МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙ

В.В.Онищенко

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

Частина 1

Навчально-методичний посібник
для студентів денної та заочної форми навчання за спеціальністю:
Інженерія програмного забезпечення

Київ-2016

Навчально-методичний посібник розроблений *доц. Онищенко В.В.*, обговорений і затверджений на засіданні кафедри вищої математики ДУТ від 13.01.2016 р., протокол № 8.

Рецензент:

доктор фізико-математичних наук
професор кафедри інформаційних систем
факультету кібернетики
Київського Національного
університету імені Тараса Шевченка
Попов Юрій Дмитрович

У навчальному посібнику висвітлюються основні теоретичні аспекти математичного програмування згідно з програмою цього курсу для студентів денної та заочної форми навчання ДУТ за спеціальністю: Інженерія програмного забезпечення .

До кожної теми подаються докладні теоретичні відомості, практичні приклади їх застосування, що супроводжуються розгорнутими поясненнями.

Посібник містить добірку задач для контрольних робіт студентів.

ДУІКИ, 2003

Програма дисципліни
(назва тем, короткий перелік основних питань)

1. Лінійне програмувння (ЛП):

1.0. Вступ. Загальна характеристика дисципліни;
1.1. Загальна постановка задачі ЛП (ЗЛП);
1.2. Графічний метод розв'язку ЗЛП;
1.3. Теоретичні основи ЛП;
1.4. Алгоритм симплекс-методу;
1.5. Двоїстість у ЛП.

2. Транспортна задача ЛП (ТЗЛП):

2.1. ТЗЛП;
2.2. Методи побудови опорних планів ТЗ:
  2.2.1. Метод північно-західного кута;
  2.2.2. Метод мінімального елемента;
  2.2.3. Метод подвійної переваги;
2.3. Метод потенціалів.

3. Цілочисельне програмування (ЦП):

3.1. Постановка задачі ЦП (ЗЦП);
3.2. Область застосування ЗЦП у плануванні та промисловому менеджменті;
3.3. Геометрична інтерпритація ЗЦП;
3.4. Загальна характеристика методів розв'язання ЗЦП;
3.5. Методи відтинання. Метод Гоморі.

4. Динамічне програмування (ДП):

4.1. Багатокроковий процес прийняття рішень;
4.2. Метод рекурентних співвідношень. Принцип оптимальності;
4.3. Реалізація обчислювального методу багатокрокової задачі оптимізації.

5. Нелінійне програмування (НП):

5.1. Постановка задачі НП (ЗНП);
5.2. Геометрична інтерпритація ЗНП;
5.3. Загальні питання НП.

6. Елементи теорії матричних ігор:

6.1. Основні поняття теорії ігор;
6.2. Гра в чистих стратегіях;
6.3. Гра в змішаних стратегіях;
6.4. Геометрична інтерпритація розв'язку матричної гри з двома гравцями.

ПЕРЕЛІК ЗАПИТАНЬ ДО ІСПИТУ з частини1:

1. Предмет математичне програмування (МП).
2. Класифікація задач МП.
3. Особливості застосування МП в менеджменті.
4. Приклади ЗЛП.
5. Загальна постановка ЗЛП.
6. Графічний метод розв’язання ЗЛП. Ідея СМ.
7. Геометрична інтерпретація ЗЛП.
8. Стандартна ЗЛП. Базисні розв’язки ЗЛП.
9. Канонічна ЗЛП.
10. Властивості розв’язків ЗЛП.
11. Симплекс метод.
12. Метод жорданових перетворень.
13. Метод штучних змінних.
14. М-метод.
15. Графічно проілюструйте всі випадки розв’язання ЗЛП.
16. Як в симплекс методі проводиться вибір першого опорного плану, його оцінка та перехід до кращого плану?
17. Коли потрібно користуватись методом штучного базису?
18. Поняття двоїстості. Правила побудови двоїстих задач.
19. Зв’язок між розв’язками взаємоспряжених задач.
20. Лема та теореми двоїстості, їх економічний зміст.
21. Двоїстий симплекс метод.
22. Алгоритм двоїстого симплекс методу.
23. Постановка ТЗЛП. Особливості структури ТЗ.
24. Умови розв’язності ТЗ.
25. Властивості опорних планів ТЗ.
26. Метод північно-західного кута.
27. Метод мінімального елемента.
28. Метод подвійних переваг.
29. Метод потенціалів.
30. Розв’язок задач з урахуванням часу транспортування.
31. Постановка задачі ЦП (ЗЦП).
32. Область застосування ЗЦП у плануванні та промисловому менеджменті.
33. Геометрична інтерпритація ЗЦП.
34. Загальна характеристика методів розв’язання ЗЦП.
35. Загальна постановка задач ДП.
36. Багатокроковий процес прийняття рішень.
37. Метод рекурентних співвідношень. Принцип оптимальності.
38. Постановка задачі НП. Геометрична інтерпретація ЗНП.
39. Загальні питання НП.
40. Матричні ігри двох осіб.

1. ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

1.1. Постановка задачі лінійного програмування в загальній формі (ЗЗЛП)

Знайти вектор $\mathbf{x}=(x_1,...,x_n)$, що мінімізує цільову функцію

$$L(\mathbf{x})=c_1x_1+...+c_nx_n$$

і задовольняє систему обмежень

$$a_{11}x_1+...+a_{1n}x_n\ R\ a_{10}$$

$$.........................$$

$$a_{m1}x_1+...+a_{mn}x_n\ R\ a_{m0}$$

$$x_j\geq 0,\ j=1,...,k$$

(де R- один з знаків відношення =, ≤ або ≥, а умову додатності накладено не обов'язково на всі змінні).

1.2. Постановка задачі лінійного програмування в стандартній формі (СЗЛП)

Знайти вектор $\mathbf{x}=(x_1,...,x_n)$, що мінімізує цільову функцію

$$L(\mathbf{x})=c_1x_1+...+c_nx_n \qquad (1.1)$$

і задовольняє систему обмежень

$$a_{11}x_1+...+a_{1n}x_n=a_{10}$$

$$......................... \qquad (1.2)$$

$$a_{m1}x_1+...+a_{mn}x_n=a_{m0}$$

$$x_j\geq 0,\ j=1,...,n \qquad (1.3)$$

В задачі (1.1)-(1.3) будемо називати матрицю $\mathbf{A}=||a_{ij}||$, (де $i=1,...,m$, $j=1,...,n$) матрицею умов; вектор-стовпець $\mathbf{A}_j=(a_{1j},...,a_{mj})^T$, $j=1,...,n$- j-м вектором умов; вектор $\mathbf{A_0}=(a_{10},...,a_{m0})^T$- вектором обмежень.

1.3. Графічний метод розв'язку ЗЛП

Для розв'язку двовимірних ЗЛП, тобто задач з двома змінними, а також деяких тривимірних задач застосовують графічний метод, що грунтується на геометричній інтерпритації та аналітичних властивостях ЗЛП.

Розглянемо таку задачу.

Знайти екстремум (мінімум, максимум) функції:

$$Z=c_1x_1+c_2x_2\rightarrow max\ (min) \qquad (2.1)$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2\{\leq,=,\geq\}b_1 \\ .... \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2\{\leq,=,\geq\}b_m \end{cases} \qquad (2.2)$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \qquad (2.3)$$

Припустимо, що система (2.2) за умов (2.3) сумісна і многокутник її розв'язків обмежений.

Згідно з геометричною інтерпретацією ЗЛП (2.1) кожне *i*-те обмеження-нерівність (2.2) визначає півплощину з граничною прямою $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ *(i=1, 2, ..., m)*. Системою обмежень (2.2) описується спільна частина, тобто множина точок, координати яких задовольняють всі обмеження задачі. Таку множину точок називають *многокутником розв'язків*, або *областю допустимих розв'язків ЗЛП* (ОДР).

Умова (2.3) невід'ємності змінних означає, що область допустимих розв'язків задачі належить першому квадранту системи координат двовимірного простору. Цільова функція ЗЛП геометрично інтерпретується як сім'я паралельних прямих $c_1x_1 + c_2x_2 = const$.

<u>Деякі властивості ЗЛП</u> (для графічного розв'язування):

1. Якщо ОДР – обмежена, то екстремум лінійної функції Z досягається принаймні в одній з вершин многокутника.
2. Якщо ОДР – необмежена, то екстремум функції Z або не існує, або досягається принаймні в одній з вершин ОДР.
3. Якщо оптимальне значення Z досягається одночасно у двох вершинах разом, то це ж саме екстремальне значення досягається в будь-якій точці відрізка, що з'єднує ці дві вершини (альтернативний оптимум).

Отже, розв'язати ЗЛП графічно означає знайти таку вершину многокутника розв'язків, у результаті підстановки координат якої в (2.1) лінійна цільова функція набуває найбільшого (найменшого) значення.

Алгоритм графічного методу:

1. Будуємо прямі лінії, рівняння яких дістаємо заміною в обмеженнях задачі (2.2) знаків нерівностей на знаки рівностей.
2. Визначаємо півплощини, що відповідають кожному обмеженню задачі.
3. Знаходимо многокутник розв'язків ЗЛП.
4. Будуємо вектор $\vec{N} = (c_1,\ c_2)$, що задає напрям зростання значень цільової функції задачі.
5. Будуємо пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = const$, перпендикулярну до вектора $\vec{N}$.
6. Переміщуючи пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = const$ в напрямі вектора $\vec{N}$ (для задачі максимізації) або в протилежному напрямі (для задачі мінімізації), знаходимо вершину многокутника розв'язків, де цільова функція досягає екстримального значення.

7. Визначаємо координати точки, в якій цільова фукція набуває максимального (мінімального) значення, і обчислюємо екстремальне значення цільової функції в цій точці.

Приклад 1.

Знайти графічний розв'язок ЗЛП:

$$Z = -x - y \to min$$

$$3x + y \le 21, \qquad (1)$$

$$x + 2y \le 10, \qquad (2)$$

$$x \ge 0,\ \ y \ge 0. \qquad (3)$$

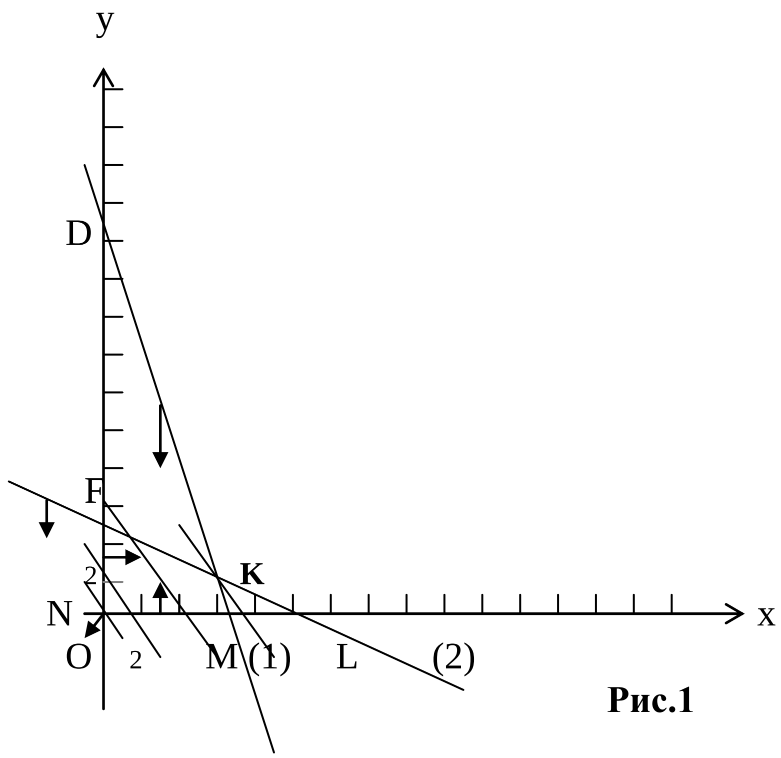

Рис.1

1. В (1), (2) замінюємо знаки нерівностей на знаки строгих рівностей: $3x+y=21$, $x+2y=10$. Для спрощення побудови доцільно поділити обидві частини рівності на праву частину. Отримаємо:

$$\frac{3x}{21} + \frac{y}{21} = 1 \text{ або } \frac{x}{7} + \frac{y}{21} = 1, \quad (1^*)$$

$$\frac{x}{10} + \frac{2y}{10} = 1 \text{ або } \frac{x}{10} + \frac{y}{5} = 1. \quad (2^*)$$

Рівняння (1*) перетинає вісі координат в $M(7,0)$, $D(0,21)$, а (2*) – в $L(10,0)$, $F(0,5)$.

Будуємо графіки прямих (1*), (2*) (рис.1).

2. Кожна з побудованих прямих поділяє площину системи координат на дві півплощини. Координати точок однієї задовольняють нерівність, що розглядається, а іншої – не задовольняють. Щоб визначити необхідну півплощину (на рис.1 її напрям позначено стрілками), потрібно взяти будь-яку точку і перевірити, чи задовольняютьїї координати зазначене обмеження. Якщо задовольняють, то півплощина, в якій міститься вибрана точка, є геометричним зображенням нерівності. У протилежному разі таким

зображенням є інша півплощина. Умова невід'ємності змінних (3) обмежує ОДР задачі першим квадрантом системи координат. Переріз усіх півплощин визначає ОДР задачі.

3. *OFKM* – чотирикутник розв'язків ЗЛП.
4. Будуємо вектор $\vec{N} = (-1, -1)$, компонентами якого є коефіцієнти при змінних у цільовій функції задачі. Вектор $\vec{N}$ завжди виходить із початку координат і напрямлений до точки з координатами $(x = -1, \quad y = -1)$.
5. Побудуємо лінію, що відповідає, наприклад, значенню $Z = 0$. Це буде пряма $-x - y = 0$, яка перпендикулярна до вектора $\vec{N}$ і проходить через початок координат.
6. Переміщуючи пряму $-x - y = 0$, в протилежному напрямі вектора $\vec{N}$ (оскільки задача мінімізації), бачимо (з рис.1), що останньою спільною точкою прямої цільової функції та многокутника *OFKM,* є точка *K*. Координати цієї точки визначають оптимальний розв'язок задачі, що мінімізує значення цільової функції.
7. Координати точки *К* визначаються перетином прямих (1) і (2):

$$\begin{cases} 3x + y = 21 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, отримаємо:

$$\begin{cases} x = 6{,}4 \\ y = 1{,}8 \end{cases} \Rightarrow K(6{,}4; 1{,}8).$$

Обчислюємо екстремальне значення цільової функції в *К(6,4; 1,8):*

$$Z_{min} = -6{,}4 - 1{,}8 = -8{,}2.$$

1.4. Симплекс-метод (СМ)

<u>Основні означення:</u>

1. Вектор $\boldsymbol{x}=(x_1,...,x_n)$ називається допустимим розв'язком ЗЛП, якщо його компоненти задовольняють обмеження (1.2)-(1.3)

2. Ненульовий допустимий розв'язок $\boldsymbol{x}$-базисний (ДБР), якщо його додатнім компонентам x_j відповідають лінійно незалежні вектори умов $\boldsymbol{A_j}$ (нульовий допустимий розв'язок будемо завжди вважати базисним).

3. Система m лінійно незалежних векторів умов, що включає вказані вектори $\boldsymbol{A_j}$ називається базисом.

4. Вектори базису утворюють базисну матрицю.

5. ЗЛП називається канонічною, якщо її обмеження (1.2) мають канонічну форму:

$$x_1 + \qquad + a_{1,m+1}\, x_{m+1} + ... + a_{1n} x_n = a_{10}$$
$$..$$
$$x_j + \qquad + a_{j,m+1}\, x_{m+1} + ... + a_{jn} x_n = a_{j0}$$

....

$$x_m + a_{m1}x_{m+1}+...+a_{mn}x_n=a_{m0}$$

$$x_j \geq 0,\ j=1,...,n$$

6. Щоб перетворити задачу із загальної у стандартну форму, треба зробити наступну послідовність дій:

1) у нерівність $\leq$ з (1.2) потрібно ввести додаткову змінну y_j (яка також називається базисною) з коефіцієнтом **1**. При цьому нерівність перетворюється в рівність, коефіцієнт в цільовій функції при новій змінній дорівнює нулю і на нову змінну накладається умова невід'ємності.

2) у нерівність $\geq$ з (1.2) потрібно ввести додаткову змінну y_j з коефіцієнтом **-1** (всі інші дії аналогічні п.1).

3) якщо на деяку змінну x_j не накладено умову невід'ємності, то ця змінна замінюється різницею двох змінних y_k-y_{k+1}, на які вже накладено умову невід'ємності. При цьому заміну $x_j \to y_k$-y_{k+1} потрібно зробити в цільовій функції (1.1) і в системі обмежень (1.2).

<u>Приклад 2.</u>

Нехай потрібно звести до стандартної форми наступну задачу:

$$\begin{aligned} &x_1+ 2x_2 - 3x_3 \to min \\ &x_1+ \ x_2 \qquad = \ 8 \\ &2x_1 \qquad + \ x_3 \ \leq 6 \\ &x_1 \qquad +2x_3 \ \geq 2 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Перше обмеження залишаємо без змін. У друге обмеження додаємо змінну x_4 зі знаком +, а у третє- змінну x_5 зі знаком -. Оскільки на змінну x_3 не накладено умову невід'ємності, то замінюємо її різницею двох невід'ємних змінних (наприклад x_3-x_6). Таким чином, задача приймає наступний вигляд:

$$\begin{aligned} &x_1+ 2x_2 -3x_3 \qquad + 3x_6 \to min \\ &x_1 + \ x_2 \qquad\qquad\qquad =8 \\ &2x_1 \qquad +x_3 +x_4 \qquad -x_6 \ =6 \\ &x_1 \qquad +2x_3 \quad -x_5-2x_6 \ =2 \\ &x_j \geq 0, j=1,..,6 \end{aligned}$$

Стандартна ЗЛП (1.1)-(1.3) може також зводитись до канонічної форми за допомогою так званого методу штучних змінних, суть якого полягає у наступному. Розглядається допоміжна задача (назвемо її *y-задачею*) з такою ж самою системою обмежень, як і *M-задача*, але цільова функція має вигляд:

$$L^*(x)=y_1+...+y_m \to min.$$

Допоміжна задача розв'язується *симплекс-методом*. При цьому можуть виникнути такі випадки:

1) Для оптимального розв'язку $L^*(x)=0$ (тобто жодна з y_j не є базисною). Тоді відкидаємо всі y_j і розв'язуємо одержану задачу симплекс-методом (оскільки для неї вже побудовано початковий допустимий базисний розв'язок).

2) Для оптимального розв’язку $L^*(x)>0$ (тобто принаймні одна з y_j не є базисною). Тоді вихідна ЗЛП не має розв’язків.

Перед застосуванням *М-методу* або *методу штучного базису* можна зробити декілька *жорданових перетворень* вихідної матриці умов. Діючи таким чином, можна зменшити кількість штучних змінних, а іноді й уникнути застосування вказаних методів.

Жорданові перетворення робляться таким чином:

1) Для деякого стовбця k обчилюється для $a_{ik}>0$ відношення $\theta_i=a_{i0}/a_{ik}$ і визначається i, що задовольняє співвідношенню

$$i=\operatorname{argmin}_{i:\ a_{ik}>0} \theta_i,$$

2) Елемент a_{ik} вибирається за розв’язуючий і робиться *перетворення Жордана-Гауса.*
3) Розглядається інший стовбець, який не є базисним і для нього визначається i (як описано в п. 1). Якщо визначене i не співпадає з номерами рядків, в яких вже є базисні змінні, то переходимо до п. 2, а якщо співпадає - то вибираємо інший небазисний стовбець.

Якщо в результаті послідовності дій 1)-3) одержано m базисних змінних, то застосовувати *метод штучного базису* або *М-метод* не потрібно і одразу переходимо до розв’язку задачі *симплекс-методом*. Якщо кількість одержаних базисних змінних менша за m, то штучні змінні додамо лише у рядки, в яких немає базисних змінних, і застосовуємо *метод штучного базису* або *М-метод.*

Алгоритм симплекс-методу

На кожному кроці СМ виконуються такі дії (розрахункові формули наводяться лише для першого кроку).

1. Розглядається ДБР $x=(a_{10},...,a_{m0},0,...,0)$.

   Обчислюються відносні оцінки (симплекс-різниці) Δ_j небазисних змінних x_j, $j=m+1,...,n$, за формулою:

   $$\Delta_j=c_j-(c_б, A_j),$$

   де $c_б=(c_1,...,c_m)$, A_j — вектор умов, що відповідає змінній x_j (відносні оцінки базисних змінних дорівнюють нулю).

   Якщо для всіх $j=1,...,n$, виконується умова $\Delta_j\geq 0$, то ДБР x є оптимальним розв'язком КЗЛП. Якщо до того ж усі штучні змінні дорівнюють нулю, то, відкидаючи їх, отримаємо оптимальний розв'язок вихідної ЗЛП; інакше вихідна ЗЛП не має розв'язків (її допустима область порожня).

   Якщо існує таке j, що $\Delta_j<0$, а вектор умов A_j не має додатніх компонент, то ЗЛП не має оптимального розв'язку (її цільова функція $L(x)$ не обмежена знизу на допустимому многограннику розв'язків). Кінець обчислень.

2. Якщо існують індекси j, для яких $\Delta j<0$, а відповідні вектори умов Aj мають

додатні компоненти, то знаходять k за формулою

$$k = \underset{j:\ \Delta_j<0}{\arg\min} \Delta_j,$$

і, обчислюючи для $a_{ik}>0$ відношення $\theta_i=a_{i0}/a_{ik}$, визначають i, що задовольняє співвідношення

$$i = \underset{i:\ a_{ik}>0}{\arg\min} \theta_i,$$

3. Переходять до нового ДБР, шляхом уведення до базису вектора A_k і виведення з базису вектора A_i. Такий перехід здійснюється за допомогою *симплекс-перетворень* (елементарних перетворень Жордана-Гаусса) з ведучим елементом a_{ik} над елементами розширеної матриці умов (1.2). Перехід до пункту 1.

Далі буде розглянуто декілька прикладів розв’язку задач (в усіх задачах, що розглядаються нижче, всі змінні невід’ємні).

<u>Задача 1.</u>

$$x_1+x_2+x_3 \to \min$$

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad -x_4 \qquad -2x_6&=5 \\ x_2 + \quad 2x_4-3x_5+x_6&=3 \\ x_3+2x_4-5x_5+2x_6&=5 \end{aligned}$$

Складаємо симлекс-таблицю:

	C_j	1	1	1	0	0	0		
$C_Б$	$X_Б$	X_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	A_0	Θ
1	x_1	1	0	0	-1	0	-2	5	-
1	x_2	0	1	0	**<u>(2)</u>**	-3	1	3	3/2
1	x_3	0	0	1	2	-5	2	5	5/2
	Δ	**0**	**0**	**0**	**-3**	**8**	**-1**		
1	x_1	1	½	0	0	-3/2	-3/2	13/2	
0	x_4	0	½	0	1	-3/2	½	3/2	
1	x_3	0	-1	1	0	-2	1	2	
	Δ	**0**	**3/2**	**0**	**0**	**7/2**	**½**		

На першому кроці базисними змінними є x_1,x_2 та x_3, отже вектор $\boldsymbol{C_Б}$ має координати *(1,1,1)*. Оцінки при базисних змінних дорівнюють нулю. Для інших змінних оцінки треба обчислити за формулою $\Delta_j=c_j-(\boldsymbol{C_Б}, \boldsymbol{X_j})$. Таким чином,

$$\Delta_4=0-((1,1,1),(-1,2,3))=-3;$$

$$\Delta_5=0-((1,1,1),(0,-3,-5))=8;$$

$$\Delta_6=0-((1,1,1),(-2,1,2))=-1.$$

Далі вибираємо стовпчик з максимальною за модулем від’ємною оцінкою (тобто 4-й). Для 4-го стовпчика визначаємо мінімальне

$$\Theta: \quad min\left(\frac{3/2}{2}, \frac{5/2}{3}\right) = \frac{3}{4},$$

мінімум досягається для $i=2$. Вибираємо елемент *(2;4)* за розв'язуючий та робимо перетворення Жордана-Гауса. У другій таблиці всі $\Delta \geq 0$, тобто знайдено оптимальний розв'язок, який знаходимо із стовпця A_0 останньої таблиці:

$$\boldsymbol{X_{опт}=(13/2;\ 0;\ 2;\ 3/2;\ 0;\ 0;\ 0),}$$
$$\boldsymbol{F_{min}=13/2+2=17/2.}$$

Нехай треба знайти максимум цільової функції для цієї ж самої задачі. У цьому випадку треба замінити знак коефіцієнтів цільової функції на протилежний і симплекс-таблиці матимуть такий вигляд:

	C_j	-1	-1	-1	0	0	0		
$С_Б$	$X_Б$	X_1	x_2	x_3	X_4	x_5	x_6	A_0	Θ
1	x_1	1	0	0	-1	0	-2	5	
1	x_2	0	1	0	2	-3	1	3	
1	x_3	0	0	1	3	-5	2	5	
	Δ	**0**	**0**	**0**	**3**	**-8**	**1**		

З першої таблиці видно, що $\Delta_5<0$, однак всі інші елементи 5-го стовпця від'ємні, зачить цільова функція необмежена на допустимій області.

<u>Задача 2.</u>

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+\quad\ \ x_4 &\to min \\ x_1+x_2+2x_3-x_4 &= 2 \\ 2x_1+x_2-3x_3+x_4 &= 6 \\ x_1+x_2+x_3+x_4 &= 7 \end{aligned}$$

У цій задачі, на відміну від попередньої, немає початкового допустимого базисного розв'язку. Розглянемо три методи його пошуку.

1) **Метод жорданових перетворень.**

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1* & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \textit{По } 1-\textit{му стовпцю} \\ \Theta_1 = 2, \Theta_2 = 3, \Theta_3 = 7 \\ i = 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -7 & 3* & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{c} \textit{По } 4-\textit{му стовпцю} \\ \Theta_2 = 2/3, \Theta_3 = 5/2 \\ i = 2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2/3 & -1/3 & 0 & 8/3 \\ 0 & -1/3 & -7/3 & 1 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 11/3* & 0 & 11/3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \textit{По } 2-\textit{му стовпцю} \\ \Theta_1 = 4,\ i = 1 \\ \textit{перетвор.не робимо} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \text{По } 3-\text{му стовпцю} \\ \Theta_3 = 1,\ i = 3 \\ \ \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 8/11 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1/11 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2/11 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Таким чином, побудовано початковий допустимий базисний розв'язок і задача повністю підготовлена до застосування симплекс-методу:

	C_j	1	2	0	1		
$C_Б$	$X_Б$	X_1	x_2	x_3	X_4	A_0	Θ
1	x_1	1	8/11	0	0	3	
1	x_4	0	1/11	0	1	3	
0	x_3	0	2/11	1	0	1	
	Δ	**0**	**13/11**	**0**	**0**		

Оскільки всі $\Delta \geq 0$, то знайдений допустимий базисний розв'язок є оптимальним,

$$\boldsymbol{X_{опт}=(3;\ 0;\ 1;\ 3),}$$
$$\boldsymbol{F_{min}=3+1=4.}$$

2)**Метод штучних змінних.**

Допоміжна задача для побудови допустимого базисного розв'язку вихідної задачі має вигляд:

$$y_1 + y_2 + y_3 \to min$$
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + y_1 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + y_2 &= 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_3 &= 7 \end{aligned}$$

	C_j	0	0	0	0	1	1	1		
$C_Б$	$X_Б$	X_1	x_2	x_3	X_4	y_1	y_2	y_3	A_0	Θ
1	y_1	**1**	1	2	-1	1	0	0	2	2
1	y_2	2	1	-3	1	0	1	0	6	3
1	y_3	1	1	1	1	0	0	1	7	7
	Δ	**-4**	**-3**	**0**	**-1**	**0**	**0**	**0**		
0	x_1	1	1	2	-1	1	0	0	2	-
1	y_2	0	-1	-7	(3)	-2	1	0	2	2/3
1	y_3	0	0	-3	2	-1	0	1	5	5/2
	Δ	**0**	**1**	**8**	**-5**	**4**	**0**	**0**		
0	x_1	1	2/3	-1/3	0	1/3	1/3	0	8/3	-
0	x_4	0	-1/3	-7/3	1	-2/3	1/3	0	2/3	-
1	y_3	0	2/3	(11/3)	0	1/3	-2/3	1	11/3	1
	Δ	**0**	**-2/3**	**-11/3**	**0**	**2/3**	**5/3**	**0**		
0	x_1	1	8/11	0	0	4/11	3/11	1/11	8/3	
0	x_4	0	1/11	0	1	-5/11	-1/11	7/11	2/3	

0	x_2	0	2/11	1	0	1/11	-2/11	1/11	11/3	
	Δ	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**		

Таким чином, всі $\Delta \geq 0$, отже знайдено розв'язок допоміжної задачі, при цьому всі y_j виведено з базису, отже відкидаючи стовпці y_j, маємо ДБР для вихідної задачі (який, доречі, співпадає з ДБР, який було знайдено методом жорданових перетворень). Знайдений розв'язок задачі симплекс-методом повністю співпадає з наведеним вище.

3) **М-метод.**

Допоміжна М-задача має такий вигляд:

$$x_1 + 2x_2 + x_4 + My_1 + My_2 + My_3 \to min$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + y_1 \qquad = 2$$
$$2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \quad + y_2 \quad = 6$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \qquad + y_3 = 7$$

тобто штучні змінні y_j вводяться в нерівності і водночас вводяться в цільову функцію з коефіцієнтами M (де М-деяке достатньо велике число).

Послідовність симплекс-таблиць має вигляд:

	C_j	1	2	0	1	M	M	M		
$C_Б$	$X_Б$	X_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	A_0	Θ
M	y_1	**1**	1	2	-1	1	0	0	2	2
M	y_2	2	1	-3	1	0	1	0	6	3
M	y_3	1	1	1	1	0	0	1	7	7
	Δ	**-4M+1**	**-3M+2**	**0**	**-M+1**	**0**	**0**	**0**		
1	x_1	1	1	2	-1	1	0	0	2	-
M	y_2	0	-1	-7	**(3)**	-2	1	0	2	2/3
M	y_3	0	0	-3	2	-1	0	1	5	5/2
	Δ	**0**	**M+1**	**8M-2**	**-5M+2**	**4M-1**	**0**	**0**		
1	x_1	1	2/3	-1/3	0	1/3	1/3	0	8/3	-
1	x_4	0	-1/3	-7/3	1	-2/3	1/3	0	2/3	-
M	y_3	0	2/3	**(11/3)**	0	1/3	-2/3	1	11/3	1
	Δ	**0**	$-\frac{2}{3}M+\frac{5}{3}$	$-\frac{11}{3}M+\frac{8}{3}$	**0**	$\frac{2}{3}M+\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}M-\frac{2}{3}$	**0**		
1	x_1	1	8/11	0	0	4/11	3/11	1/11	8/3	
1	x_4	0	1/11	0	1	-5/11	-1/11	7/11	2/3	
2	x_2	0	2/11	1	0	1/11	-2/11	1/11	11/3	
	Δ	**0**	**9/11**	**0**	**0**	**M-1/11**	**M+2/11**	**M-10/11**		

Таким чином, всі $\Delta \geq 0$, отже знайдено оптимальний розв'язок допоміжної задачі, при цьому в базисі немає штучних змінних, отже знайдено оптимальний розв'язок вихідної задачі, який співпадає зі знайденим у попередньому випадку.

<u>Задача 3.</u>

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 \rightarrow min$$
$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1$$
$$-2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2$$

1) Метод штучних змінних

Складаємо допоміжну задачу:

$$y_1 + y_2 \rightarrow min$$
$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + y_1 = 1$$
$$-2x_1 + x_2 + 3x_3 + y_2 = 2$$

	C_j	0	0	0	1	1		
$C_Б$	$X_Б$	X_1	x_2	x_3	Y_1	y_2	A_0	Θ
1	Y_1	2	3	4	1	0	1	1/4
1	Y_2	-2	1	3	0	1	2	2/3
	Δ	**0**	**-4**	**-7**	**0**	**0**		
0	X_3	2/4	¾	1	1/4	0	1/4	
1	Y_2	-14/4	-2	0	-3/4	1	5/4	
	Δ	**14/4**	**5/4**	**0**	**7/4**	**0**		

На останній ітерації всі всі $\Delta \geq 0$, отже знайдено оптимальний розв'язок допоміжної задачі, при цьому в базисі є штучна змінна y_2, отже вихідна задача не має розв'язку.

2) М-метод

Складаємо допоміжну задачу:

$$x_1 \quad -2x_2 + 3x_3 + My_1 + My_2 \rightarrow min$$
$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + \quad y_1 = 1$$
$$-2x_1 + x_2 + 3x_3 \quad + y_2 = 2$$

	C_j	1	-2	3	M	M		
$C_Б$	$X_Б$	x_1	x_2	x_3	Y_1	Y_2	A_0	Θ
M	Y_1	2	3	**4***	1	0	1	1/4
M	Y_2	-2	1	3	0	1	2	2/3
	Δ	**-1**	**-4M-2**	**-7M+3**	**0**	**0**		
3	X_3	2/4	¾	1	1/4	0	1/4	

M	Y_2	-14/4	-5/4	0	-3/4	1	5/4	
	Δ	$\frac{7}{2}M-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}M-\frac{17}{4}$	**0**	$\frac{7}{4}M-\frac{3}{4}$	**0**		

Висновки повністю співпадають з попереднім випадком.

Задача 4.

$$6x_1+4x_2 \rightarrow min$$
$$2x_1+x_2 \geq 3$$
$$x_1 - x_2 \leq 1$$

Щоб привести задачу до стандартного вигляду, треба додати у обмеження-нерівності додаткові (або балансові змінні) і перетворити їх таким чином на обмеження-рівності. При цьому у неріності $\leq$ балансові змінні додаються зі знаком +, а в $\geq$ зі знаком -.

Таким чином, система обмежень набуває вигляду

$$2x_1+x_2-x_3 \quad =3$$
$$x_1-x_2 \quad +x_4=1$$

Якщо всі нерівності мали знак $\leq$, то перетворена задача мала б канонічну форму. В іншому разі треба звести задачу до неї одним з наведених вище методів. В данному випадку достатньо зробити одне жорданове перетворення:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1* & -1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

	C_j	6	4	0	0		
$C_Б$	$X_Б$	x_1	x_2	x_3	x_4	A_0	Θ
4	x_2	2	1	-1	0	3	3/2
0	x_4	<u>*(3)*</u>	0	-1	1	4	4/3
	Δ	**-2**	**0**	**4**	**0**		
4	x_2	0	1	-1/3	-2/3	1/3	
6	x_1	1	0	-1/3	1/3	4/3	
	Δ	**0**	**0**	**10/3**	**2/3**		

Оптимальний розв’язок має вигляд:

$$\boldsymbol{x_1=4/3,\ x_2=1/3,}$$
$$\boldsymbol{F_{min}=6*(4/3)+4*(1/3)=28/3}$$

1.5. Двоїстість у ЛП

1.5.1. Поняття двоїстості. Правила побудови двоїстих задач

Кожній ЗЛП відповідає *двоїста,* що формується за допомогою певних правил безпосередньо з умови прямої задачі.

Якщо пряма ЗЛП має вигляд:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1, n},$$

то двоїста задача записується так:

$$F = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to min$$

за обмежень

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \ge c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \ge c_n, \end{cases}$$

$$y_j \ge 0,\ i = \overline{1, m}.$$

Отже, двоїста ЗЛП утворюється з прямої задачі за такими правилами:

1. Кожному обмеженню прямої задачі відповідає змінна двоїстої задачі. Кількість невідомих двоїстої задачі дорівнює кількості обмежень прямої задачі.
2. Кожній змінній прямої задачі відповідає обмеження двоїстої задачі, причому кількість обмежень дорівнює кількості невідомих прямої задачі.
3. Якщо цільова функція прямої задачі задається на пошук найбільшого значення *(max),* то цільова функція двоїстої задачі – на визначення найменшого значення *(min),* і навпаки.
4. Коефіцієнтами при змінних в цільовій функції двоїстої задачі є вільні члени системи обмежень прямої задачі: $(b_1, \ldots, b_m)$.
5. Правими частинами системи обмежень двоїстої задачі є коефіцієнти при змінних в цільовій функції прямої задачі: $(c_1, \ldots, c_n)$.
6. Матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

що складається з коефіцієнтів при змінних у системі обмежень прямої задачі, і матриця коефіцієнтів в системі обмежень двоїстої задачі

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

утворюються одна з одної транспонуванням, тобто заміною рядків стовпчиками, а стовпчиків – рядками.

Двоїсті пари ЗЛП бувають симетричні та несиметричні.

У *симетричних задачах* обмеження прямої та двоїстої задач є нерівностями, а змінні обох задач можуть набувати лише невід'ємних значень.

У *несиметричних задачах* обмеження прямої задачі можуть бути записані як рівняння, а двоїстої – лише як нерівності. У цьому разі відповідні змінні двоїстої задачі набувають будь-якого значення, не обмеженого знаком.

Різні можливі форми прямих ЗЛП та відповідні їм варіанти моделей двоїстих задач наведено далі.

Пряма задача	**Двоїста задача**

Симетричні

$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max;$	$F = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to min;$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i;$	$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \ge c_j;$
$x_j \ge 0.$	$y_i \ge 0.$
$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to min;$	$F = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to max;$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i;$	$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \le c_j;$
$x_j \ge 0.$	$y_i \ge 0.$

Несиметричні

$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max;$	$F = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to min;$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i;$	$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \ge c_j;$
$x_j \ge 0.$	$y_i \in [-\infty;\ \infty].$
$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to min;$	$F = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to max;$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i; \qquad\qquad \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \le c_j;$$

$$x_j \ge 0. \qquad\qquad y_i \in]-\infty; \infty[.$$

Приклад 3.

До наведеної ЗЛП записати двоїсту задачу:

$$Z = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \to min;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 4, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1, 3}.$$

За відповідними правилами побудуємо двоїсту задачу:

$$F = y_1 + 4y_2 \to max;$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 \le 1, \\ y_1 + 2y_2 \le 2, \\ -y_1 + y_2 \le 2, \end{cases}$$

$$y_2 \ge 0.$$

Зауважимо, що задачі несиметричні, і тому змінна y_1, що відповідає рівнянню в системі обмежень прямої задачі, може мати будь-який знак, а змінна y_2 - лише невід’ємна.

Приклад 4.

До наведенної ЗЛП записати двоїсту задачу:

$$Z = -5x_1 + 2x_2 \to max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 5, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \ \ x_2 \ge 0.$$

Перш ніж записати двоїсиу задачу, необхідно пряму задачу звести до відповідного вигляду. Оскільки цільова функція *Z* максимізується і в системі обмежень є нерівності, то вони повинні мати знак “≤”. Тому перше обмеження моделі помножимо на *(-1)*. При цьому знак нерівності зміниться на протилежний. Отримаємо:

$$Z = -5x_1 + 2x_2 \to max;$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \le -1, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 5, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \ \ x_2 \ge 0.$$

Тепер за відповідними правилами складемо двоїсту задачу:

$$F = -y_1 + 5y_2 \to min;$$

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 \geq -5, \\ -y_1 + 3y_2 \geq 2, \end{cases}$$
$$y_1 \geq 0,\ \ y_2 \geq 0.$$

Записані задачі симетричні.

1.5.2. Двоїстий симплекс-метод

Двоїстий симплекс-метод (*ДСМ*) безпосередньо застосовується до розв'язування *майже канонічної задачі лінійного програмування* (*МКЗЛП*), яка формулюється таким чином:

Знайти вектор $\boldsymbol{x} = (x_1,...,x_n)$, що мінімізує лінійну функцію

$$L(\boldsymbol{x}) = c_1 x_1 + ... + c_n x_n \tag{3.1}$$

і задовольняє систему лінійних обмежень

$$x_i + a_{i,m+1}\, x_{m+1} + ... + a_{in} x_n = a_{i0},\ \ i=1,\ldots,m, \tag{3.2}$$

$$x_j \geq 0,\ j=1,\ldots,n, \tag{3.3}$$

(компоненти a_{i0} вектора обмежень $\boldsymbol{A}_0$ можуть бути від'ємними) при додатковій умові: *відносні оцінки* (*симплекс-різниці*) Δ_j *змінних* x_j *невід'ємні*.

Вектор $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ називається *майже допустимим базисним розв'язком* (*МДБР*) *МКЗЛП*, якщо його компоненти задовольняють обмеження (3.2), і ненульовим компонентам x_j відповідають лінійно незалежні вектори умов $\boldsymbol{A}_j$.

Базис і базисна матриця *МДБР* визначаються подібно тому, як це робиться для *СЗЛП*.

МКЗЛП є частинним випадком *СЗЛП*. Існують методи зведення довільної *ЗЛП* до майже канонічного вигляду.

***Ознака оптимальності*:**

Якщо на деякому кроці *ДСМ* компоненти *МДБР* $\boldsymbol{x}^*$ невід'ємні, то $\boldsymbol{x}^*$ — оптимальний розв'язок *МКЗЛП*.

***Ознака відсутності розв'язку*:**

Оптимального розв'язку *МКЗЛП* не існує, якщо на якому-небудь кроці *ДСМ* в рядку з $a_{i0}<0$ всі компоненти $a_{ij} \geq 0,\ \ j=1,\ldots,n$. В цьому випадку допустима множина розв'язків *МКЗЛП* порожня.

Алгоритм двоїстого симплекс-методу:

На кожному кроці *ДСМ* виконуються такі дії (розрахункові формули наводяться лише для першого кроку).

1. Розглядається *МДБР* $\mathbf{x} = (a_{10}, \ldots, a_{m0}, 0, \ldots, 0)$.

Обчислюються відносні оцінки (симплекс-різниці) Δ_j небазисних змінних $x_j,\ j = m+1, \ldots, n,$ за формулою:

$$\Delta_j = c_j - (\boldsymbol{c}_б, \boldsymbol{A}_j),$$

де $\boldsymbol{c}_б = (c_1, \ldots, c_m)$, $\boldsymbol{A}_j$ — вектор умов, що відповідає змінній x_j (відносні оцінки базисних змінних дорівнюють нулю).

Якщо для всіх $i = 1, \ldots, m$ виконується умова $a_{i0} \geq 0$, то *МДБР* $\boldsymbol{x}$ буде оптимальним розв'язком *МКЗЛП*. Кінець обчислень.

Якщо існує таке i, що $a_{i0} < 0$, а коефіцієнти $a_{ij} \geq 0,\ j = 1, \ldots, n$, то *МКЗЛП* не має допустимих розв'язків. Кінець обчислень.

2. Якщо існують індекси i, для яких $a_{i0} < 0$, а серед відповідних компонент $a_{ij},\ j = 1, \ldots, n$, є від'ємні, то знаходять l:

$$l = \underset{i:\ a_{i0} < 0}{\operatorname{argmin}}\, a_{i0},$$

обчислюють відношення $\gamma_j = -\Delta_j / a_{lj}$ для всіх $a_{lj} < 0$ та визначають k:

$$k = \underset{i:\ a_{lj} < 0}{\operatorname{argmin}}\, \gamma_j .$$

3. Переходять до нового *МДБР*, виключаючи з базису вектор $\boldsymbol{A}_l$ і вводячи до базису вектор $\boldsymbol{A}_k$. Згаданий перехід здійснюється за допомогою симплекс-перетворень (елементарних перетворень Жордана-Гаусса з ведучим елементом a_{lk}) над елементами розширеної матриці умов. Перехід до пункту 1.

<u>Задача 5.</u>

Розв’язати двоїстим симплекс-методом ЗЛП:

$$L(x) = x_2 + x_3 \to min$$
$$x_1 - 3x_2 - x_3 = -8,$$
$$-x_2 - 2x_3 + x_5 = -6,$$
$$x_2 - x_3 + x_4 = -3$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, 5.$$

Наведена ЗЛП є МКЗЛП. Її розв’язування ведеться в симплекс-таблицях, які незначним чином відрізняються від звичайних симплекс-таблиць.

C_j	0	1	1	0	0	
$X_Б$	x_1	x_2	X_3	X_4	x_5	A_0
X_1	1	-3	-1	0	0	-8
X_5	0	-1	-2	0	1	-6
X_4	0	1	-1	1	0	-3
Δ	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	
γ		0.33	1			
X_2	-0.33	1	0.33	0	0	2.67
X_5	-0.33	0	-1.67	0	1	-3.33

X_4	0.33	0	-1.33	1	0	0.33
Δ	**0.33**	**0**	**0.67**	**0**	**0**	
γ	1		0.4			
X_2	-0.4	1	0	0	0.2	2
X_3	0.2	0	1	0	-0.6	2
X_4	0.6	0	0	1	-0.8	3
Δ	**0.2**	**0**	**0**	**0**	**0.4**	

Оптимальний розв'язок задачи:

$$x^* = (0, 2, 2, 3, 0).$$

При цьому $L(x^*) = 4.$

Задача 6.

$$L(x) = 3x_3 + 7x_4 + 16x_6 \to min$$
$$x_3 - x_4 + x_5 = 0,$$
$$x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_6 = 0,$$
$$x_1 - x_3 + x_4 = -4$$
$$x_j \geq 0, \ \ j=1,\dots,5.$$

Наведена ЗЛП є МКЗЛП.

C_j	0	0	3	7	0	16	
$X_Б$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	A_0
X_5	1	0	1	-1	1	0	0
X_2	0	1	1	2	0	3	0
X_1	0	0	-1	1	0	0	-4
Δ	**0**	**0**	**3**	**7**	**0**	16	
γ			3				
X_5	1	0	0	0	1	0	-4
X_2	1	1	0	3	0	3	-4
X_3	-1	0	1	-1	0	0	4
Δ	**3**	**0**	**0**	**10**	**0**	**16**	

Оптимального розв'язку *МКЗЛП* не існує, оскільки на 2-му кроці *ДСМ* в рядку з $a_{i0} < 0, \ (i=1, \ 2)$ всі компоненти $a_{ij} \geq 0, \ j=1,\dots,6$. В цьому випадку допустима множина розв'язків *МКЗЛП* порожня.

ЗЛП розв'язку не має.

2.ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА

2.1.Постановка транспортної задачі

В кожному з пунктів P_i, $i=1,\dots,m$, виробляється a_i одиниць деякого однорідного продукту, а в кожному з пунктів Q_j, $j=1,\dots,n$, споживається b_j одиниць того ж продукту. Можливе транспортування продукту із кожного пункту виробництва P_i в кожний пункт споживання Q_j. Вартість перевезення одиниці продукту з пункту P_i в пункт Q_j відома і складає c_{ij} одиниць. Ці дані наведені в табл. 1.

В даній таблиці в рядках записані постачальники, в стовпцях – споживачі. Перетин рядків і стовпців створює клітинки, в яких наведено інформацію про перевезення продукції від i-го постачальника до j-го споживача. Кожна така клітинка поділена по діагоналі, у верхній частині її записані затрати на перевезення одиниці вантажу від i-го постачальника до j-го споживача - $c_{ij},$ а в нижній – обсяг вантажу - $x_{ij}\ \left(i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n}\right)$.

Вважаючи, що сумарний об'єм виробництва дорівнює сумарному об'єму споживання, потрібно скласти план перевезень продукту, що мінімізує сумарні транспортні витрати.

Таблиця 1

Пункт постачання	Пункт споживання					Обсяг постачання
	Q_1	Q_2	Q_3	…	Q_n	
P_1	c_{11} / x_{11}	c_{12} / x_{12}	c_{13} / x_{13}	…	c_{1n} / x_{1n}	A_1
P_2	c_{21} / x_{21}	c_{22} / x_{22}	c_{23} / x_{23}	…	c_{2n} / x_{2n}	A_2
P_3	c_{31} / x_{31}	c_{32} / x_{32}	c_{33} / x_{33}	…	c_{3n} / x_{3n}	A_3
…	…	…	…	…	…	…
P_m	c_{m1} / x_{m1}	c_{m2} / x_{m2}	c_{m3} / x_{m3}	…	c_{mn} / x_{mn}	A_m
Потреба Споживача	B_1	b_2	B_3	…	b_n	

Математична модель транспортної задачі має вигляд:

$$L(x) = c_{11}x_{11} + \dots + c_{1n}x_{1n} + \dots + c_{m1}x_{m1} + \dots + c_{mn}x_{mn} \to min,$$
$$x_{i1} + \dots + x_{in} = a_i,\ i=1,\dots,m,$$
$$x_{1j} + \dots + x_{mj} = b_j,\ j=1,\dots,n,$$
$$x_{ij} \ge 0,\ i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n,$$
$$a_1 + \dots + a_m = b_1 + \dots + b_n.$$

Остання умова визначає *збалансовану транспортну задачу.*

В запропонованій моделі назвемо вектор $\boldsymbol{x}=(x_{11},...,x_{1n},...,x_{m1},...,x_{mn})$ вектором *перевезень*, вектор $\boldsymbol{b}=(a_1,...,a_m,b_1,...,b_n)^\text{T}$ — вектором *запасів-потреб*, вектор $\boldsymbol{A}_{ij}=(0,...,0,1,0...,0,0,...,0,1,0,...,0)^\text{T}$ — вектором *комунікації* P_iQ_j (вектор $\boldsymbol{A}_{ij}$ має розмірність $m+n$, причому перша одиниця стоїть на i-у місці, а друга — на $m+j$-у) і, нарешті, вектор $\boldsymbol{c}=(c_{11},...,c_{1n},...,c_{m1},...,c_{mn})$ — вектором *транспортних витрат*.

<u>Основні означення</u>

Оскільки транспортна задача є частинним випадком задачі лінійного програмування, для неї мають силу всі загальні означення останньої. Зокрема, зауважене відноситься також і до допустимого базисного розв'язку (*ДБР*), як невиродженого, так і виродженого.

Послідовність комунікацій, серед яких немає однакових, вигляду:

$$P_{i_1}Q_{j_1}, P_{i_2}Q_{j_1}, P_{i_2}Q_{j_2}, ..., P_{i_s}Q_{j_s},$$

називається *маршрутом*, що зв'язує пункти P_{i_1} і Q_{j_s}.

Маршрут, до якого додана комунікація $P_{i_1}Q_{j_s}$, називається *замкненим маршрутом* (*циклом*).

Комунікація P_iQ_j називається *основною комунікацією* розв'язку $\boldsymbol{x}$, якщо відповідна їй компонента розв'язку $x_{ij}>0$.

Подібні означення мають місце і для клітинок транспортної таблиці.

<u>Властивості транспортної задачі:</u>

1. Збалансована транспортна задача завжди допустима і має оптимальний розв'язок.
2. Ранг матриці $\boldsymbol{A}$ обмежень транспортної задачі дорівнює $m+n-1$, внаслідок чого допустимий базисний розв'язок задачі містить не більше $m+n-1$ ненульових перевезень x_{ij}.
3. Якщо в транспортній задачі всі числа a_i, $i=1,\dots,m$, b_j, $j=1,\dots,n$, — цілі, то хоча б один оптимальний розв'язок задачі — цілочисельний.

<u>Основні теореми:</u>

1. *Розв'язок транспортної задачі базисний, якщо з його основних комунікацій неможливо скласти замкнений маршрут* (*цикл*).
2. *ДБР* $\boldsymbol{x}=(x_{ij},\ i=1,...,m,\ j=1,...,n)$ *оптимальний тоді і тільки тоді, коли існують потенціали* u_i, v_j *такі, що*

   $v_j-u_i=c_{ij}$, *якщо* x_{ij} – базисне перевезення,

   $v_j-u_i\le c_{ij}$, *якщо* x_{ij} – небазисне перевезення.

2.2. Методи пошуку вихідного ДБР

<u>2.2.1.Метод північно-західного кута</u>

Метод складається з однотипних кроків, тому його формальний виклад дамо лише для 1-го кроку. Заповнюємо північно-західну клітинку таблиці, покладаючи $x_{11} = \min\{a_1, b_1\}$. Можливі три випадки:

1. $a_1 < b_1$, тоді $x_{11} = a_1$ і викреслюється 1-й рядок таблиці;
2. $a_1 > b_1$, тоді $x_{11} = b_1$ і викреслюється 1-й стовпець таблиці;
3. $a_1 = b_1$, тоді $x_{11} = a_1 = b_1$ і викреслюється як 1-й рядок, так і 1-й стовпець. В останньому випадку в одну з викреслених клітинок заноситься нульове базисне перевезення (відповідний вихідний допустимий базисний розв'язок буде виродженим).

В усіх випадках після заповнення базисної клітинки об'єми запасів a_1 і потреб b_1 зменшують на величину, що дорівнює x_{11}. Кінець кроку.

На кожному з наступних кроків розглядається «обрізана» транспортна таблиця, тобто викреслені рядки і стовпці ігноруються.

Задача 7.

Побудувати опорний план ТЗ (або вихідний ДБР):

Таблиця 2

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	a
P_1	3	5	1	7	8	17
P_2	2	4	4	8	9	14
P_3	4	3	2	8	5	21
P_4	6	5	3	4	3	43
B	19	22	23	17	14	

Заповнення починається з клітинки $(1, 1)$. Оскільки $x_{11} = min\{17, 19\} = 17$, то викреслюється перший рядок таблиці, $a - x_{11} = 0,\ b - x_{11} = 2$. Переходимо до клітинки $(2, 1)$. Заносимо в клітинку $x_{21} = min\{14, 2\} = 2$ і викреслюємо перший стовпчик, $a - x_{21} = 12,\quad b - x_{11} = 0$. Переходимо до клітинки $(2, 2)$: $x_{22} = min\{12, 22\} = 12$, викреслюється другий рядок, $a - x_{22} = 0,\quad b - x_{22} = 10$. Наступною буде клітинка $(3, 2)$: $x_{32} = min\{21, 10\} = 10$, викреслюємо другий стовпчик, $a - x_{32} = 11,\quad b - x_{32} = 0$. Переходимо до клітинки $(3, 3)$: $x_{33} = min\{11, 23\} = 11$, викреслюється третій рядок, $a - x_{33} = 0,\quad b - x_{33} = 12$. Переходимо до клітинки $(4, 3)$: $x_{43} = min\{43, 12\} = 12$, $a - x_{43} = 31,\ b - x_{43} = 0$. Наступна клітинка $(4, 4)$: $x_{44} = min\{31, 17\} = 17$, $a - x_{44} = 14,\ b - x_{44} = 0$. Остання клітинка $(4, 5)$: $x_{45} = min\{14, 14\} = 14$, $a - x_{45} = 0,\ b - x_{45} = 0$.

Таблиця 3

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	a	a-x
P_1	3 ***17***	5	1	7	8	17	0

P_2	2 ***2***	4 ***12***	4	8	9	14	0
P_3	4	3 ***10***	2 ***11***	8	5	21	0
P_4	6	5	3 ***12***	4 ***17***	3 ***14***	43	0
B	19	22	23	17	14		
b-x	0	0	0	0	0		

Одержаний план є опорним, бо з його ненульових перевезень неможливо скласти замкнений маршрут (цикл), і він задовольняє умовам задачі.

2.2.2. Метод мінімального елемента

Кількість ітерацій при розв'язуванні ТЗ можна скоротити, якщо перший опорний план будувати за методом мінімального елемента.

Метод відрізняється від попереднього тим, що замість північно-західної клітинки на кожному кроці вибирається клітинка з найменшим значенням транспортних витрат c_{ij}.

Задача 7.

Розв'яжемо задачу 7 з попереднього пункту методом мінімального елемента.

На кожному кроці вибирається клітинка з найменшим значенням транспортних витрат c_{ij}. Оскільки $min\{c_{ij}\} = c_{13} = 1$, то заповнення починається з клітинки $(1,3)$: $x_{13} = min\{17, 23\} = 17$, викреслюється перший рядок таблиці, $a - x_{13} = 0,\ \ b - x_{13} = 6$. Переходимо до клітинки $(1,2)$. Заносимо в клітинку $x_{12} = min\{14, 19\} = 14$ і викреслюємо другий рядок, $a - x_{12} = 0,\ \ b - x_{12} = 5$. Переходимо до клітинки $(3,3)$: $x_{33} = min\{6, 21\} = 6$, викреслюється третій стовпчик, $a - x_{33} = 15,\ \ b - x_{33} = 0$. Наступною буде клітинка $(3,2)$: $x_{32} = min\{15, 22\} = 15$, викреслюємо третій рядок, $a - x_{33} = 0,\ \ b - x_{33} = 7$. Переходимо до клітинки $(4,5)$: $x_{45} = min\{43, 14\} = 14$, викреслюється п'ятий стовпчик, $a - x_{45} = 29,\ \ b - x_{45} = 0$. Переходимо до клітинки $(4,4)$: $x_{44} = min\{29, 17\} = 17$, викреслюється четвертий стовпчик, $a - x_{44} = 12,$ $b - x_{44} = 0$. Наступна клітинка $(4,2)$: $x_{42} = min\{12, 7\} = 7$, викреслюється другий стовпчик, $a - x_{42} = 5,\ \ b - x_{42} = 0$. Остання клітинка $(4,1)$: $x_{45} = min\{5, 5\} = 5$, $a - x_{41} = 0,\ b - x_{41} = 0$.

Таблиця 4

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	*a*	*a-x*
P_1	3	5	1 ***17***	7	8	17	0
P_2	2 ***14***	4	4	8	9	14	0
	4	3	2	8	5		

P_3		**15**	**6**			21	0
P_4	6 **5**	5 **7**	3	4 **17**	3 **14**	43	0
B	19	22	23	17	14		
b-x	0	0	0	0	0		

Очевидно, що цей опорний план є ефективнішим за план, наведений у табл.2.

2.2.3. Метод викреслювання

Метод застосовується при побудові циклу. На кожному кроці методу в транспортній таблиці викреслюється або рядок, або стовпець, які в подальшому ігноруються. Викреслювати належить рядки (стовпці), які мають тільки одну базисну клітинку. Невикреслені клітинки транспортної таблиці утворюють цикл.

2.2.4. Метод подвійної переваги

Перед початком заповнення таблиці необхідно позначити клітинки, які мають найменшу вартість у рядках і стовпчиках. Таблицю починають заповнювати з клітинок, позначених двічі (як мінімальні і в рядку, і в стовпчику). Далі заповнюють клітинки, позначені один раз (як мінімальні або в рядку, або в стовпчику), а вже потім – за методом мінімального елемента.

2.3.Метод потенціалів

Алгоритм методу потенціалів

1. Знаходиться вихідний допустимий базисний розв'язок (*ДБР*), наприклад, за допомогою одного із згаданих вище методів.

2. В подальшому метод потенціалів складається з однотипних кроків, на кожному з яких:

i) Обчислюються потенціали рядків u_i, $i=1,...,m$, і стовпців v_j, $j=1,...,n$, транспортної таблиці як розв'язок системи $v_j - u_i = c_{ij}$, де i та j приймають такі значення, що клітинки (i,j) — базисні.

ii) Обчислюються оцінки змінних x_{ij} для всіх небазисних клітинок (i,j) за формулою $\Delta_{ij} = c_{ij} - v_j + u_i$ (оцінки базисних змінних — нульові).

iii) Знайдені оцінки Δ_{ij} перевіряються на невід'ємність. Якщо всі $\Delta_{ij} \geq 0$, $i=1,...,m$, $j=1,...,n$, то поточний *ДБР* оптимальний. Інакше переходять до поліпшення *ДБР* (пункт iv)).

iv) Визначають клітинку (k,l) з мінімальною від'ємною оцінкою, і приєднують її до сукупності базисних. Знаходять цикл (наприклад, методом викреслювання). Поділяють цикл на додатний і від'ємний півцикли, послідовно позначаючи клітинки – вершини циклу знаками «+» і «–», починаючи з клітинки (k,l), яку першою відносять до додатного півциклу, наступну за нею — до від'ємного, третю — до додатного і т. д. Серед клітинок від'ємного півциклу визначають клітинку (s,r) з мінімальною величиною перевезення x_{ij} (якщо таких клітинок кілька, то вибирають тільки одну з них). Покладають $\theta = x_{sr}$. Збільшують на значення θ перевезення x_{ij} в клітинках додатного півциклу і зменшують їх на те ж значення в клітинках від'ємного півциклу. В результаті здійснення вказаних процедур клітинка (k,l) вводиться до сукупності базисних, а клітинка (s,r) перестає бути базисною (на ній розривають цикл). Кінець кроку.

<u>Задача 8</u>. Методом потенціалів ТЗ, дані для якої наведені в таблиці 2. З таблиці 4 візьмемо і початковий базисний розв'язок, побудований методом мінімального елемента. Усі ці дані перенесені в таблицю 5.

Таблиця 5

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	a	u
P_1	0 3	3 5	0 1 **17**	6 7	8 8	17	0
P_2	0 2 **14**	3 4	4 4	8 8	10 9	14	1
P_3	0 4	0 3 **15** +	0 2 **6** -	6 8	4 5	21	-1
P_4	0 6 **5**	0 5 **7** -	-1 3 +	0 4 **17**	0 3 **14**	43	-3
B	19	22	23	17	14		
V	3	2	1	1	0		

Крім цього до таблиці 5 занесені потенціали $u_i,\ i = 1,\ldots,4,$ (останній стовпець), $v_j,\ j = 1,\ldots,5,$ (останній рядок), що є розв'язком системи $v_j - u_i = c_{ij}$, $(i,j):\ x_{ij}$ - базисне, де покладено $u_1 = 0.$ У верхніх лівих кутах кожної з клітинок записані величини Δ_{ij}. Бачимо, що розглядуваний базисний розв'язок не є оптимальним.

Для введення до числа базисних вибирається клітинка $(4,3)$ з мінімальною симплекс-різницею, $\Theta = 6$. Новий базисний розв'язок і відповідні обчислення наведені у таблиці 6.

Зауважимо, що при розв'язуванні системи для знаходження потенціалів $u_i,\ i = 1,\ldots,4,$ та $v_j,\ j = 1,\ldots,5,$ покладено $u_1 = 0.$

Таблиця 6

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	a	u
P_1	-1 3 +	2 5	0 1 **17** -	5 7	7 8	17	0
	0 2	3 4	5 4	8 8	10 9		

P_2	***14***					14	2
P_3	0 4	0 3 ***21***	1 2	6 8	4 5	21	0
P_4	0 6 ***5*** **-**	0 5 ***1***	0 3 ***6*** **+**	0 4 ***17***	0 3 ***14***	43	-2
B	19	22	23	17	14		
V	4	3	1	2	1		

Таблиця 7

	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	*a*	*u*
P_1	0 3 ***5***	2 5	0 1 ***12***	5 7	8	17	0
P_2	0 2 ***14***	2 4	4 4	7 8	9 9	14	1
P_3	1 4	0 3 ***21***	1 2	6 8	4 5	21	0
P_4	0 6	0 5 ***1***	0 3 ***11***	0 4 ***17***	0 3 ***14***	43	-2
B	19	22	23	17	14		
V	3	3	1	2	1		

У таблиці 7 наведені результати обчислень для наступної ітерації. У цьому випадку при розв'язуванні системи для знаходження потенціалів покладено $u_1 = 0.$

Як бачимо, критерій оптимальності виконується, отже,

$$x^* = \left\| \begin{matrix} 5 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 14 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 11 & 17 & 14 \end{matrix} \right\|$$

є оптимальним розв'язком ТЗ, $L(x^*) = 266.$

Завдання для самостійної роботи
для студентів заочної та денної форми навчання:

Завдання1. Графічним методом визначити оптимальні розв'язки ЗЛП.

1.1. $Z = x_1 + 2x_2 \to min\,(max)$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_2 \ge 1, \\ x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0. \end{cases}$$

1.2. $Z = x_1 + 3x_2 \to min\,(max)$

$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 \ge 30, \\ -x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 + x_2 \le 10, \\ x_2 \ge 2, \\ x_1 \ge 0. \end{cases}$$

1.3. $Z = 2x_1 - 4x_2 \to min\,(max)$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 11, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 - x_2 \le 2, \\ -2x_1 + 4x_2 \ge 4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.4. $Z = x_1 + 2x_2 \to min\,(max)$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 3, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ -x_1 + 3x_2 \le 10, \\ x_1 + 4x_2 \ge 4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.5. $Z = x_1 - 3x_2 \to min\,(max)$

$$\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 \ge 30, \\ x_1 - x_2 \ge 4, \\ -x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.6. $Z = 3x_1 + 4x_2 \to min\,(max)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 20, \\ -x_1 + 4x_2 \le 20, \\ x_1 \ge 5, \\ x_2 \ge 5. \end{cases}$$

1.7. $Z = x_1 + 2x_2 \to min\,(max)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 10, \\ -x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 = 5, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.8. $Z = x_1 + x_2 \to min\,(max)$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - 2x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.9. $Z = 4x_1 + 3x_2 \to min\,(max)$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ -x_1 + 3x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.10. $Z = 3x_1 - 2x_2 \to min\,(max)$

1.11. $Z = 3x_1 + x_2 \to min\,(max)$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 3, \\ x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 \ge 2, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.12. $Z = -x_1 - 2x_2 \to min\,(max)$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 12, \\ -x_1 + 2x_2 \ge 8, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.13. $Z = 2x_1 + 3x_2 \to min\,(max)$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 9, \\ x_1 + 5x_2 \ge 10, \\ 4x_1 - 2x_2 \ge -8, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.14. $Z = 2x_1 - x_2 \to min\,(max)$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 12, \\ -2x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 - 3x_2 \le 0, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 10, \\ -3x_1 + 4x_2 \ge -12, \\ 2x_1 + 4x_2 \le 12, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.15. $Z = -x_1 + x_2 \to min\,(max)$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ x_1 + x_2 \le 4, \\ -4x_1 + x_2 \ge -8, \\ x_1 - 2x_2 \le 0, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.16. $Z = 2x_1 - 3x_2 \to min\,(max)$

$$\begin{cases} -5x_1 + 3x_2 \le 15, \\ -2x_1 + 3x_2 \ge 0, \\ x_1 + x_2 \ge 2, \\ 2x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.17. $Z = 5x_1 - 2x_2 \to min\,(max)$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 5, \\ 5x_1 - 2x_2 \le 10, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ 2x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.18. $Z = -2x_1 + x_2 \to min\,(max)$

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - 2x_2 \le 0, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.19. $Z = x_1 - 2x_2 \to min$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - 2x_2 \ge 0, \\ 2x_1 + 2x_2 \ge 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.20. $Z = x_1 + 2x_2 \to max$

1.21. $Z = -x_1 + x_2 \to min$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 21, \\ x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.22. $Z = x_1 + x_2 \to min$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 21, \\ x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.23. $Z = x_1 - x_2 \to min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1, \\ -x_1 - x_2 \le -1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.24. $Z = -x_1 - x_2 \to min$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 + x_2 \le 14, \\ 4x_1 + x_2 \le 28, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.25. $Z = -x_1 - 2x_2 \to min$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 + 2x_2 \le 14, \\ 4x_1 + x_2 \le 28, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.26. $Z = x_1 + 2x_2 \to min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 10, \\ -x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 \le 5, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1, \\ -x_1 - x_2 \le -2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.27. $Z = -x_1 + x_2 \to min$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \le 0, \\ -2x_1 + x_2 \le 0, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.28. $Z = x_1 + x_2 \to min$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \le -3, \\ -3x_1 - x_2 \le -5, \\ -x_1 - 3x_2 \le -5, \\ -2x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 - 2x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.29. $Z = -x_1 - x_2 \to min$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 \le -3, \\ -2x_1 - x_2 \le -3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.30. $Z = -3x_1 + x_2 \to min\,(max)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ 2x_1 + x_2 \le 4, \\ 2x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.31. $Z = -3x_1 + x_2 \to min\,(max)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ 2x_1 + x_2 \le 4, \\ -9x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.32. $Z = -3x_1 + x_2 \to min\,(max)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ 2x_1 + x_2 \le 4, \\ 6x_1 \le 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.33. $Z = 3x_1 + 2x_2 \to max$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 4, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 14, \\ x_1 - x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.34. $Z = x_1 + 4x_2 \to max$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 4, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 14, \\ x_1 - x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.35. $Z = 5x_1 + x_2 \to max$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 4, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 14, \\ x_1 - x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.36. $Z = 2x_1 + x_2 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ -4x_1 + 2x_2 \ge -8, \\ 2x_1 - 3x_2 \ge -6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.37. $Z = 2x_1 + x_2 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ -4x_1 + 2x_2 \ge -8, \\ 2x_1 - 3x_2 \ge 4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.38. $Z = 2x_1 + x_2 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ -4x_1 + 2x_2 \ge -8, \\ 2x_1 - 3x_2 \ge 6, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Завдання 2. Розв’язати симплекс-методом ЗЛП. В усіх задачах, що пропонуються нижче, всі змінні невід’ємні.

2.1. $2x_1+x_2-x_3-x_4 \to min$

$x_1+x_2+2x_3-x_4=2$

$2x_1+x_2-3x_3+x_4=6$

$x_1+x_2+x_3+x_4=7$

2.2. $2x_1-4x_2 \to min$

$8x_1-5x_2 \le 16$

$x_1+3x_2 \ge 2$

$2x_1+7x_2 \le 9$

2.3. $7x_1+5x_2 \to max$

$7x_1+5x_2 \ge 7$

$7x_1-5x_2 \ge 35$

$x_1-x_2 \le 0$

2.4. $x_1-2x_2+3x_3 \to min$

$2x_1+3x_2+4x_3=1$

$-2x_1+x_2+3x_3=2$

2.5. $2x_1-3x_2 \to max$

$5x_1+2x_2 \geq 10$

$x_1+3x_2 \leq 12$

2.6. $6x_1+4x_2 \to min$

$2x_1+x_2 \geq 3$

$x_1 - x_2 \leq 1$

2.7. $4x_1+5x_2+9x_3+11x_4 \to max$

$x_1+\ x_2+\ x_3+\ x_4 \leq 15$

$7x_1+5x_2+3x_3+2x_4 \leq 80$

$3x_1+5x_2+10x_3+15x_4 \leq 60$

2.8. $x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 \to max$

$2x_1+x_2+2x_3-x_4=2$

$-3x_1+x_2+2x_3+x_4=6$

$x_1+x_2+x_3+x_4=7$

2.9. $4x_1+x_2-2x_3-x_4-x_5 \to min$

$x_3-x_4+x_5=1$

$x_2+2x_4-x_5=1$

$x_1+2x_2+2x_5=4$

2.10. $x_1+2x_2+3x_3-x_4 \to max$

$x_1+2x_2+3x_3 = 15$

$2x_1+x_2-3x_3 = 20$

$x_1+2x_2+x_4 = 10$

2.11. $5x_1 + x_2 + x_3 \to max$

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 5,$

$-x_1 + 3x_2 - x_3 \geq -3.$

2.12. $x_1 - 3x_2 + x_3 \to min$

$-x_1 - 2x_2 + x_3 \leq -2,$

$2x_2 + 4x_3 \leq 7.$

2.13. $-x_1 - x_2 + 3x_3 \to max$

$-x_1 + x_2 - 2x_3 \geq -2,$

$2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 8.$

2.14. $-x_1 - 2x_2 + 2x_3 \to min$

$2x_1 + x_2 + x_3 = 10,$

$x_1 - x_2 \leq 2.$

2.15. $x_1 + 3x_2 + 9x_3 \to max$

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 10,$

$x_1 - x_2 - 2x_3 \geq -2.$

2.16. $x_1 + 3x_2 - 3x_3 \to min$

$2x_1 + x_2 - 5x_3 \geq 2,$

$-x_1 - 2x_3 \geq -6.$

2.17. $x_1 - x_2 + 3x_3 \to max$

$x_1 + 3x_3 \leq 10,$

$x_1 - x_2 - x_3 = -3.$

2.18. $3x_1 - 2x_2 - x_3 \to min$

$-x_1 - 3x_2 + 3x_3 \geq -6,$

$-2x_1 + x_2 + x_3 \leq 4.$

2.19. $2x_1 - x_2 - 3x_3 \to max$

$2x_1 + x_3 \leq 6,$

$x_1 - x_2 - x_3 = -2,$

$-x_1 + 6x_3 \geq -4.$

2.20. $-3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 \to min$

$-x_1 + x_2 - x_4 = -5,$

$2x_2 + x_3 \leq 4,$

$-x_1 - x_2 + 2x_3 \geq -8.$

2.21. $2x_1 + x_2 - x_3 \to max$

$x_1 + x_2 \leq 1,$

$-x_2 - x_3 \geq -2,$

$x_1 + x_3 \leq 2.$

2.22. $-2x_1 - 3x_2 + x_3 \to min$

$2x_1 + x_2 - x_3 = -2,$

$x_1 + 2x_2 \leq 5,$

$3x_1 - 2x_2 \geq -4.$

2.23. $4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \to max$

$$x_1 - x_3 \le 6,$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 5,$$
$$-2x_1 + 2x_3 \ge -4.$$

2.24. $x_1 + 2x_2 - 3x_3 \to min$

$$-2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 4,$$
$$2x_1 + 3x_2 \le 6,$$
$$x_1 + x_3 \le 2.$$

2.25. $x_1 - 5x_2 - x_3 \to max$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 3,$$
$$2x_1 + x_3 = 4.$$

2.26. $5x_1 + 4x_2 + 2x_3 \to min$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 5,$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 8.$$

2.27. $3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to max$

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \ge 2,$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \le 8.$$

2.28. $2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \to min$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7,$$
$$2x_1 - 5x_2 + x_3 \ge 10.$$

2.29. $2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 3x_4 \to max$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4,$$
$$x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 8.$$

2.30. $3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to min$

$$x_1 + 4x_2 + x_3 \ge 8,$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 10.$$

2.31. $x_1 + 5x_2 + 3x_3 \to max$

$$2x_1 + x_2 = 4,$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3.$$

2.32. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to min$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 7,$$
$$4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 8.$$

2.33. $x_1 + x_2 \to max$

$$2x_1 + 3x_2 = 5,$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 6.$$

2.34. $-3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to min$

$$x_1 - x_2 + 3x_3 \le 10,$$
$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 8.$$

2.35. $2x_1 - 4x_2 + 5x_3 \to max$

$$x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 2,$$
$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1.$$

2.36. $2x_1 + 5x_2 - 6x_3 \to min$

$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4,$$
$$-x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2.$$

2.37. $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \to max$

$$x_1 - x_2 - x_3 \ge -5,$$
$$-x_1 + x_2 - x_3 \le 4,$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 10.$$

2.38. $3x_1 + 3x_2 + x_3 \to min$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 = 8,$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 12,$$
$$4x_1 + 8x_2 + 3x_3 \ge 24.$$

Завдання 3.

У наведених задачах записати двоїсту задачу до поставленої ЗЛП.

3.1. $Z = -30x_1 + 10x_2 \to max;$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 \ge -2, \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 \le 3, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \ j = \overline{1,3}.$$

3.2. $Z = 4x_1 + 3x_2 + x_3 \to min;$

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 \ge 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 5, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \ j = \overline{1,3}.$$

3.3. $Z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to max;$

3.5. $Z = 2x_1 + 3x_2 \to max;$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 30, \\ x_1 + x_2 = 6, \\ 2x_1 + x_2 \ge 10, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0.$$

3.6. $Z = 5x_1 + 2x_2 \to min;$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 8, \\ 3x_1 + 4x_2 \le 20, \\ 3x_1 + x_2 \ge 6, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0.$$

3.7. $Z = 5x_1 + 12x_2 - 4x_3 \to max;$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 10, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \ j = \overline{1,3}.$$

3.8. $Z = -x_1 + x_2 \to min;$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 4, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ x_1 + x_2 \le 6, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0.$$

3.9. $Z = 5x_1 + 6x_2 \to max;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5, \\ x_1 + x_2 \ge 3, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 50, \\ 3x_1 + x_3 \ge 15, \\ x_1 + 4x_2 \le 40, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \ j = \overline{1,3}.$$

3.4. $Z = -3x_1 - 4x_2 - 5x_3 \to min;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \ge -4, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 6, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \ j = \overline{1,3}.$$

$$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0.$$

3.10. $Z = 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 \to min;$

$$\begin{cases} -x_2 + 4x_3 \ge 1, \\ -x_1 + 5x_2 \le 1, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 9, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \ j = \overline{1,3}.$$

3.11. $Z = 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 \to max;$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 \le 2, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \ge 1, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \ j = \overline{1,3}.$$

3.12. $Z = x_1 + 2x_2 - 3x_3 \to min;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 4, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \ j = \overline{1,3}.$$

3.13. $Z = x_1 + x_2 \to max;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5, \\ 3x_1 - x_2 = 6, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \ j = \overline{1,3}.$$

3.14. $Z = 10x_1 + 40x_2 \to min;$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \ge 18, \\ x_1 + 2x_2 \ge 20, \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 25, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \ \ x_2 \ge 0.$$

3.15. $Z = x_1 + 2x_2 \to max;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 12, \\ -3x_1 + 2x_2 \le -4, \\ x_1 - x_2 \le 2, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \ \ x_2 \ge 0.$$

3.16. $Z = x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to min;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 \ge 12, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 20, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,3}.$$

3.17. $Z = x_1 + 5x_2 + 3x_3 \to max;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 = 4, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,3}.$$

3.18. $Z = 2x_1 + 4x_2 + 24x_3 + 6x_4 \to min;$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 + x_4 \le -2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 \ge -2, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,4}.$$

3.19. $Z = 8x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \to max;$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_3 + x_4 = 16, \\ 6x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = 4, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,4}.$$

3.20. $Z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \to min;$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = -3, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = -2, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,3}.$$

3.21. $Z = 9x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to max;$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 \le 4, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 6, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,3}.$$

3.22.
$Z = -x_1 + 8x_2 + 20x_3 + 6x_4 \to min;$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 2x_4 \le 2, \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 \ge 1, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,4}.$$

3.23. $Z = -x_1 + x_2 + x_3 \to max;$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 \le 3, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \ge -2, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,3}.$$

3.24. $Z = 8x_1 + 8x_2 + x_3 \to min;$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 \ge 1, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 \ge 3, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,3}.$$

3.25. $Z = x_1 + 4x_2 + x_3 \to max;$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,3}.$$

3.26. $Z = 14x_1 + 15x_2 - 24x_3 \to min;$

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 - 4x_3 \ge 1, \\ -2x_1 - 3x_2 + 6x_3 \le -3, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,3}.$$

3.27. $Z = x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to max;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -1, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,3}.$$

3.28. $Z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 \to max;$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 10, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,3}.$$

3.29. $Z = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \to max;$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 \le 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5, \\ -x_1 + x_3 \ge -2, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \;\; j = \overline{1,3}.$$

3.30. $Z = 2x_1 + 3x_2 \to min;$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 30, \\ x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ x_1 - x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0.$$

3.31. $Z = 8x_1 - 20x_2 + 6x_3 \to max;$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 5, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 \le 2, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \;\; j = \overline{1,3}.$$

3.32. $Z = x_1 + 10x_2 + 6x_3 + x_4 \to min;$

$$\begin{cases} 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 15, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 19, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \;\; j = \overline{1,4}.$$

3.33. $Z = x_1 - 5x_2 + 4x_3 + x_4 \to max;$

$$\begin{cases} x_2 + 3x_3 - x_4 \le 15, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 \ge 9, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \;\; j = \overline{1,4}.$$

3.34. $Z = x_1 - 2x_2 - 4x_3 \to max;$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \ge -5, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 \le 2, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \;\; j = \overline{1,3}.$$

<u>Завдання 4.</u> Розв'язати двоїстим симплекс-методом ЗЛП. В усіх задачах, що пропонуються далі, всі змінні невід'ємні.

4.1. $6x_1 + 4x_2 \to min,$

$2x_1 + x_2 \ge 3,$

$x_1 - x_2 \le 1,$

$-x_1 + 2x_2 \ge 1;$

4.2. $2x_1 + 3x_2 \to min,$

$x_1 + 5x_2 \ge 16,$

$3x_1 + 2x_2 \ge 12,$

$2x_1 + 4x_2 \ge 16;$

4.3. $-6x_1 - 4x_2 \to max,$

$2x_1 + x_2 \ge 3,$

$x_1 - 2x_2 \le 2,$

$3x_1 + 2x_2 \ge 1;$

4.4. $6x_1 + 4x_2 \to min,$

$2x_1 + x_2 \ge 3,$

$3x_1 + 2x_2 \ge 1,$

$-x_1 - x_2 \ge 6;$

4.5. $7x_1 + x_2 \to min,$

$x_1 + x_2 \ge 3,$

$5x_1 + x_2 \ge 5,$

$x_1 + 5x_2 \ge 5;$

4.6. $7x_1 + 10x_2 \to min,$

$2x_1 + 28x_2 \ge 17,$

$x_1 + 2x_2 \ge 3;$

$x_1 + 17x_2 \ge 19;$

4.7. $X_1 + x_2 + 2x_3 \to min,$

$2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = -3,$

$X_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_5 = -1;$

4.8. $-15x_1 - 33x_2 \to max,$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 6,$$
$$6x_1 + x_2 \geq 6;$$

4.9. $x_1 + 2x_2 \to min,$

$$2x_1 + x_2 \leq 18,$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 14,$$
$$x_1 - 2x_2 \leq 10;$$

4.10. $78x_1 + 52x_2 \to min,$

$$6x_1 + 2x_2 \geq 9,$$
$$-10x_1 + 14x_2 \geq 13,$$
$$11x_1 - x_2 \geq 6;$$

4.11. $5x_1 + 4x_2 \to min,$

$$x_1 + x_2 \leq 6,$$
$$2x_1 + x_2 \geq 9,$$
$$3x_1 + x_2 \geq 11;$$

4.12. $x_2 + x_3 \to min,$

$$x_1 - 3x_2 - x_3 = -8,$$
$$-x_1 - 2x_2 + x_5 = -6,$$
$$x_2 - x_3 + x_4 = 3;$$

4.13. $4x_2 + 15x_3 + 12x_4 + 2x_5 \to min,$

$$-2x_3 - 3x_4 - x_5 + x_6 = -1,$$
$$x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 + x_5 = -1;$$

4.14. $x_3 + x_4 + 2x_5 \to min,$

$$x_1 - x_3 + x_4 - x_5 = -2,$$
$$x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1;$$

4.15. $x_1 + x_3 \to min$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = -1,$$
$$x_1 + 3x_2 + x_4 = 2;$$

4.16. $x_3 + x_4 \to min$

$$x_1 - 2x_3 + x_4 = -2,$$
$$x_2 - x_3 + 2x_4 = -1,$$
$$x_5 + x_3 - x_4 = -5;$$

4.17. $2x_1 + x_3 \to min$

$$-2x_1 + x_2 + x_3 = -2,$$
$$-x_1 - 3x_3 + x_4 = -1;$$

4.18. $4x_2 + 15x_3 + 12x_4 + 2x_5 \to min$

$$-2x_3 - 3x_4 - x_5 + x_6 = -1,$$
$$x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 + x_5 = -1;$$

4.19. $2x_1 + 5x_3 \to min$

$$-x_1 + x_3 + x_4 = -1,$$
$$-2x_1 + x_2 - 3x_3 = -11,$$
$$-4x_1 + x_3 + x_5 = -7;$$

4.20. $2x_1 + 6x_3 \to min$

$$3x_1 + x_2 = 17,$$
$$-x_1 - 3x_3 + x_5 = -9,$$
$$-x_3 + x_4 = -1;$$

4.21. $5x_3 + 3x_5 \to min$

$$x_2 + 2x_3 - 4x_5 = -11,$$
$$-5x_3 + x_4 + x_5 = -14,$$
$$x_1 + x_3 - 3x_5 = -7;$$

4.22. $4x_2 + 15x_3 + 12x_4 + 2x_5 \to min$

$$-2x_3 - 3x_4 - x_5 + x_6 = -1,$$
$$x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 + x_5 = -1;$$

4.23. $2x_1 + 5x_3 \to min$

$-x_1 + x_3 + x_4 = -1,$

$-2x_1 + x_2 - 3x_3 = -11,$

$-4x_1 + x_3 + x_5 = -7;$

4.24. $2x_1 + 6x_3 \to min$

$3x_1 + x_2 = 17,$

$-x_1 - 3x_3 + x_5 = -9,$

$-x_3 + x_4 = -1;$

4.25. $5x_3 + 3x_5 \to min$

$x_2 + 2x_3 - 4x_5 = -11,$

$-5x_3 + x_4 + x_5 = -14,$

$x_1 + x_3 - 3x_5 = -7;$

4.26. $3x_5 + 3x_6 + 3x_7 + 3x_8 \to min$

$x_2 - x_5 = -1,$

$x_1 - x_6 = -2,$

$x_4 - x_7 = -3,$

$x_3 - x_8 = -4;$

4.27. $2x_3 + x_4 \to min$

$-x_3 + 2x_4 + x_5 = -4,$

$-5x_3 - 2x_4 + x_6 = -10,$

$x_2 + 4x_3 - x_4 = 8,$

$x_1 + 7x_3 + 4x_4 = 9;$

4.28. $5x_4 + x_5 \to min$

$-x_4 - 7x_5 + x_9 = -7,$

$x_3 - 2x_4 + x_5 = 6,$

$-2x_4 - 5x_5 + x_6 = -10,$

$x_2 - 5x_4 - 2x_5 = -10,$

$-7x_4 - x_5 + x_8 = -7,$

$x_4 + x_7 = 6,$

$x_1 + x_5 = 7.$

Завдання 5. Розв'язати методом потенціалів транспортні задачі:

5.1

a\b	25	40	50	35	45
20	7	3	4	8	6
60	5	7	2	3	5
45	1	4	5	2	6
70	3	4	2	7	8

5.2

a\b	35	30	50	25	65
50	8	6	7	3	4
50	7	4	9	3	4
55	6	1	4	5	2
50	7	8	3	4	2

5.3

a\b	10	40	20	60	20
30	5	1	5	2	4
70	5	7	6	3	2
25	1	5	4	2	6
25	1	6	3	3	5

5.4

a\b	70	40	30	60	50
20	6	1	7	3	3
90	7	4	4	8	4
80	8	2	3	5	7
60	3	4	2	8	5

5.5

a\b	30	90	80	20	30
95	2	8	4	6	3
55	3	2	5	2	6
40	6	5	8	7	4
60	3	4	4	2	1

5.6

a\b	10	30	25	15	20
20	9	1	5	7	1
15	2	8	4	8	1
45	2	3	2	8	5
20	6	1	3	4	7

5.7

a\b	13	13	13	13	28
28	8	4	6	3	1
13	9	3	8	5	7
19	7	3	5	9	8
20	2	1	4	5	7

5.8

a\b	11	13	26	10	10
24	9	1	3	2	7
12	6	9	4	1	5
18	9	1	2	8	5
16	3	3	9	6	8

5.9

a\b	10	35	15	25	35
30	7	3	1	5	4
25	7	5	8	3	2
45	6	4	8	3	2
20	3	1	7	6	2

5.10

a\b	30	80	65	35	40
60	8	2	4	9	1
55	7	5	5	3	6
85	9	4	6	2	7
50	5	3	2	6	4

5.11

a\b	30	70	65	35	40
60	8	12	4	9	10
40	7	5	15	3	6
90	9	4	6	12	7
50	5	3	2	6	4

5.12

a\b	10	35	15	25	35
30	3	7	1	5	4
5	7	5	8	6	3
45	6	4	8	3	2
40	3	1	7	4	2

5.13

a\b	30	40	55	80	45
90	1	5	2	2	1
15	3	6	2	4	3
90	8	10	4	5	6
55	7	3	7	9	1

5.14

a\b	16	18	12	15	17
37	2	3	9	7	2
16	3	4	6	1	5
14	5	1	2	2	1
11	4	5	8	1	9

5.15

a\b	25	45	40	15	20
40	3	3	4	4	4
20	7	1	5	2	6
40	2	5	9	1	3
45	3	2	3	2	5

5.16

a\b	30	44	26	20	35
40	2	6	3	4	8
30	1	5	6	9	7
35	3	4	1	6	10
50	2	9	3	4	8

5.17

a\b	40	30	35	15	40
50	1	3	3	4	2
20	5	2	7	5	1
30	6	4	8	2	5
60	7	1	5	7	6

5.18

a\b	20	50	15	45	30
20	3	7	5	6	1
75	5	3	4	3	3
30	2	6	8	7	2
35	6	4	9	3	4

5.19

a\b	5	5	10
8	0	2	1
10	2	1	3
5	2	4	5

5.20

a\b	7	10	6
8	0	5	2
7	2	3	4
6	1	2	0

5.21

a\b	30	10	60
10	1	3	4
20	2	4	5
40	3	6	8

5.22

a\b	10	25	15
5	3	4	1
20	6	8	2
10	4	2	1

5.23

a\b	25	25	40	30
30	5	5	6	2
35	1	7	4	2
60	6	3	2	1

5.24

a\b	40	30	20	40
30	5	7	4	2
40	3	2	5	1
20	3	2	3	7

5.25

a\b	30	10	60	50
10	1	3	4	8
20	5	4	3	2
80	6	9	10	5
50	4	5	3	7

5.26

a\b	20	45	35	40
40	4	9	6	7
20	1	4	5	2
50	2	7	4	5
20	3	5	4	6

5.27

a\b	60	20	40	20	100
160	5	1	5	6	7
80	4	2	2	3	1
60	3	3	4	5	4

5.28

a\b	35	30	60
30	3	1	2
40	6	2	5
50	5	3	7

ЛІТЕРАТУРА

1. *Акулич И.Л.* Математическое програмирование в примерах и задачах: Учебное пособие. – М.: Высшая школа, 1986. – 319с.
2. *Ермольев Ю.М., Ляшко И.И., Михалевич В.С., Тюптя В.И.* Математические методы исследования операций: Учебное пособие. – К.: Вища школа, 1979. – 312с.
3. *Зайченко Ю.П.* Исследование операций: Учебник. – К.: Виша школа, 1988. – 552с.
4. *Карманов В.Г.* Математическое программирование. – М.: Наука, 1975. – 286с.
5. *Ляшенко И.Н. и др.* Линейное и нелинейное програмирование. – К.: Вища шк., 1975. – 372 с.
6. *Попов Ю.Д.* Линейное и нелинейное програмирование. – К., УМК ВО, 1988. – 188 с.

Зміст