\\ 3 & 5 & 8 & 7 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}100 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 200 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 140 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 150 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 170\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}600 & 2000 & 0 & 900 & 340\\ 400 & 600 & 0 & 600 & 850\\ 0 & 3000 & 1400 & 450 & 680\\ 300 & 1000 & 1120 & 1050 & 1020\end{pmatrix}.$$

Кожному стовпцю отриманої матриці відповідає відповідне підприємство, а рядку – кількість виробів.

б) Витрати комплектуючих кожного підприємства є добуток $B\cdot(AT)$:

$$B\cdot(AT)=\begin{pmatrix}5 & 10 & 2 & 4\\ 3 & 4 & 5 & 6\\ 4 & 6 & 5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}600 & 2000 & 0 & 900 & 340\\ 400 & 600 & 0 & 600 & 850\\ 0 & 3000 & 1400 & 450 & 680\\ 300 & 1000 & 1120 & 1050 & 1020\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}8200 & 26000 & 7280 & 15600 & 15640\\ 5800 & 31400 & 15960 & 15750 & 15980\\ 6600 & 32600 & 13720 & 15750 & 15980\end{pmatrix}$$

в) Вартість річного запасу комплектуючих одержуємо як добуток матриці цін C на матрицю витрат $B\cdot(AT)$.

$$D=C(B\cdot(AT))=\begin{pmatrix}30 & 20 & 50\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8200 & 26000 & 7280 & 15600 & 15640\\ 5800 & 31400 & 15960 & 15750 & 15980\\ 6600 & 32600 & 13720 & 15750 & 15980\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}692000 & 3038000 & 1223600 & 1570500 & 1587800\end{pmatrix}.$$

Отже величина кредитування $j-го$ підприємства для закупівлі комплектуючих визначається компонентами матриці D.

2. Економічні задачі, що зводяться до систем лінійних рівнянь

Розглянемо приклади задач, що зводяться до систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Підприємство випускає деталі для мереж доступу чотирьох типів $\alpha,\beta,\gamma,\delta,$ використовуючи три види ресурсів. Числові дані наведено в таблиці:

Ресурси	Норми витрат на одиницю продукції, ум. од.				Запас ресурсу
	α	β	γ	δ	
Сировина	5	3	4	6	3500
Матеріали	4	3	8	6	4000
Обладнання	5	1	2	1	1300

Знайти план випуску продукції, якщо загальний обсяг продукції становить 750 одиниць.

Розв'язання. Позначимо через x_1,x_2,x_3,x_4 кількість деталей кожного з чотирьох типів. Тоді кількість сировини, необхідної для виготовлення деталей типу α, становитиме $5x_1$, типу β - $3x_2$, типу γ - $4x_3$ і типу δ - $6x_4$. Для повного використання запасу сировини сума

$5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 6x_4$ повинна дорівнювати 3500, тобто $5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 3500.$ Аналогічно одержуємо рівняння

$$4x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 6x_4 = 4000,$$
$$5x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1300,$$

Яким повинні задовольняти невідомі x_1, x_2, x_3, x_4, щоб повністю використати матеріали і обладнання. Крім того, запланований обсяг випуску усієї продукції становить 750 одиниць,тобто $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 750.$

Отже ми отримали систему лінійних рівнянь

$$5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 3500,$$
$$4x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 6x_4 = 4000,$$
$$5x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1300,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 750,$$

Яка в математичній формі задає план випуску деталей чотирьох типів. Розв’язавши цю систему одним із вивчених методів, наприклад, методом Гауса, одержимо, що $x_1 = 100, x_2 = 200, x_3 = 150, x_4 = 300.$

Заключення.

Мета лекційного заняття досягнута. На прикладі деяких економічних завдань студентам показано, яким чином, опанувавши основами попередньо вивченими поняттями алгебри матриць та методами знаходження розв’язків систем лінійних алгебраїчних, можна застосувати їх до розв’язання представлених задач економічного змісту.

ЛЕКЦІЯ 4. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

План лекції:

Вступ.
1. Вектори. Лінійні операції над векторами.
2. Базис. Координати вектора.
3. Скалярний, векторний, змішаний добутки векторів та розв’язання задач з їх допомогою.
Заключення.

Вступ.

Всі процеси та явища в економіці, техніці та інших галузях діяльності описуються певними параметрами, показниками. Всі ці величини можуть бути або скалярними або векторними. Відмінність полягає в тому, що векторні величини мають напрям, який може бути визначений декількома способами. Наприклад, вектор в декартовій системі координат описується своїми координатами, за якими однозначно можна визначити напрям.

Важливими знаннями та навичками є можливість оперувати з векторними величинами та застосовувати ці знання в подальшій діяльності.

1. Вектори. Лінійні операції над векторами

1.1. Основні терміни та визначення

Означення 1. ***Вектором*** *називають величину, яка характеризується своїм числовим значенням (довжиною) та напрямком.*

Вектори позначають $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ або $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ або $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.

При позначенні вектора двома літерами (наприклад, $\overrightarrow{AB}$) перша літера вказує точку початку вектора, а друга – точку його кінця. В економіці вектори часто позначають однією великою літерою.

Довжину (модуль) вектора позначають $|\vec{a}|$, $|\overrightarrow{AB}|$.

Геометрично вектор зображують як направлений відрізок (рис. 1).

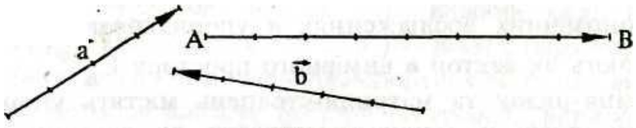


Рис. 1

Нульовим вектором *називають вектор, початок і кінець якого співпадають.* Такий вектор позначають $\vec{0}$, його довжина дорівнює нулю, а напрям – довільний.

Рівними *називають вектори, які мають однакові довжини та напрямки:* $\vec{a} = \vec{b}$.

Колінеарними *називають вектори, які розташовані на одній прямій або паралельних прямих (рис. 2).*

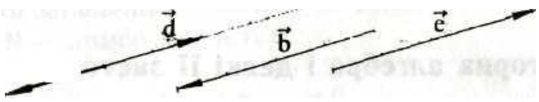


Рис. 2.Колінеарні вектори

Протилежними *називають колінеарні протилежно спрямовані вектори однакової довжини.* Вектор, протилежний вектору $\vec{a}$ позначають $(-\vec{a})$.

Ортом вектора $\vec{a}$ *називають вектор* $\vec{a}_0$, *довжина якого дорівнює одиниці, а напрям співпадає з* $\vec{a}$ *, тобто* $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}_0$.

Компланарними *називають вектори, що лежать в одній площині.*

Необхідно розрізняти ***скалярні та векторні величини***. ***<u>Скалярна величина</u>*** – це одне число, що характеризує кількісну міру якогось явища або процесу. Наприклад, собівартість певного товару.

На відміну від скалярних величин в техніці, в біології, економіці, будь-яких галузях діяльності людини широко використовуються ***векторні величини***, які визначаються, як сукупність n упорядкованих параметрів в n-вимірному просторі E_n.

Матриця-рядок та матриця-стовпець містять упорядковані елементи, тому їх можна розглядати як вектори простору відповідного виміру.

Наприклад, $\left(3;\ -2;\ 0;\ 1;\ 6\right) \in E_5$; $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \in E_4$.

Елементи вектора-рядка та вектора-стовпця називають ***координатами вектора***. Смисл такої назви пояснимо нижче, після визначення проекцій вектора на координатні осі.

1.2. Лінійні операції над векторами

Розглянемо лінійні операції – сума, різниця, множення на число. Добутки векторів будуть розглядатись в питанні 3.

Означення 5. ***Сумою двох векторів*** $\vec{a}$ ***та*** $\vec{b}$ *називають вектор* $\vec{c}$, *який сполучає початок вектору* $\vec{a}$ *з кінцем вектору* $\vec{b}$ *при умові, що початок вектора* $\vec{b}$ *вміщено в кінець вектора* $\vec{a}$.

Наприклад, задані вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ (рис. 3, *а*). Для побудування суми цих векторів $\vec{a}$ перенесли паралельно самому собі, в його кінець вмістили початок вектора $\vec{b}$ та сполучили початок вектору $\vec{a}$ з кінцем вектору $\vec{b}$ (рис. 3, *b*).

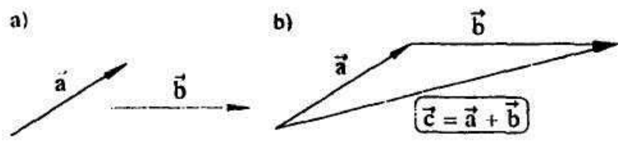


Рис. 3.

Суму кількох векторів $\vec{a}, \vec{b}, \ldots, \vec{l}$ визначають аналогічно: початок кожного наступного вектора вміщують в кінець попереднього. Одержують ламану лінію і тоді вектор, який сполучає початок першого вектор з кінцем останнього і є сумою цих всіх векторів.

Зауваження. *Різницю двох векторів* $\vec{a}$ *та* $\vec{b}$ *будують як суму вектора* $\vec{a}$ *та вектора* $\left(-\vec{b}\right)$.

Наприклад:

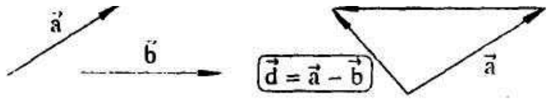


Рис. 4

Означення 6. ***Добутком вектора*** $\vec{a}$ ***на число*** k *називають вектор* $\vec{b}=k\vec{a}$, *колінеарний з вектором* $\vec{a}$, *що має довжину в* k *раз більшу, ніж* $\vec{a}$ *та напрям такий самий, як* $\vec{a}$, *якщо* $k > 0$ *і протилежний до* $\vec{a}$, *якщо* $k < 0$.

<u>Тепер розглянемо правила аналітичної геометрії щодо дій з векторами, заданими в координатній формі</u>.

1. ***Правило множення вектора на число.***

Щоб помножити вектор $\vec{a}$ *на число k, треба усі координати вектора помножити на число k, тобто* $k\vec{a}=\left(k\vec{a}_1,\ ka_2,\ldots,ka_n\right)$.

2. ***Правило знаходження алгебраїчної суми векторів.***

Координати алгебраїчної суми скінченної кількості векторів дорівнюють такій же алгебраїчній сумі відповідних координат цих векторів.

Так, у випадку алгебраїчної суми трьох векторів:

$$\vec{a}=\left(a_1,a_2,\ldots,a_n\right),\ \vec{b}=\left(b_1,b_2,\ldots,b_n\right),\ \vec{c}=\left(c_1,c_2,\ldots,c_n\right),$$

їх алгебраїчна сума $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$ знаходиться за формулою

$$\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}=\left(a_1-b_1+c_1,\ a_2-b_2+c_2,\ldots,a_n-b_n+c_n\right).$$

Добуток векторів (скалярний, векторний, змішаний) розглянемо в п. 3.

2. Базис. Координати вектора

2.1. Проекції та координати векторів

Спочатку нападаємо поняття числової осі та систем координат.

Числовою віссю називають пряму, на якій визначено:

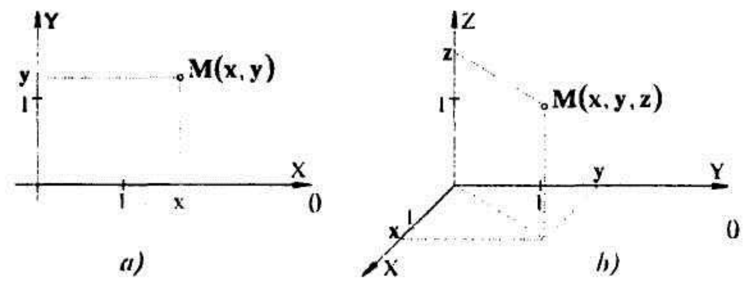
1) напрям $(\rightarrow)$;
2) початок відліку (точка 0);
3) відрізок, який приймають за одиницю масштабу.

Дві взаємно перпендикулярні числові осі із загальним початком відліку (точка 0) називають ***прямокутною декартовою системою координат на площині*** (у двовимірному просторі E_2).

Три взаємно перпендикулярні числові осі із загальним початком відліку (точка 0) називають ***прямокутною декартовою системою координат у просторі*** (у тривимірному просторі E_3).

На рис. 5 зображені:

a) прямокутна декартова система координат на площині;
b) прямокутна декартова система координат у просторі.



$\vec{a} = \vec{OM} = (x_a, y_a, z_a)$

Рис. 5. Орти: $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$

Вісь *Ox* називають ***віссю абсцис***; *Oy* – ***вісь ординат***; 0z – ***вісь аплікат***. Орт осі 0*x* позначають $\vec{i}$, орт осі *Oy* – вектор $\vec{j}$, орт осі *Oz* – вектор $\vec{k}$.

Упорядкована пара чисел що відповідає точці *M* площини *xOy*, називається **декартовими прямокутними координатами точки *M***, це позначають *M*(*x*, *y*).

Упорядкована трійка чисел (x, y, z), що відповідає точці M простору $0zyx$. називається координатами точки M декартової прямокутної системи координат у просторі, це позначають М(x, y, z).

Відмітимо, що існують інші системи координат на площині та у просторі.

Дамо поняття проекції вектора на вісь. Нехай заданий вектор $\overrightarrow{AB}$ та вісь l . З точок A і B опускаємо перпендикуляри на вісь l. Одержимо точки A_1 та B_1 – проекції точок A та B.

Означення 2. ***Проекцією вектора*** $\overrightarrow{AB}$ ***на вісь*** *називається довжина вектора* $\overrightarrow{A_1B_1}$*, яка взята із знаком « + », якщо напрям* $\overrightarrow{A_1B_1}$ *співпадає з напрямом осі та із знаком « – », якщо напрями протилежні* (див. рис. 6).

Позначають: $пр_{Ox}\,\overrightarrow{AB}$.

Означення 3. ***Кутом між двома векторами*** *(або* ***між вектором та віссю****) називають найменший кут міме їх напрямами при умові, що вектори зведені до спільного початку* (див. рис. 6).

Рис. 6

Знайдемо $пр_{Ox}\,\overrightarrow{AB}$:

У випадку а) маємо: $\text{ï ð}_l\,\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{A_1B_1}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right|' = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \cos\alpha$.

У випадку b) маємо:

$\text{ï ð}_l\,\overrightarrow{AB} = -\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right| = -\left|\overrightarrow{AC}\right| = -\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \cos\left(180^\circ - \alpha\right) = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \cos\alpha$.

Таким чином, проекція вектора на вісь дорівнює добутку довжини вектора на косинус кута між вектором і віссю.

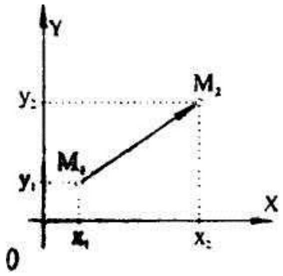
Означення 4. ***Координатами вектора*** *називаються проекції вектора на осі координат.*

Нехай вектор $\vec{a}$ має координати a_x, a_y, a_z тобто $\vec{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right)$ і утворює з осями координат кути α, β, γ, тоді,

$$a_x = |\vec{a}|\cos\alpha,\ a_y = |\vec{a}|\cos\beta,\ a_z = |\vec{a}|\cos\gamma$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, називають ***напрямними косинусами вектора*** $\vec{a}$. З попередніх формул маємо:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|},\ \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|},\ \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$



Напрямні косинуси повністю визначають напрямок вектору в 3-вимірному просторі.

Рис. 7

Координати вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$ по заданим точкам.

Розглянемо вектор $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$, де $M_1(x_1, y_1)$ – початок вектора, $M_2(x_2, y_2)$– кінець вектора (див. рис. 7). В цьому випадку

$пр_{0x}\overrightarrow{M_1M_2} = x_2 - x_1$, $пр_{0y}\overrightarrow{M_1M_2} = y_2 - y_1$,

тобто координати вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ – це

впорядкована пара чисел $(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$.

Аналогічно одержуємо, що координатами вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ у просторі буде впорядкована трійка чисел $(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$.

Отже, можна сформулювати правило:

Координати вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ дорівнюють різниці відповідних координат кінця та початку вектора.

Наприклад, вектор $\vec{a}$, початок якого знаходиться в точці $M_1(2,-3,0)$, кінець – в точці $M_2(1,1,2)$, має координати

$\vec{a}$ =(1 – 2; 1 + 3; 2 – 0) = (–1; 4; 2).

Зауваження. Вектор $\overrightarrow{OA}$ (де точка *O* – початок координат) називають ***радіус-вектором точки A*** і позначають $\vec{r}$. Координати вектора $\vec{r}$ співпадають з координатами точки *A*.

По аналогії з векторами $\vec{a}=\left(a_x,a_y\right)$ із E_2 та $b=\left(b_x,b_y,b_z\right)\in E_3$ вектор-рядок та вектор-стовпець, які містять n елементів, розглядають як вектори із n-вимірного простору E_n, а їх елементи називають ***координатами вектора***.

Наприклад,

$$\vec{X}=\left(x_1,x_2,\ldots,x_7\right)\in E_7;\ \vec{Y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}\in E_4.$$

2.2. Розклад вектора за базисом

Означення 8. *<u>Лінійно залежними</u> називають вектори $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ldots,\ \vec{a}_n$, якщо існує хоча б одне дійсне число $\alpha_i\ \left(i=1,\ 2,\ldots,n\right)$, що не дорівнює нулю і виконується рівність*

$$\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\ldots+\alpha_n\vec{a}_n=0. \qquad (7)$$

Означення 9. *<u>Лінійно незалежними</u> називають вектори $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ldots,\ \vec{a}_n$, якщо рівність* (7) *виконується тільки тоді, коли усі* $\alpha_i=0\ \ \left(i=1,\ 2,\ldots,\ n\right)$

В системі векторів $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ldots,\ \vec{a}_n$ число лінійно незалежних векторів дорівнює рангу матриці, яка складена з координат цих векторів.

Дійсно, якщо систему векторів $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ldots,\ \vec{a}_n$ із простору E_m розглядати як матриці-стовпці з m заданими елементами, тоді рівняння (7) можна записати у вигляді однорідної системи m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими $\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots,\ \alpha_n$. Кількість базисних невідомих такої системи дорівнює рангу r основної матриці системи, тобто матриці, складеної іt координат векторів $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ldots,\ \vec{a}_n$.

Таким чином, серед чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ існує r не рівних нулю. Згідно з означенням 8 звідси випливає, що вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ лінійно залежні.

Для лінійно залежних векторів має місце рівність (7), з якої завжди можна один вектор виразити через лінійну комбінацію інших.

Якщо вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ із простору E_n (кожен з них має n координат) лінійно незалежні, тоді $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, тобто система n однорідних лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими має тривіальний розв'язок. Але це можливо лише тоді, коли визначник матриці, складеної з координат векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. не дорівнює нулю.

Приклад 1. Визначити лінійну залежність або незалежність системи векторів $\vec{a}_1$ = (–1, –2, –3); $\vec{a}_2$ = (7, 8, 9); $\vec{a}_3$ = (–4, – 5, 6) та системи векторів $\vec{b}_1$ = (3, –2, 4, 1); $\vec{b}_2 = (-1,\ 2, -1,\ 2)$; $\vec{b}_3$ = (1, 2, 2, 5).

Розв'язання. Спочатку розглянемо систему векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$. Знайдемо ранг матриці, складеної з координат цих векторів:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 7 & 8 & 9 \\ -4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$$

Визначник цієї матриці $|A|$= –48+72+ 105 – 96 + 84 – 45 = 72 не дорівнює нулю, тому $r(A)$ = 3 і вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ ***лінійно незалежні***.

Тепер розглянемо систему векторів $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$. Матриця B складена з координат цих векторів має вигляд:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ця матриця розміру 3×4 має ранг $r(B)$= 2.

Тому вектори $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ лінійно залежні.

Означення 10. ***Базисом n-вимірного простору*** E_n *називають будь-яку сукупність n лінійно незалежних векторів n-вимірного простору.*

Довільний вектор $\vec{d}$ n-вимірного простору можна представити у вигляді лінійної комбінації векторів базису $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ так:

$$\vec{d} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n . \tag{8}$$

Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називаються ***координатами вектора*** $\vec{d}$ ***у базисі векторів*** $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$.

Приклад 2. Довести, що вектори $\vec{a}_1$ = (5, 4, 3), $\vec{a}_2$ =(–3, –1, 2) та $\vec{a}_3$ = (–3, 1, 3) утворюють базис в E_3, та розкласти вектор $\vec{d}$ = (12, 9, 10) за цим базисом.

Розв'язання. Кожен із заданих векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ має три координати, тому належить тривимірному простору E_3. Матриця складена з координат цих векторів

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -3 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

має визначник $|A|$ = –15 – 24 – 9 – 9 + 36 – 10 = –31 $\neq 0$, тому вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ лінійно незалежні. Згідно з означенням 10 базису, ці вектори утворюють базис в E_3.

Вектор $\vec{d}$ також має три координати, тобто належить E_3. Тому його можна представити у вигляді (8) або

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Вектори рівні, коли їх відповідні координати рівні. Тому *з* останньої рівності одержимо

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 12 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 9 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10 \end{cases}.$$

Матричним методом можна знайти розв'язок цієї системи

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{-1}{31}\begin{pmatrix} -5 & 3 & -6 \\ -9 & 24 & -17 \\ 11 & -19 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{-1}{31}\begin{pmatrix} -93 \\ -62 \\ 31 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, маємо розклад $\vec{d}$ за базисом

$$\vec{d} = 3\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 - \vec{a}_3 .$$

Координатами вектора $\vec{d}$ у базисі $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_3$ будуть (3, 2, –1).

Зауваження. *Два лінійно залежних вектори задовольняють рівність* $\vec{b} = \alpha\vec{a}$, *тому вони колінеарні. У колінеарних векторів координати пропорційні, тобто*

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} .$$

3. Скалярний, векторний, змішаний добутки векторів та розв'язання задач з їх допомогою

3.1. Знаходження скалярного добутку векторів

Скалярний добуток – це число (скаляр), що характеризує довжини двох векторів та кут між ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi, \qquad (1)$$

де φ – кут між двома векторами.

Згідно з правилом множення матриць одержимо:

$$a \cdot b = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n \qquad (2)$$

<u>*тобто скалярний добуток двох векторів дорівнює сумі добутків їх однойменних координат*</u>.

Нагадаємо, що довжина вектора розраховується за формулою

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}\,. \tag{3}$$

Із формули (1) маємо:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}\,. \tag{4}$$

Підставимо формули (2) та (3) у формулу (4), тоді одержимо формулу для знаходження косинуса кута між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ у вигляді:

$$\cos\varphi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}\cdot\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}}\,. \tag{5}$$

Якщо $\vec{a}\perp\vec{b}$, тоді φ = 90°, cos90° = 0 і одержимо $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.

Приклад. Знайти кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ = (2, 1, 0) та $\vec{b}$ =(0, –2, 1).

Розв'язання. За умовою задачі паралелограм побудовано на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

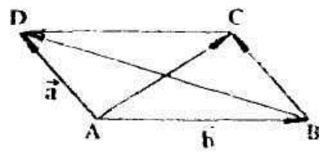


Рис. 8.

Позначимо цей паралелограм ABCD ($\vec{a}$ та $\vec{b}$ – довільні);

$$\vec{a} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC};\ \vec{b} = \overrightarrow{AB};\ -\vec{b} = \overrightarrow{CD};\ \overrightarrow{AC} = \vec{a}+\vec{b};\ \overrightarrow{BD} = \vec{a}-\vec{b}$$

Отже, діагоналі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$ (довільних) будуть вектори $\overrightarrow{AC} = \vec{a}+\vec{b}$; та $\overrightarrow{BD} = \vec{a}-\vec{b}$. Знайдемо координати цих векторів для заданих векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$:

$$\overrightarrow{AC} = \vec{a}+\vec{b} = \left(2+0;\ 1+(-2);\ 0+1\right) = \left(2;\ -1;\ 1\right),$$

$$\overrightarrow{BD} = \vec{a}-\vec{b} = \left(2-0;\ 1-(-2);\ 0-1\right) = \left(2;\ 3;\ -1\right).$$

Тепер за формулою (5) можна знайти косинус потрібного кута, який позначимо φ:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BD}\right|} = \frac{2\cdot 2+(-1)\cdot 3+1\cdot(-1)}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}\cdot\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}} = \frac{4-4}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}} = 0.$$

З рівності $\cos\varphi = 0$ випливає, що $\varphi = \pi/2$, тобто ці вектори перпендикулярні.

3.2. Векторний добуток векторів.

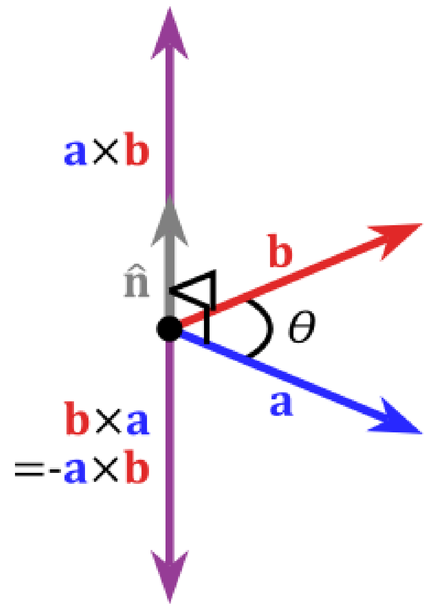


Рис. 9. Векторний добуток у трьохвимірному просторі

<u>Векторний добуток</u> (рис. 9) – це вектор, який є перпендикулярним до площині в якій розміщені вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$, причому, довжина цього вектора дорівнює:

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\sin\varphi,$$

а напрям визначається за правилом правої руки (або правилом буравчика).

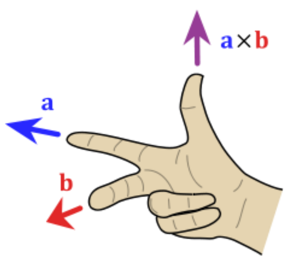


Рис. 10. Правило правої руки для визначення напрямку векторного добутку

Позначення:

$$\mathbf{c} = [\mathbf{ab}] = [\mathbf{a},\ \mathbf{b}] = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

Геометрична інтерпретація: довжина вектора *c* дорівнює площині паралелограма, побудованого на двох векторах.

Векторний добуток не має властивість комутативності $(\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a})$ та на відміну від скалярного добутку є вектором.
Якщо два вектори $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ визначені своїми прямокутними координатами:

$$\mathbf{a} = (a_x,\ a_y,\ a_z)$$

$$\mathbf{b} = (b_x,\ b_y,\ b_z)$$

а система координат є правою, то їх векторний добуток має вид

$$[\mathbf{a},\ \mathbf{b}] = (a_y b_z - a_z b_y,\ a_z b_x - a_x b_z,\ a_x b_y - a_y b_x).$$

Для запам'ятовування цієї формули доцільно використовувати визначник:

$$[\mathbf{a},\ \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

де **i, j, k** – одиничні орти.

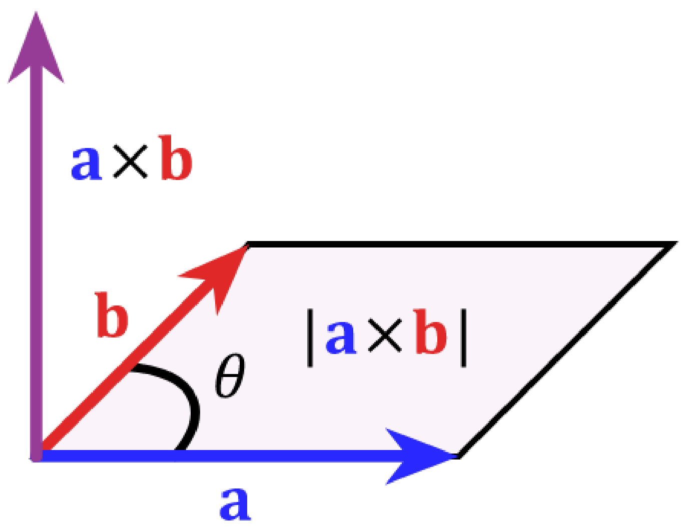


Рис. 11: Площа паралелограма дорівнює модулю векторного добутку

Властивості векторного добутку

- Необхідною та достатньою умовою колінеарності (паралельності) двох ненульових векторів є рівність нулю їх векторного добутку (sin(0)=0).
- Модуль векторного добутку $\vec{a} \times \vec{b} = S$ дорівнює площі S паралелограма, побудованого на приведених до спільного початку векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ (рис.11).

3.3. Змішаний добуток.

При використанні векторного та скалярного добутків можна обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на приведених до спільного начала векторів **a**, **b** та **c** (рис. 12). Такий добуток називається змішаним.

$$V = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|.$$

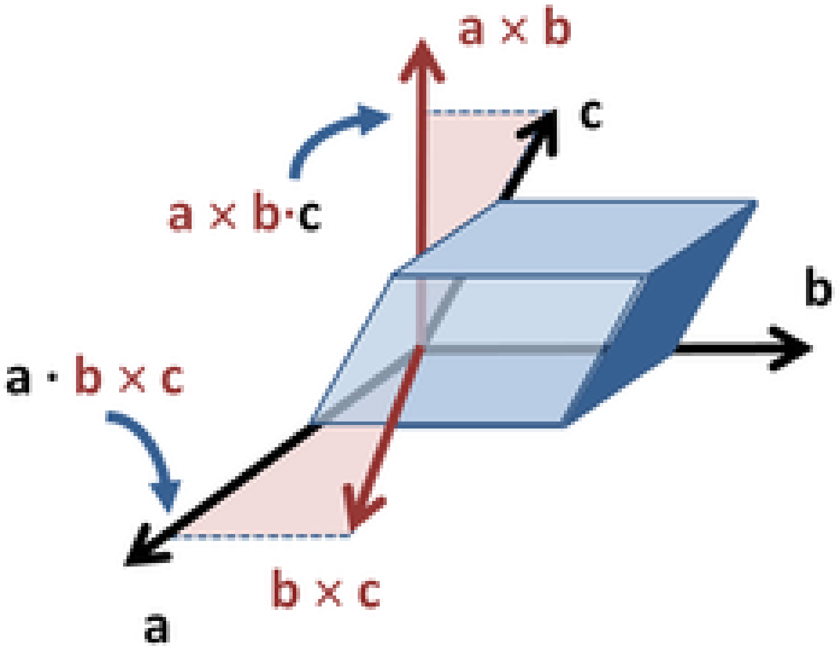


Рис. 12: Об'єм паралелепіпеда при використанні векторного і скалярного добутків векторів

На рис. 12 показано, що цей об'єм може бути знайдений за двома способами, а результат змішаного добутку не змінюється, коли скалярний та векторний добутки міняються місцями:

$$V = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}\ .$$

Означення 8. ***Змішаним добутком*** векторів **a, b, c** називається скалярний добуток вектора **a** на вектор, що утворюється в результаті векторного добутку векторів **b** та **c**:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

Результатом змішаного добутку є скаляр.

Властивості:

Перестановка будь-яких двох множників змінює знак добутку:

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = (\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{a}) = (\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b}) = -(\mathbf{b},\mathbf{a},\mathbf{c}) = -(\mathbf{c},\mathbf{b},\mathbf{a}) = -(\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{b});$$

Перестановка місцями скалярного та векторного добутків не змінює результату:

$$\langle \mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}] \rangle = \langle [\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c} \rangle$$

Змішаний добуток в декартовій системі координат дорівнює визначнику матриці, складеної із координат трьох векторів:

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Заключення.

На лекції висвітлені основи векторної алгебри. Важливо за допомогою скалярних та векторних величин описувати математичні моделі процесів та явищ в техніці, економіці, виробництві. За допомоги векторної та матричної алгебри можна проводити дослідження в будь-яких галузях діяльності людства та надавати рекомендації щодо підвищення ефективності процесів.

ЛЕКЦІЯ 5. ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

План лекції:

Вступ.

1. Предмет аналітичної геометрії, її основні та найпростіші задачі.
2. Пряма лінія на площині та її різні рівняння.
3. Криві другого порядку.

Заключення.

Вступ

Предметом вивчення аналітичної геометрії є вивчення геометричних образів алгебраїчними методами.

Основним методом аналітичної геометрії є метод координат.

При цьому методі найпростішому геометричному образу – точці ставиться у відповідність упорядкована множина чисел – координат цієї точки. Більш складні геометричні образи розглядають як множину точок, що задовольняє певним умовам. Ці умови зв’язують координати точок у відповідне рівняння.

Таким чином, метод координат дозволяє кожному геометричному образу поставити у відповідність його рівняння, а потім шляхом аналітичного дослідження цього рівняння вивчити властивості цього геометричного об’єкта.

1. Предмет аналітичної геометрії, її основні та найпростіші задачі

В аналітичній геометрії вивчаються дві основні задачі:

1. Складання рівняння геометричного об’єкта, який розглядають як геометричне місце певних точок.

2. Дослідження властивостей геометричного об’єкта за його рівнянням і побудова його.

До найпростіших задач аналітичної геометрії належать:

1. Знаходження відстані між двома точками.

Нехай задані дві точки $M_1(x_1; y_1),\ M_2(x_2; y_2)$. Тоді відстань між ними визначають за формулою:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2}.$$

2. Ділення відрізка у заданому співвідношенні.

Нехай задано відрізок M_1M_2, тобто відомі координати точок $M_1(x_1; y_1),\ M_2(x_2; y_2)$ – кінців відрізка. Поділити відрізок M_1M_2 у відношенні λ означає, що треба знайти координати точки $M\ (x\ ; y\ )$ такої, що виконується відношення:

$$\frac{|\mathrm{M_1M}|}{|\mathrm{MM_2}|} = \lambda.$$

Тоді координати точки M знаходимо за формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

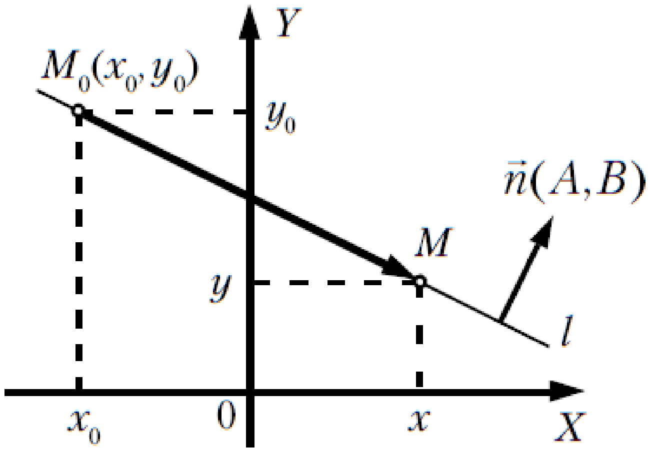
Наслідок. Якщо точка М ділить відрізок M_1M_2 навпіл, то:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}..$$

2. Пряма лінія на площині та її різні рівняння

1) Рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0)$ **перпендикулярно заданому вектору** $\vec{n} = (A, B)$:

$$A(x - x_0) + B(x - x_0) = 0.$$



2) Загальне рівняння прямої.

$$Ax + By + C = 0,$$

де A і B координати вектора нормалі до прямої $\vec{n} = (A, B)$.

Зауваження. Якщо дві прямі задані рівняннями

$$A_1x + B_1y + C = 0; \qquad A_2x + B_2y + C = 0$$

тоді умови їх паралельності мають вигляд:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2},$$

умовою перпендикулярності буде

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0.$$

Косинус кута між прямими знаходимо за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1{}^2 + B_1{}^2} + \sqrt{A_2{}^2 + B_2{}^2}}.$$

Відстань d від заданої точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої, що задана загальним рівнянням, можна знайти за формулою:

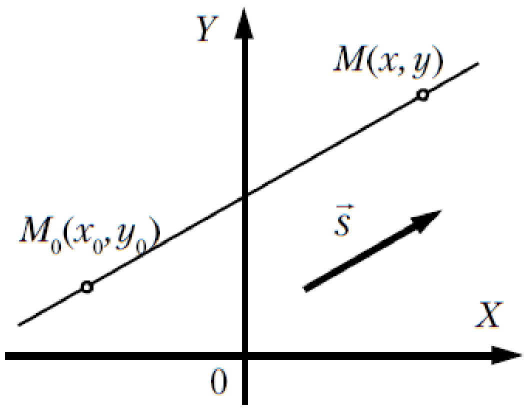
$$d = \frac{|A_0 x + B_0 y + C|}{\sqrt{A^2 + B^{\ 2}}}.$$

3) Канонічне рівняння прямої.

Рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0)$ паралельно заданому вектору $\vec{s} = (l, m)$, який називається напрямним вектором прямої,

називають канонічним рівнянням прямої і воно має вигляд:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}.$$



4) Рівняння прямої, що проходить через дві точки.

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$ має вигляд:

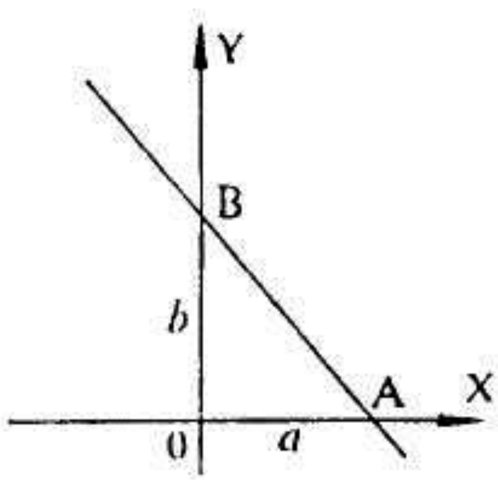
$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

5) Рівняння прямої у відрізках на осях.

Таке рівняння має вигляд:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$

де a та b відрізки, що відтинає пряма на осях Ox та Oy відповідно.

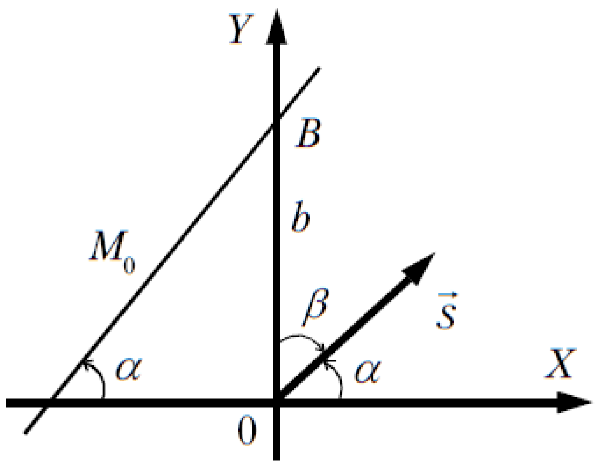


6) Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

має вигляд:

$$y = kx + b,$$

де $k = tg\varphi$, φ – кут нахилу прямої до додатного напрямку осі Ox:



Зауваження. Кут φ між двома прямими з кутовими коефіцієнтами k_1 та k_2 знаходимо за формулою:

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Умова паралельності прямих: $k_1 = k_2$.

Умова перпендикулярності прямих: $k_1 \cdot k_2 = -1$, або $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$.

7) Рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0)$ з відомим кутовим коефіцієнтом k має вигляд:

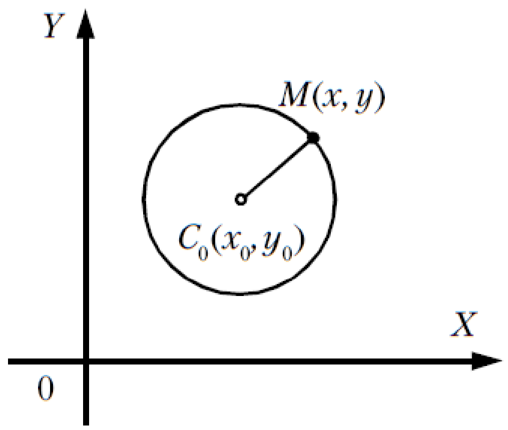
$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

3. Криві другого порядку

Кривими лініями другого порядку називають лінії, координати точок яких задовольняють рівняння другого порядку.

1) Рівняння кола.

Коло – геометричне місце точок, рівновіддалених від фіксованої точки – центра кола.



Канонічне рівняння кола:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2,$$

де R – радіус кола. Центр кола знаходиться в точці $O(x_0, y_0)$.

Якщо центр кола знаходиться в початку координат, його рівняння має вигляд:

$$x^2+y^2=R^2.$$

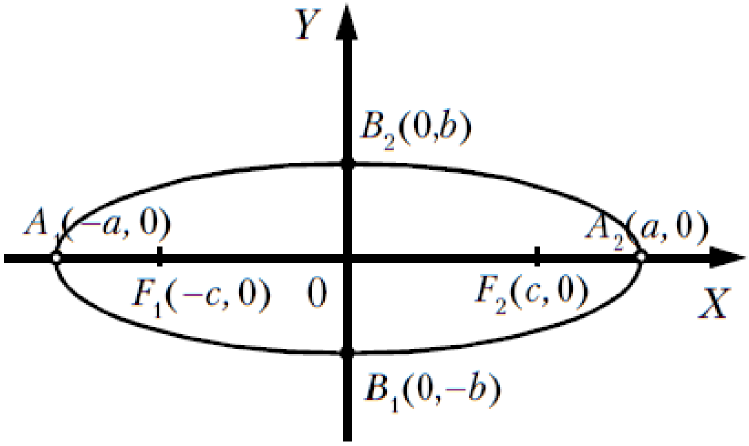
2) Рівняння еліпса.

Еліпс – геометричне місце точок, сума відстаней яких до двох заданих точок F_1, F_2 (фокусів) дорівнює постійній величині $2a$.

Канонічне рівняння еліпса:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

де a та b – півосі еліпса.



3) Рівняння гіперболи.

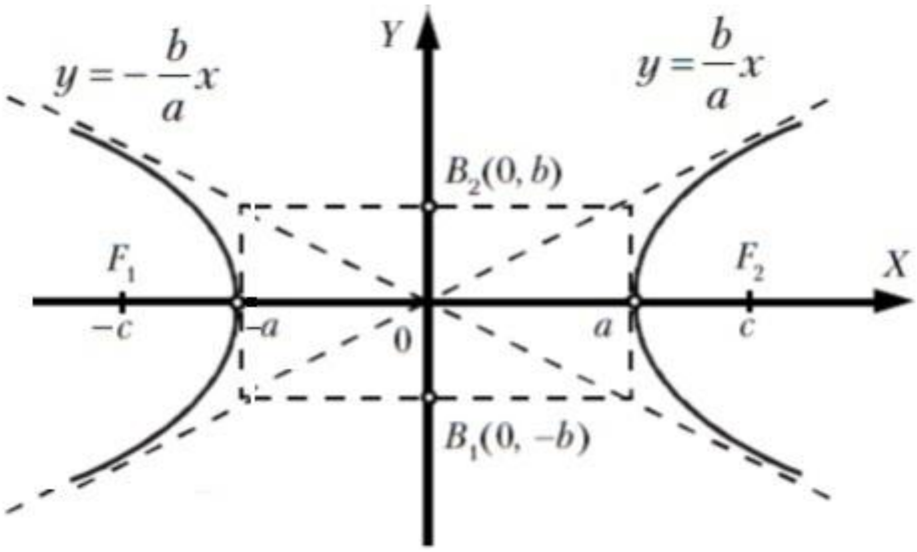
Гіпербола – геометричне місце точок, абсолютна величина різниці відстаней яких до двох заданих точок F_1, F_2 (фокусів) дорівнює постійній величині $2a$.

Наприклад для т. M: $|F_1M|-|MF_2|=2a$.

Канонічне рівняння гіперболи:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

де a та b – півосі гіперболи.



4) Парабола та її рівняння.

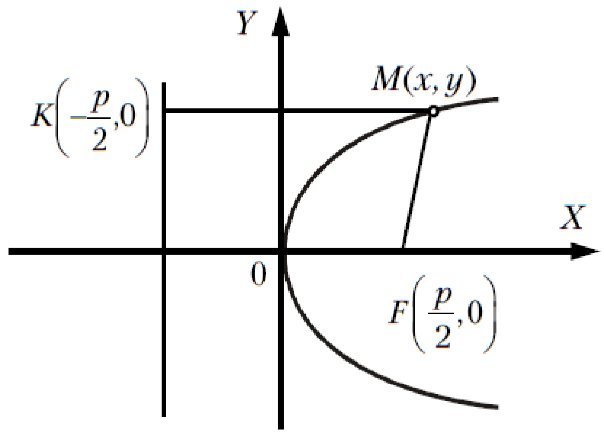
Парабола – геометричне місце точок, відстань яких до заданої прямої (директриси) та заданої точки F (фокуса) рівні.

Канонічне рівняння параболи:

$$y^2 = 2px,$$

де $p > 0$ - параметр параболи.

Рівняння директриси параболи буде $x = -\frac{p}{2}$.



Заключення.

В даній лекції ми розглянули елементи аналітичної геометрії. Аналітична геометрія дозволяє без геометричних побудов проводити аналітичні дослідження геометричних образів. За допомоги аналітичної геометрії можна проводити дослідження в будь-яких галузях діяльності людства та надавати рекомендації щодо підвищення ефективності процесів.

ЛЕКЦІЯ 6. ВИКОРИСТАННЯ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ ДО ЕКОНОМІЧНИХ ЗАДАЧ .

План лекції:

Вступ.

1. Простір товарів, вектор цін.

2. Застосування лінійної функціональної залежності.

3. Економічні задачі, пов'язані з використанням кривих другого порядку.

Заключення.

Вступ.

Метою даної лекції є на основі попередньо засвоєного матеріалу з векторної алгебри та аналітичної геометрії, які широко застосовуютья в різних прикладних питаннях, показати та навчити застосовувати їх в економічних задачах. Більшість економічних показників при використанні векторів набувають набагато компактнішого вигляду, не втрачаючи при цьому наочності й змістовності.

1. Простір товарів, вектор цін

Будемо називати товаром деяке благо, або послугу, що надійшли у продаж в певний час і упевному місці. Нехай маємо n різних товарів, кількість $i-$го товару позначимо через x_i, тоді деякий набір товарів матиме вигляд $\vec{X} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, тобто є $n-$вимірним вектором. Як правило, будемо розглядати тільки невід'ємні вектори $\vec{X} \geq 0$. Множину всіх наборів товарів називають **простором товарів** C**,** оскільки можна скласти будь-які два набори і помножити будь-який набір на довільне невід'ємне число.

Будемо вважати, що кожний товар має ціну (всі ціни додатні). Якщо ціну одиниці $i-$го товару позначити p_i, то вектор $\vec{P} = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ утворює **вектор цін.** Для набору товарів $\vec{X} = \{x_i\}$ і вектора цін $\vec{P} = \{p_i\}$ їх скалярний добуток

$$\vec{P} \cdot \vec{X} = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n$$

є число, яке називають **вартістю набору.**

Приклад 1.

Підприємство зв'язку випускає щодня п'ять видів виробів (1,2,3,4,5), основні виробничо-економічні показники яких наведені в таблиці:

Вид виробу	Кількість виробів	Витрати сировини кг/виріб	Час виготовлення год./виріб	Ціна виробу грн./виріб
1	300	5	0,5	25
2	50	12	5	80
3	80	8	2	30
4	240	0,2	0,4	15
5	120	2,3	4	45

Потрібно визначити такі щоденні показники: витрати сировини S, витрати робочого часу T і вартість R виробленої підприємством продукції.

Розв'язання. За даними таблиці запишемо чотири вектори, що характеризують увесь виробничий цикл:

$\vec{q} = \{300;50;80;240;120\}$ - вектор асортименту;

$\vec{s} = \{5;12;8;0,2;2,3\}$ - вектор витрат сировини;

$\vec{t} = \{0,5;5;2;0,4;4\}$ - вектор витрат робочого часу;

$\vec{p} = \{25;80;30;15;45\}$ - вектор цін.

Шукані величини відповідними скалярними добутками вектора асортименту $\vec{q}$ на три інших вектори:

$$S = \vec{s} \cdot \vec{q} = 5 \cdot 300 + 12 \cdot 50 + 8 \cdot 80 + 0,2 \cdot 240 + 2,3 \cdot 120 = 3064 кг;$$
$$T = \vec{t} \cdot \vec{q} = 0,5 \cdot 300 + 5 \cdot 50 + 2 \cdot 80 + 0,4 \cdot 240 + 4 \cdot 120 = 944 год:$$
$$R = \vec{p} \cdot \vec{q} = 25 \cdot 300 + 80 \cdot 50 + 30 \cdot 80 + 15 \cdot 240 + 45 \cdot 120 = 22900 грн.$$

Приклад 2.

Фірма «Первинні мережі Укртелекому» вирішила взяти кредити у трьох комерційних банків. Кожний з них надав кредити урозмірах відповідно 10, 20 і 20 млн. грн.. під річну відсоткову ставку 24, 20 і 28%. Яку суму треба буде повернути банкам через рік?

Розв'язання. У цьому прикладі мова йде про два вектори: вектор кредитів $\vec{k} = \{10;20;20\}$ і вектор відсоткових ставок $\vec{t} = \{0{,}24;0{,}20;0{,}28\}$. Тоді сума, яку треба буде сплатити за користування кредитами, становить

$$S = \vec{k} \cdot \vec{t} = 10 \cdot 0{,}24 + 20 \cdot 0{,}2 + 20 \cdot 0{,}28 = 12 \text{млн.грн.}$$

Через рік фірма «Первинні мережі Укртелекому» має повернути банкам суму 50+12=62 млн. грн.

2. Застосування лінійної функціональної залежності.

Рівняння прямої та її графік можуть бути використані для запису економічних залежностей у випадку, коли між змінними існує відношення пропорціональності. Наприклад:

1) Позначимо через y загальні витрати підприємства на виготовлення x одиниць однорідної продукції. Загальні витрати складаються із сталих витрат (витрат, що не залежать віл обсягу продукції, що виробляється) і змінних витрат. Якщо сталі витрати становлять $в$ грош. Од., а змінні витрати пропорційні з коефіцієнтом $к$ обсягу продукції x, то маємо: $y = кx + в$.

2) Якщо $к$ - вартість перевезення вантажу на одиницю відстані, $в$ - витрати при перевезенні вантажу, що не залежать від відстані (наприклад, навантаження і вивантаження), то загальну вартість y перевезення вантажу на відстань x можна обчислити за формулою $y = кx + в$.

3) Виторг y від продажу x одиниць продукції за ціною p можна підрахувати за формулою $y = px.$

Приклад.

Загальні витрати на виробництво 100 одиниць деякого товару складають 1000 грн., а ана виробництво 200 одиниць – 1550 грн. Записати функцію витрат виробництва витрат виробництва, вважаючи її лінійною. Якими будуть витрати на виробництво 50 одиниць товару?

Розв'язання. Вважаючи, що функція витрат на виробництво x одиниць продукції має вигляд $y = кx + в$, маємо:

$$1000 = к \cdot 100 + в,$$
$$1550 = к \cdot 200 + в.$$

Розв’язавши цю систему знайдемо коефіцієнти $к$ і $в$: $к = 5{,}5; в = 450.$ Отже функція витрат має вигляд $y = 5{,}5x + 450.$ Щоб дізнатись, якими будуть витрати на виробництво 50 од. продукції, підставимо у цю формулу $x = 50$:

$$y = 5{,}5 \cdot 50 + 450 = 725 \text{ } \textit{грн.}$$

3. Економічні задачі, пов’язані з використанням кривих другого порядку.

Наведемо приклади застосування кривих другого порядку в економічних задачах.

Приклад.

Врожайність певного виду зерна становить x ц/га. Знайти собівартість y (грн.) центнера зерна, якщо сталі витрати (витрати, що не залежать від врожайності, напр.., транспортування, обмолот та ін.) дорівнюють 20 грн. на 1 ц, а змінні витрати становлять 50 грн. з 1 га. *Розв'язання.* Оскільки змінні витрати становлять 50 грн. з 1 га, то виробництво 1 ц зерна коштуватиме $\frac{50}{x}$ грн.. Враховуючи сталу часину витрат, одержимо таку формулу для собівартості y (грн..):

$$y = \frac{50}{x} + 20.$$

Це рівняння гіперболи.

За допомогою ліній гіперболічного типу можна описати також закон розподілу прибутків у капіталістичному суспільстві, який сформулював італійський економіст Вільфредо Парето (1848-1923).

Закон Парето. ***Число осіб, що мають прибуток не менше*** X ***грош. од. можна визначити за формулою:***

$$y = \frac{a}{x^n} \quad (n = 2{,}3{,}\ldots).$$

Цей закон достатньо точно описує розподіл великих прибутків, але не справджується для низьких.

Заключення.

На конкретних прикладах, базуючись на засвоєних знаннях з векторної алгебри та аналітичної геометрії, показано застосуваннях методів з вказаних дисциплін при розв’язанні економічних задач.

ЛЕКЦІЯ 7. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ. ФУНКЦІЇ ТА ГРАНИЦІ ФУНКЦІЙ

План лекції:

Вступ.

1. Функції, способи завдання, властивості, області визначення та значень функції.

2. Нескінченно малі та нескінченно великі величини.

3. Границя змінної та функцій.

4. Властивості границь.

Заключення.

Вступ.

Математичний аналіз — фундаментальний розділ математики, що веде свій відлік від XVII століття, коли було строго сформульовано теорію нескінченно малих. Сучасний математичний аналіз включає в себе також теорію функцій, теорії границь і рядів, диференційне та інтегральне числення, диференціальні рівняння та диференціальну геометрію. Математичний аналіз постав визначною віхою в історії науки і сформував обличчя сучасної математики. Аналіз швидко перетворився на надзвичайно потужний інструмент для дослідників природничих наук, а також став одним із рушіїв науково-технічної революції.

Наступним витком у розвитку математичного аналізу став сформований на початку XX століття функціональний аналіз. Якщо класичний аналіз вважає змінну числом – тобто елементом із множини дійсних (або комплексних) чисел, то в функціональному аналізі вже сама функція розглядається як змінна. Одночасно вводиться поняття функціоналу – узагальненої функції, що може приймати іншу функцію в якості аргументу (функція від функції). У сучасному формулюванні, функціональний аналіз є застосуванням теорії аналізу до довільного простору математичних об'єктів.

В історії математики можна умовно виділити два основні періоди: елементарної та сучасної математики. Межею, від якої ведеться відлік епохи нової (іноді — вищої) математики, стало XVII століття. Саме в XVII столітті з'явився математичний аналіз. Предтечами його було числення нескінченно малих в роботах Валліса, Грегорі, Барроу. До кінця XVII ст. Ісааком Ньютоном, Готфрідом Лейбніцом було створено апарат **диференційного та інтегрального числення**, що становить основу математичного аналізу і навіть математичну основу всього сучасного природознавства.

Рух, змінні величини і їхній взаємозв'язок оточують нас усюди. Різні види руху, їхні закономірності становлять основний об'єкт вивчення конкретних наук: фізики, геології,біології, соціології тощо. Точна мова і відповідні математичні методи опису і вивчення таких величин виявилися необхідними в усіх областях знань приблизно як числа йарифметика необхідні для опису кількісних співвідношень. Тому математичний аналіз став основою мови і математичних методів опису змінних величин та зв’язків між ними. В наші дні без математичного аналізу неможливо було б не тільки розрахувати космічні траєкторії, роботу ядерних реакторів, закономірності розвитку циклону, а й ефективно керувати виробництвом, розподілом ресурсів, організацією технологічних процесів, бо все це — динамічні процеси.

Елементарна математика була переважно математикою постійних величин, вона вивчала головним чином співвідношення між елементами геометричних фігур, арифметичні властивості чисел і алгебраїчні рівняння.

В кінці XVII століття довколо Лейбніца виникає гурток, найвідомішими представниками якого були брати Бернуллі, і Лопіталь. В 1696, використовуючи лекції Й. Бернуллі, Лопіталь написав перший підручник, що викладав новий метод у використанні до теорії плоских кривих. Він назвав його Аналізом нескінченно малих, даючи тим самим і одну з назв новому розділу в математиці. В основу викладення покладений термін змінних величин, між якими існує певний зв'язок, через який зміна одної тягне за собою зміну іншої. У Лопіталя цей зв'язок дається за допомогою плоских кривих: якщо M – рухома точка плоскої кривої, то її декартові координати x та y є змінними, при чому зміна x спричинює зміну y.

Поняття функції запровадив у XVIII ст. Леонард Ейлер. Упродовж XVIII ст. були розвинуті різноманітні методи аналізу, що збагатили диференціальне та інтегральне числення: варіаційне числення, теорія рядів, теорія звичайних диференціальних рівнянь.

Аналіз функцій дійсної змінної почав набирати ознак окремого розділу математики, коли Бернард Больцано дав сучасне означення неперервності у 1816, хоча роботи Больцано не отримали широкої відомості до 1870-их. З 1821 Огюстен Коші почав формувати міцне логічне підґрунтя під математичним аналізом, формулюючи його через поняття нескінченно малих. Йому також належать поняття фундаментальної послідовності і основи аналізу комплексної змінної. Симеон Пуасон, Жозеф Ліувіль, Жозеф Фур'є та інші вивчали диференціальні рівняння і гармонічний аналіз. Завдяки внеску цих та інших математиків, таких як Карл Веєрштрас розвинувся епсилонний підхід, який є основою сучасного математичного аналізу. Зразком такого підходу є означення границі функції через ε та δ.

Усередині XIX століття Бернгард Ріман розвинув теорію інтегрування. Приблизно тоді ж спроби уточнити теореми інтегрування за Ріманом призвели до вивчення розривів дійсних функцій.

На початку 20 століття математичний аналіз був формалізований теорією множин. Анрі Лебег розв'язав проблему міри, а Давид Гільберт запровадив гільбертів простір. Виникла ідея нормованого векторного простору, і в 1920-их Стефан Банах започаткував функціональний аналіз.

1. Функції, способи завдання, властивості, області визначення та значень функції

1.1. Поняття функціональної залежності

Величина називається змінною (сталою), якщо в умовах даної задачі вона набуває різних (тільки одного) значень.

Розглянемо дві змінні величини $x \in D \subseteq R$ і $y \in E \subseteq R$.

Означення. *Функцією* $y = f(x)$ називається така відповідність між множинами D і E, за якої кожному значенню змінної x відповідає одне й тільки одне значення змінної y.

При цьому вважають, що:

x — незалежна змінна, або аргумент;

y — залежна змінна, або функція;

f — символ закону відповідності;

D — область визначення функції;

E — множина значень функції.

Розрізняють <u>три способи завдання функції</u>: аналітичний, графічний і табличний.

Означення. Функція $y = F(u)$, де $u = \varphi(x)$, називається ***складною*** (*складеною*) *функцією*, або *суперпозицією* функцій $F(u)$ та $\varphi(x)$, і позначається $y = F(\varphi(x))$.

Приклад. $y = 2^{\sin^2 x}$ — складна функція, вона буде суперпозицією трьох функцій: $y = 2^u$, $u = v^2$, $v = \sin x$.

Приклад. $y = \mathrm{tg}(3u)\cdot f(u)$, де $u = 3x + 1$, $f(u) = (2u+5)^3$. Оскільки $f(u) = (2u+5)^3$, то $y = \mathrm{tg}(3(3x+1))(2(3x+1)+5)^3 = \mathrm{tg}(9x+3)(6x+7)^3$.

Означення. Нехай функція $y = f(x)$ встановлює відповідність між множинами D та E. Якщо обернена відповідність між множинами E та D буде функцією, то вона називається *оберненою до даної* $y = f(x)$; її позначають $y = f^{-1}(x)$.

За означенням, для взаємно обернених функцій маємо:

$$f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x.$$

Приклад. $f(x) = x^3, f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ — взаємно обернені функції:

$$\sqrt[3]{x^3} = (\sqrt[3]{x})^3 = x.$$

Графіки взаємно обернених функцій <u>симетричні відносно прямої $y = x$</u> (рис. 1).

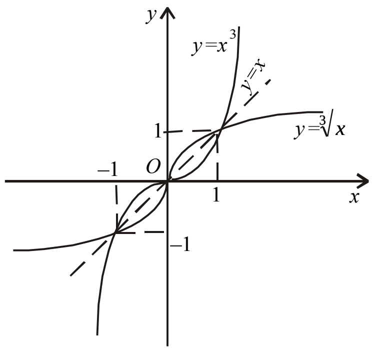


Рис. 1

Означення. Функція (функціональна залежність змінної y від змінної x) називається *неявною*, якщо її задано рівнянням $F(x, y) = 0$, яке не розв'язане відносно змінної y.

Приклад. Рівняння $y + x + 2^y = 0$ визначає неявну функцію y від x.

Означення. Система рівнянь

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

визначає параметричну залежність функції y від змінної x (t—параметр).

Вираз $y = f(x)$ самої залежності y від x можна дістати виключенням параметра t з останньої системи рівнянь.

Приклад. Параметрична залежність

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

визначає коло радіуса r з центром у початку прямокутної декартової системи координат. Справді, зводячи до квадрата параметричні рівняння і підсумовуючи результат, дістаємо: $x^2 + y^2 = r^2 \left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)$, або $x^2 + y^2 = r^2$.

1.2. Загальні властивості функцій

Означення. Множина всіх значень аргументу, для яких можна обчислити значення функції, називається *областю визначення функції*. Область визначення може бути заданою; у цьому випадку вона залежить також від умови задачі.

Приклад. Знайти область визначення функції

$$y = \frac{\arcsin\frac{x}{2} + \sqrt{1 - x^2}}{\lg(1 + x)}.$$

$$D(y) = \begin{cases} \left|\frac{x}{2}\right| \le 1 \\ 1 - x^2 \ge 0 \\ x + 1 > 0 \\ \lg(x + 1) \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \le 2 \\ |x| \le 1 \\ x > -1 \\ x + 1 \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x \le 1 \\ x \ne 0. \end{cases}$$

$D(y)$ = (– 1; 0) ∪ (0; 1] — область визначення. Якщо за умовою задачі x — відстань, а це означає, що $x \ge 0$, тоді $D(y)$ = (0; 1] — задана область визначення.

Означення. Функція $y = f(x)$ називається *парною* (*непарною*), якщо для будь-якого $x \in D$ виконується умова $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$).

Функція не буде парною, не буде непарною, якщо для $x \in D$, $f(-x) \ne \pm f(x)$.

Приклад. $y = \cos x$ — парна функція (графік функції симетричний відносно осі ординат (рис. 2)), бо $y(x) = \cos(-x) = \cos x = y(x)$; $y = \operatorname{arctg} x$ — непарна функція (графік функції симетричний відносно початку координат (рис. 3)), бо $y(-x) = \pm\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x = -y(x)$; $y = \arccos x$ — ні парна, ні непарна (рис. 4), бо $y(-x) = \arccos(-x) = \pi - \arccos x \ne \pm y(x)$.

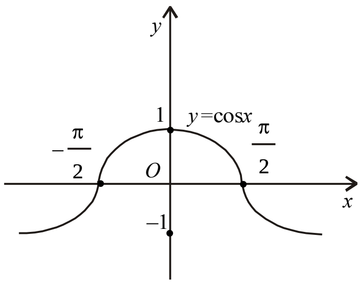


Рис. 2

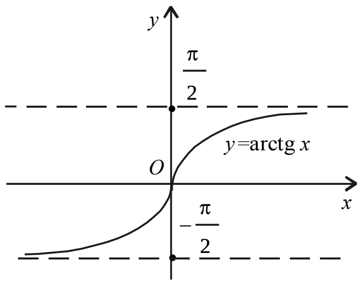


Рис. 3

Означення. Функція $y = f(x)$ називається *періодичною*, якщо для $x \in D$ виконується умова $f(x+T) = f(x-T) = f(x)$, де число T — період функції.

Приклад. $y = \mathrm{tg}x$ — періодична функція з мінімальним періодом $T = \pi$ (див. рис. 3.5), бо $\mathrm{tg}(x+\pi) = \mathrm{tg}(x-\pi) = \mathrm{tg}x$.

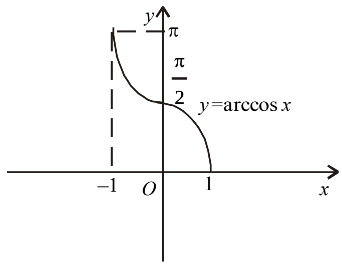


Рис. 4

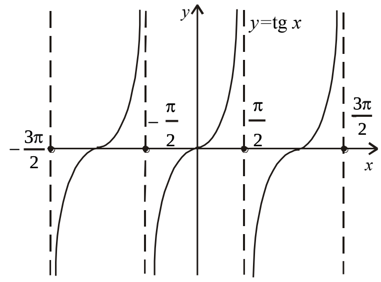


Рис. 5

Означення. Функція $y = f(x)$ називається *обмеженою на множині D,* якщо для всіх $x \in D$ виконується умова $|f(x)| \le M$, де $M > 0$ — деяке скінченне число.

Приклад. $y = \arcsin x$ — обмежена функція для всіх $x \in [-1; 1]$ (рис. 6), бо $|\arcsin x| \le \dfrac{\pi}{2}$.

Означення. Функція $y = f(x)$ називається *монотонно зростаючою* (*спадною*) на множині D, якщо для всіх $x \in D$ більшому значенню аргументу відповідає більше (менше) значення функції, тобто $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1) (f(x_2) < f(x_1))$.

Приклад. $y = \log_a x$ — монотонно спадна функція при $0 < a < 1$, а при $a > 1$ — монотонно зростаюча (рис. 7).

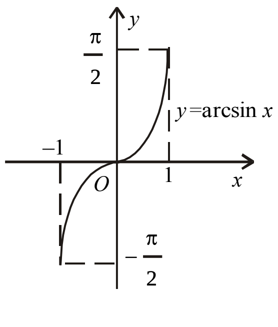


Рис. 6

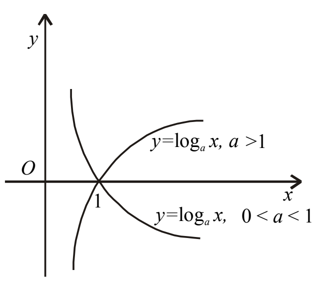


Рис. 7

1.3. Елементарні функції

Основними елементарними функціями прийнято вважати такі:

1) степенева $y = x^{\alpha}$;

2) показникова $y = a^{x}$ (рис. 8);

3) логарифмічна $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ (рис. 7);

4) тригонометричні: $y = \cos x$ (рис. 2); $y = \sin x$ (рис. 9); $y = \mathrm{tg} x$ (рис. 5); $y = \mathrm{ctg} x$ (рис. 10);

5) обернені тригонометричні: $y = \arcsin x$ (рис. 6); $y = \arccos x$ (рис. 4); $y = \mathrm{arctg} x$ (рис. 5); $y = \mathrm{arcctg} x$ (рис. 11).

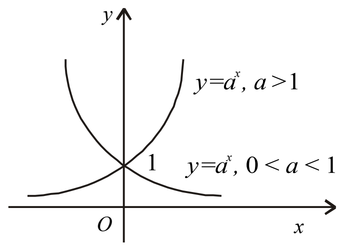


Рис. 8

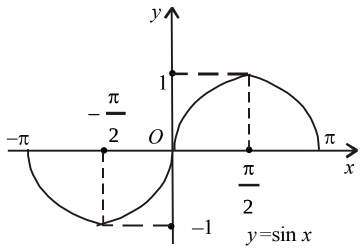


Рис. 9

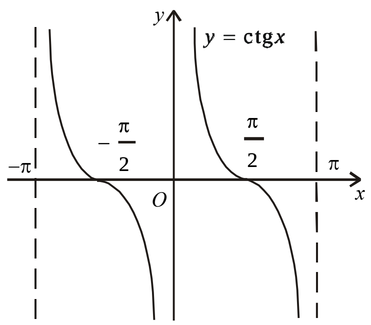


Рис. 10

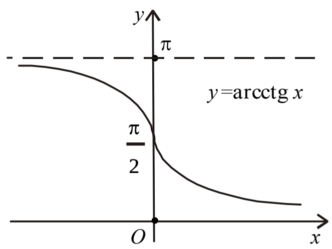


Рис. 11

<u>*Цілою раціональною*</u> функцією називається упорядкований многочлен

$$y = P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n, \qquad a_i \in R.$$

<u>*Дробово-раціональною функцією*</u> буде відношення многочленів

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \qquad \text{або } y = R(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_{m-1} x + b_m}.$$

2. Нескінченно малі та нескінченно великі величини

Означення. Змінна величина x називається ***нескінченно малою***, якщо в процесі її зміни наступить такий момент, починаючи з якого, абсолютна величина змінної x стає і залишається менше будь-якого, скільки завгодно малого, наперед заданого додатного числа ε, тобто $|x| < \varepsilon$.

Нескінченно малі величини (н.м.в.) зменшуються, але не досягають нуля. Наприклад, н.м.в. $\alpha = 1/x$, при $x \to \infty$.

Нескінченно малі величини найчастіше позначають літерами α, β, γ.

Наприклад, величина $\frac{1}{10^n}$ при $n \to \infty$ є нескінченно малою.

Розглянемо деякі властивості нескінченно малих величин.

Теорема 1. ***Алгебраїчна сума декількох нескінченно малих величин є величина нескінченно мала.***

Доведення. Нехай задано k нескінченно малих величин $\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots,\ \alpha_k$. Доведемо, що їх алгебраїчна сума $(\alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \ldots \pm \alpha_k)$ буде величиною нескінченно малою. Візьмемо скільки завгодно мале $\varepsilon > 0$. Згідно з означенням нескінченно малих в процесі їх зміни наступить такий момент, починаючи з якого будуть виконуватися нерівності:

$$|\alpha_1| < \frac{\varepsilon}{k},\ |\alpha_2| < \frac{\varepsilon}{k}, \ldots,\ |\alpha_k| < \frac{\varepsilon}{k}.$$

Звідси, використовуючи властивості модуля, одержимо:

$$|\alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \ldots \pm \alpha_k| \le |\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_k| < \frac{\varepsilon}{k} + \frac{\varepsilon}{k} + \ldots + \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon.$$

Отже, маємо: $|\alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \ldots \pm \alpha_k| \le \varepsilon$.

Ця нерівність, згідно з означенням 11, означає, що $(\alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \ldots \pm \alpha_k)$ є нескінченно малою величиною. Теорема доведена.

Теорема 2. ***Добуток обмеженої величини на нескінченно малу величину є величина нескінченно мала.***

Доведення. Нехай y – обмежена величина, α – нескінченно мала. Для обмеженої величини y існує таке число M, що $|y| \le M$. Згідно з означенням нескінченно малої в процесі змінювання α наступить такий момент, починаючи з якого буде виконуватися нерівність $|\alpha| < \frac{\varepsilon}{M}$ для будь-якого $\varepsilon > 0$. Тому, починаючи з деякого моменту, буде виконуватись нерівність

$$|y\alpha| = |y| \cdot |\alpha| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon .$$

Ця нерівність означає, що $y \cdot \alpha$ є величиною нескінченно малою, що і треба було довести.

Наслідок 1. Добуток постійної величини на нескінченно малу є величина нескінченно мала.

Наслідок 2. Добуток скінченної кількості нескінченно малих величин є величина нескінченно мала.

Дійсно, постійні та нескінченне малі величини є обмеженими величинами, тому для них має місце твердження теореми 2.

Означення. Змінна величина x називається ***нескінченно великою***, якщо в процесі її зміни наступить такий момент, починаючи з якого абсолютна величина x стає і залишається більше будь-якого, скільки завгодно великого, наперед заданого додатного числа N, тобто |x| > N.

Наприклад, величина 10^n при $n \to \infty$ є величина нескінченно велика.

Між нескінченно великими і нескінченно малими величинами існує простий зв'язок: якщо x нескінченно велика величина, то $y = \frac{1}{x}$ – нескінченно мала, і навпаки, якщо y – нескінченно мала і $y \ne 0$, то $x = \frac{1}{y}$ буде нескінченно великою величиною.

Тому можна довести, що алгебраїчна сума скінченної кількості нескінченно великих величин буде величиною нескінченно великою, добуток нескінченно великої величини на обмежену величину також буде нескінченно великою величиною.

Ділення нескінченно малих та нескінченно великих величин поки що не визначено і буде розглянуто далі, після визначення границі змінної величини.

3. Границя змінної та функцій

Із всієї множини змінних величин виділимо такі, процес зміни яких відбувається особливим чином, що дозволяє назвати ці величини прямуючими до границі.

3.1. Поняття границі

Означення. *Постійна величина a називається* ***границею змінної величини*** *x, якщо абсолютна величина різниці* $x-a$ *є величиною нескінченно малою, тобто* $|x-a|<\varepsilon$.

Якщо число *a* є границею змінної *x*, то кажуть, що *x* прямує до границі *a* і позначають так: $\lim x = a$ або $x \to a$.

З цього означення границі випливає, що границя нескінченно малої величини дорівнює нулю, тобто $\lim\alpha=0$ або $\alpha\to 0$.

Нескінченно велика величина *x* границі не має, але умовно вважають, що границя нескінченно великої величини є ∞, тобто $|x|\to\infty$ або $\lim x=\pm\infty$.

Із вищезазначеного означення випливає: якщо в процесі своєї зміни змінна величина має границю, то лише одну, а сама змінна величина відрізняється від своєї границі на нескінченно малу величину, тобто $x = a + \alpha$. Саме цей факт в математичному аналізі часто використовується.

Тепер розглянемо границю різновидів змінної величини – послідовності та функції.

Означення. *Число* a *називається* ***границею послідовності*** $x_1,\ x_2,\dots\ x_n$, *якщо для будь-якого наперед заданого, скільки завгодно малого* $\varepsilon > 0$ *існує такий номер N, що для усіх* $n > N$ *виконується нерівність* $|x_n - a|<\varepsilon$.

Позначають границю послідовності так: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ або $x_n\to a$ при $n\to\infty$.

Відмітимо, що номер *N* залежить від ε і найчастіше він зростає, коли ε зменшується.

Означення. *Число A називається* ***границею функції y = f(x) при*** $x \to x_0$, *якщо для будь-якого наперед заданого, скільки завгодно малого* ε > 0 *знайдеться таке число* δ > 0, *що для усіх x, відмінних від* x_0 *і які задовольняють нерівність* $|x - x_0| < \delta$, *виконується нерівність* $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Розглянемо однобічні границі: границі зліва та границі справа.

Якщо функція $y = f(x)$ *має границею число* A_1, *лише при умові, що* $x \to x_0$ *зліва, то використовують такий запис:*

$$A_1 = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x),$$

а число A_1, *називають* ***однобічною границею функції*** $y = f(x)$ ***зліва****. Якщо число* A_2 *є границею функції* $y = f(x)$ *при* $x \to x_0$ *справа, то використовують запис:*

$$A_2 = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x),$$

а число A_2 *називають* ***однобічною границею функції*** $y = f(x)$ ***справа****. Ці границі функції називають* ***однобічними****.*

Для існування границі *A* функції $f(x)$ в точці x_0 необхідно і достатньо, щоб існували в цій точці границі функції зліва та справа і щоб вони були рівні, тобто $A_1 = A_2 = A$.

3.2. Порівняння нескінченно малих та нескінченно великих

Ділення двох нескінченно малих або двох нескінченно великих величин не визначено тому, що їх відношення може бути нескінченно малою або нескінченно великою або постійною величиною.

Дійсно, нехай α – нескінченно мала величина, тоді $\beta = \alpha^2$, $\gamma = 3\alpha$ також нескінченно малі величини.

Маємо:

$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2}{\alpha}=\alpha$ – нескінченно мала величина,

$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha}{\alpha^2}=\frac{1}{\alpha}$ – нескінченно велика величина,

$\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{3\alpha}{\alpha}=3$ – постійна величина.

Використовуючи ділення, можна порівнювати нескінченно малі та нескінченно великі величини.

Означення. *Нескінченно малі величини* α *та* β *називаються* ***нескінченно малими одного порядку****, якщо їх відношення має скінченну границю, відмінну від нуля, тобто якщо* $\lim\frac{\alpha}{\beta}=k\neq 0.$

Якщо $k=1$, то α та β називають ***еквівалентними нескінченно малими величинами***.

Означення. *Якщо відношення двох нескінченно малих величин є нескінченно мала величина, тобто* $\lim\frac{\alpha}{\beta}=0$, *то* α *називають* ***нескінченно малою величиною вищого порядку милості в порівнянні з*** β**.**

Наприклад, якщо $\alpha=\beta^3$, то $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\beta^3}{\beta}=\lim\beta^2=0.$

Нескінченно великі величини порівнюють таким же чином.

Знаходження границі відношення двох нескінченно малих або двох нескінченно великих величин називають розкриттям невизначеності їх відношення.

3.3. Ознаки існування границі змінної величини

Не слід вважати, що будь-яка змінна величина має границю. Розглянемо, наприклад, послідовність

$x_n=(-1)^{n-1}:\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ldots$

Ця послідовність не має границі тому, що при будь-якому n сусідні два значення цієї змінної відрізняються за модулем на дві одиниці Отже, для $\varepsilon < 1$ на числовій осі не має такої точки, ε-окіл якої містив би усі значення x, починаючи з деякого N.

В курсі математичного аналізу для студентів університетів математичної спеціальності доведені такі ознаки існування границі змінної величини.

Ознака 1. *Якщо в одному процесі змінна величина* y *заключена між двома іншими змінними* x *та* z*, які мають однакову границю* a*, то й змінна величина* y *має границю, що дорівнює* a*. Іншими словами:*

якщо $x \le y \le z$, та $\lim x = a$, $\lim z = a$, *то **y** також має границю* $\lim y = a$.

Цю ознаку іноді називають теоремою про двох міліціонерів.

Ознака 2. *Обмежена монотонна змінна величина має границю.*

Ця ознака вказує умови, при яких існує границя змінної величини.

Перша ознака вказує не тільки умови існування границі змінної величини, але й величину самої границі.

4. Властивості границь

Теорема 1. ***Якщо x = C – постійна величина, то*** $\lim C = C$, ***тобто, границя постійної величини дорівнює самій постійній.***

Дійсно, якщо усі значення x дорівнюють C, то виконується нерівність $|x - C| = |C - C| = 0 < \varepsilon$, де ε – скільки завгодно мале додатне число. Ця нерівність означає, що C є границею $x = C$.

Теорема 2. ***Границя алгебраїчної суми скінченної кількості змінних величин, що мають границі, дорівнює такій же алгебраїчній сумі границь доданків, тобто***

$$\lim(x \pm y \pm \ldots z) = \lim x \pm \lim y \pm \ldots \lim z.$$

Доведення. Нехай $\lim x = a$, $\lim y = b$, ..., $\lim z = c$. Змінна величина відрізняється від своєї границі на нескінченно малу величину, тому можна записати:

$$x = a + \alpha,\ y = b + \beta, ...,\ z = c + \gamma,$$

де α, β,..., γ – нескінченно малі величини. Тепер маємо:

$$x \pm y \pm ... \pm z = (a \pm b \pm ... \pm c) + (\alpha \pm \beta \pm ... \pm \gamma)\ .$$

В останній дужці правої частини цієї рівності маємо нескінченно малу величину, а в першій дужці – постійна величина. Отже,

$$\lim(x \pm y \pm ... z) = a \pm b \pm ... \pm c = \lim x \pm \lim y \pm ... \lim z,$$

що й треба було довести.

Теорема 3. ***Границя добутку скінченної кількості змінних величин, що мають границю, дорівнює добутку границь множників, тобто***

$$\lim(x \cdot y \cdot ... \cdot z) = \lim x \cdot \lim y \cdot ... \cdot \lim z.$$

Доведення. Спочатку доведемо твердження теореми для двох множників. Нехай $\lim x = a$, $\lim y = b$, тоді $x = a + \alpha$, $y = b + \beta$, де α та β – нескінченно малі величини.

Згідно з властивостями нескінченно малих величин

$$\gamma = a \cdot \beta + \alpha \cdot b + \alpha \cdot \beta$$

також нескінченно мала. Тому

$$x \cdot y = a \cdot b + \gamma \text{ або } \lim(x \cdot y) = a \cdot b = \lim x \cdot \lim y\ .$$

Тим самим твердження теореми для двох множників доведене.

У випадку трьох множників доведення твердження теореми випливає із доведення для двох множників та рівностей:

$$\lim(x \cdot y \cdot z) = \lim\left[(x \cdot y) \cdot z\right] = \lim(x \cdot y) \cdot \lim z = \lim x \cdot \lim y \cdot \lim z.$$

Аналогічно доводиться твердження теореми для будь якої кількості множників.

Наслідок 1. *Постійний множник можна виносити за знак границі, тобто*

$$\lim Cx = \lim C \cdot \lim x = C \lim x .$$

Наслідок 2. *Границя цілого додатного степеня змінної величини дорівнює тому ж степеню границі цієї змінної величини, тобто*

$$\lim\left(x^n\right) = \left(\lim x\right)^n .$$

Теорема 4. ***Границя частки від ділення двох змінних величин дорівнює частці від ділення їх границь, якщо тільки границя дільника не дорівнює нулю, тобто***

$$\lim \frac{x}{y} = \frac{\lim x}{\lim y}, \ \lim y \neq 0.$$

Доведення. Нехай $\lim x = a$, $\lim y = b$. Тоді $x = a + \alpha$, $y = b + \beta$, де α та β – нескінченно малі величини.

Розглянемо різницю

$$\frac{x}{y} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha}{b+\beta} - \frac{a}{b} = \frac{ab + \alpha b - ab - a\beta}{b^2 + \beta b} = \frac{\alpha b - a\beta}{b^2 + \beta b} .$$

Величини $a\beta$, αb, βb– нескінченно малі, тому чисельник правої частини є нескінченно малою величиною, а знаменник – скінченною величиною. Отже, дріб $\frac{\alpha b - a\beta}{b^2 + \beta b}$ буде нескінченно малою величиною, яку позначимо через γ. Тепер маємо:

$$\frac{x}{y} - \frac{a}{b} = \gamma \text{ або } \frac{x}{y} = \frac{a}{b} + \gamma .$$

Знайдемо границю обох частин останньої рівності:

$$\lim \frac{x}{y} = \frac{a}{b} = \frac{\lim x}{\lim y}.$$

що і треба було довести.

Розпишемо деякі особливі випадки обчислення границі частки $\frac{y}{z}$.

1. Якщо $\lim z = \infty$, а y – обмежена величина, тоді

$$\lim \frac{y}{z} = \lim \left(y \cdot \frac{1}{z} \right) = \lim y \cdot \lim \frac{1}{z} = 0.$$

Наприклад, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x^2} = 0.$

2. Якщо $\lim y \neq 0$, а $\lim z = 0$, тоді

$$\lim \frac{y}{z} = \lim \left(y \cdot \frac{1}{z} \right) = \lim y \cdot \lim \left(\frac{1}{z} \right) = \infty .$$

тому, що $\frac{1}{z}$ – нескінченно велика величина.

Наприклад, $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 + 3}{x - 1} = \infty .$

Заключення.

В даній лекції ми розглянули такі поняття, як функціональні залежності, границі, прямування функції до границі, властивості границь. За допомоги визначених понять можна досліджувати функціональні залежності та математичні моделі, що описують процеси та явища в економіці.

ЛЕКЦІЯ 8. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЙ

План лекції:

Вступ

1. Перша та друга чудові границі.

2. Неперервність функцій.

3. Класифікація розривів функцій.

Заключення.

Вступ.

Сутність математичного аналізу полягає в дослідженні функцій, які описують реальні процеси в техніці, економіці, в будь-яких сферах життя. Основні задачі дослідження полягають у визначенні неперервності функції, її диференційованості, обчисленні значень границь, а також визначення монотонності, опуклості, пошуку екстремумів тощо. Визначення інтервалів та точок, в яких функція неперервна є важливим завданням.

1. Перша та друга чудові границі

Перша чудова границя.

При знаходженні границі виразів, що містять тригонометричні функції, часто використовують границю

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1, \qquad (1)$$

яку називають ***першою чудовою границею.***

Для доведення рівності (1) побудуємо коло одиничного радіуса та кут *AOB* = *x* (радіан), де $0 < x < \frac{\pi}{2}$ (дивись мал. 3).

Побудуємо лінію синуса *BC* та лінію тангенса *AD*. Із мал. 3 видно, що площа ΔAOB менше площі сектора *AOB*, а остання менше площі ΔAOD

Площа ΔOAB дорівнює $\frac{1}{2}\sin x$, площа сектора *OAB* дорівнює $\frac{1}{2}x$, а площа ΔOAD дорівнює $\frac{1}{2}\text{tg}\,x$. Отже, маємо нерівності $\sin x < x < \text{tg}\,x$.

При $0 < x < \frac{\pi}{2}$ маємо $\sin x > 0$, тому нерівності можна поділити на $\sin x$. Одержимо $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$.

Для обернених величин можна записати такі нерівності

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \qquad (2)$$

Оскільки $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$, то за першою ознакою існування границі змінної величини із нерівностей (2) одержимо

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\sin x}{x} = 1. \qquad (3)$$

Отже, рівність (1) доведена для $x > 0$. При $x < 0$ позначимо

$x = -t,\ t > 0,$ тоді $\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-t)}{-t} = \frac{-\sin t}{-t} = \frac{\sin t}{t}$.

Тому, для $x < 0$ маємо

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{\sin x}{x} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{\sin t}{t} = 1. \qquad (4)$$

Із рівностей (3) та (4) випливає рівність (1), яку треба було довести.

Приклад: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{5\sin 5x}{5x} = 5\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 5.$

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg\,x}{x}=1.$$

<u>*Друга чудова границя.*</u>

Розглянемо послідовність $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n=1,2,3,\ldots$ та підрахуємо декілька її значень

$u_1=2;\ u_2=\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=2{,}25;\ u_3=\left(1+\frac{1}{3}\right)^3=\left(\frac{4}{3}\right)^3=2{,}37;$

$u_4=\left(\frac{5}{4}\right)^4=2{,}441;\ u_5=\left(\frac{6}{5}\right)^5=2{,}488;\ \ldots$

Бачимо, що $u_1<u_2<u_3<u_4<u_5$. Можна довести, що для будь-якого *n* має місце нерівність $u_n<u_{n+1}$ яка означає, що змінна u_n монотонно зростає. В той же час усі підраховані значення u_n задовольняють нерівність $u_n<3$. Можна показати, що ця нерівність має місце для усіх значень *n*. Отже, змінна u_n монотонно зростає і залишається обмеженою зверху числом 3. Згідно з другою ознакою існування границі змінної величини робимо висновок, що ця змінна u_n має скінченну границю.

Означення 1. *Скінченну границю послідовності* $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n=1,2,3,\ldots$ *називають* ***числом*** e*, тобто*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e. \qquad (5)$$

Оскільки для будь-яких значень $n>1$ мають місце нерівності $2<u_n<3$, тому число e задовольняє нерівностям $2<e<3$

Число e – ірраціональне, воно часто використовується в математиці та економіці і дорівнює e = 2,718281... .

В практичних підрахунках наближено приймають $e\approx 2{,}72$. Рівністю (5) ми визначили число e при $n\to\infty$, коли n приймає лише цілі та додатні значення.

Можна довести таке твердження:

Якщо змінна $x \to \infty$, приймаючи будь-які дійсні (раціональні та ірраціональні) додатні значення, то функція $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ має своєю границею також число e, тобто

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \qquad (6)$$

Якщо в лівій частині рівності (6) зробити заміну $\frac{1}{x} = \alpha$ то ця рівність приймає вигляд

$$\lim_{\alpha\to 0}(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e. \qquad (7)$$

Рівності (6) та (7) називають ***другою чудовою границею***. Цю границю часто використовують в різних галузях техніки, економіки.

Приклад. Обчислити $\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$ при постійному *a*.

Розв'язання. Будемо використовувати другу чудову границю. Маємо:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1 + \frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}}\right]^a = \left\{\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}}\right\}^a = e^a.$$

2. Неперервність функцій

Нехай $y = f(x)$ і аргумент x змінюється від значення $x = x_1$, до значення $x = x_2$ Різницю між цими значеннями аргументу називають ***приростом аргументу*** і позначають Δx.

Отже, $\Delta x = x_2 - x_1$.

При $x = x_1$, маємо $y_1 = f(x_1)$, а при $x = x_2$ маємо $y_2 = f(x_2)$. Різницю функції, яка викликана зміною аргументу, називають ***приростом функції*** і позначають Δy.

Отже, $\Delta y = y_2 - y_1 = f\left(x_1 + \Delta x\right) - f\left(x_1\right)$.

Тепер можна перейти до поняття неперервності функції. Дамо два означення неперервності функції в точці, які досить часто використовуються.

Означення 2. Якщо нескінченно малому приросту аргументу Δx в точці $x = x_0$ відповідає нескінченно малий приріст Δy функції, що визначена в точці x_0 та в її околі, то функцію $y = f\left(x\right)$ називають **неперервною при** $x = x_0$ **або в точці** x_0.

Із цього означення випливає, що для дослідження неперервності функції в точці $x = x_0$ достатньо впевнитись, що при $\Delta x \to 0$ буде $\Delta y \to 0$.

Означення 3. Функцію $y = f\left(x\right)$ називають **неперервною при** $x = x_0$, якщо:

1) $f\left(x\right)$ існує при $x = x_0$ та в деякому околі точки x_0;
2) існує скінченна границя $\lim\limits_{x \to x_0} f\left(x\right)$;
3) $\lim\limits_{x \to x_0} f\left(x\right) = f\left(x_0\right)$ незалежно від способу прямування x до x_0, тобто $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f\left(x\right) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f\left(x\right) = f\left(x_0\right)$.

Останню умову можна записати так: $\lim\limits_{x \to x_0} f\left(x\right) = f\left[\lim\limits_{x \to x_0} x\right] = f\left(x_0\right)$.

Ця ознака нижче буде використана для класифікації точок розриву.

Означення 4. Якщо функція неперервна в кожній точці деякого інтервалу (a,b), то її називають **неперервною в інтервалі** (a,b).

Якщо функція визначена при $x = a$ і $\lim\limits_{x \to a+0} f\left(x\right) = f\left(a\right)$, то кажуть, що $f\left(x\right)$ <u>неперервна в точці a справа</u>.

Якщо $f\left(x\right)$ визначена при $x = b$ і $\lim\limits_{x \to b-0} f\left(x\right) = f\left(b\right)$, то кажуть, що $f\left(x\right)$ <u>в точці $x = b$ неперервна зліва.</u>

Якщо $f\left(x\right)$ неперервна в кожній точці інтервалу (a,b) та неперервна на кінцях інтервалу, відповідно справа та зліва, то функцію $f\left(x\right)$ називають **неперервною на відрізку** $[a,b]$.

Приклад. Знайти інтервал неперервності функції $y = x^2$.

Розв'язання. Будемо використовувати означення 2 неперервності функції. Візьмемо довільну точку x_0 на числовій осі та позначимо через Δx приріст x. Тоді функція $y = x^2$ одержить приріст
$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$. Якщо $\Delta x \to 0$, то згідно з властивостями нескінченно малих величин, $\Delta y \to 0$, тобто Δy є нескінченно малою. Отже, функція неперервна в точці x_0. Це твердження має місце для будь-якої точки числової осі, тому функція $y = x^2$ неперервна на всій числовій осі.

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to 3} x^2$.

Розв'язання. В прикладі 2 одержали, що функція $y = x^2$ неперервна при $-\infty < x < \infty$. Тому для знаходження її границі при $x \to 3$ достатньо замість *x* підставити *x* = 3, тобто

$$\lim_{x\to 3} x^2 = (3)^2 = 9.$$

Таким чином, важливим э вміння розрізняти неперервність функцій в точці та на відрізку.

3. Класифікація розривів функції

Якщо при деякому $x = x_1$ будь-яка із умов неперервності означення 3 не виконується, то кажуть, що функція в цій точці має розрив, а точку *x*, називають *точкою розриву функції*.

Поняття неперервності та розриву функції можна наочно показати на графіку функції (дивись мал. 4).

В околі точки x_0 графік має вигляд неперервної лінії. При будь-якому прямуванні $x \to x_0$ $f(x) \to f(x_0)$. В точках x_1 та x_2 інша ситуація. При наближенні x до x_1 зліва $f(x) \to a$, а при $x \to x_1$ справа $f(x) \to b$, тобто $\lim\limits_{x\to x_1} f(x)$ залежить від способу прямування *x* до x_1. В точці x_2 умова неперервності функції також не виконується тому, що $\lim\limits_{x\to x_2} f(x) = \infty$, тобто не існує скінченної границі.

Графік функції, що зображений на рис. 1, має розриви в точках x_1 та x_2.

Розриви функції бувають ліквідовні та неліквідовані:

1) якщо функція $f(x)$ не визначена в точці x_1 або визначена, але мають місце співвідношення

$$\lim_{x\to x_1-0} f(x) = \lim_{x\to x_1+0} f(x) \neq f(x_1),$$

то розрив в точці x_1 називають ***ліквідовним***. В цьому випадку функцію можна визначити або змінити її значення в точці x_1 так, щоб виконувались рівності

$$\lim_{x\to x_1-0} f(x) = \lim_{x\to x_1+0} f(x) = f(x_1).$$

2) ***неліквідовні*** розриви поділяються на розриви ***першого та другого роду:***

a) якщо однобічні границі функції $\lim\limits_{x\to x_1-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_1+0} f(x)$ існують та скінченні, але не рівні між собою, то x_1 називають ***точкою розриву першого роду***, а різницю $\lim\limits_{x\to x_1+0} f(x) - \lim\limits_{x\to x_1-0} f(x)$ називають ***стрибком функції***;

b) якщо хоча б одна з однобічних границь не існує або дорівнює ∞, то розрив в цій точці називають розривом ***другого роду***.

На рис.1 функція має розрив першого роду в точці x_1, її стрибок дорівнює $b - a$, а в точці x_2 функція має розрив другого роду.

Властивості неперервних функцій та дії з ними

Приведемо без доведень властивості неперервних функцій.

Теорема 1. (Вейєрштрасса) Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то вона обмежена на цьому відрізку, тобто існують такі числа M та m, що $m \leq f(x) \leq M$ для усіх $x \in [a,b]$.

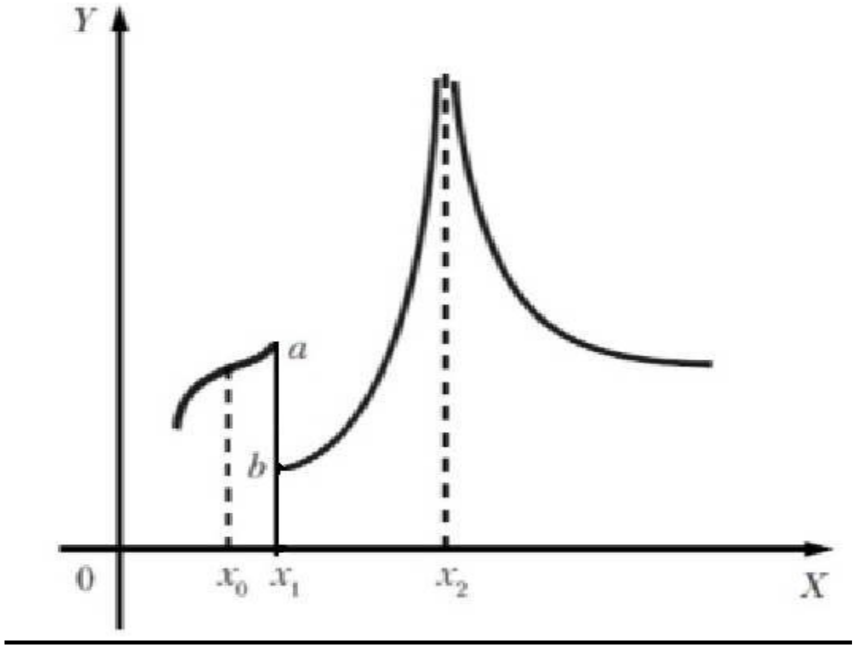


Рис. 1

Теорема 2. Будь-яка елементарна функція неперервна в кожній точці своєї області існування.

Теорема 3. Алгебраїчна сума, добуток (скінченної кількості доданків та множників) та частка функцій, неперервних при $x = x_0$ (в останньому випадку дільник в цій точці не повинен дорівнювати нулю) є також неперервна функція при $x = x_0$.

Теорема 4. Неперервна функція від неперервної функції є також неперервна функція.

Заключення.

В даній лекції ми розглянули такі поняття, як функціональні залежності, границі, прямування функції до границі, неперервність функцій, а також розриви функцій, що класифікуються на ліквідовні та неліквідовні. Неліквідовні розриви діляться на розриви 1-го та 2-го роду. За допомоги визначених понять можна досліджувати функціональні залежності та математичні моделі, що описують процеси та явища в економіці.

ЛЕКЦІЯ 9. ЗАСТОСУВАННЯ ФУНКЦІЙ В ЗАДАЧАХ ЕКОНОМІКИ

План лекції:

Вступ.

1. Основні виробничі функції.

2. Задачі, повязані із застосуванням виробничих функцій.

Заключення.

Вступ.

В економічних дослідженнх широко використовуються лінійні, дробово-лінійні, степеневі показникові, логарифмічні та інші функції. Періодичність ряду економічних процесів дозволяє застосовувати також і тригонометричні фнкції. Застосування функцій в економічних дослідженнях дозволяє математично описати і пояснити багато економічних явищ. Найчастіше в економіці використовують так звані виробничі функції.

1. Основні виробничі функції

Виробнича функція **–** це функція, яка визначає залежність результату виробництва від факторів, що на нього впливають. Найбіль поширеними серед виробничих функцій є функції попиту, пропозиції, витрат, доходу тощо. Попит (demand) визначає сукупну суспільну чи ринкову потребу в товарах(послугах), яка зумовлена існуючими цінами та платоспроможністю споживача. **Попит – платоспроможна потреба.** Обсяг попиту виражається кількістю товару, яку споживачі можуть придбати за певною ціною і залежить, переважно, від двох факторів – ціни на цей товар і загального доходу споживачів.

1.***Функція попиту*** *– залежність попиту на товар від ціни на нього.*

$$Q_d = f(p),$$

де Q_d – обсяг попиту на деякий товар за одиницю часу, p (price) – ціна одиниці товару.

Функція попиту є спадною (при сталій купівельній спроможності населення із збільшенням ціни попит на товар зменшується).

Залежність ціни від попиту можна виразити оберненою функцією

$$p = \varphi(Q_d),$$

яку називають функцією **цін попиту.** Якщо кількість $Q = f(p)$ проданого товару помножити на ціну p за одиницю продукції, отримаємо сумарний виторг (загальний дохід)

$$R = p \cdot Q = p \cdot f(p) = Q \cdot \varphi(Q).$$

2. ***Функція пропозиції*** – *залежність обсягу запропонованої продукції від ринкової ціни.*

$$Q_s = f(p),$$

де Q_s – обсяг пропозиції товару α за одиницю часу, p – ціна товару α.

Функція пропозиції є зростаючою (із збільшенням ціни р збільшується кількість товару, що пропонується). Оберненою до цієї функції є *функція цін пропозиції*

$$p = \varphi(Q_s).$$

3. ***Функція витрат*** – залежність між витратами виробництва деякої продукції і обсягом виробництва цієї продукції. Якщо C – сумарні витрати виробництва, які треба здійснити для виготовлення товару, Q – обсяг продукції, то функція витрат має вигляд $C = f(Q)$.

Залежно від впливу на витрати фірми зростання масштабів виробництва розрізняють постійні та змінні витрати.

Сталі витрати FC (fixed cost)- це витрати, які підприємство повинно нести незалежно від обсягів виробленої продукції (Повернення банківського кредиту, орендна плата, витрати на рекламу тощо).

Змінні витрати VC(Q) (variable cost) – це витрати, розмір яких залежить від обсягу продукції, що виробляється (наприклад, витрати на оплату робочої сили, сировини, палива, електроенергії та ін.).

Сума постійних та змінних витрат складає ***загальні витрати TC(Q)*** (total cost):

$$TC(Q)=FC+VC(Q).$$

Для більш чіткого визначення обсягу виробництва, при якому фірма страхує себе від надмірного зростання витрат, досліджують ***середні витрати*** (avtrage cost) на виробництво одиниці продукції. Можна виділити середні загальні витрати $ATC(Q)=TC(Q)/Q$, середні змінні витрати $AVC(Q)=VC(Q)/Q$, середні сталі витрати $AFC=FC/Q$. Середні загальні витрати дозволяють визначити обсяг виробництва, при якому витрати на одиницю продукції будуть мінімальними.

4. ***Функція доходу*** – залежність доходу підприємства від вартості виробленої продукції: $R=R(p)$, або (див. п.1) $R=R(Q)$, де R (revenue) – дохід, p –ціна одиниці продукції, Q, - кількість проданого товару.

2. Задачі, пов'язані з застосуванням основних виробничих функцій

Приклад 1.

Функція цін попиту має вигляд $p=\left(\frac{40}{Q}\right)^2$. Визначити функцію попиту $Q(p)$ і знайти її значення для p=1,4,16.

Розв'язання. Знайдемо залежність кількості проданої продукції від ціни на одиницю товару $Q^2=\frac{1600}{p}\Rightarrow Q=\frac{40}{\sqrt{p}}$. Тому при p=1,4,16 значення $Q(p)$ дорівнюють 40, 20, 10 відповідно.

Приклад 2.

Функція попиту на товар описується рівнянням: $Q_D = 60 - 2P$, функція пропозиції: $Q_S = -6 + 20P$, де Q_D – обсяг попиту, млн шт.; Q_S – обсяг пропозиції, млн шт.

1. Визначте рівноважну ціну і рівноважний обсяг продажу.
2. Якщо ціна даного товару становитиме 2 грош. од., то що утвориться на ринку: надлишок чи дефіцит товару? У якому розмірі? Розв'язання задачі проілюструйте графічно.

Розв'язання:

1) Запишемо умову ринкової рівноваги: $Q_D = Q_S$.

Згідно з вихідними даними задачі матимемо:

$$60 - 2P = -6 + 20P;$$

Звідси, рівноважна ціна $\boldsymbol{P^*}$ = 3 грош. од..

Рівноважний обсяг продажу визначимо, підставивши значення P^* у рівняння функції попиту (або ж у рівняння функції пропозиції, оскільки у рівноважному стані $Q_D = Q_S$):

$$\boldsymbol{Q^* = 54.}$$

Значення P^* і Q^* можна отримати й графічно. Перетин графіків функцій попиту і пропозиції дасть точку ринкової рівноваги.

2) Якщо на ринку даного товару ціна складатиме 2 грош. од., то попит на товар перевищуватиме його пропозицію.

Обсяг попиту становить:

$$Q_D = 60–2\times 2 = 56 \text{ (млн шт.)}.$$

Обсяг пропозиції:

$$Q_S = –6 + 20 \times 2 = 34 \text{ (млн шт.)}.$$

Утвориться **дефіцит** у розмірі:

$$Q_D – Q_S = 56 – 34 = \mathbf{22\ (млн\ шт.).}$$

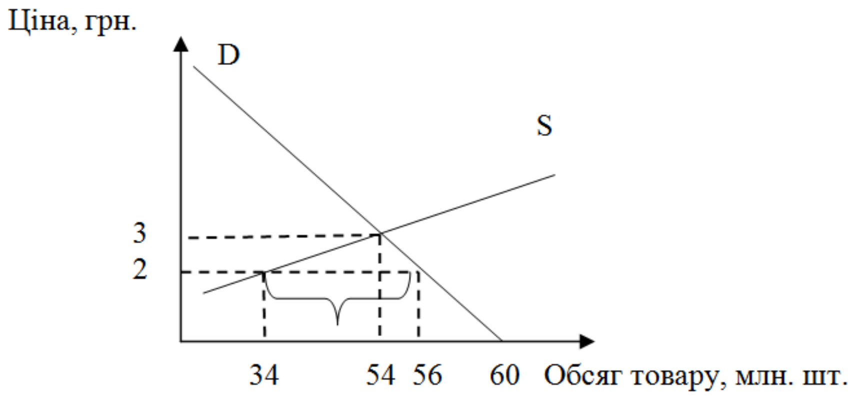


Рис. 1

Відповіді: 1) P^*=3 грош. од. Q^* = 54. 2) дефіцит 22 млн. шт.

Приклад 3.

Щорічний прибуток акціонерного товариства дорівнює 200 000 грн. Частка звичайних акцій у його статутному капіталі становить 80%, а їхня загальна кількість – 1600 шт. Щорічними рішеннями загальних зборів акціонерів визначено, що 60% прибутку буде використано на виплату дивідендів. Ставка банківського процента – 20%. Обчисліть загальний дохід від дворічного володіння звичайною акцією, номінальна вартість якої 600 грн. і яка була продана наприкінці 2-го року.

Розв'язання:

Дивіденди на одну звичайну акцію = (200 000 × 0,6 × 0,8) : 1600 = 60 грн. за один рік.

Курс акції = Дивіденди / Банківський процент = 60 : 0,2 = 300 грн.

Загальний дохід = 300 + 60 × 2 = **420 грн.**

Приклад 4.

Попит і пропозиція на ринку праці певного регіону описується функціями: $D_L = 800 - 40w$, $S_L = 200 + 20w$. (де D_L – обсяг попиту, тис. осіб; S_L – обсяг пропозиції, тис. осіб; *w* – ставка зарплати, гривень за одну відпрацьовану людино-годину). Внаслідок закриття декількох старих підприємств попит на працю зменшився на 25%.

1) Визначте рівноважну ставку зарплати та кількість найманих працівників до закриття старих підприємств.
2) Визначте, на скільки відсотків змінилася рівноважна ставка зарплати та скільки працівників було звільнено?
3) Побудуйте графіки попиту та пропозиції праці на ринку до і після закриття підприємств.

Розв'язання:

1) $D_L = S_L$; $800 - 40w = 200 + 20w$; $w^* = 10$ грн./год.; $L^* = 400$ тис. осіб.
2) Внаслідок збільшення попиту на працю, функція попиту зміниться т.ч.:

$D_{L1} = 0,75\ D_L = 0,75(800 - 40w) = 600 - 30w$.

Рівновага відбудеться за умови: $D_{L1} = S_L$; $600 - 30w = 200 + 20w$;

$w_1^* = 8$ грн./год.; $L_1^* = 360$ тис. осіб.

Відсоткова зміна зарплати становитиме: $(w_1^* - w^*)/\ w^*$ x 100% =20%.

Буде звільнено: $L_1^* - L^* = 360 - 400 = -40$ тис. осіб.

3) Графічне зображення зміни рівноваги на ринку праці:

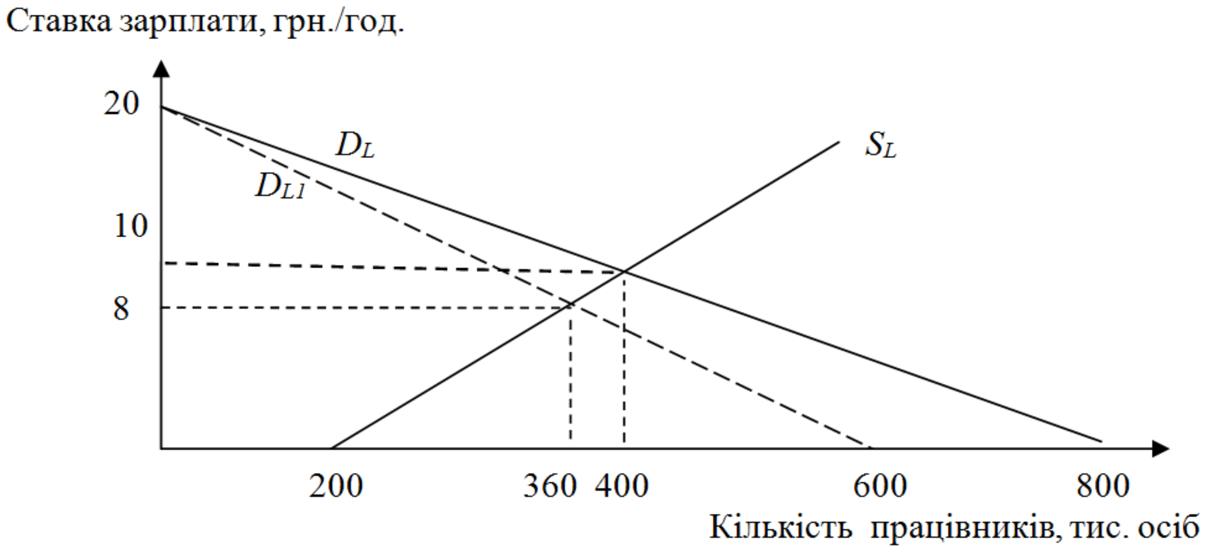


Рис. 2

Відповіді: 1) w^*=10 грн. / год; L^* = 400 тис. осіб;

2) Δw = -20%; ΔL = –40 тис. осіб.

Приклад 5.

Підприємство збільшило загальні витрати на придбання праці та капіталу з 1000 до 1600 гр. од. Його виробнича функція задається рівнянням Q = $2\sqrt{KL}$. Ціна одиниці праці становила 20 гр. од./год., а ціна одиниці капіталу – 50 гр. од./год. Визначте:

1) оптимальні комбінації праці та капіталу для заданих рівнів витрат 1000 та 1600 гр.од.;

2) оптимальні обсяги виробництва для заданих рівнів витрат 1000 та 1600 гр. од.;

3) на скільки відсотків збільшиться випуск продукції, якщо обсяги праці і капіталу одночасно зростуть на 10%.

Розв’язання п. 1–2 задачі проілюструйте графічно.

Розв’язання.

1) Функція ізокости задається рівнянням: $P_L \times L + P_K \times K = TC$, де

P_L, P_K – ціни на одиницю праці та капіталу відповідно;

TC – загальні витрати на придбання праці та капіталу.

За умовою, ціна одиниці праці становила 20 гр. од./ год., ціна одиниці капіталу – 50 гр. од./ год.

Тому, функція ізокости задається рівнянням: 20L + 50K = TC.

За умовою визначення оптимальної комбінації праці та капіталу:

$$\begin{cases} \dfrac{MP_L}{P_L} = \dfrac{MP_K}{P_K} \\ P_L \times L + P_K \times K = TC \end{cases}$$

$MP_L = (Q)'_L = \dfrac{2K^{0,5}}{2L^{0,5}} = \dfrac{K^{0,5}}{L^{0,5}}$.

$MP_K = (Q)'_K = \dfrac{2L^{0,5}}{2K^{0,5}} = \dfrac{L^{0,5}}{K^{0,5}}$.

$$\begin{cases} \dfrac{K^{0,5}}{20L^{0,5}} = \dfrac{L^{0,5}}{50K^{0,5}} \\ 20L + 50K = TC \end{cases}$$

$$\begin{cases} K = 0,4L \\ 20L + 50 \cdot 0,4L = TC \end{cases}$$

$$\begin{cases} K = 0,4L \\ 40L = TC \end{cases}$$

При TC_1 = 1000 грош. од., оптимальні комбінації праці та капіталу такі: $L_1 = 25$, $К_1 = 10$.

При TC_2 = 1600 грош. од., оптимальні комбінації праці та капіталу такі: $L_2 = 40$, $К_2 = 16$.

2) За умовою, виробнича функція задається рівнянням $Q = 2\sqrt{KL}$.

За оптимальної комбінації праці та капіталу $L_1 = 25$, $К_1 = 10$, обсяги виробництва становитимуть $Q_1 = 2\sqrt{250} = 10\sqrt{10} \approx 31,6$ од.

За оптимальної комбінації праці та капіталу $L_2 = 40$, $К_2 = 16$, обсяги виробництва становитимуть $Q_2 = 2\sqrt{16 \cdot 40} = 2\sqrt{640} = 16\sqrt{10} \approx 50,6$ од.

3) Визначимо на скільки відсотків збільшиться випуск продукції, якщо обсяги праці і капіталу одночасно зростуть на 10%.

Якщо обсяги праці і капіталу одночасно зростуть на 10%, то співвідношення між ними можна задати рівністю: $L_1 = 1,1L_0$ $K_1 = 1,1K_0$.

За умовою, виробнича функція задається рівнянням $Q = 2\sqrt{KL}$.

Тоді, $Q_0 = 2\sqrt{K_0 L_0}$, а $Q_1 = 2\sqrt{K_1 L_1}$.

$$Q_1 = 2\sqrt{1,1K_0 \cdot 1,1L_0} = 1,1 \cdot 2\sqrt{K_0 \cdot L_0} = 1,1Q_0.$$

Отже, при одночасну збільшенні обсягів праці і капіталу на 10%, випуск продукції також збільшиться на 10%.

4) Розв'язання п. 1–2 задачі проілюструємо графічно.

За умовою, виробнича функція задається рівнянням $Q = 2\sqrt{KL}$.

Отже, загальне рівняння ізокванти можна записати виразом: $К = (0,5Q)^2 / L$.

Для $Q_1 = 2\sqrt{250}$ рівняння ізокванти буде задаватись рівністю: К = 250 / L, а для $Q_2 = 2\sqrt{640}$ такою рівністю: К = 640 / L.

Функція ізокости задається рівнянням: 20L + 50K = TC.

Для $Q_1 = 2\sqrt{250}$ витрати становили TC_1 = 1000 грош. од. Тому, функція ізокости набуде вигляду 20L + 50K = 1000 або К = 20 – 0,4L.

Для $Q_2 = 2\sqrt{640}$ витрати становили TC_2 = 1600 грош. од. Тому, функція ізокости набуде вигляду 20L + 50K = 1600 або К = 32 – 0,4L.

Побудуємо графіки відповідних ізокост та ізоквант із зазначенням оптимальних комбінацій праці та капіталу:

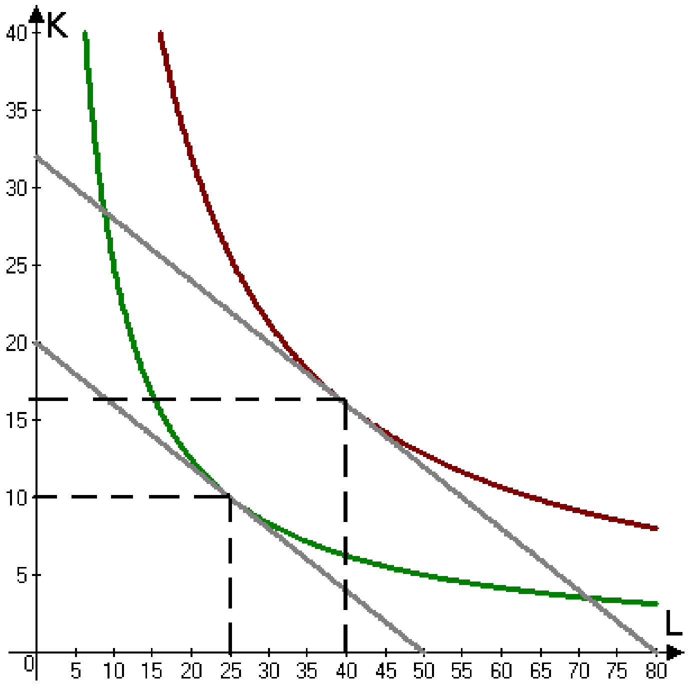


Рис. 3

Приклад 6.

Власник фірми, що є монополістом на ринку товару, хоче максимізувати прибуток. Відомі функції попиту і змінних витрат фірми: $Q_D = 160 - 0{,}5P$ (Q_D – величина попиту на товар, тис. од.; P – ціна товару, гр. од.), $VC = 20Q + Q^2$ (Q – кількість виробленої продукції, тис. од.; VC – змінні витрати, тис. гр. од.). За порадою сина, що вивчав у школі економіку, власник призначив таку ціну, за якої еластичність попиту за ціною дорівнювала – 1. «Щось там точно є максимальним» – сказав син своєму батькові. В результаті прибуток склав 1,8 млн. гр. од. У скільки разів був би більшим прибуток монополіста, якби син власника фірми краще знав би економіку і дав би правильну пораду своєму батькові? Проілюструйте розв’язання графічно.

Розв'язання.

Знайдемо постійні витрати монополіста, використовуючи значення прибутку в точці одиничної цінової еластичності попиту (де дохід є максимальним): Q_D =160-0,5Р.

$$E_p(Q_D) = \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q} \qquad -1 = (160 - 0{,}5P)' \cdot \frac{P}{160 - 0{,}5P}; \qquad -1 = -0{,}5 \cdot \frac{P}{160 - 0{,}5P}$$

Звідси: Р = 160 гр. од. Q = 80 тис. од.

$TR = P \times Q \rightarrow TR = 160 \times 80 = 12800$ тис. гр. од.

$VC = 20Q + Q^2 \rightarrow VC = 20 \cdot 80 + 80^2 = 8000$ тис. гр. од.

$П = TR - TC = TR - VC - FC$

$FC = TR - VC - П \rightarrow FC = 12800 - 8000 - 1800 = 3000$ тис. гр. од.

Знайдемо оптимальний обсяг виробництва при якому прибуток монополіста буде максимальним:

$Q = 160 - 0{,}5P \rightarrow P = 320 - 2Q$

$TR = P \times Q = (320 - 2Q) \times Q = 320Q - 2Q^2$.

$TC = VC + FC = Q^2 + 20Q + 3000$.

$MR = TR' \rightarrow MR = (320Q - 2Q^2)' = 320 - 4Q$.

$MC = TC' \rightarrow MC = (Q^2 + 20Q + 3000)' = 2Q + 20$.

За умовою визначення оптимального обсягу виробництва MR=MC:

320 – 4Q = 2Q + 20 → Q = 50 тис. од.

$P = 320 - 2Q = 320 - 2 \times 50 = 220$ гр. од.

$TR = P \times Q = 220 \times 50 = 11000$ тис. гр. од.

$TC = Q^2 + 20Q + 3000 = 50^2 + 20 \times 50 + 3000 = 6500$ тис. гр. од.

$П = TR - TC = 11000 - 6500 = 4500$ тис. гр. од.

Проілюструємо розв'язання графічно.

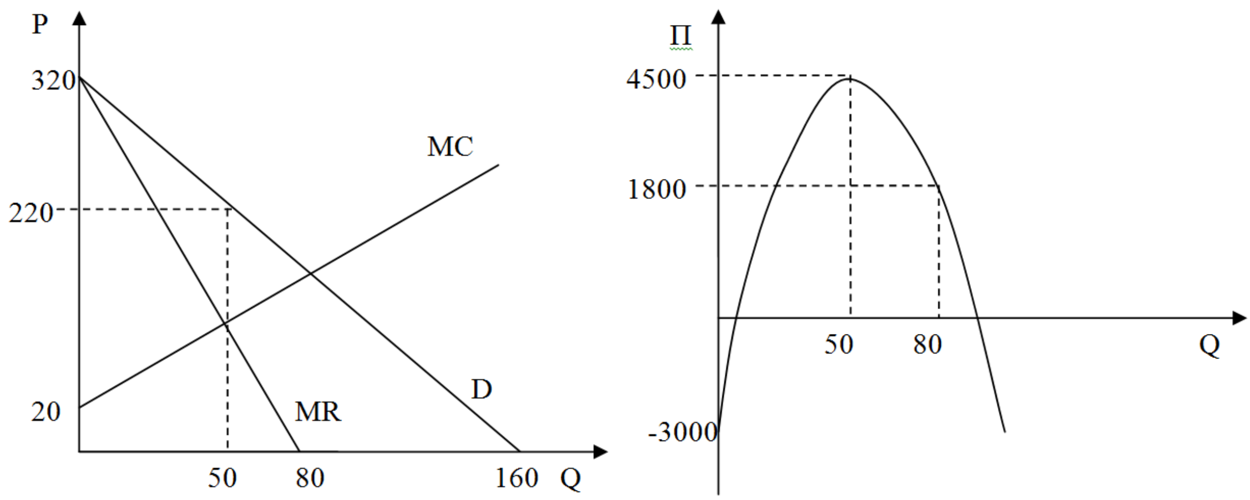


Рис. 4

Таким чином, максимальний прибуток складає 4,5 млн. гр. од. Він в 2,5 рази (4,5/1,8) більше за той, що має монополіст з причини неправильної поради.

Заключення.

На даній лекції ми ознайомились з основними виробничими функціями, які дозволяють математично описати процес виробничої діяльності. Разом з цим були представленні приклади розрахунку параметрів процесів виробництва та продажу товарів на основі функцій попиту та пропозицій.

ЛЕКЦІЯ 10. ДИФЕРЕНЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ. ПРАВИЛА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

План лекції:

Вступ.

1. Похідна, її визначення, механічний та геометричний зміст похідної.

2. Визначення диференціалу.

3. Правила диференціювання. Таблиця похідних.

4. Похідні вищих порядків.

5. Основні теореми диференційного числення.

Заключення.

Вступ.

До початку XVII століття математика була переважно наукою про числа, скалярні величини і порівняно прості геометричні фігури. У цей період сферою її застосування була лічба, торгівля, вимірювання ділянок землі, астрономія, частково архітектура, для обслуговування яких формуються арифметика, геометрія, пізніше – алгебра і тригонометрія, а також деякі часткові прийоми математичного аналізу. Досліджувані величини (довжини, площі, об’єми та ін.) розглядалися як об’єкти незмінні.

У XVII і XVIII ст. почався бурхливий розвиток природознавства і техніки – мореплавання, астрономії, балістики, гідравліки й ін. Потреба забезпечити їх розвиток призвела до виникнення в математиці ідей руху і зміни, насамперед у формі змінних величин і функціональної залежності між ними. Виникли аналітична геометрія, числення диференціальне й інтегральне. У XVIII столітті виникає і розвивається теорія диференціальних рівнянь і диференціальної геометрії.

У XIX–XX ст. математика виходить на нові ступені абстракції. Звичайні величини і числа виявляються лише окремими випадками об’єктів, які вивчаються у сучасній алгебрі, геометрія переходить до дослідження багатовимірних "просторів", для яких евклідовий простір є окремим випадком. Розвиваються нові дисципліни: теорія функцій комплексного змінного, теорія груп, теорія множин, математична логіка, функціональний аналіз та ін.

Із появою обчислювальних машин математика стала засобом чисельних досліджень у науці й інструментом для повсякденних розрахунків у виробництві та управлінні. У зв'язку з цим у XIX–XX ст. виникають чисельні методи математики, які виростають у її самостійну галузь – обчислювальну математику. Пошук кращих варіантів управлінських рішень у техніці, на виробництві, в економіці, у військовій справі призвів до появи ряду нових математичних дисциплін, таких як теорія ігор, теорія інформації, теорія графів, дискретна математика, теорія математичного програмування та ін.

Основним інструментом математичного аналізу є похідна, яка визначається як швидкість зміни функції. В даній лекції ми розглянемо такі поняття, як похідна, диференціал, похідні вищих порядків. Геометрична інтерпретація похідної полягає в тому, що значення похідної функції в заданій точці дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної прямої до функції в даній точці. За допомоги визначених понять можна досліджувати функціональні залежності та математичні моделі, що описують процеси та явища в економіці.

1. Визначення, механічний та геометричний зміст похідної

1.1. Деякі задачі, що привели до поняття похідної

а) Задача про швидкість прямолінійного руху

Нехай тіло рухається прямолінійно, але нерівномірно. Тоді шлях, що пройшло тіло, змінюється за деяким законом, тобто $s = s(t)$. Починаючи з деякого моменту t, за час Δt тіло пройде шлях $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$.

Середня швидкість v_c руху за проміжок Δt буде $v_c = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$. Середня швидкість дає лише наближене уявлення про рух в окремі моменти часу. Коли проміжок часу Δt зменшується, тоді v_c наближається до миттєвої швидкості в момент t:

$$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}. \qquad (1)$$

Миттєва швидкість $v(t)$ буде дорівнювати похідній від функції $s=s(t)$. Тобто, **похідна від функції – це швидкість зміни функції**. Коли функція збільшується – похідна додатна, коли функція зменшується – похідна від'ємна, коли графік функції паралельний осі Ox, то похідна дорівнює 0, в точках екстремумів (максимумів та мінімумів) похідна функції дорівнює 0.

б) Задача про дотичну

Нехай задана функція $y=f(x)$. Графіком цієї функції буде деяка крива лінія.

Означення 2. Дотичною до кривої $y=f(x)$ в точці M $(x,\ y)$ (точка дотику) називають граничне положення MT січної MM_1, коли точка M_1, рухаючись вздовж кривої, прямує до точки дотику M (рис. 1).

З рис. 1 видно, що тангенс кута нахилу січної MM_1 до осі Ox буде

$$\operatorname{tg}\alpha_1=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Із означення дотичної випливає, що її кутовий коефіцієнт $k=\operatorname{tg}\alpha$ є границя, до якої прямує кутовий коефіцієнт $k_1=\operatorname{tg}\alpha_1$ січної при необмеженому наближенні точки M_1 до точки M, тобто при $\Delta x\to 0$.

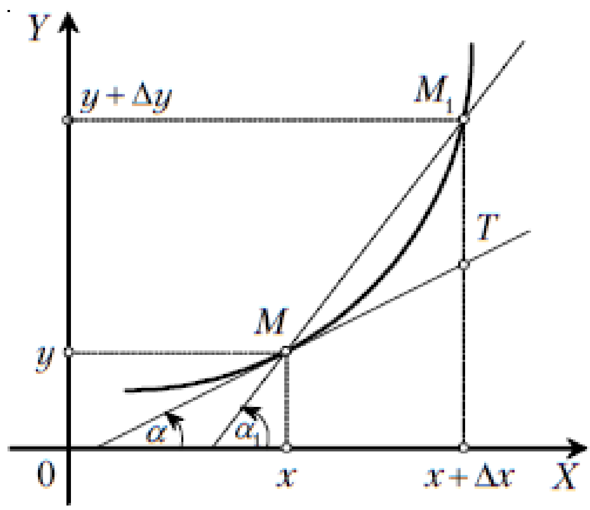


Рис. 1

Отже, одержали $$k = \mathrm{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) \qquad (2)$$

1.2. Означення похідної та її інтерпретація

Означення 3. Похідною функції $y = f(x)$ за аргументом x називають границю відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx, коли Δx довільним образом прямує до нуля.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x + \Delta x)}{\Delta x} \qquad (3)$$

Похідну позначають: $f'(x)$, або y', або $\frac{dy}{dx}$, або $\frac{df(x)}{dx}$.

Відмітимо, що похідну $f'(x)$ одержали за допомогою граничного переходу при довільному x, тому при $x = a$ вона приймає конкретне значення, яке позначають

$$f'(a) \text{ або } \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}.$$

Означення 4. Операцію знаходження похідної функції $y = f(x)$ називають **диференціюванням** цієї функції. Функцію $f(x)$, яка має похідну в точці x, називають **диференційованою** в точці x. Якщо функція має похідну в кожній точці деякого проміжку, то її називають диференційованою на цьому проміжку.

Таким чином, інтерпретація похідної полягає в такому:

1. Механічний зміст похідної: похідна $S'(t)$ є величиною миттєвої швидкості в момент t тіла, що рухається за законом $S = S(t)$;

2. Геометричний зміст похідної: похідна $f'(x)$ дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x.

1.3. Зв'язок між неперервністю та диференційованістю функції

Теорема. Якщо функція $y = f(x)$ диференційована в деякій точці x_0, то вона в цій точці неперервна.

Наслідок. Неперервність функції є необхідною умовою диференційованості функції. Це означає, що **в точках розриву функція не має похідних, тобто вона не диференційована**.

Але, функція, яка неперервна в точці x_0, може бути не диференційованою в цій точці. Наприклад, функція $y = |x|$ неперервна в точці $x = 0$, але не має похідної в цій точці тому, що

$$\lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1, \text{ а } \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1,$$

тобто границя відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ залежить від способу прямування $\Delta x \to 0$.

2. Визначення диференціалу

Диференціалом аргументу називається (рис. 2) приріст аргументу $dx = \Delta x$.

Диференціал функції $y = f(x)$ позначається символом dy або df і дорівнює добутку першої похідної функції на диференціал аргументу:

$$dy = y' \cdot dx; \quad (df = f' \cdot dx) \quad \left(\frac{dy}{dx} = f'; \to dy = f' \cdot dx \right).$$

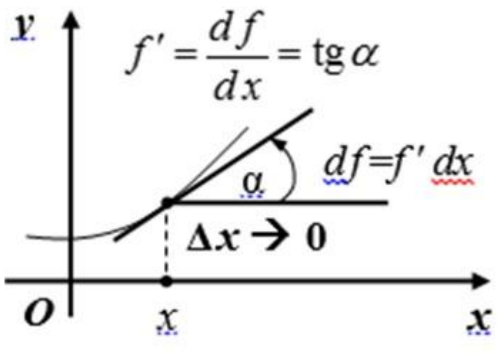


Рис. 2

Якщо приріст Δx аргументу x малий (за абсолютною величиною), то:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\approx f'(x); \quad \rightarrow \quad f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\cdot\Delta x.$$

Остання рівність використовується для наближених обчислень значень функції.

3. Правила диференціювання. Таблиця похідних

Похідні від елементарних функцій зведено в таблицю похідних (табл. 1).

Таблиця 1

Формули диференціювання елементарних функцій

1	$(C)' = 0$	7	$\left(e^x\right)' = e^x$	13	$(\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$
2	$\left(x^n\right)' = n\cdot x^{n-1}$	8	$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$	14	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3	$x' = 1$	9	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	15	$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
4	$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	10	$(\sin x)' = \cos x$	16	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
5	$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$	11	$(\cos x)' = -\sin x$	17	$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$
6	$\left(a^x\right)' = a^x\ln a$	12	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	18	$y'_x = f'_u\cdot U'_x$

Якщо ***C*** – постійна величина, ***U***(x) і ***V***(x) – функції, що мають похідні, то справедливі правила, які наведені в табл. 2.

Таблиця 2

Основні правила диференціювання функцій

1	$(U \pm V)' = U' \pm V'$	4	$\left(\dfrac{U}{V}\right)' = \dfrac{U' \cdot V - U \cdot V'}{V^2}$
2	$(U \cdot V)' = U' \cdot V + U \cdot V'$	5	$y'_x = f'_u \cdot U'_x,$ *якщо* $y = f(U(x))$
3	$(C \cdot V)' = C \cdot V'$	6	$\left.\begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{array}\right\}, \rightarrow \quad y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$

Пояснимо правила диференціювання, що мають найбільше застосування.

Якщо функція $y = f(U)$ має похідну на $\boldsymbol{U}$, а функція $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}(x)$ має похідну на x, то ***похідна складної функції*** дорівнює:

$$y'_x = f'_u \cdot U'_x. \tag{4}$$

Якщо функція аргументу x ***задана параметричними рівняннями***, то її похідна буде дорівнюватиме частці від ділення похідних кожної складової:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad \text{то} \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \tag{5}$$

Якщо функція y ***задана неявно***, тобто визначається з рівняння $F(x, y) = 0$, то для відшукання похідної y' диференціюють по x обох частин рівняння
$F(x, y) = 0$, з огляду на те, що y є функція від x. Після цього з отриманого рівняння першого ступеня щодо y' знаходиться похідна y'.

Приклад. Знайти y', якщо $y^2 - 2px = 0$.

Продиференціюємо задане рівняння по x:

$$2y \cdot y' - 2p = 0 \Rightarrow 2y \cdot y' = 2p \Rightarrow y' = \frac{p}{y}.$$

Інший спосіб відшукання похідної від ***неявно*** заданої функції $F(x, y) = 0$ – це використання відомого співвідношення:

$$y'_x = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

4. Похідні вищих порядків

Похідною другого порядку (другою похідною) функції $y = f(x)$ називається похідна від її першої похідної $y'' = (y')'$.

Позначається друга похідна одним із таких символів:

$$f''(x), \quad y'', \quad \ddot{y}, \quad \frac{d^2 y}{d x^2}, \quad \frac{d^2 f}{d x^2}.$$

Похідною третього порядку (третьою похідною) функції $y = f(x)$ називається похідна від її другої похідної $y''' = (y'')'$.

Похідною n-го **порядку** (n-ю похідною) функції $y = f(x)$ називається похідна від її похідної (n – 1)-го порядку: $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$.

Обчислюється похідна n-го порядку шляхом послідовного диференціювання функції. Позначається n-а похідна одним із таких символів:

$$f^{(n)}(x), \quad y^{(n)}, \quad \frac{d^n y}{d x^n}, \quad \frac{d^n f}{d x^n}.$$

Похідні вищих порядків мають широке застосування.

Так, якщо функція $S = S(t)$ описує закон руху матеріальної точки, то її перша похідна $S'(t)$ дає величину миттєвої швидкості, а друга похідна $S''(t)$ дорівнює швидкості зміни швидкості, тобто це є прискорення в момент t.

Якщо $V(x)$ є функція виробничих витрат (витрати на виготовлення x виробів), то $V'(x)$ дає маргінальну вартість, тобто витрати на досить малу частину виготовлення додаткової продукції. Друга похідна $V''(x)$ дає швидкість зміни маргінальної вартості відносно змін кількості випуску продукції.

Приклад 7. ***(Аналіз функції витрат).*** Для функції витрат

$$V(x) = 0{,}001x^3 - 0{,}3x^2 + 40x + 1000$$

маргінальна вартість буде

$$V'(x) = 0{,}003x^2 - 0{,}6x + 40,$$

друга похідна має вигляд

$$V''(x) = 0{,}006x - 0{,}6 = 0{,}006(x - 100).$$

Коли $x = 150$ маємо: $V'(150) = 17{,}5$; $V''(150) = 0{,}3$.

Остання рівність означає, що кожна додаткова одиниця виробленої продукції спричиняє зростання на 0,3 маргінальної вартості.

Приклад 8. Знайти похідну першого та вищих порядків функції

$$y = 3x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 1.$$

Розв'язування. Шляхом послідовного диференціювання знаходимо:

$$y' = 12x^3 - 15x^2 + 14x$$

$y'' = 36x^2 - 30x + 14$

$y^{(3)} = 72x - 30$

$y^{(4)} = 72$

Для $n \geq 5$ маємо $y^{(n)} = 0$.

Вкажемо декілька формул, які використовуються при знаходженні похідних порядку $n > 2$.

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \tag{17}$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \tag{18}$$

$$(y \pm u \pm v)^{(n)} = y^{(n)} \pm u^{(n)} \pm v^{(n)} \tag{19}$$

$$(u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)} \cdot v + C_n^1 u^{(n-1)} \cdot v' + C_n^2 u^{(n-2)} \cdot v'' + C_n^3 u^{(n-3)} \cdot v^{(3)} + \ldots + u \cdot v^{(n)}, \tag{20}$$

де $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$

5. Основні теореми диференціального числення

Застосування похідних під час дослідження функції базується на слідуючи теоремах, що доведені математиками Франції у XVII та XVIII століттях.

Теорема Лагранжа. (про скінчений приріст функції). Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на $[a,b]$ і має похідну в усіх точках інтервалу (a,b), то всередині цього інтервалу існує хоча б одна точка $\xi (a < \xi < b)$ така, що виконується рівність

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) \tag{6}$$

Доведення. Дамо геометричне доведення цієї теореми. Проведемо січну AB до графіка $y = f(x)$ (рис. 3) і будемо пересувати цю січну паралельно самій собі, поки вона не стане дотичною до графіка функції в деякій точці C з абсцисою ξ. Відмітимо, що дотичну до графіка функції можна провести в кожній точці, що лежить всередині $[a,b]$, тому що за умовою теореми функція має похідну в усіх точках (a,b).

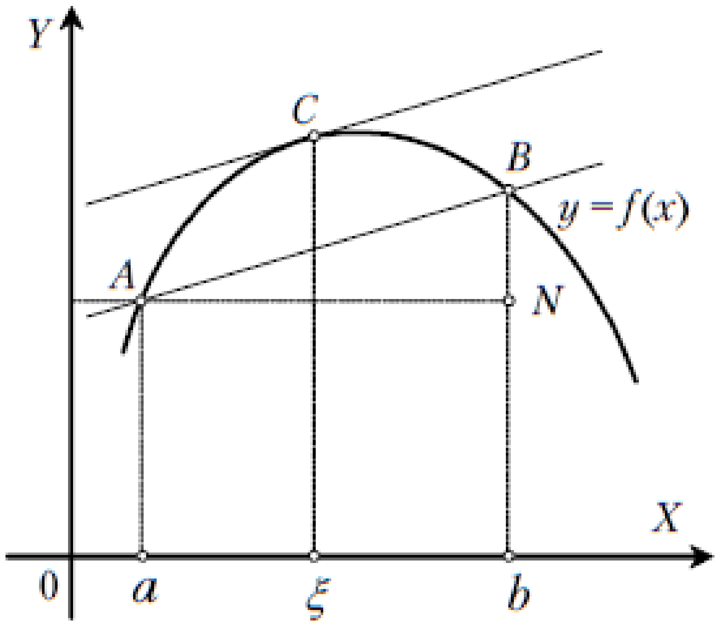


Рис. 3

Кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює кутовому коефіцієнту січної, а саме

$$\frac{BN}{AN}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Але, згідно з геометричним змістом похідної, кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції в точці C дорівнює $f'(\xi)$. Одержимо рівність

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi),$$

що і треба було довести.

Рівність (21) називають ***формулою Лагранжа.*** Її можна записати у вигляді.

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)\cdot(b-a) \qquad (7)$$

і тоді доведену теорему можна сформулювати так: скінчений приріст диференційованої функції на відрізку дорівнює відповідному приросту аргументу, помноженому на значення похідної функції в деякій внутрішній точці відрізка.

Теорема Ролля (про нулі похідної). Якщо функція $y=f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, диференційована в усіх внутрішніх точках цілого відрізка, а на його кінцях приймає рівні значення, то похідна $f'(x)$ дорівнює нулю хоча б в одній внутрішній точці $\xi(a<\xi<b)$ цього відрізка.

Доведення. Якщо $f(x)$ неперервна на $[a,b]$ і диференційована в усіх внутрішніх точках, тоді для $f(x)$, згідно з теоремою Лагранжа, має місце рівність (22). За умовою теореми Ролля $f(b)=f(a)$, тому одержуємо

$$(b-a)\cdot f'(\xi)=0.$$

Але $b\neq a$, тому $b-a\neq 0$ і з останньої рівності випливає, що $f'(\xi)=0$. Теорема доведена.

Теорема Ролля має простий геометричний зміст: якщо функція задовольняє умовам теореми Лагранжа і приймає рівні значення на кінцях відрізка, то знайдеться хоча б одна точка, в якій дотична до графіка буде паралельна осі абсцис.

Правило Лопіталя.

Гійом Франсуа, маркіз де Лопіталь 1661-1704) — французький математик, автор першого підручника з математичного аналізу.

Гійом маркіз де Лопіталь народився 1661 року в Парижі в сімї заможних батьків. Спочатку він поступив на військову службу, але внаслідок слабкості зору незабаром залишив її і присвятив себе наукам. Був членом Паризької академії наук, учасником вченого гуртка Мальбранша. Був одружений на Марі-Шарлотт де Ромій де ла Шенеле (фр. Marie-Charlotte de Romilley de la Chesnelaye), яка теж займалася математикою.

У 1690-х роках посів чільне місце у школі Лейбніца, з яким його познаймив Йоганн Бернуллі в 1692 під час свого перебування в Парижі в маєтку Лопіталя.

Головна заслуга Лопіталя полягає в першому систематичному викладі математичного аналізу, яке він виклав у роботі «Аналіз нескінченно малих» (фр. Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes, 1696). У цій книзі зібрані і наведені в струнку теорію окремі питання, що розкидані до того в різних наукових виданнях, а також наводиться Правило Лопіталя. У передмові Лопіталь вказує, що без всякого сорому користувався відкриттями Лейбніца і братів Бернуллі і «не має нічого проти того, щоб вони пред'явили свої авторські права на все, що їм завгодно». Сучасників, однак, сильно спантеличило те, що Йоганн Бернуллі пред'явив претензії на весь твір Лопіталя цілком.

Інший відомий твір Лопіталя, "Traité analytique des sections coniques" надруковано в 1707 р. Лопіталю належить також вирішення ряду завдань, в тому числі про криву найменшого часу ската, про криву, по якій має рухатись вантаж, що прикріплений до ланцюга та який утримує в рівновазі підйомний міст. Вирішення цих завдань допомогло йому стати в один ряд з Ньютоном, Лейбніцем і Якобом Бернуллі (за матеріалами Вікіпедії).

Нехай $f(x)$ та $g(x)$ – неперервні та мають похідні в усіх $x \neq a$ з околу точки $x = a$, а в точці a рівні нулю або нескінченності. Тоді границя відношення функцій дорівнює границі відношення їх похідних, якщо остання існує, тобто

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad (8)$$

Якщо відношення $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ знову є невизначеністю вигляду $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$ і похідні $f'(x)$ та $g'(x)$ задовольняють умовам правила Лопіталя, то для обчислення границі можна застосувати правило Лопіталя вдруге і т.д.

Приклад 9. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^x}$.

Розв'язування. Уданому випадку $f(x)=x^3$ *та* $g(x)=e^x$ задовольняють умовам правила Лопіталя. Відношення їх є невизначеність вигляду $\frac{\infty}{\infty}$ при $x\to\infty$. Застосувавши правило Лопіталя, одержуємо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{e^x}=0.$$

Заключення.

В даній лекції ми розглянули такі поняття, як похідна, диференціал, похідні вищих порядків. Перш за все зазначили, що похідна – це швидкість зміни функції, а геометрична інтерпретація похідної полягає в тому, що значення похідної функції в заданій точці дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної прямої до функції в даній точці. За допомоги визначених понять можна досліджувати функціональні залежності та математичні моделі, що описують процеси та явища в економіці.

ЛЕКЦІЯ 11. ДОСЛІДЖЕННЯ ГРАФІКА ФУНКЦІЇ

План лекції.

Вступ.

1. Зростання, спадання та екстремуми функції.

2. Опуклість та угнутість графіка функції, точки перегину.

Заключення.

Вступ

При дослідженні функції, заданої аналітично, важливо визначити її інтервали зростання, спадання, з'ясувати опуклість графіка функції, обчислити значення x при яких функція має найбільше та найменше значення і так далі. Нижче буде показано, що розв'язання цих питань значно спрощується, якщо застосовувати похідну.

1. Зростання, спадання та екстремуми функції

Означення 1. Функцію $y = f(x)$ називають **зростаючою (спадною) в проміжку** (a,b), якщо більшому значенню аргументу a в цьому проміжку відповідає більше (менше) значення функції, тобто якщо із нерівності $x_2 > x_1$ випливає нерівність $f(x_2) > f(x_1)$, то функція $f(x)$ – зростаюча, а якщо $f(x_2) < f(x_1)$, то функція $f(x)$ спадна (рис.1).

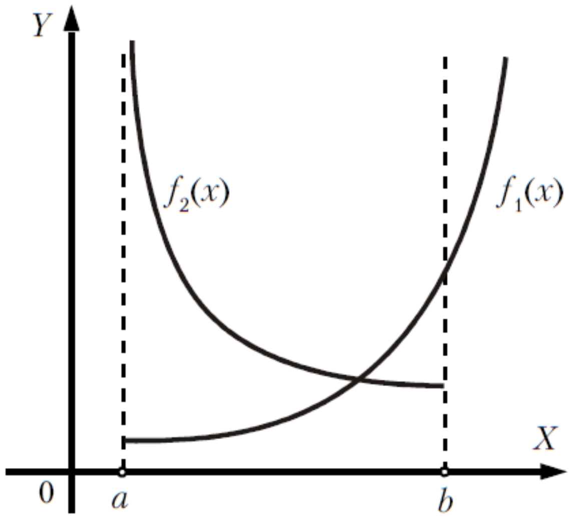


Рис.1. Зростання та спадання функції на інтервалі (a, b):

$f_1(x)$ – зростаюча, $f_2(x)$ – спадна

Необхідна ознака зростання (спадання) функції.

Якщо диференційована функція зростає (спадає) в деякому проміжку, то похідна цієї функції невід’ємна (недодатна) в цьому проміжку.

Доведення. Нехай $f(x)$ – диференційована функція і зростає в (a,b). Згідно з означенням похідної

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Якщо x та $x+\Delta x$ належать (a,b), то в силу зростання функції та приросту аргументу однакові. Тому

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}>0, \text{ при } \Delta x\neq 0.$$

Оскільки границя додатної величини не може бути від’ємною, тому переходом до границі в цій нерівності одержимо

$f'(x)\geq 0.$

Тим самим твердження ознаки доведено у випадку зростання функції.

У випадку спадної функції доведення аналогічне. У цьому випадку прирости функції та аргументу мають різні знаки, тому $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}<0$ і $f'(x)\leq 0$, що і треба було довести.

Достатня ознака зростання (спадання) функції.

Якщо похідна диференційованої функції **додатна**, всередині деякого проміжку, то функція зростає в цьому проміжку.

Якщо похідна диференційованої функції **від'ємна** всередині деякого проміжку, то функція спадає в цьому проміжку.

Доведення. Нехай $f'(x)>0$ при $a<x<b$. Для довільних $x_1<x_2$, що належать (a,b), згідно з теоремою Лагранжа маємо

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)\cdot f'(\xi),$$

де $x_1<\xi<x_2$, а тому $\xi\in(a,b)$. Із нерівностей $x_2-x_1>0$ та $f'(\xi)>0$ випливає $f(x_2)-f(x_1)>0$ або $f(x_2)>f(x_1)$ при $x_2>x_1$. Але це означає, що $f(x)$ зростаюча функція в (a,b).

Друге твердження достатньої ознаки доводиться аналогічно.

Означення 2. Зростаюча або спадна функція називається **монотонною**. Проміжки, в яких задана функція зростає або спадає, називають **проміжками (інтервалами) монотонності цієї функції**.

Для ***знаходження інтервалів монотонності*** заданої функції $y=f(x)$ доцільно дотримуватись такого порядку дій:

1) знайти похідну $f'(x)$;

2) знайти корені рівняння $f'(x)=0$;

3) визначити знак похідної $f'(x)$ в кожному із інтервалів, на які поділяється область існування функції $f(x)$ знайденими коренями рівняння $f'(x)=0$;

4) за одержаними знаками похідної зробити висновок, в якому інтервалі функція зростає, а в якому спадає.

Приклад 1. Витрати виробництва визначені функцією $V(x)=2x^3-6x+7$. Знайти її інтервали монотонності.

Розв'язання. Задана функція існує при $x \in (-\infty, \infty)$, але має економічний зміст лише для $x > 0$.

Заходимо похідну: $V'(x) = 6x^2 - 6 = 6(x^2 - 1)$.

Із $6(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 1$.

Ці значення поділяють вісь *Ox* на інтервали $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \infty)$. В кожному з цих інтервалів $V'(x)$ має постійний знак.

При $x \in (-\infty, -1)$ $V'(x) > 0$.

При $x \in (-1, 1)$ $V'(x) < 0$.

При $x \in (1, \infty)$ $V'(x) > 0$.

Отже, функція $V(x)$ зростає при $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ і спадає в інтервалі $(-1, 1)$. З економічної точки зору, ця функція спадає в інтервалі $(0, 1)$ і зростає в $(1, \infty)$.

Означення 3. Функція $f(x)$ має при $x = x_0$ максимум (мінімум), якщо існує такий окіл точки x_0, для усіх точок x якого виконується нерівність

$f(x_0) > f(x)$ для максимуму,

$f(x_0) < f(x)$ для мінімуму.

Узагальненим терміном понять максимуму та мінімуму є **екстремум.**

Значення аргументу $x = x_0$ (тобто точки x_0) при якому функція $f(x)$ має екстремум (максимум або мінімум) називають ***точкою екстремуму функцій*** (максимуму або мінімуму, відповідно).

В економічних дисциплінах екстремум функції називають її ***локальним оптимумом***, а процес знаходження екстремального значення функції називають ***оптимізацією.***

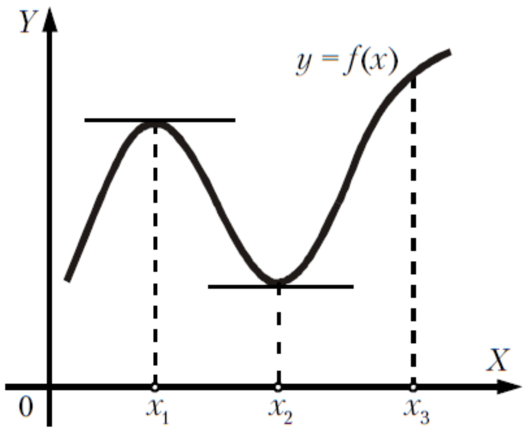


Рис. 2 Визначення точок екстремумів

Функція, графік якої зображено на рис. 2, має в точці x_1 максимум, а в точці x_2 – мінімум. В означенні 9 окіл точки x_0 може бути малим, тому екстремум має локальний характер, він не залежить від поведінки функції в точках, що віддалені від екстремальної точки. Так, на рис. 2: $f\left(x_3\right) > f\left(x_1\right) = y_{\max}$.

В точках екстремуму диференційованої функції дотична до графіка функції паралельна осі *Ox*, тому її кутовий коефіцієнт дорівнює нулю.

Рівність
$$f'(x) = 0 \qquad (1)$$

називають ***необхідною умовою існування екстремуму функції*** $y = f\left(x\right)$, а розв'язки цього рівняння називають ***підозрілими на екстремум точками***.

Критичними точками першого роду називають корені рівняння (1) та точки, в яких $f'(x)$ не існує.

Щоб визначити, в яких з критичних точок функція має екстремум, треба застосувати достатні умови існування екстремуму, які описує така теорема.

Теорема (достатні умови існування екстремуму функції). Якщо $f\left(x\right)$ диференційована в околі критичної точки 1-го роду $x = x_0$ і її похідна $f'(x)$:

1) зліва від цієї точки (при $x < x_0$) додатна, а справа (при $x > x_0$) від'ємна, то в точці x_0 функція має максимум;

2) зліва (при $x < x_0$) від'ємна, а справа (при $x > x_0$) додатна, то в точці x_0 функція має мінімум;

3) зліва та справа від точки x_0 має однаковий знак, то в точці x_0 функція не має екстремуму.

Доведення. Нехай при переході аргументу x через точку x_0 зліва направо похідна $f'(x)$ змінює знак з плюса на мінус. Це означає, що зліва від x_0 знаходиться проміжок зростання функції, а справа – проміжок спадання функції. Тому, точка x_0 є точкою максимуму функції. Аналогічно впевнюються, що при зміні знака похідної з мінуса на плюс при переході x через x_0 зліва направо, точка x_0 буде точкою мінімуму функції $f(x)$. Якщо похідна не змінює свого знака при переході x через x_0, то це означає, що функція $f(x)$ з обох сторін точки x_0 зростає або спадає і тому в точці x_0 функція не має екстремуму. При доведенні використали існування похідної зліва та справа від точки x_0, а в точці x_0 похідна може не існувати.

У зв'язку з тим, що екстремум функції – локальний оптимум дуже часто використовується в економічній практиці, дамо схему дослідження функції на екстремум:

1) знаходять похідну $f'(x)$ заданої функції;

2) знаходять критичні точки першого роду (значення x, при яких $f'(x)$ не існує або дорівнює 0);

3) визначають знак $f'(x)$ в околі кожної критичної точки;

4) роблять висновок, чи має функція екстремум у знайдених точках і який саме (мінімум чи максимум);

5) обчислюють екстремальні значення функції в точках екстремуму.

Доцільно у ході дослідження використовувати таблицю по аналогії з наведеним нижче прикладом.

Приклад 2. Знайти екстремуми функції $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 7$.

Розв'язання проведемо згідно вказаної схеми.

1) знаходимо похідну: $y' = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$;

2) знаходимо критичні точки першого роду:

із $6(x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 2$,

інших точок немає тому, що y' визначена при усіх $x \in (-\infty, \infty)$;

3) критичні точки x_1 та x_2 поділяють область існування функції на інтервали постійного знака похідної (записуємо критичні точки та відповідні інтервали у перший рядок таблиці 1). Визначаємо знак $f'(x)$ в кожному інтервалі (записуємо ці знаки у другий рядок табл. 1).

4) згідно з достатніми умовами існування екстремуму функції робимо висновок відносно кожної критичної точки. (Характер поведінки функції відображаємо у третьому рядку табл. 1);

5) Обчислимо максимальне та мінімальне значення функції:

$$y_{\max} = y(1) = 2\cdot 1 - 9\cdot 1 + 12\cdot 1 + 7 = 12,$$

$$y_{\min} = y(2) = 2\cdot 8 - 9\cdot 4 + 12\cdot 2 + 7 = 11.$$

Таблиця 1

x	$(-\infty,-1)$	$x_1 = 1$	$(1,2)$	$x_2 = 2$	$(2,\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\uparrow$	max	$\downarrow$	min	$\uparrow$

Найбільше та найменше значення функції на відрізку

Функція, яка неперервна на відрізку $[a,b]$, досягає на цьому відрізку свого найбільшого та найменшого значень. Ці значення вона може досягнути на одному з кінців відрізку або всередині відрізку в точці локального екстремуму.

Тому для знаходження найбільшого та найменшого значень функції $y = f(x)$ на $[a,b]$ треба:

1) знайти всі критичні точки першого роду;

2) обчислити значення функції $f(a)$ та $f(b)$ на кінцях відрізка, а також в тих критичних точках, що належать відрізку;

3) із одержаних значень функції обрати найбільше та найменше значення функції на відрізку.

2. Опуклість та угнутість графіка. Точку перегину

Означення 4. Крива $y = f(x)$ називається **опуклою на інтервалі** (a,b), якщо усі точки графіка функції лежать нижче її дотичних на цьому інтервалі.

Крива $y = f(x)$ називається **угнутою** на (a,b), якщо усі точки графіка функції лежить вище її дотичних на цьому інтервалі (рис. 3).

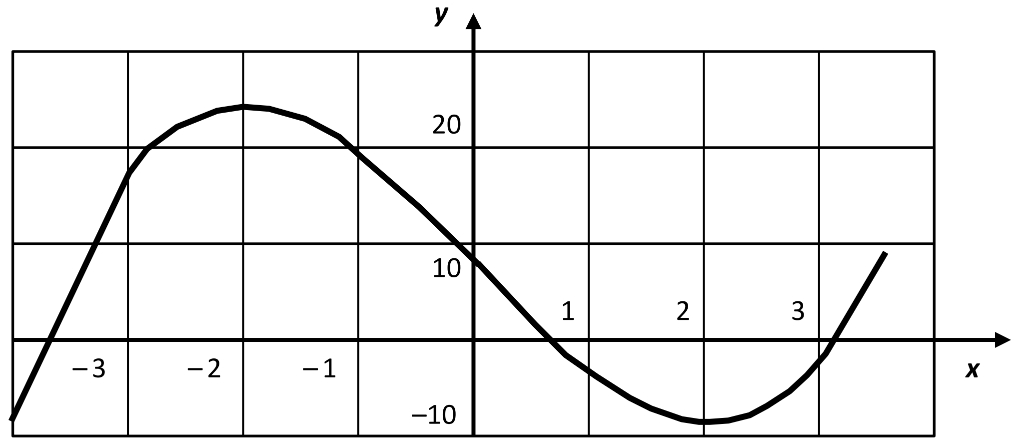


Рис. 3. Інтервали опуклості угнутості функції $f(x)=x^3-12x+8$:

x є (-∝, 0) – $f(x)$ – опукла; x є (0, ∝) – $f(x)$ – угнута

Означення 5. Якщо в досить малому околі точки дотику x_0 крива зліва цієї точки лежить по один бік дотичної, а справа – з іншого боку дотичної, то точку $(x = x_0)$ називають **точкою перегину кривої**.

<u>Ознаки опуклості та угнутості кривої</u>.

Теорема. Якщо в усіх точках інтервалу (a,b) $f''(x)>0$ то крива $y=f(x)$ є угнутою на цьому інтервалі; якщо $f''(x)<0$ на деякому інтервалі, то крива $y=f(x)$ опукла на цьому інтервалі.

Правило. Точка $x=x_0$ буде **точкою перегину** кривої $y=f(x)$, якщо:

1) $f''(x_0)=0$ або не існує;

2) знаки $f''(x)$ зліва $(x<x_0)$ та справа $(x>x_0)$ різні.

Якщо $f''(x)$ не змінює свій знак при переході аргументу через x_0, то при $x=x_0$ перегину не буде.

Умову 1 цього правила називають ***необхідною умовою***, а 2 – ***достатньою умовою*** *існування точок перегину графіка функції*.

Означення 6. Значення аргументу x, при яких $f''(x)=0$ або не існує, називають **критичними точками другого роду функції** $f(x)$.

Приклад 3. Знайти інтервали опуклості, угнутості та точки перегину функції $y=e^{-\frac{x^2}{2}}$ (крива Гауса).

Розв'язання. Знайдемо другу похідну цієї функції. Маємо:

$$y'=-xe^{-\frac{x^2}{2}},\ y''=-e^{-\frac{x^2}{2}}+x^2e^{-\frac{x^2}{2}}=e^{-\frac{x^2}{2}}\left(x^2-1\right).$$

Друга похідна визначена для усіх x. Тому критичні точки другого роду знайдемо із рівності $y''=0$: $x_1=-1,\ x_2=1$.

Визначимо знак другої похідної при проходженні x через кожну критичну точку.

Таблиця 2

x	$(-\infty,-1)$	$x_1=-1$	$(-1,1)$	$x_2=1$	$(1,\infty)$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cup$	*точка перегину*	$\cap$	*точка перегину*	$\cup$

Отже, обидві точки $x=-1$ та $x=1$ є точками перегину; $(-1,\ 1)$ – інтервал опуклості; $(-\infty,\ -1)$, $(1,\ \infty)$ – інтервали угнутості графіка. Значення функції в точках перегину буде $y_{пер}=f(\pm x)=e^{-1/2}$.

Заключення.

В даній лекції ми розглянули як за допомогою похідної досліджувати графіки функцій, а саме, знаходити інтервали зростання, спадання функції, екстремуми функції, інтервали опуклості та угнутості графіка функції, точки перегину. Визначили, що в екстремумі функція має похідну, що дорівнює нулю. Якщо друга похідна від’ємна, то графік функції випуклий.

За допомоги визначених понять можна досліджувати функціональні залежності та математичні моделі, що описують процеси та явища в економіці.

ЛЕКЦІЯ 12. ЗАГАЛЬНА СХЕМА ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ

План лекції.

Вступ.

1. Асимптоти кривої графіка функції.

2. Загальна схема дослідження функції та побудова її графіка.

Заключення.

Вступ.

При дослідженні функції, заданої аналітично, важливо визначити її інтервали зростання, спадання, опуклість графіка функції, екстремуми, а також асимптоти, тобто прямі, до яких прямує графік функції. Важливим є вміння використовувати загальну схему дослідження графіка функції для побудови заданого графіка та дослідження математичних моделей в економіці.

1. Асимптоти кривої графіка функції

Означення 1. Пряму лінію називають **асимптотою кривої** $y = f(x)$, якщо відстань точки М кривої від цієї прямої прямує до нуля при віддалені точки М в нескінченність.

Асимптоти можуть бути **вертикальними**, **похилими**, та **горизонтальними** (рис. 1).

Вертикальні асимптоти існують, коли функція має розриви другого роду. Якщо a точка такого розриву, то $x = a$ буде рівнянням асимптоти.

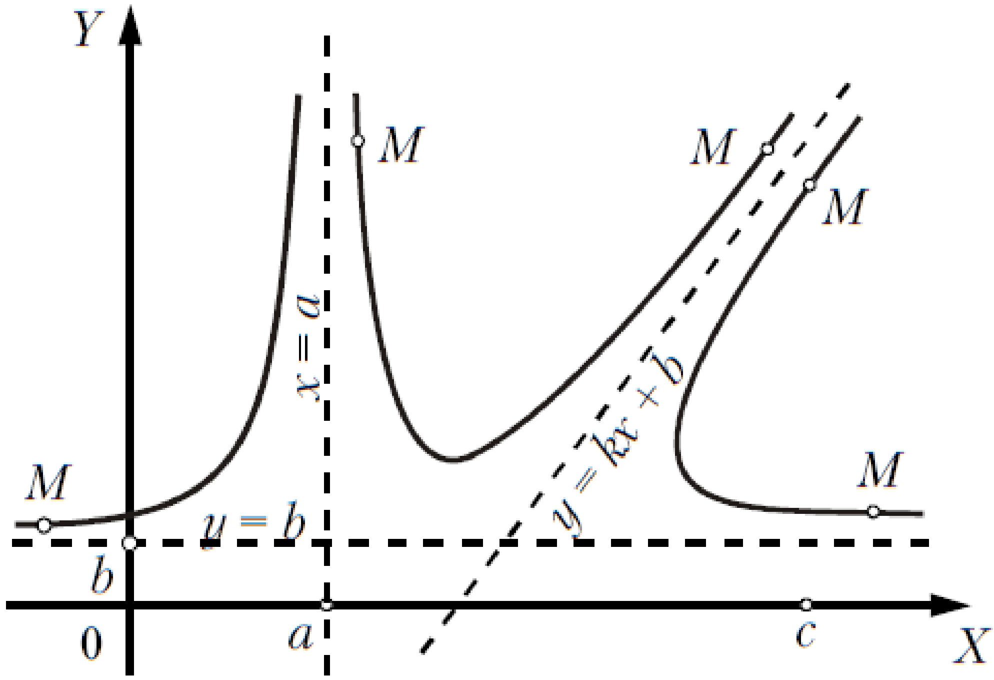


Рис. 1

Рівняння **похилої асимптоти** будемо шукати у вигляді рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, тобто у вигляді $y = kx + b$. Відстань точки $M(x, y)$, що належить кривій $y = f(x)$, до прямої $y = kx + b$ можна наближено виразити через різницю між ординатами кривої та прямої при однаковому значенні x:

$$d = f(x) - (kx + b).$$

За означенням асимптоти $d \to 0$ при $x \to \pm\infty$, тобто

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - kx - b \right] = 0.$$

Якщо цю рівність поділити на x, то одержимо:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] = 0.$$

Але $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{b}{x} = 0$, тому

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad (1)$$

Якщо не існує скінченого значення $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$, то похилої асимптоти не існує. Якщо вказана границя існує, то за формулою (1) знаходимо k, а за формулою

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right] \tag{2}$$

знаходимо b і таким чином одержимо рівняння похилої асимптоти вигляду $y=kx+b$.

Якщо $k=0$, то за формулою (2) одержимо

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}f(x) \tag{3}$$

і пряма $y=b$ буде **горизонтальною асимптотою**.

Приклад 1. Знайти асимптоти кривої $y=x+e^{-x}$.

Розв'язання. Задана функція не має точок розриву другого роду, тому крива не має вертикальних асимптот.

Рівняння похилої асимптоти будемо шукати використовуючи формули (1) та (2). Маємо:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x+e^{-x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x\cdot e^{x}}\right)=1.$$

При $x\to-\infty$ не має скінченної границі, тобто k не існує.

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(x+e^{-x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}e^{-x}=0$$

Отже, крива $y=x+e^{-x}$ має при $x\to\infty$ похилу асимптоту $y=x$.

2. Загальна схема дослідження функції і побудови її графіка

Графік заданої функції можна будувати по довільних точках. Для цього обирають довільним чином деяку кількість точок. Чим більше кількість обраних точок, тим точніше буде зображено графік функції.

Наприклад, побудова графіка функції в Excel полягає в побудові таблиці із двох рядків: в першому – значення аргументу *x* за зростанням, а в другому – відповідні значення функції. Далі необхідно виділити таблицю, в меню вибрати команду Вставка, Діаграма, Точкова. На рис. 2 представлена побудова графіка $y = x + e^{-x}$.

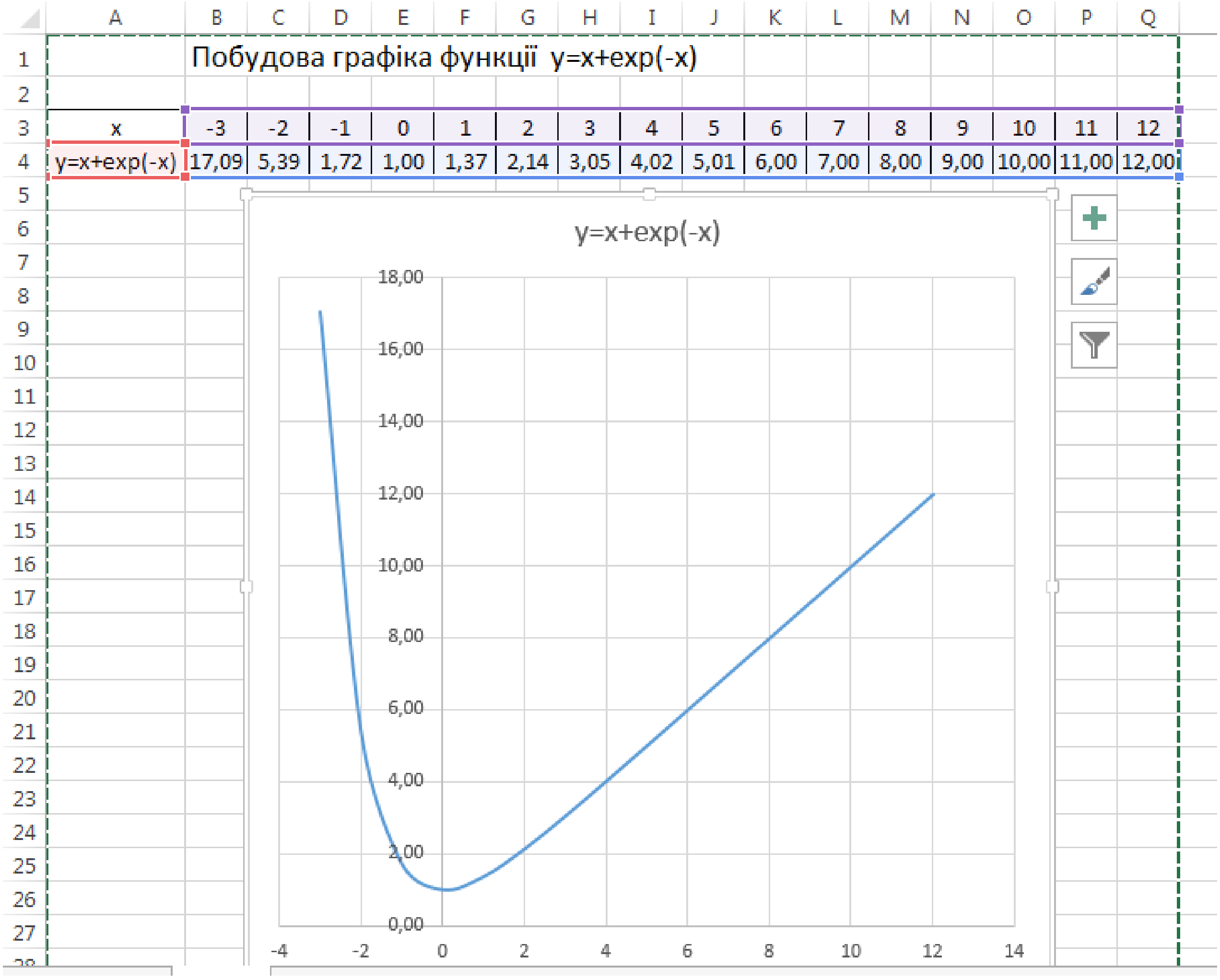


Рис. 2

Але, розглянуті вище дослідження графіка за допомогою похідних дозволяють спростити цю задачу шляхом обирання не довільних точок, а характерних саме для заданої функції.

Для науково обґрунтованого дослідження функції та побудови її графіка доцільно дотримуватись такої **схеми**:

Перший етап *(використання виду заданої функції).*

1. Знаходимо область визначення функції, точки розриву, інтервали неперервності.

2. Досліджуємо функцію на парність чи непарність, періодичність.

3. Знаходимо асимптоти графіка функції.

4. Знаходимо точки перетину графіка функції з осями координат.

Другий етап *(використання похідної першого порядку).*

5. Знаходимо критичні точки першого роду, інтервали зростання та спадання функції, точки екстремумів та екстремальні значення функції.

Третій етап *(використання похідної другого порядку).*

6. Знаходимо критичні точки другого роду, інтервали опуклості та угнутості графіка функції, точки перегину та значення функції в точках перегину.

Четвертий етап.

7. Згідно з результатами дослідження будуємо у системі координат отримані точки, асимптоти і будуємо графік функції з урахуванням інтервалів неперервності, зростання та спадання, опуклості та угнутості, асимптот графіка.

Приклад 2. Дослідити функцію $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$ побудувати її графік.

Розв'язання. Задана функція має розрив в точці $x=1$, тому $(-\infty,\ 1)\cup(1,\ \infty)$ область неперервності цієї функції.

Задана функція не буде парною або непарною.

Знайдемо асимптоти графіка функції. Однобічні границі функції в точці розриву будуть

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=\infty,\ \lim_{x\to 1+0}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=\infty.$$

Отже, пряма $x=1$ є вертикальна асимптота. Перевіримо, чи має ця функція похилі асимптоти:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{x(x-1)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=0.$$

Отже, похилих асимптот не має. Шукаємо горизонтальні асимптоти:

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=0.$$

Тому пряма $y=0$ буде горизонтальною асимптотою.

Тепер знайдемо точки перетину графіка функції з осями координат:

при $x=0$ маємо $y=-1$, тобто точку $M_0(0,\ -1)$;

при $y=0$ одержуємо $x=1/2$; тобто точку $M_1(1/2,\ 0)$.

Переходимо до <u>другого етапу</u> дослідження.

Похідна функція буде

$$y'=\frac{2(x-2)^2-2(x-1)(2x-1)}{(x-1)^4}=\frac{2x-2-4x+2}{(x-1)^3}=\frac{-2x}{(x-1)^3}.$$

Похідна не існує в точці $x=1$ і дорівнює нулю при $x=0$. Отже, критичною точкою першого роду буде лише точка $x=0$ тому, що $x=1$ не належить області визначення функції.

Складемо таблицю з врахуванням точки розриву та критичної точки.

Таблиця 3

x	$(-\infty,\ 0)$	$x=0$	$(0,\ 1)$	$x=1$	$(1,\ \infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	*не існує*	$-$
$f(x)$	$\downarrow$	min $y_{\min}=-1$	$\uparrow$	*не існує*	$\downarrow$

Отже, на інтервалі $(0,\ 1)$ функція зростає, а в інтервалах $(-\infty,\ 0)$ та $(1,\ \infty)$ – спадає.

Екстремальним значенням функції буде

$$y_{\min} = f(0) = -1.$$

Знайдемо інтервали опуклості та угнутості графіка, точку перегину за відповідною схемою: друга похідна має вигляд:

$$y'' = \left(\frac{-2x}{(x-1)^3}\right)' = \frac{4x+2}{(x-1)^4}$$

Звідси знаходимо критичні точки другого роду:

$x = -1/2$ та $x = 1$, але точка $x = 1$ не належить області визначення функції.

Складаємо таблицю з врахуванням точки розриву та $x = -1/2$.

Таблиця 4

x	$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$	$x = -\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2},\ 1\right)$	$x = 1$	$(1,\ \infty)$
$f''(x)$	–	0	+	*не існує*	+
$f(x)$	$\cap$	*точка перегину*	$\cup$	*не існує*	$\cup$

Отже, на інтервалі $\left(-\infty,\ -\frac{1}{2}\right)$ графік функції опуклий, а в інтервалах $\left(-\frac{1}{2},\ 1\right)$ та $(1,\ \infty)$ графік угнутий.

Значення функції в точці перегину буде $y_{пер} = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{8}{9}$.

За одержаними результатами будуємо графік заданої функції (рис. 3).

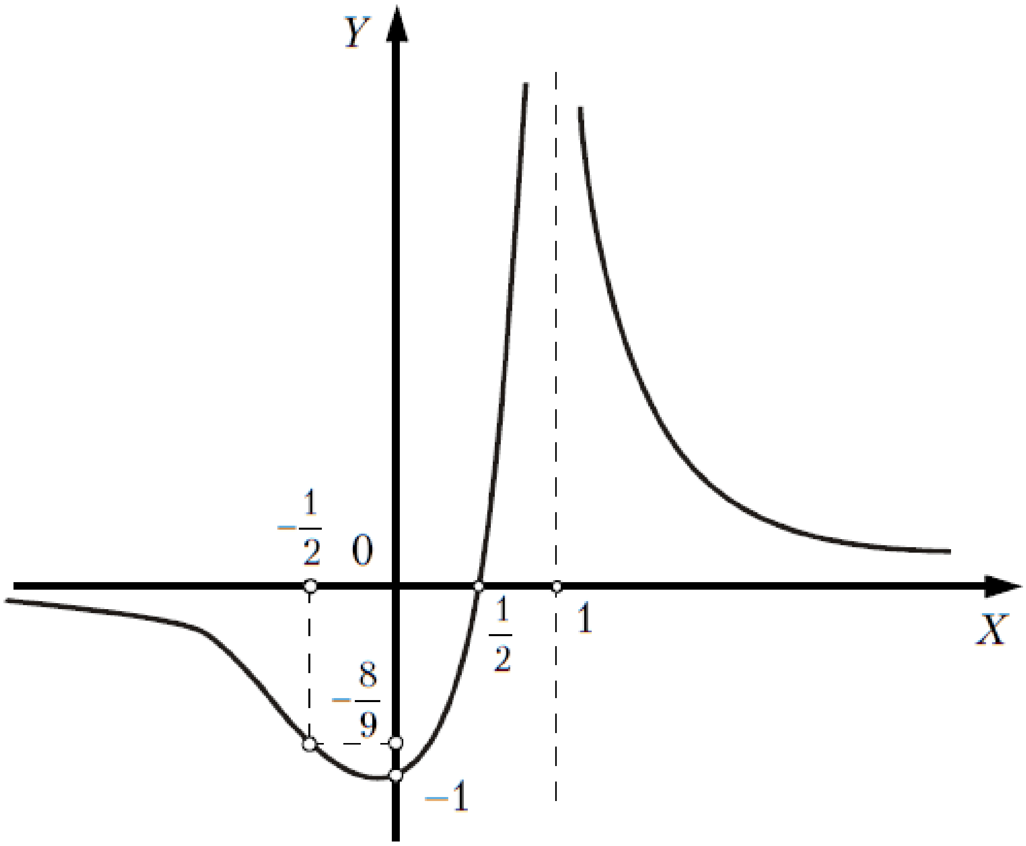


Рис. 3

Заключення.

В попередній лекції ми розглянули як за допомогою похідної досліджувати графіки функцій, а саме, знаходити інтервали зростання, спадання функції, екстремуми функції, інтервали опуклості та угнутості графіка функції, точки перегину.

На сьогоднішній лекції ми вивчили, як визначити асимптоти графіка функції. Для виконання дослідження графіків функцій важливе значення має загальна схема досліджень, яка складається з 4 етапів.

За допомоги визначених понять можна досліджувати функціональні залежності та математичні моделі, що описують процеси та явища в економіці.

ЛЕКЦІЯ 13. ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

План лекції.

Вступ.

1. Область визначення, границя, неперервність функції багатьох змінних.
2. Похідні та диференціали функції багатьох змінних.

Заключення.

Вступ.

На попередніх заняттях ми вивчали функції однієї змінної вигляду $y = f(x)$, способи їх задання, області визначення та значень, границю та неперервність, похідні функції та застосування їх до розв'язування різних задач.

Сьогодні ми розглянемо аналогічні питання, але для функцій кількох змінних. Саме такі функції найчастіше використовуються у практичній діяльності менеджерів, бізнесменів та інших спеціалістів різних галузей, у тому числі й економіки.

Наприклад, температура T залежить від часу її вимірювання t та координат x, y, z точки M, в якій вимірюють температуру. Отже, температура залежить від чотирьох змінних тобто $T = f(x,y,z,t)$

1. Область визначення, границя, неперервність функції багатьох змінних

При дослідженні процесів часто спостерігають одночасну зміну декількох величин і залежність однієї з них від інших.

Означення 1. Якщо змінна величина w залежить від n незалежних змінних x_1, x_2 **...** x_n то її називають **функцією цих змінних**, а функціональну залежність позначають так:

$$w = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right), \text{ або } w = f\left(M\right), \text{ де точка } M \in E_n.$$

Незалежні змінні x_1, x_2 **...** x_n називаються ***аргументами***.

Означення 2. Сукупність усіх числових значень, які можуть приймати аргументи x_1, x_2, ... x_n і при яких функція $W = f\left(x_1, x_2, ... x_n\right)$ приймає певні дійсні значення, називають **областю визначення функції**.

<u>*При знаходженні області визначення*</u> функції кількох змінних, що задана аналітично, доцільно керуватись такими правилами:

1. Вираз під коренем парного степеня повинен бути невід'ємним;

2. Вираз під знаком логарифма повинен бути додатним;

3. Вираз знаменника дробу не повинен дорівнювати нулю.

4. Модуль виразу, що стоїть під знаком arcsin або arccos, не більше 1 по модулю.

Точка або сукупність точок, в яких функція кількох змінних не визначена, <u>***називають розривами цієї функції.***</u>

Якщо функція визначена для усіх x_1, x_2 **...** x_n з деякої області D та її межі dD, тоді кажуть, що функція визначена у замкненій області $D = D \cup dD$.

Приклад 1. Знайти область визначення функції

$$u = \sqrt{25 - \left(x+1\right)^2 - \left(y-2\right)^2 - z^2}\ .$$

Розв'язання. Задана функція в залежності від трьох змінних x, y та z. Вона приймає певні дійсні значення лише при умові

$$25 - \left(x+1\right)^2 - \left(y-2\right)^2 - z^2 \geq 0 \Rightarrow \left(x+1\right)^2 + \left(y-2\right)^2 + z^2 \leq 25.$$

Рівність $\left(x-a\right)^2 + \left(y-b\right)^2 + \left(z-c\right)^2 = R^2$ є рівнянням сфери з центром у точці $C\left(a,b,c\right)$ і радіусом R.

Отже, одержана нерівність означає, що областю визначення функції u буде куля радіуса 5 з центром в точці $C(-1,2,0)$. Нерівність нестрога, тому функція u визначена на сфері – межі цієї кулі. Отже, задана функція u визначена у замкненій області

$$\bar{D} = \left\{(x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 \le 25\right\}.$$

Згідно з основними поняттями аналітичної геометрії, **функція двох змінних** $z = f(x,y)$ в тривимірному просторі **зображується поверхнею**. Кожна точка цієї поверхні M' має координати (x,y,z). Областю визначення функції $z = f(x,y)$ буде деяка область D площини xOy. Коли точка $M(x,y)$ пробігає область D, тоді точка $M'(x,y,z)$ пробігає поверхню S, рівняння якої $z = f(x,y)$.

Отже, функцію двох змінних $x,\ y$ можна задати як функцію змінної точки M, що змінюється в області D, тобто $Z = f(M)$.

Аналогічно можна розглядати і функцію ***n*** аргументів, як функцію точки M, що переміщується в області D n-вимірного простору E_n, тобто $W = f(M)$, $M \in D \in E_n$.

Способи задання функції кількох змінних

Функцію однієї змінної можна задавати аналітично, таблично, графічно, мовно і за допомогою комп'ютерної програми. Функцію двох змінних $Z = f(x,y)$, крім цих способів, можна задавати ще й геометрично, за допомогою ліній рівня.

У табличному способі завдання функції $Z = f(x,y)$ використовують <u>таблицю</u> вигляду:

y_k \ x_k	y_1	y_2	...	y_n
x_1				
x_2				
...				
x_n				

У кожній клітинці вказують значення Z для відповідної пари (x,y).

Розглянемо <u>геометричний спосіб</u> задання функції. Нехай графіком функції $Z = f(x,y)$ буде поверхня, зображена на рис. 1. Неважко бачити, що різні точки цієї поверхні знаходяться на різній відстані від площини xOy.

Якщо придати Z постійні значення $h_1,\ h_2, \dots$, то одержимо в площині аргументів ліній $f(x,y) = h_1$ та $f(x,y) = h_2$ ..., які називають ***лініями рівня функції*** $f(x,y)$.

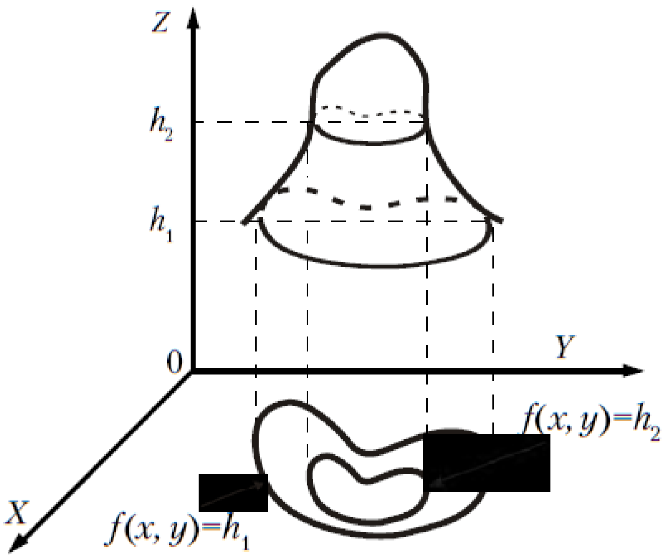


Рис. 1

Означення 3. Криві лінії L, що лежить у площині xOy і мають рівняння $f(x,y) = c$ (c – стала) називають **лініями рівня функції** $Z = f(x,y)$.

Іншими словами: лінія рівня – це множина усіх точок площини xOy, для яких функція $Z = f(x,y)$ приймає одне значення.

Приклад 2. Визначити лінії рівня функції $z = (x-2)^2 + (y+3)^2$.

Розв'язання. Згідно з означенням 3 рівняння ліній рівня має вигляд

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = c.$$

Якщо надати c різні числові значення (наприклад, $c = 4$, $c = 9$, $c = 16$ ...), то одержимо сукупність кіл з центром в точці $C(2,-3)$ з відповідними радіусами (наприклад, 2, 3, 4 ...).

Відмітимо, що лінії рівня широко <u>використовуються в топографії</u>. На топографічних картах нанесені лінії рівня, відстань між якими постійна і дорівнює h. Величина h вказана на карті (наприклад, $h=3$м) і дозволяє ефективно використовувати умови місцевості.

У випадку залежності функції від <u>трьох та більше змінних</u> найчастіше використовують <u>аналітичний спосіб задання функції</u>.

Границя та неперервність

Означення 4. Околом радіуса r **точки** $M_0\left(x_{10},\ x_{20},\ ...,\ x_{n0}\right)$ називають сукупність усіх точок $M\left(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n\right)$ простору E_n, відстань яких до точки M_0 менше або дорівнює r, тобто виконується співвідношення

$$\sqrt{\left(x_1-x_{10}\right)^2+\left(x_2-x_{20}\right)^2+...+\left(x_n-x_{n0}\right)^2}\le r.$$

Означення 5. Число A називають **границею** функції $W=f\left(x_1,\ x_2,\ ...\ ,\ x_n\right)$ (або $W=f\left(M\right)$) **в точці** $M_0\left(x_{10},\ x_{20},\ ...,\ x_{n0}\right)$, якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ знайдеться число r таке, що для усіх точок $M\left(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n\right)$ з околу радіуса r точки M_0, відмінних від точки M_0, виконується нерівність

$$\left|f\left(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n\right)-A\right|<\varepsilon \text{ або } \left|f\left(M\right)-A\right|<\varepsilon.$$

Використовується **позначення**:

$$\lim_{\substack{x_1\to x_{10}\\ x_2\to x_{20}\\ ...\ \to\ ...\\ x_n\to x_{n0}}} f\left(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n\right)=A \text{ або } \lim_{M\to M_0} f\left(M\right)=A.$$

Означення 6. Функція $W=f\left(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n\right)$ $\left(W=f\left(M\right)\right)$ називається **неперервною в точці** $M_0\left(x_{10},\ x_{20},\ ...,\ x_{n0}\right)$, якщо вона визначена в цій точці і $\lim\limits_{M\to M_0} f\left(M\right)=f\left(M_0\right)$ незалежно від способу прямування точки M до точки M_0.

Функція, неперервна в кожній точці деякої області, називається ***неперервною в цій області***.

Якщо функція неперервна в області D та на її межі dD, тоді кажуть що вона неперервна в замкненій області $\bar{D} = D \bigcup dD$.

Для знаходження області неперервності функції багатьох змінних доцільно використовувати такі **властивості неперервних функцій:**

1) Області визначення та неперервності функцій співпадають.

2) функція, неперервна в замкненій області D, обмежена, тобто існують такі числа m та M, що виконується співвідношення $m \le f\left(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\right) \le M$ для усіх $\left(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\right) \in \bar{D}$.

2. Похідні та диференціали функції багатьох змінних

Якщо у функції декількох змінних $W = f\left(x_1, x_2, \ldots,\ x_n\right)$ змінна $x_k\left(k = 1,\ 2, \ldots,\ n\right)$ одержить частинний приріст Δx_k, а всі інші незалежні змінні зафіксувати, тоді функція одержить частинний приріст

$$\Delta_{x_k} w = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, \ldots, x_n\right) - f\left(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k, \ldots, x_n\right)$$

за аргументом x_k.

Означення 7. Якщо існує границя $\lim\limits_{\Delta x_k \to 0} \dfrac{\Delta_{x_k} w}{\Delta x_k}$ незалежна від способу прямування $\Delta x_k \to 0$, тоді її називають **частинною похідною першого порядку функції** $W = f\left(x_1, x_2\ \ldots,\ x_n\right)$ **по змінній** $x_k\left(k = 1, 2,\ \ldots,\ n\right)$ і позначають

$$\frac{\partial w}{\partial x_k}\ \textit{або}\ \frac{\partial f\left(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n\right)}{\partial x_k}\ \textit{або}\ w'_{x_k}.$$

Отже, за означенням частинна похідна буде

$$\frac{\partial w}{\partial x_k} = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_{x_k} w}{\Delta x_k}. \qquad (1)$$

При знаходженні частинної похідної по змінній x_k **усі інші аргументи слід вважати постійними величинами** і тому можна використовувати правила диференціювання та таблицю похідних функцій однієї змінної.

Для функції двох змінних $Z = f(x,y)$ можна надати геометричну та механічну інтерпретацію частинної похідної першого порядку, а саме:

– похідна $Z'_y(Z'_x)$ чисельно дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до кривої лінії, яка утворюється перетином поверхні $Z = f(x,y)$ площиною $x = x_0(y = y_0)$;

– механічний зміст $Z'_y(Z'_x)$ – це швидкість зміни функції Z у напрямку осі $O_y(O_x)$, коли аргумент $x(y)$ не змінюється.

Приклад 3. Об'єм продажу нового продукту x залежить від часу t і витрат A підприємства на рекламу. Якщо t вимірювати тижнями, а A в гривнях, тоді ця залежність має вигляд

$$x = 200\left(5 - e^{-0{,}002A}\right)\left(1 - e^{-t}\right).$$

Знайти $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial x}{\partial A}$ і вказати економічний зміст цих похідних при $t = 1,\ A = 400$.

Розв'язання Маємо.

$$\frac{\partial x}{\partial t} = 200\left(5 - e^{-0{,}002A}\right)\left(1 - e^{-t}\right)'_t = 200\left(5 - e^{-0{,}002A}\right)e^{-t},$$

$$\frac{\partial x}{\partial A} = 200\left(1 - e^{-t}\right)\left(5 - e^{-0{,}002A}\right)'_A = 0{,}4\left(1 - e^{-t}\right)e^{-0{,}002A}.$$

При $t = 1$ та $A = 400$ одержимо

$$\left.\frac{\partial x}{\partial t}\right|_{\substack{t=1\\A=400}} = 200\left(5 - e^{-0{,}8}\right)e^{-1} \approx 335,$$

$$\left.\frac{\partial x}{\partial A}\right|_{\substack{t=1\\A=400}} = 0{,}4\left(1 - e^{-1}\right)e^{-0{,}8} \approx 0{,}11.$$

Частинна похідна x'_t характеризує швидкість зміни об'єму продажу нового продукту за тиждень, коли витрати на рекламу не змінюється.

Частинна похідна x'_A характеризує швидкість зміни об'єму продажу продукту при зміні суми витрат на рекламу і постійному t. При витратах на рекламу 400 гривень швидкість зростання об'єму продажу продукту за один тиждень буде 0,11.

Частинну похідну функції $u = f(x, y, z)$ **за напрямом вектора** $\vec{l} = (l_x, l_y, l_z)$ знаходять за формулою

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma, \qquad (2)$$

$$\text{де } \cos\alpha = \frac{l_x}{|\vec{l}|};\ \cos\beta = \frac{l_y}{|\vec{l}|};\ \cos\gamma = \frac{l_z}{|\vec{l}|}.$$

Напрям найбільшої швидкості зміни функції $u = f(x, y, z)$ співпадає з напрямом вектора (його називають ***градієнтом функції*** u**)**

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}, \qquad (3)$$

а величина цієї найбільшої швидкості дорівнює довжині цього вектора, тобто

$$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}. \qquad (4)$$

Приклад 4. Знайти величину найбільшої швидкості зміни функції $u = 7x^2y - \frac{7}{2}y^2z + \frac{14}{3}z^3$ в точці $M_0(1,0,9)$.

Розв'язання. Частинні похідні першого порядку в цьому випадку будуть

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 14xy; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 7x^2 - 7yz; \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = 14z^2 - \frac{7}{2}y^2.$$

Величину найбільшої зміни заданої функції u в будь-якій точці знайдемо за формулою (4)

$$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{(14xy)^2 + 7^2(x^2 - yz)^2 + \left(14z^2 - \frac{7}{2}y^2\right)^2} =$$

$$= 7 \cdot \sqrt{4x^2y^2 + (x^2 - yz)^2 + \left(2z^2 - \frac{y^2}{2}\right)^2}.$$

Підставимо замість x, y, z координати точки M_0, тоді

$$\left|\operatorname{grad} u\left(M_0\right)\right| = 7 \cdot \sqrt{4 \cdot 1 \cdot 0 + \left(1 - 0\right)^2 + 4 \cdot 81} = 7\sqrt{325} =$$

$$= 35\sqrt{13} \approx 35 \cdot 3{,}6 = 126 \quad (\textit{î äèí èöü âèì ³ðó}).$$

Заключення.

В питаннях управління підприємствами зв'язку, а також в інших галузях, в бізнесі, менеджменті, аудиті використовуються функцій кількох змінних.

Сьогодні ми вивчили функції багатьох змінних вигляду $f(x, y, z, t)$, способи їх задання, області визначення та значень, границю та неперервність, похідні функції та застосування їх до розв'язування різних задач.

ЛЕКЦІЯ 14. ЗНАХОДЖЕННЯ ЕКСТРЕМУМІВ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

План лекції.

Вступ.

1. Частинні похідні вищих порядків.

2. Приклади застосування частинних похідних до аналізу бізнеса

   2.1. Маргінальна продуктивність виробництва.

   2.2. Попит на конкурентні товари.

3. Оптимізація. Визначення оптимальних значень аргументів функції багатьох змінних.

   3.1. Поняття екстремуму, необхідні умови його існування

   3.2. Знаходження екстремуму функцій двох змінних

   3.3. Знаходження умовного екстремуму методом Лагранжа

   3.4. Найбільше і найменше значення функції в замкненій області

4. Метод найменших квадратів

Заключення.

Вступ.

На попередніх заняттях було вивчено функції кількох змінних способи їх задання, області визначення та значень, границю та неперервність, похідні функції та застосування їх до розв'язування різних задач. Саме такі функції найчастіше використовуються у практичній діяльності менеджерів, бізнесменів та інших спеціалістів різних галузей, у тому числі й економіки.

Сьогодні будемо вивчати застосування похідних першого та вищих порядків для рішення практичних задач: пошуку екстремумів функцій, пошуку оптимальних значень функції.

1. Частинні похідні вищих порядків

Означення 1. Частинну похідну першого порядку по змінній x_m від частинної похідної першого порядку функції по змінній x_k називають **частинною похідною другого порядку функції по змінним** x_k **та** x_m і позначають:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_m \partial x_k} \text{ або } w''_{x_k x_m} \text{ при } k \neq m,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\left(\partial x_k\right)^2} \text{ або } w''_{x_k x_k} \text{ при } k = m.$$

У випадку функції двох змінних $Z = f(x, y)$ маємо

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right); \ \frac{\partial^2 z}{(\partial x)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right); \ \frac{\partial^2 z}{(\partial y)^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Якщо мішані частинні похідні другого порядку неперервні, тоді

$$\frac{\partial^2 x}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},$$

тобто мішана частина похідна другого порядку не залежить від порядку диференціювання функції.

Аналогічно визначають частинні похідні порядку $k > 2$.

2. Приклади застосування частинних похідних до аналізу бізнеса

2.1. Маргінальна продуктивність виробництва.

У бізнесі ***маргінальною продуктивністю виробництва*** називають гранично можливу продуктивність при умові постійного відтворювання виробництва.

Кількість та якість кінцевого випуску будь якої продукції фірми залежить від багатьох факторів, які фірма може змінювати. Найбільш важливі фактори – продуктивність праці та вкладений у виробництво капітал.

Позначимо через x кількість одиниць праці, K – суму капіталу, вкладеного фірмою у виробничий план. Величина x може вимірюватись річними робочими або річною вартістю праці у гривнях.

Позначимо через P кінцевий результат, наприклад, кількість одиниць випущеної фірмою продукції. Тоді

$$P = f\left(x, K\right),$$

тобто P можна розглядати як функцію двох змінних. Ця функція називається *продуктивною функцією*.

У деяких випадках x та K залежні. Наприклад, фірма впровадила у виробництво нове обладнання (змінна K зросла на величину K_1), яке дозволило скоротити кількість праці у три рази. У цьому прикладі можна встановити функціональну залежність між x та K.

У загальних випадках x та K розглядають як незалежні змінні.

Частинну похідну першого порядку $\frac{\partial P}{\partial x}$ називають ***граничною продуктивністю праці при фіксованому*** K, а $\frac{\partial P}{\partial K}$ називають ***граничною продуктивністю капіталу при фіксованій продуктивності праці*** x.

Прибутки виробництва зростають якщо $\frac{\partial P}{\partial x}$ зростає при фіксованому K, тобто коли $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} > 0$.

Підкреслимо, що $\frac{\partial P}{\partial K}$ характеризує зміну випуску продукції при постійних трудових затрат.

2.2. Попит на конкурентні товари

Попит на будь-який товар залежить від вартості його одиниці, якості, пакування та інших факторів, наприклад, вартості іншого товару. Так, попит на торт «Київський» залежить не лише від його вартості, але й від вартості тортів інших назв, наприклад «Барвінок».

Будемо казати, що товари A та B взаємозв'язані, якщо попит на товар A залежить не тільки від його вартості, але й від вартості товару B.

Позначимо P_A та P_B вартість одиниці відповідного товару. Нехай X_A та X_B – кількісний попит на товари A та B, відповідно. Якщо A та B взаємопов'язані, тоді X_A та X_B будуть функціями двох змінних, тобто

$$X_A = f\left(P_A, P_B\right); \ X_B = \varphi\left(P_A, P_B\right).$$

Частина похідної $\frac{\partial X_A}{\partial P_A}$ має зміст граничного попиту на товар A відносно його вартості P_A.

Частинна похідна $\frac{\partial X_A}{\partial P_A}$ – граничний попит на товар A відносно вартості P_B.

Товари A та B називають *конкурентними,* якщо

$$\frac{\partial X_A}{\partial P_A} > 0, \ \frac{\partial X_A}{\partial P_B} > 0.$$

Еластичністю вартості товару A відносно P_A буде

$$\eta_{p_A} = \frac{P_A}{X_A} \cdot \frac{\partial X_A}{\partial P_A}.$$

Аналогічно визначається еластичність вартості товару A відносно P_B

$$\eta_{p_B} = \frac{P_B}{X_A} \cdot \frac{\partial X_A}{\partial P_B}.$$

3. Оптимізація. Визначення оптимальних значень аргументів функції багатьох змінних

3.1. Поняття екстремуму, необхідні умови його існування

Функція багатьох змінних $W = f\left(M\right)$, $M \in E_n$ **має максимум в точці** M_0, якщо $f\left(M_0\right) > f\left(M\right)$для усіх точок M із достатньо малого околу точки M_0.

Функція $W = f(M),\ M \in E_n$ **має мінімум в точці** M_0, якщо $f(M_0) < f(M)$ для усіх точок M із достатньо малого околу точки M_0.

Максимуми та мінімуми функції кількох змінних називають ***екстремумами функції***, а точку M_0, де функція має екстремум, називають ***точкою екстремуму функції***.

Теорема. ***(Необхідні умови існування екстремуму).*** Якщо функція $W = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ має екстремум в точці $M_0(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})$, то кожна частинна похідна першого порядку функції дорівнює нулю або не існує в цій точці.

Наслідок. *Точки, в яких* $\dfrac{\partial w}{\partial x_k}(k = 1,\ 2, ..., n)$ *не існують або дорівнюють нулю називають* ***критичними точками*** *або* ***підозрілими на екстремум.***

Приклад 1. Знайти критичні точки функції

$$z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1.$$

Розв'язання. Спочатку знайдемо частинні похідні першого порядку заданої функції двох змінних:

$$z'_x = 2x - y + 3;\ z'_y = -x + 2y - 2.$$

Ці похідні існують для усіх x та y, тому критичними будуть лише точки, де частинні похідні дорівнюють нулю, тобто

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = -3 \\ -x + 2y = 2 \end{cases}.$$

Остання система лінійна, неоднорідна, з двома невідомими. Розв'язуючи систему за правилом Крамера, одержимо:

$$x = -4/3;\ y = 1/3.$$

Отже, критичною точкою буде $M_0\left(-4/3,\ 1/3\right)$.

3.2. Знаходження екстремуму функцій двох змінних

Необхідні умови існування екстремуму функцій кількох змінних дозволяють знаходити лише критичні точки.

У випадку функції двох змінних за допомогою достатніх умов існування екстремуму можна перевірити кожну критичну точку та виявити, який саме екстремум існує в цій точці.

Теорема. ***(достатні умови існування екстремуму).*** Нехай в околі критичної точки $M_0(x_0,\ y_0)$ функція $Z = f(x,\ y)$ має неперервні частинні похідні до другого порядку включно,

$$a_{11} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{(\partial x)^2} \quad a_{22} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{(\partial y)^2} \quad a_{12} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x\, \partial y}$$

Тоді:

1) $f(x,\ y)$ ***має максимум, якщо*** $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 > 0$ ***та*** $a_{11} < 0$***;***

2) $f(x,\ y)$ ***має мінімум, якщо*** $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 > 0$ ***та*** $a_{11} > 0$***;***

3) $f(x,\ y)$ ***не має екстремуму, якщо*** $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 < 0$***;***

4) ***якщо*** $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = 0$***, тоді екстремум в точці*** M_0 ***може існувати, а може і не існувати , тобто в цьому випадку треба використовувати іншу достатню ознаку.***

Приклад 2. Дослідити на екстремум функцію

$$z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1.$$

Розв'язання. У прикладі 7 для цієї функції знайдена критична точка $M_0(-4/3,\ 1/3)$. Застосуємо достатню умову. Маємо:

$$z''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(2x - y + 3) = 2; \quad z''_{yx} = \frac{\partial}{\partial y}(2x - y + 3) = -1; \quad z''_{yy} = 2.$$

Тому $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = 2 \cdot 2 - (-1)^2 = 3 > 0$ та $a_{11} = 2 > 0$.

Згідно з другим твердженням теореми в точці $M_0\left(-4/3,\ 1/3\right)$ задана функція має мінімум:

$$z_{\min} = f\left(-\frac{4}{3},\ \frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{4}{3}\right)^2 - \left(-\frac{4}{3}\right)\cdot\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3\left(-\frac{4}{3}\right) - 2\left(\frac{1}{3}\right) + 1 =$$
$$= \frac{16}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} - 4 - \frac{2}{3} + 1 = -\frac{4}{3}.$$

3.3. Знаходження умовного екстремуму методом Лагранжа

Екстремум функції $Z = f\left(x,\ y\right)$ при виконанні умови $\varphi\left(x,\ y\right) = 0$ називають ***умовним екстремумом функції***.

Умовні екстремуми часто використовуються при дослідженні оптимізації багатьох економічних та соціальних проблем.

Для знаходження умовного екстремуму методом Лагранжа треба:

1) записати функцію Лагранжа вигляду

$$L\left(x,\ y,\ \lambda\right) = f\left(x,\ y\right) + \lambda\varphi\left(x,\ y\right);$$

2) знайти критичні точки $M_k\left(x_k,\ y_k,\ \lambda_k\right)$ функції Лагранжа, використовуючи необхідні умови існування екстремуму:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0; \\ \varphi\left(x, y\right) = 0 \end{cases}$$

3) перевірити в кожній критичній точці достатні умови існування екстремуму:

а) якщо в точці $M_k\left(x_k,\ y_k,\ \lambda_k\right)$ визначник третього порядку

$$\Delta\left(M_k\right) = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x\left(M_k\right) & \varphi'_y\left(M_k\right) \\ \varphi'_x\left(M_k\right) & L''_{xx}\left(M_k\right) & L''_{xy}\left(M_k\right) \\ \varphi'_y\left(M_k\right) & L''_{xy}\left(M_k\right) & L''_{yy}\left(M_k\right) \end{vmatrix}$$

додатний, тоді точка M_k є точкою максимуму і

$$z_{\max} = f\left(M_k\right) = f\left(x_k,\ y_k\right);$$

б) якщо визначник $\Delta\left(M_k\right) < 0$, тоді точка M_k є точкою мінімуму і

$$z_{\min} = f\left(M_k\right) = f\left(x_{k,}\ y_k\right).$$

Приклад 3. Знайти екстремум функції $z = xy$ при умові що $x^2 + y^2 = 2$.

Розв'язування. Будемо шукати умовний екстремум з використанням функції Лагранжа

$$L = xy + \lambda\left(x^2 + y^2 - 2\right).$$

Необхідні умови існування тепер мають вигляд

$$\begin{cases} y + 2\lambda x = 0 \\ x + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 2 = 0 \end{cases}.$$

Виключаючи з цієї системи λ, одержимо:

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{-y}{2x} \\ x + 2y\left(\dfrac{-y}{2x}\right) = 0 \\ x^2 - y^2 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{-y}{2x} \\ x^2 - y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{-y}{2x} \\ x^2 = 1 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases}.$$

Отже, критичними точками будуть:

$M_1(-1,-1),\ M_2\left(-1,\ 1\right),\ M_3(1,-1),\ M_4\left(1,\ 1\right).$

Для перевірки достатніх умов існування екстремуму запишемо визначник в довільній точці $M\left(x,y\right)$, враховуючи

$$\varphi'_x\left(M\right) = 2x;\ \varphi'_y\left(M\right) = 2y;\ L''_{xx} = 2\lambda = -\frac{y}{x};\ L''_{yy} = -\frac{y}{x};\ L''_{xy} = 1,$$

$$\Delta(M)=\begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & -\dfrac{y}{x} & 1 \\ 2y & 1 & -\dfrac{y}{x} \end{vmatrix}=12xy+4\frac{y^3}{x}.$$

Тепер можна знайти значення цього визначника в кожній критичній точці і використати достатні умови:

$$\Delta(M_1)=12(-1)\cdot(-1)+4\frac{(-1)^3}{-1}=12+4=16>0,$$

$$z_{\max}=z(M_1)=(-1)\cdot(-1)=1.$$

$$\Delta(M_2)=12(-1)\cdot(1)+4\frac{(1)^3}{-1}=-12-4=-16<0,$$

$$z_{\min}=z(M_2)=(-1)\cdot(1)=-1.$$

$$\Delta(M_3)=12\cdot 1\cdot(-1)+4\frac{(-1)^3}{1}=-12-4=-16<0,$$

$$z_{\min}=z(M_3)=(-1)\cdot(1)=-1.$$

$$\Delta(M_4)=12+4=16>0,$$

$$z_{\max}=z(M_4)=1\cdot 1=1.$$

3.4. Найбільше і найменше значення функції в замкненій області

Для знаходження найбільшого та найменшого значень функцій у замкненій області $\bar{D}$, які позначаються $\max\limits_{\bar{D}} f(x,y)$, $\min\limits_{\bar{D}} f(x,y)$, відповідно, треба знайти екстремальні значення функції в точках, що лежать всередині D та на межі області, і обрати найбільше та найменше значення.

Приклад 4. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 y(4 - x - y)$ в трикутнику, обмеженому лініями $x = 0,\ y = 0;\ x + y = 6.$

Розв'язування. Спочатку знайдемо критичні точки всередині області:

$$z'_x = 2xy(4 - x - y) - x^2 y = xy(8 - 3x - 2y),$$

$$z'_y = x^2(4 - x - y) - x^2 y = x^2(4 - x - 2y).$$

Згідно з необхідними умовами існування екстремуму функції двох змінних маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} xy(8 - 3x - 2y) = 0 \\ x^2(4 - x - 2y) = 0 \end{cases}.$$

Всередині області $x \neq 0$ та, $y \neq 0$ тому

$$\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

В критичній точці $M_1(2,\ 1)$ маємо $z(2,\ 1) = 4.$

Тепер проведемо дослідження функції на межі трикутника. На прямій $x + y = 6$ змінна $y = 6 - x$ і функція z приймає вигляд

$$z = x^2(6 - x)\cdot(4 - x + x - 6) = 2x^2(x - 6),\ \ x \in [0,\ 6].$$

Знайдемо найбільше та найменше значення цієї функції однієї змінної x на замкненому відрізку $[0{,}6]$: $z' = 6x^2 - 24x.$

Із рівності $z' = 0$ знаходимо: $6x(x - 4) = 0$, звідси випливає, що $x_1 = 4$ та $x_2 = 0$. Отже, $z(4) = -64$. При $x = 0$ та $x = 6$: $z(0) = 0$, $z(6) = 0.$

На прямій $y = 0$ маємо $z = 0.$

Отже, задана функція Z має найбільше значення в точці $M_1(2,\ 1)$ всередині області, найменше значення – в точці $M_2(4,\ 2)$ на межі області.

Найбільше значення $\max\limits_{\bar{D}} z = z(2,\ 1) = 4;$

Найменше значення $\min\limits_{\bar{D}} z = z(4{,}2) = -64.$

4. Метод найменших квадратів

При дослідженні різних економічних та соціальних проблем часто одержують n значень величини x та відповідні їм значення величини y. Результати спостережень записують у вигляді таблиці

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

За даними цієї таблиці необхідно визначити вигляд функціональної залежності між x та y, тобто від табличної форми завдання функціональної залежності необхідно перейти до аналітичної форми її завдання вигляду $y = f(x)$.

Розв'язування цієї задачі можна розподілити <u>на два етапи</u>.

1) Спочатку, використовуючи графічне представлення точок $M_k(x_k, y_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, обирають форму залежності між x та y тобто обирають вигляд функції $y = f(x)$.

У випадку лінійної залежності (точки M_k мало відхиляються від прямої лінії) між x та y обирають такий вигляд функціональної залежності: $y = ax + b$;

у випадку параболічної залежності: $y = ax^2 + bx + c$;

у випадку гіперболічної залежності: $y = a/x + b$;

у випадку показникової залежності: $y = a^x + b$.

На цьому етапі параметри a, b та c – невідомі.

Нехай в результаті першого етапу розв'язування задачі обрана залежність вигляду $y = f(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ з невідомими параметрами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$.

2) Для знаходження невідомих параметрів на другому етапі розв'язання задачі будують функцію

$$S = \sum_{k=1}^{n} \left(y_k - f(x_k, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) \right)^2, \quad (8)$$

залежну від m параметрів.

Ця функція дорівнює сумі квадратів відхилень точок $M_k(x_k, y_k)$ від обраної лінії, рівняння якої $y = f(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$.

Будемо шукати такі значення параметрів α_1, $\alpha_2, \ldots$, α_m при яких функція S приймає мінімальне значення, тому відхилення табличних даних (точок $M_k(x_k, y_k)$) від обраної функціональної залежності (відповідної лінії) буде мінімальним.

Необхідна умова для існування екстремуму функції S – рівність нулю частинних похідних:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = 0, \ i = 1, 2, \ldots, m \qquad (9)$$

Ця умова є системою m алгебраїчних рівнянь з m невідомими. Розв'язок системи (9) і дає найкращі значення шуканих параметрів.

Приклад 5. Величина товарообміну x (тисяч гривень) та витрати обігу y (гривень) задані таблицею

x	60	80	140	160	240	320
y	551	576	628,5	673	768,5	863

Знайти аналітичну залежність між y та x.

Розв'язання. Спочатку побудуємо у прямокутній системі координат задані таблицею точки (рис. 1).

Малюнок дозволяє припустити існування лінійної залежності між y та x, тобто у вигляді: $y = ax + b$.

Запишемо для цієї задачі функцію S за формулою (8):

$$S = \sum_{k=1}^{6} \left(y_k - (ax + b) \right)^2 .$$

Згідно з методом найменших квадратів параметри a та b повинні надавати мінімум функції S.

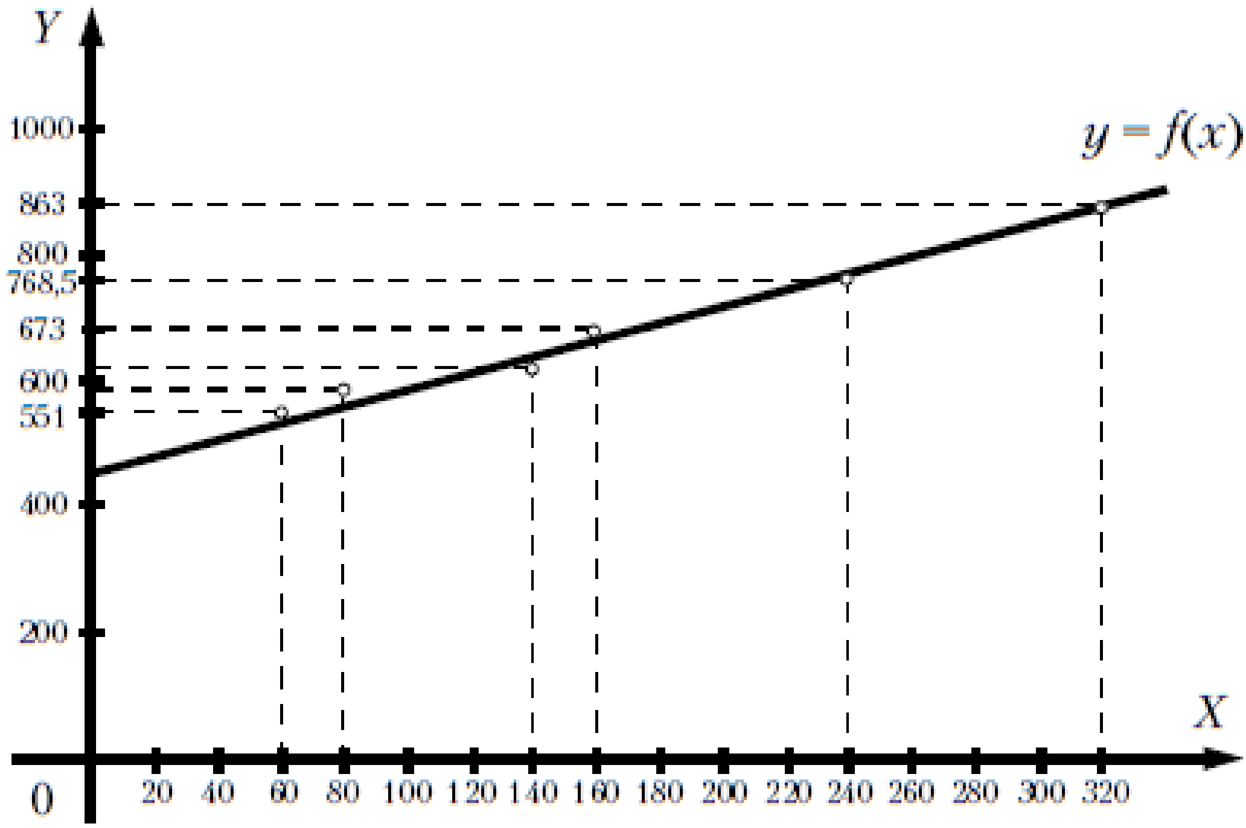


Рис. 1.

Використовуючи необхідну умову (9), одержимо

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{6} 2(y_k - ax_k - b)\cdot(x_k) = 0 \\ \sum\limits_{k=1}^{6} 2(y_k - ax_k - b)\cdot(-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\sum\limits_{k=1}^{6} x_k^2 + b\sum\limits_{k=1}^{6} x_k = \sum\limits_{k=1}^{6} y_k x_k \\ a\sum\limits_{k=1}^{6} x_k + 6b = \sum\limits_{k=1}^{6} y_k \end{cases}.$$

Розв'язок цієї системи можна знайти за правилом Крамера:

$$a = \frac{6\sum\limits_{k=1}^{6} x_k y_k - \left(\sum\limits_{k=1}^{6} x_k\right)\cdot\left(\sum\limits_{k=1}^{6} y_k\right)}{6\sum\limits_{k=1}^{6} x_k^2 - \left(\sum\limits_{k=1}^{6} x_k\right)^2}, \tag{10}$$

$$b = \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{6} x_k^2\right)\cdot\left(\sum\limits_{k=1}^{6} y_k\right) - \left(\sum\limits_{k=1}^{6} x_k y_k\right)\cdot\left(\sum\limits_{k=1}^{6} x_k\right)}{6\sum\limits_{k=1}^{6} x_k^2 - \left(\sum\limits_{k=1}^{6} x_k\right)^2}. \tag{11}$$

Використовуючи значення x_k та y_k з таблиці, одержимо:

$$\sum_{k=1}^{6} x_k = 60+80+140+160+240+320=1000.$$

$$\sum_{k=1}^{6} y_k = 551+576+628{,}5+673+768{,}5+863=4080.$$

$$\sum_{k=1}^{6} x_k y_k = 60\cdot 551+80\cdot 576+140\cdot 628{,}5+160\cdot 673+240\cdot 768{,}5+$$
$$+320\cdot 863=735410.$$

$$\sum_{k=1}^{6} x_k^2 = (60)^2+(80)^2+(140)^2+(160)^2+(240)^2+(320)^2=215200.$$

Підставимо ці значення у формули (10) та (11).

Тоді одержимо

$$a=\frac{6\cdot 735410-1000\cdot 4080}{6\cdot 215200-1000000}=\frac{60\cdot(73541-68000)}{100(6\cdot 2152-10000)}=\frac{16623}{14560},$$

$$b=\frac{215200\cdot 4080-735410\cdot 1000}{6\cdot 215200-1000000}=\frac{1000\cdot(2152\cdot 408-735410)}{100(6\cdot 2152-10000)}=$$
$$=\frac{356515}{728}.$$

Наближено можна вважати $a\approx 1{,}13,\ \ b\approx 489{,}71.$

Отже, одержали функціональну залежність вигляду

$$y=1{,}13x+489{,}71.$$

Заключення.

В питаннях управління підприємствами зв’язку, а також в інших галузях, в бізнесі, менеджменті, аудиті використовуються функцій кількох змінних.

Сьогодні ми вивчили як визначати максимальні та мінімальні значення функцій багатьох змінних вигляду $f(x,\ y,\ z,\ t)$, а також вирішувати задачі оптимізації, коли цільова функція задана як функція багатьох змінних.

ЛЕКЦІЯ 15. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ. ПРАВИЛА ІНТЕГРУВАННЯ

План лекції.

1. Означення первісної та невизначеного інтегралу
2. Таблиця інтегралів.
3. Основні методи інтегрування.
   3.1. Безпосереднє інтегрування
   3.2. Інтегрування методом заміни змінної
   3.3. Інтегрування частинами

Вступ.

Із елементарної математики відомі взаємно обернені дії: додавання та віднімання, множення та ділення, піднесення до степені та добування кореня, логарифмування та потенціювання. Іншою парою взаємно обернених математичних операцій є диференціювання та інтегрування.

1. Означення первісної та невизначеного інтегралу

1.1. Означення інтегрування та інтегралу

Швидкість f зміни функції $\boldsymbol{F}$ визначалася її першою похідною $\boldsymbol{F'} = f$ і дозволяла знайти диференціал функції $d\boldsymbol{F} = f(x) \cdot dx$. Нагадаємо, що додавання константи ($\boldsymbol{C}$) до початкової функції не змінює її похідну $\boldsymbol{F'}=(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{C})' = f$ та її диференціал $dF = d(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{C})$. Якщо $\boldsymbol{F'} = f$, то функцію $\boldsymbol{F}$ називають **первісною** для функції f. Так, наприклад:

$$(x^2)' = (x^2 + 7)' = (x^2 + 89)' = 2x.$$

Спробуємо розв'язати **зворотню задачу** – за інформацією про швидкість зміни функції *відновити* значення самої функції. Припустимо, що функція $\boldsymbol{F}$ – це довжина шляху. Якщо рух виконується з постійною швидкістю (f) із моменту x_1 до моменту x_2, (рис. 1), то довжину пройденого шляху можна знайти помноживши **швидкість** руху на **час** руху:

$$\boldsymbol{F} = f \cdot (x_2 - x_1) = \boldsymbol{S}.$$

Звернемо увагу, що отримана довжина шляху виявляється такою, що дорівнює *площі* $\boldsymbol{S}$ під лінією швидкості (рис. 1).

Якщо швидкість руху в часі *змінюється* (рис. 2), то для відшукання довжини пройденого шляху (*площі* $\boldsymbol{S}$ під лінією швидкості), інтервал часу руху ($x_2 - x_1$) можна поділити на мікроінтервали (dx) із конкретним значенням швидкості ($f(x)$) усередині кожного інтервалу і знайти мікрошлях (dS) на кожному такому мікроінтервалі:

$$dS = f(x) \cdot dx = F^{'}(x) \cdot dx = dF\,; \quad \rightarrow \quad f(x) \cdot dx = dF\,.$$

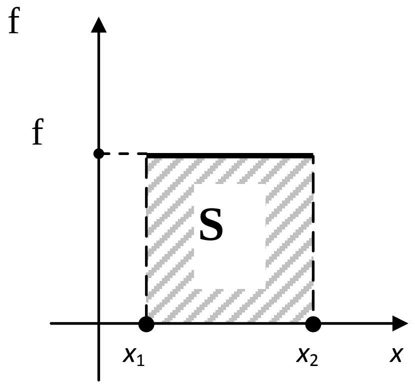


Рис. 1. Залежність швидкості (f) руху

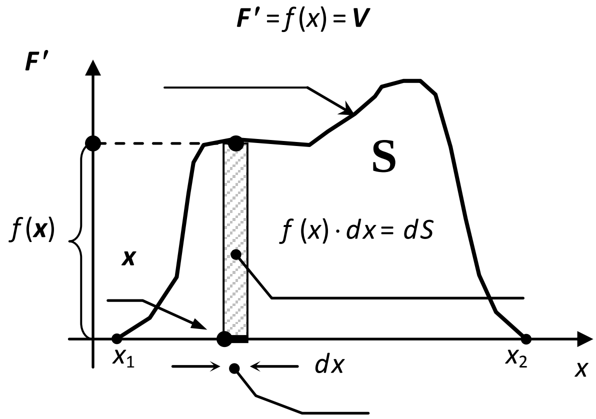


Рис. 2. Залежність швидкості ($\boldsymbol{F}'$) руху від часу x

Далі, щоб одержати загальну площу (довжину шляху), потрібно додати мікрошляхи (*мікроплощі* $d\boldsymbol{S}$) на усіх мікроінтервалах.

Така операція називається **інтегруванням** і позначається значком інтегрування ($\int$):

$$f(x) \cdot dx = dF\,; \;\rightarrow\; \int f(x) \cdot dx = \int dF\,; \quad \Rightarrow \quad \int f(x)\, dx = F + C\,. \quad (1)$$

Застосування операції інтегрування до диференціалу функції відновлює початкову функцію з точністю до константи.

Тепер *сформулюємо* отримані *результати*.

Первісною для функції $f(x)$ називається функція $F(x)$, якщо перша похідна від функції $F(x)$ дорівнює початковій функції $f(x)$, тобто якщо:

$$F'(x) = f(x).$$

Будь-яка безперервна функція $f(x)$ має незліченну множину первісних, які відрізняються одна від одної постійним доданком. Дійсно,

$$(x^2)' = (x^2 + 1)' = (x^2 + 2)' = \ldots = (x^2 + C)' = 2x.$$

Невизначеним інтегралом від функції $f(x)$ називається сукупність *усіх* первісних $F(x)$ функції $f(x)$:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \qquad (2)$$

де $F(x)$ – будь-яка *первісна* від функції $f(x)$;

C – довільна постійна (константа).

Інтегруванням функції $f(x)$ називається процес відшукання первісних цієї функції $f(x)$.

Відзначимо, що якщо границі зміни аргументу x стають *визначеними*, тобто відомо, що $x_1 \le x \le x_2$, то *невизначений* інтеграл стає ***визначеним***.

1.2. Визначений інтеграл.

Sab = ΔS = S(x_1**b) – S(**x_1**a)**

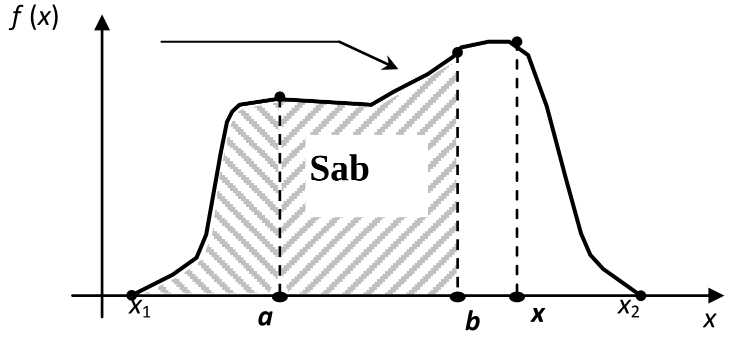


Рис. 3. Зв'язок швидкості руху $\boldsymbol{f}(x) = \boldsymbol{F'}$ і шляху $\boldsymbol{S}$

Спробуємо вивести формулу, яка дозволяє відшукувати значення інтеграла у випадку, коли *границі* змін аргументу x відомі. Наприклад для випадку відшукання довжини пройденого шляху $\boldsymbol{F}(x)$ із моменту **початку** руху (x_1) до поточного моменту (x) потрібно знайти суму всіх мікроплощин під лінією швидкості руху до моменту (x) (див. рис. 2), що зазначимо в формулі (2) в границях підсумовування:

$$\int_{x_1}^{\boldsymbol{x}} f(x)\,dx = F(\boldsymbol{x}) + C = S(x_1\boldsymbol{x})\,.$$

Цей шлях дорівнюватиме площі під лінією $f\,(x)$ швидкості руху до моменту часу (x), що наведено на рис. 3.

Задамося питанням: як можна знайти довжину пройденого шляху (S_{ab}) за час із моменту ($x = a$) до моменту ($x = b$)? На рис. 3 ця довжина шляху співпаде з площею під лінією $f\,(x)$ швидкості руху з моменту часу ($x = \boldsymbol{a}$) до моменту ($x = \boldsymbol{b}$) і може бути знайдена як різниця площ: площі під лінією швидкості від моменту часу ($x = x_1$) до моменту ($x = \boldsymbol{b}$) і площі під лінією швидкості від моменту часу ($x = x_1$) до моменту ($x = \boldsymbol{a}$) , тобто:

$$S_{ab} = \Delta S = S\,(x_1\boldsymbol{b}) - S\,(x_1\boldsymbol{a}).$$

Отже, для відшукання *довжини* пройденого шляху між моментами часу ($x = \boldsymbol{a}$) і ($x = \boldsymbol{b}$) достатньо (див. рис. 3) із довжини шляху $S\,(x_1\boldsymbol{b})$ до моменту ($x = \boldsymbol{b}$) відняти довжину шляху $S\,(x_1\boldsymbol{a})$, пройденого до моменту ($x = \boldsymbol{a}$). Зазначимо границі ($\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$) зміни значення часу руху x у границях підсумовування (інтегрування) і запишемо:

$$S_{ab} = \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} f(x)\,dx = S(x_1\boldsymbol{b}) - S(x_1\boldsymbol{a}) = \int_{x_1}^{\boldsymbol{b}} f(x)\,dx - \int_{x_1}^{\boldsymbol{a}} f(x)\,dx =$$
$$= \big(F(\boldsymbol{b}) + C\big) - \big(F(\boldsymbol{a}) + C\big) = F(\boldsymbol{b}) - F(\boldsymbol{a})\,.$$

Формулою Ньютона-Лейбніца називається отриманий для обчислення значення **визначеного інтеграла** вираз:

$$\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} f(x)\,dx = F(\boldsymbol{b}) - F(\boldsymbol{a})\,, \tag{3}$$

який іноді записують у такому вигляді:

$$\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} f(x)\,dx = F(\boldsymbol{x})\Big|_a^b = F(\boldsymbol{b}) - F(\boldsymbol{a})\,. \qquad (4)$$

Визначеним інтегралом називається вираз (4), що геометрично *дорівнює площі* S_{ab} між лінією функції $f(x)$, яка стоїть під інтегралом, і віссю абсцис на інтервалі змін аргументу x: $a \le x \le b$.

У розглянутому прикладі руху для відшукання довжини шляху, пройденого з моменту ($x = \boldsymbol{a}$) до моменту ($x = \boldsymbol{b}$), потрібно:

1) знайти первісну $\boldsymbol{F}$ (x) для швидкості руху f (x);

2) у цю первісну спочатку підставити значення ($x = \boldsymbol{b}$);

3) потім у цю первісну підставити значення ($x = \boldsymbol{a}$);

4) знайти різницю значень первісних.

Яким чином відбувається ***відшукання первісної*** у процесі інтегрування, тобто як знаходиться невизначений інтеграл, розглянемо на прикладі. Візьмемо степеневу функцію дійсного $n \ne -1$, $F(x) = x^{n+1}$ і знайдемо першу похідну від лівої і правої частин цієї рівності:

$$F'(x) = (x^{n+1})' = (n + 1) \cdot (x^{n+1-1})' = (n + 1) \cdot x^{n} = f(x).$$

Із даного виразу з урахуванням упровадженого поняття (формула (2)) невизначеного інтеграла, знаходимо:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C; \to \int (n+1)\cdot x^n\,dx = x^{n+1} + C_1; \quad \to \quad \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\,.$$

Приклад. Знайти інтеграл від степеневої функції при $n = 2$:

$\int x^2\,dx = \dfrac{x^{2+1}}{2+1} + C = \dfrac{x^3}{3} + C$. Відзначимо, що при $C = 0$ результат інтегрування парної функції виявляється функцією непарною. Ця властивість процесу інтегрування знадобиться в розділі “Теорія ймовірностей”.

Для повноти аналізу розглянемо також загально прийнятий варіант формулювань поняття “визначений інтеграл”.

Поняття “визначений інтеграл” часто пов’язують із задачею відшукання площі $\boldsymbol{S}$ між лінією $y = f(x)$ і віссю абсцис (див. рис. 3) на інтервалі значень аргументу $x \in [a, b]$.

Якщо функція $f(x)$ не має аналітичного опису і задана у вигляді графіка, то площу знаходять приблизно. Для цього поділяють інтервал значень аргументу $x \in [a, b]$ на часткові інтервали $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ і на кожному з них знаходять висоту $f(C_i)$ і площу i-го прямокутника $\boldsymbol{S}_i = f(C_i) \cdot \Delta x_i$, потім ці площі додають $\boldsymbol{S} = \Sigma\, \boldsymbol{S}_i$. Розглянемо цю задачу для загального випадку.

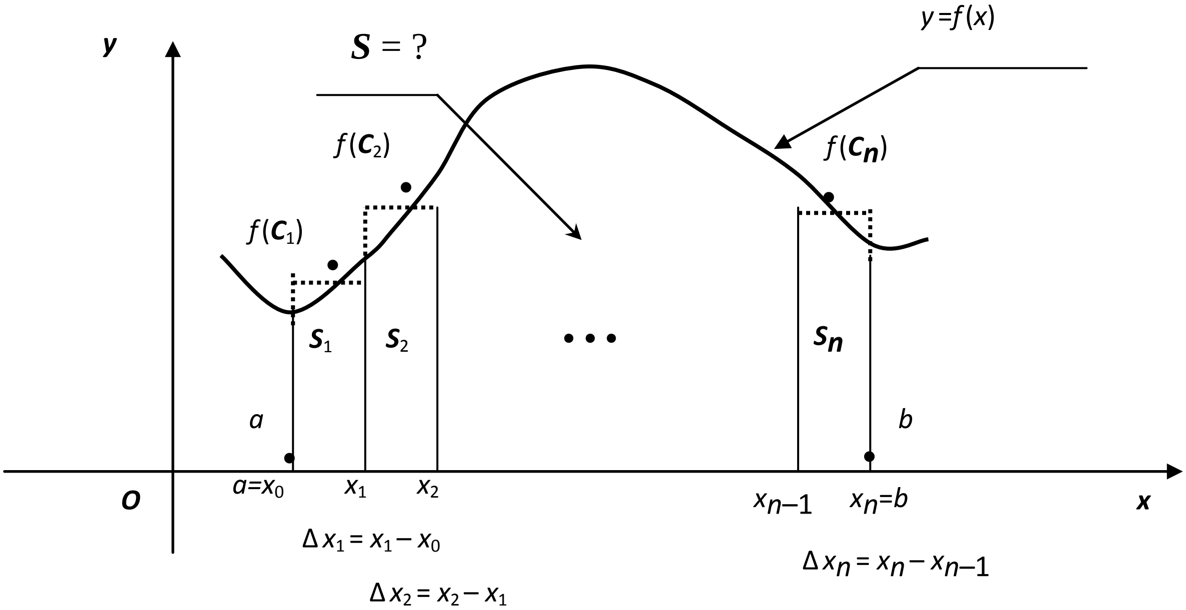


Рис. 4. Пояснення до поняття “визначений інтеграл”

Нехай на інтервалі $[a, b]$ задана обмежена функція $y = f(x)$ (див. рис. 4). Розіб’ємо інтервал $[a, b]$ на n довільних частин (часткових інтервалів) точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ так, щоб виконувалася умова:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

і позначимо довжину i-го часткового інтервалу $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. На кожному частковому інтервалі виберемо довільну точку C_i:

$$x_{i-1} \le C_i \le x_i ,$$

потім знайдемо значення функції $f(C_i)$ у кожній такій точці і складемо вираз для наближеної оцінки значення шуканої площі:

$$f(C_1)\Delta x_1 + f(C_2)\Delta x_2 + \ldots + f(C_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(C_i)\Delta x_i ,$$

який (вираз) називається ***інтегральною сумою***.

Визначеним інтегралом від функції $f(x)$ на інтервалі $[a,\ b]$ (або в границях від a до b) називається границя інтегральної суми при прагненні до нуля довжини найбільшого часткового інтервалу Δx_i.

Позначається визначений інтеграл так само, як і невизначений, але з вказівкою границь інтегрування $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(C_i)\Delta x_i .$$

Якщо ця границя існує, то функція $f(x)$ називається такою, що інтегрується на $[a, b]$.

Будь-яка *безперервна* на $[a, b]$ *функція* $f(x)$ є такою, що *інтегрується* на цьому інтервалі.

1.3. Властивості невизначеного інтеграла

Властивості невизначеного інтеграла перерахуємо з указівкою можливого шляху їх доведення:

1) $\left(\int f(x)\,dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = f(x)$ (похідна від інтеграла дорівнює підінтегральній функції);

2) $d\left(\int f(x)dx\right) = d\left(F(x)+C\right) = f(x)\,dx$ (диференціал від інтеграла дорівнює підінтегральному виразу);

3) $\int dF(x) = F(x) + C$ (інтеграл від диференціала функції дорівнює цій функції плюс константа, що перевіряється диференціюванням рівності);

4) $\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx$ (константа виноситься за знак інтеграла);

5) $\int \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx$ (інтеграл від суми функцій дорівнює сумі інтегралів від цих функцій).

2. Таблиця інтегралів

Таблиця 1

Таблиця формул основних інтегралів

1	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	8	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\, x + C$
2	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	9	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
3	$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$	10	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}\, x + C$
4	$\int \cos x\, dx = \sin x + C$	11	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln\lvert f(x)\rvert + C$
5	$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$	12	$\int \mathrm{tg}\, x\, dx = -\ln\lvert \cos x\rvert + C$
6	$\int e^x dx = e^x + C$	13	$\int \mathrm{ctg}\, x\, dx = \ln\lvert \sin x\rvert + C$
7	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C$	14	$\int U\, dV = UV - \int V\, dU$

Приклад. Розглянемо типові приклади на використання методів інтегрування. Необхідно знайти такі інтеграли і перевірити результат шляхом диференціювання:

1) $\int \left(x^3 - 2x^2 + 1\right) dx$. *Розв'язання.* Скориставшись властивостями 3 і 4 невизначеного інтеграла і формулою 1 табл. 1, одержимо:

$$\int \left(x^3 - 2x^2 + 1\right) dx = \int x^3\, dx - 2\int x^2\, dx + \int dx = \frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} + x + C.$$

Виконуючи диференціювання, одержуємо підінтегральний вираз та переконуємося в правильності знайденого результату:

$$\left(\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} + x + C\right)' = \frac{4x^3}{4} - 2\frac{3x^2}{3} + 1 = x^3 - 2x^2 + 1.$$

<u>Висновок</u>: інтегрування виконано правильно.

3. Основні методи інтегрування

3.1. Безпосереднє інтегрування.

Такий метод полягає у прямому застосуванні властивостей невизначеного інтеграла і таблиці інтегралів. При цьому підінтегральна функція може перетворюватися до виду, що дозволяє пряме застосування властивостей невизначеного інтеграла і таблиці інтегралів. Методами перетворення є: інтегрування частинами і різні варіанти заміни змінної (підстановки).

3.2. Інтегрування методом заміни змінної (методом підстановки).

Заміна змінних виконується за допомогою підстановок двох видів:

1) змінна x приймається як функція від нової змінної t, $x = \varphi(t)$. Тоді: $dx = \varphi'(t)\,dt$; $f(x) = f(\varphi(t))$, що дозволяє записати:

$$\int f(x)\,dx = \int f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)\,dt = \int f_1(t)\,dt\,.$$

Якщо отриманий інтеграл із нової змінною інтегрування t буде знайдений, то, повертаючись у підсумковому виразі до початкової змінної x, одержимо шуканий вираз заданого інтеграла;

2) дана підстановка в деякому сенсі протилежна попередній. Припустимо, що підінтегральну функцію вдалося перетворити до такого вигляду:

$$f(x) = f_2\big(\psi(x)\big)\cdot\psi'(x)\,.$$

Тоді, приймаючи $t = \psi(x)$ та $dt = \psi'(x)\,dx$, одержимо:

$$\int f(x)\,dx = \int f_2\big(\psi(x)\big)\cdot\psi'(x)\,dx = \int f_2(t)\,dt\,.$$

Якщо отриманий інтеграл із нової змінної інтегрування t буде знайдений, то, повертаючись у підсумковому виразі до початкової змінної x, одержимо шуканий вираз заданого інтеграла.

3.3. Інтегрування частинами.

Для цього з формули похідної від добутку двох функцій $(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})' = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}'$, послідовно знаходимо:

$$(U\cdot V)'\cdot dx = \left(U\cdot V' + V\cdot U'\right)\cdot dx\,; \quad \rightarrow \quad d(U\cdot V) = U\cdot dV + V\cdot dU\,.$$

Інтегруючи ліву і праву частини цієї рівності з урахуванням третьої властивості невизначеного інтеграла, одержимо:

$$\int d\,(UV) = \int U\,dV + \int V\,dU\,; \qquad U\,V = \int U\,dV + \int V\,dU\,.$$

Формула інтегрування частинами, виходячи з останнього виразу:

$$\int U\,dV = UV - \int V\,dU\,,$$

де *U, V* – функції змінної *x*, що диференціюються.

За цією формулою відшукання інтеграла $\int U\,dV$ зводиться до відшукання іншого інтеграла $\int V\,dU$. Застосування формули доцільно тоді, коли відзначений інший інтеграл $\int V\,dU$ буде простіше початкового $\int U\,dV$.

Для застосування формули інтегрування частинами до деякого інтеграла $\int f\,(x)\;dx$ необхідно підінтегральний вираз $f\;(x)\;dx$ представити як два множники: U і dV. За dV завжди вибирається такий вираз, що містить dx, із якого після інтегрування можна знайти V; за U – вибирається функція, що при диференціюванні *спрощується*.

Приклади.

1) $\int tg\,(3x+1)\,d\,x\,.$ *Розв'язання.* Скориставшись властивістю 5 невизначеного інтеграла і формулою 12 табл. 1, одержимо:

$$\int tg\,(3x+1)\,d\,x = \frac{-1}{3}\cdot \ln|\cos(\,3x+1)| + C\,.$$

Виконуючи зворотне перетворення шляхом диференціювання, одержимо підінтегральний вираз і переконуємося в правильності знайденого результату:

$$\left(\frac{-1}{3}\cdot\ln|\cos(\,3x+1)|+C\right)' = \frac{-1}{3}\cdot\frac{1}{\cos(\,3x+1)}\cdot\left(-\sin\,(\,3x+1)\right)\cdot 3 = tg\,(3x+1)\,;$$

2) $\int \frac{x\,d\,x}{x^2-4}$. *Розв'язання*. Скориставшись властивістю 4 невизначеного інтеграла, другим варіантом підстановки і формулою 11 табл. 1, одержимо:

$$\int \frac{x\,d\,x}{x^2-4}=\frac{1}{2}\int \frac{2x\,d\,x}{x^2-4}=\frac{1}{2}\int \frac{d\,(x^2-4)}{x^2-4}=\frac{1}{2}\int \frac{d\,\psi}{\psi}=\frac{1}{2}\ln|\psi|+C=\frac{1}{2}\ln|x^2-4|+C\,.$$

Виконуючи диференціювання, одержимо підінтегральний вираз і переконуємося в правильності знайденого результату:

$$\left(\frac{1}{2}\ln|x^2-4|+C\right)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2-4}\cdot 2x=\frac{x}{x^2-4}\,;$$

3) $\int \frac{2x+3}{x^2+1}\,d\,x$. *Розв'язання.* Представимо підінтегральну функцію у вигляді суми двох доданків, потім інтегруємо за формулами 10 і 11 табл. 1, одержимо:

$$\int \frac{2x+3}{x^2+1}\,d\,x=\int \frac{2x}{x^2+1}\,d\,x+3\int \frac{1}{x^2+1}\,d\,x=\int \frac{d\,(x^2+1)}{x^2+1}+3\,\mathrm{arctg}\,x=$$

$$=\ln(x^2+1)+3\,\mathrm{arctg}\,x\,.$$

Виконуючи диференціювання, одержимо підінтегральний вираз і переконуємося в правильності знайденого результату:

$$\left(\ln(x^2+1)+3\,\mathrm{arctg}\,x\right)'=\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x+3\,\frac{1}{1+x^2}=\frac{2x+3}{x^2+1}\;;$$

4) $\int \frac{\cos x\,d\,x}{\sqrt{\sin x}}$. *Розв'язання.* Зробимо заміну змінних, уважаючи, що $t=\sin x$. Тоді вираз для $dt=\cos x\,\mathrm{d}x$ буде збігатися з чисельником дробу у підінтегральному виразі, потім інтегруємо за формулою 1 табл. 1, одержимо:

$$\int \frac{\cos\,x\,d\,x}{\sqrt{\sin\,x}}=\int \frac{d\,t}{\sqrt{t}}=\int t^{-\frac{1}{2}}\,d\,t=\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=2\sqrt{t}+C=2\sqrt{\sin\,x}+C\,.$$

Виконуючи диференціювання, одержимо підінтегральний вираз і переконуємося в правильності знайденого результату:

$$\left(2\sqrt{\sin x}+C\right)'=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\sin x}}\cdot\cos x=\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,;$$

5) $\int xe^x \, dx$. *Розв'язання.* Скористаємося формулою інтегрування частинами: $\int U\, dV = UV - \int V\, dU$. Покладемо $U = x$ і $dV = e^x\, dx$, тоді:

$$V = \int dV = \int e^x dx = e^x \quad \text{і} \quad UV = x\, e^x, \quad dU = dx\,.$$

Далі підставимо отримані вирази у формулу інтегрування частинами:

$$\int xe^x \, dx = xe^x - \int e^x \, dx = xe^x - e^x + C\,.$$

Виконуючи диференціювання, одержимо підінтегральний вираз і переконуємося в правильності знайденого результату:

$$\left(xe^x - e^x + C\right)' = e^x + xe^x - e^x = xe^x\,.$$

Збіг даного результату з підінтегральною функцією дозволяє стверджувати, що задача розв'язана правильно.

Заключення.

Знаходження інтегралів має суттєве значення в різноманітних економічних теоріях. Можливість відшукання первісних функцій залежить від вміння дослідника використовувати методи інтегрального числення. На наступній лекції будемо вивчати визначені інтеграли.

ЛЕКЦІЯ 16. ОСОБЛИВОСТІ ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛІВ

План лекції:

Вступ.

1. Інтегрування раціональних дробів.
2. Інтегрування виразів з ірраціональностями.
3. Особливості інтегрування функцій, первісні яких не виражаються елементарними функціями.
4. Означення та властивості визначених інтегралів.
5. Обчислення визначених інтегралів.

Заключення.

Вступ

На попередній лекції ми навчились обчислювати первісну функцію, обчислювати інтеграли. При цьому визначили, що процес інтегрування є зворотним процесом відносно диференціювання. Нагадаємо, що перевірити правильність інтегрування можна шляхом обчислення похідної від результату диференціювання. Якщо отримаємо підінтегральний вираз, то інтегрування здійснено вірно.

Нагадаємо правило інтегрування частинами:

$$\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du, \qquad (1)$$

Ця формула дозволяє спрощувати початковий інтеграл.

Приклад. Знайти $\int \ln x \cdot dx$.

Розв'язання. Нехай $u=\ln x$, $dv=dx$. Тоді $du=\dfrac{dx}{x}$, $v=x$.

За формулою інтегрування частинами (1) одержимо

$$\int \ln x \cdot dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \cdot \ln x - \int dx = x \cdot \ln x - x + C.$$

Рекомендація до застосування методу інтегрування частинами

При обранні $u(x)$ та $dv(x)$ слід пам’ятати, що спрощення заданого інтеграла можливе за рахунок диференціювання функції $u(x)$. В інтегралах вигляду

$$\int P(x) \cdot e^x dx; \qquad \int P(x) \cdot \sin x dx; \qquad \int P(x) \cdot \cos x dx$$

доцільно обирати $u = P(x)$, а залишену частину підінтегрального виразу позначати dv.

1. Інтегрування раціональних дробів

Означення 1. Дріб називається ***раціональним***, якщо його чисельник та знаменник є багаточленами, тобто дріб має вигляд

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \ldots + b_{m-1} x + b_m}, \tag{2}$$

де a_i *та* b_k *– коефіцієнти багаточленів,* $i = 0,\ 1, \ldots,\ n$; $k = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ m$.

Раціональний дріб називається ***правильним***, якщо найвищий показник степеня чисельника n менше відповідного степеня m знаменника. Дріб називається ***неправильним***, якщо $n \ge m$.

Якщо $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ дріб неправильний, тоді треба поділити чисельник на знаменник <u>за правилом ділення багаточленів</u> і одержати заданий дріб у вигляді суми багаточлена та правильного раціонального дробу, тобто

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = M_{n-m}(x) + \frac{R(x)}{Q_m(x)}. \tag{3}$$

<u>Особливості інтегрування раціональних дробів</u> полягають у розкладі дробу на багаточлен та суму найпростіших раціональних дробів:

1) якщо дріб (2) неправильний, то його зводять до суми багаточлена та правильного раціонального дробу (3);

2) правильний раціональний дріб розкладають на суму найпростіших раціональних дробів;

3) кожний доданок інтегрують окремо згідно властивості: інтеграл суми функцій дорівнює сумі інтегралів від тих функцій.

Розглянемо найпростіші дробі та можливості їх інтегування.

Означення 2. Найпростішими раціональними дробами I, II, III та IV типу називають правильні дроби вигляду*:*

$$I.\ \frac{A}{x-\alpha}. \qquad II.\ \frac{A}{(x-\beta)^k}\ \left(k \ge 2,\ \text{ціле}\right)$$

$$III.\ \frac{Dx+E}{x^2+px+q}\ \left(\frac{p^2}{4}-q<0\right).$$

$$IV.\ \frac{Gx+F}{\left(x^2+rx+s\right)^l}\ \left(l \ge 2,\ \text{ціле},\ \frac{r^2}{4}-s<0\right).$$

Умова $\frac{p^2}{4}-q<0$ означає, що квадратний тричлен x^2+px+q не має дійсних коренів і на множники не розкладається. Те саме можна сказати і про квадратний тричлен x^2+rx+s.

Розглянемо інтегрування найпростіших раціональних дробів. Інтеграли від найпростіших раціональних дробів I-го та II-го типів знаходять методом безпосереднього інтегрування:

$$\textbf{I.}\ \int\frac{Adx}{x-\alpha}=A\int\frac{d(x-\alpha)}{x-\alpha}=A\ln|x-a|+C. \tag{4.1}$$

$$\textbf{II.}\ \int\frac{Bdx}{(x-\beta)^k}=B\int(x-\beta)^{-k}d(x-\beta)=B\frac{(x-\beta)^{-k+1}}{-k+1}+C==\frac{B}{(-k+1)(x-\beta)^{k-1}}+C. \tag{4.2}$$

При інтегруванні найпростішого дробу III-го типу треба спочатку в знаменнику виділити повний квадрат, а потім той вираз, що під квадратом, замінити через нову змінну.

III. $\int \frac{Dx+E}{x^2+px+q}dx = \int \frac{Dx+E}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}dx =$

$\left(x+\frac{p}{2}=t,\right.$ оскільки $x=t-\frac{p}{2}$, $q-\frac{p^2}{4}>0$, то dx=dt. Позначимо

$$\left. q-\frac{p^2}{4}=k^2 \right)$$

$$= \int \frac{D\left(t-\frac{p}{2}\right)+E}{t^2+k^2}dt = \int \frac{D\cdot t-\frac{Dp}{2}+E}{t^2+k^2}dt = D\int \frac{tdt}{t^2+k^2} +$$
$$+\frac{2E-Dp}{2}\int \frac{dt}{t^2+k^2} = D\cdot\frac{1}{2}\ln\left|t^2+k^2\right| + \frac{2E-Dp}{2}\cdot\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{t}{k}+C .$$

Повертаючись до змінної x, та враховуючи, що $k^2=\frac{4q-p^2}{4}$, або $k=\sqrt{\frac{4q-p^2}{2}}$, одержимо:

$$\int \frac{Dx+E}{x^2+px+q}dx = \frac{D}{2}\ln\left|\left(x+\frac{p^2}{2}\right)+q-\frac{p^2}{4}\right| + \frac{2E-Dp}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{4q-p^2}}\times$$
$$\times\operatorname{arctg}\frac{\left(x+\frac{p}{2}\right)\cdot 2}{\sqrt{4q-p^2}}+C = \frac{D}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{2E-Dp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C . \qquad (4.3)$$

Інтеграл від найпростішого дробу типу IV шляхом повторного інтегрування частинами зводять до інтеграла від найпростішого дробу типу III.

Таким чином, інтегрування раціонального дробу зводиться до інтегрування багаточлена $M_{n-m}(x)$ (при $n\geq m$) та суми найпростіших дробів. Відмітимо, що вигляд найпростіших дробів визначається коренями знаменника $Q_m(x)$.

Можливі такі випадки:

1. Корені знаменника дійсні та різні, тобто

$$Q_m(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_m).$$

В цьому випадку дріб $\dfrac{R(x)}{Q_m(x)}$ розкладається на суму найпростіших дробів I-го типу:

$$\frac{R(x)}{Q_m(x)}=\frac{A_1}{x-\alpha_1}+\frac{A_2}{x-\alpha_2}+\ldots+\frac{A_m}{x-\alpha_m}. \qquad (5)$$

Невизначені коефіцієнти $A_1,\ A_2,\ldots,\ A_m$ знаходять з тотожності (5).

2. Корені знаменника дійсні, причому деякі з них кратні, тобто

$$Q_m(x)=(x-\alpha)(x-\beta)^k.$$

Тоді дріб $\dfrac{R(x)}{Q_m(x)}$ розкладається на суму найпростіших дробів I-го та II-го типу

$$\frac{R(x)}{Q_m(x)}=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B_1}{x-\beta}+\frac{B_2}{(x-\beta)^2}+\ldots+\frac{B_k}{(x-\beta)^k}, \qquad (6)$$

коефіцієнти $A,\ B_1,\ldots,\ B_k$ знаходять з тотожності (6).

3. Корені знаменника дійсні, причому деякі з них кратні, крім того знаменник містить квадратний тричлен, який не розкладається на множники, тобто

$$Q_m(x)=(x-\alpha)(x-\beta)^k\cdot(x^2+px+q).$$

В цьому випадку дріб $\dfrac{R(x)}{Q_m(x)}$ розкладається на суму найпростіших дробів I-го, II-го та III-го типів

$$\frac{R(x)}{Q_m(x)}=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B_1}{x-\beta}+\frac{B_2}{(x-\beta)^2}+\ldots+\frac{B_k}{(x-\beta)^k}+\frac{Dx+E}{x^2+px+q}, \qquad (7)$$

коефіцієнти $A,\ B_1,\ B_2,\ldots,\ B_k,\ D$ та E знаходять з тотожності (7).

Приклад 1. Знайти $\int \frac{xdx}{\left(x^2+1\right)(x-1)}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція – це правильний раціональний дріб, знаменник якого містить квадратний двочлен, який не розкладається на множники та один дійсний корінь $x=1$, тому цей дріб розкладається на суму найпростіших дробів I та III типу:

$$\frac{x}{\left(x^2+1\right)(x-1)}=\frac{(Ax+B)}{x^2+1}+\frac{C}{x-1}. \tag{8}$$

Невідомі коефіцієнти A, B, та C будемо шукати методом невизначених коефіцієнтів. Для цього праву частину рівності (8) треба привести до спільного знаменника, одержимо

$$\frac{x}{\left(x^2+1\right)(x-1)}=\frac{(Ax+B)(x-1)+C\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)(x-1)}.$$

Знаменники в обох частинах рівні, тому і чисельники повинні бути рівні, тобто

$$x=(Ax+B)(x-1)+C\left(x^2+1\right)\Rightarrow x=(A+C)x^2+(B-A)x+C-B. \tag{9}$$

Рівність (9) можлива лише тоді, коли <u>коефіцієнти при однаковому степеню x в обох частинах рівності однакові</u>, тобто

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B-A=1\Rightarrow C=B=\frac{1}{2};\ A=-\frac{1}{2}. \\ C-B=0 \end{cases}$$

Отже, розклад (8) тепер приймає вигляд

$$\frac{x}{\left(x^2+1\right)(x-1)}=\frac{-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}}{\left(x^2+1\right)}+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}.$$

Інтегруючи цю рівність, одержимо

$$\int \frac{x}{\left(x^2+1\right)\left(x-1\right)} = -\frac{1}{2}\cdot\int\frac{xdx}{x^2+1}+\frac{1}{2}\cdot\int\frac{dx}{x^2+1}+\frac{1}{2}\cdot\int\frac{dx}{x-1}=$$

$$=-\frac{1}{4}\ln\left|x^2+1\right|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\ln\left|x-1\right|+C=\ln\left|\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[4]{x^2+1}}\right|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$$

2. Інтегрування виразів, що містять ірраціональності

При інтегруванні виразів, що містять ***дробові степені змінної інтегрування*** (тобто ірраціональності), методом підстановки зводять підінтегральну функцію до раціонального дробу. Розглянемо декілька випадків.

1. Підінтегральна функція є раціональним дробом відносно x^{α}, де α дробове число. У цьому випадку вводять нову змінну $t = x^{1/q}$, де q – спільний знаменник дробових показників степеня змінної x.

Приклад 2. Знайти $J=\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^4}-\sqrt[4]{x^5}}$.

Розв'язання. Маємо: $J=\int\frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{5}{4}}}$.

Спільний знаменник дробових показників степенів $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}$ змінної x дорівнює 12. Тому зробимо підстановку $t=x^{\frac{1}{12}}$, $x=t^{12}$, $dx=12t^{11}dt$ і ми одержуємо:

$$J=\int\frac{t^6\cdot 12}{t^{16}-t^{15}}t^{11}dt=12\int\frac{t^2dt}{t-1}=12\int\frac{t^2-1+1}{t-1}dt=12\int\left(t+1\right)dt+$$

$$+12\int\frac{dt}{t-1}=12\frac{\left(t+1\right)^2}{2}+12\ln\left|t-1\right|+C=6\left(x^{\frac{1}{12}}+1\right)^2+12\ln\left|x^{\frac{1}{12}}-1\right|+C$$

2. Підінтегральний вираз містить дробові степені лінійного двочлена $(ax+b)$. У цьому випадку доцільно зробити підстановку $t=(ax+b)^{\frac{1}{q}}$, де q – спільний знаменник дробових показників степенів двочлена.

Приклад 3. Знайти $J=\int\frac{dx}{(x+1)^{\frac{3}{2}}-(x+1)^{\frac{1}{2}}}$.

Розв'язання. Нехай $t=(x+1)^{\frac{1}{2}},\ x+1=t^2,\ x=t^2-1,\ dx=2tdt$.

Тому

$$J=\int\frac{2t\cdot dt}{t^3+t}=2\int\frac{dt}{t^2+1}=2\mathrm{arctg}\,t+C=2\mathrm{arctg}\sqrt{x+1}+C\,.$$

Таким чином, інтегрування функцій, що містять дробові степені аргументу зводиться за рахунок підстановки до цілих степенів аргументу. Далі інтегрування відбувається за правилами інтегрування раціональних дробів.

3. Особливості інтегрування функцій, первісні яких не виражаються елементарними функціями

Математиками доведено, що будь-яка неперервна функція має первісну i, отже, невизначений інтеграл. Але первісна елементарної функції не завжди буде елементарною функцією. **Існують прості елементарні функції, первісні яких не можна виразити скінченою комбінацією елементарних функцій**.

Доведено, наприклад, що жоден із інтегралів

$$\int\frac{\sin x}{x}dx,\ \int\frac{\cos x}{x}dx,\ \int e^{x^2}dx,\ \int e^{-x^2}dx,\ \int\frac{e^x}{x}dx,$$

$$\int\frac{dx}{\ln x},\ \int x\cdot\mathrm{tg}x dx,\ \int\sqrt{\sin x}dx,\ \int\sin x^2 dx,\ \int\frac{e^x}{x}dx.$$

не виражається елементарними функціями. Такі інтеграли іноді зустрічаються у практичній діяльності, тоді її розглядають як нові функції і обчислюють за допомогою рядів або нескінченних добутків елементарних функцій. Наприклад, доведено, що

$$\int \frac{\sin x}{x}dx = C + \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!\cdot 3} + \frac{x^5}{5!\cdot 5} - \ldots$$

Суму членів степеневого ряду правої частини приймають за нову функцію, яку позначають $\operatorname{Si}(x) = \int \frac{\sin x}{x}dx$ і називають *синус інтегральний змінної* x.

4. Означення та властивості визначеного інтеграла

4.1. Задачі, що привели до поняття визначеного інтеграла

Розглянемо дві задачі – геометричну та фізичну.

1. ***Обчислення площі криволінійної трапеції***. Нехай на відрізку $[a,b]$ визначена неперервна функція $y = f(x)$ і будемо поки що вважати, що $f(x) \geq 0$ для усіх $x \in [a,b]$.

Фігуру, обмежену кривою $y = f(x)$, відрізком $[a,b]$ осі Ox, прямими $x = a$ та $x = b$, називають ***криволінійною трапецією***. В окремих випадках може $f(a) = 0$ або $f(b) = 0$ і тоді відповідна сторона трапеції стягується в точку.

Для обчислення площі S цієї криволінійної трапеції поділимо відрізок $[a,b]$ довільним чином на n частин точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < < \ldots < x_n = b.$$

Довжини цих частин $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1,2,\ldots,n$.

Перпендикуляри до осі Ox, проведені із точок ділення до перетину із кривою $y = f(x)$, розділяють усю площу трапеції на n вузьких криволінійних трапецій. Замінимо кожну із цих трапецій прямокутником з основою Δx_k та висотою $f(\xi_k)$, де $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$. Площа кожного такого прямокутника дорівнює $f(\xi_k)\Delta x_k$.

Сума площ усіх таких прямокутників буде дорівнювати

$$f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k .$$

Таким чином, площа S криволінійної трапеції наближено дорівнює цій сумі, тобто

$$S \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k .$$

Ця формула буде тим точнішою, чим менша величина Δx_k.

Щоб одержати точну формулу для обчислення площі S криволінійної трапеції, треба в цій формулі перейти до границі, коли $\Delta x_k \to 0.$ Тоді

$$S \approx \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k . \qquad (1)$$

2. ***Обчислення шляху, який пройшла точка.*** Нехай потрібно визначити шлях S, який пройшла матеріальна точка, що рухається в одному напрямі із змінною швидкістю $V(t)$ за час від t_0 до T.

Поділимо проміжок часу $T - t_0$ на n частин: Δt_1, $\Delta t_2, \ldots,$ Δt_n. Позначимо через ξ_k довільний момент часу із проміжку Δt_k, а значення швидкості у цій точці позначимо $V_k = f(\xi_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n.$

Точка, що рухається з постійною швидкістю V_k на проміжку часу Δt_k, проходить за цей час шлях $V_k \cdot \Delta t_k$, а за час $T - t_0$ вона пройде шлях

$$V_1\Delta t_1 + V_2\Delta t_2 + \ldots + V_n\Delta t_n = \sum_{k=1}^{n} V_k\Delta t_k = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta t_k .$$

Будемо вважати, що шлях S, пройдений точкою, наближено дорівнює цій сумі. Коли $\Delta t_k \to 0$, тоді змінна швидкість на проміжку Δt_k мало відрізняється від постійної V_k. Тому дійсне значення шляху, пройденого точкою за час $T - t_0$ буде дорівнювати границі цієї суми при $\max \Delta t_k \to 0$, тобто

$$S = \lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta t_k . \qquad (2)$$

До аналогічної суми зводиться задача про роботу змінної сили, що направлена по прямій лінії – траєкторії руху точки, до якої прикладена ця сила та інші задачі.

4.2. Означення визначеного інтеграла та його зміст

Нехай функція $f(x)$ задана на відрізку $[a,b]$. Розіб'ємо цей відрізок на n частин точками ділення

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

У кожному проміжку $\left[x_{k-1,} x_k\right]$ довжиною $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ оберемо довільну точку ξ_k *і* обчислимо відповідне значення функції $f(\xi_k)$, $k = 1,2,...,n$.

Побудуємо суму $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$, яку називають інтегральною сумою для функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$.

Означення 1. Якщо існує скінчена границя інтегральної суми при $\max \Delta x_k \to 0$, незалежна від способу ділення відрізка $[a,b]$ на частини та добору точок ξ_k, то ця границя називається ***визначеним інтегралом від функції*** $f(x)$ ***на відрізку*** $[a,b]$ і позначається

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Математично це означення можна записати так:

$$\int_b^a f(x)dx = \lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k. \quad (3)$$

Відмітимо, що числа a та b називають <u>*нижньою*</u> та <u>*верхньою межами*</u> інтегрування.

Згідно з цим означенням рівності (1) та (2) тепер можна записати у вигляді

$$S = \int_a^b f(x)dx,\ S = \int_{t_0}^{T} f(t)dt, \quad (4)$$

тобто площа криволінійної трапеції S та шлях S, пройдений точкою із змінною швидкістю $V = f(t)$ виражаються визначеним інтегралом.

4.3. Основні властивості визначеного інтеграла

Із означення (3) визначеного інтеграла та основних теорем про границі випливають такі властивості.

1. Постійний множник можна виносити за знак визначеного інтеграла, тобто якщо A – стала, то

$$\int_a^b A\cdot f(x)dx = A\cdot\int_a^b f(x)dx.$$

2. Визначений інтеграл від алгебраїчної суми скінченої кількості функцій дорівнює такій самій алгебраїчній сумі інтегралів від кожного доданку, тобто

$$\int_a^b \left[f_1(x)\pm f_2(x)\pm\ldots\pm f_m(x)\right]dx =$$
$$=\int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx \pm\ldots\pm \int_a^b f_m(x)dx.$$

3. Якщо поміняти місцями межі інтегрування, то визначений інтеграл змінює свій знак на протилежний, тобто

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

4. Визначений інтеграл з рівними межами дорівнює нулю, тобто

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

для будь-якої функції $f(x)$.

5. Якщо $f(x)\le\varphi(x)$, $x\in[a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx$.

6. Межі інтегрування можна розбити на два діапазони:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx;\ a<c<b.$$

Розглянемо застосування даних властивостей для обчислення визначених інтегралів.

5. Обчислення визначених інтегралів

Обчислення визначених інтегралів здійснюється в 2 етапи: спочатку знаходять первісну, а потім обчислюють різницю значень первісної для верхньої та нижньої меж інтегрування. Тобто якщо $F(x)$ є первісна для функції $f(x)$, то має місце рівність (***формула Ньютона-Лейбніца***):

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \qquad (5)$$

Слід відзначити, що результатом обчислення визначеного інтегралу є число, а невизначеного – функція.

Приклад 1. Обчислити $\int_{-1}^{2} 3x^2 dx$.

Розв'язання.

$$\int_{-1}^{2} 3x^2 dx = 3\int_{-1}^{2} x^2 dx = 3\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_{-1}^{2} = x^3\bigg|_{-1}^{2} = 2^3 - (-1)^3 = 8 + 1 = 9.$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\int_0^{2\pi} x\cos x dx$.

Розв'язання. Нехай $u = x$, $dv = \cos x dx$, тоді знаходимо $du = dx$, $v = \int \cos x dx = \sin x$ (взята первісна без сталої *C*).

Застосовуючи до заданого інтеграла формулу (8), одержимо

$$\int_0^{2\pi} x\cdot\cos x dx = x\cdot\sin x\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\sin x dx =$$

$$= 2\pi\cdot\sin 2\pi - 0\cdot\sin 0 + \cos x\Big|_0^{2\pi} = \cos 2\pi - \cos 0 = 0.$$

Приклад 3. Обчислити $\int_0^3 x\sqrt{1+x}dx$.

Розв'язання. Нехай $t = \sqrt{1+x}$, тоді $t^2 = 1 + x \Rightarrow x = t^2 - 1$, $dx = 2tdt$. Знайдемо межі інтегрування, використовуючи рівність $t = \sqrt{1+x}$:

$t_H = \sqrt{1+0} = 1$; $t_B = \sqrt{1+3} = 2$.

Отже,

$$\int_0^3 x\sqrt{1+x}dx=\int_1^2\left(t^2-1\right)2t^2dt=2\int_0^2\left(t^4-t^2\right)dt==2\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^2=2\left(\frac{2^5}{5}-\frac{2^3}{3}\right)-2\left(\frac{1^5}{5}-\frac{1^3}{3}\right)=$$

$$=2\frac{96-40-3+5}{15}=\frac{116}{15}=7\frac{11}{15}.$$

Методи наближених обчислень визначених інтегралів

Для деяких неперервних підінтегральних функцій $f(x)$ первісну не можна виразити елементарними функціями. У цих випадках обчислення визначеного інтеграла за формулою Ньютона-Лейбніца неможливе.

Крім того, у практичній діяльності часто досить знати лише наближене значення визначеного інтеграла і знаходити це наближене значення такими методами, які дозволяють використовувати сучасну обчислювальну техніку.

Тому методи наближеного обчислення визначених інтегралів отримали широку популярність.

Найбільш часто використовують **три методи:**

- **метод прямокутників;**
- **метод трапецій;**
- **метод парабол (метод Сімпсона)**.

Метод прямокутників.

Якщо відрізок інтегрування $[a,b]$ поділити на n рівних частин довжиною $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$ і позначити через ξ_k середню точку відрізку $\left[x_{k-1},\ x_k\right]$, тоді визначений інтеграл можна обчислити за формулою

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{n}\left[f(\xi_1)+f(\xi_2)+\ldots+f(\xi_n)\right], \qquad (6)$$

яку називають ***формулою прямокутників***. Чим більше буде n тим менший буде крок $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$ і права частина (6) буде давати більш точне значення інтеграла.

Метод трапецій.

Якщо поділити відрізок інтегрування точками ділення

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$

на n рівних частин довжиною $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ і позначити значення функції в точках ділення $f(x_k)$, тоді визначений інтеграл можна обчислити за формулою

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right], \tag{7}$$

яку називають ***формулою трапецій***. Легко бачити, що при зростанні n крок $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ зменшується, тому значення інтеграла буде більш точним.

Метод парабол (метод Сімпсона).

Якщо відрізок інтегрування $[a,b]$ поділити на парну кількість рівних частин (тобто $n = 2m$) і позначити $y_k = f(x_k)$, де $x_k = a + \Delta x \cdot k$ — точки ділення, $k = 0,\ 1,\ldots,2m$, тоді визначений інтеграл можна обчислити за формулою

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2m}\begin{bmatrix} y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m-2}) + \\ +4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2m-1}) \end{bmatrix}, \tag{8}$$

яку називають ***формулою Сімпсона***. Ця формула дає більш точне значення визначеного інтеграла тому, що для її доведення використовується метод парабол, за яким на кожному відрізку $[x_{k-1}, x_k]$ три значення функції $f(x)$ входять до інтегральної суми.

Заключення.

Знаходження інтегралів має суттєве значення в різноманітних економічних теоріях. Можливість відшукання первісних функцій залежить від вміння дослідника використовувати методи інтегрального числення. На наступній лекції будемо за допомогою інтегралів рішати диференціальні рівняння.

ЛЕКЦІЯ 17. ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

План лекції.

Вступ.

1. Загальні положення.
2. Диференціальні рівняння з відокремлювальними змінними.
3. Однорідні диференціальні рівняння.
4. Лінійні диференціальні рівняння та рівняння Бернуллі.

Заключення.

Вступ

Багато ситуацій та процесів мають математичний опис у вигляді рівняння, що містить шукану функцію та її похідні або диференціали.

Якщо невідома функція залежить лише від однієї змінної, то методи розв'язування таких рівнянь викладені в теорії звичайних диференціальних рівнянь.

Випадки, коли шукана функція залежить від декількох змінних і рівняння містить її частинні похідні, розглядаються в курсі математичної фізики.

Ми розглянемо лише звичайні диференціальні рівняння.

1. Загальні поняття

Означення 1. ***Звичайними диференціальними рівняннями*** називають такі рівняння, які містять шукану функцію однієї змінної та її похідні або диференціали.

Це означення у загальному вигляді математично можна записати так

$$F\left(x,y,y',y'',\ldots y^{(n)}\right)=0.$$

Якщо дифрівняння містить функції багатьох змінних, то його називають <u>дифрівнянням в частинних похідних</u>.

Означення 2. Найвищий порядок похідної, що містить диференціальне рівняння, називають ***порядком диференціального рівняння***.

Наприклад, рівняння $xy'-3y''=2\cos x$ – другого порядку; рівняння $y'''-x^2y'=0$ – третього порядку; рівняння $y'+\dfrac{2}{x}y=3e^{-x}$ та $x^2dx-xydx=0$ – першого порядку.

Означення 3. ***Загальним розв'язком диференціального рівняння*** n***-го порядку*** називають функцію y, яка залежить від аргументу x та n довільних сталих C_1, C_2, …, C_n, тобто має вигляд $y=\varphi\left(x,C_1,C_2,\ldots,C_n\right)$ яка, при її підстановці у рівняння, перетворює рівняння у тотожність.

Загальний розв'язок диференціального рівняння може бути і не розв'язаним відносно y, тобто мати вигляд $F\left(x,y,C_1,C_2,\ldots,C_n\right)=0$. У цьому випадку його називають ***загальним інтегралом диференціального рівняння***.

Означення 4. Якщо у загальному розв'язку (інтегралі) диференціального рівняння замість довільних сталих записати фіксовані постійні числа, то одержаний розв'язок називають ***частинним розв'язком цього рівняння***.

Найчастіше сталі C_1, C_2,…, C_n обирають не довільно, а так, щоб розв'язок рівняння задовольняв деяким початковим умовам. Для знаходження довільних сталих треба задати n початкових умов.

Означення 5. Сумісне завдання диференціального рівняння та відповідної кількості <u>початкових умов</u> називають ***задачею Коші***.

Наприклад, для диференціального рівняння першого порядку задачу Коші можна записати у вигляді

$$\begin{cases} F(x,y,y')=0 \\ y\big|_{x=x_0}=y_0 \end{cases}.$$

Для диференціального рівняння другого порядку задачу Коші можна записати у вигляді

$$\begin{cases} F(x,y,y',y'')=0 \\ y\big|_{x=x_0}=y_0 \\ y'\big|_{x=x_0}=y'_0 \end{cases}.$$

У дослідженнях різноманітних життєвих та економічних проблем найчастіше використовують диференціальні рівняння першого та другого порядків певних типів та відповідні їм задачі Коші.

В теорії звичайних диференціальних рівнянь можна виділити дві основні задачі:

1) знаходження диференціального рівняння та початкових умов, які описують ситуацію або процес, що досліджуються;

2) розв'язування заданої задачі Коші або знаходження загального розв'язку заданого диференціального рівняння.

Розглянемо декілька прикладів розв'язування цих основних задач.

Математичні моделі деяких ситуацій та процесів

Приклад 1. ***(Закон природного зростання).*** *Законом природного зростання* називають такий закон, за яким швидкість зростання речовини пропорційна кількості речовини.

Треба знайти формулу для визначення кількості речовини у будь-який момент часу, якщо відомо, що у початковий момент часу, тобто при $t=0$, кількість речовини дорівнювала y_0.

Розв'язання. Позначимо через $y(t)$ шукану кількість речовини в момент t. Тоді швидкість зростання речовини є швидкість зміни функції y. Згідно з механічним змістом похідної та умовою задачі закон природного зростання речовини можна записати у вигляді

$$\frac{dy}{dt}=ay, \qquad (1)$$

де $a>0$ – коефіцієнт пропорційності.

За умовою задачі повинна виконуватись рівність

$$y\big|_{t=0} = y_0 . \tag{2}$$

Отже, математична модель закону природного зростання речовини є задача Коші для диференціального рівняння першого порядку вигляду (1) з початковою умовою вигляду (2).

Рівняння (1) досить просте, тому можна знайти його загальний розв'язок.

Дійсно, рівняння (1) можна записати у вигляді

$$\frac{dy}{y} = adt \text{ або } d(\ln y) = d(at).$$

Якщо диференціали двох функцій рівні, то функції можуть відрізнятись лише довільною сталою, тому

$$\ln y = at + C.$$

Звідси, потенціюванням знаходимо

$$y = e^{at+C}. \tag{3}$$

Формула (3) дає вираз для кількості речовини як функції часу. Вона містить довільну сталу C, яка може приймати довільні числові значення. Тому формула (3) дає не один, а нескінченну кількість розв'язків задачі.

Використовуючи початкові умови (2), одержимо:

$$y_0 = e^C.$$

Отже, формула (3) тепер буде мати вигляд

$$y = y_0 e^{at}. \tag{4}$$

Це і є шукане рішення дифрівняння.

За законом природного зростання (4) зростає кількість живих клітин, кристалів, населення.

Приклад 2. ***(Рівняння руху).*** Нехай матеріальна точка $M(x, y, z,)$ масою m рухається в просторі. Радіус-вектор цієї точки позначимо $\vec{r}$. Координати точки M є і координатами радіус-вектора $\vec{r}$. Для математичного опису руху матеріальної точки треба знайти вираз $\vec{r}$ або його координат x, y, z у вигляді функції часу t.

Розв'язання. Згідно з механічним змістом похідних першого та другого порядків, вектор

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt}=\left(x'(t),y'(t),z'(t)\right) \tag{5}$$

є швидкість, а вектор

$$\frac{d^2\vec{r}(t)}{(dt)^2}=\left(x''(t),y''(t),z''(t)\right) \tag{6}$$

є прискоренням руху точки M.

За законом Ньютона:

$$m\frac{d^2\vec{r}(t)}{(dt)^2}=\vec{F}, \tag{7}$$

де сила $\vec{F}=(X,Y,Z)$.

Рівняння (7) називають *основним рівнянням механіки*. Це рівняння еквівалентне трьом рівнянням у координатній формі

$$\begin{gathered} mx''(t)=X; \\ my''(t)=Y; \\ mz''(t)=Z. \end{gathered} \tag{8}$$

Отже, одержали, що математичною моделлю руху є диференціальне рівняння другого порядку (7) або система диференціальних рівнянь (8).

Приклад 3. (*Зростання інвестицій).* Економісти встановили, що швидкість зростання інвестованого капіталу у будь-який момент часу t пропорційна величині капіталу із коефіцієнтом пропорційності рівним узгодженому відсотку R неперервного зростання капіталу. Треба знайти закон зростання інвестованого капіталу, враховуючи величину початкової $(t=0)$ інвестиції K_0.

Розв'язання. Спочатку побудуємо математичну модель цієї задачі.

Позначимо: $K(t)$ – величина інвестованого капіталу у момент t (шукана функція);

тоді $\frac{dK(t)}{dt}$ – швидкість зміни величини інвестиції, $r = \frac{R}{100}$. За умовою задачі маємо:

$$\begin{cases} \frac{dK(t)}{dt} = rK(t) \\ K(t)\big|_{t=0} = K_0 \end{cases}. \tag{9}$$

Одержали задачу Коші для дифрівняння 1-го порядку аналогічного рівнянню (1).

Тому загальним розв'язком диференціального рівняння буде функція

$$K(t) = e^{rt+C} = e^C e^{rt}. \tag{10}$$

Згідно з початковою умовою при $t = 0$ маємо

$$K_0 = e^C.$$

Отже, розв'язком задачі Коші (9) буде функція $K(t) = K_0 e^{rt}$. (11)

Це означає, що (при виконанні умов задачі) інвестиції з часом зростають за експоненціальним законом.

2. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Означення 6. Диференціальне рівняння першого порядку вигляду

$$N(x)dx + M(y)dy = 0 \tag{12}$$

називають ***рівнянням з відокремленими змінними***.

У цьому рівнянні коефіцієнтом при dx є функція, яка залежить лише від x або стала величина, а коефіцієнт при dy – функція, яка залежить лише від y або стала величина.

Загальний розв'язок рівняння з відокремленими змінними знаходять шляхом його інтегрування:

$$\int N(x)dx + \int M(y)dy = C. \tag{13}$$

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$\frac{1}{x}dx+\frac{1}{y}dy=0.$$

Розв'язання. У заданому рівнянні при dx та при dy записані функції, які залежать лише від x та y, відповідно.

Тому це рівняння з відокремленими змінними і його загальний розв'язок знайдемо шляхом інтегрування. Одержимо:

$$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dy}{y}=C\Rightarrow \ln|x|+\ln|y|=C\Rightarrow \ln|xy|=C\Rightarrow$$

$$\Rightarrow|xy|=e^C\Rightarrow xy=e^C\Rightarrow y=\frac{1}{x}e^C$$ – загальний розв'язок.

Означення 7. Диференціальне рівняння першого порядку вигляду

$$P_1(x)P_2(y)dx+Q_1(y)Q_2(x)dy=0 \qquad (14)$$

називають ***рівнянням з відокремлюваними змінними***.

Загальний розв'язок такого рівняння знаходять шляхом зведення його до рівняння з відокремленими змінними, тобто до вигляду

$$\frac{P_1(x)}{Q_2(x)}dx+\frac{Q_1(y)}{P_2(y)}dy=0$$

з подальшим інтегруванням.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $2^{x+y}+3^{x-2y}y'=0$.

Розв'язання. Для визначення типу заданого диференціального рівняння першого порядку запишемо його у такому вигляді

$$\frac{3^x}{3^{2y}}\frac{dy}{dx}=-2^x2^y\Rightarrow\frac{3^x}{3^{2y}}dy+2^x2^ydx=0. \qquad (15)$$

Отже, рівняння має вигляд (14), тобто воно з відокремлюваними змінними. Приведемо рівняння (15) до рівняння з відокремленими змінними шляхом його ділення на 3^x2^y. Одержимо:

$$\frac{dy}{3^{2y}\cdot2^y}+\frac{2^x}{3^x}dx=0\Rightarrow\frac{dy}{(9\cdot2)^y}+\left(\frac{2}{3}\right)^xdx=0.$$

Шляхом інтегрування одержимо

$$\int 18^{-y}dy+\int\left(\frac{2}{3}\right)^{x}dx=C\Rightarrow\frac{-18^{-y}}{\ln 18}+\left(\frac{2}{3}\right)^{x}:\ln\frac{2}{3}=C.$$

Отже, загальним інтегралом заданого рівняння буде

$$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{x}}{\ln\frac{2}{3}}-\frac{1}{18^{y}\cdot\ln 18}=C.$$

Якщо розв'язати цю рівність відносно y, то одержимо загальний розв'язок диференціального рівняння.

Якщо в умові задачі є початкові умови, то необхідно їх підставити в загальний розв’язок, отримати значення сталої C, та отримати частковий розв’язок диференціального рівняння.

3. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

Означення 8. ***Однорідним диференціальним рівнянням першого порядку*** називають рівняння, яке можна звести до вигляду

$$y'=f(x,y), \tag{16}$$

де функція $f(x,y)$ не змінюється при заміні x та y на tx та ty, тобто задовольняє умові

$$f(tx,ty)=f(x,y).$$

Відмітимо, що функцію $f(x,y)$, яка задовольняє вказаній умові, називають ***однорідною нульового виміру***.

Однорідне диференціальне рівняння першого порядку шляхом підстановки

$$U=\frac{y}{x} \tag{17}$$

можна звести до рівняння з відокремлюваними змінними.

Приклад 6. Розв’язати рівняння $y' = \dfrac{y}{x+y}$

Розв'язання. Це рівняння є однорідним диференціальним рівнянням першого порядку тому, що воно має вигляд (16) та для правої частини рівняння виконується умова:

$$\frac{ty}{tx+ty} = \frac{ty}{t(x+y)} = \frac{y}{x+y}.$$

При підстановці $U = \dfrac{y}{x}$ маємо:

$$y = U\cdot x \Rightarrow y' = U'\cdot x + U.$$

Тому задане рівняння прийме вигляд

$$U'\cdot x + U = \frac{U\cdot x}{x+U\cdot x} \Rightarrow U'\cdot x = \frac{U}{1+U} - U \Rightarrow x\frac{dU}{dx} = \frac{U-U-U^2}{1+U} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x\cdot\frac{dU}{dx} = -\frac{U^2}{1+U} \Rightarrow \frac{1+U}{U^2}dU = -\frac{dx}{x}.$$

Останнє рівняння є рівнянням з відокремленими змінними. Інтегруючи його, знаходимо:

$$\int\left(\frac{1}{U^2}+\frac{1}{U}\right)dU = -\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{1}{U} - \ln U = \ln x + \ln C \Rightarrow \frac{1}{U} = \ln(CUx).$$

Підставимо замість U її значення $\dfrac{y}{x}$. Одержимо

$$\frac{x}{y} = \ln Cy \Rightarrow x = \ln(Cy)^y.$$

Отже, загальний розв'язок заданого рівняння розв'язали відносно x.

4. Лінійні диференціальні рівняння та рівняння Бернуллі

Означення 9. ***Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку*** називають рівняння, яке містить шукану функцію y та її похідну y' у першій степені. Таке рівняння можна привести до вигляду

$$y' + P(x)y = Q(x). \tag{18}$$

Теорема 1. ***Загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння першого порядку вигляду (18) можна знайти за формулою***

$$y = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left[C + \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx \right]. \tag{19}$$

Доведення. Будемо шукати розв'язок рівняння (18) у вигляді

$$y = u(x) \cdot v(x). \tag{20}$$

Одну із цих функцій можна взяти довільно, а друга буде визначатися так, щоб їх добуток задовольняв рівняння (18). Диференціюванням рівності (20) по x одержимо:

$$y' = \frac{du}{dx} v + u \cdot \frac{dv}{dx}. \tag{21}$$

Підставимо (20) та (21) у задане рівняння (18). Тоді

$$\frac{du}{dx} \cdot v + u \cdot \frac{dv}{dx} + P \cdot u \cdot v = Q \quad \text{або} \quad \frac{du}{dx} \cdot v + u \left[\frac{dv}{dx} + Pv \right] = Q \tag{22}$$

Визначимо v так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю, тобто, виконувалась рівність

$$\frac{dv}{dx} + Pv = 0. \tag{23}$$

Це рівняння 1 порядку з відокремлюваними змінними. Відокремлюючи змінні, одержимо

$$\frac{dv}{v} = -Pdx \Rightarrow \ln|v| = -\int P(x)dx + \ln C_1 \Rightarrow v = C_1 e^{-\int P(x)dx}.$$

Нам достатньо взяти $v(x) \neq 0$. Тому візьмемо $C_1 = 1$, тоді

$$v(x) = e^{-\int P(x)dx}. \tag{24}$$

Підставимо функцію v вигляду (24) у формулу (22). Одержимо:

$$v(x)\frac{du}{dx} = Q(x) \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{Q(x)}{v(x)} \Rightarrow u = \int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + C.$$

Підстановка одержаних функцій u та v у формулу (20) дає загальний розв'язок рівняння (18) у вигляді

$$y = v(x)\left[C + \int Q(x) \cdot v^{-1}(x) dx \right] = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left[C + \int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx \right],$$

що й треба було довести.

Відмітимо, що формула (19) здається складною. Але вона значно спрощує розв'язування багатьох диференціальних рівнянь.

Означення 10. Диференціальне рівняння першого порядку вигляду

$$y' + P(x)y = Q(x)\cdot y^n \tag{25}$$

де $n\neq 0$ та $n\neq 1$ називають ***рівнянням Бернуллі***.

Рівняння Бернуллі зводиться до лінійного рівняння відносно функції Z завдяки підстановці:

$$Z = y^{-n+1} \tag{26}$$

Дійсно, помножимо рівняння Бернуллі (25) на y^{-n} і зробимо підстановку (26), при якій

$$Z' = (-n+1)y^{-n}\cdot y'.$$

Тоді рівняння Бернуллі прийме вигляд

$$Z' + (1-n)P(x)\cdot Z = (1-n)Q(x). \tag{27}$$

Загальний розв'язок лінійного рівняння (27) знайдемо за формулою (19) у вигляді

$$Z = y^{-n+1} = e^{(n-1)\int P(x)dx}\cdot\left[C + (1-n)\int Q(x)e^{(1-n)P(x)dx}dx\right].$$

Звідси знаходять загальний розв'язок y рівняння Бернуллі.

Приклад 7. Розв'язати рівняння

$$xy' - 4y = x^2\cdot\sqrt{y}.$$

Розв'язання. Запишемо це рівняння у вигляді

$$y' - \frac{4}{x}y = x\cdot y^{1/2}.$$

Це рівняння Бернуллі з $n=\frac{1}{2}$. Поділимо його на $\sqrt{y}$, одержимо:

$$\frac{1}{\sqrt{y}}\cdot y' - \frac{4}{x}\cdot\sqrt{y} = x.$$

Зробимо заміну $Z=\sqrt{y}$, тоді $Z'=\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot y'$ і рівняння прийме вигляд

$$Z'-\frac{2}{x}Z=\frac{x}{2}.$$

Це лінійне рівняння відносно Z. За формулою (19) знаходимо

$$Z=e^{\int\frac{2}{x}dx}\cdot\left[C+\int\frac{x}{2}e^{-\int\frac{2}{x}dx}dx\right]=e^{2\ln x}\cdot\left[C+\int\frac{x}{2}e^{-2\ln x}dx\right]=$$
$$=x^2\left[C+\int\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{x^2}dx\right]=x^2\left(C+\frac{1}{2}\ln x\right).$$

Використали основну логарифмічну тотожність $e^{\ln\varphi(x)}=\varphi(x)$.

Отже, одержали:

$$Z=\sqrt{y}=x^2\left(C+\frac{1}{2}\ln x\right)\Rightarrow y=x^4\left(C+\frac{1}{2}\ln x\right)^2$$

– загальний розв'язок рівняння Бернуллі.

Заключення.

Диференціальні рівняння мають суттєве значення при дослідженні економічних процесів та явищ. Будь-які математичні моделі, що описують досліджуванні процеси, складаються з алгебраїчних та диференціальних рівнянь, що поєднують вхідні параметри та вихідні показники досліджуваних процесів. Для характеристики процесів важливим є визначити реакцію процесу на різні вхідні параметри. Це можна зробити завдяки математичному моделюванню та рішенню диференціальних рівнянь. Тому вміння розв’язувати диференціальні рівняння є важливою рисою сучасного фахівця.

ЛЕКЦІЯ 18. ОСОБЛИВОСТІ ІНТЕГРУВАННЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ 1-ГО ТА 2-ГО ПОРЯДКІВ

План лекції.

Вступ.

1. Лінійні диференціальні рівняння та рівняння Бернуллі.
2. Диференціальні рівняння другого порядку
   2.1. Рівняння, що дозволяють знизити порядок
   2.2. Лінійні однорідні рівняння з постійними коефіцієнтами
3. Рішення диференціальних рівнянь на комп’ютері.

Заключення.

Вступ

Практично всі явища та процеси в світі описуються системами диференціальних рівнянь.

Якщо невідома функція залежить лише від однієї змінної, то методи розв'язування таких рівнянь викладені в теорії звичайних диференціальних рівнянь.

Випадки, коли шукана функція залежить від декількох змінних і рівняння містить її частинні похідні, розглядаються в курсі математичної фізики.

Розглянемо методи інтегрування лише звичайних диференціальних рівнянь 1-го та 2-го порядків.

1. Лінійні диференціальні рівняння та рівняння Бернуллі

Означення 1. ***Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку*** називають рівняння, яке містить шукану функцію y та її похідну y' у першій степені. Таке рівняння можна привести до вигляду

$$y' + P(x)y = Q(x). \tag{1}$$

Теорема 1. ***Загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння першого порядку вигляду* (1) *можна знайти за формулою***

$$y = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left[C + \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx \right]. \tag{2}$$

Доведення. Будемо шукати розв'язок рівняння (1) у вигляді

$$y = u(x) \cdot v(x). \tag{3}$$

Одну із цих функцій можна взяти довільно, а друга буде визначатися так, щоб їх добуток задовольняв рівняння (1). Диференціюванням рівності (3) по x одержимо:

$$y' = \frac{du}{dx} v + u \cdot \frac{dv}{dx}. \tag{4}$$

Підставимо (3) та (4*)* у задане рівняння (1). Тоді

$$\frac{du}{dx} \cdot v + u \cdot \frac{dv}{dx} + P \cdot u \cdot v = Q \quad \text{або} \quad \frac{du}{dx} \cdot v + u\left[\frac{dv}{dx} + Pv \right] = Q \tag{5}$$

Визначимо v так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю, тобто, виконувалась рівність

$$\frac{dv}{dx} + Pv = 0. \tag{6}$$

Це рівняння 1 порядку з відокремлюваними змінними. Відокремлюючи змінні, одержимо

$$\frac{dv}{v} = -Pdx \Rightarrow \ln|v| = -\int P(x)dx + \ln C_1 \Rightarrow v = C_1 e^{-\int P(x)dx}.$$

Нам достатньо взяти $v(x) \neq 0$. Тому візьмемо $C_1 = 1$, тоді

$$v(x) = e^{-\int P(x)dx}. \tag{7}$$

Підставимо функцію v вигляду (7) у формулу (5). Одержимо:

$$v(x)\frac{du}{dx}=Q(x)\Rightarrow\frac{du}{dx}=\frac{Q(x)}{v(x)}\Rightarrow u=\int\frac{Q(x)}{v(x)}dx+C\,.$$

Підстановка одержаних функцій u та v у формулу (3) дає загальний розв'язок рівняння (1) у вигляді

$$y=v(x)\left[C+\int Q(x)\cdot v^{-1}(x)dx\right]=e^{-\int P(x)dx}\cdot\left[C+\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right],$$

що й треба було довести.

Відмітимо, що формула (2) здається складною. Але вона значно спрощує розв'язування багатьох диференціальних рівнянь.

Означення 2. Диференціальне рівняння першого порядку вигляду

$$y'+P(x)y=Q(x)\cdot y^n \tag{8}$$

де $n\neq 0$ та $n\neq 1$ називають ***рівнянням Бернуллі***.

Рівняння Бернуллі зводиться до лінійного рівняння відносно функції Z завдяки підстановці:

$$Z=y^{-n+1} \tag{9}$$

Дійсно, помножимо рівняння Бернуллі (8) на y^{-n} і зробимо підстановку (9), при якій

$$Z'=(-n+1)y^{-n}\cdot y'\,.$$

Тоді рівняння Бернуллі прийме вигляд

$$Z'+(1-n)P(x)\cdot Z=(1-n)Q(x)\,. \tag{10}$$

Загальний розв'язок лінійного рівняння (10) знайдемо за формулою (2) у вигляді

$$Z=y^{-n+1}=e^{(n-1)\int P(x)dx}\cdot\left[C+(1-n)\int Q(x)e^{(1-n)P(x)dx}dx\right].$$

Звідси знаходять загальний розв'язок y рівняння Бернуллі.

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$xy'-4y=x^2\cdot\sqrt{y}\,.$$

Розв'язання. Запишемо це рівняння у вигляді

$$y' - \frac{4}{x}y = x \cdot y^{1/2}.$$

Це рівняння Бернуллі з $n = \dfrac{1}{2}$. Поділимо його на $\sqrt{y}$, одержимо:

$$\frac{1}{\sqrt{y}} \cdot y' - \frac{4}{x} \cdot \sqrt{y} = x.$$

Зробимо заміну $Z = \sqrt{y}$, тоді $Z' = \dfrac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y'$ і рівняння прийме вигляд

$$Z' - \frac{2}{x}Z = \frac{x}{2}.$$

Це лінійне рівняння відносно Z. За формулою (2) знаходимо

$$Z = e^{\int \frac{2}{x}dx} \cdot \left[C + \int \frac{x}{2} e^{-\int \frac{2}{x}dx} dx \right] = e^{2\ln x} \cdot \left[C + \int \frac{x}{2} e^{-2\ln x} dx \right] =$$
$$= x^2 \left[C + \int \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{x^2} dx \right] = x^2 \left(C + \frac{1}{2} \ln x \right).$$

Використали основну логарифмічну тотожність $e^{\ln \varphi(x)} = \varphi(x)$.

Отже, одержали:

$$Z = \sqrt{y} = x^2 \left(C + \frac{1}{2} \ln x \right) \Rightarrow y = x^4 \left(C + \frac{1}{2} \ln x \right)^2$$

– загальний розв'язок рівняння Бернуллі.

2. Диференціальні рівняння другого порядку

Розглянемо особливості розв’язування декількох типів дифрівнянь 2-го порядку

2.1. Рівняння, що дозволяють знизити порядок

1. Рівняння вигляду $y'' = f(x)$, де $f(x)$ неперервна в проміжку (a, b) осі Ox. Розв'язок цього рівняння знаходять шляхом зниження порядку та інтегруванням:

$$y' = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + C_1,$$

де x_0 – довільне фіксоване значення x із (a,b), C_1 – довільне стала. Інтегруючи ще раз, одержимо загальний розв'язок рівняння у вигляді

$$y = \int_{x_0}^{x}\left[\int_{x_0}^{x} f(x)dx\right]dx + C_1(x - x_0) + C_2.$$

2. Рівняння вигляду $F(x,y',y'') = 0$, що не містить явно шукану функцію y, шляхом підстановки

$$y' = p \Rightarrow y'' = \frac{dp}{dx}$$

зводиться до рівняння першого порядку $F\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right) = 0$ відносно функції $p(x)$. Розв'язавши це рівняння, одержують

$$p = \varphi(x,C_1) \text{ або } y' = \varphi(x,C_1).$$

Знову одержали рівняння першого порядку відносно шуканої функції y. Його розв'язком буде

$$y = \int \varphi(x,C_1)dx + C_2.$$

3. Рівняння вигляду $F(y,y',y'') = 0$, яке не містить явно аргумент x, шляхом підстановки

$$y' = p(y) \Rightarrow y'' = \frac{dp}{dy}\cdot y' \text{ або } y'' = \frac{dp}{dy}\cdot p$$

зводиться до рівняння першого порядку $F\left(y, p, \frac{dp}{dy} p\right) = 0$ відносно функції p, що залежить від y. Його загальний розв'язок можна одержати у вигляді

$$p = \varphi(y,C_1) \text{ або } y' = \varphi(y,C_1) \Rightarrow \frac{dy}{\varphi(y,C_1)} = dx.$$

Інтегруючи, одержимо

$$\int \frac{dy}{\varphi(y,C_1)} = x + C_2.$$

Це і є загальний інтеграл заданого рівняння.

Приклад 2. Знайти загальні розв'язки рівнянь:

a) $y'' = x + \sin x$; b) $y'' - \frac{1}{x} \cdot y' = x$; c) $y \cdot y'' + (y')^2 = 0$.

Розв'язання.

a) Шляхом інтегрування заданого рівняння одержимо:

$$y' = \int (x + \sin x) dx = \frac{x^2}{2} - \cos x + C_1 = \frac{x^2}{2} - \cos x + 1 + C_1 ,$$

$$y = \int \left(\frac{x^2}{2} - \cos x + 1 + C_1 \right) dx = \frac{x^3}{6} - \sin x + x(1 + C_1) + C_2 .$$

b) Рівняння не містить явно шукану функцію $y(x)$. Застосуємо підстановку $y' = p$. Тоді $y'' = \frac{dp}{dx}$ і задане рівняння прийме вигляд

$$\frac{dp}{dx} - \frac{1}{x} p = x .$$

Це лінійне рівняння відносно p. За формулою (2) одержимо його загальний розв'язок

$$p = e^{\int \frac{dx}{x}} \left[C_1 + \int x e^{-\int \frac{dx}{x}} dx \right] = e^{\ln x} \left[C_1 + \int x \cdot e^{-\ln x} dx \right] =$$

$$= x \left[C_1 + \int x \cdot \frac{1}{x} dx \right] = x [C_1 + x] .$$

Повертаючись до шуканої функції y, одержимо

$$y' = x(C_1 + x) \Rightarrow y = \int (C_1 x + x^2) dx = C_1 \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + C_2 .$$

Отже, загальним розв’язком рівняння для випадку b) буде

$$y = \frac{C_1}{2} x^2 + \frac{x^3}{3} + C_2 .$$

c) Задане рівняння не містить явно аргумент x. Тому зробимо підстановку

$$y' = p(y) \text{, тоді } y'' = p \frac{dp}{dy}$$

і це рівняння прийме вигляд

$$y \cdot p \cdot \frac{dp}{dy} + p^2 = 0 \qquad \text{або} \qquad y\frac{dp}{dy} + p = 0.$$

Ми отримали рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними відносно функції $p(y)$.

Відокремлюючи змінні, одержимо

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dy}{y} \Rightarrow \ln p = -\ln y + \ln C_1 \Rightarrow p = \frac{C_1}{y}.$$

Але $p = \frac{dy}{dx}$, тому $\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{y}$ або $y \cdot dy = C_1 dx$.

Звідси одержимо загальний розв'язок заданого рівняння:

$$\frac{y^2}{2} = C_1 x + C_2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2(C_1 x + C_2)}.$$

2.2. Лінійні однорідні рівняння з постійними коефіцієнтами

Означення 3. Диференціальне рівняння 2-го порядку називають ***лінійним однорідним рівнянням з постійними коефіцієнтами,*** якщо воно має вигляд

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{11}$$

де a, b та c – сталі числа.

Для знаходження загального розв'язку такого рівняння доцільно діяти так:

1) Скласти характеристичне рівняння шляхом заміни y'' на k^2, y' на k, y на 1, тобто одержати алгебраїчне рівняння відносно k:

$$ak^2 + bk + c = 0 \tag{12}$$

2) Розв'язати характеристичне рівняння:

$$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{13}$$

3) Проаналізувати корені характеристичного рівняння, які можуть бути:

a) дійсними та різними, тобто $k_1 \neq k_2$;

b) дійсними та рівними, тобто $k_1 = k_2 = k$;

c) комплексно спряженими, тобто

$$k_1=\alpha+i\beta,\ k_2=\alpha-i\beta, \qquad \text{де } i=\sqrt{-1}, \quad \alpha=\frac{-b}{2a}; \quad \beta=\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}.$$

4) в залежності від значень коренів характеристичного рівняння записати загальний розв'язок заданого диференціального рівняння (11) для трьох випадків:

a): $$y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}.$$

b): $$y=e^{kx}\left(C_1+C_2x\right).$$

c): $$y=e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right).$$

Приклад 3. Знайти загальні розв'язки рівнянь:

a) $y''-3y'+2y=0$; b) $y''+4y'+4y=0$; c) $y''+4y'+5y=0$.

Розв'язання.

a) Для цього диференціального рівняння характеристичним рівнянням буде $k^2-3k+2=0$.

Знайдемо корені цього рівняння:

$$k_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm1}{2};\ k_1=2;\ k_2=1.$$

Корені характеристичного рівняння дійсні та різні, тому загальним розв'язком диференціального рівняння a) буде

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{x}.$$

b) Для цього диференціального рівняння характеристичним рівнянням буде

$$k^2+4k+4=0\Rightarrow\left(k+2\right)^2=0\Rightarrow k_1=k_2=-2.$$

Отже, корені характеристичного рівняння дійсні та рівні, тому загальний розв'язок диференціального рівняння b) буде таким

$$y=e^{-2x}\left(C_1+C_2x\right).$$

c) Для цього диференціального рівняння характеристичним рівнянням буде

$$k^2+4x+5=0\Rightarrow k_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-20}}{2}=\frac{-4\pm2i}{2}=-2\pm i$$

Корені цього рівняння комплексно спряжені, причому $\alpha = -2$, $\beta = 1$. Тому загальним розв'язком диференціального рівняння с) буде

$$y = e^{-2x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right).$$

3. Рішення диференціальних рівнянь на комп’ютері

При рішенні будь-якого диференціального рівняння необхідно отримати невідому функцію *y*(*x*), яка є розв’язком диференціального рівняння. Якщо при підстановці функції *y*(*x*) в початкове рівняння отримана тотожність, то розв’язок *y*(*x*) знайдено вірно.

Проте, не всі диференціальні рівняння вдається вирішити аналітичними методами. В цьому випадку необхідно скористатись чисельними методами розв’язання диференціальних рівнянь на комп’ютері. Найбільш розповсюдженими чисельними методами є:

- Метод Ейлера та його модифікації;
- Метод Рунга-Кутта та його модифікації.

Даними методами доцільно користуватись при програмуванні на алгоритмічних мовах: С, Pascal, Jawa тощо.

При використанні спеціалізованих програмних середовищ (MathCad, MathLab, Labview, Matematika, Maxima та інші) є можливість скористатись вбудованими функціями рішення диференційних рівнянь та побудувати графік шуканої функції *y*(*x*) або вивести таблицю значень цієї функції.

Розглянемо більш детально рішення диференційного рівняння в MathCad.

Для цього використовується два оператора

Given – початок блоку диф.рівняння;

Odesolve([*vf*], *x*, *b*, [*step*]) – оператор рішення диф.рівняння, який має такі параметри:

fv – вектор функцій для системи диференційних рівнянь. Якщо треба рішати одне рівняння, то цей параметр можна не вказувати;

x – змінна інтегрування;

b – кінець інтервалу інтегрування (початок інтервалу задається в початкових умовах);

step – число кроків інтегрування, від якого залежить точність рішення. Цей параметр є необов’язковим, тому його можна не вказувати та дати можливість MathCad самостійно обрати число кроків інтегрування.

Приклад 4. Розв’язати диференціальне рівняння $y'=\sin(x)+1/y$ при початкових умовах $y(0)=1$.

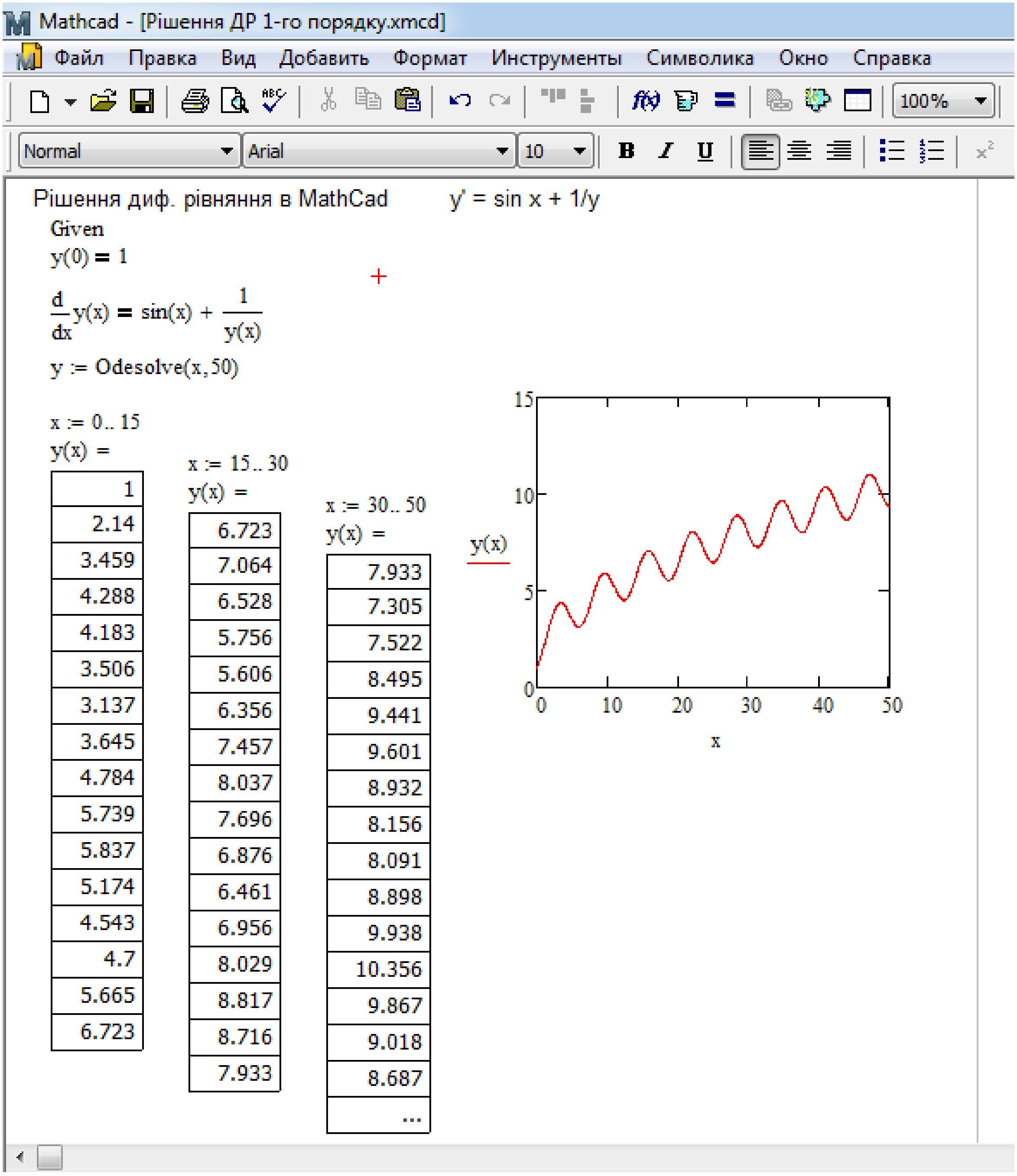


Рис. 1. Програма рішення диференційного рівняння на MathCad

***Розв'язання*.**

Для рішення даного диференціального рівняння треба скласти програму із 4 рядків:

$$Given$$

$$y(0)=1$$

$$\frac{d}{dx}y(x)=\sin(x)+\frac{1}{y(x)}$$

$$y:=Odesolve(x,50)$$

Другий рядок в програмі описує початкові умови $y(0)=1$. Третій рядок описує задане диференційне рівняння. Інтервал на якому вирішується диф рівняння x є [0, 50]. (рис. 1).

Після цього MathCad обчислить шукану функцію $y(x)$, яку можна вивести в табличному вигляді для певного діапазону значень x або побудувати графік функції $y(x)$.

Заключення.

Диференціальні рівняння мають суттєве значення при дослідженні економічних процесів та явищ. Будь-які математичні моделі, що описують досліджуванні процеси, складаються з алгебраїчних та диференціальних рівнянь, що поєднують вхідні параметри та вихідні показники досліджуваних процесів. Для характеристики процесів важливим є визначити реакцію процесу на різні вхідні параметри. Це можна зробити завдяки математичному моделюванню та рішенню диференціальних рівнянь. Тому вміння розв'язувати диференціальні рівняння є важливою рисою сучасного фахівця.

ЛІТЕРАТУРА

1. Вища математика. Ч.1. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення функції однієї та багатьох змінних / О.В. Барабаш, С.Ю. Дзядик, Ю.Д. Жданова, О.Б. Омецинська, В.В. Онищенко, С.М. Шевченко. – К.: ДУТ, 2015. – 187 с.

2. Вища математика. Ч. 2. Інтегральне числення функцій однієї та багатьох змінних / О.В. Барабаш, Г.М Власик, Н.Б. Дахно, І.В. Замрій, О.В. Свинчук, В.В. Шкапа. – К.: ДУТ, 2019. – 232 с.

3. Барковський В.В., Барковська Н.В. Математика для економістів. Частина 1. Вища математика. – К.: Національна академія управління, 1999. – 399 с.

4. Барковський В.В., Барковська Н.В. Математика для економістів. Частина 2. Теорія ймовірностей та математична статистика. – К.: Національна академія управління, 1999. – 214 с.

5. Кривуца В.Г., Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика. Практикум. – К.: ЦУЛ, 2003. – 536 с.

6. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. В 2-х томах. – М.: Физматлит, 1985.

7. Олешко Т.І. Лінійна алгебра: Навч. посібник. – К.: ДУІКТ, 2006. – 80 с.

8. Олешко Т.І. Векторна алгебра та аналітична геометрія: Навч. посібник. – К.: ДУІКТ, 2006. – 116 с.

Барабаш Олег Володимирович, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики Державного університету телекомунікацій. Автор понад 300 наукових праць. Галузь наукових інтересів: прикладна математика, теорія випадкових графів, технічна діагностика, функціональна стійкість телекомунікаційних мереж.

Мусієнко Андрій Петрович, доктор технічних наук, доцент кафедри вищої математики Державного університету телекомунікацій. Автор понад 100 наукових праць. Галузь наукових інтересів: прикладна математика, математичне моделювання процесів в економіці, теорія ігор, дослідження операцій.

Собчук Валентин Володимирович, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики Державного університету телекомунікацій. Автор понад 50 наукових праць. Галузь наукових інтересів: прикладна математика, теорія диференціальних рівнянь, теорія управління, управління бізнес-процесами, теорія ігор, дослідження операцій.

Навчальне видання

Барабаш Олег Володимирович

Мусієнко Андрій Петрович

Собчук Валентин Володимирович

ВИЩА МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ

Конспект лекцій

Частина 1

Навчальний посібник

Технічний редактор *А.А. Авраменко*