531/534(075)
К-95

І.М.Кучерук, І.Т.Горбачук, П.П.Луцик

ЗАГАЛЬНИЙ КУРС ФІЗИКИ

У трьох томах

ТОМ 1 ***Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка***

За редакцією
проф. І.М.Кучерука

Допущено Міністерством освіти України як навчальний посібник для студентів вищих технічних і педагогічних закладів освіти

Київ
"ТЕХНІКА"
1999

КФ ОЭМС
136 919
Библиотека

ББК 22.3
К95
УДК 53(07)

У книжці систематично викладено фізичні основи механіки і молекулярної фізики. Головну увагу приділено розкриттю фізичного змісту і сучасного розуміння основних законів і понять механіки та молекулярної фізики, обгрунтуванню фундаментальних теорій і встановленню меж їх застосовності.

Для студентів вищих технічних і педагогічних закладів освіти.

К $\frac{1604030000\text{-}013}{202\text{-}99}$ Без оголош.

ISBN 966-575-196-4
ISBN 966-575-017-8

© Кучерук І. М.,
Горбачук І. Т.,
Луцик П. П., 1999

Вступ

Навколишній світ уявляється безмежним і складним. Сучасна наука й експериментальна техніка дають можливість одержувати інформацію від об'єктів мегасвіту на відстанях близько $2 \cdot 10^{26}$ м (20 млрд світлових років; 1 світловий рік — відстань, яку проходить світло протягом року з швидкістю $3 \cdot 10^8$ м/с) і проникати в глибини мікросвіту до розмірів атомів та елементарних частинок та вивчати властивості матерії в масштабах 10^{-18} м. Тепер спостерігають і досліджують об'єкти мегасвіту, час життя яких близько 20 млрд світлових років, і об'єкти мікросвіту, час життя яких близько 10^{-24} с. Такий величезний діапазон просторово-часових масштабів об'єктів, про існування яких дістають інформацію за допомогою сучасних приладів та методів дослідження і які потребують осмислення, узагальнення та об'єктивного пізнання.

Протягом усієї історії людства основним рушієм його розвитку було пізнання світу і себе в цьому світі. Фізика це наука, що вивчає найпростіші і разом з тим найбільш загальні закономірності явищ природи, властивості і будову матерії та закони її руху. Термін "фізика" походить від грецького слова physis — природа. В епоху античної культури наука охоплювала всю сукупність знань про природу. З часом виділились окремі науки, в тому числі й фізика. Фізика — експериментальна наука. На основі спостережень і дослідів людина послідовно пізнає різні види і форми матері, що щб'єктивно існують, вивчає характер їх руху та встановлює зв'язки між ними і, таким чином, відкриває таємниці окремих природних процесів, явищ та узагальнює одержані відомості у вигляді законів. Закон визначає загальні, суттєві, стійкі і повторювані зв'язки між явищами або властивостями об'єктів. Ці закономірні зв'язки існують у самій природі, людина здатна лише їх пізнати і надалі використовувати у своїй практичній діяльності. Закони природи об'єктивні.

Для характеристики природних явищ і властивостей предметів у фізиці введені фізичні величини. Природні зв'язки явищ і процесів заміняють співвідношеннями відповідних характеристик (фізичних величин) цих явищ у вигляді рівнянь, що фактично відображають просторово-часове існування матерії. Рівняння, які описують природні явища або їх сукупність, називають фізичними законами. Так, для характеристики взаємодії тіл введено поняття сили $\vec{F}$, для характеристики швидкості зміни руху — прискорення $\vec{a}$, інертні властивості виз-

начають масою m. Зв'язок між зазначеними фізичними величинами виражають у вигляді рівняння $\vec{F} = m\vec{a}$, яке є фізичним законом (другий закон Ньютона).

Закони можуть бути різного ступеня загальності. Одні стосуються окремих явищ або характеристик об'єктів, діють в обмеженій області і вивчаються конкретними науками. Наприклад, закон Ома для постійного струму, газові закони та ін. Є закони більш загальні, які стосуються довільних природних явищ і є свого роду опорними точками у пізнанні картини світу. Це, в першу чергу, закони збереження, пов'язані зі збереженням матерії і форм її руху. Також є закони універсальні (закон переходу кількісних змін в якісні, закон єдності і боротьби протилежностей тощо). Деякі закони виражають математично у вигляді формул, інші — ні.

Основні закони або принципи фізики не доводяться логічно, а встановлюються як узагальнення дослідних результатів. Досліди, в свою чергу, ніколи не можуть охопити всю різноманітність умов, в яких протікають явища, а вимірювання фізичних характеристик завжди проводяться з певними похибками. Тому дослідно закони природи встановлюються з певною точністю і, отже, мають відповідні межі застосовності. Наприклад, закони Ньютона справедливі в інерціальних системах відліку для швидкостей макроскопічних тіл, значно менших від швидкості світла. Якщо довільний фізичний закон застосовувати за межами його дії, дістанемо хибні результати і висновки.

У фізиці розрізняють динамічні закони, тобто такі, які дають змогу абсолютно однозначно передбачати і описувати явища (це, в першу чергу, закони механіки), і закони статистичні, які мають імовірнісний характер (наприклад, розподіл молекул за швидкостями).

Знання законів природи (як і суспільства) дає змогу жити у згоді з ними, на їх основі передбачати майбутнє, цілеспрямовано керувати природними (чи суспільними) процесами і використовувати їх у своїй практичній діяльності.

Фізика вивчає найпростіші і найбільш загальні властивості матерії і форми її руху (механічні, теплові, електромагнітні тощо), які входять до складу вищих, складніших форм руху (хімічних, біологічних, психічних та ін.). Наприклад, фізичний закон всесвітнього тяжіння справедливий для взаємодії будь-яких тіл, незалежно від того, чи вони хімічно прості чи складні, чи є неживою або живою матерією. Закону збереження підпорядковуються всі природні процеси, в тому числі хімічні, біологічні тощо.

Фізика має спільні об'єкти і методи дослідження з іншими природничими науками, внаслідок чого виникли цілі галузі знань: фізична хімія, хімічна фізика, хімічна термодинаміка, астрофізика, біофізика, геофізика та ін.

Основою сучасної фізики є математика. Математичний апарат широко використовується при обробці й узагальненні експериментальних

результатів. Без математики не могли бути створені теорія електромагнітного поля, статистична теорія, термодинаміка, теорія відносності, квантова механіка тощо. Ці теорії дають змогу передбачати нові закономірності, робити узагальнені висновки, а іноді й відкриття. Теоретично було передбачено існування електромагнітних хвиль, хвильових властивостей елементарних частинок, існування нейтронів, нейтрино та ін. Розв'язання проблем фізики, в свою чергу, стимулює розвиток математики.

Фізика є основою сучасного науково-технічного процесу: механічний транспорт, електротехніка, радіоелектроніка, теплотехніка, автоматика і телемеханіка, будівельна техніка, сучасні технології, напівпровідникова і обчислювальна техніка та багато інших прикладних застосувань фізики. Технічний прогрес також сприяє розробці сучасної експериментальної бази фізичних досліджень: вимірювальних приладів, мікроскопів, спектрографів, прискорювачів елементарних частинок та ін.

Пізнання фізичних об'єктів і явищ здійснюється шляхом застосування певних методів фізичного дослідження. Це спостереження, дослід і теоретичне узагальнення. Спостереженням називають вивчення предметів і явищ у природних умовах без порушення різноманітних зв'язків. Фізичний дослід — це відновлення явищ у штучних умовах і планомірне вивчення їх під впливом певних дій.

Спостереження і результати дослідів певних явищ теоретично узагальнюються на основі сучасного математичного апарату. Це дає можливість крім кількісного описання явищ і раціонального їх подання в узагальненій формі дістати нові висновки і наслідки законів, що підлягають дослідній перевірці. Дослідним вивченням законів природи і перевіркою їх наслідків займається експериментальна фізика. Узагальненням дослідних даних, формулюванням законів природи і поясненням на їх основі конкретних явищ, а також передбаченням нових явищ займається теоретична фізика. Експериментальна і теоретична фізика тісно пов'язані між собою і доповнюють одна одну. Сучасна фізика має небагато фундаментальних фізичних теорій, які охоплюють усі розділи. Вони є основою сучасної фізичної картини світу. Частіше теорії охоплюють окремі споріднені типи об'єктів і відповідні групи або типи явищ.

Фізика має надзвичайно велике загальнонаукове значення як одна із галузей інтелектуальної діяльності людини, що формує сучасне світосприйняття і світорозуміння.

На жаль, використання досягнень сучасної фізики дає не тільки позитивні наслідки. Англійський фізик С. Ф. Пауелл з приводу цього зазначив: "Велику небезпечність я бачу в тому, що наука стає антигуманною". Тому на сучасному етапі розвитку науки і техніки виникли такі важливі проблеми людства, як боротьба за попередження ядерних війн, скорочення ядерних озброєнь, розв'язання екологічних

проблем (забруднення навколишнього середовища, парниковий ефект, озонові діри, проблема Чорнобиля та ін.), подолання технократизму, відчуження людини від природи тощо. Усе це вимагає посилення гуманістичної спрямованості науки і техніки.

Фізика має велике значення у розвитку всіх галузей економіки. Це визначає місце курсу фізики у програмах вищої школи, особливо вищих технічних навчальних закладів. Мета, яка ставиться при вивченні фізики, полягає в ознайомленні з основними фізичними явищами, їх механізмами, закономірностями і практичними застосуваннями. Цим закладаються фізичні основи для вивчення загальнотехнічних та спеціальних дисциплін. Правильні уявлення про природу фізичних явищ особливо важливі в процесі практичної діяльності інженера.

Досягнення фізики в значній мірі визначають зміст сучасної науково-технічної і технологічної революції, вони становлять основу науково-технічного прогресу.

У духовному відродженні України певне місце повинна зайняти фізика як наука, а також її історія. Здійснити це завдання можна за активної участі вчених-фізиків, дослідників з історії фізики і викладачів фізики у вищій та середній школі.

Частина І. ФІЗИЧНІ ОСНОВИ МЕХАНІКИ

Розділ 1. Основи кінематики

§ 1.1. Механічний рух. Уявлення про простір і час у класичній механіці. Кінематичне описання руху

Механіка — наука про механічний рух, механічні взаємодії і рівновагу тіл. Механічним рухом називають зміну взаємних положень тіл у просторі з плином часу.Механіку поділяють на класичну, релятивістську та квантову. *Класична* механіка грунтується на законах Ньютона, у ній розглядаються рухи макроскопічних тіл, швидкості яких малі порівняно зі швидкістю світла у вакуумі (300 000 км/с). Макроскопічними називають звичайні тіла, які складаються з величезної кількості молекул і атомів. Макроскопічні тіла здійснюють рухи зі швидкостями, далекими від швидкості світла. У цьому розумінні рухи тіл вважають повільними (нерелятивістськими). Наприклад, рухи штучних супутників або космічних кораблів зі швидкостями $8 \div 11$ км/с є дуже повільними порівняно зі швидкістю світла і вони підлягають законам класичної механіки. *Релятивістська* механіка — механіка матеріальних об'єктів, що рухаються зі швидкостями, близькими до швидкості світла у вакуумі. Закони релятивістської механіки грунтуються на вимогах спеціальної теорії відносності і справедливі при будь-яких швидкостях, як завгодно близьких до швидкості світла. Рух мікрочастинок (атомів, протонів, електронів та ін.) має свою специфіку і підлягає законам *квантової* механіки. Мікрочастинка проявляє двоїсті корпускулярно-хвильові властивості, внаслідок чого виникають невизначеності положення в просторі і швидкості мікрочастинки у даний момент часу. Закони квантової механіки мають статистичний (ймовірнісний) характер. Сучасна квантова механіка, в свою чергу, поділяється на нерелятивістську і релятивістську.

За підходом до вивчення механічних рухів механіка поділяється на кінематику, динаміку і статику. У *кінематиці* розглядають геометричний аспект руху незалежно від причин, які зумовили цей рух. У *динаміці* вивчають механічні взаємодії тіл, які спричиняють рух або приводять до зміни механічного стану тіл. У *статиці* розглядають умови рівноваги тіл.

Одна із основних задач механіки полягає у визначенні положення тіла і його швидкості у будь-який момент часу за відомими початковими умовами.

Усі тіла навколо нас рухаються або перебувають у стані спокою. Ми не помічаємо руху Землі і звикли вважати поверхню Землі нерухомою, а тіла, які переміщаються по цій поверхні, — рухомими. Проте тіло, яке нерухомо лежить на поверхні Землі, обертається навколо

осі земної кулі і рухається по орбіті навколо Сонця. У природі не існує ні абсолютного руху, ні абсолютного спокою — неможливо вибрати одне "зручне" тіло, відносно якого можна було б розглядати всі рухи. Можна тільки умовно прийняти яке-небудь тіло за нерухоме і розглядати рух чи стан спокою інших тіл відносно нього.

Тіло або система тіл, відносно яких визначають положення інших тіл, називається просторовою системою відліку.

Простір і час — основні поняття фізики. Простір виражає відокремленість об'єктів і їхню протяжність. Час характеризує послідовність існування явищ і відокремленість різних стадій розвитку, тривалість, періодичність та швидкість процесів. Тут ми не даємо точного означення понять простору і часу, оскільки ці фундаментальні поняття досить добре відомі кожному із повсякденного досвіду.

За концепцією І. Ньютона, покладеною в основу класичної фізики, простір і час — абсолютні, незалежні від матеріальних об'єктів. Абсолютний простір — безмежна порожнеча, нерухома і проникна, безперервна і однорідна в усіх напрямках (ізотропна). Абсолютний час — безвідносний до будь-чого зовнішнього, безперервний і однорідний, плине рівномірно в одному напрямі від минулого і до майбутнього.

З розвитком науки змінюються уявлення про простір і час. Теорія відносності Ейнштейна привела до заміни класичної концепції простору і часу новою концепцією. Як доведено в теорії відносності, простір і час — відносні, органічно пов'язані між собою і з рухом матерії. Матерія, рух, простір і час розглядаються як одне ціле — різні необхідні характеристики одних і тих самих процесів. Відносність простору і часу буде розглянуто докладніше у дев'ятому розділі.

При вивченні механічних рухів тіл основна задача полягає не у формулюванні точних означень понять "простір" і "час", а у способі їх вимірювання.

Вимірювання часу пов'язане з необхідністю відповіді на два запитання: "Як довго це відбувалось?" і "Коли це було?". Відповідаючи на перше запитання, ми вказуємо проміжок часу, тривалість якого можна виміряти секундоміром від початку події (нульового моменту часу). Для відповіді на друге запитання треба виконати відлік часу за точним годинником. Насправді обидві відповіді збігаються, оскільки годинники вимірюють проміжки часу від деякого довільно вибраного початкового моменту, наприклад, від початку доби або від початку року.

Будь-який проміжок часу можна виразити певним числом секунд. Для проміжків часу, коротших ніж секунда, користуються частками секунди. Що ж таке секунда і чому саме її вибрали за одиницю вимірювання часу? Особливих причин для цього немає — ми не знаємо природного поділу часу, однакового для всіх випадків життя. Для вимірювання часу використовують періодичні процеси, що регулярно повторюються. Наприклад, дні і ночі або пори року настають одні за одними внаслідок періодичного обертання Землі навколо власної осі і навколо Сонця; у кожної людини є орган з його ритмічним биттям (секунда близька до проміжку часу між двома ударами серця); періодичні рухи здійснюють маятники — коливання зі сталою амплітудою. Тривалий час не було відомо точнішого процесу, ніж обертання Землі навколо власної осі та відносно Сонця, і період її обертання було обрано як стандарт часу. Основний, або еталонний годинник звірявся з тривалістю астрономічної доби, яка дорівнює 24 год = = 1440 хв = 86400 с. Підтримування сталого режиму роботи еталонного годинника — досить складна справа, тому постійно ведуться пошуки надійніших стандартів часу. Високу відтворюваність стандарту часу було досягнуто недавно — після винайдення кварцового, молекулярного і атомного годинників. Ці годинники є складними радіотехнічними системами: для регулювання ходу в них замість коливань маятника використовуються: у кварцовому годиннику коливання кристалічної гратки кварцу; в молекулярному — коливання атомів у молекулах; в атомному — коливання електромагнітного поля, яке випромінюють у вузьких спектральних інтервалах атоми деяких ізотопів хімічних елементів при точно визначених і строго контрольованих зовнішніх умовах. Період таких електромагнітних коливань відзначається особливою стабільністю і тепер прийнятий як основний еталон часу, за яким відтворюється секунда.

Секунда — це час, що дорівнює 9 192 631 770 періодам електромагнітного випромінювання, яке відповідає переходові між двома надтонкими рівнями основного стану атома цезію-133. Досвід людини у сприйманні різних проміжків часу, виражених у секундах, охоплює широкий інтервал приблизно від 0,1 с (найменший проміжок часу, який ми ще безпосередньо можемо відчувати) до 10^9 с, що відповідає середній тривалості життя людини. Про триваліші проміжки часу можна довідатися з історії. За межами "історичного періоду" застосовуються особливі непрямі методи оцінки часу. В одному з таких методів роль "годинника" відіграє "періодичність" іншого роду — період піврозпаду радіоактивної речовини. Цим методом було встановлено вік деяких гірських порід, метеоритів, які прилітають із космосу і падають на Землю, і вік нашої планети — їй виповнилося приблизно 4,5 млрд років.

Малі проміжки часу, близько 10^{-5} с, можна фіксувати за допомогою приладів у процесах, які відбуваються з великою швидкістю, наприклад під час вибуху. Сучасна електроніка дає можливість створювати генератори електричних коливань з періодами 10^{-12} с, які калібруються методом порівняння із стандартною одиницею часу — секундою. Менші проміжки часу вже не доступні для вимірювань за допомогою електронної техніки. Для цього використовуються непрямі методи, які грунтуються на іншому означенні поняття "час". Такі методи дають змогу оцінювати період коливань атомних ядер, час існування елементарних частинок у певному стані.

Характерні проміжки часу наведено в табл. 1.

Таблиця 1

Проміжки часу	Роки	Секунди
Вік Всесвіту	10^{10}	3·1017
Вік Землі	$4{,}5 \cdot 10^{9}$	1,4·1017
Період обертання Сонця навколо центра Галактики	$3 \cdot 10^{8}$	1016
Час від появи первісної людини	$3 \cdot 10^{5}$	1013
Середня тривалість життя людини	70	$2{,}1 \cdot 10^{9}$
Період обертання навколо осі:		
Сонця		$2{,}195 \cdot 10^{6}$
Землі		$8{,}64 \cdot 10^{4}$
Період коливань маятника в годиннику		1
Період звукових коливань		10^{-3}
Період обертання молекули		10^{-12}
Період коливань атомів		10^{-15}
Період коливань атомного ядра		10^{-21}

Положення тіла у просторі можна визначити як відстань від тіла відліку. Для вимірювання відстані треба взяти одиницю довжини — метр і відрахувати, скільки цих одиниць поміщається на даному відрізку. Якщо відстань велика, користуються кратними одиницями, а при вимірюванні розмірів малих об'єктів — частковими одиницями метра.

При створенні метричної системи мір наприкінці XVIII ст. метр був задуманий як природна одиниця довжини, пов'язана з довжиною земного меридіана — одна сорокамільйонна частина Паризького меридіана. Після вимірювання довжини дуги меридіана був виготовлений платино-іридієвий еталон метра. У другій половині XIX ст. його прийняли як міжнародний еталон одиниці довжини, за яким звіряли національні еталони метра. У природі немає об'єкта, розміри якого точно дорівнюють одному метру. І якби несподівано міжнародний еталон було пошкоджено або втрачено, то відтворити його довжину було б неможливо. Проте міжнародний еталон не визначає метра з точністю, достатньою для сучасних потреб. Тому виникла необхідність повернутись до природного еталону довжини, який можна точно відтворити і неможливо зруйнувати. У 1960 р. Генеральна конференція з мір і ваги для означення метра використала як еталон

довжину світлової хвилі у вакуумі, яку випромінює у вузькому спектральному інтервалі атом криптону в строго контрольованих зовнішніх умовах. Метр означили як довжину, що дорівнює 1 650 763,73 довжини хвилі у вакуумі випромінювання нукліду криптону-86. При цьому було досягнуто високу точність відтворення метра: відносна похибка приблизно дорівнювала $4 \cdot 10^{-9}$. Далі історія метра розвивалась у напрямі підвищення точності його відтворення. У 1983 р. Генеральна асамблея з мір і ваги прийняла нове означення метра: метр є довжиною шляху, яку проходить світло у вакуумі за проміжок часу 1/299792458 секунди.

Звідси випливає, що швидкість світла у вакуумі за означенням дорівнює 299 792 458 м/с. Цей підхід дає можливість у майбутньому не змінювати означення метра, а тільки підвищувати точність його відтворення. Тепер експериментальна похибка вимірювання швидкості світла у вакуумі приблизно дорівнює 0,3 м/с, що в чотири рази менше відносної похибки відтворення метра за попереднім означенням. Отже, майже через двісті років після введення метр знову став природною одиницею довжини.

Не всяку відстань можна безпосередньо виміряти метром, наприклад, відстань між двома кораблями, глибину моря, відстань до Місяця чи штучного супутника Землі. Для цього застосовуються *непрямі* методи, серед яких найпоширенішими є метод тріангуляції і методи ультразвукової, радіо- та лазерної локації. Метод тріангуляції грунтується на геометричних властивостях трикутника. Тріангуляційний прилад — далекомір, у якому вимірювання кутів і всі геометричні побудови виконуються автоматично, дає можливість вимірювати відстані візуально. Такий пристрій для вимірювання малих відстаней є в усіх якісних фотоапаратах. Тріангуляційні методи дали можливість астрономам виміряти велетенські відстані: від Землі до Сонця, від Сонця до центра нашої Галактики. Локаційні методи засновані на вимірюванні проміжку часу між моментом випромінювання імпульсного (ультразвукового, радіо- чи світлового) сигналу і реєстрації його після відбивання від об'єкта. Знаючи швидкість поширення сигналу, визначають відстань. Недавно було здійснено лазерну локацію Місяця і уточнено відстань до нього.

При вимірюванні дуже малих відстаней можна використовувати прямі методи — відлік часткових одиниць метра (міліметри, мікрометри). Проте неможливо побачити об'єкти, менші від довжини хвилі видимого світла (приблизно $5 \cdot 10^{-7}$ м). Розмір об'єктів близько 10^{-8} м можна визначити за допомогою електронного мікроскопа. А ось молекули, атоми і його складові частини настільки малі, що для їх вивчення електронний мікроскоп уже непридатний. Для цього використовують непрямі фізичні методи, які дають змогу виміряти відстані між атомами у кристалах, що приблизно дорівнюють 10^{-10} м. Такий

самий порядок величини має діаметр атома. Виміряти відстані, менші ніж 10^{-15} м, поки що не вдалось.

Нижче наведено розміри об'єктів у метрах, що зустрічаються в природі:

Розміри Всесвіту	$\sim 10^{26}$
Діаметр Молочного Шляху	$7 \cdot 10^{20}$
Відстань від Землі до Сонця	$1{,}5 \cdot 10^{11}$
Діаметр Сонця	$1{,}39 \cdot 10^{9}$
Відстань від Землі до Місяця	$3{,}844400 \cdot 10^{8}$
Радіус Землі	$6378{,}169 \cdot 10^{3}$
Середній зріст людини	$\sim 1{,}7$
Довжина хвилі видимого світла	$\sim 5 \cdot 10^{-7}$
Розмір атома	$3 \cdot 10^{-10}$
Розмір атомного ядра	$3 \cdot 10^{-15}$
Розмір протона	$0{,}8 \cdot 10^{-15}$

Якщо можливо до одного об'єкта застосувати прямий і непрямий методи, то вони дають однаковий результат. Це свідчить про те, що властивості простору певною мірою відповідають класичним уявленням. Простір має три виміри. Ця властивість простору доведена необхідністю задання трьох координат для однозначного визначення положення будь-якого об'єкта у ньому. Незалежно від вибору системи координат у кожному разі три координати, які мають цілком певні значення, визначають положення тільки однієї точки в просторі.

Кінематика як розділ механіки вивчає геометричні властивості механічного руху тіл — встановлює зв'язок між просторовими характеристиками руху і часом без урахування взаємодій між тілами та інертності їх. Основні об'єкти кінематики — матеріальна точка, абсолютно тверде тіло, пружне середовище, ідеальна рідина.

Матеріальною точкою називається макроскопічне тіло, розмірами якого в даній задачі можна знехтувати і вважати, що вся речовина тіла зосереджена в одній геометричній точці. Така ідеалізована модель реального протяжного тіла дає можливість абстрагуватись від другорядних деталей механічного руху і виявити в ньому загальні закономірності. Конкретне тіло в одних задачах можна вважати матеріальною точкою, в інших таке спрощення неприпустиме. Наприклад, земну кулю можна прийняти за матеріальну точку при розгляді її руху по орбіті (характерний для задачі радіус орбіти значно більший від радіуса Землі), але при розгляді обертання навколо осі Земля — протяжне тверде тіло.

За означенням матеріальна точка — це макроскопічне тіло. Ця умова передбачає підпорядкування її руху законам класичної механіки. Проте в багатьох випадках рух мікрочастинок також може розглядатись з позиції класичної механіки. Наприклад, електрони,

протони або іони, які рухаються в електронно-іонних приладах по цілком певних траєкторіях, можна вважати матеріальними точками класичної механіки. Однак рух електрона в атомі не можна характеризувати як рух матеріальної точки, оскільки принципово неможливо в даний момент часу розрахувати положення і швидкість електрона. За цих умов поняття траєкторії втрачає сенс і електрон як мікрочастинка є об'єктом квантової механіки.

Будь-яке макроскопічне тіло або систему тіл можна уявляти як сукупність малих макроскопічних частинок, що взаємодіють між собою. Кожну з таких частинок можна прийняти за матеріальну точку з масою, що дорівнює масі відповідної частинки. З огляду на це в механіці вивчення руху довільної системи тіл зводиться до вивчення руху системи взаємодіючих матеріальних точок. Механіка однієї матеріальної точки є підставою для вивчення механіки твердих тіл, рідин і газів як систем матеріальних точок.

Для описання руху, а також будь-яких фізичних явищ, що відбуваються, необхідна система відліку, яка поєднує просторову систему відліку і спосіб відліку часу. У такій системі відліку кожну подію можна характеризувати місцем, де вона відбулась, і часом, коли вона відбулась. У класичній механіці для описання руху користуються часом, єдиним для всієї системи відліку. В цій системі годинники, розміщені в різних місцях простору, повинні показувати той самий час. Такі годинники називають синхронізованими.

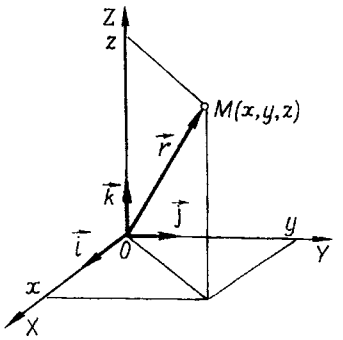


Рис. 1.1

Для характеристики простору, в якому відбувається рух матеріальної точки, з системою відліку зв'язують просторову систему координат. Під просторовою системою координат розуміють три лінійно незалежні напрямлені відрізки прямих (координатні осі), які виходять з однієї точки (початок відліку). Рух матеріальної точки буде описано повністю, якщо буде відомо її положення у будь-який момент часу відносно вибраної системи відліку. У декартовій прямокутній системі координат положення матеріальної точки M у просторі визначається радіусом-вектором $\vec{r}$, проведеним від початку координат O до цієї точки (рис. 1.1). Проекції радіуса-вектора на координатні осі OX, OY, OZ дорівнюють координатам x, y, z точки M:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — одиничні вектори (орти), які задають масштаб довжини і напрями координатних осей. Отже, положення точки M задається трьома числами x, y, z: $M = M(x, y, z)$.

У процесі руху матеріальної точки її координати змінюються з часом. Рух буде визначеним, якщо відома функціональна залежність координат точки від часу t:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t) \qquad (1.1)$$

або якщо буде знайдена одна векторна функція

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}. \qquad (1.2)$$

Векторне рівняння (1.2) еквівалентне системі трьох скалярних рівнянь (1.1).

Рівняння (1.1) або (1.2) називають *кінематичними рівняннями руху* точки.

Лінія, яку описує матеріальна точка під час руху, називається *траєкторією*. За формою траєкторії рухи поділяють на прямолінійні і криволінійні. Форма траєкторії залежить від вибору системи відліку. Так, траєкторія руху точки на ободі колеса, що котиться по горизонтальній площині, може мати різну форму. Відносно осі це буде коло, а відносно площини — циклоїда. Криволінійну траєкторію характеризують кривизною, яка може змінюватися від однієї точки траєкторії до іншої. Кривизною дуги траєкторії між двома близько розміщеними точками називають відношення кута повороту дотичної у цих точках до довжини відповідної дуги. Кривизна траєкторії у даній точці дорівнює границі, до якої прямує це відношення, якщо довжина дуги прямує до нуля. Центром кривизни траєкторії у даній точці називають центр дотичного до неї кола, радіус якого дорівнює оберненому значенню кривизни.

Відстань між двома заданими точками, відрахована вздовж траєкторії, називається шляхом. Шлях — скалярна величина. Пройдений матеріальною точкою шлях залежить від часу і може тільки збільшуватись у процесі руху незалежно від його напряму.

§ 1.2. Основні види руху твердих тіл

Тверді тіла при певних умовах деформуються, тобто змінюють свою форму і об'єм. Для кінематичного описання руху твердих тіл використовують ідеалізовану модель тіла — абсолютно тверде тіло, деформацією якого можна знехтувати. Абсолютно твердим тілом називають таку систему взаємодіючих матеріальних точок, при будь-яких рухах якої взаємні відстані між матеріальними точками залишаються незмінними. Припустимість такої ідеалізації визначається властивостями реальних тіл і змістом задач, які розглядаються у механіці.

Будь-який складний механічний рух абсолютно твердого тіла можна розкласти на два простих рухи — поступальний і обертальний. *По-*

ступальним рухом називають такий рух, при якому пряма лінія, що сполучає дві довільні точки тіла, залишається паралельною сама собі, тобто її орієнтація в просторі не змінюється. При поступальному русі всі точки твердого тіла описують однакові траєкторії. Тому, знаючи рух однієї точки тіла, можна визначити рух усіх інших його точок. Розрізняють два види *обертального руху* абсолютно твердого тіла: 1) обертальний рух навколо нерухомої осі — рух, при якому всі точки тіла описують у паралельних площинах концентричні кола з центрами на нерухомій осі обертання; 2) обертальний рух навколо нерухомої точки — рух, при якому всі точки тіла рухаються по поверхні концентричних сфер з центрами у нерухомій точці. У кожний момент часу цей вид обертального руху можна розглядати як обертання навколо миттєвої осі, що проходить через нерухому точку.

У загальному випадку тіло бере участь одночасно і в поступальному, і в обертальному рухах. Так, при коченні кулі по столу без ковзання її переміщення з положення *1* у положення *2* (рис. 1.2) можна уявити як поступальний рух у положення *2* на відстань AA_1 і поворот кулі навколо осі на кут φ.

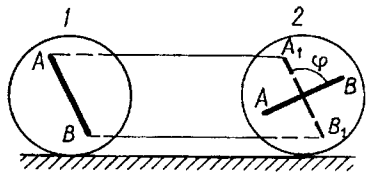


Рис. 1.2

Рух твердого тіла називають *плоским*, якщо будь-яка точка тіла залишається в одній з паралельних площин. При плоскому русі траєкторії кожної точки лежать у площинах, які між собою або паралельні, або збігаються. Наприклад, при прямолінійному русі автомобіля колеса і поршні здійснюють плоский рух, а точки вентилятора і колінчастого вала, осі яких збігаються з напрямом руху автомобіля, — неплоский, складний рух.

Рухи, які повторюються або наближено повторюються через однакові проміжки часу, називають *коливальними*, або коливаннями. Прикладом коливальних рухів є рухи маятників, струн музичних інструментів, хитання човна на хвилях та ін. Зауважимо, що будь-який обертальний рух — це сума двох коливальних рухів, що відбуваються у взаємно перпендикулярних напрямах при відповідних умовах.

§ 1.3. Вектор переміщення. Швидкість

Розглянемо рух матеріальної точки по довільній траєкторії. Нехай у момент часу t матеріальна точка перебуває в положенні M_1, яке визначається радіусом-вектором $\vec{r}_1$, і протягом наступного проміжку часу Δt проходить шлях Δs, перемістившись у положення M_2, радіус-вектор

якого $\vec{r}_2$ (рис. 1.3). Вектор $\Delta\vec{r}$, проведений із початкового положення матеріальної точки у кінцеве її положення, називають *вектором переміщення*. Вектор $\Delta\vec{r}$ характеризує зміну положення матеріальної точки за проміжок часу Δt. Його можна виразити через зміну радіуса-вектора точки

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

або через відповідні зміни її координат

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k},$$

де $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$, $\Delta z = z_2 - z_1$ (вісь OZ на рис. 1.3 не показана). Вектор переміщення є функцією часу $\Delta\vec{r}(t)$.

Модуль вектора переміщення $|\Delta\vec{r}|$ між двома точками траєкторії в загальному випадку не збігається з довжиною дуги траєкторії між цими точками (шляхом Δs): $|\Delta\vec{r}| \le \Delta s$. Зокрема, під час руху точки по колу протягом одного періоду обертання вектор переміщення дорівнює нулю, а пройдений точкою шлях — довжині кола. Тільки при нескінченно малому переміщенні модуль $|d\vec{r}| = ds$ і в разі прямолінійного руху в одному напрямі $|\Delta\vec{r}| = \Delta s$.

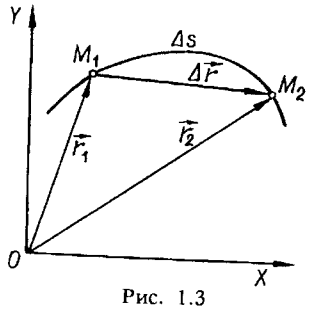


Рис. 1.3

Крім переміщення $\Delta\vec{r}$, однією із основних характеристик руху є *швидкість*. Під час руху матеріальної точки її положення на траєкторії визначається радіусом-вектором $\vec{r}(t)$. За проміжок часу Δt, радіус-вектор $\vec{r}(t + \Delta t)$ отримає приріст $\Delta\vec{r}$, який дорівнює вектору переміщення.

Векторну величину

$$<\vec{v}> = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad (1.3)$$

називають середньою швидкістю руху за проміжок часу Δt. Напрям вектора середньої швидкості $<\vec{v}>$ збігається з напрямом вектора переміщення $\Delta\vec{r}$.

Вектор $<\vec{v}>$ не повністю відображає характер руху, оскільки його модуль і напрям залежать від тривалості проміжку часу Δt. Як видно із рис. 1.4, вектор $<\vec{v}>$ є січною для траєкторії. Почнемо зменшувати Δt і прослідкуємо за зміною $<\vec{v}>$. При цьому точки M_1 і M_2 перетину

вектора $<\vec{v}>$ з траєкторією наближаються одна до одної і $<\vec{v}>$ змінюється як за модулем, так і за напрямом. У граничному переході при $\Delta t \to 0$ січна перетворюється на дотичну до траєкторії у даній точці, а вектор $<\vec{v}>$ — на граничну швидкість $\vec{v}$ у цій точці. Отже, миттєва швидкість визначається границею, до якої прямує середня швидкість $<\vec{v}>$ за умови, що проміжок часу Δt прямує до нуля, тобто

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \qquad (1.4)$$

Миттєвою швидкістю (або просто швидкістю) називається вектор $\vec{v}$, який дорівнює похідній від радіуса-вектора матеріальної точки за часом і напрямлений по дотичній до траєкторії у напрямі руху.

У загальному випадку швидкість є функцією часу $\vec{v}(t)$. Векторне рівняння (1.4) у вигляді $d\vec{r} = \vec{v}(t)dt$ використовують для визначення переміщення точки за довільний проміжок часу $\Delta t = t - t_0$:

$$\int_{\vec{r}(t_0)}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} \equiv \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)dt \qquad (1.5)$$

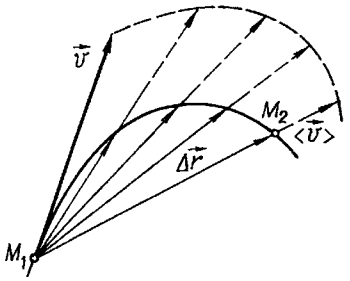


Рис. 1.4

і середньої швидкості (1.3) за даний проміжок часу:

$$<\vec{v}> = \frac{1}{t - t_0}\int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)dt. \qquad (1.6)$$

Виразом (1.5) задається кінематичне рівняння руху (1.2):

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)dt. \qquad (1.7)$$

У декартових координатах вектор $\vec{v}$ можна виразити через проекції на координатні осі:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k},$$

де

$$v_x = \frac{dx}{dt},\quad v_y = \frac{dy}{dt},\quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

КФ ОЗИС
136919

За правилом векторної алгебри модуль вектора швидкості

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \qquad (1.8)$$

Для визначення модуля швидкості можна також використати рівняння (1.4) у скалярній формі $v = \frac{|d\vec{r}|}{dt}$, враховуючи, що модуль $|d\vec{r}| = ds$. Якщо відома залежність пройденого шляху від часу $s(t)$, то модуль швидкості дорівнює похідній від шляху за часом:

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Розрізняють ще скалярну середню швидкість, якою часто користуються на практиці. Скалярною середньою швидкістю називають відношення пройденого тілом шляху до часу проходження:

$$v_{ск} = s/t.$$

Зауважимо, що в кінематиці прийнято виражати середні значення всіх величин як усереднені за часом. Це стосується як середньої швидкості (1.6), так і скалярної середньої швидкості. Зокрема, якщо протягом часу t_1 швидкість руху була v_1, а протягом часу t_2 вона дорівнювала v_2, то середня швидкість

$$v_{ск} = \frac{v_1 t_1 + v_2 t_2}{t_1 + t_2}.$$

Рівномірним рухом називається прямолінійний рух, при якому матеріальна точка за будь-які рівні проміжки часу проходить однакові шляхи.

У міжнародній системі одиниць (СІ) за одиницю швидкості прийнято метр за секунду (м/с) — швидкість рівномірного руху, при якому точка проходить шлях завдовжки один метр за одну секунду.

§ 1.4. Прискорення

У загальному випадку матеріальна точка рухається нерівномірно, а отже, її швидкість змінюється за модулем і за напрямом. Такий рух називають змінним і характеризують прискоренням. Нехай під час руху точки по плоскій траєкторії протягом часу Δt її швидкість змінилася від $\vec{v}_1$ у точці A до $\vec{v}_2$ у точці B (рис. 1.5, *а*), а повна зміна швидкості $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$. Середнім прискоренням $\langle\vec{a}\rangle$ за проміжок часу Δt називають відношення зміни вектора швидкості $\Delta\vec{v}$ до проміжку часу Δt:

$$\langle\vec{a}\rangle = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \qquad (1.9)$$

Миттєве прискорення (або прискорення) визначається границею, до якої прямує середнє прискорення $\langle\vec{a}\rangle$ при $\Delta t \to 0$:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (1.10)$$

або з урахуванням формули (1.4)

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \qquad (1.11)$$

Прискоренням називають вектор $\vec{a}$, який дорівнює першій похідній від вектора швидкості або другій похідній від вектора переміщення за часом.

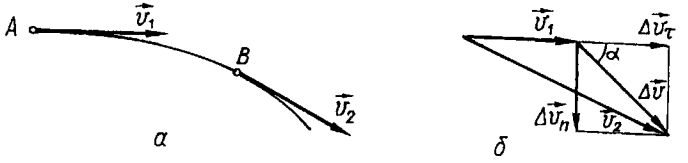


Рис. 1.5

При змінному русі прискорення $\vec{a} = \vec{a}(t)$ і рівняння (1.10) $d\vec{v} = \vec{a}(t)dt$ дає можливість визначити скінченну зміну швидкості за проміжок часу від t_0 до t:

$$\int_{\vec{v}(t_0)}^{\vec{v}(t)} d\vec{v} \equiv \vec{v}(t) - \vec{v}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)dt \qquad (1.12)$$

і знайти середнє прискорення (1.9):

$$\langle\vec{a}\rangle = \frac{1}{t - t_0}\int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)dt.$$

У проекціях на координатні осі вектор прискорення

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},$$

де

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Розглянемо загальний випадок змінного руху. Для цього побудуємо вектор зміни швидкості $\Delta\vec{v}$, перенісши паралельно вектор $\vec{v}_2$ із точки B у точку A (рис. 1.5, *б*). Розкладемо вектор $\Delta\vec{v}$ на дві взаємно перпендикулярні складові: $\Delta\vec{v}_\tau$ — вздовж вектора $\vec{v}_1$, яку називають тангенціальною (або дотичною), і $\Delta\vec{v}_n$ — нормальну (або доцентрову), напрямлену по нормалі до вектора $\vec{v}_1$, тобто $\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}_\tau + \Delta\vec{v}_n$. Поділивши це рівняння на Δt і перейшовши до границі при $\Delta t \to 0$, отримаємо

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_\tau}{dt} + \frac{d\vec{v}_n}{dt}.$$

Отже, прискорення має дві складові, одну з яких $\vec{a}_\tau = \frac{d\vec{v}_\tau}{dt}$ називають тангенціальним (або дотичним) прискоренням, а другу $\vec{a}_n = \frac{d\vec{v}_n}{dt}$ — нормальним (або доцентровим) прискоренням. Повне прискорення дорівнює векторній сумі

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \qquad (1.13)$$

Тангенціальне прискорення характеризує зміну вектора швидкості за модулем. Вектор $\vec{a}_\tau$ напрямлений по дотичній до траєкторії у даній точці і чисельно дорівнює проекції вектора повного прискорення на напрям вектора швидкості $\vec{v}$:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}. \qquad (1.14)$$

Знайдемо модуль вектора нормального прискорення $a_n = \frac{dv_n}{dt}$ і його напрям у найпростішому випадку криволінійного руху — рівномірному обертанні точки по колу радіуса R. При цьому модуль швидкості залишається сталим, а змінюється тільки її напрям. Нехай за малий проміжок часу Δt матеріальна точка перемістилася з положення A на траєкторії в положення B і відбулася зміна швидкості за напрямом $\Delta\vec{v}_n = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ (рис. 1.6). Враховуючи, що модуль швидкості не змінився, опустимо індекси модулів $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v$. З подібності трикутника AOB і трикутника, утвореного векторами $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ і $\Delta\vec{v}_n$, маємо

$$\frac{\Delta v_n}{AB} = \frac{v}{R} \text{ або } \Delta v_n = \frac{v}{R}\Delta s,$$

де довжина дуги $\Delta s \approx AB$ при малому Δt. Поділимо останнє рівняння на Δt і перейдемо до границі при $\Delta t \to 0$. Тоді

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v_n}{\Delta t} = \frac{v}{R}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}, \text{ або } \frac{dv_n}{dt} = \frac{v}{R}\frac{ds}{dt}.$$

Звідси знаходимо модуль нормального прискорення

$$a_n = v^2/R. \qquad (1.15)$$

При рівномірному обертанні модуль нормального прискорення сталий. Оскільки при $\Delta t \to 0$ кут $\Delta\varphi \to 0$ і $\angle ABO \to \frac{\pi}{2}$, то вектор $\vec{a}_n$ у граничному переході перпендикулярний до вектора швидкості $\vec{v}$ у будь-якій точці кола, тобто напрямлений по радіусу до центра кола і під час руху безперервно змінює напрям.

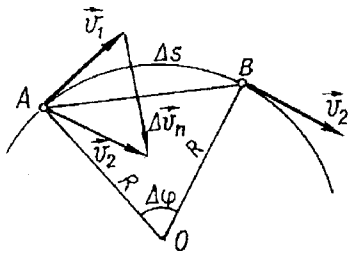


Рис. 1.6

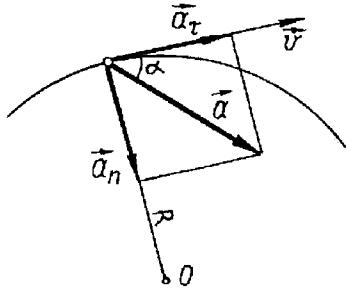


Рис. 1.7

Зазначимо, що формула (1.15) справедлива також і для загального випадку змінного руху по довільній криволінійній траєкторії, коли вектор $\vec{a}_n$ змінюється як за модулем, так і за напрямом. У цьому разі v і R — це миттєві значення модуля швидкості і радіуса кривизни траєкторії у даній точці.

Нормальне прискорення характеризує зміну вектора швидкості за напрямом. Вектор $\vec{a}_n$ напрямлений вздовж радіуса кривизни траєкторії до миттєвого центра кривизни (рис. 1.7), а його модуль виражається формулою (1.15).

Повне прискорення змінного руху в будь-який момент часу дорівнює векторній сумі (1.13). Оскільки вектори $\vec{a}_\tau$ і $\vec{a}_n$ взаємно перпендикулярні (див. рис. 1.7), то модуль вектора $\vec{a}$ і його напрям відносно вектора швидкості визначають за формулами:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a_n}{a_\tau}, \tag{1.16}$$

де α — кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{v}$.

Рівнозмінним називають рух, при якому за будь-які рівні проміжки часу швидкість змінюється на однакову величину. При такому русі прискорення стале і дорівнює середньому прискоренню. Основні рівняння кінематики (1.10), (1.12), і (1.5) для рівнозмінного руху мають вигляд

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \text{const}; \quad \vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \vec{a}(t - t_0); \tag{1.17}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{v}(t_0)(t - t_0) + \vec{a}\frac{(t - t_0)^2}{2}; \tag{1.18}$$

де t_0 — початковий момент часу. Якщо швидкість рівнозмінного руху з часом збільшується, то рух називають рівноприскореним, а якщо зменшується — рівносповільненим. Прискорення вважається додатним, якщо напрям тангенціального прискорення $\vec{a}_\tau$ збігається з напрямом швидкості $\vec{v}(t)$, і від'ємним — при протилежних напрямах векторів $\vec{a}_\tau$ і $\vec{v}$. При рівнозмінному прямолінійному русі нормальне прискорення дорівнює нулю і повне прискорення не змінює напряму. Тоді рівняння (1.17) і (1.18) у скалярній формі набувають вигляду:

$$a = \text{const}; \quad v(t) = v(t_0) + a(t - t_0); \tag{1.19}$$

$$|\Delta\vec{r}| = v(t_0)(t - t_0) + a\frac{(t - t_0)^2}{2}, \tag{1.20}$$

де рівносповільненому рухові відповідає $a < 0$, а рівноприскореному — $a > 0$.

Одиницею прискорення в СІ є метр на секунду в квадраті (м/с^2) — прискорення рівнозмінного руху, під час якого щосекунди швидкість змінюється на 1 м/с.

Вектори переміщення, швидкості і прискорення належать до основних кінематичних характеристик поступального руху.

Приклад 1.1. Тіло одну четверту частину шляху рухалося зі сталою швидкістю $v_1 = 2$ м/с, потім третю частину шляху, що залишився, зі сталою швидкістю $v_2 = 1$ м/с, а решту шляху — зі сталим прискоренням і в кінці шляху мало швидкість $v_3 = 7$ м/с. Визначити середню швидкість за весь час руху.

Розв'язання. За формулою середньої скалярної швидкості

$$v_{ск} = \frac{s}{t} = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{t_1 + t_2 + t_3}, \tag{1}$$

де $s_1 = \frac{s}{4}$; $s_2 = \frac{1}{3}(s - s_1) = \frac{s}{4}$; $s_3 = s - (s_1 + s_2) = \frac{s}{2}$.

Перші дві частини шляху тіло проходило за проміжки часу $t_1 = \frac{s}{4v_1}$; $t_2 = \frac{s}{4v_2}$.

Час проходження останньої частини шляху визначаємо із рівняння

$$\frac{s}{2} = v_2 t_3 + \frac{a t_3^2}{2},$$

де $a = \frac{v_3 - v_2}{t_3}$; звідси $t_3 = \frac{s}{v_3 + v_2}$.

Після підстановки значень s_i і $t_i (i = 1, 2, 3)$ у формулу (1), знаходимо

$$v_{ск} = \frac{4v_1 v_2 (v_2 + v_3)}{(v_1 + v_2)(v_2 + v_3) + 4v_1 v_2}, \quad v_{ск} = 2 \text{ м/с}.$$

§ 1.5. Кінематика обертального руху

Розглянемо кінематичні характеристики окремого випадку криволінійного руху по плоскій кривій — руху матеріальної точки по колу навколо нерухомої осі.

Нехай матеріальна точка M рухається по колу радіуса R. Початок O прямокутної системи координат XYZ розмістимо на осі обертання OO' і спрямуємо вісь OZ вздовж осі OO' (рис. 1.8). Тоді площина кола буде паралельною координатній площині XOY і положення точки M у просторі визначатиметься радіусом-вектором

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}.$$

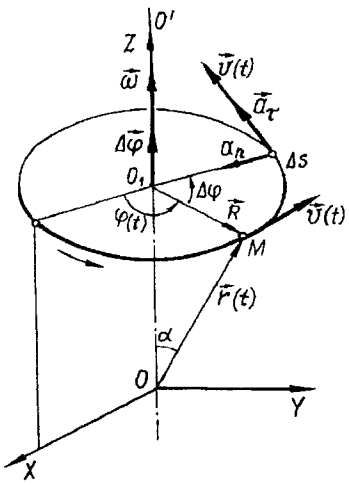


Рис. 1.8

Переміщення точки по колу протягом часу t характеризують кутом $\varphi(t)$ повороту вектора $\vec{R}$, проведеного із центра кола O_1 до точки M, тобто модуль $|\vec{R}|$ дорівнює радіусу кола. Кут $\varphi(t)$ відраховують від площини XOZ і називають *кутовим переміщенням*. Швидкість $\vec{v}(t)$, з якою матеріальна точка рухається по колу, називають *лінійною*.

Для кінематичного описання обертального руху кутове переміщення матеріальної точки за скінченний малий проміжок часу Δt зображують у вигляді вектора малого кута повороту $\Delta\vec{\varphi}$. Модуль цього вектора дорівнює кутовому переміщенню за даний проміжок часу $|\Delta\vec{\varphi}| = \Delta\varphi$. Його напрям пов'язують з віссю обертання і напрямом

обертання точки навколо осі за такою домовленістю: вектор $\Delta\vec{\varphi}$ напрямлений вздовж осі обертання у бік поступального руху правого гвинта, що повертається за напрямом обертання матеріальної точки (див. рис. 1.8). Отже, вектор $\Delta\vec{\varphi}$ разом з вектором $\vec{R}$ і вектором лінійної швидкості $\vec{v}$ утворюють правогвинтову трійку взаємно перпендикулярних векторів. Напрями векторів $\vec{R}$ і $\vec{v}$ випливають з природи цих фізичних величин, такі вектори називають *полярними.* Вектори, напрям яких залежить від напряму обертання, називають *осьовими* (або аксіальними). Вектор кута повороту $\Delta\vec{\varphi}$ — один з осьових векторів.

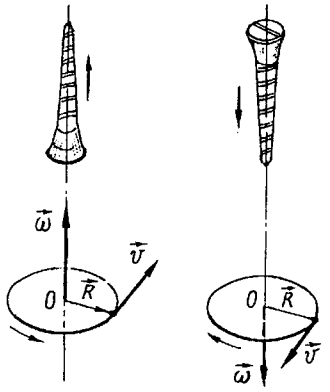


Рис. 1.9

У загальному випадку кут повороту $\Delta\vec{\varphi}$ змінюється в часі нерівномірно і рух точки по колу характеризують вектором *кутової швидкості* $\vec{\omega}$. Вона визначається границею, до якої прямує відношення $\Delta\vec{\varphi}$ до проміжку часу Δt, за котрий відбувся цей поворот, при $\Delta t \to 0$

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \qquad (1.21)$$

Кутовою швидкістю називають вектор $\vec{\omega}$, що дорівнює похідній від вектора кута повороту за часом. Вектор $\vec{\omega}$ — осьовий, напрямлений вздовж осі обертання і за напрямом збігається з вектором елементарного кута повороту $d\vec{\varphi}$ та вказує положення осі обертання і напрям обертання точки навколо осі (рис. 1.9). Модуль кутової швидкості дорівнює похідній від модуля кута повороту за часом:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \qquad (1.22)$$

Кутова швидкість може змінюватись з часом і елементарне кутове переміщення $d\vec{\varphi} = \vec{\omega}(t)dt$. У цьому разі скінченний кут повороту $\Delta\vec{\varphi}$ за проміжок часу $\Delta t = t - t_0$ описується виразом

$$\int_{\vec{\varphi}(t_0)}^{\vec{\varphi}(t)} d\vec{\varphi} \equiv \vec{\varphi}(t) - \vec{\varphi}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{\omega}(t)dt. \qquad (1.23)$$

Знайдемо зв'язок між кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ і лінійною швидкістю $\vec{v}$ матеріальної точки. При малому кутовому переміщенні $\Delta\varphi$ за проміжок часу Δt точка проходить довжину дуги кола $\Delta s = R\Delta\varphi$ (див. рис. 1.8). Поділивши цю рівність на Δt і перейшовши до границі при $\Delta t \to 0$, матимемо співвідношення між модулями v і ω:

$$\frac{ds}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt}, \text{ або } v = \omega R. \qquad (1.24)$$

Оскільки $R = r\sin\alpha$, де r — модуль радіуса-вектора $\vec{r}$ матеріальної точки; α — кут між векторами $\vec{\omega}$ і $\vec{r}$, то модуль лінійної швидкості

$$v = \omega r \sin\alpha, \qquad (1.25)$$

а вектор $\vec{v}$ виражається векторним добутком:

$$\vec{v} = [\vec{\omega}\,\vec{r}\,]. \qquad (1.26)$$

При обертанні по колу нормальне прискорення (1.15) з врахуванням (1.24) можна виразити через кутову швидкість $a_n = v^2/R = \omega^2 R$, або у векторній формі $\vec{a}_n = -\omega^2\vec{R}$, де знак мінус показує, що вектори $\vec{a}_n$ і $\vec{R}$ мають протилежні напрями.

Рівномірним обертанням по колу називають рух, при якому за рівні проміжки часу відбувається поворот на той самий кут. При рівномірному обертанні кутова швидкість стала

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \qquad (1.27)$$

і кут повороту пропорційний часові обертання. Періодом обертання називають проміжок часу T, протягом якого матеріальна точка здійснює один оберт. Оскільки за час $\Delta t = T$ кут повороту $\Delta\varphi = 2\pi$, то

$$T = 2\pi/\omega. \qquad (1.28)$$

Частота обертання дорівнює числу обертів за одиницю часу:

$$n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}, \text{ або } \omega = 2\pi n. \qquad (1.29)$$

За одиницю кутової швидкості в СІ прийнято радіан за секунду (рад/с або $с^{-1}$) — кутова швидкість рівномірного обертання, при якому кожної секунди точка здійснює поворот на один радіан.

У загальному випадку нерівномірного обертання кутова швидкість $\vec{\omega}$ може змінюватись як за модулем внаслідок зміни частоти обертання навколо нерухомої осі, так і за напрямом, якщо вісь обертання змінює

орієнтацію в просторі. Такий обертальний рух характеризують кутовим прискоренням. Якщо за малий проміжок часу Δt вектор $\vec{\omega}$ змінився на $\Delta\vec{\omega}$, то кутове прискорення визначається границею, до якої прямує відношення $\frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}. \qquad (1.30)$$

Кутовим прискоренням називають вектор $\vec{\varepsilon}$, який дорівнює першій похідній від вектора кутової швидкості або другій похідній від вектора кута повороту за часом.

Вектор кутового прискорення має напрям вектора $d\vec{\omega}$, тобто є осьовим. При обертанні навколо нерухомої осі в одному напрямі кутова швидкість змінюється тільки за модулем і, отже, модуль кутового прискорення

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \qquad (1.31)$$

У цьому разі вектор $\vec{\varepsilon}$, як і вектор кутової швидкості, напрямлений вздовж осі обертання і за напрямом збігається з вектором $\vec{\omega}$, якщо швидкість обертання збільшується (рис. 1.10, *а*), а при сповільненому обертанні напрями векторів $\vec{\varepsilon}$ і $\vec{\omega}$ протилежні (рис. 1.10, *б*).

Визначимо співвідношення між прискореннями кутовим $\vec{\varepsilon}$ і тангенціальним (або лінійним при обертанні по колу) $\vec{a}_\tau$. Використовуючи формули (1.14) і (1.24), отримаємо зв'язок між модулями a_τ і ε:

$$a_\tau = \frac{d}{dt}(\omega R) = \frac{d\omega}{dt} R = \varepsilon R, \qquad (1.32)$$

де R — радіус кола, по якому обертається точка. Виразимо радіус через модуль радіуса-вектора $\vec{r}$ матеріальної точки, проведеного із початку координат O: $R = r\sin\alpha$. Тоді

$$a_\tau = \varepsilon r \sin\alpha = \varepsilon r \sin(\pi - \alpha),$$

де α — кут між векторами $\vec{r}$ і $\vec{\varepsilon}$ в разі прискореного руху по колу (див. рис. 1.10, *а*); $(\pi - \alpha)$ — кут між ними при сповільненому обертанні (див. рис. 1.10, *б*). Останній вираз у векторній формі набуває вигляду

$$\vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon}\,\vec{r}\,]. \qquad (1.33)$$

У загальному випадку нерівномірного обертання елементарна зміна кутової швидкості $d\vec{\omega} = \vec{\varepsilon}(t)dt$, а за скінченний проміжок часу $\Delta t = t - t_0$ зміна кутової швидкості $\Delta\vec{\omega}$ дається виразом:

$$\int_{\vec{\omega}(t_0)}^{\vec{\omega}(t)} d\vec{\omega} \equiv \vec{\omega}(t) - \vec{\omega}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{\varepsilon}(t)dt. \qquad (1.34)$$

Цей вираз задає кінематичне рівняння (1.23) обертального руху.

Рівнозмінним обертанням матеріальної точки по колу називають обертальний рух, при якому за рівні проміжки часу кутова швидкість змінюється на однакову величину. При рівнозмінному обертанні в одному напрямі кутове прискорення стале і модулі кутової швидкості (1.34) та кута повороту (1.23) у даний момент часу t виражаються формулами:

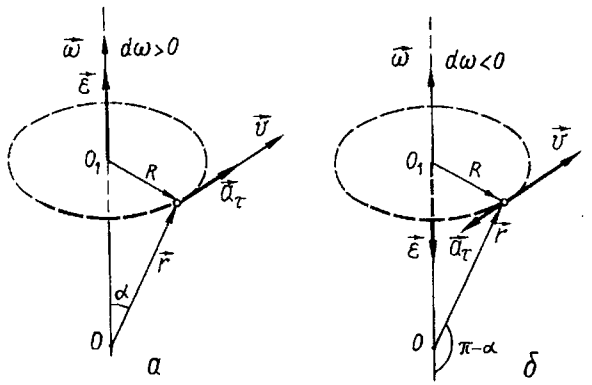


Рис. 1.10

$$\omega(t) = \omega(t_0) + \varepsilon(t - t_0); \qquad (1.35)$$

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \omega(t_0)(t - t_0) + \frac{\varepsilon(t - t_0)^2}{2}, \qquad (1.36)$$

де t_0 — початковий момент часу; при рівноприскореному обертанні $\varepsilon > 0$, а при рівносповільненому — $\varepsilon < 0$.

Кутове прискорення в СІ вимірюється в радіанах на секунду в квадраті (рад/с^2 або с$^{-2}$).

Основні рівняння кінематики обертального та поступального рухів матеріальної точки подібні. Замінивши у рівняннях (1.5) і (1.12) переміщення, швидкість та прискорення на відповідні кутові величини, можна отримати рівняння (1.23) і (1.34).

§ 1.6. Плоский рух твердого тіла

Рух твердого тіла називають плоским, якщо всі його точки мають швидкості, вектори яких паралельні деякій площині. Плоский рух широко використовується у техніці. Переважна більшість механізмів — це системи твердих тіл, що здійснюють плоский рух. Наприклад, кривошипний механізм у його численних модифікаціях, рух колеса по прямолінійному шляху, обертання тіла навколо нерухомої осі.

Нехай тіло A рухається паралельно площині Π (рис. 1.11). Проведемо уявно в тілі велике число площин, паралельних Π. Тіло розіб'ється на низку плоских фігур, накладених одна на одну.

Всі точки, що належать будь-якій одній фігурі, мають швидкості, напрямлені в площині фігури, і, отже, вона рухається у своїй площині. Якщо в якій-небудь фігурі (S) взяти точку M і провести через неї перпендикуляр до площини фігури (S), то всі точки M_1, M_2, ..., що

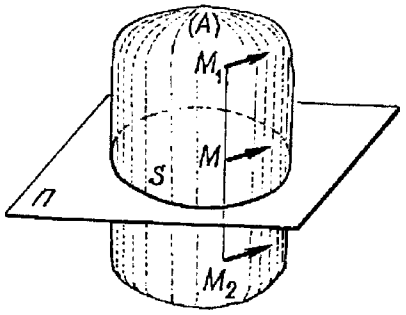


Рис. 1.11

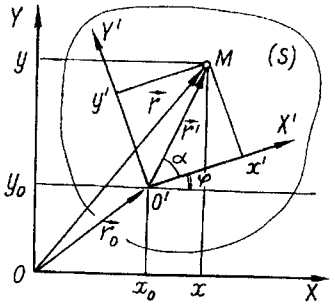


Рис. 1.12

лежать на цьому перпендикулярі і належать іншим фігурам, будуть описувати однакові траєкторії, матимуть однакові швидкості і однакові прискорення, оскільки всі фігури жорстко зв'язані між собою і не можуть рухатись одна відносно одної. Отже, рух однієї такої плоскої фігури повністю визначає рух всього твердого тіла. Це суттєво спрощує вивчення плоского руху твердого тіла, і в подальшому ми розглядатимемо рух плоскої фігури в її площині.

Визначимо положення плоскої фігури і траєкторії її точок. Для цього візьмемо дві системи координат у площині фігури: одну систему XOY нерухому, другу — $X'O'Y'$ зв'язану з фігурою (S), яка може здійснювати поступальний і обертальний рухи (рис. 1.12). Щоб задати додатний напрям повороту фігури, домовимось вважати, що перпендикулярна до площини фігури вісь OZ обох координатних систем напрямлена "до нас", тобто осі $OXYZ$ і $O'X'Y'Z'$ утворюють

правогвинтові системи: ми бачимо поворот φ осі OX до осі $O'X'$ таким, що відбувається проти ходу стрілки годинника.

Положення довільної точки M фігури (S) визначатимемо або радіусом-вектором $\vec{r}$, проведеним з початку O нерухомої системи координат, або радіусом-вектором $\vec{r'}$, проведеним із початку O' рухомої системи. Радіус-вектор початку O' рухомої системи координат позначимо через $\vec{r}_0$. З рис. 1.12 випливає очевидна векторна рівність:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r'}. \tag{1.37}$$

Якщо фігура рухається, змінюється з часом радіус-вектор $\vec{r}$, а радіус-вектор $\vec{r'}$ у рухомій системі координат $X'O'Y'$ під час руху залишається незмінним. Положення фігури (S) повністю визначається положенням рухомої системи координат відносно нерухомої. Для цього достатньо задати як функції часу положення початку координат O' і кут φ, утворений рухомою віссю $O'X'$ з нерухомою віссю OX. Початок координат O' рухомої системи називають основною точкою, або полюсом. Кут φ у цьому разі є кутом повороту радіуса-вектора $\vec{r}$ навколо полюса.

Таким чином, плоский рух твердого тіла визначається рівнянням поступального руху полюса $\vec{r}_0 = \vec{r}_0(t)$ і рівнянням обертального руху $\varphi = \varphi(t)$ навколо полюса. Рівняння (1.37) — це рівняння руху довільної точки плоскої фігури, або параметричне рівняння її траєкторії у векторній формі (параметром є час t).

Для визначення розподілу швидкостей у рухомій плоскій фігурі продиференціюємо за часом рівняння руху (1.37):

$$\vec{v} = \frac{\vec{dr}}{dt} = \frac{\vec{dr_0}}{dt} + \frac{\vec{dr'}}{dt}$$

або

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v'}, \tag{1.38}$$

де $\vec{v}_0 = \frac{\vec{dr_0}}{dt}$ — швидкість поступального руху полюса; $\vec{v}' = \frac{\vec{dr'}}{dt}$ — лінійна швидкість обертального руху точки навколо полюса. Виражаючи лінійну швидкість $\vec{v}'$ формулою (1.26), рівняння розподілу швидкостей (1.38) перепишемо у вигляді:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + [\vec{\omega}\,\vec{r}\,']. \tag{1.39}$$

Отже, в загальному випадку плоского руху швидкість довільної точки дорівнює векторній сумі швидкості $\vec{v}_0$ поступального руху тіла

і лінійної швидкості, яку ця точка мала б, якби полюс був нерухомий і тіло оберталося навколо нього з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$.

Наприклад, нехай тіло здійснює плоский рух і деяка його точка A має швидкість поступального руху $\vec{v}_A$ (рис. 1.13). Тоді швидкість іншої точки B знаходимо як геометричну суму

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{AB}, \tag{1.40}$$

де $\vec{v}_{AB}$ — лінійна швидкість обертання точки B навколо точки A, що чисельно дорівнює $AB \cdot \omega$ і напрямлена перпендикулярно до AB у напрямі обертання тіла.

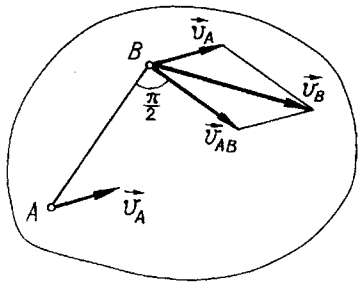


Рис. 1.13

Можна довести, що у процесі плоского руху (непоступального) фігури в кожний момент часу існує точка, швидкість якої у цей момент дорівнює нулю. Цю точку називають миттєвим центром швидкостей. Якщо прийняти миттєвий центр швидкостей за полюс, то закон розподілу швидкостей (1.39) спрощується до вигляду:

$$\vec{v} = [\vec{\omega}\,\vec{r}\,]. \tag{1.41}$$

Таким чином, розподіл швидкостей у фігурі, яка здійснює плоский рух, у кожний момент часу такий, наче фігура обертається навколо нерухомої осі, що проходить через миттєвий центр. Іншими словами, швидкість довільної точки плоскої фігури за напрямом перпендикулярна до радіуса-вектора $\vec{r}$, проведеного з миттєвого центра P до цієї точки, а за модулем дорівнює $\omega \cdot r$ (рис. 1.14).

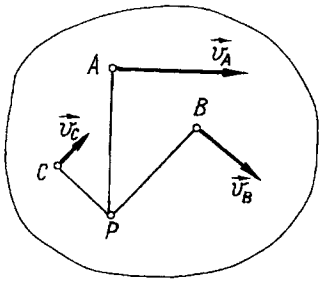


Рис. 1.14

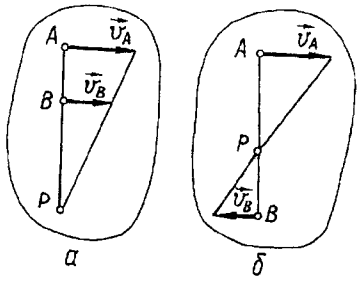


Рис. 1.15

Суттєва відмінність плоского руху від обертання навколо нерухомої осі полягає у тому, що у останньому випадку існує реальна нерухома вісь, а при плоскому русі вісь обертання проходить через миттєвий центр тільки в даний момент часу. В процесі руху миттєвий центр займає різні положення у рухомій фігурі, збігаючись з різними її точками.

Якщо відомі швидкості двох довільних точок тіла, то положення миттєвого центра збігається з точкою перетину перпендикулярів, проведених із цих точок до напрямів швидкостей (див. рис. 1.14).

У тому разі, коли вектори швидкостей $\vec{v}_A$ і $\vec{v}_B$ напрямлені вздовж паралельних прямих, а точки A і B лежать на перпендикулярі, проведеному до напрямів швидкостей (рис. 1.15), миттєвий центр розміститься у точці перетину перпендикуляра з прямою, проведеною через кінці векторів $\vec{v}_A$ і $\vec{v}_B$. Положення миттєвого центра і кутова швидкість фігури визначаються із умов:

$$\omega = \frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{PB}; \quad PA \pm PB = AB,$$

де верхній знак відповідає однаковому напрямові швидкостей (рис. 1.15, *а*), а нижній — протилежному (рис. 1.15, *б*).

Приклад 1.2. Обруч, радіус якого 1 м, котиться без ковзання по горизонтальній поверхні зі швидкістю 2 м/с. У певний момент часу точка A обруча дотикається поверхні (рис. 1.16). Якою буде швидкість точки A через $\pi/6$ секунд після цього?

Розв'язання. У момент часу $t = \pi/6$ точка C обруча — миттєвий центр швидкостей як точка дотику до поверхні, що має рівну нулю швидкість поверхні. У цей момент модуль швидкості точки A буде

$$v_A = CA \cdot \omega. \tag{1}$$

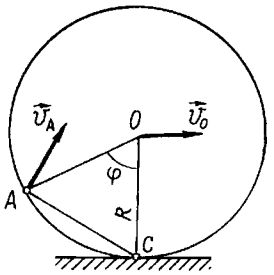


Рис. 1.16

За теоремою косинусів

$$CA = \sqrt{2R^2(1 - \cos\varphi)} = 2R \sin \varphi/2,$$

де R — радіус обруча; φ — кут повороту радіуса за проміжок часу t. У початковий момент часу поверхні дотикається точка A і її швидкість, згідно з (1.39),

$$\vec{v}_A = \vec{v}_0 + [\vec{\omega}\,\vec{R}\,] = 0,$$

або в проекціях на горизонтальну вісь $v_0 - \omega R = 0$. Звідси визначаємо кутову швидкість обруча

$$\omega = v_0/R. \tag{2}$$

Кут повороту

$$\varphi = \omega t = \frac{v_0 \pi}{12R} \text{ і } CA = 2R \sin \frac{v_0 \pi}{12R}. \tag{3}$$

Замінивши у виразі (1) величини ω і CA виразами (2) і (3), знаходимо

$$v_A = 2v_0 \sin\frac{v_0\pi}{12R},\quad v_A = 2 \text{ м/с}.$$

Приклад 1.3. Колесо, діаметр якого $d = 0{,}1$ *м*, насаджене на горизонтальну вісь, котиться без ковзання по горизонтальній площині зі швидкістю $v = 0{,}25$ м/с, описуючи коло радіуса $R = 0{,}4$ м. Знайти модуль результуючої кутової швидкості і кут її нахилу до вертикалі.

Розв'язання. Нехай колесо котиться так, як показано на рис. 1.17, *а*. У плані його рух видно таким, що відбувається за годинниковою стрілкою. Колесо одночасно бере участь у двох обертальних рухах: обертається навколо власної горизонтальної осі OO_1 з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_1$ і навколо вертикальної осі OO_2 з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_2$. Вектор результуючої кутової швидкості дорівнює геометричній сумі $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$. Оскільки вектори $\vec{\omega}_1$ і $\vec{\omega}_2$ взаємно перпендикулярні, то вектор $\vec{\omega}$ описує конус при русі колеса. Його модуль

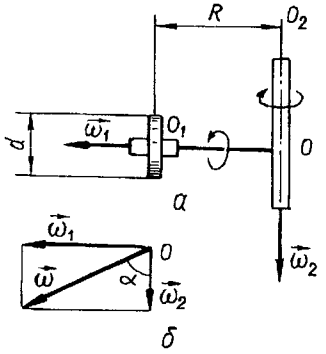


Рис. 1.17

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}, \qquad (1)$$

а кут α нахилу $\vec{\omega}$ до вертикалі (рис. 1.17, *б*) буде

$$tg\alpha = \frac{\omega_1}{\omega_2}. \qquad (2)$$

Модуль вектора швидкості $\vec{\omega}_1$ знайдемо із умови, що колесо котиться по площині без ковзання, тобто лінійна швидкість v_1 точки дотику колеса до площини дорівнює нулю. Швидкість v_1 дорівнює різниці лінійної швидкості обертання колеса навколо осі OO_2 і лінійної швидкості $\omega_1 d/2$ обертання колеса навколо осі OO_1:

$$v_1 = v - \frac{\omega_1 d}{2},$$

звідси $\omega_1 = 2v/d$. Модуль швидкості $\vec{\omega}_2$ дорівнює $\omega_2 = \frac{v}{R}$. Підставивши значення ω_1 і ω_2 у формули (1) і (2), отримуємо

$$\omega = \frac{v}{R}\sqrt{\left(\frac{2R}{d}\right)^2 + 1}\ ; \quad \omega = 5\ \text{с}^{-1};$$

$$\alpha = \text{arctg}\,\frac{2R}{d}; \quad \alpha = 1{,}45 \text{ рад}.$$

Розділ 2. Основи динаміки

§ 2.1. Межі застосування класичної механіки

У класичній механіці стан руху матеріальної точки в будь-який момент часу характеризується її положенням $\vec{r}(t)$ на безперервній траєкторії і швидкістю $\vec{v}(t)$. Цих кінематичних характеристик недостатньо для повного описання загальних властивостей руху — необхідно ще з'ясувати причини, які викликають рух або змінюють його стан. На характер руху впливають властивості рухомого тіла і навколишнє середовище.

Динаміка — розділ механіки, в якому вивчається рух матеріальних об'єктів з урахуванням їхніх взаємодій, що зумовлюють той чи інший характер руху. На відміну від кінематики, у динаміці розглядаються реальні об'єкти, які, крім швидкості і прискорення, мають масу, імпульс, енергію і взаємодіють з навколишніми тілами. Взаємодії між тілами змінюють стан руху і виражаються силами. Як і механіка в цілому, динаміка поділяється на класичну, релятивістську, квантову.

Класична динаміка матеріальної точки (поступального руху тіла) грунтується на трьох законах Ньютона, сформульованих на підставі узагальнення численних дослідних фактів. Із законів Ньютона з урахуванням основних рівнянь кінематики випливають усі рівняння і теореми, необхідні для розв'язування задач класичної механіки.

Основна (пряма) задача динаміки полягає в тому, щоб за відомими силами, які діють на тіло, визначити закон його руху — координати і швидкість у будь-який момент часу. Для розв'язування задач цього типу необхідно знати так звані початкові умови, тобто координати і швидкість тіла у початковий момент його руху під дією заданих сил. Наприклад, знаючи сили тяжіння, які діють на космічний корабель з боку планет, можна розрахувати його траєкторію у космічному просторі. Знаючи силу взаємодії гребного гвинта з водою і силу опору води рухові корпуса корабля, можна визначити, як буде рухатись корабель і яку швидкість може розвинути.

При дослідженні нових явищ і взаємодій доводиться розв'язувати обернену задачу: знаючи, як рухається тіло, визначати сили, що діють на нього. Прикладом розв'язання такої задачі є відкриття І.Ньютоном закону всесвітнього тяжіння: знаючи закони руху планет, сформульовані Й. Кеплером на підставі узагальнення результатів спостережень, І. Ньютон показав, що цей рух відбувається під дією сили, обернено пропорційної квадрату відстані між планетою і Сонцем. У техніці такі задачі виникають при визначенні зусиль між різними деталями машин і механізмів, коли закони руху цих машин чи механізмів відомі.

З розвитком науки з'являлись нові факти, які не вкладались у рамки класичної механіки. Виявляється, що для рухів, швидкості яких близькі до швидкості світла, уже не справджуються закони кінематики, розглянуті у попередньому розділі. Швидкість не може збільшуватися нескінченно — у природі існує певне значення швидкості руху матеріальних об'єктів, яке не можна перевищити. Граничним значенням швидкості є швидкість поширення світла у вакуумі. Цей постулат і установлений А. Ейнштейном відносний характер простору і часу покладені в основу створеної ним спеціальної теорії

відносності, або, як її називають, *релятивістської* механіки (механіки великих швидкостей). Закони релятивістських рухів якісно відрізняються від законів механіки Ньютона, проте релятивістська механіка не привела до повного заперечення класичної механіки. Для рухів, швидкості яких значно менші від швидкості світла, рівняння релятивістської механіки переходять у рівняння класичної механіки. Отже, класична механіка увійшла в релятивістську механіку як її окремий випадок і зберігає своє важливе значення для описання рухів, що відбуваються зі швидкостями, малими порівняно зі швидкістю світла.

У першій половині XX ст. виникла *квантова* механіка — фізична теорія явищ і процесів мікросвіту. Вона описує властивості атомів і молекул, рух мікрочастинок у зовнішніх силових полях та ін. Лінійні розміри об'єктів квантової механіки мають порядок величини 10^{-8} — 10^{-15} м, а їхня маса — 10^{-25} — 10^{-30} кг. У квантовій механіці показано, що описання руху мікрочастинки по безперервній траєкторії має принципове обмеження. Тут передчасно обговорювати це питання, тому наведемо основний результат без обгрунтування: неможливо в один і той самий момент часу визначити координати і імпульс мікрочастинки з однаковою точністю, тобто неможливо описати траєкторію мікрочастинки. Якщо в деякий момент часу координата x відома з невизначеністю Δx, а імпульс — з невизначеністю $m\Delta v_x$, то обидві ці величини одночасно не можуть бути як завгодно малими, вони доповнюють одна одну так, що їхній добуток постійний і не може бути меншим від сталої Планка:

$$\Delta x m \Delta v_x \geq \frac{h}{2\pi}, \qquad (2.1)$$

де m — маса частинки; $h = 6{,}6260755 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — універсальна константа, названа сталою Планка на честь німецького фізика М. Планка (1858 — 1947). Співвідношення (2.1) називають принципом невизначеностей Гейзенберга за іменем німецького фізика В. Гейзенберга (1901 — 1976). Вираз (2.1) означає принципову межу точності одночасного визначення координат і імпульсу частинки: кожна спроба локалізувати точніше частинку (зробити меншою невизначеність Δx) приводить до збільшення невизначеності $m\Delta v_x$ імпульсу частинки, і навпаки. Мірою невизначеності є стала Планка.

Властивість реальних частинок така, що миттєвий стан їхнього руху не може бути описаний класичним способом — точними значеннями координат та імпульсів. Квантовий характер руху проявляється тим сильніше, чим менші маса частинки і об'єм простору, в якому рухається частинка. Наприклад, розглянемо рух електрона масою $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг в атомі водню. Невизначеність у положенні електрона не повинна перевищувати розмірів атома, тобто $\Delta x < 10^{-10}$ м. Тоді зі співвідношення (2.1) знаходимо невизначеність швидкості

$$\Delta v \geq \frac{h}{2\pi m \Delta x} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}}{6{,}28 \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{-10}} \approx 10^{6} \text{ м/с}.$$

Невизначеність Δv не менша від самої швидкості електрона в атомі, отже, класичне описання руху електрона по траєкторії навколо ядра атома втрачає усякий сенс.

Співвідношення (2.1) дає змогу оцінити можливість переходу від квантовомеханічного до класичного способу описання руху. Розглянемо, наприклад, поступальний рух макроскопічного тіла масою $m = 1$ г. Якщо похибку визначення розмірів тіла зменшити до розмірів атома, тобто прийняти $\Delta x = 10^{-10}$ м, то із (2.1) отримаємо

$$\Delta v \geq \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}}{6{,}14 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-10}} \approx 10^{-21} \text{ м/с}.$$

Отже, для макроскопічних тіл миттєвий стан руху може бути описаний точними значеннями координат та імпульсів. Зауважимо, що перехід від квантовомеханічного описання стану системи до так званої "класичної границі" не завжди може бути здійснений однаково і просто, оскільки умови переходу залежать від системи, яку розглядають.

Таким чином, розвиток науки не відкинув класичну механіку, а тільки вказав на обмеження в її застосуванні. Класична механіка застосовується для описання руху матеріальних об'єктів, якщо: 1) середня швидкість руху мала порівняно зі швидкістю світла у вакуумі; 2) точність вивчення руху дає змогу вважати добуток маси тіла і допустимих похибок вимірювання його координат і швидкості значно більшим від сталої Планка.

§ 2.2. Перший закон Ньютона. Інерціальні системи відліку

Перший закон динаміки (або перший закон Ньютона) виражає встановлений ще Г. Галілеєм закон інерції: тіло (матеріальна точка) зберігає стан спокою або прямолінійного і рівномірного руху, якщо взаємодії з боку інших тіл не змушують його змінити цей стан. Такі тіла називають вільними, а їхній рух — вільним рухом, або рухом за інерцією. Кожне тіло чинить опір при спробах змусити його рухатись або змінити модуль чи напрям швидкості. Властивість тіла зберігати швидкість (зокрема рівну нулю), якщо немає взаємодії з іншими тілами, називають інертністю. Всі тіла певною мірою зазнають впливу зовнішніх дій, і вільних тіл не існує. Рівномірний і прямолінійний рух тіла практично відбувається лише тоді, коли зовнішні дії

зрівноважують одна одну. Якщо припустити, що ці дії нескінченно зменшуються, то можна тільки уявляти рух вільного тіла.

У динаміці важливе значення має вибір системи відліку, оскільки перший закон Ньютона справджується не в усіх системах відліку. Так, якщо взяти дві системи, які рухаються з прискоренням одна відносно одної, то тіло, яке буде рухатися рівномірно і прямолінійно відносно однієї з них, відносно іншої рухатиметься прискорено. Без зазначення системи відліку перший закон Ньютона втрачає зміст. Отже, класична механіка постулює існування хоча б однієї системи, в якій виконується перший закон Ньютона. Таку систему відліку, відносно якої тіло рухається рівномірно і прямолінійно, називають інерціальною.

Дослідження на інерціальність різних систем відліку показують, що умовам вільного руху тіла в межах нашої планетарної системи з високою точністю відповідає геліоцентрична система відліку. Це координатна система, центр якої міститься у центрі мас Сонячної системи, а осі напрямлені на відповідним чином вибрані три далекі ("нерухомі") зорі. Будь-яка система відліку, яка рухається рівномірно і прямолінійно відносно інерціальної (геліоцентричної) системи, також є інерціальною. Система відліку, пов'язана із Землею (геоцентрична система), у строгому розумінні не є інерціальною, оскільки вона рухається прискорено відносно геліоцентричної системи при обертанні Землі навколо власної осі і навколо Сонця. Проте спостереження за рухом тіл відносно Землі показують, що відхилення від інерціальності незначні, і Землю можна вважати майже інерціальною системою відліку.

При вивченні руху тіл вважатимемо, що рух відбувається відносно інерціальної системи, якщо не буде застереження відносно вибору системи відліку.

2.3. Маса. Імпульс

Інертність — найбільш загальна властивість усіх матеріальних об'єктів, яка проявляється у динамічних процесах, тобто при взаємодіях з іншими тілами. Тіла проявляють інертність у різній мірі. Наприклад, зупинити більярдну кулю важче, ніж тенісний м'ячик, що рухається з такою самою швидкістю.

Міру інертності тіла називають масою. У механіку поняття маси ввів І.Ньютон для означення імпульсу тіла. Імпульс — вектор $\vec{p}$, пропорційний швидкості вільного руху тіла:

$$\vec{p} = m\vec{v}, \tag{2.2}$$

де коефіцієнт пропорційності m — стала для даного тіла величина — маса тіла. Введену таким чином масу називають інертною. Маса — величина скалярна і завжди має додатний знак.

Масу (інертність) різних тіл можна порівнювати за наслідками їхньої взаємодії. Спочатку з'ясуємо поняття ізольованої системи. Це така система тіл, на які не діють інші тіла, зовнішні по відношенню до тіл системи. Тіла ізольованої системи можуть взаємодіяти тільки між собою.

Розглянемо ізольовану систему, що складається із двох невеликих тіл масами m_1 і m_2, які можна вважати матеріальними точками. Нехай взаємодія цих матеріальних точок здійснюється через вміщену між ними стиснену легку пружину. В певний момент часу матеріальні точки мають швидкості $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$, і їхні імпульси будуть $\vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1$ і $\vec{p}_2 = m_2\vec{v}_2$. За наступний проміжок часу Δt внаслідок взаємодії точок змінюється стан їхнього руху, що виражається зміною імпульсів $\Delta\vec{p}_1 = m_1\Delta\vec{v}_1$ і $\Delta\vec{p}_2 = m_2\Delta\vec{v}_2$, де вектори $\Delta\vec{v}_1 = \vec{v}'_1 - \vec{v}_1$ і $\Delta\vec{v}_2 = \vec{v}'_2 - \vec{v}_2$ — відповідні зміни швидкостей за даний проміжок часу. Пружина однаково діє на обидві матеріальні точки, і вектори $\Delta\vec{p}_1$ та $\Delta\vec{p}_2$ мають протилежні напрями та пов'язані між собою співвідношенням

$$m_1\Delta\vec{v}_1 = -m_2\Delta\vec{v}_2.$$

Поділимо це рівняння на Δt і після переходу до границі при $\Delta t \to 0$ отримаємо

$$m_1\vec{a}_1 = -m_2\vec{a}_2, \tag{2.3}$$

де $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ — прискорення матеріальних точок у даний момент часу; знак мінус вказує на протилежні напрями цих прискорень. Переписавши вираз (2.3) у скалярній формі, знаходимо відношення мас

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}. \tag{2.4}$$

Із співвідношення (2.4) випливає спосіб порівняння мас: при взаємодії двох тіл їхні маси обернено пропорційні прискоренням. Оскільки інертність тіла залежить тільки від самого тіла, то у співвідношенні (2.4) маси m_1 і m_2 не залежать від характеру взаємодії між тілами. Цей висновок підтверджується численними дослідами. Із двох взаємодіючих тіл те тіло інертніше, яке внаслідок взаємодії менше змінює свою швидкість. Інертніше тіло і є тілом з більшою масою. Якщо певне тіло вибрати за еталон, маса якого дорівнює одиниці, то на підставі співвідношення (2.4) можна однозначно визначити масу будь-якого іншого тіла: маса тіла дорівнює відношенню модуля прискорення еталона маси до модуля прискорення тіла при їхній взаємодії.

За одиницю маси в СІ прийнято кілограм (кг). Кілограм — це одиниця маси, що дорівнює масі міжнародного прототипу кілограма. Ета-

лон кілограма зберігається у Міжнародному бюро мір і ваги у Франції (м. Севр). Кілограм є однією з основних одиниць СІ.

Маса тіла, яка міститься в одиниці об'єму, називається її густиною. В загальному випадку густина ρ в різних точках об'єму V тіла є функцією координат точки: $\rho(x, y, z) = \frac{dm}{dV}$, де dm — елементарна маса в нескінченно малому об'ємі $dV = dx\,dy\,dz$ в околі даної точки. Масу тіла визначають за формулою

$$m = \int_V \rho dV = \int_V \rho(x, y, z)dx\,dy\,dz, \qquad (2.5)$$

де інтегрування проводиться по всьому об'єму тіла V. Середня густина тіла

$$<\rho> = \frac{1}{V}\int_V \rho dV = \frac{m}{V}.$$

Тіло називається однорідним, якщо локальна густина маси $\rho(x, y, z) = <\rho>$.

Одиницею густини в СІ є кілограм на кубічний метр (кг/м^3).

Таким чином, маса — фізична величина, яка кількісно виражає фундаментальну властивість матерії — інертність. У класичній механіці вводять наближені припущення, які узгоджуються з експериментом: 1) маса тіла є його властивістю, яка не залежить ні від стану руху тіла, ні від його взаємодії з іншими тілами; 2) загальна маса системи тіл дорівнює сумі мас тіл, з яких складається система.

Маса фігурує також у законі всесвітнього тяжіння як характеристика гравітаційних властивостей тіл. Цю властивість тіл притягувати одне одного характеризують гравітаційною масою. Питання тотожності інертної і гравітаційної мас тіла розглянемо у шостому розділі.

Поняття маси набуло глибшого змісту в спеціальній теорії відносності, яка розглядає рух матеріальних об'єктів зі швидкостями, близькими до швидкості світла, встановлює залежність маси від швидкості.

Перейдемо до поняття імпульсу матеріальної точки. У співвідношення $m_1\Delta\vec{v}_1 = -m_2\Delta\vec{v}_2$, отримане для ізольованої системи двох взаємодіючих матеріальних точок, підставимо значення векторів $\Delta\vec{v}_1$ і $\Delta\vec{v}_2$ і перетворимо його до вигляду

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'$$

або

$$\vec{p} = \vec{p}', \qquad (2.6)$$

де $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ і $\vec{p}' = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$ — імпульси системи відповідно до взаємодії і після взаємодії точок. Імпульсом системи матеріальних точок, що належать до однієї системи відліку, називають геометричну суму імпульсів окремих матеріальних точок, з яких складається система.

Із рівності (2.6) випливає важливий висновок: повний імпульс ізольованої системи двох матеріальних точок зберігається, тобто залишається сталим у часі при будь-яких взаємодіях між матеріальними точками. Це положення називається законом збереження імпульсу, який у подальшому буде поширений на системи з довільним числом матеріальних точок.

Введене формулою (2.2) поняття імпульсу є якісно новою характеристикою руху, що підлягає закону збереження. Вектор імпульсу, який дорівнює добутку маси тіла на його швидкість і має напрям швидкості, є мірою механічного руху тіла. При заданій масі тіла імпульс однозначно пов'язаний із швидкістю, тому механічний стан тіла у будь-який момент часу буде повністю визначений, якщо відомі його положення та імпульс. Проте справа не в простій заміні швидкості на імпульс. Перехід від швидкостей до імпульсів дає змогу перейти від кінематичного описання стану руху тіла до характеристики динамічного стану тіла і системи тіл.

§ 2.4. Другий закон Ньютона. Сила

Другий закон Ньютона встановлює зв'язок між взаємодією тіл і зміною їхнього поступального руху. Для кількісної характеристики взаємодій у механіку введено поняття сили. При вільному русі матеріальної точки в інерціальній системі відліку її імпульс залишається сталим. Якщо ж матеріальна точка взаємодіє з навколишніми тілами, то її імпульс змінюється з часом. Узагальнення численних дослідних фактів підтверджує, що зміна швидкості або імпульсу тіла тим більша, чим інтенсивніша його взаємодія з навколишніми тілами. Тому, вважаючи тіло матеріальною точкою, логічно за кількісну міру взаємодії матеріальної точки з навколишніми тілами прийняти зміну її імпульсу за одиницю часу, точніше похідну від вектора імпульсу за часом. Цю похідну називають *силою*, яка діє на дану матеріальну точку.

Таке означення сили характеризує тільки один бік взаємодії матеріальної точки з навколишніми тілами, а саме "поведінку" матеріальної точки під дією навколишніх тіл, яка проявляється в зміні імпульсу точки. З другого боку, вивчаючи цю взаємодію, силу можна виразити через величини, які характеризують механічний стан матеріальної точки (координати і швидкість) і механічний стан та властивості навколишніх тіл. Зокрема, вивченням фізичних явищ, які лежать в основі взаємодії між матеріальними точками, встановлено,

що сили взаємодії між ними залежать від відстаней між матеріальними точками та від їхніх властивостей. В інших випадках сила взаємодії залежить від властивостей тіла і його швидкості відносно навколишніх тіл. Функціональну залежність сили від стану матеріальної точки і стану та властивостей навколишніх тіл називають *законом взаємодії з навколишніми тілами.*

В інерціальній системі відліку похідна від імпульсу $\vec{p}$ матеріальної точки за часом описується рівнянням

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F} \tag{2.7}$$

або для повільних рухів, при яких масу можна вважати сталою (не залежною від швидкості),

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}; \tag{2.8}$$

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}. \tag{2.9}$$

Тут через $\vec{F}$ позначено силу, яка діє на матеріальну точку масою m, як функцію стану точки і стану та властивостей навколишніх тіл.

В інерціальній системі відліку похідна від імпульсу матеріальної точки за часом дорівнює силі, що діє на цю точку. Це положення називається *другим законом Ньютона* (основним законом динаміки), а відповідні йому рівняння (2.7) — (2.9) — рівняннями руху матеріальної точки (поступального руху тіла).

Стосовно рівняння (2.7) доречно зауважити, що воно є і законом, і означенням нової фізичної величини. Воно має зміст основного закону динаміки, а не означення поняття сили, якщо в ньому сила $\vec{F}$ визначена не за прискоренням або зміною імпульсу, а іншим незалежним методом. Тільки після того, коли встановлений вигляд функції $\vec{F}$ як закону взаємодії матеріальної точки з навколишніми тілами, з рівняння руху (2.7) можна визначити залежність швидкості і координат матеріальної точки від часу, тобто знайти її траєкторію. Для цього, крім вигляду функції $\vec{F}$, повинні бути задані початкові умови: координати і швидкість матеріальної точки в початковий момент часу. Зміна положення матеріальної точки у просторі визначається швидкістю $d\vec{r} = \vec{v}\,dt$, а зміну швидкості за кожний проміжок часу dt визначає рівняння руху $d\vec{v} = \frac{\vec{F}}{m}dt$. Отже, рівняння руху, закон взаємодії і початкові умови повністю визначають динамічний стан матеріальної точки у будь-який момент часу.

Кожне з векторних рівнянь руху (2.7) — (2.9) можна переписати у вигляді трьох скалярних рівнянь (у декартових координатах):

$$\frac{dp_x}{dt} = m\frac{dv_x}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} = ma_x = F_x;$$

$$\frac{dp_y}{dt} = m\frac{dv_y}{dt} = m\frac{d^2y}{dt^2} = ma_y = F_y; \tag{2.10}$$

$$\frac{dp_z}{dt} = m\frac{dv_z}{dt} = m\frac{d^2z}{dt^2} = ma_z = F_z,$$

де F_x, F_y, F_z — проекції вектора сили $\vec{F}$ на координатні осі. За другим законом Ньютона сила, що діє на матеріальну точку, є функцією радіуса-вектора точки, швидкості і часу $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$.

В інтегральній формі другий закон Ньютона має вигляд

$$\Delta\vec{p} \equiv \vec{p}(t) - \vec{p}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{F}(t)\,dt. \tag{2.11}$$

Інтеграл у правій частині цієї рівності називається імпульсом сили за проміжок часу $\Delta t = t - t_0$. Зміна імпульсу матеріальної точки $\Delta\vec{p}$ за проміжок часу Δt дорівнює імпульсу зовнішньої сили.

Якщо сила не змінюється з часом, то імпульс сили

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t. \tag{2.12}$$

При цьому імпульс $\vec{p}(t)$ визначається формулою

$$\vec{p}(t) = \vec{p}(t_0) + \vec{F}(t - t_0), \tag{2.13}$$

де $\vec{p}(t_0)$ — імпульс матеріальної точки у початковий момент часу t_0.

Якщо рух відбувається за інерцією, то $\vec{F} = 0$ і

$$\vec{p} = \text{const}. \tag{2.14}$$

Зміну імпульсу (2.11) під дією змінної сили $\vec{F}(t)$ можна визначити через середнє значення сили:

$$\Delta\vec{p} \equiv \vec{p}(t) - \vec{p}(t_0) = <F>(t - t_0), \tag{2.15}$$

де

$$<\vec{F}> = \frac{1}{t - t_0}\int_{t_0}^{t} \vec{F}(t)dt = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}. \tag{2.16}$$

З другого закону Ньютона випливає, що сила як похідна від вектора імпульсу за часом — векторна величина. Вона визначається числовим значенням, напрямом дії і точкою прикладання.

Числове значення сили (модуль F) вважається відомим, якщо з'ясований закон взаємодії матеріальної точки з навколишніми тілами, тобто залежність сили від положення навколишніх тіл відносно матеріальної точки, їхніх відносних швидкостей і властивостей. Взаємодія тіл проявляється не тільки у наданні їм прискорення, а й у зміні форми і об'єму (деформації) тіл. Деформація піддається вимірюванню і може бути використана для порівняння і вимірювання сил. Наприклад, за законом Гука сила натягу пружини пропорційна її видовженню при малих деформаціях: $F = -kx$, де коефіцієнт пропорційності k — жорсткість пружини (величина стала для конкретної пружини і залежить від її властивостей: матеріалу, форми, розмірів та ін.). Прийнявши за еталон силу, під дією якої пружина видовжується на одиницю, можна проградуювати видовження пружини в одиницях сили. За таким способом градуюють динамометри.

При наявності динамометра для вимірювання сили і незалежного методу вимірювання прискорення можна перевірити справедливість другого закону Ньютона. Досліди показують, що прискорення будь-якого тіла пропорційне силі, що діє на нього, і обернено пропорційне масі тіла. Цей експериментально обгрунтований висновок підтверджує справедливість рівняння (2.8).

У випадку, коли на тіло не діє сила з боку інших тіл ($F = 0$), прискорення дорівнює нулю, і тіло зберігає свою швидкість. Це твердження збігається з першим законом Ньютона. Спочатку може здаватись, що перший закон Ньютона є окремим випадком другого закону Ньютона. Проте за змістом перший закон Ньютона як незалежний закон інерції формулює постулат про існування інерціальної системи відліку. Саме в інерціальній системі відліку справджується і другий закон Ньютона.

Для вимірювання сили в СІ введено одиницю ньютон (Н). Вибір одиниці сили зумовлений формулою (2.8): 1Н дорівнює силі, яка тілу масою 1 кг надає прискорення 1 м/с^2 $\left(1\text{Н} = 1\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2}\right)$.

Напрям вектора сили $\vec{F}$, що діє на тіло, визначає напрям отримуваного тілом прискорення під дією цієї сили. На сили поширюється математична операція додавання векторів. Якщо на тіло з боку зовнішніх тіл діють кілька сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_N$, то їх можна замінити однією силою $\vec{F}$, що дорівнює геометричній сумі всіх N сил:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i. \qquad (2.17)$$

Силу $\vec{F}$ називають рівнодійною або головним вектором зовнішніх сил.

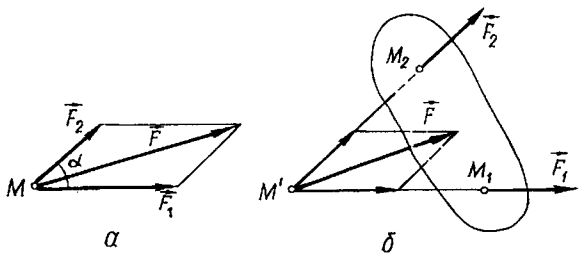
Якщо дві сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ прикладені до однієї точки M і напрямлені під кутом одна до одної, то рівнодійна $\vec{F}$ визначається за правилом паралелограма (рис. 2.1, *а*), а її модуль за формулою

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}.$$

При більшому числі діючих сил рівнодійна визначається послідовним застосуванням до них правила паралелограма.

На макроскопічне тіло можуть діяти сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, прикладені до різних його точок M_1 і M_2. У цьому разі для визначення рівнодійної сили необхідно перенести вектори сил уздовж їхніх ліній дії у точку перетину M', а потім знайти $\vec{F}$ за правилом паралелограма (рис. 2.1, *б*). При цьому визначають напрям і модуль сили $\vec{F}$, але точка M' не буде точкою прикладання рівнодійної.

Зауважимо, що рівнодійна $\vec{F}$ кількох сил може бути визначена як геометрична сума (2.17), якщо діючі сили $\vec{F}_i$ задовольняють закон про незалежність дії сил. За цим законом N сил діють на тіло масою m



а *б*

Рис. 2.1

незалежно, якщо кожна сила F_i надає тілу однакового прискорення $\vec{a}_i$ незалежно від того, діє вона одна чи діють на це тіло всі N сил одночасно. У цьому разі результуюче прискорення $\vec{a}$ визначається векторною сумою всіх $\vec{a}_i$ прискорень і рівнодійна сила

$$\vec{F} = m\vec{a} = \sum_{i=1}^{N} m\vec{a}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i.$$

Отже, застосовність правила паралелограма для додавання сил грунтується на припущенні про незалежність дії сил.

§ 2.5. Третій закон Ньютона і закон збереження імпульсу

Усяка дія одного тіла на інше має характер взаємодії. Розглянемо ізольовану систему, яка складається із двох взаємодіючих матеріальних точок. Їхня взаємодія може бути обумовлена деформацією при зіткненні, притяганням внаслідок всесвітнього тяжіння, притяганням або відштовхуванням, якщо матеріальним точкам надані електричні заряди. В ізольованій системі з двох точок справджується закон збереження імпульсу: $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{const}$. Диференціюючи це співвідношення за часом, маємо

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = 0$$

або, на підставі другого закону Ньютона (2.7),

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2, \tag{2.18}$$

де $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ — сили, з якими матеріальні точки діють одна на одну. Експериментальне вивчення взаємодії матеріальних точок підтверджує рівність сил (2.18) і показує, що ці сили напрямлені вздовж прямої, яка сполучає взаємодіючі точки. На узагальненні дослідних фактів, отриманих при різних видах взаємодії двох матеріальних точок, грунтується третій закон Ньютона: *сили взаємодії двох матеріальних точок рівні за модулем, протилежно напрямлені і діють вздовж прямої, яка сполучає ці матеріальні точки.*

При формулюванні третього закону динаміки І. Ньютон одну із сил $\vec{F}_1$ або $\vec{F}_2$ назвав дією, а другу — протидією. Таким розподілом сил взаємодії із двох взаємодіючих тіл виділяють головне, яке чинить дію, а друге тіло є підпорядкованим — воно "реагує" рівновеликою протидією. Наприклад, в електропоїзді, що рухається, головним є електровоз, який розвиває силу тяги і діє на вагони, а вагони створюють протидію силі тяги. Проте не завжди при взаємодії можна відрізнити тіло, що діє, від тіла, що протидіє. Зокрема, якщо два точкові різнойменні заряди притягуються один до одного, то обидва заряди рівноправні, і неможливо вказати, який із них чинить дію, а який — протидію.

При будь-яких взаємодіях двох тіл сили завжди виникають попарно, і обидві сили (2.18) завжди мають однакову природу. Ці сили прикладені до різних тіл, тому їх не можна розглядати як сили, що зрівноважують одна одну.

Третій закон Ньютона дає можливість здійснити перехід від механіки матеріальної точки до механіки системи матеріальних точок, якщо дотримуватись уявлення про сили парної взаємодії між матеріальними точками системи.

Розглянемо систему, яка складається з N матеріальних точок масами $m_1, m_2, \ldots, m_N$. Швидкості цих точок позначимо відповідно $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_N$. Матеріальні точки системи можуть взаємодіяти як між собою, так і з зовнішніми тілами, які не входять до системи. У зв'язку з цим розрізняють внутрішні і зовнішні сили, які діють на матеріальні точки системи. Внутрішні сили — це сили взаємодії між матеріальними точками самої системи, а зовнішніми називають сили, з якими на матеріальні точки системи діють зовнішні тіла. Систему називають замкненою, якщо на матеріальні точки системи не діють зовнішні сили або геометрична сума зовнішніх сил дорівнює нулю. Припустимо, що між точками системи відбуваються попарні взаємодії. Якщо $\vec{F}_{ik}$ — сила, з якою i-та матеріальна точка діє на k-ту точку, а $\vec{F}_{ki}$ — сила, з якою k-та точка діє на i-ту, то за третім законом Ньютона $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$, або $\vec{F}_{ik} + \vec{F}_{ki} = 0$. Звідси випливає, що геометрична сума всіх внутрішніх сил, які діють у системі, дорівнює нулю:

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{ik} = 0, \tag{2.19}$$

де $\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{ik}$ (при $k \neq i$) — геометрична сума внутрішніх сил, які діють на i-ту матеріальну точку.

Нехай на матеріальні точки системи діють зовнішні сили $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_N$, які приводять до зміни динамічного стану системи. За другим законом Ньютона (2.7) рівняння руху системи повинні бути написані для кожної матеріальної точки з урахуванням усіх взаємодій:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{1k} + \vec{F}_1 \quad (k \neq 1);$$

. . . . . .

$$\frac{d\vec{p}_N}{dt} = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{Nk} + \vec{F}_N \quad (k \neq N).$$

Додавши почленно ці рівняння, матимемо

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{p}_1 + \ldots + \vec{p}_N\right) = \left(\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{1k} + \ldots + \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{Nk}\right) + \left(\vec{F}_1 + \ldots + \vec{F}_N\right),$$

або

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\vec{F}_{ik} + \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i.$$

Звідси, враховуючи співвідношення (2.19), знаходимо

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \tag{2.20}$$

де $\vec{p}$ — повний імпульс системи, що дорівнює геометричній сумі імпульсів усіх матеріальних точок,

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i; \tag{2.21}$$

$\vec{F}$ — головний вектор зовнішніх сил, які діють на матеріальні точки системи,

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i. \tag{2.22}$$

Внутрішні сили не впливають на вектор повного імпульсу системи і рівняння (2.20) є узагальненням рівняння руху (2.7) на систему матеріальних точок: *похідна від вектора повного імпульсу системи матеріальних точок за часом дорівнює геометричній сумі всіх зовнішніх сил.*

Якщо геометрична сума зовнішніх сил (2.22) дорівнює нулю, то система замкнена, і рівняння (2.20) набуває вигляду $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$, тобто вектор $\vec{p}$ сталий. Звідси випливає закон збереження імпульсу системи: *повний імпульс замкненої системи матеріальних точок зберігається, тобто не змінюється з часом:*

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i = \text{const}. \tag{2.23}$$

Припустимо, що система незамкнена і геометрична сума зовнішніх сил $\vec{F} \neq 0$. Якщо проекція головного вектора зовнішніх сил $\vec{F}$ на деякий напрям дорівнює нулю, то складова повного імпульсу системи у цьому напрямі залишається сталою. Дійсно, нехай проекція сили $\vec{F}$ на певний напрям OX дорівнює нулю: $(\vec{F})_{\text{пр}\,x} = F_x = 0$. Спроектуємо векторне рівняння (2.20) на цей напрям: $\frac{dp_x}{dt} = F_x = 0$, звідси $p_x = \text{const}$. У цьому разі повний імпульс системи не зберігається, але зберігається проекція імпульсу на напрям OX. Наприклад, на кинуте горизонтально тіло діє напрямлена вниз сила тяжіння. При цьому вертикальна складова імпульсу безперервно збільшується, але його горизонтальна складова залишається сталою (якщо нехтувати силою опору повітря).

Доведення закону збереження імпульсу в замкненій системі (2.23) грунтується на припущенні, що на силу взаємодії між двома матеріальними точками не впливають інші матеріальні точки (парність взаємодії), і на третьому законі Ньютона, з якого випливає умова (2.19). Закон збереження імпульсу в замкнених системах — це окремий випадок фундаментального закону, для формулювання якого вводиться поняття імпульсу поля, що виходить за рамки класичної механіки.

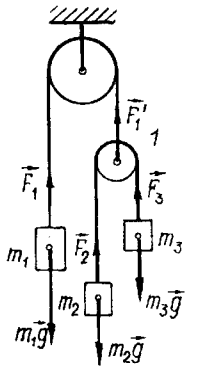


Рис. 2.2

Приклад 2.1. Визначити прискорення тягарців і силу натягу ниток (рис. 2.2). Вважати нитки нерозтяжними, тертям і масою ниток та блоків нехтувати, $m_1 > m_2 + m_3$ і $m_2 > m_3$.

Розв'язання. Позначимо прискорення тіла масою m_1 і блока *1* як цілого через a, прискорення тіла масою m_2 відносно блока *1* — через a_1. Вважатимемо величини додатними і напрямленими вертикально вниз. Тоді прискорення мас m_2 і m_3 відносно нерухомого блока відповідно будуть $a_1 - a$ і $-(a + a_1)$.

Якщо нехтувати масами блоків і ниток, то сили натягу ниток повинні задовольняти такі умови:

$$F_2 = F_3, \quad F_1 = F_1' = F_2 + F_3 = 2F_2. \tag{1}$$

Рівняння динаміки для кожного тягарця матимуть такий вигляд:

$$\begin{aligned} m_1g - F_1 &= m_1a; \\ m_2g - F_2 &= m_2(a_1 - a); \\ m_3g - F_3 &= -m_3(a + a_1), \end{aligned} \tag{2}$$

де g — прискорення вільного падіння.

Рівняння (2) запишемо у такому вигляді:

$$\begin{aligned} m_1g - 2F_2 &= m_1a; \\ m_2g - F_2 &= m_2a_1 - m_2a; \\ m_3g - F_2 &= -m_3a - m_3a_1. \end{aligned} \tag{3}$$

Розв'язавши систему рівнянь (3) відносно невідомих a, a_1, F_1 і F_2, дістанемо:

$$a = \frac{m_1(m_2 + m_3) - 4m_2m_3}{m_1(m_2 + m_3) + 4m_2m_3}\,g;$$

$$a_1 = \frac{2m_1(m_2 - m_3)}{m_1(m_2 + m_3) + 4m_2m_3}\,g;$$

$$F_2 = \frac{4m_1m_2m_3}{m_1(m_2 + m_3) + 4m_2m_3}\,g, \qquad F_1 = 2F_2.$$

Приклад 2.2. Граната масою $m = 3$ кг летіла в горизонтальному напрямі зі швидкістю $v = 10$ м/с і розірвалась на три осколки. Осколок масою $m_1 = 0{,}5$ кг летить із швидкістю $v_1 = 20$ м/с у напрямі, протилежному до початкового напряму руху гранати. Другий осколок масою $m_2 = 1$ кг відлітає із швидкістю $v_2 = 30$ м/с під кутом $\alpha_2 = 30°$ до початкового напряму руху гранати. Визначити модуль і напрям вектора швидкості третього осколка.

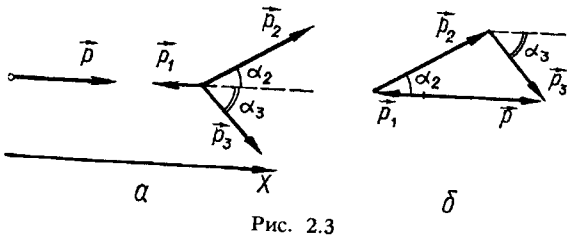


Рис. 2.3

Розв'язання. Імпульс гранати в горизонтальному польоті $\vec{p} = m\vec{v}$ у момент вибуху дорівнює векторній сумі імпульсів утворених осколків:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3, \qquad (1)$$

де $\vec{p}_i = m_i\vec{v}_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Проектуючи ці вектори на горизонтальну вісь (рис. 2.3, *а*), маємо

$$p = p_{1x} + p_{2x} + p_{3x},$$

або

$$mv = -m_1v_1 + m_2v_2\cos\alpha_2 + p_3\cos\alpha_3.$$

Звідси знаходимо

$$p_3\cos\alpha_3 = mv + m_1v_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}m_2v_2,$$

$$p_3\cos\alpha_3 = 14\ \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}.$$

Щоб знайти модуль p_3, додамо вектори рівняння (1) за правилом многокутника (рис. 2.3, *б*). За теоремою косинусів

$$p_3^2 = (p + p_1)^2 + p_2^2 - 2p_2(p + p_1)\cos\alpha_2,$$

або

$$p_3 = [(mv + m_1v_1)^2 + (m_2v_2)^2 - \sqrt{3}m_2v_2(mv + m_1v_1)]^{1/2};$$

$$p_3 = 20{,}5\ \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}.$$

Враховуючи, що $p_3 = m_3v_3$, знаходимо модуль і напрям швидкості третього осколка:

$$v_3 = \frac{p_3}{m - (m_1 + m_2)};\quad v_3 = 13{,}7\ \text{м/с};$$

$$\cos\alpha_3 = \frac{14}{20{,}5} = 0{,}683;\quad \alpha_3 = 0{,}819\ \text{рад} \approx 47^0.$$

§ 2.6. Принцип відносності Галілея

Рівняння, що описує другий закон механіки

$$m\vec{a} = \vec{F}, \qquad (2.24)$$

свідчить про те, що цей закон не може бути справедливим у будь-якій системі відліку, оскільки прискорення $\vec{a}$ має різні значення в системах відліку, які рухаються одна відносно одної з прискоренням.

Розглянемо рух матеріальної точки відносно двох систем відліку K і K'. Систему K вважатимемо інерціальною, а систему K' такою, що рухається рівномірно і прямолінійно відносно системи K. Рух тіла відносно рухомої системи відліку називають *відносним*, а рух рухомої системи відліку відносно нерухомої — *переносним*.

Закони механіки відносно нерухомої інерціальної системи відліку відомі. Який вигляд матимуть ці закони відносно рухомої системи відліку? Для цього спочатку знайдемо формули перетворення координат, тобто формули, які дають можливість перейти від координат рухомої точки в одній системі до її координат в іншій системі, якщо системи рухаються одна відносно одної рівномірно і прямолінійно зі швидкістю $\vec{v}_0$. Нехай у момент часу $t = 0$ початки обох систем відліку та відповідні осі збігаються, а потім початок рухомої системи відліку рухається вздовж осі OX зі швидкістю v_0 і відповідні осі обох систем залишаються паралельними. Позначимо координати матеріальної точки P (рис. 2.4) відносно цих систем відповідно x, y, z і x', y', z'. Очевидно, що зв'язок між цими координатами у будь-який момент часу виражається такими співвідношеннями:

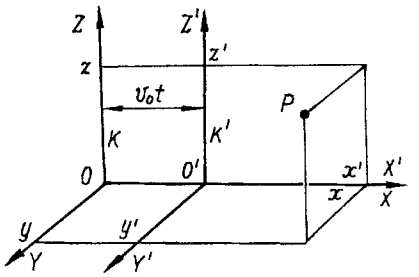


Рис. 2.4

$$x = x' + v_0t;\quad y = y';\quad z = z';\quad t = t'. \qquad (2.25)$$

Рівняння $t = t'$ вказує на те, що в класичній механіці час не залежить від вибору інерціальної системи відліку. Систему рівнянь (2.25) називають формулами перетворення координат або *перетвореннями Галілея*.

Знайдемо довжину стержня у нерухомій і рухомій системах відліку. В нерухомій системі відліку довжина стержня визначається за формулою

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

де x_1, y_1, z_1 і x_2, y_2, z_2 — відповідно координати початку і кінця стержня.

Користуючись формулами (2.25), знайдемо координати початку і кінця цього стержня в рухомій системі відліку в момент часу t:

$$x_1' = x_1 - v_0 t;\ y_1' = y_1;\ z_1' = z_1;\ x_2' = x_2 - v_0 t;\ y_2' = y_2;\ z_2' = z_2.$$

Довжина стержня у системі відліку K' буде

$$l' = \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2} =$$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = l. \qquad (2.26)$$

Величини, які не змінюються при переході від однієї системи відліку до іншої, називають *інваріантними*. З рівності (2.26) видно, що довжина стержня або відстань між двома точками тіла однакова в обох системах відліку, тобто інваріантна.

Щоб знайти зв'язок між складовими швидкостей точки в обох системах відліку, треба продиференціювати рівняння (2.25) за часом. Після цього матимемо:

$$v_x = v_x' + v_0;\ v_y = v_y';\ v_z = v_z' \qquad (2.27)$$

або у векторній формі:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0. \qquad (2.28)$$

Рівняння (2.28) виражає закон додавання швидкостей Галілея: швидкість матеріальної точки відносно нерухомої системи відліку дорівнює векторній сумі відносної $\vec{v}'$ і переносної $\vec{v}_0$ швидкостей. За рівнянням (2.28) неважко показати, що відносна швидкість двох тіл однакова в обох системах відліку. Нехай швидкості двох взаємодіючих тіл у нерухомій системі відліку дорівнюють $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$, а в рухомій — $\vec{v}_1'$ і $\vec{v}_2'$, причому $\vec{v}_1' = \vec{v}_1 - \vec{v}_0$; $\vec{v}_2' = \vec{v}_2 - \vec{v}_0$. Тоді відносна швидкість цих тіл у нерухомій системі відліку $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$, і в рухомій системі відліку $\Delta\vec{v}' = \vec{v}_2' - \vec{v}_1' = (\vec{v}_2 - \vec{v}_0) - (\vec{v}_1 - \vec{v}_0) = \Delta\vec{v}$. Отже,

$$\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}'. \qquad (2.29)$$

Щоб встановити зв'язок між відповідними прискореннями, продиференціюємо рівняння (2.28) за часом. Оскільки $v_0 = \text{const}$, то

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt}, \text{ або } \vec{a} = \vec{a}'. \qquad (2.30)$$

Отже, при рівномірному і прямолінійному русі однієї системи відліку відносно іншої прискорення тіла в таких системах інваріантні. З цього випливає, що всі системи відліку, які рухаються рівномірно і прямолінійно відносно інерціальної системи відліку, будуть інерціальними.

Сила взаємодії між матеріальними точками залежить від відстані між ними і їхньої відносної швидкості. При переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої сила як функція інваріантних величин не змінюється, тобто сила інваріантна відносно перетворень Галілея: $\vec{F} = \vec{F}'$. Оскільки і прискорення залишається інваріантним (2.30), то з рівняння (2.24) випливає

$$m\vec{a}' = \vec{F}'. \qquad (2.31)$$

Рівняння (2.24) і (2.31) дають змогу сформулювати один із найважливіших принципів класичної механіки — принцип відносності Галілея: *рівняння механіки Ньютона інваріантні відносно перетворень Галілея, тобто вони залишаються незмінними при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої.*

Закони взаємодії і руху тіл в усіх інерціальних системах відліку описуються тими самими рівняннями — усі інерціальні системи відліку рівноправні. Проте це не означає, що характер руху того самого тіла в усіх інерціальних системах однаковий. Наприклад, рух кульки при вільному падінні буде прямолінійним у системі відліку, зв'язаній з вагоном, що рухається рівномірно і прямолінійно. Рух цієї самої кульки відносно системи відліку, зв'язаної із залізничним полотном, відбуватиметься по параболі. Річ у тім, що, хоча закони Ньютона і диференціальні рівняння, якими вони описуються, однакові в обох системах відліку, для визначення траєкторії кульки необхідно розв'язати диференціальні рівняння при відповідних початкових умовах — при заданих координатах і швидкості кульки в початковий момент часу. У вагоні кулька падає з початковою швидкістю, що дорівнює нулю, а в системі, зв'язаній із залізничним полотном, вона має початкову горизонтальну швидкість, яка дорівнює швидкості вагона. Цим пояснюється різний характер руху кульки в обох системах відліку.

Принцип відносності Галілея охоплює механічні явища, які відбуваються в замкнених системах, що мають скінченні розміри і перебувають у незмінних зовнішніх умовах. Тому можна дати ще таке еквівалентне формулювання принципу відносності в механіці: *ніякими механічними дослідами, проведеними всередині інерціальної системи відліку, неможливо встановити — система перебуває у стані спокою чи рухається прямолінійно і рівномірно.*

Принцип відносності Галілея був поширений А. Ейнштейном на всі фізичні явища.

§ 2.7. Деякі наслідки законів Ньютона

Рух центра мас системи. У механіці внаслідок незалежності маси від швидкості імпульс системи можна виразити через швидкість її центра мас.

Центром мас або *центром інерції системи* називається геометрична точка C, положення якої характеризує розподіл мас у системі. Положення центра мас визначається радіусом-вектором $\vec{r}_c$, який для системи з дискретним розподілом мас і системи з неперервним розподілом (суцільного тіла) описується формулами

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{m}; \quad \vec{r}_c = \frac{\int_V \rho \vec{r}\, dV}{m}, \tag{2.32}$$

де m — маса всієї системи відповідно

$$m = \sum_i m_i; \quad m = \int_V \rho dV; \tag{2.33}$$

ρ — густина; V — об'єм.

У системі з дискретною структурою переміщення окремих матеріальних точок приводить до зміни положення її центра мас. Щоб знайти швидкість центра мас, продиференціюємо за часом вираз (2.32):

$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{\sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{m} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{m}.$$

Запишемо це рівняння у вигляді

$$\vec{p} = m\vec{v}_c, \tag{2.34}$$

де $\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i$. Отже, імпульс центра мас дорівнює повному імпульсу системи. Рух центра мас тотожний з поступальним рухом системи як єдиного цілого.

Якщо на систему діють зовнішні сили, головний вектор яких $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$, то за другим законом Ньютона (2.20) отримаємо рівняння руху центра мас

$$m\frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{F}. \tag{2.35}$$

Звідси випливає теорема про рух центра мас: *центр мас системи рухається як матеріальна точка, маса якої дорівнює сумарній масі всієї системи, а діюча сила — геометричній сумі всіх зовнішніх сил, які діють на систему.*

У замкненій системі ($\sum_i \vec{F}_i = 0$) імпульс центра мас зберігається ($\vec{p} = m\vec{v}_c = \text{const}$): між матеріальними точками системи можуть діяти будь-які сили, система може обертатися, але центр мас системи рухатиметься прямолінійно і рівномірно.

Адитивність і закон збереження маси. Властивість адитивності мас системи полягає в тому, що маса системи дорівнює сумі мас матеріальних точок, з яких складається система. Властивість адитивності пов'язана з законом збереження маси: сума мас тіл, що взаємодіють, не змінюється з часом.

Незважаючи на очевидність адитивності маси, ця властивість не випливає з точного означення маси і вимагає обгрунтування. Для доведення адитивності маси в класичній механіці можна застосувати принцип відносності Галілея. Нехай внаслідок зіткнення двох тіл масами m_1 і m_2 утворюється одне тіло масою m. В інерціальній системі K, відносно якої тіла до зіткнення рухалися зі швидкостями $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$, а після зіткнення складене тіло — зі швидкістю $\vec{v}$, на підставі закону збереження імпульсу маємо

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m\vec{v}. \tag{2.36}$$

Для процесу зіткнення цих тіл закон збереження імпульсу справджується також у системі відліку K', яка рухається відносно системи K прямолінійно і рівномірно зі швидкістю $\vec{v}_0$:

$$m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' = m\vec{v}'. \tag{2.37}$$

Оскільки обидві системи відліку інерціальні, то маси всіх тіл у системі K' залишаються такими, якими вони були в системі K, а співвідношення між швидкостями тіл у цих системах даються виразами

$$\vec{v}_1' = \vec{v}_1 - \vec{v}_0; \quad \vec{v}_2' = \vec{v}_2 - \vec{v}_0; \quad \vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_0.$$

Підставивши ці значення в (2.37) і врахувавши (2.36), знаходимо

$$m = m_1 + m_2. \tag{2.38}$$

Маса складеного тіла дорівнює сумі мас складових тіл.

Сформульована таким чином властивість адитивності маси і закон збереження маси не є зовсім точними законами природи — вони справджуються лише наближено. Адитивність маси обгрунтована на підставі принципу відносності Галілея, який є наближеним граничним випадком принципу відносності Ейнштейна. Тому вираз (2.38) потрібно переглянути з урахуванням спеціальної теорії відносності.

Закон збереження маси був встановлений за результатами хімічних реакцій: сума мас тіл до реакції дорівнює сумі мас тіл після реакції. Низький енергетичний вихід хімічних реакцій не дав можливості виявити зміну маси речовини в процесі реакції. Між повною енергією і масою будь-якої системи існує фундаментальне співвідношення $E = c^2m$, встановлене Ейнштейном. Тому в балансі маси при взаємодії тіл повинна враховуватись не тільки маса речовини, а й маса, еквівалентна енергії, що виділяється чи поглинається при взаємодії. Наприклад, при взаємодіях мікрочастинок, які завершуються ядерними реакціями, відбувається помітна зміна сумарної маси частинок до і після реакції внаслідок значного енергетичного виходу ядерних реакцій.

Задача двох тіл. Задачею двох тіл називають задачу про рух двох взаємодіючих матеріальних точок. Нехай m_1 і m_2 — маси матеріальних точок; $\vec{F}_{12}$ — сила, з якою точка *1* діє на точку *2*; $\vec{F}_{21}$ — сила, з якою точка *2* діє на точку *1*; $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ — зовнішні сили. Запишемо рівняння руху системи двох матеріальних точок

$$m_1 \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_1; \quad m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_2, \tag{2.39}$$

де за третім законом Ньютона $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

Розв'язання задачі двох тіл зводиться до двох незалежних задач. Перша полягає у розв'язанні рівняння руху для центра мас системи

$$(m_1 + m_2) \frac{d^2\vec{r}_c}{dt^2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2,$$

де $\vec{r}_c$ — радіус-вектор центра мас двох матеріальних точок з радіусами-векторами $\vec{r}_1$ і $\vec{r}_2$.

Друга задача — визначення відносного руху двох матеріальних точок. Рівняння такого руху одержимо як різницю рівнянь (2.39):

$$\mu \frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{F}_{12} + \mu\left(\frac{\vec{F}_2}{m_2} - \frac{\vec{F}_1}{m_1}\right), \tag{2.40}$$

де $\mu = m_1m_2/(m_1 + m_2)$ — зведена маса.

Якщо система двох тіл ізольована ($\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = 0$), то центр мас рухається прямолінійно і рівномірно, а рівняння (2.40) набуває вигляду

$$\mu \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{12}. \tag{2.41}$$

Це рівняння описує рух однієї матеріальної точки відносно другої, оскільки радіус-вектор $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, проведений від точки 1 до точки 2, однозначно визначає положення другої точки відносно першої. За другим законом Ньютона (2.9) рівняння (2.41) можна розглядати як рівняння руху другої матеріальної точки з масою μ у силовому полі першої матеріальної точки. Це твердження залишається справедливим і для незамкненої системи за умови, що $\frac{\vec{F}_1}{m_1} = \frac{\vec{F}_2}{m_2}$.

§ 2.8. Рух тіл змінної маси. Реактивний рух

Під рухом тіла змінної маси розуміють такий рух, при якому маса тіла змінюється з часом: $m = m(t)$. Наприклад, маси ракет, які несуть космічні апарати, реактивних літаків та інших літаючих реактивних апаратів зменшуються з часом за рахунок викидання газів, утворених при згорянні великої кількості палива.

Виведемо рівняння руху тіла (матеріальної точки) змінної маси на прикладі руху ракети. Принцип дії ракети полягає в тому, що вона в певному напрямі викидає з великою швидкістю частину своєї маси у вигляді газів, діючи на них з великою силою. Гази з такою самою силою, але протилежно напрямленою, діють на ракету і надають їй прискорення. Для спрощення вважатимемо, що гази виходять із сопла ракети зі сталою швидкістю, значення якої відносно ракети дорівнює $\vec{u}$, і маса ракети змінюється безперервно. На ракету діють зовнішні сили (гравітаційні сили притягання Землі, Сонця і планет, сила опору середовища), векторна сума яких дорівнює $\vec{F}$.

Нехай у момент часу t ракета має масу m, її швидкість у нерухомій системі відліку дорівнює $\vec{v}$ і імпульс ракети $\vec{p} = m\vec{v}$. За наступний проміжок часу dt маса ракети зменшиться і стане рівною $m - dm$, а її швидкість збільшиться до $\vec{v} + d\vec{v}$, тобто в момент часу $t + dt$ після викидання газів масою dm імпульс системи

$$\vec{p} + d\vec{p} = (m - dm)(\vec{v} + d\vec{v}) + dm(\vec{v} + d\vec{v} - \vec{u}),$$

де враховано, що в нерухомій системі відліку маса викинутих газів dm має початкову швидкість $\vec{v} + d\vec{v}$ у напрямі руху ракети. Отже, за проміжок часу dt відбулась зміна імпульсу системи

$$d\vec{p} = (m - dm)(\vec{v} + d\vec{v}) + dm(\vec{v} + d\vec{v} - \vec{u}) - m\vec{v}$$

або

$$d\vec{p} = m d\vec{v} - \vec{u}\, dm.$$

Зміна імпульсу системи за час dt дорівнює імпульсу головного вектора зовнішніх сил:

$$m d\vec{v} - \vec{u}\, dm = \vec{F}\, dt,$$

або

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{u} \frac{dm}{dt} + \vec{F}. \qquad (2.42)$$

Цей вираз називається рівнянням руху тіла змінної маси або рівнянням Мещерського. Перший доданок у правій частині рівняння — це сила, зумовлена зміною маси ракети, і називається реактивною силою або силою тяги:

$$\vec{F}_{\text{р}} = \vec{u} \frac{dm}{dt}.$$

Сила тяги ракети пропорційна швидкості зміни маси ракети $\frac{dm}{dt}$ і швидкості $\vec{u}$, з якою виходять гази із сопла ракети. Вона діє на ракету з боку газів у напрямі, протилежному напряму газового потоку.

Принцип реактивного руху тіла полягає у виникненні реактивної сили внаслідок зміни маси тіла і викидання частинок маси у момент відокремлення з відносною швидкістю щодо основного тіла.

Припустимо, що на ракету не діють зовнішні сили. Тоді при $\vec{F} = 0$ рівняння (2.42) набуває вигляду

$$m d\vec{v} = \vec{u} dm$$

або в скалярній формі

$$dv = -u \frac{dm}{m},$$

де враховано, що швидкість виходу газів із ракети за напрямом протилежна швидкості ракети. Нехай у початковий момент часу швидкість ракети дорівнює нулю, а її маса m_0. Після згоряння всього запасу палива ракета досягає швидкості v і її маса стає рівною $m_{\text{к}}$. Інтегруючи останнє рівняння в цих межах, знаходимо

$$v = -u \int_{m_0}^{m_{\text{к}}} \frac{dm}{m} = u \ln \frac{m_0}{m_{\text{к}}}.$$

Цей вираз називається формулою Ціолковського.

Ідея використання реактивної сили для створення літаючих апаратів уперше була висловлена українським інженером М. І. Кибальчичем (1853 — 1881). Сила тяги реактивного двигуна не залежить від наявності середовища (наприклад, повітря для гвинтових літаків).

§ 2.9. Момент імпульсу. Момент сили. Закон збереження моменту імпульсу

Рух матеріальної точки під дією сили по довільній траєкторії можна розглядати як обертальний рух точки навколо миттєвого центра. Для характеристики цього руху вводять нові поняття — векторні фізичні величини: момент імпульсу і момент сили.

Розглянемо вектори *моменту імпульсу* матеріальної точки і моменту прикладеної до неї сили відносно довільної точки *0*. Цю точку називають початком або полюсом.

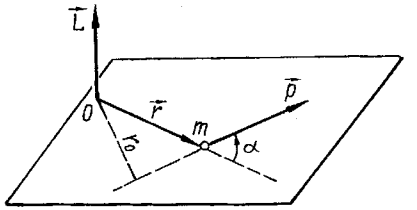


Рис. 2.5

Введемо позначення: $\vec{r}$ — радіус-вектор матеріальної точки масою m, проведений від початку *0* до матеріальної точки; $\vec{p} = m\vec{v}$ — вектор імпульсу; α — кут між векторами $\vec{r}$ і $\vec{p}$, що лежать в одній площині (рис. 2.5). Моментом імпульсу матеріальної точки відносно точки *0* називається осьовий вектор $\vec{L}$, що чисельно дорівнює добутку імпульсу матеріальної точки на довжину перпендикуляра r_0, опущеного з точки *0* на напрям імпульсу:

$$L = r_0 p = rp \sin \alpha$$

або у векторній формі

$$\vec{L} = [\vec{r}\,\vec{p}\,] = [\vec{r} \cdot m\vec{v}\,]. \qquad (2.43)$$

Вектор $\vec{L}$ перпендикулярний до площини, в якій лежать вектори $\vec{r}$ і $\vec{p}$, його модуль і напрям визначаються векторним добутком (2.43).

Зокрема, момент імпульсу матеріальної точки, яка рухається прямолінійно і рівномірно відносно нерухомої точки *0*, не змінюється в процесі руху. Справді, в цьому разі радіус-вектор $\vec{r}$ змінюється весь час, але момент імпульсу відносно точки *0* залишається сталим, оскільки не змінюється імпульс $\vec{p}$ і довжина перпендикуляра r_0.

Іншим прикладом руху, при якому момент імпульсу залишається сталим, є рух матеріальної точки по колу зі сталою швидкістю, якщо площина кола не змінює орієнтації в просторі. При цьому момент імпульсу точки відносно центра кола не змінює напряму. Його модуль дорівнює добутку сталих величин $L = rmv$, оскільки модуль r дорівнює радіусу кола, а кут між $\vec{r}$ і $\vec{v}$ весь час прямий.

Тут потрібно зробити важливе зауваження. Моментом вектора $\vec{p}$ завжди є вектор $\vec{L}$. Проте момент вектора $\vec{p}$ відносно деякої осі OZ є проекцією на цю вісь його моменту $\vec{L}$ відносно точки, яка лежить на цій же осі, тобто момент імпульсу матеріальної точки відносно осі уже не є вектором. У наведеному прикладі момент імпульсу відносно осі OZ, яка проходить через центр кола перпендикулярно до площини кола, визначається як проекція $L_z = rmv$, а не як модуль вектора $\vec{L}$ відносно центра кола, хоча ці величини в даному разі збігаються.

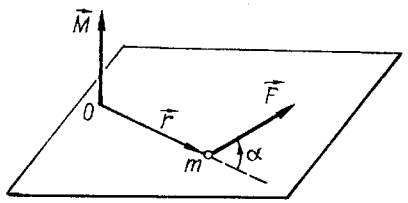


Рис. 2.6

Моментом імпульсу системи матеріальних точок відносно деякої точки O називається векторна сума моментів імпульсів усіх матеріальних точок, з яких складається система, відносно тієї ж точки. Для системи із N матеріальних точок

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i \vec{p}_i] = \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i m_i \vec{v}_i], \qquad (2.44)$$

де $\vec{L}$ — повний момент імпульсу системи відносно даної точки 0.

Поняття моменту сили вводять аналогічно поняттю моменту імпульсу. Якщо на матеріальну точку m діє сила $\vec{F}$, то відносно довільної точки 0 (рис. 2.6) виникає момент сили. Моментом сили $\vec{F}$ відносно точки 0 називають осьовий вектор $\vec{M}$, що дорівнює векторному добутку радіуса-вектора точки прикладання сили на вектор сили:

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}]. \qquad (2.45)$$

Вектор $\vec{M}$ відносно точки 0 не зміниться, якщо точку прикладання сили перенести у будь-яку точку вздовж лінії дії сили. Момент сили відносно довільної осі, яка проходить через точку 0, дорівнює проекції на цю вісь вектора моменту $\vec{M}$ відносно даної точки.

Моментам кількох сил відносно точки називають геометричну суму моментів цих сил відносно цієї точки. Нехай вектори кількох сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_N$ мають такі орієнтації в просторі, що лінії їхньої дії перетинаються в одній точці A. Знайдемо момент $\vec{M}$ усіх N сил відносно довільної точки 0. Для цього перенесемо точки прикладання цих сил у точку A, радіус-вектор якої позначимо $\vec{r}$. Застосовуючи до цих сил правило паралелограма, послідовно отримаємо їхню геометричну суму: $\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$ — головний вектор діючих сил. Кожна із сил відносно даної точки створює момент $\vec{M}_i = [\vec{r}\vec{F}_i]$. За означенням момент усіх N сил відносно даної точки дорівнює геометричній сумі векторів $\vec{M}_i$:

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i = \sum_i [\vec{r}\vec{F}_i] = \left[\vec{r}\sum_i \vec{F}_i\right] = [\vec{r}\vec{F}]. \qquad (2.46)$$

Момент усіх діючих сил відносно деякої точки дорівнює моменту головного вектора цих сил відносно цієї точки.

Це твердження поширюється на довільне число сил, лінії дії яких лежать в одній площині. У випадку пари сил (рівні паралельні сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, напрями яких протилежні)

$$\vec{M} = [\vec{r}_1\vec{F}_1] + [\vec{r}_2\vec{F}_2] = [(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\vec{F}_1] = [(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\vec{F}_2],$$

де $\vec{r}_1$ і $\vec{r}_2$ — радіуси-вектори точок прикладання пари сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$.

Момент пари сил не залежить від вибору початку 0 і дорівнює моменту однієї із сил відносно точки прикладання другої сили.

Між векторами моменту імпульсу і моменту сили існує важливе співвідношення. Розглянемо матеріальну точку, на яку діє сила $\vec{F}$. Припустимо, що момент цієї сили і момент імпульсу визначені відносно однієї і тієї самої нерухомої точки 0. Продиференціюємо вираз (2.43) за часом:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}\vec{p}\right] + \left[\vec{r}\frac{d\vec{p}}{dt}\right]. \qquad (2.47)$$

Оскільки $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ і вектори $\vec{v}$ і $\vec{p}$ колінеарні, а $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$, то $\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\vec{p}\right] = 0$, а $\left[\vec{r}\frac{d\vec{p}}{dt}\right] = [\vec{r}\vec{F}] = \vec{M}$. Тоді із виразу (2.47) випливає співвідношення між векторами $\vec{L}$ і $\vec{M}$:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \qquad (2.48)$$

Цей вираз є рівнянням руху матеріальної точки для моменту імпульсу, тобто *основним законом динаміки обертального руху* матеріальної точки.

Похідна за часом від моменту імпульсу матеріальної точки відносно нерухомого початку дорівнює моменту діючої сили відносно того самого початку. Вираз (2.48) називають ще *рівнянням моментів.*

Векторне рівняння (2.48) еквівалентне трьом скалярним рівнянням у проекціях на нерухомі осі декартової системи координат:

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x; \quad \frac{dL_y}{dt} = M_y; \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z, \tag{2.49}$$

де L_x і M_x — моменти імпульсу і сил відносно осі OX; аналогічно — відносно осей OY і OZ. Рівняння (2.49) називаються рівняннями моментів відносно нерухомих координатних осей.

З'ясуємо геометричний зміст, наприклад, моменту M_x. Для цього розкладемо вектори $\vec{r}$ і $\vec{F}$ на складові, перпендикулярні і паралельні осі OX:

$$\vec{r} = \vec{r}_\perp + \vec{r}_\parallel; \quad \vec{M} = \vec{M}_\perp + \vec{M}_\parallel.$$

Враховуючи ці розкладання, перетворимо вираз (2.46):

$$\vec{M} = [\vec{r}\,\vec{F}\,] = [\vec{r}_\perp \vec{F}_\perp\,] + ([\vec{r}_\perp \vec{F}_\parallel\,] + [\vec{r}_\parallel \vec{F}_\perp\,]) + [\vec{r}_\parallel \vec{F}_\parallel\,],$$

де останній член дорівнює нулю (вектори $\vec{r}_\parallel$ і $\vec{F}_\parallel$ паралельні), вираз у дужках — два вектори, перпендикулярні до осі X, їхні проекції на цю вісь дорівнюють нулю. Отже, складова вектора $\vec{M}$, паралельна осі OX, $\vec{M}_\parallel = [\vec{r}_\perp \vec{F}_\perp\,]$. Тільки ця складова враховується при визначенні моменту M_x. Аналогічно при визначенні проекції L_x враховується тільки паралельна складова моменту імпульсу $L_\parallel = [\vec{r}_\perp \vec{p}_\perp\,]$.

Виведемо рівняння основного закону динаміки обертального руху для системи матеріальних точок. Нехай система складається із N матеріальних точок масами $m_1, m_2, \ldots, m_N$, які попарно взаємодіють між собою з силами $\vec{F}_{ik}$ $(i \neq k)$ і на кожну з них діє зовнішня сила $\vec{F}_i$ $(i, k = 1, 2, \ldots, N)$. Повний момент імпульсу системи відносно довільної нерухомої точки 0 дається геометричною сумою (2.44). Продиференціюємо рівняння (2.44) за часом

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{d\vec{r}_i}{dt} m\vec{v}_i\right] + \sum_{i=1}^{N} \left[\vec{r}_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}\right].$$

У цій рівності перша сума дорівнює нулю внаслідок колінеарності множників векторного добутку. У другій сумі множник

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = m_i \vec{a}_i = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{ik} + \vec{F}_i,$$

де $\sum_k \vec{F}_{ik}$ — сума внутрішніх сил, що діють на i-ту точку; $\vec{F}_i$ — зовнішня сила. Тоді

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \left[\vec{r}_i \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{ik}\right] + \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i \vec{F}_i\,]. \tag{2.50}$$

Покажемо, що перша сума цього виразу дорівнює нулю:

$$\sum_{i=1}^{N} \left[\vec{r}_i \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{ik}\right] = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N} \left[\vec{r}_i \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{ik}\right] + \sum_{i=1}^{N} \left[\vec{r}_i \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{ik}\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N} \left[\vec{r}_i \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{ik}\right] - \sum_{i=1}^{N} \left[\vec{r}_k \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{ki}\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \left[(\vec{r}_i - \vec{r}_k)\, \vec{F}_{ik}\right] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \left[\vec{r}_{ik} \vec{F}_{ik}\right] = 0,$$

де враховано, що за третім законом Ньютона $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$, а вектори $\vec{r}_{ik}$ і $\vec{F}_{ik}$ — колінеарні. Друга сума в рівності (2.50) дорівнює геометричній сумі моментів зовнішніх сил, що діють на систему, відносно точки 0:

$$\sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i \vec{F}_i\,] = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i = \vec{M}. \tag{2.51}$$

Вектор $\vec{M}$ називають головним вектором моментів зовнішніх сил. Для системи матеріальних точок основний закон динаміки обертального руху має вигляд

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \tag{2.52}$$

Похідна за часом від повного моменту імпульсу системи матеріальних точок відносно довільної нерухомої точки дорівнює головному вектору моментів зовнішніх сил відносно цієї точки.

Для замкненої системи матеріальних точок геометрична сума моментів зовнішніх сил відносно нерухомого початку дорівнює нулю.

При $M = 0$ із співвідношення (2.52) випливає закон збереження моменту імпульсу системи:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i \vec{p}_i\,] = \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i m_i \vec{v}_i\,] = \text{const} \tag{2.53}$$

У замкненій системі матеріальних точок вектор повного моменту імпульсу відносно нерухомого початку зберігається, тобто не змінюється з часом.

Закон збереження моменту імпульсу справджується в системах, які рухаються під дією центральних зовнішніх сил. Центральними називаються сили, лінії дії яких виходять з однієї точки O. Цю точку називають силовим центром. У будь-якій точці центрального силового поля момент сили відносно силового центра дорівнює нулю, оскільки сила напрямлена вздовж радіуса-вектора, проведеного в цю точку із центра поля. Тому головний вектор моментів зовнішніх центральних сил відносно центра поля також дорівнює нулю. Отже, повний момент

імпульсу системи матеріальних точок, яка рухається в центральному силовому полі, відносно силового центра залишається сталим.

Розглянемо рух окремої матеріальної точки масою m у полі центральних сил. Нехай у момент часу t радіус-вектор матеріальної точки, проведений із силового центра, дорівнює $\vec{r}$, а її швидкість $\vec{v}$. За наступний проміжок часу dt радіус-вектор зміниться на $\vec{v}\,dt$ і опише нескінченно малу площу dS трикутника (на рис. 2.7 заштрихований). Визначимо цю площу як модуль осьового вектора $d\vec{S}$, перпендикулярного до площини трикутника:

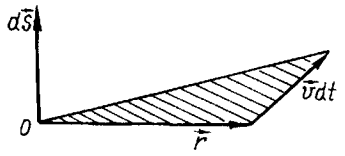


Рис. 2.7

$$d\vec{S} = \frac{1}{2}[\vec{r}\,\vec{v}]dt.$$

Похідну

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{2}[\vec{r}\,\vec{v}] \qquad (2.54)$$

називають *секторіальною швидкістю*, її числове значення дорівнює площі, описаній радіусом-вектором за одиницю часу. За означенням момент імпульсу матеріальної точки відносно центра поля $\vec{L} = m[\vec{r}\,\vec{v}]$, або з врахуванням (2.54)

$$\vec{L} = 2m\frac{d\vec{S}}{dt}. \qquad (2.55)$$

Оскільки момент центральної сили відносно силового центра дорівнює нулю, то момент імпульсу $\vec{L}$ = const. При повільних (нерелятивістських) рухах маса матеріальної точки не змінюється з часом і вираз (2.55) перетворюється в закон площ:

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \text{const}. \qquad (2.56)$$

Із формули (2.54) випливає, що площина, в якій лежать вектори $\vec{r}$ і $\vec{v}$, завжди перпендикулярна до вектора $\frac{d\vec{S}}{dt}$. Іншими словами, траєкторією матеріальної точки в полі центральних сил є плоска крива. Закон площ (2.56) стверджує, що радіус-вектор матеріальної точки за однакові проміжки часу описує рівні за розміром площі.

Закон збереження моменту імпульсу в замкнених механічних системах є окремим випадком фундаментального закону збереження моменту імпульсу. У фізиці поняття моменту імпульсу розширюється, ця характеристика властива не тільки частинкам речовини, а й силовим полям. Узагальнений закон збереження моменту імпульсу постулюється на всі фізичні процеси.

Розділ 3. Робота і енергія

§ 3.1. Енергія — універсальна міра руху та взаємодії

Повсякденний досвід показує, що рухомі тіла можна зупинити, а нерухомі привести в рух. Чи зникає механічний рух безслідно? Чи може тіло прийти в рух без зміни руху інших тіл ?

Можна спробувати відповісти на ці запитання, використовуючи таку міру механічного руху, як імпульс тіла. Розглянемо прямолінійний рівномірний рух тіла при наявності тертя. В цьому разі сила тертя врівноважується прикладеною до тіла силою і тіло рухається з сталою швидкістю. Досліди показують, що тертя спричиняє нагрівання тіл — перетворення механічного руху в неупорядкований тепловий рух молекул, з яких складаються ці тіла. Проте при прямолінійному рівномірному русі вектор імпульсу тіла залишається сталим і не відображає кількості виділеної теплоти. Ще один приклад. Нехай два тіла з різними масами вільно падають з різних висот. Неважко знайти таке співвідношення між масами тіл m_1 і m_2 та висотами h_1 і h_2, щоб імпульси цих тіл біля поверхні Землі були однаковими. Проте при падінні цих тіл на однакові пружини кожне з них зумовлює різні стискання пружин. Механічний рух тіл припинився і при взаємодії тіл з пружинами відбулись однакові зміни імпульсу, але для характеристики різних деформацій пружин однієї зміни імпульсу недостатньо. Інші приклади свідчать про те, що механічний поступальний рух тіла може виникати за рахунок зміни теплового руху молекул і атомів. Такі процеси відбуваються при пострілі із гармати, старті ракети, роботі двигуна внутрішнього згоряння.

Отже, досліди і спостереження переконують у тому, що механічний рух ніколи не зникає безслідно, а може перетворюватись в інші форми руху. Крім того, механічний рух ніколи не виникає безпричинно, лише внаслідок дії інших тіл або перетворення інших форм руху.

У зв'язку з цим було введено фізичну величину — енергію, яка є універсальною мірою механічного руху та взаємодії і зберігається (залишається сталою) при будь-яких перетвореннях механічного руху в інші форми руху матерії. Енергія — кількісна міра руху і взаємодії всіх видів матерії; вона відображає незнищенність руху матерії і пов'язує в одне ціле всі явища природи. У відповідності з різними формами руху матерії умовно розглядають різні форми енергії: механічну, внутрішню, електромагнітну, хімічну, ядерну та ін. Енергія будь-якої системи однозначно залежить від параметрів стану системи. У класичній механіці прийнято вважати, що енергія системи змінюється безперервно і може набувати довільних значень.

Механічний рух характеризується імпульсом і енергією. Імпульс описує динамічний стан руху, а енергія кількісно характеризує рух з урахуванням можливості переходу його з однієї форми в іншу.

У процесах взаємодії тіл між ними відбувається обмін енергією. Кількісною мірою зміни енергії взаємодіючих тіл є робота. Робота сили, прикладеної до даного тіла, є однією з форм передачі енергії і дорівнює кількості переданої енергії. Повну зміну енергії будь-якого тіла можна виміряти роботою, яку могло б виконати це тіло, якби передало всю свою енергію іншому тілу.

§ 3.2. Робота і потужність

Сила, яка діє на матеріальну точку і переміщує її на деяку відстань, виконує над матеріальною точкою роботу. Елементарною роботою dA сталої сили $\vec{F}$ на елементарному переміщенні $d\vec{r}$ називається скалярний добуток сили на переміщення:

$$dA = (\vec{F}d\vec{r}) = F_r\,|d\vec{r}\,| = F\cos\alpha\,ds, \qquad (3.1)$$

де F_r — проекція сили $\vec{F}$ на напрям переміщення $d\vec{r}$; $|d\vec{r}\,| = ds$ — довжина елементарного переміщення; α — кут між векторами $\vec{F}$ і $d\vec{r}$ (рис. 3.1). У декартових координатах рівняння (3.1) має вигляд

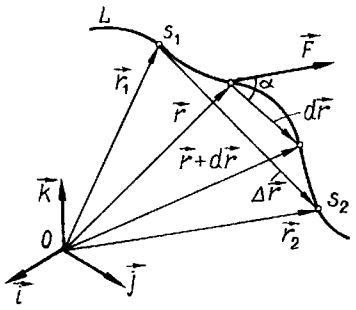


Рис. 3.1

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz, \qquad (3.2)$$

де F_x, F_y, F_z — проекції сили на координатні осі; dx, dy, dz — зміни координат радіуса-вектора $\vec{r}$ при переміщенні $d\vec{r}$.

Щоб визначити роботу, яку виконує змінна сила $\vec{F}$ (залежить від переміщення) над матеріальною точкою при скінченному переміщенні по траєкторії із положення s_1 до положення s_2, необхідно умовно розбити цей шлях на нескінченно велике число елементарних ділянок ds, у межах кожної з яких силу $\vec{F}$ можна вважати сталою. Тоді елементарну роботу dA на кожній з цих ділянок можна визначити за формулою (3.1) або (3.2). Робота A змінної сили $\vec{F}$ вздовж криволінійної траєкторії L від точки s_1 до точки s_2 дорівнює сумі елементарних робіт, виконаних силою на цьому відрізку траєкторії, і визначається виразом

$$A = \int_L (\vec{F}d\vec{r}), \qquad (3.3)$$

який називається криволінійним інтегралом вектора $\vec{F}$ вздовж кривої L. Цю роботу можна визначити також через проекцію сили на напрям переміщення:

$$A = \int_{s_1}^{s_2} F_r ds = \int_{s_1}^{s_2} F\cos\alpha\,ds \qquad (3.4)$$

або через проекції вектора $\vec{F}$ на координатні осі:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z dz, \qquad (3.5)$$

де x_1, y_1, z_1 і x_2, y_2, z_2 — декартові координати точок s_1 і s_2. Робота A чисельно дорівнює площі під кривою $F_r(s)$ між точками s_1 і s_2 (рис. 3.2).

При переміщенні матеріальної точки по траєкторії з положення s_1, радіус-вектор якого $\vec{r}_1$, в положення s_2 з радіусом-вектором $\vec{r}_2$ сила $\vec{F}$ може залишатися сталою. Тоді робота дорівнює скалярному добутку сили $\vec{F}$ на переміщення $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$:

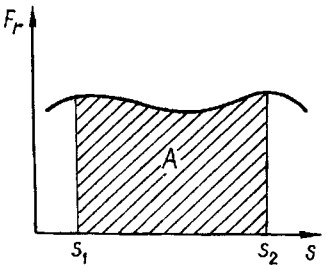


Рис. 3.2

$$A = (\vec{F}\Delta\vec{r}) = F\,|\Delta\vec{r}\,|\cos\alpha, \qquad (3.6)$$

де α — кут між векторами $\vec{F}$ і $\Delta\vec{r}$.

Якщо на матеріальну точку діють кілька сил, то їхня рівнодійна $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_N$. Помноживши це рівняння скалярно на елементарне переміщення $d\vec{r}$, отримаємо

$$dA = \sum_{i=1}^{N} (\vec{F}_i\,d\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} dA_i. \qquad (3.7)$$

Елементарна робота рівнодійної кількох сил дорівнює сумі елементарних робіт цих сил. Після інтегрування виразу (3.7) вздовж криволінійної траєкторії знаходимо

$$A = \sum_{i=1}^{N} A_i, \qquad (3.8)$$

тобто робота рівнодійної сили $\vec{F}$ дорівнює сумі робіт усіх сил $\vec{F}_i$, що діють на матеріальну точку.

Із формули (3.6) випливає, що діюча на тіло сила не виконує роботи, якщо ця сила перпендикулярна до напряму переміщення ($\alpha = \frac{\pi}{2}$). У цьому разі сила тільки змінює напрям вектора швидкості матеріальної точки. Зокрема таку дію чинить доцентрова сила на точку, яка рівномірно рухається по колу. Робота сили $\vec{F}$ додатна, якщо її проекція на напрям переміщення $F_r > 0$ ($\alpha < \frac{\pi}{2}$). Таку силу називають рушійною силою. Якщо проекція сили $\vec{F}$ на напрям переміщення $F_r < 0$ ($\alpha > \frac{\pi}{2}$), то робота такої сили від'ємна, і її називають силою опору (наприклад, сила тертя).

Одиниця роботи в СІ — джоуль (Дж). Один джоуль дорівнює роботі сталої сили в один ньютон на переміщенні в один метр за умови, що напрям сили збігається з напрямом переміщення $\left(1\ \text{Дж} = 1\ \text{Н}\cdot\text{м} = 1\ \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^2}\right)$.

Інтенсивність виконання роботи характеризують потужністю. Потужністю називається скалярна величина, яка дорівнює роботі, виконаній за одиницю часу:

$$P = \frac{dA}{dt} \text{ або } P = (\vec{F}\,\vec{v}) = Fv\cos\alpha, \tag{3.9}$$

де $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ — миттєва швидкість матеріальної точки, на яку діє сила $\vec{F}$.

Одиницею потужності в СІ є ват $\left(1\ \text{Вт} = 1\ \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = 1\ \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^3}\right)$.

§ 3.3. Кінетична енергія. Види механічних сил

Визначимо роботу рівнодійної $\vec{F}$ зовнішніх сил при переміщенні матеріальної точки масою m на скінченному шляху між точками *1* і *2* криволінійної траєкторії. Для цього треба обчислити криволінійний інтеграл (3.3). Підставимо в цю формулу $\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$ і $d\vec{r} = \vec{v}\,dt$, тоді

$$A_{12} = \int_L (\vec{v}\,d\vec{p}),$$

де $\vec{p} = m\vec{v}$ — імпульс матеріальної точки. Оскільки маса m у класичній механіці не залежить від швидкості, то $d\vec{p} = m d\vec{v}$. У цьому разі

$$A_{12} = m\int_L (\vec{v}\,d\vec{v}). \tag{3.10}$$

У загальному випадку вектори $\vec{v}$ і $d\vec{v}$ мають різні напрями, і модуль $|d\vec{v}|$ не дорівнює елементарній зміні довжини dv вектора $\vec{v}$, $|d\vec{v}| \neq dv$ (рис. 3.3). У цьому разі скалярний добуток $\vec{v}d\vec{v} = v\,|\,d\vec{v}\,|\cos\alpha = v dv$. Отже, вираз (3.10) матиме вигляд

$$A_{12} = m\int_{v_1}^{v_2} v dv.$$

Після інтегрування знаходимо роботу

$$A_{12} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}, \tag{3.11}$$

де v_1 і v_2 — швидкості матеріальної точки у початковому *1* і кінцевому *2* положеннях на траєкторії. Величина

$$W = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m} \tag{3.12}$$

називається *кінетичною енергією* матеріальної точки. З використанням цього поняття отриманий результат перепишемо у вигляді співвідношення

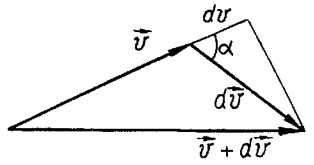


Рис. 3.3

$$A_{12} = W_2 - W_1, \tag{3.13}$$

з якого випливає т е о р е м а 1: *робота всіх зовнішніх сил, які діють на матеріальну точку, дорівнює приросту кінетичної енергії цієї точки.*

Згідно зі співвідношеннями (3.12) і (3.13) можна дати таке означення кінетичної енергії: кінетична енергія матеріальної точки є мірою її механічного руху, вона вимірюється роботою, яку може здійснити ця точка при її гальмуванні до повної зупинки. Якщо робота $A_{12} > 0$, то над матеріальною точкою виконують роботу зовнішні сили і її кінетична енергія збільшується. При $A_{12} < 0$ матеріальна точка віддає свою кінетичну енергію, здійснюючи роботу проти зовнішніх сил.

Кінетичною енергією системи N матеріальних точок називається сума кінетичних енергій всіх матеріальних точок, з яких складається ця система:

$$W = \sum_{i=1}^{N} W_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2}. \qquad (3.14)$$

Співвідношення (3.13) справджується і для системи матеріальних точок: записавши вираз (3.13) для кожної матеріальної точки і додавши ці вирази, отримаємо це саме співвідношення для системи. Звідси випливає т е о р е м а 2: *робота всіх зовнішніх сил, які діють на систему матеріальних точок, дорівнює приросту кінетичної енергії цієї системи.*

Приріст кінетичної енергії системи визначається роботою як зовнішніх, так і внутрішніх сил. Внутрішні сили не можуть змінити імпульсу всієї системи, але їхня робота не дорівнює нулю. Для спрощення розглянемо систему з двох матеріальних точок, які взаємодіють між собою з силами $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$. Нехай внаслідок взаємодії обидві точки переміщаються. Тоді кожна із сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ виконає додатну роботу. Сумарна робота цих внутрішніх сил взаємодії також буде додатною і приведе до приросту кінетичної енергії системи.

Кінетична енергія матеріальної точки залежить від вибору системи відліку, відносно якої розглядається рух точки (див. далі приклад 3.1). Робота сили в загальному випадку залежить від форми траєкторії руху матеріальної точки. Однак існують сили, на роботу яких не впливає форма траєкторії. У зв'язку з цим всі сили, які зустрічаються в механіці матеріальних точок, поділяють на консервативні і неконсервативні.

Консервативними називаються сили, робота яких не залежить від шляху переходу системи матеріальних точок від початкового положення до кінцевого, а визначається тільки координатами цих положень. До консервативних належать сила тяжіння, сила пружності і центральні сили (гравітаційні взаємодії матеріальних точок, кулонівські взаємодії точкових зарядів).

Обчислимо роботу при переміщенні матеріальної точки в полі центральних сил. Центральним силовим полем називають частину простору, в кожній точці якого діє сила $\vec{F}$, напрямлена вздовж радіуса-вектора $\vec{r}$, проведеного із силового центра O. За означенням елементарна робота $dA = F\,|d\vec{r}|\cos(\vec{F}, \widehat{d\vec{r}})$. У цьому виразі за припущенням центральна сила залежить тільки від відстані r до силового центра $F = F(r)$, а $|d\vec{r}|\cos(\vec{F}, d\vec{r}) = dr$ — проекція елементарного переміщення $d\vec{r}$ на напрям сили $\vec{F}$ (рис. 3.4). Тоді $dA = F(r)dr$ і робота сили при переміщенні матеріальної точки по довільній траєкторії із положення *1* у положення *2* виражається визначеним інтегралом

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} F(r)dr. \qquad (3.15)$$

Отже, робота A_{12} залежить тільки від відстаней r_1 і r_2 точок *1* і *2* до силового центра і не залежить від форми шляху, по якому матеріальна точка перейшла із початкового положення *1* до кінцевого *2*.

Із виразу (3.15) випливає, що робота консервативних сил по будь-якому замкненому шляху (початкове і кінцеве положення матеріальної точки збігаються) дорівнює нулю:

$$\oint (\vec{F}\, d\vec{r}) = 0. \qquad (3.16)$$

Цей результат, отриманий для двох матеріальних точок, узагальнюється на довільну систему матеріальних точок, між якими діють консервативні сили. Дійсно, положення системи визначається положеннями всіх матеріальних точок. У цьому разі положення системи називають конфігурацією. Робота консервативних сил не залежить від способу (або "шляху") переходу системи від початкової конфігурації до кінцевої — вона визначається тільки самими конфігураціями (взаємним розміщенням матеріальних точок у початковому і кінцевому положеннях).

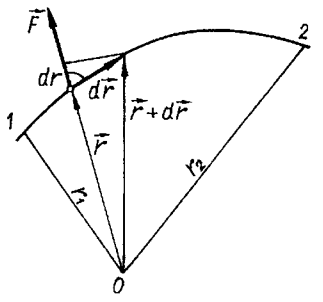


Рис. 3.4

Усі сили, які не є консервативними, називають *неконсервативними.* До неконсервативних належать, перш за все, дисипативні сили: сили тертя, що виникають при ковзанні одного тіла по поверхні іншого, і сили опору, які діють на тіло при русі в рідинах і газах. Ці сили залежать від форми тіл і їхніх відносних швидкостей. Робота сил тертя і сил опору при русі тіла взагалі від'ємна, оскільки ці сили завжди напрямлені проти швидкості тіла відносно поверхні, по якій воно ковзає, чи відносно середовища, в якому тіло рухається. В окремих випадках робота сил тертя і опору може бути додатною, коли поверхня або середовище самі рухаються. Тоді виникають так звані рушійні сили тертя чи опору.

Неконсервативними є також гіроскопічні сили, які залежать від швидкості матеріальної точки і діють завжди перпендикулярно до вектора швидкості. Робота цих сил дорівнює нулю при будь-якому переміщенні, але їх не можна вважати консервативними силами,

оскільки вони залежать не тільки від положення, а й від швидкості рухомої матеріальної точки. Прикладом гіроскопічної сили у фізиці є сила Лоренца, яка діє на заряджену рухому частинку в магнітному полі. У механіці гіроскопічними є сили Коріоліса, які вводяться при розгляді рухів у системах відліку, що обертаються відносно інерціальної системи.

Приклад 3.1. Знайти формулу перетворення кінетичної енергії при переході від однієї системи відліку до іншої.

Розв'язання. Нехай тіло масою m рухається відносно системи K зі швидкістю $\vec{v}$, а відносно іншої інерціальної системи K' — зі швидкістю $\vec{v}'$. Якщо система відліку K' рухається поступально відносно системи K зі швидкістю $\vec{v}_0$, то на підставі закону додавання швидкостей $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0$. Це рівняння піднесемо до квадрата, помножимо на $m/2$ і отримаємо

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv'^2}{2} + m\vec{v}'\vec{v}_0 + \frac{mv_0^2}{2},$$

або

$$W = W' + \frac{mv_0^2}{2} + m\vec{v}_1\vec{v}_0,$$

де скалярний добуток $\vec{v}'\vec{v}_0 = v'v_0 \cos\alpha$; α — кут між векторами $\vec{v}'$ і $\vec{v}_0$.

Приклад 3.2. Автомобіль починає рухатись рівноприскорено по горизонтальній дорозі і набуває швидкості v. Чи однакову роботу виконує двигун автомобіля при розгоні від початку руху до швидкості $v/2$ і від швидкості $v/2$ до v ?

Розв'язання. Вважатимемо, що робота, яку виконує двигун, йде тільки на збільшення кінетичної енергії автомобіля: $A = \Delta W$. На першій ділянці розгону двигун виконає роботу

$$A_1 = \Delta W_1 = \frac{m(v/2)^2}{2} - 0 = \frac{mv^2}{8}.$$

Робота двигуна на другій ділянці

$$A_2 = \Delta W_2 = \frac{mv^2}{2} - \frac{m(v/2)^2}{2} = 3\frac{mv^2}{8}.$$

Відношення робіт на вказаних ділянках розгону

$$A_1 : A_2 = 1:3,$$

тобто чим більша швидкість, тим більшу роботу повинен виконати двигун, щоб підтримувати прискорення руху сталим.

§ 3.4. Потенціальна енергія системи

Систему матеріальних точок можна характеризувати потенціальною енергією, якщо на неї діють тільки консервативні і гіроскопічні сили. *Потенціальна енергія* — це частина механічної енергії системи, яка визначається взаємними положеннями матеріальних точок (конфігурацією системи) і характером сил взаємодії між ними.

Розглянемо роботу при переміщенні матеріальної точки в полі консервативних сил між двома положеннями, заданими радіусами-векторами $\vec{r}_0$ і $\vec{r}$. Оскільки інтеграл від консервативної сили (3.15) залежить тільки від початкового та кінцевого положення точки у консервативному полі, то робота консервативної сили є функцією тільки $\vec{r}_0$ і $\vec{r}$: $A = A(\vec{r}_0, \vec{r})$. Очевидно, що сума робіт на двох послідовних ділянках траєкторії дорівнює роботі при переміщенні матеріальної точки від початку першої ділянки до кінця другої:

$$A(\vec{r}_0, \vec{r}) = A(\vec{r}_0, \vec{r}_1) + A(\vec{r}_1, \vec{r}),$$

де $\vec{r}_1$ — радіус-вектор довільної проміжної точки траєкторії. Сума робіт у правій частині рівності не залежатиме від положення в просторі проміжної точки $\vec{r}_1$ (від форми траєкторії) тільки в одному випадку, а саме тоді, коли функція $A(\vec{r}_0, \vec{r})$ матиме вигляд різниці значень у точках $\vec{r}_0$ і $\vec{r}$ однієї і тієї самої функції U, що залежить лише від положення матеріальної точки в просторі:

$$A(\vec{r}_0, \vec{r}) = U(\vec{r}_0) - U(\vec{r}).$$

Потенціальною енергією матеріальної точки в полі консервативних сил називається функція U, яка залежить тільки від положення точки; різниця її значень між початковим і кінцевим положеннями дорівнює роботі при переміщенні матеріальної точки між цими положеннями:

$$U_1 - U_2 = -\Delta U = A_{12}, \tag{3.17}$$

або

$$\Delta U = -\int_{r_1}^{r_2} F(r)dr. \tag{3.18}$$

Робота консервативної сили при переміщенні матеріальної точки дорівнює зменшенню потенціальної енергії точки.

Це положення узагальнюється для системи матеріальних точок, яка рухається у полі консервативних сил. Потенціальна енергія системи у цьому полі залежить тільки від положення координат матеріальних точок, з яких складається система, тобто визначається тільки її конфігурацією. При переході системи від початкового положення (конфігурація 1) до кінцевого (конфігурація 2) змінюються координати матеріальних точок системи і консервативні сили виконують роботу, що дорівнює зменшенню потенціальної енергії системи.

Силове поле має потенціальний характер, якщо силу можна виразити відповідним чином через потенціальну енергію як функцію про-

сторових координат і часу. Для стаціонарних полів, які не змінюються з часом, потенціальна енергія залежить тільки від просторових координат: $U = U(\vec{r}) = U(x, y, z)$. Покажемо, при якому зв'язку між силою і потенціальною енергією в даній точці поля силове поле буде вважатися потенціальним. Нехай у консервативному полі сила $\vec{F}$ при нескінченно малому переміщенні матеріальної точки виконує елементарну роботу

$$dA = -dU \text{ або } \vec{F}d\vec{r} = -dU, \tag{3.19}$$

де $U = U(x, y, z)$ — відома функція координат. Запишемо векторне рівняння (3.19) у проекціях на координатні осі:

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dU.$$

Звідси за властивістю повного диференціала dU маємо

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x};\ F_y = -\frac{\partial U}{\partial y};\ F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{3.20}$$

Отже, проекції консервативної сили на координатні осі дорівнюють частинним похідним від потенціальної енергії за відповідними координатами. Оскільки вектор сили

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k},$$

то консервативна сила пов'язана з потенціальною енергією співвідношенням

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right). \tag{3.21}$$

Вираз у дужках — вектор, який називається градієнтом скаляра U і позначається символами

$$\text{grad}U \equiv \nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}, \tag{3.22}$$

де grad = ∇ ("набла") — оператор Гамільтона або градієнт, дія якого на функцію U визначається за правилом (3.22). У цих позначеннях співвідношення (3.21) має вигляд

$$\vec{F} = -\text{ grad } U \equiv -\nabla U. \tag{3.23}$$

Консервативна сила дорівнює градієнту потенціальної енергії, взятому із знаком мінус. Мінус вказує на те, що сила в довільній точці поля завжди має такий напрям, в якому потенціальна енергія зменшується. У тих точках силового поля, де потенціальна енергія досягає

максимуму або мінімуму, сила дорівнює нулю, оскільки в цих точках сума частинних похідних (3.23) перетворюється в нуль.

Силове поле називають потенціальним, якщо його можна описати деякою функцією $U(x, y, z, t)$, яка залежить від координат і часу, такою, що її частинні похідні за координатами визначають проекції F_x, F_y, F_z сили $\vec{F}$ на декартові осі у відповідності з рівняннями (3.20).

Розглянемо найпростіший випадок, коли потенціальне поле однорідне і незмінне в часі, тобто в будь-якій точці поля сила $\vec{F}$ стала. Визначимо потенціальну енергію в довільній точці поля. Спрямуємо вісь OX у напрямі сили $\vec{F}$, тоді вираз (3.19) перетвориться на $\vec{F}d\vec{r} = Fdx$ і після інтегрування потенціальна енергія

$$U = -\int Fdx = -Fx + C, \tag{3.24}$$

де x — координата даної точки; C — довільна стала інтегрування. Потенціальна енергія визначається з точністю до довільної адитивної сталої C. Ця обставина має загальний характер, оскільки в усіх випадках неможливо відшукати процедуру визначення сталої C в даній точці поля. Неоднозначність потенціальної енергії усувають тим, що в деякій точці поля цю енергію приймають рівною нулю (вибирають довільно нульовий рівень відліку), а в інших точках її відраховують від нульового рівня. Іншими словами, практично визначають різницю потенціальних енергій у двох точках поля. Довільність вибору початку відліку потенціальної енергії не впливає на основні співвідношення механіки, тому що до них входять або різниця потенціальних енергій у двох положеннях системи, або похідна від потенціальної енергії за координатами.

На відміну від кінетичної енергії, потенціальна енергія може бути як додатною, так і від'ємною (кінетична енергія завжди додатна). Числове значення і знак потенціальної енергії залежать від вибору умовного нульового положення системи.

Повна механічна енергія системи складається з кінетичної та потенціальної енергій і дорівнює їхній сумі:

$$E = W + U. \tag{3.25}$$

Механічна енергія системи залежить від її стану, тобто визначається координатами, швидкостями і масами всіх матеріальних точок, з яких складається система.

Потенціальна енергія тіла в полі сил тяжіння поблизу поверхні Землі. Це силове поле однорідне, в кожній точці його на тіло масою m діє стала сила $\vec{F} = m\vec{g}$, напрямлена вниз по вертикалі до поверхні Землі, і потенціальна енергія системи тіло — Земля визначається за формулою (3.24). Потенціальну енергію тіла на поверхні Землі вва-

жатимемо рівною нулю і визначимо її на висоті h над поверхнею і на дні шахти завглибшки h'. Спрямуємо вісь OX у напрямі силового поля і сумістимо початок координат з поверхнею Землі (рис. 3.5). За прийнятою умовою $U = 0$ при $x = 0$. Із (3.24) знаходимо $C = 0$ і вираз потенціальної енергії в будь-якій точці поля:

$$U = -mgx.$$

Звідси при $x = -h$ визначаємо потенціальну енергію тіла над поверхнею Землі:

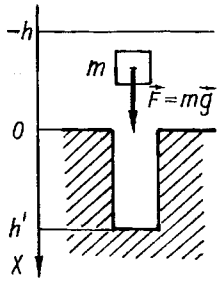


Рис. 3.5

$$U_h = mgh$$

і на дні шахти при $x = h'$:

$$U_h' = -mgh'.$$

Різниця потенціальних енергій у цих двох точках поля

$$U_h - U_h' = mg(h + h').$$

Цей результат можна отримати також як роботу сили тяжіння при переміщенні тіла з першої точки поля в другу, застосувавши співвідношення (3.18) без знака мінус:

$$U_h - U_h' = \int_{-h}^{h'} mgdx = mg(h' + h).$$

Потенціальна енергія пружно деформованого стержня. Потенціальну енергію може мати не тільки система тіл, що взаємодіють, а й окреме пружно деформоване тіло. Нехай стержень завдовжки l і площею поперечного перерізу S жорстко закріплений одним кінцем, а до другого кінця прикладено по нормалі до поперечного перерізу зовнішню силу $\vec{F}$, під дією якої стержень видовжується (або стискається). При цьому в об'ємі стержня виникають сили пружності, які протидіють зовнішній силі. Якщо зовнішня сила за величиною дорівнює результуючій силі пружності ($\vec{F} = -\vec{F}_{\text{пр}}$), то її робота перетворюється в потенціальну енергію деформованого стержня.

Вважатимемо, що потенціальна енергія недеформованого стержня дорівнює нулю. Спрямуємо вісь OX у напрямі зовнішньої сили $\vec{F}$ і сумістимо початок координат з кінцем недеформованого стержня (рис. 3.6). Згідно з (3.18) потенціальна енергія пружної деформації стержня

$$U = -\int_0^{\Delta l} F_{\text{пр}}dx = \int_0^{\Delta l} Fdx, \qquad (3.26)$$

де враховано, що при видовженні (абсолютній деформації) стержня в інтервалі $0 \le x \le \Delta l$ пружна сила $F_{\text{пр}} = -F(x)$. Визначимо зовнішню силу як функцію деформації x із узагальненого закону Гука: $\sigma = E\varepsilon$, де E — модуль пружності матеріалу; $\sigma = F/S$ — внутрішнє напруження в стержні; $\varepsilon = x/l$ — відносна деформація. При цих позначеннях із закону Гука маємо:

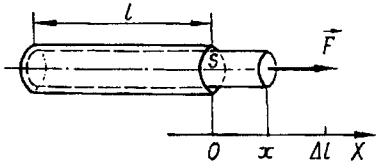


Рис. 3.6

$$F(x) = \frac{ES}{l}x.$$

Після підстановки значення $F(x)$ у (3.26) знаходимо

$$U = \frac{ES}{l}\int_0^{\Delta l} xdx = \frac{ES}{l}\frac{\Delta l^2}{2} = \frac{E}{2}\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 V,$$

де $V = Sl$ — об'єм стержня.

Отже, при відносній деформації $\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l}$ потенціальна енергія пружно деформованого стержня

$$U = \frac{E\varepsilon^2}{2}V. \qquad (3.27)$$

Робота, виконана зовнішньою силою при пружній деформації, накопичується в об'ємі стержня у вигляді потенціальної енергії. Густина енергії пружно деформованого тіла дорівнює потенціальній енергії в одиниці об'єму тіла:

$$w = \frac{U}{V} = \frac{E\varepsilon^2}{2}. \qquad (3.28)$$

§ 3.5. Закон збереження енергії в механіці. Дисипація енергії

Розглянемо систему, що складається із N матеріальних точок масами m_i, які рухаються відповідно з швидкостями $\vec{v}_i$, де $i = 1,2,...,N$. У загальному випадку на кожну матеріальну точку системи діють як внутрішні консервативні та неконсервативні сили, так і зовнішні консервативні та неконсервативні сили. Позначимо через $\vec{F}_i$ рівнодійну

всіх консервативних (внутрішніх і зовнішніх) сил, які діють на i-ту точку, а через $\vec{F}_i^*$ — рівнодійну всіх неконсервативних (внутрішніх і зовнішніх) сил. Запишемо рівняння другого закону Ньютона для i-ї матеріальної точки:

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_i + \vec{F}_i^*. \tag{3.29}$$

Під дією сил кожна із матеріальних точок за проміжок часу dt здійснює переміщення і змінює свою швидкість. Рівняння (3.29) помножимо скалярно на відповідне переміщення $d\vec{r}_i$:

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} d\vec{r}_i = \vec{F}_i d\vec{r}_i + \vec{F}_i^* d\vec{r}_i.$$

Записавши це рівняння для кожної з матеріальних точок і почленно додавши ці рівняння, отримаємо

$$\sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} d\vec{r}_i - \sum_i \vec{F}_i d\vec{r}_i = \sum_i \vec{F}_i^* d\vec{r}_i. \tag{3.30}$$

Перетворимо ліву частину цієї рівності. Враховуючи, що $d\vec{r}_i = \vec{v}_i dt$ і скалярний добуток колінеарних векторів $\vec{v}_i d\vec{v}_i = v_i dv_i$, знаходимо, що перша сума дорівнює зміні кінетичної енергії всієї системи за проміжок часу dt:

$$\sum_i m_i \frac{dv_i}{dt} d\vec{r}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i d\vec{v}_i = d\sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = d\sum_i W_i = dW.$$

Друга сума, як взята з оберненим знаком сумарна робота всіх діючих в системі консервативних сил за цей час, дорівнює зміні потенціальної енергії взаємодії матеріальних точок між собою і з зовнішнім полем консервативних сил:

$$-\sum_i \vec{F}_i d\vec{r}_i = dU.$$

Тоді $dW + dU = dE$ і рівняння (3.30) набуває вигляду

$$dE = \sum_i \vec{F}_i^* d\vec{r}_i. \tag{3.31}$$

Таким чином, зміна повної механічної енергії системи дорівнює сумарній роботі всіх діючих на матеріальні точки неконсервативних внутрішніх і зовнішніх сил.

Якщо система рухається в полі тільки консервативних сил, то $\sum_i \vec{F}_i^* d\vec{r}_i = 0$ і з виразу (3.31) випливає, що $dE = 0$, або

$$E = W + U = \text{const}. \tag{3.32}$$

Повна механічна енергія системи, на яку діють тільки консервативні (і гіроскопічні) сили, зберігається, тобто не змінюється з часом.

Це положення називається *законом збереження механічної енергії.* У консервативній системі потенціальна і кінетична енергії можуть перетворюватись одна в одну, але в будь-який момент часу їхня сума залишається сталою.

Нехай, наприклад, консервативна система складається із одного тіла масою m, яке вільно падає в зовнішньому полі тяжіння і в деякий момент часу має швидкість v відносно Землі, перебуваючи на висоті h над її поверхнею. У цей момент механічна енергія тіла

$$E = \frac{mv^2}{2} + mgh.$$

До початку падіння з висоти $H > h$ кінетична енергія нерухомого тіла дорівнює нулю і його механічна енергія дорівнює потенціальній енергії mgH. У кінці падіння тіло матиме швидкість $v = \sqrt{2gH}$ і максимальну кінетичну енергію, що дорівнює початковій потенціальній енергії

$$W = \frac{mv^2}{2} = mgH,$$

але його потенціальна енергія на поверхні Землі дорівнюватиме нулю. Навпаки, якщо тіло кинути з поверхні Землі вертикально вгору, то воно матиме початкову кінетичну енергію $mv^2/2$ і потенціальну енергію, що дорівнює нулю. Поступово втрачаючи швидкість, тіло підніметься на висоту $H = v^2/(2g)$ і його кінетична енергія дорівнюватиме нулю, але потенціальна енергія дорівнюватиме початковому запасові кінетичної енергії.

Повернемось до системи, на матеріальні точки якої, крім консервативних сил, діють внутрішні і зовнішні дисипативні сили. У цьому разі, як випливає з рівняння (3.31), змінюється механічна енергія системи: зміна механічної енергії за елементарний проміжок часу дорівнює сумарній роботі, виконаній за цей час всіма дисипативними силами. Оскільки робота дисипативних сил взагалі від'ємна, то зміна повної енергії $dE < 0$, тобто механічна енергія дисипативної системи зменшується. Зменшення механічної енергії системи в процесі руху називається дисипацією (розсіянням) енергії. Дисипація енергії зумовлена перетворенням механічної енергії в роботу проти дисипативних

сил у системі. Іншими словами, механічна енергія витрачається на роботу проти сил тертя і опору. При цьому тіла системи нагріваються і збільшується середня кінетична енергія теплового руху молекул, з яких складаються тіла. Отже, енергія не зникає — відбувається перетворення механічної енергії у внутрішню енергію системи. При наявності в системі неконсервативних (дисипативних) сил механічний рух набуває іншої форми руху. Всі системи в природі певною мірою дисипативні.

У наступних частинах курсу фізики ми розглянемо перетворення енергії в інші форми і переконаємось, що енергія зберігається завжди, незалежно від того, в якій формі ми її спостерігаємо. Збереження енергії — фундаментальний закон природи, обгрунтований численними дослідами. Його відкрили незалежно один від одного німецькі вчені Ю. Майєр (1814 — 1878), Г. Гельмгольц (1821 — 1894) і англійський фізик Д. Джоуль (1818 — 1889).

Збереження енергії пов'язане з однорідністю часу, тобто з інваріантністю фізичних законів відносно зміни початку відліку часу. Наприклад, при вільному падінні тіла зміна кінетичної і потенціальної енергій, а також швидкість падіння та пройдений шлях залежать тільки від початкової швидкості і проміжку часу падіння, але не залежать від вибору початкового моменту відліку часу.

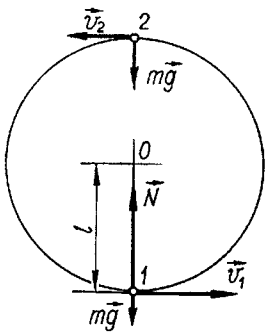


Рис. 3.7

Приклад 3.3. Нідерландський вчений Х. Гюйгенс (1629 — 1695) стверджував, що коли куля на невагомій і нерозтяжній нитці обертається у вертикальній площині, то нитка повинна витримувати силу, хоч би в шість разів більшу від сили тяжіння кулі. Довести це твердження.

Розв'язання: У системі тіл куля — Земля діє тільки внутрішня консервативна сила тяжіння. Зовнішня сила натягу нитки $\vec{N}$ перпендикулярна до вектора швидкості $\vec{v}$ кулі і її робота дорівнює нулю. Тому до даної системи тіл можна застосувати закон збереження енергії. Позначимо швидкість кулі у нижній і верхній точках траєкторії через v_1 і v_2, а за нульовий рівень відліку потенціальної енергії взаємодії тіл візьмемо нижнє положення кулі. Тоді

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} + mg2l,$$

де l — довжина нитки. Звідси маємо

$$v_1^2 = v_2^2 + 4gl. \qquad (1)$$

На рис. 3.7 зображені сили, що надають кулі доцентрового прискорення при проходженні нижньої *1* і верхньої *2* точок траєкторії. За другим законом Ньютона для точки *1*:

$$N - mg = \frac{mv_1^2}{l}, \text{ або } N = m(g + \frac{v_1^2}{l}); \qquad (2)$$

для точки *2*:

$$mg = \frac{mv_2^2}{l}, \text{ або } v_2^2 = gl, \qquad (3)$$

де враховано, що для проходження кулею верхньої точки при мінімальній швидкості v_2 доцентрове прискорення створюється тільки її силою тяжіння. Розв'язуючи систему рівнянь (1) — (3), отримаємо

$$v_1^2 = 5gl;$$

$$N = m(g + \frac{5gl}{l}) = 6mg.$$

§ 3.6. Межі руху і умови рівноваги частинки в потенціальному полі

Закон збереження механічної енергії накладає певні обмеження на рух частинок у консервативній системі і визначає умови її рівноваги. У цій системі повна механічна енергія залишається сталою. Оскільки вона дорівнює сумі кінетичної і потенціальної енергій, а кінетична енергія не може бути від'ємною, то з виразу (3.32) випливає, що

$$U \le E, \qquad (3.33)$$

де знак рівності відповідає умові $W = 0$. Якщо тіла системи нерухомі і її потенціальна енергія мінімальна (не може перетворитись у кінетичну), то при такій конфігурації система перебуватиме у рівновазі, тобто тіла системи не можуть прийти в рух без впливу зовнішніх сил.

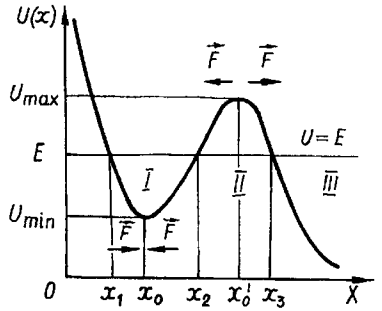


Рис. 3.8

Розглянемо характерний приклад одномірного руху частинки в потенціальному полі, коли її потенціальна енергія є функцією лише однієї координати x і залежність $U(x)$ має вигляд кривої (рис. 3.8), яку називають потенціальною кривою. Нерівність (3.33) означає, що частинка під час руху може перебувати тільки в тих місцях силового поля, де потенціальна енергія не перевищує повної енергії. Нехай при заданій енергії E частинки пряма $U = E$, проведена паралельно осі OX, перетинає потенціальну криву в трьох точках, абсциси яких x_1, x_2, x_3.

Із (3.33) випливає, що частинка з енергією E може перебувати тільки в дозволених областях потенціального поля, розміщених між

точками x_1, x_2 і праворуч від точки x_3, а в області між точками x_2, x_3 і ліворуч від точки x_1 вона потрапити не може. Якщо частинка рухається в області *I*, то згідно з рівністю (3.23) на неї з боку поля діє сила $F = -\frac{dU}{dx}$. Ця сила завжди напрямлена до положення x_0, що відповідає мінімуму потенціальної енергії, оскільки вона за напрямом протилежна вектору grad U. З умови $U = E$ випливає, що в точці x_1 кінетична енергія і швидкість частинки дорівнюють нулю. З цього положення частинка під дією сили, напрямленої праворуч, починає рухатися прискорено і в точці x_0 її швидкість і кінетична енергія досягають максимальних значень. Продовжуючи рухатися між точками x_0 і x_2 під дією сили, напрямленої ліворуч, частинка сповільнює рух і в точці x_2 зупиняється. Далі рух частинки відбувається у зворотному напрямі і повторюватиметься періодично між точками x_1 і x_2. У такому випадку прийнято говорити, що частинка перебуває в потенціальній ямі. У даному прикладі глибина потенціальної ями дорівнює $E - U_{\min}$, а її ширина $x_2 - x_1$.

Припустимо, що внаслідок зовнішньої причини частинка зупинилася в точці x_0, маючи мінімальну потенціальну енергію. З боку поля на неї не діє сила, тому що в точці x_0 потенціальної кривої похідна від U по x дорівнює нулю, і частинка перебуває у рівновазі. Якщо частинку відхилити від стану рівноваги, то сили поля повернуть її в попереднє положення. Отже, в точці мінімуму потенціальної енергії нерухома частинка перебуває в стані стійкої рівноваги.

У дозволеній області *III*, де при $x > x_3$ потенціальна крива асимптотично наближається до нуля, рух частинки має інший характер порівняно з коливальним рухом у потенціальній ямі *I*. Очевидно, що в точці x_3 швидкість частинки дорівнює нулю. Під дією сили, напрямленої праворуч, частинка рухатиметься прискорено і може віддалитися у нескінченність, де потенціальна енергія перетвориться в еквівалентну кінетичну енергію і швидкість досягне значення $v_\infty = \sqrt{2mE}$. І, навпаки, якщо при даній швидкості частинка почне рухатися із нескінченності до точки x_3, то її швидкість поступово зменшуватиметься і в точці x_3 буде дорівнювати нулю. Звідси під дією сил поля частинка змушена повернути назад і рухатися знову у нескінченність. Вона не зможе проникнути в область *I*, як і не могла вийти з потенціальної ями, тому що цьому заважає заборонена область *II*, яка лежить між точками x_2 і x_3. Цю заборонену область називають потенціальним бар'єром. Як видно з рис. 3.8, висота потенціального бар'єра $U_{\max} - E$ і його ширина $x_3 - x_2$ з ростом енергії E частинки зменшуються. При $E \geq U_{\max}$ потенціальний бар'єр зникає. Разом з цим рух частинки втрачає коливальний характер.

У точці x'_0 локального максимуму потенціальної кривої похідна $\frac{dU}{dx} = 0$ і на частинку не діє сила з боку поля — нерухома частинка перебуває в стані рівноваги. Однак ця рівновага нестійка: при незначному зміщенні частинки сили поля намагаються віддалити її від положення рівноваги.

Таким чином, за виглядом потенціальної кривої і енергією частинки можна встановити характер руху і положення рівноваги частинки або тіла в потенціальному полі.

§ 3.7. Абсолютно пружний і абсолютно непружний удари

Ударом тіл називають сукупність явищ, що виникають при короткочасній взаємодії їх внаслідок зіткнення. При ударах виникають досить великі сили, а тому дією інших сил, що постійно діють, можна нехтувати. Це дає можливість систему тіл, які зазнають зіткнення, вважати замкненою і застосовувати закон збереження імпульсу.

Фізичні явища, якими супроводжується удар тіл, досить складні. Тіла при зіткненні деформуються, виникають пружні сили і сили тертя, у тілах виникають коливання і хвилі тощо.

Процес удару тіл поділяють на два періоди. У першому під час зіткнення тіл відбувається деформація їх. Внаслідок цього виникають сили, які гальмують рух тіл, а їхня кінетична енергія перетворюється в потенціальну енергію деформації. У другому періоді процес відбувається в зворотному напрямі — потенціальна енергія перетворюється в кінетичну. У реальних умовах при зіткненнях тіл завжди відбувається перетворення механічного руху в інші форми руху матерії, перехід механічної енергії в теплову. Процеси, що відбуваються при ударах, залежать від природи тіл, їхніх розмірів та форми, швидкостей руху тощо. Удари поділяються на абсолютно *пружні* і абсолютно *непружні*.

Абсолютно пружним називають такий удар, після якого в тілах, що зазнали зіткнення, не залишається жодних деформацій, а механічна енергія до і після зіткнення не змінилась. Абсолютно непружним називають такий удар, після якого деформації, зумовлені зіткненням тіл, повністю зберігаються, а тіла рухаються як одне ціле.

Близькими до абсолютно пружного є зіткнення стальних кульок, кульок із слонової кістки тощо. Прикладом абсолютно непружного удару є зіткнення пластилінових кульок, захоплення вільного електрона позитивно зарядженим іоном та ін.

Спільну нормаль до поверхонь тіл у точці їхнього дотикання при ударі називають лінією удару (штрихова лінія на рис. 3.9). Удар називають центральним тоді, коли лінія удару проходить через центри мас тіл (рис. 3.10), а напрями швидкостей тіл до зіткнення збігаються з лінією удару.

Удар відбувається за досить малі проміжки часу — за соті, тисячні і навіть мільйонні частки секунди. Внаслідок цього при ударах можуть розвиватися досить великі потужності. Так, при ударі молота масою 2 т, піднятого на висоту 2 м, і часі удару 0,001 с середня потужність удару

$$P = \frac{mgh}{t} = 3{,}92 \cdot 10^7 \text{ Вт}.$$

Явище удару широко застосовується в техніці при штампуванні, куванні та подрібненні матеріалів.

Розглянемо абсолютно пружний центральний удар двох куль масами m_1 і m_2, внаслідок якого вся кінетична енергія куль до удару перетворюється знову в їхню кінетичну енергію після удару. Позначимо

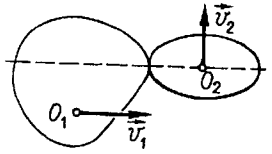


Рис. 3.9

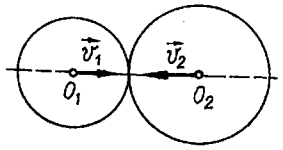


Рис. 3.10

швидкості куль до удару відповідно через $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$, після удару — через $\vec{u}_1$ і $\vec{u}_2$. Для визначення напряму векторів швидкостей вісь OX спрямуємо вздовж вектора швидкості $\vec{v}_1$ першої кулі до зіткнення. Оскільки удар центральний, то розглядатимемо проекції векторів на вісь OX.

У замкненій системі двох куль виконуються закони збереження імпульсу і кінетичної енергії:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2;$$

$$\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2},$$

або після перетворення:

$$m_1(v_1 - u_1) = m_2(u_2 - v_2);$$

$$m_1(v_1^2 - u_1^2) = m_2(u_2^2 - v_2^2).$$

Розв'язавши ці рівняння, знаходимо швидкості куль після пружного удару

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}; \qquad (3.34)$$

$$u_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}, \qquad (3.35)$$

де знаки швидкостей враховуються у відповідності з прийнятою вище домовленістю.

Проаналізуємо отриманий результат на окремих прикладах.

1. Маси куль однакові. При $m_1 = m_2$ вирази (3.34) і (3.35) матимуть вигляд $u_1 = v_2$, $u_2 = v_1$ — кулі рівних мас обмінюються швидкостями.

2. Друга куля нерухома. При $v_2 = 0$

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1; \qquad u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1. \qquad (3.36)$$

Для різних співвідношень між масами куль із (3.36) випливає:

а) при $m_1 = m_2$ перша куля зупиняється ($u_1 = 0$), а друга почне рухатися зі швидкістю першої кулі у тому самому напрямі ($u_2 = v_1$);

б) при $m_1 > m_2$ перша куля продовжує рухатися у тому самому напрямі, але з меншою швидкістю ($u_1 < v_1$), а друга куля після удару набуває швидкості $u_2 > v_1$;

в) якщо $m_1 < m_2$, то перша куля відскакує назад, а друга рухається в напрямі першої кулі до зіткнення, але з меншою швидкістю;

г) якщо $m_1 \ll m_2$ (наприклад, зіткнення зі стінкою), то $u_1 = -v_1$ — перша куля відскакує назад з тією самою швидкістю, а друга — залишається нерухомою ($u_2 \approx 0$).

Розглянемо абсолютно непружний удар, при якому обидві кулі (виготовлені, наприклад, із свинцю, пластиліну, глини і т. п.) деформуються і рухаються як одне ціле зі швидкістю $\vec{u}$. У цій системі тіл виконується закон збереження імпульсу, який для центрального удару запишемо скалярним рівнянням

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)u,$$

звідки

$$u = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}. \qquad (3.37)$$

Внаслідок непружної деформації куль при ударі їхня кінетична енергія перетворюється у внутрішню. Цю втрату механічної енергії

можна визначити як роботу, виконану внутрішніми неконсервативними силами при непружній деформації куль: $A = -\Delta W = W_1 - W_2$, тобто

$$A = \left(\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}\right) - \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2},$$

або з врахуванням (3.37)

$$A = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1 - v_2)^2. \qquad (3.38)$$

Якщо друга куля до удару нерухома ($v_2 = 0$), то рівняння (3.38) спрощується до вигляду

$$A = \frac{m_1 v_1^2}{2} \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2} = W\frac{m_2}{m_1 + m_2}. \qquad (3.39)$$

Із виразу (3.39) випливають важливі практичні висновки.

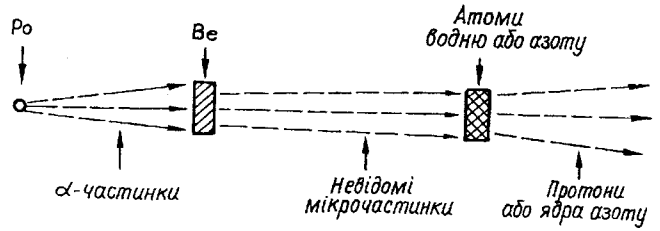


Рис. 3.11

1. При використанні удару для зміни форми нерухомого тіла (наприклад, кування металу, дроблення крихких тіл) необхідно якомога більшу частину кінетичної енергії рухомого тіла перетворити у роботу деформації. Для цього треба збільшити масу m_2 нерухомого тіла (наприклад, ковадла).

2. Якщо удар застосовується для переміщення нерухомого тіла з метою подолання опору (забивання цвяхів, вбивання паль у землю, клинів і т.п.), то бажано зменшити роботу деформації і максимально зберегти кінетичну енергію обох тіл після удару. Цього можна досягнути, зменшивши масу нерухомого тіла (наприклад, цвяха) і збільшивши масу ударяючого тіла (наприклад, молотка).

Приклад 3.4. Англійський вчений Д. Чедвік (1891 — 1974) у 1932 р. відкрив нейтрон — одну із елементарних частинок, з яких побудовані ядра атомів, використавши закони збереження механічної енергії та імпульсу в системі мікрочастинок.

Розв'язання. На рис. 3.11 зображено схему установки, застосованої в одному із дослідів Чедвіка. Під час бомбардування берилію α-частинками, які випромінює

полоній, було виявлено появу невідомих мікрочастинок. Ці частинки в свою чергу бомбардували атоми водню або азоту, що перебували в стані спокою. Внаслідок цього ядра водню (протони) або азоту отримували прискорення, і Чедвік виміряв швидкості цих частинок.

Було зроблено припущення, що між невидимими частинками і атомами водню чи азоту відбуваються абсолютно пружні зіткнення. Нехай маса невідомої частинки m, а її швидкість v. Якщо m_p і u_p — маса і швидкість протона, то згідно з формулою (3.36)

$$u_p = \frac{2m}{m + m_p} v.$$

Якщо m_N і u_N — маса і швидкість ядра азоту, то

$$u_N = \frac{2m}{m + m_N} v.$$

Оскільки маса атома азоту дорівнює 14 атомним одиницям маси, а маса протона — одній одиниці, то $m_N = 14m_p$ і, поділивши перше рівняння на друге, маємо

$$\frac{u_p}{u_N} = \frac{m + 14m_p}{m + m_p}.$$

Д. Чедвік у своїх дослідах виміряв u_p та u_N і отримав їх відношення, що дорівнювало 7,5. Отже,

$$\frac{m + 14m_p}{m + m_p} \approx 7{,}5, \text{ або } m \approx 1{,}00m_p.$$

Замість водню і азоту Чедвік провів досліди з іншими речовинами і знову виявив частинки з масою, що приблизно дорівнювала масі протона. В одному з дослідів масу частинки вдалося виміряти з точністю до 1 %. Так був відкритий нейтрон.

Приклад 3.5. У тіло масою 1,5 кг, яке перебуває на вершині півсфери, радіус якої 60 см, потрапляє і залишається в ньому куля масою 10 г, що летіла горизонтально. Тіло почало рухатися без тертя і відірвалося від сферичної поверхні на висоті 50 см від її основи. Визначити швидкість кулі.

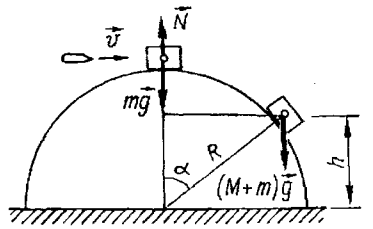


Рис. 3.12

Розв'язання. Система "тіло масою M — куля масою m" незамкнена, але в момент удару кулі проекція зовнішніх сил тяжіння нормальної реакції $\vec{N}$ на горизонтальний напрям дорівнюють нулю. За законом збереження проекції імпульсу на горизонтальний напрям при непружному ударі

$$m\vec{v} = (M + m)\vec{v}_0, \text{ або } v = (\frac{M}{m} + 1)v_0, \qquad (1)$$

де $\vec{v}_0$ — горизонтальна швидкість системи після удару.

По сферичній поверхні система рухається під дією консервативних сил тяжіння і нормальної реакції (рис. 3.12). Якщо v_1 — швидкість системи в точці відриву від поверхні, то за законом збереження механічної енергії

$$\frac{(M+m)v_0^2}{2} + (M+m)gR = \frac{(M+m)v_1^2}{2} + (m+M)gh,$$

або

$$v_0^2 = v_1^2 + 2g(h-R). \qquad (2)$$

У точці відриву сила реакції $N = 0$ і доцентрове прискорення системи створюється нормальною складовою сили тяжіння $(M+m)g\cos\alpha$, де $\cos\alpha = h/R$:

$$\frac{v_1^2}{R} = \frac{gh}{R}, \text{ або } v_1^2 = gh. \qquad (3)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (1) — (3), знаходимо

$$v = \left(\frac{M}{m}+1\right)\sqrt{g(3h-2R)};\ v = 259 \text{ м/с}.$$

Розділ 4. Механіка твердого тіла

§ 4.1. Рух абсолютно твердого тіла

При вирішенні питань технічної механіки доводиться мати справу з тілами, розмірами яких не можна нехтувати. Такими, наприклад, є задачі про рух окремих деталей у різноманітних вузлах машин, верстатів і механізмів. Для описання рухів таких тіл у механіці використовується модель абсолютно твердого тіла (див. § 1.2).

Грунтуючись на цій моделі, тверде тіло розглядають як систему великого числа відокремлених у просторі одна від одної матеріальних точок (частинок), відстані між якими у процесі руху не змінюються. Такий підхід передбачає переривчасту (дискретну) структуру твердого тіла. При цьому положення центра мас твердого тіла визначається сумою (формула 2.32), яка враховує місця зосередження точкових мас складових частинок. Для практичних обчислень зручніше тверді тіла розглядати як суцільні середовища, в яких розподіл маси речовини можна вважати безперервним. У суцільному тілі маса дискретної частинки — це елементарна маса dm, зосереджена в нескінченно малому об'ємі dV тіла, тобто $dm = \rho dV$, де ρ — густина.

Якщо тіло неоднорідне, то ρ залежить від координат точки тіла. При визначенні положення центра мас суцільних тіл роль суми відіграє інтеграл по обєму тіла:

$$\vec{R}_c = \frac{\int \rho \vec{r} dV}{m}, \qquad (4.1)$$

де $\vec{R}_c$ і $\vec{r}$ — радіуси-вектори центра мас і точок тіла; m — маса тіла. Оскільки координати вектора $\vec{R}_c = \{x_c, y_c, z_c\}$, то координати центра мас суцільного тіла

$$x_c = \frac{\int \rho x dV}{m};\ y_c = \frac{\int \rho y dV}{m};\ z_c = \frac{\int \rho z dV}{m}. \qquad (4.2)$$

При такій ідеалізації твердого тіла відстань між частинками абсолютно твердого тіла залишатиметься незмінною при будь-яких переміщеннях. Незмінність цієї відстані забезпечується внутрішніми силами взаємодії між частинками абсолютно твердого тіла. Звідси випливає, що робота внутрішніх сил, які діють в абсолютно твердому тілі, дорівнює нулю при будь-яких рухах тіла. Тому в подальшому розгляді рухів абсолютно твердого тіла не будемо брати до уваги внутрішніх сил, які діють всередині тіла.

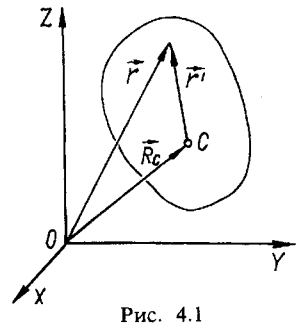


Рис. 4.1

Будь-який рух абсолютно твердого тіла можна звести до двох найпростіших видів руху: поступального руху його центра мас і обертального руху тіла навколо центра мас. Для цього радіус-вектор $\vec{r}$ довільної точки тіла запишемо у вигляді суми

$$\vec{r} = \vec{R}_c + \vec{r'}, \qquad (4.3)$$

де $\vec{r'}$ — вектор, що визначає положення точки відносно центра мас C (рис. 4.1). В абсолютно твердому тілі модуль $r' = \text{const}$, тому вектор $\vec{r'}$ може тільки обертатися. Щоб знайти швидкість руху даної точки $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, продиференціюємо рівняння (4.3) за часом:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{R}_c}{dt} + \frac{d\vec{r'}}{dt} = \vec{v}_c + \vec{v'}$$

або з врахуванням виразу (1.26) для лінійної швидкості:

$$\vec{v} = \vec{v}_c + [\vec{\omega}\,\vec{r'}\,], \qquad (4.4)$$

де $\vec{v}_c$ — швидкість центра мас тіла; $\vec{\omega}$ — кутова швидкість.

Формула (4.4) виражає загальне правило: довільний рух твердого тіла складається з поступального руху тіла як цілого зі швидкістю центра мас $\vec{v}_c$ і обертання його з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$. При цьому кутова швидкість є абсолютною характеристикою обертальної складо-

вої руху в тому розумінні, що вектор $\vec{\omega}$ не залежить від вибору центра обертання: при довільному виборі точки, через яку проходить вісь обертання, залишаються однаковими напрям осі обертання і кутова швидкість. Отже, можна говорити про кутову швидкість обертання абсолютно твердого тіла, не вказуючи при цьому, через яку саме його точку проходить вісь обертання. Швидкість поступальної складової руху такого "абсолютного" характеру не має.

Кожен із векторів $\vec{v}_c$ і $\vec{\omega}$ задається значеннями своїх трьох компонент (проекцій на координатні осі):

$$\vec{v}_c = \{v_x^c, v_y^c, v_z^c\}; \quad \vec{\omega} = \{\omega_x, \omega_y, \omega_z\}.$$

Тому для визначення швидкості довільної точки твердого тіла потрібно задати шість незалежних величин. На цій підставі вважають, що тверде тіло — це механічна система, яка має шість ступенів вільності. Отже, рівняння руху твердого тіла в загальному випадку повинні визначати, як відбуваються зміни швидкостей $\vec{v}_c$ і $\vec{\omega}$, тобто зміни шести величин. Для цього потрібні два незалежні векторні рівняння або шість незалежних рівнянь у скалярній формі. При обмеженнях свободи руху тіла число незалежних рівнянь зменшується.

Хоча центр обертання твердого тіла можна обирати довільно, вибір його в центрі мас має перевагу в тому, що переміщення центра мас є поступальним рухом тіла як єдиного цілого. Векторне рівняння цього руху відоме як рівняння (2.35):

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \tag{4.5}$$

де тепер треба розуміти під $\vec{p}$ імпульс тіла, а під $\vec{F}$ суму всіх зовнішніх сил, прикладених до нього. Другим векторним рівнянням є рівняння моментів (2.52)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \tag{4.6}$$

взяте відносно центра мас або довільної точки твердого тіла.

На тіло можуть діяти кілька сил, прикладених до різних його частинок. До рівнянь (4.5) і (4.6) входять результуючі тільки зовнішніх сил та їх моментів відносно центра обертання:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i; \qquad \vec{M} = \sum_i \vec{M}_i. \tag{4.7}$$

Сила, що діє на тверде тіло, задається не тільки модулем і напрямом, а й точкою прикладання, заданою радіусом-вектором частинки тіла, на яку діє дана сила. Точку прикладання сили можна довільно

переносити вздовж лінії, по якій вона діє. При цьому не змінюються ні результуюча зовнішніх сил, ні їхній результуючий момент, тобто рівняння руху (4.5) і (4.6) не зазнають змін.

Із виразу (4.5) випливає, що рівняння поступального руху твердого тіла має вигляд рівняння руху матеріальної точки, маса якої дорівнює масі твердого тіла під дією результуючої сили $\vec{F}$. Тому специфічні особливості руху твердого тіла пов'язані тільки з обертаннями і випливають з рівняння (4.6).

Розглянемо обертання твердого тіла навколо нерухомого центра мас і визначимо його момент імпульсу відносно центра обертання. Момент імпульсу відносно центра мас називають власним моментом імпульсу тіла. Початок декартової системи координат помістимо в центри мас і позначимо радіуси-вектори частинок через $\vec{r}_i = \{x_i, y_i, z_i\}$, а їхні маси через m_i. Якщо тіло обертається з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$, то лінійні швидкості частинок $\vec{v}_i = [\vec{\omega}\vec{r}_i]$. Тоді власний момент імпульсу твердого тіла як системи жорстко зв'язаних частинок

$$\vec{L}^c = \sum_i [\vec{r}_i \vec{p}_i] = \sum_i m_i [\vec{r}_i \vec{v}_i] = \sum_i m_i [\vec{r}_i [\vec{\omega}\vec{r}_i]], \tag{4.8}$$

де напрям вектора $\vec{\omega}$ вказує орієнтацію осі обертання, яка проходить через центр мас. Використовуючи властивість подвійного векторного добутку $[\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$, перепишемо вираз (4.8) дещо в іншому вигляді:

$$\vec{L}^c = \sum_i m_i r_i^2 \vec{\omega} - \sum_i m_i \vec{r}_i (\vec{\omega}\vec{r}_i). \tag{4.9}$$

У загальному випадку вектори $\vec{L}^c$ і $\vec{\omega}$ напрямлені під кутом один до одного, оскільки останній доданок у (4.9) не перетворюється в нуль за будь-яких умов. Отже, момент імпульсу тіла відносно центра мас залежить не тільки від кутової швидкості обертання тіла, а й від миттєвої орієнтації в просторі осі обертання. Для підтвердження цього положення розкриємо вирази для компонент вектора $\vec{L}^c = i\vec{L}_x^c + j\vec{L}_y^c + k\vec{L}_z^c$, де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — орти координатних осей. Якщо врахувати, що величина $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$ при обертанні тіла не змінюється і скалярний добуток $(\vec{\omega}\vec{r}_i) = \omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i$, то із (4.9) отримаємо

$$\begin{aligned} L_x^c &= I_{xx}^c \omega_x + I_{xy}^c \omega_y + I_{xz}^c \omega_z; \\ L_y^c &= I_{yx}^c \omega_x + I_{yy}^c \omega_y + I_{yz}^c \omega_z; \\ L_z^c &= L_{zx}^c \omega_x + I_{zy}^c \omega_y + I_{zz}^c \omega_z, \end{aligned} \tag{4.10}$$

де

$$I^c_{xx} = \sum_i m_i(r_i^2 - x_i^2);\ I^c_{xy} = -\sum_i m_i x_i y_i;\ I^c_{xz} = -\sum_i m_i x_i z_i;$$

$$I^c_{yx} = I^c_{xy};\ I^c_{yy} = \sum_i m_i(r_i^2 - y_i^2);\ I^c_{yz} = -\sum_i m_i y_i z_i; \qquad (4.11)$$

$$I^c_{zy} = I^c_{yz};\ I^c_{zx} = I^c_{xz};\ I^c_{zz} = \sum_i m_i(r_i^2 - z_i^2).$$

Величини (4.11) називаються моментами інерції тіла відносно центра мас (на що вказують верхні індекси C). Моменти інерції залежать від розподілу маси тіла відносно центра обертання і в загальному випадку змінюються при зміні орієнтації тіла відносно координатних осей. Тому в процесі обертання тіла навколо центра мас вектори $\vec{L}^c$ і $\vec{\omega}$ неколінеарні.

Для твердого тіла при обчисленні моментів інерції у формулах (4.11) суми заміняються інтегралами по об'єму тіла, наприклад,

$$I^c_{xx} = \int (r^2 - x^2)\rho dV. \qquad (4.12)$$

Моменти інерції тіла відносно центра мас або іншого центра обертання є важливими динамічними характеристиками обертального руху тіла.

Рівняння руху твердого тіла (4.6) еквівалентне трьом скалярним рівнянням у проекціях на координатні осі:

$$\frac{dL_x}{dt} = M^c_x;\quad \frac{dL_y}{dt} = M^c_y;\quad \frac{dL_x}{dt} = M^c_z, \qquad (4.13)$$

де M^c_x, M^c_y, M^c_z — проекції сумарного моменту $\vec{M}^c$ усіх прикладених до тіла сил, визначеного відносно центра інерції.

Співвідношення (4.13) з урахуванням змінних величин (4.10) і (4.11) утворюють систему складних диференціальних рівнянь, які свідчать про те, що обертання твердих тіл у загальному випадку не належать до простих рухів. Навіть при відсутності зовнішніх сил ($\vec{M}^c = 0$, $\vec{L} = \text{const}$) вісь обертання вільного тіла змінює свою орієнтацію в просторі, при цьому може змінюватись також частота обертання.

Однак у більшості випадків обертання твердих тіл має простий характер. Далі ми розглянемо ці випадки.

§ 4.2. Момент інерції. Теорема Гюйгенса—Штейнера

До простих обертальних рухів належать обертання твердих тіл навколо закріплених осей. Закріпленими називають осі обертання, розміщення яких відносно частинок тіла не змінюється в процесі обертання. Такі рухи здійснюють деталі різних механізмів, конструкція яких передбачає цілком певне розміщення осей обертання окремих вузлів.

У таких випадках суттєво спрощується рівняння обертального руху твердого тіла. У попередньому параграфі встановлено, що в системі координат, початок якої суміщений з центром мас, власний момент імпульсу тіла пов'язаний з компонентами кутової швидкості за допомогою дев'яти моментів інерції (4.11). Можна перейти до такої системи координат, в якій відрізнятимуться від нуля лише три діагональні моменти інерції

$$I^c_{xx} = I_x,\ I^c_{yy} = I_y,\ I^c_{zz} = I_z,$$

а всі інші недіагональні моменти інерції дорівнюватимуть нулю. При цьому перехід до нової системи координат здійснюється тільки шляхом відповідних поворотів координатних осей попередньої системи. Таку систему координат називають головною системою координат, а її координатні осі — головними осями.

У системі координат, пов'язаній з головними осями, співвідношення (4.10) спрощуються:

$$L^c_x = I_x\omega_x;\quad L^c_y = I_y\omega_y;\quad L^c_z = I_z\omega_z, \qquad (4.14)$$

де I_x, I_y, I_z — головні моменти інерції тіла відносно відповідних закріплених осей обертання.

Далі розглядатимемо моменти інерції твердих тіл відносно закріплених осей обертання, які можуть і не проходити через центр мас.

Нехай тверде тіло обертається навколо закріпленої осі, яка напрямлена вздовж координатної осі OZ і не проходить через центр мас (рис. 4.2). За цієї умови кутова швидкість має одну відмінну від нуля компоненту $\omega = \{0, 0, \omega_z\}$. Якщо позначити через R_i радіуси-вектори частинок тіла масами m_i, то на підставі (4.9), аналогічно тому, як були одержані формули (4.10), знаходимо момент імпульсу тіла відносно закріпленої осі обертання:

$$L_z = I_{zz}\omega_z, \qquad (4.15)$$

де $I_{zz} = \sum_i m_i(R_i^2 - z_i^2)$.

Як видно з рис. 4.2, $R_i^2 - z_i^2 = x_i^2 + y_i^2 = r_i^2$, де r_i — відстань частинок тіла від осі обертання. Очевидно, що для будь-якої частинки твердого тіла відстань r_i з часом не змінюється, тоді момент інерції тіла відносно закріпленої осі обертання $I_{zz} = I = \text{const}$. Це означає, згідно

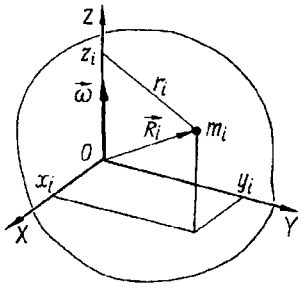


Рис. 4.2

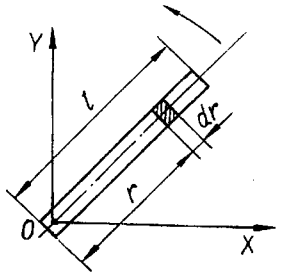


Рис. 4.3

з (4.15), що вектори $\vec{L}_z$ і $\vec{\omega}_z$ колінеарні. Отже, момент інерції відносно закріпленої осі обертання для тіла з дискретною структурою

$$I = \sum_i m_i r_i^2; \tag{4.16}$$

для суцільного тіла

$$I = \int r^2 dm = \int \rho r^2 dV, \tag{4.17}$$

де інтеграл береться по всьому об'єму тіла; $\rho = \frac{dm}{dV}$ — густина маси тіла.

Таким чином скалярну величину, яка дорівнює сумі добутків мас частинок тіла на квадрати їхніх відстаней від осі обертання, називають моментом інерції тіла відносно даної осі. Добуток $m_i r_i^2$ — це момент інерції окремої частинки (матеріальної точки) відносно осі обертання. З цього означення випливає, що момент інерції системи тіл відносно осі обертання є величиною адитивного і дорівнює сумі моментів інерції складових частин системи відносно даної осі.

Для прикладу обчислимо за формулою (4.17) момент інерції однорідного стержня завдовжки l і масою m, який обертається в площині XOY навколо перпендикулярної до стержня осі OZ, що проходить через один з його кінців (рис. 4.3).

Оскільки густина однорідного стержня стала $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{lS}$ і $dV = Sdr$, де S — площа поперечного перерізу стержня, то в формулі

(4.17) інтегрування по об'єму зводиться до інтегрування по довжині стержня:

$$I = \frac{m}{l} \int_0^l r^2 dr = \frac{1}{3} ml^2.$$

Як правило, моменти інерції обчислюють у головній системі координат з початком у центрі мас. У цьому разі обчислення за формулою (4.17) суттєво спрощується для однорідних і симетричних тіл, якщо момент інерції визначається відносно осі симетрії (див. приклади 4.1 і 4.2).

Якщо вісь обертання однорідного тіла не проходить через його центр мас, то обчислення моменту інерції відносно цієї осі за формулою (4.17) різко ускладнюється. В таких випадках для визначення моменту інерції тіла відносно осі, зміщеної з центра мас, використовують теорему Гюйгенса—Штейнера: момент інерції відносно довільної осі дорівнює сумі моменту інерції I_c відносно осі, яка паралельна даній і проходить через центр мас тіла, і добутку маси тіла m на квадрат відстані a між осями:

$$I = I_c + ma^2. \tag{4.18}$$

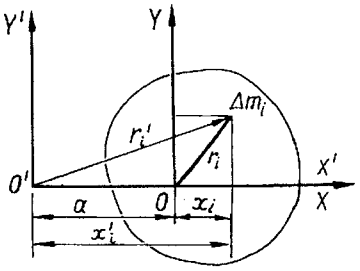


Рис. 4.4

Для доведення цієї теореми розглянемо обертання твердого тіла довільної форми у двох системах координат $OXYZ$ і $O'X'Y'Z'$, відповідні осі яких паралельні, а осі OX і $O'X'$ збігаються (рис. 4.4). Початок координат O першої системи розташований у центрі мас тіла, а початок координат O' другої системи зміщений вздовж осі OX на відстань a. Визначимо моменти інерції тіла відносно осей OZ і $O'Z'$ (перпендикулярні до рисунка). Нехай r_i і r_i' — відстані частинок тіла масами m_i від осей OZ і $O'Z'$ відповідно.

Тоді момент інерції тіла відносно осі OZ, що проходить через центр мас,

$$I_c = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2), \tag{4.19}$$

а момент інерції тіла відносно паралельної осі $O'Z'$:

$$I = \sum_i m_i r_i'^2 = \sum_i m_i ((x_i + a)^2 + y_i^2) =$$

$$= \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) + a^2 \sum_i m_i + 2a \sum_i m_i x_i. \tag{4.20}$$

У цьому виразі третій доданок дорівнює нулю, оскільки координати частинок тіла відраховуються від центра мас. Отже, із (4.20) з урахуванням (4.19) випливає, що між моментами інерції тіла відносно двох паралельних осей, одна з яких проходить через центр мас, існує співвідношення (4.18).

Момент інерції характеризує інерційні властивості твердого тіла по відношенню до його обертального руху. Кожне тіло, незалежно від того, перебуває воно в обертальному русі чи в спокої, має конкретне значення моменту інерції відносно конкретної осі обертання.

Наведемо кілька формул моментів інерції для однорідних тіл, що мають правильну геометричну форму.

1. Порожнистий товстостінний циліндр масою m та радіусами циліндричних поверхонь R_1 і R_2 відносно геометричної осі:

$$I = \frac{m\,(R_1^2 + R_2^2)}{2}.$$

2. Порожнистий тонкостінний циліндр масою m та радіусом оболонки R відносно геометричної осі:

$$I = mR^2.$$

3. Суцільний циліндр (вал, диск) масою m і радіусом R відносно геометричної осі:

$$I = \frac{mR^2}{2}.$$

4. Куля масою m та радіусом R відносно осі, що проходить через центр кулі:

$$I = \frac{2}{5}\,mR^2\,.$$

5. Куб масою m та довжиною ребра a відносно осі, що проходить через центр куба перпендикулярно до його грані:

$$I = \frac{ma^2}{6}.$$

6. Стержень масою m і завдовжки l відносно осі, перпендикулярної до середини стержня:

$$I = \frac{1}{12}\,ml^2.$$

7. Такий самий стержень відносно осі, перпендикулярної до кінця стержня:

$$I = \frac{1}{3}\,ml^2\,.$$

Приклад 4.1. Вивести формулу моменту інерції для однорідної кулі масою m та радіусом R відносно осі, що проходить через центр кулі.

Розв'язання. В однорідній кулі центр мас збігається з її геометричним центром. Отже, необхідно вивести формули для головних моментів інерції кулі:

$$I_x = \sum_i m_i(r_i^2 - x_i^2);\ I_y = \sum_i m_i(r_i^2 - y_i^2);\ I_z = \sum_i m_i(r_i^2 - z_i^2)\,. \tag{1}$$

Внаслідок центральної симетрії властивості однорідної кулі в напрямах головних осей однакові, тобто

$$\sum_i m_i x_i^2 = \sum_i m_i y_i^2 = \sum_i m_i z_i^2.$$

Оскільки

$$\sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2),$$

то $\sum_i m_i x_i^2 = \sum_i m_i y_i^2 = \sum_i m_i z_i^2 = \frac{1}{3}\sum_i m_i r_i^2$.

Це означає, що головні моменти інерції (1) однакові і сталі: $I_x = I_y = I_z = I = \text{const}$, тобто

$$I = \frac{2}{3}\sum_i m_i\, r_i^2. \tag{2}$$

Щоб вивести формулу для I, припустимо, що розподіл маси в об'ємі кулі безперервний, і у виразі (2) замінимо дискретну суму інтегралом по об'єму кулі:

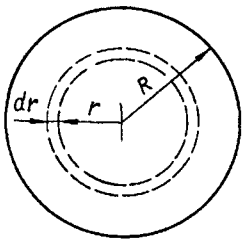


Рис. 4.5

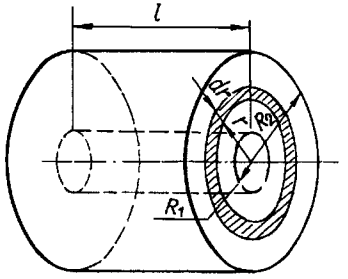


Рис. 4.6

$$I = \frac{2}{3}\int \rho r^2\, dV. \tag{3}$$

Інтегрування виконується таким чином. Розіб'ємо умовно об'єм кулі на сферичні шари нескінченно малої товщини dr з внутрішнім радіусом r (рис. 4.5). Об'єм такого нескінченно тонкого шару приймемо за елементарний об'єм кулі: $dV = 4\pi r^2 dr$. Густина однорідної кулі $\rho = \frac{3m}{4\pi R^3}$. Підставивши ці значення у вираз (3), знаходимо

$$I = \frac{2m}{R^3}\int_0^R r^4 dr = \frac{2}{5}mR^2.$$

Приклад 4.2. Вивести формулу моменту інерції для однорідного порожнистого товстостінного циліндра масою m та радіусами циліндричних поверхонь R_1 і R_2 відносно геометричної осі.

Розв'язання. Геометрична вісь однорідного циліндра проходить через його центр мас і момент інерції циліндра відносно цієї осі як один із його головних моментів інерції можна обчислити за формулою (4.17). Для цього об'єм циліндра розіб'ємо уявно на циліндричні шари нескінченно малої товщини dr з внутрішнім радіусом r так, щоб їхні осі збігались з геометричною віссю циліндра (рис. 4.6). Тоді елементарний об'єм циліндричного шару $dV = 2\pi rldr$, де l — довжина циліндра. Густина однорідного циліндра $\rho = m/(\pi (R_2^2 - R_1^2) l)$. Замінивши у формулі (4.1) dV і ρ їхніми значеннями, отримаємо

$$I = \frac{2m}{R_2^2 - R_1^2}\int_{R_1}^{R^2} r^3 dr = \frac{1}{2}m(R_2^2 + R_1^2).$$

§ 4.3. Основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла навколо закріпленої осі

Грунтуючись на моделі абсолютно твердого тіла і загальних законах його обертального руху, розглянемо найпростіший випадок — обертання твердого тіла навколо закріпленої осі. Як уже зазначалося, в цьому разі момент імпульсу тіла відносно осі і кутова швидкість тіла пов'язані співвідношенням (4.15) і обидва вектори колінеарні. Перепишемо формулу (4.15), опустивши індекси:

$$L_z = I\omega, \tag{4.21}$$

де I — сталий момент інерції абсолютно твердого тіла відносно даної осі.

Якщо до тіла, яке може обертатися навколо закріпленої осі, прикладені зовнішні сили $\vec{F}_k (k = 1,2,...,N)$, то кожна з них створює обертальний момент M_{zk} відносно осі. Зауважимо, що тільки ті зовнішні сили створюють нерівний нулю обертальний момент, лінія дії яких не лежить в одній площині з віссю обертання. Із рівняння (4.6) випливає, що результуючий момент зовнішніх сил приводить до зміни стану обертального руху тіла, тобто зумовлює зміну його кутової швидкості. Підставивши в (4.6) вираз (4.21), маємо

$$M_z = \frac{dL_z}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt}, \tag{4.22}$$

де $M_z = \sum_k M_{zk}$ — сумарний момент зовнішніх сил відносно осі. Зважаючи на те що I = const, рівняння (4.22) запишемо у вигляді

$$M_z = I\varepsilon, \tag{4.23}$$

де $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ — кутове прискорення тіла.

Рівняння (4.22) або (4.23) називають основним рівнянням динаміки обертального руху твердого тіла відносно нерухомої осі.

Для системи твердих тіл, яка має вісь обертання, що проходить через центр мас, основний закон динаміки обертального руху описується рівнянням

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt}, \tag{4.24}$$

де вектори $\vec{L}$ і $\vec{M}$ визначені відносно центра мас; I — момент інерції системи відносно осі обертання; $\vec{\omega}$ — кутова швидкість, однакова для всіх тіл системи.

Якщо система замкнена, то головний момент зовнішніх сил $M = 0$ і

$$\vec{L} = I\vec{\omega} = \text{const}. \tag{4.25}$$

Повний момент імпульсу замкненої системи тіл відносно центра мас зберігається.

Однак у цьому разі виконання умови (4.25) не завжди означає обертання системи з сталою кутовою швидкістю. Під дією внутрішніх сил у системі може відбуватися перерозподіл маси відносно осі обертання. Це приводить до зміни моменту інерції системи відносно осі і такої зміни кутової швидкості, при якій добуток $I\vec{\omega}$ залишається сталим. При цьому не може змінитися напрям обертання системи. Закон збереження моменту імпульсу системи (векторної величини) проявляється у збереженні як модуля, так і напряму вектора $\vec{L}$.

Наприклад, у результаті вулканічної діяльності, утворення гір, випадання опадів та інших факторів відбувається зміна моменту інерції Землі. Це веде до зміни кутової швидкості її обертання навколо своєї осі. Результатом цього є нерегулярний характер коливання тривалості доби. Експериментально встановлено періодичні коливання тривалості доби з основним періодом в один рік і з амплітудою близько 0,001 с. Крім того, Земля зазнає дії ряду зовнішніх факторів. Так, внаслідок сил приливного тертя, зумовленого гравітаційним притяганням Місяця і Сонця, тривалість середньої сонячної доби збільшується приблизно на $1{,}640 \cdot 10^{-3}$ с за сторіччя.

Прояви закону збереження моменту імпульсу можна показати на багатьох прикладах. Зокрема зміну кутової швидкості системи при зміні її моменту інерції досить переконливо можна продемонструвати за допомогою лави Жуковського.

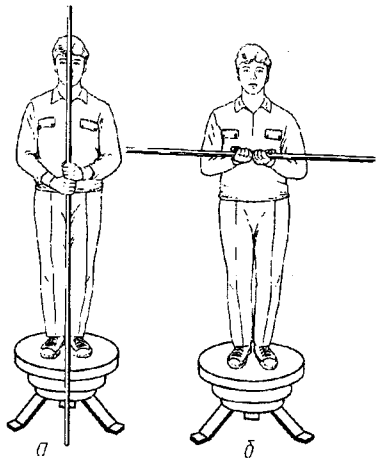


Рис. 4.7

Приклад 4.3. На лаві Жуковського стоїть людина і тримає у руках стержень, розміщений вертикально вздовж осі обертання лави (рис. 4.7, *а*). Лава з людиною обертається з частотою $n_1 = 1\text{с}^{-1}$. З якою частотою n_2 обертатиметься лава з людиною, якщо стержень повернути так, щоб він зайняв горизонтальне і симетричне положення відносно осі обертання (рис. 4.7, *б*). Сумарний момент інерції людини і лави $I_1 = 6\ \text{кг}\cdot\text{м}^2$. Довжина стержня $l = 2{,}4$ м, його маса $m = 8$ кг.

Розв'язання. На основі закону збереження моменту імпульсу (4.25) запишемо

$$I_1\omega_1 = (I_1 + I_2)\omega_2, \qquad (1)$$

де $I_2 = \frac{1}{12}ml^2$ — момент інерції стержня відносно осі, що проходить перпендикулярно до його середини. Оскільки $\omega = 2\pi n$, то з (1) маємо

$$n_2 = \frac{12I_1n_1}{12I_1 + ml^2} = 0{,}61\text{с}^{-1}. \qquad (2)$$

§ 4.4. Робота зовнішніх сил при обертанні тіла. Кінетична енергія обертального руху

При обертанні тіла навколо закріпленої осі зовнішні сили виконують певну роботу. Розглянемо спочатку роботу, виконану над абсолютно твердим тілом однією силою $\vec{F}$, момент якої відносно осі дорівнює M_z.

Для спрощення міркувань припустимо, що вектор сили $\vec{F}$ лежить у площині, перпендикулярній до осі обертання, тобто під дією цієї сили тіло не може рухатися вздовж осі. На рис. 4.8 зображено переріз тіла площиною (заштрихованою на рисунку), яка перпендикулярна до осі і проходить через точку B прикладання сили $\vec{F}$. Розкладемо вектор $\vec{F}$ на дві складові, одна з яких $\vec{F}_n$ напрямлена вздовж радіуса-вектора $\vec{r}$ точки прикладання сили, а друга $\vec{F}_\tau$ перпендикулярна до нього. Складова $\vec{F}_n$ зрівноважується реакцією опори осі, що проходить через точку O, а друга переміщає точку прикладання сили по колу радіуса r.

При нескінченно малому переміщенні $d\vec{r}$ сила $\vec{F}_\tau$ на довжині дуги $ds = |d\vec{r}|$ виконує елементарну роботу

$$dA = F_\tau\, ds = F\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)ds = F\sin\alpha\, ds, \qquad (4.26)$$

де α — кут між радіусом-вектором $\vec{r}$ і силою $\vec{F}$. Оскільки всі частинки абсолютно твердого тіла жорстко зв'язані одна з одною, то довжині дуги ds відповідає поворот всього тіла на нескінченно малий кут $d\varphi$. Враховуючи, що $ds = rd\varphi$, перепишемо (4.26) у вигляді

$$dA = Fr\sin\alpha d\varphi = M_z d\varphi, \qquad (4.27)$$

де M_z — момент сили $\vec{F}$ відносно осі обертання.

Робота зовнішньої сили $\vec{F}$ при повороті тіла на скінченний кут $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ визначається як визначений інтеграл

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z d\varphi, \qquad (4.28)$$

де φ_1, φ_2 — значення кута повороту в початковому і кінцевому положеннях тіла. Момент сили відносно осі обертання M_z в загальному випадку залежить від кута повороту: $M_z = M_z(\varphi)$. При $M_z = \text{const}$ із (4.28) отримаємо

$$A = M_z\Delta\varphi, \qquad (4.29)$$

де поворот $\Delta\varphi$ можна виразити через число повних обертів тіла N за час обертання: $\Delta\varphi = 2\pi N$.

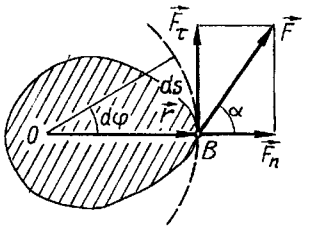


Рис. 4.8

Якщо на тіло діють кілька зовнішніх сил, моменти яких відносно осі обертання дорівнюють $M_{z1}, M_{z2}, \ldots, M_{zN}$, то, як неважко довести, у формулі (4.28) M_z дорівнює алгебраїчній сумі моментів усіх зовнішніх сил.

Щоб визначити миттєву потужність P при обертанні абсолютно твердого тіла, поділимо рівняння (4.27) на елементарний проміжок часу dt, протягом якого виконувалась робота. Тоді за означенням потужності (3.9) отримаємо

$$\frac{dA}{dt} = M_z\frac{d\varphi}{dt} \quad \text{або} \quad P = M_z\omega, \qquad (4.30)$$

де ω — числове значення кутової швидкості тіла.

Робота, виконана при обертанні абсолютно твердого тіла, дорівнює зміні його кінетичної енергії.

Для визначення кінетичної енергії обертального руху розглянемо тверде тіло як систему, що складається із N жорстко зв'язаних між собою частинок. При обертанні тіла навколо осі всі частинки рухаються по колах, площини яких перпендикулярні до осі обертання. У будь-який момент часу частинки, віддалені від осі на різні відстані r_i, рухаються з різними швидкостями $\vec{v}_i$. Кінетична енергія i-ї частинки масою m_i у даний момент часу

$$W_i = \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{m_i r_i^2 \omega^2}{2},$$

де ω — числове значення кутової швидкості, однакової для всіх частинок тіла.

Кінетична енергія обертального руху твердого тіла дорівнює сумі кінетичних енергій всіх його частинок:

$$W = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i r_i^2 \omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2, \qquad (4.31)$$

або

$$W = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{L_z^2}{2I}, \qquad (4.32)$$

де $I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$ — момент інерції тіла відносно даної осі обертання; L_z — момент імпульсу тіла відносно тієї самої осі.

Під дією моментів зовнішніх сил відносно нерухомої осі обертання змінюється кутова швидкість тіла і відповідно його кінетична енергія. Сумарна робота зовнішніх сил дорівнює зміні кінетичної енергії обертального руху абсолютно твердого тіла навколо даної осі:

$$A = \frac{I\omega_2^2}{2} - \frac{I\omega_1^2}{2}, \qquad (4.33)$$

де ω_1 і ω_2 — початкове і кінцеве значення кутової швидкості тіла. В окремих випадках тіло може обертатися навколо даної осі, а сама вісь може одночасно рухатися поступально.

Розглянемо кінетичну енергію абсолютно твердого тіла, яке здійснює плоский рух. Вважатимемо, що плоский рух складається з поступального руху центра мас із швидкістю $\vec{v}_c$ і обертального руху з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ навколо осі, яка проходить через центр мас.

Розглядаючи тверде тіло як систему жорстко зв'язаних частинок масами m_i, що рухаються із швидкостями $\vec{v}_i$, будемо шукати кінетичну енергію тіла як суму кінетичних енергій всіх його частинок (див. формулу 4.31). У разі плоского руху швидкості частинок у тілі розподіляються у відповідності з формулою (1.39): $\vec{v}_i = \vec{v}_c + [\vec{\omega}\,\vec{r}_i']$, де $\vec{r}_i'$ — радіус-вектор i-ї частинки, проведений із центра мас тіла. Визначивши v_i^2 як скалярний добуток $v_i^2 = \vec{v}_i \vec{v}_i = v_c^2 + \omega^2 r_i^2$ (r_i — відстань частинки від осі обертання), знаходимо кінетичну енергію тіла

$$W = \frac{v_c^2}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i + \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2,$$

або

$$W = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2}, \qquad (4.34)$$

де m — маса тіла; I_c — момент інерції тіла відносно осі, що проходить через центр мас.

Кінетична енергія плоского руху абсолютно твердого тіла дорівнює сумі кінетичних енергій поступального руху тіла з швидкістю центра мас і обертального руху тіла навколо осі, що проходить через його центр мас.

Приклад 4.4. Куля радіуса R і масою m скочується без ковзання з похилої площини завдовжки l, яка утворює кут α з горизонтом (рис. 4.9). Визначити швидкість центра мас кулі в кінці похилої площини.

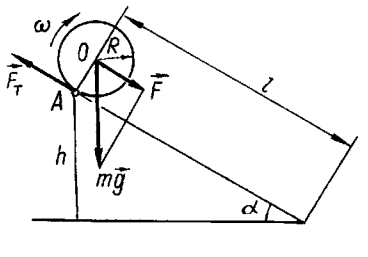


Рис. 4.9

Розв'язання. *1-й спосіб.* Оскільки куля скочується без ковзання, то її потенціальна енергія у верхній точці дорівнює кінетичній енергії в кінці похилої площини. Потенціальна енергія

$$U = mgh = mgl \sin\alpha. \qquad (1)$$

Кінетична енергія складається з кінетичної енергії поступального і обертального рухів

$$W = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}, \qquad (2)$$

де v — швидкість руху центра мас кулі; I — момент інерції кулі відносно осі, що проходить через центр кулі; ω — кутова швидкість.

Прирівнявши (1) і (2), маємо

$$mgl \sin\alpha = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}. \qquad (3)$$

Враховуючи те, що $I = \frac{2}{5} mR^2$ і $\omega = \frac{v}{R}$, дістаємо

$$mgl \sin \alpha = \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} mR^2 \left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{7}{10} mv^2. \quad (4)$$

Звідси знаходимо, що

$$v = \sqrt{\frac{10}{7} gl \sin \alpha}. \quad (5)$$

2-й спосіб. Кулю, яка скочується, можна розглядати як тіло, що обертається навколо миттєвої осі, яка проходить через точку дотику кулі і площини перпендикулярно до площини рисунка. У цьому разі повна кінетична енергія кулі є кінетичною енергією обертального руху

$$W = \frac{1}{2} I_1 \omega^2,$$

де I_1 — момент інерції кулі відносно миттєвої осі обертання. За теоремою Гюйгенса — Штейнера

$$I_1 = \frac{2}{5} mR^2 + mR^2 = \frac{7}{5} mR^2.$$

Миттєва кутова швидкість центра мас відносно миттєвої осі обертання $\omega = \frac{v}{R}$. Тоді

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{5} mR^2 \left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{7}{10} mR^2. \quad (6)$$

Прирівнявши (1) і (6), матимемо вираз (5).

3-й спосіб. Відсутність ковзання кулі зумовлюється дією на неї з боку похилої площини сили тертя $\vec{F}_т$. Якщо немає ковзання, сила $\vec{F}_т$ є силою тертя спокою. Швидкість кулі в кінці похилої площини знайдемо за формулою

$$v = \sqrt{2as} = \sqrt{2al}, \quad (7)$$

де a — прискорення центра мас кулі. Його знайдемо з рівняння руху центра мас (2.35):

$$m \frac{dv}{dt} = mg \sin \alpha - \vec{F}_т. \quad (8)$$

Швидкість v центра мас O кулі пов'язана із швидкістю v_A точки A співвідношенням $v = v_A + \omega R$. Оскільки ковзання кулі немає, то $v_A = 0$ і $v = \omega R$. Тому $\frac{dv}{dt} = R \frac{d\omega}{dt}$. Рівняння (8) має два невідомих $a = \frac{dv}{dt}$ і $\vec{F}_т$. Запишемо рівняння динаміки обертального руху кулі відносно осі, що проходить через центр мас перпендикулярно до площини рисунка:

$$I \frac{d\omega}{dt} = M, \quad (9)$$

де M — момент зовнішніх сил відносно осі. Момент сили тяжіння відносно цієї осі дорівнює нулю і сумарний момент $M = F_т R$. Тоді рівняння (9) запишемо у такому вигляді:

$$I \frac{d\omega}{dt} = F_т R, \text{ або } I \frac{dv}{dt} = F_т R^2. \quad (10)$$

З рівностей (8) і (10) знаходимо

$$a = \frac{5}{7} g \sin \alpha. \quad (11)$$

Підставивши (11) у (7), дістанемо також вираз (5).

§ 4.5. Пара сил. Умови рівноваги тіла

Розглянемо випадок, коли на тіло діють дві рівні за величиною, паралельні і протилежно напрямлені сили, лінії дії яких не збігаються. Такі сили називають *парою сил.* Відстань l між лініями дії сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ називають плечем пари. Пару сил неможливо замінити рівнодійною, оскільки векторна сума їх дорівнює нулю. Знайдемо момент пари сил відносно довільної точки O, яка лежить у площині сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ (рис. 4.10). Позначимо модуль сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ через F. Момент сили $\vec{F}_1$ відносно O дорівнює $\vec{F}_1 l_1$ і напрямлений до нас, момент сили $\vec{F}_2$ дорівнює $\vec{F}_2 l_2$ і напрямлений від нас. Результуючий момент напрямлений за рисунок і дорівнює

$$M = Fl_2 - Fl_1 = F(l_2 - l_1) = Fl. \quad (4.35)$$

З виразу (4.35) видно, що момент пари сил не залежить від розміщення точки O на площині, в якій лежать сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$. Узагальнимо цей висновок на випадок довільного розміщення точки O (рис. 4.11). Тоді сумарний момент сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ відносно точки O буде

$$\vec{M} = [\vec{r}_1, \vec{F}_1] + [\vec{r}_2, \vec{F}_2], \quad (4.36)$$

де $\vec{r}_1$ і $\vec{r}_2$ — радіуси-вектори точок прикладання сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$. З рис. 4.11 маємо, що

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{r}_{12}. \quad (4.37)$$

Підставимо $\vec{r}_2$ з (4.37) у (4.36):

$$\vec{M} = [\vec{r}_1, \vec{F}_1] + [\vec{r}_1, \vec{F}_2] + [\vec{r}_{12}, \vec{F}_2]. \quad (4.38)$$

Оскільки $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$, то вираз (4.38) перепишемо у вигляді

$$\vec{M} = [\vec{r}_{12}, \vec{F}\,]. \qquad (4.39)$$

Числове значення сумарного моменту пари

$$M = r_{12} F \sin\alpha .$$

З рис. 4.11 видно, що $r_{12} \sin\alpha = l$. Тоді

$$M = Fl,$$

тобто ми дістали вираз (4.35). З виразу (4.39) випливає, що момент пари сил перпендикулярний до площини, в якій лежать сили, і чисельно дорівнює добутку модуля однієї з сил на плече пари. Оскільки векторна сума пари сил дорівнює нулю, то при її дії на тіло центр мас тіла повинен перебувати в стані спокою або рівномірного і прямолінійного руху. Тому пара сил незалежно від того, де вона прикладена до тіла, намагатиметься обертати його навколо осі, що проходить через центр мас тіла перпендикулярно до площини, в якій лежать сили пари.

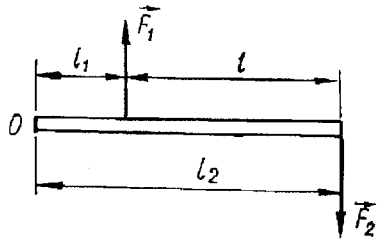


Рис. 4.10

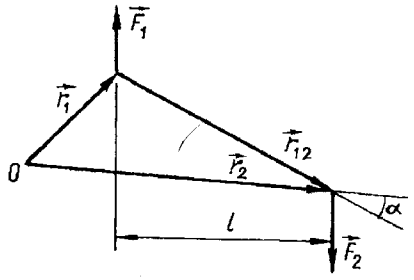


Рис. 4.11

З'ясуємо умови рівноваги твердого тіла. Тіло перебуває у стані рівноваги, якщо воно залишається нерухомим відносно даної інерціальної системи відліку. Для цього необхідно, щоб векторна сума всіх прикладених до тіла зовнішніх сил і векторна сума моментів зовнішніх сил дорівнювала нулю:

$$\sum_k \vec{F}_k = 0; \quad \sum_k \vec{M}_k = 0. \qquad (4.40)$$

Ці рівняння називають рівняннями рівноваги тіла. За умов (4.40) рівняння руху твердого тіла (4.5) і (4.6) набувають вигляду $\vec{p} = m\vec{v}_c = \text{const}$, $\vec{L} = \text{const}$. Звідси випливає, що тверде тіло є замкненою системою, в якій діють закони збереження імпульсу центра мас і моменту імпульсу: центр мас може рухатися рівномірно і прямолінійно, а саме тіло може обертатися, зберігаючи момент імпульсу сталим. Отже, рівняння (4.40) виражають необхідні умови рівноваги, але ці умови не є достатніми. Їх треба доповнити достатньою умовою рівноваги, яка зводиться до вимоги, щоб повна механічна енергія тіла дорівнювала його потенціальній енергії. Таким чином, тверде тіло перебуває в стані стійкої рівноваги, якщо при виконанні умов (4.40) його кінетична енергія дорівнює нулю.

§ 4.6. Вільні осі обертання. Гіроскопи

Якщо тілу, яке перебуває у обертальному русі відносно довільної осі, надати можливість самостійно обертатися, то в загальному випадку орієнтація осі обертання в просторі змінюватиметься. Щоб вісь

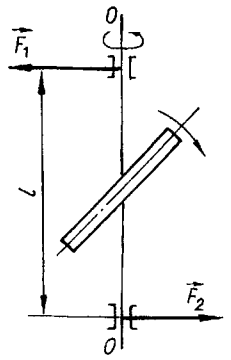


Рис. 4.12

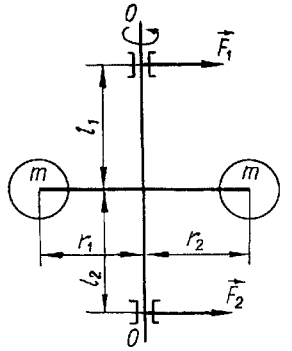


Рис. 4.13

обертання твердого тіла не змінювала своєї орієнтації, на неї повинні діяти певні сили. Так, щоб вісь обертання тіла (рис. 4.12) знаходилась у вертикальному напрямі, на неї повинна діяти пара сил, момент якої $M = F_1 l$. Якщо момент пари сил не діє, то вісь обертання поверталась би так, як це зображено стрілкою на рисунку. Можливий випадок, коли розподіл мас відносно осі обертання такий, як на рис. 4.13. Щоб вісь не переміщалася, на неї з боку підшипників повинні діяти сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$. Вісь, відносно якої всі доцентрові сили, що діють на окремі частини тіла, взаємно зрівноважуються, називають *вільною віссю обертання*. При $r_1 = r_2$ (див. рис. 4.13) вісь OO буде вільною.

Для будь-якого тіла існують три взаємно перпендикулярні осі, що проходять через його центр мас і є вільними осями. Для однорідного прямокутного паралелепіпеда це осі O_1O_1, O_2O_2 і O_3O_3, проведені че-

рез центр мас перпендикулярно до бічних граней (рис.4.14). Момент інерції його найбільший відносно осі O_1O_1 і найменший відносно осі O_3O_3.

Теорія і практика показують, що обертання тіла буде стійким тільки відносно тих вільних осей, відносно яких момент інерції найбільший або найменший. Обертання тіла буде нестійким відносно осі, для якої момент інерції має проміжне значення. Якщо до нитки підвісити тонкий металевий стержень, диск або замкнутий ланцюжок і привести їх у швидке обертання, то вони здійснюватимуть обертальний рух навколо вільних осей, відносно яких їхні моменти інерції найбільші (рис. 4.15).

Гіроскопом називають масивне симетричне тіло, що обертається навколо осі симетрії, яка може змінювати свою орієнтацію в просторі. Щоб вісь гіроскопа могла вільно міняти свою орієнтацію в просторі, його монтують на кардановому підвісі (рис. 4.16). Маховик гіроскопа кріпиться на його осі *AA*, яка може обертатися в підшипниках, розміщених у діаметрально протилежних точках внутрішнього кільця. Внутрішнє кільце, у свою чергу, може обертатися навколо осі *BB*, що входить у підшипники зовнішнього кільця. Зовнішнє кільце також мо-

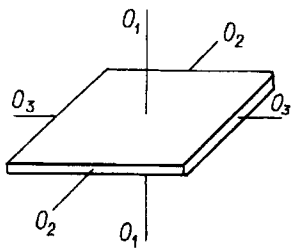


Рис. 4.14

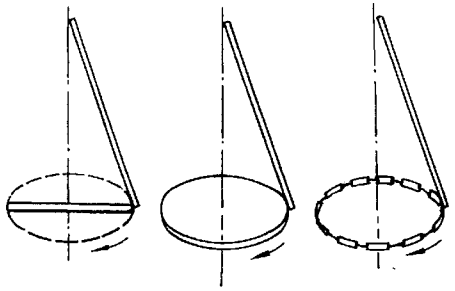


Рис. 4.15

же вільно обертатися навколо осі *DD*, яка проходить через нерухомі підшипники підставки. Вісь *BB* з віссю *AA* утворює кут 90°. Усі три осі перетинаються в одній точці, яка називається *центром кардано-вого підвісу*. Якщо центр кардановго підвісу або точка опори збігається з центром мас гіроскопа, то його називають зрівноваженим, або вільним. Такий гіроскоп з трьома ступенями вільності може здійснювати будь-які повертання відносно центра підвісу. Маховик гіроскопа приводиться в швидке обертання електродвигуном або стиснутим повітрям. Його момент імпульсу лежить на осі *AA*. Для зміни орієнтації осі гіроскопа в просторі потрібно, щоб на нього подіяв момент зовнішніх сил.

Якщо спробувати повернути вісь гіроскопа, то можна спостерігати своєрідне явище, яке називається *гіроскопічним ефектом*. Цей ефект

проявляється в тому, що рух осі гіроскопа визначається не напрямом дії зовнішньої сили, а напрямом її моменту. Так, при дії пари сил, що намагаються повернути вісь гіроскопа *AA* навколо осі *CC*, вона повертається навколо осі *BB* (рис. 4.17). Така поведінка гіроскопа повністю пояснюється основним рівнянням динаміки обертального руху. Справді, момент пари сил $\vec{M}$ за час Δt спричиняє приріст моменту імпульсу гіроскопа на величину $\Delta\vec{L} = \vec{M}\Delta t$, вектор якого паралельний вектору $\vec{M}$ і напрямлений вздовж осі *CC* від нас за рисунком. (Осі *AA*, *BB*, вектори $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{L}$ лежать у площині рисунка, вісь *CC* перпендикулярна до площини рисунка). Тепер момент імпульсу гіроскопа $\vec{L}' = \vec{L} + \Delta\vec{L}$. Оскільки вісь гіроскопа *AA* повинна збігатися за напрямом з вектором $\vec{L}'$, то гіроскоп здійснює поворот навколо осі *BB*. Вісь

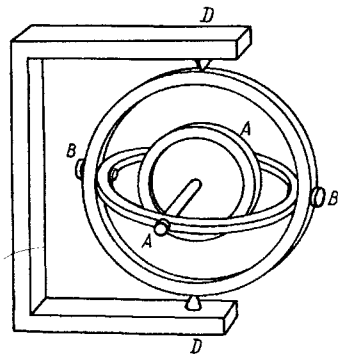


Рис. 4.16

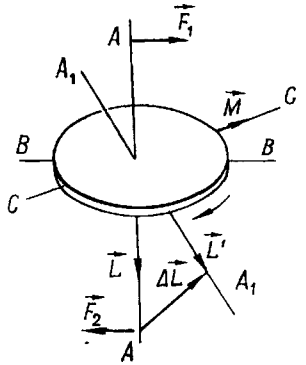


Рис. 4.17

обертання гіроскопа займе положення A_1A_1. Якщо на гіроскоп тривалий час діє момент пари сил, то вісь гіроскопа повертатиметься доти, доки вектори $\vec{L}'$ і $\vec{M}$ не збігатимуться за напрямом.

Гіроскоп з досить великим моментом інерції, приведений у швидке обертання, має великий момент імпульсу. Якщо на такий гіроскоп подіє короткочасно навіть значний момент сил, то зміна його моменту імпульсу буде незначною, а гіроскоп наче протидіятиме будь-яким спробам змінити модуль і напрям його моменту імпульсу. З цим пов'язана стійкість, яку має гіроскоп після приведення його в швидке обертання. Якщо частота обертання гіроскопа 20 000 — 30 000 $хв^{-1}$, то він надійно зберігає напрям своєї осі обертання.

Особливий вигляд рух гіроскопа має тоді, коли момент зовнішніх сил, що діють на гіроскоп, з часом не змінюється за величиною і по-

вертається разом з віссю обертання гіроскопа, утворюючи з нею весь час кут 90°. Вісь гіроскопа при цьому здійснюватиме повертання із сталою кутовою швидкістю. Таке повертання осі гіроскопа називають *прецесією*. Прецесія, наприклад, матиме місце під дією на гіроскоп моменту сили тяжіння (рис. 4.18). Момент сили тяжіння $M = mgl \sin\alpha$ зумовлює протягом часу dt приріст моменту імпульсу гіроскопа

$$dL = Mdt = mgl \sin\alpha dt,$$

де m — маса гіроскопа; l — відстань від точки опори до центра маси гіроскопа; α — кут між вертикаллю і віссю гіроскопа. Зміна моменту імпульсу на $d\vec{L}$ зумовлює повертання осі гіроскопа на кут $d\varphi$. Оскільки при повертанні осі гіроскопа момент сили M залишається перпендикулярним до осі гіроскопа, то її обертання буде рівномірним, і вісь гіроскопа описуватиме конічну поверхню. Кутова швидкість повертання площини, що проходить через вісь конуса і вісь гіроскопа, називається швидкістю прецесії. З рис. 4.18 видно, що

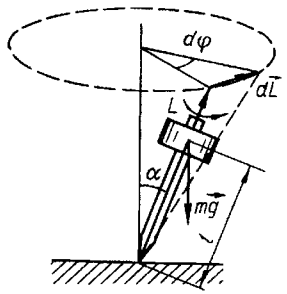


Рис. 4.18

$$d\varphi = \frac{dL}{L\sin\alpha} = \frac{mgl\sin\alpha dt}{L\sin\alpha} = \frac{mgldt}{L}.$$

Кутова швидкість прецесії

$$\omega' = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{mgl}{L} = \frac{mgl}{I\omega}, \qquad (4.41)$$

де I і ω — відповідно момент інерції і кутова швидкість обертання гіроскопа.

Прецесійний рух осі обертання спостерігається у Землі та інших планет. Земля має форму, яка дещо відмінна від кулі, її екваторіальний радіус більший від полярного. Внаслідок цього рівнодійні сили притягання з боку Місяця і Сонця не проходять через центр мас Землі і створюють відносно нього моменти сил, які намагаються повернути вісь обертання Землі. Незважаючи на те що маса Місяця набагато менша від маси Сонця, дія Місяця на обертальний рух Землі в 2,2 раза більша за відповідну дію Сонця. Це пояснюється тим, що Місяць знаходиться значно ближче до Землі, ніж Сонце. Внаслідок прецесійного руху осі обертання Землі її полюси описують повне коло приблизно за 26 000 років. Оскільки взаємні розміщення Землі, Місяця і Сонця неперервно змінюються, змінюється також розміщення площини орбіти Місяця відносно площини орбіти Землі. Тому існують також невеликі коливальні рухи земної осі — нутації.

При спробах повернути вісь гіроскопа внаслідок гіроскопічного ефекту виникають так звані гіроскопічні сили, які зумовлюють додатковий тиск на підшипники. Наприклад, при вимушеному повертанні осі гіроскопа OO навколо прямої $O'O'$ (рис. 4.19) його вісь намагається повернутися навколо прямої $O''O''$. Щоб запобігти такому повертанню, до осі гіроскопа повинні бути прикладені з боку підшипників сили $\vec{F}_1'$ і $\vec{F}_2'$. За третім законом Ньютона вісь гіроскопа діятиме на підшипники з силами $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, які і є *гіроскопічними* силами. Ці сили треба враховувати в конструюванні підшипників для парових турбін на кораблях, для гвинтів літаків, оскільки ротор турбіни і гвинт літака — це великі гіроскопи.

Властивість зрівноваженого гіроскопа зберігати незмінним напрям своєї осі обертання використовується для автоматичного управління рухом торпед, ракет, літаків, кораблів та інших апаратів. Одним із важливих застосувань гіроскопа є гіроскопічні компаси, що використовуються на кораблях. Гіроскопічні ефекти застосовуються також у дискових млинах.

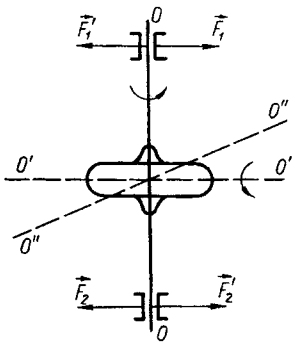


Рис. 4.19

Приклад 4.5. Кінець вертикального вала шарнірно з'єднаний з горизонтальною віссю, на яку насаджено циліндричний коток (рис. 4.20, *а*). При обертанні вала коток котиться по горизонтальній плоскій поверхні. Визначити силу тиску котка на поверхню, якщо маса котка m, його радіус r, кутова швидкість

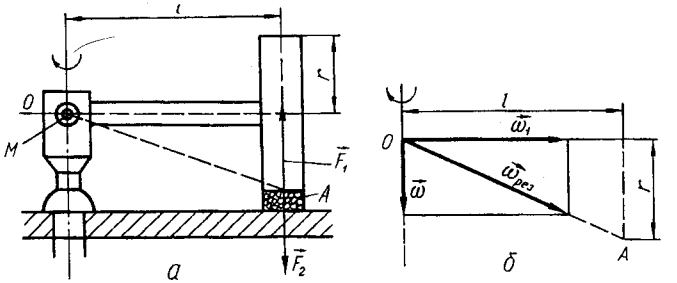


Рис. 4.20

вала $\omega = \text{const}$ і відстань від осі вала до котка l.

Розв'язання. Рух котка можна розглядати як вимушену прецесію гіроскопа, яким є сам коток. Внаслідок цього на горизонтальну поверхню діятиме, крім сили $m\vec{g}$, гіроскопічна сила $\vec{F}_2$. Сила тиску на поверхню буде

$$\vec{F} = m\vec{g} + \vec{F}_2. \qquad (1)$$

Визначимо гіроскопічну силу $\vec{F}_2$. Горизонтальна поверхня діє на коток з силою $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$, момент якої $\vec{M}$. Оскільки рук котка відбувається без ковзання, то миттєва

вісь його результуючого руху проходить через точки O і A. Якщо кутова швидкість руху котка ω, то з рис. 4.20, *б* маємо $\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{r}{l}$. Тоді

$$\omega_1 = \frac{\omega l}{r}. \tag{2}$$

Момент імпульсу котка $L = I\omega$, де $I = \frac{1}{2} mr^2$ — момент інерції циліндричного котка. Тоді

$$L = \frac{1}{2} m\omega l r. \tag{3}$$

Кутова швидкість вала ω є кутовою швидкістю прецесії котка.
На основі формули (4.41) можна записати

$$\omega = \frac{M}{L}. \tag{4}$$

Оскільки $M = F_1 l$, то з (4) маємо

$$F_1 = \frac{L\omega}{l} = \frac{1}{2} m\omega^2 r. \tag{5}$$

Підставивши (5) в (1), дістанемо

$$F = mg + \frac{1}{2} m\omega^2 r. \tag{6}$$

Звідси неважко показати, що навіть при частоті обертання вала 1 $с^{-1}$ і радіусі котка 0,5 м сила тиску вдвоє більша за силу тиску, зумовлену земним притяганням котка.

Розділ 5. Сили тертя і сили пружності

§ 5.1. Сили тертя. В'язке тертя

Механічний рух завжди супроводжується втратами механічної енергії. Це зумовлено наявністю сил тертя і опору. Дія цих сил приводить до переходу механічного руху в інші форми руху.

Сили тертя — це сили, що виникають у процесі руху одних тіл або їхніх частин по поверхні інших. Вони напрямлені по дотичній до поверхонь тіл і перешкоджають відносному переміщенню їх. Тертя, що виникає при відносному переміщенні тіл, які дотикаються, називають зовнішнім, або *сухим*. Тертя, що виникає при відносному русі між твердим тілом і рідинним або газовим середовищем, а також між шарами цих середовищ, називають внутрішнім, або *в'язким*. Зовнішнє тертя поділяють на тертя *спокою* (статичне) і тертя *руху* (кінематичне). Перший вид тертя виникає між взаємно нерухомими тілами, другий — при відносному переміщенні тіл, що дотикаються.

Залежно від характеру відносного переміщення тіл, між якими виникає тертя, розрізняють такі види зовнішнього тертя: *ковзання* і *кочення*. Кочення одного тіла по поверхні другого являє собою обертання його навколо миттєвої осі, що проходить через точку дотику і лежить у дотичній до обох тіл площині. Кочення відрізняється від обертання тим, що точки контакту при обертанні з часом не змінюються. Під час обертання вісь обертання одного тіла відносно другого перпендикулярна до дотичної площини. Прикладом тертя обертання є тертя стрілки компаса, яка обертається навколо вістря як опори, тертя осі дзиги на опорі, тертя осі шестерень у годинниках, у вимірювальних приладах та ін.

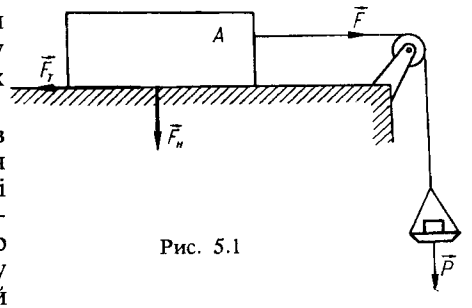


Рис. 5.1

Тертя спокою проявляється в усіх випадках, коли намагаються викликати відносний рух тіл, які дотикаються. Розмістимо на горизонтальній поверхні тіло A, до якого прикріплено нитку, яку перекинуто через нерухомий блок (рис. 5.1). Із збільшенням навантаження $\vec{P}$ чашки сила $\vec{F}$ досягне деякого значення $\vec{F}_0$, при якому тіло почне рухатися. Для всіх інших навантажень, коли $F < F_0$, тіло залишається в спокої. На тіло, поки воно перебуває в спокої при $F < F_0$, діє сила, яка протилежна за напрямом до сили $\vec{F}$. Тіло рухатиметься прискорено тоді, коли сила F переважатиме деяке конкретне значення F_0. Отже, сила тертя спокою може набувати будь-яких значень від нуля до максимального значення F_0. Дослідним шляхом встановлено, що максимальне значення сили тертя спокою пропорційне силі тиску $F_н$ і не залежить від площі дотикання тіл, тобто

$$F_0 = kF_н, \tag{5.1}$$

де k — *коефіцієнт тертя*, який залежить тільки від властивостей тертьових поверхонь тіл. Вираз (5.1) називають законом Амонтона. У загальному випадку коефіцієнт тертя спокою може змінюватись із зміною сили тиску між тілами, зміною температури тощо. Це означає, що закон Амонтона має наближений характер. Як уже зазначалося, при $F > F_0$ тіло рухається прискорено. Сила тертя спокою при цьому переходить у силу тертя ковзання.

У деяких випадках сила тертя ковзання для порівняно невеликого інтервалу швидкостей дорівнює граничній силі тертя спокою і не залежить від швидкості руху. Графічно таку залежність подано на рис. 5.2, *а*. Ця залежність виражає закон Кулона. При відносній

швидкості руху одного тіла по поверхні іншого, коли $v = 0$, сила тертя не однозначна і може набувати будь-яких значень від $+F_0$ до $-F_0$. При цьому для кулонівських сил тертя коефіцієнт тертя визначає не тільки граничну силу тертя спокою, а й силу тертя ковзання.

У загальному випадку сила тертя ковзання залежить від відносної швидкості руху тіл v. Цю залежність показано на рис. 5.2, *б*, з якого видно, що із збільшенням швидкості відносного руху тіл сила тертя ковзання спочатку зменшується і при дальшому збільшенні швидкості v зростає. При цьому справджується співвідношення, яке аналогічне виразу (5.1), тобто

$$F_K = \mu F_н, \tag{5.2}$$

де μ — коефіцієнт тертя ковзання, або динамічний коефіцієнт тертя.

Сила тертя ковзання в загальному випадку залежить від фізичної природи поверхонь та від їхнього стану. У виникненні сил тертя істотне значення мають сили міжмолекулярної взаємодії в місцях дотикання тіл та механічні сили, що виникають у зачепленнях окремих виступів поверхонь.

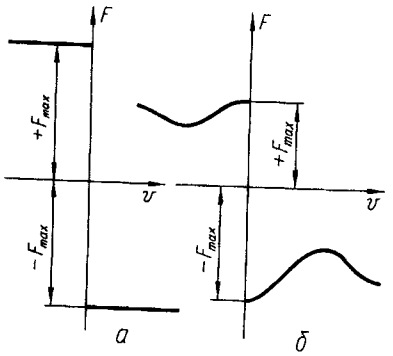


Рис. 5.2

При відносному русі одних тіл по поверхні інших дотикання їх відбувається тільки на окремих виступах, загальна площа яких значно менша від видимої площі дотикання. Для зменшення сили тертя ковзання поверхні тіл намагаються зробити гладенькими. Однак при дуже гладеньких поверхнях тіл сили тертя ковзання не зменшуються, а навпаки, зростають. Це зумовлено тим, що при щільному дотиканні поверхонь тіл виникають міжатомні взаємодії. Ці взаємодії проявляються тільки в тих місцях дотикання поверхонь, де відстань між атомами тіл має порядок розмірів атомів. Для врахування дії сил міжмолекулярної взаємодії на сили тертя Б. В. Дерягін встановив закон тертя ковзання у такому вигляді:

$$F = k(F_1 + F_e), \tag{5.3}$$

де F_1 — сила нормального тиску; F_e — рівнодійна сил міжмолекулярного притягання тіл.

Щоб зменшити сухе тертя ковзання, його замінюють коченням за допомогою підшипників. Для сил тертя кочення виконується емпірична формула Кулона

$$f = \mu_K \frac{F_н}{r},$$

де μ_K — коефіцієнт тертя кочення, який вимірюється в одиницях довжини; r — радіус тіла, що котиться.

Найбільш поширений спосіб зменшення тертя полягає в заміні сухого тертя рідинним за допомогою мастил. При цьому мастила заповнюють впадини та тріщини тертьових поверхонь і утворюють між ними шар рідини. Заміна сухого тертя внутрішнім за допомогою мастил зменшує тертя у 8 — 10 разів.

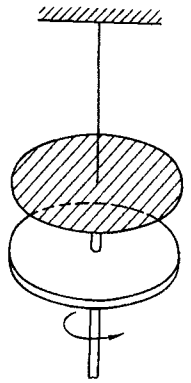


Рис. 5.3

Сили опору, що виникають під час руху твердого тіла в рідині або газі, називають силами рідинного або *в'язкого тертя*. Сили внутрішнього тертя зумовлені дією сил молекулярного зчеплення на межі двох шарів та перенесенням молекулами внаслідок хаотичного руху напрямленого імпульсу з одного шару в інший. Передавання руху між шарами рідини або газу можна спостерігати на досліді з двома дисками (рис. 5.3). Коли нижній диск привести в обертальний рух, то через певний час почне рухатись і верхній диск, який здійснить повертання на деякий кут. За кутом закручення можна робити висновок про силу внутрішнього тертя в середовищі між дисками.

І. Ньютон експериментальним шляхом встановив, що сила внутрішнього тертя між шарами пропорційна градієнту швидкості $\frac{dv}{dx}$ і площі шарів S, тобто

$$F = \eta \left(\frac{dv}{dx}\right) S, \tag{5.4}$$

де η — динамічний коефіцієнт внутрішнього тертя, або в'язкість, значення якого залежить від речовини та її температури.

Під градієнтом швидкості у формулі (5.4) розуміють зміну швидкості на одиницю довжини відстані між шарами.

За формулою (5.4) встановлюють одиницю в'язкості, якою в СІ є ньютон-секунда на квадратний метр $\left(\frac{Н \cdot с}{м^2}\right)$. Треба мати на увазі, що під час руху тіл у рідинах або газах, крім сил тертя, виникають так звані сили опору середовищ, які можуть значно перевищувати сили тертя. Дію сили тертя і сили опору під час руху тіл у рідинах або газах називатимемо силою тертя. Її залежність від швидкості показано на рис. 5.4, з якого видно, що при невеликих швидкостях сила тертя пропорційна швидкості

$$F = -k_1 v. \tag{5.5}$$

Знак мінус вказує на те, що сила напрямлена протилежно до швидкості. При більших швидкостях лінійна залежність переходить у квадратичну:

$$F = -k_2 v^2. \tag{5.6}$$

Швидкість, при якій залежність (5.5) переходить у (5.6), залежить від форми і розмірів тіла, а також від в'язких властивостей і густини середовища. Це означає, що точність формул (5.5) і (5.6) невисока. Для тіл сферичної форми, що рухаються у в'язких середовищах з невеликими швидкостями, точнішою формулою для визначення сили тертя є формула Стокса:

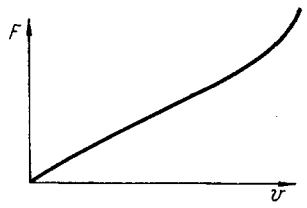


Рис. 5.4

$$F = 6\pi r\eta v, \tag{5.7}$$

де r — радіус кульки; η — в'язкість середовища.

При швидкостях, які більші за швидкість звуку в даному середовищі, залежність сили тертя від швидкості переходить у кубічну:

$$F = -k_3 v^3.$$

Здебільшого створюється уявлення про шкідливий характер тертя. Однак неможливо уявити передачу руху і зусиль від одного тіла до іншого при відсутності сил тертя. Слід зазначити, що сили тертя спокою, а іноді і сили тертя ковзання мають принципове значення при передаванні руху від одного тіла до іншого. Так, внаслідок сил тертя спокою не зазнають руйнування споруди, машини та механізми, які складаються із значної кількості елементів та деталей.

Приклад 5.1. Тіло масою m рухається із швидкістю v_0. Воно потрапляє у середовище, в якому на тіло діє сила в'язкого тертя, що пропорційна швидкості руху. Встановити закон його гальмування.

Розв'язання. За другим законом Ньютона запишемо

$$m\frac{dv}{dt} = -kv. \tag{1}$$

Звідси маємо

$$\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m}dt. \tag{2}$$

Проінтегрувавши вираз (2), дістанемо

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m}\int_0^t dt, \quad \ln v - \ln v_0 = -\frac{k}{m}t, \quad v = v_0 e^{-\frac{k}{m}t} = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}},$$

де $\tau = \frac{m}{k}$ — характерний для системи час, який називають часом релаксації.

Приклад 5.2. Знайти залежність сили опору повітря від швидкості руху автомобіля. Оцінити потужність двигуна, необхідну для виконання роботи проти сили опору повітря при швидкості автомобіля 100 км/год.

Розв'язання. Рухаючись із сталою швидкістю v, автомобіль штовхає перед собою повітря і надає йому кінетичної енергії $\frac{1}{2}\Delta m v^2$, де Δm — маса повітря, проштовхнутого за проміжок часу Δt. На шляху $v\Delta t$ автомобіль втрачає стільки ж енергії, але вона поповнюється за рахунок роботи двигуна. Отже, на виконання роботи проти сили опору повітря $F_{оп}$ автомобіль за час Δt витрачає енергію

$$\Delta E = \frac{1}{2}\Delta m v^2 = \frac{1}{2}(\rho_{пов} S v \Delta t)\, v^2,$$

де $\rho_{пов}$ — густина повітря; S — середнє значення площі поперечного перерізу автомобіля. Витрачена при цьому потужність

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{1}{2}\rho_{пов} S v^3. \tag{1}$$

Оскільки $P = F_{оп} v$, то для сили опору повітря отримуємо вираз

$$F_{оп} = \frac{1}{2}\rho_{пов} S v^2. \tag{2}$$

Зауважимо, що у формулі (2) S — середнє значення площі поперечного перерізу повітряної маси, яка рухається із швидкістю, що дорівнює або близька до швидкості автомобіля. Повітря над дахом і біля бокових дверей автомобіля "просковзує" мимо, набуваючи лише незначної швидкості.

Для оцінки потужності, яку витрачає автомобіль на роботу проти сили опору повітря при швидкості 100 км/год (28 м/с), припустимо, що для автомобіля $S = 1\text{м}^2$. Тоді при густині повітря 1,3 кг/м^3 обчислення за формулою (1) дають

$$P = \frac{1}{2}1{,}3 \cdot 1 \cdot 28^3 = 1{,}43 \text{ кВт}.$$

Зазначимо, що потрібна потужність зростає пропорційно кубу швидкості. Якщо автомобіль рухається зі швидкістю 120 км/год, його двигун повинен розвивати потужність в 1,73 раза більшу, тобто при такій швидкості потрібно 2,47 кВт.

§ 5.2. Сили пружності

Усі реальні тіла під дією прикладених сил змінюють свою форму і об'єм, тобто деформуються. Для твердих тіл розрізняють два граничних випадки *деформацій*: пружні і пластичні. Пружною називають деформацію, яка зникає після припинення дії прикладених сил. Пластичні — це деформації, які повністю або частково зберігаються в тілі після припинення дії зовнішніх сил. Буде деформація пружною чи пластичною залежить не тільки від природи тіла, а й від прикладених сил. Якщо сила не перевищує певної межі, яку називають межею пружності, то деформація буде пружною. Якщо зовнішні сили перевищують цю межу, то деформації будуть пластичними. Поділ тіл на пружні і пластичні певною мірою умовний. Усі деформації після припинення дії зовнішніх сил не зникають повністю, а тому є пла-

стичними. Проте в деяких тілах залишкові деформації незначні і їх можна вважати пружними.

Під час деформації тіла відбувається зміщення його частинок (атомів або молекул) відносно положень рівноваги в інші положення. Цим зміщенням протидіють сили взаємодії між частинками. Такі сили в механіці розглядають як внутрішні сили, що діють між окремими частинами деформованого тіла.

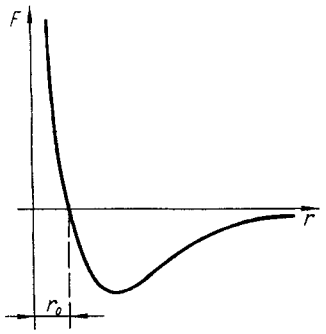


Рис. 5.5

На рис. 5.5 показано залежність сили взаємодії між атомами від відстані r між ними. Ці сили мають електричне походження і є результуючими сил притягання та відштовхування між зарядженими частинками. Ділянка кривої над віссю абсцис відповідає випадку, коли $r < r_0$ і частинки відштовхуються одна від одної. Оскільки ця ділянка кривої йде досить круто вгору, то з цього випливає, що незначне зближення частинок потребує великих зусиль. Для $r > r_0$ частинки притягуються. Для $r = r_0$ сила взаємодії між частинками дорівнює нулю, тобто сили притягання зрівноважуються силами відштовхування. Невелику ділянку кривої біля цього положення можна вважати прямою лінією. Тому при незначних зміщеннях частинок тіла від цього положення при деформації сила пропорційна зміщенню.

Коли пружна деформація встановиться, то результуюча внутрішніх пружних сил, що виникають у тілі у будь-якому його перерізі, зрівноважує прикладені до нього зовнішні сили. Тому при пружній деформації внутрішні пружні сили можна визначити через зовнішні сили, що діють на тіло. Внутрішні сили характеризують механічним напруженням. Воно дорівнює відношенню результуючих пружних сил до площі перерізу тіла, тобто

$$\sigma = f_{\text{пружн}}/S. \tag{5.8}$$

Напруження називають *нормальним*, якщо сила $f_{\text{пружн}}$ напрямлена перпендикулярно до поверхні S, і *тангенціальним*, якщо вона дотична до цієї поверхні.

§ 5.3. Основні види деформації. Закон Гука

Одним з найпростіших видів деформації є *деформація розтягу* або *стиску*. При цьому тіло зазнає зміни довжини. Якщо перед деформацією довжина стержня l_0 (рис. 5.6), а після деформації — l, то величину $\Delta l = l - l_0$ називають *абсолютною деформацією розтягу*. Очевидно, що для розтягу величина $\Delta l > 0$, для стиску — $\Delta l < 0$. Оскільки абсолютна деформація не вказує, яку частину становить зміна довжини стержня від початкової, вона не може характеризувати його деформованість. Мірою деформації є *відносна деформація*. Вона дорівнює відношенню абсолютної деформації до початкової довжини тіла:

$$\varepsilon = \Delta l / l_0. \tag{5.9}$$

За допомогою дослідів встановлено, що для незначних пружних деформацій механічне напруження пропорційне відносній деформації, тобто

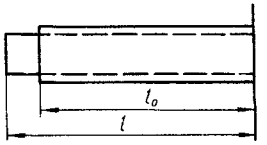


Рис. 5.6

$$\sigma = k\varepsilon, \tag{5.10}$$

де k — коефіцієнт пропорційності, який називають *модулем пружності*. Формула (5.10) виражає *закон Гука*. Її можна поширити на будь-які види пружних деформацій. Для деформації розтягу (стиску) формулу (5.10) запишемо у такому вигляді:

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{\Delta l}{l_0}, \tag{5.11}$$

де E — модуль *Юнга*, який залежить від матеріалу стержня і його фізичного стану. Якщо у формулі (5.11) прийняти $\Delta l = l_0$, то дістаємо, що $\sigma = E$. Тому модулю Юнга часто дають означення механічного напруження, при якому довжина стержня збільшиться вдвоє. Це означення має формальний характер, оскільки для таких великих деформацій закон Гука не виконується. Формулу (5.11) можна застосувати і для деформації стиску. При деформаціях розтягу або стиску відбувається зміна поперечних розмірів тіл, яку характеризують також відносним поперечним стиском або розтягом

$$\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d_0}, \tag{5.12}$$

де Δd — абсолютна зміна поперечних розмірів тіла; d_0 — поперечні розміри тіла до деформації. Відношення відносної поперечної деформації тіла до відносної поздовжньої деформації називають *коефіцієнтом Пуассона:*

$$\mu = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}. \tag{5.13}$$

Коефіцієнт Пуассона залежить тільки від матеріалу тіла і є однією із сталих, що характеризує пружні властивості тіла.

Модуль Юнга E і коефіцієнт Пуассона μ повністю характеризують пружні властивості ізотропних тіл. Для багатьох металів коефіцієнт $\mu \approx 0{,}25$.

Запишемо закон Гука для *деформації зсуву*. Візьмемо куб з однорідної ізотропної речовини (рис. 5.7), нижню грань якого закріплено нерухомо. Під час дії дотичної сили на верхню грань куба відбувається деформація зсуву і квадрат $ABCD$ перетворюється в ромб $AB'C'D$. Зсув шарів, паралельних верхній грані відносно нижнього шару, характеризують кутом зсуву γ, який називають *відносним зсувом*. При незначному зсуві

$$tg\,\gamma \approx \gamma = \frac{BB'}{AB}.$$

Якщо сила f рівномірно розподілена до площі верхньої грані, то у будь-якому перерізі, паралельному цій грані, виникають тангенціальні напруження

$$\tau = f / S,$$

де S — площа верхньої грані.

Закон Гука для деформації зсуву можна записати у такому вигляді:

$$\tau = G\varphi, \qquad (5.14)$$

де G — коефіцієнт пропорційності, який називають *модулем зсуву*. Він залежить тільки від властивостей матеріалу.

Деформації розтягу (стиску) і зсуву належать до однорідних деформацій, тобто до таких, коли всі малі елементи тіла деформовані однаково. Крім наведених видів деформацій є *деформації кручення і згину*, які належать до неоднорідних деформацій. У цих випадках деформація всередині тіла при переході від однієї точки до іншої неоднакова.

Візьмемо однорідну дротину, закріпимо верхній кінець нерухомо, а до нижнього кінця прикладемо сили, які створюють обертальний момент сил відносно осі дротини. Дротина зазнає деформації кручення. Її нижня основа повернеться відносно верхньої на кут φ (рис. 5.8). Закон Гука для деформації кручення запишемо так:

$$M = k\varphi, \qquad (5.15)$$

де k — стала для даної дротини величина, її називають *модулем кручення*. На відміну від величин E, G, μ, модуль кручення залежить не тільки від матеріалу, а й від геометричних розмірів тіл, які зазнають деформації кручення (див. приклад 5.4).

Більш складною деформацією є деформація згину. Розглянемо згин однорідного стержня довільного поперечного перерізу. Нехай до деформації стержень займав горизонтальне положення. Проведемо перерізи AB і $A'B'$ перпендикулярно до осі стержня і уявно виділимо з нього елемент $AA'B'B$ (рис. 5.9, *а*). При деформації згину лінії елемента AA', BB' можна вважати дугами кіл з центрами, що лежать на осі O, яка перпендикулярна до площини рисунка (рис. 5.9, *б*). Вісь O називають віссю згину. Зовнішні шари, що лежать вище від лінії NN', при згині зазнають видовження, а шари, що лежать нижче від

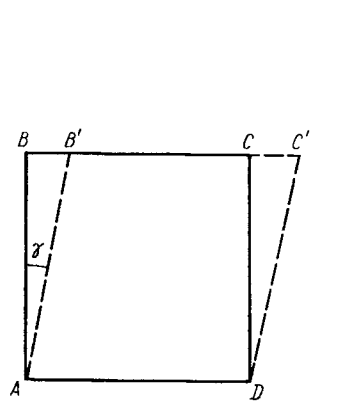


Рис. 5.7

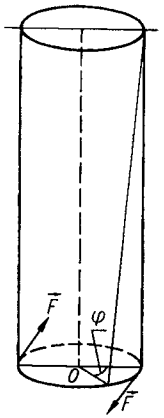


Рис. 5.8

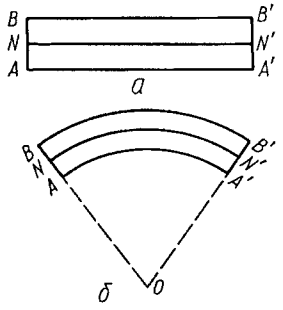


Рис. 5.9

лінії NN', зазнають стискання. Довжина шару, розміщеного вздовж лінії NN', залишається незмінною. Цю лінію називають нейтральною. Оскільки розтяг (стиск) різних шарів неоднаковий, то при деформації згину, крім деформації розтягу і стиску, спостерігатиметься деформація зсуву.

Приклад 5.3. Знайти відносну зміну об'єму циліндричного стержня при деформації розтягу, якщо до деформації його довжина була l_0 і діаметр d_0.

Розв'язання. Для всіх реальних тіл при деформації розтягу об'єм збільшується, а при деформації стиску — зменшується. За означенням відносна зміна об'єму тіла

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{V - V_0}{V_0}.$$

Позначимо довжину і діаметр стержня після деформації через l і d. Тоді

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{d^2 l - d_0^2 l_0}{d_0^2 l_0} = \frac{(d_0 - \Delta d)^2 (l + \Delta l) - d_0^2 l_0}{d_0^2 l_0}.$$

Нехтуючи величинами другого порядку малості, маємо

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \varepsilon\,(1 - 2\mu). \qquad (1)$$

При деформації розтягу об'єм тіла не може зменшитися і $\frac{\Delta V}{V_0} > 0$. При цьому також $\varepsilon > 0$. Тому коефіцієнт Пуассона $\mu \leqslant 0{,}5$.

Приклад 5.4. Знайти залежність модуля кручення від геометричних розмірів дротини та від модуля зсуву G.

Розв'язання. При закручуванні дротини нижня основа повернеться відносно верхньої на кут φ, а пряма BA повернеться на кут γ, який є кутом зсуву (рис. 5.10, *а*). Елементарний момент сил, що діє на елементарну площу dS,

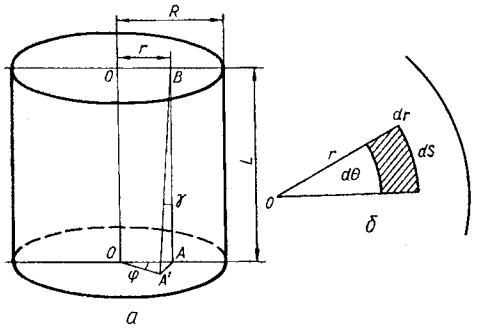


Рис. 5.10

$$dM = \tau dSr. \qquad (1)$$

З рис. 5.10, *б* маємо, що $dS = rd\Theta dr$. На основі формули (5.14) вираз (1) перепишемо у вигляді

$$dM = G\gamma r^2 dr d\Theta.$$

З рис. 5.10, *а* маємо $\gamma = \frac{r\varphi}{L}$. Тоді

$$dM = \frac{G}{L}\varphi\, r^3 dr d\Theta. \qquad (2)$$

Після інтегрування виразу (2) маємо

$$M = \frac{G}{L}\varphi \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\Theta = \frac{\pi G}{2}\frac{R^4}{L}\varphi. \qquad (3)$$

Порівнюючи останній вираз з (5.15), дістаємо

$$k = \frac{\pi}{2}\frac{G}{L}\frac{R^4}{L}. \qquad (4)$$

З виразу (3) видно, що момент сили M залежить від радіуса дротини R. Товсті короткі стержні важко піддаються закручуванню, а тонкі і довгі дротини під впливом навіть дуже малих моментів помітно закручуються. Це використовується для створення досить чутливих підвісних систем у вимірювальних приладах.

§ 5.4. Пружні властивості реальних тіл. Енергія пружної деформації. Пружний гістерезис

Усі реальні тіла можна вважати пружними тільки при досить малих деформаціях. Коли деформації перевищують деяку граничну величину, яка для різних тіл неоднакова, то властивості тіл значно відрізняються від властивостей абсолютно пружних тіл.

Пружні властивості реальних тіл залежно від їхньої деформації зручно вивчати за так званою діаграмою деформування. Вона являє собою графічну залежність між відносною деформацією розтягу ε і механічним напруженням σ, яку дістали експериментально. На рис. 5.11 зображено діаграму деформування для деформації розтягу металевого стержня. З цієї діаграми видно, що закон Гука виконується в досить вузьких межах зміни деформацій і напружень. Верхню межу напруження, при якій ще виконується лінійна залежність між ε і σ, називають *межею пропорційності* (ε_1, σ_1). При напруженнях, які вищі за σ_1 (від точки A до точки B (див. рис. 5.11)), деформація має ще пружний характер, але залежність між ε і σ нелінійна. Граничне напруження, при якому ще не виникає залишкова деформація, називають *межею пружності* (ε_2, σ_2). За межами пружності в тілах виникають деформації, що зберігаються і після припинення дії зовнішніх сил. Це так звана залишкова деформація. Тіло при припиненні дії зовнішніх сил повертається не в стан O, а в стан O'. Напруження, при якому виявляється помітна залишкова деформація (близько 0,2 %), називають *межею текучості* (точка C). За межею текучості при $\varepsilon > \varepsilon_2$ лежить *область текучості*. Для неї характерним є неперервне зростання деформації тіла з часом при майже сталому напруженні (ділянка CD).

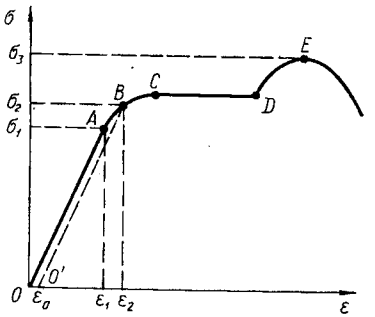


Рис. 5.11

Матеріали, для яких області текучості практично немає, називають крихкими (цегла, скло, фарфор та ін). При дальшому розтязі за точку D тіло знову чинить опір деформації. Максимальне напруження σ_3, що виникає в тілі перед початком його руйнування, називають *межею міцності*. При вищих напруженнях в одному із перерізів тіла його діаметр зменшується і утворюється шийка, в якій відбувається руйнування.

Якщо при першому деформуванні тіла напруження було більшим за межу пружності, то після припинення дії зовнішньої сили тіло повертається в стан O'. Якщо повторно деформувати тіло, то межа пружності його збільшиться. Зростання межі пружності тіла внаслідок його повторних деформацій називають зміцнюванням.

Пружність і пластичність тіл залежать також від температури, тиску і ряду інших умов, в яких тіла перебувають. Так, сталь пружна при звичайних умовах і пластична при високих температурах і тисках; свинець пластичний при кімнатній температурі і стає пружним при низьких температурах.

Характер деформації в тілі залежить також від часу дії зовнішньої сили. На рис. 5.12 показано криву залежності деформації від часу дії сталої сили. У момент прикладання сили швидко встановлюється деформація AB, потім вона повільно зростає по кривій BC. У момент припинення дії сили деформація різко зменшується на величину CD і потім повільно спадає по кривій DE. Це явище називають *пружною післядією*. Характер залежності $\varepsilon = f(\sigma)$, $\varepsilon = f(t)$ дає можливість не тільки вибрати матеріал з необхідними властивостями при конструюванні різних установок і приладів, а й встановлювати зв'язок механічних властивостей тіл з їхньою структурою.

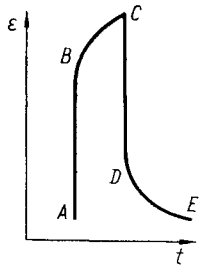


Рис. 5.12

Для деформації тіла треба, щоб прикладені до нього сили виконали роботу. В свою чергу, деформоване тіло здатне виконати роботу за рахунок енергії пружної деформації. Ця енергія дорівнюватиме роботі пружних сил, якщо не відбувається зміна кінетичної енергії тіла. Для цього деформацію необхідно здійснювати досить повільно і зовнішні сили поступово збільшувати так, щоб у будь-який момент часу кожна частина тіла практично перебувала в стані рівноваги, тобто зовнішні сили весь час повинні зрівноважуватися пружними силами. Знайдемо енергію тіла при його деформації розтягу (стиску). Прикладемо до стержня силу $F(x)$, яку будемо неперервно і повільно збільшувати від 0 до F. При цьому абсолютна деформація x змінюватиметься в межах від 0 до Δl.

На основі формул (5.8) і (5.11) маємо

$$F(x) = \frac{ES}{l_0} x. \tag{5.16}$$

Робота цієї сили при зміні величини x від 0 до Δl буде

$$A = \int_0^{\Delta l} F dx = \int_0^{\Delta l} \frac{ES}{l_0} x dx = \frac{ES}{2l_0} (\Delta l)^2. \tag{5.17}$$

Перепишемо цей вираз так:

$$A = \frac{1}{2} ESl_0 \left(\frac{\Delta l}{l_0}\right)^2 = \frac{1}{2} EV\varepsilon^2, \tag{5.18}$$

де $V = Sl_0$ — об'єм стержня. Тоді *енергія пружної деформації* розтягу

$$U = \frac{1}{2} EV\varepsilon^2. \tag{5.19}$$

Порівнюючи роботу, виконану зовнішніми силами, і потенціальну енергію деформованого стержня, вважаємо, що потенціальна енергія недеформованого стержня дорівнює нулю.

Знайдемо об'ємну густину енергії пружної деформації, тобто енергію, що припадає на одиницю об'єму розтягнутого або стиснутого стержня: $w = U / V$. З (5.19) маємо

$$w = \frac{1}{2} E\varepsilon^2. \tag{5.20}$$

Аналогічно можна записати вираз для об'ємної густини енергії пружної деформації зсуву:

$$w = \frac{1}{2} G\varphi^2. \tag{5.21}$$

Якби до недеформованого тіла відразу прикласти силу F, то при видовженні стержня на Δl виконувалась би робота удвоє більша, тобто $EV\varepsilon^2$. Оскільки енергія пружної деформації дорівнює половині цієї роботи, то друга її половина витрачається на кінетичну енергію пружних коливань, які при цьому будуть збуджені у стержні.

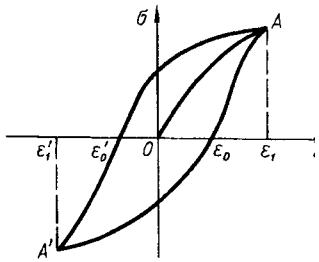


Рис. 5.13

Як уже зазначалося, коли механічні напруження досягають межі пружності (σ_2, рис. 5.11), а потім зменшуються до нуля, то відносна деформація повністю не зникає, а зменшується до ε_0. При зміні деформації від 0 до ε_1 зовнішні сили виконують роботу, величина якої пропорційна площі фігури $OA\varepsilon_1 O$ на діаграмі розтягу (рис. 5.13). За рахунок цієї роботи виникає енергія пружної деформації. При зменшенні деформації від ε_1 до 0 пружні сили за рахунок енергії пружної деформації виконують роботу, величина якої пропорційна площі фігури $A\varepsilon_0\varepsilon_1 A$. Якщо змінити напрям дії сили і проводити деформацію у зворотному напрямі, досягши такого самого значення відносної деформації ε'_1, то робота зовнішньої сили буде пропорційною площі фігури $\varepsilon_0 A'\varepsilon'_1\varepsilon_0$. При зменшенні зовнішньої сили до нуля робота пружної сили буде пропорційною площі фігури $A'\varepsilon'_1\varepsilon'_0 A'$.

Якщо здійснити повний цикл деформації тіла, то робота зовнішньої сили за цикл буде пропорційна площі фігури $A'\varepsilon'_1\varepsilon'_0 A\varepsilon_1\varepsilon_0 A'$. Робота пружної сили за той самий цикл буде пропорційною сумі площ фігур $A\varepsilon_1\varepsilon_0 A$ і $A'\varepsilon'_1\varepsilon'_0 A'$. Протягом циклу робота зовнішньої сили буде більшою від роботи пружної сили за той самий час на величину, що пропорційна площі фігури $A\varepsilon_0 A'\varepsilon_0 A$, яку називають *петлею пружного*

гістерезису. Різниця цих робіт витрачається на подолання сил внутрішнього тертя в тілі і в результаті поповнює запас енергії молекулярно-теплового руху всередині тіла. Тому чим ширша для даного матеріалу петля гістерезису, тим більше нагрівається виготовлена з нього деталь при її періодичних деформаціях. Деталі машин, які зазнають швидких періодичних деформацій, виготовляють із спеціальних сортів сталі, для яких петля гістерезису досить вузька.

Розділ 6. Всесвітнє тяжіння

§ 6.1. Рухи планет. Закони Кеплера

Спостереження за рухом планет серед нерухомих зірок почалися ще у стародавні часи. Протягом багатьох століть створювались різні моделі сонячних систем, центром яких вважали нерухому Землю. Одна з таких геоцентричних систем належить давньогрецькому вченому К. Птолемею (II ст. н. е.). Поступово ускладнювались описання орбіт, по яких рухаються планети. Польський астроном М. Коперник (1473 — 1543) показав, що орбіти планет мають значно простіший вигляд, якщо за центр сонячної системи прийняти Сонце. На думку Коперника Земля не може бути в центрі Всесвіту і не може бути нерухомою — це планета і вона разом з іншими планетами обертається навколо Сонця.

Датський астроном Т. Браге (1546 — 1601) не міг прийняти систему Коперника, незважаючи на її простоту. Він створив іншу геоцентричну систему, в якій Сонце обертається навколо Землі, а інші планети — навколо Сонця. З метою перевірки запропонованих астрономічних моделей Т. Браге протягом довгого часу вимірював положення нерухомих зірок і визначав переміщення планет на небі. Він склав обширний каталог положень зірок і планет з такою точністю, що його спостереження використовуються до цього часу. Точні дані про рухи планет, на думку Т. Браге, дадуть можливість точно описати їхні орбіти і з двох астрономічних моделей вибрати одну. Цю задачу після смерті Т. Браге розв'язав один з його учнів, німецький вчений Й. Кеплер (1571 — 1630).

Й. Кеплер дотримувався ідеї Коперника, за якою Земля обертається навколо своєї осі і разом з тим обертається навколо Сонця по певній орбіті. Тому дані спостережень Т. Браге він аналізував у системі координат, зв'язаній з нерухомим Сонцем. Після кропітких і тривалих обчислень Й. Кеплер дістав один із своїх найважливіших результатів: кожна планета рухається по еліптичній орбіті, у одному із фокусів якої знаходиться Сонце. Відкинувши попередні уявлення про рівномірні рухи планет, Й. Кеплер припустив, що швидкість руху планети по її орбіті навколо Сонця може змінюватись, і отримав ще

один не менш важливий результат: пряма, проведена від Сонця до планети, описує рівні площі за однакові проміжки часу. Ці два відкриття тепер називаються першим і другим законами Кеплера.

Третій закон був відкритий Кеплером значно пізніше, він стосується не однієї планети, а встановлює зв'язок між періодами обертання різних планет навколо Сонця і розмірами їхніх орбіт. Отже, три закони Кеплера формулюються так:

1. Кожна планета рухається навколо Сонця по еліпсу, в одному із фокусів якого міститься Сонце.

2. Радіус-вектор, проведений від Сонця до планети, описує рівні площі за однакові проміжки часу.

3. Квадрати періодів обертання планет навколо Сонця відносяться як куби великих півосей їхніх еліптичних орбіт.

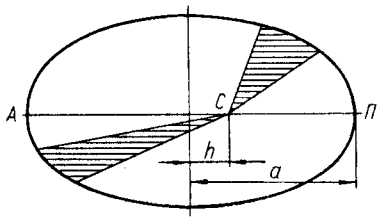


Рис. 6.1

При обертанні планет навколо Сонця їхня відстань до Сонця змінюється. Точку $П$ орбіти, що знаходиться найближче до Сонця, називають *перигелієм*, а діаметрально протилежну їй точку A називають *афелієм* (рис. 6.1). Із закону рівності площ випливає, що швидкість руху планет біля перигелію найбільша, а біля афелію найменша. Зауважимо, що еліптичність орбіт різних планет Сонячної системи різна. Кількісно еліптичність орбіти характеризують ексцентриситетом, під яким розуміють відношення фокусної відстані h до великої півосі a (рис. 6.1). Переважна більшість планет має ексцентриситет орбіт, менший ніж 0,1. Так, для Венери ексцентриситет 0,006, для Нептуна 0,008, а для Землі 0,016. Це вказує на те, що орбіти планет Сонячної системи майже колові.

Якщо періоди обертання двох планет навколо Сонця відповідно дорівнюють T_1 і T_2, а великі півосі їхніх орбіт — a_1 і a_2, то третій закон Кеплера математично записується у такому вигляді:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}. \qquad (6.1)$$

§ 6.2. Закон всесвітнього тяжіння

Закони Кеплера, знайдені емпірично, дали можливість І. Ньютону встановити закон всесвітнього тяжіння. Оскільки планети рухаються майже по колових орбітах, їхні доцентрові прискорення

$$a_n = \omega^2 R = \frac{4\pi^2}{T^2} R, \tag{6.2}$$

де T — період обертання; R — радіус колової орбіти планети.

Відношення прискорень для будь-яких двох планет

$$\frac{a_{n_1}}{a_{n_2}} = \frac{T_2^2}{T_1^2} \cdot \frac{R_1}{R_2}. \tag{6.3}$$

На основі закону (6.1) співвідношення (6.3) можна записати як

$$\frac{a_{n_1}}{a_{n_2}} = \frac{R_2^2}{R_1^2}. \tag{6.4}$$

На основі другого закону динаміки вираз (6.4) можна записати так:

$$\frac{F_1}{m_1} : \frac{F_2}{m_2} = \frac{R_2^2}{R_1^2} \quad \text{або} \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{m_1}{R_1^2} : \frac{m_2}{R_2^2}. \tag{6.5}$$

Звідси випливає, що сила, яка діє з боку Сонця на планету, прямо пропорційна масі планети і обернено пропорційна квадрату її відстані до Сонця, тобто

$$F = k \frac{m}{R^2}, \tag{6.6}$$

де k — коефіцієнт пропорційності, який однаковий для всіх планет Сонячної системи. Коефіцієнт k залежить тільки від властивостей прискорюючого тіла, в даному разі Сонця.

За третім законом динаміки планети діють на Сонце з силами

$$F = k_1 \frac{M}{R^2}, \tag{6.7}$$

де M — маса Сонця; k_1 — коефіцієнт пропорційності, величина якого залежить тільки від маси планети. Оскільки співвідношення (6.6) і (6.7) виражають однакової природи сили взаємного притягання двох тіл, то можна зробити висновок, що сила взаємодії між планетою і Сонцем прямо пропорційна масі як одного, так і другого тіла, тобто пропорційна добутку їхніх мас і обернено пропорційна квадрату відстані між ними:

$$F = \gamma \frac{mM}{R^2}, \tag{6.8}$$

де γ — коефіцієнт пропорційності, який називають *гравітаційною сталою.*

Перевірку припущення про те, що сила обернено пропорційна квадрату відстані, І. Ньютон здійснив на основі спостережень за рухом Місяця. Наступна перевірка цієї ідеї на рухах супутників Юпітера показала, що між планетами та їхніми супутниками діють сили того самого характеру, що й між Сонцем і планетами. Це дало можливість І. Ньютону зробити висновок, що такого самого характеру сили діють між будь-якими тілами. Такі самі сили тяжіння діють з боку Землі на тіла, що знаходяться на її поверхні або поблизу неї.

Математичний запис *закону всесвітнього тяжіння* (6.8) справджується для випадку, коли тіла можна вважати матеріальними точками, тобто коли розмірами взаємодіючих тіл можна нехтувати порівняно з відстанню між ними. У векторній формі закон тяжіння записується у вигляді

$$\vec{F}_{12} = \gamma \frac{m_1 m_2}{R_{12}^3} \vec{R}_{12}, \tag{6.9}$$

де $\vec{F}_{12}$ — сила притягання, що діє на матеріальну точку масою m_1; $\vec{R}_{12}$ — радіус-вектор, проведений з цієї точки в точку, де міститься маса m_2.

Якщо розміри взаємодіючих тіл мають порядок відстані між ними, то тіла вважати точковими неможливо. Для визначення сили притягання між ними кожне тіло у думці поділяють на елементи, які можна вважати матеріальними точками. Тоді сила взаємодії між двома елементами

$$\Delta\vec{F}_{ik} = \gamma \frac{\Delta m_i \Delta m_k}{R_{ik}^3} \vec{R}_{ik}, \tag{6.10}$$

де Δm_i — i-й елемент першого тіла; m_k — k-й елемент другого тіла.

Сила взаємодії i-го елемента першого тіла з усіма k-ми елементами другого тіла визначається як

$$\Delta\vec{F}_{ik} = \sum_k \Delta\vec{F}_{ik} = \gamma \Delta m_i \sum_k \frac{\Delta m_k}{R_{ik}^3} \vec{R}_{ik}. \tag{6.11}$$

Сила, з якою друге тіло діє на перше,

$$\vec{F}_{12} = \sum_i \vec{F}_{i2} = \gamma \sum_i \sum_k \frac{\Delta m_1 \Delta m_k}{R_{ik}^3} \vec{R}_{ik}. \tag{6.12}$$

Розрахунки показують, що формулу (6.8) можна застосовувати не тільки для точкових тіл, а й для взаємодії однорідних тіл сферичної форми. У цьому разі точковими можна вважати тіла, маса яких зосереджена в їхніх геометричних центрах.

Характерним для *сил тяжіння* є те, що вони не залежать від природи взаємодіючих тіл.

У часи І. Ньютона закон тяжіння підтверджувався тільки астрономічними спостереженнями за рухом планет та їхніх супутників. Тепер справедливість закону тяжіння перевірена для всіх випадків взаємодіючих тіл, починаючи від таких об'єктів, як елементарні частинки, і кінчаючи найбільшими астрономічними скупченнями. На основі закону всесвітнього тяжіння І. Ньютону вдалось оцінити відношення мас небесних тіл (маси Юпітера до маси Сонця, маси Землі до маси Сонця). Масу кожного тіла окремо він не зміг визначити, оскільки на той час була невизначеною гравітаційна стала γ.

І. Ньютон пояснив виникнення припливів і відпливів, що відбуваються внаслідок дії сили тяжіння з боку Місяця. Схематично це можна пояснити так. Вважатимемо, що Земля покрита рівномірним шаром води (рис. 6.2). Внаслідок різних відстаней точок A, B і C від Місяця їхні прискорення будуть різними. Шар води поблизу точки A матиме більше прискорення, ніж шар води поблизу точки C. Отже, шари води поблизу точки A випереджатимуть земну кулю, а шари

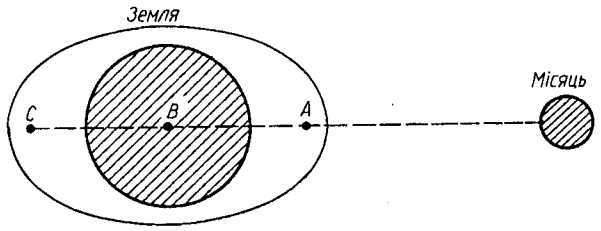


Рис. 6.2

води біля точки C, навпаки, відставатимуть. Це приводить до того, що на лінії, яка з'єднує центри Місяця і Землі (див. рис. 6.2), утворюються два виступи (припливи), які переміщуються навколо Землі при її обертанні навколо власної осі. В цей самий час на кінці діаметра земної кулі, перпендикулярного до лінії AC, рівень води знизиться, тобто буде відплив. Отже, на земній кулі, де проходить лінія AC, двічі на добу відбуватимуться припливи. Відповідно двічі на добу відбуватимуться і відпливи. Справжня картина припливів і відпливів значно складніша. Це зумовлено рухом Місяця навколо Землі, наявністю сил тертя, сил Коріоліса, сили тяжіння з боку Сонця. Крім того, земна куля не вся вкрита водою.

На основі закону тяжіння проводять розрахунки траєкторії руху небесних тіл та космічних кораблів. За його допомогою обчислюють маси небесних тіл та інших планет і періоди їхнього обертання.

Приклад 6.1. Показати, що прискорення, з яким рухається Місяць по коловій орбіті навколо Землі, обчислене за кінематичними формулами і рівняннями динаміки, має те саме значення.

Р о з в ' я з а н н я. Якщо вважати, що Місяць рухається навколо Землі по коловій орбіті, то він має доцентрове прискорення

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2}, \tag{1}$$

де R і T — радіус орбіти Місяця і період його обертання навколо Землі. Величини R і T відомі на основі астрономічних спостережень. Тоді $a = 0{,}27\text{см}/\text{с}^2$.

Оскільки доцентрове прискорення Місяця зумовлене силою тяжіння Землі $F = \gamma \frac{mM}{R^2}$, де m і M — відповідно маси Місяця і Землі, то, за другим законом Ньютона,

$$a = \frac{F}{m} = \gamma \frac{M}{R^2}. \tag{2}$$

Тілам, піднятим над поверхнею Землі, сила земного тяжіння надає прискорення

$$g = \gamma \frac{M}{R_3^2}, \tag{3}$$

де R_3 — радіус Землі.

З формул (2) і (3) дістаємо, що

$$a = g\left(\frac{R_3}{R}\right)^2. \tag{4}$$

Оскільки відстань від Землі до Місяця R дорівнює 60 земним радіусам, тобто $R = 60R_3$, а $g = 9{,}8\ \text{м}/\text{с}^2$, то з формули (4) маємо

$$a = g\left(\frac{R_3}{60R_3}\right)^2 = 0{,}27\text{см}/\text{с}^2.$$

Отже, прискорення, якого надає Земля Місяцю, визначене на основі закону тяжіння, збігається з результатом, що його дістають на основі кінематичних дослідних даних. Збігання цих результатів, знайдених різними методами, є одним з доказів справедливості закону тяжіння.

Приклад 6.2. Визначити прискорення вільного падіння a на поверхні Сонця, якщо відомі радіуси земної орбіти $R = 150 \cdot 10^6$ км, Сонця $r = 7 \cdot 10^5$ км і період обертання Землі навколо Сонця T.

Р о з в ' я з а н н я. Прискорення вільного падіння на поверхні Сонця можна обчислити за формулою

$$a = \gamma \frac{M_C}{r^2}, \tag{1}$$

де M_C — маса Сонця.

Оскільки рух Землі навколо Сонця відбувається майже по коловій орбіті, то сила притягання Землі Сонцем відіграватиме роль доцентрової сили, тобто

$$\gamma \frac{M_3 M_C}{R^2} = M_3 \frac{4\pi^2}{T^2} R, \quad \text{або} \quad \gamma M_C = \frac{4\pi^2}{T^2} R^3. \tag{2}$$

Підставивши вираз (2) в (1), дістанемо

$$a = \frac{4\pi^2}{T^2 r^2} R^3 = 276{,}4\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \approx 28g,$$

де g — прискорення вільного падіння на поверхні Землі.

§ 6.3. Гравітаційна стала. Гравітаційна та інертна маси

Фізичний зміст коефіцієнта пропорційності у формулі (6.8), який називають гравітаційною сталою, неважко встановити. Для цього у виразі закону тяжіння покладемо $m_1 = m_2 = 1$кг, $r = 1$м. Тоді $F = \gamma$, тобто гравітаційна стала чисельно дорівнює силі взаємодії двох матеріальних точок з масами 1 кг, що знаходяться на відстані 1 м. Оцінка величини γ на основі припущень про середню густину Землі показала, що гравітаційне притягання між тілами звичайних розмірів, тобто в лабораторних умовах, дуже мале. Це свідчить про те, що для визначення γ потрібні досить точні і складні експерименти.

Вперше експериментально довів справедливість закону гравітаційного притягання в земних умовах, а також визначив гравітаційну сталу γ англійський вчений Г. Кавендіш (1731 — 1810). Для визначення було використано крутильні терези. Основна частина терезів — однорідний стержень-коромисло завдовжки l, підвішений на тонкій пружній нитці a (рис. 6.3). На кінцях стержня прикріплювали дві однакові свинцеві кульки, маси яких $m_1 = m_2 = 730$г. З різних боків цих кульок розміщали дві інші великі свинцеві кулі, маси яких $M_1 = M_2 = 158$кг. Внаслідок гравітаційної взаємодії між кулями m_1 і M_1, m_2 і M_2 коромисло починає повертатися навколо осі, що проходить через нитку підвісу, на деякий кут φ. Оскільки довжина l стержня значно більша від відстані між центрами мас куль m_1 і M_1, m_2 і M_2, то гравітаційною взаємодією між кулями m_1 і M_2, m_2 і M_1 можна знехтувати. Закручування нитки підвісу відбувається доти, доки момент пари сил гравітаційної взаємодії не зрівноважиться моментом пружної сили закручування нитки $M = k\varphi$. Кут φ визначали за відхиленням відбитого променя від дзеркальця A. Модуль кручення k визначили в результаті спостережень за вільними коливаннями коромисла. Щоб конвекційні потоки повітря не впливали на результати вимірювань, Г. Кавендіш розмістив експериментальну установку в закритому ящику, який знаходився у закритій кімнаті. Спостереження і вимірювання проводились з іншого приміщення за допомогою телескопа. Дослід Кавендіша не раз повторювався в різних варіантах. Точніше значення γ визначено методом, що запропонував німецький фізик Ф. Жоллі (1809 — 1884). На одному з плечей важільних терезів

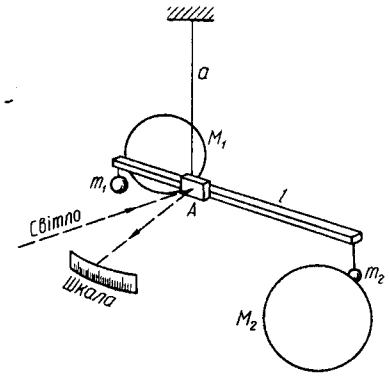


Рис. 6.3

підвішували дві чашки (рис. 6.4), між якими розміщали важке свинцеве тіло правильної геометричної форми. Коли на верхню чашку покласти тіло масою m, то на нього діє сила $F_1 = mg + F$, де F — сила гравітаційного притягання між тілами масами m і M. Якщо покласти тіло масою m на нижню чашку, то на нього діятиме сила $F_2 = mg - F$. Сили F_1 і F_2 визначають за допомогою важків, які потрібні для зрівноваження терезів. На основі цих вимірювань знаходять

$$\gamma = \frac{F_1 - F_2}{2Mm} r^2,$$

де r — відстань між центрами мас m і M.

За сучасними даними, гравітаційна стала $\gamma = 6{,}67259(85) \cdot 10^{-11}\text{м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$.

Оскільки значення гравітаційної сталої мале, то гравітаційне притягання може бути значним для тіл досить великих мас. Внаслідок дії сил гравітаційного притягання здійснюється рух всіх небесних тіл.

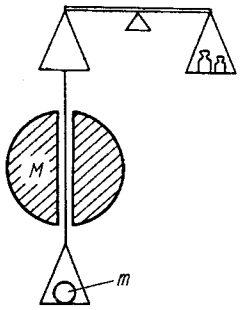


Рис. 6.4

Знання гравітаційної сталої γ дало можливість визначити масу Місяця, Сонця та інших небесних тіл.

До другого закону динаміки входить фізична величина — маса тіла, яка характеризує інерційні властивості тіла, його здатність набувати прискорення під дією сил. Цю масу називають інертною.

До формули закону всесвітнього тяжіння також входить маса, яка характеризує гравітаційні властивості тіл, тобто їхню здатність діяти на інші тіла з силами тяжіння, а також зазнавати дії сил тяжіння з боку інших тіл. Маса у законі всесвітнього тяжіння характеризує здатність тіл створювати поля тяжіння, а також виражає міру дії на тіла з боку інших гравітаційних полів. Таку масу називають *гравітаційною*, або важкою. Гравітаційна і інертна маси є характеристиками різних властивостей тіл, оскільки другий закон Ньютона і закон всесвітнього тяжіння незалежні один від одного. У зв'язку з цим виникає питання, чи потрібно кожне тіло характеризувати окремо інертною і важкою масами. Відповідь на це запитання та про співвідношення між цими масами може дати тільки експеримент.

Будь-яке тіло поблизу поверхні Землі зазнає дії сили притягання Землі

$$F = \gamma \frac{m_\text{т} M_\text{З}}{R_\text{З}^2},$$

де $m_\text{т}$ — гравітаційна маса тіла; $M_\text{З}$ — гравітаційна маса і $R_\text{З}$ — радіус Землі.

Під дією цієї сили тіло набуває прискорення a, яке повинно дорівнювати F, поділеній на інертну масу тіла m_i, тобто

$$a = \gamma \frac{M_З}{R_З^2} \cdot \frac{m_г}{m_i}. \qquad (6.13)$$

Досліди Галілея та його послідовників показали, що при вільному падінні різні тіла мають однакове прискорення $a = g$. Множник $\gamma M_З / R_З^2$ для даного місця земної поверхні сталий і не залежить ні від гравітаційної, ні від інертної мас тіл, які падають. З цього випливає, що відношення $m_г/m_i$ повинно бути для всіх тіл однаковим. Це означає, що гравітаційна та інертна маси кожного тіла пропорційні між собою, отже, при відповідному виборі одиниць можна добитися, щоб коефіцієнт пропорційності дорівнював одиниці, тобто

$$m_г = m_i = m. \qquad (6.14)$$

Тому у фізиці говорять просто про масу тіла, і під цим розуміють фізичну величину, яка є мірою інертних властивостей матерії і одночасно є мірою її гравітаційних властивостей. Ще І. Ньютон експериментально підтвердив рівність (6.14) з точністю до 10^{-3}. Угорський фізик Р. Етвеш (1848 — 1919) значно підвищив точність експерименту і перевірив рівність (6.14) з точністю до 10^{-8}. Тепер ця рівність підтверджена з точністю до 10^{-12}. Незважаючи на досягнуту високу точність перевірки рівності гравітаційної і інертної мас, дослідження тривають. Це зумовлено тим, що рівність гравітаційної та інертної мас покладено як постулат в основу загальної теорії відносності або теорії тяжіння, яку створив А. Ейнштейн.

§ 6.4. Поле тяжіння. Напруженість гравітаційного поля

І. Ньютон обмежився констатуванням наявності гравітаційних сил та кількісним описанням їх. Він утримався від будь-яких висловлювань про фізичну природу цих сил. І. Ньютон та ряд інших вчених намагалися розкрити механізм гравітаційних взаємодій. Жодна з цих спроб не розв'язувала поставленої проблеми. Теорія тяжіння знайшла свій дальший розвиток у загальній теорії відносності Ейнштейна. Однак у теорії Ейнштейна йдеться про новий спосіб описання тяжіння та про узагальнення закону тяжіння Ньютона, а не про фізичну природу гравітаційної взаємодії.

Під час вивчення взаємодії (гравітаційної, електричної, магнітної та інших) виникають запитання, як здійснюється передавання дії і чи відбуваються які-небудь зміни в просторі навколо тіла?

У процесі розвитку фізики існували два протилежні принципи пояснення цих питань. З часів І. Ньютона аж до початку XX ст. в механіці панував так званий принцип далекодії. Згідно з цим принципом вважалося, що матеріальні тіла взаємодіють із силами тяжіння безпосередньо на відстані без участі середовища, що заповнює простір між тілами. Крім того, вважалося, що сили взаємодії передаються від одного тіла до іншого миттєво. Згідно з принципом далекодії, наявність матеріальних тіл не приводить до будь-яких змін у просторі, що оточує його.

Сучасна фізика відкидає принцип далекодії як такий, що не відповідає дійсності, і стверджує тільки принцип близькодії.

Справді, припущення можливості передавання силових взаємодій, тобто руху, через пустоту без участі матерії рівнозначне припущенню можливості руху без матерії, що неможливо.

Згідно з принципом близькодії, гравітаційна взаємодія здійснюється не безпосередньо між тілами, що взаємодіють, а передається за допомогою поля тяжіння. *Поле тяжіння* — це особливий вид матерії, яка відрізняється від речовини. Поле тяжіння існує одночасно з матеріальними тілами. Для кожного матеріального об'єкта існує своє поле тяжіння.

За сучасними уявленнями гравітаційна взаємодія між тілами відбувається не безпосередньо: поле тяжіння першого тіла діє на друге тіло, а поле тяжіння другого тіла — на перше тіло.

Про те, що поле тяжіння — це один із видів матерії, свідчать численні експерименти. Поле тяжіння існує в просторі і в часі об'єктивно, може діяти на наші органи чуття через покази різних приладів. Так, покази ваг вказують на значення сил тяжіння, що діють на тіла, які зважують.

Під дією сил поля тяжіння тіла зазнають переміщень. При цьому поле тяжіння виконує певну роботу, яку можна виконати за рахунок енергії поля. Це означає, що поле тяжіння має певну енергію а отже, і масу, яка пропорційна енергії.

Таким чином, поле тяжіння — це не абстрактне поняття, а фізична сутність з певними фізичними властивостями, йому притаманні енергія і відповідна маса.

Поле тяжіння проявляє себе в тому, що на тіло масою m, розміщене в будь-якій точці поля, діє сила гравітаційної взаємодії. Так, поле тіла масою M діє на тіло масою m з силою

$$\vec{F} = -\gamma \frac{Mm}{R^3} \vec{R}, \qquad (6.15)$$

де $\vec{R}$ — радіус-вектор, проведений від центра мас M у точку розміщення тіла масою m, яке вважають точковим.

Неважко побачити, що величина

$$\frac{\vec{F}}{m} = -\gamma \frac{M}{R^3} \vec{R} \qquad (6.16)$$

є однозначною характеристикою поля тяжіння, оскільки вона не залежить від маси m, а визначається масою M тіла, що створює поле, і радіусом-вектором $\vec{R}$ точки поля. Величину (6.16) називають *напруженістю поля* тяжіння

$$\vec{G} = -\gamma \frac{M}{R^3}\vec{R}. \qquad (6.17)$$

Звідси видно, що напруженість є силовою характеристикою поля тяжіння. Вона чисельно дорівнює силі, яка діє на одиницю маси точкового тіла, внесеного в дану точку поля. Напруженість — величина векторна, напрям якої збігається з напрямом вектора сили тяжіння.

З формул (6.16), (6.17) та з другого закону динаміки випливає, що напруженість поля тяжіння чисельно дорівнює прискоренню тіла, якого воно набуває під дією сили тяжіння. Так, для точок біля поверхні Землі напруженість поля дорівнює прискоренню вільного падіння

$$\vec{g} = \vec{G} = -\gamma \frac{M_3}{R_3^3}\vec{R}_3, \qquad (6.18)$$

де R_3 — радіус Землі.

З формули (6.18) випливає, що прискорення вільного падіння тіл не залежить від їхньої маси.

Напруженість поля тяжіння графічно зображують за допомогою силових ліній, або *ліній напруженості.* Лінією напруженості називають лінію, дотична до якої в будь-якій точці збігається з напрямом вектора напруженості. Лініям напруженості надають напряму, який збігається з напрямом вектора напруженості в тих точках, через які проведена силова лінія.

Поле називають *однорідним,* якщо в усіх його точках вектор напруженості $\vec{G}$ сталий як за модулем, так і за напрямом. Прикладом однорідного поля може бути поле поблизу поверхні Землі, коли відстань від точок поля до поверхні Землі значно менша від її радіуса.

Лінії напруженості можуть починатися і закінчуватися на тілах як джерелах і стоках поля, а також сягати у нескінченність, оскільки поле існує на будь-якій відстані від його джерела.

Поле називають центральним, якщо у кожній його точці вектор напруженості напрямлений вздовж радіуса, проведеного з центра поля, а абсолютне значення сили, що діє на матеріальну точку, залежить тільки від модуля відстані до центра поля. Прикладом центрального поля є поле нерухомої матеріальної точки.

Якщо поле створюється системою тіл, то результуюча напруженість дорівнює векторній сумі напруженостей полів, створених кожним тілом окремо, тобто

$$\vec{G} = \sum_{i=1}^{n} \vec{G}_i. \qquad (6.19)$$

Співвідношення (6.19) виражає *принцип суперпозиції* (накладання) гравітаційних полів. За принципом суперпозиції можна визначити напруженість поля, створеного точковими тілами.

Для тіл скінченних розмірів також застосовний принцип суперпозиції, однак для розрахунків напруженості поля виникає ряд утруднень математичного характеру. Значно спрощується розрахунок напруженостей полів тіл скінченних розмірів за допомогою теореми Остроградського — Гаусса. Для цього введемо поняття потоку вектора напруженості $\Delta\Phi$ через елемент площі ΔS (рис. 6.5):

$$\Delta\Phi = \vec{G}\, dS\vec{n}, \qquad (6.20)$$

де $\vec{n}$ — одиничний вектор, нормальний до елемента ΔS. Вибір додатного напряму вектора $\vec{n}$ довільний. Якщо в полі виділяється об'єм,

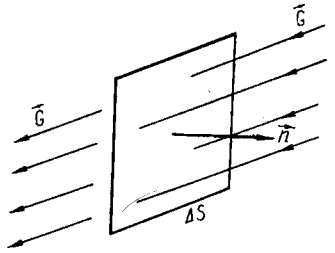


Рис. 6.5

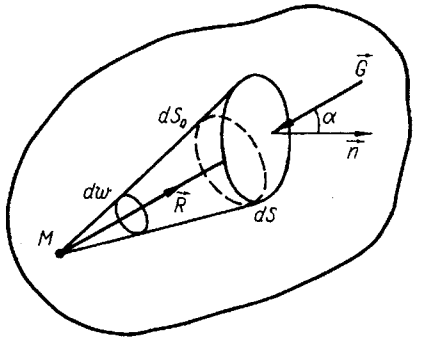


Рис. 6.6

обмежений деякою поверхнею, то за додатний напрям $\vec{n}$ беруть напрям зовнішньої нормалі. Потік буде додатним, якщо лінії напруженості виходять назовні з виділеного об'єму, обмеженого поверхнею.

Знайдемо потік ліній напруженості через замкнену поверхню, яка охоплює точкове тіло масою M (рис. 6.6). Виділимо елемент площі таких розмірів, щоб можна було вважати в її межах напруженість $\vec{G}$ сталою як за напрямом, так і за величиною. Тоді елементарний потік напруженості $d\Phi$ через площу dS визначається таким співвідношенням:

$$d\Phi = -\gamma \frac{M}{R^3}\vec{R}\, dS\vec{n} = -\gamma \frac{M}{R^2} dS\cos\alpha = -\gamma \frac{M}{R^2} dS_0, \qquad (6.21)$$

де dS_0 — проекція dS на площину, перпендикулярну до радіуса-вектора $\vec{R}$; α — кут між радіусом-вектором $\vec{R}$ і вектором $\vec{n}$. Оскільки величина

$$\frac{dS_0}{R^2} = d\omega$$

є тілесний кут, під яким видно елемент dS з місця розташування точкового тіла, то вираз (6.21) можна переписати у вигляді

$$d\Phi = -\gamma M d\omega. \tag{6.22}$$

Повний потік через замкнену поверхню знаходимо за допомогою інтегрування виразу (6.22). Тоді

$$\Phi = -\int_0^{4\pi} \gamma M d\omega = -4\pi\gamma M. \tag{6.23}$$

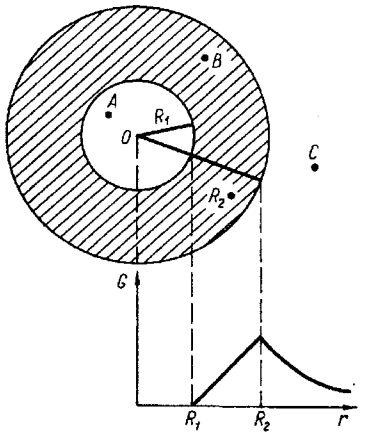


Рис. 6.7

У загальному випадку, коли поверхня охоплює сукупність тіл, маси яких $M_1, M_2, \ldots, M_n$, то теорема Остроградського — Гаусса запишеться у такому вигляді:

$$\Phi = -4\pi\gamma \sum_{i=1}^{n} M_i. \tag{6.24}$$

Приклад 6.3. На рис. 6.7 зображено кулю, радіус якої R_2. У ній є порожнина, обмежена поверхнею сфери радіуса R_1. Її центр збігається з центром кулі O. Визначити напруженість гравітаційного поля в точках, для яких $r < R_1$; $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$ і $r > R_2$. Маса кулі m.

Розв'язання. У порожнині виберемо довільну точку A, радіус-вектор якої $r < R_1$. Уявно проведемо через точку A сферичну поверхню з центром у точці O. Якщо у точці A напруженість гравітаційного поля G_A, то потік ліній напруженості через поверхню площею $4\pi r^2$ повинен бути

$$\Phi = -G_A 4\pi r^2. \tag{1}$$

За теоремою Остроградського — Гаусса потік вектора напруженості, згідно з рівнянням (6.24),

$$\Phi = 0, \tag{2}$$

оскільки сферична поверхня радіуса r маси не охоплює. Порівнюючи праві частини рівнянь (1) і (2), дістанемо $G_A = 0$.

Знайдемо напруженість гравітаційного поля для точок, радіуси яких $R_1 < r < R_2$. Нехай у точці B напруженість G_B. Умовно проведемо через точку B сферичну поверхню з центром у точці O. Потік ліній напруженості через цю поверхню

$$\Phi = 4\pi r^2 G_B. \tag{3}$$

За теоремою Остроградського — Гаусса потік

$$\Phi = -4\pi\gamma m_1, \tag{4}$$

де m_1 — маса, яку охоплює виділена поверхня радіуса r. Вона дорівнює $m_1 = \frac{4}{3}\pi (r^3 - R_1^3)\rho$ (ρ — густина), а $m = \frac{4}{3}\pi (R_2^3 - R_1^3)\rho$. Тоді

$$m_1 = \frac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3} m.$$

Оскільки $R_1 < r$, то величиною $(R_1/r)^3$ можна знехтувати. Тоді вираз (4) перепишемо так:

$$\Phi = -4\pi\gamma \frac{r^3\left(1 - (R_1/r)^3\right)}{R_2^3 - R_1^3} m \approx -4\pi\gamma m \frac{r^3}{R_2^3 - R_1^3}. \tag{5}$$

Порівнюючи праві частини рівнянь (3) і (5), дістаємо

$$G_B = \frac{\gamma m}{R_2^3 - R_1^3} r. \tag{6}$$

Знайдемо напруженість гравітаційного поля за межами сферичної поверхні в точках, для яких $r > R_2$. Через точку C також проведемо уявно сферичну поверхню, радіус якої $r > R_2$. Нехай напруженість у точці C буде G_C. Тоді потік вектора напруженості через сферичну поверхню радіуса r

$$\Phi = -4\pi r^2 G_C. \tag{7}$$

За теоремою Остроградського — Гаусса

$$\Phi = -4\pi\gamma m. \tag{8}$$

Прирівнюючи праві частини (7) і (8), маємо

$$G_C = \gamma \frac{m}{r^2}.$$

Отже, напруженість гравітаційного поля для точок, які лежать на поверхні або за межами кулі, аналогічна напруженості, що створюється матеріальною точкою масою m, розміщеною в центрі кулі. Залежність напруженості G від r показано на рис. 6.7.

§ 6.5. Робота сил поля тяжіння. Потенціальна енергія взаємодії мас. Потенціал

Сила тяжіння, переміщаючи тіло, виконує роботу. Знайдемо роботу сили тяжіння під час руху матеріальної точки масою m у полі тяжіння, створеному точковою масою M. При елементарному переміщенні $d\vec{R}$ маси m (рис. 6.8) сила тяжіння виконує елементарну роботу

$$dA = \vec{F}\, d\vec{R} = F\,|d\vec{R}|\cos\alpha = -F dR, \tag{6.25}$$

де $F = \gamma \frac{mM}{R^2}$ — модуль сили тяжіння; $dR = -\,|d\vec{R}|\cos\alpha$ зменшення відстані між масами m і M при переміщенні $d\vec{R}$.

Робота сили тяжіння при скінченному переміщенні маси по довільній траєкторії із точки *1* у точку *2*, відстані яких до маси M дорівнюють R_1 і R_2, визначається інтегралом

$$A = -\gamma mM \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{R^2} = -\gamma mM \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right). \qquad (6.26)$$

Звідси випливає, що робота сили тяжіння не залежить від форми шляху, а визначається тільки початковим і кінцевим положеннями маси m у полі тяжіння. Отже, сили тяжіння консервативні. Якщо $R_2 > R_1$, то маса m віддаляється від маси M як джерела поля тяжіння і $A < 0$; цю роботу виконують зовнішні сили проти сил поля тяжіння. Якщо $R_2 < R_1$, то маса m наближається до джерела поля тяжіння і $A > 0$, тобто сили тяжіння виконують додатну роботу. Оскільки сили тяжіння консервативні, то виконана ними робота при переміщенні матеріальної точки масою m між двома положеннями *1* і *2* в полі тяжіння дорівнює зменшенню потенціальної енергії маси m:

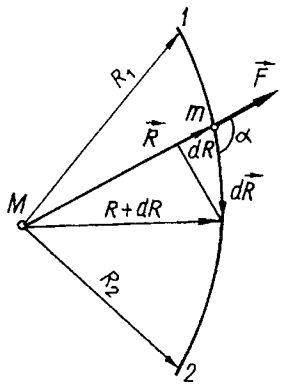


Рис. 6.8

$$A = -\Delta U \equiv U_1 - U_2. \qquad (6.27)$$

З формул (6.26) і (6.27) дістаємо

$$U_1 - U_2 = -\gamma Mm \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right). \qquad (6.28)$$

У задачах механіки, як уже зазначалося, основну роль відіграє не потенціальна енергія, а її зміна. Тому потенціальну енергію можна відраховувати від будь-якого початкового рівня. За початок відліку потенціальної енергії можна вибрати таке розміщення тіл, при якому гравітаційної взаємодії немає. Це матиме місце, коли тіла масами m і M перебувають одне від одного на нескінченній відстані ($R_2 \to \infty$). Тоді $1/R_2 \to 0$ і $U_2 \to 0$. При переміщенні матеріальної точки m з нескінченності на відстань R від тіла масою M потенціальна енергія точки m буде

$$U = -\gamma \frac{mM}{R}. \qquad (6.29)$$

При такому (умовному) виборі початкової точки відліку потенціальна енергія двох матеріальних точок, що взаємодіють, завжди від'ємна і зростає при збільшенні відстані між ними.

Для однорідного поля за нульовий рівень потенціальної енергії беруть поверхню тіла, яке створює поле. Тоді потенціальну енергію тіл, що знаходяться на відстані h від джерела поля, запишемо як

$$U = mGh; \quad G = \text{const}. \qquad (6.30)$$

Формули (6.29), (6.30) виражають потенціальну енергію взаємодії обох тіл. Якщо поле тяжіння, створене системою матеріальних точок, маси яких $M_1, M_2, \ldots, M_n$, то потенціальну енергію матеріальної точки масою m, яка знаходиться відповідно на відстанях $R_1, R_2, \ldots, R_n$ від матеріальних точок, виражають так:

$$U = -\gamma m \sum_{i=1}^{n} \frac{M_i}{R_i}. \qquad (6.31)$$

З виразу (6.29) видно, що величина

$$\frac{U}{m} = -\gamma \frac{M}{R} = \varphi \qquad (6.32)$$

не залежить від маси m, а залежить тільки від маси M і відстані від цього тіла до точки поля. Ця величина скалярна, її називають *потенціалом поля* тяжіння. Потенціал поля є його енергетичною характеристикою. Користуючись поняттям потенціалу, формулу (6.27) можна подати так:

$$A_{12} = m(\varphi_1 - \varphi_2), \qquad (6.33)$$

де φ_1 і φ_2 — потенціали точок *1* і *2*.

Потенціал точки поля тяжіння, створеного системою матеріальних точок, відповідно визначається

$$\varphi = -\gamma \sum_{i=1}^{n} \frac{M_i}{R_i} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i. \qquad (6.34)$$

Оскільки поле тяжіння є потенціальним силовим полем, то між обома його характеристиками — напруженістю $\vec{G}(\vec{R})$ і потенціалом $\varphi(R)$ існує зв'язок. Силу тяжіння, яка діє на матеріальну точку масою m, можна визначити за формулою $\vec{F}(\vec{R}) = m\vec{G}(\vec{R})$, де $\vec{R}$ — радіус-вектор матеріальної точки, проведений від точкової маси M як центра тяжіння. Потенціальна енергія маси m в даній точці поля $U(R) = m\varphi(R)$, де R — відстань до центра тяжіння. При нескінченно

малому переміщенні маси m сила тяжіння виконує роботу за рахунок зменшення потенціальної енергії

$$\vec{F}\,d\vec{R} = -dU \quad \text{або} \quad \vec{G}\,d\vec{R} = -d\varphi. \tag{6.35}$$

Звідси знаходимо

$$\vec{G} = -\operatorname{grad}\varphi \equiv -\nabla\varphi \tag{6.36}$$

або в координатній формі

$$\vec{G}(x, y, z) = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right).$$

Напруженість у даній точці поля тяжіння дорівнює градієнту потенціалу в цій точці, взятому із знаком мінус. Вектор grad φ завжди напрямлений у бік зменшення напруженості потенціального поля і чисельно дорівнює зміні напруженості на одиниці довжини у цьому напрямі.

Приклад 6.4. Знайти гравітаційну енергію U однорідної кулі, радіус якої R і маса M.

Розв'язання. Гравітаційна енергія кулі являє собою потенціальну енергію, зумовлену силами тяжіння, що діють між матеріальними точками, на які уявно можна розділити кулю. Вона дорівнює роботі з протилежним знаком, яку повинні виконати зовнішні сили, щоб частинки кулі віддалити одні від одних до нескінченності. Знайдемо цю роботу. Уявно поділимо кулю на нескінченно тонкі концентричні шари і послідовно віддалятимемо на нескінченність кожний з таких шарів, починаючи із зовнішнього. При перенесенні кожного з елементарних шарів у нескінченність робота буде виконуватися проти сил тяжіння, зумовлених масою кулі, обмеженою розглядуваним шаром. Якщо під елементарним шаром масою dm знаходиться куля масою m, то робота для перенесення елементарного шару в нескінченність

$$dA = \gamma\frac{m\,dm}{r}. \tag{1}$$

Оскільки $m = 4/3\pi r^3\rho$, де густина $\rho = \dfrac{M}{4/3\pi R^3}$, то $m = M(r/R)^3$ і $dm = 3M\dfrac{r^2}{R^3}dr$. Підставивши у (1) вираз m і dm, дістанемо

$$dA = 3\gamma\,(M^2/R^6)\,r^4dr.$$

Повна робота

$$A = 3\gamma\frac{M^2}{R^6}\int_0^R r^4dr = \frac{3}{5}\gamma\frac{M^2}{R}.$$

Враховуючи, що $dA = -dU$, маємо $U = -\dfrac{3}{5}\gamma\dfrac{M^2}{R}$.

§ 6.6. Застосування законів збереження до руху тіл у центральному гравітаційному полі

До таких рухів належать рухи планет Сонячної системи. При цьому Сонце і планети вважають матеріальними точками.

Розглянемо рух у центральному полі тяжіння. Якщо матеріальна точка масою m рухається у центральному полі, створеному точковою масою M як джерелом поля, то її повна енергія

$$E = \frac{mv^2}{2} - \gamma\frac{mM}{r} = \text{const}. \tag{6.37}$$

Модуль моменту імпульсу матеріальної точки масою m відносно центра поля

$$L = mvr = mr^2\omega. \tag{6.38}$$

З означення центрального поля випливає, що сила, яка діє на рухому матеріальну точку, завжди проходить через центр поля. При цьому плече сили відносно центра поля дорівнює нулю ($M = 0$).

Отже, момент імпульсу матеріальної точки m є величиною сталою (2.48), тобто

$$mr^2\omega = \text{const},$$

де ω — кутова швидкість. Повну швидкість v руху тіла можна розкласти на радіальну v_p і азимутальну $v_a = r\omega$ складові (рис. 6.9). Тоді

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}v_p^2 + \frac{m}{2}r^2\omega^2 = \frac{mv_p^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2}. \tag{6.39}$$

З урахуванням (6.39) рівняння (6.37) набуває вигляду

$$\frac{mv_p^2}{2} - \gamma\frac{mM}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} = E = \text{const}. \tag{6.40}$$

Оскільки у рівнянні (6.40) тільки перший член залежить від швидкості, то функція

$$U(r) = -\gamma\frac{mM}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} \tag{6.41}$$

є потенціальною енергією.

Знайдемо умови, при яких траєкторія руху тіла стане еліптичною, тобто коли рух тіла буде обмежений у деякій області простору. Такий рух називають фінітним. Для розв'язання цієї задачі застосуємо графічний метод. На рис. 6.10 штриховою лінією зобразимо графіки функцій

$$U_1(r) = -\gamma\frac{mM}{r} \quad \text{і} \quad U_2(r) = \frac{L^2}{2mr^2}, \quad L \neq 0.$$

Суцільною лінією покажемо графік функції $U(r)$ як результат додавання ординат функцій $U_1(r)$ і $U_2(r)$.

З рис. 6.10 видно, що для $r < r_0$ функція $U(r)$ додатна і при $r \to 0$ асимптотично наближається до $+\infty$. Для значень $r > r_0$ функція $U(r)$ від'ємна і при $r \to \infty$ вона асимптотично наближається до нуля.

Оскільки величина $mv_p^2/2$ завжди додатна, то межі області, в якій може перебувати тіло, визначаються умовою $U(r) \leq E$. Проведемо на рис. 6.10 пряму $U = E = \text{const}$ для випадків, коли $E > 0$ і $E < 0$. У першому випадку ділянки кривої $U(r)$, що знаходяться над прямою, не можуть бути досягнуті тілом з енергією E. У другому випадку пряма перетинає криву $U(r)$ у двох точках A і B. Їм відповідають відстані від центра поля r_2 і r_3. Вони і визначають межі області, в якій рухається тіло у центральному гравітаційному полі. У цьому разі рух тіла буде обмеженим, тобто фінітним.

Траєкторія руху при цьому буде еліптичною. Якщо $E > 0$, то пряма перетинає криву $U(r)$ тільки в одній точці, якій відповідає відстань r_1. Якщо ж тіло рухається справа наліво, то

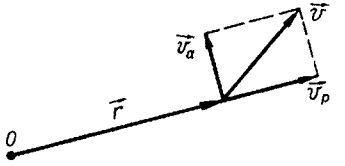


Рис. 6.9

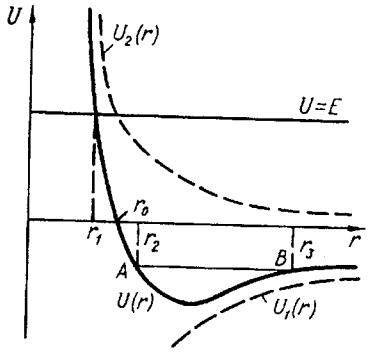


Рис. 6.10

на відстані r_1 його напрям руху зміниться на протилежний. Рух тіла буде необмеженим, тобто інфінітним, а траєкторія — гіперболічною. Якщо $E = 0$, рух тіла також буде необмеженим, а траєкторія — параболічною.

§ 6.7. Космічні швидкості

Закони руху тіл у центральному полі дають можливість розраховувати траєкторії руху космічних апаратів та створювати штучні супутники Землі чи інших планет Сонячної системи.

У попередньому параграфі зазначалося, що величина, а точніше знак повної енергії космічного апарата, що рухається тільки під дією

центральних сил тяжіння, визначає характер його руху і форму траєкторії.

Розглянемо рух космічного апарата в системі відліку, початок координат якої суміщений з центром Землі. У полі земного тяжіння повна енергія космічного апарата

$$E = \frac{mv^2}{2} - \gamma\frac{mM}{R}, \tag{6.42}$$

де m і M — маси відповідно космічного апарата і Землі; R — відстань апарата від центра Землі. Залежно від співвідношення між кінетичною і потенціальною енергіями на даній відстані від центра Землі апарат рухатиметься по замкненій кривій ($E < 0$) або по незамкненій кривій віддалятиметься від Землі у нескінченність ($E \geq 0$). Повну енергію апарата на фіксованій висоті над Землею можна змінювати за рахунок його кінетичної енергії. Тому саме швидкість космічного апарата на цій висоті визначає характер руху і форму його геоцентричної (відносно Землі) траєкторії.

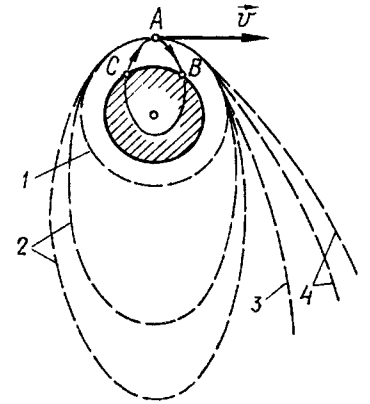


Рис. 6.11

Космічні апарати виводять у космічний простір за допомогою багатоступінчастих ракет у вертикальному напрямі із спеціальної стартової площадки. Останній ступінь ракети відділяється на великій висоті, де опір повітря незначний. Ділянка траєкторії CA (рис. 6.11), на якій космічний апарат рухається під дією сили тяги ракети, називається *активною ділянкою*. У точці A на висоті h над Землею космічний апарат набуває швидкості $\vec{v}$, напрямленої паралельно горизонту. Далі відбувається вільний політ апарата тільки під дією центральної сили тяжіння Землі (пасивна ділянка траєкторії).

Вияснимо, як змінюватиметься траєкторія вільного польоту космічного апарата у безповітряному просторі залежно від початкової швидкості в точці A.

Рівняння траєкторії апарата можна знайти як рівняння траєкторії тіла, кинутого горизонтально. При цьому необхідно врахувати залежність прискорення вільного падіння від висоти над поверхнею землі:

$$g_h = \gamma\frac{M}{(R_3 + h)^2}. \tag{6.43}$$

Точний розрахунок показує, що ця траєкторія — це дуга еліпса, фокус якого збігається з центром Землі. При малих значеннях почат-

кової швидкості еліпс перетинає поверхню Землі у точці B (див. рис. 6.11), тобто апарат падає на Землю. Із збільшенням швидкості еліпс все більше розтягується, наближаючись за формою до кола, а дальність польоту по дузі еліпса зростає. Якщо надати апарату досить великої швидкості $v = v_1$, то траєкторія перетвориться в коло (крива *1*), тобто апарат не впаде на Землю, а рухатиметься навколо неї, перетворившись у штучний супутник Землі.

Першою космічною швидкістю v_1 називають таку горизонтально напрямлену мінімальну швидкість, з якою космічний апарат може рухатися навколо Землі по коловій орбіті, тобто може стати штучним супутником Землі.

На супутник, що рухається по колу радіуса $R_3 + h$, діє сила тяжіння Землі, яка є доцентровою силою і надає йому нормального прискорення $v_1^2/(R_3 + h)$. За другим законом Ньютона

$$\gamma \frac{mM}{(R_3 + h)^2} = \frac{mv_1^2}{R_3 + h}.$$

Звідси знаходимо

$$v_1 = \sqrt{\gamma \frac{M}{R_3 + h}} = \sqrt{g_h (R_3 + h)}. \qquad (6.44)$$

Якщо висота над Землею мала порівняно з радіусом Землі ($h \ll R_3$), то поблизу поверхні Землі

$$v_1 = \sqrt{gR_3}. \qquad (6.45)$$

Взявши $R_3 = 6{,}37 \cdot 10^6$ м і $g = 9{,}81$ м/с^2, із виразу (6.45) дістанемо $v_1 = 7912$ м/с ≈ 8 км/с.

Підставивши у вираз (6.42) значення швидкості із (6.44), неважко переконатися, що повна енергія космічного апарата, який рухається з першою космічною швидкістю, від'ємна і дорівнює половині його потенціальної енергії взаємодії з Землею.

При $v > v_1$ траєкторія супутника стає знову еліптичною і чим більша швидкість, тим більші осі еліпса (криві *2* на рис. 6.11), і супутник віддаляється від Землі на великі відстані. Швидкості, з якими супутник рухається навколо Землі по замкнутих траєкторіях, називають *еліптичними*.

Будь-якої еліптичної швидкості недостатньо для того, щоб космічний апарат міг вийти із сфери земного тяжіння. Необхідна для цього швидкість повинна задовольняти умову, при якій повна енергія апарата дорівнює нулю і його рух стає необмеженим. При $E = 0$ із (6.42) маємо

$$\frac{mv_2^2}{2} = \gamma \frac{mM}{R_3 + h} \quad \text{або} \quad v_2 = \sqrt{2g_h(R_3 + h)}. \qquad (6.46)$$

Якщо $h \ll R_3$, то $v_2 = v_1\sqrt{2} = 11{,}2$ км/с. При цьому траєкторія має форму параболи (незамкнена крива *3*), рухаючись по якій космічний апарат віддаляється від Землі у нескінченність.

Другою космічною швидкістю v_2 називають таку найменшу швидкість, яку необхідно надати космічному апарату, щоб його орбіта в полі тяжіння Землі стала параболічною і він міг назавжди покинути Землю.

Швидкість v_2 називають ще параболічною, або критичною, оскільки для заданої висоти над Землею вона відповідає єдиній параболічній траєкторії, яка відмежовує замкнені траєкторії супутників Землі від незамкнених траєкторій. Якщо початкова швидкість $v > v_2$, то повна енергія космічного апарата $E > 0$, він рухається по одній із гіперболічних траєкторій (незамкнені криві *4*) і також назавжди залишає Землю.

Таким чином, якщо висота над поверхнею Землі, з якої починається вільний політ, мала порівняно з радіусом Землі, то:

1) при $v < v_1$ космічний апарат падає на Землю;

2) при $v_1 \le v < v_2$ апарат стає супутником Землі;

3) при $v \ge v_2$ апарат відлітає у світовий простір.

Космічному апарату поблизу Землі можна надати і такої швидкості, щоб він вийшов за межі Сонячної системи. Цю швидкість називають *третьою космічною*. Апарат покине Сонячну систему, якщо поблизу Землі йому надати другу геліоцентричну (відносно Сонця) космічну швидкість. Враховуючи швидкість Землі відносно Сонця і напрям запуску космічного апарата, можна показати, що третя космічна швидкість знаходиться в межах від 16,7 до 73 км/с (див. приклад 6.5).

Надання тілам великих космічних швидкостей є складним технічним завданням; їх можна досягнути за допомогою реактивних двигунів, встановлених на космічному кораблі. Початок теоретичного вирішення цього завдання поклав російський вчений К. Е. Ціолковський, який вивів формулу (2.35), що дає змогу розраховувати швидкість ракет. У 1925 р. українській інженер Ю. В. Кондратюк (1897 — 1942) у книзі "Завоювання міжпланетних просторів" запропонував реальний проект широкої програми освоєння космосу: від ідеї багатоступінчастої ракети, формули навантаження, способу досягнення поверхні великих небесних тіл за допомогою відокремленого від космічного корабля невеликого посадочно-злітного модуля, типів траєкторій — до приземлення за допомогою парашутів та конструкції крісла, що дає змогу витримувати значні перевантаження. Перша

космічна швидкість була досягнута при запуску першого штучного супутника Землі у 1957 р. під керівництвом видатного українського вченого С. П. Корольова (1906 — 1966).

Після історичного польоту Ю.О. Гагаріна у 1961 р. починається бурхливий розвиток космонавтики. У США в 1969 р. був запущений до Місяця космічний корабель "Аполло-9" і за визнанням одного із керівників програми Дж. Хубольта політ і висадку на Місяць перших у світі астронавтів здійснено за "трасою Кондратюка". Іменем Ю. Кондратюка названо кратер на Місяці.

Польоти людини навколо Землі і на Місяць та космічних станцій до інших планет Сонячної системи збагатили науку і дали можливість вивчити ближній космічний простір.

Приклад 6.5. Знайти мінімальне і максимальне значення третьої космічної швидкості корабля.

Розв'язання. Точне визначення третьої космічної швидкості має ряд значних утруднень, оскільки слід враховувати гравітаційні взаємодії трьох тіл: Сонця, Землі і космічного корабля. Однак таке обчислення значно спрощується, якщо нехтувати дією поля сонячного тяжіння на рух космічного корабля протягом усього часу, який потрібний для виходу його із зони дії земного тяжіння. Це пояснюється тим, що дія поля сонячного тяжіння повністю компенсується силами інерції, які виникають внаслідок руху Землі навколо Сонця.

Позначимо швидкості корабля відносно Землі v, $v_к$, $v_п$ ($v_к$ і $v_п$ — відповідно перша і друга космічні швидкості). Аналогічно позначимо швидкості корабля відносно Сонця V, $V_к$, $V_п$. Якщо корабель виходить із зони дії земного тяжіння з параболічною швидкістю відносно Сонця, то відносно Землі ця швидкість буде третьою космічною швидкістю, яку позначимо через v. Знайдемо мінімальне значення цієї швидкості. Для цього старт треба проводити так, щоб при виході із зони земного тяжіння корабель рухався вздовж дотичної до земної орбіти і в напрямі руху Землі. Рух розглядатимемо в системі відліку, відносно якої Сонце нерухоме. Швидкість руху Землі навколо Сонця — це швидкість колового руху $V_к$. При запуску корабля внаслідок віддачі швидкість Землі зміниться і дорівнюватиме V. Швидкість корабля у момент старту відносно Сонця $V_к + v$, а після виходу із зони земного тяжіння ця швидкість стане параболічною, тобто $V_п$. Тоді рівняння закону збереження енергії для цих станів матиме такий вигляд:

$$\frac{m}{2}(V_к + v)^2 + \frac{M}{2}V_к^2 - \gamma\frac{mM}{r} = \frac{m}{2}V_п^2 + \frac{M}{2}V^2, \qquad (1)$$

де m і M — відповідно маса корабля і Землі. Оскільки $v_к^2 = \gamma\frac{M}{r}$, то рівняння (1) перепишемо так:

$$m\left((v_к + v)^2 - 2v_к^2 - V_п^2\right) = M(V^2 - V_к^2). \qquad (2)$$

Враховуючи те, що $V_п^2 = 2V_к^2$ і $V_к + V \approx 2V_к$, рівняння (2) можна записати як

$$m(2V_к v + v^2 - V_к^2 - 2v_к^2) = 2MV_к(V - V_к). \qquad (3)$$

Нехтуючи дією поля сонячного тяжіння, закон збереження імпульсу цих станів можна записати у такій формі:

$$MV_к + m(V_к + v) = MV + mV_п. \qquad (4)$$

Звідси маємо

$$M(V - V_к) = m(V_к - V + v).$$

Підставивши вираз $M(V - V_к)$ у рівняння (3), знаходимо мінімальне значення третьої космічної швидкості:

$$v_{min}^2 = V_к^2(\sqrt{2} - 1)^2 + 2v_к^2. \qquad (5)$$

Підставивши числові значення у (5), дістанемо $v_{min} = 16{,}7$ км/с.

Якщо космічний корабель посилають у протилежному напрямі до напряму руху Землі, то третя космічна швидкість максимальна:

$$v_{max}^2 = (\sqrt{2} + 1)^2 V_к^2 + 2v_к^2. \qquad (6)$$

Приклад 6.6. Знайти радіус R орбіти стаціонарного супутника Землі (стаціонарним називають супутник, який рухається по коловій орбіті навколо Землі так, що час його обертання дорівнює 24 год). Стаціонарний супутник, який рухається у площині екватора в бік обертання Землі, буде залишатися нерухомим відносно неї. Виразити R через радіус Землі $R_З$, кутову швидкість ω обертання Землі і прискорення вільного падіння g на її поверхні.

Розв'язання. Доцентрове прискорення супутника дорівнює прискоренню, якого йому надає сила тяжіння, тобто

$$\omega^2 R = \gamma M_З / R^2. \qquad (1)$$

Оскільки $M_З = gR_З^2/\gamma$, то рівність (1) набирає вигляду

$$\omega^2 R = gR_З^2/R^2. \qquad (2)$$

Звідси маємо

$$R = \sqrt[3]{\frac{gR_З^2}{\omega^2}} = \sqrt[3]{\frac{gT^2}{4\pi^2 R_З}}\, R_З \approx 6{,}61 R_З$$

Розділ 7. Механіка рідин і газів

§ 7.1. Тиск у рідинах і газах. Закон Паскаля. Закон Архімеда

Усі тіла складаються з атомів і молекул, які перебувають у безперервному русі. У твердих тілах атоми і молекули здійснюють коливальні рухи навколо положень рівноваги. При цьому середня відстань між молекулами твердих тіл при сталій температурі залишається постійною, внаслідок чого тверді тіла зберігають свою форму. Для деформації твердих тіл до них треба прикласти немалі сили.

У рідинах і газах немає настільки сильного зв'язку між молекулами, який є у твердих тілах. Внаслідок хаотичного руху молекул їхнє розміщення одна відносно одної буде довільним. Тому рідини і гази — це фізичні тіла, які, не маючи певної форми, набувають форми тієї посудини, у якій вони містяться.

На відміну від газів у рідинах, незважаючи на хаотичний рух молекул, середня відстань між сусідніми молекулами залишається майже

незмінною. Отже, рідини це фізичні тіла без конкретної форми, але з майже незмінним об'ємом, який називають *власним*. Рідини завжди обмежені певними поверхнями, які відділяють їх від твердих тіл або газів. Поверхню, що відділяє рідину від газу, називають *вільною*. Наявність вільних поверхонь у рідин дає їм можливість при певних умовах утворювати краплини. Тому рідини іноді називають *краплинними середовищами*.

Газоподібні тіла обмежені або поверхнями рідин, або поверхнями твердих тіл. Вони не мають власного об'єму. Якщо до поверхні деякого об'єму рідини або газу прикладено незначну силу, то її дія приведе до переміщень одних частин відносно інших. Тому за звичайних умов рідини або гази не чинять опору при зміні форми об'єму, але чинять опір при зміні його величини.

Для задач механіки відмінності між рідинами і газами, за винятком особливих випадків руху, неістотні. Тому під словом рідини у цьому розділі розумітимемо як краплинні рідини, так і гази. У деяких випадках розрізнятимемо краплинні (які не піддаються стисканню) і газоподібні рідини.

Розділ механіки, в якому вивчається стан рівноваги і руху рідин під дією зовнішніх сил, називають *гідроаеромеханікою*. Гідроаеромеханіка поділяється на гідроаеростатику і гідроаеродинаміку.

Гідроаеростатика вивчає рівновагу рідин і газів. У стані рівноваги напруження в рідинах і газах завжди нормальні до поверхонь, на які вони діють.

У механіці рідини і гази розглядають як суцільні середовища. *Суцільним* називають середовище, яке безперервно розподілене в просторі і має властивість плинності. При цьому не враховується молекулярна будова середовища. Це означає, що будь-який елемент об'єму рідини або газу містить дуже велике число молекул. Цей елемент об'єму малий порівняно з усім об'ємом рідини або газу, але його розміри великі порівняно з міжмолекулярними відстанями. Плинність суцільного середовища зумовлена рухливістю його молекул.

Виділимо всередині рідини довільний елементарний об'єм і розглянемо сили, які діють на нього. Їх можна поділити на внутрішні і зовнішні. Внутрішні сили зумовлені взаємодією частинок рідини в елементарному об'ємі. Оскільки вони взаємно зрівноважуються, то їх враховувати не будемо. Зовнішні сили зумовлені дією сусідніх елементів, сил тяжіння тощо.

Зовнішні сили поділяють на об'ємні, або масові, і поверхневі сили. Об'ємні сили — це сили, що діють на елементарні об'єми, в яких знаходиться певна маса рідини чи газу. До них належать сили тяжіння, сили інерції. Поверхневі сили — це такі, які діють на поверхню, що обмежує елементарний об'єм.

Для зміни об'єму рідини або газу необхідна дія зовнішніх сил. В інерціальній системі відліку на вільно падаюче тіло діють сили

тяжіння, але зміни об'єму не виникає. Якщо ж діють поверхневі сили, то деформації виникають завжди. Це вказує на те, що при зміні об'єму рідини або газу в них виникають пружні сили, дія яких однакова за значенням і протилежна за напрямом дії зовнішніх сил. Дія пружних сил у рідинах і газах виявляється в тому, що окремі їхні елементарні об'єми діють один на одного або на тіла, з якими вони межують. Якщо рідина перебуває у спокої, то її елементарні об'єми не змінюють взаємного розташування.

Виділимо в такій рідині деякий об'єм, обмежений поверхнею довільної форми. Для зручності вважатимемо, що поверхня має сферичну форму (рис. 7.1). Розділимо цей об'єм на дві частини площиною AB, що проходить через центр сфери. Частини об'ємів, що розмежовані площиною, діють один на одного з однаковими за модулем і протилежними за напрямом пружними силами. Уявімо, що одну частину об'єму (ліву півкулю) вилучили. Для того, щоб рівновага не порушилась, у рідині до площини необхідно прикласти силу ΔF, яка дорівнює дії об'єму рідини, який вилучили. Ця сила повинна діяти тільки перпендикулярно до площини ΔS перерізу AB. Інакше тангенціальна складова її зумовить рух частинок рідини, внаслідок чого рівновага порушиться. Величину, яка дорівнює відношенню сили, що діє нормально на елемент поверхні, до її площі, називають тиском, тобто

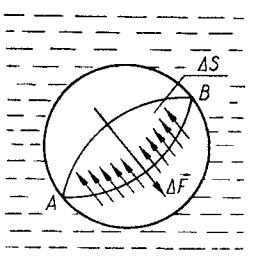


Рис. 7.1

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta S}. \tag{7.1}$$

За виразом (7.1) визначають середнє значення тиску. Якщо сила, з якою рідина діє на поверхню площею ΔS, розподілена нерівномірно, то вводять поняття тиску у даній точці рідини. Його величина визначається такою формулою:

$$p = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{dF}{dS}. \tag{7.2}$$

Аналогічно визначають тиск у газах. Тиск — величина скалярна і для заданої точки рідини або газу не залежить від орієнтації площини dS. За одиницю тиску в СІ взято паскаль (1 Па = 1Н/1 м^2). Залежно від величини тиску користуються різними одиницями його вимірювання. Тиск, вищий від атмосферного, вимірюють в атмосферах та в міліметрах ртутного стовпа, у техніці тиск вимірюють технічними атмосферами.

Для рідин і газів, які перебувають у рівновазі, виконується *закон Паскаля:* тиск у будь-якій точці рідини або газу, які перебувають у

спокої, однаковий в усіх напрямах і передається в усіх напрямах однаково.

Для обгрунтування закону Паскаля, застосуємо принцип твердненння. У рідині, яка перебуває в спокої, виділимо елементарний об'єм у вигляді довільно орієнтованої тригранної призми (рис. 7.2). Нормально до кожної грані діють сили тиску $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$. На призму, крім цих сил, діє сила земного тяжіння. Вважатимемо, що рідина в об'ємі призми затверділа і з часом її об'єм та форма не змінюються. Тоді вона перебуває в рівновазі і до неї можна застосувати закони рівноваги твердого тіла, тобто сума сил, що діє на призму, дорівнює нулю.

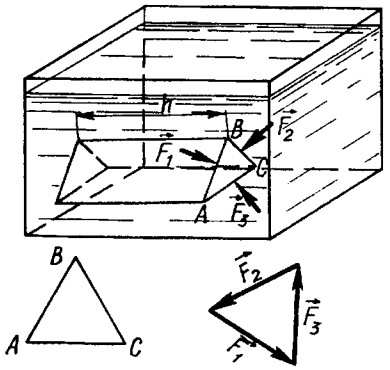


Рис. 7.2

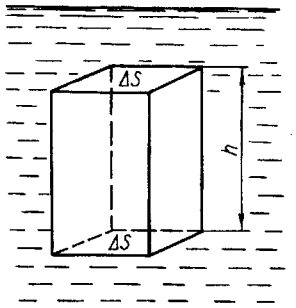


Рис. 7.3

Сили тиску пропорційні площам граней призми, а сила тяжіння пропорційна об'єму призми. При поступовому зменшенні об'єму призми сила тяжіння зменшується швидше, ніж сила тиску. Тому для досить малої призми силою тяжіння рідини в її об'ємі можна знехтувати, а сили, що діють на протилежні її основи, вважати зрівноваженими. Сили тиску, що діють на бічні грані, утворюють трикутник. Він подібний до трикутника ABC, який є перерізом призми (див. рис. 7.2). З подібності трикутників можна записати, що

$$\frac{F_1}{AB} = \frac{F_2}{AC} = \frac{F_3}{BC}. \qquad (7.3)$$

Оскільки площі граней відповідно $S_1 = AB \cdot h$, $S_2 = AC \cdot h$, $S_3 = BC \cdot h$ (h — висота призми), а тиск, що діє на грані, відповідно $p_1 = \frac{F_1}{S_1}$, $p_2 = \frac{F_2}{S_2}$, $p_3 = \frac{F_3}{S_3}$, то з (7.3) маємо

$$p_1 = p_2 = p_3. \qquad (7.4)$$

У граничному випадку, коли об'єм призми зменшується, можна вважати, що тиски p_1, p_2, p_3 належать до однієї точки. Оскільки орієнтація призми довільна, то з рівності (7.4) випливає, що тиск у будь-якій точці рідини або газу не залежить від орієнтації площини, для якої визначено тиск. Отже, закон Паскаля доведено.

Закон Паскаля лежить в основі роботи гідравлічних пресів і підйомників, гідравлічних і пневматичних гальм в автомобілях та інших механізмів.

У попередніх міркуваннях силу тяжіння, що діє на рідину в елементі об'єму, не враховували. Розглянемо розподіл тиску в рідині, яка перебуває у спокої. При цьому враховуватимемо дію сил тяжіння. Виділимо в рідині елемент у вигляді прямокутного паралелепіпеда, площа основи якого ΔS, а висота h (рис. 7.3). Оскільки рідина цього об'єму перебуває у спокої, то рівнодійна всіх сил, що діють на об'єм рідини, дорівнює нулю, а сили, що діють на бічну поверхню, взаємно зрівноважуються. Щоб знайти умови рівноваги паралелепіпеда у вертикальному напрямі, треба врахувати тиски p_1 і p_2, що діють на верхню і нижню основи паралелепіпеда. Застосувавши принцип твердненння до цього об'єму, запишемо умову рівноваги для вертикального напряму:

$$p_2 \Delta S = p_1 \Delta S + \rho g h \Delta S, \quad \text{або} \quad p_2 = p_1 + \rho g h, \qquad (7.5)$$

де $\rho g h$ — гідростатичний тиск рідини, зумовлений дією земного тяжіння; ρ — густина рідини.

Гідростатичний тиск рідини залежить від густини рідини ρ та висоти її стовпа і не залежить від форми посудини, в якій знаходиться рідина. Якщо тиск на вільну поверхню нерухомої рідини p_0, то гідростатичний тиск рідини на глибині h буде

$$p = p_0 + \rho g h. \qquad (7.6)$$

Для вимірювання гідростатичного тиску застосовують прилади, які називають манометрами. Найпростіший тип манометра являє собою U-подібну трубку, один кінець якої з'єднується з посудиною, в якій вимірюють тиск, другий — з атмосферою або запаяний і повітря з нього відкачано. За різницею рівнів рідин в колінах манометра визначають тиск у посудині.

Для, вимірювання великих тисків застосовують металеві манометри, в яких металева пружна трубка приєднується до резервуара, в якому вимірюють тиск. При зміні тиску змінюється конфігурація трубки. Її зміна фіксується за допомогою стрілки чи іншого показника тиску. Низькі і високі тиски вимірюють приладами, дія яких грунтується або на залежності електричного опору манганінової дротини

від тиску, або на залежності електричних властивостей кварцових пластинок від тиску (п'єзоелектричний ефект).

Манометри складаються з чутливого елемента і елемента, який силу тиску перетворює в іншу величину, зручну для вимірювання. За типом чутливого елемента манометри поділяють на рідинні, механічні, поршневі, електричні, теплові, радіоактивні та інші.

У зв'язку з тим що на різних рівнях у рідині або газі тиски різні, на занурене в рідину або газ тіло діє виштовхувальна сила. Уявімо, що тіло, яке занурено в рідину, вийнято з неї і цей об'єм заповнено рідиною (рис. 7.4). Рідина, що знаходиться в цьому об'ємі, буде у рівновазі за умови, що рівнодійна і момент усіх зовнішніх сил, які діють на виділений об'єм рідини, дорівнюють нулю. Зовнішніми силами, що діють на виділений об'єм рідини, є вага рідини в об'ємі даного тіла і сила тиску на поверхню S з боку рідини. Оскільки виділений об'єм рідини перебуває в спокої, то рівнодійна сил гідростатичного тиску, що діє на поверхню S, повинна дорівнювати вазі рідини в об'ємі, обмеженому поверхнею S. Ця рівнодійна напрямлена вертикально вгору і проходить через центр мас виділеного об'єму рідини. Тоді момент сил, що діє на виділений об'єм рідини, дорівнює нулю. Якщо рідину, обмежену поверхнею, вилучити і на її місце помістити будь-яке тіло такого самого об'єму, то на нього діятиме напрямлена вертикально вгору така сама рівнодійна, або виштовхувальна, сила. Отже, ми приходимо до відомого *закону Архімеда:* на будь-яке тіло, занурене в рідину (газ), діє з боку рідини (газу) виштовхувальна сила, яка дорівнює вазі витісненої тілом рідини (газу). Ця сила напрямлена вертикально вгору і прикладена до центра мас витісненого об'єму рідини. Точку A називають *центром плавучості* тіла.

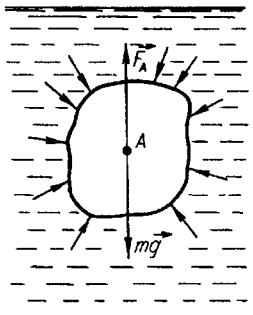


Рис. 7.4

Якщо рідина перебуває в стані невагомості, то зміна тиску, зумовленого силою тяжіння з висотою зникає, а з нею зникає і виштовхувальна сила.

Закон Архімеда використовується для оцінки плавучості і стійкої рівноваги кораблів. Розміщення центра плавучості визначає рівновагу тіл, що плавають у рідинах. Для рівноваги тіла, зануреного в рідину, необхідно, щоб вага тіла дорівнювала вазі витісненої ним рідини, а центр плавучості лежав на одній вертикалі з центром мас самого тіла. Для з'ясування умов стійкої рівноваги розглянемо два таких випадки. У першому з них вважатимемо, що тіло повністю занурене в рідину. В цьому разі будь-які зміщення і повертання тіла в рідині не приводять до зміщення центра плавучості і центра мас відносно тіла. Рівновага буде стійкою, коли центр мас C тіла лежить нижче від його

центра плавучості A (рис. 7.5). Якщо точка C знаходиться вище від точки A, то рівновага нестійка. З рис. 7.5 видно, що незначне відхилення тіла від положення рівноваги відносно горизонтальної осі (вісь перпендикулярна до площини рисунка) приводить до появи моменту пари сил $m\vec{g}$ і $\vec{F}_A$. Його дія приводить до опускання точки C і підняття точки A.

У другому випадку розглядаємо тіла, які при плаванні занурені в рідину не повністю. Цей випадок складніший, оскільки питання про стійкість таких тіл є питаннями безпеки плавання кораблів. У цьому разі зміщення тіла від положення рівноваги приводить до зміни форми об'єму витісненої рідини. Внаслідок цього змінюється положення центра плавучості відносно тіла, яке плаває. На рис. 7.6, *а* схематично зображено положення корабля, коли його центр мас C і центр плавучості A лежать на вертикальній лінії, яка є віссю симетрії. При нахилі корабля на кут φ (рис. 7.6, *б*) центр плавучості зміщується відносно

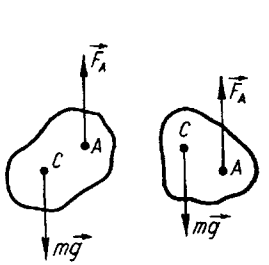


Рис. 7.5

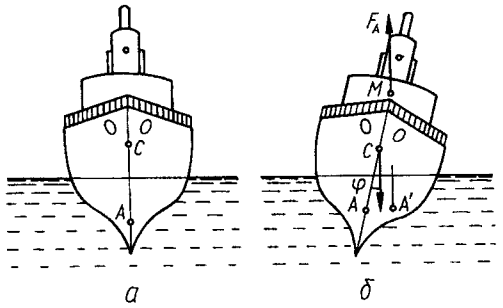


Рис. 7.6

корабля в точку A'. Тепер лінія дії виштовхувальної сили перетинає вісь симетрії корабля в точці M. Якщо точка M лежить вище від центра мас корабля, то момент пари сил P і F_A повертатиме корабель у попереднє положення. Рівновага корабля буде стійкою. Якщо точка M лежить нижче від центра мас корабля, то момент пари сил P і F_A ще більше відхилятиме корабель від положення рівноваги. Рівновага буде нестійкою.

Відстань між центром мас C корабля і точкою M (метацентр) називають *метацентричною висотою.* Чим більша метацентрична висота, тим більша стійкість корабля. Сучасна теорія плавучості і стійкості кораблів розвинута в працях О. М. Крилова (1863 — 1945), який є основоположником наукової школи кораблебудування.

Приклад 7.1. Куля радіуса R складається з двох півкуль, виготовлених із свинцю і заліза. Куля занурена у воду і розміщена на опорах (рис. 7.7). Визначити сили, з якими куля тисне на опори.

Розв'язання. На кулю як єдине тіло діють такі сили: виштовхувальна сила F_A, прикладена до центра кулі O; сили земного тяжіння $P_{св}$ і $P_з$, прикладені в точках

O_1 і O_2. Точки O_1 і O_2 знаходяться на відстані $3/8R$ від центра кулі O. Сили реакції опор $\vec{N}_1$ і $\vec{N}_2$. Умовою рівноваги тіла є рівність нулю рівнодійної діючих сил та сумарного моменту сил. Першу умову запишемо так:

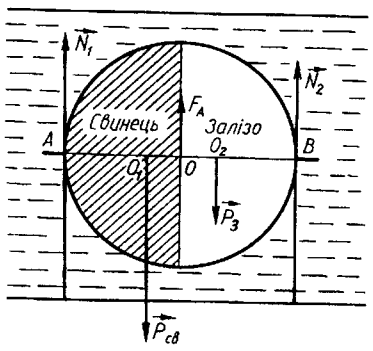


Рис. 7.7

$$N_1 + N_2 + F_A - P_{св} - P_3 = 0. \qquad (1)$$

Умову рівності нулю суми моментів діючих сил запишемо відносно точки A

$$P_{св}(R - 3/8R) + P_3(R + 3/8R) - \\ - F_A R - N_2 \cdot 2R = 0. \qquad (2)$$

Ваги свинцевої і залізної півкуль і сила Архімеда відповідно дорівнюють:

$$P_{св} = \frac{2}{3}\pi R^3 \rho_{св} g;\ P_3 = \frac{2}{3}\pi R^3 \rho_3 g;\ F_A = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g,$$

де $\rho_{св}$, ρ_3, ρ — густина свинцю, заліза, води.

Підставивши у рівняння (2) вирази $P_{св}$, P_3, F_A, дістанемо

$$N_2 = \frac{\pi g R^3}{24}(5\rho_{св} + 11\rho_3 - 16\rho).$$

З рівняння (1) маємо

$$N_1 = \frac{\pi g R^3}{24}(5\rho_3 + 11\rho_{св} - 16\rho).$$

Відповідно на опори в точках A і B діятимуть сили, які дорівнюють за величиною силам N_1 і N_2, але протилежні за напрямом.

§ 7.2. Ідеальна рідина. Рівняння неперервності

Гідродинаміка — розділ гідромеханіки, в якому вивчається рух нестисливих рідин і взаємодія їх з твердими тілами.

Завдання гідродинаміки полягає в тому, щоб знайти співвідношення, які дають можливість за величинами сил описати стан руху рідини або за станом руху рідини знайти діючі сили.

Рух рідини або газу можна вивчати двома методами. У першому вивчають рух кожної частинки рідини зокрема. Він вимагає визначення кінетичних характеристик руху (переміщення, швидкість, прискорення) частинок рідини при переміщеннях їх у просторі і в часі. Такий метод вивчення стану руху рідини запропонував французький математик і механік Ж. Лагранж (1736 — 1813) і називається він *методом Лагранжа.* Виведення законів руху рідини за методом Лагранжа пов'язане із значними математичними труднощами, тому на практиці користуються іншим методом. Спостерігають не за рухом кожної частинки рідини, а в потоці рідини виділяють фіксований елементарний

об'єм і вивчають, що відбувається з часом у кожній точці виділеного об'єму. Такий метод вивчення стану руху рідини розробив видатний математик і фізик Л. Ейлер (1707—1783) і називається він *методом Ейлера.* При цьому говорять не про швидкості і прискорення частинок рідини, а про швидкість і прискорення потоку рідини. Швидкість потоку рідини в даній точці простору залежить від її координат і часу:

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t),$$

або

$$v_x = v_x(x, t),\ v_y = v_y(y, t),\ v_z = v_z(z, t),$$

де $\vec{r}$ — радіус-вектор, проведений з початку координат у дану точку рідини; v_x, v_y, v_z — проекції вектора $\vec{v}$ на осі координат.

Вивчаючи рух рідини, користуються ідеалізованим об'єктом або рідиною, яку називають ідеальною, тобто рідиною, яка абсолютно нестислива і повністю позбавлена внутрішнього тертя.

Потік рідини або газу називають стаціонарним, якщо його швидкість в усіх точках простору з часом не змінюється.

Для полегшення аналізу руху рідини або газу користуються лініями і трубками течії. Під *лінією течії* розуміють лінію, дотична до якої в кожній точці збігається з вектором швидкості $\vec{v}$.

Лінія течії і траєкторія руху частинки в загальному випадку не збігаються. Траєкторія вказує шлях тієї самої частинки за весь час її руху. Лінія ж течії характеризує напрям руху нескінченної множини частинок, які в даний момент часу знаходяться на лінії. Тільки при стаціонарному потоці рідини або газу лінії течії збігаються з траєкторіями руху частинок. У разі нестаціонарних потоків такого збігу немає.

Частину рідини, обмежену лініями течії, називають *трубкою течії.* Всі частинки, що містяться всередині трубки течії, не виходять за межі трубки і жодна з частинок, що знаходяться за межами трубки течії, не проникає в неї. Трубку течії можна уявити як трубку з жорсткою бічною поверхнею, по якій протікає рідина. Якщо поперечний переріз трубки течії малий, то можна вважати, що швидкість рідини для всіх точок заданого перерізу однакова.

Маса рідини, що протікає за час dt через поперечний переріз, визначається за такою формулою:

$$dm = \rho v S dt,$$

де ρ — густина рідини; S — площа поперечного перерізу. При стаціонарному потоці маса рідини або газу, що протікає за одиницю часу через будь-який поперечний переріз трубки течії, однакова для

всіх перерізів. Якщо взяти два перерізи, площі яких S_1 і S_2 (рис. 7.8), то для стаціонарного потоку можна записати, що

$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2.$$

Оскільки вважаємо, що рідина ідеальна, тобто абсолютно нестислива, то $\rho_1 = \rho_2$, і тоді рівняння перепишемо так:

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 \qquad (7.7)$$

або

$$vS = \text{const}. \qquad (7.8)$$

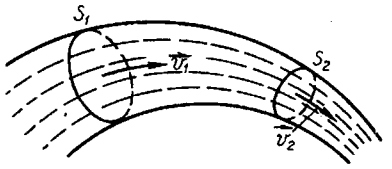


Рис. 7.8

Рівняння (7.8) виражає теорему нерозривності течії. Добуток швидкості течії нестисливої рідини на площу поперечного перерізу трубки течії є величина стала для даної трубки течії. Його можна застосовувати не тільки до реальних рідин, а й до газів.

§ 7.3. Рівняння Бернуллі. Реакція рідини, що витікає

Встановимо зв'язок між тиском і швидкістю стаціонарного руху ідеальної рідини. Для цього виділимо ділянку трубки течії, в якій знаходиться об'єм рідини $ABCD$ (рис. 7.9). Вважатимемо, що рідина перебуває в полі земного тяжіння. Позначимо через p_1, v_1, ΔS_1 і p_2, v_2, ΔS_2 відповідно тиск, швидкість рідини і площу перерізу. Через h_1 і h_2 позначимо висоти розміщення центрів перерізів AB і CD над деяким горизонтальним рівнем. Нехай за час Δt рідина перемістилася з положення $ABCD$ в положення $A'B'C'D'$. Знайдемо роботу A, виконану при цьому силами тиску. Сили тиску, що діють на бічну поверхню трубки течії, роботи не виконують, оскільки вони завжди перпендикулярні до напряму руху частинок рідини. Тому роботу виконують тільки сили тиску $F_1 = p_1 \Delta S_1$ і $F_2 = p_2 \Delta S_2$, що діють на рідину через перерізи AB і CD. При переміщенні межі AB в положення $A'B'$ виконується додатна робота $A_1 = p_1 \Delta S_1 v_1 \Delta t$, оскільки напрям дії сили тиску на межу AB збігається з напрямом переміщення Δl_1. Робота, виконана при переміщенні межі CD в положення $C'D'$ буде від'ємною, оскільки напрям дії сил тиску на межу CD протилежний напряму переміщення Δl_2 цієї межі. Вона дорівнює $A_2 = F_2 \Delta l_2 = p_2 \Delta S_2 v_2 \Delta t$. Робота, виконана силами тиску,

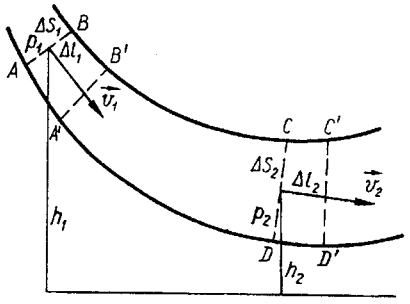


Рис. 7.9

$$\Delta A = A_1 - A_2 = p_1 \Delta S_1 v_1 \Delta t - p_2 \Delta S_2 v_2 \Delta t. \qquad (7.9)$$

Робота ΔA повинна дорівнювати зміні механічної енергії виділеного об'єму рідини. Оскільки рух рідини стаціонарний, енергія рідини в об'ємі $A'B'CD$ не змінюється. Тому зміна енергії виділеного об'єму рідини буде такою, якби маса рідини в об'ємі $ABB'A'$ перемістилась і заповнила об'єм $CDD'C'$. Механічна енергія рідини в об'ємі $ABB'A'$ дорівнює сумі кінетичної і потенціальної енергій, тобто

$$E_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + m_1 g h_1 = \frac{1}{2} \rho_1 v_1^3 \Delta S_1 \Delta t + \rho_1 v_1 \Delta S_1 \Delta t h_1 g,$$

де $m_1 = \rho_1 \Delta S_1 \Delta l_1 = \rho_1 \Delta S_1 v_1 \Delta t$.

Повна енергія цієї самої маси рідини, яка займає об'єм $CDD'C'$, дорівнює

$$E_2 = \frac{m_2 v_2^2}{2} + m_2 g h_2 = \frac{1}{2} \rho_2 v_2^3 \Delta S_2 \Delta t + \rho_2 v_2 \Delta S_2 \Delta t g h_2,$$

де $m_2 = \rho_2 \Delta S_2 v_2 \Delta t$.

Зміна енергії $\Delta E = E_2 - E_1$, тобто

$$\Delta E = \frac{1}{2} \rho_2 v_2^3 \Delta S_2 \Delta t + \rho_2 v_2 \Delta S_2 \Delta t g h_2 - \frac{1}{2} \rho_1 v_1^3 \Delta S_1 \Delta t - \rho_1 v_1 \Delta S_1 \Delta t g h_1. \qquad (7.10)$$

За законом збереження енергії робота ΔA дорівнює зміні енергії, тобто

$$\Delta A = \Delta E. \qquad (7.11)$$

Підставивши в (7.11) вирази (7.9) і (7.10), дістанемо

$$p_1 \Delta S_1 v_1 \Delta t - p_2 \Delta S_2 v_2 \Delta t = \frac{1}{2} \rho_2 v_2^3 \Delta S_2 \Delta t + \rho_2 v_2 \Delta S_2 g h_2 \Delta t -$$

$$- \frac{1}{2} \rho_1 v_1^3 \Delta S_1 \Delta t - \rho_1 v_1 \Delta S_1 g h_1 \Delta t. \qquad (7.12)$$

Для стаціонарного потоку нестисливої рідини об'єми $ABB'A'$ і $CDD'C'$ будуть однакові, тобто справджуються рівності $v_1 \Delta S_1 \Delta t = v_2 \Delta S_2 \Delta t = \Delta V$ і $\rho_1 = \rho_2 = \rho$. Поділивши вираз (7.12) на об'єм ΔV, матимемо

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2. \qquad (7.13)$$

Оскільки перерізи AB і CD взято довільно, то для будь-якого перерізу трубки течії виконується умова

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = \text{const}. \qquad (7.14)$$

Рівняння (7.14) є *рівнянням Бернуллі* для стаціонарного потоку ідеальної рідини. Експериментально доведено, що рівняння Бернуллі можна застосувати і для реальних рідин, в'язкість яких невелика, а також для газів, швидкість руху яких значно менша від швидкості поширення в них звуку.

Розглянемо окремі випадки. Нехай трубка течії має різні перерізи, але її вісь розміщена горизонтально (h = const). Тоді рівняння (7.14) матиме вигляд

$$\frac{\rho v^2}{2} + p = \text{const}. \qquad (7.15)$$

Звідси видно, що тиск більший там, де швидкість менша, тобто де більший переріз. Це пояснюється тим, що при переході рідини із широкої частини у вужчу швидкість рідини зростає, вона рухається з прискоренням. Поява прискорення зумовлена дією сили, напрям якої, за другим законом Ньютона, збігається з напрямом прискорення. Оскільки ця сила зумовлена різницею тисків, то тиск більший у ширшій частині трубки течії. Якщо $S_1 = S_2$, $v_1 = v_2$, рівняння Бернуллі матиме вигляд

$$\rho g h_1 + p_1 = \rho g h_2 + p_2. \qquad (7.16)$$

Звідси знаходимо різницю тисків

$$\Delta p_0 = p_2 - p_1 = \rho g (h_1 - h_2). \qquad (7.17)$$

З цієї рівності випливає, що різниця тисків дорівнює гідростатичному тиску стовпа рідини висотою $h_1 - h_2$, тобто стовпа нерухомої рідини.

Якщо ж $v_1 \neq v_2$, то в загальному випадку різниця тисків

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \rho g(h_1 - h_2) + \frac{\rho}{2}(v_1^2 - v_2^2). \qquad (7.18)$$

З останніх формул видно, що різниці тисків Δp_0 і Δp у нерухомій і рухомій рідинах для перерізів, які розміщені на висотах h_1 і h_2, неоднакові. У другому випадку різниця тисків більша на величину $\rho(v_1^2 - v_2^2)/2$.

У рівнянні (7.14) тиск p називають *статичним*. Його вимірюють за допомогою манометричних трубок з перерізом, паралельним лінії течії. Для вимірювання складової тиску $\rho v^2/2$, зумовленого рухом рідини, застосовують трубки з перерізом, перпендикулярним до лінії течії. Цю складову називають *динамічним тиском*, а суму $p + \frac{\rho v^2}{2}$ називають *повним тиском*, або повним напором. Для його вимірювання користуються *трубкою Піто*. Вона являє собою зігнуту манометричну трубку, яку розміщають у рухомій рідині так, що її відкритий кінець повернутий назустріч течії рідини (рис. 7.10, *а*). Для вимірювання статичного тиску p користуються зондом. Він відрізняється від трубки Піто тим, що його передня частина, яка повернута назустріч потоку рідини, запаяна, а в боковій стінці є невеликий отвір (рис. 7.10, *б*). На практиці трубку Піто і зонд суміщають в одному приладі, який називають *трубкою Прандтля* (рис. 7.10, *в*). Трубка Піто порушує характер руху рідини, і безпосередньо перед вхідним отвором виникає область, в якій швидкість руху частинок рідини зменшується до нуля ($v_2 = 0$). Тоді з рівняння (7.15) дістаємо

$$p_2 = p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2}.$$

За допомогою трубки Прандтля визначають динамічний напір $\left(p_2 - p_1 = \frac{\rho v_1^2}{2}\right)$.

Залежність тиску в рідині від її швидкості лежить в основі дії багатьох технічних пристроїв.

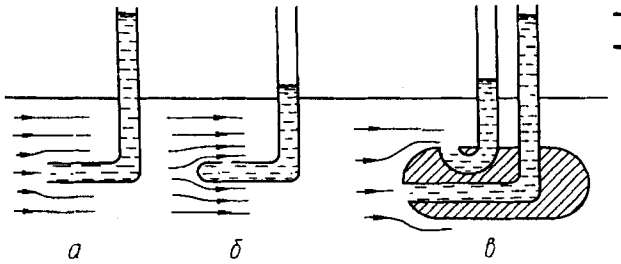


Рис. 7.10

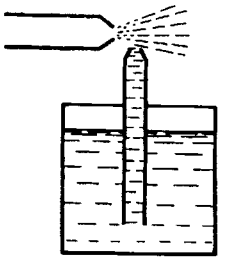


Рис. 7.11

Оскільки сума тиску і динамічного напору в потоці рідини стала, то в струмені тиск завжди менший, ніж у нерухомій рідині. При великих швидкостях тиск може стати меншим від атмосферного. Це явище застосовується в пульверизаторах, карбюраторах, *водоструминних насосах* та в інших приладах. На рис. 7.11 показано найпростіший пульверизатор.

При достатній швидкості течії повітря тиск у звуженій частині трубки буде менший від атмосферного. Внаслідок цього рідина

піднімається по вертикальній трубці вгору, оскільки тиск над її верхнім кінцем менший від атмосферного, який діє на вільну поверхню рідини в посудині. При дальшому збільшенні швидкості повітря в звуженій частині горизонтальної трубки рідина піднімається вище від верхнього перерізу вертикальної трубки, захоплюється струменем повітря і розпилюється. Подібні явища спостерігаються в карбюраторі. Повітря при засмоктуванні в циліндр двигуна внутрішнього згорання рухається по звуженому каналу, в який входить трубка. Кінець цієї трубки міститься в рідкому паливі. Звуження каналу зумовлює зниження тиску, внаслідок чого рідке паливо піднімається по трубці і розпилюється повітрям.

Приклад 7.2. Визначити швидкість витікання ідеальної нестисливої рідини через малий отвір у боковій стінці або дні широкої посудини (рис. 7.12).

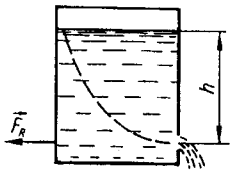


Рис. 7.12

Розв'язання. Позначимо відстані від центра отвору до вільної поверхні рідини через h. На вільну поверхню рідини в посудині діє атмосферний тиск p, такий самий тиск діє на поверхню струмини що витікає. Оскільки площа перерізу посудини S_1 перевищує площу перерізу отвору, то швидкість руху частинок рідини вільної поверхні значно менша від швидкості частинок, що проходять отвір, тобто $v_1 \ll v$, і величиною v_1 у рівнянні Бернуллі можна знехтувати. Лінії течії беруть свій початок на поверхні рідини і будуть перпендикулярні до площини перерізу отвору, (рис. 7.12). Запишемо рівняння Бернуллі для цього випадку:

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h = p_1 + \frac{\rho v^2}{2}. \qquad (1)$$

Оскільки $v_1 \ll v$, то з (1) маємо

$$v = \sqrt{2gh}. \qquad (2)$$

Формула (2) називається формулою Торрічеллі. З неї видно, що при витіканні рідина має таку швидкість, яку мало б тіло при вільному падінні з висоти h.

Швидкість витікання реальних рідин тим більше відрізняється від швидкості, обчисленої за формулою (2), чим більша в'язкість рідини.

Знаючи швидкість витікання, можна визначити об'єм рідини, яка витікає щосекунди через отвір:

$$V = vS = S\sqrt{2gh}. \qquad (3)$$

Для реальних рідин ця величина менша і залежить від в'язкості та форми отвору.

Приклад 7.3. На рис. 7.13 зображено схему водоміра. По горизонтальній трубі змінного перерізу протікає вода. Визначити витрати води за одиницю часу, якщо різниця рівнів води у двох манометричних трубках Δh, а перерізи труби біля основ трубок відповідно S_1 і S_2.

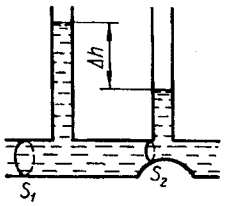


Рис. 7.13

Розв'язання. Витрати води Q (маса води, яка протікає щосекунди через поперечний переріз труби) для кожного з перерізів

$$Q = \rho v_1 S_1 = \rho v_2 S_2. \qquad (1)$$

Оскільки водомірна труба розміщається горизонтально, то рівняння Бернуллі має вигляд

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}.$$

З формул (1) і (2) маємо

$$v_1 = S_2\sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho(S_1^2 - S_2^2)}}, \qquad v_2 = S_1\sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho(S_1^2 - S_2^2)}}.$$

Вважаємо, що $p_1 - p_2 = \rho g \Delta h$, тоді

$$Q = \rho S_1 S_2\sqrt{\frac{2g\Delta h}{S_1^2 - S_2^2}}.$$

Отже, $Q = k\sqrt{\Delta h}$, де $k = \rho S_1 S_2\sqrt{\frac{2g}{S_1^2 - S_2^2}}$ — стала водоміра.

Рідина, що витікає, за одиницю часу матиме імпульс

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} v = Qv = \rho v^2 S = 2\rho g h S. \qquad (7.19)$$

За законом збереження імпульсу повинен змінитися імпульс посудини з рідиною. Це приведе до того, що на посудину з боку рідини діятиме сила тиску (рис. 7.12) в напрямі, протилежному до напряму швидкості витікання рідини:

$$F_R = 2\rho g h S. \qquad (7.20)$$

Силу F_R називають силою реакції рідини, що витікає, або реактивною силою. З формули (7.20) випливає, що сила F_R удвоє більша від сили тиску на пробку, яка закривала б отвір. Це пояснюється тим, що при витіканні рідини через отвір відбувається перерозподіл тиску всередині рідини в посудині. При цьому напроти отвору тиск на стінки посудини виявляється більшим, ніж поблизу отвору, де швидкість руху рідини близька до швидкості витікання через отвір.

На дії реактивної сили грунтується застосування гвинтів на літаках і кораблях для створення сили тяги. При швидкому обертанні гвинта літака повітря відштовхується назад до хвоста лопатями літака, змінюючи свій імпульс. У свою чергу, повітря діє на гвинт і на зв'язаний з ним корпус літака з силою, яка надає йому імпульс.

Дією реактивної сили на гвинт вертольота з боку повітря пояснюється виникнення підіймальної сили. При обертанні навколо вертикальної осі гвинт вертольота надає прилеглим до нього шарам повітря імпульс, напрямлений вниз. Ці маси повітря, в свою чергу, діють на гвинт і з'єднаний з ним корпус вертольота з силою реакції, яка напрямлена угору. Якщо ця сила дорівнює вазі вертольота або перевищує її, то вертоліт летить у повітрі або піднімається вгору.

Сила реакції виникає також і тоді, коли швидкість течії стала за модулем але змінюється за напрямом. Так, при стаціонарному потоці рідини по трубі сталого перерізу, яка зігнута під деяким кутом (рис. 7.14), рідина до згину труби за одиницю часу переносить імпульс $\vec{p}_1 = \rho v_1 S \vec{v}_1$. Після згину труби за одиницю часу переноситься рухомою рідиною імпульс $\vec{p}_2 = \rho v_2 S \vec{v}_2$. Оскільки труба сталого перерізу, то $v_1 = v_2$. Зміна імпульсу рухомої рідини за одиницю часу дорівнює діючій силі, яка зумовила цю зміну, тобто

$$\vec{F} = \Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \rho v S (\vec{v}_2 - \vec{v}_1).$$

Сила $\vec{F}$ зумовлена дією труби на рухому рідину. За третім законом Ньютона з боку рідини на трубу діятиме *сила реакції* $\vec{F}_1 = -\vec{F}$ (див. рис. 7.14).

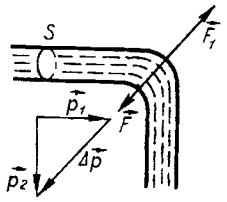


Рис. 7.14

На реактивній силі такого типу грунтується дія турбін. У турбінах через вигнуті труби (сопла), які закріплено на загальній осі обертання в площині, перпендикулярній до осі, пропускають рідину або газ у напрямі від їхніх приосьових кінців до зовнішніх. При русі рідини або газу по вигнутих соплах виникає сила реакції, момент якої і приводить турбіну в обертальний рух. Газові турбіни широко використовуються в авіації (турбогвинтові і турбореактивні двигуни). Гідравлічні турбіни використовуються в основному в стаціонарних умовах для приведення у рух генераторів електричного струму. Внаслідок високої економічності, компактності, надійності і можливості досягнення великих потужностей турбіни практично витіснили поршневі парові машини з сучасної енергетики.

§ 7.4. Рух в'язкої рідини. В'язкість. Формула Пуазейля

На відміну від ідеальних рідин у реальних рідинах при русі одних шарів рідини відносно інших діють сили, дотичні до поверхонь дотикання шарів. Ці сили називають силами в'язкого тертя або *силами в'язкості*. Уявно потік рідини можна поділити на нескінченну кількість шарів. При відносному переміщенні на кожний з шарів діють сили. З боку шару, швидкість якого більша, діє сила на шар, швидкість якого менша. Напрям, цієї сили збігається з напрямом руху рідини. З боку шару, швидкість руху якого менша, на шар, що рухається з більшою швидкістю, діє сила, яка напрямлена у протилежний бік від руху рідини, тобто вона цей шар гальмує.

Наявність сил в'язкості, що діють у рухомій рідині, підтверджується дослідними даними. Так, при русі рідини у горизонтальній трубі сталого перерізу рівні рідини у манометричних трубках, за законом Бернуллі, повинні бути однакові. Насправді ж тиск рідини в трубі спадає у напрямі її руху (рис. 7.15). Для того щоб рух рідини в трубі був стаціонарним, на її кінцях треба підтримувати сталу різницю тисків, сила яких зрівноважує сили внутрішнього тертя. Зовнішні сили при переміщенні рідини в трубі виконують роботу, яка йде на подолання сил в'язкого тертя. В'язке тертя у рухомій рідині значно ускладнює описання її руху. Так, при стаціонарному русі в'язкої рідини швидкість течії в різних точках поперечного перерізу неоднакова. Шар рідини, що безпосередньо прилягає до стінок труби, прилипає до неї, залишаючись практично нерухомим. З віддаленням від стінок труби швидкість руху шарів рідини зростає. Це можна спостерігати на такому досліді. У вертикальну скляну трубку наливають воду (рис. 7.16). Потім обережно наливають забарвлену воду. В стані спокою межа поділу горизонтальна. За допомогою крана K добивають-

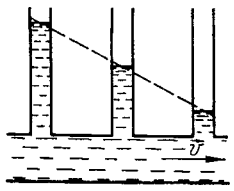


Рис. 7.15

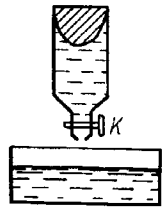


Рис. 7.16

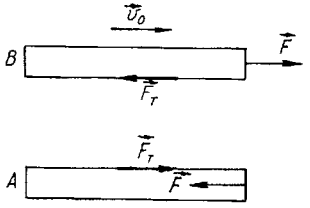


Рис. 7.17

ся досить повільного витікання рідини. При цьому межа поділу з часом змінює свою форму, витягуючись вздовж осі трубки. Межа поділу набуває форми параболоїда обертання. Такий розподіл швидкостей у рухомій рідині зумовлений наявністю сил тертя між шарами рідини.

Для з'ясування закономірностей, яким підлягають сили в'язкого тертя, розглянемо такий дослід. У рідині знаходяться дві пластини, лінійні розміри яких значно перевищують відстань між ними (рис. 7.17). Вважатимемо, що нижня пластина A нерухома, а верхня пластина B рухається відносно нижньої зі швидкістю v_0. Для того щоб пластина B рухалася зі сталою швидкістю, на неї повинна діяти певна сила $\vec{F}$. Оскільки пластина рухається без прискорення, то на неї діє у протилежному напрямі до руху зрівноважуюча сила, яка є силою в'язкого тертя, тобто $\vec{F}_T = -\vec{F}$. Виявляється, щоб нижня пластина перебувала у спокої, до неї треба прикласти також силу $\vec{F}$, але протилежну за напрямом.

І. Ньютон експериментально встановив, що сила пропорційна площі пластини S, швидкості v_0 і обернено пропорційна відстані між пластинами d, тобто

$$F = \eta S \frac{v_0}{d}, \tag{7.21}$$

де η — коефіцієнт пропорційності, який залежить від природи і стану рідини. Його називають динамічним коефіцієнтом внутрішнього тертя або *коефіцієнтом в'язкості* чи просто *в'язкістю.*

Формула (7.21) справджується не тільки за умови, що одна з пластин перебуває в спокої, вона діє і тоді, коли обидві пластини рухаються рівномірно, але з різними швидкостями. Отже, формула (7.21) матиме вигляд

$$F = \eta S \frac{v_1 - v_2}{d}, \tag{7.22}$$

де v_1 і v_2 — відповідно швидкості верхньої і нижньої пластин. Величину, що дорівнює зміні швидкості на одиницю відстані між шарами, називають градієнтом швидкості і позначають $\text{grad}v$. Якщо напрям осі OX перпендикулярний до рухомих шарів рідини, то градієнт швидкості

$$\text{grad}v = \frac{dv}{dx}.$$

Тоді вираз (7.22) перепишемо так:

$$F = \eta S \frac{dv}{dx}. \tag{7.23}$$

З цієї формули можна встановити фізичний зміст коефіцієнта в'язкості: $\eta = F$ при $S = 1$ і $dv/dx = 1$, тобто коефіцієнт в'язкості чисельно дорівнює силі, що діє на одиницю площі рухомих шарів рідини при градієнті швидкості рівному одиниці. Одиницею в'язкості в СІ є паскаль-секунда (Па·с).

Висловлені в цьому параграфі міркування однаковою мірою стосуються як рідин, так і газів. Відмінність виявляється лише в тому, що коефіцієнт в'язкості для рідин зменшується з підвищенням температури, а для газів, навпаки, зростає з підвищенням температури.

Розглянемо стаціонарний потік рідини у горизонтальній циліндричній трубі сталого перерізу, радіус якої R. Знайдемо закон зміни швидкості із зміною відстані r від осі труби.

Виділимо в трубі циліндричний об'єм рідини радіуса r і завдовжки l (рис. 7.18). Вісь симетрії циліндра збігається з віссю труби. На основи циліндра діють сили тиску, рівнодійна яких збігається з напрямом течії,

$$F = (p_1 - p_2)\pi r^2. \tag{7.24}$$

На бічну поверхню циліндра діє сила тертя, яка на основі виразу (7.23) буде

$$F_т = \eta S \frac{dv}{dx} = \eta \cdot 2\pi r l \frac{dv}{dr}, \tag{7.25}$$

де $S = 2\pi rl$ — площа бічної поверхні циліндра.

Для стаціонарного потоку $F = F_т$, тобто

$$(p_1 - p_2)\pi r^2 = 2\pi\eta r l \frac{dv}{dr}. \tag{7.26}$$

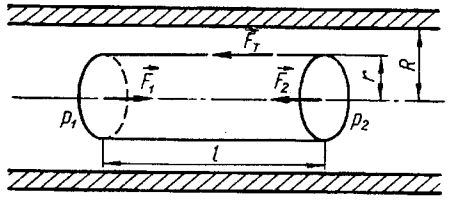


Рис. 7.18

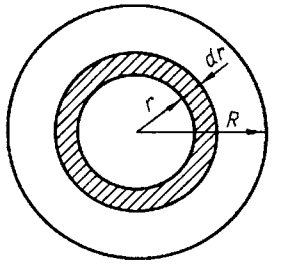


Рис. 7.19

Оскільки швидкість руху рідини з віддаленням від осі труби зменшується, то $\frac{dv}{dr} < 0$ і рівняння (7.26) перепишемо так:

$$(p_1 - p_2)r = -2\eta l \frac{dv}{dr}. \tag{7.27}$$

Звідси маємо

$$dv = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta l} r dr. \tag{7.28}$$

Проінтегрувавши цей вираз, маємо

$$v = -\frac{p_1 - p_2}{4\eta l} r^2 + C. \tag{7.29}$$

Сталу інтегрування визначаємо з граничних умов. Для $r = R$ $v = 0$, тоді

$$C = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} R^2.$$

Вираз (7.29) набирає вигляду

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l}(R^2 - r^2). \tag{7.30}$$

Максимальну швидкість має рідина на осі труби, тобто

$$v_0 = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} R^2. \tag{7.31}$$

Враховуючи вираз (7.31), формулу (7.30) можна записати

$$v = v_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right). \tag{7.32}$$

Отже, при віддаленні від осі труби швидкість v змінюється за параболічним законом.

Визначимо об'єм рідини, що протікає через поперечний переріз труби за проміжок часу t. Уявно поперечний переріз труби поділимо на концентричні кільця, ширина яких dr (рис. 7.19). Площа кільця $dS = 2\pi r dr$. За час t через таке кільце протікає об'єм рідини

$$dV = vt\,dS = 2\pi r v t\,dr. \tag{7.33}$$

Враховуючи (7.30), вираз (7.33) перепишемо у вигляді

$$dV = \frac{(p_1 - p_2)\pi t}{2\eta l}(R^2 - r^2) r dr. \tag{7.34}$$

Проінтегрувавши вираз (7.34), дістаємо

$$V = \frac{p_1 - p_2}{2\eta l}\pi t \int_0^R (R^2 - r^2)\, r dr = \frac{p_1 - p_2}{2\eta l}\pi t \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right),$$

а за одиницю часу

$$V = \frac{\pi R^4}{8\eta l}(p_1 - p_2). \tag{7.35}$$

Формулу (7.35) називають *формулою Пуазейля*. З цієї формули випливає, що об'єм рідини, яка протікає через трубу при сталому перепаді тисків, пропорційний четвертому степеню радіуса труби і обернено пропорційний довжині труби та в'язкості рідини.

Формула справедлива тільки для ламінарних потоків рідини. *Ламінарним* називають такий потік, при якому частинки рідини рухаються вздовж прямолінійних траєкторій, паралельних осі труби.

Формулу Пуазейля покладено в основу експериментальних методів визначення в'язкості рідин та газів. До турбулентних потоків формула Пуазейля непридатна.

Приклад 7.4. Встановити умови, за яких силами в'язкості у потоці рідини в трубі можна нехтувати, тобто, коли до потоку рідини застосовне рівняння Бернуллі.

Розв'язання. Силами в'язкого тертя в потоці рідини можна нехтувати, коли втрати кінетичної енергії рідини на роботу проти цих сил за одиницю часу незначні порівняно з кінетичною енергією, що переноситься потоком рідини за одиницю часу.

Кінетична енергія, що переноситься потоком рідини через переріз труби за одиницю часу,

$$W = \int_0^R \frac{\rho v^2}{2} \cdot 2\pi r v\,dr. \tag{1}$$

Підставивши у вираз (1) формулу швидкості (7.32) і проінтегрувавши, дістанемо

$$W = \frac{1}{4}\rho V v_0^2, \tag{2}$$

де V — об'єм рідини, що протікає за одиницю часу через поперечний переріз труби, який визначаємо співвідношенням $V = \pi R^2 < v >$ ($< v > = \frac{1}{2} v_0$ — середня швидкість потоку).

Визначимо роботу, яка виконується за одиницю часу силами, зумовленими різницею тисків, проти сил в'язкого тертя:

$$A = \int v\,(p_1 - p_2)\,2\pi r dr = \frac{4\eta v_0 l}{R^2} V. \tag{3}$$

Нехтувати силами в'язкості можна тоді, коли $W \gg A$, тобто коли $\frac{\rho v_0 R^2}{16\eta l} \gg 1$.

§ 7.5. Ламінарний та турбулентний режими течії. Число Рейнольдса

При вивченні руху рідин або газів спостерігаються два види їхнього руху: ламінарний і турбулентний. При ламінарному русі окремі шари рідини неначе ковзають один відносно одного і не перемішуються. Швидкості частинок у будь-якому перерізі паралельні між собою. З цього випливає, що *ламінарна течія* є стаціонарною. Ламінарну течію можна спостерігати у горизонтальній прозорій трубі, в якій з невеликою швидкістю рухається вода, а на вісь труби через тонку трубочку вводиться струмина забарвленої рідини. Ця струмина матиме вигляд прямої лінії вздовж осі труби (рис. 7.20).

Із збільшенням швидкості руху характер течії істотно змінюється. Ламінарна течія стає нестійкою і переходить у турбулентний потік. При турбулентному потоці частинки рідини здійснюють нерегулярні рухи по складних траєкторіях, а швидкості змінюються хаотично як за напрямом, так і за модулем. Внаслідок цього відбувається інтенсивне перемішування шарів рідини. Із збільшенням швидкості руху рідини у трубі забарвлена струмина розпливається, утворюючи завихрення (рис. 7.21). Прикладами турбулентного руху є рух води у

бурхливих гірських річках, рух диму, що виходить із заводських труб тощо. Особливо наочним прикладом турбулентного руху повітря є його рух під час снігової заметілі. Турбулентні потоки — це найбільш поширений вид руху рідин і газів у природі. В турбулентних потоках часто виникають вихори. Великі вихори нестійкі і розпадаються на дрібніші.

При турбулентній течії, середня швидкість по всьому поперечному перерізі потоку майже стала. У суміжному тонкому шарі рідини, що прилягає до самих стінок труби, швидкість зменшується до нуля. Незважаючи на те, що турбулентний потік за своїм змістом не-

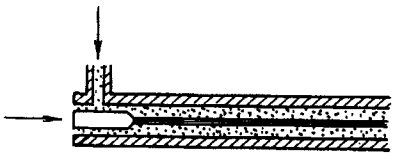


Рис. 7.20

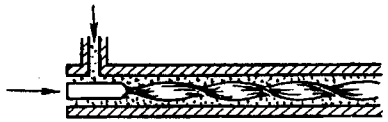


Рис. 7.21

стаціонарний, на практиці його умовно розглядають як стаціонарний потік з усередненими характеристиками.

При вивченні руху рідин ставиться завдання одержати такі результати, які характеризували б не один якийсь конкретний випадок, а сукупність явищ. Це означає, що в рамках знайдених результатів явища подібні. На основі досить загальних фізичних міркувань можна дійти висновку, що множинність зв'язків зовсім не є власною властивістю досліджуваного явища, що насправді вплив окремих факторів, які подані різними величинами, проявляється не розрізнено, а разом, що треба розглядати не окремі величини, а їхні сукупності. Виявляється, що можна розробити метод, який дає змогу знайти зв'язок між окремими групами величин і поєднати їх у комплекси строго визначеного вигляду. Такі комплекси мають певний фізичний зміст.

Так, рух рідини можна характеризувати такими величинами: радіусом-вектором $\vec{r}$ і швидкістю $\vec{v}$ елементарного об'єму рідини, характерним розміром l і характерною швидкістю потоку v_0, густиною ρ, в'язкістю η, стисливістю або швидкістю c поширення звуку у рідині. Якщо сила тяжіння відіграє істотну роль, то для характеристики руху рідини беруть до уваги і прискорення вільного падіння g. Якщо потік не стаціонарний, то для його характеристики вводять так званий характерний час τ, протягом якого відбуваються істотні зміни в потоці рідини.

Отже, між величинами $\vec{r}, \vec{v}, v_0, l, \rho, \eta, c, g, \tau$ повинен існувати функціональний зв'язок. З наведеної сукупності величин можна утворити шість безрозмірних комплексів:

$$\frac{\vec{v}}{v_0};\quad \frac{\vec{r}}{l};\quad \mathrm{Re} = \frac{\rho l v_o}{\eta} = \frac{l v_0}{\nu}; \tag{7.36}$$

$$\mathrm{Fr} = \frac{v_0^2}{gl}; \tag{7.37}$$

$$\mathrm{M} = \frac{v_0}{c}; \tag{7.38}$$

$$\mathrm{S} = \frac{v_0 \tau}{l}, \tag{7.39}$$

де $\nu = \eta/\rho$ — кінематична в'язкість; η — динамічна в'язкість.

Між цими комплексами також повинен існувати функціональний зв'язок. Істотним тут є те, що коли для двох потоків п'ять із шести комплексів збігаються, то збігатимуться і шості комплекси. У цьому і полягає суть загального закону подібності потоків. Такі потоки називають механічно або гідродинамічно подібними.

Величини Re, Fr, M, S називають відповідно числами Рейнольдса, Фруда, Маха, Струхаля.

З'ясуємо фізичний зміст чисел Рейнольдса і Фруда.

Аналіз виразу числа Рейнольдса (7.36) показує, що воно з точністю до сталого множника збігається із співвідношенням прикладу 7.4, яке виражає відношення кінетичної енергії рідини, що переноситься потоком через заданий переріз за одиницю часу, до роботи проти сил в'язкого тертя, що виконується потоком також за одиницю часу. Отже, число Рейнольдса має порядок величини, яка визначається відношенням кінетичної енергії рідини до втрат енергії, зумовленої роботою сил в'язкості на шляху, що дорівнює характерній довжині. Число Рейнольдса визначає відносну роль інерції і в'язкості рідини під час течії. При великих числах Рейнольдса основну роль відіграє інерція, а при малих — в'язкість.

Число Фруда за своїм порядком визначає відношення кінетичної енергії рідини до приросту енергії, зумовленої роботою сили тяжіння на шляху, що також дорівнює характерній довжині.

Течії подібні, якщо вони мають однакові числа Рейнольдса і Фруда.

Як уже зазначалося, із збільшенням швидкості течії ламінарний рух переходить у турбулентний. Швидкість, при якій відбувається цей перехід, називають *критичною*. Замість критичної швидкості користуються числом Рейнольдса. Так, якщо за характерний розмір взяти радіус труби, то критичне значення числа Рейнольдса, при якому ламінарний рух переходить у турбулентний, $\mathrm{Re}_{кр} = 1100$. При цьому немає значення, внаслідок чого число Рейнольдса має таку величину —

в результаті збільшення характерного розміру l, чи збільшення швидкості, чи зменшення в'язкості. Тому число Рейнольдса може бути критерієм механічної подібності різних потоків.

Критичне значення числа Рейнольдса, тобто число Re, при якому ламінарний рух переходить у турбулентний, визначається тільки експериментально. Число Рейнольдса відіграє важливу роль в усіх кількісних дослідженнях потоків рідин і газів.

Для вивчення руху тіл заданої геометричної форми в рідинах або газах на практиці часто проводяться дослідження з тілами подібної форми, але менших розмірів. А далі результати переносять на тіла більших розмірів. Для цього відповідним добором швидкості і густини слід досягти рівності чисел Рейнольдса в обох випадках.

§ 7.6. Рух тіл у рідинах і газах

Однією з досить важливих задач гідро- та аеродинаміки є дослідження руху твердих тіл в рідинах або в газах, що зводиться до вивчення сил, з якими діє середовище на рухомі тіла. Актуальність цієї задачі зумовлена практикою кораблe- і літакобудування, швидкість руху яких дедалі зростає.

Характер взаємодії між рідиною і тілом, що міститься у рідині, залежить від їхньої відносної швидкості. З механічного принципу відносності випливає, що сила взаємодії між ними однакова як для руху твердого тіла в нерухомій рідині, так і в разі обтікання нерухомого тіла рідиною, що рухається з такою самою за модулем і протилежною за напрямом швидкістю.

Сила, з якою діє рідина на тіло при їхньому відносному русі, залежить також від форми тіла і в загальному випадку буде напрямлена під деяким кутом до напряму руху. Цю силу завжди можна розкласти на дві взаємно перпендикулярні складові сили. Складову, що діє у напрямі потоку, називають силою лобового опору. Складову, що перпендикулярна до напряму потоку, називають піднімальною силою.

На симетричні тіла, вісь симетрії яких збігається з напрямом потоку, діє тільки сила лобового опору. Вона залежить від форми та розмірів тіл, швидкості потоку рідини та від її властивостей.

Перш ніж перейти до розгляду обтікання тіл реальними рідинами, спочатку розглянемо обтікання кулеподібного тіла стаціонарним потоком ідеальної рідини (рис. 7.22). При обтіканні кулі потоком рідини лінії течії поблизу поверхні кулі зазнають симетричних викривлень. Відповідно до рівняння Бернуллі розподіл тисків буде симетричним (рис. 7.23) і результуюча сила, що діє па поверхню кулі, дорівнюватиме нулю. Такий самий результат дістанемо і для тіл іншої форми. Отже, при розміщенні тіл у стаціонарному потоці ідеальної рідини сила лобового опору дорівнює нулю. До такого незвичайного

висновку вперше дійшов Д'Аламбер, звідси назва — парадокс Д'Аламбера.

Інша картина спостерігається при обтіканні тіл реальними рідинами, які мають в'язкість. Такі рідини не можуть вільно ковзати по поверхні тіла. У цьому разі досить тонкий шар рідини прилипає до поверхні тіла і утворює суміжний шар. Його відносна швидкість дорівнює нулю. З віддаленням від поверхні тіла швидкість руху шарів рідини зростає. Внаслідок наявності градієнта швидкості руху рідини біля поверхні тіла на нього діятиме сила в'язкого тертя. Результуюча сила в'язкості, що діє на тіло напрямлена вздовж потоку рідини. Дослід показує, що її величина пропорційна швидкості, тобто

$$F = Cv, \tag{7.40}$$

де C — коефіцієнт, який залежить від в'язкості рідини, розмірів і форми тіла, його орієнтації відносно потоку. Для малих значень числа Рейнольдса ($\mathrm{Re} \approx 1$) суміжний шар має товщину, яка дорівнює розмірам тіла. Із збільшенням числа Рейнольдса ($\mathrm{Re} \approx 10^4$), тобто із

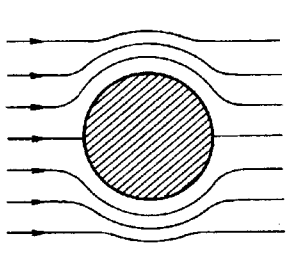


Рис. 7.22

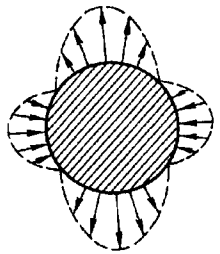


Рис. 7.23

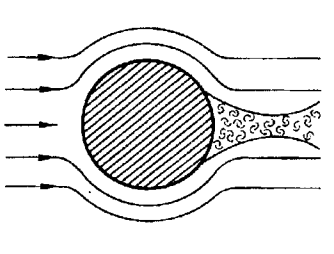


Рис. 7.24

зростанням швидкості потоку, суміжний шар різко виділяється в загальному потоці рідини і його товщина має порядок 0,01 розмірів тіла. При таких умовах сили в'язкого тертя значно впливають на характер обтікання тіла рідиною. Лінії течії перестають замикатися за тілом, як це зображено на рис. 7.22, і відриваються від нього. За тілом утворюються вихори (рис. 7.24). Область за тілом, в якій утворюються вихори, різко відокремлюється від області регулярного потоку рідини, тому симетрії розподілу тиску (подібно до розподілу його на рис. 7.23) немає.

Попереду тіла розподіл тиску залишається майже без змін, а в області вихорів він буде менший і приблизно дорівнюватиме статичному тиску у стаціонарному потоці рідини. Внаслідок такого розподілу виникає результуюча сила тиску, напрямлена в бік потоку. Вона називається *силою лобового опору*. Оскільки попереду тіла тиск більший від тиску в області вихорів тіла на величину динамічного напору, тобто на величину $\rho v^2/2$, то сила лобового опору пропорційна густині

рідини ρ, квадрату її відносної швидкості v та площі поперечного перерізу тіла S, тобто

$$F = C_1 \rho S v^2, \tag{7.41}$$

де C_1 — коефіцієнт пропорційності, який залежить від числа Рейнольдса, форми тіла та його орієнтації у потоці рідини.

Отже, на тіло у рухомій рідині діють сили в'язкості і лобового опору. Сили в'язкості діють на бічну поверхню тіла, сили лобового опору — на поверхню тіла, на яку набігає потік рідини. Останні виникають внаслідок того, що тіло, яке омивається рідиною, змінює імпульс її елементів, тобто тіло діє з деякими силами на елементи рідини. За третім законом Ньютона, з боку рідини тіло зазнаватиме такої самої дії за величиною, але протилежної за напрямом. Сили в'язкості і сили лобового опору завжди діють одночасно на тіла, розміщенні у рухомій рідині. Оскільки сили лобового опору пропорційні квадрату відносної швидкості, а сили в'язкості пропорційні першому ступеню швидкості, то при досить малій відносній швидкості руху рідини відносно тіла переважатимуть сили в'язкості, а при великих швидкостях — сили лобового опору. Критерієм того, яка із сил переважатиме, є число Рейнольдса. Якщо $\mathrm{Re} < 1$, то переважатимуть сили в'язкості, при $\mathrm{Re} > 1$ — сили лобового опору.

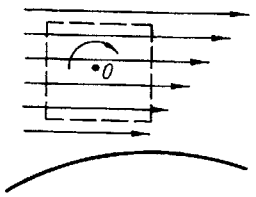


Рис. 7.25

З'ясуємо причини відривання суміжного шару і утворення вихорів. Внаслідок сил в'язкості у суміжному шарі швидкість частинок рідини поступово збільшується при віддаленні від поверхні тіла. Тому будь-який елементарний об'єм рідини у суміжному шарі має момент імпульсу відносно осі, що проходить через центр об'єму O перпендикулярно до напряму течії (рис. 7.25). Такий елемент об'єму рідини при певних умовах відривається від поверхні тіла, утворюючи вихор.

Уявленнями про суміжний шар можна користуватися тільки для тієї частини тіла, що розташована попереду місць, де відбувається відривання течії від поверхні тіла. Місця відриву течії називають *лінією відривання*. За лінією відривання за тілом виникає область потоку, довжина якого набагато перевищує характерні розміри тіла (див. рис. 7.24). Середня швидкість течії в цій області менша від швидкості потоку рідини, що натікає на тіло, а сама течія вихрова або турбулентна. Ця область утворює так звану вихрову доріжку Кармана. При малих значеннях числа Рейнольдса рух рідини в суміжному шарі буде ламінарним, а при зростанні числа Рейнольдса ламінарна течія стає нестійкою і переходить у турбулентний потік.

Приклад 7.5. Користуючись правилом розмірностей, вивести формулу сили в'язкості.

Розв'язання. Із загальних міркувань сила в'язкого тертя повинна залежати від в'язкості рідини η, площі бічної поверхні S і, як уже зазначалося, від швидкості руху рідини v, тобто

$$F = C\eta^\alpha S^\beta v^\gamma, \tag{1}$$

де C — безрозмірний коефіцієнт пропорційності; α, β, γ — невідомі показники степенів, значення яких треба встановити.

Очевидно, що розмірність правої частини рівняння (1) повинна мати розмірність сили, тобто

$$[\eta]^\alpha [S]^\beta [v]^\gamma = MLT^{-2}. \tag{2}$$

Оскільки розмірності величин відповідно $[\eta] = ML^{-1}T^{-1}$, $[S] = L^2$, $a[v] = LT^{-1}$, то вираз (2) перепишемо так:

$$[ML^{-1}T^{-1}]^\alpha [K^2]^\beta [LT^{-1}] = MLT^{-2}. \tag{3}$$

З виразу (3) маємо

$$M^\alpha L^{-\alpha+2\beta+\gamma} T^{-\alpha-\gamma} = MLT^{-2}. \tag{4}$$

Порівнявши показники степенів відповідних величин, дістанемо систему рівнянь

$$\begin{cases} \alpha = 1, \\ -\alpha + 2\beta + \gamma = 1, \\ -\alpha - \gamma = -2. \end{cases} \tag{5}$$

Звідси знаходимо

$$\alpha = 1; \quad \beta = \frac{1}{2}; \quad \gamma = 1.$$

Отже, формула сили в'язкості набирає такого вигляду:

$$F = G_\eta \sqrt{S} v. \tag{6}$$

Формулу (6) називають формулою Стокса. Для кульки формула Стокса має вигляд $F = 6\pi\eta r v$ (r — радіус кульки).

§ 7.7. Піднімальна сила крила літака

Як уже зазначалося, при обтіканні рідиною симетричного тіла піднімальна сила не виникає. Для її виникнення необхідно, щоб тіло, яке обтікається рідиною, було несиметричне або знаходилось несиметрично відносно напряму потоку. З'ясуємо механізм виникнення піднімальної сили, що діє на крило літака. Вважатимемо, що крило являє собою несиметричне тіло, яке обдувається горизонтальним потоком повітря (рис. 7.26). Розмістимо крило відносно потоку так, щоб площина, проведена вздовж крила через найбільш віддалені точки його профілю (точки a і b), утворювала з напрямом потоку кут α, який називають *кутом атаки*. Величину ab називають хордою крила. Оскільки в суміжному шарі швидкості частинок повітря збільшуються при віддаленні від поверхні крила, то в цьому шарі рух повітря буде вихровим. Над крилом відбуватиметься обертання вихорів за годинниковою стрілкою, а під крилом проти годинникової стрілки. Припустимо, що під крилом літака відірвалася якась маса повітря, яку відносить потоком у вигляді вихорів. Їхній момент імпульсу відмінний від нуля. У системі крило — повітря внутрішні сили в'язкого тертя і

сили тиску не можуть змінити загальний момент імпульсу. Якщо він до утворення вихорів дорівнював нулю, то, за законом збереження моменту імпульсу, після утворення вихорів момент імпульсу не повинен змінитися. З цього випливає, що одночасно з утворенням вихорів повинна виникнути циркуляція повітря навколо крила у напрямі, протилежному напряму обертання вихорів. Момент імпульсу циркуляції повітря дорівнює за модулем моменту імпульсу вихорів, але протилежний йому за напрямом. При цьому сумарний момент імпульсу всієї системи дорівнюватиме нулю.

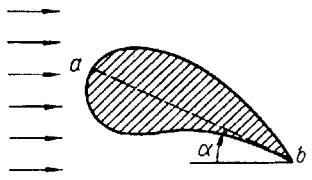


Рис. 7.26

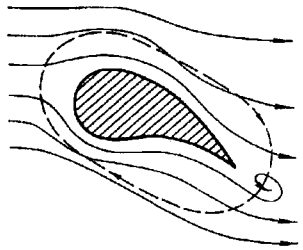


Рис. 7.27

На рис. 7.27 зображено профіль крила, розташованого у потоці повітря. Лінії течії цього потоку зображено суцільними лініями, а циркуляційну течію штриховою лінією.

Отже, внаслідок дії сил в'язкості при несиметричному обтіканні повітрям крила навколо нього виникає циркуляція повітря, її називають приєднаним вихором. Ця циркуляційна течія додається до течії повітря назустріч крилу, в результаті чого швидкість повітря над крилом буде більша, ніж під крилом. У циркуляційному потоці частинки газу перебувають не в обертальному русі, а рухаються неначе поступально вздовж замкнених траєкторій.

До зовнішнього потоку можна застосувати рівняння Бернуллі. З нього випливає, що при циркуляції повітря тиск над крилом зменшується, а під ним збільшується. Це зумовлює виникнення піднімальної сили крила, яка напрямлена вгору. Зазначимо, що піднімальна сила може бути напрямлена і вниз залежно від орієнтації крила відносно потоку повітря. Якщо віднесені потоком повітря вихори утворилися з частин суміжного шару верхньої частини крила, то виникає циркуляція повітря навколо крила літака проти стрілки годинника.

Математичну теорію піднімальної сили крила розробив російський вчений М. Є. Жуковський (1847 — 1921). Він показав, що потік біля крила можна розглядати як два потоки ідеальної рідини неперервного обтікання, що одночасно існують і мають плавно вигнуті лінії течії і циркуляційне обтікання навколо крила (див. рис. 7.27). Такий рух

відповідає умовам, при яких циркуляція швидкості по будь-якому замкненому контуру, що охоплює тіло, є величиною сталою. Циркуляція швидкості по замкненому контуру

$$\oint (\vec{v}\, d\vec{S}) = \oint v_s dS = \Gamma, \tag{7.42}$$

де v_s — проекція вектора швидкості на дотичну до елемента контура dS. М. Є. Жуковський замінив крило тонкою пластинкою (рис. 7.28), яка розміщена під кутом α до напряму потоку, і показав, що циркуляція

$$\Gamma = \frac{1}{2}\pi d v \alpha, \tag{7.43}$$

де d — хорда крила; α — кут атаки.

Знайдемо піднімальну силу крила. Нехай течія перед крилом має швидкість v_0 і тиск p_0. Вважатимемо, що швидкості циркуляційного потоку в точках над і під крилом, які знаходяться на відстані x від передньої кромки крила, відповідно v_1 і v_2, а тиски p_1 та p_2. Запишемо

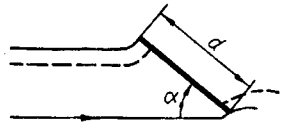


Рис. 7.28

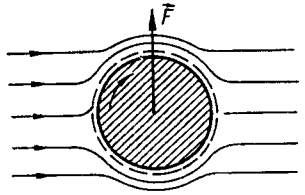


Рис. 7.29

рівняння Бернуллі для двох трубок течії, що проходять над і під крилом. Один з перерізів кожної трубки розмістимо в потоці, де швидкість і тиск v_0 і p_0. Тоді відповідно для верхньої і нижньої трубок

$$p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2} = p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2}; \qquad p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}.$$

Звідси

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)(v_1 - v_2)\rho.$$

Для малих кутів атаки v_1 і v_2 мало відрізняються від v_0 і $v_1 + v_2 \approx 2v_0$. Тоді

$$p_2 - p_1 = \rho v_0 (v_1 - v_2).$$

Біля точки з координатою x уявно виділяємо смужку завширшки dx вздовж хорди крила і завдовжки l у напрямі розмаху крила. Результуюча сила, що діє на цю смужку,

$$(p_2 - p_1)ldx = \rho v_0(v_1 - v_2)ldx.$$

Результуюча сила, що діє на всю поверхню крила,

$$F_{\text{під}} = \rho v_0 l \int_0^d (v_1 - v_2)\, dx.$$

Інтеграл $\int_0^d (v_1 - v_2)\, dx = \Gamma$ являє собою циркуляцію швидкості вздовж контура, проведеного навколо крила.

Отже,

$$F_{\text{під}} = \rho l v_0 \Gamma. \qquad (7.44)$$

Формула (7.44) називається *формулою Жуковського — Кутта.* На основі (7.44) і (7.43) можна зробити висновок, що піднімальна сила крила прямо пропорційна густині середовища, квадрату швидкості і куту атаки. Для малих кутів атаки формула (7.44) добре узгоджується з дослідними даними.

Циркуляційний потік також виникає навколо циліндра, який одночасно бере участь у поступальному і обертальному рухах у рідинах або в газах, а вісь обертання циліндра перпендикулярна до напряму потоку.

Якщо нерухомий циліндр розмістити у потоці рідини або газу, то виникає тільки сила лобового опору. Якщо циліндр примусити обертатися, то в потоці рідини або газу на такий циліндр діятиме піднімальна сила, яка за напрямом перпендикулярна до напряму потоку. Це явище називають *ефектом Магнуса.* На рис. 7.29 показано напрям дії піднімальної сили F на циліндр, який обертається за годинниковою стрілкою, а напрям потоку газу — зліва направо. Напрям циркуляційного потоку навколо циліндра показано штриховою лінією. Вісь обертання циліндра перпендикулярна до площини рисунка.

Розділ 8. Рух тіл у неінерціальних системах відліку

§ 8.1. Неінерціальні системи відліку. Сили інерції

У попередніх розділах розглянуто рух матеріальної точки відносно інерціальних систем відліку. У таких системах відліку рух матеріальної точки описується рівнянням, що виражає другий закон Ньютона, тобто

$$m\vec{a} = \vec{F}.$$

На практиці часто доводиться мати справу з неінерціальними системами відліку, тобто системами, які рухаються прискорено відносно інерціальних систем відліку. В неінерціальних системах відліку закони Ньютона взагалі не виконуються. Матеріальна точка може рухатися прискорено в неінерціальній системі відліку, якщо на неї не діють зовнішні сили. Так, при раптовому гальмуванні автобуса пасажири зазнають прискореного відхилення в напрямі руху. При повороті автобуса, коли відбувається перехід з прямолінійного на криволінійний рух, пасажири відхиляються у бік, протилежний центру траєкторії його руху. Подібних прикладів можна навести багато. Характерним для них є те, що в неінерціальних системах відліку тіла набувають прискорення, якщо на них не діють інші тіла.

Знайдемо рівняння руху в неінерціальній системі відліку. Завдання полягає в тому, щоб встановити закони перетворення сил і прискорень при переході від інерціальної до будь-якої неінерціальної системи відліку. Вважатимемо інерціальну систему відліку нерухомою, а швидкість руху тіла відносно неї називатимемо абсолютною. Швидкість тіла відносно неінерціальної системи відліку називатимемо відносною. Також вважатимемо, що ці швидкості малі порівняно із швидкістю світла у вакуумі. Для таких припущень відстані і проміжки часу інваріантні при переході від однієї системи відліку до будь-якої іншої незалежно від характеру її руху відносно нерухомої системи відліку. Зауважимо, що введені поняття "нерухома система відліку" і "абсолютна швидкість" умовні і не суперечать твердженню, що будь-який рух відносний.

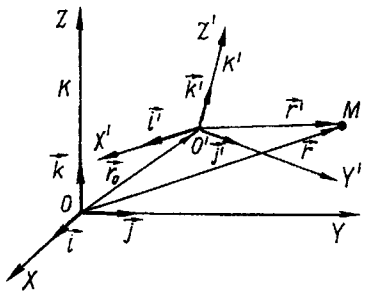


Рис. 8.1

Розглянемо рух матеріальної точки M відносно двох систем відліку. Положення матеріальної точки відносно нерухомої (інерціальної) системи K і рухомої (неінерціальної) системи відліку K' визначаються відповідно радіусами-векторами $\vec{r}$ і $\vec{r}'$ (рис. 8.1):

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},\ \vec{r}' = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}', \qquad (8.1)$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ і $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ — орти систем K і K'.

З рис. 8.1 видно, що

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}', \qquad (8.2)$$

де $\vec{r}_0$ — радіус-вектор початку координат O' рухомої системи відліку відносно нерухомої системи. Абсолютна швидкість матеріальної точки

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}.$$

З рівності (8.2) маємо

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt}. \tag{8.3}$$

Оскільки система K' рухається довільно, то

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \left(\frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'\right) + \left(x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}\right). \tag{8.4}$$

Перший доданок у виразі (8.4) є відносною швидкістю матеріальної точки, тобто швидкість її відносно рухомої системи відліку

$$\vec{v}_r = \frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'. \tag{8.5}$$

У загальному випадку рухома система відліку одночасно може брати участь у поступальному і обертальному рухах. Тоді $\frac{d\vec{i}'}{dt}, \frac{d\vec{j}'}{dt}, \frac{d\vec{k}'}{dt}$ — це лінійні швидкості кінців ортів $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ при обертальному русі системи відліку. Якщо кутова швидкість обертання рухомої системи відліку $\vec{\omega}$, то з рис. 8.2 видно, що $di' = i'd\varphi = i'\omega dt$ ($d\varphi$ — кут повертання системи K' за час dt), $|\vec{i}' + d\vec{i}'| = |\vec{i}'|$. Так само

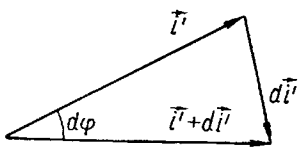


Рис. 8.2

$$d\vec{j}' = \vec{j}'\omega dt, \quad d\vec{k}' = \vec{k}'\omega dt.$$

Тоді на основі (1.21) можна записати, що

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = [\vec{\omega}\,\vec{i}']; \quad \frac{d\vec{j}'}{dt} = [\vec{\omega}\,\vec{j}']; \quad \frac{d\vec{k}'}{dt} = [\vec{\omega}\,\vec{k}']. \tag{8.6}$$

Перепишемо другий доданок виразу (8.4):

$$x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt} = [\vec{\omega}\,x'\vec{i}'] + [\vec{\omega}y'\vec{j}'] + [\vec{\omega}\,z'\vec{k}'] =$$

$$= [\vec{\omega}\,(x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}')] = [\vec{\omega}\,\vec{r}']. \tag{8.7}$$

Враховуючи (8.4), (8.5) і (8.7), вираз (8.3) перепишемо так:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + [\vec{\omega}\,\vec{r}'] + \vec{v}_r, \tag{8.8}$$

де $\vec{v}_0 = \frac{d\vec{r}_0}{dt}$.

Сума $\vec{v}_0 + [\vec{\omega}\,\vec{r}']$ є абсолютною швидкістю того елемента рухомої системи, через який у даний момент часу проходить матеріальна точка M, рух якої розглядається. Цю швидкість називають переносною швидкістю точки M і записують як

$$\vec{v}_e = \vec{v}_0 + [\vec{\omega}\,\vec{r}']. \tag{8.9}$$

Отже, формулу (8.8) перепишемо так:

$$\vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}_r. \tag{8.10}$$

Звідси випливає, що абсолютна швидкість точки M дорівнює геометричній сумі відносної і переносної швидкостей.

Аналогічно введемо поняття абсолютного і відносного прискорення. Під *абсолютним прискоренням* розумітимемо прискорення матеріальної точки у нерухомій (інерціальній) системі відліку, тобто

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

На основі співвідношення (8.8) маємо

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}_o}{dt} + \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}\vec{r}'\right] + \left[\vec{\omega}\frac{d\vec{r}'}{dt}\right] + \frac{d\vec{v}_r}{dt}. \tag{8.11}$$

Користуючись виразом (8.5), запишемо

$$\frac{d\vec{v}_r}{dt} = \left(\frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j}' + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k}'\right) +$$

$$+ \left(\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k}'}{dt}\right). \tag{8.12}$$

Величину $\vec{a}_r = \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j}' + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k}'$ називають *відносним прискоренням* матеріальної точки відносно рухомої системи відліку. Враховуючи співвідношення (8.6), другу суму в дужках виразу (8.12) подамо у такому вигляді:

$$\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k}'}{dt} = [\vec{\omega}\,\vec{v}_r].$$

Тоді вираз (8.12) перепишемо так:

$$\frac{d\vec{v}_r}{dt} = \vec{a}_r + [\vec{\omega}\,\vec{v}_r]. \tag{8.13}$$

З урахуванням співвідношення (8.13) та співвідношення

$$\frac{dr'}{dt} = \vec{v}_r + [\vec{\omega}\,\vec{r}']$$

вираз (8.11) набуває вигляду

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + [\vec{\varepsilon}\,\vec{r}'] + [\vec{\omega}\,[\vec{\omega}\,\vec{r}']] + 2\,[\vec{\omega}\,\vec{v}_r] + \vec{a}_r, \tag{8.14}$$

де $a_0 = \frac{dv_0}{dt}$ — прискорення поступального руху рухомої системи; $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ — кутове прискорення обертального руху рухомої системи відліку.

Вираз (8.14) запишемо у такій формі:

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}_K + \vec{a}_r, \tag{8.15}$$

де

$$\vec{a}_e = \vec{a}_0 + [\vec{\varepsilon}\,\vec{r}'] + [\vec{\omega}\,[\vec{\omega}\,\vec{r}']]— \tag{8.16}$$

переносне прискорення. Воно є абсолютним прискоренням тих елементів рухомої системи відліку, через які в даний момент часу проходить матеріальна точка M. Аналіз переносного прискорення показує, що a_0 — це прискорення поступального руху рухомої системи; а величина $[\vec{\varepsilon}\,\vec{r}']$ — це переносне прискорення, зумовлене нерівномірністю обертання рухомої системи. Величина $[\vec{\omega}\,[\vec{\omega}\,\vec{r}']]$ є доцентровим прискоренням $\vec{a}_{доц}$, і можна переконатися з векторного добутку, що вектор $\vec{a}_{доц}$ напрямлений до миттєвої осі обертання.

Величина

$$\vec{a}_K = 2\,[\vec{\omega}\,\vec{v}_r] \tag{8.17}$$

є *коріолісовим прискоренням.* Воно зумовлене рухом матеріальної точки відносно рухомої системи, яка перебуває в обертальному русі.

Рівняння (8.15) виражає теорему Коріоліса, згідно з якою абсолютне прискорення дорівнює векторній сумі переносного, коріолісового і відносного прискорень.

Треба одержати рівняння руху матеріальної точки відносно рухомої (неінерціальної) системи відліку. Перепишемо вираз (8.15) так:

$$\vec{a}_r = \vec{a} - \vec{a}_e - \vec{a}_K. \tag{8.18}$$

Помноживши ліву і праву частини рівняння (8.18) на масу матеріальної точки, дістанемо

$$m\vec{a}_r = m\vec{a} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_K, \tag{8.19}$$

де $m\vec{a} = \vec{F}$ — рівнодійна всіх сил, що діють на матеріальну точку з боку інших тіл, тобто це сила, що реально існує як результат взаємодії тіл.

Оскільки решта доданків правої частини рівняння (8.19) має розмірність сили, то формально праву частину цього рівняння можна вважати як деяку силу, що діє на матеріальну точку в рухомій системі відліку.

На відміну від сили $\vec{F}$ складові $-m\vec{a}_e$ і $-m\vec{a}_K$ мають інший характер. Вони виникають не в результаті взаємодії тіл, а внаслідок прискореного руху системи відліку, і їх називають *силами інерції.* Складові $\vec{F}_{пер} = -m\vec{a}_e$ і $\vec{F}_K = -m\vec{a}_K$ називають відповідно переносною силою інерції і коріолісовою силою. Вираз переносної сили інерції в загальному випадку має вигляд

$$F_{пер} = -m\vec{a}_0 - m\,[\vec{\varepsilon}\,\vec{r}'] - m\,[\vec{\omega}\,[\vec{\omega}\,\vec{r}']]. \tag{8.20}$$

Перша складова виразу (8.20) є поступальною силою інерції, зумовленою прискореним рухом початку координат рухомої системи. Друга складова зумовлена нерівномірністю обертального руху системи відліку. Третя складова (8.20) називається *відцентровою силою* інерції, або просто відцентровою силою. Дії відцентрової сили зазнає пасажир у автобусі на поворотах, пілот під час виконання фігур вищого пілотажу на великих швидкостях. Відцентрові сили існують тільки в системах відліку, які перебувають в обертальному русі.

Коріолісова сила інерції виникає тільки тоді, коли матеріальна точка рухається відносно системи відліку, яка перебуває в обертальному русі. На відміну від інших сил інерції коріолісова сила відрізняється тим, що вона залежить від відносної швидкості $\vec{v}_r$. Коріолісова сила завжди перпендикулярна до відносної швидкості. Сили інерції не можна ставити в один ряд з силами тяжіння, силами пружності, силами тертя, тобто силами, зумовленими взаємодією тіл. Сили інерції — це не результат дії іншого тіла, а властивість системи відліку. Для сили інерції не існує протидіючої сили. Отже, третій закон Ньютона для сил інерції не виконується. Тому ці сили іноді називають фіктивними, однак така назва не доцільна, оскільки вони реально діють на матеріальну точку в неінерціальній системі відліку і їх можна виміряти динамометром. Рух тіл під дією сил інерції аналогічний рухові тіл у

зовнішніх силових полях. Сили інерції завжди є зовнішніми відносно будь-якої рухомої системи матеріальних тіл.

Характерною властивістю сил інерції є їхня пропорційність масі тіл. Внаслідок цієї властивості сили інерції аналогічні силам тяжіння.

Введення сили інерції не є принципово необхідним, оскільки будь-який рух завжди можна розглядати відносно інерційної системи відліку. Однак користування силами інерції часто спрощує розв'язання низки задач відносно неінерціальних систем у порівнянні з розв'язаннями цих задач відносно інерціальних систем відліку.

§ 8.2. Сили інерції у системах відліку, що перебувають у поступальному прискореному русі

Нехай система відліку рухається поступально з прискоренням $\vec{a}_0$. Тоді $\vec{\varepsilon} = 0$, $\vec{\omega} = 0$ і переносне прискорення $\vec{a}_e = \vec{a}_0$. Прикладом такої системи може бути візок, що рухається з прискоренням $\vec{a}$ під дією зовнішньої сили (рис. 8.3). На візку встановлено кронштейн, до якого підвішено кульку. Під час прискореного руху візка кулька відхиляється від вертикального напряму на деякий кут φ. Розглянемо рух кульки в інерціальній та неінерціальній системах відліку. Спостерігач, який знаходиться в інерціальній системі XOY, відхилення кульки пояснює так. Коли візок починає рухатися прискорено, кулька намагається зберігати свій попередній стан і відставатиме від візка, відхиляючись на деякий кут. Нитка відхилятиметься доти, доки рівнодійна сили тяжіння $\vec{P}$ і натягу нитки $\vec{T}$ не досягне величини

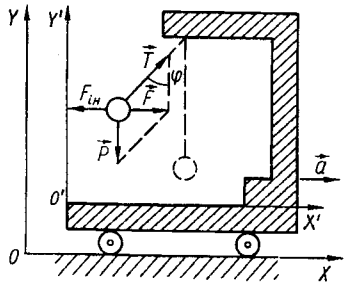


Рис. 8.3

$$\vec{F} = m\vec{a}_0 = \vec{P} + \vec{T}.$$

Спостерігач, який знаходиться в неінерціальній системі відліку $X'O'Y'$, стверджує, що відхилена кулька відносно візка перебуває в спокої, тобто рівнодійна сил, які діють на кульку, дорівнює нулю. Оскільки нитка з кулькою відхилена від вертикальної лінії на кут φ, то спостерігач стверджує, що на кульку, крім сил $\vec{P}$ і $\vec{T}$, діє сила $\vec{F}_{ін}$ (рис. 8.3).

Їхня рівнодійна

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_{ін} = 0,$$

або на основі формул (8.19) і (8.16)

$$\vec{P} + \vec{T} - m\vec{a}_0 = 0,$$

тобто спостерігач стверджує, що на кульку діє сила

$$\vec{F}_{ін} = -m\vec{a}_0.$$

Наприклад, сила інерції діє на пасажирів при раптовій зміні швидкості транспортного засобу.

§ 8.3. Сили інерції у системах відліку, що рівномірно обертаються

Нехай система відліку здійснює обертальний рух із сталою кутовою швидкістю $\vec{\omega}$. При цьому тіло може перебувати або у спокої в такій системі, або в русі відносно неї.

Спочатку розглянемо випадок, коли тіло перебуває в спокої відносно неінерціальної системи відліку. Прикладом такої системи відліку може бути диск, що обертається навколо вертикальної осі з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ (рис. 8.4).

Разом з диском обертається насаджена на тонкий стержень кулька, яка з'єднана з центром диска пружиною. Розглянемо рух кульки в інерціальній і неінерціальній системах відліку. Спостерігач в інерціальній системі відліку, стежачи за рухом диска разом з кулькою, робить висновок що на кульку повинна діяти доцентрова сила $F = m\omega^2 r$, величина якої дорівнює пружній силі розтягнутої пружини. Цей висновок також випливає з аналізу виразів (8.16) і (8.19), оскільки

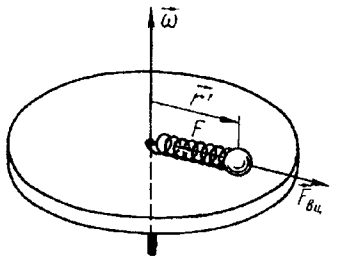


Рис. 8.4

$$\vec{a} = \vec{a}_e = [\vec{\omega}\,[\vec{\omega}\,\vec{r}\,]];\ \vec{a}_r = 0,\ \vec{a}_0 = 0;\ \vec{\varepsilon} = 0,\ \vec{v}_r = 0.$$

Спостерігач, який знаходиться в рухомій системі, робить висновок, що на кульку діє сила, напрямлена вздовж радіуса від центра, яка зрівноважується пружною силою розтягнутої пружини; її називають відцентровою. Це переносна сила інерції і відповідно до (8.20)

$$\vec{F}_{вц} = \vec{F}_e = -m\,[\vec{\omega}\,[\vec{\omega}\,\vec{r}\,]].$$

З векторного добутку випливає, що відцентрова сила інерції завжди напрямлена вздовж радіуса від центра. Вона залежить не тільки від маси тіла, а й від його відстані від центра обертання системи.

Відцентрові сили можуть досягати великих значень у спеціально побудованих центрифугах. Дія відцентрових сил інерції широко використовується в техніці (відцентрові насоси, сепаратори, центрифуги).

Розглянемо випадок, коли тіло рухається зі швидкістю $\vec{v}_r$ відносно обертальної неінерціальної системи відліку. З формули (8.19) випливає, що на тіло діятиме, крім відцентрової сили, сила Коріоліса, або коріолісова сила інерції. Її прояв можна продемонструвати на такому досліді. Над горизонтальним диском встановлюють нерухомий похилий жолоб, з якого на диск скочується кулька (рис. 8.5). Якщо диск нерухомий, то кулька котиться вздовж радіуса OA. Коли кулька скочується на диск, що обертається, то траєкторією руху кульки буде дуга OB. Спостерігач, який знаходиться в рухомій системі відліку, пояснює викривлення траєкторії руху кульки дією сили, що перпендикулярна до напряму швидкості її руху. Цією силою є сила Коріоліса $\vec{F}_K = -2m\,[\vec{\omega}\,\vec{v}_r]$. Для того щоб змусити кульку котитися вздовж радіуса OA при рівномірному обертанні диска, на кульку слід подіяти з силою $\vec{F}$, яка за модулем дорівнює силі $\vec{F}_K$, але протилежна їй за напрямом. За своїм характером сила Коріоліса значно відрізняється від інших сил інерції. Вона діє тільки на тіла, які перебувають у русі відносно неінерціальних систем відліку, що обертаються, і залежить від швидкості їхнього руху. Сила Коріоліса не залежить від розміщення тіла відносно системи відліку.

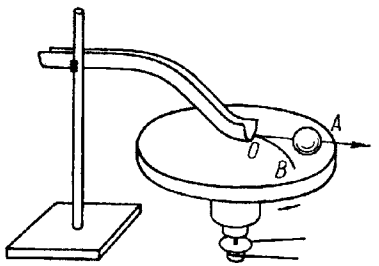


Рис. 8.5

Оскільки коріолісова сила завжди перпендикулярна до напряму руху тіла, то вона над тілом не виконує роботи, а змінює напрям руху тіла, не змінюючи його швидкості. Спостерігач, який знаходиться в інерціальній системі відліку, рух кульки по траєкторії OB пояснює тим, що для того щоб кулька, рухаючись із швидкістю v_r, досягла точки A, необхідний час $\Delta t = R/v_r$. За цей проміжок часу внаслідок обертального руху диска радіус OA здійснить поворот на кут $\Delta\varphi = \omega\Delta t$. Внаслідок цього кулька потрапить не в точку A, а в точку B.

Рівняння руху тіла відносно обертальної системи відліку має вигляд

$$m\vec{a}_r = m\vec{a} - 2m\,[\vec{\omega}\,\vec{v}_r] - m\,[\vec{\omega}\,[\vec{\omega}\,r']].$$

§ 8.4. Вплив обертання Землі на рух тіл

Вивчаючи рух тіл відносно земної поверхні, слід враховувати, що система відліку, зв'язана із Землею, є неінерціальною. Головною причиною неінерціальності цієї системи є добове обертання Землі. З великим ступенем точності можна вважати, що її кутова швидкість стала. Вплив обертання Землі на рух тіл зводиться до дії на них відцентрової і коріолісової сил.

Зміна ваги тіла із зміною широти місця. Вагою тіла називають силу $\vec{P}$, з якою тіло діє на підставку або розтягує підвіс. При цьому вважається, що тіло, підставка і підвіс перебувають у спокої в системі, в якій проводиться зважування. Коли говорять про вагу тіла, то вважають, що підставка, тіло і підвіс перебувають у спокої відносно Землі.

Нехай тіло знаходиться на підставці, яка розміщена на географічній широті φ (рис. 8.6). На тіло діятимуть сила гравітаційного притягання Землі $\vec{F}_З$ і відцентрова сила $\vec{F}_{вц}$. Вага тіла є векторна сума цих сил, тобто

$$\vec{P} = \vec{P}_З + m\,[\vec{\omega}\,[\vec{\omega}\,\vec{r}']].$$

Модуль і напрям прискорення вільного падіння визначаються модулем і напрямом сили $\vec{P}$. Наявність відцентрової сили інерції, зумовленої обертальним рухом Землі, приводить до того, що сила тяжіння і вага тіла взагалі різні. Вони рівні між собою тоді, коли тіло розміщене на полюсі Землі.

Кут α між напрямом сили земного тяжіння і напрямом виска залежно від географічної широти φ можна визначити ва теоремою синусів:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi} = \frac{F_{вц}}{P} = \frac{m\omega^2 r}{mg} = \frac{\omega^2 R_З\cos\varphi}{g} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{R_З}{g}\cos\varphi = 0{,}0035\cos\varphi,$$

де $R_З$ — радіус Землі. Тоді $\sin\alpha \approx 0{,}0035\cos\varphi\sin\varphi \approx 0{,}0018\sin 2\varphi$ або

$$\alpha \approx 0{,}0018\sin 2\varphi.$$

Найбільше значення кута α для географічної широти $\varphi = 45°$. Отже, вертикаль (висок) напрямлена до центра Землі тільки на полюсах і на екваторі. На полюсах $P = F_З$, на екваторі $P = F_З - m\omega^2 R$.

Відповідно прискорення вільного падіння на полюсах $g_п$ і на екваторі $g_е$ будуть

$$g_{\text{п}} = \gamma \frac{M_{\text{З}}}{R_{\text{п}}^2};\ g_e = \gamma \frac{M_{\text{З}}}{R_{\text{е}}^2} - \omega^2 R_e = \gamma \frac{M_{\text{З}}}{R_e^2} - \frac{v^2}{R_e},$$

де γ — гравітаційна стала; $M_{\text{З}}$ — маса Землі; $R_{\text{п}}$ і R_e — відповідно полярний і екваторіальний радіуси Землі; v — добова швидкість обертання точок екватора.

Маятник Фуко. Це масивне тіло, підвішене до довгого підвісу, який може вільно обертатися.

Уявімо, що такий маятник встановлено над Північним полюсом (рис. 8.7). Якщо маятник відхилити від положення рівноваги і

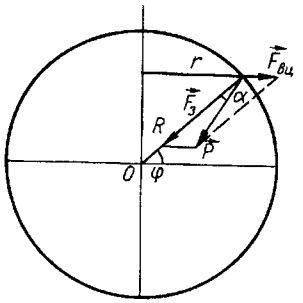


Рис. 8.6

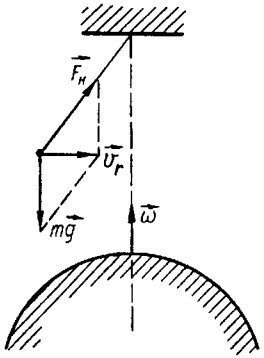


Рис. 8.7

відпустити, то він здійснюватиме вільні коливання. Його рух відбувається під дією сили тяжіння і сили натягу підвісу. Оскільки ці сили лежать в одній площині, то площина коливань маятника повинна зберігати своє положення в просторі. Спостерігаючи за рухом маятника в інерціальній системі відліку, виявлено, що проекція площини коливань на поверхню Землі на полюсі повертається в напрямі, протилежному до напряму обертання Землі. Якщо спостерігатимемо за рухом маятника відносно системи відліку, зв'язаної із Землею, виявимо повертання площини коливань маятника. Таке повертання спостерігач пояснює тим, що на маятник, крім сил тяжіння і натягу підвісу повинна діяти третя сила, яка лежить у горизонтальній площині і перпендикулярна до швидкості руху маятника $\vec{v}_r$. Цією силою є сила Коріоліса, величина якої на полюсі Землі $F_K = 2mv_r\omega$. Якщо маятник встановити не на полюсі, а на широті φ, то треба взяти проекцію вектора $\vec{\omega}$ на напрям вертикалі даного місця, тобто $\omega_\varphi = \omega \sin\varphi$. Тоді коріолісова сила $F_K = 2mv_r\omega \sin\varphi$. У такому разі площина коливань маятника за добу зазнає обертання на кут

$2\pi \sin\alpha$ (рад). Дослід Фуко, виконаний ним у 1850 р. в Парижі, був безпосереднім доказом обертання Землі навколо своєї осі.

Відхилення тіл, які падають, від вертикального напряму. Дослідним шляхом встановлено, що тіла, які падають, рухаються не по вертикалі, а трохи відхиляються на схід. Відхилення залежить від висоти падіння і географічної широти місця. За однакових умов відхилення тіла при його падінні буде максимальним на екваторі і дорівнюватиме нулю на полюсах. Розглянемо випадок, коли на екваторі тіло падає з вишки висотою h (рис. 8.8). Спостерігач, який знаходиться в інерціальній системі відліку, рух тіла при його падінні розглядає так. На тіло діє єдина сила земного тяжіння, яка напрямлена до центра Землі. Оскільки лінійні швидкості, зумовлені добовим обертанням Землі, точки вершини і основи вишки неоднакові ($v_1 > v_2$), то тіло при падінні зазнає відхилення від вертикалі на схід. Спостерігач, який знаходиться в неінерціальній системі відліку (система зв'язана із Землею), пояснює рух тіла при його падінні дією сили тяжіння Землі $F_З$, відцентрової $F_{вц}$ і коріолісової F_K сил (рис. 8.8). Перші дві сили діють вздовж радіуса Землі і відхилення від вертикалі не спричинюють. Оскільки сила Коріоліса перпендикулярна до швидкості руху тіла, то вона і відхиляє рух тіла від вертикального напряму на схід.

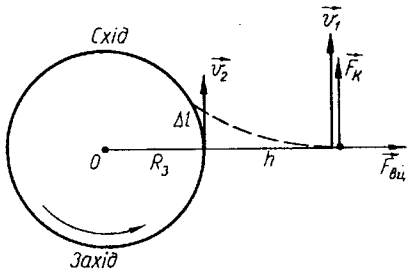


Рис. 8.8

Інші прояви обертання Землі. Дією сили Коріоліса пояснюється те, що праві береги рік північної півкулі Землі розмиті і круті, а в південній півкулі ліві береги рік крутіші. Відхилення океанічної течії Гольфстрім, яка виходить з Мексіканської затоки через Флоридську затоку в напрямі, близькому до меридіонального, також пояснюється дією коріолісової сили. Під її дією течія відходить від берегів Америки, пересікає Атлантичний океан і виходить у Баренцове море біля берегів Скандинавії. Під дією сили Коріоліса пасати дмуть у північній півкулі з північного сходу на південний захід, а в південній півкулі з південного сходу на північний захід.

Приклад 8.1. З вишки висотою h (рис. 8.9) падає тіло. Визначити відхилення тіла від вертикалі під час його падіння. Географічна широта місця φ.

Розв'язання. Рух тіла розглядатимемо у системі відліку, яка зв'язана з Землею. При падінні тіла на нього діятимуть три сили: тяжіння $\vec{F}_З$, відцентрова $\vec{F}_{вц}$ і коріолісова $\vec{F}_K$. Як уже зазначалося, векторна сума сил $\vec{F}_З$ і $\vec{F}_{вц}$ визначає напрям вертикалі для заданого місця на Землі. Сила Коріоліса $\vec{F}_K = -2m[\vec{\omega}\,\vec{v}_r]$ перпендикулярна до площини, в якій лежать вектори $\vec{\omega}$ і $\vec{v}_r$. У даному випадку вона перпендикулярна до площини рисунка і напрямлена від нас: $F_K = 2m\omega v_r \cos\varphi$. Наближено можна вважати, що швидкість $v_r = gt$. Тоді

$F_K = 2mg\omega t\cos\varphi$. Сила F_K надає прискорення тілу в горизонтальному напрямі на схід $a = 2g\omega t\cos\varphi$. Проінтегрувавши прискорення двічі, дістанемо, що зміщення тіла на схід при його падінні

$$s = \frac{1}{3}\omega g t^3 \cos\varphi,$$

де t — час падіння тіла.

Приклад 8.2. Посудина циліндричної форми з ідеальною нестисливою рідиною обертається навколо своєї геометричної осі з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ (рис. 8.10). Визначити швидкість витікання струмини рідини через малий отвір у боковій стінці посудини за умови, коли рух встановився.

Розв'язання. Розглянемо процес витікання рідини у системі відліку, відносно якої рідина в посудині перебуває в спокої. У такій системі відліку на рідину діятимуть сили інерції: відцентрова і коріолісова. Коріолісова сила роботи не виконує, тільки викривляє лінії течії, але не впливає на справедливість і форму загального рівняння

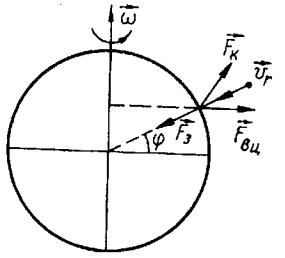


Рис. 8.9

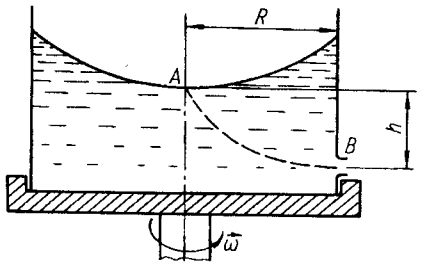


Рис. 8.10

Бернуллі. Дія відцентрової сили зумовлює появу нового члена у виразі потенціальної енергії. Повна потенціальна енергія одиниці об'єму рідини $U = \rho gh - \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2$, і рівняння Бернуллі набирає вигляду

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho gh - \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 + p = \text{const}, \qquad (1)$$

де v — відносна швидкість рідини, тобто швидкість відносно системи відліку, що перебуває в обертальному русі. Запишемо рівняння (1) для трубки течії, осьова лінія якої AB:

$$\frac{\rho v_A^2}{2} + \rho gh - \frac{1}{2}\rho\omega^2 r_A^2 + p_A = \frac{\rho v_B^2}{2} - \frac{1}{2}\rho\omega^2 r_B^2 + p_B. \qquad (2)$$

Оскільки $p_A = p_B = p_0$ (атмосферний тиск); $v_A = 0$; $r_A = 0$, а $r_B = R$, то рівняння (2) можна переписати так:

$$pgh = \frac{\rho v_B^2}{2} - \frac{1}{2}\rho\omega^2 R^2. \qquad (3)$$

Звідси маємо

$$v = \sqrt{2gh + \omega^2 R^2}. \qquad (4)$$

Порівнявши (4) з аналогічним результатом (2) прикладу 7.3 бачимо, що швидкість витікання рідини тим більша, чим більша кутова швидкість ω і радіус R.

Розділ 9. Елементи релятивістської механіки

§ 9.1. Відхилення від законів механіки Ньютона

Класична механіка грунтується на принципі відносності Галілея і законах Ньютона. Принцип відносності Галілея, встановлений на підставі дослідів, стверджує рівноправність усіх інерціальних систем відліку (ІСВ) стосовно механічних явищ. Ніякими механічними дослідами, проведеними всередині даної ІСВ, неможливо встановити, перебуває вона в стані спокою чи рухається рівномірно і прямолінійно. Рівняння механіки Ньютона інваріантні відносно перетворень Галілея (2.25), тобто вони не змінюються при переході від однієї ІСВ до іншої. Принцип відносності Галілея фактично стверджує, що в будь-якій ІСВ властивості простору і часу однакові. Іншими словами, просторово-часове описання механічних процесів є незмінним у різних інерціальних системах відліку.

Наприкінці XIX та на початку XX ст. виявилось, що закони механіки Ньютона суперечать деяким експериментальним спостереженням.

Перш за все вкажемо на результати дослідів В. Кауфмана, який вивчав відхилення β-частинок одночасно в електричному і магнітному полях. Він визначив відношення заряду до маси β-частинки (електрона) із співвідношення $eU = m_e v^2/2$ і вперше (1902 р.) виявив, що відношення e/m_e є функцією швидкості v частинки. Цей дослідний факт наштовхнув його на думку, що маса частинки залежить від її швидкості. На рис. 9.1 зображено дослідну залежність квадрата швидкості електрона від різниці потенціалів U електричного поля, яке прискорює рух електрона (суцільна лінія *1*). При швидкостях електрона, значно менших від швидкості світла у вакуумі ($V \ll c$, $c = 3\cdot10^8$ м/с), отримана із досліду залежність $v^2(U)$ є лінійною і практично збігається з розрахунковою залежністю (штрихова лінія *2*) при $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл, $m_e = 9{,}1\cdot10^{-31}$ кг. Тобто при $v \ll c$ результати досліду пояснюються законами механіки Ньютона. Однак при великих швидкостях електрона, сумірних із швидкістю світла у вакуумі ($v \to c$), залежність $v^2(U)$ зростає набагато повільніше від розрахункової і не перевищує c^2. Отже, при швидкостях частинки, близьких до швидкості світла, спостерігається відхилення від законів Ньютона.

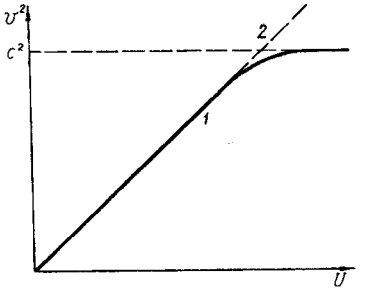


Рис. 9.1

Швидкість світла була визначена ще в 1678 р. із спостережень за порушеннями періодичності затемнень супутників Юпітера. Такі самі результати були отримані із спостережень аберації зірок, а пізніше з дослідів, проведених у земних умовах. Ці дослідження підтверджували, що швидкість світла має цілком конкретне значення. Її теоретично розрахував Дж. Максвелл (1831—1879) як швидкість поширення електромагнітних хвиль. Із створеної Максвеллом теорії електромагнітного поля випливало, що швидкість світла у вакуумі $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = 3 \cdot 10^8$ м/с (ε_0 і μ_0 — електрична і магнітна сталі). Цей результат досить добре узгоджується із визначеною експериментально швидкістю світла.

У період з 1881 по 1929 р. були проведені досліди з вимірювання швидкості світла в різних інерціальних системах відліку. Не розглядаючи докладно окремі досліди, вкажемо тільки основну ідею і отриманий в цих дослідах результат. Ідею цих дослідів можна узагальнити, звівши її до такої задачі. Від джерела світла, нерухомого в інерціальній системі відліку, поширюється світло. Відносно спостерігача (приймача світлового сигналу), нерухомого в цій системі відліку, швидкість світла дорівнює c. Експериментально вимірювалась швидкість світла c' відносно спостерігача, який рухається прямолінійно і рівномірно з швидкістю v_0 відносно джерела. Згідно з класичним законом додавання швидкостей (2.27) повинно бути

$$c' = c \pm v_0 ,$$

де знак "плюс" відповідає рухові спостерігача в напрямі до джерела, а знак "мінус" — від джерела. Однак результати дослідів показали, що $c' = c$. Тобто швидкість світла не залежить від швидкоті руху спостерігача або джерела і однакова в усіх напрямах.

Цей результат означав, що для поширення світла порушується класичний закон додавання швидкостей і, отже, виникає сумнів щодо справедливості перетворень Галілея.

Для пояснення цих та інших дослідних фактів необхідно було створити нову механіку, яка описує класичні закони руху тіл при будь-яких швидкостях, як завгодно близьких до швидкості світла. Така механіка називається релятивістською (від лат. relativus — відносний).

У 1905 р. А. Ейнштейн створив спеціальну теорію відносності, на якій грунтується релятивістська механіка.

§ 9.2. Постулати Ейнштейна

Спеціальна теорія відносності (СТВ) являє собою сучасну фізичну теорію простору і часу. В її основі лежать два постулати, сформульовані А. Ейнштейном.

Принцип відносності. Ніякими фізичними дослідами (механічними, електричними, оптичними та ін.), проведеними всередині даної інерціальної системи відліку, неможливо виявити, перебуває ця система в стані спокою чи рухається рівномірно і прямолінійно; всі закони природи інваріантні щодо переходу від однієї інерціальної системи відліку до іншої.

Перший постулат Ейнштейна узагальнює механічний принцип відносності Галілея на будь-які фізичні процеси. Він стверджує, що всі інерціальні системи відліку цілком рівноправні: всі явища протікають однаково в усіх інерціальних системах і фізичні закони інваріантні відносно вибору інерціальної системи. Тобто рівняння, що описують ці закони, однакові за формою в усіх інерціальних системах відліку.

Принцип інваріантності швидкості світла. Швидкість світла однакова в усіх інерціальних системах відліку, вона не залежить від швидкості руху джерела світла або спостерігача і у вакуумі дорівнює c.

Другий постулат Ейнштейна констатує сталість швидкості світла як фундаментальний закон природи, підтверджений дослідами. Швидкість світла є граничною швидкістю руху будь-яких матеріальних об'єктів. Ніякі сигнали або взаємодії в природі не можуть передаватись з більшою швидкістю, ніж швидкість світла.

Постулати Ейнштейна і побудована на них СТВ сформували новий погляд на світ і нові просторово-часові уявлення. Ця теорія вимагає відмови від усталених в практичному досвіді уявлень про абсолютний простір і абсолютний час, прийнятих у класичній механіці. Такі уявлення Ньютона грунтуються на припущенні про нескінченно велику швидкість поширення сигналів і, відповідно, суперечать принципу сталості швидкості світла. На підставі цього принципу і нових перетворень координат при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої (перетворень Лоренца) Ейнштейн дійшов висновку про відносний характер таких понять, як довжина відрізка, тривалість проміжку часу і одночасність подій. Ці та інші наслідки із теорії Ейнштейна мають екпериментальне обгрунтування.

Таким чином, в релятивістській механіці Ейнштейна розглядаються фізичні системи, які рухаються з швидкостями, близькими до швидкості світла. Швидкість світла приймається як гранично можлива швидкість передачі взаємодії. Принцип відносності поширюється на всі фізичні процеси, а перетворення Галілея замінюються перетвореннями Лоренца, з яких випливає взаємний зв'язок між просторовими координатами і часом.

§ 9.3. Перетворення Лоренца

У § 2.6 доводилось, що рівняння руху Ньютона інваріантні відносно перетворень Галілея. Фундаментальні закони електродинаміки, які

описуються рівняннями Максвелла, не інваріантні відносно цих перетворень. Для подолання цього протиріччя А. Ейнштейн надав перевагу рівнянням Максвелла, а неінваріантність їх відносно перетворень Галілея пов'язав з тим, що ці перетворення не зовсім вірні для релятивістських (близьких до швидкості світла у вакуумі) швидкостей.

На основі двох постулатів і принципу відносності одночасності тих самих подій у різних ІСВ А. Ейнштейн встановив нові перетворення для координат і часу (перетворення Лоренца) і надав нової форми рівнянням механіки. В результаті цього рівняння електродинаміки і механіки виявились інваріантними відносно перетворень Лоренца і, отже, задовольняли принцип відносності, або перший постулат Ейнштейна.

Проаналізуємо докладніше поняття одночасності для двох просторово розділених подій. У класичній механіці час вважається абсолютним, його плин у всьому Всесвіті однаковим і незалежним від стану ІСВ. Якщо дві події одночасні для одного спостерігача, то вони повинні бути одночасними для будь-якого іншого спостерігача, що рухається рівномірно і прямолінійно відносно першого з довільною швидкістю. Це твердження виявилось не зовсім вірним. Дійсно, нехай маємо дві інерціальні системи відліку K і K' і система K' рухається відносно умовно нерухомої системи K з швидкістю $v_0 = \text{const}$. Приймемо, що в обох системах K і K' є спеціальні установки з фотоелементами відповідно в точках A і B та в точках A' і B' (рис. 9.2), відстані між якими в обох системах однакові. Вважатимемо також, що в початковий момент часу системи K і K' суміщаються, а їхні прилади зміщені. Нехай точно посередині між точками A і B та A' і B' розміщені в точках C і C' електричні лампочки, які можуть спалахувати лише тоді, коли точки C і C' порівняються, тобто коли в результаті руху системи K' з своїм приладом електрична лампочка в точці C' встановиться навпроти лампочки в точці C. Приймемо, що в цей момент одночасно спалахнуть електричні лампочки і світло від них поширюватиметься до точок A і B та A' і B'. Спостерігач у рухомій системі K' зафіксує, що сигнал від лампочки в точці C' прийде до фотоелементів A' і B' одночасно, і вони це зафіксують. Аналогічно світловий сигнал від точки C одночасно досягне фотоелементів у точках A і B за годинником спостерігача, нерухомого відносно системи K. Проте, внаслідок руху системи K',

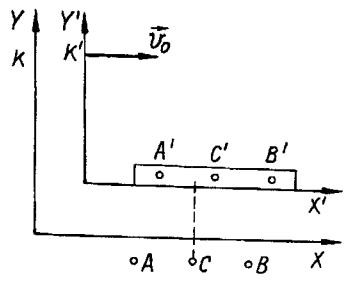


Рис. 9.2

точки A' і B' у момент, коли їх досягне світло, перемістяться і не будуть суміщатися з точками A і B. За годинником спостерігача в системі K світло з точки C' досягне точки A' раніше, ніж точки A, а точки B' пізніше, ніж точки B, оскільки фотоелемент у точці A' дещо наблизиться до початкової точки C', яка в момент спалаху лампочок суміщалась з точкою C, а точка B' віддалиться від початкової точки C'.

Отже, за годинником спостерігача у системі K' події у точках A' і B' відбудуться одночасно, а за годинником спостерігача в системі K ці самі події виявляться неодночасними. Тобто перебіг часу залежить від стану системи відліку. Для об'єктивної фіксації одночасності подій у рухомих одна відносно одної системах відліку потрібно мати синхронізовані годинники. Синхронізація може бути здійснена за допомогою світлових сигналів.

Таким чином, результати проведеного аналізу свідчать, що прийнята в класичній механіці рівність $t' = t$ суперечить дійсності.

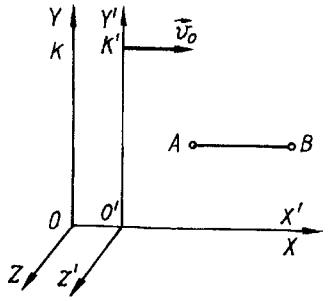


Рис. 9.3

Встановимо перетворення для координат і часу, спираючись на постулати Ейнштейна та висновок про відносність перебігу часу в рухомих одна відносно одної ІСВ.

Нехай у початковий момент $t = 0$ точки O і O' систем K і K' та осі OX і $O'X'$ суміщаються, а осі $O'Y'$ і $O'Z'$ відповідно паралельні осям OY і OZ (рис. 9.3). Приймемо, що в цей момент у спільній точці O спалахує світло.

Згідно з першим постулатом в обох системах виникає сферична світлова хвиля, яка за другим постулатом поширюється в обох системах з швидкістю c. Через час t у системі K фронт хвилі буде описуватись рівнянням

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2. \tag{9.1}$$

Аналогічно в системі K'

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c'^2t'^2. \tag{9.2}$$

Перетворення Галілея запишемо так:

$$x' = \alpha(x - v_0t),\ y' = y,\ z' = z,\quad t' = \beta x + \gamma t. \tag{9.3}$$

У рівності (9.3) введено коефіцієнт α, який буде визначений в результаті подальшого аналізу. Вираз для t' подано як лінійну функцію змінних x і t. Враховуючи залежність перебігу часу від стану ІСВ та їхню рівноправність щодо характеру протікання довільних фізичних процесів, можна стверджувати, що ця залежність може бути лише

лінійною. Інакше рівномірний рух в одній системі виявився б прискореним в іншій.

Підставимо рівності (9.3) у рівність (9.2). Дістанемо

$$\alpha^2 (x - v_0 t)^2 + y^2 + z^2 = c^2 (\beta x + \gamma t)^2,$$

або

$$(\alpha^2 - c^2\beta^2) x^2 + y^2 + z^2 - 2 (\alpha^2 v_0 + c^2\beta\gamma) xt = (c^2\gamma^2 - \alpha^2 v_0^2) t^2. \quad (9.4)$$

Рівняння (9.1) і (9.2) описують те саме явище: поширення сферичної світлової хвилі. Оскільки x, y, z, t — незалежні змінні, то коефіцієнти біля них у рівняннях (9.4) і (9.1) повинні бути

$$\alpha^2 - c^2\beta^2 = 1, \ \alpha^2 v_0 + c^2\beta\gamma = 0, \ c^2\gamma^2 - \alpha^2 v_0^2 = c^2. \quad (9.5)$$

У трьох рівняннях (9.5) три невідомі α, β, γ. З другого рівняння (9.5) знайдемо

$$\alpha^2 = -\frac{c^2\beta\gamma}{v_0}. \quad (9.6)$$

Підставивши (9.6) в інші два рівняння (9.5) і скоротивши на c^2, дістанемо

$$-\beta (\gamma + \beta v_0) = v_0/c^2,$$

$$\gamma (\gamma + \beta v_0) = 1. \quad (9.7)$$

Поділивши одне рівняння (9.7) на друге, дістанемо

$$\beta = -v_0/(c^2\gamma). \quad (9.8)$$

Підставимо (9.8) у друге рівняння (9.7) і знайдемо

$$\gamma = \frac{1}{\pm\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}. \quad (9.9)$$

Знак у рівності (9.9) беремо "плюс", оскільки "мінус" означав би, що час у системах K і K' плине у протилежних напрямах. З першого рівняння (9.7), з урахуванням (9.8) і (9.9), знайдемо

$$\beta = \frac{-v_0/c^2}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}. \quad (9.10)$$

З рівності (9.6) знаходимо

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - v_0/c^2}}. \quad (9.11)$$

Підставивши значення α, β і γ у систему рівнянь (9.3), дістанемо перетворення Лоренца для координат і часу:

$$x' = \frac{x - v_0 t}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}, \qquad x = \frac{x' + v_0 t'}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}},$$

$$y' = y, \qquad y = y',$$

$$z' = z, \qquad z = z',$$

$$t' = \frac{t - v_0/(c^2 x)}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}; \qquad t = \frac{t' + v_0/(c^2 x')}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}. \quad (9.12)$$

Перетворення Лоренца для координат і часу при переході від системи K до системи K' (або навпаки) відрізняються від перетворень Галілея насамперед тим, що $t' \neq t$. У різних рухомих одна відносно одної системах відліку час плине по-різному. У співвідношення для перетворень часу входять просторові координати. Це є принципіально важливим і свідчить про єдність простору і часу. Перетворення Лоренца є лінійними за координатою x і часом t. Ці перетворення переходять у перетворення Галілея за умови $v \ll c$.

§ 9.4. Наслідки з перетворень Лоренца

Довжина тіла в різних системах відліку. В системі K' візьмемо стержень AB, розміщений нерухомо вздовж осі $O'X'$. Координати кінців стержня в системі K' : $A (x_1', y_1', z_1')$ і $B (x_2', y'_2, z_2')$. Довжина стержня $l' = x_2' - x_1'$ (див. рис. 9.3).

Щоб знайти довжину стержня AB у системі відліку K, відносно якої система K' рухається з швидкістю v_0 у напрямі осі OX, потрібно обчислити координати точок A і B у той самий момент часу. З рівнянь Лоренца запишемо значення координат x_2' та x_1' у той самий момент часу:

$$x'_2 = \frac{x_2 - v_0 t}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}; \quad x'_1 = \frac{x_1 - v_0 t}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}.$$

Звідси $x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}$, або $x_2 - x_1 = (x'_2 - x'_1)\sqrt{1 - v_0^2/c^2}$.

Приймемо, що $x'_2 - x'_1 = l_0$ — довжина стержня в системі K', відносно якої він нерухомий (власна довжина); а $x_2 - x_1 = l$ — довжи-

на стержня в системі K, відносно якої він рухається з швидкістю v_0. Тоді

$$l = l_0\sqrt{1 - v_0^2/c^2}. \qquad (9.13)$$

З рівності (9.13) видно, що довжина рухомого стержня зменшується в $\sqrt{1 - v_0^2/c^2}$ разів, тобто спостерігається так зване релятивістське скорочення довжини, що збільшується з ростом v_0. При $v_0 = 0$ $l = l_0$; а при $v_0 \to c$ $l \to 0$. При цьому поперечні розміри стержня не змінюються:

$$y'_2 - y'_1 = y_2 - y_1;\ z'_2 - z'_1 = z_2 - z_1.$$

Об'єм тіла $V = V_0\sqrt{1 - v_0^2/c^2}$ під час руху зменшується в $\sqrt{1 - v_0^2/c^2}$ разів. Зазначимо, що релятивістське (або лоренцівське) скорочення довжини є взаємним (спостерігач у системі K' також зафіксує скорочення довжини стержня, нерухомого відносно системи K); реальним, а не позірним; кінематичним, а не динамічним (силових напруг немає).

Сповільнення часу в рухомих системах відліку. Приймемо, що в системах K і K' є два однакових (синхронізованих) годинники A і A', які в початковий момент часу розміщені поряд, а система K' рухається відносно системи K зі швидкістю v_0 (рис. 9.4). Годинники у цей момент показуватимуть відповідно час t_1 і t_1'. Через певний час годинник A' разом з системою K' переміститься в положення B' і показуватиме час t'_2. Щоб зафіксувати час у системі K, потрібно скористатися іншим синхронізованим годинником B і розмістити його поряд з годинником B' у момент часу t_2'. У системі K' між двома моментами минув час $T_0 = t'_2 - t_1'$, а в системі K – $T = t_2 - t_1$. Врахувавши, що годинник A' перебуває у тій самій точці системи K' з координатою x', і скориставшись перетвореннями Лоренца для часу, дістанемо

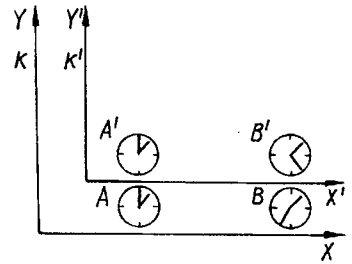


Рис. 9.4

$$t_1 = \frac{t_1' + v_0/(c^2x')}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}};\ t_2 = \frac{t_2' + v_0/(c^2x')}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}.$$

Звідси

$$t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}},\ \text{або}\ T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}. \qquad (9.14)$$

Час у системі відліку, відносно якої годинник нерухомий, називають *власним часом*. Отже, T_0 — інтервал власного часу між двома подіями; T — інтервал часу між двома подіями в рухомій системі K', виміряний годинником у нерухомій системі K. Оскільки при $v_0 \neq 0$ $\sqrt{1 - v_0^2/c^2} < 1$, то з (9.14) випливає, що $T > T_0$, тобто проміжок часу між подіями різний у рухомій і нерухомій інерціальних системах відліку. В рухомій системі K' відбувається сповільнення часу, виміряного годинником системи K. Ефект сповільнення часу є взаємним (або оборотним) і об'єктивним. У кожній рухомій інерціальній системі існує власний час протікання фізичних процесів. Не існує єдиного світового часу.

Одержані результати зовсім відрізняються від результатів класичної механіки, де довжина відрізків і час були інваріантними відносно перетворень Галілея. Відносно перетворень Лоренца вони виявляються відносними, залежними від швидкості руху системи відліку. Зауважимо, що скорочення довжини і сповільнення часу в рухомих системах стають помітними при швидкостях, близьких до швидкості світла. З такими швидкостями рухаються лише елементарні частинки. Саме з ними були одержані переконливі докази реальності зазначених ефектів.

При поширенні в атмосфері космічного випромінювання внаслідок його взаємодії з молекулами атмосфери виникають заряджені нестабільні μ^+- і μ^--мезони. Вони розпадаються і перетворюються на інші частинки. Було встановлено, що власний час їхнього життя $T_0 = 2{,}2 \cdot 10^{-6}$ с. Проте утворені космічним випромінюванням μ-мезони пролітають з швидкістю $v \approx c$ відстань близько 20 км, що відповідає часу їхнього життя $T \approx 0{,}07 \cdot 10^{-4}$ с. Отже, в лабораторній системі відліку (системі, що зв'язана із Землею) час життя мезонів значно більший від власного часу життя. Це може бути пояснено релятивістським ефектом сповільнення часу в системі відліку, зв'язаній з рухомим мезоном.

Перетворення і додавання швидкостей. Перепишемо перетворення Лоренца (9.12) у диференціальній формі:

$$dx' = \frac{dx - v_0dt}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}};\ dy' = dy;\ dz' = dz;\ dt' = \frac{dt - (v_0/c^2)dx}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}. \qquad (9.15)$$

Поділивши ліві і праві частини перетворень для просторових координат відповідно на ліву і праву частину перетворення для часу,

дістанемо формули Лоренца для перетворень швидкостей при переході від системи K до K':

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - v_0 dt}{dt - (v_0/c^2)dx}; \quad \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}{dt - (v_0/c^2)dx}; \quad \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}{dt - (v_0/c^2)dx},$$

або

$$v'_x = \frac{v_x - v_0}{1 - (v_0/c^2)v_x}, \quad v'_y = \frac{v_y\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}{1 - (v_0/c^2)v_x}, \quad v'_z = \frac{v_z\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}{1 - (v_0/c^2)v_x}. \quad (9.16)$$

Аналогічно записуються формули перетворення для швидкостей при переході від системи K' до системи K:

$$v_x = \frac{v'_x + v_0}{1 + (v_0/c^2)v'_x}; \quad v_y = \frac{v'_y\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}{1 + (v_0/c^2)v'_x}; \quad v_z = \frac{v'_z\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}{1 + (v_0/c^2)v'_x}.$$

Якщо тіло рухається в додатному напрямі осі OX, то в системі K його швидкість $v = v_x$, а в системі K' $v' = v'_x$. Тоді релятивістський закон додавання швидкостей запишеться так:

$$v = \frac{v' + v_0}{1 + (v_0/c^2)v'}, \quad \text{або} \quad v' = \frac{v - v_0}{1 - (v_0/c^2)v}. \quad (9.17)$$

Зазначимо, що при $v_0 < c$ з рівняння (9.17) дістаємо закон додавання швидкостей Галілея. Якщо в системі відліку K' швидкість об'єкта $v' = c$, то й у системі K також швидкість $v = c$. І навпаки, якщо в системі відліку K швидкість об'єкта $v = c$, то в системі K' швидкість $v' = c$. Таким чином, релятивістський закон додавання швидкостей підкреслює сталість швидкості світла і незалежність її ні від руху джерела, ні від руху спостерігача. Закон додавання швидкостей (9.17) було підтверджено експериментально.

§ 9.5. Інтервал у чотиривимірному просторі. Світовий конус

Перетворення Лоренца для часових координат вказували на їх зв'язок з просторовими координатами. Це наштовхувало на думку про єдність простору і часу. На цій основі було введено геометричний образ чотиривимірного світу, в якому положення матеріальної точки в кожний момент часу визначається чотирма координатами: трьома просторовими x, y, z і часовою t. Таку точку називають світовою точкою, а її рух у чотиривимірному просторі-часі зображується світовою лінією. Явище, що характеризується трьома просторовими координатами і відбувається в певний момент часу, називається подією.

Розглянемо дві події: одна, наприклад, відбувається в точці з просторовими координатами x_1, y_1, z_1 у момент часу t_1 і друга — в точці з координатами x_2, y_2, z_2 у момент часу t_2. Відстань між цими точками

$$l_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Інтервал часу між подіями дорівнює $t_2 - t_1$. Розглянемо вираз

$$S_{12}^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - l_2^2 =$$

$$= c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_2)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2. \quad (9.18)$$

У системі K', що рухається відносно K з швидкістю v_0, цей вираз матиме вигляд

$$S_{12}'^2 = c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2. \quad (9.19)$$

Якщо замість штрихованих координат часу з рівнянь Лоренца (9.12) підставити в (9.19) їхні значення через нештриховані, дістанемо, що $S_{12}'^2 = S_{12}^2 = \text{inv}$. Таким чином, комбінація просторових і часових координат у вигляді рівнянь (9.18) або (9.19) є величиною інваріантною відносно перетворень Лоренца. Цю величину S називають *інтервалом*. Він визначає просторово-часову відстань між двома світовими точками у чотиривимірному просторі-часі. Для двох нескінченно близьких подій інтервал записують так:

$$dS^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (9.20)$$

Інтервал називають часоподібним, якщо $S_{12}^2 > 0$, і просторовоподібним, якщо $S_{12}^2 < 0$. Розділені часоподібним інтервалом події можуть мати причинно-наслідковий зв'язок. У цьому разі відстань, яку проходить світло за час між подіями, більша просторової відстані між ними. Ці події не можуть відбутись одночасно в довільній системі відліку. Для просторовоподібного інтервалу $l_{12}^2 > c^2(t_2 - t_1)^2$, і події ні в якій системі відліку не можуть бути просторово суміщені в одній точці ($l_{12} \neq 0$) та не можуть мати причинного зв'язку, оскільки, щоб між причиною і наслідком був зв'язок, швидкість передачі сигналу повинна перевищувати швидкість світла.

Якщо для події змінюється лише одна просторова координата (наприклад, x) і одна часова, то в чотиривимірному просторі такий рух можна зобразити на площині з координатами x і ct (рис. 9.5).

Найбільшою є швидкість світла. Якщо світловий промінь поширюється від початку координат ($x = 0$, $t = 0$), то через час t, залежно від напряму поширення, він досягає точок $x = ct$ або $x = -ct$. На графіку це можна зобразити лініями OB або OA. Продовження цих

ліній OA_1 або OB_1 зображають поширення світла, що надійшло в точку O з додатного A_1O або від'ємного B_1O напрямів осі OX. Всякий рух зі швидкістю $v < c$ зображатиметься лінією OM. У областях AOB і A_1OB_1 квадрат інтервалу додатний: $S^2 = c^2t^2 - x^2 > 0$ (він є часоподібним). Довільних точок області AOB можна досягнути в момент часу, пізніший від моменту часу в точці O. Ця умова виконується для будь-якої системи відліку, отже, дана область називається областю абсолютного майбутнього. Навпаки, в області A_1OB_1 подія в довільній точці відбувалась раніше, ніж в точці O, і така область називається областю абсолютного минулого.

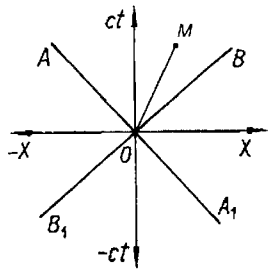


Рис. 9.5

Для областей A_1OB і B_1OA $S^2 = c^2t^2 - x^2 < 0$ (інтервал просторово подібний), тому причинного зв'язку між подією в точці O і подією в довільній точці цих секторів бути не може. Події можуть бути одночасними і тоді інтервал визначається лише просторовою відстанню. Всі точки області A_1OB називаються абсолютно правими, а області B_1OA — абсолютно лівими.

Графік, зображений на рис. 9.5, у випадку зміни всіх трьох просторових координат називають *світовим конусом.* Довільна подія на такому графіку зображується світовою точкою, а процес — світовою лінією.

§ 9.6. Елементи релятивістської динаміки

У релятивістській динаміці рівняння, що описують рух тіл під дією сил, повинні бути незалежними від вибору системи відліку, інваріантними відносно перетворень Лоренца.

Перший постулат Ейнштейна вимагає збереження форми фундаментальних законів фізики в усіх інерціальних системах відліку. Фундаментальним є другий закон Ньютона.

А. Ейнштейн показав, що запис другого закону у формі

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \qquad (9.21)$$

зберігається, якщо під імпульсом розуміти вираз

$$\vec{p} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \qquad (9.22)$$

Підставивши (9.22) у (9.21), дістанемо

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}\right) = \vec{F}. \qquad (9.23)$$

Величина

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \qquad (9.24)$$

що входить до виразу (9.23), є релятивістською масою частинки, тобто масою частинки, яка рухається зі швидкістю v. При $v \ll c$ релятивістська маса m стає рівною масі спокою m_0. Релятивістське зростання маси зі збільшенням швидкості знаходить безпосереднє підтвердження в експериментальних дослідженнях руху з великими швидкостями заряджених частинок у сучасних прискорювачах.

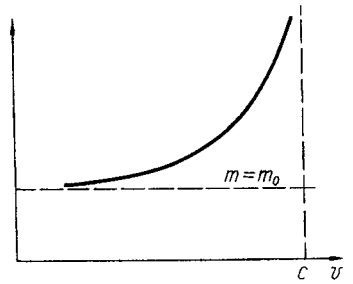


Рис. 9.6

Залежність $m(v)$ графічно показано на рис. 9.6. Маса в релятивістській механіці, як і в класичній, є мірою інертності. Проте в релятивістській механіці інертність не залишається сталою, вона зростає зі збільшенням швидкості. Прискорення частинки при перетвореннях Лоренца не зберігається, воно не є абсолютним, тобто прискорення неоднакове в різних інерціальних системах відліку. Зважаючи на це, зазначимо, що сили також мають відносний характер. Крім того, у загальному випадку вектор прискорення $\vec{a}$ частинки не збігається за напрямом з вектором сили $\vec{F}$. Щоб довести останнє положення, подамо (9.23) як

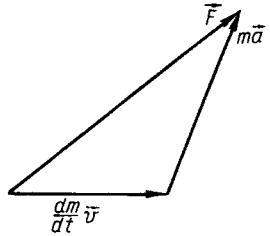


Рис. 9.7

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}. \qquad (9.25)$$

Диференціюючи (9.25) за часом, дістанемо

$$\frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}. \qquad (9.26)$$

Вираз (9.26) графічно показано на рис. 9.7. Отже, вектор $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ у загальному випадку не збігається за напрямом з вектором сили $\vec{F}$. Збіг векторів $\vec{a}$ і $\vec{F}$ спостерігається у двох випадках: 1) $\vec{F} \quad \vec{v}$ —

швидкість частинки змінюється тільки за напрямом (v = const). Тоді на основі рівняння (9.23) дістанемо

$$\frac{m_0\vec{a}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \vec{F}. \tag{9.27}$$

2) $\vec{F} \parallel \vec{v}$ — швидкість частинки змінюється тільки за величиною. Тоді на основі рівняння (9.23) маємо

$$\frac{m_0\vec{a}}{(1-v^2/c^2)^{\frac{3}{2}}} = \vec{F}. \tag{9.28}$$

Неважко побачити, що відношення сили до прискорення у (9.27) та (9.28) різні.

§ 9.7. Взаємозв'язок маси і енергії

Знайдемо вираз для кінетичної енергії W релятивістської частинки. Як і в нерелятивістській механіці, величину W означатимемо як величину, приріст якої на певному відрізку траєкторії дорівнює роботі, виконаній над частинкою силою на цьому самому відрізку траєкторії. Для елементарного переміщення $d\vec{r} = \vec{v}dt$ маємо

$$dW = \vec{F}\,d\vec{r} = \vec{F}\vec{v}\,dt. \tag{9.29}$$

З основного рівняння релятивістської динаміки (9.23) випливає, що

$$\vec{F} = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{m_0 v}{c^2(1-(v/c)^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{dv}{dt}\vec{v}.$$

Враховуючи це співвідношення, вираз (9.29) запишемо так:

$$dW = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}(\vec{v}\,d\vec{v}) + \frac{m_0 v\,dv}{c^2(1-(v/c)^2)^{\frac{3}{2}}}(\vec{v}\,\vec{v}).$$

Оскільки $\vec{v}\,d\vec{v} = v\,dv$, а $\vec{v}\,\vec{v} = v^2$, то

$$dW = \frac{m_0 v\,dv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\left(1 + \frac{v^2/c^2}{1-(v/c)^2}\right) = \frac{m_0 v\,dv}{(1-(v/c)^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{9.30}$$

Диференціюючи співвідношення (9.24), дістанемо

$$dm = \frac{m_0 v\,dv}{c^2(1-(v/c)^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{9.31}$$

На основі (9.31) рівність (9.30) можна переписати так:

$$dW = c^2 dm. \tag{9.32}$$

Оскільки кінетична енергія частинки, яка перебуває у спокої, дорівнює нулю, а її маса $-m_0$, то, інтегруючи рівняння (9.32) в межах від 0 до T і від m_0 до m, дістанемо

$$W = mc^2 - m_0c^2. \tag{9.33}$$

Вираз (9.33) можна записати також як

$$W_{\text{рел}} = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right), \tag{9.34}$$

де $\beta = \frac{v}{c}$.

Формула (9.34) виражає кінетичну енергію релятивістської частинки. Цей вираз відрізняється від нерелятивістського $\frac{m_0v^2}{2}$, і його не можна подати у вигляді $\frac{mv^2}{2}$, де m — релятивістська маса частинки.

Розглянемо випадок малих швидкостей ($\beta \ll 1$). Розкладемо вираз $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, користуючись формулою бінома Ньютона, в ряд:

$$(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + \ldots$$

Обмежуючись першими двома доданками ряду, матимемо

$$W_{\text{нер}} = \frac{1}{2}m_0c^2\beta^2 = \frac{1}{2}m_0v^2.$$

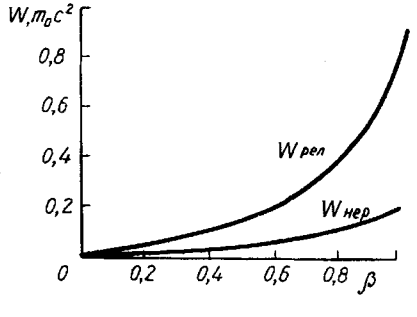


Рис. 9.8

Таким чином, при малих швидкостях ($\beta \ll 1$) вираз (9.34) перетворюється у нерелятивістський. На рис. 9.8 для наочного порівняння зображено графіки залежності $W_{\text{рел}}(\beta)$ і $W_{\text{нер}}(\beta)$. Особливою є відмінність у значеннях $W_{\text{рел}}$ і $W_{\text{нер}}$ при швидкостях, близьких до швидкості світла.

З формули (9.32) випливає, що приріст кінетичної енергії частинки має внутрішній нерозривний зв'язок з приростом її релятивістської маси. Враховуючи те, що різні види енергії можуть переходити з одного виду в інший, маса тіла може збільшуватися не тільки при зро-

станні його кінетичної енергії, а й при довільному зростанні інших видів енергії. На цій основі Ейнштейн зробив висновок: повна енергія тіла пов'язана з масою цього тіла співвідношенням

$$E = mc^2. \tag{9.35}$$

Формула (9.35) виражає один з фундаментальних законів природи — *закон взаємозв'язку маси і енергії.*

Вираз (9.35) з урахуванням (9.33) можна подати в іншій формі:

$$E = m_0c^2 + W. \tag{9.36}$$

При $v = 0$ дістаємо

$$E_0 = m_0c^2, \tag{9.37}$$

де E_0 — енергія спокою, або власна енергія тіла масою m_0.

Зміна повної енергії тіла ΔE супроводиться відповідно зміною його маси $\Delta m = \Delta E/c^2$, і навпаки.

Закон взаємозв'язку маси і енергії особливо проявляється в ядерній фізиці і фізиці елементарних частинок, де розглядаються специфічні ядерні процеси і процеси перетворення елементарних частинок, які супроводяться великими змінами енергії порівняно з енергією спокою частинок.

Встановимо зв'язок енергії з імпульсом у рамках релятивістської механіки. Енергія тіла (частинки) і його імпульс пов'язані з релятивістською масою $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ співвідношеннями $E = mc^2$ і $\vec{p} = m\vec{v}$, де $\vec{v}$ — швидкість тіла. Піднесемо обидва рівняння до квадрата і друге рівняння домножимо на c^2:

$$E^2 = m^2c^4;\ p^2c^2 = m^2v^2c^2.$$

Віднімаючи від першого рівняння друге, дістанемо

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4\,(1 - v^2/c^2),$$

або

$$E^2 - p^2c^2 = \frac{m_0^2c^4\,(1 - v^2/c^2)}{1 - v^2/c^2} = m_0^2c^4.$$

Шуканий зв'язок між енергією та імпульсом має вигляд

$$E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4. \tag{9.38}$$

Різниця $E^2 - p^2c^2$ є інваріантною відносно перетворень Лоренца. З рівняння (9.38) для релятивістської енергії маємо

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}. \tag{9.39}$$

З рівності (9.39) випливає, що релятивістська енергія властива також частинкам, які не мають маси спокою ($m_0 = 0$). Такою частинкою, наприклад, є фотон, енергія якого

$$E = pc, \tag{9.40}$$

а імпульс

$$p = E/c. \tag{9.41}$$

Рівність (9.41) означає, що потік фотонів повинен чинити тиск. Світловий тиск вперше експериментально виміряв П. М. Лебедєв.

Тиском світла пояснюється наявність хвостів у комет, структура планетарних туманностей.

§ 9.8. Закон збереження маси, енергії та імпульсу

Розглянемо закони збереження енергії та імпульсу для ізольованих систем у релятивістській механіці. Будемо розрізняти два типи систем: системи, в яких тіла не взаємодіють, і системи, в яких тіла взаємодіють. Для систем першого типу, враховуючи адитивність повної релятивістської енергії та імпульсу, дістанемо

$$E = \sum_{i=1}^{n} E_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_{0i}\,c^2}{\sqrt{1-\beta_i^2}} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{p_i^2\,c^2 + m_{0i}^2c^4} = \sum_{i=1}^{n} (m_{0i}\,c^2 + W_i); \tag{9.42}$$

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_{0i}\vec{v}_i}{\sqrt{1-\beta_i^2}}, \tag{9.43}$$

де m_{0i}, $\vec{v}_i$, $\vec{p}_i$, W_i — відповідно маса спокою, швидкість, релятивістський імпульс та кінетична енергія i-го тіла системи. Оскільки тіла не взаємодіють, то їхні швидкості і релятивістські енергії сталі. Зважаючи на це, повна енергія і повний імпульс системи також будуть величинами сталими.

Для систем, в яких тіла взаємодіють, повна енергія

$$E = \sum_{i=1}^{n} m_ic^2 + U, \tag{9.44}$$

де U — потенціальна енергія взаємодії тіл (частинок), яка залежить від конфігурації системи. У релятивістській динаміці поняття потенціальної енергії, зважаючи на скінченність швидкості передачі взаємодій, не можна ввести. Справді, потенціальна енергія в кожен момент часу визначається конфігурацією частинок (тіл) системи, а зміна конфігурації системи повинна миттєво зумовлювати зміну потенціальної енергії. Останнє суперечить другому постулату Ейнштейна.

Проте для деяких практично важливих випадків взаємодії частинок (зокрема під час зіткнення їх, коли частинки до і після зіткнення рухаються вільно, отже, взаємодії немає) справджуються закони збереження тривимірного імпульсу і енергії. Разом з енергією зберігається також релятивістська маса. При цьому однаково трактуються пружні і непружні зіткнення, тільки релятивістська маса по-різному розподіляється між масою спокою і масою, зв'язаною з кінетичною енергією макроскопічного руху.

У цьому разі для ізольованих систем закони збереження енергії і імпульсу мають такий вигляд:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{m_{0i}c^2}{\sqrt{1-\beta_i^2}} = \sum_{i=1}^{n^*} \frac{m_{0}^{*}c^2}{\sqrt{1-\beta_i^2}}; \qquad (9.45)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{m_{0i}\vec{v}_i}{\sqrt{1-\beta_i^2}} = \sum_{i=1}^{n^*} \frac{m_{0i}^{*}\vec{v}_i^{*}}{\sqrt{1-\beta_i^2}}. \qquad (9.46)$$

У рівняннях (9.45) і (9.46) зірочкою позначено величини, які стосуються моментів часу після зіткнення. Зазначимо, що кількість частинок у системі до і після зіткнення може бути різною ($n \neq n^*$). Останнє спостерігається при ядерних реакціях.

Закон збереження енергії ($E = mc^2$) є одночасно і законом збереження маси. Рівність (9.39) встановляє взаємозв'язок маси, енергії та імпульсу рухомої релятивістської частинки. Якщо в класичній фізиці закони збереження енергії та імпульсу, які є наслідком симетрії (однорідності) простору і часу, формулюються як окремі незалежні закони, то в релятивістській механіці ці закони збереження виступають як єдиний закон збереження енергії — імпульсу, відображаючи цим самим нерозривну єдність простору — часу.

Приклад 9.1. В інерціальній системі відліку K одночасно (за годинником системи K) у точках A і B, розміщених на осі OX цієї системи, спалахнули електричні лампочки. Відстань між точками A і B, виміряна в системі відліку K, дорівнює l_0. У додатному напрямі осі OX з швидкістю v_0 відносно системи K рухається інша інерціальна система K'. У системі K' спалах електричних лампочок буде неодночасним. Визначити інтервал часу між спалахами електричних лампочок у точках A і B за годинником системи K'.

Розв'язання. Інтервал часу в системі K' буде

$$\Delta t' = t_A' - t_B'.$$

За перетвореннями Лоренца

$$t_A' = \frac{t_A - v_0/(c^2 x_A)}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}; \quad t_B' = \frac{t_B - v_0/(c^2 x_B)}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}.$$

Звідси

$$\Delta t' = \frac{t_A - t_B + (v_0/c^2)(x_B - x_A)}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} = \frac{v_0}{c^2}\frac{l_0}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}},$$

де $t_A - t_B = 0$; $x_B - x_A = l_0$.

Події, одночасні в системі K, є неодночасними у рухомій системі K', і інтервал часу між подіями зростає зі збільшенням відстані l_0 та швидкості v_0 системи K'.

Приклад 9.2. Інерціальна система відліку K' рухається відносно системи K у додатному напрямі осі OX з швидкістю v_0. У системі K в точці початку координат у момент часу t випромінюється електромагнітний сигнал, який, відбившись від дзеркала, розміщеного в початку координат системи K', повертається в початок координат системи K. Визначити час, протягом якого електромагнітний сигнал пройде зазначену відстань за годинниками в системах K і K'.

Розв'язання. Позначимо початкову відстань між системами відліку K і K' через l_0. Електромагнітний сигнал досягне дзеркала системи K' у момент

$$t_1 = t + \frac{l_0 + v_0(t_1 - t)}{c}.$$

Звідси

$$t_1 = t + \frac{l_0}{c - v_0}. \qquad (1)$$

Інтервал часу між подіями в системах K і K'

$$\Delta t_1 = t_1 - t = \frac{l_0}{c - v_0}.$$

У системі K час проходження електромагнітного сигналу від системи K до K' і назад

$$t = \frac{2l_0}{c - v_0}. \qquad (2)$$

За годинником системи K' на основі перетворень Лоренца

$$\Delta t_1' = \frac{\Delta t_1 - (v_0/c^2)\Delta x}{\sqrt{1 - v_0^2/c_2}}.$$

Переміщення $\Delta x = 0$ (точка на дзеркалі, куди надійшов сигнал, і точка, від якої сигнал відбився, збігаються). Звідси

$$\Delta t' = \frac{l_0/(c - v_0)}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}},$$

де $\Delta t'$ — інтервал часу між випроміненням сигналу з початку координат системи K до його приходу в початок координат системи K' за годинником системи K'. Тоді повний час поширення сигналу в прямому і зворотному напрямах за годинником системи K'

$$t' = \frac{2l_0}{(c - v_0)\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} = \frac{t}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}. \quad (3)$$

Приклад 9.3. Частинка масою m перебуває в спокої. При її розпаді утворюються дві частинки, маси яких m_1 і m_2. Визначити кінетичну енергію W_1 і W_2 продуктів розпаду.

Розв'язання. Запишемо закони збереження енергії й імпульсу в системі відліку, в якій частинка перебуває в спокої:

$$mc^2 = E_1 + E_2; \quad (1)$$

$$0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2. \quad (2)$$

З останньої рівності маємо

$$p_1 = -p_2 \text{ або } p_1^2 = p_2^2. \quad (3)$$

Рівняння (3) на основі формули (9.38) можна записати таким чином:

$$E_1^2 - m_1^2c^4 = E_2^2 - m_2^2c^4,$$

або

$$E_1^2 - E_2^2 = (m_1^2 - m_2^2)\, c^4. \quad (4)$$

Поділивши (4) на (1), дістанемо

$$E_1 - E_2 = \frac{(m_1^2 - m_2^2)}{m} c^2. \quad (5)$$

З рівностей (1) і (5) знаходимо, що

$$E_1 = \frac{m^2c^2 + (m_1^2 - m_2^2)\, c^2}{2m}; \quad E_2 = \frac{m^2c^2 - (m_1^2 - m_2^2)\, c^2}{2m}.$$

Тоді

$$W_1 = E_1 - m_1c^2 = \frac{c^2}{2m}((m - m_1)^2 - m_2^2);$$

$$W_2 = E_2 - m_2c^2 = \frac{c^2}{2m}((m - m_2)^2 - m_1^2).$$

Розділ 10. Механічні коливання

§ 10.1. Коливальні процеси

Коливальним процесом або коливанням називають усякий регулярний або майже регулярний процес, в якому будь-яка фізична величина набуває однакових значень через рівні або майже рівні проміжки часу. Коливання — дуже поширений вид рухів. Вони відбуваються скрізь у природі і в усіх галузях техніки. При механічних коливаннях повторюються, наприклад, переміщення тіл і модулі швидкостей. Електромагнітні коливання — це повторювані зміни напруг і сил струмів у електричних колах та електричних і магнітних полів навколо струмів. Існують змішані коливання у пристроях, які перетворюють енергію механічних коливань в електричну енергію, і навпаки, наприклад, у мікрофонах та гучномовцях.

Теорія коливань вивчає коливальні рухи різної фізичної природи загальними методами. Вона встановлює закономірності, які характеризують коливальний процес в цілому, незалежно від природи фізичних величин, що здійснюють коливання.

Коливання виникають тоді, коли системі, здатній здійснювати коливальні рухи, надається енергія. У консервативних системах енергія зберігається. Якщо енергія системи зменшується (при наявності сил опору), то коливання згасають і систему називають *не консервативною.*

Найпростішими є коливальні системи із зосередженими параметрами. Рух таких систем можна описати як рух жорстко зв'язаних між собою точкових або протяжних об'єктів. Наприклад, підвішене на нитці тіло (маятник) утворює коливальну систему із зосередженими параметрами, якщо це тіло можна вважати точковим, а нитку — нерозтяжною і невагомою. Стан будь-якої коливальної системи визначається узагальненою координатою, характерною для кожної системи (зміщення, кут відхилення, тиск, температура, електрична напруга і т. п.). Рух систем із сталими параметрами описується лінійними диференціальними рівняннями з повними похідними, що пов'язують узагальнені координати і узагальнені імпульси системи. Порядок цих рівнянь визначається числом ступенів вільності системи. Наприклад, плоский рух маятника в полі тяжіння описується лінійним рівнянням другого порядку і відповідає системі з одним ступенем вільності. Коливальні системи, рух яких описується лінійними рівняннями, називають *лінійними.*

Основна задача теорії коливань полягає у визначенні узагальненої координати x коливної системи у будь-який момент часу: $x = x(t)$. Коливання називають *періодичним*, якщо певні значення x повторюються через рівні проміжки часу T, тобто $x(t) = x(t + T)$, де T — стала величина, яку називають *періодом* коливання. Якщо функція

$x(t)$ задовольняє умову періодичності не строго, а тільки наближено, то коливання називають *майже періодичними*. Зображення коливань у координатах (x, t) є основним при розгляді коливального процесу. Це зумовлено перш за все тим, що майже всі прилади, які реєструють коливання, відтворюють саме цю залежність. Крім того, функція $x(t)$ дає основну інформацію про загальний характер коливань, тобто про їхню форму.

Характерною властивістю лінійних коливальних систем є те, що під дією зовнішньої періодичної сили система здійснює коливання з тією самою періодичністю. Ще одна важлива властивість лінійних систем полягає в тому, що для них справджується принцип суперпозиції (незалежного накладання) коливань: якщо на систему незалежно діють дві періодичні сили і кожна окремо зумовлює зміну узагальненої координати відповідно x_1 і x_2, то результуюча зміна координати $x = x_1 + x_2$.

Реальні коливальні системи зрештою завжди нелінійні, проте їх часто можна наближено описувати лінійними диференціальними рівняннями. Застосування наближених методів описання коливань дає можливість отримувати важливі практичні висновки.

§ 10.2. Гармонічні коливання

Найважливішими серед механічних коливальних рухів є гармонічні коливання. Гармонічними називаються коливання, в процесі яких зміщення x змінюється за законом косинуса (або синуса):

$$x = x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0), \qquad (10.1)$$

де A — амплітуда, що дорівнює абсолютному значенню найбільшого зміщення; ω — циклічна частота коливань; $\omega t + \varphi_0$ — фаза коливань, що однозначно визначає значення коливальної величини у момент часу t; φ_0 — початкова фаза. Вибором початкової фази φ_0 закон гармонічних коливань (10.1) завжди можна звести до функції синуса від аргументу ωt.

Характерною ознакою гармонічного коливання є те, що величини A, ω і φ_0 не змінюються в процесі коливання. Вивчення гармонічних коливань є важливим з двох причин: по-перше, коливання, які зустрічаються у природі і техніці, за своїм характером близькі до гармонічних; по-друге, важливі для практичних застосувань періодичні процеси, що не є гармонічними, але повторюються через рівні проміжки часу, можна зображати як накладання кількох гармонічних коливань.

Вираз (10.1) є розв'язком диференціального рівняння руху системи, що здійснює гармонічні коливання. Рівняння руху можна отримати, продиференціювавши двічі за часом функцію $x(t)$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

або

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0. \qquad (10.2)$$

Цей вираз називають *рівнянням гармонічних коливань*. Вираз (10.2) — лінійне рівняння, воно містить функцію $x(t)$ і її другу похідну у першому степені.

Амплітуду A і початкову фазу φ_0 неможливо визначити із диференціального рівняння. Для цього при розв'язуванні рівняння (10.2) використовують початкові умови, які характеризують конкретний коливальний процес.

Фізичний зміст циклічної частоти ω пов'язаний з поняттями періоду T і частоти ν коливань. *Періодом* називають тривалість одного повного коливання, тобто найменший проміжок часу, через який повторюється довільно обраний стан коливальної системи. За один період фаза коливання отримує приріст 2π:

$$\omega(t + T) + \varphi_0 = \omega t + \varphi_0 + 2\pi,$$

звідси

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \qquad (10.3)$$

Частотою коливання ν називають кількість повних коливань за одиницю часу:

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

Одиниця частоти — герц: 1 Гц — це частота періодичного процесу, в якому відбувається одне коливання (повний цикл процесу) за одну секунду (1 Гц = 1 $с^{-1}$). Із формули (10.3) випливає, що

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu.$$

Циклічна частота дорівнює числу коливань за 2π секунд і вимірюється в радіанах за секунду (рад/с).

Гармонічне коливання можна зобразити графічно у вигляді проекції матеріальної точки, що рівномірно обертається по колу, радіус якого дорівнює амплітуді коливання (рис. 10.1). Знайдемо швидкість і прискорення матеріальної точки, яка здійснює гармонічні коливання. Швидкість коливального руху визначається як похідна за часом від зміщення (10.1):

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi_0) \tag{10.4}$$

або

$$v = \omega A \cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right), \tag{10.5}$$

де ωA — амплітуда швидкості. Прискорення цього руху дорівнює похідній за часом від швидкості (10.4):

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi_0). \tag{10.6}$$

Рівняння (10.6) з урахуванням (10.1) перепишемо у вигляді

$$a = -\omega^2 x \tag{10.7}$$

або

$$a = \omega^2 A \cos(\omega t + \varphi_0 + \pi), \tag{10.8}$$

де $\omega^2 A$ — амплітуда прискорення.

Із виразів (10.5) і (10.8) видно, що швидкість і прискорення матеріальної точки здійснюють гармонічні коливання з тією самою частотою ω, що і коливання зміщення (10.1). Проте між коливаннями зміщення і коливаннями швидкості та прискорення існує різниця (або зсув) фаз. Коливання швидкості випереджають коливання зміщення за фазою на $\pi/2$, а коливання прискорення випереджають коливання зміщення за фазою на π.

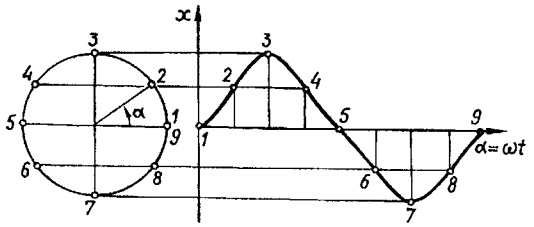


Рис. 10.1

Зміна прискорення матеріальної точки у процесі гармонічних коливань свідчить про те, що на неї діє змінна сила. Другий закон Ньютона дає змогу в загальному вигляді написати рівняння зв'язку між силою і прискоренням матеріальної точки масою m в процесі гармонічних коливань:

$$F = ma = -m\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi_0) \tag{10.9}$$

або

$$F = -kx, \tag{10.10}$$

де $k = m\omega^2$ — коефіцієнт пропорційності між силою і зміщенням точки. Звідси випливає, що на матеріальну точку діє сила, прямо пропорційна зміщенню і завжди напрямлена до положення рівноваги. Тому її часто називають *вертальною силою.* Частота і фаза коливань сили F збігаються з частотою і фазою прискорення.

Співвідношенню (10.10) задовольняють сили пружності і квазіпружні сили. Сили, які за своєю природою не є пружними, але змінюються за законом (10.10), називають *квазіпружними* (ніби пружними).

Коливання, які відбуваються в ізольованій системі, тобто під дією одних тільки внутрішніх сил, називають *вільними.* Якщо внутрішні сили консервативні, то механічна енергія коливальної системи залишається сталою (не витрачається на роботу проти сил опору). Такі вільні коливання називають *власними.* Власні коливання відбуваються нескінченно довго.

Розглянемо власні коливання системи, що складається із невеликого тіла масою m, підвішеного на вертикальній пружині, другий кінець якої жорстко закріплений (рис. 10.2). Вважатимемо, що сила тяжіння тіла значно менша від пружної сили, яка діє на тіло з боку пружини. Масою пружини і силами опору знехтуємо. Положення рівноваги підвішеного до пружини тіла виберемо за початок координат і вісь OX спрямуємо вертикально вниз. Коливальну систему, яка задовольняє цим умовам, називають *пружинним маятником.*

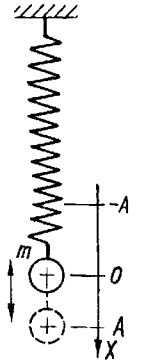


Рис. 10.2

При зміщенні тіла від положення рівноваги на величину x на нього діятиме пружна сила, яка визначається законом Гука

$$F = -kx, \tag{10.11}$$

де k — коефіцієнт жорсткості пружини. За другим законом Ньютона отримаємо рівняння руху пружинного маятника:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

або

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \tag{10.12}$$

де

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}. \tag{10.13}$$

Рівняння руху (10.12) аналогічне диференціальному рівнянню гармонічних коливань (10.2), і його розв'язок відносно зміщення x дається виразом (10.1). Оскільки в системі діє тільки одна внутрішня сила пружності (10.11), яка є консервативною силою, то пружинний маятник здійснює власні гармонічні коливання. Частота ω_0 таких коливань залежить тільки від властивостей самої системи (10.13) і називається *власною частотою* системи, а період власних коливань

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \qquad (10.14)$$

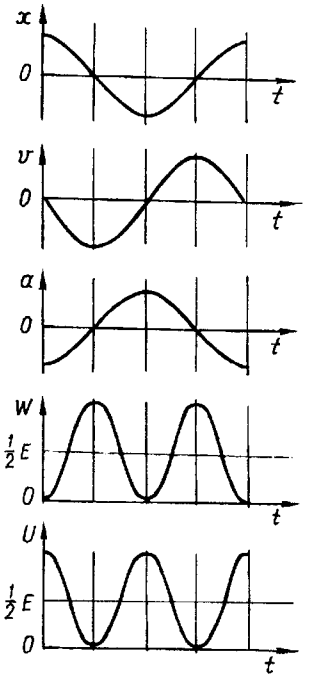


Рис. 10.3

Період власних коливань не залежить від амплітуди. Цю властивість коливальних систем називають *ізохронністю коливань*. Вона характерна для ідеалізованих лінійних систем. Коливання реальних (нелінійних) систем при малих амплітудах з певним наближенням можна вважати ізохронними.

Розглянемо енергію тіла масою m, яке під дією пружної або квазіпружної сили здійснює власні гармонічні коливання з амплітудою A і циклічною частотою ω. Механічна енергія тіла в процесі власних коливань повинна залишатися сталою і рівною сумі кінетичної W та потенціальної U енергій:

$$E = W + U. \qquad (10.15)$$

У довільний момент часу кінетична енергія тіла

$$W = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\,\omega^2A^2\sin^2(\omega t + \varphi_0). \qquad (10.16)$$

Потенціальна енергія тіла, зміщеного в даний момент часу на відстань x від положення рівноваги, дорівнює роботі, яку виконує пружна сила, переміщаючи тіло в положення рівноваги:

$$U = -\int_0^x F(x)\,dx = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi_0). \qquad (10.17)$$

Враховуючи, що $m\omega^2 = k$, вирази (10.16) і (10.17) перепишемо в такій формі:

$$W = \frac{1}{4}kA^2(1 - \cos 2(\omega t + \varphi_0)), \qquad (10.18)$$

$$U = \frac{1}{4}kA^2(1 + \cos 2(\omega t + \varphi_0)). \qquad (10.19)$$

Тоді згідно з рівністю (10.15) механічна енергія гармонічного коливання

$$E = \frac{1}{2}kA^2. \qquad (10.20)$$

Із виразів (10.18) і (10.19) випливає, що кінетична і потенціальна енергії також здійснюють гармонічні коливання, але циклічна частота коливань енергії вдвічі більша від циклічної частоти коливань зміщення. Як видно з виразу (10.20), механічна енергія гармонічних коливань пропорційна квадрату амплітуди коливань зміщення і з часом не змінюється. На рис. 10.3. показано графіки гармонічних коливань зміщення, швидкості, прискорення, кінетичної і потенціальної енергій як функцій часу.

Оскільки середні за період значення функцій $\sin^2(\omega t + \varphi_0)$ і $\cos^2(\omega t + \varphi_0)$ дорівнюють $1/2$, то з виразів (10.16) і (10.17) знаходимо, що середні за період значення кінетичної і потенціальної енергій однакові і кожне з них дорівнює половині повної механічної енергії гармонічних коливань:

$$\langle W\rangle = \langle U\rangle = \frac{1}{2}E. \qquad (10.21)$$

§ 10.3. Векторне зображення гармонічних коливань та їхнє вираження в комплексній площині. Гармонічний осцилятор

Гармонічні коливання зображують графічно обертовим вектором амплітуди (або методом векторних діаграм). Для векторного зображення коливань (10.1) із точки O довільної осі OX (опорної осі) відкладають вектор $\vec{A}$, модуль якого дорівнює амплітуді A коливання, під кутом φ_0 до осі (рис. 10.4). Проекція цього вектора на вісь OX дорівнює зміщенню x_0 в початковий момент часу ($t = 0$): $x_0 = A\cos\varphi_0$. Обертатимемо вектор $\vec{A}$ навколо точки O проти ходу годинникової стрілки з кутовою швидкістю ω, що дорівнює циклічній частоті коливань. За проміжок часу t вектор $\vec{A}$ здійснить поворот на кут ωt, і його проекція на вісь OX буде: $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$. У процесі обертання вектора $\vec{A}$ його проекція на опорну вісь змінюватиметься

від $+A$ до $-A$ за гармонічним законом. Отже, гармонічне коливання можна зобразити графічно проекцією на довільну вісь обертового вектора амплітуди $\vec{A}$, який відкладений із довільної точки осі під кутом, що дорівнює початковій фазі, і обертається навколо цієї точки з кутовою швидкістю, рівною циклічній частоті коливання.

У фізиці часто застосовується метод вираження гармонічних коливань, який відрізняється від методу обертового вектора амплітуди тільки за формою. Для розрахунку гармонічних коливань доцільно розглядати площину векторного зображення як комплексну z-площину із $z = x + iy$. Розглянемо коротко суть цього методу.

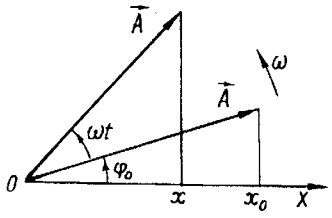


Рис. 10.4

Диференціальне рівняння (10.2) є лінійним рівнянням другого порядку. Тому воно має два незалежних розв'язки. Один із них — це функція (10.1). Другим незалежним розв'язком є функція $x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$, у чому можна переконатися прямою підстановкою. Згідно з принципом суперпозиції загальним розв'язком рівняння (10.2) буде довільна лінійна комбінація

$$c_1 A \cos(\omega t + \varphi_0) + c_2 A \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Якщо прийняти $c_1 = 1$, $c_2 = \sqrt{-1} = i$, то розв'язок перетворюється у комплексну величину

$$\tilde{z} = A \cos(\omega t + \varphi_0) + i A \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Функцію $\tilde{z}$ за формулою Ейлера $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \sin\alpha$ можна записати у вигляді

$$\tilde{z} = A e^{i(\omega t + \varphi_0)}. \qquad (10.22)$$

Змінна фізична величина z, коливання якої спостерігаються на досліді, може набувати тільки дійсних значень. Тому закон гармонічних коливань (10.1) можна отримати як дійсну частину комплексної величини $\tilde{z}$:

$$z = \mathrm{Re}(\tilde{z}) = A \cos(\omega t + \varphi_0).$$

У теорії коливань прийнято опускати символ Re, яким позначається дійсна частина комплексної величини, і записувати закон гармонічних коливань у вигляді дійсної частини комплексного виразу (10.22):

$$z = A e^{i(\omega t + \varphi_0)}. \qquad (10.23)$$

Така форма вираження гармонічних коливань зручна для використання при обчисленнях внаслідок простих властивостей експоненціальної функції: експоненціальна властивість зберігається при диференціюванні та інтегруванні виразів типу (10.23), додаванні коливань та інших операціях з ними.

Механічну систему, закон руху якої описується рівнянням

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0),$$

називають *одномірним класичним гармонічним осцилятором*, або скорочено *класичним осцилятором*, тобто класичний осцилятор здійснює гармонічні коливання навколо положення стійкої рівноваги. Такі осцилятори називають гармонічними. Очевидно, всі результати, отримані у (10.2) для гармонічних коливань, справедливі також і для гармонічного осцилятора.

Знайдемо імпульс гармонічного осцилятора. За означенням імпульс p осцилятора масою m виражається формулою $p = mv = m\dfrac{dx}{dt}$, тобто

$$p = -m\omega A \sin(\omega t + \varphi_0).$$

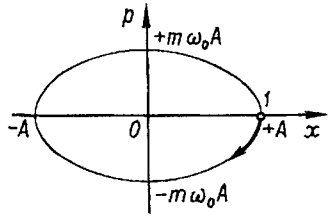


Рис. 10.5

Динамічний стан осцилятора в будь-який момент часу характеризується зміщенням x від положення рівноваги і відповідним значенням імпульсу p. Виразимо p як функцію x. Для цього перепишемо рівняння для зміщення та імпульсу у вигляді

$$\frac{x}{A} = \cos(\omega t + \varphi_0), \qquad \frac{p}{m\omega A} = -\sin(\omega t + \varphi_0).$$

Щоб вилучити час t із цих рівнянь, піднесемо кожне з них до квадрата і додамо їх:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{p^2}{(m\omega A)^2} = 1. \qquad (10.24)$$

Цей вираз є рівнянням траєкторії гармонічного осцилятора в координатній площині p, x. На рис. 10.5 зображено графік залежності імпульсу гармонічного осцилятора від зміщення. Координатну площину p, x прийнято називати *фазовою площиною*, а залежність $p(x)$ — *фазовою траєкторією*. Як видно із виразу (10.24), фазова траєкторія гармонічного осцилятора має форму еліпса з півосями A та $m\omega A$. Кожна точка фазової траєкторії зображує динамічний стан осцилятора в деякий момент часу. Із зміною часу точка, що зображає стан осцилятора (її називають зображувальною точкою), переміщається по фазовій траєкторії і за один період здійснює повний обхід замкненої

траєкторії. Переміщення зображувальної точки відбувається за ходом стрілки годинника. Щоб переконатись у цьому, розглянемо стан осцилятора в момент часу t', коли фаза коливання $\omega t' + \varphi_0 = 2\pi n$ (n — ціле число). У цей момент часу $x = A$ і $p = 0$ (положення *1* зображувальної точки на рис. 10.5). У наступні моменти часу x зменшуватиметься, а p набуватиме від'ємних значень, що збільшуються за модулем. Отже, зображувальна точка рухається в напрямі, показаному стрілкою на рис. 10.5, тобто за годинниковою стрілкою.

Окрема фазова траєкторія зображує деякий конкретний рух осцилятора. Якщо необхідне загальне уявлення про всі можливі рухи осцилятора, то на фазовій площині будують родину фазових траєкторій. Таку родину фазових траєкторій називають *фазовим портретом осцилятора.* На фазовому портреті зображаються найважливіші властивості осцилятора.

Як простий приклад гармонічного осцилятора нагадаємо пружинний маятник, розглянутий у § 10.2. Після початкового поштовху підвішена на пружині маса здійснює гармонічні коливання з деякою амплітудою A, а відповідна фазова траєкторія має форму еліпса. При інших початкових умовах коливання відбуваються з іншими

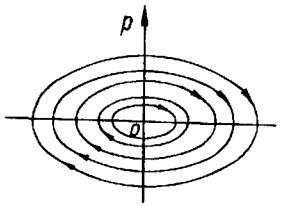


Рис. 10.6

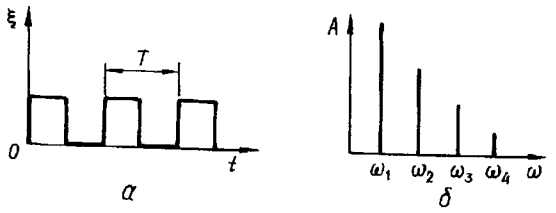


Рис. 10.7

амплітудами, але мають той самий характер. Отже, фазовий портрет пружинного маятника має вигляд родини концентричних еліпсів (рис. 10.6). У фазовий портрет входить також положення рівноваги осцилятора, тобто точка $x = p = 0$. Із геометричних міркувань випливає, що це єдина особлива точка фазової площини. Така точка може лежати тільки на осі OX, тому що в іншому разі стан спокою осцилятора неможливий.

Багато важливих для практики фізичних задач пов'язані з періодичними, але не гармонічними коливаннями. Прикладом таких коливань можуть бути коливання прямокутної форми (рис. 10.7, *а*), що складаються з періодичної послідовності "прямокутників".

Складні форми коливань зображують графічно у вигляді спектра. Спектр коливань — це сукупність простих гармонічних коливань, на які може бути розкладений даний складний коливальний процес. Будь-яку періодичну негармонічну функцію $f(t)$ з частотою ω можна розгорнути в ряд гармонічних функцій: $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos n\omega t$ з частотами $n\omega$, кратними основній частоті. Ці частоти називають *гармоніками* (n — номер гармоніки). Амплітуди гармонічних коливань цього ряду досить швидко зменшуються зі збільшенням номера гармоніки. Тому практично враховується тільки деяка кількість членів на початку нескінченного ряду.

Спектр складного коливання містить на осі абсцис частоти окремих складових коливань, а ординати в цих точках своєю довжиною зображують амплітуди відповідних коливань. Ці ординати називають *спектральними лініями* складного коливання. Спектральне зображення коливального процесу не містить даних про фази коливань. На рис. 10.7, *б* зображено спектр, який відповідає прямокутним коливанням, показаним на рис. 10.7, *а*. Це лінійчастий спектр, що дає найпростіше зображення коливального процесу. Згодом ми переконаємось, що спектральна лінія має ширину, тобто охоплює деяку смугу частот скінченної ширини.

§ 10.4. Математичний маятник

Одним з найпростіших прикладів гармонічного коливання є коливальний рух математичного маятника. *Математичним маятником* називають матеріальну точку, підвішену на невагомій і нерозтяжній нитці, що коливається у вертикальній площині під дією сили тяжіння (рис. 10.8). До математичного маятника за своїми властивостями найбільше подібна система, що складається з нерозтяжної легкої нитки, до одного з кінців якої підвішено металеву кульку. Можна вважати, що центр маси такої системи збігається з центром мас кульки.

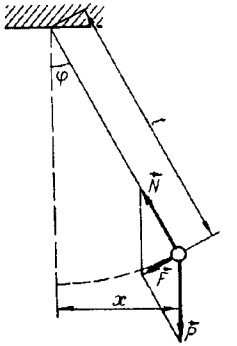


Рис. 10.8

Коли система перебуває у спокої, то сила тяжіння зрівноважується силою натягу нитки $\vec{N}$. Якщо кульку відхилити на деякий кут φ, то рівнодійна $\vec{F}$ сил натягу $\vec{N}$ і земного тяжіння $\vec{P}$ намагається повернути кульку в положення рівноваги. Вертальна сила

$$F = mg \sin \varphi. \qquad (10.25)$$

Оскільки залежність такої сили від кута φ нелінійна, то коливання маятника не будуть гармонічними. Для малих кутів φ можна записати, що $\sin = \frac{x}{l} \approx \varphi$, і вираз вертальної сили буде

$$F = \frac{mg}{l} x, \tag{10.26}$$

де l — довжина маятника. При такій умові вертальна сила пропорційна куту φ, тому коливання маятника можна вважати гармонічними. Рівняння руху математичного маятника має такий вигляд:

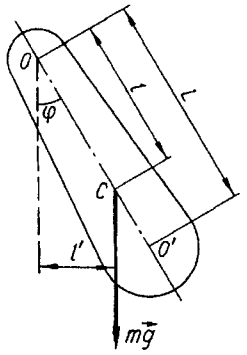


Рис. 10.9

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = - \frac{mg}{l} x. \tag{10.27}$$

Знак "мінус" вказує на те, що вертальна сила напрямлена до положення рівноваги, а зміщення відраховується від положення рівноваги, тому знак прискорення протилежний знаку зміщення.

Проводячи аналогію між рівняннями (10.12) і (10.27), можна записати, що

$$k = mg/l.$$

Тоді з (10.14) маємо

$$T = 2\pi\sqrt{l/g}. \tag{10.28}$$

Звідси випливає, що період коливань математичного маятника не залежить від амплітуди коливань (для малих значень кута відхилень φ) і маси маятника, а визначається його довжиною і прискоренням вільного падіння тіл у даному місці Землі.

10.5. Фізичний маятник

Фізичним маятником називають тверде тіло, здатне здійснювати коливання навколо нерухомої горизонтальної осі, яка не проходить через центр мас (рис. 10.9).

Зрозуміло, що у положенні рівноваги фізичного маятника його центр мас C знаходиться на вертикалі з точкою підвісу O, але нижче від неї. При відхиленні маятника від положення рівноваги на кут φ виникає обертальний момент M сили тяжіння, плече якої $l' = l \sin \varphi$. Він намагається повернути маятник у положення рівноваги. Якщо дією моментів сил тертя нехтувати, то з основного рівняння динаміки обертального руху дістанемо рівняння руху фізичного маятника:

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = - mgl \sin \varphi, \tag{10.29}$$

де I — момент інерції тіла відносно горизонтальної осі, що проходить через точку підвісу O (у даному разі вісь перпендикулярна до площини рисунка); m — маса маятника; знак "мінус" вказує на те, що повертаючий момент намагається повернути маятник до положення рівноваги, а кут відхилення φ від положення рівноваги відраховується у протилежному напрямі. Для малих кутів відхилення $\sin \varphi \approx \varphi$, і рівняння (10.29) набуває вигляду

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = - mgl\varphi. \tag{10.30}$$

Перепишемо рівняння (10.30) у такій формі:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgl}{I} \varphi = 0. \tag{10.31}$$

Підставивши у mgl/I одиниці m, g, l і I, дістанемо, що розмірність цього виразу дорівнює розмірності частоти у квадраті. Тому можна зробити таке позначення: $mgl/I = \omega_0^2$. Тоді рівняння (10.31) за виглядом збігається з рівнянням (10.13), а величина φ буде змінюватися гармонічно з періодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}. \tag{10.32}$$

Порівнюючи формулу (10.32) з (10.28) доходимо висновку, що величина $I/(ml)$ вимірюється в одиницях довжини, тобто

$$\frac{I}{ml} = L. \tag{10.33}$$

Величину L називають *зведеною довжиною* фізичного маятника. Очевидно математичний маятник матиме такий самий період коливань, як і фізичний маятник, за умови, що його довжина дорівнює зведеній довжині фізичного маятника. Неважко показати, що $L > l$. Справді, за теоремою Гюйгенса — Штейнера момент інерції маятника відносно осі, що проходить через точку підвісу O, дорівнює

$$I = I_0 + ml^2,$$

де I_0 — момент інерції маятника відносно паралельної осі, що проходить через його центр мас. Тоді

$$L = \frac{I_0 + ml^2}{ml} = l + \frac{l_0}{ml} > l.$$

Точку O', що міститься на лінії OC на відстані L від точки підвісу O, називають точкою коливань, або *центром коливань* фізичного маятника. Якщо в цій точці підвісити фізичний маятник, то його період

коливань не зміниться. Справді, якщо O' — точка підвісу маятника, то його нова зведена довжинаО

$$L' = \frac{I'}{ml_1} = \frac{I_0 + m(L-l)^2}{m(L-l)}. \qquad (10.34)$$

Оскільки $L - l = \frac{I_0}{ml}$, то з (10.34) маємо, що $L' = L$. Отже, точка підвісу O фізичного маятника і його центр коливань O' є взаємними або спряженими. Ця властивість використовується в оборотних маятниках, які застосовуються для визначення з великою точністю прискорення вільного падіння у різних точках Землі.

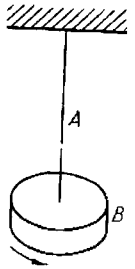


Рис. 10.10

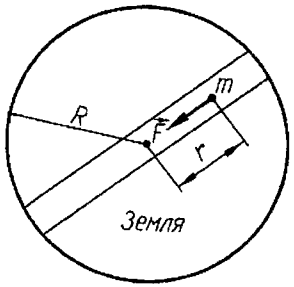


Рис. 10.11

Маятники широко застосовуються у годинниках, у приладах для визначення прискорення рухомих тіл і вивчення коливань земної кори (сейсмографи), у гіроскопічних приладах, у приладах для експериментального визначення моментів інерції тіл для дослідження механічних властивостей твердих тіл при різних фізичних умовах тощо.

Приклад 10.1. Визначити модуль кручення металевої дротини за допомогою крутильного маятника, який являє собою металеву дротину A, до одного кінця якої підвішено тіло B з відомим моментом інерції (рис. 10.10). Це тіло може здійснювати крутильні коливання навколо вертикальної осі, що збігається з віссю дротини.

Розв'язання. При повертанні тіла на кут φ дротина закручується. При цьому виникає момент сил M, який намагається повернути тіло в положення рівноваги. Дослід показує, що момент сил M пропорційний куту φ, тобто

$$M = -G\varphi, \qquad (1)$$

де G — модуль кручення. Основне рівняння обертального руху має вигляд

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -G\varphi. \qquad (2)$$

Рівняння (2) подібне до рівняння (10.12). Отже, тіло здійснюватиме гармонічні коливання з періодом

$$T = 2\pi\sqrt{I/G}. \qquad (3)$$

Із співвідношення (3) маємо

$$G = \frac{4\pi^2}{T^2} I.$$

Приклад 10.2. Припустимо, що по одному з діаметрів Землі вдалося прорити тунель рис. 10.11. Скільки часу потрібно, щоб тіло масою m, кинуте у цей тунель, досягло протилежної точки Землі? Густину Землі вважати сталою, опором повітря нехтувати. Якою буде швидкість тіла в момент, коли воно пролітатиме центр Землі?

Розв'язання. Оскільки за умовою задачі вважається, що густина Землі ρ є сталою, то

$$\rho = \frac{M_3}{V_3} = \frac{M_3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3M_3}{4\pi R^3},$$

де M_3, V_3, R — відповідно маса, об'єм і радіус Землі. Тоді гравітаційна сила, яка діє на тіло масою m, що міститься на відстані r від центра Землі,

$$F = \gamma\frac{mm_r}{r^2} = \gamma\frac{mM_3 r}{R^3},$$

де $m_r = \frac{4}{3}\pi r^3\rho = M_3\frac{r^3}{R^3}$. Окільки прискорення вільного падіння на поверхні Землі $g = \gamma\frac{M_3}{R^2}$, то

$$F = m\frac{g}{R}r.$$

Оскільки сила F змінюється за законом (10.11), то під її дією тіло здійснюватиме гармонічні коливання. Рівняння динаміки коливального руху матиме вигляд

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{g}{R}r. \qquad (1)$$

Знак "мінус" вказує на те, що прискорення тіла масою m, зумовлене дією сили F, напрямлене до центра Землі, тобто має протилежний знак до знака зміщення r.

Проводячи аналогію між рівняннями (1) і (10.13), можна записати, що

$$\omega = \sqrt{g/R} \text{ або } T = 2\pi\sqrt{R/g} = 84 \text{ хв}.$$

Цей час потрібний для того, щоб тіло масою m потрапило в тунель з одного боку Землі, пройшло його і повернулось у початковий стан. Час для досягнення протилежної точки Землі буде вдвоє меншим і дорівнюватиме 42 хв.

Швидкість руху тіла максимальна при проходженні ним положення рівноваги. На основі (10.5) можна записати, що

$$v_{max} = A\omega = R\omega = \sqrt{Rg} = 7{,}9\cdot10^3 \text{ м/с}.$$

T і v_{max} у цьому разі мають такі самі значення, як і для штучного супутника Землі, який рухається з першою космічною швидкістю.

§ 10.6. Додавання коливань однакового напряму. Биття

Можливі випадки, коли тіло бере участь одночасно у кількох коливальних рухах. Так, кулька, підвішена на пружині у каюті корабля, здійснюватиме коливання у вертикальному напрямі. Кільове хитання

корабля також змушує тіло коливатися у вертикальному напрямі. Результуюче зміщення тіла, що бере участь у кількох коливальних рухах, становить геометричну суму незалежних зміщень, які тіло дістає у кожному коливальному русі зокрема. Знайдемо рівняння руху тіла, яке бере участь одночасно у двох однаково напрямлених коливальних рухах з однаковими частотами:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1),$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2). \qquad (10.35)$$

Якщо тіло одночасно бере участь у двох коливальних рухах, що відбуваються вздовж однієї і тієї самої прямої, то його результуючий рух відбуватиметься також вздовж тієї самої прямої. При цьому будемо користуватися методом векторних діаграм (рис. 10.12).

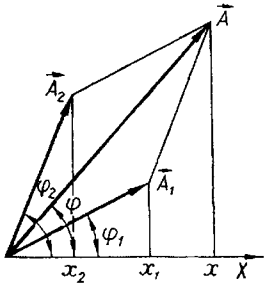


Рис. 10.12

Результуюче зміщення тіла у будь-який момент часу дорівнює сумі незалежних зміщень, тобто $x = x_1 + x_2$. Оскільки вектори $\vec{A}_1$ і $\vec{A}_2$ здійснюють обертання з однаковими кутовими швидкостями ω, то зсув фаз між ними $\varphi_2 - \varphi_1$ з часом не змінюється, і вектор $\vec{A}$ також обертатиметься з кутовою швидкістю ω. Тоді результуюче коливання буде також гармонічним, і його рівняння матиме вигляд

$$x = A \cos(\omega t + \varphi), \qquad (10.36)$$

де A — амплітуда результуючого коливання; φ — початкова фаза.

З рис. 10.12 маємо

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1), \qquad (10.37)$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}. \qquad (10.38)$$

З (10.37) видно, що амплітуда результуючого коливання залежить від різниці фаз складових коливань. Якщо $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$), то $A = A_1 + A_2$. Коли $\varphi_2 - \varphi_1 = (2n + 1)\pi$, тобто складові коливання відбуваються у протилежних фазах, то амплітуда результуючого коливання $A = |A_2 - A_1|$, бо за означенням амплітуда — величина додатна. Оскільки енергія коливального руху пропорційна квадрату амплітуди, то повна енергія результуючого коливання

$$E = E_1 + E_2 + 2\sqrt{E_1E_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1), \qquad (10.39)$$

де E_1 і E_2 — енергії складових коливань. З (10.39) видно, що повна енергія результуючого коливання також залежить від різниці початкових фаз складових коливань.

Розглянемо випадок додавання однаково напрямлених коливань з різними частотами, рівняння яких

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \quad x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2). \qquad (10.40)$$

Якщо вектори складових амплітуд $\vec{A}_1$ і $\vec{A}_2$ обертатимуться з різними кутовими швидкостями (рис. 10.12), то кут між ними змінюватиметься з часом і результуюча амплітуда також змінюватиметься з часом, тобто коливання буде негармонічним. Результуюче зміщення $x = x_1 + x_2$. Для спрощення припустимо, що $A_1 = A_2 = A_0$, $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_0$. Тоді

$$x = 2A_0 \cos\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t + \varphi_0\right). \qquad (10.41)$$

Вираз (10.41) описує періодичні коливання з середньою частотою $(\omega_1 + \omega_2)/2$ і модульованою амплітудою зміщення $2A_0$. (Модуляція — це зміна за заданим законом з часом параметрів, що характеризують будь-який стаціонарний процес. Прикладом може бути зміна за певним законом амплітуди, частоти або фази гармонічних коливань.) Амплітуда змінюється від 0 до $2A_0$ за законом косинуса з набагато меншою частотою $(\omega_2 - \omega_1)/2$, яка дорівнює половині різниці частот складових коливань.

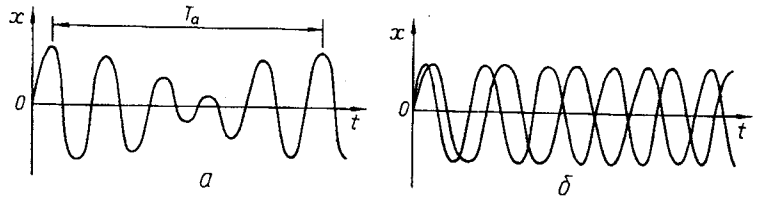


Рис. 10.13

Звідси видно, що амплітуда результуючого коливання періодично змінюється за абсолютною величиною з часом, тобто

$$A = \left|2A_0 \cos\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right|. \qquad (10.42)$$

У зв'язку з тим що період модуля косинуса дорівнює π, період зміни амплітуди

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}. \qquad (10.43)$$

У випадку, коли частоти коливань ω_1 і ω_2 близькі за величинами, виникає явище, яке називають *биттям*. У цьому разі $\omega_1 - \omega_2 \ll \omega_1 + \omega_2$, і результуючий рух можна розглянути як періодичне коливання з пульсуючою амплітудою. Частота таких коливань дорівнює середньому арифметичному значенню частот складових коливань. На рис. 10.13, *а* показано залежність зміщення x з часом протягом періоду та зміни амплітуди результуючого коливання, що його дістали додаванням однаково напрямлених коливань. Амплітуди складових коливань однакові, а їхні частоти ω_1 і ω_2 близькі за величиною (рис. 10.13. *б*).

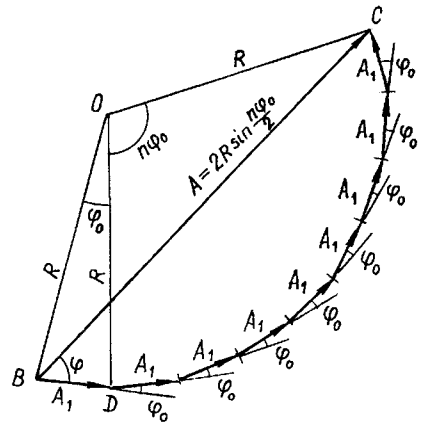


Рис. 10.14

Приклад 10.3. Знайти результуючу амплітуду коливань при додаванні n гармонічних коливань однакового напряму, амплітуди A_1 і частоти ω яких рівні, а початкові фази коливань лінійно змінюються.

Розв'язання. Для визначення результуючої амплітуди A будемо користуватися методом векторних діаграм (рис. 10.14). Результуюче коливання також буде гармонічним, і його рівняння матиме вигляд

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) = A_1\cos\omega t + A_1\cos(\omega t + \varphi_0) +$$

$$+ A_1\cos(\omega t + 2\varphi_0) + \ldots + A_1\cos(\omega t + (n-1)\varphi_0),$$

де A — амплітуда результуючого коливання, а φ — зсув фаз між результуючим коливанням і коливанням першої складової $A_1\cos\omega t$. З рис. 10.14 маємо $A_1 = 2R\sin(\varphi_0/2)$, де R — радіус кола, описаного навколо правильного багатокутника. Результуючу амплітуду коливань A знаходимо з рівнобедреного трикутника OBC:

$$A = 2R\sin\frac{n\varphi_0}{2} = A_1\frac{\sin(n\varphi_0/2)}{\sin(\varphi_0/2)}.$$

З рис. 10.14 знаходимо початкову фазу φ результуючого коливання:

$$\varphi = \angle OBD - \angle OBC;\ \angle OBC = 90^\circ - \frac{n\varphi_0}{2},\ \text{а}\ \angle OBD = 90^\circ - \frac{\varphi_0}{2}.$$

Тоді

$$\varphi = \left(90 - \frac{\varphi_0}{2}\right) - \left(90 - \frac{n\varphi_0}{2}\right) = \left(n-1\right)\frac{\varphi_0}{2},$$

тобто початкова фаза φ дорівнює половині різниці фаз між першою і останньою складовими коливань.

Результуюче коливання тепер матиме вигляд

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) = A_1\frac{\sin(n\varphi_0/2)}{\sin(\varphi_0/2)}\cos\left(\omega t + (n-1)\frac{\varphi_0}{2}\right),$$

а амплітуда його відповідно

$$A = A_1\frac{\sin(n\varphi_1/2)}{\sin(\varphi_0/2)}.$$

До такого результату ми дійдемо аналітичним шляхом при визначенні амплітуди результуючого коливання, зумовленого інтерференцією світлових пучків.

10.7. Додавання взаємно перпендикулярних коливань

Тіло може також брати участь у коливальних рухах, напрями коливань яких не збігаються. Треба встановити характер траєкторії результуючого руху тіла.

Розглянемо випадок, коли тіло одночасно бере участь у двох взаємно перпендикулярних гармонічних коливальних рухах, частоти яких однакові. Відносно координатних осей OX і OY, які розміщені у напрямах коливальних рухів, рівняння коливань матимуть вигляд

$$x = A_1\cos(\omega t + \varphi_1), \quad y = A_2\cos(\omega t + \varphi_2). \qquad (10.44)$$

Знайдемо рівняння траєкторії результуючого руху. Для цього рівняння (10.44) перепишемо так:

$$\frac{x}{A_1} = \cos\omega t\cos\varphi_1 - \sin\omega t\sin\varphi_1,$$

$$\frac{y}{A_2} = \cos\omega t\cos\varphi_2 - \sin\omega t\sin\varphi_2.$$

Помножимо перше рівняння на $\cos\varphi_2$, а друге — на $\cos\varphi_1$ і знайдемо їхню різницю; потім помножимо перше рівняння на $\sin\varphi_2$, а друге на $\sin\varphi_1$ і також знайдемо різницю. Дістанемо

$$\frac{x}{A_1}\cos\varphi_2 - \frac{y}{A_2}\cos\varphi_1 = \sin\omega t\sin(\varphi_2 - \varphi_1), \qquad (10.45)$$

$$\frac{x}{A_1}\sin\varphi_2 - \frac{y}{A_2}\sin\varphi_1 = \cos\omega t\sin(\varphi_2 - \varphi_1). \qquad (10.46)$$

Рівняння (10.45) і (10.46) піднесемо до квадрата і почленно додамо їх. В результаті матимемо

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2\frac{xy}{A_1 A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1). \qquad (10.47)$$

Співвідношення (10.47) є рівнянням траєкторії результуючого руху тіла, що одночасно бере участь у двох коливаннях, напрями яких взаємно перпендикулярні.

У загальному випадку рівняння (10.47) є рівнянням еліпса. Орієнтація еліпса відносно осей координат і його форма визначаються амплітудами A_1 і A_2 та різницею фаз $\varphi_2 - \varphi_1$ складових коливань.

Розглянемо такі окремі випадки.

1. Різниця фаз $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$). У цьому разі рівняння (10.47) набуває такого вигляду:

$$\left(\frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2}\right)^2 = 0.$$

Звідси маємо

$$y = \frac{A_2}{A_1}x. \qquad (10.48)$$

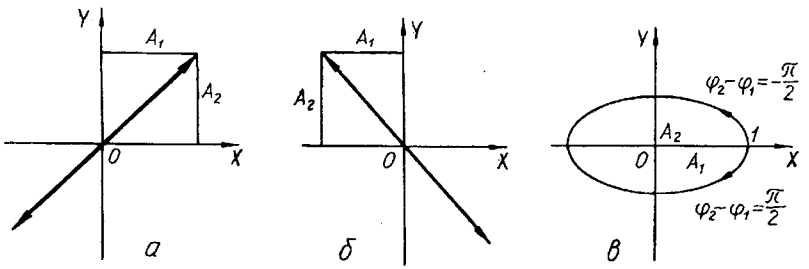


Рис. 10.15

Отже, якщо фази складових коливань однакові, то траєкторією результуючого руху є пряма лінія, що проходить через початок координат і нахилена до осі OX під кутом $\operatorname{arctg} A_2/A_1$ (рис. 10.15, *а*). Зміщення точки у будь-який момент часу від положення рівноваги знаходимо за співвідношенням

$$s = \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad (10.49)$$

Підставивши у (10.49) вирази (10.44) і врахувавши, що $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$, знайдемо

$$s = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}\cos(\omega t + \varphi). \qquad (10.50)$$

Звідси видно, що рух тіла — це гармонічне коливання з частотою ω у напрямі прямої (10.48).

2. Різниця фаз $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2n + 1)\pi$. Тоді з рівняння (10.47) дістаємо, що траєкторією руху тіла також буде пряма лінія, рівняння якої

$$y = -\frac{A_2}{A_1}x. \qquad (10.51)$$

Вона утворює з віссю OX кут $\operatorname{arctg}(-A_2/A_1)$. Результуючий рух у цьому разі також буде гармонічним коливальним рухом (рис. 10.15, *б*).

3. Різниця фаз $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2n + 1)\frac{\pi}{2}$. Тоді рівняння (10.47) набуває вигляду

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1. \qquad (10.52)$$

Отже, траєкторія результуючого руху має вигляд еліпса, півосі якого A_1 і A_2 орієнтовані вздовж координатних осей OX і OY (рис. 10.15, *в*).

У зв'язку з тим що координати x і y тіла змінюються з періодом $T = 2\pi/\omega$, то воно здійснюватиме рух по еліптичній траєкторії також з періодом T або циклічною частотою ω. Покажемо, що коли $\varphi_2 - \varphi_1 = +\pi/2$, то рух тіла відбувається по еліпсу в напрямі руху стрілки годинника.

Справді, якщо $\varphi_1 = 0$, то рівняння (10.44) матимуть вигляд

$$x = A_1\cos\omega t; \quad y = A_2\cos(\omega t + \pi/2).$$

У момент часу $t = 0$ координати точки будуть $x = A_1$, $y = 0$ (точка *1* на рис. 10.15, *в*). У наступні моменти часу координата x зменшується, а координата y набуває від'ємного значення, тобто рухома точка переміщається від положення *1* вниз у напрямі руху стрілки годинника. Якщо $\varphi_2 - \varphi_1 = -\pi/2$, то тіло рухатиметься також по еліптичній траєкторії, але у протилежному напрямі, тобто проти руху стрілки годинника. Якщо амплітуди складових коливань однакові: $A_1 = A_2$, то еліпс перетворюється в коло.

При додаванні двох взаємно перпендикулярних коливань, частоти яких різні, результуючі рухи відбуватимуться по траєкторіях складних форм, які називають *фігурами Ліссажу*. На рис. 10.16 зображено фігури для випадку, коли частоти складових коливань відносяться як 1 : 2, 1 : 3, 2 : 3 відповідно для різниці фаз коливань: $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$; $\pi/4$; $\pi/2$; $3/4\pi$; π. Фігури Ліссажу — це криві лінії, вписані у прямокутник із сторонами, що дорівнюють подвійним значенням амплітуд складових коливань.

Зауважимо, що відношення числа точок дотикання фігур Ліссажу до відповідних сторін прямокутника збігається з відношенням частот складових коливань. Спостереження фігур Ліссажу лежить в основі досить зручного методу дослідження співвідношень між періодами і фазами коливань, а також форми коливань.

Знайдемо енергію результуючого руху тіла при додаванні взаємно перпендикулярних коливань однакових частот.

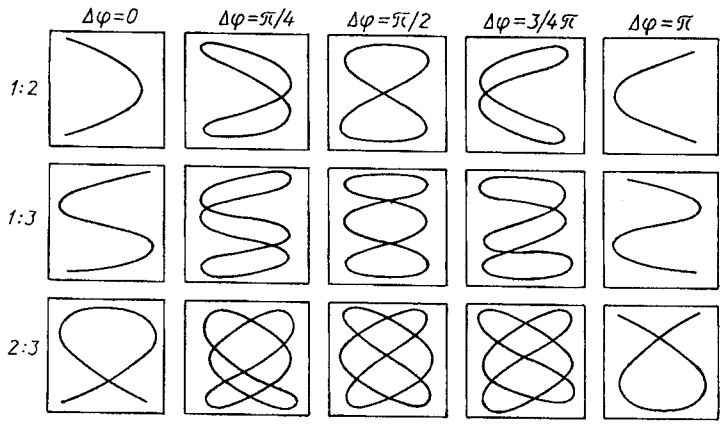


Рис. 10.16

З формули (10.49) маємо, що квадрат результуючого зміщення матеріальної точки і квадрат її швидкості у будь-який момент часу відповідно дорівнюють:

$$s^2 = x^2 + y^2, \quad v^2 = v_x^2 + v_y^2. \tag{10.53}$$

Оскільки складові коливання мають однакові частоти, то коефіцієнт вертальної сили на основі (10.14) $k = k_x = k_y$. Повна енергія результуючого руху тіла складається з кінетичної і потенціальної енергій:

$$E = W + U. \tag{10.54}$$

На основі рівностей (10.16), (10.17) з урахуванням виразів (10.53) вираз (10.54) перепишемо так:

$$E = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} ks^2 = \left(\frac{1}{2} mv_x^2 + \frac{1}{2} k_x x^2\right) + \left(\frac{1}{2} mv_y^2 + \frac{1}{2} k_y y^2\right) = E_x + E_y, \tag{10.55}$$

де E_x і E_y — енергії складових коливань.

З (10.55) видно, що енергія результуючого коливання при додаванні взаємно перпендикудярних коливань, на відміну від енергії результуючого коливання при додаванні коливань однакового напряму (10.39), не залежить від різниці фаз між ними і дорівнює сумі енергій складових коливань.

Зауважимо, що оскільки обертальний рух рівнозначний результату додавання двох взаємно перпендикулярних коливань, то цим користуються, наприклад, у спрощеній моделі атома, в якій коловий рух електрона навколо ядра трактується як коливання електрона.

В інших випадках гармонічне коливання $x = 2A \cos \omega t$ можна розглядати як результат двох обертань по колу, що описуються рівняннями

$$x = A \cos \omega t; \quad y = A \sin \omega t$$

та

$$x = A \cos \omega t; \quad y = A \sin (\omega t + \pi)$$

і відбуваються у взаємно протилежних напрямах. Таке уявлення виявляється плідним, зокрема, у кристалооптиці.

§ 10.8. Згасаючі коливання

У реальних фізичних системах, які здійснюють коливальний рух, завжди діють сили внутрішнього і зовнішнього тертя та опору середовища. Тому реальні коливальні рухи відбуваються з поступовими втратами енергії коливань на роботу проти сил опору і створення коливань у навколишньому середовищі. Зменшення механічної енергії проявляється в тому, що з часом зменшується амплітуда коливань, оскільки $E \sim A^2$. Через деякий час початковий запас енергії повністю витрачається, і амплітуда коливань зменшується до нуля, тобто коливання системи припиняються. Коливання, які відбуваються з поступовою втратою початкової енергії коливальної системи, називаються *згасаючими.*

Більшість механічних коливань відбуваються при невеликій швидкості коливального руху. В цьому разі сила опору $F_{оп}$ пропорційна швидкості:

$$F_{оп} = -bv = -b \frac{dx}{dt}, \tag{10.56}$$

де b — коефіцієнт опору; знак "мінус" вказує на те, що вектори $\vec{F}_{оп}$ і $\vec{v}$ мають протилежні напрями.

Якщо на коливальну систему діють пружна (або квазіпружна) вертальна сила (10.10), пропорційна зміщенню, і сила опору (10.56), то за другим законом Ньютона

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt}.$$

Поділивши це рівняння на масу m системи, отримаємо диференціальне рівняння згасаючих коливань

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \qquad (10.57)$$

де $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ — власна частота вільних коливань системи; $\beta = b/2m$ — кофіцієнт згасання коливань.

Розв'язок однорідного диференціального рівняння (10.57) при $\beta < \omega_0$ можна записати у вигляді

$$x = A(t)\cos(\omega t + \varphi_0), \qquad (10.58)$$

де $A(t)$ — амплітуда згасаючих коливань як функція часу; ω — циклічна частота коливань.

Встановимо закономірність зменшення амплітуди $A(t)$ згасаючих коливань і визначимо частоту коливань ω.

Вважатимемо, що втрати енергії системи у процесі коливань в основному зумовлені роботою проти сил опору. За час dt система зміщується на dx і втрачає енергію

$$dE = F_{оп}dx = -bv\cdot v dt = -bv^2 dt. \qquad (10.59)$$

Звідси випливає, що швидкість зменшення енергії пропорційна кінетичній енергії системи:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2b}{m}\frac{mv^2}{2}. \qquad (10.60)$$

Припустимо, що при невеликому згасанні коливань ($\beta < \omega_0$) кінетична енергія дорівнює половині всієї механічної енергії E. Тоді (10.50) набуває вигляду

$$\frac{dE}{dt} = -2\beta E. \qquad (10.61)$$

Це припущення, як видно із (10.61), означає, що енергія згасаючих коливань зменшується тим повільніше, чим меншою стає сама енергія. Розділивши змінні:

$$\frac{dE}{E} = -2\beta dt,$$

проінтегруємо це рівняння і дістанемо

$$\ln E = -2\beta t + C. \qquad (10.62)$$

Сталу інтегрування C визначимо із початкових умов. Якщо в початковий момент часу ($t = 0$) механічна енергія системи дорівнювала E_0, то з (10.62) випливає $C = \ln E_0$. Перейшовши в рівнянні (10.62) від логарифмів до показникової функції, знаходимо

$$E = E_0 e^{-2\beta t}. \qquad (10.63)$$

Оскільки механічна енергія коливального руху пропорційна квадрату амплітуди, то з (10.63) випливає залежність амплітуди згасаючих коливань від часу:

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}, \qquad (10.64)$$

де A_0 — амплітуда коливань у початковий момент часу ($t = 0$). Отже, амплітуда згасаючих коливань зменшується з часом за експоненціальним законом. У загальному випадку закон зменшення амплітуди коливань залежить від характеру сил опору, які діють у системі.

Враховуючи у виразі (10.58) залежність $A(t)$, отримаємо рівняння згасаючих коливань

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0), \qquad (10.65)$$

де частота коливань ω ще підлягає визначенню, а початкові значення амплітуди A_0 і фази φ_0 визначаються для конкретного коливання із початкових умов, як і в разі вільних коливань при відсутності сили опору.

Частоту ω визначимо з умови, що вираз (10.65) є розв'язком диференціального рівняння (10.57). Тобто підстановка у диференціальне рівняння виразів для x, $\frac{dx}{dt}$ і $\frac{d^2x}{dt^2}$ перетворює ліву частину рівняння в тотожно рівну нулю. Із утвореної таким чином тотожності випливає формула частоти згасаючих коливань

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \qquad (10.66)$$

Період згасаючих коливань

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \qquad (10.67)$$

Отже, частота згасаючих коливань (10.66) завжди менша від частоти ω_0 власних коливань системи, тобто наявність сил опору в системі ($\beta > 0$) зменшує частоту (збільшує період) коливань. При великому згасанні ($\beta = \omega_0$), система, виведена зі стану рівноваги, не здійснює

коливань ($\omega = 0$), а поступово наближається до положення рівноваги. Такий рух називається *аперіодичним* ($T \to \infty$).

На рис. 10.17 зображено графік згасаючих коливань. Штрихові лінії зображають закон зменшення амплітуди з часом. Згасаючі коливання не є гармонічними, оскільки амплітуда коливань змінюється. У цьому разі під амплітудою розуміють найбільше значення, якого досягає відповідна величина (зміщення, швидкість, прискорення) протягом одного періоду коливань. У строгому розумінні згасаючі коливання не можна також вважати періодичними. За означенням періодичним є такий процес, при якому за кожен період повторюється будь-який стан коливальної системи. Проте в процесі згасаючих коливань стан коливальної системи взагалі точно не повторюється. Наприклад, якщо у два послідовних моменти часу t_1 і t_2 зміщення системи однакові і дорівнюють нулю, то швидкості в ці моменти неоднакові ($v_2 < v_1$), оскільки амплітуда швидкості зменшується з часом. При малих силах опору згасаючі коливання являють собою процес приблизно періодичний.

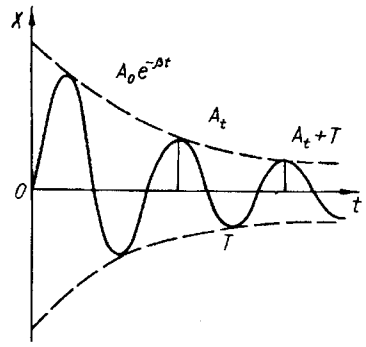


Рис. 10.17

Відношення амплітуд коливань на початку і в кінці періоду

$$\frac{A_t}{A_{t+T}} = \frac{A_0\, e^{-\beta t}}{A_0\, e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T} \qquad (10.68)$$

є величина стала для всього процесу коливань і називається *декрементом згасання коливань*. Натуральний логарифм цього відношення називають *логарифмічним декрементом згасання:*

$$\delta = \beta T. \qquad (10.69)$$

Згасаючі коливання часто характеризують часом релаксації τ. Це проміжок часу, протягом якого амплітуда коливань зменшується в e разів:

$$\frac{A_t}{A_{t+\tau}} = e^{\beta\tau} = e.$$

Звідси маємо

$$\beta\tau = 1 \text{ і } \tau = T/\delta.$$

Важливою характеристикою реальних коливальних систем є добротність. *Добротністю* Q коливальної системи називається відношення енергії коливань системи в даний момент часу до втрат енергії за один період, помножене на 2π:

$$Q = 2\pi \frac{E_t}{E_t - E_{t+T}} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\beta T}}. \qquad (10.70)$$

Розклавши функцію $e^{-2\beta T}$ у ряд Тейлора, при $\beta T \ll 1$ отримаємо

$$Q = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\pi}{\delta} = \frac{\omega}{2\beta} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}{2\beta}. \qquad (10.71)$$

Великим значенням Q відповідає слабке згасання коливань.

Вважають, що коливання практично припинились, якщо їхня амплітуда зменшилась у 10 разів. Виходячи з цього число n помітних коливань можна пов'язати з добротністю системи:

$$\frac{A_t}{A_{t+nT}} = e^{n\beta T} = e^{\frac{\pi n}{Q}} = 10, \text{ звідки } n = \frac{Q}{\pi \lg e} = 0{,}74Q.$$

Наприклад, визначимо час t звучання камертона, добротність якого $Q = 3000$, власна частота $\nu_0 = 640$ Гц: $t = n/\nu_0 = 0{,}74Q/\nu_0 \approx 3{,}4$ с. Насправді камертон звучатиме значно триваліший час, оскільки вухо здатне сприймати коливання, які відрізняються за амплітудою не в десятки, а в тисячі разів.

10.9. Вимушені коливання

Коливальна система, виведена з положення рівноваги і залишена сама на себе, здійснюватиме вільні згасаючі коливання, поступово втрачаючи початковий запас механічної енергії на роботу проти сил опору середовища. Швидкість згасання вільних коливань реальних систем залежить від параметрів системи та величини сил опору. Для підтримання незгасаючих коливань реальної системи необхідно періодично поповнювати втрати механічної енергії системи на роботу проти сил опору. Таке поповнення енергії можна здійснювати за рахунок роботи зовнішньої сили, що періодично діє на коливальну систему, яка змінюється з часом за гармонічним законом:

$$F = F_0 \cos \omega t, \qquad (10.72)$$

де F_0 — амплітуда зовнішньої сили; ω — її циклічна частота.

Незгасаючі коливання системи, які відбуваються внаслідок дії зовнішньої сили, що змінюється за законом (10.72), називають *вимушеними коливаннями,* а силу F — *змушуючою силою.* Вимушені коливання здійснюють висотні будинки, телевізійні башти, довгі мости під дією змінних аеродинамічних та інших сил, корпуси і фундаменти машин при обертанні незрівноважених роторів, двигуни автомобілів внаслідок зворотно-поступального руху поршнів, мембрани гучномовців під дією змінних електромагнітних полів та ін.

Під дією змушуючої сили виконується робота. Якщо напрям руху коливальної системи збігається з напрямом дії змушуючої сили, то виконуватиметься додатна робота. І навпаки, робота буде від'ємною, якщо напрями дії сили і руху системи протилежні. У першому випадку амплітуда коливань збільшуватиметься, у другому — зменшуватиметься, тобто коливання гальмуватимуться. Якщо змушуюча сила діє протягом тривалого часу, то встановлюються коливання з сталою амплітудою і частотою змушуючої сили, тобто система здійснює гармонічні коливання.

Якщо в коливальній системі діє пружна або квазіпружна сила, а сила опору пропорційна швидкості коливального руху, то основне рівняння динаміки вимушених коливань має вигляд диференціального рівняння:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt} + F_0\cos\omega t. \qquad (10.73)$$

Поділимо це рівняння на масу m коливальної системи і введемо такі позначення:

$$k/m = \omega_0^2, \quad b/m = 2\beta, \quad F_0/m = f_0.$$

Тоді рівняння (10.73) набуває вигляду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0\cos\omega t, \qquad (10.74)$$

де ω_0 — циклічна частота власних коливань системи; β — коефіцієнт згасання коливань; f_0 — амплітуда змушуючої сили, віднесена до одиниці маси.

Рівняння (10.74) є неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку. У теорії диференціальних рівнянь доведено, що загальний розв'язок такого рівняння складається із суми розв'язку відповідного однорідного рівняння (10.57) і частинного розв'язку неоднорідного рівняння (10.74).

Розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння маємо у попередньому параграфі. Він характеризує згасаючі коливання, які через деякий проміжок часу практично зникають. Тому знайдемо частинний розв'язок рівняння (10.74). При цьому вважатимемо,

що під дією сили (10.72) коливання встановилися, і система здійснює гармонічні вимушені коливання з частотою, яка дорівнює частоті змушуючої сили. Тоді розв'язок шукатимемо у вигляді

$$x = A\cos(\omega t + \varphi), \qquad (10.75)$$

де A — амплітуда усталених коливань; φ — зсув фаз між зміщенням і змушуючою силою. Величини A і φ необхідно визначити. Для цього знайдемо з (10.75)

$$\frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi), \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi).$$

Підставимо x, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$ у рівняння (10.74):

$$-A\omega^2\cos(\omega t + \varphi) - 2\beta A\omega\sin(\omega t + \varphi) +$$

$$+ A\omega_0^2\cos(\omega t + \varphi) = f_0\cos\omega t. \qquad (10.76)$$

Розкладемо синус і косинус суми за відомими тригонометричними формулами і запишемо рівняння (10.76) так:

$$A((\omega_0^2 - \omega^2)\cos\varphi - 2\beta\omega\sin\varphi)\cos\omega t -$$

$$- A((\omega_0^2 - \omega^2)\sin\varphi + 2\beta\omega\cos\varphi)\sin\omega t = f_0\cos\omega t. \qquad (10.77)$$

Рівняння (10.77) задовольнятиме усі значення t при умові, що коефіцієнти біля виразів $\sin\omega t$ і $\cos\omega t$ у лівій і правій частинах рівняння однакові. Звідси дістаємо

$$A(\omega_0^2 - \omega^2)\cos\varphi - 2\beta\omega A\sin\varphi = f_0,$$

$$A(\omega_0^2 - \omega^2)\sin\varphi + 2\beta A\omega\cos\varphi = 0. \qquad (10.78)$$

Щоб визначити A, піднесемо до квадрата рівняння (10.78) і додамо їх. Тоді матимемо

$$A^2((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2) = f_0^2,$$

звідки знаходимо амплітуду вимушених коливань

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}, \qquad (10.79)$$

а з другого рівняння системи (10.78) — вираз для визначення зсуву фаз φ між коливаннями зміщення системи від положення рівноваги і змушуючою силою:

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \qquad (10.80)$$

Отже, рівняння вимушених коливань зміщення має вигляд

$$x = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cos(\omega t + \varphi), \qquad (10.81)$$

де зсув фаз φ дається виразом (10.80). Із рівності (10.81) випливає, що вимушені коливання є гармонічними коливаннями з частотою ω змушуючої сили. Амплітуда коливань даної системи ($\omega_0 = \text{const}$) при незмінних силах тертя і опору середовища ($\beta = \text{const}$) пропорційна амплітуді F_0 змушуючої сили і залежить від її частоти ω. Вимушені коливання відстають за фазою від змушуючої сили на величину φ, яка також є функцією ω (рівність (10.80)).

При заданих значеннях амплітуди змушуючої сили f_0, яка припадає на одиницю маси коливальної системи, і коефіцієнта згасання β амплітуда (10.73) вимушених коливань є функцією тільки частоти ω змушуючої сили. Функція $A(\omega)$ проходить через максимум при деякій характерній для даної системи частоті $\omega = \omega_{рез}$. Явище різкого зростання амплітуди вимушених коливань при частотах ω змушуючої сили, близьких до $\omega_{рез}$, називається *резонансом.* Частота змушуючої сили $\omega_{рез}$, при якій амплітуда коливань досягає найбільшого значення $A_{рез}$, називається *резонансною частотою.*

Очевидно, що максимальне значення амплітуди досягається при мінімальному значенні підкореневого виразу у формулі (10.79). Умовою мінімуму є рівність нулю похідної від підкореневого виразу за частотою, тобто

$$-4(\omega_0^2 - \omega_{рез}^2)\,\omega_{рез} + 8\beta^2\omega_{рез} = 0.$$

Звідси знаходимо резонансну частоту

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \qquad (10.82)$$

Підставивши значення $\omega_{рез}$ у формулу (10.79), отримаємо резонансне значення амплітуди

$$A_{рез} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \qquad (10.83)$$

Резонансна частота (10.82) при згасанні коливань ($\beta > 0$) завжди менша від власної частоти ω_0 системи. При незначному згасанні ($\beta \approx 0$) $\omega_{рез} \approx \omega_0$, і резонансна амплітуда (10.83) перетворюється на

нескінченність, що означає практично руйнування коливальної системи. На рис. 10.18 показано залежність амплітуди вимушених коливань від частоти змушуючої сили для різних значень коефіцієнта згасання β. Криві залежності $A(\omega)$ називають *амплітудними резонансними кривими.* Із збільшенням β максимуми резонансних кривих знижуються і зміщуються у бік менших частот. При $\beta \geq \omega_0/\sqrt{2}$ явище резонансу зникає, тобто $\omega_{рез} = 0$, і система отримує статичне зміщення від положення рівноваги $A_0 = f_0/\omega_0^2$ під дією сталої сили F_0, що дорівнює амплітуді змушуючої сили.

Вираз для статичного зміщення A_0 разом з формулою (10.83) дає можливість вияснити фізичний зміст добротності коливальної системи. При малому згасанні $\beta \ll \omega_0$ згідно з формулою (10.83) $A_{рез} = f_0/(2\beta\omega_0)$, і, як випливає з рівності (10.71), добротність системи

$$Q \approx \frac{\omega_0}{2\beta} \approx \frac{A_{рез}}{A_0}.$$

Добротність при $\beta \ll \omega_0$ показує, у скільки разів амплітуда вимушених коливань у момент резонансу перевищує статичне зміщення A_0 системи під дією сталої сили, що дорівнює амплітуді змушуючої сили. Чим вища добротність системи, тим вищий та гостріший максимум амплітудної резонансної кривої і тим повільніше згасають її вільні коливання.

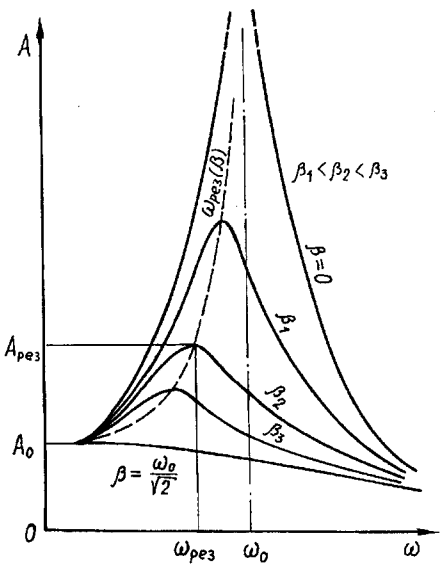


Рис. 10.18

Проаналізуємо залежність зсуву фаз від частоти ω. Якщо $\omega << \omega_0$, то з формули (10.80) випливає, що $\operatorname{tg}\varphi = 0$, тобто фаза вимушених коливань збігається з фазою змушуючої сили. Із збільшенням частоти ω, коли вона набуває значень, близьких до ω_0, $\varphi = -\pi/2$, тобто зміщення коливальної системи відстає від змушуючої сили за фазою на $\pi/2$. При подальшому збільшенні частоти ($\omega \gg \omega_0$) зсув фаз досягає майже $-\pi$, тобто зміна зміщень і змушуючої сили з часом відбувається майже у протилежних фазах.

Зсув фаз на $\pi/2$ при резонансі має істотне значення для вимушених коливань. Оскільки змушуюча сила випереджає зміщення на

$\pi/2$, то вона діє у тому самому напрямі, що й вертальна сила, тобто в напрямі руху. При цьому робота змушуючої сили завжди додатна. Внаслідок цього енергія системи збільшується. Графічну залежність зсуву фаз φ від частоти ω змушуючої сили показано на рис. 10.19. Криві, що виражають зміну фаз ω при зміні частоти ω змушуючої сили, називають *фазовими кривими резонансу.*

Вимушені коливання виникають також при періодичній короткочасній дії зовнішніх сил на коливальну систему. Така дія може мати характер удару, поштовхів. У цих випадках також може спостерігатися явище резонансу. Характерним є те, що резонанс відбуватиметься не тільки тоді, коли частота силової дії близька до частоти вільних коливань систем, а й тоді, коли дія зовнішніх сил повторюється з частотою, кратною частоті власних коливань системи.

Виявляється, що можливі коливання систем під дією сталої сили. Так, при великій швидкості польоту літака його крила можуть раптово набути коливального руху. Коливання із зростаючою амплітудою, що виникають у потоці повітря під дією аеродинамічних сил, називають коливаннями типу флатер. При таких коливаннях амплітуда зростає досить швидко і конструкція може зруйнуватися. Ці коливання настають при так званій критичній швидкості польоту. Тому при проектуванні літака необхідно забезпечити конструкції критичну швидкість значно більшу, ніж швидкість самого літака. Поряд з флатером крил літака можуть виникнути подібні коливання будь-якої несучої поверхні.

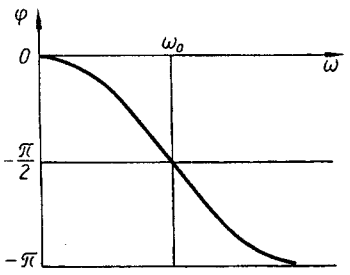


Рис. 10.19

Небажані коливання можуть виникати під дією повітряних потоків і вихорів у висотних будовах, маяках, телевізійних баштах, лініях електропередач, заводських димарях, вантових мостах тощо. Їхні коливання залишаються незначними, поки вітер не досягне критичної швидкості, при якій частота коливань від дії вихорів дорівнюватиме частоті власних коливань конструкції. При критичному значенні швидкості вітру споруди можуть зруйнуватися.

Так сталася катастрофа вантового моста через протоку Такома у США в 1940 р. Міст з трьох прольотів мав довжину 1662 м, один з прольотів — 854 м. У день катастрофи швидкість вітру становила 18 м/с. Частота коливань моста досягла 36 Гц, потім раптово зменшилася до 14 Гц, вертикальні коливання обох підвісних систем відбувалися в протилежних фазах. Це призвело до закручування проїзної частини моста навколо осі, яка проходить вздовж моста, що й зумовило його руйнування.

Незгасаючі коливання можуть збуджуватися не тільки внаслідок дії зовнішньої періодичної сил, але й при періодичній зміні параметрів коливальної системи. Такі коливання називають *параметричними.* При певній частоті зміни параметра амплітуда коливань зростає подібно до явищ резонансу. Тому параметричне збудження коливань часто називають параметричним резонансом. Прикладом збудження таких коливань може бути добре відомий усім спосіб розкачування гойдалки людиною при присіданні, коли гойдалка перебуває в крайніх положеннях, і випрямленні, коли гойдалка проходить через положення рівноваги.

Явище резонансу слід враховувати під час конструювання різних машин та споруд. Їхня власна частота повинна значно відрізнятися від частоти змушуючих сил.

Явище резонансу в деяких випадках відіграє і позитивну роль, особливо в акустиці, радіотехніці. Його також використовують у приладах для вимірювання частоти.

§ 10.10. Гармонічний аналіз складних коливань

Досі ми розглядали найпростіші гармонічні коливання, які описуються рівнянням $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$. Проте чисто гармонічних коливань у природі немає. У реальних системах коливання тільки приблизно можна розглядати як гармонічні. Спостерігаються коливання настільки складні за формою, що описати кожне з них одним гармонічним законом неможливо. Тому виникає таке запитання: "Якщо внаслідок додавання простих гармонічних коливань виникають складні різні за формою результуючі коливання, то чи не можна подати складне коливання як суму простих гармонічних?" Так, биття є сумою двох гармонічних коливань з близькими частотами.

Виявляється можливим розкладання складного коливання в ряд простих гармонічних коливань з частотами, кратними частоті складного коливання. Таке розкладання здійснюється на основі теореми Фур'є, яка дає можливість математично розрахувати для будь-якої функції $f(t)$ з періодом T, заданій на проміжку від t до $t + T$, ряд гармонічних функцій з певними амплітудами і фазами, частоти яких кратні основній частоті:

$$f(t) = a_0 + \sum_k (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t).$$

У кожному конкретному випадку періодичну функцію $f(t)$ можна розкласти в ряд Фур'є тільки одним способом. Розкладання складної періодичної функції на суму гармонічних коливань називають *гармонічним аналізом.*

На рис. 10.20 зображено графік складного негармонічного коливання, яке можна подати як суму трьох коливань (штрихові лінії) з частотами, що відносяться як 1 : 3 : 5. Частоти коливань, на які

розкладається складне коливання, називають *частотним спектром.* Частоту складного коливання називають *основною частотою* або *тоном,* а коливання з частотою, кратною основній частоті, — *гармоніками* основної частоти або *обертонами.* Так, якщо частота складного коливання (рис. 10.20) ω, то перша гармоніка має частоту $\omega_1 = \omega$, друга $- \omega_2 = 2\omega$, третя $- \omega_3 = 5\omega$. Результати гармонічного аналізу складного коливання часто зображують графічно у вигляді спектра.

Розкладати на прості гармонічні коливання можна не тільки складні періодичні коливання, але й неперіодичні. При цьому неперіодичні коливання подаються як сума нескінченної кількості гармонічних коливань з амплітудами, що безперервно змінюються в усьому інтервалі частот. На відміну від періодичних складних коливань неперіодичні подаються не сумою ряду Фур'є, а інтегралом Фур'є. Якщо спектр періодичного складного коливання складається з окремих ліній (лінійчастий спектр), то спектр неперіодичного руху — безперервний (суцільний).

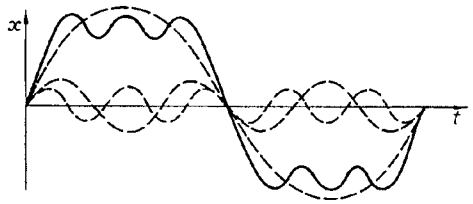


Рис. 10.20

Складні коливання можна розкладати на прості гармонічні коливання не тільки математично, але й експериментально. Так, за допомогою набору резонаторів визначають частоти гармонічних коливань, які входять до складного періодичного коливання. Резонатор — це коливальна система, що реагує на зовнішні гармонічні коливання, частота яких збігається з частотою власних коливань. Резонатором може бути плоска пружина, один кінець якої закріплений. Незначна періодична дія з частотою, що дорівнює власній частоті пружини, зумовлює її коливання із значною амплітудою. Набір таких плоских пружин з різними власними частотами коливань — основна частина приладу для вимірювання частоти, який називається язичковим частотоміром.

Крім механічних (вібраційних) існують гетеродинні, резонансні та електронно-лічильні частотоміри.

§ 10.11. Поняття про автоколивання

Власні коливання будь-якої системи внаслідок втрат енергії на виконання роботи проти сил тертя поступово згасають. Для підтримання коливань системи, якщо немає періодичної дії зовнішніх сил, у ній повинно бути джерело енергії, за рахунок якого компенсуються втрати енергії коливальною системою.

Системи, в яких виникають періодичні коливання без заданої зовнішньої періодичної дії, називають *автоколивальними,* а коливання, що виникають у них — *автоколиваннями.* Зазначимо, що на відміну від вимушених коливань автоколивання не нав'язуються системі, а виникають у ній.

Для автоколивальної системи характерний так званий зворотний зв'язок. Він проявляється в тому, що, з одного боку, коливання коливальної системи впливають на пристрій, який регулює передавання енергії від джерела до цієї системи, а з другого боку, цей пристрій впливає на коливання системи, оскільки він забезпечує підведення енергії до неї.

В автоколивальних системах незагасаючі коливання підтримуються за рахунок енергії, яка передається від джерела енергії до тіла, що здійснює коливання. Будь-яка автоколивальна система складається з таких трьох елементів: тіла або системи тіл, що здійснюють коливальний рух; стаціонарного джерела енергії; пристрою, який регулює передавання енергії від джерела до коливальної системи. Ці три елементи можна чітко виділити, наприклад, у годинниках, в яких маятник або баланс є коливальною системою, заведена пружина або піднята гиря — джерелом енергії і, нарешті, анкерний хід — механізмом, що регулює передавання енергії від джерела до коливальної системи. Коли енергія, що передається від джерела до коливального тіла за період коливань, дорівнює енергії, витраченій тілом за цей проміжок часу на подолання сил тертя, то в системі встановляться незагасаючі коливання з сталою амплітудою. Енергія, що подається до коливального тіла від джерела за період коливань, і енергія, що витрачається системою за цей проміжок часу, визначаються тільки будовою коливальної системи. Отже, період і амплітуда коливань повністю визначаються будовою автоколивальної системи. Цим відрізняються автоколивання від власних коливань, для яких амплітуда задається початковими умовами.

До автоколивань належать коливання крила літака в струмені зустрічного потоку повітря, коливання струни в смичковому інструменті, електричні коливання в ламповому генераторі тощо.

Якщо добротність коливальної системи велика, тобто втрати енергії в ній порівняно малі, то для підтримання автоколивань у коливальну систему за період повинна подаватись енергія, яка значно менша від повної енергії коливальної системи. Надходження енергії в систему за таких умов майже не змінює характеру процесів порівняно з тими, які відбуваються в коливальній системі без надання енергії. При цьому період і форма автоколивань будуть досить близькими до періоду і форми власних коливань коливальної системи. Якщо власні коливання в системі близькі за формою до гармонічних, то автоколивання також будуть близькими до гармонічних. Якщо коливальна система має малу добротність, то для підтримання автоколивань у систему за період по-

винна подаватися значна енергія порівняно з енергією системи. Це може істотно змінити характер коливальних процесів. Форма автоколивань може відрізнятися від гармонічних. Якщо за період автоколивань розсіюється вся нагромаджена в системі енергія (система аперіодична), то автоколивання особливо відрізнятимуться за формою від гармонічних. Такі автоколивання називають релаксаційними, а системи, що їх утворюють, — релаксаційними генераторами.

Розділ 11. Пружні хвилі

§ 11.1. Поширення хвиль

Коливання, що виникають у будь-якій точці середовища, не залишаються локалізованими в місцях збудження їх. Вони поширюються в середовищі із скінченною швидкістю. Їхнє поширення зумовлене взаємодією між частинками середовища. Якщо взаємозв'язок між частинками середовища здійснюється силами пружності, які виникають внаслідок деформації середовища при передаванні коливань від однієї частинки до іншої, то такі хвилі називають *пружними.* До них належать звукові, сейсмічні та інші хвилі.

Процес поширення коливань у просторі називають *хвилею* або хвильовим процесом. Напрям поширення хвилі називають *променем.* Залежно від напряму коливання частинок середовища відносно напряму поширення хвиль їх поділяють на *поперечні* і *поздовжні.* Поперечними називають хвилі, в яких частинки коливаються у перпендикулярному до променя хвилі напрямі. Хвилі, в яких частинки коливаються у напрямі поширення їх, називають поздовжніми.

На рис. 11.1 зображено схему поширення поперечної хвилі у пружному середовищі. Номерами *1, 2, 3* і т. д. позначено частинки, які знаходяться на відстанях чверть хвилі одна від одної.

Нехай у момент часу $t = 0$ всі точки середовища перебувають у положенні рівноваги, але точка *1* набуває прискорення вгору. За чверть періоду точка *1* досягне крайнього верхнього положення. При відхиленні частинки *1* від положення рівноваги зазнаватимуть відхилень від положення рівноваги і сусідні частинки. Внаслідок інертності вони приходять у рух не раптово, а з деяким запізненням. За чверть періоду точка *1* досягне крайнього верхнього положення, і у цей час почне зміщуватися від положення рівноваги частинка *2.* За другу чверть періоду точка *1* буде проходити положення рівноваги, рухаючись униз. Точка *2* досягне амплітудного положення вгорі, а точка *3* тільки почне зміщуватись вгору від положення рівноваги. За третю чверть періоду точка *1* досягне нижнього амплітудного положення. Точка *2* повернеться до положення рівноваги. Точка *3* досягне верхнього амплітудного положення, а точка *4* почне зміщуватися від положення рівноваги вгору. За наступну чверть періоду, тобто через період, точка *1* повернеться до положення рівноваги, тобто в те положення, яке було в момент часу $t = 0$. Точка *2* зміститься у нижнє амплітудне положення, точка *3* у цей час проходитиме положення рівноваги і рухатиметься вниз. Точка *4* досягне амплітудного положення вгорі, а точка *5* тільки почне рухатися вгору. Так і надалі передаватимуться коливання від точки до точки.

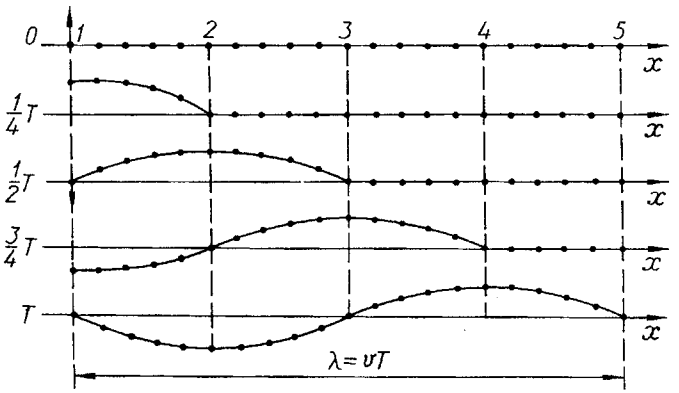


Рис. 11.1

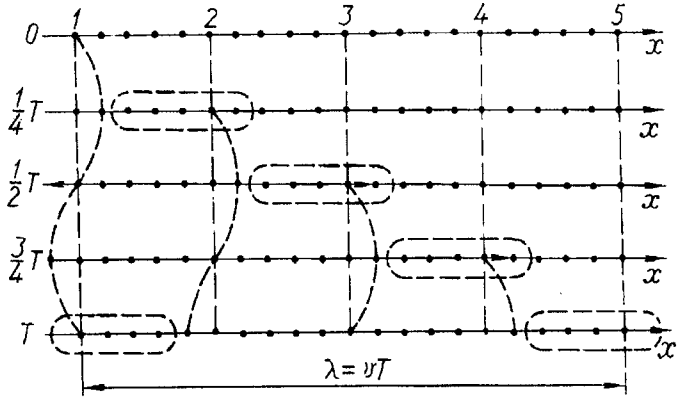


Рис. 11.2

На рис. 11.2 зображено схему поширення поздовжньої хвилі також для п'яти моментів часу через кожну чверть періоду. Всі міркування, що стосуються поведінки частинок у поперечній хвилі, можна поширити на рух частинок у поздовжній хвилі за умови, що зміщення вгору або вниз заміняються на зміщення вправо або вліво. Хвиля, яка при

цьому виникає, супроводжується утворенням згущень (вони обведені на рисунку штриховими лініями) і розріджень, що рухаються у напрямі поширення хвилі. При поширенні поздовжніх хвиль ділянки середовища зазнають періодичного стиску і розтягу, тобто поздовжні хвилі — це хвилі об'ємної деформації. Поширення поздовжніх хвиль супроводжується відповідними змінами тиску порівняно з його середнім значенням у деформованому середовищі.

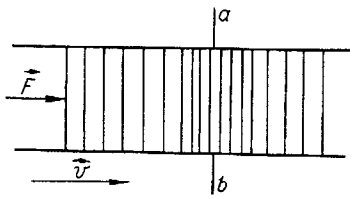


Рис. 11.3

Швидкість передавання коливального руху від частинки до частинки середовища зумовлює швидкість поширення хвиль. Її називають *фазовою швидкістю.*

Знайдемо швидкість поширення хвиль у суцільному пружному середовищі. Для цього уявно виділимо у суцільному середовищі елемент циліндричної форми (рис. 11.3) з площею основи S. Під дією зовнішньої сили $\vec{F}$ у середовищі відбувається стискання, що поширюється з швидкістю v. У місцях стиску густина середовища змінюється на величину $\Delta\rho$. За час Δt через переріз ab буде перенесена маса $\Delta m = Sv\rho\Delta t$ і відповідний імпульс

$$\Delta K = \Delta m v = Sv^2\Delta t\Delta\rho. \qquad (11.1)$$

Зміна імпульсу дорівнює імпульсу сили, тобто

$$\Delta K = F\Delta t = \Delta p S\Delta t. \qquad (11.2)$$

Прирівнюючи праві частини рівностей (11.1) і (11.2), дістаємо

$$v = \sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta\rho}}. \qquad (11.3)$$

Для однорідного пружного середовища справджуються такі співвідношення: $\Delta\rho = \varepsilon\rho$ і $\varepsilon = \alpha\Delta p$, де ρ — густина недеформованого середовища, Δp — зміна тиску при деформації стиску або розтягу, ε — відносна деформація, α — коефіцієнт пружності. Враховуючи ці співвідношення, формулу (11.3) можна переписати так:

$$v = \sqrt{\frac{1}{\alpha\rho}}. \qquad (11.4)$$

Оскільки на середовище, в якому виділено циліндричний об'єм, не було накладено ніяких обмежень, крім того, що воно повинно бути пружним і суцільним, то формула (11.4) справедлива для твердих тіл, рідин і газів.

Визначимо швидкість поширення поздовжніх хвиль у пружному твердому тілі, поздовжні розміри якого значно більші від поперечних (стержень, дріт). При деформації розтягу (стиску), як відомо, коефіцієнт пружності можна виразити через модуль Юнга: $\alpha = 1/E$. Тоді вираз (11.4) набуває вигляду

$$v = \sqrt{E/\rho}. \qquad (11.5)$$

Якщо ж елемент, в якому поширюється імпульс, не ізольований від середовища, а тільки уявно виділений у ньому, то зв'язок між α і E складніший. Річ у тому, що вимірювання модуля Юнга проводять в умовах, коли ніщо не перешкоджає виникненню поперечних деформацій, які є результатом деформацій поздовжніх. Якщо ж поздовжніх деформацій зазнає тільки обмежена ділянка практично необмеженого об'єму ізольованого середовища, то в оточуючому ділянку середовищі виникають напруги, що перешкоджають поперечним деформаціям (розширенню при поздовжньому стиску і стиску при поздовжньому розтязі). У цьому разі

$$\alpha = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{(1-\mu)E},$$

де μ — коефіцієнт Пуассона. Тоді

$$v = \sqrt{\frac{(1-\mu)E}{(1+\mu)(1-2\mu)\rho}}.$$

Оскільки коефіцієнт Пуассона за значенням близький до 0,25, то множник $\sqrt{\frac{(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}}$ близький до одиниці, тому наближено можна вважати, що швидкість поширення імпульсу в суцільному середовищі дорівнює швидкості його поширення у стержні, тобто швидкість поширення поздовжніх хвиль у пружному середовищі прямо пропорційна кореню квадратному з модуля Юнга і обернено пропорційна кореню квадратному з густини середовища.

Швидкість поширення поперечних хвиль визначається через модуль зсуву G за такою формулою:

$$v = \sqrt{G/\rho}. \qquad (11.6)$$

Відстань між двома найближчими частинками, фази коливань яких відрізняються на 2π, називають *довжиною хвилі.* З рис. 11.1 видно, що довжина хвилі λ дорівнює відстані між точками *1* і *5*. Це відстань, на яку поширюється хвиля за час, що дорівнює одному періоду.

Ми розглянули утворення хвиль тільки в одному напрямі. У суцільному середовищі коливання поширюватимуться однаково в усіх напрямах.

Ділянку середовища, де його частинки при поширенні хвиль здійснюють коливання, називають *хвильовим полем.* Геометричне місце точок, які коливаються в однакових фазах, називають *хвильовою поверхнею.* Геометричне місце точок, якого досягне коливання до моменту часу t, називають фронтом хвилі. Фронт хвилі — це поверхня, що відділяє частину простору, в якому відбувається хвильовий процес, від тієї, де коливання ще не виникли. У хвильовому полі можна провести хвильову поверхню через будь-яку точку. Залежно від форми фронту розрізняють хвилі *плоскі, сферичні, циліндричні* та ін. Хвилі з плоскою хвильовою поверхнею площини називають плоскими.

Характер коливання частинок при переміщенні хвилі, форма хвильового фронту залежать від характеру генерування їх і властивостей середовища. У поперечних хвилях відбувається зсув шарів середовища один відносно одного. Поперечні механічні хвилі можуть поширюватися у тих середовищах, де можлива деформація зсуву, тобто в твердих тілах. У рідинах і газах поперечні хвилі не поширюються.

Оскільки поздовжні хвилі є хвилями об'ємної деформації, то вони можуть поширюватись як у твердих тілах, так і в рідинах і газах.

Крім наведених поперечних і поздовжніх хвиль, які поширюються у суцільних середовищах, існують інші хвильові процеси. Так, на межі поділу двох середовищ можуть поширюватися так звані поверхневі хвилі. До них, наприклад, належать хвилі, що поширюються на поверхні води (на межі вода — повітря). Проте якщо розглянути ці хвилі докладніше, то виявиться, що вони не поперечні і не поздовжні. Рух частинок у поверхневих хвилях значно складніший.

§ 11.2. Рівняння хвилі

Розглянемо хвильовий процес з кількісного боку і дістанемо аналітичний вираз — рівняння хвилі. Хвильовий процес буде відомим, якщо в будь-які моменти часу відомі зміщення коливальних частин, розташованих на різних відстанях від джерела хвиль. Іншими словами, хвильовий процес буде відомим, якщо відома функціональна залежність зміщення коливальної частинки від координат її точки рівноваги x, y, z і часу t, тобто

$$\xi = \xi(x, y, z, t). \tag{11.7}$$

Функція (11.7) має бути періодичною як відносно часу t, так і відносно координат x, y, z. Періодичність відносно часу t випливає з того, що ξ описує коливання частинки з координатами x, y, z. Періодичність відносно координат випливає з того, що частинки, які перебувають на відстані λ одна від одної, коливаються однаково з тією

тільки відмінністю, що зсув фаз між коливаннями їх дорівнює 2π. Знайдемо вигляд функції (11.7). Для спрощення розглядатимемо плоску хвилю, яка поширюється у напрямі осі OX. За такої умови хвильові поверхні будуть перпендикулярними до осі OX, а зміщення коливальних точок цих поверхонь залежатимуть тільки від x і t, тобто $\xi = \xi(x, t)$. Нехай зміщення частинок, що лежать у площині $x = 0$, визначаються рівнянням

$$\xi = A \sin \omega t. \tag{11.8}$$

Щоб визначити зміщення частинок у площині, яка розташована на відстані x від початкової, треба врахувати, що точки цієї площини почнуть коливатися пізніше на час τ, за який хвиля поширюється від площини $x=0$ до заданої. Отже, зміщення точок у такій площині визначатиметься рівнянням

$$\xi = A \sin \omega(t - \tau). \tag{11.9}$$

Оскільки $\tau = x/v$ (v — швидкість поширення хвиль), то рівняння (11.9) перепишемо так:

$$\xi = A \sin \omega\left(t - \frac{x}{v}\right) = A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{vT}\right). \tag{11.10}$$

Вираз (11.10) належить до рівнянь так званої монохроматичної біжучої хвилі. Це рівняння можна подати у такому вигляді:

$$\xi = A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right), \tag{11.11}$$

де $\lambda = vT$ — довжина хвилі. Величину $2\pi/\lambda = \omega/v$ позначають через k і називають *хвильовим числом.* Воно виражає кількість довжин хвиль, що вміщаються на відрізку 2π. Якщо ввести хвильове число k і циклічну частоту ω у рівняння (11.11), то воно набуває вигляду

$$\xi = A \sin (\omega t - kx). \tag{11.12}$$

Аргумент синуса $\omega t - kx$ називають *фазою хвилі.*

Щоб дістати рівняння (11.12), ми вважали, що амплітуда коливань в усіх точках однакова. Для плоскої хвилі це можливе, якщо енергія хвилі не поглинається середовищем.

Зафіксуємо будь-яке значення фази рівняння (11.10), тобто покладемо

$$\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) = \text{const}. \tag{11.13}$$

Продиференціювавши цей вираз за часом, знайдемо швидкість, з якою переміщається в просторі зафіксоване значення фази, тобто

$$\frac{dx}{dt} = v. \tag{11.14}$$

Звідси видно, що швидкість поширення хвилі у рівнянні (11.10) є швидкістю переміщення фази. Тому величину v називають *фазовою швидкістю.*

При поширенні у середовищі сферичної хвилі амплітуда коливань зменшується обернено пропорційно відстані r від джерела хвиль (див. приклад 11.3). Рівняння сферичної хвилі має вигляд

$$\xi = \frac{A}{r} \sin(\omega t - kr), \tag{11.15}$$

де A — величина, яка дорівнює амплітуді коливань на відстані 1 м від джерела хвиль. Величина A має розмірність амплітуди, помножену на розмірність довжини.

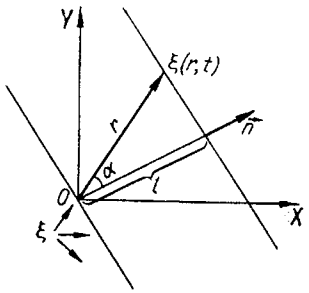


Рис. 11.4

Добуті рівняння плоскої хвилі справедливі, коли хвилі поширюються вздовж осі OX.

Знайдемо вигляд рівняння плоскої хвилі, що поширюється у напрямі, який утворює кути α, β, γ з осями координат OX, OY, OZ.

За аналогією з рівнянням (11.10) можна записати, що коливання точок хвильової поверхні, які знаходяться на відстані від початку координат, визначатимуться рівнянням

$$\xi = A \sin \omega \left(t - \frac{l}{v} \right). \tag{11.16}$$

Величину l виразимо через радіус-вектор $\vec{r}$ будь-якої точки хвильової поверхні і одиничний вектор $\vec{n}$, перпендикулярний до неї (рис. 11.4). Очевидно, що скалярний добуток $\vec{n}$ на $\vec{r}$ дорівнює l, тобто

$$\vec{n}\,\vec{r} = r \cos \alpha = l. \tag{11.17}$$

Тоді рівняння (11.16) набуває вигляду

$$\xi = A \sin \left(\omega t - \frac{\omega}{v} \vec{n}\,\vec{r} \right). \tag{11.18}$$

Введемо поняття хвильового вектора $\vec{k}$ як вектора, напрям якого збігається з напрямом одиничного вектора $\vec{n}$, а величина дорівнює $k = \omega/v$, тобто $\vec{k} = k\vec{n}$.

Тоді рівняння (11.18) запишемо так:

$$\xi = A \sin(\omega t - \vec{k}\,\vec{r}). \tag{11.19}$$

Рівняння (11.19) можна записати і в такій формі:

$$\xi = A \sin(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z), \tag{11.20}$$

де $k_x = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \alpha$, $k_y = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \beta$, $k_z = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \gamma$.

Користуючись виразом (10.24), рівняння плоскої хвилі можна записати так:

$$\xi = Ae^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}. \tag{11.21}$$

Знайдемо диференціальне рівняння, яке описує поширення хвильового процесу в середовищі. Для цього продиференціюємо рівняння (11.20) двічі по кожній із змінних:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t - \vec{k}\,\vec{r}) = -\omega^2 \xi, \tag{11.22}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -Ak_x^2 \sin(\omega t - \vec{k}\,\vec{r}) = -k_x^2 \xi,$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = -Ak_y^2 \sin(\omega t - \vec{k}\,\vec{r}) = -k_y^2 \xi,$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -Ak_z^2 \sin(\omega t - \vec{k}\,\vec{r}) = -k_z^2 \xi. \tag{11.23}$$

При додаванні рівнянь (11.23) дістанемо

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -k^2 \xi. \tag{11.24}$$

Після визначення ξ з (11.22) і підстановки її в рівняння (11.23) маємо

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{k^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \tag{11.25}$$

Оскільки $\frac{k^2}{\omega^2} = \frac{1}{v^2}$, то рівняння (11.25) набирає вигляду

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \tag{11.26}$$

Рівняння (11.26) — це хвильове рівняння. Його задовольняє не тільки функція (11.20), а й будь-яка функція, вигляд якої

$$f(x, y, z, t) = f(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z). \tag{11.27}$$

Приклад 11.1. В однорідному середовищі поширюється плоска хвиля, рівняння якої $\xi(x, t) = Ae^{-\gamma x}\cos(\omega t - kx)$, де A, γ, ω, і k — сталі. Знайти різницю фаз коливань у точках, де амплітуди зміщення частинок середовища відрізняються одна від одної на $\eta = 1{,}0$ %, якщо $\gamma = 4{,}2\cdot 10\ \text{см}^{-1}$ і довжина хвилі $\lambda = 50$ см.

Розв'язання. Різниця фаз

$$\Delta\varphi = (\omega t - kx_1) - (\omega t - kx_2) = \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1). \tag{1}$$

За умовою задачі

$$\frac{Ae^{-\gamma x_1} - Ae^{-\gamma x_2}}{Ae^{-\gamma x_1}}\,100\ \% = \eta. \tag{2}$$

Звідси знаходимо

$$x_2 - x_1 = -\frac{\ln\left(1 - \dfrac{\eta}{100}\right)}{\gamma}. \tag{3}$$

Підставивши співвідношення (3) у (1), дістанемо

$$\Delta\varphi = -\frac{2\pi}{\lambda\gamma}\ln\left(1 - \frac{\eta}{100}\right) \approx \frac{2\pi}{\lambda\gamma}\frac{\eta}{100}, \quad \Delta\varphi = 0{,}3 \text{ рад}.$$

Приклад 11.2. В одному напрямі поширюються дві синусоїдальні плоскі хвилі з швидкостями v_1 і v_2. Довжини хвиль відповідно λ_1 і λ_2. Знайти швидкість u переміщення в просторі тих точок, де коливання, що відповідають кожній хвилі, мають однакові фази. Знайти відстань Λ між двома подібними точками.

Розв'язання. Запишемо рівняння хвиль

$$\xi_1 = A_1 \sin\omega_1\left(t - \frac{x}{v_1}\right) = A_1 \sin\left(\omega_1 t - \frac{2\pi x}{\lambda_1}\right),$$

$$\xi_2 = A_2 \sin\omega_2\left(t - \frac{x}{v_2}\right) = A_2 \sin\left(\omega_2 t - \frac{2\pi x}{\lambda_2}\right).$$

Знайдемо точки x_1 і x_2, в яких у моменти часу t фази обох хвиль збігаються. Координати таких точок повинні задовольняти рівняння

$$\left(\omega_1 t - \frac{2\pi x_1}{\lambda_1}\right) - \left(\omega_2 t - \frac{2\pi x_1}{\lambda_2}\right) = 0\ ,$$

$$\left(\omega_1 t - \frac{2\pi x_2}{\lambda_1}\right) - \left(\omega_2 t - \frac{2\pi x_2}{\lambda_2}\right) = 2\pi.$$

З цих рівнянь дістаємо

$$\Lambda = x_2 - x_1 = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

У момент часу $t_1 = t + \Delta t$ точка x'_1, в якій фази коливань будуть однаковими, задовольняє рівняння

$$\left(\omega_1 t_1 - \frac{2\pi x'_1}{\lambda_1}\right) - \left(\omega_2 t - \frac{2\pi x'_1}{\lambda_2}\right) = 0.$$

Швидкість переміщення цієї точки

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x'_1 - x_1}{t_1 - t} = \frac{v_1\lambda_2 - v_2\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

§ 11.3. Миттєвий розподіл швидкостей і деформацій у хвилі

Знаючи миттєвий розподіл зміщень частинок, що коливаються відносно положення рівноваги, можна визначити розподіл швидкостей цих частинок та розподіл деформацій у хвилі.

Швидкість зміщення коливальних точок хвилі знаходимо диференціюванням рівняння хвилі (11.12) за часом:

$$\frac{d\xi}{dt} = A\omega\cos(\omega t - kx) = A\omega\sin\left(\omega t - kx + \frac{\pi}{2}\right). \tag{11.28}$$

З (11.28) видно, що швидкість зміщень у хвилі змінюється за тим самим законом, що й зміщення, з тією лише відмінністю, що зсув фаз між ними дорівнює $\frac{\pi}{2}$. Коли зміщення досягає максимуму, швидкість частинки міняє знак, тобто на якусь мить перетворюється в нуль. При проходженні положення рівноваги точка має максимальну швидкість, хоча зміщення її в цей момент часу дорівнює нулю. Отже, хвиля швидкостей зсунута відносно хвилі зміщень у часі на чверть періоду, а в просторі — на чверть хвилі.

Зауважимо, що швидкість поширення хвилі v і швидкість коливань частинок середовища, що беруть участь у хвильовому процесі, це величини, які характеризують різні процеси. Швидкість поширення хвилі v належить до швидкості поширення стану коливального руху, в який з плином часу захоплюються все нові й нові частинки середовища. Швидкість коливань частинок характеризує рух відносно положення рівноваги однієї і тієї самої частинки середовища, що перебуває на відстані x від джерела хвиль.

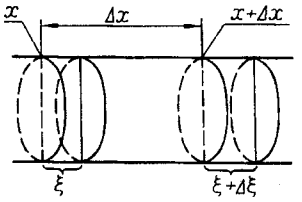


Рис. 11.5

Для визначення розподілу деформацій у хвилі розглянемо поширення поздовжньої хвилі у напрямі осі OX.

Виділимо циліндричний об'єм висотою Δx з площею основи, що дорівнює одиниці (рис. 11.5). Оскільки зміщення частинок в даний момент часу різне для різних значень x, то вважатимемо, що зміщення частинок основи циліндра, координата якого x, дорівнює ξ, а зміщення частинок основи циліндра з координатою $x + \Delta x$ у той самий момент часу дорівнює $\xi + \Delta\xi$. Отже, виділений циліндричний об'єм зазнає деформації. Відносна деформація $\varepsilon = \Delta\xi/\Delta x$. В граничному випадку, коли $\Delta x \to 0$, відносна деформація $\varepsilon = d\xi/dx$. Миттєвий розподіл відносної деформації в хвилі знаходимо диференціюванням рівняння (11.19) за координатою x:

$$\varepsilon = \frac{d\xi}{dx} = -kA\cos(\omega t - kx). \qquad (11.29)$$

Відносна деформація у хвилі змінюється за тим самим законом, що й зміщення, але зсув фаз між ними $\pi/2$. На рис. 11.6 показано розподіл зміщень (*а*), швидкостей (*б*) і відносної деформації (*в*) у хвилі в момент часу t. З рисунка видно, що там, де зміщення частинок досягають максимального або мінімального значення, швидкість зміщення частинок і відносна деформація дорівнюють нулю. Коли частинки проходять положення рівноваги, швидкість зміщення і відносна деформація досягають максимальних значень.

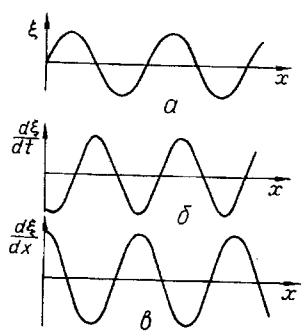


Рис. 11.6

Відносна деформація буде додатною ($\varepsilon > 0$) для $d\xi > 0$, тобто коли відбувається деформація розтягу. Для деформації стискання $\varepsilon < 0$. Отже, у поздовжній хвилі в місцях стискання відносна деформація $\varepsilon < 0$, а в місцях розрідження — $\varepsilon > 0$.

§ 11.4. Енергія хвильового руху. Потік енергії. Вектор Умова

Джерелом коливального руху в середовищі є коливальна система. За рахунок її енергії виникають коливання частинок середовища, які прилягають до коливального тіла. Внаслідок взаємозв'язку між частинками середовища коливання передаються від однієї частинки до іншої, тобто утворюється хвиля. Коливальні частинки середовища, в якому поширюється хвиля, мають як кінетичну, так і потенціальну енергії деформації. При поширенні хвиль відбувається передавання енергії від однієї частинки до іншої у напрямі поширення хвиль.

Виділимо в середовищі, в якому поширюється плоска хвиля, елементарний об'єм ΔV. Об'єм ΔV беремо таких розмірів, в межах якого можна вважати сталими швидкість зміщення частинок та деформацію.

Кінетична енергія руху частинок, що знаходяться в об'ємі,

$$\Delta W = \frac{1}{2}\rho\Delta V\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\rho\Delta V\omega^2A^2\cos^2(\omega t - kx). \qquad (11.30)$$

Потенціальна енергія пружної деформації об'єму ΔV визначається за формулою (5.19), тобто

$$\Delta U = \frac{1}{2}E\varepsilon^2\Delta V = \frac{1}{2}E\Delta Vk^2A^2\cos^2(\omega t - kx). \qquad (11.31)$$

Враховуючи те, що модуль Юнга $E = \rho v^2$, а хвильове число $k = \omega/v$, вираз (11.31) набуває вигляду

$$\Delta U = \frac{1}{2}\rho\Delta V\omega^2A^2\cos^2(\omega t - kx). \qquad (11.32)$$

Порівнюючи вирази (11.30) і (11.32), можна зробити висновок, що у виділеному об'ємі середовища ΔV кінетична і потенціальна енергії дорівнюють одна одній і, на відміну від коливальних рухів, змінюються в однакових фазах. При поширенні хвилі у пружному середовищі, як уже зазначалося, поширюється хвиля швидкостей зміщення коливальних частинок та хвиля відносної деформації. Ці хвилі переносять відповідно кінетичну і потенціальну енергії. Знайдемо повну енергію E у виділеному об'ємі середовища, де поширюється хвиля:

$$\Delta E = \Delta W + \Delta U = \rho\Delta V\omega^2A^2\cos^2(\omega t - kx).$$

Об'ємна густина енергії

$$w = \frac{\Delta E}{\Delta V} = \rho\omega^2A^2\cos^2(\omega t - kx). \qquad (11.33)$$

З (11.33) видно, що густина енергії в кожний момент часу в різних точках простору різна. Вона пропорційна густині середовища, квадрату амплітуди коливань частинок середовища та квадрату частоти їхніх коливань. Оскільки квадрат косинуса за період має середнє значення 1/2, то середнє значення густини енергії $< w >$ за часом

$$< w > = \frac{1}{2}\rho\omega^2A^2. \qquad (11.34)$$

Перенесення енергії хвилею характеризують потоком і густиною потоку енергії. Енергію, що переноситься хвилею через деяку поверхню S у перпендикулярному до неї напрямі за одиницю часу, називають *потоком*. Якщо швидкість поширення хвилі v, то через поверхню площею S за одиницю часу пройде потік енергії

$$\Phi = < w > Sv. \qquad (11.35)$$

Потік енергії в різних точках середовища може мати різну інтенсивність. Для характеристики перенесення енергії в різних точках простору вводять поняття густини потоку енергії, під яким розуміють енергію, що переноситься через одиницю площі поверхні за одиницю часу. За означенням, середнє значення густини потоку енергії

$$< j > = < w > v. \qquad (11.36)$$

Оскільки швидкість поширення хвилі v є величина векторна, то і густину потоку енергії можна розглядати як вектор, напрям якого збігається з напрямом поширення хвилі. Питання перенесення енергії хвилями в загальному випадку вивчав російський фізик М. О. Умов (1846 — 1915). Тому вектор $\vec{j}$ називають *вектором Умова.*

Приклад 11.3. Довести, що амплітуда коливань частинок середовища при поширенні сферичної хвилі обернено пропорційна відстані r від джерела хвиль. Поглинання енергії хвилі середовищем не враховувати.

Розв'язання. Густина потоку енергії для всіх точок хвильової поверхні радіуса r однакова і має середнє значення

$$j = \frac{1}{2}\rho A_r^2\omega^2 v,$$

де A_r — амплітуда коливань частинок, що знаходяться на сферичній поверхні радіуса r. Якщо енергія хвилі не поглинається середовищем, то середній потік енергії через сферичні поверхні, центри яких збігаються з точковим джерелом сферичних хвиль, повинен бути однаковим, тобто

$$\frac{1}{2}\rho A_r^2\omega^2 v \cdot 4\pi r^2 = \text{const}. \qquad (1)$$

Звідси випливає, що амплітуда коливань для сферичної хвилі обернено пропорційна відстані r від джерела хвиль:

$$A_r \sim \frac{1}{r}.$$

Приклад 11.4. У трубі поширюється плоска загасаюча хвиля, амплітуда якої зменшується за законом $\exp(-\gamma x)$. У перерізі з координатою x_1 середнє за часом значення модуля вектора Умова дорівнює j_1. Яка кількість енергії ΔE поглинається за час Δt, більший від періоду хвилі, в об'ємі труби між двома перерізами її? Координати перерізів x_1 і x_2, площа поперечного перерізу S $(x_2 - x_1 \gg \lambda)$.

Розв'язання. Оскільки середнє значення за часом густини потоку енергії $j = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 v$, то через переріз з координатою x_1 за час Δt переноситься енергія

$$E_1 = \frac{1}{2}\rho\omega^2 v S\Delta t \exp(-2\gamma x_1) = j_1 S\Delta t. \qquad (1)$$

Через другий переріз з координатою x_2 за той самий час переноситься енергія

$$E_2 = \frac{1}{2}\rho\omega^2 v S\Delta t \exp(-2\gamma x_2).$$

Кількість енергії, що поглинається в об'ємі труби між перерізами з координатами x_1 і x_2,

$$\Delta E = E_1 - E_2 = \frac{1}{2}\rho\omega^2 v S\Delta t\,(\exp(-2\gamma x_1) - \exp(-2\gamma x_2)). \qquad (2)$$

З виразу (1) визначимо величину $\frac{1}{2}\rho\omega^2 v$ і підставимо її у (2). Тоді

$$\Delta E = j_1 S\Delta t\,(1 - \exp(-2\gamma(x_2 - x_1))).$$

§ 11.5. Інтерференція хвиль

У середовищі одночасно можуть поширюватися кілька хвиль, які збуджуються різними джерелами. Як показує дослід, поширення однієї хвилі в середовищі не залежить від наявності в ньому інших хвиль.

Якщо в середовищі одночасно поширюється кілька хвиль, то частинка середовища здійснює коливання, які є результатом додавання коливань, що створюються в даній точці простору кожною хвилею. Результуюче зміщення частинки середовища в будь-який момент часу дорівнює геометричній сумі зміщень, які здійснює частинка під дією кожної хвилі зокрема.

Тільки за певних умов при накладанні двох хвиль амплітуди результуючих коливань різних частинок середовища матимуть неоднакові величини, значення яких з часом не змінюватимуться. В одних місцях хвильового поля коливання підсилюються, в інших — послаблюються. Явище накладання хвиль, при якому амплітуда результуючих коливань різних ділянок середовища з часом не змінюється і в загальному випадку не дорівнює сумі амплітуд складових коливань, називають *інтерференцією* хвиль. Характерною ознакою інтерференції хвиль є існування зон з максимальними і мінімальними амплітудами результуючих коливань. Ці зони чергуються, але не переміщаються.

Для виникнення інтерференційної картини необхідно, щоб виконувалися такі умови: коливання частинок середовища, що збуджуються інтерферуючими хвилями, повинні відбуватись в однакових напрямах; частоти їхніх коливань мають бути однаковими; зсув фаз між коливаннями частинки, зумовленими інтерферуючими хвилями, з часом не змінюється. Хвилі, що відповідають цим умовам, називають *когерентними.* Така назва відповідає і джерелу збудження їх. Поняття про когерентні хвилі і про когерентні джерела хвиль належать до фізичних абстракцій. При певних умовах реальні джерела хвиль і реальні хвилі можна вважати когерентними. Так, можна вважати когерентними джерелами два стержні у ванні з водою, які приводяться в коливальний рух плоскою пружиною і ударяють своїми кінцями по поверхні води (рис. 11.7). Явище інтерференції властиве хвилям будь-якої природи.

Розглянемо інтерференційну картину в точці O, що виникає при накладанні двох хвиль, поширюваних від когерентних джерел S_1 і S_2 (рис. 11.8). Зміщення коливальної точки, зумовлені хвилями, відповідно визначаються рівняннями

$$\xi_1 = A_1 \sin\left(\omega t - \frac{2\pi r_1}{\lambda}\right),$$

9 [25]

$$\xi_2 = A_2 \sin\left(\omega t - \frac{2\pi r_2}{\lambda}\right). \qquad (11.37)$$

При додаванні коливань однакового напряму знайдемо амплітуду результуючого коливання

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1), \qquad (11.38)$$

де $\varphi_1 = 2\pi r_1/\lambda$, $\varphi_2 = 2\pi r_2/\lambda$. Тоді

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = \frac{2\pi d}{\lambda}.$$

Величину $d = r_2 - r_1$ називають *різницею ходу хвиль*. Амплітуда результуючих коливань залежить від різниці ходу інтерференціюючих хвиль. До кожної точки хвильового поля обидві хвилі проходять різні

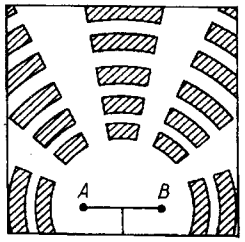


Рис. 11.7

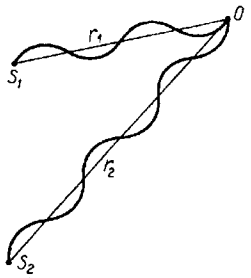


Рис. 11.8

відстані. Це зумовлює зміну різниці фаз при переході від однієї точки до іншої. З формули (11.38) випливає, що амплітуда результуючих коливань досягає максимального значення $A = A_1 + A_2$ для різниць фаз, коли $\varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi n$, тобто коли

$$\frac{2\pi d}{\lambda} = \pm 2\pi n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (11.39)$$

Звідси маємо

$$d = r_2 - r_1 = n\lambda, \qquad (11.40)$$

тобто амплітуда буде максимальною у тих точках хвильового поля, для яких різниця ходу дорівнює нулю або цілому числу довжин хвиль. З (11.38) також випливає, що амплітуда результуючих коливань має мінімальне значення $A = |A_1 - A_2|$ для різниць фаз, коли

$$\frac{2\pi d}{\lambda} = (2n + 1)\pi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (11.41)$$

З останньої формули маємо, що

$$d = r_2 - r_1 = (2n + 1)\frac{\lambda}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (11.42)$$

тобто амплітуда коливань буде мінімальною в тих точках хвильового поля, для яких різниця ходу хвиль дорівнює непарному числу довжин півхвиль.

Умови (11.40) і (11.42) зводяться до таких:

$$r_2 - r_1 = \text{const}. \qquad (11.43)$$

З аналітичної геометрії відомо, що різниця (11.43) є рівнянням гіперболи з фокусами в точках O_1 і O_2 (рис. 11.9). Отже, геометричне місце точок, в яких коливання взаємно підсилюються або послаблюються, являє собою сукупність гіпербол. На рис. 11.9 суцільними лініями вказано місця, в яких амплітуди результуючих коливань мають максимальне значення; штриховими лініями — місця, в яких амплітуди результуючих коливань мінімальні.

В усіх інших точках хвильового поля, для яких різниця ходів хвиль має проміжні значення між $n\lambda$ і $(2n + 1)\lambda/2$, амплітуда A результуючих коливань змінюється від точки до точки і набуває проміжних значень між $|A_1 - A_2|$ і $A_1 + A_2$, тобто

$$|A_1 - A_2| \le A \le A_1 + A_2,$$

де A_1 і A_2 — амплітуди коливань даної частинки, зумовлені хвилями, що її досягли. Оскільки енергія коливального руху пропорційна квадрату амплітуди коливань, то енергія коливань частинок, розміщення яких у хвильовому полі задовольняє умову (11.40), визначатиметься співвідношенням

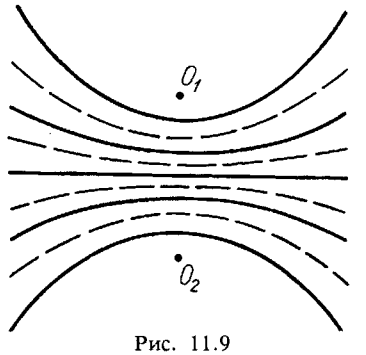


Рис. 11.9

$$E = E_1 + E_2 + 2\sqrt{E_1E_2}, \qquad (11.44)$$

де E_1 і E_2 — відповідно енергії складових коливань. Енергія коливального руху частинок хвильового поля, розміщення яких задовольняє умову (11.42), визначається співвідношенням

$$E = E_1 + E_2 - 2\sqrt{E_1E_2}. \qquad (11.45)$$

Зауважимо, що в явищах інтерференції немає відхилень від закону збереження енергії. У точках хвильового поля, в яких амплітуда має

максимальне значення, енергія коливань не дорівнює сумі енергій E_1 і E_2, а більша на величину $2\sqrt{E_1E_2}$ (див. формулу (11.44)). У точках, де амплітуда коливань має мінімальне значення, енергія коливань відповідно менша на величину $2\sqrt{E_1E_2}$ (див. формулу (11.45)). Отже, при інтерференції хвиль відбувається перерозподіл енергії і явище інтерференції повністю узгоджується із законом збереження енергії. Основною ознакою інтерференційного додавання хвиль є перерозподіл їхньої енергії по хвильовому полю.

Оскільки енергія (формула (10.55)) результуючого коливання при додаванні взаємно перпендикулярних коливань не залежить від різниці фаз між ними і дорівнює сумі енергій складових коливань, то неможливе явище інтерференції від двох поперечних хвиль, в яких коливання відбуваються у взаємно перпендикулярних напрямах.

Приклад 11.5. У пружному однорідному середовищі поширюються дві плоскі хвилі, одна — вздовж осі OX, друга — вздовж осі OY, рівняння яких відповідно

$$\xi_1(x, t) = A \sin(\omega t - kx), \quad \xi_2(y, t) = A \sin(\omega t - ky).$$

Амплітуди і довжини обох хвиль однакові і дорівнюють A, λ. Знайти характер руху частинок пружного середовища у площині XOY, якщо обидві хвилі: а) поперечні і напрями коливань однакові; б) хвилі поздовжні.

Розв'язання. а) При накладанні хвиль коливання частинки середовища з координатами x, y визначатимуться рівнянням

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A \cos\frac{k(y-x)}{2} \sin\left(\omega t - \frac{k(x+y)}{2}\right).$$

Звідси видно, що амплітуда результуючого коливання дорівнює $2A\cos\frac{k(y-x)}{2}$.

Амплітуда результуючих коливань частинок середовища, координати яких задовольняють умову $y - x = \text{const}$, має однакову величину. Максимальні значення амплітуди $2A$ будуть для всіх точок, для яких $k(y-x) = 2\pi n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Розміщення цих точок визначається рівнянням прямих

$$y = x + n\lambda, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (1)$$

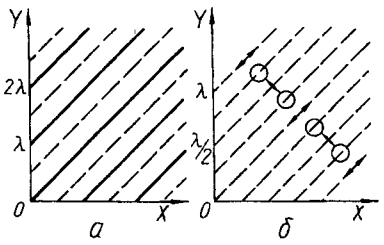


Рис. 11.10

Прямі (1) показано на рис. 11.10, *а* суцільними лініями. Амплітуда результуючого коливання дорівнюватиме нулю для всіх точок, що знаходяться на прямих лініях (рис. 11.10, *а*, штрихові лінії).

б) При накладанні поздовжніх хвиль, які поширюються у взаємно перпендикулярних напрямах, кожна частинка середовища коливатиметься у двох взаємно перпендикулярних напрямах. Траєкторія їхнього руху визначається рівнянням (10.47). Характер руху визначається різницею фаз. Частинки, координати яких задовольняють умову

$$y = x \pm n\lambda, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

коливатимуться вздовж прямих (рис. 11.10, *б*). Частинки, що лежать на прямих $y = x \pm \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda$, коливатимуться перпендикулярно до цих прямих. Частинки, які лежать на прямих $y = x \pm \left(n \pm \frac{1}{4}\right)\lambda$, здійснюватимуть колові рухи. Траєкторії руху всіх інших частинок — це еліпси.

§ 11.6. Стоячі хвилі

Особливий випадок інтерференції спостерігається при накладанні двох плоских зустрічних хвиль з однаковими частотами і амплітудами. При цьому утворюються так звані *стоячі хвилі.* Практично стоячі хвилі виникають при накладанні біжучої і відбитої хвиль. Розглянемо інтерференцію падаючої і відбитої хвиль. Вважатимемо, що хвилі поширюються у середовищі без затухання і амплітуди їх однакові і що падаюча хвиля поширюється в додатному напрямі осі OX, а відбита хвиля — у протилежному напрямі. Початок координат розмістимо у точці, в якій обидві хвилі мають однакові фази. За початок відліку часу виберемо такий момент, коли фази коливань обох хвиль дорівнюють нулю. Тоді рівняння падаючої і відбитої хвиль

$$\xi_1 = A_0 \sin(\omega t - kx), \quad \xi_2 = A_0 \sin(\omega t + kx). \qquad (11.46)$$

Результуюче зміщення знайдемо як суму складових, тобто

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A_0 \cos kx \sin \omega t. \qquad (11.47)$$

Рівняння (11.47) — це рівняння стоячої хвилі. З (11.47) видно, що якщо зафіксувати деяку точку, координата якої x, то для частинки, що знаходиться в цій точці, дістанемо рівняння гармонічного коливання з амплітудою $2A_0 \cos kx$ і з фазою ωt. Якщо переходити від однієї точки до іншої, то амплітуда змінюватиметься за законом

$$A = \left|2A_0 \cos\frac{2\pi x}{\lambda}\right|. \qquad (11.48)$$

Отже, рівняння стоячої хвилі описує гармонічні коливання частинок середовища в просторі, амплітуди коливань яких різні для різних точок. У рівнянні стоячої хвилі, на відміну від рівняння біжучої хвилі, немає швидкості поширення фази. У точках, для яких виконується умова

$$2\pi x/\lambda = \pm \pi n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (11.49)$$

амплітуда результуючого коливання досягає максимального значення і дорівнює $2A_0$. Ці точки називають *пучностями* стоячої хвилі. Координати пучностей визначаємо з умови (11.49):

$$x_{\text{пучн}} = \pm n\frac{\lambda}{2}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{11.50}$$

У точках, для яких виконується умова

$$2\pi\, x/\lambda = \pm\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{11.51}$$

амплітуда результуючого коливання в будь-який момент часу дорівнює нулю. Такі точки називаються *вузлами* стоячої хвилі. Частинки середовища, що знаходяться у вузлових точках, коливань не здійснюють. Координати вузлових точок знаходимо з умови (11.51):

$$x_{\text{вузл}} = \pm\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{11.52}$$

З формул (11.51) і (11.52) випливає, що відстань між сусідніми пучностями або між сусідніми вузлами дорівнює $\lambda/2$. Відстань між сусіднім вузлом і пучністю

$$x_{\text{вузл}} - x_{\text{пучн}} = \frac{\lambda}{4}. \tag{11.53}$$

Множник $2A\cos 2\pi x/\lambda$, що входить до рівняння (11.47), для всіх точок, які лежать між двома сусідніми вузлами, має той самий знак, а при переході через вузол, тобто через нульове значення, міняє знак на протилежний. Це означає, що всі частинки, які знаходяться між сусідніми вузлами, коливаються в однакових фазах. Частинки, що знаходяться з різних сторін вузла, коливаються у протилежних фазах, тобто різниця фаз між ними дорівнює π. Стоячі хвилі можуть утворюватися при інтерференції як поперечних, так і поздовжніх хвиль.

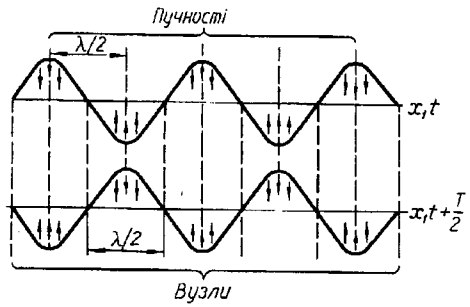


Рис. 11.11

На рис. 11.11 показано миттєвий розподіл зміщень частинок середовища для поперечної стоячої хвилі у момент часу t і $t + T/2$.

Стояча хвиля супроводжується утворенням стоячої хвилі швидкостей частинок середовища і стоячої хвилі відносної деформації. Знайдемо рівняння стоячої хвилі швидкостей і стоячої хвилі відносної деформації. Для цього продиференціюємо рівняння (11.47) по t і x. Рівняння стоячої хвилі швидкостей

$$\frac{d\xi}{dt} = 2A_0\omega\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\cos\omega t. \tag{11.54}$$

Рівняння стоячої хвилі деформацій

$$\varepsilon = \frac{d\xi}{dx} = -2A_0\cdot\frac{2\pi}{\lambda}\sin 2\pi\frac{x}{\lambda}\sin\omega t. \tag{11.55}$$

З рівнянь (11.47) і (11.54) випливає, що вузли і пучності хвилі швидкостей збігаються з вузлами і пучностями хвилі зміщень. З рівнянь (11.47), (11.55) видно, що вузли стоячої хвилі відносної деформації збігаються з пучностями зміщень і швидкостей, а пучності відносної деформації — з вузлами зміщень і швидкостей.

У стоячій хвилі на відміну від біжучої хвилі не відбувається перенесення енергії. Це пояснюється тим, що падаюча і відбита хвилі мають однакові амплітуди і переносять однакову енергію у протилежних напрямах. Повна енергія стоячої хвилі зосереджена між вузловими точками і з часом не змінюється. Відбувається тільки перехід потенціальної енергії в кінетичну, і навпаки. Оскільки протягом існування стоячої хвилі вузлові точки перебувають у спокої, то через них енергія не переноситься. Через вузли швидкості, де частинки середовища перебувають у спокої, неможливе перенесення кінетичної енергії, а через вузли відносної деформації неможливе перенесення потенціальної енергії. Коли вся енергія переходить у потенціальну, то вона зосереджується в основному біля пучності хвилі відносної деформації, тобто біля вузла хвилі зміщень. Коли вся енергія переходить у кінетичну, то вона зосереджується в основному біля пучності хвилі швидкостей, тобто біля пучності хвилі зміщень. Отже, перетворення потенціальної енергії в кінетичну (і навпаки) відбувається між сусідніми вузлами зміщень і відносних деформацій, тобто на ділянці завдовжки в чверть хвилі. Ці перетворення енергії відбуваються за період коливань стоячої хвилі. Поняття потоку енергії та вектора Умова непридатні для стоячих хвиль.

Як зазначалося, стоячі хвилі найбільш зручно дістати накладанням біжучої і відбитої хвиль. У місцях відбивання хвиль на межі поділу двох середовищ залежно від граничних умов може утворюватись або вузол, або пучність. Кожне середовище чинить опір проникненню в нього хвиль. Здатність середовища чинити опір проникненню в нього хвиль характеризують *хвильовим опором*. Під ним розуміють добуток густини середовища на швидкість поширення хвиль, тобто ρv. При переході хвилі з середовища, хвильовий опір якого $\rho_1 v_1$, у середовище з хвильовим опором $\rho_2 v_2 > \rho_1 v_1$ хвиля зазнає відбивання. На межі поділу середовища буде вузол. При відбиванні фаза коливань частинок середовища змінюється на π. Зміну фази коливань на π при відбиванні хвиль називають втратою півхвилі. Насправді ніяких втрат

не відбувається. Для з'ясування явища зміни фази коливань на π при відбиванні хвилі розглянемо такий приклад. Нехай хвиля поширюється вздовж розтягнутого гумового шнура (рис. 11.12). У момент відбивання вигин шнура напрямлений вгору і шнур діє на точку О, у якій він закріплений, з силою, також напрямленою вгору. За третім законом Ньютона, кріплення діє на шнур з силою протилежного напряму. Внаслідок дії цієї сили виникає відбита хвиля, подібна до падаючої, але з протилежним напрямом коливань.

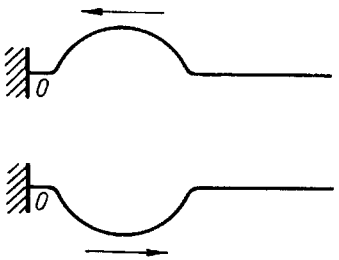


Рис. 11.12

У разі, коли $\rho_1 v_1 > \rho_2 v_2$, також відбуваються відбивання хвилі, але без зміни фази коливань. Утворення стоячих хвиль пов'язано також з явищем резонансу в обмежених ділянках суцільного пружного середовища.

§ 11.7. Принцип Гюйгенса. Дифракція хвиль

Поширення хвиль у середовищах можна характеризувати за допомогою хвильового фронту. Його форма в будь-який момент часу залежить не тільки від геометричної форми джерела хвиль, а й від властивостей середовища, в якому поширюється хвиля. Процес поширення хвиль описується за допомогою хвильового рівняння. Його розв'язання складне, особливо тоді, коли йдеться про поширення хвиль у неоднорідних середовищах, при відбиванні та заломленні хвиль.

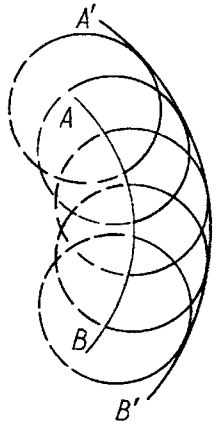


Рис. 11.13

У 1690 р. Х. Гюйгенс запропонував метод визначення фронту хвилі в наступний момент часу, якщо відомий фронт хвилі в даний момент. В основі цього методу лежить принцип Гюйгенса, згідно з яким усі точки хвильового фронту хвилі в даний момент часу можна розглядати як самостійні джерела вторинних хвиль. Нехай у момент часу t фронт сферичної хвилі займає положення AB (рис. 11.13) і відомо напрям його поширення. Згідно з принципом Гюйгенса, кожна точка хвильового фронту є точкове джерело. Для однорідного ізотропного середовища вторинні хвилі сферичні. Для визначення положення хвильового фронту в момент часу $t + \Delta t$ з точок фронту AB описують хвильові поверхні радіуса $v\Delta t$ (v — швидкість поширення хвилі). Розміщення хвильового фронту в момент часу $t + \Delta t$ знаходять як поверхню $A'B'$ вторинних хвиль, що огинає їх.

Принцип Гюйгенса в такому формулюванні можна вважати геометричним способом побудови хвильових фронтів. Вторинні хвилі Гюйгенса відіграють роль не реальних хвиль, а допоміжних сфер, за допомогою яких геометричною побудовою знаходять розміщення хвильового фронту.

Принцип Гюйгенса дає можливість пояснити притаманне хвильовим процесам явище *дифракції* хвиль, яке проявляється в тому, що хвилі огинають перешкоди, які знаходяться на шляху поширення їх,

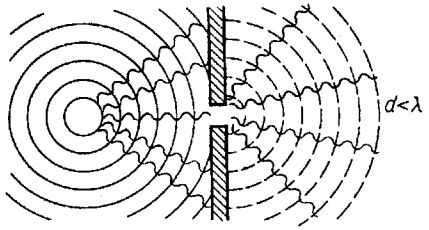


Рис. 11.14

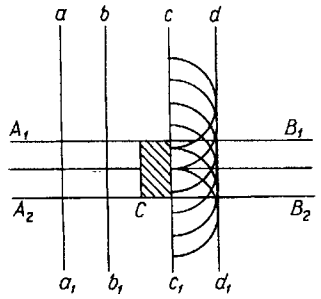


Рис. 11.15

тобто хвилі проникають у ділянку геометричної тіні. Наприклад, розглянемо поширення сферичної хвилі, на шляху якої розміщено екран з круглим отвором. Вважатимемо, що діаметр d отвору значно менший від довжини хвилі λ (рис. 11.14). Коли фронт хвилі досягне екрана, то, за принципом Гюйгенса, від точок хвильового фронту, що знаходиться у площині отвору, поширюватимуться сферичні хвилі за екраном. З рисунка видно, що при $d < \lambda$ прямолінійність поширення хвиль порушується. За умови, коли $d > \lambda$, на межі екрану також спостерігатиметься відхилення хвилі від прямолінійного поширення.

Аналогічно можна пояснити огинання хвилями предметів, розміщених на шляху поширення хвилі. Якщо поперечні розміри предмета значно менші від довжини хвилі, то вся область геометричної тіні буде хвильовим полем.

На рис. 11.15 зображено миттєві положення фронтів плоскої хвилі aa_1, bb_1, cc_1. Перпендикулярно до промення поширення хвилі розміщено предмет C. Лінії A_1B_1, A_2B_2 визначають за предметом область так званої геометричної тіні. У момент часу t, коли фронт хвилі займе положення cc_1, від крайніх точок фронту, що межують з предметом, поширюватимуться сферичні хвилі в область геометричної тіні. У момент часу $t + \Delta t$ хвильовий фронт займе положення dd_1, і в області геометричної тіні буде хвильове поле.

Принцип Гюйгенса дає можливість пояснити поширення хвиль не тільки в однорідному ізотропному середовищі, а й в неоднорідних і анізотропних середовищах. За принципом Гюйгенса можна дістати закони відбивання хвиль від межі поділу двох середовищ, а також заломлення при переході їх з одного середовища в інше.

Проте цей принцип не дає можливості визначити результуючу амплітуду коливань у будь-якій точці, якої досягають хвилі. Французький фізик О. Френель (1788—1827) у 1815 р. доповнив принцип Гюйгенса твердженням про те, що вторинні хвилі інтерферують між собою. Поєднання принципу Гюйгенса з доповненнями Френеля про інтерференцію вторинних хвиль називають принципом Гюйгенса — Френеля.

Розділ 12. Елементи акустики

§ 12.1. Природа звуку. Швидкість звуку

Пружні хвилі, що поширюються у суцільних середовищах, називають *звуковими.* До звукових хвиль належать хвилі, частоти яких лежать у межах сприймання органами слуху. Людина сприймає звуки тоді, коли на її органи слуху діють хвилі з частотами від 16 до 20 000 Гц. Пружні хвилі, частота яких менша від 16 Гц, називають інфразвуковими, а хвилі, частота яких лежить в інтервалі від $2 \cdot 10^4$ до $1 \cdot 10^9$ Гц, — ультразвуковими.

Розділ фізики, в якому вивчаються звукові хвилі (збудження, поширення, сприймання та взаємодія їх з речовиною середовища), називають *акустикою.*

Викладені в попередніх розділах загальні закономірності коливальних і хвильових видів механічного руху можна застосувати і до вивчення акустичних явищ. Ряд спеціальних питань, пов'язаних з особливостями сприймання звуку, його технічним застосуванням, зумовив виділення окремого розділу фізики — акустики.

Акустика поділяється на загальну і прикладну. У загальній акустиці розглядаються теоретичні та експериментальні аспекти утворення і поширення звукових, ультразвукових та інфразвукових хвиль і взаємодія їх з речовиною. Здебільшого цей розгляд проводиться в припущенні, що амплітуди коливань незначні. Це дає можливість користуватися лінійними диференціальними рівняннями з частинними похідними. Хвилі великих амплітуд, які виникають при вибухах, горінні тощо, описуються нелінійними диференціальними рівняннями. Це привело до розвитку нелінійної акустики.

Прикладна акустика поділяється на фізіологічну, архітектурну, музичну, гідроакустичну тощо.

Вимірювання швидкості звуку в твердих тілах, рідинах і газах вказують на те, що швидкість не залежить від частоти коливань або довжини звукової хвилі, тобто для звукових хвиль нехарактерна дисперсія. Явище дисперсії спостерігається при поширенні ультразвукових хвиль у багатоатомних газах і органічних рідинах. Обмежимося вивченням поширення звукових хвиль у середовищах, в яких дисперсії немає. При цьому обчислення швидкості поширення звуку в різних середовищах можна проводити за співвідношеннями, що їх дістали в попередньому розділі. У твердих тілах можуть поширюватися поздовжні і поперечні хвилі, швидкість поширення яких знаходять відповідно за формулами

Таблиця 2

Речовина	Швидкість поздовжніх хвиль, м/с	Швидкість поперечних хвиль, м/с
Платина	3800	1700
Цинк	4200	2440
Нікель	5630	2960
Магній	5765	3065
Кварц плавлений	5970	3762

$$v_{\text{поз}} = \sqrt{E/\rho}\,, \quad v_{\text{поп}} = \sqrt{G/\rho}\,, \tag{12.1}$$

де E — модуль Юнга; G — модуль зсуву.

У табл. 2 наведено швидкість поширення звуку в деяких твердих тілах для поздовжніх і поперечних хвиль. З таблиці видно, що швидкість поширення поздовжніх хвиль у твердих тілах майже вдвоє більша від швидкості поширення поперечних хвиль. Неоднаковість швидкостей поздовжніх і поперечних хвиль у твердих тілах покладено в основу роботи сейсмографів, за допомогою яких визначають епіцентри землетрусів, виверження тощо.

У рідинах і газах можуть поширюватися тільки поздовжні хвилі. Швидкість звуку в рідинах визначається за формулами

$$v = \sqrt{k / \rho} = \sqrt{1 / (\beta\rho)}\,, \tag{12.2}$$

де k — модуль об'ємного стиску; β — адіабатний коефіцієнт об'ємного стиску. Залежність швидкості звуку в рідинах від температури визначається в основному залежністю коефіцієнта об'ємного стиску. Так, для води коефіцієнт об'ємного стиску зменшується з підвищенням температури, і відповідно швидкість звуку збільшується. Для решти рідин коефіцієнт об'ємного стиску збільшується з підвищенням температури, і відповідно швидкість звуку зменшується. Швидкість звуку в рідинах залежить від наявності в них домішок. Так, швидкість звуку в прісній воді при 17 °С 1430 м/с, а в морській воді — 1510 м/с.

І. Ньютон вперше застосував формулу (11.3) для обчислення швидкості звуку в газах. Він вважав, що зміна тиску і густини газу у звуковій хвилі відбувається за законом Бойля — Маріотта $p = c\rho$, де $c = \text{const}$. Тоді $\frac{dp}{d\rho} = c = \frac{p}{\rho}$, і швидкість звуку

$$v = \sqrt{p / \rho}. \qquad (12.3)$$

Звідси випливає, що швидкість звуку в газах не залежить від тиску, оскільки з його збільшенням збільшується і густина газу. Формулі (12.3) можна надати більш зручного вигляду для практичного користування. На основі рівняння Менделєєва — Клапейрона $pV = \frac{m}{M} RT$ знаходимо, що $\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{M}$. Тоді

$$v = \sqrt{RT/M}, \qquad (12.4)$$

де R — універсальна газова стала; T — термодинамічна температура; M — молярна маса газу.

Формула (12.4) називається *формулою Ньютона.* Розрахована за формулою (12.4) швидкість звуку в повітрі при 0 °С (T = 273 К) дорівнює 280 м/с. Швидкість звуку в повітрі, яку дістали експериментально при цих умовах, дорівнює 330 м/с. Цей результат значно відрізняється від теоретичного. Причину визначив французький вчений П. Лаплас (1749 — 1827). Він вперше довів, що процес поширення звукових хвиль у газах відбувається адіабатно, тобто звукові хвилі в газах поширюються так швидко, що зумовлені локальні зміни об'єму і тиску в газовому середовищі відбуваються без теплообміну з навколишнім середовищем. Адіабатний процес у газах описується рівнянням Пуассона pV^γ = const, де p і V — відповідно тиск і об'єм газу, $\gamma = c_p/c_v$ — відношення теплоємностей газу при сталих тиску та об'ємі. Оскільки густина газу обернено пропорційна його об'єму, то рівняння Пуассона можна записати так:

$$p/\rho^\gamma = \text{const}. \qquad (12.5)$$

Продиференціювавши вираз (12.5), знаходимо, що $\frac{dp}{d\rho} = \gamma \frac{p}{\rho}$. Оскільки $\frac{dp}{d\rho} \approx \frac{\Delta p}{\Delta \rho}$, то формула $v = \sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta \rho}}$ матиме такий вигляд:

$$v = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}. \qquad (12.6)$$

Формула (12.6) називається *формулою Лапласа.* Вона добре узгоджується з дослідними результатами.

З підвищенням температури газу швидкість звуку в ньому зростає. Щоб встановити залежність швидкості звуку від температури газу, знову використаємо формулу Менделєєва — Клапейрона.

Підставимо у формулу (12.6) вираз $p/\rho = RT/M$. Тоді

$$v = \sqrt{\gamma RT/M}. \qquad (12.7)$$

Звідси випливає, що швидкість звуку в газах з підвищенням температури зростає пропорційно $\sqrt{T}$, а також залежить від величини γ та молекулярної маси газу. Так, при 0 °С швидкість звуку в кисні — 315 м/с, у водні — 1263 м/с. Швидкість звуку в повітрі залежить не тільки від його процентного складу, а й від його вологості.

Приклад 12.1. Показати, що для будь-якої біжучої акустичної хвилі відносна зміна тиску dp/p у даній точці дорівнює відношенню швидкості руху частинок до швидкості звуку, помноженому на $\gamma = C_p/C_V$, де C_p і C_V — теплоємності речовини середовища при сталих тиску і об'ємі.

Розв'язання. З рівняння адіабатного процесу (12.5) дістаємо $\frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\rho}{\rho}$. Якщо рівняння хвилі $\xi = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v}\right)$, то відносна зміна тиску $\frac{dp}{p} = -\gamma \frac{d\xi}{dx}$.

Оскільки $\frac{d\xi}{dx} = -\frac{A\omega}{v} \cos \omega \left(t - \frac{x}{v}\right)$, а швидкість коливання частинок середовища

$$u = \frac{d\xi}{dt} = A\omega \cos \omega \left(t - \frac{x}{v}\right),$$

то

$$\frac{u}{v} = \frac{A\omega}{v} \cos \omega \left(t - \frac{x}{v}\right) = -\frac{d\xi}{dx}.$$

Отже,

$$\frac{dp}{p} = \gamma \frac{u}{v}.$$

§ 12.2. Поширення звукових хвиль. Інтенсивність звуку

Область середовища, в якому поширюються звукові хвилі, називають *звуковим полем.* Як уже зазначалося, при поширенні хвиль ділянки середовища зазнають періодичних деформацій. Поширення поздовжніх хвиль супроводжується відповідними змінами тиску на величину Δp порівняно з його середнім значенням у деформованому середовищі. При поширенні звукових хвиль відбувається також перенесення енергії у напрямі поширення їх. Перенесення енергії хвилями характеризують густиною потоку енергії, який в акустиці називають інтенсивністю або силою звуку. Інтенсивність, або сила, звуку — це енергія, що переноситься за одиницю часу через одиницю площі поверхні у перпендикулярному напрямі до неї.

Знайдемо взаємозв'язок між звуковим тиском Δp, *інтенсивністю звуку* I і швидкістю його поширення. Для спрощення розглядатимемо поширення плоскої хвилі у середовищі, в якому енергія звукової хвилі

не поглинається. У звуковому полі уявно виділимо елементарний циліндр з площею основи ΔS і довжиною Δx, вздовж осі якого поширюється плоска хвиля:

$$\xi = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v}\right). \tag{12.8}$$

Внаслідок перепаду тиску на цей циліндр діятиме сила $\frac{dp}{dx} \Delta x \Delta S$. На основі другого закону Ньютона матимемо рівняння

$$\rho \Delta S \Delta x \frac{d^2\xi}{\partial t^2} = - \frac{dp}{dx} \Delta x \Delta S. \tag{12.9}$$

Оскільки

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = - A\omega^2 \sin \omega \left(t - \frac{x}{v}\right),$$

то з (12.9) виходить, що

$$dp = \rho A \omega^2 \sin \omega \left(t - \frac{x}{v}\right) dx. \tag{12.10}$$

Проінтегрувавши вираз (12.10), дістанемо закон зміни звукового тиску

$$\Delta p = \rho A \omega v \cos \omega \left(t - \frac{x}{v}\right). \tag{12.11}$$

Звідси випливає, що звуковий тиск пропорційний густині середовища, швидкості поширення хвиль, а також величині $A\omega$, яка є амплітудою швидкості зміщень коливальних точок у хвилі. Величину $\rho A \omega v$ називають *амплітудою* звукового тиску, тобто

$$\Delta p_0 = \rho A \omega v. \tag{12.12}$$

Величину ρv називають *хвильовим опором*. У разі поширення звукових хвиль цю величину називають акустичним опором середовища.

Густина потоку енергії (11.34) визначається формулою

$$I = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 v. \tag{12.13}$$

З урахуванням (12.12) вираз (12.13) можна записати у такій формі:

$$I = \frac{(\Delta p_0)^2}{2\rho v}. \tag{12.14}$$

Отже, інтенсивність звуку прямо пропорційна квадрату амплітуди акустичного тиску і обернено пропорційна акустичному опору середовища.

Щоб визначити інтенсивність звуку, користуються диском Релея. Цей диск D із слюди має діаметр 2—5 мм і товщину 0,02—0,03 мм. Його підвішують на тонкій кварцовій нитці під кутом 45° до напряму поширення звукових хвиль. У звуковому полі на диск діють сили, які намагаються повернути його перпендикулярно до напряму швидкості руху частинок у хвилі, що швидко змінюються як за напрямом, так і за величиною. Внаслідок симетрії картини обтікання диска (рис. 12.1) зміна напряму швидкості частинок не приводить до зміни напряму обертаючого моменту, що діє на диск. Цей момент пропорційний квадрату амплітуди швидкості частинок у хвилі. За величиною кута обертання диска знаходять обертаючий момент. За його величиною визначають амплітуду швидкості частинок у хвилі, а потім амплітуду звукового тиску. На основі добутих даних за формулою (12.14) обчислюють інтенсивність звуку.

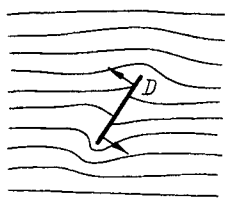


Рис. 12.1

У процесі поширення звукових хвиль у будь-якому реальному середовищі відбувається загасання їх. Амплітуда коливань частинок середовища монотонно зменшується зі збільшенням відстані від джерела звуку. Однією з основних причин, що зумовлює загасання хвиль, є дія сил внутрішнього тертя на частинки середовища при відносних рухах їх. На подолання цих сил безперервно витрачається механічна енергія коливального руху, що переноситься хвилею. Ця енергія перетворюється в енергію хаотичного теплового руху молекул і атомів середовища. Оскільки енергія хвилі пропорційна квадрату амплітуди коливань частинок середовища, то при поширенні хвиль від джерела звуку разом із зменшенням запасу енергії коливального руху зменшується і амплітуда коливань.

Встановимо характер залежності амплітуди коливань від відстані поширення хвилі. Спочатку розглянемо плоску хвилю, яка поширюється у напрямі осі OX. Нехай у точці з координатою x амплітуда коливань A. При поширенні хвилі через шар товщиною dx амплітуда коливань зменшиться на $-dA$. Відносна зміна амплітуди коливань пропорційна товщині шару середовища, тобто

$$- \frac{dA}{A} = k dx, \tag{12.15}$$

де k — коефіцієнт пропорційності. Він залежить від частоти, температури та інших факторів. Проінтегрувавши рівняння (12.15), дістаємо

$$A = A_0 e^{-kx}, \tag{12.16}$$

де A_0 — амплітуда коливань джерела звуку. З (12.16) видно, що амплітуда коливань зменшується за експоненціальним законом.

Оскільки інтенсивність пропорційна квадрату амплітуди коливань, то зменшення інтенсивності звуку відбуватиметься за законом

$$I = I_0 \, e^{-2kx}. \qquad (12.17)$$

Величину $2k$ називають *коефіцієнтом поглинання* звуку.

При поширенні сферичної хвилі, коли енергія не поглинається середовищем, амплітуда коливань частинок середовища обернено пропорційна відстані від джерела хвиль. З цього випливає, що інтенсивність сферичної звукової хвилі обернено пропорційна квадрату відстані від джерела звуку. Якщо враховувати поглинання енергії сферичних звукових хвиль середовищем, ця залежність інтенсивності звуку від відстані до джерела звуку матиме складніший характер.

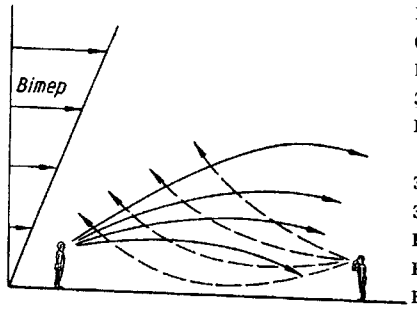


Рис. 12.2

Насправді характер згасання звуку в атмосфері складніший, ніж за формулою (12.17). Це пояснюється тим, що на поширення звуку в будь-яких середовищах впливають його неоднорідність та рух середовища. Так, у шарі повітря, що прилягає до поверхні землі, швидкість вітру зростає з висотою. Внаслідок цього при наявності вітру різні ділянки фронту звукової хвилі матимуть різні швидкості відносно землі. Це приводить до відхилення променя від прямої лінії, тобто виникає заломлення звукових хвиль. На рис. 12.2 показано вплив вітру на поширення звуку. Хвилі, що поширюються під деяким кутом назустріч вітру, змінюють свій напрям поширення і відхиляються вгору. Хвилі, що поширюються за вітром, також змінюють свій напрям поширення і "притискаються" до землі. Внаслідок цього від джерела звук поширюється у напрямі вітру на значно більшу відстань, ніж проти вітру.

Крім вітру, в атмосфері існують турбулентні потоки, що приводять до розсіювання звуку. На рис. 12.3,*а* зображено поширення звукових хвиль в атмосфері, коли температура з висотою зменшується. Внаслідок залежності швидкості звуку в повітрі від температури промені звукових хвиль відхиляються вгору. Якщо повітря біля поверхні землі має нижчу температуру, ніж у верхніх шарах атмосфери, то промені звукових хвиль "притискаються" до землі (рис. 12.3,*б*). Такий розподіл температур буває в безхмарні ночі, коли поверхня землі і прилеглі до неї шари повітря швидко охолоджуються внаслідок теплового випромінювання. Тому відстань, на якій сприймаються звуки в жаркий день, значно менша за відстань до джерела, від якого сприймаються звуки вночі. Якщо в шарі повітря, що розташований на

певній висоті від землі, температура змінюється стрибкоподібно, то звук, досягши цього шару, відбивається до землі. Після відбивання від землі звук зазнає наступного відбивання від цього шару і т. д. При цьому відстань, на яку поширюється звук, може значно збільшитись.

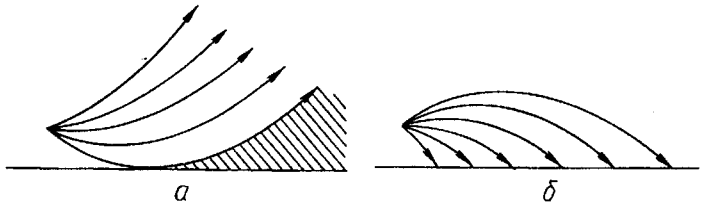


Рис. 12.3

Оскільки коефіцієнт поглинання звуку залежить від кінематичної в'язкості середовища, то поглинання звуків у воді значно менше, ніж у повітрі. Тому звук у воді поширюється на більшу відстань, ніж у повітрі. В зв'язку з тим що радіохвилі та світлові промені досить швидко згасають у воді, єдиним засобом для здійснення сигналізації під водою є звукові й ультразвукові хвилі. Вивчення закономірностей поширення цих хвиль у воді становить предмет гідроакустики.

На поширення звуку у воді також впливають течії, температурні градієнти, турбулентні неоднорідності, зміни концентрації вмісту розчинених солей тощо.

§ 12.3. Сприймання звуку

Людина сприймає звуки, які знаходяться в діапазоні частот від 16 Гц до 20 кГц. Чутливість органів слуху людини до різних частот неоднакова. Для того щоб людина реагувала на звук, необхідно, щоб його інтенсивність була не меншою від деякої мінімальної величини, яку називають *порогом чутності*. Поріг чутності для різних частот неоднаковий. Людське вухо має найбільшу чутливість до коливань, частоти яких знаходяться в діапазоні від 1 до 3 кГц. Поріг чутності для цих частот порядку 10^{-12} Дж/(м^2·с). При досить значному збільшенні інтенсивності звуку для цих самих частот коливань вухо перестає сприймати коливання як звук. Такі коливання спричиняють у ньому відчуття болю. Найбільшу інтенсивність звуку, при якій людське вухо сприймає коливання як звук, називають *порогом больового відчуття*. Поріг больового відчуття для наведених частот відповідає інтенсивності звуку близько 1 Дж/(м^2·с).

На рис. 12.4 нижня і верхня криві відповідно показують залежність порогу чутності і порогу больового відчуття людського вуха від частоти. Область, що лежить між цими кривими, називається *областю чутності*. З рис. 12.4 видно, що найбільша відстань між кривими припа-

дає на частоти, до яких вухо найбільш чутливе, тобто вухо сприймає досить великий діапазон зміни інтенсивності звуку від 1 до 10^{-12} Дж/(м^2·с). Оскільки цей діапазон припадає на частоту близько 1 кГц, то звук цієї частоти взято за еталон для порівняння з ним звуків інших частот.

Хоча звукові хвилі сприймаються органами слуху, сучасна техніка дає можливість спостерігати їх візуально, тобто робити звук видимим. Це зумовило необхідність більш глибокого вивчення явищ, що виникають при поширенні звукових хвиль. Так, вивчаючи властивості звуку, що лежать за межами сприймання на слух, необхідно знати методи візуального спостереження їх. Виявляється, що значно легше проводити аналіз складних звуків мови або музики не на слух, а за допомогою візуального аналізу картини звукових хвиль.

✓ Звук як фізичне явище характеризується певною частотою, інтенсивністю або звуковим тиском, набором частот. Це — об'єктивні характеристики звуку. Людські органи слуху сприймають звук за гучністю, висотою (висота тону) і тембром. Ці характеристики мають суб'єктивний характер.

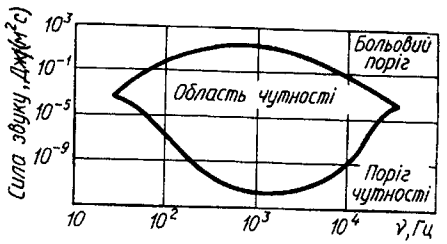


Рис. 12.4

Фізичному поняттю інтенсивності звуку відповідає фізіологічне відчуття гучності звуку. Зауважимо, що поняття інтенсивності і гучності звуку не рівнозначні. Встановлено, що гучність зростає значно повільніше, ніж інтенсивність звуку. Суб'єктивна гучність звуку не піддається точному кількісному вимірюванню. Проте оцінку гучності звуку можна зробити за допомогою досить наближеного фізіологічного закону Вебера — Фехнера. Відповідно до цього закону з наростанням інтенсивності звуку його гучність змінюється наближено за логарифмічним законом. Якщо інтенсивність звуку I, а поріг чутності I_0, то гучність звуку

$$L = k \lg \frac{I}{I_0}, \qquad (12.18)$$

де k — коефіцієнт пропорційності. Для акустичних вимірювань за I_0 беруть інтенсивність, яка відповідає порогу чутності для частоти 1 кГц, тобто $I_0 = 10^{-12}$ Дж/(м^2·с). У рівності (12.18) L виражає собою деяку абстрактну величину, що характеризує гучність звуку, інтенсивність якого дорівнює I. Величину L називають також рівнем гучності звуку.

Вибір коефіцієнта пропорційності k, взагалі кажучи, цілком довільний. Якщо вважати його таким, що дорівнює одиниці, то рівень

гучності виразиться в одиницях, які називаються белами. Практично виявилось більш зручним користуватися одиницями в десять разів меншими, які називають децибелами (дБ). Тоді рівень гучності звуку, що має інтенсивність I, визначається формулою

$$L = 10 \lg \frac{I}{I_0}. \qquad (12.19)$$

Так, якщо інтенсивність звуку I в десять разів більша інтенсивності I_0, яка відповідає порогу чутності для частоти 1 кГц, то рівень гучності дорівнює 10 дБ; якщо I більше в 100 разів від I_0, то гучність дорівнює 20 дБ; якщо ж I більше від I_0 в 10^{13} разів, то гучність дорівнює 130 дБ. Іншими словами, коли відношення інтенсивностей I/I_0 збільшується у десять разів, то гучність звуку, виражена в децибелах, збільшується на десять.

Якщо вимірюють не інтенсивність звуку, а його тиск Δp, то на основі (12.14)

$$L = 20 \lg \frac{\Delta p}{\Delta p_0},$$

де $\Delta p_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ Па — тиск звуку, що відповідає порогу чутності. Висота звуку визначається його частотою. Чим більша частота, тим більша висота звуку. Людські органи слуху досить чутливі до зміни частоти. Так, в області частот 2 кГц людина здатна сприймати два тони, частоти яких відрізняються на 3—6 Гц.

Тембр звуку визначається його спектральним складом. Тембр — це відтінок складного звуку, яким відрізняються один від одного звуки однакової сили і висоти. Об'єктивно тембр визначається набором частот простих коливань, які входять до складу звуку. На слух легко відрізнити звук рояля від звуку скрипки. Для спектрального аналізу звуку його необхідно розкласти на окремі гармонічні складові. Для проведення такого аналізу німецький природодослідник Г. Гельмгольц (1821 — 1894) виготовив набір резонаторів, які названо його ім'ям. На рис. 12.5 зображено один із резонаторів Гельмгольца. Це тонкостінна металева куля з двома діаметрально розміщеними отворами. Один з отворів має вигляд конуса, який вставляють у вухо. Через другий отвір хвилі потрапляють у порожнину резонатора. Власна частота коливань резонатора Гельмгольца залежить від його об'єму і наближено визначається за формулою

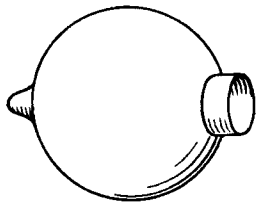


Рис. 12.5

$$\omega_0 = \frac{v}{2\pi}\sqrt{\frac{d}{V}},$$

де d — діаметр вхідного отвору; V — об'єм порожнини резонатора.

Прості тони складного звуку збуджують тільки ті резонатори, для яких власна частота коливань близька або дорівнює частоті даного тону.

Органи слуху людини здатні реагувати тільки на висоту тону і гучність, але не реагують на фазові зміщення у складних звуках. Внаслідок цього всі слухачі в залі однаково сприймають мелодію та мову. Наявність у людини парного органа слуху дає можливість встановити напрям, в якому поширюються звуки від джерела, на основі так званого бінаурального ефекту.

§ 12.4. Джерела звуку

Будь-яке тіло, що знаходиться у пружному середовищі і коливається із звуковою частотою, є джерелом звуку. У струнних інструментах джерелом звуку є струна, з'єднана з корпусом інструмента; у свистках, духових трубах, у голосовому органі людини джерелом звуку є певний об'єм повітря. У гучномовцях, телефонах звук випромінює поверхня пружної пластини (мембрана), що коливається. Струнами називаються тверді тіла, поперечними розмірами яких можна нехтувати у порівнянні з їх довжинами. Якщо елементу струни, закріпленої з обох кінців, надати імпульс, перпендикулярний до її напряму, то він поширюватиметься вздовж струни. Імпульс зміщень, що виникнуть у деякій точці струни, дійде до її кінця, відіб'ється і поширюється до другого кінця струни, потім знову відіб'ється.

Внаслідок накладання падаючої і відбитої хвиль виникає стояча хвиля, вузлами якої будуть кінці струни. З цього випливає, що вздовж натягненої струни, кінці якої закріплено нерухомо, можуть утворюватися стоячі хвилі тільки таких довжин, щоб вздовж довжини струни l вміщалось ціле число півхвиль, тобто коли

$$l = n\frac{\lambda}{2}, \quad n = 1, 2, 3,... \tag{12.20}$$

Довжинам хвиль, що визначаються умовою (12.20), відповідають частоти

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = n\frac{v}{2l}, \tag{12.21}$$

де v — фазова швидкість поширення хвилі в струні, яка залежить від сили натягу струни і її лінійної густини.

Коливання з частотою $\nu = v/(2l)$ називають основним тоном струни. Усі інші частоти можливих коливань струни, кратні частоті основного тону, називають обертонами.

Оскільки струни мають малі розміри, то вони не можуть генерувати в оточуючому повітрі потужні звукові хвилі. Тому в музичних інструментах струни натягують на деки (плоскі дерев'яні пластинки) або дерев'яні ящики, здатні резонувати на частоті струни. Випромінювання звуку при цьому відбувається з великої поверхні резонатора.

У повітряному стовпі, що знаходиться в трубі довжиною l, кінці якої відкриті і не перешкоджають руху частинок повітря, також утворюються стоячі хвилі. На відміну від попереднього випадку на кінцях труби знаходяться пучності стоячих хвиль. Частоти коливань визначаються також умовою (12.21).

У повітряному стовпі, що знаходиться в трубі довжиною l, один кінець якої відкритий, а другий закритий, можуть також утворитися стоячі хвилі. На закритому кінці труби будуть вузли, а на відкритому кінці — пучності. З цього випливає, що утворюються тільки такі стоячі хвилі, коли у довжині труби вміщується непарне число чвертей довжин хвиль, тобто коли

$$l = (2n - 1)\frac{\lambda}{4}, \quad n = 1, 2, 3,... \tag{12.22}$$

Цим довжинам хвиль відповідають частоти коливань

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = (2n - 1)\frac{v}{4l}. \tag{12.23}$$

На рис. 12.6 зображено стоячі хвилі для випадків: а) натягненої струни; б) повітряного стовпа, відкритого з обох кінців; в) повітряного стовпа, закритого з одного кінця. В усіх випадках $n = 1, 2, 3$.

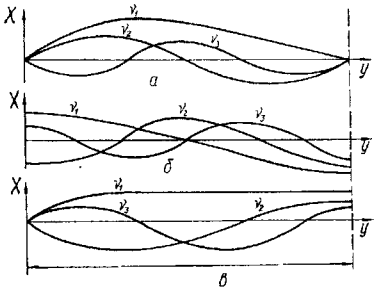


Рис. 12.6

Мембрана — гнучка тонка плівка, яка внаслідок розтягання зовнішніми силами має пружність. Від мембран необхідно відрізняти пластинку, пружні властивості якої залежать від її товщини та речовини, з якої вона виготовлена. Прикладами мембран є шкіра, натягнута на барабан, тонка металева фольга, що відіграє роль рухомої обкладки конденсаторного мікрофона. Рухома система телефона з погляду теорії пружності повинна розглядатися не як мембрана, а як пластинка. На мембрані хвиля поширюється по

її поверхні, і стоячі хвилі, що на них утворюються, мають не вузлові точки, а вузлові лінії. При звучанні мембрани на основному тоні всі точки її поверхні коливаються в однакових фазах. Вузловою лінією при цьому є лінія, по якій закріплено мембрану. При збудженні більш високих тонів поверхня мембрани виявляється поділеною вузловими лініями на окремі зони. Характер розміщення вузлових ліній і зон можна спостерігати, якщо мембрану посипати дрібним піском і примусити її коливатися.

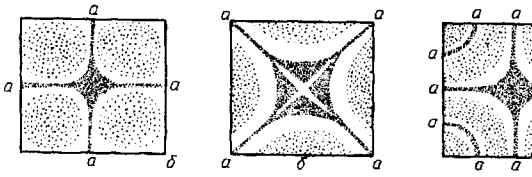


Рис. 12.7

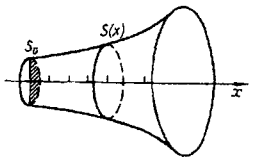


Рис. 12.8

На рис. 12.7 показано характер вузлових ліній і зон, що утворюються на мембрані у вигляді пластинки, закріпленої в центрі. Утворені фігури називають *фігурами Хладні*. Коли розміри мембрани великі порівняно з довжиною хвилі, яку вона збуджує, то можна вважати, що вона випромінює плоску хвилю. Для того щоб випромінювання було більш напрямленим від мембран, застосовують рупори. Вони являють собою труби, поперечний переріз яких монотонно збільшується. Найбільше практичне застосування мають так звані експоненціальні рупори (рис. 12.8), в яких площа поперечного перерізу змінюється за законом

$$S(x) = S_0 e^{\alpha x},$$

де α — стала величина, яку називають показником розширення рупора.

Після припинення дії джерела звуку у приміщенні розсіяний звук не зникає раптово. Це пояснюється відбиванням звукових хвиль від стін приміщення. Час, протягом якого після припинення дії джерела звук повністю зникає, називають *часом реверберації*. Умовно вважають, що час реверберації дорівнює проміжку часу, протягом якого інтенсивність звуку зменшиться в мільйон разів.

Час реверберації — це важлива характеристика акустичних властивостей концертних залів, кінозалів, аудиторій та ін. При великому часі реверберації мова і музика звучать досить голосно, але невиразно. При малому часі реверберації мова і музика звучать слабо і глухо. Тому в кожному конкретному випадку добиваються оптимальних акустичних характеристик приміщень.

Механізм створення звуків людиною в загальних рисах такий. Голосові зв'язки, що знаходяться у нижній частині горла, здійснюють

коливання. Власні частоти порожнини рота регулюються розміщенням язика, зубів та губ. Порожнина резонує і забезпечує необхідну інтенсивність звуку.

Приклад 12.2. Відомо, що швидкість поперечних хвиль у струні визначається формулою $v = \sqrt{T / \rho}$, де T — натяг струни, ρ — її лінійна густина. Знайти відношення частот основного тону двох однакових струн, одну з яких розтягнули на $\eta_1 = 2{,}0$ %, а другу — на $\eta_2 = 4{,}0$ % відносно довжини струни в нерозтягнутому стані. Натяг струни T вважати пропорційним розтягу.

Розв'язання. Оскільки частота основного тону визначається співвідношенням

$$\nu = \frac{v}{2l} = \sqrt{\frac{T}{4l^2\rho}},$$

то відповідно

$$\nu_1 = \sqrt{\frac{T_1}{4l^2\rho_1}}, \qquad \nu_2 = \sqrt{\frac{T_2}{4l^2\rho_2}}.$$

За умовою задачі $T = k\Delta l$ (k — коефіцієнт пропорційності, Δl — розтяг струни). Тоді $T_1 = \eta_1 k \frac{l}{100}$, $T_2 = \eta_2 k \frac{l}{100}$. Лінійна густина відповідно

$$\rho_1 = \frac{m}{l + \frac{\eta_1 l}{100}}, \qquad \rho_2 = \frac{m}{l + \frac{\eta_2 l}{100}}.$$

де m — маса струни.

Знаходимо, що відношення

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{\frac{\eta_2 (100 + \eta_1)}{\eta_1 (100 + \eta_2)}} = 1{,}4.$$

§ 12.5. Ефект Доплера

Швидкість поширення звукових хвиль у середовищах не залежить від руху джерела і приймача звуку. Дослід показує, що коли джерело і приймач звуку нерухомі відносно середовища, в якому поширюються звукові хвилі, то частота звуку, яку генерує джерело, дорівнює частоті, яку реєструє приймач. Зовсім інша картина, коли джерело звуку і приймач перебувають у русі відносно середовища, в якому поширюється звук. При цьому частота звуку, яку реєструє приймач, відрізняється від частоти звуку, яку генерує джерело. Зміна частоти звуку, що сприймається при відносному русі джерела і приймача звуку, називається ефектом або явищем Доплера. Розглянемо спочатку випадок, коли джерело звуку нерухоме відносно середовища, в якому поширюються звукові хвилі. Якщо частота коливань звуку ν_0 і швидкість його поширення в середовищі v, то довжина звукової хвилі $\lambda = v / \nu_0$. При русі приймача з швидкістю v' до джерела вздовж лінії, що їх сполучає, швидкість поширення звуку відносно приймача дорівнюватиме $v + v'$. Оскільки довжина звукової хвилі при цьому не

змінюється, то за одиницю часу до рухомого приймача прийде більша кількість хвиль, ніж до нерухомого. Частота коливань, яку реєструє рухомий приймач,

$$\nu' = \frac{v + v'}{\lambda} = \nu_0 \frac{v + v'}{v} = \nu_0 \left(1 + \frac{v'}{v}\right). \qquad (12.24)$$

Звідси випливає, що приймач, який рухається до джерела звуку, реєструє більшу частоту, ніж частота коливань джерела звуку. Якщо приймач звуку віддаляється від нерухомого джерела звуку зі швидкістю v', то швидкість звукових хвиль відносно приймача буде $v - v'$. Приймач звуку реєструватиме при цьому меншу частоту, ніж та, яку генерує джерело звуку, а саме:

$$\nu' = \nu_0 \left(1 - \frac{v'}{v}\right). \qquad (12.25)$$

Розглянемо випадок, коли джерело звуку рухається вздовж лінії, що сполучає джерело і приймач звуку, з швидкістю u відносно середовища, а приймач звуку нерухомий. Коли джерело звуку наближається до приймача, то за час, що дорівнює періоду коливань джерела звуку, хвиля поширюється на відстань vT до приймача звуку. За цей самий час джерело звуку в тому ж напрямі переміститься на відстань uT. Довжина хвилі при цьому

$$\lambda' = vT - uT = (v - u)\, T.$$

Оскільки швидкість звуку відносно приймача залишається v, то приймач реєструє частоту

$$\nu' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{(v - u)\, T} = \nu_0 \frac{1}{1 - \frac{u}{v}}, \qquad (12.26)$$

тобто реєструє більшу частоту, ніж частота звуку джерела.

При віддалянні джерела звуку від приймача довжина хвилі

$$\lambda' = (v + u)\, T,$$

і приймач реєструє частоту меншу, ніж частота звуку джерела, а саме:

$$\nu' = \frac{v}{\lambda'} = \nu_0 \frac{1}{1 + \frac{u}{v}}. \qquad (12.27)$$

Якщо джерело і приймач звуку рухатимуться одночасно, то довжина хвилі і швидкість поширення їх відносно приймача звуку змінюватимуться.

При цьому частота, яку реєструє приймач,

$$\nu' = \nu_0 \frac{1 \pm \frac{v'}{v}}{1 \mp \frac{u}{v}} = \nu_0 \frac{v \pm v'}{v \mp u}. \qquad (12.28)$$

Знак "плюс" у чисельнику виразу відповідає випадку, коли приймач наближається до джерела звуку; знак "мінус" — коли віддаляється. У знаменнику знаки стоять навпаки, тобто знак "мінус" вказує на наближення джерела до приймача звуку, а знак "плюс" — на віддалення його від джерела звуку.

Якщо приймач або джерело звуку рухаються не вздовж прямої, що сполучає їх, то ефект Доплера визначається проекціями швидкостей руху на напрям цієї прямої.

Зауважимо, що всі швидкості, які входять до формули (12.28), визначаються відносно того середовища, в якому поширюється звук.

Ефект Доплера спостерігається і для електромагнітних хвиль.

§ 12.6. Ударні хвилі

Якщо джерело звуку рухається в повітрі з швидкістю, яка менша від швидкості звуку, то з кожної точки траєкторії руху джерела збуджені хвилі поширюються з швидкістю, що переважає швидкість руху тіла. Для невеликих швидкостей джерела звуку додатковий тиск повітря, що виникає внаслідок його стискання джерелом, буде незначним порівняно з атмосферним тиском. Швидкість поширення збудженої хвилі практично дорівнюватиме швидкості звуку при атмосферному тиску.

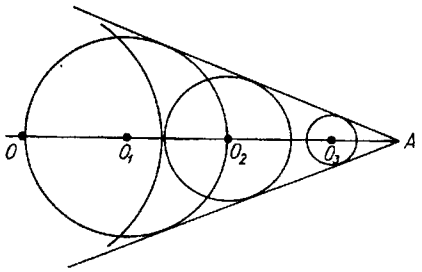


Рис. 12.9

Зовсім іншим є характер поширення збудженої хвилі в повітрі джерелом, що рухається з надзвуковою швидкістю. При русі точкового джерела звуку в повітрі з надзвуковою швидкістю v відбувається його зіткнення з частинками повітря, які також починають рухатися. Внаслідок цього поблизу тіла виникають імпульси стискання. Вони поширюються в усіх напрямах із швидкістю звуку у вигляді сферичних хвиль.

На лінії OA (рис. 12.9) точками O, O_1, O_2, O_3 позначено перебування джерела звуку через однакові проміжки часу. Кожні з цих точок можна розглядати як центр звукових хвиль, які виникають у ті

моменти, коли там перебуває джерело звуку. В момент часу, коли джерело звуку буде в точці A, з точок O, O_1, O_2, O_3 звукові хвилі поширяться на різні відстані. Кожна з цих хвиль знаходиться за джерелом звуку. В своїй сукупності вони утворюють у просторі конічну поверхню, у вершині якої буде рухоме джерело звуку. Конічна поверхня в кожну мить відділяє середовище, де збурень немає, від збуреного середовища.

Така поверхня виступає як фронт ударної хвилі. Ударна хвиля, що поширюється з надзвуковою швидкістю, являє собою тонку перехідну область, в якій відбувається різке збільшення густини, тиску, температури і швидкості частинок середовища. Ударні хвилі виникають при вибухах, детонації, при рухах тіл з надзвуковою швидкістю, при потужних електричних розрядах і т. п.

Ударні хвилі не характеризуються періодичністю у просторі, як це властиво звичайним звуковим хвилям. Це рухомі області значного стиснення, які поширюються у просторі з швидкістю звуку. Швидкість переміщення вершини конуса дорівнює швидкості руху джерела звуку.

Визначимо кут α, який утворює фронт ударної хвилі з напрямом руху джерела звуку. Якщо швидкість джерела звуку u, а швидкість звуку в середовищі v, то за час t, протягом якого джерело пройде відстань $OA = ut$, сферична хвиля з точки O поширюється на відстань $r = vt$. Тоді

$$\sin\alpha = \frac{vt}{ut} = \frac{v}{u}. \qquad (12.29)$$

З формули (12.29) видно, що $\sin\alpha$ виражає число Маха (7.38). Простір, обмежений конусом, кут якого визначається співвідношенням (12.29), називають *конусом Маха.*

Ударні хвилі завжди виникають під час руху тіл у середовищах з надзвуковими швидкостями незалежно від того, чи вони є джерелом звуку.

На створення ударних хвиль витрачається енергія. Кінетична енергія тіла частково перетворюється в енергію звукових хвиль. В результаті цього швидкість руху тіла зменшується, тобто на тіло діє сила опору.

Форма тіла істотно впливає на силу опору. Порівняно меншими будуть сили опору для гостролобих тіл з малим поперечним перерізом. Таку форму мають ракети, реактивні літаки тощо.

§ 12.7. Ультразвук та його застосування

Як уже зазначалося, пружні хвилі, частоти яких лежать в інтервалі від $2 \cdot 10^4$ до 10^9 Гц, називають ультразвуком. Хвилі, частоти яких лежать в інтервалі від 10^9 до 10^{13} Гц, називають гіперзвуком. Увесь

діапазон частот ультразвукових хвиль умовно поділяють на три піддіапазони: ультразвукові хвилі низьких ($2 \cdot 10^4$—10^5 Гц), середніх (10^5—10^7 Гц) і високих частот (10^7—10^9 Гц). Кожний з цих піддіапазонів характеризується своїми специфічними особливостями генерування, приймання, поширення й застосування.

За фізичною природою ультразвукові хвилі такі, як і звукові будь-яких довжин. Проте внаслідок більш високих частот ультразвук має ряд специфічних особливостей при його поширенні. У зв'язку з тим, що довжини ультразвукових хвиль досить малі, характер їх поширення визначається в першу чергу молекулярними властивостями речовини. Характерна особливість поширення ультразвуку в багатоатомних газах та в рідинах — це існування інтервалів довжин хвиль, в межах яких проявляється залежність фазової швидкості поширення хвиль від їх частоти, тобто має місце дисперсія звуку. В цих інтервалах довжин хвиль також відбувається значне поглинання ультразвуку. Тому при поширенні його у повітрі відбувається більш значне його затухання, ніж звукових хвиль. У рідинах та твердих тілах (особливо монокристалах) затухання ультразвуку значно менше. Тому область застосування ультразвуку середніх і високих частот належить в основному до рідин і твердих тіл, а в повітрі та в газах застосовують тільки ультразвук низьких частот.

Ще одна особливість ультразвуку — це можливість одержання великої інтенсивності навіть при порівняно невеликих амплітудах коливань, оскільки при певній амплітуді густина потоку енергії пропорційна квадрату частоти (див. формулу (12.13)). Поширення ультразвукових хвиль великої інтенсивності супроводжується нелінійними ефектами. Так, при поширенні плоских ультразвукових хвиль у рідинах та в твердих тілах, для яких коефіцієнт поглинання незначний, синусоїдальна хвиля перетворюється в ударну хвилю пилкоподібної форми, поглинання якої значно більше, тобто відбувається нелінійне поглинання.

Поширення ультразвукових хвиль у газах та рідинах супроводжується рухом середовища в напрямі поширення хвиль. Такий рух називають *акустичною течією,* швидкість якої залежить від в'язкості середовища, інтенсивності ультразвуку та його частоти.

До важливих нелінійних явищ, що виникають при поширенні інтенсивних ультразвукових хвиль у рідинах, належить акустична кавітація. Це явище полягає в тому, що при випромінюванні у рідину інтенсивних звукових хвиль з амплітудою звукового тиску, яка перевищує деяку величину, протягом півперіодів розріджень виникають кавітаційні бульбашки. При їх захлопуванні протягом півперіодів стискання створюються короткочасні імпульси тиску, які здатні руйнувати навіть досить міцні матеріали. Інтенсивність, що відповідає пороговому значенню амплітуди звукового тиску, при якій виникає явище кавітації, залежить від природи рідини, частоти звуку, температури та інших факторів.

Для одержання ультразвукових хвиль застосовують різні пристрої, які можна поділити на дві групи: механічні і електромеханічні. Механічні джерела ультразвуку — це повітряні та рідинні свистки і сирени. Основними випромінювачами ультразвуку є електромеханічні джерела, які здатні перетворювати електричні коливання в механічні. До них належать електродинамічні, п'єзоелектричні і магнітострикційні випромінювачі.

Електродинамічні джерела використовуються для генерування низькочастотних ультразвукових і звукових коливань. Найбільш широкого застосування набули п'єзоелектричні і магнітострикційні джерела ультразвуку.

У природі існує багато кристалічних речовин (сегнетоелектрики — кварц, сегнетова сіль, турмалін, титанат барію та ін.), які при деформаціях розтягу або стиску у певних напрямах поляризуються, тобто на протилежних гранях виникає різниця потенціалів, пропорційна механічній напрузі. Це явище називають прямим п'єзоелектричним ефектом. Поряд з п'єзоелектричним ефектом існує і протилежне явище. Якщо пластинку з такої речовини розмістити між електродами, до яких приєднано джерело змінної напруги, то пластинка під дією електричного поля буде періодично то видовжуватися, то скорочуватися. Це явище називають оберненим п'єзоелектричним ефектом. Робота п'єзоелектричних джерел ультразвуку грунтується на оберненому п'єзоелектричному ефекті, оскільки коливання поверхні пластинки збуджують у середовищі ультразвукові хвилі. Якщо частота коливань напруги, прикладеної до пластинки, збігається з її власною частотою коливань, то настає резонанс, і амплітуда вимушених коливань пластинки досягає максимуму. При цьому утворюються поздовжні хвилі, вузли яких будуть на кінцях пластинки. Розміщення хвиль і електричних зарядів у кварцовій пластинці схематично зображено на рис. 12.10. З рисунка випливає, що коливання виникатимуть за умови, коли в пластинці вміщається непарна кількість півхвиль. З цієї умови знаходимо частоти, які може випромінювати пластинка:

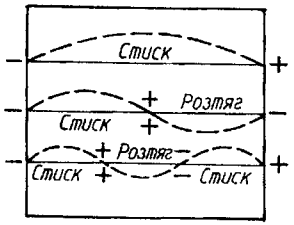


Рис. 12.10

$$\nu = \frac{2n + 1}{2l} v, \qquad (12.30)$$

де $n = 0, 1, 2, \ldots$; l — товщина пластинки; v — швидкість поширення пружних хвиль у пластинці.

З формули (12.30) знаходимо, що власна частота коливань пластинки

$$\nu = v / (2l). \qquad (12.31)$$

Оскільки для кварцу $v = 5600$ м/с, то $\nu = 2800/l$ (Гц). Кварцові пластинки здатні випромінювати ультразвукові коливання з частотами від десятків до тисяч кілогерц. Більш високих частот досягають за допомогою кварцових пластинок при збудженні коливань, що відповідають обертонам. Інтенсивність випромінювання при цьому значно зменшується. Кварцові пластинки створюють хвилі порівняно невеликої інтенсивності.

Щоб мати ультразвукові хвилі більшої інтенсивності, користуються магнітострикційними випромінювачами. Магнітострикційний ефект полягає в тому, що ряд феромагнетиків змінює свої розміри під дією магнітного поля. Якщо феромагнітний стержень розмістити в магнітному полі, яке змінюється з ультразвуковою частотою, то з такою самою частотою стержень зазнаватиме видовжень і скорочень, тобто здійснюватиме механічні коливання. При резонансі амплітуда цих коливань різко зростає і стержень випромінюватиме ультразвуки значної інтенсивності.

Внаслідок існування прямого і оберненого п'єзоелектричного ефекту п'єзоелектричні перетворювачі використовуються і для приймання ультразвуку. Для вивчення ультразвукового поля користуються також оптичними методами. Поширення ультразвукових хвиль у прозорих середовищах зумовлює зміну його показника заломлення світла, що дає можливість візуально спостерігати звукове поле. Сукупність згущень і розріджень, що виникають при поширенні ультразвуку в прозорих середовищах, утворює своєрідну дифракційну гратку. Дифракція світла на таких гратках покладена в основу акустооптики, яка почала розвиватися після створення газових лазерів.

Ультразвук широко застосовується в різних галузях знань, а також у техніці. Різноманітність застосувань ультразвуку умовно можна поділити на три напрями: одержання інформації за допомогою ультразвукових методів; дія ультразвуку на речовину; обробка і передача сигналів.

У першому напрямі ультразвукові методи застосовуються для вивчення властивостей і будови речовини, для з'ясування процесів, що в них відбуваються на макро- і мікрорівнях. Ці методи грунтуються в основному на залежності швидкості поширення і затухання ультразвукових хвиль від властивостей речовин і від процесів, що в них відбуваються. Такі методи застосовуються у молекулярній акустиці. Вони допомогають з'ясувати особливості молекулярної структури речовини, визначити енергію взаємодії молекул, перевірити припущення про структурні моделі. Вивчення поширення ультразвуку в кристалах дає інформацію про особливості будови кристалічної гратки. Ультразвукові методи, що грунтуються на вимірюваннях швидкості звуку, дають можливість визначити пружні характеристики та міцність металевих матеріалів, кераміки, полімерів, ступінь їхньої чистоти, наявність домішок.

Ультразвукові методи для отримання інформації грунтуються на відбиванні і розсіюванні ультразвукових хвиль на межах між різними середовищами. Ці методи дають можливість здійснювати ультразвукову локацію. У зв'язку з тим що ультразвукові хвилі поглинаються у воді майже в 1000 разів слабше, ніж у повітрі, напрямлені пучки ультразвукових хвиль широко застосовуються в гідроакустиці для сигналізації і гідролокації під водою. Застосування ультразвукових хвиль в гідроакустиці має важливе значення, оскільки це єдиний вид хвиль, який поширюється на великі відстані в природних водних середовищах. За допомогою імпульсних ультразвукових ехолотів визначають глибину моря чи океану, виявляють косяки риб. За допомогою гідролокаторів виявляють підводні човни, айсберги та ін.

На рис. 12.11 зображено схему будови ехолота. Його дія грунтується на вимірюванні проміжку часу між моментом посилання ультразвукового імпульсу і моментом приймання після його відбивання від дна. Ультразвуковий імпульс від генератора *3* подається на випромінювач (антену) *1* і випромінюється у воду. Відбитий сигнал приймається антеною *2*, подається на підсилювач *4*, а потім — на блок слухового контролю *5* і на індикатор *6*. У деяких випадках випромінювач є і приймачем.

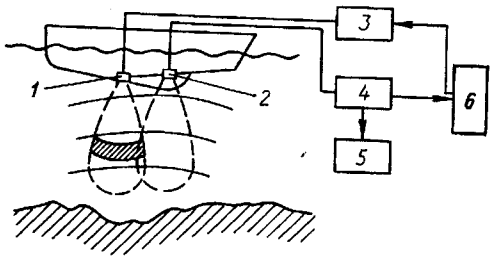


Рис. 12.11

Ультразвукові хвилі проникають на значно більшу глибину у непрозорих тілах, ніж рентгенівське випромінювання. Ультразвукове випромінювання може проникати через металеві вироби, товщина яких понад 10 м. Таку велику проникну здатність ультразвукового випромінювання у твердих тілах покладено в основу роботи ультразвукових дефектоскопів, за допомогою яких виявляють дефекти в матеріалах і виробах. Серед методів ультразвукової дефектоскопії найбільшого поширення набули імпульсний ехометод, дія якого грунтується на аналізі відбитих від дефектів сигналів, і тіньовий метод, в якому аналізується структура звукової тіні за дефектом.

Принцип дії ультразвукових дефектоскопів, що грунтується на ехометоді (*а*) і тіньовому методі (*б*), неважко зрозуміти з рис. 12.12. На рисунках числами *1, 2* і *3* позначені відповідно випромінювач, приймач і індикатор, буквою *Д* — дефект.

Методи ультразвукової дефектоскопії застосовуються також для дослідження структури частин живих організмів, для діагностики деяких захворювань. Особливе місце в застосуванні ультразвуку займають методи звукобачення. За допомогою випромінювачів ультразвуку

і фокусуючих систем створюється ультразвукове зображення предмета, який перебуває в непрозорому для світла середовищі. Потім це зображення перетворюється у видиме.

Візуалізація звукових полів застосовується у найбільш досконалих методах ультразвукової діагностики і дефектоскопії.

Дія ультразвуку на речовини грунтується на тому, що ультразвукові пучки можуть мати значні інтенсивності, під впливом яких відбувається активна дія на речовину. Частинки газу або рідини під дією ультразвукових хвиль можуть набути прискорень, які в сотні разів більші від прискорення вільного падіння. Внаслідок цього відбувається інтенсивне перемішування газів, що значно прискорює процеси теплообміну.

Дія ультразвукових коливань безпосередньо на розплави дає можливість одержати більш дрібнокристалічну і однорідну структуру ме-

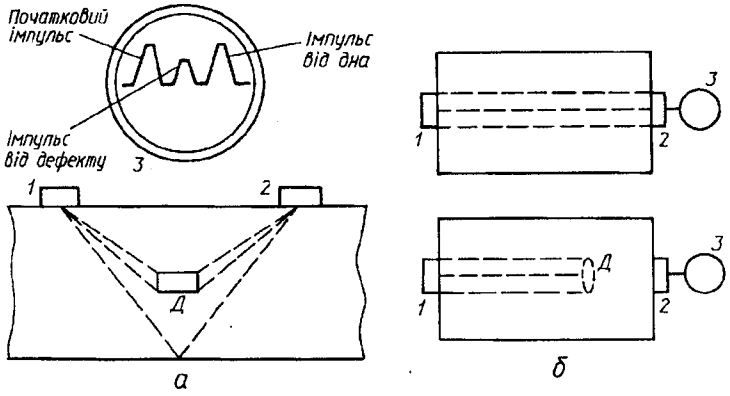


Рис. 12.12

талів. Ультразвукова кавітація застосовується для очищення від забруднень поверхонь деталей (годинникове виробництво, приладобудування, електронна техніка та ін.). На основі кавітації здійснюється металізація тіл і паяння (паяння алюмінієвих виробів, тонких провідників з напиленими металевими плівками, напівпровідниками та ін.), дегазація рідин. Кавітаційні ударні хвилі можуть диспергувати тверді тіла і рідини, утворюючи емульсії і суспензії.

Ультразвук застосовується в біології і медицині. При дії ультразвуку на біологічні об'єкти відбувається поглинання і перетворення енергії звуку в теплову. Локальне нагрівання тканин на частки і одиниці градусів сприяє життєдіяльності біологічного об'єкта, підвищує інтенсивність обміну речовин. Проте при більш інтенсивному опромінюванні ультразвуком біологічний об'єкт зазнаватиме руйнування. У медицині ультразвук використовується для діагностики, терапевтичного і хірургічного лікування.

Обробка і передавання сигналів за допомогою ультразвукових пристроїв застосовуються в радіолокації, обчислювальній техніці та для керування світловими сигналами в оптиці й оптоелектроніці.

Застосування ультразвуків досить різноманітне. Останнім часом виникла квантова акустика, яка вивчає взаємодію звукових квантів з електронами і ядрами атомів.

§ 12.8. Поняття про інфразвуки

Інфразвуки — це пружні коливання, аналогічні звуковим коливанням, але з частотами нижче 20 Гц. Інфразвуки на перший погляд займають невеликий діапазон частот від 20 до 0 Гц. Насправді ця ділянка надзвичайно велика, оскільки "до нуля" означає практично нескінченний діапазон коливань. Цей діапазон менш вивчено порівняно зі звуковим і ультразвуковим діапазонами. Інфразвуковий діапазон умовно поділяють на піддіапазони від 20 до 1 Гц, від 1 до 0,1 Гц, від 0,1 до 0,01 Гц і т. д.

Інфразвукові хвилі виникають внаслідок обдування вітром будівель, дерев, телеграфних стовпів, металевих ферм; під час руху людини, тварин, транспорту; при роботі різних механізмів; при грозових розрядах, вибухах бомб, пострілах гармат. У земній корі спостерігаються коливання і вібрації інфразвукових частот внаслідок обвалів, руху різних видів транспорту, вулканічних вивержень тощо. Іншими словами, ми живемо в світі інфразвуків, не підозрюючи про це. Такі звуки людина скоріше відчуває, ніж чує. Зареєструвати інфразвуки можна тільки особливими приладами. Швидкість поширення інфразвуку визначається тими самими формулами, що й швидкість поширення звуку. Характерною особливістю інфразвуку є незначне його поглинання в різних середовищах. Внаслідок цього інфразвукові хвилі в повітрі, воді та земній корі можуть поширюватись на досить великі відстані (десятки тисяч кілометрів). У зв'язку з цим інфразвук образно називають "акустичним нейтрино". Так, інфразвукові хвилі (частота коливань 0,1 Гц), що утворились при виверженні вулкана Кракатау (Індонезія) в 1883 р., кілька разів обійшли навколо земної кулі. Вони викликали такі флуктуації тиску, які можна було зареєструвати звичайними барометрами.

Деякі інфразвуки людина сприймає, але не органами слуху, а організмом в цілому.

Річ у тім, що деякі внутрішні органи людини мають власну резонансну частоту коливань 6—8 Гц. При дії інфразвуку цієї частоти можливе виникнення резонансу коливань цих органів, що викликає неприємні відчуття. Інфразвук навіть невеликих інтенсивностей змушує коливатися внутрішні органи, і людині уявляється, що всередині у неї все вібрує. Тому, мабуть, причиною втоми міських жителів і робітників "шумних" підприємств є інфразвуки.

Дослідженнями вчених різних країн встановлено, що інфразвук будь-яких частот і інтенсивностей — це реальна загроза для здоров'я людини. Тому вивченням інфразвуку займаються фізики, біологи, медики.

Дослідження показують, що інфразвукові хвилі наявні практично скрізь, а значна кількість джерел інфразвуку створена самими людьми. Так, легкова автомашина при швидкості 100 км/год створює інфразвук, рівень звукової потужності якого перевершує 100 дБ, а двомісний вертоліт при швидкості 120 км/год — 120 дБ. Дослідження порушень функцій внутрішніх органів людини, які зазнали дії інфразвукових хвиль, знаходяться поки що на початковій стадії. Проте одержані результати дають можливість зробити висновок, що інфразвук приводить до втрати чутливості органів рівноваги тіла, що в свою чергу призводить до появи болю у вухах, хребті та пошкоджень мозку. Ще більш згубно впливає інфразвук на психіку людини.

Інфразвукові хвилі часто виникають в океанах і морях. Їх називають "голосом моря". Встановлено, що в штормових областях можуть існувати системи океанських хвиль. При їх зіткненнях виникають інфразвукові хвилі, які поширюються у воді й атмосфері. Порівняно недавно біологи дійшли висновку, що інфразвукові коливання великої інтенсивності помітно впливають на тварин. Деякі тварини сприймають звуки з частотою 12 і навіть 8 Гц.

Інфразвукові коливання проявляють біологічну активність, якою пояснюється збігання їх частот з альфаритмом головного мозку людини. Інфразвук певної частоти викликає розлад мозку, сліпоту, а при частоті 7 Гц можливі й інші неприємні відчуття в організмі людини. З цією частотою пов'язують трагічні випадки з літаками та кораблями в так званому Бермудському трикутнику. Існують також припущення, що різні аномалії в стані людей при поганій погоді, які пов'язують з кліматичними умовами, — це результат дії інфразвукових хвиль. Проте такі міркування вимагають достовірних підтверджень.

Властивість ультразвукових коливань поширюватись на великі відстані в земній корі лежить в основі сейсмології — науки, яка вивчає землетруси та досліджує внутрішню будову Землі. Крім океанології і сейсмології інфразвук застосовують у роботі деяких приладів та механізмів для різних практичних цілей. За допомогою таких приладів намагаються передбачити землетруси, наближення цунамі тощо.

Приймають і вимірюють інфразвук спеціальними мікрофонами, гідрофонами та вібраторами.

Приклад. 12.3. Знайти максимальне прискорення і максимальну швидкість частинок повітря в ультразвуковій хвилі з частотою $\nu = 50$ кГц і амплітудою зміщення частинок $A = 0{,}1$ мкм.

Розв'язання. Максимальне значення прискорення і максимальна швидкість частинок при їхньому коливальному русі дорівнюють амплітудним значенням цих величин:

$$a_{max} = A\omega^2 = 4\pi^2\nu^2 A \approx 9860 \text{ м/с}^2 = 1000g;$$

$$u_{max} = A\omega = 2\pi\nu A = 0{,}0314 \text{ м/с}.$$

Частина II. Молекулярна фізика і термодинаміка

Розділ 13. Основні означення і поняття

§ 13.1. Предмет і методи молекулярної фізики

Фізика, як відомо, вивчає найпростіші і найбільш загальні властивості матеріального світу. Цей світ різноманітний за видами матерії, формами її руху, характером просторово-часового існування. Тому залежно від мети дослідження (вивчити властивості і будову матерії, особливості і закони її руху тощо) розробляються відповідні методи і понятійний фізичний апарат.

У класичній механіці при вивченні рухів матеріальних тіл нас не цікавила їхня внутрішня структура. Достатньо було змоделювати такі тіла у вигляді матеріальної точки, абсолютно твердого чи пружного тіла, гладенької поверхні, суцільного середовища, нестисливої рідини тощо і вивчати закони механічного руху. Такі моделі можливі тому, що вони приблизно правильно відображають властивості конкретних реальних об'єктів, а результат дії сил залежить від маси, форми і розмірів тіл. При цьому кожна модель враховує лише суттєві для даної задачі зв'язки і відкидає другорядні. Наприклад, у моделі матеріальної точки не береться до уваги внутрішня структура і просторові розміри тіла, в моделі абсолютно твердого тіла враховуються розміри і форма, але не беруться до уваги внутрішня будова і рух структурних елементів тіла. Якщо механічний рух тіл не залежить від їхньої внутрішньої структури, то властивості самих тіл і пов'язані з ними агрегатні зміни залежать від того, з яких частинок вони складаються і як ці частинки рухаються та взаємодіють між собою. Саме вивченням цих питань і займається в першу чергу молекулярна фізика, хоча структура речовинної матерії є предметом вивчення багатьох інших природничих наук. Розділ фізики, в якому вивчаються будова, фізичні властивості і агрегатні стани речовини на основі їхньої мікроскопічної (молекулярної) будови, називається *молекулярною фізикою.* В основі молекулярної фізики лежать підтверджені теоретично і експериментально положення, що речовина складається з молекул або атомів, які перебувають у безперервному русі і взаємодіють між собою.

Молекула — найменша частинка речовини, яка зберігає всі її хімічні властивості і складається з атомів, сполучених між собою хімічними зв'язками. Не можна говорити, наприклад, про половину молекули води і не тому що вона неподільна, а тому що при поділі дістанемо частинки, які вже не матимуть властивостей води. Кількість атомів у молекулі може бути від двох (N_2, O_2, H_2, KCl) до тисячі і більше (полімери). Інертні гази часто називають одноатомними молекулами, хоча, строго кажучи, вони не є молекулами. Багатоатомні молекули (тисяча і більше атомів) називають макромолекулами. Атоми в молекулах певним чином просторово розміщені і взаємодіють між собою. Природа сил міжатомної взаємодії електромагнітна і пов'язана з наявністю в атомах електрично заряджених рухомих частинок. Молекули речовини залежно від умов (температура, тиск) можуть здійснювати поступальні, коливальні та обертальні рухи. Ці рухи мають хаотичний характер, коли всі напрями швидкостей молекул рівноймовірні. Також можуть збуджуватися коливальні рухи атомів у самих молекулах.

Сили взаємодії молекул називають молекулярними силами. На великих відстанях це сили притягання, на малих — відштовхування. Відстань між центрами молекул, на якій сили притягання змінюються на сили відштовхування, приймається за діаметр молекули. Розміри молекул оцінюються на основі експериментальних досліджень, і

їхні діаметри становлять (якщо молекули приймати за сфери) для простих речовин близько 10^{-10} м, для макромолекул 10^{-7} м. При високих температурах (або внаслідок інших зовнішніх впливів) молекули можуть бути розщеплені на атоми. Цей процес називають *дисоціацією.*

До XX ст. атоми вважались неподільними частинками речовини. Однак експериментальні дослідження, виконані переважно під керівництвом англійського фізика Е. Резерфорда (1871—1937) показали, що атоми є складними системами заряджених рухомих частинок. У центрі такої системи знаходиться позитивно заряджене ядро, а навколо ядра обертаються негативно заряджені частинки — електрони. Кількість електронів в атомах різних хімічних елементів може бути різною. Однак завжди сумарний заряд електронів чисельно дорівнює заряду ядра атома. Тому атом у звичайних умовах нейтральний. До складу ядра входять позитивно заряджені частинки — протони — і нейтральні — нейтрони. У нейтральних атомах число електронів завжди дорівнює числу протонів у ядрі. Зв'язок між електронами і ядром атомів здійснюється внаслідок електромагнітної взаємодії.

Протони і нейтрони в ядрі пов'язані між собою особливими силами притягання — ядерними силами. Діаметр ядер атомів становить близько 10^{-15} м, а діаметр простих атомів — близько 10^{-10} м. Отже, електрони від ядра знаходяться на відстанях, у сто тисяч разів більших від діаметра ядра. Розміри електрона приблизно одного порядку з розмірами ядра (10^{-15} м). Таким чином, атом складається з частинок, значно менших від розмірів самого атома. Маса атома зосереджена переважно в ядрі (маса спокою протона $m_p = 1{,}672623(10) \cdot 10^{-27}$ кг або нейтрона $m_n = 1{,}6749286(10) \cdot 10^{-27}$ кг майже в 1840 разів більша від маси спокою електрона $m_e = 9{,}1093897(54) \cdot 10^{-31}$ кг).

Така спрощено-наглядна модель атома побудована переважно на основі уявлень класичної механіки. У молекулярній фізиці часто користуються класичними уявленнями про атоми та молекули. Однак завжди слід враховувати межі застосовності таких модельних уявлень.

Річ у тім, що атоми і молекули є мікроскопічними об'єктами, і їхня поведінка може бути адекватно описана лише в рамках квантової механіки. Це означає, що в мікросвіті мають прояв свої специфічні закономірності, яких у світі макрооб'єктів не спостерігають.

Розглянемо насамперед, які системи вивчає молекулярна фізика і термодинаміка та яке коло фізичних явищ досліджується методами цих наук.

Галузь застосування молекулярної фізики досить чітко обмежена дослідженнями статистичних систем. Це системи великої кількості частинок, що взаємодіють між собою і з зовнішніми полями. Під частинками розуміють молекули системи (газу чи рідини) або групи атомів (іонів), розміщених у вузлах кристалічного твердого тіла. Велика кількість частинок означає, що вони визначаються масштабами числа Авогадро $N_A = 6{,}0221367 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$. З іншого боку, кількість частинок повинна бути обмеженою, тобто статистична система — це найчастіше система лабораторних розмірів, яку називають макроскопічною системою, або матеріальним макроскопічним тілом. Моделлю матеріального тіла є сукупність атомів і молекул, які певним чином рухаються і взаємодіють між собою. Самі атоми і молекули залежно від характеру явища і теоретичних підходів можуть моделюватись по-різному. Їх часто розглядають як ідеалізовані матеріальні точки або тверді тіла; в окремих випадках враховують внутрішні структуру, рух і взаємодію складових частинок. Взаємодію і рух атомів та молекул в одних випадках розглядають на основі класичних законів механіки як взаємодію і рух матеріальних точок або твердих тіл, в інших — враховують квантові закономірності як для мікрочастинок. Отже, матеріальні тіла — це сукупність атомів і молекул, властивості, закони руху і взаємодії яких в найбільш суттєвих своїх проявах відомі.

Молекулярна фізика розглядає досить широке коло питань: будову речовин і їхню зміну внаслідок зовнішнього впливу (зміни тиску, температури, електричних або магнітних полів тощо), явища переносу (дифузія, в'язкість, теплопровідність), фазову рівновагу і фазові переходи (плавлення і кристалізація, випаровування і конденсація, сублімація та ін.), критичні стани речовин, поверхневі явища на межі розділу фаз тощо. Всі ці явища обумовлені зміною енергії теплового руху молекул речовини та зміною їхньої взаємодії. При цьому виключаються із розгляду ті явища, які пов'язані зі зміною складу і перебудовою самих молекул та атомів. Такі зміни вивчаються переважно хімією і атомною фізикою. Виділене коло питань охоплюється єдиним методом розгляду, єдиною теорією, яка називається молекулярно-кінетичною теорією речовини (МКТ). Ця теорія є мікрофізичною, оскільки вивчає властивості макроскопічних об'єктів на основі введення уявлень про їхню внутрішню будову, а зміни з цими об'єктами розглядає як прояв зміни сумарного руху і взаємодії молекул.

Молекулярно-кінетична теорія базується на модельних уявленнях про внутрішню структуру макроскопічних систем, про характер руху і взаємодію структурних елементів у цих системах. Специфічність атомно-молекулярної форми руху матерії полягає в колосальній кількості структурних елементів речовини, що взаємодіють між собою у довільному макроскопічному тілі, та повній хаотичності (безладності) їхнього руху. Ця особливість об'єктів потребує для їхнього дослідження розробки відповідного понятійного фізичного апарату, введення певних фізичних характеристик і, таким чином, розробки відповідних методів дослідження.

Механічний або динамічний метод, що широко використовується для вивчення механічної форми руху матерії, полягає в тому, щоб за відомими координатами та імпульсами усіх частинок системи у певний момент часу та за відомим законом їхньої взаємодії знайти координати та імпульси частинок у довільний наступний або попередній моменти часу. Цим повністю визначається стан системи. Принципово цей метод, здавалося б, може бути застосовний і для вивчення молекулярних систем. Справді, якщо припустити, що, наприклад, молекули газу взаємодіють лише під час зіткнень одна з одною або зі стінкою, а між зіткненнями рухаються рівномірно і прямолінійно, то, знаючи закони зіткнень, положення і швидкості всіх частинок даного газу в початковий момент часу, можна розрахувати положення і швидкості цих частинок у кожний наступний або й попередній моменти часу. Така інформація про атомно-молекулярну систему була б найбільш повною, конкретною і визначеною. Однак через малі розміри молекул, надзвичайно велику їх кількість у довільному макроскопічному тілі здійснити такі вимірювання і підрахунки експериментально неможливо. Навіть якби такі дані про кожну молекулу системи якимось чином були отримані, то не існує обчислювальних засобів, здатних у розумні часові терміни провести відповідні обчислення для одержання інформації про положення і швидкості цих молекул у кожний наступний момент часу. Разом з тим, зміни в молекулярній системі внаслідок багаторазових зіткнень відбуваються дуже швидко. За малі частки секунди і положення, і швидкості молекул зовсім змінюються. Спостерігати за такими змінами і фіксувати їх неможливо. Звідси можна зробити висновок, що динамічний метод, за допомогою якого вивчають рух одного або невеликої кількості тіл, не може бути застосовний для дослідження поведінки молекулярних систем з дуже великою кількістю частинок. Саме велика кількість частинок у макроскопічних тілах і їхня взаємодія приводять до появи нових статистичних закономірностей у поведінці таких тіл.

Проведений аналіз показує, що для вивчення систем, які складаються з дуже великої кількості частинок, інформація про них повинна мати узагальнений характер і стосуватися не окремих частинок, а сукупності їх у цілому або невеликої кількості підсистем заданої системи. Відповідні фізичні поняття також повинні стосуватися цілих сукупностей частинок. Метод, який грунтується на таких підходах, називається

статистичним, а розділ фізики, присвячений вивченню властивостей макроскопічних тіл або, інакше, систем, що складаються з дуже великої кількості однакових частинок (молекул, атомів, іонів тощо) на основі властивостей цих частинок, характеру руху і взаємодії між ними, називається *статистичною фізикою*. Особливістю статистичної фізики порівняно з іншими розділами фізики, які вивчають макроскопічні тіла (термодинаміка, механіка суцільних середовищ, електродинаміка тощо), є те, що статистичні методи принципово і в багатьох випадках реально дають можливість обчислювати ряд макроскопічних характеристик (теплоємність, коефіцієнти в'язкості та ін.) на основі знання сил взаємодії між атомами чи молекулами та характеру їхнього руху. У цьому розумінні статистична фізика належить до мікроскопічної теорії, тоді як, наприклад, механіка суцільних середовищ або термодинаміка базуються на експериментальному визначенні таких характеристик і, отже, їхні методи є феноменологічними. Зазначимо, що в статистичній теорії розраховують середні значення фізичних параметрів макроскопічних тіл.

Макроскопічні системи, які складаються з великої кількості частинок, можуть вивчатися без розгляду їхньої мікроскопічної структури. Такі підходи грунтуються на термодинамічному методі, суть якого полягає у використанні понять і фізичних величин, що стосуються системи в цілому. Наприклад, стан газу можна характеризувати тиском, об'ємом, температурою, концентрацією, густиною тощо. Якщо експериментально встановити між зазначеними параметрами зв'язок, то, знаючи їхні числові значення в одному стані, можна розрахувати ці характеристики в довільному іншому стані. При цьому розрахунки грунтуються на деяких загальних положеннях, встановлених експериментально. Ці положення часто називають аксіомами. Такий метод вивчення макроскопічних систем і змін, які відбуваються з ними, без вивчення внутрішньої структури системи і механізмів цих процесів називають *термодинамічним методом*. Він є аксіоматичним, оскільки базується на трьох аксіомах термодинаміки. Ці аксіоми формулюються на основі узагальнення спостережень та результатів експериментальних досліджень, а відповідність реальності теоретичних висновків з них також перевіряється експериментально.

Статистичний і термодинамічний методи доповнюють один одного. Термодинамічний метод, базуючись на загальних законах природи, є надзвичайно ефективним, охоплює широке коло фізичних явищ і дає можливість одержувати результати без знання внутрішньої структури об'єкта дослідження. За допомогою статистичного методу можна розкрити і встановити внутрішні механізми процесів та явищ і, таким чином, строго фізично обгрунтувати одержаний результат. Застосування статистичного і термодинамічного методів дає можливість одержувати найбільш повну інформацію при розв'язанні практичних завдань чи вирішенні наукових проблем.

Молекулярна фізика відіграє важливу роль у побудові сучасної фізичної картини світу. Це обумовлено перш за все тим, що в молекулярній фізиці властивості матеріальних тіл і пов'язаних з їхніми змінами явищ розглядаються на основі структурної будови цих об'єктів. Пізнання структури матеріального світу — найважливіше завдання сучасної природознавчої науки в цілому і фізики зокрема. Відомий американський фізик-теоретик Р. Фейнман (1918—1988) так висловлювався стосовно знань атомно-молекулярної структури речовини: "Якби в результаті якоїсь світової катастрофи всі нагромаджені наукові знання були б знищені і до прийдешніх поколінь живих істот перейшла б тільки одна фраза, то яке твердження, складене з найменшої кількості слів принесло б найбільшу інформацію? Я вважаю, що це — атомна гіпотеза (можете називати її не гіпотезою, а фактом, але це нічого не міняє): всі тіла складаються з атомів — маленьких тілець, які знаходяться в безперервному русі, притягуються на невеликій відстані, але відштовхуються, якщо одне з них щільніше притиснути до другого. В одній цій фразі, як ви переконаєтесь, міститься неймовірна кількість інформації про світ, досить лише докласти до неї небагато уяви і трохи кмітливості".

§ 13.2. Короткий історичний огляд розвитку молекулярно-кінетичної теорії

Значний внесок у розвиток атомістичного вчення зробили давньогрецькі філософи-матеріалісти Левкіпп (роки життя невідомі), Демокріт (бл. 460—370 до н. е.), Епікур (341—270 до н. е.) та римський мислитель Лукрецій Кар (бл. 96—55 до н. е.). В результаті аналізу спостережень і філософських роздумів було зроблено висновок, що тіла Всесвіту складаються з найдрібніших неподільних частинок — атомів (від гр. ατομος — неподільний). За їхнім вченням, уся природна розмаїтість світу складається з маленьких частинок матерії, атомів, які рухаються, стикаються і сполучаються у порожньому просторі. Ці атоми (буття) і пустота (небуття) є першоосновою матеріального світу. Відомий такий афоризм Демокріта: "У світі немає нічого, крім атомів і пустоти, все інше — вигадка".

В основі атомного вчення Левкіппа—Демокріта—Епікура лежать три принципи: збереження матерії, збереження форм (або видів) матерії та існування пустоти. Вчення грецьких атомістів викладено у своєрідній поетичній енциклопедії античних знань — поемі Лукреція Кара "Про природу речей", яка дійшла до наших часів. Він писав, що атоми відрізняються один від одного тільки розмірами та формою, а зчеплення між ними відбувається тоді, коли атоми однакової форми. Атоми перебувають у вічному русі. Цей рух зумовлений не дією зовнішніх, незалежних від них сил, а становить їхню невіддільну внутрішню властивість.

У розвитку науки в цілому і атомістичних поглядів зокрема античний період залишив незгладимий слід. Він характерний не тільки первісним нагромадженням природничих знань та розвитком античної натурфілософії, а й тим, що в ньому зародилися майже всі основні форми і системи філософських та фізичних поглядів.

Нового імпульсу розвиткові наукових знань у XII — XIV ст. надають університети, куди проникають знання античної науки. Відомими на цей час освітніми і науковими центрами стають університети в Болоньї, Парижі, Падуї, Оксфорді, Кембріджі, Неаполі, Римі та ін. Йде накопичення знань з астрономії, філософії, математики, природознавства. Значний внесок у розвиток середньовічної культури зробила Київська Русь, яка за рівнем історичних знань і культури виробництва перевищувала багато європейських країн.

Відродження атомізму починається разом з швидким розвитком природознавства в XVII ст. Ідею про атомну будову речовини в середині XVII ст. відновлює французький філософ П. Гассенді (1592—1655). Прибічником атомної гіпотези був також англійський фізик Р. Бойль (1627—1691). Англійський вчений І. Ньютон (1643—1727) вважав, що всі тіла складаються з маленьких частинок, які мають масу і які є міцними, непроникними, рухомими. Відомий швейцарський фізик, академік Петербурзької академії наук Д. Бернуллі (1700—1782) використав уявлення про атомну будову для пояснення властивостей газів.

У середині XVIII ст. М. В. Ломоносов (1711—1765) сформулював молекулярну гіпотезу. Він вважав, що всі тіла складаються з дрібних "невідчутних частинок", які є матеріальними, непроникними. Вводиться поняття про прості та складні частинки, названі "елементами" і "корпускулами". Елементи і корпускули — це по суті ті поняття, на основі яких у XIX ст. виникло уявлення про атоми і молекули. Згідно з уявленнями Ломоносова, елемент — це частинка тіла, яка не складається з будь-яких інших менших і відмінних від нього тіл, а корпускула — це сукупність елементів, що утворюють одну малу масу.

Найдрібніші частинки, за М. В. Ломоносовим, перебувають у русі. Взаємодія частинок відбувається лише під час зіткнень. На цій основі він пояснив розсіяння

газів і розробив кінетичну модель ідеального газу, яка в основному збігається з моделлю, прийнятою у фізиці в середині XIX ст.

Іншою важливою проблемою, яку вдалося в основних рисах розробити М. В. Ломоносову, — це кінетична теорія теплоти, яка якісно описувала фізичні особливості теплових явищ. Ця теорія викладена в праці "Роздуми про причини теплоти і холоду" (1750 р.), де теплові явища пояснюються обертальним рухом частинок і стверджується теза, "що ... теплота є внутрішній рух матерії". М. В. Ломоносов наводить приклади перетворення механічної енергії в теплоту (тертя, удар, кування тощо) внаслідок руху частинок тіла. Це твердження значно випереджало епоху.

Атомно-молекулярна гіпотеза знайшла переконливе підтвердження на початку XIX ст. в хімії. Це сталося на основі відкриття закону сталості складу і закону кратних відношень. Із закону сталості складу випливає, що маси хімічних елементів, які входять до хімічної сполуки, знаходяться в строго визначеному відношенні. Наприклад, для утворення води сполучаються 1 г водню і 8 г кисню. Якщо це відношення буде іншим, то надлишок одного з елементів у реакцію не вступає. Закон кратних відношень стосується тих випадків, при яких два хімічні елементи можуть утворювати кілька хімічних сполук. При цьому маси елементів, що входять у сполуки, відносяться як невеликі цілі числа. Англійський фізик і хімік Д. Дальтон (1766—1844) пояснив це тим, що в хімічних реакціях атоми речовин сполучаються між собою, утворюючи молекули з різним співвідношенням атомів у молекулі.

У фізиці молекулярно-кінетичні уявлення набули визнання лише в другій половині XIX ст., коли працями німецького фізика Р. Клаузіуса (1822—1888), англійського фізика Д. Максвелла (1831—1879) і австрійського фізика Л. Больцмана (1844—1906) були розроблені основи кінетичної теорії газів. Повністю реальність існування молекул було доведено лише на початку XX ст. у працях французького фізика Ж. Перрена (1870—1942), польського фізика М. Смолуховського (1872—1917), німецького фізика-теоретика А. Ейнштейна (1879—1955), присвячених вивченню броунівського руху мікрочастинок.

Значний внесок у розвиток молекулярно-кінетичної теорії речовини зробили вчені України М. П. Авенаріус (1835—1895), М. О. Умов (1846—1915), М. М. Бекетов (1827—1911), М. М. Шіллер (1848—1910), І. П. Пулюй (1845—1918), та ін.

У XX ст. атомно-молекулярна структура речовини була підтверджена методами рентгенівського структурного аналізу, методами електроно- та нейтронографії. У наш час вже існують методи спостереження молекул-гігантів за допомогою електронного мікроскопа; ще більші можливості відкриває використання так званого растрового тунельного мікроскопа.

§ 13.3. Основи молекулярно-кінетичної теорії будови речовини

Сучасна молекулярно-кінетична теорія будови речовини базується на трьох положеннях.

1. Усі тіла складаються з атомів та молекул.

Молекула, як уже зазначалося, — це найменша частинка речовини, яка зберігає усі її хімічні властивості. Вона складається з простіших частинок — атомів. Якщо різних видів молекул у природі надзвичайно багато, то кількість різних видів атомів обмежена.

Експериментальним підтвердженням атомно-молекулярної будови речовини з давніх часів були спостереження за подільністю тіл, розчинністю, зменшенням об'єму при змішуванні деяких рідин (наприклад, етилового спирту і води), спостереження за тепловим розширенням під час нагрівання або стисненням під час охолодження,

стисливістю під дією сил (особливо газів). Переконливими були спостереження броунівського руху. Сучасні методи рентгенографії та електронної мікроскопії повністю підтверджують атомно-молекулярну гіпотезу.

2. Молекули (атоми) речовини перебувають у неперервному хаотичному русі. Цей рух називають ще тепловим. Характер теплового руху молекул речовини залежить від її агрегатного стану. Цим рухам відповідає певна кінетична енергія. Підтвердженням теплового руху молекул є явища дифузії, існування атмосфери Землі певної висоти, броунівський рух, досліди Штерна з визначення швидкості молекул у молекулярних пучках та ін.

3. Між молекулами (атомами) існують сили взаємного притягання і відштовхування. У рівноважному стані молекули або атоми речовини знаходяться на відстанях, на яких сили відштовхування і притягання переважно взаємно скомпенсовані і потенціальна енергія взаємодії частинок мінімальна. Якщо зовнішні сили прагнуть віддалити молекули, то переважаючими стають сили притягання (протидія розтягові тіл). Якщо, навпаки, зовнішні сили прагнуть наблизити молекули, то переважаючими стають сили відштовхування (протидія стисненню).

Сили взаємодії між молекулами проявляються переважно на відстанях, близьких до розмірів самих молекул. При збільшенні відстані сили взаємодії швидко спадають, прямуючи до нуля.

§ 13.4. Основні фізичні величини

Маса атомів і молекул. Масу атомів і молекул у молекулярній фізиці характеризують не абсолютними величинами, а відносними безрозмірними величинами, які називають відповідно відносною атомною A_r та відносною молекулярною M_r масами. Вводиться поняття одиничної атомної маси m_i, що дорівнює 1/12 маси нукліда вуглецю ^{12}C:

$$m_i = \frac{m_{12_C}}{12} \approx 1{,}66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}. \qquad (13.1)$$

Іноді записують ще так:

$$1 \text{ а.о.м.} = 1{,}6605402(10) \cdot 10^{-27} \text{ кг},$$

де а.о.м. — атомна одиниця маси.

Відносна атомна або молекулярна маса відповідно визначаються так:

$$A_r = \frac{m_{ат}}{m_i} \quad \text{та} \quad M_r = \frac{m_{мол}}{m_i}. \qquad (13.2)$$

Звідси $m_{мол} = m_i M_r$ (кг). Величини A_r для хімічних елементів подаються в періодичній таблиці Менделєєва. Абсолютні значення атомних мас різних хімічних елементів лежать у межах 10^{-25}—10^{-27} кг, а їхні відносні маси — у межах 1—10^2 а.о.м.

Кількість речовини. Одиницею кількості речовини у молекулярній фізиці є моль. Моль дорівнює кількості речовини системи, яка містить стільки структурних елементів, скільки атомів міститься у вуглеці-12 масою 0,012 кг.

З означення випливає, що моль довільної речовини містить однакову кількість структурних елементів (атомів, молекул, іонів тощо). Цю кількість називають *числом Авогадро:*

$$N_A = \frac{0{,}012}{12 m_i} = \frac{10^{-3}}{m_i} = 6{,}0221367 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}.$$

Масу одного моля речовини називають молярною масою:

$$M = m_{мол} N_A = m_i M_r N_A \text{ (кг/моль)}.$$

Якщо врахувати, що $m_i \ N_A = 10^{-3}$ кг/моль, то

$$M = 10^{-3} \cdot M_r \text{ (кг/моль)}. \qquad (13.3)$$

Відносні молекулярні маси речовин визначають як суму відносних мас атомів, які входять до складу молекули. Тут нехтують дефектом мас, оскільки вважають енергію хімічних зв'язків атомів у молекулі малою.

Якщо кількість структурних елементів речовини n, то кількість молів цієї речовини

$$\nu = n/N_A. \qquad (13.4)$$

Якщо чисельник і знаменник помножити на масу молекули $m_{мол} = m_0$, то $nm_0 = m$ — маса речовини, а $m_0 N_A = M$ — маса одного моля речовини, або молярна маса. Тоді

$$\nu = m/M. \qquad (13.5)$$

Об'єм одного моля речовини називають молярним об'ємом:

$$V_M = M/\rho \text{ (м}^3\text{/моль)},$$

де ρ — густина речовини.

Розділ 14. Основи молекулярно-кінетичної теорії газів

§ 14.1. Моделювання у молекулярній фізиці

У розвитку природничих наук важливу роль відіграє моделювання. Воно широко використовується у техніці, експерименті, а також у теоретичному пізнанні. У фізиці моделювання — це особливий метод пізнання. У теоретичному пізнанні моделювання пов'язане з використанням моделей, які складаються з ідеальних уявних елементів. Такі моделі виступають насамперед як деякі контури, що передають риси модельованого об'єкта. Поняття моделі можна визначити як проміжний предмет дослідження, побудований із матеріальних чи ідеальних (уявних) елементів, що перебуває у певній відповідності з самим об'єктом пізнання і здатний замінити об'єкт на деяких етапах пізнання. Моделювання необхідно розглядати як метод посереднього одержання інформації про об'єкт пізнання за допомогою дослідження деякого замінника об'єкта, що знаходиться з ним у певній відповідності.

Фізичне моделювання — це метод наукового пізнання, який полягає у заміні досліджуваного явища, процесу або об'єкту іншим, подібним до нього за суттєвими ознаками, — моделлю.

Моделі поділяють на два типи: речові — у формі реально функціонуючої системи і уявні — у формі деяких ідеальних структур. Моделі другого типу використовуються у теоретичній фізиці.

За допомогою моделей можна передати той чи інший фізичний об'єкт або фізичну систему, те або інше явище тільки наближено, частково. Модельні уявлення можуть дати відомості про особливості того чи іншого явища, дають змогу зробити висновки не тільки якісного, а й кількісного характеру. Фізичні уявлення, що лежать в основі побудови моделі, випливають із певних знань про властивості об'єкта, процесу, із обмеженої кількості експериментальних і теоретичних даних. Тому при побудові моделі головна увага зосереджується на відтворенні лише окремих рис поведінки об'єкта моделювання. Для всебічного і повного описання властивостей досліджуваного об'єкта створюється не одна, а кілька моделей. У процесі поглиблення наших знань з включенням в аналіз при моделюванні все більшої кількості властивостей об'єкта-оригіналу кількість можливих моделей зменшується, але підвищується адекватність їх. З історії фізики відомо багато випадків заміни одних моделей іншими. Зауважимо, що на певному етапі розвитку науки навіть принципово неправильні моделі інколи можуть відігравати прогресивну роль. Так, уявлення про теплець було вихідним положенням у дослідженнях французького фізика, інженера С. Карно (1796—1832). Результати, добуті ним та іншими вченими, які також спиралися на концепцію теплецю, зберігають своє значення і тепер, хоч гіпотеза про існування теплецю

відкинута сучасною фізикою. Єдиним критерієм правильності вибору моделі є її відповідність дійсності. Тільки практика відбирає для фізичної теорії ті моделі, які зберігають наукове значення і виявляються плідними для дальшого розвитку науки. Так, фізика взяла на озброєння модельні уявлення про матеріальну точку, математичний маятник, абсолютно тверде тіло, ідеальний газ, абсолютно чорне тіло тощо. Використання ідеальних об'єктів дає можливість переходити від емпіричних законів до строгого математичного формулювання їх, полегшує дедуктивну побудову галузі знання.

Під час розгляду питань, які належать до курсу молекулярної фізики, також широко використовують модельні уявлення. Першим кроком при розв'язанні задачі молекулярно-кінетичної теорії (розрахунок макроскопічних параметрів на основі уявлень про молекули та їхній рух) є вибір моделі системи. Один з агрегатних станів речовини є газоподібним*. Молекулярна фізика повинна дати вичерпні відомості про природу газового стану речовини. Тут також основні закономірності, які мають місце в реальному газі, вивчають на його моделі — ідеальному газі. Сконструювати модель газу — це означає зробити абстрактно певні припущення про властивості молекул газу та про особливості їхнього руху. Тепер відомо, що атоми й молекули мають складну будову. Проте правильний вибір моделі ідеального газу дав можливість молекулярно-кінетичній теорії газів досягти свого розвитку ще в той період, коли про будову атомів нічого не знали.

§ 14.2. Основні положення молекулярно-кінетичної теорії газів

Модель ідеального газу встановлюють на основі таких міркувань. Молекули газу взаємодіють між собою внаслідок молекулярних сил. Природа цих сил електромагнітна, вони обумовлені рухом і взаємодією заряджених частинок в атомах. Характер взаємодії молекул залежить від відстаней між ними: на далеких відстанях — це сили взаємного притягання, при зближенні молекул вони замінюються силами відштовхування, які швидко наростають зі зменшенням відстані. У газах за нормальних умов середні відстані між молекулами значно більші від їхнього діаметра. Міжмолекулярна взаємодія на таких відстанях слабка, і нею можна при зазначених умовах нехтувати. При наближенні молекул до відстаней, співрозмірних з їхнім діаметром, сили відштовхування приводять до різкої зміни напряму і модуля швидкостей молекул, що сприймається як зіткнення. Кількість таких зіткнень для кожної молекули за нормальних умов становить 10^9 — 10^{10} $с^{-1}$. Вважають, що між зіткненнями молекула рухається рівномірно і прямолінійно. Час між зіткненнями значно більший від

* Слово "газ" походить від слова "хаос". Цей термін вперше запропонував нідерландський хімік Ян Гельмонт (1579—1644) у 1640 р.

часу самих зіткнень. У результаті взаємодій і багаторазових зіткнень встановлюється абсолютно хаотичний рух молекул, коли всі напрями швидкостей рівноймовірні, а модулі — можуть набувати значень від близьких до нуля до дуже великих. Такий рух молекул називають *тепловим*. За нормальних умов, і особливо для розріджених газів, можна знехтувати розмірами молекул (і сумарним об'ємом) порівняно з відстанями між ними (вважати молекули матеріальними точками), також можна знехтувати в першому наближенні і їхньою взаємодією на відстані, враховуючи лише взаємодію під час зіткнень. Такий газ називають *ідеальним*.

Теорію ідеального газу можна розглядати на двох рівнях. По-перше, можна розглядати газ як суцільне середовище без вивчення його будови. Йдеться про дослідні газові закони та рівняння стану газу. По-друге, вивчення ідеального газу можна провести значно глибше на основі переходу від динамічних до статистичних закономірностей у колективі (ансамблі) частинок (молекул) газу. Йдеться про молекулярно-кінетичну теорію газів. В основу молекулярно-кінетичної теорії газів покладено такі положення:

1. Газ складається з однакових за масою (однорідний газ) сферичних молекул, розмірами яких можна нехтувати. Молекули — недеформовані, між ними немає притягання і відштовхування.

2. У довільному досить малому об'ємі газу, до якого можна застосувати молекулярно-кінетичну теорію, міститься дуже велика кількість молекул. У таких системах виникають нові статистичні, ймовірнісні закономірності, яких не було в системах з малою кількістю частинок. Суть цих закономірностей зводиться до того, що в ідеальному газі встановлюється певний найбільш імовірний розподіл молекул за швидкостями.

3. Зіткнення молекул між собою та зі стінками посудини відбуваються за законами пружних ударів.

4. Інтервали часу між зіткненнями значно більші, ніж час самих зіткнень. Зважаючи на це, в проміжках між зіткненнями молекули в газі рухаються прямолінійно і рівномірно.

5. Якщо немає зовнішніх сил, молекули газу розподілені рівномірно в усьому об'ємі.

6. Напрями швидкостей молекул газу в рівноважному стані розподілені хаотично, тобто всі напрями в газі рівноймовірні ("молекулярний хаос"). Слово "хаос" слід розуміти в тому смислі, що система не зберігає ніякої інформації про своє минуле. Хаотичністю молекулярного руху пояснюється багато експериментальних фактів. Введенням таких уявлень у фізику досить вдало вгадано характер руху молекул у речовині. Гіпотеза "молекулярного хаосу" передає уявлення про самовільне встановлення в ізольованій системі (при сталих зовнішніх параметрах) рівноважного стану.

§ 14.3. Тиск газу. Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії газів

За молекулярно-кінетичною теорією тиск газу на стінки посудини обумовлений ударами молекул. У результаті удару кожна молекула передає стінці імпульс і, таким чином, діє на неї з певною дуже малою силою. В свою чергу стінка діє на молекулу з такою самою силою у протилежному напрямі. При малій кількості молекул у посудині ці удари відбуваються зі значними (у молекулярному масштабі) інтервалами часу, і це сприймається не як неперервна дія, а як ряд послідовних дуже малих дій. При великій кількості молекул у посудині, що реально, крім штучно створюваних умов високого вакууму, ці удари відбуватимуться неперервно. Нескінченно малі дії окремих молекул додаються, і результуюча дія сприймається як практично постійно діюча сила. Усереднена за часом результуюча сила дії молекул на одиницю площі посудини і є тиском газу.

Знайдемо тиск газу на стінки посудини. Приймемо, що ідеальний газ міститься у посудині кубічної форми (рис. 14.1). З ребрами куба пов'яжемо прямокутну систему координат $OXYZ$. Швидкість будь-якої молекули $\vec{v}$ можна виразити через проекції на координатні осі v_x, v_y, v_z так:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2. \qquad (14.1)$$

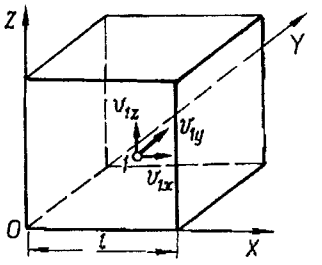


Рис. 14.1

Знайдемо спочатку дію молекул на праву стінку посудини, перпендикулярну до осі OX. При зіткненнях молекул з цією стінкою враховуватимемо лише зміни складових швидкостей у напрямі осі OX. Модулі складових швидкостей v_x при пружних ударах молекул змінюватися не будуть, а напрями змінюватимуться на протилежні. Наприклад, зміна кількості руху першої молекули при зіткненні з правою стінкою буде

$$m_{01}v_{1x} - (-m_{01}v_{1x}) = 2m_{01}v_{1x}.$$

За другим законом Ньютона ця зміна кількості руху визначить результуючий імпульс на стінку посудини

$$f_1'\Delta t' = 2m_{01}v_{1x},$$

де f_1' — середнє значення сили протягом удару; $\Delta t'$ — тривалість удару молекули.

Обчислимо сумарну зміну кількості руху першої молекули при її зіткненнях з правою стінкою посудини протягом $\tau = 1$ с. Зрозуміло, що після першого удару другий удар наступить через деякий проміжок часу, потрібний для переміщення молекули до лівої стінки і назад. При цьому молекула пройде шлях, що дорівнює $2l$ при швидкості v_{1x}. Тому час між ударами першої молекули об праву стінку буде $\Delta t = 2l/v_{1x}$, а за $\tau = 1$ с молекула зазнає $\nu = \frac{1}{\Delta t} = v_{1x}/(2l)$ зіткнень зі стінкою. Тоді зміна кількості руху першої молекули протягом однієї секунди визначить середню силу f_{1x} дії цієї молекули на стінку, яка буде

$$f_{1x} = 2m_{01}v_{1x}\frac{v_{1x}}{2l} = \frac{1}{l}m_{01}v_{1x}^2.$$

Результуюча сила дії всіх n молекул об'єму посудини протягом однієї секунди на праву (так само і на ліву) стінку буде

$$f_{1x} + f_{2x} + \ldots + f_{nx} = \frac{1}{l}(m_{01}v_{1x}^2 + m_{02}v_{2x}^2 + \ldots + m_{0n}v_{nx}^2), \quad (14.2)$$

де $m_{01}, m_{02}, \ldots, m_{0n}$ — маси окремих молекул; $v_{1x}, v_{2x}, \ldots, v_{nx}$ — їхні складові швидкості; $f_{1x}, f_{2x}, \ldots, f_{nx}$ — середні сили, з якими кожна з n молекул діє на праву стінку куба протягом $\tau = 1$ с. Ліва частина рівності (14.2) визначає середню результуючу силу дії всіх n молекул газу протягом $\tau = 1$ с на праву стінку посудини, розміщену перпендикулярно до осі OX : $f_x = \sum_{i=1}^{n} f_{ix}$. Якщо силу f_x поділити на площу грані куба $S = l^2$, то дістанемо

$$f_x/l^2 = p_x = \frac{1}{l^3}(m_{01}v_{1x}^2 + m_{02}v_{2x}^2 + \ldots + m_{0n}v_{nx}^2).$$

Аналогічно

$$p_y = \frac{1}{l^3}(m_{01}v_{1y}^2 + m_{02}v_{2y}^2 + \ldots + m_{0n}v_{ny}^2),$$

$$p_z = \frac{1}{l^3}(m_{01}v_{1z}^2 + m_{02}v_{2z}^2 + \ldots + m_{0n}v_{nz}^2). \quad (14.3)$$

Під час хаотичного руху молекул кожний напрям руху є рівноймовірним, тому тиск газу на всі стінки посудини повинен бути однаковим: $p_x = p_y = p_z = p$. Додавши ліві і праві частини рівностей (14.3), дістанемо

$$3p = \frac{1}{l^3}(m_{01}(v_{1x}^2 + v_{1y}^2 + v_{1z}^2) +$$

$$+ m_{02}(v_{2x}^2 + v_{2y}^2 + v_{2z}^2) + \ldots + m_{0n}(v_{nx}^2 + v_{ny}^2 + v_{nz}^2). \quad (14.4)$$

З урахуванням (14.1) рівність (14.4) перепишемо так:

$$3p = \frac{1}{l^3}(m_{01}v_1^2 + m_{02}v_2^2 + \ldots + m_{0n}v_n^2),$$

або

$$p = \frac{2}{3}\frac{1}{l^3}\sum_{i=1}^{n}\frac{m_{0i}v_i^2}{2}. \quad (14.5)$$

З рівності (14.5) видно, що тиск газу прямо пропорційний сумі кінетичної енергії поступального руху молекул одиниці об'єму газу. Ми дістали такий статистичний результат на основі модельних уявлень про ідеальний газ та характер руху і взаємодії його молекул.

Для однорідного газу $m_{01} = m_{02} = \ldots = m_{0n} = m_0$. Тоді

$$p = \frac{2}{3}\frac{m_0}{2l^3}(v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2).$$

Введемо середню квадратичну швидкість руху молекул газу, квадрат якої дорівнює сумі квадратів швидкостей усіх n молекул газу, поділену на їх кількість:

$$\langle v_{\text{кв}}^2\rangle = \frac{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}{n}.$$

Тоді рівність (14.5) запишемо так:

$$p = \frac{2}{3}n_0\frac{m_0\langle v_{\text{кв}}^2\rangle}{2}, \quad (14.6)$$

де $n_0 = n/l^3$ — кількість молекул в одиниці об'єму газу; $m_0\langle v_{\text{кв}}^2\rangle/2$ — середня кінетична енергія поступального руху однієї молекули газу.

З рівності (14.6) видно, що тиск ідеального газу дорівнює двом третинам середньої кінетичної енергії поступального руху молекул одиниці об'єму газу. Це один з найважливіших результатів кінетичної теорії ідеального газу. Рівняння (14.6) називають *основним рівнянням* молекулярно-кінетичної теорії газів. Воно встановлює зв'язок між молекулярними величинами (маса та швидкість молекули) і тиском, який характеризує газ як ціле і який можна безпосередньо виміряти на досліді.

Формулу (14.6) встановлено з урахуванням лише зіткнень молекул зі стінкою посудини і явно не враховані зіткнення самих молекул між собою в об'ємі газу. Однак це не впливає на кінцевий результат, оскільки при рівноважному стані газу внутрішні зіткнення молекул змінюють лише модулі та напрями їхніх швидкостей, а результуюча швидкість молекул газу як системи практично не змінюється. Проте врахування зіткнень молекул між собою в об'ємі газу приводить до дещо іншого розуміння тиску. Розкривається механізм силової взаємодії між мікроскопічними частинками газу.

При виведенні формули (14.6) у моделі ідеального газу не передбачалася внутрішня структура молекул і, таким чином, не враховувалися рухи структурних елементів їх; також не враховувалися обертальні чи коливальні рухи самих молекул. Виявляється, що на тиск ідеального газу всі зазначені рухи практично не впливають і суттєвим є лише поступальний рух центрів молекул, які можна розглядати як матеріальні точки. При розрахунках тиску за формулою (14.6) для нерелятивістських швидкостей приймають масу частинок $m_0 = \text{const}$, для релятивістських — враховують залежність маси частинок від швидкості. Отже, спрощене уявлення про рух і взаємодію молекул ідеального газу дає можливість врахувати суттєві особливості їх і на цій основі встановити основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії газів.

Зазначимо, що тиск газу визначається середньою кінетичною енергією поступального руху молекул і, як макроскопічний параметр, обумовлюється одночасною дією величезної кількості їх. Тому немає рації говорити про тиск однієї чи невеликої кількості молекул. У цьому розумінні тиск є статистичним параметром.

За одиницю тиску в СІ приймають такий тиск, при якому на 1 м^2 поверхні нормально до неї діє сила в 1 Н. Цю одиницю називають паскаль: 1 Па = 1 Н/м^2.

У техніці часто користуються одиницею тиску, яку називають бар: 1 бар = 10^5 Па.

Також для вимірювання тиску газів використовують так звану технічну атмосферу: 1 ат = 98 066,5 Па ≈ 0,98 бар.

Фізична атмосфера визначається як тиск стовпчика ртуті заввишки 0,76 м. За формулою гідростатичного тиску $p = \rho g h$ ($\rho = 13\,595{,}1$ кг/м^3, $g = 9{,}81$ м/с^2) можна розрахувати фізичну атмосферу: 1 атм = = 101 325 Па ≈ 1,01 бар.

Для вимірювання низьких тисків використовують одиницю тиску тор (міліметр ртутного стовпчика): 1 тор = 1/760 атм = 133,322 Па.

Надзвичайно цікавою у науковому плані і важливою у технічному є дослідження властивостей речовини в широкому діапазоні тисків. Це важливо не тільки для одержання речовини з новими унікальними властивостями типу штучних алмазів, переходу в металеву фазу ряду неметалевих елементів (водню, вуглецю, гелію та ін.), переходу

діелектриків у напівпровідники і далі у фазу з металевою провідністю, а й для пізнання фізичних процесів у надрах Землі, Сонця, зірок. У центрі Землі за рахунок гравітації тиски сягають $3{,}5 \cdot 10^2$ ГПа, Сонця — $2 \cdot 10^4$ ГПа, зірок — 10^9 — 10^{11} ГПа. Сучасна експериментальна техніка дає змогу діставати тиски від 10^{-11} Па (надвисокий вакуум) до надвисоких тисків порядку 10 ГПа статичними методами і 10^3 ГПа динамічними методами (за допомогою вибуху). Одночасно з розвитком техніки одержання таких тисків розвивалася і техніка вимірювання їх. Фізичні основи одержання різних тисків і методи вимірювання їх досить різноманітні, і це на сьогодні становить окрему галузь науки — фізику низьких та високих тисків.

§ 14.4. Температура

Температура — це фізична величина, про яку людина дізнається з раннього дитинства, як про ступінь нагрітості тіл (холодне, тепле, гаряче); як характеристику теплої або холодної в різні пори року погоди; як показник стану здоров'я людини та ін. Побутове поняття температури часто перешкоджає розкриттю її глибокого фізичного змісту. А це одна із дуже не простих фізичних величин, до розуміння якої людство йшло протягом багатьох віків.

Поняття температури може бути введено на основі різних підходів: як величина, пропорційна середній кінетичній енергії частинок тіла, як розподіл частинок тіла за рівнями енергії або за швидкостями, за ступенем іонізації, за спектральною густиною випромінювання та ін. Такі температури часто і називають відповідно температурами збудження, кінематичною, іонізаційною, радіаційною. У вченні про теплоту температура вводиться через поняття теплової, або термічної, рівноваги, у більш загальному розумінні — через поняття термодинамічної рівноваги.

Поняття термодинамічної рівноваги встановлюється на основі дослідів. Якщо два тіла різного ступеня нагрітості привести в контакт, то виявляється, що одне тіло нагріватиметься, інше — охолоджуватиметься доти, доки в системі цих тіл не припиняться всякі макроскопічні зміни. За прийнятою термінологією це означає, що в системі цих тіл наступила термодинамічна рівновага і, отже, встановилася однакова температура. Така рівновага самочинно встановлюється завжди незалежно від кількості контактуючих тіл або фізичних чи хімічних процесів, які можуть протікати в системі розглядуваних тіл протягом певного часу. Самовільний процес переходу системи у стан термодинамічної рівноваги називається *релаксацією*, а час, протягом якого встановлюється рівновага, — *часом релаксації*.

Зазначимо, що термодинамічна рівновага передбачає наявність ізольованої або замкненої системи, тобто системи тіл, які не можуть обмінюватись енергією з оточуючими тілами. Це ідеалізація, яка може

наближатися до реальності лише у випадку, коли система міститься у теплонепровідній, або адіабатній, оболонці (наприклад, у посудині Дьюара). Термодинамічну рівновагу в загальному випадку можна характеризувати як рівновагу динамічну в тому розумінні, що на мікроскопічному (молекулярному) рівні можуть відбуватися інтенсивні процеси, але всі макроскопічні процеси припиняються. Наприклад, якщо в посудину з водою насипати достатню кількість кухонної солі, то після встановлення рівноваги кількість рідкого розчину і солі у твердій фазі не змінюються, однак на молекулярному рівні постійно протікають процеси розчинення і кристалізації, які макроскопічно повністю компенсуються.

Таким чином, для кожної статистичної системи (системи макроскопічних тіл) існує стан термодинамічної рівноваги, якої вона з часом самовільно сягає при фіксованих зовнішніх умовах. Ця встановлена експериментально закономірність часто формулюється як *нульове начало термодинаміки.* Під час термодинамічної рівноваги макроскопічні параметри системи (параметри, які вимірюються за допомогою макроскопічних приладів) не змінюються з часом і при цьому в системі немає будь-яких потоків.

Термодинамічна рівновага передбачає також механічну та хімічну рівновагу. Іншими словами, при рівновазі немає механічних переміщень, які загалом можуть виникати, наприклад, при неоднакових тисках у різних точках системи, а також не відбуваються хімічні процеси. У випадку, якщо такі процеси виникають, то тіла системи можна відокремити теплопровідною тонкою перегородкою, через яку вільно передається енергія і з часом встановлюється теплова або термічна рівновага. В ізольованій системі стан теплової рівноваги через деякий час встановлюється самочинно. У процесі встановлення рівноваги відбувається передача теплової енергії і, в результаті, вирівнювання температури тіл системи. Отже, у випадку термодинамічної або термічної рівноваги температура в усіх точках ізольованої системи однакова і релаксаційних процесів немає. Таким чином, з експериментальної точки зору, температура тіла — це величина, яка визначає, чи буде дане тіло передавати теплоту тілові з іншою температурою, чи, навпаки, отримуватиме від нього теплоту. На цій основі може бути встановлена об'єктивна міра нагрітості тіл — температура, яка є характеристикою внутрішнього стану тіла і визначає його тепловий, або енергетичний, стан.

Кажучи про холодні або гарячі тіла, ми відзначаємо, що вони мають різну температуру. Тому, щоб відповісти на запитання, що таке температура, потрібно розібратися, чим відрізняється холодне тіло від гарячого. Це стало можливим лише на основі молекулярно-кінетичної теорії будови речовини.

З основного рівняння молекулярно-кінетичної теорії газів (14.6) випливає, що при $V = \text{const}$ ($n_0 = n/V$, де n — число молекул у посудині об'ємом V) тиск газу визначається середньою кінетичною

енергією молекул. З дослідів відомо, що при $V = \text{const}$ тиск газу можна змінити тільки нагріванням або охолодженням, тобто зміною його температури. Отже, між температурою та середньою кінетичною енергією молекул повинен існувати певний зв'язок.

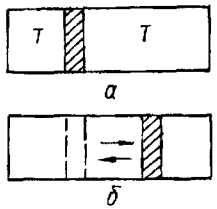


Рис. 14.2

Розглянемо докладніше зміст поняття температури. Візьмемо теплоізольований циліндр з ідеальним газом, в якому встановилася теплова рівновага (температура в усіх точках об'єму газу однакова). Для наочності помістимо в циліндр без порушення рівноваги рухомий поршень, який розділить об'єм газу на дві частини (рис. 14.2, *а*). У рівноважному стані поршень перебуватиме у спокої. Це означає, що в рівноважному стані не тільки температура, а й тиск з обох боків поршня однакові. Тоді згідно з рівністю (14.6) маємо

$$n_0 \left(\frac{m_0 \langle v_{\text{кв}}^2 \rangle}{2} \right)_{\text{прав}} = n_0 \left(\frac{m_0 \langle v_{\text{кв}}^2 \rangle}{2} \right)_{\text{лів}}. \qquad (14.7)$$

Створимо в об'ємі газу градієнт температури (знявши, наприклад, теплоізоляцію ліворуч від поршня і нагрівши там газ). Після цього знову відновимо теплоізоляцію в лівому об'ємі. Тепер у циліндрі буде нерівноважний стан газу — температура T ліворуч від поршня вища, ніж у правій частині (рис. 14.2, *б*). Проте газ — ізольована система. Тому почне здійснюватися процес релаксації. При цьому поршень внаслідок різниці тисків рухатиметься праворуч. А це означає, що виконується робота, і зліва направо через поршень передається теплова енергія, тобто в процесі теплової релаксації відбувається передача енергії теплового руху молекул газу в лівій частині циліндра молекулам газу в правій частині циліндра. Через певний час поршень зупиниться у своєму початковому положенні, яке було до нагрівання лівої частини. Газ у циліндрі прийде в новий рівноважний стан, в якому температура і тиск вищі, ніж до нагрівання. Оскільки об'ємна концентрація молекул не змінилася, то в результаті нагрівання газу змінилася тільки середня кінетична енергія його молекул. Вирівнювання температури при цьому означає вирівнювання середньої кінетичної енергії молекул і відповідно вирівнювання тисків газу з обох боків поршня, що є причиною повернення його у вихідне положення.

Отже, середня кінетична енергія молекул "поводить" себе як температура, яка характеризує стан внутрішнього руху частинок рівноважної системи і має одне значення для всіх ділянок складної системи незалежно від кількості частинок в них. Тому температура є інтенсивним параметром (незалежним від маси системи).

У наведеному прикладі поршень був потрібний лише для наочності. Зрозуміло, що і без поршня молекули внаслідок зіткнень обмінюються енергіями, в результаті чого вона передається від більш нагрітої частини газу до менш нагрітої, що й приводить до вирівнювання середньої кінетичної енергії молекул в усьому об'ємі ідеального газу. Отже, наведені прості, хоча й не дуже строгі міркування свідчать про те, що в рівноважних умовах температура однозначно пов'язана з середньою кінетичною енергією теплового руху молекул. Експериментальні дослідження і спостереження дають підстави поширити цей висновок на тіла в довільному агрегатному стані.

Температуру ідеального газу зручно прийняти рівною двом третинам середньої кінетичної енергії поступального руху молекули:

$$\frac{2}{3}\frac{m_0 <v_{кв}^2>}{2} = \Theta.$$

Це значно спрощує запис основного рівняння молекулярно-кінетичної теорії газів (14.6):

$$p = n_0\Theta. \qquad (14.8)$$

Для вимірювання температури можна використати довільні одиниці енергії. Проте історично склалося так, що для вимірювання температури було запропоновано спеціальні одиниці — градуси. Причина цього в тому, що вимірювати температуру навчилися раніше, ніж було з'ясовано її фізичний зміст. Крім того, використання одиниць енергії у термометрії становить значні метрологічні труднощі.

Якщо вимірювати температуру в градусах, то потрібно ввести відповідний коефіцієнт, який переводить одиниці енергії в градуси. Цей коефіцієнт позначають літерою k. Тоді

$$\Theta = kT. \qquad (14.9)$$

Множник k, який виражає співвідношення між одиницями енергії і термодинамічної температури T, називають *сталою Больцмана.* Числове значення сталої Больцмана визначається дослідним шляхом. У СІ $k = 1{,}380658(12)\cdot 10^{-23}$ Дж/К.

На основі формул (14.6), (14.8), (14.9) дістаємо

$$\frac{m_0 <v_{кв}^2>}{2} = \frac{3}{2}kT. \qquad (14.10)$$

З формули (14.10) можна розкрити зміст сталої Больцмана: вона показує, на скільки змінюється енергія теплового поступального руху однієї молекули при зміні температури на 1 К.

Температура — це макроскопічний параметр, який характеризує внутрішній тепловий стан тіла і визначається рухом величезної кількості його структурних елементів (атомів, молекул тощо).

У цьому розумінні температура є статистичною величиною, її молекулярно-кінетичне тлумачення таке: абсолютна температура тіла в рівноважних умовах — це міра середньої кінетичної енергії хаотичного поступального руху його молекул. З формули (14.10) випливає, що при однаковій температурі молекули різних газів мають однакову середню енергію поступального руху.

Статистично поняття температури має сенс лише для колективу молекул. Не можна говорити про температуру однієї або кількох (небагатьох) молекул, про "гарячі" або "холодні" молекули. Поняття температури втрачає сенс, наприклад, щодо газу в космічному просторі, де концентрація молекул настільки незначна, що вони не утворюють газу в звичайному розумінні цього слова.

Поняття температури є означеним лише для рівноважних станів системи. Тому для систем, які близькі до рівноважних станів, температура є наближеною характеристикою. Для систем, які явно перебувають у нерівноважному стані, поняття температури взагалі втрачає сенс.

§ 14.5. Броунівський рух. Дифузія. Молекулярні пучки

Безпосереднім експериментальним наочним підтвердженням молекулярного руху та його залежності від температури є *броунівський рух*, дифузія та інші явища.

У 1827 р. англійський ботанік Р. Броун (1773—1858) спостерігав у мікроскоп безладні неперервні рухи дрібних частинок (спори папороті, що зависли у воді), які не затухають з часом. Інтенсивність броунівського руху зростає з підвищенням температури рідини і зменшенням її в'язкості, а також зі зменшенням діаметра частинки. Дві частинки рухаються у тій самій рідині однаково, якщо форма і розміри їх однакові. Цей рух не залежить ні від густини, ні від природи речовини частинок.

Спочатку це явище пов'язувалось з життєвими процесами, але вже сам Броун встановив, що воно властиве частинкам як органічного, так і неорганічного походження. Це вказує на те, що броунівський рух є проявом теплового руху молекул. Броунівський рух самочинний. Він існує, не потребуючи ніяких зовнішніх рушіїв, і тому вічний. Важко підшукати більш виразний приклад незнищуваності, вічності руху. Броунівський рух зумовлений поштовхами, яких зазнають завислі частинки з боку оточуючих молекул, що перебувають у тепловому русі. Оскільки поштовхи молекул об частинку не зрівноважуються, то завислі частинки здійснюють рухи по складних ламаних лініях. Броунівський рух повністю нерегулярний, тобто хаотичний.

Молекулярно-кінетичне пояснення цього явища у 1905 р. дав А. Ейнштейн. Незалежно від Ейнштейна М. Смолуховський у 1906 р. також розробив математичну теорію броунівського руху. Його кінцева формула відрізняється від формули Ейнштейна лише значенням числового коефіцієнта.

При цьому вважалося, що броунівські частинки разом з молекулами рідини утворюють єдину статистичну систему. Формула Ейнштейна має такий вигляд:

$$<\Delta x^2> = \frac{kT}{3\pi\eta r}\Delta t, \qquad (14.11)$$

де $<\Delta x^2>$ — середнє значення квадрата проекції зміщення броунівської частинки за проміжок часу Δt; η — коефіцієнт динамічної в'язкості рідини; r — радіус частинки; k — стала Больцмана; T — температура рідини.

Формула (14.11) справедлива і для середнього значення квадрата багатьох послідовних переміщень однієї частинки за однакові проміжки часу. На рис. 14.3 зображено характер руху броунівської частинки у площині XOY (поле зору мікроскопа). Точки показують положення частинки через однакові проміжки часу.

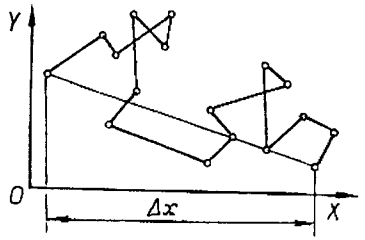


Рис. 14.3

У 1908 р. французький фізико-хімік Ж. Перрен (1870—1942) експериментально підтвердив формулу Ейнштейна і на цій основі розрахував сталу Больцмана k та число Авогадро N_A. Результати Перрена добре узгоджувались з результатами, одержаними іншими методами, що було одним із суттєвих підтверджень правильності молекулярно-кінетичних уявлень про броунівський рух і підтвердженням самої молекулярно-кінетичної теорії.

Ще одним дослідним підтвердженням молекулярно-кінетичної теорії є явище дифузії. Воно полягає в установленні всередині системи рівноважного розподілу концентрації в результаті теплового руху частинок речовини. Прикладом дифузії може бути поширення запаху летких ароматичних речовин. Дифузія характерна для газів, рідин та твердих тіл. Дифузія в газах відбувається значно швидше, ніж у рідинах, оскільки швидкість молекул газу і шляхи, що їх проходять молекули від одного зіткнення до іншого, в газах значно більші.

Повільність дифузії в твердих тілах пов'язана з характером теплового руху атомів у них. Для участі у дифузії вони повинні залишити своє місце в гратці, тобто подолати значні потенціальні сили зв'язку. Для цього атоми повинні набути достатньої кінетичної енергії.

З практичних застосувань дифузії вкажемо такі: цементація металів — процес насичення поверхневих шарів вуглецем (до 0,8—1,2 %) з наступним гартуванням і відпуском; азотування, ціанування, хромування, алітування сталей — насичення поверхневих шарів відповідно азотом, одночасно вуглецем і азотом, алюмінієм, хромом. Ці процеси хіміко-термічної обробки металів підвищують твердість, зносостійкість, окалиностійкість, корозієстійкість поверхні металів. До деталей, які потребують хіміко-термічної обробки, належать зубчасті колеса, вали, осі, штоки, шнеки, гільзи та ін.

Молекулярні пучки — це потік діафрагмованих молекул або атомів, які випаровуються з поверхні металів і поширюються у вакуумній камері ($p \approx 10^{-3}$ Па) практично без зіткнень. Вони знаходять широке застосування в науці і техніці. Наприклад, за допомогою молекулярних пучків можна визначити швидкість молекул, розподіл їх за швидкостями. Метод молекулярних пучків в неоднорідних електричних і магнітних полях дає змогу провести сортування молекул за різними станами, а також добути цінну інформацію про їхні властивості. На молекулярних пучках грунтується один із методів поділу нуклідів. Утворення тонких плівок для сучасної радіоелектроніки також грунтується на методі молекулярних пучків.

§ 14.6. Рівняння стану ідеального газу

Стан системи визначається сукупністю її властивостей і відповідних фізичних характеристик. Як зазначалося, під системою будемо розуміти макроскопічні фізичні об'єкти дослідження, обмежені певною областю простору. Межа системи може бути як матеріальною (стінки посудини), так і уявною, обмеженою в просторі подумки.

У даному разі розглядатимемо ідеальний газ. Стан маси ідеального газу, якщо немає зовнішніх полів, визначається макроскопічними параметрами: об'ємом V, тиском p і температурою T. Такий стан називають *макроскопічним*. Рівняння, яке в стані теплової рівноваги пов'язує всі три макроскопічні характеристики стану ідеального газу, називають термічним рівнянням стану. У загальному вигляді його можна записати так:

$$F(p, V, T) = 0, \quad \text{або} \quad p = f(V, T). \qquad (14.12)$$

Рівняння стану є одним з найважливіших для характеристики властивостей однорідних систем. Воно може бути встановлене або теоретично на основі молекулярно-кінетичних (статистичних) модельних уявлень, або на основі результатів експериментальних досліджень.

На основі рівнянь (14.6) та (14.10) основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії газів має вигляд

$$p = n_0 kT. \qquad (14.13)$$

Оскільки $n_0 = n/V$, то

$$pV = nkT. \tag{14.14}$$

Рівняння (14.14) фактично і є термічним рівнянням стану ідеального газу, оскільки воно встановлює зв'язок між p, V і T. Проте це рівняння містить число молекул газу n в об'ємі V, яке не піддається прямому вимірюванню. Тому в рівнянні (14.14) кількість частинок n замінюють їхньою масою m — макроскопічним параметром, що легко визначається дослідно. Для цього скористаємось одиницею кількості речовини — молем. При використанні моля речовини структурні елементи мають бути специфікованими. Це можуть бути атоми, молекули, іони, електрони, нейтрони, протони або інші частинки чи специфіковані групи частинок.

Позначимо масу одного моля речовини M. В одному молі міститься N_A структурних одиниць речовини (молекул, атомів). Тоді рівняння (14.14) для одного моля ідеального газу має вигляд

$$pV_M = N_A kT. \tag{14.15}$$

Добуток двох фізичних констант kN_A є також константою, яку називають універсальною або *молярною газовою сталою* і позначають літерою R. Молярна газова стала однакова для всіх газів: $R = 8{,}31451$ Дж/(моль·К). Замінивши в рівнянні (14.15) kN_A на R, дістанемо

$$pV_M = RT. \tag{14.16}$$

Рівняння (14.16) є рівнянням стану для одного моля ідеального газу, встановлене вперше французським фізиком Б. Клапейроном (1799—1864), і називається рівнянням Клапейрона.

Узагальнимо рівняння (14.16) на довільну кількість молів газу. Позначимо кількість молів речовини ν. Тоді рівняння (14.16) запишемо так:

$$pV = \nu RT. \tag{14.17}$$

Якщо маса одного моля речовини M, то в довільній масі m міститься $\nu = \frac{m}{M}$ молів. Або, якщо один моль речовини містить N_A структурних одиниць, то n структурних одиниць становитимуть $\nu = \frac{n}{N_A}$ молів. Отже, для довільної кількості молів речовини рівняння (14.17) перепишемо у вигляді

$$pV = \frac{m}{M} RT, \text{ або } pV = \frac{n}{N_A} RT. \tag{14.18}$$

Аналогічні узагальнення вперше провів російський вчений Д.І. Менделєєв (1834—1907). Рівняння (14.18) є узагальненим рівнянням стану ідеального газу і називається рівнянням Клапейрона—Менделєєва.

З'ясуємо зміст молярної газової сталої R. Нехай один моль газу займає об'єм V_1 при температурі T_1 і тиску p (рис. 14.4). Нагріємо газ так, щоб його температура підвищилась на 1 К, тобто $T_2 = T_1 + 1$, а тиск залишився сталим. При цьому поршень переміститься вправо на Δx і буде виконана робота (p=const):

$$A = F\Delta x = pS\Delta x = p\Delta V. \tag{14.19}$$

Початковий стан газу під поршнем $pV_1 = RT_1$, кінцевий — $pV_2 = R(T + 1)$. Зміна стану газу

$$p\Delta V = R. \tag{14.20}$$

Порівнюючи (14.19) і (14.20), можна зробити висновок, що молярна газова стала R чисельно дорівнює роботі розширення одного моля ідеального газу при ізобарному нагріванні його на 1 К.

Рівняння стану ідеального газу є наближеним, і воно може використовуватись лише в межах застосовності моделі ідеального газу, тобто за умови, коли можна нехтувати власними розмірами (отже, і сумарним власним об'ємом) молекул та міжмолекулярною взаємодією. Реально це має місце при порівняно низьких тисках і достатньо високих температурах. Нормальні атмосферні умови в основному задовольняють вимоги ідеальності газу. Однак зі збільшенням тиску і зниженням температури все більше порушуватимуться модельні припущення ідеального газу, і, отже, використання рівняння стану ідеального газу стає проблематичним.

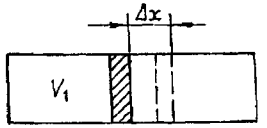


Рис. 14.4

§ 14.7. Основні закони ідеального газу

Газові закони було відкрито дослідними методами задовго до створення молекулярно-кінетичної теорії. Неважко показати, що їх як наслідки можна вивести з основного рівняння молекулярно-кінетичної теорії ідеального газу, взятого у вигляді

$$pV = nkT. \tag{14.21}$$

Розглянемо спочатку так звані ізопроцеси для даної маси газу (m = const).

Ізотермічний процес здійснюється при сталій температурі системи (T = const). Зауважимо, що при m = const також n = const.

З формули (14.21) видно, що при T = const

$$pV = \text{const}. \tag{14.22}$$

Це рівняння, яке називають рівнянням ізотермічного процесу, виражає дослідний закон Бойля — Маріотта, встановлений у 1662 р. англійським фізиком Р. Бойлем (1627—1691) і незалежно від нього у 1676 р. французьким фізиком Е. Маріоттом (1620—1684). Графічну залежність між p і V для різних температур на pV-діаграмі стану газу показано на рис. 14.5. З формули (14.22) видно, що ізотерми — це рівнобічні гіперболи. Щоб відповісти на запитання, якій температурі відповідає яка ізотерма, потрібно ще знати характер залежностей $p(T)$ або $V(T)$.

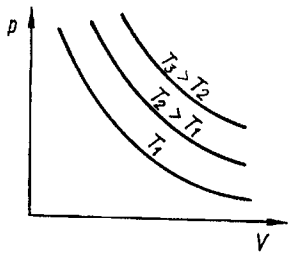


Рис. 14.5

Ізотермічні процеси відбуваються досить повільно. При цьому поняття температури не втрачає сенсу. Стисливість ідеального газу при T = const характеризується ізотермічним коефіцієнтом стисливості χ, який означається як відносна зміна об'єму, що зумовлює зміну тиску на одиницю,

$$\chi = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T, \tag{14.23}$$

де V — початковий об'єм; ∂V — зміна об'єму, яка зумовлює зміну тиску на ∂p. Індекс T біля похідної означає, що вона береться при T = const. Для ідеального газу коефіцієнт χ легко визначити. Диференціюючи (14.22) при T = const, дістаємо

$$d(pV) = V\partial p + p\partial V = 0,$$

звідси

$$\chi = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{p}. \tag{14.24}$$

Знак "мінус" у правій частині (14.24) поставлено для того, щоб коефіцієнт χ був додатною величиною, оскільки похідна $(\partial V/\partial p)_T$ завжди від'ємна, тобто при $\partial V > 0$, $\partial p < 0$.

В СІ коефіцієнт χ вимірюється в метрах квадратних на ньютон ($м^2/Н$).

Ізобарний процес відбувається в системі при сталому тиску (p = const). Такий процес можна здійснити, коли газ, наприклад, міститься в циліндрі з рухомим поршнем. Зміна температури газу в такому циліндрі зумовлює переміщення поршня, тобто зміну об'єму. Тиск при цьому залишається сталим. З (14.21) випливає, що при p = const

$$V/T = \text{const}. \tag{14.25}$$

Рівняння (14.25) називається рівнянням ізобарного процесу. Воно виражає відомий закон Гей-Люссака. Графіки ізобарних процесів, як видно з рівняння (14.25), мають вигляд ліній, що прямують до початку координат (рис. 14.6). Закон Гей-Люссака записують у вигляді

$$V = V_0(1 + \alpha t), \tag{14.26}$$

де V_0 — об'єм газу при 0 °С; V — об'єм газу при температурі t °С; α — коефіцієнт об'ємного розширення газу.

При досить низьких тисках величина α є однаковою для різних газів. Сучасними точними експериментальними засобами встановлено, що α = 0,003661 $К^{-1}$. Аналогічно коефіцієнту χ коефіцієнт α визначають так:

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{T_0}. \tag{14.27}$$

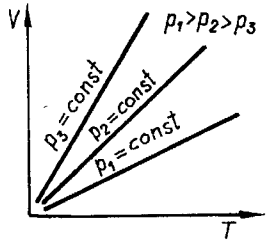


Рис. 14.6

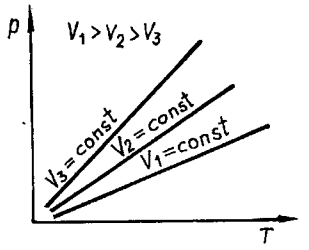


Рис. 14.7

Ізохорний процес відбувається при сталому об'ємі газу (V = const). З (14.21) випливає, що при V = const

$$p / T = \text{const}. \tag{14.28}$$

Це рівняння називається рівнянням ізохорного процесу. Графіки ізохорних процесів, як видно з рівняння (14.28), мають вигляд ліній, що прямують до початку координат (рис. 14.7). Рівняння ізохорного процесу записують у вигляді

$$p = p_0 (1 + \beta t), \tag{14.29}$$

де p_0 і p — тиски при 0 °С і t °С; β — термічний коефіцієнт тиску ($\beta = 0{,}003661\ K^{-1}$). Аналогічно коефіцієнту α коефіцієнт β визначають так:

$$\beta = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{T_0}. \tag{14.30}$$

Неважко встановити зв'язок між коефіцієнтами α, β і χ:

$$\beta = \frac{1}{p}\frac{\alpha}{\chi}. \tag{14.31}$$

Отже, знаючи для газів з досліду два коефіцієнти, за формулою (14.31) можна розрахувати третій.

З формули (14.21) також випливає, що кількість молекул при даних фіксованих p, V і T однакова в різних газах ($n_1 = n_2$). А це є закон Авогадро, встановлений у 1811 р. Він формулюється так: в однакових об'ємах ідеальних газів при однакових температурах і тисках міститься однакове число молекул.

Приклад 14.1. Вивести рівняння стану ідеального газу на основі дослідних газових законів.

Розв'язання. Для цього візьмемо на p—V-діаграмі два довільних стани, яким відповідають параметри p_1, V_1, T_1 і p_2, V_2, T_2 (рис. 14.8). Розглянемо процес переходу зі стану *1* в стан *2*, який складається з ізотерми $1 - 1'$ і ізохори $1' - 2$. У стані 1′ газ характеризується параметрами p', V_2, T_1. Для станів *1* і *1′* на основі (14.22) маємо

$$p_1 V_1 = p' V_2. \tag{1}$$

Для станів *1′* і *2* на основі (14.28) дістаємо

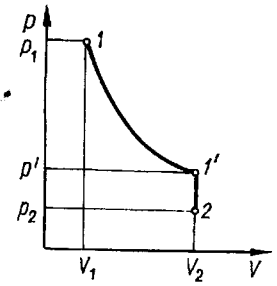


Рис. 14.8

$$p'/p_2 = T_1/T_2. \tag{2}$$

З формул (1) і (2) маємо

$$p_1 V_1/T_1 = p_2 V_2/T_2. \tag{3}$$

Оскільки стани *1* і *2* вибрано довільно, то можна зробити висновок, що

$$pV/T = \text{const}. \tag{4}$$

Якщо (4) записати для одиниці маси певного газу, то дістанемо

$$pV/T = B, \tag{5}$$

де B — питома газова стала. На практиці значення B, неоднакове для різних газів, визначають безпосередньо з густин газів при нормальних умовах за формулою

$B = p_0 V_0/273{,}16$ (V_0 — об'єм 1 кг газу при $1{,}01 \cdot 10^5$ Па і 0 °С). Так, для повітря $B = 289$ Дж/(кг·К). Значення B для інших газів можна дістати, поділивши 289 на густину цих газів, взяту в СІ. Рівняння (5) називається рівнянням Клапейрона. Для маси m даного газу воно має вигляд $pV = mBT$.

Д. І. Менделєєв дістав таке рівняння стану ідеального газу:

$$pV = 0{,}08207 \frac{m}{M}(273{,}09 + t). \tag{14.32}$$

Ця формула спрощує всі наближені розрахунки, які стосуються газів і пари, коли допустити точну застосовність законів Бойля — Маріотта, Гей-Люссака і Авогадро.

Для одного моля газу матимемо

$$pV_M = RT. \tag{14.33}$$

Формулу (14.33) запишемо для довільної маси газу m об'ємом V. Оскільки $m/M = \nu$ є число молів газу, то

$$pV = \frac{m}{M} RT. \tag{14.34}$$

За допомогою цього рівняння розв'язують задачі на обчислення об'єму, густини і тиску газів. У деяких випадках (гази непростого складу, наприклад продукти горіння в двигунах внутрішнього згорання) M визначається досить складно. Тоді раціональніше користуватися рівнянням (5) з прикладу 14.1. При цьому для кожного газу буде своя питома газова стала B.

§ 14.8. Швидкості газових молекул та вимірювання їх

Явища молекулярної фізики визначаються у великій мірі швидкостями руху молекул. Зважаючи на це, знаходження швидкостей молекул газу набуває як теоретичного, так і практичного значення.

Швидкості газових молекул внаслідок їхнього хаотичного руху відрізняються як за величиною, так і за напрямом. Швидкість даної молекули газу в даний момент часу є величина випадкова. У молекулярно-кінетичній теорії газів користуються поняттями середньої $< v >$, середньої квадратичної $< v_{кв} >$ та найбільш імовірної ($v_ц$) швидкостей. Ці швидкості задаються для рівноважних станів газу. Середня (або середньоарифметична) швидкість визначається рівнянням

$$< v > = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} v_i, \tag{14.35}$$

де v_i — швидкість i-ї молекули; n — кількість молекул. Середня квадратична швидкість визначається з рівняння (14.10):

$$< v_{кв} > = \sqrt{< v_{кв}^2 >} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}. \qquad (14.36)$$

За цією формулою можна обчислити також швидкість броунівських частинок. Звичайно, при цьому m_0 — маса броунівської частинки.

Виразу (14.36) можна надати більш зручного вигляду, помноживши чисельник і знаменник під коренем на число Авогадро. Враховуючи, що $kN_A = R$ та $m_0N_A = M$,

$$< v_{кв} > \sqrt{\frac{3RT}{M}}. \qquad (14.37)$$

Середню квадратичну швидкість називають ще тепловою. Значення $< v_{кв} >$ для газів досить великі. Так, для водню ($M = 2 \cdot 10^{-3}$ кг·моль$^{-1}$) при кімнатній температурі $< v_{кв} > = 1{,}9 \cdot 10^3$ м/с, тобто близько 2 км/с, для азоту $< v_{кв} > = 493$ м/с, для кисню $< v_{кв} > = 461$ м/с.

Теплова швидкість, як видно з (14.36), прямо пропорційна $\sqrt{T}$ і обернено пропорційна $\sqrt{m_0}$. Це означає, що тепловий рух досить інтенсивний для молекул, помітний для мікроскопічних частинок, які здійснюють броунівський рух, і зовсім непомітний для тіл великої маси.

Великий інтерес становить безпосереднє експериментальне визначення швидкостей газових молекул. Такі результати стають прямим підтвердженням положень молекулярно-кінетичної теорії. Перші дослідження провів німецький фізик-експериментатор О. Штерн (1888—1969) у 1920 р. Джерелом атомів, швидкість яких вимірювалась, у досліді Штерна був потік атомів срібла. Схему установки зображено на рис. 14.9. На осі системи двох коаксіальних циліндричних поверхонь натягнуто платиновий дріт, покритий шаром срібла. В інших дослідах використовували також вісмут, кадмій, цезій. Дріт розігрівався електричним струмом. Так, при температурі близько 1300 °С срібло з поверхні дроту випаровується. У такий спосіб створювалося лінійне джерело Ag-променів, і в камері циліндрів, повітря з якої заздалегідь відкачувалося до тиску $1{,}3 \cdot 10^{-4}$ Па, утворювався газ із атомів срібла. Частина атомів срібла через діафрагми s_1 і s_2 проходила, утворюючи потік, до поверхні зовнішнього циліндра, де осідала на прозорій пластинці у вигляді вузької смуги. Молекули

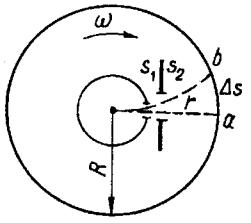


Рис. 14.9

пучка мають однаковий напрям швидкостей, але розділені хаотично за їх модулем.

На першій стадії досліду Штерна установка перебуває в стані спокою. При досягненні рівноважного стану (температура дроту досягала певного значення, яке визначали за його світінням) атоми срібла осідали біля точки a*. На другій стадії досліду обидва циліндри приводились в досить швидке обертання з частотою 41,7 с$^{-1}$. При цьому атоми срібла, рухаючись у вакуумі прямолінійно, осідали біля точки b. Зміщення смуги пояснюється тим, що, поки атоми срібла пролітають за інерцією шлях r, зовнішній циліндр встигає повернутися на кут $\varphi = \omega t$, тобто кожна точка зовнішнього циліндра зміщується на відстань $\Delta s = \omega Rt$, де ω — кутова швидкість його обертання; t — час, за який атоми срібла проходять шлях r. Отже,

$$t = \frac{r}{v} = \frac{\Delta s}{\omega R}, \qquad (14.38)$$

де v — усереднена швидкість атомів срібла; R — радіус зовнішнього циліндара; r — шлях атомів срібла від діафрагми s_1 до прозорої пластинки.

Звідси

$$v = \frac{\omega Rr}{\Delta s}. \qquad (14.39)$$

Вимірюючи зміщення смуг атомів срібла Δs та кутову швидкість обертання приладу, можна визначити швидкість атомів срібла. Вона приблизно описувалась виразом $\left(3{,}5\frac{kT}{m_0}\right)^{\frac{1}{2}}$, що узгоджується з середньою швидкістю молекул, яка визначається за формулою

$$< v > = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}}. \qquad (14.40)$$

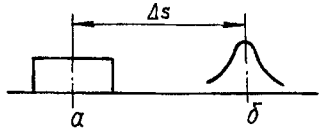


Рис. 14.10

У дослідах Штерна шар атомів срібла у випадку a (рис. 14.10) був однакової товщини, а ширина шару визначалась шириною щілини s_1. У випадку $б$ шар був розмитим, з максимумом у середній частині. Це свідчить про те, що атоми срібла мали різні швидкості. Більш швидкі атоми досягали прозорої пластинки раніше і осідали на початку розмитої смуги, а повільніші — пізніше і осідали в кінці цієї смуги. Наявність максимуму шару атомів срібла в положенні $б$ свідчила про те, що найбільше атомів мають швидкість, яку

* Насправді біля точки a утворювалась смуга завширшки 0,4 мм з досить окресленими краями.

називають найбільш імовірною швидкістю. Якщо б розмитий шар атомів поділити на тонкі однакової товщини смуги і підрахувати кількість атомів у кожній смузі, то можна було б дістати наближену картину розподілу кількості атомів срібла в їх потоці за швидкостями. Закономірність цього розподілу фактично визначається характеристиками кривої, що обмежує переріз розмитого шару срібла в положенні *б*.

Оскільки для одного моля газу $pV_M = RT$, то рівність (14.37) можна записати ще так:

$$< v_{кв} > = \sqrt{\frac{3p}{\rho}}, \qquad (14.41)$$

де ρ — густина газу, що дорівнює молярній масі, поділеній на об'єм моля газу. З (14.41) видно, що $< v_{кв} >$ може бути обчислена виходячи із знання таких макроскопічних параметрів, як тиск і густина газу. Зазначимо, що швидкість поширення звуку в газі повністю визначається швидкістю теплового руху його молекул. Тому формула для визначення швидкості звуку в газі $v_{зв} = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}$ подібна до формули (14.41).

§ 14.9. Поняття про статистичний розподіл. Функція розподілу. Розподіл молекул за швидкостями (розподіл Максвелла)

У стані статистичної рівноваги в ідеальному газі, яка настає внаслідок зіткнень молекул між собою, встановлюється розподіл молекул за швидкостями, що не змінюється з часом. Визначити, яким буде цей розподіл — одна із задач статистичної фізики.

Розглянемо спочатку суть задачі про розподіл. На перший погляд здається, що знайти розподіл молекул за швидкостями означає перерахувати кількість молекул, які мають певні строго визначені швидкості. Така постановка задачі не є коректною. По-перше, тому що подібні підрахунки практично здійснити неможливо, а по-друге, швидкість молекул є неперервною величиною і вказати точне значення швидкості неможливо. Тому задача про розподіл формулюється так: скільки з усіх наявних молекул мають швидкості, значення яких лежать у певному інтервалі швидкостей в околі заданої швидкості?

Нехай у закритій посудині є велика кількість n молекул ідеального газу, на які не діють зовнішні силові поля. Від довільної точки простору O, як початку координат, відкладемо вектори швидкостей усіх молекул газу, які вони мали в момент часу t: $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, ..., $\vec{v}_n$ (рис. 14.11). Кінці цих векторів називають швидкісними, або *зображувальними точками*. Сукупність усіх швидкісних точок утворює тривимірний простір, який називають простором швидкостей. У цьому просторі можна ввести прямокутні координатні осі. Координатами

довільної швидкісної точки будуть проекції v_x, v_y, v_z вектора $\vec{v}$ на ці осі. У цьому разі визначення швидкостей молекул газу рівноцінне визначенню положення їхніх швидкісних точок у просторі швидкостей. Тоді з динамічної точки зору задача про розподіл молекул за швидкостями зводиться до визначення положення швидкісних точок у просторі швидкостей у довільний момент часу. Однак задача з дуже великим числом молекул динамічними методами, як уже зазначалося, не може бути розв'язана. Це суто статистична задача, яку можна описати лише на основі ймовірнісних понять.

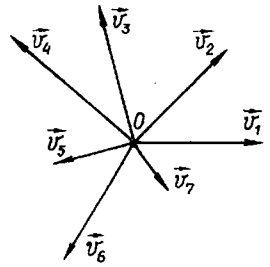


Рис. 14.11

Виділимо у просторі швидкостей фізично нескінченно малий елемент об'єму, який має, наприклад, форму прямокутного паралелепіпеда з ребрами dv_x, dv_y, dv_z і з центром у точці з координатами v_x, v_y, v_z (рис. 14.12). Припустимо, що в об'ємі $d\omega = dv_x\, dv_y\, dv_z$ виділеного паралелепіпеда міститься dn швидкісних точок. При зіткненнях молекул їхні швидкості постійно змінюються за модулем і напрямом. Це означає, що кількість швидкісних точок в об'ємі $d\omega$ увесь час змінюється. Щоб ці зміни були відносно малими, об'єм $d\omega$ повинен бути обраний таким, щоб у ньому містилася досить велика кількість швидкісних точок. Тоді на їхньому фоні зміни становитимуть малу величину. За цієї умови кількість швидкісних точок dn в об'ємі $d\omega$ у рівноважному стані змінюватиметься відносно мало, коливаючись навколо деякого середнього значення $< dn >$. При цьому середні значення $< dn >$ підпорядковуватимуться певним статистичним закономірностям (рух кожної частинки виявить ознаки випадкового процесу). З іншого боку, $< d\omega >$ повинен бути настільки малим, щоб розподіл швидкісних точок у просторі швидкостей міг бути описаний досить детально і щоб величини dv_x, dv_y, dv_z, $d\omega$ і dn можна було вважати нескінченно малими. З газом у звичайних умовах ці вимоги можуть бути забезпечені практично завжди внаслідок великої кількості молекул у порівняно малих об'ємах.

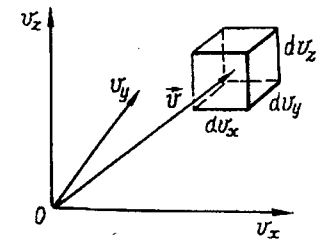


Рис. 14.12

Розглянемо ймовірність dW віднайти швидкісну точку з заданою швидкістю $\vec{v}$ в області, яка визначається малим інтервалом швидкостей $d\vec{v}$ ($\vec{v}$; $\vec{v} + d\vec{v}$), вважаючи, що макроскопічна система набула

рівноважного стану. Векторний інтервал $(\vec{v}\,;\ \vec{v}+d\vec{v})$ еквівалентний трьом координатним інтервалам у просторі швидкостей $(v_x;\ v_x+dv_x)$, $(v_y;\ v_y+dv_y)$, $(v_z;\ v_z+dv_z)$ і вимірюється об'ємом $d\omega = dv_x dv_y dv_z$ паралелепіпеда, зображеного на рис. 14.12. Оскільки рівноважний стан встановився, то dW не буде змінюватись з часом і залежатиме лише від об'єму $d\omega$ та його положення в просторі швидкостей.

Отже, dW буде прямо пропорційною $d\omega$:

$$dW = \frac{dn}{n} = f(\vec{v})\, d\omega. \qquad (14.42)$$

Величину $f(\vec{v})$ називають *функцією розподілу* молекул за швидкостями, або інакше, густиною ймовірності розподілу швидкісних точок молекул у просторі швидкостей. Якщо dn проінтегрувати по всьому швидкісному простору, то дістанемо загальну кількість молекул n. Звідси випливає умова нормування, яку повинна задовольняти функція $f(\vec{v})$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{v})\, d\omega = 1. \qquad (14.43)$$

Умова нормування фізично означає, що хоча ймовірність знайти молекулу з більшою або меншою швидкістю не однакова, але ймовірність знайти її рухомою з будь-якою швидкістю дорівнює одиниці, тобто є достовірною подією.

Рівність (14.42) визначає середнє число молекул $< dn >$ з усіх n, компоненти швидкостей яких знаходяться в межах v_x і $v_x + dv_x$, v_y і $v_y + dv_y$ та v_z і $v_z + dv_z$.

Функція $f(\vec{v})$ описує лише ймовірний розподіл молекул за швидкостями і змінюється неперервно зі зміною $\vec{v}$. Зазначимо, що при прямуванні $d\omega$ до нуля також і dn прямує до нуля. Це означає, що ймовірність молекул мати цілком визначену швидкість дорівнює нулю. Мова може йти лише про середнє число молекул в елементарному об'ємі швидкісного простору $d\omega$.

Функція розподілу може стосуватися довільної неперервно змінної випадкової величини: швидкості, координати, імпульсу, моменту кількості руху, енергії тощо. Якщо мова йде про векторну величину, наприклад швидкість $\vec{v}$, то ймовірність знайти задану швидкість означає знайти кожну з її проекцій в інтервалі dv_x, dv_y, dv_z в околі відповідних значень компонент. Іншими словами, кінець вектора швидкості повинен знаходитись у межах паралелепіпеда з сторонами

dv_x, dv_y, dv_z, побудованого біля точки з координатами v_x, v_y, v_z (див. рис. 14.12).

Із принципу рівноймовірності напрямів руху молекул (напрями рухів нічим не виділені, отже, силових полів немає) випливає, що функція розподілу не буде залежати від кутових змінних вектора $\vec{v}$, які визначають куди летить молекула, а залежатиме лише від модуля швидкості $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$, тобто

$$f(\vec{v}) = f(v).$$

Таким чином, молекули з довільним напрямом руху повинні зустрічатись однаково часто.

Оскільки молекули під час теплового руху переміщаються в усіх напрямах з довільними швидкостями, то можна припустити, що ймовірність віднайти молекулу, яка рухається вздовж осі OX з швидкістю v_x, зовсім не залежить від того, які проекції її швидкості на інші осі. Це стосується й напрямів руху молекули вздовж осей OY та OZ. З точки зору теорії ймовірності це означає, що три випадкові події (виявлення різних значень трьох компонент швидкості) є взаємно незалежними, і, отже, для них справджується теорема добутку ймовірностей:

$$dW(v) = dW(v_x)\, dW(v_y)\, dW(v_z). \qquad (14.44)$$

У 1859 р. Д. Максвелл уперше встановив закон розподілу молекул ідеального газу за швидкостями для макроскопічної фізичної системи, яка знаходиться в статистичній рівновазі, без врахування дії зовнішніх потенціальних полів. Задача полягала у визначенні $f(v)$.

Позначимо v_x, v_y, v_z — компоненти швидкості у напрямах осей OX, OY, OZ швидкісного простору. Тоді

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2.$$

Швидкісний простір вважатимемо ізотропним. Із загальної кількості n молекул макроскопічної системи dn_x матимуть у напрямі OX швидкості v_x, числові значення яких лежать в інтервалі v_x і $v_x + dv_x$. Тоді можна записати

$$\frac{dn_x}{n} = f(v_x)\, dv_x.$$

Аналогічні рівняння запишемо і для напрямів осей OY та OZ:

$$\frac{dn_y}{n} = f(v_y) dv_y, \quad \frac{dn_z}{n} = f(v_z) dv_z.$$

Як уже зазначалося (формула (14.44)), імовірність складної події взаємно незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей окремих

подій. Отже, ймовірність того, що швидкість молекули перебуває в інтервалі v і $v + dv$

$$dW = \frac{dn_x}{n}\frac{dn_y}{n}\frac{dn_z}{n} = f(v_x) f(v_y) f(v_z)\, dv_x\, dv_y\, dv_z . \qquad (14.45)$$

З іншого боку (формула (14.42)),

$$dW = \frac{dn}{n} = f(v)\, dw .$$

Звідси

$$f(v) = f(v_x) f(v_y) f(v_z) . \qquad (14.46)$$

У стані статистичної рівноваги розподіл молекул за швидкостями не змінюється з часом. Значення ймовірності dW не залежатиме від напряму. Звідси можна зробити висновок, що незмінним буде добуток функцій розподілу, які визначають імовірність. Отже, можна записати

$$f(v_x) f(v_y) f(v_z) = \text{const},$$

або

$$d\left(f(v_x) f(v_y) f(v_z)\right) = 0,$$

тобто

$$f'(v_x) f(v_y) f(v_z)\, dv_x + f(v_x) f'(v_y) f(v_z)\, dv_y + \\ + f(v_x) f(v_y) f'(v_z)\, dv_z = 0.$$

Поділивши цей вираз на константу $f(v_x) f(v_y) f(v_z)$, дістанемо

$$\frac{f'(v_x)}{f(v_x)}\, dv_x + \frac{f'(v_y)}{f(v_y)}\, dv_y + \frac{f'(v_z)}{f(v_z)}\, dv_z = 0. \qquad (14.47)$$

Оскільки швидкості молекул в усіх напрямах рівноймовірні, то внаслідок зіткнень при зміні компонент v_x, v_y, v_z результуюча швидкість v не зміниться, тобто

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = \text{const}. \qquad (14.48)$$

Продиференціюємо цей вираз:

$$v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z = 0. \qquad (14.49)$$

Помноживши (14.49) на поки що невизначений множник λ і почленно додавши до рівняння (14.47), дістанемо

$$\left(\frac{f'(v_x)}{f(v_x)} + \lambda v_x\right) dv_x + \left(\frac{f'(v_y)}{f(v_y)} + \lambda v_y\right) dv_y + \left(\frac{f'(v_z)}{f(v_z)} + \lambda v_z\right) dv_z = 0. \qquad (14.50)$$

Рівняння (14.50) виконуватиметься лише тоді, коли кожен доданок у дужках дорівнюватиме нулю (dv_x, dv_y і dv_z не дорівнюють нулю):

$$\frac{f'(v_x)}{f(v_x)} + \lambda v_x = 0;\ \frac{f'(v_y)}{f(v_y)} + \lambda v_y = 0;\ \frac{f'(v_z)}{f(v_z)} + \lambda v_z = 0.$$

Проінтегрувавши наведені рівняння, дістанемо

$$\ln f(v_x) = -\frac{\lambda}{2} v_x^2 + C,$$

або

$$f(v_x) = C\, e^{-\frac{\lambda}{2} v_x^2};\ f(v_y) = C\, e^{-\frac{\lambda}{2} v_y^2};\ f(v_z) = C\, e^{-\frac{\lambda}{2} v_z^2}. \qquad (14.51)$$

Визначимо сталу інтегрування C. Оскільки $dW_x = \frac{dn_x}{n} = f(v_x)\, dv_x$, то, підставляючи замість $f(v_x)$ його значення $C\, e^{-\frac{\lambda}{2} v_x^2}$ і інтегруючи за всіма можливими швидкостями від $-\infty$ до $+\infty$, дістаємо $W_x = 1$ (умова нормування):

$$W_x = C \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\lambda}{2} v_x^2} dv_x = 1;\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\lambda}{2} v_x^2} dv_x = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}.$$

Звідси

$$C = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}}.$$

Тоді

$$f(v_x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}}\, e^{-\frac{\lambda}{2} v_x^2};\ f(v_y) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}}\, e^{-\frac{\lambda}{2} v_y^2};$$

$$f(v_z) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}}\, e^{-\frac{\lambda}{2} v_z^2}. \qquad (14.52)$$

Підставивши ці значення в (14.45), дістанемо

$$dW = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\lambda}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}\, dv_x dv_y dv_z.$$

Перейдемо до сферичної системи координат:

$$v_x = v \sin\theta \cos\varphi;\ v_y = v \sin\theta \sin\varphi;\ v_z = v \cos\theta.$$

Добуток $dv_x dv_y dv_z = v^2 dv \sin\theta d\theta d\varphi$. Тоді для ймовірності dW дістанемо

$$dW = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-\frac{\lambda}{2}v^2} v^2 dv \sin\theta d\theta d\varphi.$$

Проінтегрувавши цей вираз по φ в межах від 0 до 2π і по θ в межах від 0 до π, дістанемо

$$dW = f(v)\,dw = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-\frac{\lambda}{2}v^2} v^2 dv \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{3/2} e^{-\frac{\lambda}{2}v^2} v^2 dv. \qquad (14.53)$$

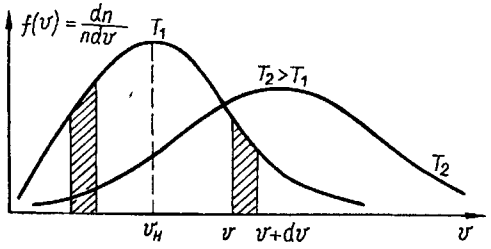


Рис. 14.13

Якщо побудуємо графік залежності функції розподілу $f(v)$ від швидкості v, то дістанемо криву з максимумом (рис. 14.13). Це означає, що в рівноважному стані найбільше молекул газу мають швидкості, близькі до найбільш імовірної. Її позначають $v_н$. Цій швидкості відповідає максимум на кривій розподілу. З іншого боку, в точці максимуму $\frac{df(v)}{dv} = 0$. З цієї умови визначимо константу λ. Продиференціювавши вираз (14.53), дістанемо

$$\frac{df(v)}{dv} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{3/2} e^{-\frac{\lambda}{2}v_н^2} (2v_н - \lambda v_н^3) =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{3/2} e^{-\frac{\lambda}{2}v_н^2} v_н (2 - \lambda v_н^2) = 0.$$

Звідси

$$\lambda = \frac{2}{v_н^2}.$$

Підставивши значення λ у формулу (14.52), отримаємо функції розподілу швидкостей молекул за компонентами. Для напряму осі *OX*

$$f(v_x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{v_н} e^{-\frac{v_x^2}{v_н^2}}. \qquad (14.54)$$

Підставивши λ у формулу (14.53), дістанемо функцію розподілу молекул за швидкостями (функцію розподілу Максвелла):

$$f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{v_н^3} e^{-\frac{v^2}{v_н^2}} v^2. \qquad (14.55)$$

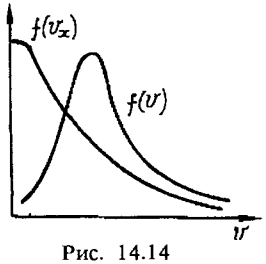


Рис. 14.14

Графіки функцій розподілу (14.54) і (14.55) зображено на рис. 14.14.

На основі закону збереження енергії і пропорційності кінетичної енергії теплового руху молекул абсолютній температурі у статистичній фізиці доводиться, що $m_0 \frac{v_н^2}{2} = kT$ і, отже, $v_н = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}}$. Підставляючи значення $v_н$ у формулу (14.55), дістанемо

$$f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_0}{2kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} v^2. \qquad (14.56)$$

Формулу Максвелла, що визначає відносну кількість молекул, швидкості яких лежать у межах v і $v + dv$, запишемо так:

$$\frac{dn}{n} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_0}{2kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} v^2 dv. \qquad (14.57)$$

Розподіл Максвелла має фундаментальне значення для молекулярної теорії газів. Загальну теорію статистичних властивостей фізичних систем розвинули Больцман та Гіббс.

Розподіл Максвелла — це перший приклад статистичного закону в науці. Дж. Максвелл усвідомив, що випадковий рух окремих молекул підпорядкований певному статистичному закону.

Проаналізуємо розподіл Максвелла на графіку (див. рис. 14.13).

Функція розподілу $f(v) = 0$ при $v = 0$ і прямує до нуля при $v \to \infty$. Це означає, що в газі немає нерухомих молекул, а також свідчить про те, що ймовірність наявності молекул з $v \to \infty$ близька

до нуля. Функція розподілу має максимум при швидкості $v_н$. Досліджуючи формулу (14.57) на максимум, дістаємо

$$v_н = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}. \qquad (14.58)$$

Крива розподілу Максвелла вказує на те, що в газі найбільша частина молекул рухається з швидкостями, значення яких близькі до $v_н$. Звичайно, ймовірність того, що молекула рухається з точно заданою швидкістю ($v = v_н$, $dv = 0$), дорівнює нулю. Крива Максвелла асиметрична.

Вона круто піднімається з боку малих значень v, досягає максимуму при $v = v_н$ і повільніше спадає в бік більших значень v.

Користуючись кривою Максвелла, можна графічно визначити відносне число молекул dn/n, швидкості яких лежать у заданому інтервалі від v до $v + dv$ На рис. 14.13 площі заштрихованих криволінійних трапецій зображують ці числа для однакових інтервалів dv. Величини цих площ показують, що коли початок інтервалу знаходиться ближче до $v_н$, то й сама площа в цьому разі буде більшою, а отже, й імовірність наявності молекул у цьому інтервалі швидкостей стане більшою. Якщо визначати площу, обмежену кривою розподілу і віссю абсцис, то дістанемо сумарне відносне число молекул, тобто одиницю.

Таблиця 3

v, м/с	$v + \Delta v$, м/с	$\Delta \frac{n}{n}$ 100 %
0	100	1,4
100	200	8,1
200	300	16,7
300	400	21,5
400	500	20,3
500	600	15,1
600	700	9,2
700	—	7,7

Щоб мати більш конкретне уявлення про характер закону розподілу Максвелла, як приклад розглянемо розподіл швидкостей молекул кисню при 0 °С (табл. 3). З таблиці видно, що близько 3/4 молекул мають швидкості від 200 до 600 м/с, тільки 1/7 — швидкості, які менші від 100 м/с, і 1/6 — швидкості, більші від 600 м/с. З підвищенням температури максимум на кривій розподілу Максвелла зміщується вздовж осі абсцис вправо. Це природно, бо $v_н \approx \sqrt{T}$. Оскільки площа, обмежена кривою Максвелла і віссю абсцис, повинна при цьому залишатися незмінною, то ордината, що відповідає максимуму кривої, зменшується (крива розподілу стає більш пологою). Одночасно максимум кривої стає не різко вираженим, а більш "розмитим". При цьому також права гілка кривої розміщується вище, а ліва — нижче (див. рис. 14.13).

Все свідчить про те, що з підвищенням температури розподіл стає більш рівномірним, а також збільшується число молекул, швидкості яких перевищують $v_н$, і зменшується кількість молекул з малими швидкостями. Останній результат пояснює вплив температури на деякі фізико-хімічні процеси. Наприклад, прискорення хімічних реакцій при нагріванні сумішей, що реагують, значною мірою визначається збільшенням кількості молекул, що мають швидкості, які перевищують деяку характерну величину.

Закон Максвелла дає змогу обчислити $< v >$ та $< v^2_{кв} >$. Згідно з означенням

$$< v > = \frac{1}{n} \sum_i v_i,$$

або

$$< v > = \frac{1}{n} \int_0^\infty v\, dn \qquad (14.59)$$

Оскільки $dn = nf(v)\, dv$, то

$$< v > = \frac{1}{n} \int_0^\infty vnf(v)\, dv = \int_0^\infty vf(v)\, dv.$$

Підставляючи з (14.56) значення $f(v)$, дістанемо

$$< v > = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_0}{2kT}\right)^{3/2} \int_0^\infty v^3 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}\, dv. \qquad (14.60)$$

Враховуючи, що $v dv = \frac{1}{2} d(v^2)$, дістанемо

$$< v > = \frac{4}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_0}{2kT}\right)^{3/2} \int_0^\infty v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}\, d(v^2).$$

Введемо нову зміну $z = \frac{m_0 v^2}{2kT}$. Тоді дістанемо

$$\int_0^\infty v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}\, d(v^2) = \left(\frac{2kT}{m_0}\right)^2 \int_0^\infty z\, e^{-z}\, dz.$$

Інтегрування по частинах дає

$$\int_0^\infty z\, e^{-z}\, dz = 1.$$

Тому

$$< v > = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_0}{2kT}\right)^{3/2} 2 \left(\frac{kT}{m_0}\right)^2 = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}}. \qquad (14.61)$$

Аналогічно можна дістати вираз для середньої квадратичної швидкості молекул

$$< v_{\text{кв}}^2 > = \frac{1}{n} \int_0^\infty v^2 \, dn = \int_0^\infty v^2 f(v) \, dv.$$

Підставивши значення $f(v)$, дістанемо

$$< v_{\text{кв}}^2 > = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^\infty v^4 \, e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} \, dv.$$

Інтегруванням по частинах знайдемо, що

$$\int_0^\infty v^4 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} \, dv = \frac{3}{8} \left(\frac{2kT}{m_0}\right)^{5/2} \sqrt{\pi}.$$

Отже,

$$< v_{\text{кв}}^2 > = \frac{3kT}{m_0}, \quad \text{або} \quad < v_{\text{кв}} > = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}. \qquad (14.62)$$

Порівнюючи вирази (14.61), (14.62), (14.58), маємо

$$< v_{\text{кв}} > : < v > : v_{\text{н}} \approx 1{,}2 : 1{,}1 : 1.$$

Отже, $< v_{\text{кв}} > > < v > > v_n$, причому $< v_{\text{кв}} >$ на 9 % більша від $< v >$ та на 22 % більша від $v_{\text{н}}$.

У законі Максвелла (14.57) функція розподілу залежить від природи газу та його температури. Увівши до розгляду так звану відносну швидкість $u = v/v_{\text{н}}$, де v — задана швидкість молекули, а $v_{\text{н}}$ — найбільш імовірна швидкість при даній температурі, дістанемо універсальне рівняння, яке не залежить від природи газу та температури,

$$\frac{dn}{ndu} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2. \qquad (14.63)$$

Ця форма запису закону розподілу Максвелла є досить зручною для розв'язування різних задач, пов'язаних з розподілом молекул за швидкостями.

§ 14.10. Експериментальна перевірка закону розподілу Максвелла

Для експериментальної перевірки закону розподілу Максвелла користуються молекулярними пучками. У перших дослідах Штерна з молекулярними пучками було показано, що число молекул металу $n(v)$, які мають швидкості від v до $v + dv$, описується максвеллівським розподілом.

Більш досконалу перевірку розподілу Максвелла провели Елдрідж у 1927 р. та Ламмерт у 1929 р. Ідея дослідів така. У вакуумній камері обертаються на спільній осі два круглих диски з радіальними прорізами, які зміщені один відносно одного на кут φ (рис. 14.15). На диски спрямовується молекулярний пучок, який створюється при розігріванні та випаровуванні речовини. У дослідах Ламмерта було використано ртуть. Пучок перед цим проходить діафрагму O. Очевидно, що тільки ті молекули, які пройшли через перший диск, досягнуть екрана E і зможуть пройти через проріз другого диска. Це стає можливим, коли час проходження молекулами відстані між дисками $t_1 = l/v$ дорівнює часу повороту дисків на кут φ ($t_2 = \varphi/\omega$). При збільшенні швидкості обертання дисків через прорізи пройдуть молекули з більшою швидкістю. Змінюючи швидкість обертання дисків ω, можна виділити довільний інтервал спектра швидкостей молекул. Для підвищення інтенсивності картини на екрані-детекторі кожен з цих дисків мав по 50 прорізів. Вимірюючи після кожного досліду однакової тривалості і з різними швидкостями обертання дисків товщини смужок молекул, які осіли на екрані, можна зробити висновки про відносне число молекул у пучку, швидкості яких лежать у певному інтервалі швидкостей.

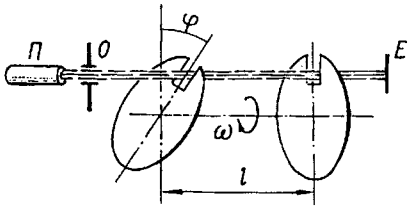


Рис. 14.15

Цей метод з високою точністю підтвердив правильність закону Максвелла про розподіл молекул за швидкостями.

Таким чином, дістали підтвердження глибокі і оригінальні статистичні концепції Максвелла про фізичні закономірності особливого типу, в яких зв'язки між величинами, що входять у теорію, мають імовірнісний характер.

§ 14.11. Барометрична формула. Розподіл Максвелла — Больцмана

Розподіл Максвелла передбачає, що на молекули газу не діють зовнішні сили. Тому молекули рівномірно розподілені в певному об'ємі. Фактично молекули газів перебувають під дією поля тяжіння

Землі. Лише сукупна дія теплового руху молекул та сил тяжіння зумовлює те, що в земній атмосфері молекули повітря розподілені певним чином і не скупчені на поверхні Землі, тобто існує такий стан повітря, що його тиск зменшується з висотою.

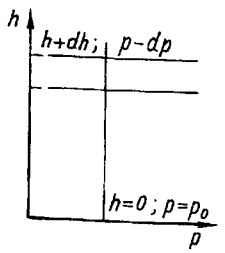


Рис. 14.16

Рівняння, що дає змогу визначити зміну тиску повітря з висотою, називають *барометричною формулою.* Її вперше дістав П. Лаплас у 1821 р. Виведемо формулу Лапласа. Для цього виділимо вертикальний стовп повітря (рис. 14.16). Нехай у ньому немає молярних потоків під дією вітрів та турбулентності. Зауважимо, що тиск повітря p на будь-якій висоті h зумовлений дією сил тяжіння. З підняттям на dh тиск відповідно зменшиться на dp. Оскільки в тонкому шарі dh густину повітря можна вважати сталою, то

$$dp = -\rho g dh, \tag{14.64}$$

де g — прискорення вільного падіння.

Відомо, що $\rho = m_0 n_0$, де m_0 — маса молекули; n_0 — кількість молекул в одиниці об'єму. З основного рівняння кінетичної теорії газів маємо $n_0 = \frac{p}{kT}$. Тоді

$$dp = -\frac{m_0 g}{kT} p dh. \tag{14.65}$$

Розділимо в (14.65) змінні:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{m_0 g}{kT} dh. \tag{14.66}$$

Інтегруючи (14.66) в межах від p_0 до p і від h_0 до h, маємо

$$p = p_0 \, e^{-\frac{m_0 g}{kT}(h - h_0)}. \tag{14.67}$$

Врахувавши, що $m_0 = M/N_A$, де M — молярна маса повітря; N_A — число Авогадро, дістанемо

$$p = p_0 \, e^{-\frac{Mg}{RT}(h - h_0)}. \tag{14.68}$$

Зазначимо, що при виведенні формули (14.68) було зроблено певні припущення: атмосфера — це ідеальний газ, який знаходиться в стані термодинамічної рівноваги ($T = \text{const}$); атмосфера перебуває в однорідному полі тяжіння ($g = \text{const}$).

Рівняння (14.68) називають *барометричною формулою.* Вона досить точно справджується для невеликих висот (кілька кілометрів). Барометрична формула показує, що з висотою тиск експоненціально спадає і тим швидше, чим більша молярна маса газу або нижча температура. З формули також видно, що зменшення тиску залежить від прискорення вільного падіння. На різних планетах молекули порізному розподіляються за висотою. Наприклад, Місяць (на поверхні $g = 1{,}62$ м/с^2) взагалі не має атмосфери. Очевидно, втрата атмосфери відбулася внаслідок розсіювання її в світовий простір (звичайно, якщо атмосфера навколо Місяця взагалі існувала).

Розглянемо це питання докладніше.

Величина g зменшується при віддаленні від поверхні Землі за законом $g(h) = \gamma \frac{M_3}{(R_3 + h)^2}$, де M_3, R_3 — маса і радіус Землі; γ — гравітаційна стала. Тому рівняння (14.66) запишеться так:

$$\frac{dp}{p} = -\gamma \frac{M_3 m_0}{kT} \frac{dh}{(R_3 + h)^2}.$$

Проінтегрувавши його, дістанемо

$$\ln p = \gamma \frac{M_3 m_0}{kT} \frac{1}{R_3 + h} + \ln C,$$

або

$$p = C \exp\left(\gamma \frac{M_3 m_0}{kT} \frac{1}{R_3 + h}\right) =$$

$$= C \exp\left(\gamma \frac{M_3}{R_3^2} \frac{m_0}{kT} \frac{R_3^2}{R_3 + h}\right) = C \exp\left(\frac{m_0 g}{kT} \frac{R_3^2}{R_3 + h}\right).$$

При $h = 0$ тиск $p = p_0$. Звідси дістанемо значення константи інтегрування

$$C = p_0 \, e^{-\frac{m_0 g R_3}{kT}}.$$

Кінцева формула запишеться так:

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{m_0 g R_3}{kT}\left(1 - \frac{R_3}{R_3 + h}\right)\right). \tag{14.69}$$

Звідси випливає парадоксальний результат, що навіть при $h = \infty$ $p_\infty \neq 0$. Це фізично, звичайно, неможливо, бо число молекул — скінченне, а Всесвіт — нескінченний. Очевидно, потрібно допустити,

що атмосфера Землі перебуває в нерівноважному стані, якому властиве неперервне розсіювання атмосферного газу в світовий простір. Це, звичайно, не привело до втрати Землею атмосфери, оскільки процес розсіювання надто повільний.

Для кількісного розгляду питання про втрати атмосфери планетами необхідно брати до уваги розподіл молекул за швидкостями. Силу земного тяжіння можуть подолати тільки молекули, швидкість яких більша за другу космічну швидкість. Такі молекули знаходяться у "хвості" розподілу Максвелла, і їхня відносна кількість незначна. Однак за великі проміжки часу втрати молекул можуть бути відчутними. Оскільки друга космічна швидкість у важких планет більша, ніж у легких, то інтенсивність втрати атмосфери у важких небесних тіл менша, ніж у легких. Тому легкі планети швидше втрачають атмосферу, ніж важкі. Час втрати атмосфери залежить від радіуса планети, температури, складу атмосфери та ін. Отже, кількісний аналіз цього питання — складне завдання.

Різке зменшення тиску і густини повітря з висотою має велике значення для освоєння космосу. Воно, зокрема, забезпечує малий аеродинамічний опір, який необхідний для тривалого орбітального руху космічних апаратів без значних затрат енергії на подолання опору. Для Землі зменшення аеродинамічного опору відбувається на висотах не менших від 190—200 км. При аналізі "космічних" умов для найближчих сусідів Землі по Сонячній системі — Марса (g = 3,86 м/с^2) і Венери (g = 8,88 м/с^2), у яких атмосфера складається практично з вуглекислого газу, встановлено, що "космічні" умови для них утворюються, починаючи відповідно з висот 100 і 300 км.

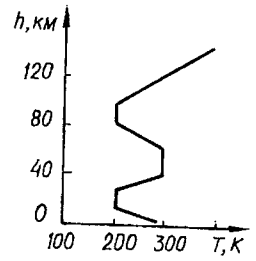


Рис. 14.17

Зазначимо також, що при наявності в газі кількох видів молекул з різними масами, число більш важких молекул з висотою повинно спадати швидше. В земній атмосфері на допустимих висотах цього фактично не відбувається внаслідок перемішування газів при різних збуреннях. На висотах в кілька тисяч кілометрів (наприклад, h = 6500 км, $p \approx 1{,}3 \cdot 10^{-10}$ Па) в атмосфері здебільшого є атоми гелію, атоми та іони водню. Крім зменшення земного тяжіння це зумовлено також дією сонячної та космічної радіації.

Барометричну формулу використовують, коли визначають висоту над Землею. Для цього вимірюють тиск на даній висоті з урахуванням тиску повітря на рівні моря. При цьому вносяться поправки на зміни температури повітря з висотою. Характер зміни температури земної атмосфери з висотою одержано на основі спеціальних досліджень; його показано на рис. 14.17. У метеорології для розв'язання цих задач введено поняття міжнародної стандартної атмосфери (МСА). Для МСА прийнято такі умови: тиск на рівні моря при 15 °С дорівнює $1{,}013 \cdot 10^5$ Па, вертикальний градієнт температури становить 5,6 К/км до рівня 11 км (умовна висота початку стратосфери), де температура знижується до −56,5 °С.

За розподілом тиску в стандартній атмосфері градуюються альтиметри (барометри-висотоміри), що їх встановлюють на літальних апаратах.

З барометричної формули неважко встановити закон розподілу молекул газу з висотою в полі тяжіння. Оскільки $p = nkT$, то з (14.67) маємо

$$n = n_0 \, e^{-\frac{m_0 g(h-h_0)}{kT}}, \tag{14.70}$$

або

$$n = n_0 \, e^{-\frac{\Delta U}{kT}}, \tag{14.71}$$

де n та n_0 — концентрації молекул газу відповідно на висоті h та h_0; ΔU — різниця потенціальних енергій молекули на висотах h і h_0 в полі тяжіння. При $h_0 = 0$ $\Delta U = m_0 gh$.

Л. Больцман показав, що закон (14.71) розподілу частинок є універсальним. Він справедливий для довільних частинок, які беруть участь у рівноважному тепловому русі і перебувають у будь-якому потенціальному силовому полі зовнішніх сил. При цьому зміниться тільки вираз для потенціальної енергії як енергії частинок у потенціальному полі ΔU. Цей статистичний закон називається *розподілом Больцмана* і є одним з основних законів молекулярно-кінетичної теорії. Він показує, що для рівноважного стану для невзаємодіючих частинок при даній температурі T об'ємна концентрація їх зростає із зменшенням U, що відповідає тенденції стійкої рівноваги системи. Статистичний характер розподілу Больцмана вказує на можливість флуктуації концентрації молекул, тобто на випадкові зміни концентрацій у малих об'ємах.

Користуючись законами теорії ймовірності, М. Смолуховський знайшов, що відносну флуктуацію при досить великій кількості частинок n в даному об'ємі можна визначити за формулою

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\pi}\frac{1}{n}}. \tag{14.72}$$

Отже, флуктуація тим менша, чим більше частинок у даному об'ємі. Так, при нормальному тиску відносна флуктуація числа молекул в 1 см^3 становить $2{,}5 \cdot 10^{-10}$.

Закон Больцмана дає також відповідь на запитання, яке число молекул dn з усіх n знаходиться в шарі, розміщеному між рівнями h, $h + dh$? При такому формулюванні задачі формулу (14.70) можна подати у вигляді

$$\frac{dn}{n} = e^{-\frac{m_0 g}{kT} dh}. \qquad (14.73)$$

Закон Больцмана графічно зображено на рис. 14.18. Цей закон не залежить від розподілу швидкостей молекул. Якщо до формули розподілу Максвелла (14.57) підставити значення n з (14.71), то дістанемо формулу розподілу Максвелла—Больцмана, згідно з якою можна визначити число молекул ідеального газу, швидкості яких лежать в інтервалі від v до $v + dv$ і мають потенціал $\varphi = gh$ у полі зовнішніх сил:

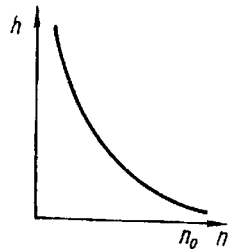


Рис. 14.18

$$dn = \frac{4}{\sqrt{\pi}} n_0 \left(\frac{m_0}{2kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_0 \Delta\varphi}{kT}} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} v^2 dv. \qquad (14.74)$$

У формулі (14.74) є два незалежних множники: больцманівський $e^{-\frac{m_0 \Delta\varphi}{kT}}$ та максвеллівський $e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}$. Це свідчить про те, що розподіл Больцмана не залежить від розподілу молекул за швидкостями, а розподіл Максвелла — від потенціалу молекул у полі зовнішніх сил.

Ввівши до розгляду найбільш імовірну швидкість $v_н$, вираз (14.74) можна записати так:

$$dn = \frac{4}{\sqrt{\pi}} n_0 e^{-\frac{v^2 + 2\Delta\varphi}{v_н^2}} \frac{v^2}{v_н^2} \frac{dv}{v_н}. \qquad (14.75)$$

Приклад 14.2. В атмосфері на великих висотах температура повітря, що відповідає середній кінетичній енергії молекул, досить висока. Так, на висоті 300 км температура досягає +1000 °С. Як при таких високих температурах в атмосфері рухаються супутники і ракети? Чому вони не згоряють?

Розв'язання. Над поверхнею Землі вище 80 км температура монотонно зростає зі збільшенням висоти і досягає величин, зазначених в умові задачі, а на висоті 1100 км вона сягає значень +2000 °С. Поняття температури досить розріджених газів має інше значення, ніж температура навколишнього повітря. Тіла в розрідженому просторі не нагріваються при зіткненні з повітрям, оскільки кількість частинок газу, що вдаряються в тіло і передають йому свою енергію, досить мала. Тому супутники і ракети нагріваються або охолоджуються внаслідок випромінювання, а не теплопровідності. Температура повітря у верхніх шарах атмосфери — це міра середньої швидкості руху частинок газу.

Приклад 14.3. Користуючись рівнянням Клапейрона — Менделєєва, вивести формулу зміни тиску з висотою з урахуванням зниження температури, якщо температурний градієнт $\frac{dT}{dh} = -\alpha$. При цьому треба мати на увазі, що атмосферний тиск змінюється з висотою за законом

$$dp = -\rho g dh. \qquad (1)$$

Розв'язання. Спочатку знайдемо формулу зміни температури з висотою. Оскільки $dT = -\alpha dh$, то $T = -\alpha h + C$. При $h = 0$ $C = T_0$. Отже, $T = T_0 - \alpha h$.

Із рівняння Менделєєва — Клапейрона маємо $\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}$. Тоді

$$dp = -\rho g dh = -\frac{pM}{RT} g dh.$$

Розділивши змінні, дістаємо $\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{R(T_0 - \alpha h)} dh$. Проінтегруємо цей вираз, припускаючи, що поле тяжіння однорідне (g = const):

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{R} \int_0^h \frac{dh}{T_0 - \alpha h}, \quad \ln\frac{p}{p_0} = \frac{Mg}{\alpha R} \ln\left(1 - \frac{\alpha h}{T_0}\right).$$

Звідси маємо

$$p = p_0 \left(1 - \frac{\alpha h}{T_0}\right)^{\frac{Mg}{\alpha R}}. \qquad (2)$$

Рівність (2) справджується лише для порівняно малих висот $h < \frac{T_0}{\alpha}$.

§ 14.12. Дослід Перрена з визначення числа Авогадро

Розподіл Больцмана був використаний Ж. Перреном для перевірки барометричної формули та визначення числа Авогадро. У дослідах він використав водні емульсії фарби гумігут. Розміри частинок гумігуту, близьких за формою до сферичних, становили 0,74 мкм. Досить точно діаметри частинок визначали трьома незалежними способами: під мікроскопом визначали довжину ланцюжка з кількох десятків частинок, які тісно прилягали одна до одної; зважували частинки і визначали їхні розміри за відомою густиною гумігуту; за формулою Стокса з вимірювання швидкості осідання частинок в емульсії. Емульсію гумігуту поміщали в спеціальну щільно закриту кювету А, щоб запобігти випаровуванню рідини (рис. 14.19). За допомогою мікроскопа M, який було встановлено вертикально, спостерігали розподіл завислих частинок за висотою. Мікроскоп фокусували на різні висоти відносно дна кювети, у поле зору мікроскопа потрапляли частинки в шарі завглибшки не більше 0,001 мм, і зовсім не було видно частинок, розміщених вище і нижче цього шару.

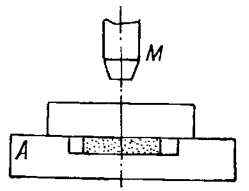


Рис. 14.19

Кількість частинок у полі зору була невеликою, так що їх можна було порахувати. Ця кількість частинок n' пропорційна кількості n в одиниці об'єму на тій самій висоті h. Для спрощення розрахунків формулу (14.70) запишемо у вигляді

$$n_h = n_0 \, e^{-\frac{mgh}{kT}}. \tag{14.76}$$

Надалі йтиметься про різницю потенціальних енергій. При підрахунку ΔU можна, звичайно, відповідним чином вибрати початковий відлік так, щоб для $h = 0$ $U = 0$.

Враховуючи, що $T = \dfrac{2 < w > N_A}{3R}$, формулу (14.76) запишемо так:

$$n'_h = n_0 \, e^{-\frac{3mgh}{2 < w >}}, \tag{16.77}$$

де $< w >$ — середнє значення кінетичної енергії частинки гумігуту. Тоді для шару $h = h_1$ маємо

$$n'_{h_1} = n_0 \, e^{-\frac{3mgh_1}{2 < w >}}. \tag{14.78}$$

Аналогічно для шару $h = h_2$

$$n'_{h_2} = n_0 \, e^{-\frac{3mgh_2}{2 < w >}}. \tag{14.79}$$

З формул (14.78) і (14.79) дістаємо

$$\frac{n'_{h_1}}{n'_{h_2}} = e^{-\frac{3mg(h_1 - h_2)}{2 < \omega >}}. \tag{14.80}$$

Логарифмуючи вираз (14.80) і розв'язуючи його відносно $< w >$, дістаємо

$$< w > = \frac{3}{2} \frac{mg(h_2 - h_1)}{\ln \dfrac{n'_{h_1}}{n'_{h_2}}}. \tag{14.81}$$

Зауважимо, що $< w > = \dfrac{3}{2} \dfrac{R}{N_A} T$. Звідси число Авогадро

$$N_A = \frac{3}{2} \frac{R}{< w >} T. \tag{14.82}$$

Отже, знаючи енергію $< w >$ частинки (в даному експерименті — броунівської), можна визначити число Авогадро. З формул (14.81) і (14.82) безпосередньо випливає, що для ізотермічних умов основну частину експерименту після дослідних визначень величин n'_{h_1} і n'_{h_2} становить визначення маси броунівської частинки. Для цього Ж. Перрен використав формулу Стокса, яка дає змогу за швидкістю падіння частинок у воді, як в'язкій рідині, визначити їхній радіус. Маса сферичної частинки m безпосередньо визначається через її радіус r та густину речовини ρ. Ж. Перрен дістав: $6 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1} \le N_A \le 7 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$. Нині визначили, що $N_A = 6{,}022\,136\,7(36) \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

§ 14.13. Поняття про флуктуації

Якщо йдеться про вимірювання фізичних величин, які мають статистичний характер, то їхні вимірювані значення будуть у певній мірі відхилятись від середнього значення цієї величини. Оскільки молекули газу перебувають у безперервному хаотичному русі, то їхній розподіл в об'ємі газу повинен бути рівномірним. У середньому так воно і є. Але в такій статистичній системі, як газ, можливі й відхилення від середніх значень. Випадкові відхилення будь-яких значень фізичних величин, які виникають у малих об'ємах або в малих проміжках часу, називаються флуктуаціями. Для макроскопічних систем спостережувані значення фізичних величин з досить великою точністю збігаються з їх статистичними середніми, а будь-які значні флуктуації зустрічаються досить рідко.

Дослідження питання про флуктуації має принципове значення, оскільки дає можливість встановити межі застосування термодинамічних понять і закономірностей. Вивчення флуктуацій має і безпосередній інтерес, оскільки флуктуації притаманні багатьом фізичним явищам. Повна теорія флуктуацій розглядається у курсах теоретичної фізики. Елементарні оціночні підходи можна одержати, розглядаючи флуктуацію густини (концентрації) молекул ідеального газу.

Нехай газ займає об'єм V і складається з N молекул. У цьому об'ємі уявно виділимо однакові малі об'єми v_1, v_2, v_3, ..., для яких має місце рівність $v_1 = v_2 = v_3 = \ldots$ Внаслідок рівномірного розподілу молекул в кожному з цих об'ємів повинно бути

$$z_i = \frac{N}{V} v_i \tag{14.83}$$

молекул, тобто $z_1 = z_2 = z_3 = \ldots$ Але внаслідок хаотичного руху в певні моменти часу в об'ємі v може виявитись не z молекул, а $n \neq z$. Щоб описати явище флуктуації, необхідно визначити ймовірність того, що

в об'ємі v буде $n \neq z$ молекул. Імовірність того, що в об'ємі v буде одна молекула, можна записати так:

$$w_1 = \frac{v}{V}. \tag{14.84}$$

Імовірність перебування n молекул в об'ємі v буде

$$w_n = \left(\frac{v}{V}\right)^n. \tag{14.85}$$

Імовірність перебування решти $N - n$ молекул в об'ємі $V - v$ визначається так:

$$w_{N-n} = \left(\frac{V - v}{V}\right)^{N-n}. \tag{14.86}$$

Імовірність того, що одночасно n молекул буде в об'ємі v, а $N - n$ — в об'ємі $V - v$, на основі теореми множення ймовірностей буде

$$w = \left(\frac{v}{V}\right)^n \left(\frac{V - v}{V}\right)^{N-n}. \tag{14.87}$$

Зауважимо, що в об'ємі v можуть перебувати різні молекули. Із загальної кількості молекул N можна вибрати яких-небудь n молекул P способами, а саме:

$$P = \frac{N!}{n!\,(N - n)!}. \tag{14.88}$$

При статистичній незалежності подій w і P шукану ймовірність появи в об'ємі v n молекул, а не z запишемо у вигляді

$$w' = \frac{N!}{n!\,(N - n)!} \left(\frac{v}{V}\right)^n \left(\frac{V - v}{V}\right)^{N-n}. \tag{14.89}$$

Перепишемо рівність (14.83) так: $\frac{z}{N} = \frac{v}{V}$ або $\frac{N - z}{N} = \frac{V - v}{V}$. Тоді вираз (14.89) можна переписати у вигляді

$$w' = \frac{N!}{N^n\,(N - n)!} \frac{z^n}{n!} \left(\frac{N - z}{N}\right)^{N-n}. \tag{14.90}$$

Якщо n і z значно менші від N, то перший співмножник у (14.90) можна прирівняти до 1. Справді,

$$\frac{N!}{N^n\,(N - n)!} = \frac{N}{N} \frac{N - 1}{N} \frac{N - 2}{N} \dots \frac{N - n + 1}{N} \dots =$$

$$= 1 \left(1 - \frac{1}{N}\right) \left(1 - \frac{2}{N}\right) \dots \left(1 - \frac{n + 1}{N}\right) \dots \approx 1.$$

Крім того, при малих n і z дістанемо

$$\left(\frac{N - z}{N}\right)^{N-n} = \left(1 - \frac{z}{N}\right)^{-\frac{N-n}{z}(-z)} \approx \left(1 - \frac{z}{N}\right)^{-\frac{N}{z}(-z)} = e^{-z}.$$

Тоді вираз (14.90) перепишемо у вигляді

$$w' = \frac{z^n}{n!} e^{-z}. \tag{14.91}$$

Отже, формула (14.91) показує ймовірність появи в об'ємі v $n \neq z$ молекул, тобто дає можливість кількісно оцінити флуктуацію. Формулу (14.91) у 1904 р. одержав М. Смолуховський, а її експериментальну перевірку здійснив шведський фізик Т. Сведберг (1884—1971).

За кількісну міру флуктуації кількості молекул беруть відносну флуктуацію

$$\delta = \frac{\sqrt{(n - z)^2}}{n}. \tag{14.92}$$

Для довільних об'ємів і великої кількості частинок М. Смолуховський дістав формулу для відносної флуктуації кількості молекул у вигляді

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{1}{N}}. \tag{14.93}$$

Обчислимо, в якому об'ємі відносна флуктуація молекул ідеального газу за нормальних умов дорівнює 2 %, тобто $\delta = 2\ \% = 0{,}02$. З формули (14.93) маємо

$$0{,}02 = \sqrt{\frac{2}{3{,}14} \frac{1}{N}},\quad N = 0{,}159 \cdot 10^4 = 1590.$$

Оскільки за нормальних умов один моль ідеального газу займає об'єм 0,0224 м^3, а кількість молекул у ньому дорівнює числу Авогадро $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ моль $^{-1}$, то об'єм 1590 молекул

$$V = \frac{0{,}0224 \cdot 1590}{6{,}022 \cdot 10^{23}} = 5{,}91 \cdot 10^{-23} \text{ м}^3 = 5{,}91 \cdot 10^{-17} \text{ см}^3.$$

Отже, таке незначне відносне відхилення (2 %) від середнього може бути в дуже незначному об'ємі. Це підтверджує, що при великих об'ємах і великій кількості частинок найбільш імовірний розподіл — рівномірний. Проте явищем флуктуації нехтувати не можна. Наявність флуктуації приводить до виникнення флуктуаційних тисків, які зумовлюють рух броунівських частинок. У багатьох випадках роль броунівських частинок можуть виконувати деякі деталі вимірювальних приладів. Сучасні вимірювальні прилади доведені до такої чутливості, що їхні рухомі частини (підвісні системи, дзеркальця) під впливом ударів молекул середовища роблять безперервні броунівські рухи (слабкі хаотичні коливання). Середня енергія цих коливань, як показують обчислення, дорівнює πkT. Отже, вимірювана приладом енергія (наприклад, енергія електричного струму) повинна бути більшою від πkT. Це означає, що внаслідок флуктуації для даної температури існує природна границя чутливості вимірювального приладу.

З флуктуаціями пов'язані шуми у радіоапаратурі та плазмі. Флуктуаційні струми, які пов'язані з флуктуаціями кількості електронів, що вилітають з катода, також обмежують чутливість електронних приладів. Флуктуації концентрації молекул атмосфери спричиняють флуктуації густини, що, в свою чергу, спричиняють флуктуації діелектричної проникності повітря. Внаслідок цього відбувається молекулярне розсіювання світла. Значні флуктуації густини спостерігаються при критичних температурах речовин.

Розділ 15. Явища переносу в газах

§ 15.1. Середня довжина вільного пробігу молекул. Число зіткнень

Як і раніше, вважатимемо газ ідеальним. Відомо, що швидкості теплового руху молекул газу становлять сотні метрів за секунду. Проте макроскопічні відстані, які проходять окремі молекули, досить малі. Річ у тому, що в реальних умовах молекули газу рухаються не прямолінійно, як при витіканні газу в пустоту, а зигзагоподібно внаслідок численних зіткнень між собою. Через велике число молекул на зигзагоподібних шляхах немає порівняно великих прямолінійних відрізків. Тому природно говорити про середню довжину вільного пробігу молекул $\langle l \rangle$ і середнє число зіткнень за одиницю часу $\langle z \rangle$. Зіткнення молекул відіграють вирішальну роль в усіх процесах у газах. Вони визначають установлення рівноважних станів, максвеллівський розподіл молекул за швидкостями та ін.

Визначимо величину $\langle l \rangle$, виходячи з моделі, що молекули ідеального газу однакові і є абсолютно пружними кулями діаметра d. Враховуватимемо лише парні зіткнення молекул. Зазначимо, що зі зменшенням густини газу роль усіх зіткнень, крім парних, різко зменшується. Приймемо, що молекули газу рівномірно розподілені по об'єму, об'ємна концентрація молекул газу — n_0.

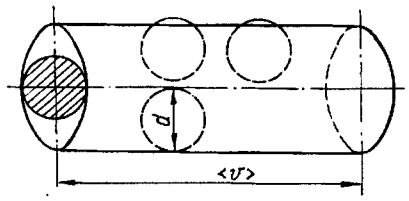


Рис. 15.1

Під середньою довжиною пробігу молекул $\langle l \rangle$ розумітимемо середню відстань, яку проходить молекула між двома послідовними зіткненнями. Далі припустимо, що всі молекули газу, крім однієї, що рухається прямолінійно, перебувають у стані спокою. Тоді дана молекула за 1 с пройде відстань, що чисельно дорівнює середній швидкості руху молекул $\langle v \rangle$, і зіткнеться з усіма молекулами, які знаходяться в об'ємі циліндра з площею основи πd^2 і висотою $\langle v \rangle$ (рис. 15.1). Об'єм такого циліндра становить $\pi d^2 \langle v \rangle$. Середнє число зіткнень молекули $\langle s \rangle$ при цьому дорівнює числу молекул газу в об'ємі циліндра — $\pi d^2 n_0 \langle v \rangle$. Іншими словами, зіткнення даної молекули відбуватимуться тільки з тими молекулами, центри яких знаходяться від центра даної молекули на відстанях, що не перевищують d. Зазначимо, що рух молекули не є прямолінійним, він зигзагоподібний, а циліндр (рис. 15.1) насправді подібний до колінчастої труби. Проте це не змінює результатів розрахунку. Ми уявно "випрямили" ламаний циліндр.

Дальше уточнення розрахунку величини $\langle l \rangle$ вимагає врахування швидкостей руху інших молекул. Це досягається заміною абсолютної швидкості молекул $\langle v \rangle$ відносно стінок посудини швидкістю $\langle v \rangle_{відн}$ відносно тих молекул, з якими вона стикається. На основі максвеллівського розподілу молекул за швидкостями доведено, що $\langle v \rangle_{відн} = \sqrt{2} \langle v \rangle$. Тоді для середньої кількості зіткнень однієї молекули за одиницю часу дістанемо

$$\langle z \rangle = \sqrt{2}\pi d^2 n_0 \langle v \rangle \qquad (15.1)$$

і для величини $\langle l \rangle$ також матимемо

$$\langle l \rangle = \frac{\langle v \rangle t}{\langle z \rangle t} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n_0}. \qquad (15.2)$$

Кількість парних зіткнень усіх молекул в одиниці об'єму газу за одиницю часу

$$z = \frac{1}{2} \langle z \rangle n_0,$$

де множник $1/2$ враховує парність зіткнень.

Величину $\sigma = \pi d^2$ називають *повним ефективним поперечним перерізом* зіткнення молекул, які розглядаються як тверді кулі, тобто такі, що їхня потенціальна енергія має короткодіючий характер і швидко наближається до нуля зі збільшенням відстані між центрами куль. Хоча ефективний переріз вимірюється в одиницях площі, в понятті його немає ніякого геометричного змісту. Величина σ характеризує ймовірність переходу двох частинок, які стикаються між собою і розсіюються, в певний кінцевий стан. При зіткненні частинка може розсіятись, поглинутись, дисоціювати молекулу або іонізувати атом тощо. Відповідно до процесу говорять про ефективний переріз розсіювання, поглинання, дисоціації, іонізації та ін. У загальному випадку можна дати таке означення ефективного поперечного перерізу частинки відносно наявного процесу: *ефективним перерізом* σ *називають відношення середньої кількості частинок, що вибувають із процесу за одиницю часу при зіткненнях, які приводять до очікуваного результату (розсіювання, поглинання, іонізації, прилипання тощо), до інтенсивності (густини) самого потоку частинок у падаючому пучку.* Густиною потоку називають кількість частинок, які перетинають за одиницю часу одиничну плоску поверхню, перпендикулярну до напряму руху частинок. Ефективний переріз суттєво залежить від енергії взаємодії частинок, які стикаються, і для однакових частинок (молекул, атомів тощо) в різних умовах і в різних процесах може бути не однаковим.

Для ілюстрації величини $\langle l \rangle$ наведемо такі дані: для азоту за нормальних умов $\langle l \rangle \approx 0{,}6 \cdot 10^{-7}$ м. Це приблизно в 1000 разів більше від розмірів молекул. Отже, і час "взаємодії" молекул під час зіткнень у стільки ж разів $(\langle l \rangle / d)$ менший від часу їхнього вільного руху. Таким чином, зіткнення навіть при атмосферному тиску є досить рідкісним явищем.

Як видно з формули (15.2), $\langle l \rangle \approx 1/p$ (при $T = \text{const}$ $p \sim n_0$). При відповідних значеннях p (порівняно малих) значення $\langle l \rangle$ можуть зрівнятися з розмірами посудини, в якій знаходиться газ. У такому разі кажуть, що газ перебуває у стані вакууму. З формули (15.2) випливає, що величина $\langle l \rangle$ молекул залежить також від їхнього діаметра. Точні розрахунки і експеримент показують, що визначальним є при цьому так званий ефективний діаметр d, який залежить від температури. За Г. Сезерлендом (1859—1912), ця залежність виражається формулою

$$d = d_0 \sqrt{1 + \frac{C}{T}}, \qquad (15.3)$$

де d_0 — величина, яку можна розглядати як істинний діаметр молекули; C — стала Сезерленда. Вона при $n_0 = \text{const}$ дорівнює температурі, для якої $\langle l \rangle$ зменшується вдвоє порівняно з величиною, що відповідає нескінченно великій температурі ($T = \infty$). Стала Сезерленда для молекул різних газів має різні значення і, як показує дослід, для молекул N_2 в температурному інтервалі 197 — 525 К $C = 103$ К; для молекул CO_2 в інтервалі 252 — 475 К $C = 240$ К.

Отже, з підвищенням температури ефективний діаметр молекули зменшується, тобто величина $\langle l \rangle$ зростає.

За формулою (15.2) визначають середню довжину вільного пробігу молекул. У дійсності всі довжини вільного пробігу є різними: як більшими, так і меншими від $\langle l \rangle$. Знайдемо закономірність, за якою відбувається зменшення кількості молекул у напрямленому потоці внаслідок зіткнень їх з молекулами газу. Приймемо, що в газі поширюється паралельний пучок молекул з однаковою швидкістю в напрямі осі OX. Це можуть бути молекули іншого або того самого газу. В результаті зіткнень з молекулами газу частина молекул паралельного пучка змінюватиме напрям свого руху (розсіюватиметься) і, отже, вибуватиме з пучка. Кількість молекул, які вибули, збільшуватиметься в міру переміщення паралельного пучка вглиб газу, а кількість молекул у пучку зменшуватиметься.

Нехай на початку шляху при $x = 0$ у паралельному пучку знаходиться n_0 молекул. На ділянці шляху dx внаслідок зіткнень з молекулами газу кількість молекул у пучку зменшиться на dn і дорівнюватиме n. Відношення кількості молекул dn, які вибули з пуч-

ка, до числа тих n молекул, які не зазнали зіткнень на відрізку шляху dx, дорівнюватиме відношенню dx до довжини вільного пробігу $\langle l \rangle$.

Дійсно, чим більше довжин вільного пробігу вкладається в dx, тим більша ймовірність розсіювання молекул пучка в разі зіткнення з молекулами газу. Тому

$$-\frac{dn}{n} = \frac{dx}{\langle l \rangle}. \tag{15.4}$$

Знак "мінус" означає, що кількість молекул у пучку зменшується, $dn < 0$. Проінтегрувавши рівняння (15.4), дістанемо

$$\ln n = -\frac{x}{\langle l \rangle} + C.$$

З умови, що при $x = 0$ кількість молекул у пучку $n = n_0$, знаходимо $C = \ln n_0$. Звідси

$$n = n_0 \, e^{-\frac{x}{\langle l \rangle}}. \tag{15.5}$$

Таким чином, ослаблення пучка, відбувається за експоненціальним законом. Величину $1/\langle l \rangle$ називають *коефіцієнтом розсіяння*. З формули (15.5) видно, що при $\langle l \rangle \to \infty$ (зіткнень практично не відбувається) $n = n_0$, тобто розсіювання пучка молекул не буде. При $x = \langle l \rangle$ $n/n_0 = 1/e \approx 1/3$, тобто лише трохи більше третини молекул пробігають відстані, що перевищують середню довжину вільного пробігу.

Кількість молекул, які зазнають зіткнень у шарі газу завтовшки dx,

$$dn = \frac{1}{\langle l \rangle} n_0 \, e^{-\frac{x}{\langle l \rangle}} dx. \tag{15.6}$$

Середній шлях, який проходять молекули, не зазнаючи зіткнень,

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n_0} \int x dn = \frac{1}{\langle l \rangle} \int_0^\infty x \, e^{-\frac{x}{\langle l \rangle}} dx = \langle l \rangle.$$

Цей шлях збігається з середньою довжиною вільного пробігу $\langle l \rangle$, що й повинно бути.

Уперше довжину $\langle l \rangle$ визначив Дж. Максвелл у 1860 р., вимірюючи коефіцієнт внутрішнього тертя. Прямі вимірювання величини $\langle l \rangle$ здійснив у 1921 р. німецький фізик М. Борн (1882—1970). Він використав методику молекулярних пучків і випускав пучок атомів срібла з точкового джерела в заповнену газом кварцову камеру, тиск в якій змінювався вакуумним насосом. На шляху молекулярного пучка було розміщено чотири скляні діафрагми з круглими отворами на відстані 1 см одна від одної (рис. 15.2). На кожну з цих діафрагм накладали скляну квадрантну перегородку, яка закривала четверту

частину отвору діафрагми. На кожній з наступних діафрагм ці сектори зміщено на 90° відносно положення їх на попередніх діафрагмах. При проходженні молекулярного пучка срібла на квадрантах утворюється осад, товщина якого пропорційна кількості молекул, що попадають на нього, і зменшується залежно від відстаней до точкового джерела. Першу серію дослідів було проведено при $p = 133 \cdot 10^{-6}$ Па, другу — при 0,13 Па. У другій серії дослідів товщина осаду атомів срібла була меншою в результаті розсіювання атомів срібла на молекулах повітря внаслідок зіткнень. Це дає змогу визначити втрату молекул у молекулярному пучку, що зумовлена зіткненнями між атомами молекулярного пучка і молекулами повітря.

Нехай n_1, n_2, n_3, n_4 — кількості атомів срібла, що осіли відповідно на квадрантах x_1, x_2, x_3, x_4. Тоді згідно з рівністю (15.5) можна записати

$$n_1 = n_0 e^{-\frac{x_1}{\langle l \rangle}}, \quad n_2 = n_0 e^{-\frac{x_2}{\langle l \rangle}}. \tag{15.7}$$

Відношення

$$\frac{n_1}{n_2} = e^{\frac{x_2 - x_1}{\langle l \rangle}}. \tag{15.8}$$

Звідси

$$\langle l \rangle = \frac{x_2 - x_1}{\ln \frac{n_1}{n_2}}. \tag{15.9}$$

Аналогічні рівності можна записати для кожної пари квадрантів. Відношення n_1/n_2 визначають за густиною осаду методом фотометрування. У дослідах М. Борна відстань між дисками була $x_2 - x_1 = 1$ см. За цими даними визначали $\langle l \rangle$. Знайдені значення $\langle l \rangle$ задовільно збігалися з результатами вимірювань іншими методами і з розрахунками за формулою (15.2). У цих дослідах також було показано, що $\langle l \rangle$ обернено пропорційна тиску повітря p у досліджуваній трубці. На основі проведених вимірювань можна розраховувати ефективний поперечний переріз зіткнення σ та газокінетичний діаметр молекули однорідного газу. Саме так австрійський фізик Й. Лошмідт (1821—1895) вперше визначив геометричні розміри молекул.

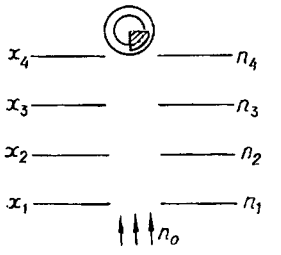


Рис. 15.2

У нерівноважних ізольованих системах процеси відбуваються так, що їхнім остаточним результатом буде встановлення термодинамічної

рівноваги. У встановленні термодинамічної рівноваги в газах важливу роль відіграють явища дифузії, внутрішнього тертя, теплопроводності. Вони приводять до вирівнювання густин, припинення макроскопічного переміщення речовини, вирівнювання температури. Такі явища зумовлені тепловим рухом молекул і називаються *явищами переносу,* оскільки вони пов'язані з перенесенням маси (дифузія), імпульсу (внутрішнє тертя) і енергії (теплопровідність). Одним з процесів перенесення в газах є внутрішнє тертя.

§ 15.2. Внутрішнє тертя (в'язкість) у газах

У рівноважному стані різні частини газу перебувають у спокої одна відносно одної. Якщо ж привести ці частини до стану відносного руху, то виникають внутрішні механізми, які спричиняють зменшення відносних швидкостей руху і з часом вирівнювання їх, тобто виникають гальмівні сили, або внутрішнє тертя (в'язкість). Природа цих сил зводиться до обміну імпульсом впорядкованого руху молекул між шарами, які переміщаються з різними швидкостями. Внаслідок такого обміну результуючий імпульс впорядкованого руху більш швидкого шару зменшується, а повільнішого — збільшується. Слід відрізняти імпульс молекул, пов'язаний з їх безперервним тепловим хаотичним рухом, від імпульсу впорядкованого руху цих молекул, спричиненого дією зовнішніх сил. Внутрішнє тертя обумовлене саме обміном імпульсами впорядкованого руху молекул між шарами, що рухаються з різними швидкостями. Сам же обмін стає можливим внаслідок теплового руху цих молекул і переміщення їх із шару в шар у поперечному напрямі. Це обумовлює гальмування більш швидких шарів і прискорення повільних, що приводить до поступового вирівнювання швидкостей течії газу в різних місцях його потоку. Час, протягом якого відбувається вирівнювання швидкостей напрямленого руху молекул газу і встановлення рівноважного стану, називають *часом релаксації.* Внутрішнє тертя, наприклад, є причиною вщухання вітру або бурі, затухання хвиль на морі та ін.

Сила внутрішнього тертя в газах, як і в рідинах, визначається за законом Ньютона

$$\vec{F} = -\eta \frac{d\vec{u}}{dx} \Delta S, \qquad (15.10)$$

де η — коефіцієнт динамічної в'язкості, Па · с; $\frac{d\vec{u}}{dx}$ — градієнт швидкості в напрямі осі OX (показує зміну швидкості в напрямі OX, перпендикулярному до напряму руху шарів газу); ΔS — площа поверхні шару газу, через яку відбувається перенос імпульсу. Знак "мінус" показує, що на більш швидкі шари газу діє сила тертя, напрямлена проти швидкості цих шарів. Фізичний зміст коефіцієнта динамічної в'язкості η: він чисельно дорівнює імпульсу, перенесеному від шару до шару за одиницю часу через одиничну поверхню при градієнті швидкості, що дорівнює одиниці.

Разом з коефіцієнтом динамічної в'язкості вводиться також поняття коефіцієнта кінематичної в'язкості ν як відношення коефіцієнта динамічної в'язкості до густини речовини:

$$\nu = \eta/\rho.$$

Вимірюють ν у метрах квадратних за секунду ($м^2/с$).

Розрахуємо коефіцієнт внутрішнього тертя газів на основі молекулярно-кінетичних уявлень. Розглянемо площинку ΔS, розміщену перпендикулярно до осі OX, вздовж якої напрямлений градієнт швидкості течії шарів газу $\frac{du}{dx}$ (рис. 15.3).

Взаємодія сусідніх шарів газу здійснюється перенесенням імпульсу з одного шару до іншого. Цей імпульс молекул зумовлений рухом усієї маси газу поступально, а не тепловим рухом. При цьому в даному шарі газу імпульс може зростати або зменшуватись. Внаслідок перенесення імпульсу швидкість руху має тенденцію до вирівнювання. Отже, механізм внутрішнього тертя газу зумовлений перенесенням імпульсу з одного шару в інший. Потік імпульсу, перенесений тепловим рухом молекул із швидкістю v в одиницю часу через площинку ΔS, дорівнюватиме різниці імпульсів, що переносяться молекулами через площинку зліва і справа. Виходячи з рівноймовірності напрямів у газі, маємо, що площинку ΔS зліва направо і справа наліво проходить $\frac{1}{6} n_0$ молекул. Імпульс окремої молекули, який вона переносить через ΔS, є імпульс, який вона мала під час останнього зіткнення перед площинкою ΔS, тобто на відстані середньої довжини вільного пробігу $\langle l \rangle$.

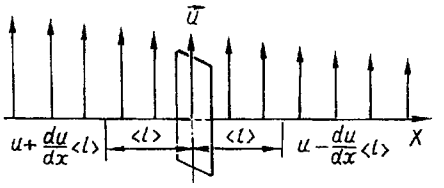


Рис. 15.3

Позначимо масу молекули через m_0. Тоді імпульс K, перенесений через площинку ΔS зліва направо за час Δt,

$$K_1 = \frac{1}{6} n_0 m_0 \langle v \rangle \left(u + \frac{du}{dx} \langle l \rangle\right) \Delta S \Delta t, \qquad (15.11)$$

де — $\Delta S \langle v \rangle \Delta t$ — об'єм газу, з якого молекули перейдуть через ΔS зліва направо за час Δt, маючи швидкість $\left(u + \frac{du}{dx} \langle l \rangle\right)$; $n_0 m_0$ — маса всіх молекул в одиниці об'єму газу (густина).

Аналогічно для напряму справа наліво дістаємо

$$K_2 = \frac{1}{6} n_0 m \langle v \rangle \left(u - \frac{du}{dx} \langle l \rangle \right) \Delta S \Delta t. \qquad (15.12)$$

Для результуючого потоку імпульсу через площинку ΔS за час Δt маємо

$$\Delta K = K_1 - K_2 = \frac{1}{3} n_0 m_0 \langle v \rangle \langle l \rangle \frac{du}{dx} \Delta S \Delta t = F \Delta t. \qquad (15.13)$$

Порівнюючи (15.13) з законом Ньютона (15.10), дістаємо

$$\eta = \frac{1}{3} n_0 m_0 \langle v \rangle \langle l \rangle = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle l \rangle. \qquad (15.14)$$

Звідси видно, що коефіцієнт в'язкості η газів не залежить від тиску і густини газу ρ, оскільки $\rho \sim p$, а $\langle l \rangle \sim 1/p$.

Цей, здавалося б, парадоксальний результат має таке пояснення. При збільшенні тиску в перенесенні імпульсу бере участь більша кількість молекул, але кожна з них без зіткнень проходить меншу відстань, отже, сумарний перенос імпульсу не зміниться. Встановлено, що зменшення тиску в 500 разів зумовлює зміну в'язкості повітря на 4 %.

Оскільки $\langle v \rangle \sim \sqrt{T}$, то можна вважати, що й коефіцієнт $\eta \sim \sqrt{T}$. Проте цей висновок справедливий тільки для випадку, коли ефективний поперечний переріз зіткнення σ є величина стала. Величина σ дещо зростає при зменшенні температури. Відповідно до цього коефіцієнт η зменшується зі зменшенням температури швидше, ніж $\sqrt{T}$. Загалом $\eta \sim T^n$ (для $T \geq C$ $n = 1/2$; для $T \ll C$ $n = 3/2$, де C — стала Сезерленда).

Експериментальні дослідження температурної залежності коефіцієнта динамічної в'язкості для різних газів уперше найбільш повно виконав досі ще мало відомий український вчений І. П. Пулюй. Зокрема були проведені вимірювання коефіцієнта η для повітря, водню, вуглекислого газу, а також для парів води, бензолу, спирту, ацетону, ефіру та їхніх сумішей. Було встановлено, що з підвищенням температури η зростає за законом $\langle u \rangle$

$$\eta = \eta_0 (1 + \alpha t)^n, \qquad (15.15)$$

де η_0 — коефіцієнт динамічної в'язкості при 0 °С; α — коефіцієнт пропорційності; $2/3 < n < 3/4$.

Приклад 15.1. Знайти точний вираз для визначення середнього числа ударів молекул за одиницю часу на одиниці площі.

Розв'язання. Середнє число ударів молекул об стінку посудини за одиницю часу можна оцінити так. Якщо вважати, що швидкості всіх молекул однакові за величиною і вони рухаються тільки паралельно координатним осям так, що 1/6 усіх молекул рухається в додатному напрямі осі OX, 1/6 — у протилежному напрямі і аналогічно для осей OY та OZ, то при такому спрощенні дістаємо, що середнє число молекул, які зазнають зіткнень за одиницю часу на одиниці площі поверхні, буде

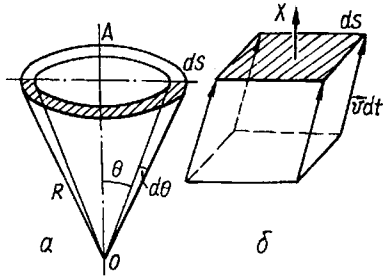


Рис. 15.4

$$z = \frac{1}{6} n_0 \langle v \rangle \qquad (1)$$

де n_0 — кількість молекул в одиниці об'єму; $\langle v \rangle$ — середня арифметична швидкість молекул.

У стані спокою газу всі напрями швидкостей молекул рівноймовірні, тобто розподілені у просторі ізотропно. Знайдемо середнє число N_Ω молекул, напрями швидкостей яких знаходяться в межах тілесного кута Ω (рис. 15.4, *а*). Оскільки всі напрями у просторі охоплює тілесний кут 4π, то внаслідок зазначеної ізотропії

$$N_\Omega = \frac{N}{4\pi} \Omega, \qquad (2)$$

де N — загальна кількість молекул.

Знайдемо середнє число молекул dN, швидкості яких з напрямом OA утворюють кути, що лежать між Θ і $\Theta + d\Theta$. З точки O конуси, твірні яких утворюють з OA кути Θ і $\Theta + d\Theta$, на сферичній поверхні радіуса R вирізають кільцеву смужку площею $dS = 2\pi R^2 \sin \Theta d\Theta$. З точки O площу dS видно під тілесним кутом $d\Omega = \frac{dS}{R^2} = 2\pi \sin \Theta d\Theta$. Тоді рівняння (2) перепишемо у такому вигляді:

$$dN = \frac{N}{4\pi} d\Omega = \frac{N}{2} \sin \Theta d\Theta.$$

Тепер можна знайти вираз для z. Вісь OX візьмемо за зовнішню нормаль до стінки (рис. 15.4, *б*). Кут між віссю OX і швидкістю молекули позначимо Θ. Спочатку вважатимемо, що швидкості всіх молекул однакові за величиною, а їхні напрями розподілені ізотропно. Виділимо групу молекул, проекції швидкостей яких лежать між v_x і $v_x + dv_x$. Щоб молекула ударилась об стінку, вона повинна летіти в напрямі до неї, тобто $v_x > 0$. Нехай таких молекул в одиниці об'єму dn_0. Кількість ударів в одиницю площі поверхні, що їх здійснюють молекули виділеної групи за одиницю часу, $dz = dn_0 v_x = v \cos \Theta dn_0$. Оскільки $dn_0 = \frac{1}{2} n_0 \sin \Theta d\Theta$, то

$$dz = \frac{1}{2} n_0 v \sin \Theta \cos \Theta d\Theta.$$

Інтегруючи цей вираз по всіх молекулах, що летять у напрямі до стінки, тобто в межах від $\Theta = 0$ до $\Theta = \frac{\pi}{2}$, дістаємо

$$z = \frac{n_0 \langle v \rangle}{4}.$$

Узагальнимо цей результат на випадок, коли швидкості молекул не однакові за значенням, але їхні напрями, як і раніше, розподілені ізотропно. Поділимо всі молекули на групи з швидкостями v_1, v_2, Якщо n_1, n_2, — число таких молекул в одиниці об'єму, то

$$z = \frac{1}{4} \sum_i n_i v_i .$$

За означенням середньої швидкості

$$\langle v \rangle = \sum_i n_i v_i / n_0.$$

Тоді

$$z = \frac{1}{4} n_0 \langle v \rangle. \qquad (3)$$

При максвеллівському розподілі молекул за швидкостями $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}}$. Отже, замість наближеної формули (1) дістаємо формулу (3).

§ 15.3. Теплопровідність газів

Теплопровідність — це молекулярне перенесення енергії в суцільному середовищі, зумовлене градієнтом температури. Теплопровідність — один з видів теплопереносу поряд з конвективним теплообміном та тепловим випромінюванням. Розрізняють стаціонарну (grad T = const) та нестаціонарну (grad T = var) теплопровідності. Стаціонарна теплопровідність описується *законом Фур'є*, згідно з яким густина теплового потоку $j_q = \frac{dQ}{dt\,dS}$ пропорційна градієнту температури:

$$\vec{J}_q = -\lambda \operatorname{grad} T, \qquad (15.16)$$

де λ — *коефіцієнт теплопровідності*, Вт/(м·К); $\vec{i}\frac{\partial T}{\partial x} = \operatorname{grad} T$ — градієнт температури для одновимірної задачі; J_q — густина теплового потоку, напрям якого збігається з напрямом поширення теплоти.

Коефіцієнт теплопровідності — фізичний параметр, який характеризує інтенсивність теплопередачі в речовині і чисельно дорівнює густині теплового потоку внаслідок теплопровідності при градієнті температури, що дорівнює одиниці. Знак "мінус" у формулі (15.16) показує, що напрями векторів $\vec{j}_q$ та grad T протилежні.

Механізм теплопровідності в газах пов'язаний з хаотичним тепловим рухом молекул. Молекули з більш нагрітих місць газу під час

свого руху при зіткненні з молекулами сусідніх, менш нагрітих місць, передають їм частину своєї енергії. У процесі теплопровідності різниці температур в газі вирівнюються, і система набуває рівноважного стану.

Обчислимо коефіцієнт стаціонарної теплопровідності газів λ на основі молекулярно-кінетичних уявлень. Розглянемо потік теплоти $d'Q$ через площинку ΔS, перпендикулярну до осі OX, вздовж якої підтримується стала різниця температур (grad T = const). Температури в точках, що відстоять від ΔS на відстанях $\langle l \rangle$ (рис. 15.5), відповідно дорівнюють $T \pm \frac{dT}{dx}\langle l \rangle$. Тиски в об'ємі газу однакові. Внаслідок рівноймовірності напрямів у газі і при p = const через площинку ΔS за одиницю часу вздовж осі OX рухається 1/3 загальної кількості молекул. З них половина рухається зліва направо, а половина — справа наліво. Але молекули, що рухаються зліва направо, переносять через ΔS більшу енергію, бо вони приходять з області більш високих температур. Унаслідок цього через площинку ΔS виникає зліва направо потік теплоти $d'Q$, який дорівнює різниці енергій, що переноситься через площинку зліва і справа. За одиницю часу через одиницю площі пройде зліва направо і справа наліво $\frac{1}{6} n_0 \langle v \rangle$ молекул. Молекули, які перетинають площинку ΔS зліва і справа, мають ту енергію, яку вони мали після останнього зіткнення. Середня енергія молекули дорівнює $\frac{i}{2} kT$, де i — число ступенів вільності молекули (див. § 16.2). Молярна теплоємність газу $C_V = \frac{i}{2} R = \frac{i}{2} kN_A$ (N_A — число Авогадро). Отже, для середньої енергії молекули маємо $C_V T / N_A$.

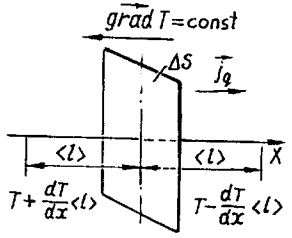


Рис. 15.5

Тоді для кількості теплоти, перенесеної через площинку ΔS за час Δt молекулами газу зліва направо, маємо

$$d'Q^+ = \frac{1}{6} n_0 \langle v \rangle \frac{C_V}{N_A} \left(T + \frac{dT}{dx} \langle l \rangle \right) \Delta S \Delta t. \qquad (15.17)$$

Аналогічно для кількості теплоти, перенесеної молекулами газу через площинку ΔS за час Δt справа наліво,

$$d'Q^- = \frac{1}{6} n_0 \langle v \rangle \frac{C_V}{N_A} \left(T - \frac{dT}{dx} \langle l \rangle \right) \Delta S \Delta t. \qquad (15.18)$$

Результуюча кількість теплоти через площинку ΔS за час Δt буде

$$d'Q = \frac{1}{6} n_0 <v> \frac{C_V}{N_A} \cdot 2 \frac{dT}{dx} <l> \Delta S \Delta t. \qquad (15.19)$$

Враховуючи, що $C_V = Mc_V$, де c_V — питома теплоємність і M — молярна маса, а також що $M/N_A = m_0$ — маса молекули і $\rho = m_0 n_0$ — густина газу, з формули (15.19) маємо

$$j_q = \frac{d'Q}{\Delta S \Delta t} = \frac{1}{3} \rho <v> <l> c_V \frac{\partial T}{\partial x}. \qquad (15.20)$$

Прирівнюючи праві частини в (15.15) і (15.20), дістаємо

$$\lambda = \frac{1}{3} \rho <v> <l> c_V. \qquad (15.21)$$

Вираз (15.21) дає наближене значення коефіцієнта теплопроводності газу, оскільки числовий множник залежить від припущень, які прийняті при аналізі зіткнень газових молекул, і взагалі явища теплопровідності.

Зазначимо, що розглядувана кінетична теорія враховує тільки парні зіткнення молекул, тому її результати не застосовні для великих густин газу, коли значну роль починають відігравати потрійні зіткнення.

З формули (15.21) випливає, що коефіцієнт λ газів не залежить від тиску, оскільки $p \sim \rho$, а $<l> \sim 1/p$. Це підтверджується і дослідними даними. Тільки для досить малих тисків коефіцієнт починає зменшуватися при зменшенні тиску.

Аналіз формули (15.21) показує, що коефіцієнт $\lambda \sim <v>$, тобто повинен зростати з підвищенням температури ($\sqrt{T}$). Насправді коефіцієнт λ зростає з підвищенням температури дещо швидше, ніж $\sqrt{T}$ в результаті зростання $<l>$ і c_V.

Різні уточнення молекулярно-кінетичної теорії, які пов'язані з урахуванням "реальності" газів, тобто врахуванням власного об'єму молекул і силової взаємодії між ними, а також багатоатомності молекули, не приводять до зміни структури формули $\lambda = f \rho <v> <l> c_V$, де f — числовий коефіцієнт.

За формулою (15.21) на основі експериментальних значень коефіцієнта λ та величин $<v>$ і c_V можна провести оцінку розмірів молекул. При цьому встановлено, що розміри молекул більшості газів є величини одного порядку (близько 10^{-10} м).

Різниця в значеннях коефіцієнта λ різних газів пов'язана в основному з різницями величини $<v>$, які, в свою чергу, при $T = \text{const}$ залежать від маси їхніх молекул. На основі цього слід чекати, що коефіцієнти λ легких газів повинні бути більшими порівняно з важчими

газами. Це і підтверджується дослідними даними для деяких газів за нормальних умов.

Водень, як газ з високою теплопровідністю, широко використовується для охолодження різних промислових агрегатів, коли водяне охолодження з певних причин не може бути використане.

Експериментальне дослідження теплопровідності утруднене впливом вільної конвекції, яка легко виникає в газі. Конвекція — перенесення теплоти разом з переміщенням маси газу під дією сили тяжіння при наявності різниці температур.

Коефіцієнт теплопровідності λ визначає швидкість переносу теплоти.

Здебільшого в довільному середовищі, зокрема в газі, який залишений сам на себе, теплопровідність приводить до вирівнювання температур. Цей процес є суто нестаціонарним.

Задачі нестаціонарної теплопровідності розв'язують на основі диференціального рівняння теплопровідності. Головною задачею теорії нестаціонарної теплопровідності є знаходження температурного поля середовища — сукупність значень температури в усіх точках середовища в даний момент часу t. Ця задача стає означеною, якщо відомі розподіл температури в середовищі у початковий момент часу (початкові умови) та температура точок середовища, що належать деякій поверхні (граничні умови). Сукупність початкових та граничних умов називають крайовими умовами.

Приклад 15.2. Для вимірювання коефіцієнта теплопровідності газів найчастіше використовується метод нагрітої нитки. Фізичні основи методу такі. Для визначення коефіцієнта λ потрібно виміряти радіальний потік теплоти від нагрітої нитки через досліджуваний газ (платинова дротина діаметром близько 0,1 мм) до поверхні зовнішнього циліндра капіляра в стаціонарному режимі ($j_q = \text{const}$). Необхідне також знання температур нитки та поверхні зовнішнього циліндра — капіляра. На поверхні вимірювального капіляра намотано зовнішній платиновий термометр. Нитка одночасно є нагрівником та термометром опору. Прилад (вимірювальна трубка) розміщується вертикально для запобігання конвекції. Знайти робочу формулу для визначення коефіцієнта теплопровідності.

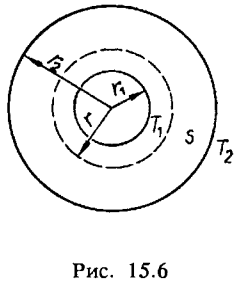


Рис. 15.6

Р о з в ' я з а н н я. Через певний час після ввімкнення нагрівника досягається стаціонарний режим, різниця температур між внутрішнім (ниткою) та зовнішнім циліндрами ($T_1 - T_2$) встановлюється сталою (рис. 15.6). Різниця $T_1 - T_2$ залежить від коефіцієнта λ газу. Встановимо цю залежність. Вважаємо, що висота циліндра $h \gg r$, тому крайовими ефектами можна знехтувати, тобто температуру осі циліндра вважати в усіх точках однаковою. Кількість теплоти Q через довільну бічну поверхню циліндра S радіуса r ($S = 2\pi rh$) визначається рівнянням

$$Q = -\lambda \frac{dT}{dr} St, \qquad (1)$$

де $\frac{dT}{dr}$ — градієнт температури вздовж радіуса цилінідра. В стаціонарному стані Q/t дорівнює потужності нагрівника W, тобто

$$W = -2\pi r h \frac{dT}{dr}. \tag{2}$$

Інтегруючи цей вираз, дістаємо

$$T_1 - T_2 = \frac{W}{2\pi\lambda h} \ln \frac{r_2}{r_1}. \tag{3}$$

Звідси знайдемо робочу формулу для обчислення коефіцієнта теплопровідності

$$\lambda = \frac{W}{2\pi h (T_1 - T_2)} \ln \frac{r_2}{r_1}. \tag{4}$$

§ 15.4. Дифузія газів

Дифузія газів — це процес самовільного вирівнювання густин (концентрацій) у суміші, зумовлений тепловим рухом мікрочастинок. Якщо середовище однокомпонентне, то йтиметься про самодифузію. Перенесення великих мас газу в результаті конвекційних потоків становить молярний перенос. Вирівнювання густини в газі у процесі дифузії здійснюється внаслідок перенесення маси в напрямі зменшення густини. Дифузія — процес необоротний. Взагалі процес дифузії не стаціонарний, бо при цьому відбувається вирівнювання різниць густин. Штучно можна створити і стаціонарну дифузію, певним чином підтримуючи сталими різниці густин в газі.

Розглянемо стаціонарну самодифузію в газах.

Основним дослідним законом самодифузії є закон Фіка, згідно з яким густина потоку маси j_m пропорційна градієнту густини $\frac{d\rho}{dx}$ (у випадку зміни густини ρ в напрямі осі OX, протилежному до напрямку протікання дифузії):

$$j_m = -D \frac{d\rho}{dx}, \tag{15.22}$$

де D — *коефіцієнт дифузії* (самодифузії), $м^2/с$; $j_m = \frac{\Delta m}{\Delta S \Delta t}$, $кг/(м^2 \cdot с)$.

Коефіцієнт дифузії залежить від фізико-хімічних властивостей речовини, яка дифундує, і властивостей інших компонент системи. При значних густинах він також залежить і від густини. Коефіцієнт D чисельно дорівнює дифузійному потоку при градієнті густини, що дорівнює одиниці.

Закон Фіка в першому наближенні справджується і для конденсованих тіл (рідин і твердих тіл та їх розчинів).

Розглянемо з молекулярно-кінетичної точки зору стаціонарну самодифузію в хімічно однорідному (однокомпонентному) газі, в якому немає градієнтів температури. Газ перебуває в стані спокою, тобто конвективних молярниих потоків немає. Вважатимемо, що в моделі

газу його молекули — жорсткі кулі, між якими реалізуються лише парні зіткнення.

Обчислимо масу газу dm, що переноситься через площинку ΔS за час Δt у напрямі осі OX при наявності в газі сталого градієнта густини $\frac{d\rho}{dx} = \text{const}$ (рис. 15.7). Зважаючи на рівноймовірність напрямів, уздовж осі OX рухається 1/3 загальної кількості молекул, причому половина з них рухається справа наліво (−) і половина зліва направо (+).

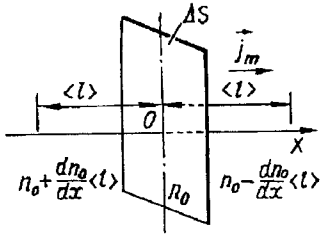


Рис. 15.7

У цьому разі в об'ємі газу підтримується стала різниця концентрацій з обох сторін площинки ΔS. Тому виникає дифузійний потік маси вздовж осі OX, який визначається різницею між кількістю молекул, що проходять через 1 $м^2$ площинки ΔS за одиницю часу зліва направо (n_1) і справа наліво (n_2). Площинка ΔS розміщена перпендикулярно до осі. Концентрації молекул, які утворились перед останніми зіткненнями біля площинки, відповідно $n_0 + \frac{dn_0}{dx}\langle l \rangle$ та $n_0 - \frac{dn_0}{dx}\langle l \rangle$. Тоді кількості молекул, що переносяться через площинку ΔS за час Δt зліва направо і справа наліво,

$$n_1 = n^+ = \frac{1}{6}\left(n_0 + \frac{dn_0}{dx}\langle l \rangle\right)\langle v \rangle \Delta S \Delta t, \tag{15.23}$$

$$n_2 = n^- = \frac{1}{6}\left(n_0 - \frac{dn_0}{dx}\langle l \rangle\right)\langle v \rangle \Delta S \Delta t. \tag{15.24}$$

Результуючий перенос маси газу через площинку ΔS за час Δt

$$\Delta m = m_0 \Delta n = \frac{1}{3}\langle v \rangle \langle l \rangle \frac{d\rho}{dx} \Delta S \Delta t, \tag{15.25}$$

де m_0 — маса молекули; $\rho = m_0 n_0$ — густина газу.

Ввівши поняття потоку маси $j_m = \frac{\Delta m}{\Delta S \Delta t}$, дістанемо

$$j_m = \frac{1}{3}\langle v \rangle \langle l \rangle \frac{d\rho}{dx}. \tag{15.26}$$

Порівнюючи вирази (15.22) і (15.26), маємо

$$D = \frac{1}{3}\langle v \rangle \langle l \rangle. \tag{15.27}$$

З (15.27) випливає, що коефіцієнт самодифузії газу D при $T = \text{const}$ обернено пропорціиний тиску, тому що $\langle l \rangle \sim 1/n_0$, а $n_0 \sim p$, і прямо пропорційний $\sqrt{T^3}$ при $p = \text{const}$ ($\langle v \rangle \sim \sqrt{T}$, $l \sim T$). Більш строгий аналіз вимагає врахування залежності $\langle l \rangle$ від температури T (внаслідок зменшення з підвищенням T ефективного поперечного перерізу зіткнення і, в результаті, збільшення $\langle l \rangle$).

Коефіцієнти переносу взаємопов'язані між собою. Запишемо співвідношення між ними:

$$\eta = D\rho; \qquad \lambda = \eta c_V; \qquad \lambda = D\rho c_V.$$

Ці співвідношення дають можливість розраховувати окремі коефіцієнти переносу, якщо інші експериментально визначені.

Рівність (15.22) часто ще називають *першим законом Фіка.* Цей закон описує стаціонарну самодифузію. Така дифузія може бути реалізована лише за умови штучного підтримання сталим градієнта концентрації: якщо в одному перерізі трубки з газом буде постійне поновлення певної кількості молекул даного газу, а в іншому, на відстані l, така сама кількість молекул газу за той самий час буде забиратись. У реальних умовах ми завжди маємо справу з нестаціонарною дифузією, коли градієнт концентрації вирівнюється і перенос маси стає змінним у часі.

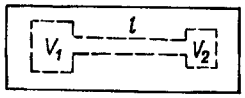


Рис. 15.8

Розглянемо нестаціонарну дифузію в однокомпонентному газі, який займає об'єм V. Уявно виділимо в газі об'єми V_1 і V_2, розміщені на відстані l (рис. 15.8). Приймемо, що концентрація молекул газу в об'ємі V_1 становить n_{01}, в об'ємі V_2 – n_{02} ($n_{01} > n_{02}$). Градієнт концентрації $\Delta n_0/l = (n_{01} - n_{02})/l$. Тоді за малий проміжок часу dt з об'єму V_1 в об'єм V_2 продифундує dn молекул,

$$dn = -D\frac{\Delta n_0}{l}\Delta S dt.$$

При цьому в об'ємі V_1 концентрація молекул зменшиться на $dn_0' = -dn/V_1$, а в об'ємі V_2 збільшиться на $dn_0'' = dn/V_2$. Таким чином, через час dt в об'ємах V_1 і V_2 концентрації молекул будуть відповідно

$$n_{01}' = n_{01} - \frac{dn}{V_1} \quad \text{та} \quad n_{02}' = n_{02} + \frac{dn}{V_2}.$$

Різниця концентрацій в об'ємах V_1 і V_2 стане

$$\Delta n_0' = \Delta n_0 - dn\left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2}\right).$$

Зміна різниці концентрацій за час dt

$$d(\Delta n_0) = \Delta n_0 - \Delta n_0' = dn\left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2}\right),$$

або

$$d(\Delta n_0) = -D\frac{\Delta n_0}{l}\Delta S dt\left(\frac{V_1 + V_2}{V_1 V_2}\right).$$

Позначимо $\frac{V_1 V_2}{V_1 + V_2} = V$ і назвемо його зведеним об'ємом. Тоді

$$\frac{d(\Delta n_0)}{\Delta n_0} = -D\frac{\Delta S}{Vl}dt.$$

Проінтегруємо цю рівність і дістанемо

$$\ln \Delta n_0 = -D\frac{\Delta S}{Vl}t + \ln C,$$

або

$$\Delta n_0 = C\,e^{-D\frac{\Delta S}{Vl}t}.$$

З початкових умов при $t = 0$ $\Delta n_0 = \Delta n_{00} = C$. Тоді

$$\Delta n_0 = \Delta n_{00}\,e^{-D\frac{\Delta S}{Vl}t}. \qquad (15.28)$$

Одержане рівняння зміни концентрації молекул з часом показує, що вона спадає за експоненціальним законом. Оскільки $\frac{Vl}{D\Delta S}$ має розмірність часу, то, позначивши його τ, дістанемо

$$\Delta n_0 = \Delta n_{00}\,e^{-t/\tau}. \qquad (15.29)$$

З рівності (15.29) випливає, що за час $t = \tau$ різниця концентрацій зменшується в e разів. Величину τ називають сталою часу процесу або *часом релаксації.*

Встановимо друге диференціальне рівняння Фіка для одновимірного випадку, яке описує нестаціонарну дифузію. Виділимо в газі малий об'єм з одиничною площею перерізу, перпендикулярною до осі OX, і завишки $dx = l$. Іншими словами, в газі виділяємо два одиничних перерізи на відстані x і $x + dx$ від початку координат. При наявності градієнта концентрації $\frac{\partial n_0}{\partial x}$ дифузійний потік (маса речови-

ни, що переноситься через одиницю площі за одиницю часу) через переріз на відстані x буде

$$j_1 = - D \frac{\partial n_0}{\partial x},$$

а на відстані $x + dx$ градієнт концентрації зменшується внаслідок того, що частина молекул залишається між перерізами x і $x + dx$. Тоді потік запишеться так:

$$j_2 = - D \frac{\partial n_0}{\partial x} + l \frac{\partial j_1}{\partial x} = - D \frac{\partial n_0}{\partial x} + l \frac{\partial}{\partial x}\left(- D \frac{\partial n_0}{\partial x} \right).$$

Отже, в перерізі $x + dx$ потік молекул зменшується на $l \frac{\partial j_1}{\partial x}$. Зміна потоку

$$j_2 - j_1 = \Delta j = l \frac{\partial}{\partial x}\left(- D \frac{\partial n_0}{\partial x} \right).$$

Кількість молекул, які залишаються в об'ємі між перерізами в точках x і $x + dx$, дорівнюватиме зміні кількості молекул за одиницю часу в цьому об'ємі, тобто

$$\Delta j = - \frac{\partial}{\partial t}(l\, n_0).$$

Тут взято до уваги, що $S = 1$ см^2, а $V = Sl = l$, см^3. Тоді можна записати

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D \frac{dn_0}{dx} \right), \text{ або } \frac{\partial n_0}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n_0}{\partial x^2}. \qquad (15.30)$$

Рівняння (15.30) є другим законом Фіка, який встановлює зв'язок між швидкістю зміни концентрації в певному перерізі об'єму газу та зміною градієнта концентрації з відстанню внаслідок зміни різниці концентрації при нестаціонарній дифузії.

На практиці ми здебільшого маємо справу з нестаціонарною дифузією, коли для певної області газу змінними в часі є концентрація та градієнт концентрації компонент. Розрахунки кінетики нестаціонарної дифузії зводяться до знаходження еволюції полів густини (концентрації) з часом для певної області шляхом розв'язання диференціального рівняння (15.30) при заданих початкових і граничних умовах.

Взаємна дифузія. Нехай є суміш двох газів, які можуть взаємно дифундувати. Для потоку маси кожного з цих газів через одиницю площі за одиницю часу у випадку одновимірної задачі можна записати

$$j_1 = - \frac{1}{3} < l_1 > < v_1 > \frac{\partial \rho_1}{\partial x}, \quad j_2 = - \frac{1}{3} < l_2 > < v_2 > \frac{\partial \rho_2}{\partial x}. \qquad (15.31)$$

Під час взаємної дифузії кожна з компонент газу може мати свою швидкість дифузії. У суміші водню і вуглекислого газу, наприклад, водень дифундує значно швидше від вуглекислого газу, оскільки при заданій температурі середня швидкість теплового руху молекул водню майже в п'ять разів більша; більшою для них є також і довжина вільного пробігу. Звідси виходить, що об'єм водню, який переноситься в одному напрямі, буде суттєво більшим від об'єму вуглекислого газу, який переноситься в протилежному напрямі. В результаті в газі неминуче виникне різниця тисків, що спричинить потік газу як цілого. Таким чином, у процесі взаємної дифузії двох різних газів спостерігатиметься перевищення дифузійного потоку одного компонента над потоком іншого, і ця різниця потоків повинна компенсуватися течією суміші газів як цілого в тому напрямі, де знаходиться компонента газу з більшою швидкістю дифузії. В результаті цих процесів у суміші газів тиск вирівнюватиметься. При однаковому тиску в усьому об'ємі суміші газів і $T = \text{const}$ повинна виконуватися рівність за абсолютним значенням градієнтів густини компонентів суміші:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial x} = - \frac{\partial \rho_2}{\partial x}. \qquad (15.32)$$

Зазначимо, що крім взаємної дифузії молекул газів відбуватиметься рух газу як цілого. Суцільний потік газу повинен компенсувати надлишковий дифузійний потік більш легкої компоненти газу. Тоді сумарний перенос маси через певний переріз газу дорівнюватиме нулю (потоки взаємно компенсуються):

$$j_1 + j_2 + \rho u = 0,$$

де $\rho = \rho_1 + \rho_2$ — густина суміші газів; u — швидкість переміщення суміші газів як цілого. Після підстановки j_1 і j_2 дістанемо

$$\frac{1}{3}\left(< l_1 > < v_1 > \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + < l_2 > < v_2 > \frac{\partial \rho_2}{\partial x} \right) = - \rho u.$$

Взявши до уваги (15.32), останню рівність перепишемо так:

$$\frac{1}{3}\left(< l_2 > < v_2 > - < l_1 > < v_1 > \right) \frac{\partial \rho_1}{\partial x} = - \rho u.$$

Звідси

$$u = - \frac{1}{3}\left(\frac{< l_2 > < v_2 >}{\rho} - \frac{< l_1 > < v_1 >}{\rho} \right) \frac{\partial \rho_1}{\partial x}. \qquad (15.33)$$

Внаслідок руху суміші газів як цілого в дійсності їхні потоки через одиничний переріз будуть не j_1 і j_2, а

$$j_1' = j_1 + \rho_1 u \quad \text{і} \quad j_2' = j_2 + \rho_2 u. \tag{15.34}$$

Після підстановки j_1, j_2 та u в рівності (15.34) з урахуванням того, що $\rho_2 = \rho - \rho_1$, дістанем

$$\left.\begin{aligned} j_1' &= -\frac{1}{3}\left(\frac{\rho_2}{\rho} < l_1 > < v_1 > + \frac{\rho_1}{\rho} < l_2 > < v_2 >\right)\frac{\partial \rho_1}{\partial x}, \\ j_2' &= -\frac{1}{3}\left(\frac{\rho_2}{\rho} < l_1 > < v_1 > + \frac{\rho_1}{\rho} < l_2 > < v_2 >\right)\frac{\partial \rho_2}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \tag{15.35}$$

З рівнянь (15.35) випливає, що коефіцієнт взаємної дифузії суміші газів визначається рівністю

$$D_{12} = \frac{1}{3}\left(\frac{\rho_2}{\rho} < l_1 > < v_1 > + \frac{\rho_1}{\rho} < l_2 > < v_2 >\right). \tag{15.36}$$

Якщо в суміші переважає один з газів, наприклад, $\rho_1 \ll \rho_2 (\rho \to \rho_2)$, то коефіцієнт взаємної дифузії фактично дорівнює коефіцієнту самодифузії:

$$D_{12} = D = \frac{1}{3} < l_1 > < v_1 >.$$

У реальних умовах переважає взаємна дифузія земного повітря внаслідок попадання в нього газоподібних викидів природного та виробничого походження.

Суміші газів використовуються в багатьох технологічних процесах як спеціальні середовища, а також для дихання під водою, під землею, у космічних польотах тощо.

Крім ізотермічної дифузії газів у багатьох фізичних явищах велику роль відіграє термодифузія. Вона зумовлена наявністю в газовій суміші градієнта температури. Йдеться про виникнення у газовій суміші grad C при наявності grad T. Явище термодифузії в газах може бути використане для розділення ізотопів. Термодифузію в розчинах називають *ефектом Соре*. Виникнення різниці температур може також спостерігатися при дифузії одного газу в інший (*ефект Дюфора*). В газах ця різниця становить кілька градусів. Термодифузія в газових сумішах відбувається одночасно з дифузією. Ці два протилежно напрямлених процеси повинні привести до встановлення рівноважного градієнта концентрації.

Термодифузія — досить складне явище, яке не можна пояснити простими молекулярно-кінетичними уявленнями. Встановлено, що можливість термодифузії випливає з моделі газу Максвелла, згідно з якою молекули розглядаються як центри сили відштовхування, що залежать від відстаней між молекулами ($1/r^n$). На основі такого підходу в фізичній кінетиці доводять залежність ефективного поперечного перерізу молекул, які стикаються між собою, від їхньої відносної швидкості. Ця залежність і зумовлює фізичний механізм термодифузії, пов'язаний з передачею моменту імпульсу від одних молекул іншим. Теоретично доведено, що при $n > 5$ легкі молекули скупчуються біля "гарячого" кінця термодифузійної колони, яка наповнена газовою сумішшю, при $n < 5$ — біля "холодного" кінця, а при $n = 5$ термодифузії немає.

Для бінарної суміші газів, якщо немає зовнішніх сил та градієнта тиску, повний дифузійний потік визначається формулою

$$j_m = -\rho D_{12} \operatorname{grad} C_i - \rho \frac{D_т}{T} \operatorname{grad} T, \tag{15.37}$$

де ρ — густина суміші; C_i — концентрація i-го компонента ($C_i = n_i/n$); D_{12} — коефіцієнт дифузії; $D_т$ — коефіцієнт термодифузії.

На відміну від коефіцієнта дифузії, який досить слабо залежить від концентрації, коефіцієнт $D_т$ пропорційний добутку концентрацій обох компонентів:

$$D_т / D_{12} = \alpha C (1 - C), \tag{15.38}$$

де α — стала термодифузії. Наближений вираз для α має вигляд

$$\alpha = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\frac{n-5}{n-1} \approx \frac{\Delta m}{2m}\frac{n-5}{n-1}, \tag{15.39}$$

де m_1 і m_2 — маси газових молекул суміші; n — показник степеня у виразі $1/r^n$ — законі залежності сили відштовхування між молекулами.

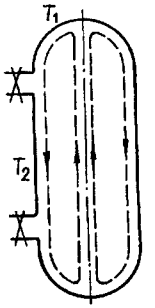


Рис. 15.9

Звідси ясно, що при $n = 5$ коефіцієнт термодифузії змінює знак. Термодифузія використовується як метод поділу нуклідів газів і газових сумішей. Ідея цього методу зрозуміла з конструкції простої термодифузійної розділювальної колонки (рис. 15.9). По осі вертикальної труби, охолоджуваної ззовні проточною водою, натягнуто металеву дротину, яка розігрівається електричним струмом ($T_1 > T_2$). Уздовж радіуса труби встановлюється радіальний градієнт температури $\left(\frac{dT}{dr}\right)$, в результаті якого одна з компонент суміші (з більшою молекулярною масою) дифундує переважно до периферії, а інша — до осі. Легші молекули переносяться конвекційними потоками у верхню частину колонки, а важчі — в її нижню частину. Багаторазовим повторенням цього процесу в інших розділювальних колонках досягається поділ нуклідів.

Досі ми розглядали явища дифузії і теплопроводності як взаємно незалежні, які відповідно зумовлені градієнтами концентрації та температури. Проте в багатьох реальних процесах явища дифузії та теплопровідності відбуваються одночасно. Вони мають загальну термодинамічну природу. Ці процеси описуються на основі порівняно нової галузі знань — так званої термодинаміки необоротних процесів.

§ 15.5. Газ у стані вакууму. Одержання та вимірювання низьких тисків

Явища переносу в газах пов'язані із зіткненням молекул між собою. При досить малих тисках середня довжина вільного пробігу молекул $< l >$ може перевищувати лінійні розміри посудини L, в якій знаходиться газ. Таке розрідження газу називається вакуумом (від лат. vacuum — пустота). Поняття вакууму застосовне до газу у замкненій посудині. Іноді це поняття поширюють і на газ у вільному просторі, наприклад на космос. Поняття вакууму є відносним. Фізичною характеристикою вакууму є співвідношення між довжиною вільного пробігу $< l >$ молекул газу і характерним лінійним розміром посудини L (відстань між стінками вакуумної камери, діаметр вакуумного трубопроводу, відстань між електродами електровакуумного приладу тощо). Виберемо характерний лінійний розмір посудини $L \approx 10$ см. При цьому розрізняють такі ступені вакууму:

низький ($< l > \leq L$) — діапазон тисків $10{,}13 \cdot 10^4 - 133$ Па (760—1 мм рт. ст.);

середній ($< l > \sim L$) $-133-133 \cdot 10^{-3}$ Па ($1-10^{-3}$ мм рт. ст.);

високий ($< l > > L$) $-133 \cdot 10^{-3} - 133 \cdot 10^{-7}$ Па ($10^{-3}-10^{-7}$ мм рт. ст.);

надвисокий ($< l > >> L$) $- 133 \cdot 10^{-7}-133 \cdot 10^{-13}$ Па ($10^{-7}-10^{-13}$ мм рт. ст.).

При інших геометричних розмірах посудини L ступені вакууму будуть припадати на інші інтервали тисків.

Розглянемо деякі важливі властивості і процеси в газах при умовах низького і високого вакууму.

1. При $< l > >> L$ шлях кожної молекули — пряма лінія між двома точками на стінках посудини, об які послідовно ударяється молекула. Окремі молекули рухаються незалежно одна від одної, без взаємних зіткнень. Через те що при випаровуванні адсорбованих молекул з твердої поверхні їхньому рухові не перешкоджають зіткнення в граничному шарі, внутрішні стінки посудини (принаймні значні її частини) вільні від адсорбованого шару молекул.

2. При $< l > << L$ численні зіткнення молекул у газовій фазі системи рідина — газ зумовлюють малу швидкість випаровування рідини і роблять неможливими строго напрямлені молекулярні потоки пари. При $< l > >> L$ швидкість випаровування рідини при даній температурі стає максимальною, оскільки обернений процес конденсації стає практично неможливим. Молекулярні потоки пари стають різко вираженими. Це знаходить пряме практичне використання в покритті твердих поверхонь металевими та неметалевими шарами, наприклад, покриття алюмінієм екранів електронно-променевих трубок, дзеркалізація відбивачів в освітлювальних пристроях тощо.

3. При $< l > << L$ взаємна дифузія газів внаслідок численних взаємних зіткнень молекул відбувається досить повільно.

При $< l > >> L$ утворюється молекулярний пучок. Молекули летять прямолінійно і ударяються об стінки посудини. Таке явище називають *ефузією.*

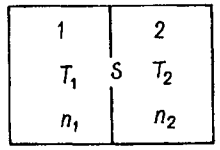


Рис. 15.10

Для течії газу по циліндричній трубі в умовах вакууму рівняння Пуазейля для в'язкої течії несправедливе. Щосекундні втрати об'єму газу при цьому пропорційні не четвертому, а третьому степеню значення діаметра труби.

Дифузія газів через пористі перегородки — це також ефузійний потік, який описується законом Грахама

$$m = k \frac{\Delta p}{\sqrt{M}}, \tag{15.40}$$

де m — маса газу, що проходить через пору за одиницю часу; M — молярна маса газу; k — коефіцієнт пропорційності; Δp — різниця тисків.

4. При $< l > >> L$ умова рівноваги між різними частинами газу в замкненому об'ємі набуває специфічної форми. Нехай дві частини *1* і *2* посудини з газом, температура яких T_1 і T_2, з'єднані отвором S (рис. 15.10). Концентрації молекул відповідно дорівнюють n_1 і n_2. Для встановлення рівноваги потрібно, щоб через отвір S з однієї частини об'єму в інший проходила однакова кількість молекул, тобто

$$n_1 S < v_1 > = n_2 S < v_2 >, \tag{15.41}$$

або

$$\frac{p_1}{kT_1} < v_1 > = \frac{p_2}{kT_2} < v_2 >. \tag{15.42}$$

Враховуючи, що $< v > \sim \sqrt{T}$, формулу (15.42) можна переписати так:

$$\frac{p_1}{\sqrt{T_1}} = \frac{p_2}{\sqrt{T_2}}. \qquad (15.43)$$

Отже, умовою рівноваги для розрідженого газу є пропорційність відношення тисків до квадратного кореня з температур для обох частин посудини.

Зауважимо, що рівність (15.43) є справедливою і для густих газів. Проте в цьому разі зіткнення між молекулами приводять до виникнення руху газу в цілому, що й зумовлює вирівнювання тисків.

У розрідженому газі молекули рухаються незалежно одна від одної, і різниця температури не може привести в рух весь газ. З цієї причини закон Паскаля для розрідженого газу не справджується, оскільки такий газ не можна розглядати як суцільне середовище.

У вакуумі не виникають конвекційні молярні потоки.

5. При $\langle l \rangle >> L$ теплопровідність у газі реалізується в результаті безпосередніх послідовних зіткнень молекул з "гарячою" і "холодною" стінками посудини. Теплопровідність повинна залежати від кількості "носіїв тепла", а отже, і від тиску газу, тобто $\lambda \sim p$. Отже, раніше означене явище теплопровідності втрачає сенс.

Молекулярно-кінетична теорія у цьому разі приводить до такого закону теплопровідності:

$$j_q = \alpha p \sqrt{\frac{2R}{\pi MT}}\,(T_1 - T_2), \qquad (15.44)$$

де T — середня температура газу; α — коефіцієнт акомодації ($0{,}20 \le \alpha \le 0{,}95$), що залежить від будови молекул газу і поверхні, з якою контактує газ. Коефіцієнт α характеризує обмін енергією між молекулами і стінками посудини.

У пористих твердих тілах повітря або газ сильно розріджені навіть при атмосферному тиску, а отже, їхня теплопровідність повинна бути малою. Такі пористі тіла широко використовуються на практиці як теплоізоляційні матеріали.

6. При $\langle l \rangle >> L$ в газі неможливе внутрішнє тертя. Мова може йти лише про так звану молекулярну в'язкість, яка пропорційна тиску. Замість внутрішнього тертя відбувається перенесення імпульсу від рухомої пластинки до нерухомої безпосередньо тими молекулами, які його набули на рухомій пластинці.

Сучасна вакуумна техніка має справу з тисками до $133 \cdot 10^{-10}$ Па і нижче. Важливого значення набувають різні фізичні і технічні процеси, які відбуваються в умовах вакууму. Для утворення вакууму використовують механічні форвакуумні, дифузійні та сорбційно-іонні насоси.

Основні технічні характеристики вакуумних насосів такі: граничний вакуум $p_{гр}$ — максимальне розрідження, якого можна досягти при

неперервній тривалій роботі насоса, якщо немає натікання газу ззовні та газувань матеріалу всередині насоса; початковий тиск p_0 — тиск на вхідному (всмоктуючому) патрубку насоса, при якому він починає нормально працювати; максимальний випускний тиск p_m — тиск на виході випускного клапана, при перевищенні якого насос припиняє дію; швидкість відкачування v_0 — об'єм газу, відкачуваного насосом з посудини за одиницю часу при заданому значенні тиску на вході в трубопровід насоса.

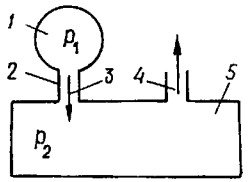


Рис. 15.11

Схему найпростішої вакуумної системи подано на рис. 15.11, де *1* — об'єм, що відкачується; *2* — трубопровід; *3*; *4* — випускний та впускний патрубки насоса; *5* — насос. У процесі відкачування відбувається зменшення тиску одночасно в усіх місцях вакуумної системи, але, як показує дослід, це відбувається швидше в кінці трубопроводу (отже, $p_1 > p_2$). Тепер врахуємо ще швидкість відкачування

$$v_0 = \left(\frac{dV}{dt}\right)_{p_1} = \text{const} \qquad (15.45)$$

та швидкість дії насоса

$$v_н = \left(\frac{dV}{dt}\right)_{p_2} = \text{const}. \qquad (15.46)$$

Для довільного перерізу трубопроводу маємо

$$v = \left(\frac{dV}{dt}\right)_{p} = \text{const}. \qquad (15.47)$$

Різниця тисків $\Delta p = p_1 - p_2$ виникає через те, що трубопровід чинить опір течії газу. Аналогічно закону Ома співвідношення між різницею тисків Δp і силою потоку газу Q можна записати у вигляді

$$Q = \frac{\Delta p}{R} = U\,\Delta p, \qquad (15.48)$$

де R — опір трубопроводу течії газу; U — пропускна здатність трубопроводу.

Тоді умову квазістаціонарності потоку газу у трубопроводі можна записати так:

$$p_1 v_0 = U\,(p_1 - p_2) = p_2 v_н = Q = \text{const}. \qquad (15.49)$$

Інформація про величину Q дає можливість визначити швидкості v_0, $v_н$ (завжди $v_0 < v_н$).

На основі рівняння (15.49) дістаємо

$$v_0 = U\,\frac{p_1 - p_2}{p_1};\quad v_н = U\,\frac{p_1 - p_2}{p_2}, \tag{15.50}$$

або

$$\frac{1}{v_0} = \frac{1}{U}\,\frac{p_1}{p_1 - p_2};\quad \frac{1}{v_н} = \frac{1}{U}\,\frac{p_2}{p_1 - p_2}. \tag{15.51}$$

Звідси після перетворень маємо

$$v_0 = \frac{v_н U}{v_н + U}. \tag{15.52}$$

Рівняння (15.52) є основним рівнянням вакуумної техніки. Воно пов'язує основні параметри вакуумної системи v_0, $v_н$, U і є визначальним при конструюванні та розрахунках вакуумних систем.

Для одержання попереднього розрідження газу використовують форвакуумні насоси. Серед багатьох типів таких насосів найбільш поширеними є ротаційні масляні насоси різних конструкцій. За допомогою їх дістають тиски до $133 \cdot 10^{-2}$ Па. Щоб мати тиски порядку $133 \cdot 10^{-7}$ Па, послідовно з форвакуумним насосом вмикають пароструминні дифузійно-конденсаційні насоси.

Принцип роботи цих насосів грунтується на використанні всмоктувально-дифузійної дії струменя пари робочої рідини з наступним відкачуванням молекул газу форвакуумним насосом. Пара робочої рідини конденсується в нижній частині об'єму насоса внаслідок охолодження.

Щоб мати більш високий вакуум (до $133 \cdot 10^{-11}$ Па), застосовують сорбційно-іонні насоси. У таких насосах використовується ударна іонізація газу, який надходить у насос з відкачуваного об'єму, а потім за допомогою електричних та магнітних полів створюється рух іонів, напрямлений до випускного отвору. Граничний вакуум підвищує використання сорбції іонів, молекул газу силікагелями, активним вугіллям та іншими речовинами. Такі сорбенти називають гетерами. Титан, наприклад, інтенсивно поглинає водень. Як гетери використовують барій, кальцій, стронцій, торій, цирконій, тантал та інші метали, а також їхні сполуки.

Вакуум вимірюють спеціальними вакуумними манометрами. Універсального методу вимірювань, який охоплював би весь діапазон тисків від 10^5 до 10^{-13} Па ($760 - 10^{-13}$ мм рт. ст.), не існує. Для вимірювання вакууму різних піддіапазонів використовують різні

фізичні закономірності, які зв'язані з тиском газу. Існують вакуумметри рідинні, деформаційні, компресійні, радіометричні, в'язкістні, теплові, іонізаційні та ін.

Для вимірювання тисків від 10^5 до десятих часток паскалів використовують відкриті та закриті U-подібні рідинні манометри та механічні стрілочні деформаційні манометри. Для вимірювання тисків від 13,3 до $133 \cdot 10^{-3}$ Па часто використовують вакуумметр Мак-Леода, який називається компресійним манометром (рис. 15.12). Його дія грунтується на законі Бойля — Маріотта. Основною частиною приладу є вимірювальний балон *1*, об'єм V якого відомий. Трубка *4*

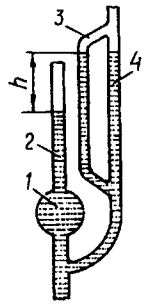


Рис. 15.12

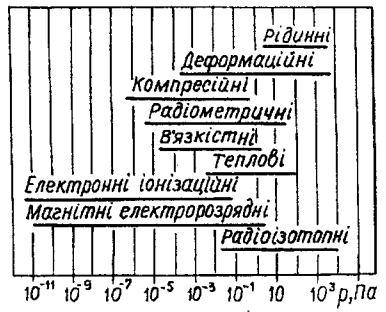


Рис. 15.13

з'єднується з системою, в якій вимірюється тиск. Два капіляри *2* і *3* мають однаковий діаметр. Капіляр *2* з'єднаний з об'ємом V, а капіляр *3* — з трубкою *4*. Знизу вводиться рідина (ртуть), яка відокремлює в об'ємі V газ при тиску p, який вимірюють. Потім шляхом підняття ртуті стискають цей газ до об'єму V_1 у запаяному капілярі при тиску p_1 ($p_1 >> p$). Тиск p_1 визначається за різницею рівнів h рідини в капілярах. Тоді тиск, який вимірюють, визначається із співвідношення

$$p = \frac{V_1}{V}\,p_1 = \frac{V_1}{V}\,\rho g h.$$

Дія в'язкістного вакуумметра грунтується на залежності в'язкості розрідженого газу від тиску; дія теплових вакуумметрів — на залежності теплопровідності розріджених газів від тиску. Найбільш чутливими є електронні іонізаційні та магнітні електророзрядні вакуумметри (діапазон тисків від 10 до 10^{-11} Па). Дія іонізаційних вакуумметрів грунтується на вимірюванні сили іонного струму, створеного внаслідок іонізації електронами молекул газу, тиск якого вимірюється.

У магнітних електророзрядних вакуумметрах використовується залежність тиску від струму самостійного розряду, що виникає в розрідженому газі в схрещених магнітному і електричному полях. На рис. 15.13 показано діапазони вимірювання тиску різними вакуумметрами.

Приклад 15.3. У посудині об'ємом V, всередині якої існує повний вакуум, відкривається отвір дуже малої площі S. Через який проміжок часу τ тиск у посудині дорівнюватиме половині атмосферного тиску p_0? При цьому вважати, що заповнення посудини повітрям відбувається настільки повільно, що в будь-який момент часу можна говорити про тиск і температуру повітря в посудині, хоча, як правило, процес заповнення нерівноважний. Температуру повітря в посудині вважати такою самою, як і зовнішню температуру.

Розв'язання. Від початку заповнення на момент часу t позначимо тиск і число молекул повітря в одиниці об'єму посудини через p і n_0, які в інтервалі часу $t, t + dt$ можна вважати сталими.

Середня кількість молекул z, які ударяються за одиницю часу в одиничну площинку, виражається співвідношенням (див. приклад 15.1)

$$z = \frac{1}{4} n_0 <v>,$$

де $< v >$ — середня швидкість молекул.

У посудину через отвір S за час dt потрапить

$$dn' = zSdt = \frac{1}{4} n_0 <v> Sdt$$

молекул. За цей самий час з посудини вилетить

$$dn'' = \frac{1}{4} n <v> Sdt$$

молекул. Тоді збільшення кількості молекул в одиниці об'єму посудини за час dt визначатиметься співвідношенням

$$dn = \frac{dn' - dn''}{V} = \frac{<v>S}{4V} (n_0 - n)\, dt. \qquad (1)$$

На основі формули $p = nkT$ для ізотермічного процесу маємо $dn = \frac{dp}{kT}$. Отже, рівняння (1) набуває вигляду

$$dp = \frac{<v>S}{4V} (p_0 - p)\, dt. \qquad (2)$$

Проінтегрувавши (2) в межах від 0 до $\frac{p_0}{2}$ і від 0 до τ, матимемо

$$\int_0^{\frac{p_0}{2}} \frac{dp}{p_0 - p} = \int_0^{\tau} \frac{<v>S}{4V} dt,$$

звідси дістанемо

$$\tau = \frac{4V}{<v>S} \ln 2.$$

Розділ 16. Основи термодинаміки

§ 16.1. Основні поняття і означення

Виникнення термодинаміки пов'язують із необхідністю розробки теоретичних основ роботи теплових машин із метою найефективнішого перетворення теплової енергії в роботу. Тепер термодинаміка вийшла далеко за рамки свого початкового змісту і є всебічно розробленою системою знань, якій під силу розв'язання найрізноманітніших теоретичних і практичних завдань, що стосуються вивчення термодинамічних властивостей газів, пари, рідин та твердих тіл, фазових рівноваг і фазових перетворень, електричних і магнітних властивостей речовин, випромінювання, закономірностей протікання хімічних реакцій тощо.

Термодинаміка — наука про найбільш загальні властивості макроскопічних фізичних систем, що знаходяться в стані термодинамічної рівноваги, та про процеси переходу між цими станами.

Предметом термодинаміки є вивчення властивостей речовини і різноманітних фізичних явищ, зумовлених тепловим рухом у макроскопічних системах поблизу стану рівноваги в них, без аналізу мікроскопічної будови тіл системи. Йдеться про класичну, або рівноважну, термодинаміку. Система, що складається з макроскопічних тіл і полів, які можуть взаємодіяти між собою і зовнішнім середовищем (обмінюватися енергією і речовиною), називається *термодинамічною системою.* Обмін енергією відбувається у вигляді роботи та теплоти. Сукупність властивостей системи та її стан визначаються термодинамічними параметрами. Стан називають *стаціонарним*, якщо параметри системи з часом не змінюються. Стаціонарний стан називають *рівноважним станом*, якщо незмінність системи в часі не обумовлена зовнішніми діями. Термодинамічна рівновага двох систем або двох частин однієї системи характеризується тим, що їхні температури однакові.

Класична термодинаміка розглядає лише рівноважні термодинамічні системи. Саме для таких систем розроблено методи аналітичного описання їх. Під *термодинамічною рівновагою* розуміють такий стан системи, при якому макроскопічні фізичні параметри, що визначають її стан, залишаються в часі незмінними, а стаціонарних потоків внаслідок дії зовнішніх джерел немає.

Важливою властивістю всякого рівноважного процесу є його оборотність у часі. Це означає можливість повернення термодинамічної системи у вихідний стан через ті самі проміжні стани, що протягом прямого процесу були пройдені.

Термодинамічні системи завжди складаються з великої кількості частинок, і в них у стані рівноваги на молекулярному рівні

відбуваються безперервні зміни, проте макроскопічні процеси припиняються.

Описання термодинамічних систем і визначення їхнього стану здійснюється за допомогою фізичних величин, що загалом можуть змінюватись зі зміною умов перебування системи. У термодинаміці рівноважний стан системи може бути описаний за допомогою порівняно невеликої кількості макроскопічних фізичних величин, які характеризують систему в цілому. Саме такі макроскопічні величини називають *термодинамічними параметрами* стану. Це такі величини, як тиск, температура, густина, концентрація, об'єм системи, напруженість електричного і магнітного полів тощо. Описаний за допомогою макроскопічних параметрів стан системи називають *макроскопічним станом* або *макростаном.*

Термодинамічні параметри, що визначають стан системи та її зв'язок із зовнішніми тілами, поділяють на внутрішні і зовнішні. Внутрішній стан системи описують за допомогою внутрішніх параметрів. Зовнішні параметри характеризують зовнішні тіла і силові поля, що впливають на стан досліджуваної системи. Наприклад, для газу в закритій посудині тиск газу, температура, концентрація є внутрішніми параметрами, а об'єм посудини, напруженість зовнішнього електричного або магнітного полів, що можуть впливати на стан газу в посудині, є зовнішніми параметрами. В різних умовах перебування термодинамічної системи одні й ті самі параметри можуть бути як внутрішніми, так і зовнішніми. Якщо газ помістити в циліндр під рухомим поршнем, то тиск газу визначатиметься зовнішньою силовою дією на поршень, в цьому разі тиск стає зовнішнім параметром, а об'єм газу — внутрішнім.

На основі дослідів можна стверджувати, що в стані термодинамічної рівноваги кожний внутрішній параметр однозначно визначається зовнішніми параметрами і температурою системи. Це є важливим узагальненим твердженням термодинаміки. Рівняння, що встановлює функціональний зв'язок між внутрішніми і зовнішніми параметрами системи в стані термодинамічної рівноваги, називають *узагальненим рівнянням* стану системи, або *калоричним рівнянням* стану. Незалежні змінні в рівняннях стану називають *ступенями вільності.* Рівняння стану можна подати графічно на діаграмах стану.

Термодинаміка вивчає також повільні або рівноважні процеси, які називають *квазістатичними*, або *квазірівноважними.* Це такі ідеалізовані процеси, що складаються з неперервної послідовності рівноважних станів. Довільну зміну стану системи називають *процесом.* Прикладом рівноважного процесу може бути зміна стану газу в циліндрі під поршнем, якщо на поверхню поршня класти по дрібненькій піщинці. При цьому зміна стану газу буде нескінченно повільною, і перехід від одного рівноважного стану до іншого після кожного покладання піщинки буде малопомітним, однак після покладання тисяч піщинок стан газу може змінитися на довільну скінченну величину і відповідно змінити параметри термодинамічної системи.

До квазірівноважних належать такі процеси: ізобарний (p = const), ізохорний (V = const), ізотермічній (T = const). Ці процеси на діаграмах стану графічно зображаються неперервними лініями: ізобарою, ізохорою, ізотермою.

Якщо параметри системи є функціями координат і часу, то ці стани є нерівноважними. У свою чергу послідовність нерівноважних станів складає нерівноважний процес. Природні процеси є суто нерівноважними.

Якщо термодинамічна система не взаємодіє з навколишнім середовищем, то її називають *ізольованою* (або *замкнутою*) *системою.* У противному разі її називають *відкритою.* Системи, що не обмінюються з іншими тілами речовиною, але обмінюються енергією, називають *закритими.* Системи, обмежені так званою адіабатною оболонкою, що виключає теплообмін із навколишнім середовищем, називають *теплоізольованими,* або *адіабатними.*

Термодинамічні системи також поділяють на гомогенні та гетерогенні. У гомогенних системах між довільними частинами немає поверхонь розділу, і властивості таких систем змінюються неперервно від точки до точки (наприклад, гази, суміші газів, розчини).

Гетерогенні системи складаються з кількох частин із різними властивостями, що розмежовані поверхнями розділу (наприклад, сукупність різних агрегатних станів речовини: лід — вода, вода — пара тощо, або різні кристалічні модифікації — сіре та біле олово тощо).

Частину гетерогенної системи, що обмежена поверхнею розділу і характеризується за відсутності зовнішніх силових полів у всіх своїх точках однаковими фізичними властивостями, називають *фазою.* Ці властивості, звичайно, не залежать від кількості речовини. Так, система лід — вода — пара складається з трьох фаз, число яких у цьому разі збігається з агрегатними станами речовини. Взагалі не можна ототожнювати агрегатні стани з фазами. Алмаз і графіт — це дві різні тверді фази тієї самої речовини — вуглецю. Є кілька різновидів льоду, тобто твердої води. Тверде залізо може існувати в чотирьох різних модифікаціях, а саме: α, β, γ, δ. У рідкому стані в рівновазі системи може перебувати кілька фаз (наприклад, вода і масло). Залежно від числа фаз гетерогенні системи називаються двофазними, трифазними і т. д.

Крім поняття фази для характеристики термодинамічної системи важливе значення має поняття компоненти. Компонентами називають різні хімічні складові частини (азот, кисень, вуглекислий газ тощо у повітрі) або незмінні структурні одиниці (атоми, іони, молекули), з яких складаються фази. Компонента — така складова частина, вміст якої не залежить від вмісту інших складових частин. Система з двома компонентами називається подвійною, з трьома — потрійною.

Класична термодинаміка будується на основі трьох фундаментальних законів, які є узагальненням багатьох спостережень та експериментів і які справджуються завжди, незалежно від природи тіл, що утворюють систему. Цим пояснюється універсальний характер законів термодинаміки і широкі можливості застосування термодинамічних співвідношень між фізичними величинами для описання досліджуваних систем. Термодинаміка не спирається на модельні уявлення про молекулярну структуру речовини, а будується на законах, які не доводяться теоретично, і в цьому розумінні термодинамічний метод є аксіоматичним.

Перший закон термодинаміки є законом збереження енергії для систем, суттєву роль в яких відіграють теплові процеси. Другий закон визначає напрям протікання термодинамічних процесів. Третій закон стверджує, що при наближенні до абсолютного нуля температур ентропія системи прямує до певного сталого кінцевого значення. Цю сталу величину можна прийняти рівною нулю. Закони термодинаміки не доводяться теоретично, а стверджуються на основі досвіду і підтверджуються дослідами.

§ 16.2. Перший закон термодинаміки

Перший закон термодинаміки — це узагальнений закон збереження й перетворення енергії для тих макроскопічних систем, для яких суттєву роль відіграє тепловий рух. Він встановлений у середині XIX ст., коли було виявлено, що теплота — це не речовина, а особливий внутрішній рух тіла.

Механіка розглядає два види енергії: кінетичну енергію макроскопічного руху й потенціальну енергію тіл у зовнішніх силових полях — або їхні взаємодії. На основі дослідів було доведено, що сумарна механічна енергія замкненої консервативної системи кількісно зберігається. Однак цей закон не справджується при наявності дисипативних сил, наприклад тертя. Дисипація (розсіяння) енергії фізичної системи — це перехід частини енергії упорядкованого процесу в енергію неупорядкованого процесу (енергію теплового руху частинок). При наявності цих сил сумарна механічна енергія зменшується. З часом експериментально було встановлено, що робота дисипативних сил пов'язана з виділенням теплоти, врахування якої приводить до поширення закону збереження енергії і на випадок наявності дисипативних сил. На основі молекулярно-кінетичної теорії порушення механічного закону збереження енергії пояснюється тим, що макроскопічна механіка не враховує внутрішніх рухів атомів і молекул та їхніх взаємодій. Цей рух безпосередньо пов'язаний із теплотою. Енергію, пов'язану з внутрішнім тепловим рухом, назвали *внутрішньою енергією*. Врахування внутрішньої енергії дало можливість розширити й узагальнити закон збереження енергії та сформулювати його як перший закон термодинаміки.

Зазначимо, що феноменологічна (формальна, аксіоматична) термодинаміка будується не на атомістичних уявленнях, а на загальних законах, які є узагальненням експериментальних результатів і досвіду. Розгляд цих законів і використання їх для розв'язування практичних задач становить основний зміст класичної термодинаміки.

Щоб сформулювати перший закон термодинаміки як закон збереження енергії в теплових процесах, розглянемо спочатку фізичний зміст таких термодинамічних величин, як внутрішня енергія, робота, кількість теплоти.

Внутрішня енергія. Довільна термодинамічна система складається з величезної кількості частинок, що рухаються і взаємодіють між собою, визначаючи її внутрішній стан. Енергію, що залежить від внутрішнього стану фізичної системи, називають внутрішньою енергією. У термодинаміці внутрішня енергія є однією з найважливіших величин, які характеризують рівноважний стан системи, і розглядається в загальному випадку як сума кінетичної енергії усіх видів руху частинок (молекули, атоми, електрони, протони, нейтрони тощо) та потенціальної енергії їхньої взаємодії. При цьому в поняття внутрішньої енергії не входить кінетична енергія руху системи як цілого і її потенціальна енергія в зовнішніх полях. Ці види енергії називають зовнішніми щодо термодинамічної системи.

Оскільки у термодинаміці і молекулярній фізиці в основному вивчають фізичні процеси, при яких не відбувається змін на атомарному і ядерному рівнях, то при розрахунках внутрішньої енергії не враховують внутрішньоатомну та внутрішньоядерну енергію. Під внутрішньою часто розуміють лише кінетичну енергію теплового руху молекул і атомів та потенціальну енергію їх взаємодії. Внутрішню енергію позначають U, а нескінченно малу зміну її — dU. Домовлено, що величина dU вважається додатною, якщо внутрішня енергія системи в термодинамічному процесі зростає, і від'ємною, якщо спадає.

Внутрішня енергія є однозначною функцією стану фізичної системи. Це означає, що даному рівноважному стану відповідає цілком визначена внутрішня енергія, яка є однозначною функцією незалежних параметрів, що визначають внутрішній стан системи. Якщо система переходить з рівноважного стану з внутрішньою енергією U_1 в інший рівноважний стан з енергією U_2, зміна енергії визначається різницею $\Delta U = U_2 - U_1$ і зовсім не залежить від проміжних станів у термодинамічному процесі. Коли в термодинамічному процесі система повертається у вихідний стан, то $U_2 = U_1$ і $\Delta U = 0$. Якщо рівноважний термодинамічний процес відбувається по довільному замкненому контуру L, то $\oint_L dU = 0$. Саме цей вираз є загальним математичним записом того, що внутрішня енергія є однозначною функцією стану

системи і не залежить від характеру процесу, який привів її в цей стан.

Якщо зовнішніх електромагнітних полів немає, то внутрішня енергія однорідної системи в рівноважному стані (а також протягом квазірівноважних процесів) є функцією її макроскопічного стану, тобто залежить від макроскопічних параметрів стану: $U = U(V, T)$, $U = U(p, V)$, $U = U(p, T)$. Функціональну залежність внутрішньої енергії від параметрів стану називають *калоричним рівнянням* стану. Для рідин і газів залежність внутрішньої енергії, наприклад, від об'єму V і температури T, означає, що ця енергія, з одного боку, зумовлена рухом частинок, тобто їхньою кінетичною енергією, яка є функцією T, і з іншого боку — взаємодією частинок між собою (зі зміною V змінюється концентрація частинок та відстані між ними, і в результаті змінюється потенціальна енергія взаємодії).

Внутрішня енергія має властивість адитивності, тобто внутрішня енергія складної системи дорівнює сумі внутрішніх енергій її макроскопічних частин. Властивість адитивності внутрішньої енергії записується рівністю

$$U = \sum_{i=1}^{n} U_i, \tag{16.1}$$

де U — внутрішня енергія системи тіл; U_i — внутрішня енергія i-го тіла. При цьому енергією можливої взаємодії підсистем нехтуємо.

Для ідеального газу, молекули якого не взаємодіють між собою, внутрішня енергія визначається лише кінетичною енергією руху частинок і, отже, не залежить від об'єму, а є функцією температури $U = U(T)$. Для одного моля одноатомного ідеального газу на основі рівності (14.10) внутрішня енергія

$$U = \frac{3}{2} kTN_A = \frac{3}{2} RT. \tag{16.2}$$

У молекулярній фізиці часто атоми розглядають як матеріальні точки. Положення точки в просторі визначається трьома координатами. Якщо в досліджуваній системі n матеріальних точок (атомів) не накладено ніяких зовнішніх зв'язків, які б могли обмежувати їхній рух, то для однозначного визначення положення всіх точок системи потрібно $3n$ координат. Число таких незалежних координат називають *кількістю ступенів вільності* й позначають i.

Частинки ідеального газу в рівноважному стані крім поступальних мають ще й внутрішні ступені вільності. Якщо такими частинками є атоми, то внутрішні ступені вільності обумовлені наявністю в атомах електронів. Якщо ж частинками газу є молекули, то в них крім електронних рухів можливі обертальні рухи молекул як цілого і коливальні рухи атомів у кожній із молекул. Поступальні, обертальні й

коливальні рухи частинок газу можна розглядати як рухи класичних тіл, що описуються законами класичної механіки, тоді як внутрішні рухи можуть мати квантовий характер, особливістю якого є стрибкоподібна зміна енергії, імпульсу тощо.

Щоб розрахувати внутрішню енергію ідеального газу, потрібно скористатися законом рівного розподілу енергії за класичними ступенями вільності (закон рівного розподілу Больцмана). Цей закон формулюється так: *у стані теплової рівноваги на кожний класичний ступінь вільності руху частинок системи припадає кінетична енергія, що дорівнює в середньому* $\frac{1}{2} kT$. Цей закон має статистичне обгрунтування та розглядається в теоретичній фізиці. Закон рівного розподілу порушується тоді, коли стає необхідним враховувати квантово-механічні закономірності. Якщо молекула має i ступенів вільності, то внутрішня енергія теплового руху одного моля молекул ідеального газу

$$U = \frac{i}{2} RT. \tag{16.3}$$

Для двох-, трьох- і багатоатомних молекул газів при певних температурах потрібно враховувати крім поступальних ще й обертальні та коливальні ступені вільності. Тоді

$$i = i_{\text{пост}} + i_{\text{оберт}} + i_{\text{колив}}. \tag{16.4}$$

На кожний обертальний ступінь вільності, як і на поступальний, припадає в середньому енергія, що дорівнює $\frac{1}{2} kT$. На кожний коливальний ступінь вільності припадає в середньому енергія, що дорівнює не $\frac{1}{2} kT$, а kT, тобто ця енергія удвічі більша і дорівнює сумі кінетичної $\left(\frac{1}{2} kT\right)$ та потенціальної $\left(\frac{1}{2} kT\right)$ енергій коливального руху. Для вільної матеріальної точки число ступенів вільності $i = 3$ (три ступені вільності поступального руху), для вільного твердого тіла $i = 6$ (три ступені вільності поступального і три ступені вільності обертального рухів).

Макроскопічна робота. Розглянемо газ у циліндричній посудині під невагомим і легко рухомим поршнем площею S (рис. 16.1). Газ, збільшуючи об'єм, виконує роботу проти сил, зумовлених зовнішнім тиском p. У випадку квазістатичного процесу внутрішній тиск газу завжди дорівнюватиме зовнішньому, і, отже, сила тиску $F = pS$. Елементарна робота $d'A$, виконана газом під час нескінченно малого квазістатичного розширення і переміщення поршня на відстань dx, у

результаті якого об'єм газу зростає на $dV = Sdx$ при $p = \text{const}$, визначатиметься за формулою

$$d'A = Fdx = pSdx = pdV. \qquad (16.5)$$

Зміна об'єму dV обирається достатньо малою, щоб тиск газу в процесі його розширення можна було вважати сталим. Знак "плюс" у рівності (16.5) відповідає умові, що робота, виконана зовнішніми силами над газом, є від'ємною, а робота, виконана самим газом при збільшенні його об'єму, — додатною. Суть полягає в тому, що в разі збільшення об'єму $dx > 0$, а в разі зменшення — $dx < 0$.

Вираз (16.5) справедливий для довільного квазістатичного процесу зміни об'єму термодинамічної системи, що перебуває під сталим зовнішнім тиском. Термодинамічною системою може бути довільна речовина (не тільки в газоподібному стані), обмежена певною поверхнею. Характерним для всіх цих процесів є те, що системі надається або від системи віднімається внутрішня енергія шляхом зміни певних макроскопічних параметрів (у виразі (16.5) змінювався об'єм V). Останнє зауваження є важливим тому, що загалом змінити енергію системи можна і без зміни зовнішніх параметрів, а, наприклад, шляхом теплопередачі, пропусканням електричного струму, опроміненням. Проте у цих випадках макроскопічна робота не виконується. Таким чином, можна стверджувати, що робота в термодинаміці — це макроскопічна міра зміни внутрішньої енергії системи у квазістатичних процесах.

Для обчислення повної роботи потрібно проінтегрувати вираз (16.5):

$$A = \int pdV. \qquad (16.6)$$

Обчислити інтеграл (16.6) можна тоді, коли відома залежність тиску p від об'єму V. На основі термічного рівняння стану відомо, що p залежить не тільки від V, а й від T: $p = p(V, T)$. Змінюючи температуру, можна квазістатично перевести систему з початкового стану в кінцевий багатьма способами. Кожному із цих способів буде відповідати своя залежність $p = p(V)$ і, отже, своє значення інтегралу (16.6). Таким чином, робота залежить від характеру процесу переходу системи з початкового в кінцевий стан, тобто вона не визначається однозначно параметрами початкового і кінцевого станів системи. У таких випадках говорять, що робота є функцією процесу, а не функцією стану системи. Це означає, що при переході системи з певного початкового стану в певний кінцевий стан значення виконаної роботи залежатиме від характеру процесу переходу і може набувати

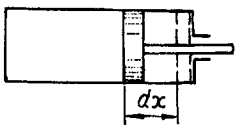


Рис. 16.1

довільних числових значень. Робота при різних процесах виражається різними формулами.

Найкраще в останніх твердженнях можна розібратися за допомогою графічного методу. Він грунтується на тому, що рівноважний стан термодинамічної системи можна однозначно охарактеризувати за допомогою двох параметрів, наприклад p і V (третій може бути визначений із рівняння стану). Отже, на координатній площині p, V рівноважний стан системи може бути зображений точкою (зображуюча точка), а квазістатичний процес — відповідним неперервним набором точок, тобто лінією. Таким способом зображені на графіках термодинамічні процеси називають *діаграмами станів* системи. Їх можна зображати у координатах p, V; p, T; V, T. На осі абсцис звичайно відкладають V або T, на осі ординат — p або V. Нерівноважні стани і нерівноважні процеси не можна зобразити точками або кривими на площині, оскільки такі стани і процеси не можна охарактеризувати двома параметрами, їх загалом завжди нескінченно багато (для кожної підсистеми значення параметрів p, V, T свої). Для визначення роботи у відповідному квазістатичному процесі найкраще користуватися діаграмою в координатах p, V.

На рис. 16.2 зображено два процеси AmB і AnB квазістатичного переходу системи зі стану A в стан B. Робота, виконана під час кожного із цих процесів, чисельно дорівнює площі фігури під кривою процесу. Як видно з рис. 16.2, ці площі різні, і, отже, різними є значення роботи. Таким чином, робота не визначається однозначно станами системи в кінцевих точках A і B, а значення її залежить від характеру процесу між цими кінцевими станами. Це означає, що робота не є функцією параметрів стану системи в точках A і B, а є функцією характеру процесу між цими точками. Із цього твердження випливає, що нескінченно мала (елементарна) робота системи не є повним диференціалом деякої функції стану, тому елементарну роботу позначають не dA, а $d'A$.

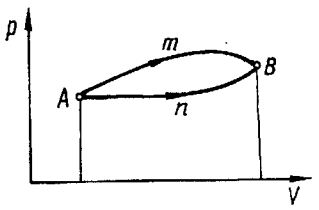


Рис. 16.2

Залежність роботи від ходу процесу і, отже, від довжини лінії, яку описує зображувальна точка в квазістатичному процесі на діаграмі стану системи, приводить до того, що для колового процесу, коли зображувальна точка (система) знову повертається у вихідний стан, робота системи може не дорівнювати нулю, що й використовується в усіх теплових двигунах.

Поняття роботи в техніці виникло порівняно недавно. У XVIII ст. це поняття було введене для характеристики роботи водопіднімальних машин. У 1803 р. французький вчений Л. Карно (1753—1823) дав чітке фізичне означення роботи як векторного добутку сили на пе-

реміщення, що використовується переважно в механіці. У 1824 р. поняття роботи було використане С. Карно для характеристики процесів перетворення теплоти і роботи.

Кількість теплоти. З дослідів відомо, що під час контакту двох тіл із різною температурою відбувається передача енергії від більш нагрітого тіла до менш нагрітого. У результаті встановлюється теплова рівновага. Процес передачі енергії від більш нагрітого тіла до менш нагрітого без виконання макроскопічної роботи називають *теплообміном,* а кількість переданої енергії — *кількістю теплоти* Q, що є кількісною мірою теплообміну. Кількість теплоти — це енергія у специфічній формі, у формі молекулярного руху. Теплообмін по своїй суті також обумовлений виконанням роботи певними зовнішніми силами. Однак це не є макроскопічною роботою, пов'язаною зі зміною макроскопічних параметрів. Під час теплообміну процеси відбуваються на мікроскопічному, молекулярному рівні, тому теплообмін часто називають мікроскопічною роботою, виконуваною молекулярними силами в процесі дії молекул зовнішнього середовища на молекули тіла. Наприклад, якщо розмістити тіло в гарячій рідині, передача енергії від рідини до тіла відбуватиметься внаслідок зіткнень більш енергетичних молекул рідини з молекулами тіла. Така мікроскопічна робота виконується в процесі проходження струму по провіднику, у разі опромінення тіла світлом від зовнішнього джерела, при нагріванні на полум'ї тощо.

Енергія у вигляді теплоти може забиратись або надаватись системі. Прийнято вважати кількість теплоти, що надається системі, додатною, а що забирається від системи — від'ємною.

Надана системі кількість тепоти Q, як і робота A, залежить від того, яким способом ця система переходить із початкового в кінцевий стан. Отже, кількість теплоти також є функцією процесу, а не функцією стану системи. Її числові значення будуть різними при переході системи з одного фіксованого стану в інший залежно від характеру процесу між цими станами. Тому нескінченно мала зміна кількості теплоти не є повним диференціалом, і її позначають $d'Q$. Кількість теплоти, як і роботу, вимірюють у джоулях (Дж). Кількість теплоти і робота мають ту спільну властивість, що вони є мірами процесів передачі енергії, а числове значення їх суттєво залежить від виду цих процесів. Проте між роботою і теплотою є принципова відмінність: робота — це макрофізична форма передачі енергії впорядкованого руху, а теплота — це сукупність мікрофізичних процесів передачі енергії.

Поняття кількості теплоти пов'язане з іншою термодинамічною величиною — теплоємністю. *Теплоємність* визначається відношенням кількості теплоти $d'Q$, яку дістало тіло при нескінченно малій зміні його стану в певному процесі, до зміни температури dT тіла:

$$C_0 = \frac{d'Q}{dT}. \tag{16.7}$$

Теплоємність хімічно однорідного тіла пропорційна його масі m, тобто

$$C_0 = mc, \tag{16.8}$$

де c — теплоємність одиниці маси, або питома теплоємність даного тіла. Молярна теплоємність C (теплоємність моля речовини) пов'язана з питомою теплоємністю c співвідношенням

$$C = Mc. \tag{16.9}$$

Позначимо молярні теплоємності при ізобарному процесі — C_p, при ізохорному — C_V, при ізотермічному — C_T, при адіабатному — $C_{ад}$.

Зважаючи на те, що елементарна кількість теплоти $d'Q$ є лінійним диференціалом, який залежить від виду процесу, теплоємність системи також повинна залежати від виду процесу, при якому відбувається теплообмін.

Перший закон термодинаміки. Змінити стан системи, тобто її параметри і, отже, внутрішню енергію можна двома способами: виконанням системою роботи проти зовнішніх сил (або виконанням роботи зовнішніми силами над системою) і наданням системі (або її відведенням) певної кількості теплоти. У загальному випадку перехід системи з одного стану в інший пов'язаний як з виконанням роботи (макроскопічний процес), так і з передачею певної кількості теплоти (мікроскопічний процес).

Закон збереження енергії, сформульований з урахуванням особливої форми передачі енергії у вигляді теплообміну, є фундаментальним законом фізики і називається першим законом термодинаміки. Цей закон встановлений у результаті широких експериментальних і теоретичних досліджень у галузі фізики, хімії, а також на основі досліджень факту еквівалентності теплоти і роботи. Він формулюється так: *у теплових процесах зміна внутрішньої енергії відбувається за рахунок приросту кількості теплоти і виконаної роботи.* Для нескінченно малих змін перший закон термодинаміки записують у такому вигляді:

$$dU = d'Q - d'A, \tag{16.10}$$

де dU — зміна внутрішньої енергії; $d'Q$ — кількість теплоти переданої системі; $d'A$ — робота, виконана над системою. Рівняння (16.10) — найбільш раціональна форма запису першого закону термодинаміки в диференціальній формі. Вона вказує на два можливих способи зміни внутрішньої енергії в теплових процесах.

Якщо процес відбувається без зміни кількості теплоти $d'Q$, то він називається адіабатним. Такі процеси завжди супроводжуються

зміною температури системи. Наприклад, у разі адіабатного розширення система виконує роботу за рахунок внутрішньої енергії, що супроводжується зменшенням швидкості теплового руху молекул і зниженням температури.

Оскільки у термодинаміці теплота відіграє особливу роль, то закон (16.10) доцільно переписати у вигляді

$$d'Q = dU + d'A. \tag{16.11}$$

Форма запису закону у вигляді (16.11) зручна, наприклад, для аналізу задач теплотехніки.

Інтегруючи вираз (16.11) між двома фіксованими станами термодинамічної системи, дістаємо рівняння першого закону в інтегральній формі

$$Q = (U_2 - U_1) + A_{12}. \tag{16.12}$$

Рівність (16.12) означає, що повна кількість теплоти Q, одержана системою, іде на приріст внутрішньої енергії $\Delta U = U_2 - U_1$ системи та на виконання роботи A_{12} проти зовнішніх сил. Для колових процесів (циклів), у яких кінцевий стан збігається з початковим,

$$Q = A, \tag{16.13}$$

тобто кількість теплоти, що дістає система за цикл, повністю йде на виконання еквівалентної роботи.

Перший закон термодинаміки полягає не просто в констатації збереження енергії, а й у фіксації взаємоперетворюваності різних видів енергії. Його ще формулюють так: *вічний двигун першого роду неможливий*, тобто неможливо побудувати машину, що діє періодично, яка виконувала б роботу без одержання енергії ззовні або виконувала б більшу роботу, ніж одержана ззовні енергія.

Перший закон термодинаміки з філософської точки зору є твердженням про нестворюваність і незнищуваність різних форм руху матерії та про їхню взаємоперетворюваність.

Як уже зазначалося, для простої однорідної системи внутрішня енергія є функцією двох незалежних параметрів T і V:

$$U = U(T, V). \tag{16.14}$$

Спеціальними дослідами (у межах їхньої точності) було встановлено, що внутрішня енергія газу практично не залежить від об'єму. Диференціюючи вираз (16.14), дістаємо

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV. \tag{16.15}$$

Оскільки $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0$, то

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT = C_V\, dT, \tag{16.16}$$

де $$C_V = \left(\frac{\partial' Q}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V.$$

Для ідеального газу $d'A = pdV$ і $dU = C_V\, dT$. Тому перший закон термодинаміки для одного моля запишеться так:

$$d'Q = C_V\, dT + pdV. \tag{16.17}$$

Для ізобарного процесу $pdV = RdT$. Тоді з рівняння (16.17) при $p = \text{const}$ дістаємо

$$d'Q = C_V\, dT + RdT. \tag{16.18}$$

Поділивши обидві частини рівності (16.18) на dT, дістанемо

$$\left(\frac{d'Q}{dT}\right)_p = C_p = C_V + R. \tag{16.19}$$

Рівняння (16.19) називають *рівнянням Майєра.* Із цього рівняння видно, що для одного моля ідеального газу $C_p > C_V$ на величину R. Це свідчить про те, що при ізобарному процесі кількість теплоти, яку дістає ідеальний газ, іде не тільки на збільшення внутрішньої енергії, а й на виконання роботи в процесі розширення газу.

§ 16.3. Адіабатний процес. Рівняння Пуассона

Серед рівноважних процесів важливу роль у теоретичному і практичному аспектах відіграє *адіабатний процес*, що відбувається без теплообміну з навколишнім середовищем. Розглянемо адіабатний процес з ідеальним газом. Адіабатне розширення або стискання газу можна здійснити, помістивши його в циліндр із нетеплопровідними стінками і поршнем і досить повільно переміщаючи поршень назовні або всередину циліндра. Стан системи при адіабатному процесі можна змінити тільки за допомогою зміни зовнішніх параметрів. Для цього процесу характерним є те, що газ увесь час залишається під зовнішнім тиском, який дорівнює пружності газу. Другою умовою адіабатного процесу є теплоізольованість газу від навколишнього середовища.

Перша умова може бути реалізована в разі достатньої повільності процесу, при якій встигає встановлюватися теплова рівновага, що

відповідає тому об'ємові, який у цей момент займає газ. Практично умова "достатньої повільності" порушується тільки при швидкостях руху поршня, близьких до швидкості звуку в газі. Тому при реалізації адіабатного процесу на практиці визначальною стає умова теплоізоляції, яка крім високих теплоізоляційних властивостей циліндра і поршня вимагає підвищеної швидкості процесу, що забезпечило б відсутність теплообміну з навколишнім середовищем. Реалізація адіабатного процесу повинна узгоджуватися з умовою "достатньої повільності" процесу. Для адіабатного процесу рівняння першого закону термодинаміки має вигляд

$$dU + d'A = 0. \tag{16.20}$$

Звідси $d'A = -dU$. Отже, система виконує роботу внаслідок зменшення внутрішньої енергії.

Для одного моля ідеального газу маємо

$$pdV = -C_V dT. \tag{16.21}$$

Звідси видно, що при адіабатному розширенні ідеального газу його температура зменшується, а при стисканні відповідно підвищується.

Для виведення рівняння адіабатного процесу перетворимо формулу (16.21), використавши рівняння Клапейрона $p = RT/V$. Тоді дістанемо

$$-C_V dT = RT\frac{dV}{V}, \text{ або } \frac{dT}{T} = -\frac{R}{C_V}\frac{dV}{V}. \tag{16.22}$$

Прийнявши C_V для відповідного інтервалу температур сталою величиною і проінтегрувавши рівняння (16.22), дістанемо

$$\int_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T} = -\frac{R}{C_V}\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V};\quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\frac{R}{C_V}}.$$

Оскільки $\frac{R}{C_V} = \frac{C_p}{C_V} - 1 = \gamma - 1$, де $R = C_p - C_V$ і $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$, то

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}. \tag{16.23}$$

Рівняння (16.23) називають рівнянням Пуассона. Комбінуючи його з рівнянням Клапейрона, дістанемо

$$pT^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = \text{const} \quad \text{і} \quad pV^{\gamma} = \text{const}, \tag{16.23а}$$

де $\gamma = C_p/C_V$ — показник адіабати, або коефіцієнт Пуассона.

При ізотермічному розширенні газу його тиск зменшується обернено пропорційно об'єму в першому степені. При адіабатному розширенні тиск зменшується обернено пропорційно V^{γ}. Хід адіабати крутіший порівняно з ізотермою (рис. 16.3). Це пояснюється фізично тим, що при адіабатному розширенні зменшення тиску зумовлене не тільки збільшенням його об'єму, а й зменшенням температури.

На основі адіабатного розширення газів можна пояснити зміну температури в атмосфері з висотою. Основною причиною цього є конвекційні потоки в тропосфері, які неперервно переміщують повітря з нижчих шарів у вищі та з вищих у нижчі. Коли повітря піднімається у верхні шари з низьким тиском, то воно розширяється. Це розширення можна вважати адіабатним через те, що повітря — поганий провідник тепла і тепло від навколишнього повітря досить погано передається повітрю, яке піднімається. Аналогічно повітря, що опускається в нижні шари з верхніх, адіабатно стискається і нагрівається. Адіабатні процеси відбуваються в двигунах внутрішнього згоряння. Адіабатне розширення — один із способів одержання низьких температур.

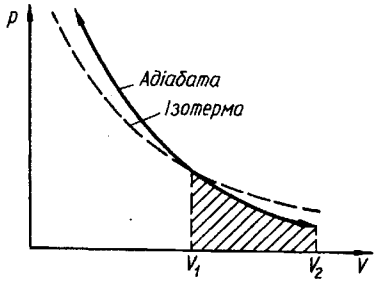


Рис. 16.3

Виведемо формули для розрахунку роботи при адіабатному процесі. З рівності (16.21) для маси m газу, молярна маса якого M, маємо

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV = -\frac{m}{M}C_V\int_{T_1}^{T_2} dT = \frac{m}{M}C_V(T_1 - T_2). \tag{16.24}$$

Оскільки $C_p = \gamma C_V$; $R = C_p - C_V = C_V(\gamma - 1)$; $C_V = \frac{R}{\gamma - 1}$, то

$$A = \frac{m}{M}\frac{R}{\gamma - 1}(T_1 - T_2) = \frac{m}{M}\frac{RT_1}{\gamma - 1}\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) =$$

$$= \frac{m}{M}\frac{RT_1}{\gamma - 1}\left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}\right). \tag{16.25}$$

Графічно роботу зображено на рис. 16.3 площею заштрихованої криволінійної трапеції.

Приклад 16.1. Визначити рівняння процесу, в якому бере участь один моль ідеального газу, якщо в цьому процесі молярна теплоємність C змінюється за законом $C = \beta T$, де β — стала величина.

Розв'язання. Рівняння першого закону термодинаміки можна записати так:

$$CdT = \beta TdT = C_V dT + pdV. \tag{1}$$

Враховуючи те, що $p = \frac{RT}{V}$, рівняння (1) набуває вигляду

$$(\beta T - C_V)\frac{dT}{T} = R\frac{dV}{V}. \qquad (2)$$

Після інтегрування виразу (2) в межах від T_1 до T_2 і від V_1 до V_2 дістаємо

$$\beta (T_2 - T_1) - C_V \ln T_2 + C_V \ln T_1 = R \ln V_2 - R \ln V_1,$$

або

$$-\beta T_1 + C_V \ln T_1 + R \ln V_1 = -\beta T_2 + C_V \ln T_2 + R \ln V_2.$$

Тоді можна записати рівняння стану

$$-\beta T + C_V \ln T + R \ln V = \text{const}.$$

Приклад 16.2. Довести, що закон Дальтона для суміші газів, які хімічно не взаємодіють, є наслідком закону збереження енергії.

Розв'язання. Користуючись рівнянням стану ідеального газу і співвідношенням $C_p - C_V = R$, вираз для внутрішньої енергії $U = C_V T$ можна подати у вигляді

$$U = \frac{pV}{\gamma - 1}\left(U = C_V T = C_V \frac{pV}{R} = \frac{pV}{\gamma - 1}\right). \qquad (1)$$

Внутрішня енергія суміші газів, що хімічно не реагують між собою, дорівнює сумі внутрішніх енергій окремих складових, тобто

$$U = U_1 + U_2 + \ldots + U_i = \frac{V}{\gamma - 1}(p_1 + p_2 + \ldots + p_i), \qquad (2)$$

де V — об'єм посудини; p_i — парціальний тиск відповідної компоненти.

Порівнюючи праві частини рівнянь (1) і (2), дістаємо

$$p = p_1 + p_2 + \ldots + p_i. \qquad (3)$$

Рівняння (3) виражає закон Дальтона.

§ 16.4. Робота ідеального газу при ізопроцесах. Політропний процес

Серед численних практичних застосувань термодинаміки (розрахунки теплових двигунів, холодильних машин і т. п.) найчастіше мають справу з ізопроцесами в газах. Розглянемо роботу, виконувану ідеальним газом в ізопроцесах. Ізопроцеси графічно зображують на термодинамічних діаграмах, в яких на осях координат відкладають значення термодинамічних параметрів або функцій стану. В усіх ізопроцесах вважатимемо, що маса газу m, а молекулярна маса M.

Ізохорний процес ($V = \text{const}$, $dV = 0$). Ізохорним процесом приблизно можна вважати нагрівання газу в герметичній товстостінній посудині (при цьому нехтуємо зміною об'єму посудини в процесі нагрівання).

Робота газу в ізохорному процесі дорівнює нулю:

$$d'A_V = pdV = 0, \quad A_V = 0. \qquad (16.26)$$

Тоді з рівняння першого закону термодинаміки маємо

$$d'Q = dU = \frac{m}{M} C_V dT; \qquad (16.27)$$

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{m}{M} C_V (T_2 - T_1). \qquad (16.28)$$

Ізобарний процес відбувається при сталому тиску системи ($p = \text{const}$). Газ, поміщений у циліндр із вільно рухомим поршнем, під час нагрівання ($dV > 0$ $1 \to 2$) або під час охолодження ($dV < 0$ $1 \to 3$) здійснює ізобарний процес (рис. 16.4). Прикладом ізобарного процесу може бути нагрівання води у відкритій посудині. При цьому тиск залишається сталим і дорівнює атмосферному тиску.

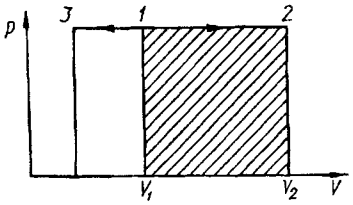


Рис. 16.4

Елементарна робота $d'A = pdV$ є повним диференціалом деякої функції. Оскільки $p = \text{const}$, то робота є однозначною функцією параметрів початкового і кінцевого станів системи (параметр V). Звідси

$$A_p = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV = p(V_2 - V_1).$$

Диференціюючи рівняння Менделєєва — Клапейрона при сталому тиску, дістаємо $pdV = \frac{m}{M} RdT$. Тоді

$$A_p = \frac{m}{M} R (T_2 - T_1). \qquad (16.29)$$

Кількість теплоти, якою газ обмінюється в ізобарному процесі при незалежності C_p від температури,

$$Q_p = \frac{m}{M}(C_V + R)(T_2 - T_1) = \frac{m}{M} C_p (T_2 - T_1). \qquad (16.30)$$

Кількість теплоти Q_p іде не тільки на збільшення внутрішньої енергії, а й на виконання роботи щодо розширення газу.

Ізотермічний процес. Для реалізації ізотермічного процесу треба забезпечити ідеальний тепловий контакт між газом та термостатом (тілом, що має сталу температуру). Ізотермічне стискання і конден-

сація пари здійснюється в конденсаторі парової машини. Ізотермічні процеси повинні відбуватися настільки повільно, щоб температуру в усіх точках системи в квазістатичному процесі можна було вважати однаковою і рівною температурі навколишнього середовища або термостату. Всі фазові перетворення першого роду (наприклад, кипіння чистої води у відкритій посудині) — ізотермічні процеси.

Оскільки $dU = 0$, то рівняння першого закону термодинаміки

$$d'Q = d'A. \tag{16.31}$$

Роботу A_T визначають так:

$$A_T = \int_{V_1}^{V_2} pdV = \frac{m}{M} RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \tag{16.32}$$

Перепишемо цей вираз ще так:

$$Q_T = A_T = \frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2} = p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = p_2 V_2 \ln \frac{V_2}{V_1}. \tag{16.33}$$

Усі описані вище процеси можна розглядати як окремі випадки більш загального політропного процесу.

Політропний процес. Це процес в ідеальному газі, що характеризується довільною сталою теплоємністю. Розглянемо політропний процес з ідеальним газом $C = \text{const}$. На основі першого закону термодинаміки та умови $d'Q = C\,dT$ маємо

$$CdT = C_V dT + pdV = C_V dT + RT \frac{dV}{V} = C_V dT + (C_p - C_V)\, T \frac{dV}{V}. \tag{16.34}$$

Розділивши змінні, дістанемо

$$\frac{dT}{T} + \frac{C_p - C_V}{C_V - C} \frac{dV}{V} = 0. \tag{16.35}$$

Після інтегрування виразу (16.35) маємо

$$TV^{\frac{C_p - C_V}{C_V - C}} = \text{const}. \tag{16.36}$$

Позначивши

$$\frac{C_p - C}{C_V - C} = n, \quad -\infty \le n \le +\infty, \tag{16.37}$$

дістанемо $\dfrac{C_p - C_V}{C_V - C} = n - 1$, і далі

$$TV^{n-1} = \text{const}. \tag{16.38}$$

Це рівняння є рівнянням політропи для ідеальних газів, де n — показник політропи.

Подібно до рівняння Пуассона на основі рівняння Менделєєва — Клапейрона можна дістати дві інші еквівалентні форми рівняння політропи

$$Tp^{\frac{1-n}{n}} = \text{const}, \tag{16.39}$$

$$pV^n = \text{const}. \tag{16.40}$$

Розглянемо деякі випадки політропного процесу.

Ізобарний процес ($C = C_p$, $n = 0$). З формул (16.38) і (16.39) маємо $p = \text{const}$; $V/T = \text{const}$ (закон Гей-Люссака).

Ізотермічний процес ($C = \pm\infty$; $n = 1$), $pV = \text{const}$ (закон Бойля — Маріотта).

Адіабатний процес ($C = 0$, $n = \gamma = C_p/C_V$), $TV^{\gamma-1} = \text{const}$, $pV^\gamma = \text{const}$ (рівняння Пуассона).

Ізохорний процес ($C = C_V$; $n \to \infty$). Тоді, підносячи вираз (16.39) до степеня $1/n$ і переходячи до змінних p, T, дістаємо

$$p/T = \text{const}. \tag{16.41}$$

Розглянуті процеси (ізотермічний, адіабатний, політропний, ізохорний та ізобарний) вважаються основними в термодинаміці. Рівняння ізотермічного, ізохорного та ізобарного процесів виводять безпосередньо з термічного рівняння стану (14.18). Рівняння адіабатного та політропного процесів не можна дістати, користуючись лише термічним рівнянням стану. Потрібно ще знати рівняння першого закону термодинаміки разом із калоричним рівнянням стану, тобто рівнянням, що виражає залежність однієї з калоричних величин — внутрішньої енергії — від основних параметрів системи. Калоричне рівняння стану має вигляд $U = U(T, V)$, зокрема для ідеального газу $U = C_V T + U_0$. З рівняння (16.37) маємо

$$C = \frac{nC_V - C_p}{n - 1}. \tag{16.42}$$

Звідси дістаємо, що додатним теплоємностям ($C > 0$) відповідають значення політропи в інтервалах $-\infty < n < 1$ і $\gamma < n < \infty$, а від'ємним теплоємностям ($C < 0$) — інтервал $1 < n < \gamma$. В останньому випадку система виконує роботу внаслідок поглинання теплоти і зменшення внутрішньої енергії ($d'Q > 0$ і одночасно $d'Q < d'A$, тоді $dT < 0$ і $C = \dfrac{d'Q}{dT} < 0$).

Політропні процеси використовуються в техніці, на них грунтується робота компресорних машин.

Теплоємність політропного процесу C може набувати найрізноманітніших значень від $+\infty$ до $-\infty$. Теплоємність C для кожного показника політропи можна визначити з формули (16.37). Якщо політропний процес подати в логарифмічних координатах $\lg p$, $\lg V$, то можна досить просто визначити показник політропи n. Логарифмуючи рівняння (16.40), маємо $\lg p + n \lg V = \text{const}$. Це рівняння прямої в координатах $\lg p$ і $\lg V$, а показник політропи n дорівнює тангенсу кута нахилу прямої до осі абсцис.

Приклад 16.3. Показати, що молярна теплоємність C політропного процесу, в якому бере участь маса m ідеального газу, не залежить від температури. Молярна маса газу M.

Розв'язання. Диференціюючи рівняння політропи $TV^{n-1} = \text{const}$, дістаємо

$$dV = -\frac{V}{T}\frac{dT}{n-1}.$$

Кількість теплоти, що надається газу, зміна його внутрішньої енергії та робота pdV відповідно дорівнюють

$$dQ = \frac{m}{M}CdT,\ dU = \frac{m}{M}C_V dT,\ pdV = -\frac{m}{M}R\frac{dT}{n-1},$$

де C_V — молярна теплоємність ізохорного процесу; Q — функція однієї змінної T.

Рівняння першого закону термодинаміки набуває вигляду

$$\frac{m}{M}CdT = \frac{m}{M}C_V dT - \frac{m}{M}R\frac{dT}{n-1}.$$

Тоді

$$C = C_V - R\frac{1}{n-1}.$$

Звідси видно, що молярна теплоємність політропного процесу не залежить від температури.

§ 16.5. Теплоємність ідеального газу

Внутрішня енергія ідеального газу дорівнює сумарній кінетичній енергії його молекул $U = W_к$, оскільки потенціальна енергія взаємодії молекул дорівнює нулю.

Застосуємо молекулярно-кінетичний (статистичний) метод дослідження до теорії теплоємності ідеального газу.

Розглянемо трьохатомну молекулу. Тут можуть бути два випадки.

1. Молекула лінійна, тобто всі три атоми розміщені на одній прямій, як, наприклад, у CO_2 (рис. 16.5); молекула нелінійна, тобто атоми не розміщені на одній прямій, як, наприклад, у H_2O (рис. 16.6). Лінійна симетрична трьохатомна молекула CO_2 має дев'ять ступенів вільності, а саме: три — поступального руху; два — обертального руху навколо двох осей, перпендикулярних до осі молекули; чотири — коливального руху. До них належать: ν_1 — симетричні коливання; ν_2 — деформаційні коливання однакової частоти, які реалізуються у двох взаємно перпендикулярних площинах (один із напрямів показано на рис. 16.5); ν_3 — несиметричні коливання. Середня енергія такої лінійної трьохатомної молекули

$$\langle w \rangle = 3\cdot\frac{1}{2}kT + 2\cdot\frac{1}{2}kT + 4kT = 6{,}5kT. \qquad (16.43)$$

2. Геометрія нелінійної трьохатомної молекули води така: молекула має рівнобедрену трикутну форму з відстанню O—H, що дорівнює $9{,}58\cdot10^{-11}$ м, причому обидва зв'язки O—H рівноцінні з валентним кутом H—O—H, який дорівнює 104°45′. Вона має дев'ять ступенів вільності: три — поступального руху, три — обертального і три — коливального. На рис. 16.6 зображено схему основних коливань молекули води. Середня енергія такої нелінійної трьохатомної молекули

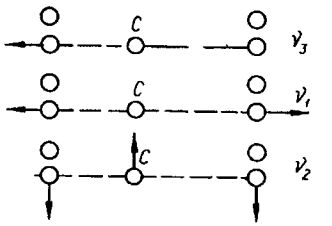


Рис. 16.5

$$\langle w \rangle = 3\cdot\frac{1}{2}kT + 3\cdot\frac{1}{2}kT + 3kT = 6kT. \qquad (16.44)$$

Порівнюючи вирази (16.43) і (16.44), доходимо висновку, що середня енергія трьохатомної молекули визначається геометрією їхньої

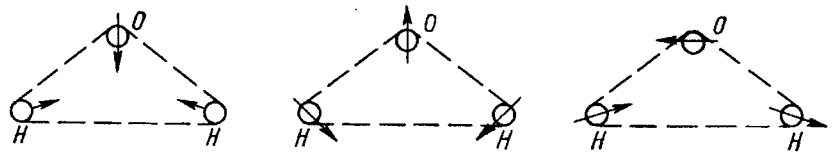


Рис. 16.6

структури через числа ступенів вільності обертального та коливального рухів.

Позначивши через r і s відповідно числа ступенів вільності обертального та коливального рухів, дістанемо загальний вираз для підрахунку $\langle w \rangle$:

$$\langle w \rangle = (3 + r + 2s)\frac{kT}{2}. \qquad (16.45)$$

Тоді внутрішня енергія U одного моля багатоатомного ідеального газу

$$U = <w>N_A = (3 + r + 2s)\frac{RT}{2}. \qquad (16.46)$$

Отже, внутрішня енергія ідеального газу є функцією тільки абсолютної температури.

Використовуючи наведені результати, можна визначити (на основі класичних уявлень) теплоємності газів.

Розглянемо випадки одно-, двох- та багатоатомних газів. Ідеться про так звану класичну теорію теплоємності газів.

До одноатомних газів ($i = 3$) належать інертні гази, пари металів, наприклад ртуті:

$$C_V = \frac{3}{2}R;\ C_p = C_V + R = \frac{5}{2}R.$$

Формула $C_V = \frac{3}{2}R$ має дослідне підтвердження. Прикладами двохатомних газів ($i = 5$; $r = 2$; випадок жорстких молекул $S = 0$) є водень, кисень, азот та ін.:

$$C_V = \frac{5}{2}R,\ C_p = \frac{7}{2}R.$$

Формула $C_V = \frac{5}{2}R$ має дослідне підтвердження лише в обмеженому інтервалі температур.

Багатоатомними газами ($i = 6$; випадок жорстких молекул $s = 0$) є пари води, спиртів, бензол, метан та ін.:

$$C_V = 3R,\ C_p = 4R.$$

Для малих тисків ($p \approx 1 \cdot 10^5$ Па і менших) і температур, близьких до кімнатних, теоретичні та дослідні результати для нескладних молекул непогано збігаються. Такі порівняння для складних молекул, наприклад C_2H_5OH, показують, що навіть за нормальних умов значення C_V дуже відрізняються. Наприклад, класична теорія теплоємності газів, що грунтується на законі про рівномірний розподіл енергії за ступенями вільності, для спирту C_2H_5OH дає $C_V = 3R$, а за дослідними даними $C_V \approx 8R$. Уявлення про пружні молекули (наявність ступенів вільності коливального руху) також не врятовує від розбіжностей. Для пружної молекули етилового спирту C_2H_5OH (кількість атомів $n = 9$) загальне число ступенів вільності буде $3n$ (положення кожного атома визначається трьома координатами). Тоді $3n = 3 + n + s$. Звідси

$$s = 3n - 3 - r.$$

Підставляючи це значення s в рівняння (16.46), дістаємо

$$C_V = (6n - 3 - r)\frac{R}{2}. \qquad (16.47)$$

Отже, у разі пружної моделі для молекул етилового спирту при $r = 3$ дістаємо

$$C_V = (6 \cdot 9 - 3 - 3)\frac{R}{2} = 24R.$$

Таким чином, обидва варіанти класичної теорії теплоємності газів (жорсткі та пружні молекули) дають незадовільні результати.

Другим недоліком класичної теорії теплоємності газів є те, що вона не описує температурної залежності теплоємностей.

Для одноатомних газів дослідні значення C_V досить близько збігаються з розрахунковими за формулою $C_V = \frac{3}{2}R$ і не залежать від температури, тобто є відповідність із класичною теорією теплоємності газів. Для двохатомних газів молярна теплоємність не завжди дорівнює $\frac{5}{2}R$. Якщо для них графічно зобразити дослідну залежність $C_V(T)$, то дістанемо криву, зображену на рис. 16.7. Крива $C_V(T)$ показує, що основне класичне значення $C_V = 2{,}5R$ справджується тільки для певного інтервалу температур. Отже, такий характер $C_V(T)$ свідчить про те, що для двохатомних молекул рівномірний розподіл енергії за ступенями вільності виконується не при довільних температурах. При $T < T_1$ значення C_V близькі до $1{,}5R$, тобто молекули двохатомних газів поводять себе так, ніби їм властиві лише ступені вільності поступального руху.

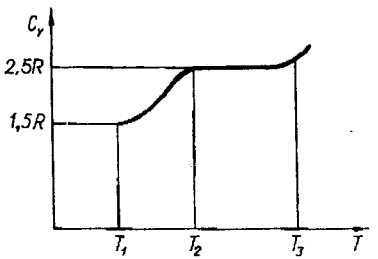


Рис. 16.7

При $T > T_3$ з'являються ступені вільності коливального руху. Це реалізується при досить високих температурах. Так, для молекул N_2, O_2, H_2 та інших ці температури становлять кілька тисяч градусів.

В області кімнатних температур теплоємність C_V двохатомних газів пов'язана лише з поступальними та обертальними рухами молекул і досить близька до теоретичного значення $C_V = \frac{5}{2}R$. При зменшенні

температури теплоємність C_V зменшується. Так, для водню і дейтерію досягається значення $C_V = 1{,}5R$; для інших газів це значення C_V не досягається, оскільки вони ще до цього зріджуються; водень при 60 К поводить себе як одноатомний газ.

Для пружних молекул двохатомного газу число ступенів вільності коливального руху $s = 3n - 3 - r = 3 \cdot 2 - 3 - 2 = 1$. Отже, максимальне теоретичне значення $C_V = \frac{7}{2} R$ не досягається, бо молекули газу дисоціюють на атоми.

Таким чином, розглянута класична теорія теплоємності ідеального газу, навіть при доповненні її уявленнями про поступове "включення" ступенів вільності обертального та коливального рухів, не дає задовільного пояснення температурної залежності C_V. Для багатоатомних молекул ця картина ще більш ускладнюється.

Причину такої розбіжності слід вбачати в тому, що класична теорія теплоємності не враховує повністю енергії, пов'язаної з внутрішніми рухами в молекулі, до яких не завжди застосовний закон рівномірного розподілу енергії за ступенями вільності.

Дальший розвиток цієї проблеми показав, що рухи молекул описуються квантовою теорією, яка грунтується на уявленнях про дискретність енергетичних рівнів молекули. Квантова теорія, основи якої закладені працями німецьких фізиків М. Планка (1858—1947) і А. Ейнштейна (1879—1955), дала змогу подолати труднощі класичної теорії теплоємності. Згідно з квантовою теорією енергії різних видів руху мають не неперервний (суцільний), а дискретний спектр значень, тобто всі види енергії квантуються. При цьому кванти (мінімальні порції) усіх видів енергії відрізняються за величиною. Для квантів цих видів енергії справедливе співвідношення

$$\varepsilon_{\text{пост}} \ll \varepsilon_{\text{оберт}} \ll \varepsilon_{\text{кол}}.$$

Отже, і характеристичні температури для цих видів руху, тобто температури, при яких "включаються" ступені вільності відповідного руху, повинні задовольнити такі самі нерівності:

$$T_{\text{пост}} \ll T_{\text{оберт}} \ll T_{\text{кол}}.$$

Для поступальних ступенів вільності $T_{\text{пост}} \to 0$, оскільки енергетичний спектр поступальних ступенів вільності практично неперервний. І, отже, квантовий розгляд не відрізняється від класичного.

Якщо температура підвищується, внаслідок зіткнень молекул починають збуджуватись ступені вільності обертального та коливального рухів. Середні енергії, що припадають на ступені вільності обертального ($w_{\text{оберт}}$) та коливального ($w_{\text{кол}}$) рухів, залежать від характеристик молекул, зокрема відповідно від моментів інерції та частоти коливань ν.

На теплоємність газів також впливає обертальний рух молекул. Для обертальних ступенів вільності енергетичний спектр жорсткого ротатора — двохатомної молекули, згідно з теорією квантової механіки, визначається за формулою

$$\langle w \rangle_{\text{оберт}} = \frac{h^2}{8\pi^2 I} l\,(l+1), \tag{16.48}$$

де h — стала Планка; I — момент інерції молекули; l — ціле число, що може набувати значень 0, 1, 2,... На один ступінь обертального руху припадає енергія

$$\frac{1}{2} kT_{\text{оберт}} = \langle w \rangle_{\text{оберт}} (l+1) - w_{\text{оберт}}(l) = \Delta w_{\text{оберт}}.$$

Звідси визначається характеристична температура для обертання молекул

$$\frac{1}{2} kT_{\text{оберт}} = \frac{h^2}{8\pi^2 I}, \quad T_{\text{оберт}} = \frac{h^2}{4\pi^2 kI}.$$

Відстані між рівнями енергії не однакові й збільшуються в арифметичній прогресії. При $l = 0$ (найменша енергія) обертання молекул не збуджені. При $l = 1$ енергія обертання

$$\langle w_1 \rangle = \frac{h^2}{4\pi^2 I}.$$

При $kT_{\text{оберт}} \ll \langle w_1 \rangle$ середньої теплової енергії молекули недостатньо для збудження обертання і, отже, при обчисленні теплоємності обертання може не враховуватись.

Значення температури $T_{\text{оберт}}$ (для деяких газів наведено нижче) для більшості газів, крім водню й дейтерію, становлять кілька кельвінів.

Газ	H_2	D_2	$N2$	O_2	HCl	HJ
$T_{\text{оберт}}$, К	85,4	43,0	2,85	2,07	15,1	9,0

Згідно з формулою (16.48) для здійснення обертального руху молекул потрібна енергія, яка обернено пропорційна моменту інерції молекули, а отже, і її масі. Наприклад, маса молекули N_2 у 14 разів більша від маси молекули H_2. Це і призводить до того, що молекули N_2 перестають обертатися при температурі значно нижчій, ніж температура молекули H_2. Підрахунки показують, що ця температура лежить нижче від температури зрідження азоту. Тому до цієї температури для молекул азоту наявні ступені вільності обертального

руху, і молярна теплоємність $C_V = 2{,}5R$. Моменти інерції одноатомних молекул дуже малі, а їхні кванти енергії великі, і тому такі обертання ніколи не відбуваються.

Для коливальних ступенів вільності енергетичний спектр лінійного осцилятора визначається формулою

$$\langle w \rangle_{\text{кол}} = h\nu \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{16.49}$$

де ν — частота коливань лінійного осцилятора.

Власні частоти коливань атомів у молекулах визначаються зі спектроскопічних даних (з інфрачервоних спектрів).

Відповідні значення $T_{\text{кол}}$ ($T_{\text{кол}} = h\nu/k$) для деяких газів наведено нижче.

Газ	H_2	N_2	O_2	CO	HCl	HJ
$T_{\text{кол}}$, K	6100	3340	2240	3070	4140	3200

Як видно, значення $T_{\text{кол}}$ становлять кілька тисяч кельвінів. Отже, класичних граничних значень коливальної теплоємності, як правило, не досягають навіть при відносно високих температурах. І тому під час розрахунків термодинамічних властивостей потрібно користуватись формулами, що випливають із квантової теорії.

Так, для малих температур $T \ll T_{\text{кол}}$ маємо

$$C_{V_{\text{кол}}} = R \left(\frac{T_{\text{кол}}}{T} \right)^2 e^{-\frac{T_{\text{кол}}}{T}}. \tag{16.50}$$

У граничному випадку, якщо $T \to 0$, то $C_{V_{\text{кол}}} \to 0$, оскільки $e^{-\frac{T_{\text{кол}}}{T}}$ зменшується швидше, ніж зростає $(T_{\text{кол}}/T)^2$.

Для високих температур $T \gg T_{\text{кол}}$ квантова теорія дає класичний результат $C_{V_{\text{кол}}} = R$.

Для проміжних температур, згідно з квантовою теорією,

$$C_{V_{\text{кол}}} = R \frac{\left(\frac{T_{\text{кол}}}{T} \right)^2 e^{-\frac{T_{\text{кол}}}{T}}}{\left(1 - e^{-\frac{T_{\text{кол}}}{T}} \right)^2}. \tag{16.51}$$

Знаючи характеристичні температури, можна передбачити характер залежності $C_V(T)$ для двохатомного газу. Очевидно, від $T = 0$ до $T_{\text{оберт}}$ значення C_V наближатиметься до $\frac{3}{2}R$, як і для одноатомного газу. Потім при переході через $T_{\text{оберт}}$ значення C_V збільшуватиметься до $\frac{5}{2}R$, як і для двохатомного газу (класичний результат). Після переходу через $T_{\text{кол}}$ значення C_V знову зростатиме, оскільки будуть "включатися" ступені вільності коливального руху. Такий характер залежності $C_V(T)$ для двохатомних газів підтверджується експериментально.

§ 16.6. Оборотні та необоротні процеси. Колові процеси (цикли). Цикл Карно та його коефіцієнт корисної дії

Класична термодинаміка розглядає рівноважні (квазістатичні) процеси, в умовах яких незначні зміни зовнішнього потенціалу, наприклад температури, достатні для зміни напряму процесу. Справді, якщо температура системи T, то при зміні температури навколишнього середовища від $T + \Delta T$ до $T - \Delta T$ ($\Delta T \to 0$) змінюється напрям процесу: замість одержання системою теплоти буде тепловіддача. Отже, квазістатичні процеси завжди оборотні. Це твердження випливає також із того, що при рівноважних процесах для довільного моменту часу градієнти всіх параметрів системи дорівнюють нулю. Таким чином, внаслідок симетрії всякий квазістатичний процес може бути оборотним у часі, тобто прямий і обернений процеси відбуваються через ті самі проміжні стани у протилежних напрямах.

Оборотним називають такий процес, при якому система, проведена в зворотному напрямі, повертається в початковий стан через ті самі проміжні стани, що й у прямому процесі, а стан тіл поза системою залишається незмінним. Оборотними процесами є всі рухи в механіці, що відбуваються без тертя, або електромагнітні без електричного опору. Прикладом оборотного процесу можуть бути незатухаючі коливання матеріальної точки, підвішеної на абсолютно пружній пружині у вакуумі.

Другу групу процесів становлять необоротні процеси. *Необоротний процес* — це процес, який не можна здійснити у зворотному напрямі без відповідних змін або в самій системі, або в тілах, що оточують її. Головною ознакою необоротного процесу є компенсація за перебіг у зворотному напрямі. Всі реальні процеси — необоротні. Вони відбуваються зі скінченною швидкістю. Отже, вони нерівноважні. Реальні процеси супроводяться тертям і дисипацією енергії, теплопровідністю при скінченній різниці температур, розширенням без виконання роботи. Типовими необоротними процесами є теплообмін при скінченних різницях температур, дифузія, розширення газу у вакуум, різні процеси з тертям і т. п. Дослідження необоротних процесів становить предмет спеціальної галузі науки — термодинаміки необоротних процесів.

Хоч усі реальні процеси і є необоротними, вивчення оборотних процесів має виняткове значення. Воно дає змогу встановити шляхи максимального наближення реальних необоротних процесів до ідеальних оборотних. Ступінь необоротності реальних процесів різний. Головною ознакою необоротності процесу слід вважати виникнення теплоти дисипації. Дисипативні процеси перетворення різних форм руху відбуваються тільки в одному напрямі, а саме: дана форма руху перетворюється в тепловий рух.

Отже, ступінь необоротності процесу можна кількісно охарактеризувати теплотою дисипації. Відносну роль ефекту дисипації оцінюють порівнянням еквівалентної роботи зовнішніх дій на систему і теплоти дисипації. Якщо ці величини сумірні, то процес, що відбувається, є необоротним. Якщо теплота дисипації дуже мала, то процес оборотний.

Поняття оборотних та необоротних процесів має значну теоретичну та практичну цінність для повноти розкриття змісту другого закону термодинаміки і явищ, пов'язаних із ним, для аналізу процесів перетворення теплоти в роботу за допомогою теплових машин.

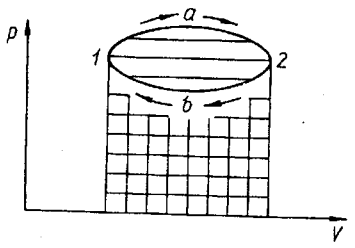


Рис. 16.8

У термодинаміці велике теоретичне значення має розгляд *колових* (замкнутих) *процесів* — циклів. *Циклом* називають термодинамічний процес, у результаті якого система повертається в початковий стан, тобто кінцевий та початковий стани збігаються. З практичної точки зору цикли цінні тим, що в результаті проведення їх здійснюється процес перетворення теплоти в роботу, тобто вони є основою роботи теплових машин. На рис. 16.8 зображено цикл (коловий процес *1a2b1*). Відомо, що робота розширення газу

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} pdV. \qquad (16.52)$$

Ця робота виконується системою (робочим тілом) внаслідок одержання ззовні теплоти. Зауважимо, що робота може виконуватися також у результаті зменшення внутрішньої енергії системи.

При однократному розширенні робочого тіла дістають тільки обмежене значення роботи. Так, під час довільного процесу розширення настане момент, коли тиск і температура робочого тіла та навколишнього середовища зрівняються. Для повторного одержання роботи потрібно стисканням робочого тіла повернути його в початковий стан. Цей процес потрібно здійснити шляхом, відмінним від процесу розширення. У противному разі сумарна робота такого циклу дорівнюватиме нулю. Процес стискання треба здійснювати при менших тисках порівняно з процесом розширення, бо лише в цьому разі робота циклу буде додатною ($A_{1a2b1} > 0$). Роботу циклу графічно інтерпретують на $p - V$-діаграмі. Вона чисельно дорівнює площі плоскої фігури *1a2b1*, що обмежує цикл. Горизонтальними лініями на рис. 16.8 показано фігуру, площа якої чисельно дорівнює роботі розширення, вертикальними — роботі стискання.

Повторюючи цикл необмежене число разів, можна одержати за рахунок теплоти, яку дістало ззовні робоче тіло, певну роботу. Розглянутий цикл, в якому частина підведеної теплоти перетворюється в роботу, а інша частина передається теплоприймачу (холодильнику), називають *прямим*. Прямим циклом є цикл теплової машини, в ньому робота розширення більша за роботу стискання.

Обернений цикл — цикл холодильної машини, в якому робота стискання більша за роботу розширення. В оберненому циклі теплота в результаті виконання роботи переходить від тіла з меншою температурою до тіла з більшою температурою.

Цикли бувають оборотними і необоротними. Оборотним є такий цикл, усі частини якого оборотні. Робоче тіло по закінченні циклу не зазнає ніяких змін. Необоротним є цикл, в якому хоч одна його частина необоротна.

Незважаючи на те що оборотні цикли нездійсненні, введення їх дає можливість: у багатьох випадках реальні процеси вважати досить близькими до оборотних; результати простіших досліджень оборотних циклів поширити на необоротні процеси реальних теплових машин, вводячи дослідні поправочні коефіцієнти; ступінь необоротності реальних процесів розглядати відносно ідеалізованих оборотних процесів.

У розвитку термодинаміки велике значення мало вивчення спеціального колового процесу — циклу Карно. На початку XIX ст. значний інтерес у загальній теорії теплових машин становили два питання. Чи існує границя послідовного удосконалення машин? Чи існують принципіальні переваги в різних робочих тілах, які використовуються в теплових машинах? Ці питання і хотів розв'язати С. Карно у своїй праці "Міркування про рушійну силу вогню та про машини, здатні розвивати цю силу".

Потрібно було пов'язати процеси переходу теплоти від одного тіла до іншого з перетворенням теплоти і встановити кількісні співвідношення між цими процесами. Це було зроблено за допомогою циклу Карно, який є оборотним. Він складається з двох адіабатних та двох ізотермічних процесів, і його може здійснювати довільне пружне робоче тіло.

Цикл Карно — це цикл ідеальної теплової машини. У ній немає втрат на теплопровідність, теплове випромінювання, тертя і т. д. Зауважимо, що цикл Карно крім практичного теплотехнічного значення

має також важливе значення для виведення кількісного формулювання другого закону термодинаміки.

Розглянемо оборотний прямий цикл Карно з ідеальним газом. При прямому циклі, який є схемою будь-якої теплової машини, що трансформує теплоту в роботу, зображувальна точка на термодинамічній діаграмі проходить проміжні стани робочого тіла за рухом годинникової стрілки. Нехай один моль ідеального газу знаходиться в циліндрі з рухомим невагомим поршнем. У процесі ізотермічного розширення *1—2* (рис. 16.9) газ перебуває в тепловому контакті з термостатом — нагрівником, що має сталу температуру T_1, від якого газу передається кількість теплоти Q_1 ($Q_1 > 0$).

У процесі адіабатного розширення *2—3* газ теплоізолюється. Циліндр з газом розміщується на адіабатній підставці. Температура газу знижується до T_2. Під час ізотермічного стискання *3—4* газ перебуває в тепловому контакті з термостатом — холодильником, що має сталу температуру T_2 ($T_2 < T_1$). Газ віддає холодильнику кількість теплоти Q_2 ($Q_2 < 0$).

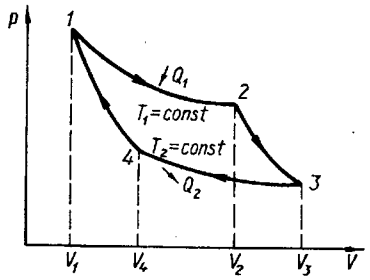


Рис. 16.9

У процесі адіабатного стискання *4—1* циліндр із газом знову теплоізолюється внаслідок розміщення його на адіабатній підставці. Температура газу при цьому підвищується.

За цикл до газу підводиться кількість теплоти Q_1 і передається холодильнику — Q_2. Термічний коефіцієнт корисної дії (ККД) циклу

$$\eta = \frac{A}{Q_1}, \text{ або } \eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}. \tag{16.53}$$

Корисна робота за цикл $A = Q_1 - Q_2$ ($\Delta U = 0$) дорівнює сумі робіт, виконуваних на окремих процесах циклу, а саме;

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41}, \tag{16.54}$$

$$A_{12} = RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = Q_1, \tag{16.55}$$

$$A_{23} = C_V (T_1 - T_2), \tag{16.56}$$

$$A_{34} = -RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4} = -Q_2, \tag{16.57}$$

$$A_{41} = C_V (T_2 - T_1). \tag{16.58}$$

Додаючи вирази (16.55) — (16.58), дістаємо

$$A = RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}. \tag{16.59}$$

Адіабатні процеси циклу не впливають на загальний результат, оскільки роботи на них однакові й протилежні за знаком. Тоді

$$\eta = \frac{T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - T_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}. \tag{16.60}$$

Стани *2* і *3* належать одній адіабаті, тому

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}. \tag{16.61}$$

Стани *1* і *4* також належать одній адіабаті, тому

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1}. \tag{16.62}$$

Поділивши вираз (16.61) на (16.62) і здобувши корінь степеня $\gamma - 1$, дістанемо умову замкнутості циклу:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}. \tag{16.63}$$

Отже,

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \tag{16.64}$$

Звідси випливає, що термічний ККД оборотного циклу Карно визначається тільки температурами нагрівника і холодильника. Термічний ККД циклу Карно завжди менший від одиниці, оскільки, щоб мати ККД, який дорівнює одиниці, необхідно, щоб $T \to \infty$ або $T_2 \to 0$, що нездійсненно.

Ефективність циклу Карно визначається різницею температур $\Delta T = T_1 - T_2$. При $\Delta T \to 0$ коефіцієнт $\eta \to 0$, і перетворення теплоти (теплової форми руху) в роботу (механічну форму руху) стає неможливим. Це означає, що для теплової машини обов'язковою є наявність двох термостатів — нагрівника і холодильника.

§ 16.7. Теплові машини

Тепловою називають машину, в якій відбувається взаємоперетворення теплової енергії і механічної роботи. За своїм призначенням теплові машини поділяються на три основних типи: теплові двигуни, теплові насоси та холодильні машини. *Тепловий двигун* трансформує теплоту в роботу. Робоче тіло здійснює прямий цикл, при відтворенні якого зображувальна точка проходить на термодинамічній діаграмі проміжні стани робочого тіла за годинниковою стрілкою. В теплових двигунах під час виконання роботи теплота від більш нагрітого тіла — нагрівника — через робоче тіло передається холоднішому тілу — холодильнику (рис. 16.10). Термічний ККД теплового двигуна є відношення роботи, яку дістали в результаті здійснення прямого оборотного циклу, до теплоти, підведеної до робочого тіла від нагрівника, тобто

$$\eta_T = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1}. \qquad (16.65)$$

Теплові насоси за рахунок виконуваної роботи та теплоти, що відбирається з середовища (з меншою температурою), нагрівають тіла, які мають вищу температуру. Йдеться про перетворення теплоти нижчого потенціалу з температурою T_2 в теплоту вищого потенціалу з температурою T_1 ($T_2 < T_1$) і про передачу її споживачеві. Теплові насоси можуть знайти широке застосування для потреб опалення тоді, коли є джерело теплоти з порівняно низькою температурою. Це, наприклад, вода, що утворюється після охолодження гідрогенераторів; вода в різних водоймищах; відпрацьована технічна водяна пара, а також "джерело" дешевої роботи. Робота теплового насоса

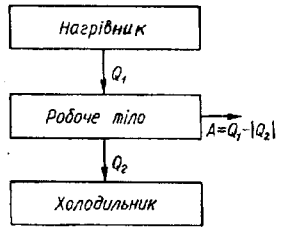


Рис. 16.10

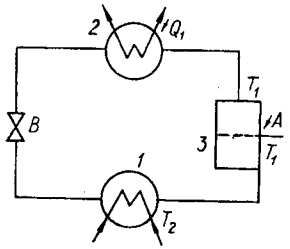


Рис. 16.11

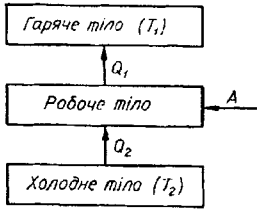


Рис. 16.12

полягає в тому, що за рахунок теплоти джерела з низькою температурою T_2 ($T_2 < T_1$) у випарник *1* (рис. 16.11) відбувається випаровування робочого тіла з низькою температутою кипіння (аміак, фреон). Утворена пара надходить до компресора *3*, в якому температура робочого тіла підвищується від T_2 до T_1. Внаслідок зовнішньої роботи A компресор здійснює стиснення робочої речовини. Потім утворена пара з температурою T_1 надходить у конденсатор *2*, де в процесі конденсації віддає теплоту рідині, що циркулює в опалювальній системі. Утворений конденсат робочого тіла надходить у дросельний вентиль B, в якому дроселюється з пониженням тиску від p_1 до p_2. Після дросельного вентиля робоче тіло у вигляді рідини знову потрапляє у випарник *1*.

Ефективність дії теплового насоса оцінюється коефіцієнтом перетворення

$$\varphi = \frac{Q_1}{A}. \qquad (16.66)$$

Якби тепловий насос працював за оберненим циклом Карно, то

$$\varphi = \frac{Q_1}{A} = \frac{T_1}{T_1 - T_2}. \qquad (16.67)$$

Холодильною називають машину, яка за рахунок зовнішньої роботи здійснює передачу теплоти від тіла з нижчою температурою T_2 до тіла з вищою температурою T_1. У холодильних машинах при виконанні зовнішньої роботи теплота від тіла, що охолоджується, передається в навколишнє середовище (рис. 16.12). Величина $A = Q_1 - |Q_2|$. Ефективність дії холодильної машини визначається холодильним коефіцієнтом, який вимірюється відношенням теплоти, відведеної в оборотному циклі від робочого тіла, до виконаної зовнішньої роботи:

$$\varepsilon = \frac{Q_2}{A}. \qquad (16.68)$$

Холодильні машини за типом робочих тіл поділяють на газові та парові.

§ 16.8. Другий закон термодинаміки. Теорема Карно. Поняття про ентропію. Характеристичні функції

Другий закон термодинаміки визначає напрям термодинамічних процесів та встановлює максимально можливі границі перетворення теплоти в роботу при колових процесах (циклах).

Ідеї другого закону термодинаміки вперше сформулював С. Карно у 1824 р. Незважаючи на хибні уявлення про природу теплоти, він дістав важливі результати, що мають фундаментальне значення і тепер. Він сформулював принцип, що максимальний термічний ККД теплової машини не залежить від робочої речовини і повністю визначається граничними температурами нагрівника і холодильника.

У 50-ті роки XIX ст. Р. Клаузіус і У. Томсон, розвиваючи ідеї С. Карно, показали, що його принцип не випливає з першого закону термодинаміки, а виражає другий закон термодинаміки. Вони запропонували два інших, еквівалентних, але трохи ширше сформульованих постулати, які й стали класичними формулюваннями другого закону термодинаміки. Другий закон термодинаміки, як і перший, є узагальненням дослідних даних.

Р. Клаузіус у 1850 р. дав таке формулювання другого закону термодинаміки: теплота не може сама собою переходити від менш нагрітого тіла до більш нагрітого. Звичайно, це формулювання Клаузіуса не слід розуміти просто як вираз. Він виражає принцип, згідно з яким виключається можливість теплопереносу з нижнього температурного рівня на вищий як єдиного результату сукупності можливих самовільних процесів без одночасної наявності певних змін у природі.

У 1851 р. англійський фізик У. Томсон (1824—1907) дав таке формулювання: не можна побудувати машину, що діє періодично, яка б неперервно перетворювала теплоту в роботу тільки внаслідок охолод-

ження одного тіла, без того, щоб у навколишніх тілах не відбулося одночасно певних залишкових змін. Вираз "машина, що діє періодично", слід розуміти так, що її робоче тіло здійснює цикли, отже, воно в результаті циклу не зазнає ніяких змін і не витрачає своєї енергії. Якби можна було побудувати таку теплову машину, то вона працювала б внаслідок охолодження атмосфери, земної кори, води морів і океанів, тобто за рахунок практично невичерпних джерел енергії.

Таку гіпотетичну теплову машину В. Оствальд (1853—1932) вдало назвав вічним двигуном другого роду на відміну від вічного двигуна першого роду, який працював би всупереч першому законові термодинаміки. І далі Оствальд запропонував таке коротке формулювання другого закону термодинаміки: вічний двигун другого роду неможливий.

С. Карно сформулював теорему, яка містить два твердження: коефіцієнт корисної дії оборотного циклу Карно не залежить від вибору робочого тіла і конструкції машини і дорівнює коефіцієнту корисної дії оборотного циклу Карно з ідеальним газом при тих самих граничних температурах; коефіцієнт корисної дії необоротного циклу завжди менший, ніж оборотного циклу Карно, в однакових температурних границях. Виходячи з теореми Карно, перейдемо від якісного до найпростішого кількісного формулювання другого закону термодинаміки.

Згідно з теоремою Карно

$$\eta \leq \eta_0, \tag{16.69}$$

де η — ККД теплової машини з довільним робочим тілом, яка працює за оборотним циклом Карно у випадку рівності (16.69) і за необоротним — у випадку нерівності (16.69); η_0 — ККД оборотного циклу Карно з ідеальним газом. Підстановка значень

$$\eta = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} \quad \text{та} \quad \eta_0 = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

в (16.69) дає

$$\frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} \leq \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \tag{16.70}$$

Це математичний вираз другого закону термодинаміки, його прийнято подавати у вигляді нерівності Клаузіуса через так звані зведені теплоти. *Зведеною теплотою* називають відношення кількості теплоти, якою обмінюється система (робоче тіло) з резервуаром теплоти, до абсолютної температури цього резервуара. Вважаючи $Q_2 < 0$, на основі (16.70) дістаємо

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0. \tag{16.71}$$

Отже, нерівність Клаузіуса можна сформулювати так: сума зведених теплот в оборотному циклі Карно дорівнює нулю, а в необоротному менша за нуль.

Вирази (16.70), (16.71) мають обмежений характер, бо вони стосуються лише циклів Карно.

Узагальнюючи нерівність Клаузіуса, поширюють її на довільні цикли. Це досягається тим, що довільний оборотний цикл можна подати у вигляді сукупності елементарних циклів Карно. Довільний оборотний цикл, який зображено на p—V-діаграмі замкнутим контуром L, сіткою ізотерм і адіабат розіб'ємо на систему елементарних циклів Карно (рис. 16.13). Вона повністю еквівалентна початковому довільному оборотному циклу. Справді, оскільки адіабати стискання і розширення нескінченно близькі одна до одної, то процеси контакту робочого тіла з нагрівниками і холодильниками можна вважати ізотермічними.

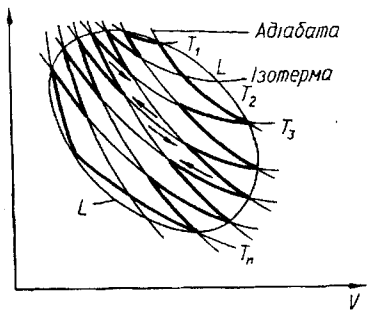


Рис. 16.13

Оскільки кожну з ізотерм та адіабат, за винятком крайніх, проводять двічі у протилежних напрямах, то сумарна робота циклу при заміні його елементарними циклами Карно залишається незмінною. Це приводить до такої рівності:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta Q_i}{T_i} = 0. \tag{16.72}$$

У граничному випадку, коли нескінченно зростає число циклів, а отже, і число резервуарів, з якими робоче тіло обмінюється теплотою, різниці температур між кожними двома сусідніми резервуарами прямують до нуля, тобто контур системи елементарних циклів Карно наближається до контура довільного циклу. У такому разі рівність (16.72) замінюється рівністю

$$\oint \frac{d'Q}{T} = 0. \tag{16.73}$$

Вводячи до розгляду необоротні цикли, відповідно до нерівності Клаузіуса (16.71) дістаємо

$$\oint \frac{d'Q}{T} \leq 0. \tag{16.74}$$

Формула (16.74) є узагальненням формулювання другого закону термодинаміки на довільний цикл.

Зазначимо, що в (16.74) для необоротних процесів температура означає не температуру робочого тіла, а температуру того резервуара, з яким воно обмінюється теплотою в даний момент.

З рівності нулю інтеграла (16.73) і незалежності його від контура інтегрування L на основі теореми математичного аналізу випливає, що підінтегральна функція у цьому виразі повинна бути повним диференціалом деякої однозначної функції стану системи. Позначаючи цю функцію S, матимемо

$$dS = \frac{d'Q}{T}. \tag{16.75}$$

Функцію S вперше ввів Р. Клаузіус у 1854 р. і назвав її *ентропією* системи*.

Формула (16.75) не зводиться до простого означення ентропії. Вона встановлює принцип існування ентропії як параметра, що характеризує стан системи. Насправді, $d'Q = TdS$. Цей вираз для елементарної кількості теплоти $d'Q$ має таку структуру, як і для елементарної роботи. В ньому T є інтенсивним параметром теплообміну (термічна узагальнена сила), а ентропія S — екстенсивним параметром теплообміну (узагальнена координата).

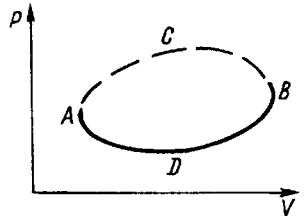


Рис. 16.14

Ентропія — функція стану системи, яка визначається тим, що її повний диференціал dS при елементарному оборотному процесі дорівнює відношенню нескінченно малої кількості теплоти $d'Q$, що її дістала система, до термодинамічної температури T системи.

Розглянемо властивості ентропії системи. Ентропія є функцією стану системи, тобто такою функцією, яка не залежить від шляху (процесу) оборотного переходу від одного стану в інший. Подібно до внутрішньої енергії ентропія є адитивною величиною, тобто ентропія системи в рівноважному стані дорівнює сумі ентропій підсистем. З формули (16.75) випливає, що ентропія визначається з точністю до адитивної сталої величини

$$S = S_0 + \int \frac{d'Q}{T}. \tag{16.76}$$

Узагальнимо формулу (16.75) для необоротних процесів. Нехай термодинамічна система переходить з початкового стану A в кінцевий стан B шляхом деякого необоротного процесу. Оскільки необоротний

* Ентропія (від грец. ἐν — в і τροπή — перетворення, зміна).

процес, строго кажучи, не може бути зображений графічно, його наводять штриховою лінією ACB, показуючи цим, що процес може протікати лише в прямому напрямі (рис. 16.14). Для визначення зміни ентропії, зумовленої цим переходом, припустимо, що система повертається у початковий стан шляхом оборотного процесу BDA. Весь цикл в цілому буде при цьому необоротним. Тоді

$$\oint \frac{d'Q}{T} = \int_{A(\text{необ})}^{B} \frac{d'Q}{T} + \int_{B(\text{об})}^{A} \frac{d'Q}{T} < 0, \tag{16.77}$$

звідки

$$\int_{A(\text{необ})}^{B} \frac{d'Q}{T} < -\int_{B(\text{об})}^{A} \frac{d'Q}{T} = \int_{A(\text{об})}^{B} \frac{d'Q}{T} = S_B - S_A. \tag{16.78}$$

Отже,

$$S_B - S_A > \int_{A(\text{необ})}^{B} \frac{d'Q}{T}. \tag{16.79}$$

Формула (16.79), яку ми перепишемо в стандартному вигляді

$$S_2 - S_1 > \int_1^2 \frac{d'Q}{T}, \tag{16.80}$$

— це загальне аналітичне вираження другого закону для необоротних процесів в інтегральній формі. Проте найбільш універсальною є диференціальна форма, яка безпосередньо придатна для всіх без винятку процесів. Її неважко дістати з інтегральної формули (16.80), застосувавши останню до випадку, коли кінцевий стан (2) є нескінченно близьким до початкового стану (1), що відразу дає

$$dS > \frac{d'Q}{T}. \tag{16.81}$$

Якщо система є замкненою, то вона повинна бути ізольованою і в тепловому відношенні, тобто адіабатною ($d'Q = 0$). Тоді формула (16.81) матиме вигляд

$$dS > 0. \tag{16.82}$$

Оскільки реальні процеси є взагалі необоротними, то з (16.82) випливає, що ентропія кожної замкненої системи в усіх реальних процесах в загальному випадку повинна зростати. Закон зростання ентропії виражає другий закон термодинаміки для необоротних процесів. Одночасно він характеризує ентропію як міру необоротності

процесів в ізольованій системі, а також відмічає об'єктивну сторону необоротних процесів. Цей закон пов'язаний з умовою, що $T > 0$.

Коли система перебуває в рівновазі і всі процеси в ній є оборотними, то на основі (16.73) маємо, що

$$dS = 0. \tag{16.83}$$

Таким чином, з (16.82) та (16.83) випливає, що ентропія замкненої системи не може зменшуватись; вона або зростає, якщо в системі відбуваються необоротні процеси, або залишається незмінною, коли система перебуває в рівновазі і всі процеси в ній є оборотними.

Поєднавши аналітичні вирази для першого та другого законів термодинаміки, дістаємо основне рівняння термодинаміки для рівноважних процесів. Для простої однорідної термодинамічної системи рівняння має вигляд

$$TdS = dU + pdV. \tag{16.84}$$

Для нерівноважних процесів це рівняння таке:

$$TdS > dU + pdV. \tag{16.85}$$

Термодинамічні дослідження фізичних явищ грунтуються на використанні законів термодинаміки. Саме застосування цих законів для розв'язування конкретних задач здійснюється двома способами. Відповідно з цим і розрізняють два методи термодинаміки: колових процесів (метод циклів) і характеристичних функцій (метод термодинамічних потенціалів). Метод характеристичних функцій розробив американський фізик-теоретик Д. Гіббс (1839—1903). Це аналітичний метод, що грунтується на використанні основного рівняння термодинаміки для рівноважних процесів.

Рівняння (16.84) пов'язує п'ять функцій стану: T, S, U, p і V. Стан простої системи визначається двома параметрами. Тому, вибираючи із п'яти названих величин дві як незалежні змінні, можна побудувати такі функції стану, на основі яких і їхніх похідних можна виразити термодинамічні властивості системи. Такі функції називають *характеристичними.* До них належать внутрішня енергія $U = U(S, V)$, ентальпія $I = I(S, p)$, вільна енергія $F = F(T, V)$, термодинамічний потенціал Гіббса $Z = Z(T, p)$. Наведемо їхні формули. Якщо незалежними параметрами простої однорідної системи є ентропія і тиск, то внутрішня енергія не буде характеристичною функцією. Характеристичною функцією за таких умов буде ентальпія, яку визначають за допомогою рівняння (16.84). Додавши у правій і лівій частинах (16.84) по $d(pV)$, дістанемо

$$dU + d(pV) = TdS - pdV + d(pV) = TdS + Vdp$$

або

$$dI = d(U + pV) = TdS + Vdp. \tag{16.86}$$

Функцію $I(S, p) = U + pV$ називають *ентальпією*, або *тепловою функцією.* Фізичний зміст ентальпії полягає в тому, що різниця її в двох станах дорівнює кількості теплоти, яку дістає система при ізобарному процесі.

Вільна енергія системи визначається такою комбінацією термодинамічних функцій:

$$F = U - TS. \tag{16.87}$$

Зменшення вільної енергії системи при ізотермічному процесі визначає виконувану нею в цьому процесі роботу.

Термодинамічний потенціал Гіббса визначається так:

$$Z = U - TS + pV. \tag{16.88}$$

§ 16.9. Термодинамічна шкала температур

Термодинамічна температурна шкала, яка є незалежною від вибору термометричного тіла, встановлюється на основі теореми і циклу Карно. Для ідеальної теплової машини $\eta = \eta_0$, тобто ККД оборотного циклу Карно не залежить від вибору робочого тіла та конструкції машини і дорівнює ККД оборотного циклу Карно з ідеальним газом при тих самих температурах нагрівника і холодильника. З цього випливає, що відношення кількості теплоти Q_1, одержаної робочим тілом від нагрівника, до кількості теплоти Q_2, відданої холодильнику, дорівнює відношенню температур нагрівника і холодильника

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}. \tag{16.89}$$

Співвідношення (16.89), справедливе для будь-якого робочого тіла (речовини), дає можливість скористатися машиною Карно для побудови своєрідного універсального термометра. Ця машина дає можливість за визначеними експериментально Q_1 і Q_2 знайти відношення T_1 до T_2, а не самі температури. Однак, скориставшись двома реперними точками, наприклад, T_2 — це нормальна температура плавлення льоду ($T_2 = T_{пл}$), а T_1 — нормальна температура кипіння води ($T_1 = T_{кип}$) і, прийнявши, що $T_{кип} - T_{пл} = 100$ К, можна вимірювати температуру довільного тіла T. Для цього довільне тіло з температурою T взяти як проміжне між нагрівником машини Карно з температурою T_1 і холодильником з температурою T_2. Приймемо, що тіло з температурою T — це, наприклад, холодильник іншої машини, для якої нагрівником також є тіло з температурою T_1. Тоді можна записати три рівняння

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}, \quad \frac{Q_1}{Q} = \frac{T_1}{T} \quad \text{і} \quad T_1 - T_2 = 100 \text{ K}.$$

З цих рівнянь, вимірявши експериментально Q_1, Q_2 і Q, можна розрахувати T.

Побічними вимірюваннями було знайдено, що за нормального тиску $T_{пл} = 273{,}15$ K, а $T_{кип} = 373{,}15$ K.

Можна скористатися однією реперною точкою, наприклад, замість T_2 взяти наперед визначену сталу температуру і за формулою (16.89) визначити температуру довільного тіла T_1. Згідно з рішенням X Генеральної конференції з мір і ваги (1954) такою реперною точкою беруть температуру потрійної точки води, якій приписують 273,16 K точно.

Виміряну за абсолютною термодинамічною температурною шкалою температуру називають *абсолютною термодинамічною температурою.* Вона не може бути від'ємною і найнижча абсолютна термодинамічна температура, згідно з другим законом термодинаміки, може бути лише $T = 0$. Вона називається *абсолютним нулем температур* і на осі температур лежить на 273,16 K нижче від потрійної точки води.

Ми розглянули спосіб побудови універсальної температурної шкали і побудову на основі оборотного циклу Карно своєрідного термометра. Однак практично ніхто таким способом температури не вимірює. Цим лише стверджується принципова можливість термодинамічної температурної шкали, а саму шкалу можна відтворити значно простіше, використавши речовину з добре відомими властивостями. Такою речовиною є, наприклад, ідеальний газ, для якого точно відоме рівняння стану. Доведено, що температура, виміряна за шкалою газового термометра, точно збігається з температурою, яка могла б бути виміряна проведенням досліду за циклом Карно з ідеальльним газом як робочою речовиною.

Приклад 16.4. Знайти зміну ентропії одного моля ідеального газу при адіабатному, ізотермічному, ізохорному і ізобарному процесах.

Розв'язання. Зміни ентропії системи для різних процесів визначаються через величини, які вимірюються безпосередньо на досліді.

Адіабатний процес ($d'Q = 0$). Для оборотного процесу маємо

$$dS = \frac{d'Q}{T} = 0. \tag{1}$$

Звідси $S = \text{const}$. Отже, оборотні адіабатні процеси є ізоентропійними.

Ізотермічний процес ($T = \text{const}$). Для оборотного ізотермічного процесу між двома станами *1* і *2* маємо

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \frac{1}{T}\int_1^2 d'Q = \frac{Q}{T}. \tag{2}$$

Ізохорний процес ($V = \text{const}$). При цьому $d'Q = C_V dT$, де C_V — молярна теплоємність. Для приросту молярної ентропії дістаємо ($C_V = \text{const}$)

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_V dT}{T} = C_V \ln \frac{T_2}{T_1}. \tag{3}$$

Ізобарний процес ($p = \text{const}$). При цьому $d'Q = C_p dT$. Для приросту молярної ентропії маємо ($C_p = \text{const}$)

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_p dT}{T} = C_p \ln \frac{T_2}{T_1}. \tag{4}$$

Виходячи з адитивності ентропії, формули (2) — (4) можна поширити з одного моля на всю систему, помноживши відповідні значення ΔS на число молів $\frac{m}{M}$ речовини в системі.

Приклад 16.5. Знайти формулу для обчислення зміни ентропії ΔS маси ідеального газу m, молярна маса якого M.

Розв'язання. Для будь-якого нескінченно малого квазістатичного процесу з ідеальним газом

$$d'Q = \frac{m}{M} C_V dT + p dV = \frac{m}{M} C_V(T)\, dT + \frac{m}{M} RT \frac{dV}{V}.$$

Тоді

$$dS = \frac{d'Q}{T} = \frac{m}{M} C_V(T) \frac{dT}{T} + \frac{m}{M} R \frac{dV}{V}. \tag{1}$$

Після інтегрування (1) дістаємо

$$\Delta S = \frac{m}{M} \int C_V(T) \frac{dT}{T} + \frac{m}{M} R \ln V. \tag{2}$$

Якщо теплоємність C_V не залежить від температури, то

$$\Delta S = \frac{m}{M} C_V \ln T + \frac{m}{M} R \ln V. \tag{3}$$

§ 16.10. Зв'язок ентропії з імовірністю стану системи

Другий закон термодинаміки дає можливість встановлювати напрям протікання реальних процесів. У цьому відношенні висновок про зростання ентропії ізольованої системи для необоротних процесів є надзвичайно важливим. З макроскопічної точки зору він фактично забороняє процеси зі зменшенням ентропії. Кінцевим результатом необоротних процесів є рівноважний стан з максимальним значенням ентропії. Разом з тим перехід до рівноважного стану є найбільш імовірним. Отже, між ентропією термодинамічної системи та ймовірністю її стану повинен бути певний функціональний зв'язок. Його встановлення базується на понятті термодинамічної ймовірності.

Термодинамічна ймовірність визначається числом способів реалізації даного стану макроскопічної фізичної системи. У рівноважному стані термодинамічна система характеризується цілком визначеними макроскопічними параметрами: тиском, температурою, густиною тощо. Набір цих параметрів визначає стан системи

в цілому, і його називають *макростаном*. Разом з тим при тих самих значеннях макроскопічних параметрів системи мікрочастинки, з яких вона складається, можуть перебувати в різних частинах об'єму і набувати різних значень енергії або імпульсу. Кожний стан термодинамічної системи, якому відповідає певний розподіл її частинок за координатами та енергіями або імпульсами (або квантовими станами) називають *мікростаном*. Термодинамічна ймовірність w дорівнює числу мікростанів, які приводять до реалізації даного макростану. На відміну від математичної ймовірності, яка завжди менша від одиниці, термодинамічна ймовірність виражається великими числами. Розподіл частинок за їх мікростанами називають *мікророзподілом*.

Число мікророзподілів n частинок, наприклад молекул ідеального газу, за N станами, тобто термодинамічна ймовірність виражається формулою

$$w = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_N!}, \tag{16.90}$$

де n_1, n_2, ... — число частинок у першому, другому і т. д. станах.

Наприклад, нехай у фіксованому об'ємі є дві молекули, які мають номери 1 і 2. Уявно розділимо об'єм на дві комірки. Тоді можливими будуть такі розміщення молекул у цих комірках, як на рис. 16.15. Розподіли *б* і *в* практично однакові. Отже, цей макророзподіл може реалізуватися трьома способами. Нехай тепер у даному об'ємі є шість молекул. Як і раніше, уявно розділимо об'єм на три комірки. Можливі варіанти розподілу молекул такі: а) у кожній комірці по дві молекули; б) у першій комірці — дві, у другій — три, у третій — одна; в) у перших двох комірках — по три молекули, у третій — жодної молекули; г) у перших двох комірках — жодної молекули, у третій — шість молекул і т.д. Імовірності цих розподілів відповідно $w_а = 90$; $w_б = 60$; $w_в = 20$; $w_г = 1$. З цього випливає, що рівномірний розподіл молекул по комірках (макророзподіл) може здійснюватися найбільшим числом способів мікророзподілів. Отже, рівномірний розподіл найбільш імовірний. Цей стан системи є рівноважним.

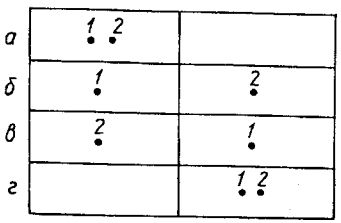


Рис. 16.15

Аналізуючи властивості ентропії та скориставшись статистичним методом аналізу термодинамічних процесів, Л. Больцман у 1886 р. сформулював принцип, який стверджує, що ентропія в загальному випадку повинна бути величиною, пропорційною логарифму термодинамічної ймовірності:

$$S = k \ln w, \tag{16.91}$$

де k — стала Больцмана.

Для системи, яка перебуває у термодинамічній рівновазі,

$$S = k \ln w_{\text{макс}}. \tag{16.92}$$

Зв'язок ентропії з термодинамічною ймовірністю розкриває більш глибокий зміст другого закону термодинаміки: довільний природний процес протікає в напрямі збільшення ймовірності стану. Оскільки найбільш імовірним є рівноважний стан, то можна стверджувати також, що ентропія — це міра наближення ізольованої системи до рівноважного стану, або міра невпорядкованості системи.

Збільшення ентропії в необоротних процесах означає, що енергія системи стає менш доступною для перетворення її в механічну роботу. В стані рівноваги енергія системи зовсім не може бути перетворена в роботу.

Висновок, що всякий самовільний процес протікає в напрямі збільшення ентропії не означає, що протилежний напрям його категорично заборонений, а означає лише, що перехід до рівноважного стану є більш імовірним, ніж самовільне віддалення від рівноважного стану. Отже, найбільш імовірною зміною ентропії є її збільшення, але допускається, хоча з малою ймовірністю, її зменшення. Прикладами процесів, які можуть протікати як в напрямі збільшення, так і в напрямі зменшення ентропії є флуктуації. Враховуючи ймовірнісний характер ентропії це не протирічить другому закону термодинаміки.

Досить важливим є питання про границі застосування другого закону термодинаміки. При цьому, звичайно, йдеться про нижню і верхню границі. Нижня границя обмежена тим, що термодинамічні методи застосовні лише до макроскопічних фізичних систем і не є застосовними до мікрочастинок або до невеликої кількості їх. Верхня границя також обмежується тим, що вкладається в поняття термодинамічної системи. Галактичні або метагалактичні системи, енергія взаємодії окремих частин яких співрозмірна з їхньою внутрішньою енергією, не є термодинамічними. У такому разі процеси зміни зазначених систем не будуть самовільними, надто великими будуть зовнішні впливи.

Поширення висновків з другого закону термодинаміки на Всесвіт привело до антинаукових висновків про "теплову смерть Всесвіту". Цей термін вперше ввів Р. Клаузіус, вказавши на те, що енергія світу залишається сталою, а ентропія прагне до максимуму. Це твердження означає, що Всесвіт повинен у майбутньому перейти в стан термоди-

намічної рівноваги, якому відповідатиме максимум ентропії, що рівноцінне припиненню всяких макроскопічних змін і, отже, "завмиранню" Всесвіту. Було висунуто різні гіпотези пояснення цього висновку, в тому числі "флуктуаційна гіпотеза" Больцмана. Однак виявилось, що на їх основі неможливо дати наукового тлумачення неправильності висновку Гельмгольца.

На сьогодні загальноприйнятим є твердження, що висновки з термодинаміки не можна поширювати на астрофізичні системи, тим більше на Всесвіт в цілому. Неправильний висновок про "теплову смерть Всесвіту" одержано саме в результаті некоректної екстраполяції другого закону на системи, які не можна вважати термодинамічними.

§ 16.11. Третій закон термодинаміки. Недосяжність абсолютного нуля температур

Відкриття третього закону термодинаміки пов'язане з задачею про визначення ентропійної сталої та її зв'язок з проблемою хімічної спорідненості. Як зазначалося, основним означенням ентропії є диференціальне рівняння (16.75), з якого випливає, що абсолютне значення ентропії може бути знайдене тільки з точністю до адитивної сталої, яка не може бути визначена на основі першого і другого законів термодинаміки. Оскільки в переважній більшості випадків фізичний інтерес становлять тільки зміни ентропії, то не було потреби для визначення її абсолютного значення. Проте нерідко трапляються і такі задачі, повне розв'язання яких неможливе без знання адитивної сталої ентропії. Це має місце в усіх випадках, коли змінюється хімічний склад досліджуваних систем. Тому розв'язання проблеми ентропійної сталої повинно мати виняткове теоретичне і практичне значення, розширюючи коло питань, які можна досліджувати методами термодинаміки.

Розв'язання цієї задачі в рамках феноменологічної термодинаміки можливе тільки на основі цілком відмінного від першого і другого законів постулату, який повинен становити узагальнення зовсім нових експериментальних даних. У 1906 р. німецький фізико-хімік В. Нернст (1864—1941) на основі існуючих дослідних даних дістав загальні висновки щодо поведінки ентропії конденсованих систем поблизу абсолютного нуля температур, що й привело до встановлення третього закону термодинаміки. Знайдені Нернстом закономірності стосувались низьких температур і тісно пов'язані з проблемою хімічної спорідненості.

Аналізуючи результати експериментальних досліджень поведінки речовин при низьких температурах, Нернст сформулював третій закон термодинаміки так: при наближенні температури до абсолютного нуля ентропія будь-якої рівноважної системи при ізотермічних процесах перестає залежати від термодинамічних параметрів стану і при $T \to 0$ набуває ту саму для всіх систем сталу величину, яку можна вважати такою, що дорівнює нулю. М. Планк припустив, що поблизу абсолютного нуля має місце не тільки незмінність ентропії в довільному ізотермічному процесі, а й що сама ентропія перетворюється в нуль при абсолютному нулі температур, тобто

$$\lim_{T \to 0} S = 0. \tag{16.93}$$

При цьому Планк поширив це твердження з випадку конденсованих систем, які тільки і розглядав Нернст, на довільні системи. Формула (16.93) — це найбільш загальне вираження третього закону термодинаміки.

З третього закону термодинаміки безпосередньо випливає положення про недосяжність абсолютного нуля температур. Це положення випливає з того факту, що всі фізичні методи одержання наднизьких температур грунтуються на застосуванні адіабатних процесів, які приводять до охолодження систем, що виконують ці процеси. Проте при наближенні до абсолютного нуля відмінність між адіабатними й ізотермічними процесами дедалі зменшується і в точці абсолютного нуля зовсім зникає. Таким чином, з наближенням до абсолютного нуля ефект адіабатного охолодження стає все меншим, поки зовсім не зникне. Отже, можна тільки асимптотично наближатися до абсолютного нуля, ніколи його не досягаючи.

Іноді третій закон термодинаміки формулюють як принцип недосяжності абсолютного нуля.

З третього закону термодинаміки також випливає, що при наближенні до абсолютного нуля теплоємності C_p і C_V всіх тіл прямують до нуля, тобто $\lim_{T \to 0} C_p = 0$, $\lim_{T \to 0} C_V = 0$. Цей результат не тільки був цілком підтверджений дослідом, але й знайшов статистичне обгрунтування для твердих тіл у квантовій теорії Ейнштейна, а також у теорії Дебая.

З третього закону термодинаміки також випливає, що при наближенні до абсолютного нуля термічні коефіцієнти теплового розширення та тиску перетворюються в нуль.

Згідно з молекулярно-кінетичним означенням температури вона пропорційна середній кінетичній енергії частинок. Тому для систем, внутрішня енергія яких визначається кінетичною енергією руху їх частинок, абсолютна температура може бути тільки додатною величиною.

§ 16.12. Елементи термодинаміки необоротних процесів

Класична термодинаміка, побудована на трьох законах, є теоретичною основою для кількісного розв'язання багатьох завдань рівноважних (оборотних) процесів методом циклів (колових процесів) та методом характеристичних функцій (методом термодинамічних по-

тенціалів). Однак усі реальні процеси є необоротними, і їх лише в першому наближенні можна вважати оборотними. Термодинаміка необоротних (нерівноважних) процесів останнім часом знаходить все більш широке використання в різних галузях сучасної науки: при дослідженні явищ переносу, фазових і хімічних перетворень, випромінювання, термодинамічних і термоелектричних явищ тощо. Задача термодинаміки необоротних процесів полягає у кількісному вивченні законів необоротних процесів без розкриття внутрішніх механізмів цих процесів. При цьому системи, в яких відбуваються необоротні процеси, розглядаються як неперервні середовища, а їх параметри стану — як неперервні функції координат і часу.

Термодинаміка необоротних процесів узагальнює поняття локальної рівноваги на нерівноважні процеси переносу таких субстанцій, як теплота, маса, імпульс та ін. Фізичною основою локальної рівноваги є встановлений дослідами факт збільшення часу релаксації зі збільшенням розмірів системи. Завжди окремі достатньо малі, але макроскопічні частини системи приходять у рівновагу значно швидше, ніж настає рівновага між цими малими частинами. За цих умов, якщо немає рівноваги системи в цілому, можна говорити про локальну рівновагу малих частин системи і характеризувати їх параметрами, які використовують у рівноважній термодинаміці: температура, тиск, внутрішня енергія, маса, ентропія тощо. Ці параметри загалом є функціями координат і часу.

До локально рівноважних частин системи застосовне основне рівняння термодинаміки для квазістатичних процесів

$$TdS = dU + d'A - \sum_i \mu_i dn_i, \tag{16.94}$$

де S, U, і A відносяться до одиниці об'єму (є густиною відповідної фізичної величини); μ_i — хімічний потенціал i-ї компоненти системи. Хімічний потенціал i-ї компоненти багатокомпонентної системи дорівнює частинній похідній від довільного з термодинамічних потенціалів за кількістю частинок dn_i цієї компоненти при сталих значеннях інших термодинамічних змінних, які визначають заданий термодинамічний потенціал.

Ентропія явно залежить лише від термодинамічних параметрів T, U, μ, а вже через них — від координат і часу.

До локально рівноважних систем застосовний закон адитивності ентропії: загальна зміна ентропії системи визначається сумою змін ентропії окремих малих макроскопічних частин.

Крім основного рівняння термодинаміки (16.94) в термодинаміці необоротних процесів використовуються ще такі два принципи. По-перше, при малих відхиленнях системи від термодинамічної рівноваги виникають потоки субстанцій j_i, величина яких лінійно залежить від термодинамічних сил X_i відповідних процесів:

$$j_i = \sum_{k=1}^{n} L_{ik} X_k \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n), \tag{16.95}$$

де індекс i означає тип потоку; індекс k означає тип рушійних сил; L_{ik} — кінетичні (феноменологічні) коефіцієнти, або коефіцієнти переносу. Їх ще називають коефіцієнтами Онсагера. У простих процесах термодинамічна сила X_k спричиняє відповідний потік j_k. Наприклад, для одномірної задачі градієнт температури спричиняє потік теплоти (теплопровідність)

$$j_q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}, \tag{16.96}$$

градієнт густини (концентрації) — потік маси (дифузію)

$$j_m = -D \frac{\partial \rho}{\partial x}, \tag{16.97}$$

градієнт швидкості — потік імпульсу (внутрішнє тертя, або вязкість)

$$j_k = -\eta \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{16.98}$$

Ці процеси характеризуються кінетичними коефіцієнтами, пропорційними відповідно коефіцієнтам теплопровідності λ, дифузії D, динамічної вязкості η.

Якщо $i \neq k$, то коефіцієнти L_{ik} пов'язують між собою різні потоки і сили. Наприклад, градієнт температури крім переносу теплоти може спричиняти перенос маси (речовини) у багатокомпонентних системах (термодифузію). Такі процеси називають *перехресними*, тобто такими що накладаються. Вони характеризуються кінетичними коефіцієнтами L_{ik} при $i \neq k$. По-друге, ці коефіцієнти пов'язані між собою так званими співвідношеннями взаємності Онсагера. Вони встановлюють, що при відповідному виборі потоків j_i і сил X_i матриця кінетичних коефіцієнтів є симетричною

$$L_{ik} = L_{ki} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n). \tag{16.99}$$

Ці співвідношення встановлюють зв'язок між двома явищами, які накладаються у стаціонарному стані (градієнт температури викликає градієнт густини, і навпаки, градієнт густини викликає градієнт температури). При наявності двох таких градієнтів система лінійних рівнянь Онсагера має вигляд

$$\begin{aligned} j_m &= L_{11} X_m + L_{12} X_q, \\ j_q &= L_{21} X_m + L_{22} X_q, \end{aligned} \tag{16.100}$$

тобто в системі крім прямих процесів переносу — дифузії $j_m = L_{11}X_m$ та теплопровідності $j_q = L_{22}X_q$ — мають місце також процеси термодифузії $j_m = L_{12}X_q$ та дифузійної теплопровідності $j_q = L_{21}X_m$.

Справедливість співвідношень (16.100) доводиться статистичною термодинамікою, яка є розділом статистичної фізики, присвяченим обгрунтуванню законів термодинаміки на основі статистичної механіки Гіббса та обчисленню термодинамічних характеристик фізичних систем на основі законів взаємодії частинок цих систем.

Відповідні потоки і сили знаходять з основного рівняння термодинаміки необоротних процесів для швидкості росту ентропії:

$$\frac{\partial S}{dt} = \sum_i j_i X_i, \qquad (16.101)$$

де j_i — i-та компонента потоку, що являє собою швидкість зміни параметрів стану; X_i — сили, або причини росту ентропії при зміні параметрів стану. Основним завданням теорії необоротних процесів є відшукання спряжених потоків j_i і сил X_i із рівняння (16.101) шляхом визначення $\frac{\partial S}{\partial t}$ і подальшого використання рівнянь (16.94) та (16.95).

Лінійний закон (16.95) і співвідношення взаємності Онсагера (16.99) знаходять своє обгрунтування у статистичній фізиці. У термодинаміці необоротних явищ їх розглядають як нові принципи, підтверджені дослідом.

Ми розглянули деякі питання термодинаміки необоротних процесів для однорідних (гомогенних) систем, що характеризуються незначним відхиленням від стану термодинамічної рівноваги. При цьому термодинамічні параметри можна було вважати неперервними функціями координат і часу. Однак існують нерівноважні системи, для яких термодинамічні параметри змінюються стрибком (гетерогенні системи), наприклад, дисперсні порошкові або пористі матеріали, для яких простір між твердими частинками або пори заповнені рідиною чи газом. У таких випадках виникають додаткові потоки, які приводять до виникнення на межі фаз різниці тисків, температур тощо.

Термодинаміка необоротних процесів разом з статистичною термодинамікою, які дають можливість розраховувати кінетичні коефіцієнти через параметри, що характеризують будову речовини, є теоретичною основою для дослідження багатьох нерівноважних явищ.

Розділ 17. Реальні гази

§ 17.1. Реальні гази та відхилення їхніх властивостей від законів ідеального газу. Сили міжмолекулярної взаємодії в газах

Реальними називають гази, для яких суттєву роль відіграють міжмолекулярні сили взаємодії. Ці сили на відстанях 10^{-9} і більше є силами притягання ($F < 0$), а на відстанях 10^{-10} і менше — силами відштовхування ($F > 0$).

Закони ідеального газу є наближеними, справедливими в межах прийнятої моделі (молекули газу є невзаємодіючими матеріальними точками). Відхилення поведінки реальних газів від ідеального має як кількісний, так і якісний характер. Кількісні відхилення полягають у тому, що для реальних газів лише наближено справджуються закони ідеального газу, у тому числі і закон Клапейрона $pV = RT$. Суть якісних відхилень у тому, що врахування сил міжмолекулярної взаємодії приводить до можливості переведення газів у рідкий і твердий стани, що є неможливим з точки зору моделі ідеального газу.

Закони ідеального газу справджуються експериментально лише при низьких тисках і порівняно високих температурах. Наприклад, за нормальних умов поведінка реальних газів мало відрізняється від поведінки ідеального газу. Однак з підвищенням тиску і зниженням температури такі відхилення стають все суттєвішими.

Причиною є те, що з підвищенням тиску все більше проявляється власний об'єм молекул. Дійсно, якщо прийняти радіус молекули $r = 10^{-10}$ м, то її об'єм буде $V_0 = \frac{4}{3}\pi r^3 = 4{,}19 \cdot 10^{-30}$ м^3. В 1 м^3 газу за нормальних умов міститься $2{,}7 \cdot 10^{25}$ молекул. Отже, сумарний об'єм молекул в 1 м^3 газу $V = 4{,}19 \cdot 10^{-30}$ м^3 $\cdot\ 2{,}7 \cdot 10^{25} = 1{,}1 \cdot 10^{-4}$ м^3, що становить близько 10^{-4} всього об'єму газу. При тиску $1{,}013 \cdot 10^7$ Па власний об'єм молекул становить 10^{-2}, а при тиску $1{,}013 \cdot 10^8$ Па -10^{-1} об'єму газу. В таких умовах не враховувати власний об'єм молекул означає допускатися значних розходжень розрахункових і експериментальних результатів.

Так само за нормальних умов відстані між молекулами становлять наближено 10^{-9} і взаємодії між молекулами малі (проявляються слабкі сили притягання). При зближенні молекул в результаті стиснення газу збільшується кількість їхніх зіткнень і, отже, збільшується тиск порівняно з розрахунковим за законом Бойля—Маріотта. Власний об'єм молекул і міжмолекулярна взаємодія є причиною розходжень експериментальних результатів досліджень від розрахованих на основі законів ідеального газу.

За звичайних умов, коли середня потенціальна енергія міжмолекулярної взаємодії набагато менша від середньої кінетичної енергії руху молекул, властивості реального і ідеального газів відрізняються мало.

Дослідні дані ізотермічного стиску реального газу подають у координатах pV, p (ізотерми Амага). Для ідеального газу ізотерми Амага були б прямими лініями, паралельними осі абсцис (pV = const при T = const). Ізотерми для вищих температур розміщуються вище. Насправді ізотерми Амага нічого спільного не мають з ізотермами ідеального газу, але для високих температур вони стають подібними між собою. Так, при температурі 127 К ізотерма Амага для водню практично збігається з ізотермою ідеального газу.

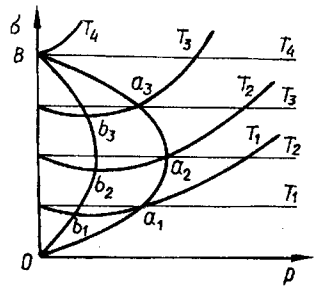


Рис. 17.1

Ізотерми стиску реальних газів зображують також у σ, p-координатах, де $\sigma = \frac{pV}{p_0V_0}$ — число Амага, pV і p_0V_0 — добутки тиску на об'єм відповідно для реального й ідеального газів (рис. 17.1). При малих тисках ізотерми реального та ідеального газів збігаються. З підвищенням тиску числа Амага зменшуються, досягаючи мінімуму, а потім монотонно зростають. На рисунку ізотерми ідеального газу показано тонкими лініями.

Крива, яка є геометричним місцем мінімумів ізотерм реального газу на σ — p-діаграмі, називається кривою Бойля ($Ob_1b_2b_3B$). Ізотерма $T_4 = T_B$ = const характеризується тим, що для неї точка мінімуму зливається з віссю ординат. Температуру T_B називають *температурою Бойля*, а точку B — *точкою Бойля*.

Зменшення числа Амага з ростом тиску показує, що при тій самій зміні тиску об'єм реального газу змінюється більше, ніж ідеального. Це, очевидно, свідчить про наявність притягання між молекулами газу, яке приводить до появи додаткового тиску. При дальшому підвищенні тиску число Амага зростає і для відповідних значень тиску реальні ізотерми перетинаються з ідеальними. Криву $Oa_1a_2a_3B$ називають *кривою збігу* властивостей реальних та ідеального газів. Зростання числа Амага на цьому інтервалі тисків свідчить про зменшення стисливості реальних газів порівняно з ідеальним. Це можна пояснити, якщо врахувати власний об'єм молекул. Звичайно, через скінченність розмірів молекул посередньо враховується і дія сил взаємного відштовхування між ними.

На близьких відстанях між молекулами переважає сила відштовхування F_1 (рис. 17.2), а на більш далеких — сила взаємного притягання F_2 ($F_1 > 0$, а $F_2 < 0$). Сили відштовхування і притягання мають відповідно такі залежності: $F_1 \sim 1/r^n$ ($n \geq 9 - 15$); $F_2 \sim 1/r^m$ ($m = 7$). Результуюча сила взаємодії $F = F_1 + F_2$. При $r = r_0$ $F = 0$. Для $r > r_0$ переважають сили притягання, а при $r < r_0$ — сили відштовхування. Таким чином, r_0 — рівноважна відстань між молекулами, на якій вони знаходилися б при відсутності теплового руху, що порушує цю рівновагу.

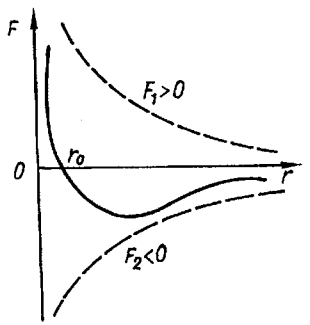


Рис. 17.2

Перші фізичні уявлення про природу міжмолекулярних сил висловив у 1894 р. російський фізик-експериментатор П.М. Лебедєв (1866—1912). Він вважав, що молекулярні сили зумовлені електродинамічними взаємодіями змінних електричних струмів у молекулах. Пізніше цю теорію розвинули нідерландський фізик В. Кеєзом (1876—1956), німецький фізик і хімік П. Дебай (1884—1966) і фізик-теоретик Ф. Лондон (1900—1954).

Порівняно слабкі сили притягання між молекулами реального газу на віддалях близько 10^{-9} називають вандерваальсовими силами. Розрізняють такі типи сил Ван дер Ваальса.

Дипольні орієнтаційні сили Кеєзома $F_{ор}$ пов'язані з наявністю у полярних молекул (H_2O, NH_3 та ін.) дипольних електричних моментів p_e. Природа цих сил — електростатична. Вони залежать від температури. Для них не характерна властивість адитивності. Звичайно, при взаємодії диполів відбувається і відштовхування, але в середньому притягання переважають. Орієнтаційні сили Кеєзома виражаються такою формулою:

$$F_{ор} = -\frac{4p_e}{kT}\frac{1}{r^7}, \qquad (17.1)$$

де r — відстань між центрами молекул.

Індукційні сили Дебая $F_{інд}$ зумовлені появою в полярних молекулах газу, які знаходяться в електричному полі інших молекул, додатково індукованого дипольного моменту внаслідок зміщення позитивних і негативних зарядів в об'ємі молекули. Їхня природа також електростатична. Сили Дебая неадитивні і виражаються так:

$$F_{інд} = -12\alpha p_e^2\frac{1}{r^7}, \qquad (17.2)$$

де α — поляризованість молекули.

Внесок сили $F_{\text{інд}}$ у загальну взаємодію молекул невеликий. Ці сили не залежать від температури, що пов'язується з ізотропністю молекул.

Дисперсійні сили Лондона $F_{\text{д}}$ відіграють основну роль у взаємодії неполярних молекул. Вони адитивні. Дисперсійні сили Лондона виражають формулою

$$F_{\text{д}} = -\frac{9}{2}\alpha^2 I \frac{1}{r^7}, \qquad (17.3)$$

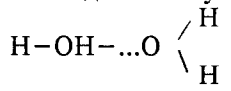
де I — перший потенціал іонізації атома або молекули.

Уявлення про походження цих сил при простому класичному трактуванні може бути таким. Внаслідок руху електронів на деякій скінченній відстані молекули виникає миттєвий диполь, який для електрично симетричної молекули в середньому дорівнює нулю. Проте цей миттєвий диполь індукує диполь у сусідній молекулі. Таку саму дію зумовлюють усі інші електрони. Взаємодії між миттєвими диполями близьких молекул і приводять до притягання їх (рис. 17.3). Дисперсійні сили діють на значних віддалях $r \gg d$ (d — розмір молекули). При $r = d$ суттєвою стає дія молекулярних сил відштовхування.

Рис. 17.3

Енергія взаємодії молекул одного моля речовини, зумовлена дією сил Ван дер Ваальса, становить $(0{,}4 - 4) \cdot 10^3$ Дж.

Між молекулами дуже полярних парів води, спиртів діють специфічні сили притягання, які пояснюються наявністю в складі цих молекул гідроксильних груп ОН. Йдеться про так званий водневий зв'язок. У молекулах води (Н-О-Н) ковалентно зв'язані з киснем атоми водню можуть взаємодіяти з атомами кисню сусідніх молекул



за рахунок неподілених пар електронів, утворюючи вторинний водневий зв'язок. Отже, поява водневого зв'язку реалізується при втраті атомом водню електрона і сильному притягуванні його електронегативним киснем. При цьому іон водню не відштовхується від електронної оболонки кисню, а, навпаки, притягуючись нею, вступає в кулонівську взаємодію.

§ 17.2. Рівняння Ван-дер-Ваальса

Відхилення поведінки реальних газів від законів ідеального газу одним із перших проаналізував нідерландський фізик Я. Ван-дер-Ваальс (1837—1923) у 1873 р. у праці "Про неперервність газоподібного і рідкого станів". Він врахував вплив молекулярних сил і, користуючись моделлю молекул як твердих пружних куль, вніс поправки до

рівняння стану ідеального газу (14.16). В результаті для одного моля газу рівняння стану набуло вигляду

$$\left(p + \frac{a}{V_M^2}\right)(V_M - b) = RT, \qquad (17.4)$$

де a і b — експериментальні константи, які визначають особливості реального газу порівняно з ідеальним; V_M — молярний об'єм. Вираз a/V_M^2 враховує притягання молекул внаслідок міжмолекулярної взаємодії, має розмірність тиску і називається *внутрішнім тиском* ($p_i = a/V_M^2$). Константа b є поправкою на власний об'єм молекул і враховує відштовхування їх на малих відстанях. Рівняння (17.4) є наближеним, встановленим для випадку $b \ll V_M$ і $a/V_M^2 \ll p$. Кількісно рівняння (17.4) задовільно визначає властивості реальних газів в області порівняно високих температур і низьких тисків p. Це обумовлено тим, що навіть для порівняно не дуже ущільнених газів величини a і b залежать від T. Однак якісно рівняння Ван-дер-Ваальса застосовне і для досить ущільнених газів, і, загалом, воно може бути використане для якісного аналізу поведінки газів в усій області зміни тисків і температур. Однак у цьому разі рівняння (17.4) слід сприймати як напівемпіричне і наближене, константи a і b визначаються не теоретично, а дослідно. Гази, поведінка яких повністю узгоджується з рівнянням Ван-дер-Ваальса, називають газами Ван-дер-Ваальса.

Розглянемо спрощені міркування щодо визначення поправок у рівнянні Ван-дер-Ваальса. Береться модель, у якій молекули газу уявляються як тверді пружні сфери радіуса r. Між ними реалізуються лише парні зіткнення. При взаємодії молекули можуть наблизитися одна до одної так, що відстань між їхніми центрами дорівнюватиме $2r$. Це означає, що об'єм сфери радіуса $2r$ є забороненим об'ємом для центрів усіх молекул, які стикаються з довільно обраною молекулою. Цей об'єм при парних зіткненнях двічі враховує кожну молекулу: один раз як ударну, другий — як таку, що зазнає удару. Тому в розрахунку на одну молекулу заборонений об'єм $V_0 = \frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi r^3 \cdot 8 = 4 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$. Для одного моля $b = N_A \cdot 4 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$ ($\text{м}^3/\text{моль}$). Стала b враховує власний об'єм молекул, який в чотири рази більший від сумарного об'єму молекул. При значних тисках поряд з подвійними зіткненнями відбуваються потрійні і більш складні зіткнення, тому величина b буде іншою.

Притягання між молекулами повинно привести до зменшення тиску газу на величину p_i, оскільки на кожну молекулу, що знаходиться біля стінки посудини, діятиме з боку інших молекул сила, напрямлена в об'єм посудини. Отже,

$$p = \frac{RT}{V_M - b} - p_i, \tag{17.5}$$

або

$$(p + p_i)(V_M - b) = RT. \tag{17.6}$$

Врахування сил притягання складніше, вони короткодіючі ($r \sim 10^{-9}$ м). У першому наближенні ці сили пропорційні n_0, тобто числу молекул в одиниці об'єму. Сам тиск також пропорційний n_0. Зважаючи на це, величина p_i пропорційна n_0^2, або обернено пропорційна об'єму. Отже, $p_i = a/V_M^2$, де a — стала, що характеризує сили молекулярного притягання в газі $\left(\frac{\text{Па} \cdot \text{м}^6}{\text{моль}^2}\right)$.

Тоді рівняння (17.6) набуває вигляду (17.4). Для газу масою m маємо

$$\left(p + \frac{m^2}{M^2}\frac{a}{V^2}\right)\left(V - \frac{m}{M}b\right) = \frac{m}{M}RT, \tag{17.7}$$

де $V_M = \frac{m}{M}V_M$ — об'єм газу масою m.

Приклад 17.1. У балоні об'ємом V при температурі T міститься маса газу m, молярна маса якого M. Балон протікає і через деякий проміжок часу маса газу в ньому зменшується на величину Δm. На скільки зміниться показання манометра, закріпленого на балоні? Газ вважати реальним.

Розв'язання. Об'єм газу в балоні V і його температура T весь час залишаються сталими. На початку витікання параметри газу пов'язані рівнянням стану

$$\left(p + \frac{m^2}{M^2}\frac{a}{V^2}\right)\left(V - \frac{m}{M}b\right) = \frac{m}{M}RT. \tag{1}$$

Після витікання $\Delta m/M$ молів газу показання манометра зменшиться на величину Δp, і рівняння матиме вигляд

$$\left(p - \Delta p + \left(\frac{m - \Delta m}{M}\right)^2 \frac{a}{V^2}\right)\left(V - \frac{m - \Delta m}{M}b\right) = \frac{m - \Delta m}{M}RT. \tag{2}$$

З рівностей (1) і (2) дістаємо

$$\Delta p = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{n^2 a}{V^2} + \frac{(n - \Delta n)^2 a}{V^2} - \frac{(n - \Delta n)RT}{V - (n - \Delta n)b}, \tag{3}$$

де $n = m/M$; $\Delta n = \Delta m/M$.

Якщо газ ідеальний ($a = b = 0$), то з виразу (3) маємо

$$\Delta p = \Delta nRT/V. \tag{4}$$

Вираз (4) можна дістати з рівняння стану ідеального газу.

§ 17.3. Ізотерми газу Ван-дер-Ваальса. Критичний стан речовини. Порівняння ізотерм газу Ван-дер-Ваальса з експериментальними ізотермами

Найбільш повні якісні результати з рівняння Ван-дер-Ваальса можна дістати шляхом аналізу його ізотерм, побудованих за формулою (17.4). Домножимо рівняння (17.4) на V_M^2 і після розкриття дужок для довільних температур T дістанемо

$$pV_M^3 - (bp + RT)V_M^2 + aV_M - ab = 0. \tag{17.8}$$

Рівняння (17.8) кубічне відносно молярного об'єму V_M. Це означає, що при заданих p і T об'єм V_M може набувати трьох різних значень. Коефіцієнти при V_M у рівнянні (17.8) дійсні, і, отже, це рівняння у розв'язку може мати або всі три корені дійсні і різні, або один дійсний, а два уявні. В окремому випадку може статися, що всі дійсні корені виявляються рівними між собою. Це особливий стан речовини, і ми його проаналізуємо нижче. Ізотерми газу Ван-дер-Ваальса зобразимо на діаграмі стану речовини в координатах p, V (рис. 17.4). Характерним на цьому рисунку є те, що при досить високих температурах (для всіх ізотерм вище точки K) довільна ізобара $p = \text{const}$ перетинає ізотерму в одній точці, і цій точці відповідає одне значення об'єму, що є дійсним коренем розв'язку рівняння (17.8). Усі ізотерми в цій частині діаграми мають вигляд монотонно спадаючих з ростом об'єму V гіпербол (наприклад, $T_3 = \text{const}$). Для ізотерм при нижчих, ніж у точці K, температурах довільній ізобарі $p = \text{const}$ відповідає три значення об'єму V_1, V_2, V_3 (наприклад, на рис. 17.4 для ізотерми $T_1 = \text{const}$). Ізобара $p_1 = \text{const}$ перетинає ізотерму в трьох точках b, d, f, і на цій ділянці ізотерма має хвилясту форму. Для одного моля речовини її стан у точці b такий, що відповідає найбільшому об'єму з трьох зазначених, тобто $V = V_3$. Відповідно при цьому об'ємі речовина має найменшу густину. Тому природно прийняти, що це газоподібний стан речовини. Стан речовини у точці f відповідає найменшому її об'єму $V = V_1$, і фактично при дальшому стисненні об'єм зовсім мало змінюється, а тиск різко зростає. Це властиво рідкому стану речовини. Тому можна стверджувати, що об'єм V_1 відповідає речовині в рідкому стані.

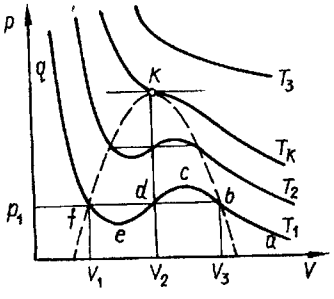


Рис. 17.4

Таким чином, загальний аналіз ізотерм на рис. 17.4 приводить до висновку, що рівняння Ван-дер-Ваальса описує не тільки газоподібний стан реального газу, а й перехід його від газоподібного стану до

рідкого. Це надзвичайно важливий якісний результат рівняння Ван-дер-Ваальса, який підтверджується експериментально.

З підвищенням температури (наприклад, T_2) горизонтальна ділянка хвилеподібної частини ізотерми, звужується, мінімум і максимум хвилі зменшуються. Нарешті, при деякій температурі $T_к$ ізотерма набуває точки перегину K, в якій всі три значення об'єму збігаються, що й відповідає трьом дійсним і рівним між собою кореням рівняння (17.8). Температура $T_к$, відповідна їй ізотерма, точка K називаються критичними. Для точки K тиск $p_к$ і об'єм $V_к$ також називаються критичними. При значеннях $p_к$, $V_к$, $T_к$ кажуть, що речовина знаходиться в критичному стані. Термін "критична температура" у 1869 р. ввів англійський фізик Т. Ендрюс (1813—1885) на основі досліджень зрідження газів.

Для визначення критичних параметрів $p_к$, $V_к$, $T_к$ будемо виходити з того, що для критичної точки рівняння (17.8) можна записати так:

$$p_к V_M^3 - (bp_к + RT_к)\, V_M^2 + aV_M - ab = 0. \qquad (17.9)$$

Оскільки для критичної точки всі три корені для V_M збігаються і дорівнюють $V_к$, то рівняння (17.9) є точним кубом і, отже, має зводитись до вигляду $p_к (V_M - V_к)^3 = 0$. Піднісши до кубу, дістанемо

$$p_к V_M^3 - 3p_к V_к V_M^2 + 3p_к V_к^2 V_M - p_к V_к^3 = 0. \qquad (17.10)$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях об'єму V_M в рівняннях (17.9) і (17.10), матимемо

$$p_к V_к^3 = ab, \quad 3p_к V_к^2 = a, \quad 3p_к V_к = bp_к + RT_к. \qquad (17.11)$$

Розв'язок системи рівнянь (17.11) дає можливість визначити $p_к$, $V_к$, $T_к$ через константи a і b:

$$p_к = \frac{a}{27b^2}, \quad V_к = 3b, \quad T_к = \frac{8a}{27Rb}. \qquad (17.12)$$

Приклад 17.2. Розрахувати критичні параметри $p_к$, $V_к$, $T_к$ на основі математичного аналізу рівняння Ван-дер-Ваальса.

Розв'язання. Запишемо рівняння Ван-дер-Ваальса для одного моля речовини у такому вигляді:

$$p = \frac{RT}{V_M - b} - \frac{a}{V_M^2}. \qquad (1)$$

Знайдемо значення об'єму на ізотермі Ван-дер-Ваальса, які відповідають мінімуму і максимуму. Для цього знайдемо першу похідну рівняння (1) і прирівняємо її до нуля:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = -\frac{RT}{(V_M - b)^2} + \frac{2a}{V_M^3} = \frac{2a}{(V_M - b)^2}\left(\frac{(V_M - b)^2}{V_M^3} - \frac{RT}{2a}\right). \qquad (2)$$

Похідна $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = 0$, якщо в рівності (2) дорівнюватиме нулю вираз у дужках, тобто

$$\frac{(V_M - b)^2}{V_M^3} - \frac{RT}{2a} = 0. \qquad (3)$$

Рівність (3) є рівнянням третього степеня по V_M, і, отже, це означає, що довільна ізобара $p = \text{const}$ перетинає відповідну ізотерму $T = \text{const}$ в точках, які відповідають трьом значенням об'єму V_M. Покажемо далі, що при певному значенні температури $T = T_к$ ізотерма Ван-дер-Ваальса має точку перегину, в якій мінімум і максимум ізотерми зливаються і друга похідна рівняння (1) дорівнює нулю. Знайдемо значення другої похідної для точок, в яких перша похідна дорівнює нулю. З рівняння (2) друга похідна від тиску p по об'єму V при $T = \text{const}$ буде

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_T = \frac{2RT}{(V_M - b)^3} - \frac{6a}{V_M^4}. \qquad (4)$$

Визначимо T з рівності (3) і підставимо у вираз (4):

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_T = \frac{2a\,(3b - V_M)}{V_M^4\,(V_M - b)}. \qquad (5)$$

Для рівняння (5) умова $\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_T = 0$ виконується при $V_M = 3b$, що відповідає критичному об'єму $V_к$. Підставимо $V_к = 3b$ в рівняння (3) і дістанемо

$$T_к = \frac{8a}{27Rb}. \qquad (6)$$

З рівняння (2) випливає, що при $T > T_к$ похідна $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T < 0$, оскільки при $T = T_к$ вираз у дужках правої частини рівняння (2) дорівнює нулю. З нерівності $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T < 0$ випливає, що при температурі, вищій від $T_к$, всі ізотерми — це криві, що спадають (гіперболи).

Якщо значення $V_к$ і $T_к$ підставимо в рівняння (1), то дістанемо вираз для критичного тиску

$$p_к = \frac{a}{27b^2}. \qquad (7)$$

Таким чином, математично з рівняння Ван-дер-Ваальса дістали формули (17.12) для критичних параметрів. Зазначимо, що в критичній точці стисливість речовини стає нескінченно великою. Дійсно, $\chi = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$. Оскільки $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = 0$, то $\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = \infty$, і, отже, $\chi = \infty$.

Фізика явищ, що пов'язані з поведінкою реальних газів, і поняття критичного стану речовини найкраще можуть бути встановлені і проаналізовані шляхом порівняння теоретичних ізотерм газу Ван-дер-Ваальса з відповідними експериментальними ізотермами.

Якщо стискувати достатньо розріджений газ, наприклад при сталій температурі $T_1 < T_к$, фіксуючи при цьому зміну тиску залежно від зміни об'єму, то на $p-V$-діаграмі зображувальна точка $p = f(V)$ буде переміщатися вздовж ізотерми, яку називають *експериментальною*. На рис. 17.5 під $p-V$-діаграмою зображено прозору трубку з реальним газом. Стиснення газу проводиться за допомогою поршня *П*, а тиск вимірюють манометром *М*. Вихідний стан газу зображено точкою *a*. На ділянці ізотерми *ab* залежність тиску від об'єму відповідає, в усякому разі якісно, закону Бойля — Маріотта. Отже, реальний газ поводить себе на цій ділянці як ідеальний. Починаючи з певної точки *b*, тиск у системі перестає підвищуватись, і крізь прозору стінку трубки починають спостерігатися крапельні рідини: однофазна система поділяється на дві співіснуючі в рівновазі фази — газоподібну і рідку. Ізотермічне стиснення двофазної системи проходить при сталому тиску, і ділянка експериментальної ізотерми зображається прямою лінією *bf*, паралельною осі абсцис. На ділянці стиснення *bf* густина речовини в газоподібному і рідкому станах не змінюється. У процесі стиснення маса речовини в газоподібному стані увесь час зменшується, в рідкому — збільшується, і в точці *f* досліджувана речовина повністю переходить у рідкий стан. Частина кривої *fq* фіксує різке збільшення тиску при незначному зменшенні об'єму речовини, що є характерним для рідкого стану (мала стисливість рідин).

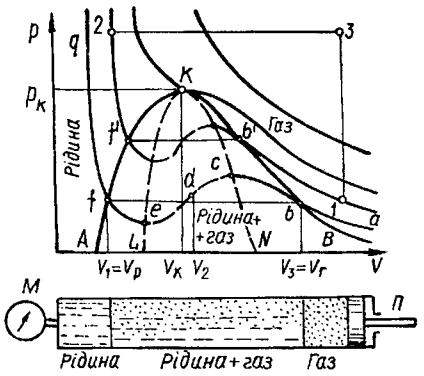


Рис. 17.5

Вперше експериментально такий хід ізотерм виявив нідерландський учений ван Марум (1750—1837). Він досліджував газ аміак. До тиску $7 \cdot 10^5$ Па об'єм аміаку зменшувався пропорційно тиску за законом Бойля — Маріотта. При значенні $7 \cdot 10^5$ Па тиск при подальшому зменшенні об'єму перестав змінюватись, і відбулося зрідження газоподібного аміаку. Пізніше проводилися чисельні досліди зі зрідження газів шляхом стиснення їх. В результаті виявилось, що не всі гази зріджувалися навіть при досить великих тисках. Причини були виявлені і пояснені після систематичних досліджень характеру ходу ізотерм при різних температурах для вуглекислоти CO_2. Досліди показали, що при температурі вищій від 31 °С ізотерми вуглекислоти мають гіперболічний характер, і вони подібні до ізотерм ідеального газу. При температурах нижчих ніж 31 °С експериментальні ізотерми мають горизонтальні ділянки, на яких у процесі зменшення об'єму вуглекислий газ конденсується при $p = \text{const}$. Так було встановлено, що підвищенням тиску можна зрідити газ лише тоді, коли його температура нижча від критичної.

Можна проводити обернений процес ізотермічного розширення. Якщо за вихідний стан речовини взяти рідкий при відповідних значеннях p і V, то в результаті ізотермічного збільшення об'єму тиск буде спадати, і зображувальна точка опише лінію *qf*. При дальшому ізотермічному розширенні з'являється газоподібна фаза речовини і розширення двофазної системи проходитиме при сталому тиску (горизонтальна лінія *fb*). У точці *b* вся речовина переходить у газоподібний стан, і подальше розширення йде по лінії *ba*, хід якої практично відповідає ходу теоретично розрахованої ізотерми газу Ван-дер-Ваальса. Отже, експериментальні і теоретичні ізотерми газу Ван-дер-Ваальса збігаються лише на ділянках ізотерми *qf* та *ba*, які відповідають однорідним станам речовини (відповідно рідкій і газоподібній).

Якщо створити спеціальні умови, то можуть бути дослідно відтворені також стани речовини, зображені на теоретичних ізотермах ділянками *bc* та *ef*. Газоподібні стани речовини на ділянці ізотерми *bc* називають *пересиченою парою* (вони можуть бути реалізовані, якщо немає центрів конденсації), а рідкі стани на ділянці *ef* — *перегрітою рідиною*. Ці стани речовини нестабільні, вони легко руйнуються і переходять відповідно в конденсований (рідкий) та газоподібний стани. Їх називають ще метастабільними станами.

Штрихова ділянка ізотерми *cde* відповідає абсолютно нестійкому стану речовини, який дослідно не може бути реалізований. Цей стан повинен характеризуватися зовсім незвичайними властивостями: зменшення об'єму повинно супроводжуватися також зменшенням тиску, чого в природі з речовинами в довільному стані не буває. Реально завжди виконується умова $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T < 0$ (збільшення тиску супроводжується зменшенням об'єму). Тому стани речовини, що відповідають ділянці ізотерми *cde*, можуть мати лише теоретичний інтерес.

На рис. 17.5 суцільна крива *AKB*, що сполучає горизонтальні ділянки експериментальних ізотерм, називається *бінодаллю*. Область площини $p-V$-діаграми, обмежена бінодаллю і ізобарою $p = 0$, відповідає двофазним станам речовини. У цій області речовина знаходиться в рівновазі у вигляді рідини та її насиченої пари. Область над бінодаллю відповідає однофазним станам речовини. У цих областях кожна точка відповідає стану фізично однорідної (гомогенної) речовини.

Лінія, що виділяє на $p-V$-діаграмі область нестабільних станів речовини, тобто сполучає точки мінімумів і максимумів теоретичних ізотерм Ван-дер-Ваальса та проходить через критичну точку, називається *спінодаллю* (штрихова лінія *LKN*).

Аналізуючи стан речовини (рис. 17.5), можна зробити ще один важливий висновок. Розглянемо стан газу, який зображено точкою *1* при температурі, нижчій від критичної. Стискаючись ізотермічно, газ у точці b' почне конденсуватися, і перетворення речовини з газоподібного стану в рідкий закінчиться у точці f'. Подальше стиснення по ізотермі $f'2$ не змінює фазового стану речовини, вона залишається у рідкому стані. Можна інакше перейти від стану *1* в стан *2*. Для цього газ нагрівають при сталому об'ємі так, щоб його температура і тиск стали більшими від критичних значень (лінія *1—3*). Потім ізобарно охолоджують газ до температури, нижчої за критичну (лінія *3—2*). Так речовина переводиться із газоподібного стану *1* в рідкий стан *2*. Важливо, що при такому переході речовина весь час залишається фізично однорідною, її властивості змінюються неперервно, точок фазових переходів немає. Отже, якщо крива переходу з одного однофазного стану в інший однофазний стан обминає область, обмежену бінодаллю (двофазну область), то ніяких стрибкоподібних фазових перетворень речовини з газоподібного стану в рідкий або навпаки спостерігатись не буде, речовина весь час буде гомогенною. При цьому відбуваються лише кількісні зміни, а не якісні. В цьому разі можна говорити про неперервність рідкого і газоподібного станів речовини.

Таким чином, теорія Ван-дер-Ваальса при всій її простоті якісно правильно описує поведінку речовини при її перетвореннях з газоподібного стану в рідкий, і навпаки. Ця теорія вперше внесла ясність у розуміння таких перетворень. Однак слід зазначити, що явища, пов'язані з фазовими перетвореннями, далекі від повного фізичного розуміння їх. Повної фізичної теорії, яка описувала б кількісні і якісні зміни при фазових перетвореннях речовини, немає.

§ 17.4. Порівняння даних рівняння Ван-дер-Ваальса з дослідними даними

Хоча, як зазначалося, рівняння Ван-дер-Ваальса вірно описує основні явища, що відбуваються з реальним газом при зміні його густини внаслідок зміни тиску і температури (навіть на його основі можна робити аналіз взаємних перетворень рідини і газу), все ж існують значні кількісні розходження теорії з дослідом.

Насамперед слід мати на увазі, що сталі a і b не є константами, які характеризують дану речовину. Вони залежать від температури. Тому спостерігаються деякі розходження між ізотермами дослідними і побудованими на основі рівняння Ван-дер-Ваальса.

Друге розходження пов'язане з критичними параметрами $p_к$, $V_к$, $T_к$. З рівностей (17.12) можна дістати співвідношення

$$K_к = \frac{RT_к}{p_к V_к} = \frac{8}{3} = 2{,}67,$$

яке називають *критичним коефіцієнтом*. Експериментальні результати вимірювання $K_к$ не збігаються з розрахованими. Наприклад, для водню $K_к$ дорівнює 3,12, для кисню — 4,41, для води — 4,46.

Критична температура, за Ван-дер-Ваальсом, пов'язана з температурою Бойля рівністю

$$T_в = \frac{27}{8} T_к = 3{,}375\, T_к.$$

Це співвідношення узгоджується з дослідом лише якісно. Числові ж коефіцієнти, за дослідом, для азоту — 2,4, водню — 3,3, гелію — 3,5. Також досліди показують, що більш точно виконується рівність не $V_к = 3b$, а $V_к = 2b$.

З наведених даних видно, що результати, отримані шляхом кількісних розрахунків на основі рівняння Ван-дер-Ваальса, в основному не збігаються з дослідними результатами і, таким чином, слід зробити висновок, що це рівняння є наближеним, придатним для оціночних розрахунків. Причина таких розбіжностей полягає в модельних припущеннях (молекули — тверді пружні кульки радіуса r, які на великих відстанях притягуються, а на малих відштовхуються) і в наближених розрахунках поправок рівняння Ван-дер-Ваальса. Це привело до численних спроб встановлення інших, більш точних, рівнянь стану реальних газів.

У подальшому для описання поведінки реальних газів було запропоновано багато різних варіантів рівнянь стану. Кращу збіжність результатів з дослідом дають ті рівняння, до яких вводиться більша кількість сталих, фізичний зміст яких не завжди достатньо ясний.

Для прикладу наведемо кілька таких рівнянь стану. Рівняння Дитерічі характерне тим, що воно додатково враховує вплив пристінного молекулярного шару на стан газу:

$$p\,(V_M - b) = RT \exp\left(-\frac{a}{RTV_M}\right), \qquad (17.13)$$

де V_M — молярний об'єм. При $b \ll V_M$ і $a \ll RTV_M$ рівняння Дитерічі переходить у рівняння Ван-дер-Ваальса.

Особливістю рівнянь Бертло і Клаузіуса є те, що вони чисто емпірично враховують залежність внутрішнього тиску газу від температури. Рівняння Бертло записується так:

$$\left(p + \frac{a}{TV_M^2}\right)(V_M - b) = RT. \qquad (17.14)$$

Відповідно рівняння Клаузіуса

$$\left(p + \frac{a}{T(V_M + c)^2}\right)(V_M - b) = RT. \qquad (17.15)$$

Константи a, b, c визначаються дослідно.

Найкращу збіжність з результатами дослідів дають рівняння, які описують відхилення стану реального газу від стану ідеального у вигляді розкладу в ряд за густиною газу ρ, або, що те саме, за степенями $1/V$:

$$pV_M = RT\left(1 + \frac{B_2(T)}{V_M} + \frac{B_3(T)}{V_M^2} + \ldots\right). \qquad (17.16)$$

Рівняння (17.16) називають рівнянням Камерлінг-Оннеса (або рівнянням Вукаловича—Новикова), а коефіцієнти $B_2(T)$, $B_3(T)$, ... — другим, третім і т. д. віріальними коефіцієнтами. Вони принципово можуть бути обчислені теоретично, хоча це досить складне завдання.

Рівняння Ван-дер-Ваальса можна представити у такому вигляді, коли його ізотерми не залежатимуть від індивідуальних властивостей речовини. Для цього за одиниці тиску, об'єму і температури беруть критичні значення цих величин. Тоді тиск, об'єм і температуру, виміряні в цих одиницях, називають *зведеними*. Їх можна записати так:

$$\pi = \frac{p}{p_к}, \quad \omega = \frac{V_M}{V_к}, \quad \theta = \frac{T}{T_к}. \qquad (17.17)$$

Підставляючі в рівняння (17.4) замість p, V_M і T відповідно $\pi p_к$, $\omega V_к$, $\theta T_к$ з (17.17) і $p_к$, $V_к$, $T_к$ з (17.12), після простих перетворень дістанемо зведене рівняння стану газу Ван-дер-Ваальса:

$$\left(\pi + \frac{3}{\omega^2}\right)(3\omega - 1) = 8\theta. \qquad (17.18)$$

Це рівняння є однаковим для всіх речовин, оскільки воно не містить сталих величин, які б характеризували індивідуальні властивості речовини. Це положення називається *законом відповідних станів*. Відповідними називають такі стани різних речовин, для яких π, ω і θ мають однакові значення. З цього закону випливає, що якщо для різних речовин із трьох параметрів π, ω і θ збігаються значення яких-небудь двох, то обов'язково збігатиметься і значення третього параметра, а це означатиме, що речовини знаходяться у відповідних станах. Речовини, які підпорядковуються закону відповідних станів, називають *термодинамічно подібними*.

§ 17.5. Властивості речовини у критичному стані. Визначення критичних параметрів

Досліджуючи поведінку різних рідин при нагріванні, було встановлено, що рідини в закритих скляних трубках при певних температурах практично втрачали опір рухові кварцової кульки, вміщеної в рідину. Виявилось, що ця властивість рідин настає тоді, коли зникає межа розділу між насиченою парою і рідиною. На цій основі було зроблено висновок, що кожна рідина при певній температурі може існувати лише в газоподібному стані. Д. І. Менделєєв досліджував залежність коефіцієнта поверхневого натягу рідин від температури і також помітив, що при деякій температурі коефіцієнт поверхневого натягу стає рівним нулю і при цій температурі рідина повністю перетворюється на пару. Цю температуру Д. І. Менделєєв назвав *температурою абсолютного кипіння*.

Т. Ендрюс для визначення критичних параметрів речовини користувався методом побудови ізотерм при різних температурах. Та температура, при якій горизонтальні ділянки експериментальних ізотерм стягуються в точку, або інакше, горизонтальна ділянка переходить у точку перегину ізотерми, приймалася як критична. Цей метод був досить громіздким і трудомістким.

Більшого поширення набув метод зникнення меніска. Цей метод було розроблено в Київському університеті видатним фізиком-експериментатором М. П. Авенаріусом. Він полягає в тому, що скляну ампулу заповнюють певною масою рідини при одночасній евакуації повітря і запаюють. Потім запаяну ампулу поміщають у повітряний термостат і поступово нагрівають. З підвищенням температури густина рідини зменшується, а пари над нею збільшуються. З наближенням температури до критичної меніск стає плоским, а потім при $T_к$ зникає. При наступному зменшенні температури спочатку видно конвекційні течії, а потім в ампулі з'являється помутніння і меніск. Момент помутніння і відповідає $T_к$. Біля критичного стану речовина має мутно-біле забарвлення через значне розсіяння світла в неоднорідному середовищі. Це явище називають *критичною опалесценцією*. Особливі труднощі виникають при визначенні $T_к$ непрозорих (дуже забарвлених) рідин або рідин, які роз'їдають скло. Для таких випадків О. І. Надеждін запропонував оригінальний спосіб на основі винайденого ним приладу — диференціального денсиметра.

Основною частиною приладу є наповнена досліджуваною рідиною (наполовину або трохи менше) скляна або металева трубка, яка є коромислом чутливих терезів. Коли в одній частині трубки концентрувалася рідина, а в іншій насичена пара, трубка перебувала в похилому положенні. Для досліду трубку поміщали в повітряний термостат і нагрівали. З досягненням $T_к$ трубка займала горизонтальне положення.

Дані, які дістав О. І. Надеждін, близькі до сучасних. Так, для води він дістав $T_к$ = 647,2 К, а за сучасними даними для води $T_к$ = 647,15 К.

Згідно з початковими класичними уявленнями при досягненні $T_к$ зникає меніск, густини рідини і пари стають однаковими. Насправді картина значно складніша. Б. Б. Голицин (1862—1916) вперше дійшов висновку, що виникнення меніска не є характерною ознакою критичного стану, або, інакше, вирівнювання показників заломлення відбувається неодночасно з вирівнюванням густини рідини і пари.

Російський фізик О. Г. Столєтов (1839—1896) звернув увагу на те, що ми неточно фіксуємо факт зникнення меніска внаслідок існування межі чутливості людського ока відносно неоднакових показників заломлення рідини і газу.

Бельгійський вчений М. Гуї ще в 1882 р. підійшов до цього питання інакше. Він звернув увагу на те, що для критичного стану стисливість $-\frac{1}{V}\left(\frac{dV}{dp}\right)_T \to \infty$, оскільки $\left(\frac{dp}{dV}\right)_T = 0$. А це повинно привести до так званого гравітаційного ефекту, тобто до того, що навіть незначні гравітаційні дії повинні спричинити неоднакову густину вздовж висоти ампули. Гравітаційний ефект експериментально виявлений порівняно недавно. Дослідження розподілу густини гептану за висотою проведено в Київському університеті О. З. Голиком та Є. Т. Шиманською.

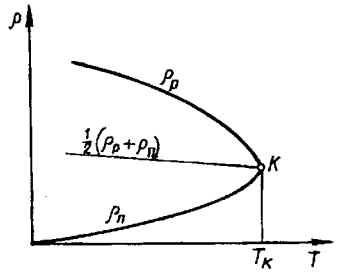


Рис. 17.6

Дослідження розподілу густини за висотою дають змогу підвищити точність вимірювань значень $p_к$, $\rho_к$ порівняно з стандартними вимірюваннями p, V, T.

Вимірювання величин $p_к$ і $T_к$ не становить значних експериментальних труднощів. Величина $V_к$, внаслідок нескінченно великої стисливості речовини в критичному стані, не піддається точному експериментальному вимірюванню. Визначити $V_к$ можна на основі правила "прямолінійного діаметра" (рис. 17.6). Дослідним шляхом показано, що точки на сукупних кривих $\rho(T)$ для рідини і пари, які відповідають півсумі густин рідини $\rho_р$ і пари $\rho_п$, що перебувають у рівновазі, розміщуються на прямій лінії. Тоді маємо

$$\frac{\rho_р + \rho_п}{2} = \rho_к + \alpha(T_к - T), \qquad (17.19)$$

де $\rho_к$ — густина речовини у критичному стані; T — температура речовини; α — коефіцієнт. Заздалегідь вимірявши $\rho_р$ і $\rho_п$ для температур, далеких від критичної, можна побудувати "діаметр" для даної речовини, якщо відома також $T_к$, виміряна, наприклад, за методом зникнення меніска. Точка перетину "прямолінійного діаметра" з перпендикуляром до осі температур у точці $T = T_к$ на діаграмі $\rho - T$ і відповідає значенню $\rho_к$. Знаючи $\rho_к$, визначають питомий або молярний об'єм $V_к$ для даної речовини. Зазначимо, що величини $\rho_к$ при цьому дещо завищені, бо при наближенні до критичної точки лінійність (17.19) порушується.

Критична ізотерма та бінодаль на $p-V$-діаграмі встановлюють області існування рідкого і газоподібного станів, а також область динамічно рівноважного стану рідина — насичена пара.

Після відкриття критичного стану з'явилася можливість прогнозувати дослідження зі зрідження будь-яких газів.

В околі критичної точки спостерігається різка зміна термодинамічних властивостей речовини. Незначна зміна тиску на ізотермах, близьких до критичної, приводить до значної зміни об'єму. Такі самі зміни спостерігаються для ентропії та ентальпії. При наближенні до критичної точки ізобарна теплоємність і стисливість прямують до нескінченності.

Відзначимо ще таку цікаву особливість речовини в критичному стані, як повільність встановлення рівноважного стану. Наприклад, для гептану рівноважний розподіл густини речовини за висотою в полі сили тяжіння при T = const встановлюється щонайменше протягом доби. При незначних змінах температури в околі критичної точки спостерігається гістерезис густини речовини при її нагріванні і охолодженні.

Приклад 17.3. Виразити критичні величини через константи α і β рівняння стану, яке запропонував Бертло і яке для одного моля реального газу має вигляд

$$\left(p + \frac{\alpha}{TV_M^2}\right)(V_M - \beta) = RT.$$

Розв'язання. Рівняння можна записати так:

$$V_M^3 - \left(\beta + \frac{RT}{p}\right)V_M^2 + \frac{\alpha}{pT}V_M - \frac{\alpha\beta}{pT} = 0.$$

Оскільки в критичному стані всі три корені рівняння однакові і дорівнюють молярному об'єму $V_к$, то

$$V_M^3 - 3V_к V_M^2 + 3V_к^2 V_M - V_к^3 = 0.$$

Коефіцієнти біля однакових степенів V_M тотожно дорівнюють один одному. Тоді

$$\left(\beta + \frac{RT_к}{p_к}\right) = 3V_к; \quad \frac{\alpha}{p_к T_к} = 3V_к^2; \quad \frac{\alpha\beta}{p_к T_к} = V_к^3.$$

Звідки

$$V_к = 3\beta; \quad p_к^2 = \frac{\alpha R}{216\beta^2}; \quad T_к^2 = \frac{8\alpha}{27\beta R}.$$

§ 17.6. Внутрішня енергія газу. Ефект Джоуля — Томсона

Раніше для зміни внутрішньої енергії одного моля ідеального газу мали

$$\Delta U = C_V \int_{T_1}^{T_2} dT = C_V (T_2 - T_1). \qquad (17.20)$$

Внутрішня енергія ідеального газу не залежить від об'єму. В реальному газі суттєву роль відіграють сили міжмолекулярної взаємодії. Зважаючи на це, внутрішня енергія реального газу складається з кінетичної енергії руху його молекул та їхньої потенціальної енергії взаємодії. Величину її можна визначити, виходячи з того, що її зміна дорівнює роботі з подолання внутрішнього тиску, зумовленого силами молекулярного притягання, при збільшенні об'єму, тобто

$$\Delta W_{\text{п}} = W_{\text{п}_2} - W_{\text{п}_1} = \int_{V_1}^{V_2} p_i dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{a}{V^2} dV = a \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right). \qquad (17.21)$$

Вважатимемо, що при $V_2 \to \infty$ $W_{\text{п}_2} = 0$, тобто при нескінченно великому розрідженні міжмолекулярними взаємодіями нехтуємо. Тоді для внутрішньої енергії одного моля реального газу

$$U = C_V T - \frac{a}{V_M} + U_0, \qquad (17.22)$$

де U_0 — "нульова енергія" газу. При цьому $C_V = \text{const}$.

При зміні об'єму газу без обміну енергією з навколишнім середовищем повний запас внутрішньої енергії реального газу залишається сталим, і, як наслідок, маємо

$$\Delta W_{\text{п}} = - \Delta W_{\text{к}} = - C_V \Delta T. \qquad (17.23)$$

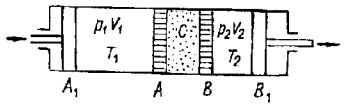


Рис. 17.7

Отже, при зміні об'єму газу без виконання зовнішньої роботи (розширення газу в вакуум) і без зовнішнього теплообміну температура реального газу зменшується.

У 1852—1862 рр. Д. Джоуль і У. Томсон виконали серію дослідів. В ідеально теплоізольованій трубі вони розміщали пробку з пресованої вати C, яка спричиняла місцевий опір для потоку газу. Ця пробка розділяла трубу на дві частини. За допомогою поршнів A і B в обох частинах труби підтримувалися різні, але сталі тиски: p_1 — зліва і p_2 — справа (рис. 17.7). Це давало підставу знехтувати змінами кінетичної енергії потоку. Стаціонарність потоку забезпечувалася підтриманням сталості тисків p_1 і p_2 (для означеності $p_1 > p_2$).

Процес нерівноважного розширення газу від більшого тиску до меншого при протіканні через звуження в каналі, що відбувається без віддачі роботи назовні, називають *дроселюванням*. Адіабатне дроселювання — це дроселювання, що відбувається без теплообміну з навколишнім середовищем. Температура газу при дроселюванні змінюється. Це можна безпосередньо виміряти, помістивши по обидві сторони пробки в повільному потоці газу термометри. В результаті досліджень встановлено, що для більшості газів при кімнатній температурі відбувається охолодження газу, лише для водню і гелію характерне підвищення температури. Явище зміни температури газу при адіабатному дроселюванні називають *ефектом Джоуля — Томсона.*

Розглянемо термодинамічне описання ефекту Джоуля — Томсона. Нехай один моль газу при тиску p_1 і температурі T займає об'єм V_1. При $p_1 > p_2$ відбувається адіабатне перетікання газу з лівої частини труби у праву, об'єм газу зростає від V_1 до V_2.

Розглянемо два граничних випадки адіабатного розширення реального газу від одного сталого тиску p_1 до іншого p_2.

1. Силами молекулярного притягання в реальному газі нехтуємо ($a = 0$). Тоді рівняння Ван-дер-Ваальса для такого газу запишемо у вигляді

$$pV_M = pb + RT. \qquad (17.24)$$

Згідно з першим законом термодинаміки, враховуючи адіабатність процесу ($\Delta Q = 0$), маємо

$$(U_2 - U_1) + \Delta A = 0, \qquad (17.25)$$

де ΔA — сума робіт, виконуваних поршнем A і над поршнем. Нехтуючи тертям, маємо

$$\Delta A = p_2 V_2 - p_1 V_1, \qquad (17.26)$$

бо праворуч від пробки газ заповнює об'єм при $p_2 = \text{const}$, виконуючи додатну роботу p_2V_2, ліворуч — звільняє об'єм V_1 при $p_1 = \text{const}$, що відповідає від'ємній роботі.

Із виразів (17.24) — (17.26), враховуючи, що для даного випадку $U = C_V T$, маємо

$$C_V (T_2 - T_1) + p_2 V_2 - p_1 V_1 = 0,$$

$$(C_V + R) T_2 + p_2 b = (C_V + R) T_1 + p_1 b. \qquad (17.27)$$

Оскільки $C_V + R > 0$ і $p_1 > p_2$, дістаємо

$$T_2 > T_1. \tag{17.28}$$

Звідси випливає, що такий реальний газ при адіабатному розширенні дроселюванням нагрівається, тобто відбувається від'ємний ефект Джоуля — Томсона.

2. У реальному газі нехтуємо розмірами молекул ($a \neq 0$, $b = 0$). Рівняння Ван-дер-Ваальса для такого газу запишемо так:

$$pV_M = RT - \frac{a}{V_M}. \tag{17.29}$$

Згідно з рівністю (17.25) маємо

$$(W_{п_2} - W_{п_1}) + C_V(T_2 - T_1) + \left(RT_2 - \frac{a}{V_2}\right) - \left(RT_1 - \frac{a}{V_1}\right) = 0,$$

або

$$(W_{п_2} - \frac{a}{V_2}) + (C_V + R)\,T_2 = \left(W_{п_1} - \frac{a}{V_1}\right) + (C_V + R)\,T_1. \tag{17.30}$$

Вираз у першій дужці лівої частини рівності (17.30) більший від виразу в першій дужці правої частини (17.30), бо $V_2 > V_1$, $\frac{a}{V_2} < \frac{a}{V_1}$, а $W_{п_2} > W_{п_1}$. Отже, з рівності (17.30) дістаємо

$$T_2 < T_1, \tag{17.31}$$

тобто маємо додатний ефект Джоуля — Томсона.

Розглянемо загальний випадок, коли $a \neq 0$ і $b \neq 0$. Із рівняння Ван-дер-Ваальса

$$pV_M = RT + RT\frac{b}{V_M - b} - \frac{a}{V_M}. \tag{17.32}$$

Нехай об'єм V_2 настільки великий, що газ після дроселювання можна взяти за ідеальний, тобто

$$p_2V_2 = RT_2, \quad U_2 = C_VT_2. \tag{17.33}$$

Підставляючи у вираз (17.25) вирази (17.32), (17.33) аналогічно попередньому, дістаємо

$$C_VT_1 + RT_1 + RT_1\frac{b}{V_1 - b} - \frac{a}{V_1} = C_VT_2 + RT_2. \tag{17.34}$$

Перетворивши рівність (17.34), маємо

$$(C_V + R)\,T_1 + RT_1\frac{b}{V_1 - b} - \frac{a}{V_1} = (C_V + R)\,T_2.$$

Звідси

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{1}{C_p}\left(RT_1\frac{b}{V_1 - b} - \frac{a}{V_1}\right). \tag{17.35}$$

Знак ΔT визначається знаком виразу в дужках правої частини рівності (17.35). Цей вираз можна розглядати як рівняння кривої $T_1 - V_1$, яка на площині V_1T_1 розділяє області додатного та від'ємного ефектів Джоуля — Томсона ($\Delta T < 0$ і $\Delta T > 0$).

Прирівнявши даний вираз до нуля, дістанемо рівняння

$$T_1\frac{V_1}{V_1 - b} = \frac{a}{Rb}. \tag{17.36}$$

Графік цього рівняння зображено на рис. 17.8. Криву, що описується рівнянням (17.36), називають *кривою інверсії*. Ординати кривої (17.36) при $V \to \infty$ прагнуть асимптотично до значення $\frac{a}{Rb}$. Точки кривої інверсії відповідають температурам, при переходах через які знак ефекту Джоуля — Томсона змінюється.

Найбільше значення температур, при яких можлива зміна знака ефекту Джоуля — Томсона, називають *температурою інверсії* (T_i). Вище від цієї температури цей ефект завжди від'ємний ($\Delta T > 0$).

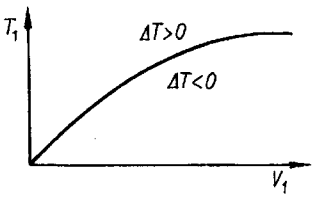


Рис. 17.8

Порівнявши значення T_i і $T_{кр}$, маємо $T_i \approx 3{,}4T_{кр}$. Це співвідношення, що його дістали в наближенні, задовільно підтверджується на досліді. Величина ΔT є малою поблизу лінії інверсії.

Взагалі в реальному газі обидва ефекти Джоуля — Томсона існують одночасно. Все визначається співвідношенням значень сталих Ван-дер-Ваальса, оскільки вплив їх протилежний.

При більш низьких температурах домінуючими є сили притягання ($b = 0$), і молекули газу при його розширенні виконуватимуть роботу проти сил притягання за рахунок їхньої кінетичної енергії, внаслідок чого газ охолоджується. При більш високих температурах домінуючими є короткодіючі сили відштовхування ($a = 0$). Ці сили виконують роботу при розширенні реального газу. Внаслідок цього збільшується кінетична енергія молекул газу і газ нагрівається. За-

лежно від параметрів p і T реального газу в початковому стані ефект Джоуля — Томсона може бути як додатним, так і від'ємним.

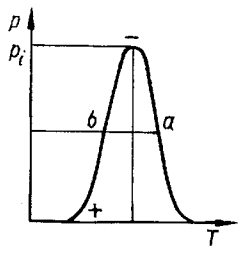


Рис. 17.9

Характер кривої інверсії показано на рис 17.9. Максимум кривої інверсії на $p-V$-діаграмі називають *критичною точкою інверсії.* Ізобари $p < p_i$ двічі перетинають криву інверсії (точки a і b), а ефект Джоуля — Томсона при збільшенні температури двічі змінює знак. При тисках $p > p_i$ і довільній температурі ефект Джоуля — Томсона завжди від'ємний.

Зазначимо, що результат нагрівання водню при кімнатній температурі в дослідах Джоуля і Томсона не є, звичайно, специфічною властивістю водню. Будь-який газ при $T > T_i$ має аналогічні властивості. При дроселюванні ідеального газу ефект Джоуля — Томсона завжди нульовий ($\Delta T = 0$). Адіабатне дроселювання широко використовується як ефективний спосіб охолодження газів.

Приклад 17.4. Знайти молярні теплоємності C_V' і C_p' реального газу, стан якого описується рівнянням Ван-дер-Ваальса.

Розв'язання. При сталому об'ємі теплота, що передається реальному газу, йде на збільшення його внутрішньої енергії, тобто $dQ = dU$. Для одного моля газу $dQ = C_V'dT$, де C_V' — молярна теплоємність реального газу при сталому об'ємі. На основі формули (17.22) $U = C_VT - \frac{a}{V_M} + U_0$ дістаємо, що $C_V' = C_V$, тобто теплоємність реального газу при сталому об'ємі дорівнює теплоємності ідеального газу.

Кількість теплоти, що передається одному молю реального газу при сталому тиску, $dQ = C_p'dT$, де C_p' — молярна теплоємність реального газу при сталому тиску. Рівняння $dQ = dU + pdV$ з урахуванням виразу (17.22) запишемо так:

$$d'Q = C_VdT + \frac{a}{V_M^2}dV + pdV = C_VdT + \left(\frac{a}{V_M^2} + p\right)dV = C_VdT + \frac{RT}{V_M - b}dV.$$

Продиференціювавши рівняння (17.7) за умови, що $m/M = 1$ і $p = \text{const}$, маємо

$$dV = \frac{R}{p - \frac{a}{V_M^2} + \frac{2ab}{V_M^3}}dT.$$

Тоді

$$dQ = C_VdT + \frac{R^2T}{(V_M - b)\left(p - \frac{a}{V_M^2} + \frac{2ab}{V_M^3}\right)}dT. \qquad (1)$$

Порівнюючи рівність (1) з виразом $dQ = C_p'dT$, дістаємо

$$C_p' = C_V + \frac{R^2T}{(V_M - b)\left(p - \frac{a}{V_M^2} + \frac{2ab}{V_M^3}\right)}. \qquad (2)$$

Звідси видно, що на відміну від ідеального газу теплоємність реального газу залежить від параметрів стану.

Приклад 17.5. Знайти формулу для ентропії одного моля газу, стан якого описується рівнянням Ван-дер-Ваальса.

Розв'язання. Ентропія S визначається з точністю до адитивної сталої S_0 за формулою (16.78):

$$S = \int \frac{d'Q}{T} + S_0.$$

У прикладі 17.4 знайдено співвідношення для одного моля

$$d'Q = C_VdT + \frac{RT}{V_M - b}dV.$$

Тоді

$$S = \int C_V\frac{dT}{T} + R\int\frac{dV}{V_M - b} + \text{const} = C_V\ln T + R\ln(V_M - b) + \text{const}.$$

§ 17.7. Зрідження газів та одержання низьких температур

До XVIII ст. вважалося, що повітря, водень, кисень, азот, хлор, аміак та інші гази можуть існувати лише в газоподібному стані. Згодом виявилося, що деякі з цих газів, охолоджені на кілька градусів нижче 0 °С, зріджуються уже під тиском, який дещо перевищує атмосферний. У 1823 р. англійський фізик М. Фарадей (1791—1867) сконденсував ряд газів при кімнатній температурі, але при підвищеному тиску. Тиск у кілька атмосфер достатній для зрідження хлору і вуглекислоти. Пізніше (у 1845 р.) М. Фарадей для зрідження газів одночасно використав стиск і охолодження. Йому не вдалося сконденсувати шість відомих на той час газів, а саме: H_2, O_2, N_2, NO, CO, CH_4, які було названо постійними. Причиною негативних результатів було те, що $T_к$ їх значно нижча від температур, при яких намагалися провести зрідження. У 1877 р. Л. Кальєте (1832—1913) вдалося сконденсувати CO і O_2. При цьому дуже стиснуті гази адіабатно розширювалися.

Одночасно в 1877 р. швейцарському фізику Р. Пікте (1846—1929) вдалося добути рідкий кисень при тиску $320 \cdot 10^5$ Па і температурі 233 К, досягнутій при використанні сірчистої та вугільної кислот. Він розробив "каскадний" метод зрідження газу — метод, який полягає в зниженні температури зріджуваного газу і послідовному зрідженні газів з послідовно меншими $T_к$. Наступний крок у галузі зрідження газів було зроблено польськими фізиками З. Ф. Вроблевським (1845—1888) і К. С. Ольшевським (1846—1915), які протягом 1883—1887 рр. у першій кріогенній лабораторії, вдосконаливши скраплювальну техніку, зрідили азот і наблизилися до зрідження водню, який вперше дістав у рідкому стані в 1898 р. англійський фізик Д. Дьюар (1842—1923). У 1892 р. Дьюар створив "посудину Дьюара", що стало значним

кроком у техніці низьких температур. Це дало можливість підтримувати низькі температури значних мас рідких газів, транспортувати їх. У 1908 р. нідерландський фізик Г. Камерлінг-Оннес (1853—1926) зрідив гелій. Так було покладено початок фізиці низьких температур.

Сучасні методи глибокого охолодження для зрідження газів грунтуються на використанні ефекту Джоуля — Томсона, виконанні газом зовнішньої роботи та магнітному охолодженні за методом Дебая.

В одному з перших технічних методів зрідження газів (машина Лінде, 1895 р.) було використано ефект Джоуля — Томсона при попередньому охолодженні газу перед дроселюванням. Загальну схему машини Лінде показано на рис. 17.10. Для реалізації додатного ефекту Джоуля — Томсона ($\Delta T < 0$) початкова температура газу повинна бути досить низькою. Зріджуваний газ, стиснутий компресором *1*, охолоджується в теплообміннику-охолоджувачі *A* і по змійовику *2* подається у вентиль *B*, де він адіабатно дроселюється до тиску, близького до атмосферного. При цьому газ охолоджується. Якщо це зниження температури є недостатнім для зрідження газу, то він по спеціальних зовнішніх трубах змійовика *2* протитечією повертається в теплообмінник-охолоджувач, охолоджуючи нові порції стиснутого газу, і виводиться потім через трубопровід *3* у компресор. Таким чином поступово знижується температура газу за вентилем *B*, поки не досягається його зрідження. При цьому з вентиля *B* виходить двофазна суміш. Сконденсований газ збирається в посудині Дьюара *C*, а газ повертається в компресор *1*. Користуючись методом Лінде, Д. Дьюар вперше добув рідкий водень, а Г. Камерлінг-Оннес — рідкий гелій.

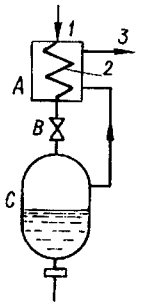


Рис. 17.10

При адіабатному дроселюванні охолодження газу здійснюється за рахунок внутрішньої роботи проти сил притягання між молекулами. Відомо, що охолодження газу реалізується також у разі його адіабатного розширення під час виконання зовнішньої роботи. При цьому охолодження газу відбувається внаслідок зменшення енергії (швидкостей) молекул при ударах їх об поршень, що віддаляється. Цей спосіб охолодження газу є більш ефективним, оскільки процес адіабатного розширення газу оборотний або може бути оборотним.

Другий технічний метод зрідження газів грунтується на принципово необоротному процесі розширення газу з виконанням зовнішньої роботи при адіабатному дроселюванні. Ж. Клод у 1902 р. доповнив машину Лінде спеціальним пристроєм — *детандером*, в якому після вентиля *B* газ виконує зовнішню роботу. В машині Клода детандер (розширювальна камера) — це циліндр з поршнем. Зовнішня робота,

виконувана газом у детандері, використовується для полегшення роботи компресора, для вимушеного змащення машини та ін.

У детандерних зріджувачах газів одночасно використовується і дроселювання, і розширення газів.

Детандерні машини є більш раціональними і ефективними порівняно з машинами Лінде. Характерною для них є наявність лише одного робочого тіла. Проте зауважимо, що введення детандера дещо ускладнює установку, збільшує її габарити.

Російський фізик П. Л. Капіца (1894—1984) зміг позбутися недоліків поршневого детандера Клода. В машині Капіци поршневий детандер замінено турбінним (турбодетандер), ідея якого була розроблена ще в 1892 р. англійським фізиком Д. Релєєм (1842—1919). Особливістю цієї машини є низький тиск газу, який надходить у детандер ($p \approx 6 \cdot 10^5$ Па), а також те, що в ній практично весь газ проходить адіабатне дроселювання.

За допомогою рідких газів досягають низьких температур близько 4,21 К (рідкий гелій). Коли рідкий гелій кипить при зниженому тиску (пари гелію при цьому відкачуються), температуру його можна знизити до 0,69 К.

Щоб мати ще нижчі температури (наднизькі — $T < 1$ К), вдаються до магнітного методу охолодження, який запропонував у 1926 р. П. Дебай. Цей метод грунтується на оборотному розмагніченні деяких парамагнітних речовин, оскільки при цьому, як і при адіабатному розширенні газів, робота проти зовнішніх сил виконується за рахунок внутрішньої енергії. Практичну можливість реалізації цього методу підтвердив У. Джіок у 1933 р. Як робочі речовини використовують кристалічні парамагнітні солі (сульфат гадолінію, хромокалієві та залізоалюмінієві галуни). Явище зміни температури при адіабатному розмагніченні називають *магнетокалоричним ефектом*.

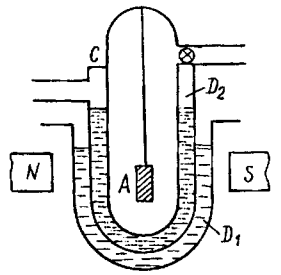


Рис. 17.11

Схему установки Джіока зображено на рис. 17.11. Між полюсами сильного електромагніту *N* і *S* розміщено дві посудини D_1 і D_2. Зовнішня посудина D_1 наповнена воднем, що кипить, а внутрішня D_2 — гелієм. У внутрішній посудині Дьюара міститься третя посудина *C* з газоподібним гелієм, в якій на пружній нитці підвішено парамагнітне тіло *A*, охолоджене до 1 К. Внаслідок високої теплопровідності гелію між *A* і *C* забезпечено тепловий контакт. На початку експерименту парамагнітний кристал ізотермічно намагнічується, і теплота, що виділяється при цьому, поглинається рідким гелієм. Після намагнічення тіла *A* з посудини *C* відкачують газоподібний гелій, і парамагнетик *A* стає термічно ізольованим. Якщо тепер вимкнути

магнітне поле, то парамагнетик A розмагнічується адіабатно й температура його знижується. Як тільки температура тіла знизиться настільки, що під дією сил взаємодії виникає впорядкованість в орієнтації "елементарних магнітів", метод адіабатного розмагнічення перестає діяти. Цей метод дає змогу досягти температури близько 0,001 К.

Другий шлях до абсолютного нуля має в своїй основі використання ядерного магнетизму. У цьому разі сили взаємодії проявлятимуться лише при 10^{-5} К. За цим методом вдалося дістати спінові температури близько 10^{-6} К.

Розділ 18. Тверді тіла

§ 18.1. Кристалічні та аморфні тіла. Основні характеристики кристалів

Твердим тілом називають агрегатний стан речовини, який характеризується стабільністю форми та об'єму, а також особливим характером просторового розміщення та руху атомів (порядок у розміщенні їх і малі коливання відносно положень рівноваги).

Тверді тіла поділяють на дві групи, які суттєво відрізняються за своїми властивостями. Одну групу утворюють кристалічні тіла, іншу — аморфні. У природі *аморфні тіла* зустрічаються значно рідше порівняно з кристалічними. Деякі речовини за одних умов можна одержати в аморфному стані, за інших — у кристалічному. Наприклад, розплавленням кристалів кварцу і наступним охолодженням їх легко добути аморфне кварцове скло. Ступінь впорядкованості аморфного тіла значною мірою залежить від технології його утворення.

В наш час значно зріс інтерес до вивчення властивостей аморфних тіл, які все ширше використовуються в електронній техніці, електронофотографії, друкарській справі тощо.

Головною особливістю внутрішньої будови кристалічних тіл є так званий *дальній порядок*, тобто строга дистанційна повторюваність елементів структури (атома, атомної групи, молекули, іона), або певний "візерунок" їх у трьох вимірах, який поширюється практично на нескінченне число періодів кристалічних граток.

Для аморфних тіл характерним є лише ближній порядок розміщення елементів структури, тобто певне узгодження розміщення в просторі сусідніх, близько розміщених частинок.

Ідеальні кристали з одного боку та ідеальний газ з другого — це граничні стани речовини, що характеризуються відповідно впорядкованістю або хаотичністю структурних елементів. Кристалічний стан речовини утворюється при низьких температурах і високих тисках, а газоподібний — при високих температурах і низьких тисках.

Серед кристалічних тіл розрізняють *монокристали* і *полікристали*. Монокристал — окремий, великих розмірів кристал. Він відповідає ідеальній впорядкованості частинок. Монокристали можуть утворюватись в умовах вільного росту, тобто коли кристалізація в рідкому стані починається на введеній затравці і умови росту кристала однакові на всіх його поверхнях. Кристалічну структуру монокристалів виявляють безпосередньо за їхньою зовнішньою формою. Відомий російський металург Д. К. Чернов, розрізаючи зливки заліза, знайшов в одному з них монокристал завдовжки близько 40 см. Монокристали гірського кришталю досягають розмірів зросту людини.

Більшість твердих тіл мають дрібнокристалічну структуру, тобто складаються з великої кількості дрібних кристалів, які зрослися між собою хаотично. Такі тіла називають *полікристалічними*. До них належать, зокрема, метали, для яких є характерними металевий блиск та ковкість. Їх дістають охолодженням відповідних речовин у рідкому стані при температурі, нижчій від температури кристалізації. За наявності багатьох центрів кристалізації виникає відповідна дрібнокристалічна структура.

Аморфні тіла бувають природні (янтар, смола, бітум, опал) і штучні (звичайне скло, плавлений кварц, бакеліт, різні полімери).

Зауважимо, що поділ твердих тіл тільки на дві групи — кристалічні та аморфні— є недостатнім. Це випливає вже хоча б з факту існування таких станів речовини, як рідкі кристали. Речовина може перебувати в аморфно-кристалічному стані.

Однією з основних властивостей кристалічних тіл є *анізотропія*, тобто залежність фізичних властивостей макроскопічного однорідного тіла від напряму. Анізотропія є одним із наслідків правильного порядку в розміщенні структурних частинок.

Аморфні тіла ізотропні. Природна ізотропність їх зумовлена відсутністю самовільної орієнтації структурних частинок.

Наведемо емпіричні закони кристалографії.

Закон плоскогранності та прямореберності: грані кристала є площинами, а ребра — прямими лініями.

Закон сталості гранних кутів: кути між відповідними гранями та ребрами кристала залишаються сталими для різних екземплярів тієї самої кристалічної речовини.

Закон раціональних відношень осьових відрізків: відношення відрізків, що відтинаються гранями на осях кристала, виражається цілими числами.

Закон симетрії: у кристалах можуть існувати осі симетрії тільки першого, другого, третього, четвертого та шостого порядків. Віссю симетрії є пряма лінія, при повороті навколо якої на деякий кут $2\pi/n$ фігура набуває свого попереднього стану (n називають порядком осі симетрії).

До елементів симетрії належать також площина симетрії P, *центр симетрії* або інверсії C. Площина симетрії — це площина, в якій при

дзеркальному відображенні фігура збігається сама з собою. Центр інверсії є особливою точкою всередині фігури, при відбитті в якій усіх точок фігури вони суміщаються. Якщо молекула має центр симетрії в деякій точці C (рис. 18.1), то кожному атому A відповідає такий самий атом A', причому $AC = A'C$.

Однією з найбільш важливих та характерних властивостей кристалів є їх симетрія. За образним висловленням Є. С. Федорова, кристали "блищать своєю симетрією", яка виявляється в їхній формі, структурі та властивостях. Під симетрією кристалів розуміють закономірності розміщення їхніх структурних частинок на площині та в просторі.

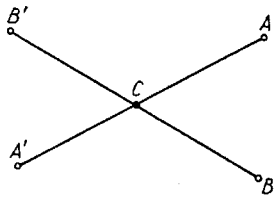


Рис. 18.1

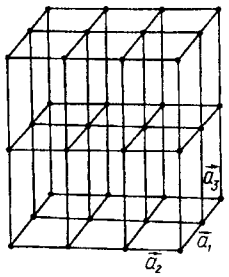


Рис. 18.2

У цілому реальні властивості кристалів визначаються регулярністю розміщення структурних одиниць та характером сил взаємодії.

Згідно з модельними уявленнями геометричну структуру ідеального кристала можна розглядати як просторову впорядковану систему структурних одиниць. Якщо у відповідність кожній структурній одиниці поставити точку, з якою збігається її центр маси, то дістанемо своєрідну абстракцію — точкові просторові гратки. Точки цих граток називають *вузлами* (рис. 18.2). Просторові гратки можна означити множиною рівновеликих паралелепіпедів, які називають елементарними комірками. Кожна з них, у свою чергу, означається трьома основними векторами $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$. Їхні довжини називають *періодами ідентичності*. Якщо будь-який з вузлів кристалічних граток вибрати за початок координат, то положення довільного іншого вузла можна задати так:

$$\vec{r}_{mnp} = m\vec{a}_1 + n\vec{a}_2 + p\vec{a}_3, \qquad (18.1)$$

де m, n, p — цілі числа, пропорційні числу періодів ідентичності вздовж відповідної осі. Їх називають індексами вузлів і позначають (m, n, p). Три основні вектори означають паралелепіпед — елементарну комірку. Періодичним повторенням численних елементарних комірок утворюється макроскопічний кристал.

Ідею просторових граток сформулювали англійський хімік У. Волластон (1766—1828) у 1812 р. і французький кристалограф О. Браве (1811—1863) у 1848 р. у вигляді постулату, який дав змогу пояснити емпіричні закони кристалографії. Експериментальне підтвердження цієї ідеї зробив німецький фізик М. Лауе (1879—1960) в 1912 р., вивчаючи дифракцію рентгенівського випромінювання на кристалах.

Елементарну комірку вибирають так, щоб сума площ паралелограмів, які її обмежують, була найменшою. Ребра цієї комірки повинні дорівнювати мінімальній відстані між ідентичними вузлами в напрямах, вибраних для осей координат. Такі комірки називають гратками Браве. Вони є ніби кістяком кристалічних граток, передають їхню періодичність. Симетрія їх залишається такою, як і для всіх граток кристала. Звичайно, атоми граток Браве не вичерпують всіх атомів у кристалі, навіть усіх атомів одного виду. Загалом кристал — це кілька граток Браве, вкладених одна в одну. Кожна з них відповідає певному виду і розміщенню атомів. При цьому елементарна комірка має кілька атомів — по одному від кожних граток Браве. Взагалі розбити кристал на основні паралелепіпеди — елементарні комірки — можна численними способами. Проте, незважаючи на таку неозначеність, при довільному розбиванні кожна елементарна комірка матиме однакову кількість атомів і однакові об'єми.

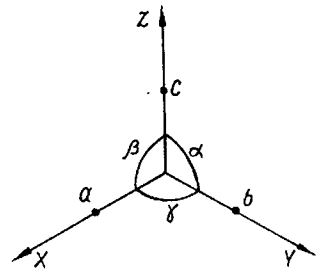
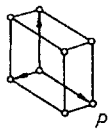
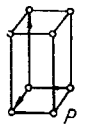
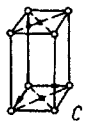
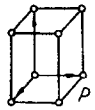
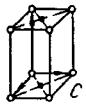
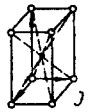
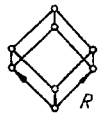
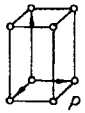
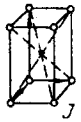
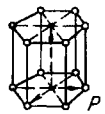
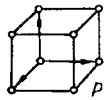
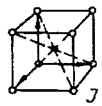
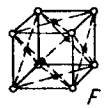


Рис. 18.3

Число граток Браве, виходячи з можливих видів симетрії, строго обмежене і дорівнює 14. Вони поділяються на 7 кристалічних систем — сингоній. *Сингонією* називають групу видів симетрії, в яку входять кристали з подібними елементарними комірками. Метричними параметрами елементарних комірок, якщо для описання їх вибрати координатні осі, які збігаються з напрямами сторін паралелепіпеда, будуть довжини сторін паралелепіпеда — a, b, c — та кути між його ребрами — α, β, γ (рис. 18.3).

Якщо змінювати параметри a, b, c та α, β, γ, зберігаючи при цьому симетрію, то дістаємо сім кристалічних систем. Їхні назви та основні ознаки наведено в табл. 4. Як видно з таблиці, у кожній кристалічній системі—сингонії — існує гратка Браве. Якщо вузли розміщені у вершинах гратки, вона називається *примітивною*. Крім примітивних граток Браве є базоцентровані (вузли розміщені крім вершин у центрах двох протилежних граней), об'ємноцентровані (вузли крім вершин розміщені в центрі гратки), гранецентровані (вузли в них розміщені у вершинах і центрах усіх граней). Наведемо приклади тіл — представників різних сингоній. До триклінної сингонії належать польові

Таблиця 18.4

Кристалічні системи	Співвідношення між сторонами та кутами	Примітивна	Базоцентрована	Об'ємно-центрована	Гране-центрована
Триклінна	$a \neq b \neq c$ $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90°$				
Моноклінна	$a \neq b \neq c$ $\alpha = \gamma = 90° \neq \beta$				
Ромбічна	$a \neq b \neq c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90°$				
Ромбоедрична	$a = b = c$ $\alpha = \beta = \gamma \neq 90°$				
Тетрагональна	$a = b \neq c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90°$				
Гексагональна	$a = b \neq c$ $\alpha = \beta = 90°$ $\gamma = 120°$				
Кубічна	$a = b = c$ $\alpha = \beta = \gamma = 90°$				

шпати. У моноклінній сингонії кристалізуються гіпс, слюда, тальк, каолініт, нафталін, малахіт та ін. У ромбічній сингонії кристалізуються сірка, барит, топаз та ін. Представниками тетрагональної сингонії є олов'яний камінь, мідний колчедан, рутил та ін. У ромбоедричній сингонії кристалізуються цинкова обманка, телур, кальцит, гранат та ін. У гексагональній сингонії кристалізуються лід, графіт, рубін, вісмут, корунд, цинк, апатит, ізумруд, аквамарин та ін. Багато металів мають кубічну сингонію. Гратку у вигляді центрованого куба мають залізо, хром, вольфрам, молібден, ванадій, натрій, літій та ін. Гратку у вигляді гранецентрованого куба мають залізо, алюміній, мідь, нікель, свинець, срібло, золото, платина та ін. Алмазу притаманна характерна подвійна кубічна гратка. Гратку такого самого типу мають кремній та α-олово.

Анізотропія кристалів, характер перебігу процесів деформації значною мірою визначаються положенням кристалографічних площин (граней) у гратці. Тому виникла потреба кількісної індексації площин і напрямів у гратках. Для цього користуються спеціальною системою координат, зв'язаною з кристалом так, що координатні осі проводяться паралельно осям симетрії або перпендикулярно до площин симетрії, а початок координат збігається з одним із вузлів гратки. Для позначення площин у кристалах користуються індексами Міллера, які визначають так. Знаходять координати трьох точок перетину площини з координатними осями в одиницях сталої гратки. Обернені значення знайдених величин зводять до спільного знаменника і відкидають його. Чисельники цих дробів будуть індексами Міллера. Так, для площини, що перетинає осі координат у точках *4*, *1* і *2* (рис. 18.4), обернені величини координат відповідно 1/4, 1 і 1/2, а спільний знаменник їх дорівнює 4. Отже, індекси Міллера будуть 1, 4 і 2. Їх позначають відповідно (h, k, l). Символ (h, k, l) позначає не одну певну площину, а сукупність паралельних площин, які проходять через вузли кристалічної гратки. У площинах, що відповідають малим індексам Міллера, густина атомів більша порівняно з площинами з великими індексами.

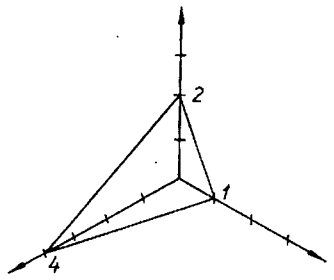


Рис. 18.4

Для позначення кристалографічних напрямів застосовують квадратні дужки: $[u, v, w]$. У цьому разі в основу покладено пряму пропорційність відрізків на осях, а не обернену, як для індексів граней. Напрям визначається однозначно, якщо відомі координати будь-якої точки на прямій.

Кристалічні системи — це основа класифікації кристалів. Реальна кристалічна гратка — це сукупність кількох граток Браве, вставлених

одна в одну. При цьому симетрія реальної гратки знижується порівняно із симетрією відповідної гратки Браве. Проте одночасно є можливість появи нових особливих видів симетрії. Сукупність усіх елементів внутрішньої симетрії реальної кристалічної гратки називають її *просторовою групою.*

У 1890 р., задовго до перших досліджень внутрішньої структури кристалів, Є. С. Федоров строго математично показав, що таких просторових груп симетрії може бути тільки 230. Нині визначено близько 20 000 структур кристалів. Жодна з них не суперечить теорії Федорова. Просторові групи прийнято розподіляти за кристалічними системами залежно від того, з якою граткою Браве вони реалізуються. Їхнє число розподіляється за сингоніями так: триклінна — 2, моноклінна — 13, ромбічна — 59, ромбоедрична — 7, тетрагональна — 68, гексагональна — 45, кубічна — 36.

Для деяких фізичних явищ атомна структура тіл не проявляється безпосередньо. При дослідженні, наприклад, теплового розширення, механічних деформацій тіла можна розглядати як суцільні середовища, опустивши аналіз їхньої внутрішньої структури. Властивості речовини як суцільного середовища називають макроскопічними. У різних напрямах вони для кристалів неоднакові.

Симетрія напрямів у кристалі, а отже, і симетрія макроскопічних властивостей визначається його осями і площинами симетрії. Російський кристалограф А. В. Гольдін показав, що обмежене число комбінацій осей і площин симетрії, а саме 32, описують симетрію напрямів у кристалі. Ці комбінації називають кристалічними класами симетрії. Вони визначають типи макроскопічної симетрії кристала як анізотропного середовища.

Основи кристалографії є базою для вивчення фізики твердого тіла, а також для раціонального використання, розробки і освоєння нових матеріалів з наперед заданими властивостями.

§ 18.2. Сили зв'язку у твердих тілах

Фізичні властивості твердих кристалічних тіл визначаються їхнім хімічним складом, симетрією гратки, характером сил зв'язку між структурними одиницями, а також дефектами в реальних структурах. Раніше було розглянуто питання про природу сил молекулярного зв'язку та енергію міжатомного зв'язку. Оскільки кристали мають внутрішню симетрію, необхідно знати характер сил зв'язку між структурними одиницями. Аналіз сил зв'язку дає змогу добути цінну інформацію про енергію зв'язку та провести наближену класифікацію кристалів. Енергією зв'язку називають енергію, потрібну для розщеплення твердого тіла на структурні одиниці. Вона залежить від хімічного складу речовини.

Загальною рисою всіх типів зв'язку є те, що природа сил зв'язку електромагнітна. У твердих тілах розрізняють іонний (гетерополярний), ковалентний (гомеополярний, або атомний), металічний, вандерваальсовий та водневий зв'язки. У іонних кристалах правильно чергуються в розміщенні позитивні і негативні іони. Фізична природа іонного зв'язку в кристалах майже така, як і іонних молекул. Але тут електростатична взаємодія складніша внаслідок взаємодії окремого іона з усіма іншими іонами кристала. Енергію гратки іонного кристала для одного моля речовини бінарної сполуки з урахуванням взаємодії іонів з їхнім оточенням та з поверхнею кристала наближено можна подати у вигляді (знак "мінус" означає, що мова йде про енергію сил притягання)

$$W = -\frac{z^2 e^2}{r}\alpha_M N_A, \tag{18.2}$$

де z — валентність іона; e — заряд електрона; N_A — число Авогадро; r — відстань між іонами; α_M — стала Маделунга. Вона однакова для кожного типу кристалічної структури. Так, для структури NaCl $\alpha_M = 1{,}748$, для Al_2O_3 – 4,17. Уточнення цієї моделі здійснюється внаслідок врахування сил відштовхування. М. Борн запропонував для цих сил такий вираз енергії: B/r^n. Величина n визначається емпіричним шляхом. Вона перебуває в межах 5 — 12. Тоді

$$W = -N_A\left(\frac{z^2 e^2}{r}\alpha_M - \frac{B\beta}{r^n}\right), \tag{18.3}$$

де β — коефіцієнт, який враховує структурні особливості розміщення іонів. Дальше уточнення розрахунків величин W грунтується на врахуванні сил притягання Ван-дер-Ваальса та нульової енергії.

Іонний зв'язок досить сильний. Він становить величину порядку 10^5 Дж/моль. Міцність іонного зв'язку проявляється в тому, що іонні кристали мають малий коефіцієнт теплового розширення і високу температуру плавлення. Електропровідність іонних кристалів при кімнатних температурах незначна. Вона на 20 порядків нижча, ніж у металів, і зростає з підвищенням температури. Для іонних кристалів характерним є сильне поглинання в інфрачервоній області спектра.

Типовими кристалами з ковалентним зв'язком є алмаз, графіт, карборунд, сульфід цинку, йод, сірка. До них належать і напівпровідники. У вузлах кристалічної гратки таких кристалів розміщені нейтральні атоми. Характерною рисою ковалентного зв'язку є її напрямленість, а розподіл густини заряду навколо кожного з ядер атомів відрізняється від сферично-симетричного розподілу, який характерний для іонних молекул. Це приводить до виникнення нового стану, в якому зовнішні валентні електрони, що слабо зв'язані з ядром, належать одночасно обом ядрам, тобто усуспільнені. Між атома-

ми, які колективізували свої зовнішні неспарені валентні електрони, виникає значне електричне притягання. Звичайно, поряд з притяганням існує і взаємне кулонівське відштовхування між електронами і ядрами атомів. Енергія електростатичного відштовхування значно менша від енергії притягання. Ковалентний зв'язок суттєво відрізняється від іонного тим, що число електронів, які здійснюють ковалентний зв'язок, у кожного атома обмежене, а тому цей зв'язок є насиченим. Так, для водню, якщо один з атомів об'єднався з другим і утворив молекулу, то вона не реагуватиме з третім вільним атомом водню. Для типового ковалентного кристала алмазу кожен атом утворює чотири ковалентні зв'язки, віддаючи для усуспільнення кожному з них один із своїх валентних електронів і одержуючи другий електрон від сусіднього атома. Структура алмазу тетраедрична.

Основу ковалентного зв'язку становить обмінний ефект, зумовлений обміном електронами між атомами. Він має суто квантову природу. Ковалентний зв'язок між двома атомами може здійснюватись однією парою електронів (одинарний зв'язок: $C - C$); двома парами (подвійний зв'язок: $C = C$, $C = O - CO_2$; трьома парами електронів (потрійний зв'язок: $C \equiv C - CaC_2$). Ковалентний зв'язок досить сильний. Тому ковалентні кристали мають велику енергію зв'язку порядку 3 — 5 еВ на один атом. Внаслідок цього кристали з ковалентними зв'язками мають високу механічну міцність і твердість, високу температуру плавлення, винятково малу леткість, погану електропровідність у широкому інтервалі температур.

Металічний зв'язок в основному характерний для речовин, побудованих з атомів одного елемента (наприклад, мідь, золото). Металічні кристали містять у вузлах кристалічної гратки позитивні іони. У просторі між ними вільно переміщуються колективізовані валентні електрони. На відміну від ковалентного зв'язку в колективізації електронів беруть участь усі атоми, утворюючи так званий електронний газ. Валентні електрони всіх атомів належать одночасно усьому кристалу. Металічний зв'язок — це взаємодія сукупності позитивних іонів з колективізованими валентними електронами. Притягуючись до позитивних іонів, вільні електрони відіграють роль клею-цементу, що фіксує позитивні іони на певних відстанях відповідно до рівноваги і мінімуму потенціальної енергії системи. У межах гратки електрони можуть переміщатися, беручи участь у тепловому русі. Ще раз підкреслимо, що металічний зв'язок здійснюється не через електронні пари, які сумісно належать двом частинкам, а за допомогою вільних валентних електронів, що належать усьому кристалу в цілому. Енергія металічного зв'язку значно менша, ніж у ковалентних і іонних кристалів. Підтвердженням цього є нижча температура плавлення металів, ніж іонних і ковалентних кристалів.

Висока концентрація вільних електронів у металів зумовлює їхню добру електро- та теплопровідність. Метали оптично непрозорі, мають

велику відбивну здатність, тому для них характерний специфічний металічний блиск.

У вузлах кристалічних граток молекулярних кристалів розміщуються певним способом орієнтовані молекули. Характерною для молекулярних кристалів є геометрична відокремленість молекул кристала і сильні внутрішньомолекулярні зв'язки. Це означає, що енергія внутрішньомолекулярних зв'язків значно перевищує енергію міжмолекулярних зв'язків. Силами зв'язку в цьому разі є сили Ван-дер-Ваальса та водневі зв'язки, коли молекули мають гідроксильні OH та амінні NH_2 групи. Переважна більшість молекулярних кристалів — це органічні кристали. Молекулярні неорганічні кристали трапляються рідко. До них належать речовини, молекули яких складаються з азоту, фосфору, сірки та ін.

Молекулярні кристали за фізичними властивостями є ізоляторами, мають низьку температуру плавлення, вони прозорі для широкого інтервалу електромагнітних хвиль.

Зауважимо, що практично немає речовин, які б характеризувались тільки одним типом зв'язків. Здебільшого кристалічним граткам речовин властива наявність різних типів зв'язку.

§ 18.3. Дефекти в реальних кристалах

Ідеально правильна структура монокристала спостерігається тільки в порівняно невеликих об'ємах. Структура реального кристала характеризується різними дефектами. Ці дефекти значною мірою визначають структурно-чутливі властивості кристалів — електро- і теплопровідність, міцність та ін.

Дефекти структури пов'язані зі змінами відстаней частинки до найближчих сусідів; з відсутністю атома або іона в будь-якому з вузлів гратки; зі зміщеннями атома або іона з вузла; з тимчасовими місцевими порушеннями структури, зумовленими світловим, рентгенівським та γ-випромінюванням, потоками α-частинок або нейтронів. Мала рухливість і значний час життя дефектів структури дають можливість описати їх за допомогою наочних геометричних моделей і класифікувати за геометричними ознаками: за кількістю локальних змін, в яких є якісні порушення структури кристала, що поширюються на відстані, значно більші від характерних параметрів гратки. За цими критеріями дефекти гратки поділяють на точкові, або нульвимірні; лінійні, або одновимірні; поверхневі, або двовимірні; та об'ємні, або тривимірні. Точкові дефекти — це порушення кристалічної структури, розміри яких в усіх трьох вимірах мають порядок одного або кількох міжатомних відстаней. Найпростіші точкові дефекти кристала поділяють на атомні, електронні та енергетичні. До атомних дефектів належать дефекти за Шотткі, коли немає атомів або іонів у вузлах гратки (рис. 18.5, *а*), дефекти за Френкелем, які є су-

купністю порожнього вузла і близько розміщеного міжвузлового атома (рис. 18.5, *в*); домішкові атоми, які як розміщуються між вузлами, так і заміщають атоми основної речовини у вузлах кристалічної гратки (рис. 18.5, *б*). Електронні дефекти — це електрони, що вільно блукають по кристалу. Вони є особливими точками електричного поля і центрами розсіювання. Електричне поле електрона діє на гратку, певним чином деформуючи її. Незайняті електронами енергетичні рівні приводять до появи дірок. Сукупність електрона і дірки, зв'язаних між собою кулонівськими силами, — екситон є електронним дефектом.

Електрон своїм власним електричним полем створює локальну поляризацію навколишнього середовища. Останнє, в свою чергу, притягує електрон, змушуючи його рухатися в обмеженій області простору. Такий квантовий стаціонарний стан електрона в поляризованому середовищі називають *поляроном*. У кристалі можливий поступальний рух полярона як цілого. При накладанні зовнішніх електричних та магнітних полів рух полярона буде прискореним. Кількісну теорію полярона розвинув український вчений С. І. Пекар (1917—1985).

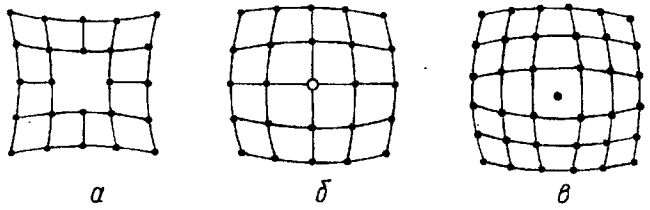


Рис. 18.5

Прикладом енергетичних дефектів є фонони — кванти теплових коливань гратки. На них відбуваються розсіювання електронів та дірок, а також взаємні розсіювання фононів. До енергетичних дефектів належать також тимчасові збуджені стани, утворені внаслідок опромінення кристала елементарними частинками високих енергій.

Для утворення дефекту за Френкелем потрібна дещо менша енергія, ніж для дефекту за Шотткі. Значення цих енергій знаходиться в межах від 2 до 4 еВ. Дефекти за Френкелем найбільш характерні для кристалів. Утворення їх зумовлено нерівномірним розподілом енергії між структурними одиницями кристала. Дефекти за Шотткі дуже поширені як в атомних, так і в металевих, іонних і молекулярних кристалах. Ці два типи точкових дефектів створюються в результаті теплової активації кристала. Кожній фіксованій температурі відповідає певна рівноважна концентрація цих дефектів:

$$n_в = n_0 e^{-\frac{W_в}{kT}}, \qquad (18.4)$$

де $n_в$ — концентрація вакансій; n_0 — концентрація атомів кристала; $W_в$ — енергія утворення вакансії.

Концентрація дефектів, як випливає з формули (18.4), залежить від енергії утворення дефекту і температури. З підвищенням температури $n_в$ швидко зростає. При кімнатних температурах число $n_в$ у рівноважній кристалічній гратці є незначним. Для іонних кристалів і багатьох металів відносне число вакансій $n_в/n_0$ при температурі плавлення становить близько 10^{-4}. Для збільшення концентрації дефектів при низьких температурах вводять домішки, опромінюючи кристали елементарними частинками високих енергій, вдаються до пластичної деформації та гартування при високих температурах.

Точкові дефекти досить важко спостерігати безпосередньо. Досліджують їх і вивчають за впливом на різні фізичні властивості кристалів.

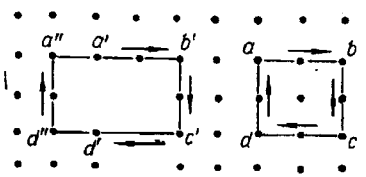


Рис. 18.6

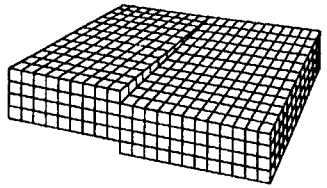


Рис. 18.7

Лінійний дефект — це порушення правильності структури вздовж деяких ліній. Такі дефекти називають *дислокаціями*. Поперечні розміри лінійного дефекту не перевищують однієї або кількох міжатомних відстаней, а довжина може досягти розмірів кристала.

Дислокації є крайові і гвинтові. Якщо одна з атомних площин обривається всередині кристала, то край цієї "лінії" "зайвої" площини утворює крайову дислокацію (рис. 18.6). Кристал з крайовою дислокацією можна уявити як книгу, в якій одна із сторінок наполовину обірвана. Гвинтова дислокація утворюється внаслідок сповзання двох атомних півплощин на один період одна відносно одної, починаючи з деякої лінії (рис. 18.7). Ці два типи дислокацій є найпростішими. Взагалі дислокації в кристалі — це накладання лінійної та гвинтової дислокацій.

Дислокації не можуть обриватися всередині кристала. Вони можуть мати вигляд замкненої петлі або закінчуватися на вільній поверхні кристала чи границі зерна. Сліди виходу дислокацій на поверхню кристала можна виявити хімічним травленням та електронно-мікроскопічними методами. Дислокації кількісно характеризуються густиною та вектором Бюргерса. Під густиною дислокацій ро-

зуміють кількість дислокаційних ліній $n_д$ на одній площині поверхні кристала.

Введемо поняття вектора Бюргерса. Для цього розглянемо плоску область, яка розміщена на значній відстані від лінії дислокації (див. рис. 18.6). Здійснимо від початкової точки a обхід по контуру $abcda$, взявши за кроки обходу ціле число міжатомних відстаней (у даному разі два). Для правильної структури контур обходу є чотирикутником. Після обходу кінцева точка збігається з початковою. Якщо обхід виконати так, що всередині контура обходу міститиметься лінія дислокації (обхід $a'b'c'd'd''a''$), то початкова точка обходу a' і кінцева a'' не збігаються, хоч $a'b' = b'c' = c'd' = d''a''$. Відстань $a''a'$ загалом може дорівнювати одній або кільком міжатомним відстаням. Вектор $\vec{a''a'}$ називають *вектором Бюргерса*. Він є сталим уздовж усієї лінії дислокації. Вектор Бюргерса — найбільш важлива характеристика дислокації. Він виражає міру спотворення гратки, зумовленої наявністю дислокацій.

Поверхневі дефекти в кристалах — це границі між окремими порізному орієнтованими частинами кристала (блоками мозаїки), границі зерен (між кристалітами в полікристалі), сама поверхня кристала, дефекти упаковки і двійники. Двійниками називають два кристали однієї речовини, що зрослися в одне тіло, в якому границею між цими кристалами є певна кристалографічна площина. Остання є площиною симетрії для кристала-двійника.

Об'ємні дефекти у кристалах — це тріщини, різні включення та інші макроскопічні утворення.

Огляд дефектів реальних кристалів показує, що в них досить складна структура. Дослідження дефектів, структури кристалів та встановлення закономірностей між фізичними властивостями кристалів і їхньою реальною структурою — одне з важливих завдань сучасної молекулярної фізики та матеріалознавства.

§ 18.4. Механічні властивості твердих тіл

Феноменологічна теорія деформацій твердих тіл уже розглядалась у п'ятому розділі. Як зазначалося, зовнішні механічні напруження, прикладені до твердого кристалічного тіла, зумовлюють два види деформацій: пружну і пластичну. Деформації спричиняють зміни взаємного розміщення структурних частинок тіла та відстаней між ними. Очевидно, що всі тверді тіла можуть бути деформованими як пружно, так і пластично, залежно від зовнішнього навантаження.

У разі пружної деформації структурні одиниці кристала під дією зовнішніх сил незначно зміщуються з положень рівноваги і відновлюють їх після припинення дії сил.

Під час пластичної деформації зафіксовано ковзання (зсув) одних шарів (атомних площин) кристала відносно інших. Ці зсуви відбуваються при всіх типах деформацій, включаючи і деформації розтягу (стиску). Підтвердженням цього є смуги ковзання, які спостерігаються в мікроскоп на поверхнях заздалегідь відполірованих монокристалів після їхнього деформування. Ці смуги — лінії перетину площин ковзання

з поверхнею кристала. Відстань між смугами ковзання перевищує міжатомні відстані. Це є свідченням того, що в ковзанні беруть участь не одиничні атомні площини, а їхні пачки. Крім того, експериментально встановлено, що ковзання завжди відбувається в певних площинах і навіть у певних напрямах у цих площинах незалежно від того, в якому напрямі діє деформуюча сила.

Який механізм ковзання одних шарів кристала відносно інших? Теорія механізму пластичної деформації ще незавершена. Проте установлено, що основним механізмом пластичної деформації є рух дислокацій. Справді, якби ковзання одних шарів відносно інших відбувалося одночасно по всій площині ковзання, то для його здійснення потрібно було б прикладання напружень порядку модуля зсуву G. Насправді межі пружності реальних кристалів у $10^2 - 10^4$ разів менші від їхніх модулей зсуву, тобто для пластичної деформації потрібні значно менші зовнішні напруження. Ці дослідні факти підтверджують, що механізм пластичної деформації повинен бути пов'язаний з переміщенням дислокацій. Це є своєрідними "ножицями", які дають змогу здійснювати розрив зв'язків у площині ковзання не одночасно, а по черзі. При цьому процес супроводжується зникненням (виходом назовні) крайової дислокації. Звичайно в кристалах є кілька площин ковзання. Напрям, для якого характерне критичне сколююче напруження (тобто мінімальне напруження, яке повинно діяти у напрямі ковзання, щоб воно почалося), називається напрямом найлегшого ковзання. Для описання пластичної деформації раціонально користуватися не прикладеним зовнішнім напруженням p (рис. 18.8), а напруженням, яке діє у площині ковзання в напрямі ковзання $p_к$. Це так зване *зведене напруження*. Відповідно до цього слід використовувати *зведену відносну деформацію* $\varepsilon_к$. Ці величини визначаються такими виразами:

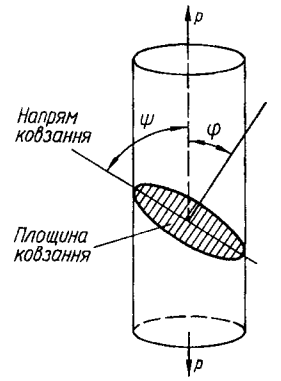


Рис. 18.8

$$p_к = p \cos\varphi \cos\psi, \tag{18.5}$$

$$\varepsilon_к = \frac{1}{\cos\varphi_0}\left(\left(\left(\frac{l}{l_0}\right)^2 - \sin^2\psi_0\right)^{\frac{1}{2}} - \cos\psi_0\right), \tag{18.6}$$

де φ_0 і ψ_0 — значення кутів у початковий момент ковзання; l_0 і l — початкова і кінцева довжини зразка; φ — кут між нормаллю до площини ковзання і віссю розтягу; ψ — кут між напрямом ковзання і віссю розтягу.

Переміщення дислокацій у твердому тілі гальмується їхньою взаємодією з різними домішками, границями зерен у полікристалі, а також з іншими дислокаціями. Одночасно при цьому відбувається генерація інших дислокацій та точкових дефектів, які і підтримують розвиток пластичної деформації.

Цим пояснюється те, що чисті монокристали, для яких густина дислокацій порівняно невелика, мають найменшу міцність (найменшу границю пружності), бо для них дислокації практично не перешкоджають одна одній у процесі переміщення. Міцність — це опір твердого тіла руйнуванню, розриву. "Міцність — це проблема віку", — говорив академік П. О. Ребіндер (1898—1972).

Одним із практичних методів зміцнення матеріалів може бути введення в них домішок (легування), зменшення розмірів зерен і т. д. Внаслідок пластичної деформації металів змінюється форма зерен і розташування їх у просторі, подрібнюються кристали тощо, тобто збільшується кількість дефектів у кристалах і цим самим

утруднюється переміщення дислокацій. Останні фактори і зумовлюють природу явища зміцнення металів при пластичному деформуванні у холодному стані. Йдеться про так званий наклеп у металі. При волочінні дроту і труб та при штампуванні в холодному стані виникає наклеп, який за цих умов називають загартуванням. Наклеп спричиняється зростанням дислокацій у тілі під час його пластичного деформування. Для виготовлення деталей машин складної конфігурації, щоб запобігти руйнуванню деталей, застосовують метали, які мають високу пластичність. Щоб усунути напруження в металі, які виникають при наклепі, застосовують рекристалізаційний відпал. Температура відпалу $T_{\text{рекр}}$ визначається за формулою $T_{\text{рекр}} = \alpha T_{\text{пл}}$, де α — коефіцієнт чистоти металу (для металів звичайної чистоти, що застосовуються в машинобудуванні, він становить 0,3 — 0,4); $T_{\text{пл}}$ — температура плавлення.

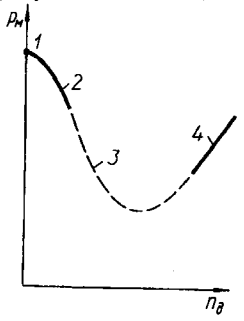


Рис. 18.9

Звичайно, можливий інший метод зміцнення кристалів — утворення бездислокаційних кристалів, які в принципі повинні мати максимальну границю пружності.

У 1924 р. академік А. Ф. Йоффе (1880—1960) показав, що міцність кристалів NaCl на розрив збільшується в 400 разів, якщо дослідження проводити з кристалами, вміщеними у водний розчин NaCl. При цьому міцність досягала майже теоретичного значення $15 \cdot 10^8$ Н/м². У процесі розчинення та кристалізації дуже зменшувалися поверхневі дефекти кристала. Аналогічні досліди були виконані на скляних та кварцових нитках. Встановлено, що при розчиненні їхнього поверхневого шару на глибину до кількох мікрометрів міцність ниток на розрив збільшується в 6 — 10 разів.

Утворені останнім часом у лабораторних умовах з газової фази бездислокаційні ниткоподібні кристали, так звані вуса, завтовшки $10^{-5} - 10^{-6}$ м мають міцність, яка близька до теоретичної. Наприклад, для вусів заліза вона становить $1{,}3 \cdot 10^{10}$ Н/м². Вуса сапфіру — рекордсмени міцності ($2{,}7 \cdot 10^{10}$ Н/м²). Найбільшу міцність мають вуса графіту.

Загальний характер залежності міцності кристала $p_м$ від густини дефектів $n_д$ передає крива Одинга — Бочвара (рис. 18.9), на якій точка *1* — теоретична міцність, лінія *2* — міцність вусів, лінії *3*, *4* — міцності відповідно чистих і зміцнених металів.

Розрізняють статичну, динамічну і циклічну міцності.

Важливою характеристикою механічних властивостей твердих тіл є твердість, яка визначає здатність матеріалу чинити опір проникненню в нього іншого тіла, тобто здатність протидіяти вдавлюванню або подряпанню. В першому випадку переборюються сили, які протидіють ковзанню частинок, у другому випадку — сили опору відриву частинок. Твердість — це комбінована властивість твердого тіла, яка залежить від міцності, пластичності, методу вимірювання. Твердість — досить чутлива характеристика щодо зміни структури матеріалу.

Аморфні тіла не здатні до пластичних деформацій. Наявні у них відхилення від пружних деформацій зводяться або до розриву, або до повільної течії під впливом діючих сил.

§ 18.5. Тепловий рух у твердих тілах. Теплове розширення твердих тіл

Тепловий рух частинок твердого тіла як конденсованого середовища відмінний від теплового руху частинок газу. В основу теорії твердого тіла покладено модель нескінченного ідеального монокристала. Структурні частинки або просто частинки твердого тіла, зв'язані між собою силами взаємодії, що залежать від відстаней, здійснюють коливання навколо положень рівноваги у вузлах.

Для ідеального кристала сили зв'язку описуються законом Гука

$$F = -k\frac{\Delta x}{x_0}, \tag{18.7}$$

де k — коефіцієнт пружного зв'язку; $x_0 = a$ — стала гратки; Δx — зміщення коливальної частинки.

Взагалі речовина може бути твердою лише при досить низьких температурах. Це означає, що енергія теплового руху kT повинна бути значно меншою від потенціальної енергії взаємодії частинок. Енергія коливальних теплових рухів зумовлює внутрішню енергію твердого тіла, яка визначає його температуру.

Відомо, що з підвищенням температури відбувається теплове розширення твердих тіл. Очевидно, що об'єм кристала збільшується при збільшенні середньої відстані між частинками. Кількісно теплове розширення характеризують *коефіцієнтами лінійного* α_l *та об'ємного* α_V *розширення:*

$$\alpha_l = \frac{1}{l_0}\left(\frac{dl}{dT}\right)_p, \quad \alpha_V = \frac{1}{V_0}\left(\frac{dV}{dT}\right)_p, \tag{18.8}$$

де l_0, V_0 — початкові довжина та об'єм.

Для твердих тіл у першому наближенні $\alpha_V = 3\alpha_l$. Найбільш точно це справджується для аморфних тіл та кристалів кубічних сингоній. Для твердих тіл α_V — величина порядку 10^{-5} К$^{-1}$. Коефіцієнт α_V для газів дорівнює 10^{-3} К$^{-1}$. Для більшості твердих тіл $\alpha_V > 0$. Це цілком природно, оскільки більш інтенсивний тепловий рух ніби розштовхує частинки. Досить малі значення α_V для плавленого кварцу — $\alpha_V = 1{,}2 \cdot 10^{-6}$ К$^{-1}$ — та інвару (сплав 64 % заліза і 36 % нікелю) — $\alpha_V = 3{,}0 \cdot 10^{-6}$ К$^{-1}$. Ці матеріали широко використовуються в точному приладобудуванні, коли потрібно уникнути зміни розмірів деталей при коливаннях температури.

Теплове розширення твердих кристалів знаходить фізичне пояснення на основі аналізу форми кривої потенціальної енергії взаємодії частинок твердого тіла — $W_п(r)$. У реальних кристалах сила взаємодії між сусідніми частинками визначається нескінченним рядом:

$$F = -k\frac{\Delta x}{x_0} + g\left(\frac{\Delta x}{x_0}\right)^2 + \ldots \qquad (18.9)$$

Другий член ряду стає важливим при великих значеннях коефіцієнта ангармонічності g та амплітуди коливань, тобто при високих температурах. Сили притягання ($F < 0$) переважають на великих відстанях між частинками, а сили відштовхування ($F > 0$) — на малих. Як наслідок, потенціальна крива $W_п(r)$, що синтезує притягання та відштовхування частинок, завжди асиметрична (рис. 18.10):

$$W_п = \frac{A}{r^n} - \frac{B}{r^m}, \quad m = 6,\ n = 12. \qquad (18.10)$$

Потенціальна крива при зменшенні відстані r між частинками круто йде вгору. При збільшенні r у потенціальної ями, що відповідає мінімуму $W_п$ (чим більша "глибина" потенціальної ями, тим міцніший зв'язок), з'являється "борт". На потенціальній кривій можна позначити крайні положення частинок, які здійснюють коливальний рух. Середнє положення частинки, тобто положення рівноваги, відповідає середині цього відрізка. Якби коливання частинок були гармонічними, положення рівноваги не залежали б від амплітуди коливань і були б незмінними і теплового розширення не було б. Інший результат маємо при ангармонічному характері коливань частинок. З підвищенням температури від T_1 до T_2 енергія коливальних частинок збільшується, і вони переходять на вищий енергетичний рівень. Зважаючи на те, що потенціальна крива асиметрична, середнє положення частинки, тобто положення центра коливань, зміщується вправо (рис. 18.10), тобто з підвищенням температури середня відстань між частинками зростає, тіло розширюється. Отже, теплове розширення твердих тіл є результатом ангармонічності коливань частинок, яка зумовлена асиметрією потенціальної кривої.

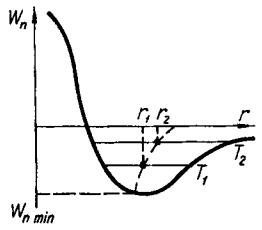


Рис. 18.10

Для різних кристалографічних напрямів відстані між структурними частинками і сили взаємодії між ними не однакові. Отже, теплове розширення в кристалі має анізотропний характер. Лінійні коефіцієнти розширення α_l залежать від симетрії кристала. Якщо нагрівати кулю, виготовлену з твердого матеріалу, то для кристалів кубічної сингонії та аморфних тіл куля зберігатиме свою форму; кристалічна куля в гексагональній, тетрагональній та тригональній сингонії стає еліпсоїдом обертання, а в ромбічній, моноклінній та триклінній сингонії — трьохосьовим еліпсоїдом. Коефіцієнт α_V з підвищенням температури зростає.

Зазначимо, що між тепловим розширенням твердих тіл і модулями пружної деформації є зв'язок. Формально теплове розширення також є деформацією, але, звичайно, механізм зовсім інший.

Якщо розглядати тверде тіло як термодинамічну систему, то при відсутності механічних напружень та інших зовнішніх дій, крім тиску, його стан повністю визначається параметрами p, v, T (v — питомий об'єм). Рівнянням стану твердого тіла є рівняння Мі-Грюнайзена:

$$p = -\frac{W_п}{v} + \gamma\frac{W_{кол}}{v}, \qquad (18.11)$$

де $W_п$ — потенціальна енергія взаємодії частинок, коли всі вони займають положення рівноваги; $W_{кол}$ — частина внутрішньої енергії, зумовлена коливаннями частинок; γ — параметр Мі-Грюнайзена, який показує, що зміна частот нормальних коливань частинок при зміні об'єму не залежить від номера нормального коливання.

§ 18.6. Теплоємність твердих тіл

Тепловий рух у твердому тілі визначається сукупністю коливальних рухів частинок — осциляторів. Нехай тверде тіло складається з N атомів, кожен з яких бере участь у коливальному русі і має три ступені вільності. Кожен атом здійснює коливання, які складаються з багатьох простих коливань.

Для довільної системи при малих коливаннях можна вибрати такі узагальнені координати q (так звані нормалі), що на кожен ступінь вільності припадатиме тільки одне просте гармонічне коливання. Тому тверде тіло можна розглядати як систему $3N$ незалежних гармонічних осциляторів, що описуватиметься рівняннями руху виду

$$\ddot{q}_i + \omega^2 q_i = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, N. \qquad (18.12)$$

Згідно з класичною теорією теплоємності твердих тіл теорема Больцмана про рівномірний розподіл енергії за ступенями вільності застосовна як до твердих тіл, так і до газів. Враховуючи, що на кожен ступінь вільності коливального руху припадає енергія kT, знайдемо внутрішню енергію U всіх частинок одного моля твердого тіла, що здійснюють коливальний тепловий рух,

$$U = 3N \cdot kT = 3RT. \qquad (18.13)$$

Тоді знайдемо

$$C_V = \left(\frac{dU}{dT}\right)_V = 3R. \qquad (18.14)$$

Отже, класична теорія теплоємності приводить до емпіричного *закону Дюлонга і Пті*, встановленого ще в 1819 р.: атомна теплоємність

усіх хімічно простих кристалічних твердих тіл приблизно дорівнює $3R$. Поширення закону Дюлонга і Пті на сполуки приводить до закону Неймана — Коппа: молярна теплоємність сполук приблизно дорівнює сумі атомних теплоємностей компонент сполук. Закон Дюлонга і Пті приблизно виконується для багатьох твердих тіл при температурах, близьких до кімнатної та вищих. Проте цей закон зовсім не описує зменшення C_V при зниженні температури. Отже, класична теорія теплоємності не пояснює залежності C_V від температури. Це є наслідком того, що в рамках класичної теорії враховується тільки загальне число ступенів вільності частинок без диференціації їх відносно частоти коливань.

У рамках квантової теорії вдається задовільно пояснити температурну залежність C_V твердих тіл.

Розділ 19. Рідини

§ 19.1. Загальні властивості та будова рідин

З молекулярно-кінетичної точки зору три стани речовини — твердий, рідкий та газоподібний — відрізняються один від одного інтенсивностями взаємодії молекул та їхнього теплового руху.

Розвиток теорії рідкого стану значно відстає від теорії газів і твердих тіл, оскільки є значні труднощі як фізичного, так і математичного характеру. Це пов'язано з своєрідною структурою рідин. У рідинах, на відміну від газів, молекули сильніше взаємодіють. На відміну від кристалів вони, крім того, не розміщені у вузлах періодичної гратки. Це не дає змоги внести відповідні спрощення в основи теорії. Якщо теорія твердого тіла вимагає врахування елементів "безпорядку" (дефектів структури), то теорія рідин, навпаки, потребує врахування елементів порядку ("ближнього порядку").

Розвиток уявлень про структуру рідин базується на рентгеноструктурних дослідженнях та дослідженнях дифракції електронів і нейтронів. Критерій "впорядкованості" структурних частинок твердого тіла, рідини і газу можна графічно подати у вигляді розподілу цих частинок залежно від їхніх відстаней від певної точки відліку, наприклад фіксованої молекули (рис. 19.1). На рисунку для твердого тіла $N(r)$ — число, для рідин і газу $N(r)$ — радіальна функція розподілу. Ця функція характеризує в умовних одиницях для даної молекули число найближчих сусідів і взаємне розміщення їх. Масштаб по осі ординат для газу на кілька порядків менший, ніж для рідин. Масштаби на осях координат для рідин і твердого тіла приблизно однакові. Як видно з рис. 19.1, *а*, тверде тіло зберігає періодичну структуру на великих відстанях. Дискретний пікоподібний хід $N(r)$ свідчить про

фіксоване положення молекул. У рідині хід кривої $N(r)$ (рис. 19.1, *б*) має неперервний характер з кількома екстремумами у вигляді затухаючих коливань навколо сталої середньої величини, яка зумовлена густиною рідини. Плавний хід функції $N(r)$ для газів (рис. 19.1, *в*) свідчить про безладне розміщення молекул газу одна відносно одної. Максимуми на кривих $N(r)$ для рідин вказують на найбільш імовірне розміщення молекул на певних відстанях r, хоч при цьому молекули можуть розміщуватися взагалі і на довільних відстанях від даної фіксованої молекули. Таким чином, для структури рідин є характерним уявлення про "розупорядковане" тверде тіло, якому властивий "ближній порядок" і відсутній "дальній порядок". Цю ідею висунув російський фізик Я. І. Френкель (1894—1952).

Згідно з моделлю Бернала структуру рідин характеризують три параметри: радіуси координаційних сфер, тобто відстані від фіксованої молекули до максимумів на кривих $N(r)$; число молекул у них та розмитість сфер. Послідовність максимумів на кривих $N(r)$ відповідає послідовності найбільш імовірних координаційних сфер і тому визначає характер ближнього порядку.

Отже, рідини за своєю структурою займають проміжне положення між твердими тілами і газами. Характер теплового руху молекул також відрізняється від руху частинок твердого тіла чи газу.

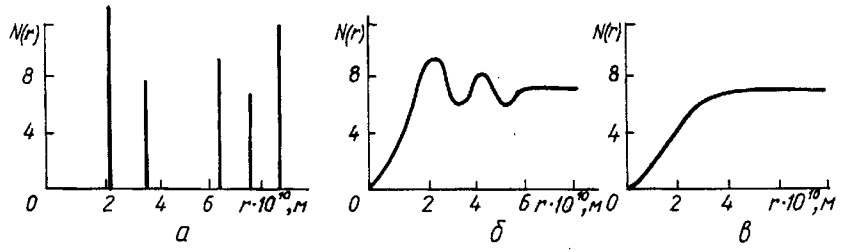


Рис. 19.1

За теорією Френкеля, тепловий рух молекул рідини — це локальні нерегулярні коливання навколо деяких положень рівноваги та неперервні стрибкоподібні переміщення з одного положення рівноваги в сусіднє. Це так звані трансляційні рухи, які передбачають існування в рідині вакантних місць — "дірок" або "локальних розріджень". Середній період коливання молекул біля положення рівноваги становить близько 10^{-12} с, а час "осілого життя" $\tau \sim 10^{-11}$ с. Останній визначають із співвідношення

$$\tau = A\, e^{\frac{\Delta W}{kT}}, \qquad (19.1)$$

де A — деякий коефіцієнт; ΔW — потенціальний бар'єр, що розділяє часові рівноваги. З підвищенням температури час τ зменшується.

Трансляційні рухи приводять до високої дифузійної здатності рідин, а також зумовлюють текучість їх.

Головними особливостями рідин є їхня здатність зберігати свій об'єм, який під дією сили тяжіння набирає форми посудини, та існування в рідині вільної поверхні.

Для рідин, на відміну від газів, подібно до твердих тіл характерним є мала стисливість, тобто вони мають певний власний об'єм.

Стисливість рідин досліджують за допомогою п'єзометрів. Коефіцієнт стисливості β_T визначається за формулою

$$\beta_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{dV}{dp}\right)_T. \qquad (19.2)$$

Знак "мінус" вказує на те, що при $dV > 0$ $dp < 0$, а β_T завжди береться додатним.

Коефіцієнт β_T для більшості рідин має значення від 10^{-9} до 10^{-10} $Па^{-1}$. Отже, він у десятки і сотні тисяч разів менший, ніж для газів. Це є прямим свідченням сильної дії молекулярних сил відштовхування. Серед усіх рідин найбільшу стисливість має рідкий гелій, для якого при тисках у кілька атмосфер $\beta_T = 8 \cdot 10^{-8}$ $Па^{-1}$.

Коефіцієнт стисливості рідин залежить від тиску і температури. Підвищення тиску і температури приводить відповідно до зменшення та до збільшення стисливості рідин.

Другою величиною, яка характеризує теплові властивості рідини, є коефіцієнт теплового розширення

$$\alpha_p = \frac{1}{V}\left(\frac{dV}{dT}\right)_p. \qquad (19.3)$$

Коефіцієнт α_p залежить від роду рідини, температури і зовнішнього тиску. Більшість рідин при нагріванні розширюється ($\alpha_p > 0$). Це цілком природно і зумовлюється збільшенням інтенсивності теплового руху. Проте є й винятки. Вода при нагріванні в інтервалі 0—4 °С, рідкий He II при $T < 2{,}19$ К зменшуються в об'ємі. Причиною такого аномального розширення, а також інших фізико-хімічних властивостей води є її особлива структура. Згідно з сучасними уявленнями для рідкої води характерна ажурна квазікристалічна структура з тетраедричною координацією сусідніх молекул, сполучених водневими зв'язками. Кожна молекула утворює чотири однакових водневих зв'язки. Для води в інтервалі температур 0—3,98 °С $\alpha_p < 0$. При $t = 3{,}98$ °С $\alpha_p = 0$ і густина води максимальна.

Для нормальних рідин підвищення тиску приводить до деякого зменшення α_p, а підвищення температури — до збільшення α_p.

Вимірюють залежності $\alpha_p(T)$ дилатометрами.

Теплове розширення рідин враховується й широко використовується в науці і техніці. Це термометрія, термостатування тощо. Результатом теплового розширення є конвекційний рух у рідинах, який відіграє значну роль при теплообміні в різних нагрівальних та охолоджувальних системах (водяне опалення приміщень, система охолодження двигунів внутрішнього згоряння тощо).

Теплоємності рідин, як правило, мало відрізняються від теплоємностей твердих тіл і значно перевищують теплоємності газів. Це пояснюється тим, що для газів взаємодія між молекулами незначна, і теплота витрачається на збільшення кінетичної енергії, а для конденсованого стану (тверде тіло, рідина) теплота перерозподіляється між кінетичною та потенціальною формами енергії.

Для рідин $C_p - C_V \neq R$ $\left(C_p - C_V = \frac{\alpha_p^2}{\beta_T} V_M T\right)$. Молярна теплоємність рідин C_p залежить від структури молекул рідини. Чим більше атомів входить до складу молекули, тим більша її теплоємність. Для більшості складних молекул тепловий рух реалізується як коливаннями молекул, так і обертальними рухами навколо центрів мас, а також зміщеннями одних частин молекули відносно інших. Характерною особливістю більшості речовин є те, що при $T_{пл}$ теплоємності твердих тіл та рідин мало відрізняються між собою.

Цей дослідний факт, а також малі порівняно з випаровуванням зміни питомого об'єму твердих тіл при плавленні, а також те, що питомі теплоти випаровування становлять приблизно 30—40 питомих теплот плавлення, є свідченням того, що зміна сил зв'язку між молекулами при плавленні значно менша, ніж при випаровуванні. Отже, при цьому здійснюється і менш корінна перебудова структури речовини. Таким чином, більш щільна упаковка молекул рідини наближає її до твердого тіла і відрізняє від газів.

Теплоємність рідини залежить від параметрів стану p і T, вона мало змінюється від тиску. Наприклад, для води ($t = 20$ °С) при збільшенні тиску від 0,1 до 100 МПа теплоємність зменшується тільки на 5 %. Проте для деяких рідин теплоємність при збільшенні тиску спочатку зменшується, досягаючи мінімального значення, а потім збільшується. Теплоємність рідин по-різному залежить від температури. Для більшості рідин (наприклад, органічних) з підвищенням температури вона зростає приблизно за лінійним законом $C_p = a + bT$, для одноатомних (наприклад, ртуті) C_p з підвищенням температури зменшується. Для інших рідин, наприклад для води, C_p з підвищенням температури спочатку зменшується, проходить через мінімум ($t \approx 35$ °С при атмосферному тиску), а далі зростає. Зменшення C_p води до 35 °С, очевидно, пов'язано з розривом водневих зв'язків,

а наступне збільшення C_p — з утворенням молекулярних асоціатів (груп молекул, взаємопов'язаних силами притягання).

Дифузія в рідинах, точніше самодифузія, зумовлена трансляційною компонентою теплового руху молекул рідини. Для рідин є також справедливим закон дифузії Фіка. Кінетична теорія визначає коефіцієнт самодифузії рідини так:

$$D = \frac{1}{6}\frac{<\delta^2>}{<t>}, \qquad (19.4)$$

де $<\delta^2>$ — середнє значення квадрата $<\delta>$ (величини трансляційного перескоку молекул рідини); $<t>$ — середній час "осілого" життя молекули.

Дифузійні процеси в рідинах характеризують груповими переходами молекул з одних положень рівноваги в інші, тоді як в твердих тілах — елементарними перескоками атомів при незмінному структурному порядку. Коефіцієнти самодифузії рідин D досить сильно залежать від температури:

$$D = Be^{-\frac{\Delta W}{kT}}, \qquad (19.5)$$

де B — коефіцієнт, який залежить від природи рідини; ΔW — енергія активації молекули. Для газів коефіцієнт D становить 0,1—0,9 $см^2/с$, для рідин він на 4—5 порядків менший. Для дифузії вуглецю в сталь при 1000 °С він дорівнює близько 10^{-9} $см^2/с$.

Теплопровідність рідин, згідно з сучасними уявленнями, характеризується перенесенням енергії молекулами рідини. Перенесення енергії відбувається при безпосередніх зіткненнях молекул. Для рідких металів коефіцієнт теплопровідності λ має значно більші значення порівняно зі звичайними рідинами. Це зумовлено тим, що в рідких металах теплоперенос здійснюється не тільки передачею коливань від одних частинок до інших, а й рухливістю електронів. Коефіцієнт теплопровідності рідин, як і газів та твердих тіл, визначається законом Фур'є. Коефіцієнт λ рідин визначають за формулою

$$\lambda = \rho c_V v_{зв} <l>, \qquad (19.6)$$

де ρ — густина; $<l>$ — середня міжмолекулярна відстань, $<l> = \Delta - d$ (Δ — відстань між центрами молекул діаметра d); $v_{зв}$ — швидкість звуку в рідині.

З підвищенням температури коефіцієнт λ рідин зменшується приблизно за лінійним законом. Коефіцієнт лінійності для різних типів рідин набуває значень від — 0,0005 до — 0,002.

§ 19.2. В'язкість рідин

В'язкість — це властивість рідин чинити опір переміщенню однієї їх частини відносно іншої під дією зовнішніх сил. Коефіцієнт в'язкості рідин η, як і газів, визначається за законом Ньютона. В'язкість рідин зумовлена рухливістю окремих молекул або атомів на відміну від газів, для яких внутрішнє тертя є результатом перенесення імпульсу хаотичним рухом молекул. Щодо рідин поняття імпульсу напрямленого руху окремих молекул навіть при наближеному розгляді втрачає сенс, бо він дуже змінюється у зв'язку з коливанням молекул рідини відносно рівноважних положень. Д. І. Менделєєв надавав великого значення дослідженню в'язкості. Ці дослідження знайшли свій розвиток у працях О. Й. Бачинського та О. З. Голика. Так, О. З. Голик підтвердив існування глибокого зв'язку між в'язкістю, критичною температурою, будовою молекул і характером сил зв'язку між молекулами. Зокрема, він показав, що для ізоморфних рідин коефіцієнт η при будь-якій температурі тим більший, чим вища T_K.

В'язкість рідин залежить від температури, зменшуючись з підвищенням її. Це цілком природно, бо при цьому полегшується взаємне переміщення молекул. Для різних рідин коефіцієнт в'язкості η з підвищенням температури змінюється по-різному. Для малов'язких рідин зменшення коефіцієнта η невелике, для більш в'язких воно досить значне. Наприклад, при Δt = 10 °С (від 20 до 30 °С) коефіцієнт в'язкості води зменшується на 20 %, а гліцерину — в 2,4 раза. Для описання температурної залежності коефіцієнта η рідин широко використовується формула Френкеля

$$\eta = A e^{\frac{\Delta W}{kT}}, \qquad (19.7)$$

де A — сталий коефіцієнт; ΔW — енергія активації (енергія, потрібна для переборення зв'язків і виконання скачка).

Співвідношення (19.7) підкреслює, що взаємне переміщення молекул рідини (їхня рухливість) пов'язане з послідовним подоланням енергетичного бар'єра при переході з одного рівноважного положення в інше. Формула Френкеля досить точно описує залежності $\eta(T)$ не тільки простих, а й складних рідин при p = const. При зниженні температури дуже в'язка рідина перетворюється в аморфне тіло.

О. Й. Бачинський раніше, ніж Я. І. Френкель, показав, що коефіцієнт η рідин повинен залежати від густини і збільшуватися при її збільшенні. Залежність коефіцієнта η від температури та тиску Бачинський звів до залежності тільки від питомого об'єму v, який розглядався як функція температури і тиску:

$$\eta = \frac{C}{v - w}, \qquad (19.8)$$

де C — стала величина, яка враховує сили міжмолекулярної взаємодії і пов'язана з сталою a в рівнянні Ван-дер-Ваальса; w — "граничний об'єм" за Бачинським, який наближено пов'язаний зі сталою b у рівнянні Ван-дер-Ваальса. Різницю $v - w$ Бачинський назвав "вільним об'ємом" рідини. Для багатьох рідин рівняння Бачинського добре узгоджується з дослідними даними.

Для вимірювання коефіцієнта в'язкості рідин тепер розроблено досить багато методів. Для числа Рейнольдса $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{кр}$ їх поділяють на три групи. Перша група методів грунтується на вимірюванні дотичних напруг p_τ при заданій сталій швидкості зсуву або сталому градієнті швидкості. Ці методи реалізуються за допомогою ротаційних віскозиметрів, принцип роботи яких грунтується на відносному обертанні коаксіальних циліндрів або конусів, вузький зазор між якими заповнюється досліджуваною рідиною. Друга група методів пов'язана з вимірюванням середніх швидкостей усталеної течії в потоці заданої форми або швидкості усталеного руху (падіння) твердих тіл певної форми (куля) в необмеженому середовищі. Йдеться про капілярний віскозиметр, дія якого грунтується на законі Пуазейля, та про методи падаючої кульки, в основі яких лежить закон Стокса. До третьої групи належать нестаціонарні методи, в основі яких є дослідження затухаючих крутильних коливань у в'язкому середовищі.

В'язкість рідин реагує на найменші зміни в молекулярній будові їх. При малих значеннях числа Re опір тілам, які рухаються в рідині, визначається здебільшого в'язкістю рідини, а при великих значеннях Re — інерцією рідини, яка тече, або формою рухомого в рідині тіла.

§ 19.3. Поверхневий шар рідини. Поверхневий натяг

Досі ми розглядали лише теплові властивості рідин та явища, які мають об'ємний характер. Наявність у тіл вільної поверхні, яка є границею фаз, приводить до існування особливого типу явищ, так званих поверхневих.

Система рідина — насичена пара при $T = \mathrm{const}$ перебуває у термодинамічній рівновазі. Для замкнутої системи швидкість випаровування з одиниці поверхні рідини дорівнює швидкості конденсації.

Густина рідини значно більша від густини її насиченої пари. Так, густина води при кімнатній температурі в $6 \cdot 10^5$ разів більша від густини її насиченої пари. Зважаючи на це, сили міжмолекулярної взаємодії в об'ємі рідини набагато більші, ніж у парі.

Розглянемо будь-яку молекулу A в об'ємі рідини, яка оточена молекулами з усіх сторін. Вона зазнає сферично-симетричної дії притягання сусідніх молекул силами Ван-дер-Ваальса (рис. 19.2). Зважаючи на однорідність об'єму рідини ($\rho = \mathrm{const}$), сили молекулярного притягання молекул у сфері молекулярної взаємодії ($r_{сф} \approx 10^{-9}$ м) будуть зрівноважені в усіх напрямах.

Молекули, розміщені в поверхневому шарі рідини, перебувають зовсім в інших умовах порівняно з тими, що знаходяться в об'ємі рідини. Товщину поверхневого шару візьмемо такою, що дорівнює радіусу сфери молекулярної взаємодії. Молекули насиченої пари знаходяться на значно більших відстанях між собою порівняно з молекулами рідини, тому $F_1 >> F_2$.

Результуючу силу, пропорційну різниці сил молекулярного притягання $F_1 - F_2$ і віднесену до одиниці площі поверхні, називають внутрішнім тиском p_i. Внутрішній тиск для рідин дуже великий. Це приводить до того, що рідини мало стисливі. Зауважимо, що безпосередньо внутрішній тиск виміряти не можна. Манометр для вимірювання тиску в рідині реєструє зовнішній та гідростатичний тиски. Внутрішній тиск можна обчислити за величиною роботи, яка виконується при проходженні молекул через поверхневий шар.

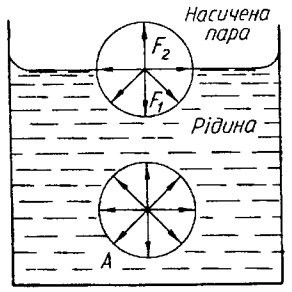


Рис. 19.2

Аналіз показує, що молекули поверхневого шару перебувають в особливому енергетичному стані порівняно з молекулами об'єму рідини. Справді, для переведення молекул рідини з її об'єму на поверхню, тобто для збільшення поверхні рідини, потрібно виконати роботу проти сил внутрішнього тиску. Суттєвим при цьому є характер процесу, при здійсненні якого робота, виконувана зовнішніми силами над системою (рідиною), повністю йшла на переведення молекул рідини з об'єму в поверхневий шар, тобто на збільшення поверхні рідини. Таким процесом повинен бути оборотний ізотермічний процес, а характеристичною термодинамічною функцією повинна стати *вільна енергія* — $F(S, T)$. Отже,

$$d'A = -dF = -\sigma dS, \tag{19.9}$$

де σ — питома вільна поверхнева енергія; dS — площа елемента поверхні рідини ($dS > 0$). Знак "мінус" у рівності (19.9) показує, що робота виконується зовнішніми силами над системою. Величину σ ще часто називають *коефіцієнтом поверхневого натягу*. Поряд з енергетичним трактуванням поверхневого натягу широко використовується більш наочний "силовий" підхід. У стані стійкої рівноваги надлишкова поверхнева потенціальна енергія рідини $П_п$ повинна бути мінімальною. Тому рідина, на яку не діють зовнішні сили, за умови її практичної нестисливості має набирати форми сфери. Отже, сили

поверхневого шару повинні зумовлювати тенденцію рідини зменшувати свою поверхню. Довільна крапля в невагомості буде сферичною. Це спостерігав космонавт В. М. Кубасов під час виконання електрозварювання електродом, який плавився. Краплі рідкого металу, що відривались від електрода, набували точно сферичної форми. Відливання дробу теж має в своїй основі тенденцію до утворення сферичної поверхні крапель рідкого свинцю, що, падаючи зі значної висоти, встигають затвердіти.

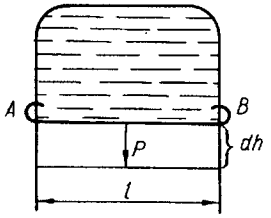


Рис. 19.3

"Силовий" підхід до описання поверхневих явищ потребує введення сил, що намагаються зменшувати поверхню рідини. Ці сили повинні бути напрямлені по дотичних до поверхні рідини.

Якщо дротяний контур з рухливою перетинкою AB помістити в мильний розчин, то він затягнеться мильною плівкою (рис. 19.3). Сили поверхневого натягу, якщо перетинка досить легка, намагатимуться скоротити поверхню рідини і перетинка почне підніматися вгору. У разі зрівноваження сил поверхневого натягу і тяжіння перетинка перебуватиме в рівновазі. Тоді $2F = P$, оскільки плівка має дві поверхні, де F — сила поверхневого натягу, P — сила тяжіння. Якщо під дією сили F перетинка з положення AB перемістилася на відстань dh, то робота, виконана нею, $d'A = Fdh = \sigma dS = \sigma l dh = \frac{P}{2}dh$. Тоді

$$\sigma = \frac{P}{2l}. \tag{19.10}$$

Таким чином, за формулою (19.10) коефіцієнт поверхневого натягу можна означити як величину, що чисельно дорівнює силі, яка діє по дотичній до поверхні рідини і припадає на одиницю довжини лінії — границі рідини.

Зазначимо, що "силове" тлумачення поверхневого натягу тепер використовується суто формально для полегшення різних розрахунків. Дуже важливою є залежність коефіцієнта поверхневого натягу від природи рідини і температури. Залежність $\sigma(T)$ вперше дослідив Д. І. Менделєєв у 1860 р. Він встановив, що для води, спирту, ефіру коефіцієнт σ з підвищенням температури зменшується за лінійним законом. Менделєєв також встановив, що для кожної рідини має існувати температура T_K, при якій поверхневий натяг дорівнює нулю, тобто зникають будь-які відмінності між рідиною та її насиченою парою. Цю температуру Менделєєв назвав "абсолютною точкою кипіння". Тепер загальноприйнятим став термін, за Ендрюсом, "критична температура". Зменшення коефіцієнта поверхневого натягу рідин з підвищенням температури не є безпосереднім свідченням про зменшення сил молекулярної взаємодії. Воно пов'язане з тим, що з підвищенням температури зростає (як в об'ємі, так і в поверхневому шарі) кінетична енергія теплового руху молекул. Лінійне зменшення коефіцієнта σ від T характерне і для багатьох рідких металів.

Відомо багато емпіричних формул для залежності $\sigma(T)$. Наведемо формулу Бачинського

$$\sigma = C(\rho_р - \rho_п)^4, \tag{19.11}$$

де C — стала для даної речовини; $\rho_р$ і $\rho_п$ — відповідно густини рідини і пари, які залежать від температури.

Характер залежності коефіцієнта σ від природи рідини передається наближено формулою Стефана

$$\sigma = \frac{q}{N_A}\left(\rho\frac{N_A}{M}\right)^{\frac{2}{3}}, \tag{19.12}$$

де ρ — густина; M — молярна маса; q — молярна теплота випаровування рідини; N_A — число Авогадро. Ця формула встановлює два основних параметри, які визначають коефіцієнт σ. Це число нескомпенсованих зв'язків на одиницю поверхні рідини, яке пропорційне густині, та робота переміщення молекули рідини з її об'єму на поверхню, що пропорційна теплоті випаровування.

§ 19.4. Формула Лапласа. Змочування та капілярні явища

Сили поверхневого натягу завжди напрямлені по дотичній до поверхні *меніска*, тобто поверхні розділу фаз рідина — пара. У разі викривленого меніска сили поверхневого натягу створюють додатковий тиск Δp порівняно з плоским меніском. Для випуклого меніска $\Delta p > 0$, для вгнутого — $\Delta p < 0$. Для рідкої сферичної краплі в повітрі ($\Delta p > 0$) тиск рідини у ній більший від тиску навколишнього повітря.

Для обчислення Δp визначимо роботу поверхневих сил при зменшенні площі поверхні краплі радіуса r на dS, прирівнявши її до роботи одночасного зменшення об'єму dV:

$$S = 4\pi r^2,\ dS = 8\pi r dr,\ V = \frac{4}{3}\pi r^3,\ dV = 4\pi r^2 dr,\ \sigma dS = \Delta p dV,$$

$$8\pi\sigma r dr = \Delta p \cdot 4\pi r^2 dr.$$

Тоді

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{r}. \tag{19.13}$$

Для циліндричного меніска Δp визначається формулою $\Delta p = \sigma/r$. Справді, для циліндра завдовжки l та радіуса r маємо: $V = \pi r^2 l$; $dV = 2\pi r l dr$, $S = 2\pi r l$; $dS = 2\pi l dr$. Звідси, як і для сферичного меніска, дістаємо $\Delta p = \sigma/r$. У загальному випадку меніска довільної форми з подвійною кривизною Δp виражається формулою Лапласа:

$$\Delta p = \sigma\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right), \qquad (19.14)$$

де r_1 і r_2 — головні радіуси кривизни.

Строге доведення цієї формули виконали німецький математик, астроном і фізик К. Гаусс (1777—1855) та американський фізик-теоретик Д. Гіббс (1839—1903).

При контактній молекулярній взаємодії рідини з твердим тілом одним з найефективніших способів оцінки цієї взаємодії є дослідження явища *змочування*. Якщо нанести краплю рідини на поверхню твердого тіла, то граничними конфігураціями краплі рідини будуть такі, як показано на рис. 19.4, *а, б*. Аналогічно вільна поверхня рідини біля стінок посудини викривлена і має вигляд, як показано на

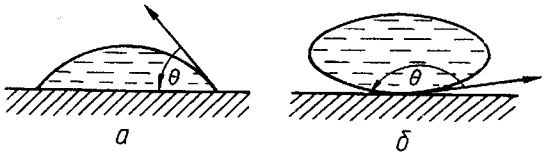


Рис. 19.4

рис. 19.5, *а, б*. Явище змочування описується крайовим кутом Θ, утвореним дотичною до поверхні рідини біля її границі з твердим тілом і твердим тілом. Для означеності кут Θ відраховують від дотичної в бік рідини. При змочуванні $\Theta < \pi/2$, тоді тверду поверхню називають ліофільною або гідрофільною. При незмочуванні $\Theta > \pi/2$, тоді тверду поверхню називають ліофобною або гідрофобною. При $\Theta < \pi/2$ взаємодія між твердим тілом і рідиною значна, при $\Theta > \pi/2$ слабка. Гідрофільними матеріалами є кварц, кальцит, деякі оксиди металів. Гідрофобним є парафін ($\Theta = 105°$).

Замкнену лінію, що обмежує поверхню розділу твердого тіла і краплі, називають *периметром змочування*. Розглянемо поверхневі сили, що діють на одиницю довжини периметра змочування в околі точки A (рис. 19.6). При цьому коефіцієнт поверхневого натягу на границі тверде тіло *1* — рідина *2* позначимо σ_{12}, на границі тверде тіло *1* — газ *3* позначимо через σ_{13}, а на границі рідина *2* — газ *3* позначимо через σ_{23}.

Після закінчення розтікання краплі для рівноважного положення її на поверхні твердого тіла маємо

$$\sigma_{12} + \sigma_{23}\cos\Theta = \sigma_{13}, \qquad (19.15)$$

або

$$\cos\Theta = \frac{\sigma_{13} - \sigma_{12}}{\sigma_{23}}. \qquad (19.16)$$

Косинус рівноважного крайового кута змочування вважають універсальною мірою змочування. Крайовий кут залежить теоретично

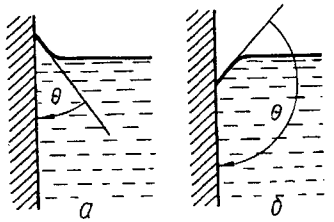


Рис. 19.5

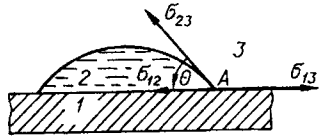


Рис. 19.6

тільки від фізико-хімічної природи трьох фаз, що контактують. Він є досить наочною і зручною характеристикою змочування. Проте при дослідному визначенні Θ потрібно врахувати так званий гістерезис змочування, тобто його залежність від умов натікання чи стікання рідини по твердій поверхні. Можна зафіксувати, що при стіканні краплі дощу по віконному склі крайовий кут у нижній частині краплі (натікання) більший, ніж у верхній частині (стікання). Гістерезис змочування залежить від швидкості переміщення периметра змочування, від структури, чистоти, мікрорельєфу твердої поверхні тощо.

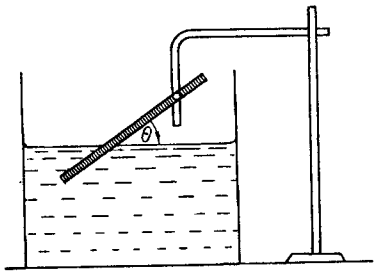


Рис. 19.7

Для вимірювання кута в прозорих рідинах досить зручним є метод похилої пластинки Адама-Харкінсона (рис. 19.7). Легенька пластинка, яка вільно рухається в затискачі при горизонтальному розміщенні поверхні рідини, має кут нахилу до горизонталі, що дорівнює крайовому куту. Рівноважне положення пластинки фотографується.

Явище змочування зумовлює ефективність перебігу багатьох важливих технологічних процесів — зварювання металів, склеювання, паяння, лудіння, фарбування тощо. Явище змочування рідин спричиняє капілярні явища. Ці явища мають надзвичайно велике значення в природі та техніці. Прикладами є живлення рослин розчинами грунтових вод через кореневу систему, вбирання рідин пористими речовинами, багатогранні технологічні процеси тощо.

Приклад 19.1. Визначити висоту h піднімання рідини в циліндричній капілярній трубці сталого діаметра, яку помістили в широку посудину (рис. 19.8). На рисунку r — радіус кривизни вгнутого меніска, R — радіус капілярної трубки.

Розв'язання. Причиною підняття змочуючих рідин у капілярних трубках є різниця тисків під вгнутим меніском $p_{\cup}$ капіляра та під горизонтальною поверхнею в широкій посудині.

Для точок A і B в умовах рівноваги маємо

$$p_{\cup} = p_{\text{атм}} + \rho g\,(h + l) + p - \frac{2\sigma}{r};$$

$$p_{-} = p_{\text{атм}} + \rho g l + p,$$

де $p_{\text{атм}}$ — атмосферний тиск; ρgh і ρgl — гідростатичні тиски; p — молекулярний тиск; $2\sigma/r$ — додатковий тиск Лапласа.

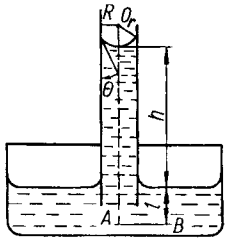


Рис. 19.8

При умові рівноваги $p_{\cup} = p_{-}$. Тоді $\rho gh = \frac{2\sigma}{r}$. Оскільки $r = \frac{R}{\cos\Theta}$, то

$$h = 2\frac{\sigma}{\rho g R}\cos\Theta.$$

Звідси маємо, що величина h прямо пропорційна коефіцієнту поверхневого натягу і обернено пропорційна густині рідини і радіусу капіляра.

§ 19.5. Поверхнево-активні речовини. Адсорбція. Флотація

У широкому плані поверхнево-активні речовини (ПАР) — це речовини, які інтенсивно адсорбуються на поверхнях розділу фаз, що супроводжується відповідним зменшенням поверхневого натягу σ.

У більш вузькому розумінні йдеться про значне зменшення σ води як розчинника під дією ПАР. При цьому спостерігається накопичення молекул ПАР у поверхневому шарі, де їхня концентрація стає значно більшою порівняно з об'ємом при одночасній спрямованій орієнтації їх.

Цей результат є наслідком асиметричного дифільного характеру будови молекул ПАР. Вони складаються з двох частин різної активності. Кожна молекула має полярну гідрофільну "голову" та гідрофобний неполярний "хвіст". "Голова" має одну або кілька полярних груп (наприклад, гідроксили — OH, карбоксили COOH, аміногрупи — NH_2 та ін.). "Хвіст" має один або кілька вуглецевоподібних радикалів з слабким молекулярно-силовим полем (рис. 19.9). Полярна група зображена у вигляді кружечка, неполярний радикал — у вигляді риски. До ПАР належать різні компоненти нафти, мило, деякі жирні кислоти, спирти, ефіри, амінокислоти, детергенти (миючі засоби) при розчиненні їх у воді.

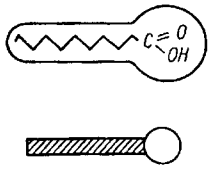


Рис. 19.9

Зменшення σ у розчинах ПАР зумовлене підвищенням їхньої концентрації в поверхневому шарі, тобто адсорбцією. Мірою адсорбції є величина Г (моль/м^2), що виражає зміну вмісту кількості молів компоненти ПАР в поверхневому шарі порівняно з її вмістом в об'ємі розчинника, віднесеної до одиниці площі поверхні. Першими фундаментальними працями з теорії адсорбції були термодинамічна теорія Д. Гіббса та експериментальні дослідження І. Ленгмюра. На поверхнях твердих тіл також утворюються адсорбційні плівки, які відіграють величезну роль в явищах, пов'язаних з тертям, міцністю матеріалів тощо. Змащувальна здатність мастил пов'язана з наявністю орієнтованих адсорбційних шарів мастила, як ПАР, що утворюються на поверхні твердого тіла.

Дослідженнями російського фізико-хіміка Б. В. Дерягіна (1902—1994) встановлено, що товщина граничних шарів становить десятки мономолекулярних шарів. Вони мають аномально високу в'язкість і не видавлюються із зазорів поверхонь, які труться. Згідно з цим механізм змащувальної дії можна подати так: ковзання здійснюється між кінцями неполярних гнучких ланцюгів молекулярних шарів, які орієнтовані на тертьових поверхнях (рис. 19.10). При цьому зменшуються макро- і мікрошорсткості на стичних поверхнях твердих тіл. Взаємне тертя між орієнтованими шарами ПАР менше, ніж при безпосередньому контакті незмащених поверхонь.

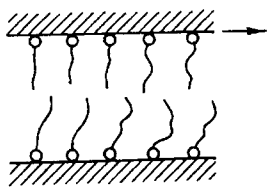


Рис. 19.10

Адсорбція ПАР на поверхні твердих тіл веде до адсорбційного зниження міцності твердих тіл (ефект Ребіндера). Це явище широко застосовується для інтенсифікації важливих технологічних процесів, пов'язаних з руйнуванням твердих тіл. Це і буріння гірських порід, і тонке подрібнення твердих тіл у звичайних умовах та при вібрації, подрібнення під дією ультразвуку тощо.

Дія ПАР спричинює також якісні зміни механічних властивостей матеріалу, наприклад адсорбційне зниження границі міцності може зробити її значно меншою за границю текучості. Це веде, в свою чер-

гу, до крихкого розриву тіл, пластичних у звичайних умовах. Наприклад, стальні осі іноді ламаються, коли плавиться бабіт у підшипниках. Отже, рідкі метали та їхні сплави можуть бути ПАР. Водні розчини ПАР можуть також знижувати міцність аморфних тіл.

Молекулярно-фізичне трактування механізму ефекту Ребіндера таке. Акт адсорбції ПАР на поверхні твердих тіл зумовлює зменшення поверхневої енергії тіла при одночасному розриві зв'язків між елементами його структури. Адсорбція ПАР призводить до проникнення їхніх молекул у мікротріщини поверхні тіла, до появи додаткового "розклинюючого" тиску, розвитку нових мікротріщин і навіть до руйнування тіла дією невеликих навантажень.

Адсорбція здійснюється також на границі тверде тіло — газ. Тверде тіло, на поверхні або в об'ємі пор якого здійснюється адсорбція, називають *адсорбентом*. Речовина, що адсорбується з газової фази, є *адсорбтив*.

Фізична адсорбція спричиняється дією молекулярних сил: неспецифічних (дисперсійні сили) та специфічних (орієнтаційні, індукційні сили та водневі зв'язки).

З термодинамічної точки зору для адсорбції є характерним зменшення вільної поверхневої енергії системи. Адсорбція — це самовільний оборотний процес. Перехід молекул речовини з газової або рідкої фази в адсорбований стан призводить до втрати цими молекулами принаймні одного ступеня вільності. Це супроводжується також зменшенням ентропії системи.

На різному змочуванні речовин грунтується явище флотації (від. англ. *float* - спливання), яке має виняткове значення для збагачення бідних руд (зменшення пустої породи) та інших корисних копалин. Флотація полягає в розділенні суміші гідрофільних та гідрофобних порошків на основі їхнього вибіркового змочування різними рідинами. Для реалізації флотації заздалегідь роздріблену породу (0,1—0,01 мм) енергійно перемішують у воді, що містить незначні концентрації ПАР (наприклад, дешеві масла), і спінюють. Основна пуста порода (кварц, силікати, вапняки тощо) осідає на дно, оскільки вона гідрофільна. Гідрофобні частинки цінних матеріалів втягуються в масло. При спінюванні суспензії пропусканням повітря частинки мінералів з маслом притягуються до бульбашок повітря і виносяться з піною у відстійники.

Фізико-хімічні основи флотації досконало вивчив російський фізико-хімік П. О. Ребіндер (1898—1972).

§ 19.6. Рідкі розчини. Закони Рауля

Розчини — це однорідні (гомогенні) суміші частинок (молекул, атомів, іонів), між якими можливі хімічні та фізичні взаємодії.

Розчини можуть бути твердими, наприклад, деякі сплави і мінерали; рідкими і навіть газоподібними, наприклад, суміші азоту і аміаку.

Згідно з теорією фаз рідкий розчин — однофазна рідинна система змінного складу, утворена не менш ніж двома незалежними компонентами. Компонент, агрегатний стан якого не змінюється при утворенні розчину, називають *розчинником*. Для рідких розчинів типу рідина — рідина під розчинником розуміють компонент, кількість якого є переважною.

Склад розчину виражається концентраціями. На практиці прийнято розрізняти: масову концентрацію — відношення маси розчиненої речовини до маси всього розчину; об'ємну концентрацію — відношення об'єму розчиненої речовини до об'єму розчину (p, T = const); молярну концентрацію — відношення числа молів розчиненої речовини до загального числа молів речовини розчину.

Досить часто склад розчину виражають такими величинами, як молярність — число молів розчиненої речовини в 1 л розчину; моляльність — число молів розчиненої речовини в 1000 г розчину.

Механізм утворення рідких розчинів зумовлюється характером взаємодії молекул $A \leftrightarrow A$, $A \leftrightarrow B$, $B \leftrightarrow B$ (A — рідина, B — розчинена речовина). Характер цих взаємодій, крім того, залежить і від концентрації розчину. Власне процес розчинення спричиняється взаємодією частинок розчиненої речовини з частинками розчинника. Фізико-хімічна теорія розчинів створена працями Д. І. Менделєєва, І. О. Каблукова та інших вчених.

У процесі розчинення дуже послаблюються взаємодії типу $B \leftrightarrow B$; частинки розчинюваної речовини внаслідок теплового руху розходяться і внаслідок дифузії розподіляються в усьому об'ємі розчинника. При розчиненні, наприклад, кислот, солей, лугів у воді відбувається електролітична дисоціація їхніх молекул.

Частинки розчиненої речовини взаємодіють з молекулами розчинника, утворюючи комплекси — сольвати, а для водних розчинів — гідрати.

При розчиненні інших сполук внаслідок сольватації молекул роль розчинника зводиться до створення умов для роз'єднання іонів протилежного знака та до утруднення процесу молізації. Сильна взаємодія полярних молекул розчинника приводить до розриву ковалентних зв'язків у молекулі розчиненої речовини. При цьому електронна пара, яка здійснює цей зв'язок, залишається в одному з атомів або в групі атомів. Процеси поділу частинок розчиненої речовини та перехід їх у розчин супроводяться виділенням або поглинанням теплоти розчинення. Її джерелом є внутрішня енергія розчинника, а також характер взаємодії молекул $A \leftrightarrow B$. Теплота розчинення — це теплота, що виділяється (екзотермічний процес, $q_{\text{розч}} < 0$) або поглинається (ендотермічний процес, $q_{\text{розч}} > 0$) для поділу частинок розчинюваної речо-

вини і переведення їх у розчин. При розчиненні газів і рідин теплота переважно виділяється. Так, при розчиненні у воді при кімнатній температурі етилового спирту, аміаку, сірчаної кислоти, їдкого калію тощо розчин нагрівається. При розчиненні у воді твердих тіл теплота може виділятися — розчинення KOH, $Ca(OH)_2$ — і поглинатися — розчинення NaCl, KNO_3, AgCl, P_5O_5, NH_4NO_3. У загальному випадку $q_{розч}$ залежить від природи компонентів розчину, складу утвореного розчину, тиску і температури. Якщо розчинення речовини супроводиться виділенням теплоти, то його розчинність при нагріванні зменшується (KOH, $Ca(OH)_2$). Якщо речовини розчиняються з поглинанням теплоти, то нагрівання приводить до збільшення розчинності (NH_4NO_3). Розчинність газів при нагріванні переважно зменшується, а при збільшенні тиску підвищується. При $q_{розч} = 0$ розчини називають ідеальними. До них близькі розчини метилового спирту в етиловому, бензолу в толуолі та ін. Взагалі, чим менша концентрація розчину, тим більше він наближається до ідеального.

Крім енергетичних ефектів розчинення може супроводитися контракцією, тобто зміною об'єму, який займають компоненти розчину. При розчиненні іноді спостерігається зміна забарвлення. Наприклад, білий сульфат міді $CuSO_4$ утворює водний розчин синього кольору. Фізичні властивості розчинів відрізняються від властивостей чистих речовин.

Ідеальні розчини описуються трьома законами Рауля. Перший закон полягає в тому, що для концентрованих ідеальних розчинів і будь-яких слабких розчинів зниження тиску насиченої пари розчину пропорційне його мольній концентрації:

$$\frac{p_0 - p}{p_0} = \frac{\nu_0}{\nu_0 - \nu},$$

де p_0 і p — тиск насиченої пари чистого розчинника і розчину; ν_0 і ν — число молів розчиненої речовини і розчинника.

Другий закон полягає в тому, що зниження тиску насиченої пари розчину зумовлює підвищення його температури кипіння:

$$\Delta T_{кип} = E\frac{m}{M} = \frac{RT^2}{\lambda m_1} \cdot \frac{m}{M}, \qquad (19.17)$$

де $E = \frac{RT^2}{\lambda m_1}$ — ебуліоскопічна стала; λ — питома теплота пароутворення розчинника при температурі кипіння T; m — маса в грамах розчиненої речовини в m_1 грамах розчинника; M — молярна маса розчиненої речовини. Ебуліоскопічна стала залежить тільки від природи розчинника.

Другий закон Рауля можна використати для визначення молярної маси M розчиненої речовини за вимірюванням $\Delta T_{кип}$. Цей метод називають *ебуліоскопічним.*

Третій закон Рауля описує зниження температури замерзання розчину:

$$\Delta T = k\frac{m}{M} = \frac{RT_0^2}{rm_1} \cdot \frac{m}{M}, \qquad (19.18)$$

де $k = \frac{RT_0^2}{rm_1}$ — кріоскопічна стала; T_0 — температура тверднення розчину; r — питома теплота тверднення.

Зниження температури розчинів при замерзанні вперше встановив М. В. Ломоносов. Закон Рауля також дає змогу провести визначення молярної маси M розчиненої речовини. Цей метод називають *кріоскопічним.*

Для розчинів електролітів числові значення температури замерзання та підвищення температури кипіння є завжди більшими від теоретично обчислених за законами Рауля. Це пояснюється збільшенням числа сольватованих частинок внаслідок електролітичної дисоціації електроліту. Кріоскопічний метод широко застосовується як один з універсальних методів дослідження молекулярних мас речовин, що розкладаються при нагріванні, наприклад, вибухових речовин або речовин, які суттєво змінюють свій склад (білки, що згортаються при нагріванні). Він є більш точним порівняно з ебуліоскопічним методом.

Рідини з обмеженою розчинністю утворюють системи, які розшаровуються, наприклад, вода — ефір, вода — фенол та ін.

§ 19.7. Осмотичний тиск. Закон Вант-Гоффа

Крім вільної дифузії в рідинах і рідких розчинах, можлива також дифузія через пористі перетинки. Особливий інтерес становлять так звані напівпроникні перетинки, через які можуть проходити одні компоненти розчину і не можуть проходити інші.

Така властивість перетинок є характерною для оболонок клітин рослин, тваринних міхурів. Напівпроникні перетинки утворюються також штучним способом. Наприклад, широке застосування знаходять перетинки з пористої глини або фарфору, пори яких затягнуті плівками, що створюються під час хімічних реакцій між двома розчинами, які знаходяться по різні сторони пористого матеріалу. Так, наприклад, можна взяти розчин мідного купоросу і солі гексаціанофериту калію ($K_4Fe(CN)_6$), які змішуючись і взаємодіючи в порах, затягують їх плівками погано розчиненої солі $Cu_2Fe(CN)_6$ — фероціаніду міді. Напівпроникними перетинками є також колодійні плівки, риб'ячі пухирі.

Процес вільної дифузії як необоротний процес відбувається при збільшенні ентропії і приводить до вирівнювання концентрації.

Розглянемо процес дифузії через напівпроникні перетинки (мембрани). Помістимо посудину A, заповнену розчином і закриту знизу

напівпроникною перетинкою *П*, у велику посудину *В* з чистим розчинником. Верхня частина посудини *А* закінчується довгою трубкою малого діаметра *С* (рис. 19.11). Напівпроникна перетинка легко пропускає розчинник і не пропускає розчиненої речовини, молекули якої чинять на перетинку так званий осмотичний тиск. При цьому перетинка прогинається в бік чистого розчинника.

Для розчинів малої концентрації відстані між молекулами розчиненої речовини значно більші від розмірів молекул. Це дає підставу для проведення аналогії між характером теплового руху молекул розчиненої речовини та молекул ідеального газу. Подібно до того, як молекули газу чинять тиск на стінки посудини, молекули розчиненої речовини також чинять тиск у розчині. Парціальний надлишковий тиск частинок розчиненої речовини в розчині називають *осмотичним* ($p_{осм}$). Осмотичний тиск піднімає розчин у трубці *С* вгору і одночасно вигинає перетинку *П* у зворотному напрямі. Піднімання розчину здійснюватиметься доти, доки $p_{осм}$ стане таким, що дорівнюватиме гідростатичному тиску стовпчика розчину ($p_{осм} = \rho g h$, де ρ — густина розчину).

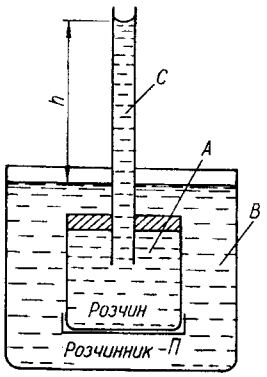


Рис. 19.11

Підняття розчину в трубці *С* пов'язане з проникненням чистого розчинника в розчин через напівпроникну перетинку. Це явище називається осмосом. Осмос — одностороння вибіркова дифузія розчинника через напівпроникну перетинку від нижчої концентрації до вищої. Напрям осмосу цілком визначається другим законом термодинаміки. Згідно з цим законом повинно реалізуватися вирівнювання концентрацій у посудинах *А* і *В*.

Розвиваючи аналогію між властивостями ідеальних газів і слабких розчинів, нідерландський фізико-хімік Вант-Гофф (1852—1911) застосував рівняння Менделєєва — Клапейрона до розчиненої речовини, розглядаючи *V* як об'єм розчину, а осмотичний тиск — як аналог тиску газу. Тоді дістаємо

$$p_{осм} = \frac{m}{M}\frac{RT}{V} = C_M RT. \qquad (19.19)$$

Рівняння (19.19) виражає закон осмосу Вант-Гоффа. Осмотичний тиск розчину пропорційний молярній концентрації та температурі.

При $V = \text{const}$, $T = \text{const}$ осмотичний тиск визначається тільки числом частинок розчиненої речовини і не залежить від їхньої природи, а також від природи розчинника. Цей результат аналогічний не-

залежності тиску ідеального газу від його природи. Визначення осмотичного тиску розчинів дає змогу вивчати молекулярний стан розчиненої речовини. Закон Вант-Гоффа характерний для розчинів, які одночасно є розбавленими та ідеальними. Для електролітів $p_{осм} = \alpha C_M RT$, де α — ступінь дисоціації.

В. Пфеффер сконструював осмометр — прилад для вимірювання $p_{осм}$ і вивчив залежність $p_{осм}$ від температури та концентрації розчину, а також перевірив закон Вант-Гоффа для однопроцентного розчину цукру у воді. Якщо кілька речовин розчиняються у слабких розчинах, то для $p_{осм}$ справджується закон, подібний до закону Дальтона для суміші газів.

Осмотичні явища відіграють велику роль у життєдіяльності рослинних і тваринних організмів. Оболонки їхніх клітин — напівпроникні перетинки, і багато важливих обмінів речовин здійснюється через них. Це, наприклад, проникнення грунтових розчинів у кореневі волоски рослин та поживних соків у клітини рослин і тварин. Через осмотичні явища на солончаках рослини не можуть проростати. Причиною є обернений осмос, тобто виведення води з рослин у грунт. Клітини мікроорганізмів, поміщені в концентрований розчин цукру, віддають йому воду, стискаються і гинуть; навпаки, сухе насіння гороху, бобів, розміщених у воді, поглинає її і розбухає. З осмотичними процесами ми зустрічаємося також в органічній технології. До них належать соління і маринування овочів, добування цукру з буряків, фарб з органічних речовин, дубильних екстрактів, виготовлення настоїв з ягід і фруктів тощо.

§ 19.8. Рідкі кристали

Рідкі кристали — це рідини, для яких характерним є певний порядок розміщення молекул і, як наслідок цього, анізотропія механічних, електричних, магнітних та оптичних властивостей. І хоч рідкі кристали поєднують у собі властивості твердого тіла та ізотропної рідини, електро- і магнітооптичні явища в них досить специфічні і, як правило, не мають відповідних аналогів у твердій та ізотропній рідкій фазах. Якщо немає зовнішніх дій, в рідких кристалах має місце анізотропія діелектричної проникності, магнітної сприйнятливості, електропровідності та теплопровідності. У них спостерігається подвійне заломлення світлових променів та дихроїзм.

Перші спостереження рідкокристалічних, або мезоморфних, властивостей провели наприкінці минулого століття австрійський вчений Ф. Рейнітцер і німецький вчений О. Леман. Рідкокристалічний стан речовини іноді називають *мезоморфним*, а рідкий кристал — *мезофазою* ("мезос" — проміжний).

Тепер відомо понад десять тисяч органічних сполук, які є рідкими кристалами. До них належать мило, віруси, білок в ядрі клітини, сполуки холестерину та інших стероїдів, антоціан у листі капусти, ДНК, мозок тощо.

Необхідною умовою прояву мезоморфізму є існування геометричної анізотропії молекул, які повинні бути довгими і порівняно вузькими. Залежно від геометрії молекул система може проходити через одну або кілька мезофаз до переходу в ізотропну рідину. Переходи в ці проміжні стани можуть спричинятися суто термічними процесами (термотропний мезоморфізм) або впливом розчинника (ліотропний мезоморфізм).

У рідких кристалів після досягнення певної температури руйнується тривимірна гратка, але вони після цього не переходять у рідкий ізотропний стан, а зберігають дво- або одновимірну впорядкованість внаслідок анізотропії молекул. Відкриття рідких кристалів було пов'язано з тим, що при плавленні деяких речовин замість прозорого розплаву утворюється мутний. Мутність його зумовлена невпорядкованим подвійним променезаломленням подібно до кристалів кварцу та ісландського шпату. З підвищенням температури у таких речовин спостерігається перехід до звичайного ізотропного прозорого розплаву.

Як уже зазначалося, за способом одержання рідкі кристали поділяють на термотропні і ліотропні. Термотропні рідкі кристали утворюються при нагріванні твердих кристалів або охолодженні ізотропної рідини і існують у певному інтервалі температур. Ліотропні рідкі кристали утворюються при розчиненні твердих органічних речовин у різних розчинниках, наприклад у воді. Термотропні і ліотропні рідкі кристали мають кілька модифікацій рідкокристалічних фаз, кожній з яких на фазовій діаграмі відповідає певна область. Температурний інтервал існування рідкокристалічних фаз залежить від речовини і може знаходитись як при низьких (до – 60 °С), так і при високих температурах (до 400 °С).

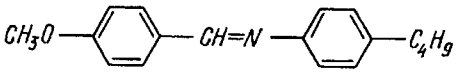


Рис. 19.12

На рис. 19.12 зображено молекулу типового термотропного рідкого кристала, що подібна до стержня. Характерним для таких кристалів є наявність двох або трьох бензольних кілець. До ліотропних рідких кристалів належать системи мило — вода; це розчин так званих амфіфільних сполук. Кожна молекула таких речовин має полярну "голову", яка розчинна у воді і нерозчинна у вуглеводах. Друга частина молекули — це вуглеводневий ланцюжок, який не розчиняється у воді. Це призводить до виникнення ламелярних (шаруватих) фаз у водних розчинах, в яких полярні "голови" повернуті до прошарків води, а вуглеводневі ланцюжки повернуті один до одного, утворюючи бішар (рис. 19.13).

Напрям переважаючого орієнтування молекул характеризують одиничним вектором $\vec{L}$, який називають директором.

Термотропні рідкі кристали, за класифікацією французького хіміка-мінералога Ш. Фріделя (1832—1899), поділяють на три типи: нематичні, смектичні та холестеричні. В основу такої класифікації покладено вигляд функції густини ρ і локальної орієнтації $\vec{L}$ молекул.

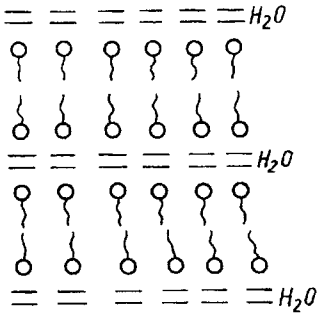


Рис. 19.13

Для нематичного типу структури рідких кристалів ρ = const і $\vec{L}$ = const. У такому кристалі молекули довгими осями спонтанно орієнтовані майже паралельно одна одній (рис. 19.14).

Для смектичного типу структури функція $\vec{L}$ = const, а ρ періодична вздовж осі, наприклад *OZ*, і стала у площині *XOY* (рис. 19.15). Цей тип структури характеризується двовимірною впорядкованістю молекул при паралелізації їх та ранжуванні центра мас молекул. Смектичні рідкі кристали мають шарувату структуру. Можливі різні типи упаковок молекул у шарах, внаслідок чого смектичні рідкі кристали мають велику кількість модифікацій.

Найскладніший тип упорядкування для холестеричних рідких кристалів, що характеризуються сполученням паралельних нематичних

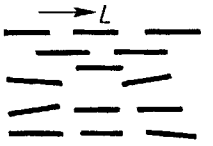


Рис. 19.14

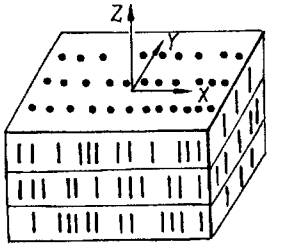


Рис. 19.15

шарів. Напрям осей молекул у кожному з наступних шарів повернутий на певний кут відносно напрямів цих осей у попередніх шарах. Для таких систем ρ = const, а $\vec{L}$ модульовано за напрямом так, що кінці векторів $\vec{L}$ утворюють гвинтову лінію у вигляді спіралі з певним

кроком (рис. 19.16). У площині *XOY* холестеричні рідкі кристали мають таку ж плинність, як і нематичні рідкі кристали, а вздовж осі *OZ* їхні механічні властивості подібні до властивостей смектичних рідких кристалів. Внаслідок такого упорядкування холестеричні рідкі кристали мають унікальні оптичні властивості.

Оскільки крок спіралі для різних холестеричних рідких кристалів має величину від десятих долей мікрометра до нескінченності, то видиме та інфрачервоне світло дифрагує на таких структурах, що зумовлює селективне відбивання світлових хвиль, які поширюються у напрямі осі *OZ*. За межами інтервалу довжин хвиль, для яких має місце селективне відбивання, холестеричні рідкі кристали мають значну оптичну активність (у 10^2—10^3 разів більшу, ніж у органічних рідин і у твердих кристалів). Прикладом холестеричних рідких кристалів є ефіри холестерину.

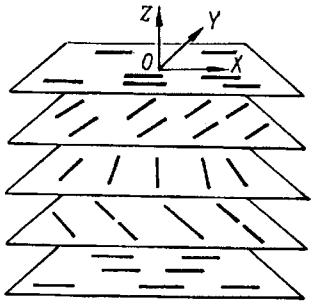


Рис. 19.16

Ліотропні рідкі кристали мають більш складну структуру, ніж термотропні. Ліотропні рідкі кристали досить поширені у природі, особливо в живих організмах (мембрани клітин, віруси тощо).

Виявлено новий тип рідких кристалів, які утворюються дископодібними молекулами.

Рідкі кристали містять складні анізотропні молекули, і тому практично неможливо враховувати всі види взаємодії між ними. При розгляді окремих випадків враховують такі типи міжмолекулярних сил: взаємодію сталих диполів; дисперсійну взаємодію молекул, розглядуваних як дипольні осцилятори, зумовлені притяганням між молекулами; стеричне відштовхування, зумовлене скінченними розмірами молекул у моделях жорстких важких стержнів або ланцюжків жорстких кульок; індукційну взаємодію сталого молекулярного диполя з диполями, наведеними в молекулах, що оточують їх.

Анізотропія електричних і оптичних властивостей поряд з властивістю плинності рідких кристалів зумовлює різноманітність електрооптичних ефектів. Найбільш важливі орієнтаційні ефекти, зумовлені впливом зовнішнього електричного поля на орієнтацію молекул рідких кристалів.

Електрооптичні властивості рідких кристалів лежать в основі широкого застосування їх. Зміна орієнтації $\vec{L}$ у нематичному рідкому кристалі вимагає електричної напруги порядку 1 В і потужності порядку 1 мкВт, що можна забезпечити безпосереднім передаванням сигналів з інтегральних схем без їхнього додаткового підсилення. Тому

рідкі кристали широко застосовуються в малогабаритних електронних годинниках, калькуляторах, вимірювальних приладах як індикатори і табло для відображення відповідної інформації. В комбінуванні з фоточутливими напівпровідниковими шарами рідкі кристали застосовуються як підсилювачі і перетворювачі зображень, а також як пристрої оптичної обробки інформації.

Залежність кроку спіралі холестеричного рідкого кристала від температури дає можливість використовувати плівки цих речовин для спостереження розподілу температури на поверхні різних тіл. Цей метод застосовується також у медицині для діагнозу запальних процесів, візуалізації теплового випромінювання тощо.

Розділ 20. Полімери

§ 20.1. Основні уявлення про хімічну будову та структуру полімерів

Сучасний науково-технічний прогрес неможливий без створення нових спеціальних матеріалів, що мають специфічні властивості, які, на перший погляд, навіть немислимі. Це жорсткість і еластичність, твердість і надтекучість, розчинність у воді й нерозчинність, газопроникність та газонепроникність тощо. Такі протилежні властивості, що виключають одне одного, поєднуються в полімерах. Термін полімер акцентує увагу на тому, що його макромолекула, тобто молекула полімеру, це численні лінійні, розгалужені східчасті або сітчасті (дво- або тривимірні) малі системи, які складаються з однакових або різних елементів.

Поняття полімер визначає передусім не склад речовини, а те, як вона побудована. Полімери — це форма організації матерії.

Незважаючи на величезну кількість атомів, що входять до складу полімерних речовин, хімічна будова їх (порядок сполучення атомів у макромолекулі) порівняно нескладна. Хімічну будову, наприклад, полівінілхлориду схематично можна показати так: $(CH_2 - CH - Cl)\ n$. Число n вказує на кількість елементарних ланок мономеру $CH_2 - CHCl$ — вінілхлориду, що входить до макромолекули, і характеризує ступінь полімеризації полімеру. Значення n коливається у великих межах, наприклад, у полістиролі — від 1000 до 3000, полівінілхлориді — від 1500 до 3000. Структурні формули полімерів передають тільки порядок сполучення атомів, а не передають просторового розміщення їх у макромолекулі. Так, атоми вуглецю, що становлять "кістяк" поліетилену — лінійного полімеру, утворюють не прямий ланцюжок, а зигзагоподібний (рис. 20.1). Елементарні ланки в просторі розміщені по-різному, але структурною одиницею, що чітко повторюється, є один зигзаг, величина якого визначає період ідентичності.

Полімери залежно від їхнього походження поділяють на такі: а) природні, які добувають з природних матеріалів, наприклад, полісахариди (целюлоза, крохмаль, білки, нуклеїнові кислоти, пектинові речовини та ін.); б) штучні, які добувають за допомогою хімічної модифікації природних полімерів (наприклад, з целюлози віскозне та ацетатне волокна); в) синтетичні, що їх добувають синтезом низькомолекулярних сполук (мономерів).

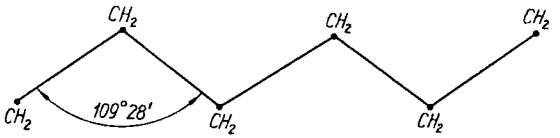


Рис. 20.1

За хімічним складом основного ланцюга полімери поділяють на гомоланцюгові і гетероланцюгові. Їхній ланцюг побудовано з однакових атомів, наприклад з атомів вуглецю. У гетероланцюгових полімерах головний ланцюг складається з різних атомів, наприклад, з вуглецю і кисню, вуглецю і азоту, вуглецю і сірки та ін. Полімери поділяють також на органічні, неорганічні та елементоорганічні. Ланцюги органічних полімерів містять, крім атомів вуглецю, в комбінаціях з ними атоми водню, кисню, азоту, сірки та ін. Неорганічні полімери не мають атомів вуглецю. До них належать різні види скла і близько 80 % мінералів. Атоми їхніх ланцюгів сполучені хімічними зв'язками, а між самими ланцюгами діють більш слабкі молекулярні сили. Елементоорганічні, або напіворганічні, — неорганічні полімери, бічні радикали яких — це так звані полісілоксани. Зв'язки Si – O – Si називають сілоксановими; вони досить міцні. Практично всі елементоорганічні полімери синтетичні.

Специфічні властивості полімерів як у конденсованому твердому стані, так і в розчинах сконцентровані в макромолекулі полімеру. В загальному випадку макромолекули — це лінійні (*а*), розгалужені (*б*), східчасті (*в*) і сітчасті (зшиті) малі системи (*г*, *д*) (рис. 20.2). Макромолекули з лінійною структурою (поліетилен, полівінілхлорид, целюлоза, натуральний каучук та ін.) — це довгі ниткоподібні ланцюги з дуже великим ступенем асиметрії. Їхній поперечний розмір у тисячу і більше разів менший від довжини. Макромолекули з розгалуженою структурою (рис. 20.2, *б*) — це ланцюги з бічними відгалуженнями. Щоб добути їх, у процесі синтезу до лінійної макромолекули одного складу можна "прищепити" бічні ланцюги іншого складу. Такі розгалужені полімери називають прищепленими. Розгалужені полімери за довжиною бічних ланцюгів поділяють на коротко- та довголанцюгові, а за характером взаємного розміщення їх — на статистичні, гребеневі та зіркоподібні.

Східчасті макромолекули є граничним варіантом циклоланцюгової лінійної макромолекули. Вони містяться в амфілолевих мінералах, що мають стрічкову структуру. Сітчасті полімери побудовані з макромолекулярних ланцюгів, сполучених один з одним поперечними хімічними зв'язками. Розрізняють плоскі та просторові сітчасті полімери. Класичними прикладами плоских та просторових сітчастих полімерів є відповідно графіт та алмаз.

Мірою густоти сітки є середній ступінь полімеризації n_c або молекулярна маса M_c відрізка ланцюга між вузлами сітки. Вона, в свою чергу, є мірою здатності ділянки ланцюга завдовжки n_c виявити гнучкість, здатність змінювати просторову геометричну форму в результаті теплового руху ланцюгів. Просторові сітчасті полімери з ма-

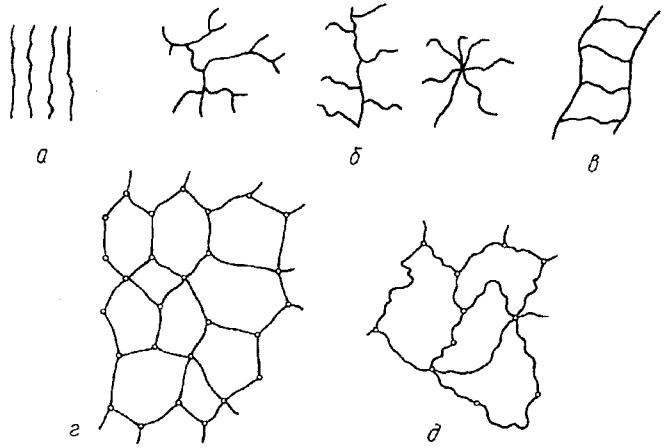


Рис. 20.2

лими n_c називають мікросітчастими. До них належать вулканізовані каучуки, в яких молекули каучуку "зшиті" атомами сірки; фенолформальдегідні та епоксидні смоли, кварцове скло та ін. Для цих матеріалів поняття "макромолекули" значною мірою нівелюється і більш правильним буде всю сітку вважати гігантською макромолекулою з ступенем полімеризації $\Delta\Sigma n_c$. Головною ознакою, за якою полімери виділено в самостійний розділ науки, є велика молекулярна маса M.

Основні характеристики макромолекул — це молекулярна маса M, або ступінь полімеризації p, конфігурація, конформація, полярність тощо. Конфігурація — це фіксоване розміщення атомів у полімерному ланцюгу, розпрямленому без спотворення валентних кутів та зв'язків на деякій уявній площині. Конфігурація — стереохімічна характеристика. Вона відіграє таку саму роль для описання структури макромолекули, як і поняття монокристалу у фізиці кристалів. Взагалі

конфігурація — інтегральна характеристика витягнутого ланцюга, яка складається з локальних конфігурацій як структурних елементів. Конформацією є просторова, або геометрична, форма макромолекули, яка змінюється в результаті теплового руху. Взагалі макромолекула вздовж ланцюгової осі — досить цілісне утворення. Проте сумарна упаковка полімерної речовини не дуже велика. Для оцінки упаковки речовини введено коефіцієнт упаковки K, що дорівнює відношенню власного об'єму $V_м$ ланцюгових макромолекул до об'єму полімерної речовини V ($K = V_м / V$). Значення коефіцієнта упаковки для багатьох полімерів лежить у межах 0,60—0,67. Тому в полімерах завжди є досить помітний вільний, не заповнений речовиною, простір. У ньому і відбуваються молекулярні рухи полімерів.

Одним з характерних молекулярних теплових рухів у полімері є так зване внутрішнє обертання в ланцюгових макромолекулах. Воно ілюструється на рис. 20.3, де для спрощення бічні радикали ланцюга не зображено. При достатньому тепловому імпульсі окрема ланка ланцюга, наприклад C_3C_4, здійснить обертальний перехід через потенціальний бар'єр і займе нове положення, навколо якого почне коливатися. З цього нового положення з певною ймовірністю вона проникає через наступний потенціальний бар'єр. Отже, ланка, обертаючись навколо валентного зв'язку C_2C_3 і зберігаючи валентний кут $\pi - \Theta$ незмінним, змінює свою орієнтацію в просторі і описує конічну поверхню з вершиною 2Θ. Аналогічні переходи можуть здійснити ланки C_4C_5, C_5C_6 і взагалі всі ланки цього ланцюга, особливо якщо потенціальні бар'єри невисокі. Очевидно, при цьому макромолекула стає досить гнучкою, вона може зазнавати багатьох різноманітних конформацій. Якщо потенціальні бар'єри високі, то внутрішнє обертання значною мірою гальмується, а макромолекула проявляє малу гнучкість. Внаслідок гнучкості довгих ланцюгових молекул переміщення окремих частин гнучкої молекули здійснюється без зміни положення більш віддалених ділянок ланцюга. Цілком природно, що в результаті теплового руху ланцюгові молекули неперервно змінюють свою форму, вигинаючись, скручуючись і розкручуючись відповідно до теплових імпульсів.

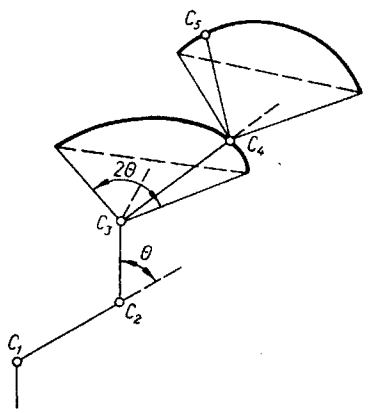


Рис. 20.3

Очевидно, що розміри вказаних вище частин макромолекули не є строго визначеними, а змінюються залежно від випадкового зміщення сусідніх макромолекул та флуктуацій теплового руху. Середня довжина такої частини макромолекули називається сегментом ланцюгової

молекули. Більшій гнучкості ланцюгової молекули відповідають менші сегменти, які здатні до таких теплових рухів, тобто є кінетично незалежними. Отже, величина сегмента є мірою гнучкості макромолекули. Для більш гнучких макромолекул величина сегмента становить 10—20 ланок повторюваності, для жорстких — до кількох ланок. Мірою гнучкості є також ступінь згорнутості макромолекули $\beta = h/L$, де h — середня квадратична відстань між кінцями згорнутої макромолекули; L — контурна довжина ланцюга. Найбільш імовірне його значення $\beta_m = \left(\frac{3}{2}N\right)^{-\frac{1}{2}}$, де N — число сегментів у ланцюгу.

§ 20.2. Структура полімеру в конденсованому стані

Взагалі структура є способом зв'язку елементів макротіла. Структура довільного фізичного тіла — це набір підсистем, які поступово ускладнюються і яким властива певна обмежена автономність. Такий підхід передбачає виділення певної підсистеми, яка зумовлює основні характеристики матеріального об'єкта.

Очевидно, для полімерів такою виділеною підсистемою є макромолекула, яка, в свою чергу, має досить складну структуру. Її властивості передаються через усі наступні більш складні рівні надмолекулярної організації (НМО) — різні способи упаковки макромолекул однакової будови. Саме поняття структури включає фактори, які залежать від часу. Безпосередньою структурно-кінетичною характеристикою є рухливість структурних елементів. У свою чергу, кожен елемент характеризується часом "осілого життя" τ_{1i}, який безпосередньо характеризує рухливість і час життя τ_{2i} конкретного елемента як "збірної конструкції", що може суттєво змінитися або розпастися під дією зовнішніх факторів. Виділення макромолекули в "початкову" підсистему зумовлено принаймні двома причинами: між елементами усіх нижчестоящих елементів (сегментів, ланок) діють хімічні сили, а взаємодії на всіх рівнях НМО мають не хімічний характер; макромолекула не є "дрібнішою частинкою", що зберігає хімічні властивості. До певного числа статистичних елементів у ланцюгу можна знижувати ступінь полімеризації, впливаючи не на хімічні, а тільки на фізичні, зокрема термомеханічні, властивості.

Структурні елементи полімерів у різних умовах виявляють свою автономність неоднаково. Кінетичні властивості макромолекул передаються за допомогою релаксаційного спектра (функції розподілу $g(r)$ окремих релаксаторів — елементів структури за часом їхнього життя). На рис. 20.4 стрілка дії, яка може бути зовнішнім імпульсом сили Ft, зумовлює реакцію макромолекули на різні за швидкістю зовнішні дії різними її структурними елементами, а отже, і різними ділянками свого релаксаційного спектра. Конкретне положення

стрілки дії на рисунку вказує, що при заданій температурі T реалізуються всі допустимі теплові рухи елементів структури з часами релаксації $\tau_i << \tau_A$. Звичайно, підвищення температури автоматично зсуває стрілку дії праворуч.

Деталізація рівнів структурної організації полімерів проводиться на основі геометричного, термодинамічного та кінетичного положень (ознак). Основу класифікації за геометричною ознакою становить наявність або відсутність дальнього порядку. Звичайно, поняття "далеко" слід розуміти відносно розмірів молекул. При цьому максимуму структурної організації відповідає кристалічний порядок, а мінімуму — аморфне "безладдя". Ступінь впорядкованості в полімерах значно сильніший, ніж у рідинах. Цей значний ступінь упорядкованості приводить до виникнення надмолекулярних структур (НМС). Їх поділяють на термодинамічно та кінетично стабільні. Визначальним при цьому є власний час життя τ_i.

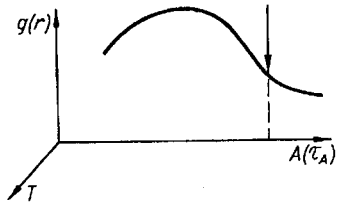


Рис. 20.4

Розрізняють полімери аморфні та кристалічні або такі, що кристалізуються. Ланцюги аморфних полімерів можуть існувати в широкому конформаційному наборі, граничними є глобули і випрямлені лінійні макромолекули. Гнучкі макромолекули, в яких внутрішні сили домінують над силами міжмолекулярної взаємодії, мають тенденцію згортатись у кулясті моно- або полімолекулярні клубки — глобули, втрачаючи при цьому властивості довгих ланцюгів і зберігаючи лише властивості частинок великих розмірів.

Для більш жорстких макромолекул характерним є утворення лінійних аморфних структур — пачок. Між розгорнутими макромолекулами при цьому виявляються сильні вандерваальсові взаємодії. Довжина пачки може значно перевищувати довжину однієї повністю розгорнутої молекули. Схематично пачку можна зобразити у вигляді багатьох рядів ланцюгів, в яких молекули розміщені одна за одною послідовно. За своєю структурою пачки дуже подібні до рідких кристалів. Доведення існування пачок дають електронна мікроскопія і ядерно-магнітний резонанс. Для пачок також характерна гнучкість. Тому в аморфних полімерах вони набувають різних форм. Структуроутворення в аморфних полімерах не припиняється з виникненням глобул і пачок. Глобулярні структури можуть далі сполучатися між собою. Так само можливі і процеси укрупнення пачок. Отже, на вищому ступені ієрархії структури можуть утворюватися фібрили та смугасті конструкції. Останні типові для каучуків.

Враховуючи такі структурні особливості аморфних полімерів вважають, що макромолекули в усіх станах завжди впорядковані, і тому існування повного безладдя в полімерних речовинах є не правилом, а швидше винятком.

У кристалічних полімерах яскраво спостерігаються ще складніші типи надмолекулярних структур. Пачка, що складається з лінійних гнучких ланцюгів, за певних термодинамічних умов може закристалізуватись. Закристалізовані пачки, що мають вигляд тонких і довгих утворень, мають тенденцію до спонтанного складання в стрічки внаслідок повороту пачки на 180°. Цей процес супроводиться помітним зменшенням поверхні і потенціальної енергії. Стрічки, в свою чергу, з тих самих причин складаються плоскими сторонами одна до одної в плоскі пелюстки. А ті, накладаючись, утворюють енергетично вигідніші структури — мікрокристали правильної форми з розмірами в усіх трьох вимірах приблизно одного порядку або плоскі пелюсткоподібні утворення — сфероліти. Сфероліти досягають значних розмірів і їх можна виявити у звичайний мікроскоп. Для технічних полімерних матеріалів найчастіше характерна саме сферолітична форма кристалічних полімерів. Нижнім структурним рівнем для сфероліта є кристаліт. Сфероліт — це лінійна або розгалужена послідовність кристалів. При великій рухливості кристалів сфероліти як нестабільні утворення можуть розпадатися. При значних деформаціях розтягу полімерних волокон і плівок відбуваються перетворення типу сфероліт — макрофібрила.

§ 20.3. Термомеханічні властивості полімерів

Залежно від теплового руху макромолекул полімер може характеризуватися трьома істотно відмінними станами, яким відповідають різні комплекси фізичних властивостей. Особливо різко відрізняються їхні механічні властивості. Ці стани характеризують поняттями "фізичні стани". Цим самим підкреслюється, що йдеться про зміну механічних властивостей, що має суто кінетичну природу і не зв'язана з механічними перетвореннями.

З погляду фізики більш правильними слід вважати поняття "деформаційні стани" (за Бартенєвим) або "релаксаційні стани" (за Волькенштейном). Ці стани (склоподібний, високоеластичний та в'язкоплинний) найпростіше визначати за механічними властивостями полімерів з допомогою термомеханічної кривої (рис. 20.5). Вона передає графічно температурну залежність деформації полімеру при сталому малому навантаженні. Механічні навантаження не повинні при цьому змінювати структуру. При $T < T_c$ (T_c — температура склування полімеру), коли полімер перебуває в склоподібному стані, деформації порівняно малі й оборотні. В області високоеластичності

деформації з підвищенням або зниженням температури змінюються мало. Поблизу температури плинності $T_п$ у полімерному тілі спостерігається різке збільшення деформації внаслідок в'язкої течії речовин. При $T > T_п$ полімер поводить себе як в'язка рідина.

Розглянемо докладніше основні релаксаційні стани полімерів. Область *I* станів зліва від T_c належить до так званого склоподібного стану. При швидкому охолодженні розплаву полімеру в певному температурному інтервалі полімер може затвердіти (засклуватися), не утворюючи кристалічної структури. Взагалі відмітимо, що так звані кристалічні полімери насправді кристалоаморфні, тобто вони ніколи повністю не закристалізовані і містять частину некристалічної фази. Склування — перехід речовини з рідкого стану в склоподібний. Склування — це релаксаційний процес. Склоподібний стан відповідає за характером розміщення молекул рідкому стану, але здатність молекул до переміщення, тобто плинність, повністю у ньому втрачена. Для цього стану є характерним утрудненість руху сегментів, фіксація випадкового розміщення макромолекул, які упаковані не щільно, а "рихло". Полімери в склоподібному стані здатні дуже деформуватися при дії великих напружень. Склоподібний стан характеризується коливальними рухами атомів, що входять до ланцюга.

З підвищенням температури полімер переходить із склоподібного у високоеластичний стан (область *II*). Цей процес відбувається в інтервалі температур у кілька десятків градусів. Тому температура T_c умовно характеризує склування; вона залежить від швидкості охолодження чи нагрівання, способу її визначення. Величина T_c залежить від молекулярної маси і хімічної будови полімеру. Високоеластичний стан, який властивий тільки полімерним речовинам, є прямим наслідком гнучкості макромолекул і великої швидкості зміни їхньої конформації. Високоеластичний стан характеризується відносно високою рухливістю сегментів макромолекул. При цьому молекулярна рухливість стає настільки високою, що структура полімерів у ближньому порядку подібно до рідини встигає перебудовуватися вслід за зміною температури. Але одночасно на відміну від низькомолекулярних речовин, які під дією механічних напружень практично не деформуються, макромолекули полімеру намагаються зайняти найрізноманітніші конформації. Макромолекули розпрямляються і весь зразок полімеру набуває здатності до великих оборотних деформацій.

Високоеластичний стан є нерівноважним станом полімеру тому, що розгорнуті макромолекули зазнають значних внутрішніх напружень. Напруження з часом усуваються в результаті необоротних взаємних переміщень цілих ланцюгів, тобто рівновага настає внаслідок плинності матеріалу.

Область *III* термомеханічної кривої (рис. 20.5) характеризує в'язкоплинний стан. Під дією зовнішніх механічних сил у полімерному тілі відбувається необоротна пластична деформація. У в'язкоплинному стані полімерів зберігаються значні за розмірами впорядковані структури внаслідок високої в'язкості полімерної системи. Як правило, в кристалоаморфних полімерах перехід у в'язкоплинний стан відбувається при температурах, вищих за температуру плавлення. Процес в'язкої плинності в полімерах досить складний. Послідовне переміщення окремих частин макромолекул і, як наслідок, центра мас макромолекули супроводжується зміною конформації макромолекули, отже, високопластичною деформацією. В'язкоплинний стан має велике значення при формуванні полімерних виробів.

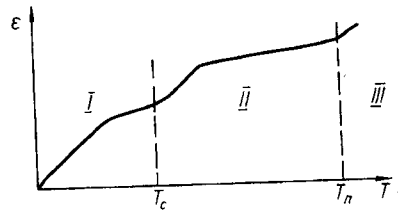


Рис. 20.5

§ 20.4. Механічні властивості та застосування полімерів

До механічних властивостей полімерів належать деформаційні властивості, їхня міцність та фрикційні властивості. До деформаційних властивостей належать пружність і високоеластичність, пластичність та текучість. Пружні деформації відбуваються практично миттєво після прикладання зовнішніх сил. Точніше, вони відбуваються з швидкістю звуку. Для них характерні модулі пружності порядку 10^3—10^5 Н/м^2. Вони зумовлені невеликими взаємними зміщеннями атомів, які приводять до зміни відстані між валентно-незв'язаними атомами і валентними кутами. Середні відстані між ланцюгами при цьому не змінюються.

Високоеластичні деформації полімерів, що є їхньою характерною ознакою, відбуваються внаслідок перегрупування сегментів гнучких ланцюгових полімерів макромолекул, які приводять до зміни їхніх конформацій. Для таких змін потрібний певний час, тому високоеластична деформація відстає від зміни зовнішньої напруги. Зміна конформацій супроводиться подоланням внутрішнього тертя в полімерах. Розвиток високоеластичності відбувається в нелінійній області. Незважаючи на це, для її характеристики застосовується модуль еластичності. Він на 3—4 порядки менший від модуля всебічного стиску. Тому високоеластична деформація здійснюється практично без зміни об'єму. Для здійснення високоеластичності взагалі необхідними умовами є достатня гнучкість макромолекул і велика швидкість зміни

їхніх конформацій. Це, очевидно, відповідає інтенсивному тепловому руху і слабкій міжмолекулярній взаємодії. Під дією зовнішніх сил гнучкі ланцюгові макромолекули змінюють свою довжину. При цьому деформація розтягу полімерного тіла приводить до зменшення ентропії системи. Це зменшення зумовлене зменшенням числа конформацій макромолекул, а ентропія системи є пропорційною логарифму числа конформацій. Це, в свою чергу, приводить до виникнення сили, яка намагається повернути систему в недеформований початковий стан. Величина цієї сили для ізольованої макромолекули пропорційна зміні її довжини і температурі. Такі основні уявлення кінетичної теорії високоеластичності, яка пов'язує рівноважну високоеластичність полімерів з їхньою молекулярною будовою.

Пластичність — це властивість полімерів розвивати необоротні деформації під дією зовнішніх сил. Вони виникають в результаті взаємного переміщення центра мас окремих макромолекул. Розвиток теорії пластичності полімерів має велике практичне значення для переробки полімерів у матеріали та вироби.

Властивості полімерів характеризуються міцністю, ударною в'язкістю, твердістю, втомленістю, крихкістю,

Міцність — це властивість полімеру чинити опір руйнуванню під дією зовнішніх навантажень. Ця величина характеризується границею міцності. Механічна міцність полімерних матеріалів суттєво залежить від температури, швидкості навантаження. Визначальним фактором у дослідженні міцності полімерів є те, що вони мають два відмінних типи взаємодії між атомами: сили міжмолекулярної взаємодії та хімічні сили зв'язку, які діють вздовж ланцюгових молекул.

Деформація до руйнування супроводиться перебудовою структури. Руйнування — процес розриву зв'язків. Механізм руйнування пов'язаний із швидкістю розриву зв'язків.

Відомо два основних способи описання процесу руйнування. Один з них грунтується на понятті довговічності, тобто часу від початку прикладання напруження до розриву матеріалу:

$$\tau_p = \tau_0 e^{U_0 - \alpha\beta\sigma_p / (RT)}, \qquad (20.1)$$

де τ_0 — час, чисельно близький до періоду теплових коливань атомів; U_0 — енергія активації процесу руйнування; α — об'єм, в якому здійснюється елементарний акт розриву; β — коефіцієнт перенапруження на можливих дефектах; σ_p — напруження руйнування.

Значення U_0 для полімерів близьке до енергії хімічних зв'язків. Це дає підставу вважати, що полімери руйнуються по хімічних зв'язках. Рівняння (20.1) виражає температурно-часову залежність міцності і справджується для багатьох твердих тіл, включаючи і неполімерні тіла при однорідному розтягу матеріалу.

Другий спосіб використовує кінетичні рівняння, що описують реологічні процеси,

$$\sigma_p = K v\, e^{U_0 - \alpha\beta\sigma_p / (kT)}, \qquad (20.2)$$

де v — швидкість розриву зв'язків, що перешкоджають поділу зразка на частини; K — параметр рівняння, який характеризує форму і розміри зразка, а також характер розподілу напруження по ланцюгах.

Крихкість — властивість тіла руйнуватися при малих пружних деформаціях. Проявлення крихкості або пластичності зумовлене не тільки властивостями тіла, а й часом дії сили.

Ударна в'язкість — це властивість полімеру чинити опір короткочасним ударним навантаженням. При цьому за характеристику міцності беруть питому роботу деформації до руйнування:

$$A_p = \int_0^{\varepsilon_p} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon. \qquad (20.3)$$

Роботу, виконану на руйнування при ударі і віднесену до одиниці поверхні руйнування, називають *питомою ударною в'язкістю.*

Твердість полімерів означається так само, як і твердість твердих тіл. Оцінка твердості полімерів суттєво залежить від методу її вимірювання.

Втомленість, або часова залежність міцності, — властивість полімеру витримувати, не руйнуючись, багатократні навантаження.

Для характеристики фрикційних властивостей полімерів використовують коефіцієнт тертя та стійкість проти спрацювання, яка характеризує швидкість руйнування матеріалу при терті.

Теоретичне дослідження цієї проблеми становить значні труднощі, які зумовлені великою складністю комплексу процесів, що відбуваються при взаємодії поверхні полімерного матеріалу з іншою поверхнею полімеру, металу тощо. До них слід віднести складність напруженого стану в місцях контактів, який, в свою чергу, спричинює різноманітні релаксаційні процеси, руйнування в окремих мікрообластях, а також різні механохімічні процеси і фізичні структурні перетворення на молекулярному та надмолекулярному рівнях.

Сучасне машинобудування, авіація, космічна техніка, автомобілебудування, електро- і радіотехніка немислимі без використання полімерних матеріалів. Це пояснюється різноманітними властивостями полімерів. Одним з найважливіших напрямів технічного прогресу в усьому світі став розвиток промисловості пластичних мас, синтетичних і штучних волокон, синтетичного каучуку, шкіри, захисних покриттів, клеїв та інших матеріалів на основі полімерів. Для утворення нових полімерних матеріалів уводять різні хімічні добавки, які

поліпшують його термо- і світлостабільність, атмосферо- і погодостійкість. Широке застосування знаходять наповнені полімерні композиції. Як наповнювачі використовують різні неорганічні речовини. Призначення їх — підвищити міцність матеріалу, надати йому нових властивостей, а також здешевити. Залежно від технології переробки з певних полімерів можуть утворитися пластмаси і волокна, лаки і фарби тощо. Широке практичне застосування полімери знаходять після переробки в полімерні матеріали (наприклад, пластмаси, полімерні плівки, полімерні волокна, полімерні клеї і герметики тощо).

Приклад 20.1. Вважаючи високоеластичну деформацію у чистому вигляді оборотним рівноважним процесом, показати, що деформуючі сили мають ентропійний характер.

Розв'язання. Нехай зовнішні сили при деформації полімеру виконують роботу

$$d'A = Fdl, \tag{1}$$

де F — зовнішня сила, яка зумовлює деформацію dl. Тоді, згідно з об'єднаними першим і другим законами термодинаміки, дістаємо

$$Fdl = dU - TdS. \tag{2}$$

При $T = \text{const}$

$$dF_B = dU - TdS, \tag{3}$$

де F_B — вільна енергія системи.

З рівнянь (2) і (3) маємо

$$dF_B = Fdl. \tag{4}$$

Якщо деформація відбувається при сталих температурах і об'ємі, то з рівностей (1) і (4) дістаємо

$$F = \left(\frac{\partial' A}{\partial l}\right)_{T,V} = \left(\frac{\partial F_B}{\partial l}\right)_{T,V} \tag{5}$$

і далі

$$F = \left(\frac{\partial U}{\partial l}\right)_{T,V} - T\left(\frac{\partial S}{\partial l}\right)_{T,V}. \tag{6}$$

Рівняння (6) розкриває зміст деформуючої сили.

Для високоеластичної деформації зміна внутрішньої енергії полімеру дорівнює нулю: $\left(\frac{\partial U}{\partial l}\right)_{T,V} = 0$, оскільки середні відстані між ланцюгами макромолекули не змінюються. Тоді

$$F = -T\left(\frac{\partial S}{\partial l}\right)_{T,V}. \tag{7}$$

Отже, при високоеластичній деформації розтягуючі сили мають ентропійний характер, тобто розтяг полімерів характеризується впорядкуванням структури і, як наслідок, зменшенням ентропії.

Розділ 21. Рівновага фаз і фазові переходи

§ 21.1. Поняття фази. Крива фазової рівноваги

Розглядатимемо термодинамічну систему, що взаємодіє з навколишнім середовищем. У результаті цих взаємодій змінюється стан системи. Ці взаємодії можуть бути рівноважними і нерівноважними. Рівноважні взаємодії виникають при малих різницях потенціалів системи і навколишнього середовища. Якщо позбутися зовнішніх взаємодій, то негайно припиняться процеси в системі внаслідок однорідності в ній потенціалів переносу та її рівноважного стану. Якщо ізолювати систему від зовнішнього середовища, її внутрішня енергія, звичайно, не зміниться, внутрішні неоднорідності можуть зумовлювати тільки перерозподіл енергії між її частинками. Як для фазових переходів, що можливі у разі повної ізоляції системи, так і при зовнішніх взаємодіях відбувається перерозподіл маси між окремими частинами системи. Фазові переходи — це процеси переходу речовин з однієї фази в іншу. Фазою є сукупність частин термодинамічної системи, які мають однакові фізичні та хімічні властивості, що не залежать від кількості речовини. Якщо система однофазна, то вона фізично однорідна, або гомогенна. Багатофазна система — фізично неоднорідна, або гетерогенна. Фази гетерогенної системи при рівноважних умовах здатні до співіснування і відокремлені одна від одної макроскопічними поверхнями розділу. Прикладом фазових відмінностей можуть бути агрегатні відмінності: твердий, рідкий та газоподібний стани речовини. Проте не слід вважати, що дві різні фази тієї самої речовини обов'язково характеризуються різними агрегатними станами. Можуть бути різні фази в твердому, рідкому та газоподібному станах. Так, наприклад, у твердому стані по дві фази мають вуглець (алмаз, графіт), фосфор (білий і червоний), олово (блискуче і сіре), сірка (ромбічна і моноклінна). Тверде залізо може існувати в чотирьох різних модифікаціях (α-, β-, γ- та δ-залізо). Є кілька модифікацій льоду — твердої води. Дві фази має гелій у рідкому стані (He I і He II). Прикладом фазових відмінностей у газоподібному стані є кисень O_2 і озон O_3. Ці відмінності бувають при досить великих тисках.

Звернемо увагу на деякі особливості фазових відмінностей речовин. Так, сірка ромбічна і моноклінна має однакові хімічні властивості, але відрізняється за фізичними властивостями.

Зазначимо, що не довільна фізична відмінність є фазовою. Наприклад, оптично активні кристали (кварц) при проходженні через них світла повертають площину поляризації вправо або вліво. Але ні за яких умов кристал, що повертає площину поляризації вліво, не можна

перетворити в кристал, який повертає площину поляризації вправо. Отже, поняття фізичної модифікації є більш широким поняттям. Розпад речовини на фази — ефект суто фізичний, а не хімічний. Фази всередині системи відокремлені одна від одної фізичними макроскопічними поверхнями.

У процесі фазового переходу відбувається перерозподіл маси між частинами системи, пов'язаний з переходом її через межі поділу фаз. З точки зору термодинаміки причиною фазових переходів є різниця хімічних потенціалів у різних фазах. Границі існування фаз визначаються термодинамічними параметрами.

Фазова рівновага гетерогенної системи, тобто її термодинамічна рівновага, зумовлена однаковими умовами існування кожної з фаз. Це означає, що тиск і температура в усіх фазах повинні бути однаковими. Крім того, необхідно, щоб хімічні потенціали усіх компонентів у кожній із фаз, що співіснують, були також однаковими. Перші дві умови фазової рівноваги відповідають механічній і тепловій рівновазі системи, а остання — динамічній рівновазі між складовими фаз.

Число фаз, які одночасно можуть перебувати у фазовій рівновазі, визначається так званим правилом Гіббса. Згідно з цим правилом число ступенів вільності гетерогенної системи N, яка перебуває в стані термодинамічної рівноваги, на дві одиниці більше від різниці між числами компонент n і фаз r, тобто

$$N = n - r + 2. \tag{21.1}$$

Число ступенів вільності системи визначає кількість взаємонезалежних параметрів, що однозначно описують її стан. За своєю суттю $N > 0$, тоді, згідно з (21.1), маємо

$$n - r + 2 \geq 0,$$

звідки

$$r \leq n + 2, \tag{21.2}$$

тобто число фаз гетерогенної системи, які одночасно перебувають у рівновазі між собою, не повинно перевищувати числа компонент n більш, ніж на дві одиниці. Для однокомпонентної, тобто однорідної системи $n = 1$. Якщо вона перебуває в одній фазі ($r = 1$), то, згідно з рівністю (21.1), $N = 2$. Отже, при цьому обидва термодинамічні параметри є взаємно незалежними. Якщо в цій системі є дві фази, то $r = 2$, $N = 1$, тобто у цьому разі лише один з параметрів p або T буде незалежним, тобто кожному значенню T в стані рівноваги відповідатиме лише одне значення p і навпаки. Нарешті, якщо ця система складається з трьох фаз, то для її фазової рівноваги $N = 0$. Отже, три фази перебуватимуть у рівновазі лише при певних фіксованих

значеннях обох параметрів, тобто тільки в деякому цілком певному стані системи, що має назву *потрійної точки*.

Фазові переходи поділяють на фазові *переходи першого* та *другого родів*. Найбільш типовим прикладом фазових переходів першого роду є агрегатні перетворення. Вони характеризуються стрибкоподібними змінами внутрішньої енергії, ентальпії, ентропії, вільної енергії та об'єму системи і завжди супроводяться виділенням або поглинанням системою теплоти:

$$d'q = \lambda dm, \tag{21.3}$$

де λ — питома прихована теплота фазового перетворення, а m — маса перетворюваної речовини.

Ці переходи можуть відбуватись у двох напрямках. В одному з них відбувається перехід до фази, що існує при вищих температурах (це плавлення, сублімація, випаровування); у другому — навпаки. Температура і тиск системи при цьому залишаються сталими. Спочатку, як приклад, розглянемо рівновагу системи рідина *1* — її власна пара *2*, що знаходиться в замкненій посудині ($V = \text{const}$) (рис. 21.1). Для стану термодинамічної рівноваги матимемо $p_1 = p_2$, $T_1 = T_2$ і $m = m_1 + m_2 = \text{const}$; $dm_1 + dm_2 = 0$. Якщо при $T = \text{const}$ густина пари ρ_2 менша від певного значення ρ, то маса пари збільшуватиметься, тобто відбуватиметься випаровування. При $\rho_2 > \rho$ відбувається процес конденсації. При $\rho_2 = \rho$ фазового переходу немає. Таке значення ρ має пара у рівноважному стані. З підвищенням температури густина ρ значно зростає. Очевидно, тиск при цьому також зростає. Залежність тиску насиченої пари від температури має приблизно експоненціальний характер.

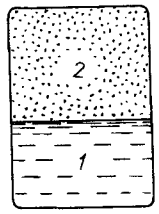


Рис. 21.1

§ 21.2. Випаровування. Рівняння Клапейрона — Клаузіуса. Кипіння

Випаровуванням є *пароутворення*, яке відбувається тільки на вільній поверхні рідини або твердого тіла. Пароутворення — фазовий перехід речовини з рідкого стану в стан пари. Швидкість випаровування пропорційна вільній поверхні рідини та її температурі. Для різних рідин швидкість випаровування різна.

Процес випаровування з молекулярно-кінетичного погляду пояснюється наявністю молекул, енергія яких перевищує середню енергію їхнього теплового руху і яка є достатньою для виконання роботи проти дії сил притягання та зовнішнього тиску. Внутрішня енергія рідин при випаровуванні зменшується.

Пару, яка перебуває у динамічній рівновазі з своєю рідиною, називають *насиченою*. Пару, густина якої менша від густини насиченої пари, називають *ненасиченою*.

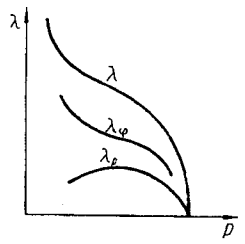


Рис. 21.2

Питома теплота фазового перетворення λ залежить від температури. Для $T = T_{кр}$ величина $\lambda = 0$. Вона має дві складові: λ_φ — внутрішня, що витрачається на роботу проти дії сил притягання, і λ_p — зовнішня, що витрачається на роботу проти дії сил зовнішнього тиску. Їхню залежність від тиску показано на рис. 21.2. Другим параметром, крім величини λ, який характеризує випаровування, є швидкість випаровування n, що чисельно дорівнює кількості молекул, які покидають одиницю площі вільної поверхні рідини за одиницю часу. Її можна визначити за формулою Герца — Кнудсена:

$$n = \alpha \frac{pN_A}{\sqrt{2\pi MRT}}, \qquad (21.4)$$

де N_A — число Авогадро; M — молярна маса; p — тиск насиченої пари; α — стала величина, що залежить від природи речовини.

Тиск насиченої пари можна виразити через об'ємну концентрацію n_0 молекул пари і температуру T так: $p = n_0 kT$. Тоді з формули (21.4) випливає, що швидкість випаровування зростає з підвищенням температури.

Для кількісного описання фазових переходів першого роду потрібно встановити співвідношення між фізичними параметрами, що характеризують ці переходи. Здійснимо дуже "вузький" цикл Карно з двофазною системою, що складається з рідини та її насиченої пари (рис. 21.3).

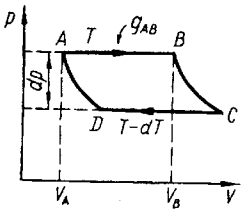


Рис. 21.3

Переведемо систему із стану A в стан B ізотермічним розширенням так, щоб одиниця маси речовини перейшла з рідкого стану (фаза 1) у пару (фаза 2) при $p = \text{const}$ (див. рис. 21.1). Отже, процес AB — ізотермічно-ізобарний. Система в процесі AB дістає кількість теплоти $q_{AB} = \lambda$. При цьому змінюється об'єм і, як наслідок, виконується робота $A = p(V_B - V_A)$, де $V_B = V_{02}$ — питомий об'єм пари; $V_A = V_{01}$ — питомий об'єм рідини. Процес BC — адіабатний з нескінченно малим зростанням об'єму. Тиск і температура при цьому зменшуються відповідно на dp і dT. Процес CD реалізується при тиску $p - dp$ і температурі $T - dT$, причому частина пари конденсується. Робота при стисканні системи

$$A_2 = -(p - dp)(V_{02} - V_{01}).$$

Процес DA — адіабатний. Робота циклу

$$A = A_1 + A_2 = p(V_{02} - V_{01}) - (p - dp)(V_{02} - V_{01}) =$$

$$= dp(V_{02} - V_{01}) = dp \cdot \Delta V_0.$$

Згідно з теоремою Карно ККД циклу Карно не залежить від природи робочої речовини:

$$\eta = \frac{A}{q_{AB}} = \frac{T - (T - dT)}{T}; \quad \eta = \frac{dp \cdot \Delta V_0}{\lambda} = \frac{dT}{T}. \qquad (21.5)$$

Перепишемо вираз (21.5) так:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{1}{T}\frac{\lambda}{\Delta V_0}. \qquad (21.6)$$

Вираз (21.6) називають *рівнянням Клапейрона — Клаузіуса*; його вивели на основі другого закону термодинаміки. Рівняння (21.6) справедливе для довільних фазових переходів першого роду, таких як випаровування, плавлення, кристалізація, сублімація тощо.

Рівняння Клапейрона — Клаузіуса виражає зв'язок між змінами рівноважної температури фазового переходу і рівноважного тиску. Воно дає змогу розкрити функціональний зв'язок $p = f(T)$ для насиченої пари далеко від критичної температури. При невисоких температурах густина насиченої пари невелика і за своїми властивостями вона близька до ідеального газу. Отже, $V_п = RT/p$. Зауважимо також, що $V_п \gg V_p$. Припустимо, що λ мало залежить від температури. Тоді з (21.6) дістанемо

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\lambda}{T(V_п - V_p)} = \frac{\lambda}{TV_п} = \frac{p\lambda}{RT^2}, \quad \frac{1}{p}\frac{dp}{dT} = \frac{\lambda}{RT^2}, \quad \frac{d(\ln p)}{dT} = \frac{\lambda}{RT^2},$$

$$\frac{d(\ln p)}{dT} = -\frac{d}{dT}\left(\frac{\lambda}{RT}\right), \quad \ln p = \text{const} - \frac{\lambda}{RT}$$

і остаточно

$$p = Ce^{-\frac{\lambda}{RT}}, \qquad (21.7)$$

де C — стала інтегрування, яку можна визначити, якщо відомий тиск насиченої пари p_0 при температурі T_0.

Важливим у теоретичному і практичному відношенні є питання про залежність тиску насиченої пари від кривизни поверхні рідини. Біля викривленої поверхні рідини тиск насичених парів відрізняється

від тиску біля плоскої поверхні. Для з'ясування характеру цієї залежності необхідно розглянути умови динамічної рівноваги рідини і пари. Ці умови за своїм фізичним змістом однакові як для викривленої, так і для плоскої поверхонь рідини. Вони полягають у тому, що інтенсивність переходу молекул з рідини в газ і навпаки однакова. Проте для викривленої поверхні інтенсивність обміну молекулами залежить від кривизни поверхні. Врахування цієї залежності дає можливість визначити тиск насиченої пари біля викривленої поверхні рідини. Помістимо молекулу M на однаковій відстані від поверхні рідини різної форми. Радіусом r покажемо сферу молекулярної дії. З рис. 21.4, *а* бачимо, що у випадку вгнутої поверхні молекула M взаємодіє з найбільшою кількістю молекул рідини, а у випадку випуклої (рис. 21.4, *в*) — з найменшою. Динамічна рівновага між парою і рідиною визначається силами, що діють на молекули пари з боку рідини. Тому у випадку вгнутої поверхні молекулам важче залишити рідину і разом з тим молекули пари більш енергійно втягуються у рідину. Це означає, що тиск насиченої пари над угнутою поверхнею рідини є меншим, ніж над плоскою її поверхнею (рис. 21.4, *б*). Аналогічними міркуваннями дійдемо висновку, що тиск насиченої пари над випуклою поверхнею рідини більший, ніж над її плоскою поверхнею.

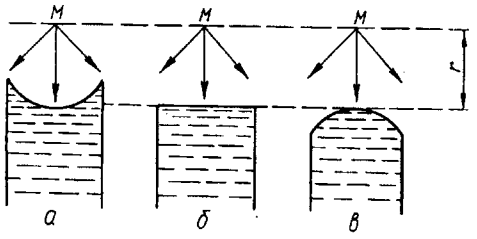


Рис. 21.4

Крім того, існує ще одна причина, яка підсилює зміну тиску насиченої пари внаслідок кривизни поверхні рідини. За рахунок поверхневого натягу виникає додатковий тиск, який для угнутої поверхні $\Delta p < 0$ (див. § 19.4). При цьому тиск всередині рідини біля її поверхні зменшується і відповідно частота зіткнень між молекулами рідини зменшується. Це приводить до зменшення кількості молекул, які залишають рідину і переходять у повітря. Протилежне явище має місце для випуклої поверхні рідини.

Висновок про відмінність тиску насиченої пари біля плоскої і викривленої поверхонь рідини можна зробити також на основі другого закону термодинаміки. Припустимо, що тиск насиченої пари над плоскою поверхнею рідини в посудині і над угнутою поверхнею рідини в капілярі (рис. 21.5) є однаковим. Оскільки капілярна трубка змочується даною рідиною, то рідина в капілярі міститься вище від рідини в посудині на величину h. Це означає, що насичена пара над капіляром перебуватиме під більшим тиском, ніж пара, яка її оточує, оскільки тиск насиченої пари, що міститься над плоскою поверхнею

рідини, з висотою зменшується. Отже, пара над капіляром буде розширюватись і виконуватиме роботу. Причому ця робота виконуватиметься тільки завдяки одному джерелу теплоти (нагрівник) без наявності холодильника, тобто буде здійснений вічний двигун другого роду, що суперечить другому закону термодинаміки. Отже, наше припущення про однаковість тисків насиченої пари над плоскою поверхнею рідини в посудині й угнутою поверхнею у капілярі помилкове.

Нехай капілярна трубка, яка повністю змочується рідиною, має радіус r (рис. 21.5). Між рідиною і парою існує динамічна рівновага. Рідина в капілярній трубці піднімається на висоту $AB = h = \dfrac{2\sigma}{\rho g r}$.

Тиск насиченої пари в точці B над угнутим меніском, згідно з барометричною формулою,

$$p_B = p_A \, e^{-Mgh/(RT)}. \qquad (21.8)$$

Підставляючи в формулу (21.8) величину h, дістаємо

$$p_B = p_A \, e^{-2M\sigma/(r\rho RT)}. \qquad (21.9)$$

Формула (21.9) називається *формулою Томсона.* З цієї формули видно, що над угнутою поверхнею рідини тиск менший, ніж над плоскою. Формула Томсона пояснює причини більш інтенсивного випаровування з дрібних крапель порівняно з конденсацією.

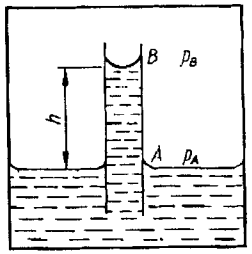


Рис. 21.5

Кипіння — пароутворення, що відбувається як на вільній поверхні рідини, так і в її об'ємі. Зазначимо, що кипіння є не просте утворення двофазної системи, а перехід двофазної системи від спокійного стану до бурхливого, при якому бульбашки насиченої пари в рідині швидко ростуть, спливають і прориваються назовні. Ріст бульбашок відбувається в результаті звичайного випаровування. Отже, необхідною умовою кипіння є наявність в об'ємі рідини під меніском газової фази у вигляді бульбашок, які відіграють таку саму роль, як пилинки або іони в процесі конденсації, тобто роль зародків. Гази можуть бути розчинені в рідині або адсорбовані на стінках посудини. Бульбашки газу в процесі нагрівання рідини наповнюються насиченою парою при випаровуванні рідини всередину бульбашки. Кипіння рідини починається при температурі, коли рівноважний тиск насиченої пари стає таким, що дорівнює зовнішньому тиску. Очевидно, під зовнішнім тиском слід розуміти атмосферний і гідростатичний тиски та тиск, зумовлений кривизною поверхні бульбашки.

Отже, температура кипіння залежить від зовнішнього тиску. Оскільки питомий об'єм пари значно більший від питомого об'єму рідини, то з рівняння Клапейрона — Клаузіуса випливає, що з підвищенням тиску температура кипіння завжди підвищується. В результаті тривалого кипіння утворення бульбашок зменшується, потім припиняється і рідина перестає кипіти, оскільки вона позбавляється центрів кипіння. Отже, можна дістати *перегріту рідину*, температура якої вища від температури кипіння при даному зовнішньому тиску, але вона не кипить. При високих температурах внаслідок значної ймовірності флуктуацій густини можуть утворюватись і рости бульбашки пари, навіть якщо немає зародків у вигляді газових бульбашок і перегріта рідина закипає з вибухом. Вибухове кипіння є досить загрозливим для посудини, що містить рідину.

Слід мати на увазі, що цілком фіксовану температуру має не сама рідина, яка кипить, а її пара. Цей факт є визначальним для методики градуювання термометрів.

Приклад 21.1. Знайти питому теплоту випаровування q рідкого азоту при температурі −196 °С, якщо тиск насичених парів азоту при температурах −195; −196; −197 °С відповідно $1{,}11\cdot10^5$; $9{,}88\cdot10^4$; $8{,}76\cdot10^4$ Па. Вважати, що газоподібний азот аж до температури конденсації описується рівнянням Менделєєва — Клапейрона. Питомим об'ємом рідкого азоту $v_р$ знехтувати порівняно з питомим об'ємом газоподібного азоту $v_г$.

Розв'язання. Враховуючи, що $v_р \ll v_г$, з рівняння Клапейрона - Клаузіуса знаходимо

$$q = T(v_г - v_р)\frac{dp}{dT} = Tv_г\frac{dp}{dT}.$$

Рівняння Менделєєва — Клапейрона для одиниці маси $m = 1$ газоподібного азоту запишемо так:

$$pv_г = \frac{m}{M}RT = \frac{R}{M}T.$$

Тоді

$$q = \frac{RT^2}{Mp}\frac{dp}{dT}. \qquad (1)$$

Перейшовши у виразі (1) від $\frac{dp}{dT}$ до скінченних різниць $\frac{\Delta p}{\Delta T}$, дістанемо

$$q = \frac{RT^2}{Mp}\cdot\frac{\Delta p}{\Delta T}. \qquad (2)$$

Після підстановки числових значень знаходимо, що

$$q = 2{,}09\cdot10^5 \text{ Дж/кг}.$$

Приклад 21.2. У закритій посудині при температурі T міститься вологе повітря, відносна вологість якого f. На скільки градусів треба знизити температуру стінок посудини, щоб на них почала з'являтися роса. Питома теплота пароутворення води при температурі T дорівнює q. Водяну пару розглядати як ідеальний газ.

Розв'язання. Рівняння Клапейрона — Клаузіуса при заміні $\frac{dp}{dT}$ відношенням відповідних величин, виражених через скінченні різниці, запишемо так:

$$\frac{p_2 - p_1}{T_2 - T_1} = \frac{1}{T}\frac{q}{V},$$

де p_1 і p_2 — тиски насиченої пари відповідно при температурах T_1 і T_2. При відносній вологості f тиск пари у повітрі для температури T_1 буде fp_1. За умовою задачі водяні пари — це ідеальний газ і об'єм посудини сталий, тому маємо

$$p_2 = \frac{T_2}{T_1}fp_1.$$

На основі цих співвідношень дістаємо

$$T_2 - T_1 = \frac{f-1}{Mq - fRT_1}RT_1^2.$$

§ 21.3. Сублімація, плавлення та кристалізація твердих тіл

Тверді тіла зберігають свій об'єм і форму. В них середня кінетична енергія структурних одиниць набагато менша від потенціальної енергії їхньої взаємодії. При нагріванні твердого кристала збільшується амплітуда теплових коливань структурних одиниць. Це спричиняє послаблення міжструктурних зв'язків і, як одного з кінцевих результатів, — до руйнування кристалічних граток. Тіло стає рідким, тобто відбувається процес плавлення. *Плавлення* — це рівноважний фазовий перехід твердого кристалічного тіла в рідкий стан, який супроводиться поглинанням теплоти. Дальше нагрівання твердого тіла спричинює його випаровування, обумовленого відривом молекул з найбільшою енергією з поверхні тіла.

Крім рідин, безпосередньо можуть випаровуватися і тверді тіла без проміжного переходу через рідкий стан, тобто відбувається сублімація. *Сублімація* — рівноважний фазовий перехід з твердої фази в газоподібну, минаючи рідкий стан. Одним з поширених прикладів сублімації є зникнення снігу без його танення під дією холодного сухого вітру. Широко відомі також приклади сублімації при кімнатних температурах нафталіну, камфори, бензойної кислоти, твердої вуглекислоти, йоду, нашатирю і т. д. Цим і пояснюється різкий запах, властивий багатьом твердим органічним сполукам. Сублімація можлива для всього інтервалу тисків і температур співіснування твердої та газоподібної фаз. Цей інтервал охоплює низькі тиски. Температура, при якій тиск насиченої пари твердого тіла дорівнює зовнішньому тиску, називається *точкою сублімації*.

Процесу сублімації відповідає обернений процес десублімації, або аблімації, — безпосередній перехід речовини з газоподібного стану в твердий.

Густина і тиск насиченої пари при сублімації, як і при випаровуванні, залежать від температури. Тиск пари, яка перебуває в рівновазі з твердим тілом, є функцією температури і зростає з її підвищенням.

Закони кінетики сублімації аналогічні законам випаровування рідин. Швидкість сублімації n_c як кількість молекул, що покидають одиницю поверхні твердого тіла за одиницю часу, визначається рівнянням Кнудсена — Ленгмюра

$$n_c = \alpha \left(\frac{2\pi RT}{M}\right)^{-\frac{1}{2}} (p - p_{<l>}). \qquad (21.10)$$

де α — коефіцієнт сублімації, який залежить від природи речовини; M — молярна маса пари; p і $p_{<l>}$ — відповідно тиски насиченої пари і пари на відстані середньої довжини вільного пробігу від поверхні твердого тіла.

Очевидно, механізм сублімації твердих тіл зводиться до того, що деякі атоми поверхневого шару відриваються від своїх сусідів і покидають поверхню твердого тіла. Така можливість випливає з максвелівського закону розподілу швидкостей, який застосовний при високих температурах не тільки до газів, а й до твердих тіл.

За Френкелем число атомів N_c, що сублімують за одиницю часу,

$$N_c = n\sqrt{\frac{kT}{2\pi m_0}}\, e^{-\frac{U_0}{kT}}, \qquad (21.11)$$

де n — середнє число атомів в одиниці об'єму тіла; m_0 — маса атома; U_0 — енергія сублімації.

З формули (21.11) видно, що при $kT \ll U_0$, швидкість сублімації досить мала, а при наближенні kT до U_0 вона швидко зростає.

Теплота сублімації відповідає сумі теплот плавлення та випаровування. Питома теплота сублімації — величина, що дорівнює кількості теплоти, потрібної для перетворення одиниці маси твердого тіла в пару з такою самою температурою.

Криву температурної залежності тиску пари, що перебуває в рівновазі з твердим тілом, називають *кривою сублімації*. Оскільки сублімація відбувається при низьких тисках, то питомий об'єм пари на кривій сублімації на кілька порядків більший, ніж питомий об'єм твердої фази. Тому в рівнянні Клапейрона — Клаузіуса $\frac{dp}{dT} = \frac{q_c}{T(V_п - V_{тв})}$ похідна $\frac{dp}{dT} > 0$ і крива сублімації на $p-T$-діаграмі стану має додатний нахил.

Явище сублімації при високому вакуумі широко застосовується в так званій сублімаційній сушці медичних препаратів, багатьох харчових продуктів тощо.

Розглянемо агрегатні переходи, що є прихованою трансформацією внутрішньої структури. Якщо при нагріванні твердого тіла порушується дальній порядок при збереженні зв'язків, які забезпечують ближній порядок, то відбувається плавлення. Якщо при нагріванні ліквідується і ближній порядок, то відбувається сублімація. Механізм плавлення зумовлений тим, що при нагріванні твердого кристала збільшуються середні міжвузлові відстані в гратках. При цьому зростають амплітуди ангармонічних коливань частинок у кристалічних гратках і послаблюються зв'язки між ними. Це, в свою чергу, приводить до зменшення порядку в структурі кристала. Цей процес — самоприскорений, тобто подальше зменшення міри порядку пов'язане з меншими енергетичними затратами. Я. І. Френкель зазначав, що збільшення об'єму при плавленні можна одночасно розглядати як безпосередню причину, так і наслідок ліквідації дальнього порядку при плавленні. Кристалічні тіла мають певну температуру плавлення, що залежить від зовнішнього тиску. Температура плавлення є температурою рівноважного фазового переходу твердого кристалічного тіла в рідкий стан при сталому тиску. Зворотний процес переходу речовини з рідкого стану в твердий кристалічний відбувається при тій самій температурі, що й плавлення.

Зазначимо, що коли йдеться про твердий стан як про фазу речовини, то мають на увазі лише твердий кристалічний стан.

Аморфне тіло плавиться не при певній фіксованій температурі — температурі плавлення, а в певному інтервалі температур. Отже, більш правильно говорити не про плавлення аморфних тіл, а про розм'якшення та зменшення в'язкості їх. Тому аморфний твердий стан не є особливою фазою речовини. Так, тверде і рідке скло — це не різні фази. Криві кінетики нагрівання та охолодження кристалічного тіла зображено на рис. 21.6. При плавленні або кристалізації тверда і рідка фази існують одночасно, контактуючи між собою. Відрізок ab відповідає нагріванню твердого тіла до температури плавлення $T_{пл}$. Теплота, що підводиться ззовні, збільшує енергію коливань структурних одиниць (атомів, молекул), і температура підвищується. При цьому поступово зменшується дальній порядок і відбувається процес утворення "дірок" — вакантних вузлів кристалічних граток відповідно до рівняння $n/N = e^{-Q/(kT)}$, де n/N — відносне число вакантних вузлів; Q — енергія активації утворення вакантних вузлів. При досягненні температури $T_{пл}$ концентрація ва-

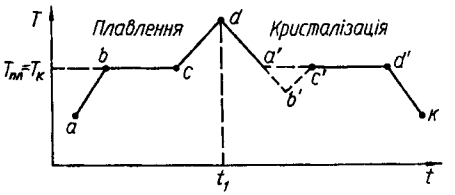


Рис. 21.6

кансій стає критичною і кристалічні гратки розпадаються на легкорухливі субмікроскопічні області. Для них характерне таке розміщення атомів, як і для кристала. При цьому теплота йде на послаблення міжатомних зв'язків, створення вакансій при поділі кристала на субмікроскопічні області. Це спричинює ізотермічність процесу плавлення (відрізок *bc*). Дальше нагрівання розплавленого тіла (рідини) знову веде до підвищення енергії теплових коливань структурних частинок і до лінійного зростання температури (відрізок *cd*).

Питомі об'єми речовини в твердій і рідкій фазах $V_{тв}$ і V_p близькі між собою. При $V_p > V_{тв}$, згідно з рівнянням Клапейрона — Клаузіуса, $\frac{dp}{dT} > 0$, тобто з підвищенням тиску $T_{пл}$ збільшується. Це характерно для більшості твердих тіл. При підвищенні густини упаковки атомів у процесі переходу в рідкий стан, коли $V_p < V_{тв}$, то $\frac{dp}{dT} < 0$. Це є характерним для льоду, деяких сортів чавуну, вісмуту, германію, напівпровідникових сполук типу $A_{III}B_{VI}$ – InSb, GSb.

Питома теплота плавлення $q_{пл}$ — це кількість теплоти, потрібної для розплавлення одиниці маси кристалічної речовини, взятої при температурі плавлення.

Якщо з моменту часу t_1 припинити нагрівання рідкої фази речовини і почати її охолоджувати (див. рис. 21.6), то хід кривої $T(t)$ зобразиться відрізком da'. При досягненні температури кристалізації $T_к(T_к = T_{пл})$ і при наявності центрів — зародків кристалізації мінімально необхідних розмірів — у системі почне реалізуватися власне процес кристалізації (відрізок $a'c'd'$). Залежно від природи центрів кристалізації розрізняють гомогенну і гетерогенну кристалізацію. Гомогенна кристалізація — це кристалізація, що здійснюється за умови, коли в розплавленій речовині зовсім немає забруднень, нерозчинених домішок, які можуть бути центрами кристалізації. Гетерогенна кристалізація — це кристалізація розплавленої речовини, в якій є нерозчинені домішки, що стають центрами кристалізації. Природа утворення центрів кристалізації при гомогенній кристалізації є флуктуаційною. Якщо в рідині немає центрів кристалізації, то її можна переохолодити до температур, менших $T_к$ (лінія $a'b'$ на рис. 21.6). Переохолоджений стан рідини — метастабільний, не стійкий. При досить сильному переохолодженні можливе самовільне утворення центрів кристалізації внаслідок флуктуацій густини рідини. При гомогенній кристалізації виникає лише одна поверхня розділу тверда фаза — рідина. На її утворення витрачається енергія. Ця енергія виникає внаслідок створення об'єму стійкої кристалічної фази. При гетерогенній кристалізації центри кристалізації утворюються на домішках або каталізаторах кристалізації. Йдеться про створення трьох поверхонь розділу: тверда фаза — рідина, каталізатор — рідина, каталізатор — тверда фаза. Для утворення їх витрачається певна

енергія. Вона буде меншою, якщо поверхня каталізатора добре змочується рідкою фазою. Це й визначає ефективність каталізатора.

У подальшому процес кристалізації характеризується швидкістю збільшення центрів кристалізації і лінійною швидкістю росту кристалів. Остання визначається характером теплообмінних процесів між зливком і навколишнім середовищем та в самому зливку.

Коли в рідині багато центрів кристалізації, то в ній утворюється багато кристаликів відповідної багатогранної форми, які зростаються, і тверда фаза стає полікристалічною. Під час кристалізації з одного центра тверда фаза стає монокристалом. Це досить важко реалізувати практично. Але утворення монокристалів стає надзвичайно актуальним завданням для напівпровідникової і лазерної техніки.

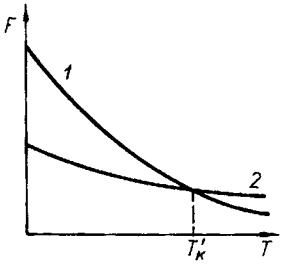


Рис. 21.7

У процесі кристалізації зменшується вільна енергія системи і сам процес супроводиться виділенням теплоти кристалізації. Зміни вільної енергії F речовини, що перебуває в рідкій і твердій фазах, залежно від температури показані на рис. 21.7. Криві *1* і *2* відповідають рідкій і твердій фазам. Теоретична температура кристалізації $T_к'$ характеризує стан термодинамічної рівноваги, для якого вільні енергії твердої і рідкої фаз дорівнюють одна одній. Очевидно, для реалізації кристалізації треба створити такі умови, за яких вона була б термодинамічно найбільш імовірним процесом і супроводилась би зменшенням вільної енергії системи. А це можливо, як видно з рис. 21.7, тільки при переохолодженні рідини. Отже, практичні криві охолодження розплаву при кристалізації порівняно з теоретичною повинні мати такий вигляд, як показано на рис. 21.8. На рисунку крива *1* характеризує теоретичний хід кристалізації, крива *2* — реальний хід, крива *3* — реальний хід при переохолодженні рідкої фази значно нижче від точки $T_к'$ ($T_к$ — фактична температура кристалізації). Величину $n = T_к' - T_к$ називають *ступенем переохолодження.*

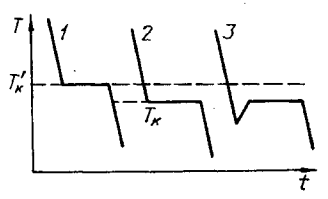


Рис. 21.8

При великій кількості центрів кристалізації і малій швидкості кристалізації дістаємо дрібнокристалічну структуру кристала, а при малій кількості центрів і великій швидкості кристалізації — крупнокристалічну структуру.

§ 21.4. Потрійна точка

Розглянемо однокомпонентну трифазну систему. Для неї, згідно з правилом фаз Гіббса, число ступенів вільності дорівнює нулю. Це означає, що в однокомпонентній системі три фази можуть перебувати у термодинамічній рівновазі лише при певних значеннях температури і тиску, характерних для даної конкретної речовини.

На $p-T$-діаграмі (рис. 21.9) стан, в якому співіснують в рівновазі три фази даної речовини, зображується точкою. Цю точку називають *потрійною.*

Очевидно, в потрійній точці повинні перетинатися криві фазових рівноваг двофазної однокомпонентної системи. Під кривою фазової рівноваги розуміють геометричне місце точок, які відображують на термодинамічній діаграмі стани фаз, що співіснують. При цьому йдеться про такі криві фазової рівноваги: крива кипіння (конденсації), крива плавлення (кристалізації), крива сублімації (десублімації). Криву кипіння називають також кривою або лінією насичення.

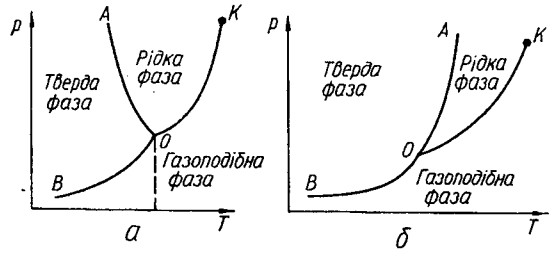


Рис. 21.9

На рис. 21.9, *а, б* подано характерні $p-T$-діаграми речовини з кривими фазових рівноваг (або фазових переходів). На діаграмах OA — криві плавлення, OK — криві випаровування, OB — криві сублімації. Точка O — це потрійна точка, в якій речовина співіснує в рівновазі в трьох агрегатних станах. З рис. 21.9 видно, що крива плавлення OA для різних речовин може мати як додатний (рис. 21. 9, *б*), так і від'ємний (рис. 21.9, *а*) нахили. Криві плавлення не закінчуються навіть при надвисоких тисках порядку десятків і сотень тисяч атмосфер. Крива випаровування OK має додатний нахил і $V_г >> V_р$, $\frac{dT}{dp} > 0$. Зважаючи на значну різницю $V_г - V_р$, крива OK на $p-T$-діаграмі розміщена відносно полого. Крива OK закінчується в критичній точці K, а починається в потрійній точці. Крива сублімації OB, як і крива кипіння, має додатний нахил. Це означає, що з підвищенням тиску температура фазового переходу зростає. Питома теплота сублімації перевищує питому теплоту випаровування і крива сублімації розміщена крутіше від кривої випаровування. Для всіх чистих речовин характерний додатний нахил кривих сублімації і випаровування, тобто вони обернені своїми опуклостями вниз. Розглянуті $p-T$-діаграми називають *діаграмами стану.* Вони виражають залежність стану системи і фазових рівноваг у ній від зовнішніх умов. Їх будують на основі дослідних даних і широко використовують для характеристики різних речовин. Зліва від кривої AOB розміщена область твердого стану речовини, справа від кривої KOB — область газоподібного стану, а між кривими OA і OK — область рідкого стану. Очевидно, на основі діаграми стану завжди можна визначити стан речовини при певних фіксованих p і T.

Для води потрійна точка відповідає температурі 0,01 °С і тиску 610,8 Па (4,579 мм рт. ст.). Для потрійної точки води зниження температури при p = const переводить систему в стан льоду, а підвищення температури при p = const або зменшення тиску при T = const переводить систему в стан пари; підвищення ж тиску при T = const — у стан води.

Потрійним точкам речовини відповідають строго певні значення тиску і температури. Ці точки є досить зручними в метрології для встановлення реперних точок температурних шкал.

Хімічно однорідні речовини на діаграмах стану мають одну потрійну точку, а для речовин з алотропічними модифікаціями число потрійних точок відповідно збільшується. Так, для сірки можливі чотири фази: ромбічна (тверда), моноклінна (тверда), рідка та газоподібна сірка. Потрійну точку, в якій речовина співіснує в трьох агрегатних станах, називають *головною потрійною точкою.* При цьому рівновага всіх чотирьох фаз для сірки не може бути реалізована ні за яких умов.

При збільшенні числа компонентів системи (розчин або розплав) збільшується і число незалежних параметрів, що характеризують цю систему. Так, для двокомпонентної системи крім параметрів p і T додається третій параметр — концентрація x. При цьому плоска діаграма стану $p - T$ замінюється просторовою діаграмою $p - T - x$.

§ 21.5. Поняття про фазові переходи першого та другого родів

Досі ми зосереджували увагу на фазових переходах першого роду, до яких належать усі агрегатні переходи, а також перетворення твердих тіл з однієї кристалічної модифікації в іншу, наприклад, перетворення сірки з ромбічної в моноклінну або навпаки — поліморфні переходи. Фазові переходи, що супроводяться стрибкоподібними змінами внутрішньої енергії та об'єму системи, отже, супроводяться поглинанням або виділенням теплоти переходу, називають *фазовими переходами першого роду.* Ці переходи можна означити ширше. Фазові переходи першого роду — це переходи, при яких перші похідні від термодинамічних функцій за відповідними їм параметрами змінюються стрибкоподібно. При фазових переходах першого роду но-

ва фаза не виникає одразу в усьому об'ємі. Спочатку утворюються зародки нової фази, які потім ростуть, поширюючись на весь об'єм. Зміни тиску зумовлюють і зміну температури фазового переходу першого роду, що графічно подається на діаграмах стану.

Як показують досліди, у природі можуть існувати такі фазові переходи, при яких внутрішня енергія та об'єм системи залишаються незмінними, теплоти фазового переходу немає, але змінюються стрибком теплоємність і термічні коефіцієнти. Вони дістали назву *фазових переходів другого роду.* Уявлення про них вперше у 1933 р. чисто формально, залежно від порядку термодинамічних похідних, що зазнають стрибка в точці переходу, ввів австрійський фізик П. Еренфест (1880—1933). Прикладом є перехід заліза при підвищенні температури з феромагнітного стану в парамагнітний. Це впорядкування в бінарних сплавах металів, перехід деяких металів при низьких температурах у надпровідний стан, перехід рідкого He I у рідкий He II та ін. До особливостей цього типу переходів відносять те, що процес утворення нової фази в цьому разі відбувається одночасно в усьому об'ємі системи. Це приводить до того, що в точці переходу немає рівноваги двох різних фаз. Отже, як наслідок, у точці переходу немає стрибків об'єму, внутрішньої енергії, ентальпії та ін. Теплота фазового переходу в цьому разі дорівнює нулю. Академік Л. Д. Ландау (1908—1968), аналізуючи фізичний зміст фазових переходів другого роду, вперше показав, що вони пов'язані з стрибкоподібною зміною певної властивості симетрії тіла в точці переходу. При переході магнетика з феромагнітного стану в парамагнітний змінюється симетрія в розміщенні елементарних магнітних моментів. Рельєфно зміну симетрії можна спостерігати при нагріванні латуні (сплав CuZn). В упорядкованому стані це кубічний кристал, в якому атоми Cu розміщені у вершинах куба, а атоми Zn — у центрах кубів. З підвищенням температури відбувається часткове невпорядкування сплаву, тобто частина атомів Zn і Cu міняється місцями. При температурі 450 °C створюється ситуація, для якої з однаковою ймовірністю на "мідних" і "цинкових" вузлах можна знайти як атоми Cu, так і атоми Zn. При цьому кристал CuZn одержує новий елемент симетрії. Він збігається сам з собою при зміщенні на половину діагоналі куба і атоми Cu і Zn однаково часто зустрічаються як у вершинах, так і в центрах кубів. Гратка Браве з простої кубічної перетворюється в об'ємно-центровану.

Аналогічна зміна кристалічних модифікацій (зміни симетрії) спостерігається при нагріванні сегнетоелектрика — дигідрофосфату калію KH_2PO_4. При досягненні температури 123 °C (точка переходу другого роду) тетрагональний кристал переходить у ромбічну систему і набуває сталого дипольного моменту в напрямі осі "*C*", стаючи сегнетоелектриком. Симетрія при цьому змінюється стрибком. Наведені приклади свідчать про те, що фазові переходи другого роду пов'язані зі змінами симетрії. Спільним при цьому є поява в системі певної нової якісної властивості при неперервній зміні станів.

Ландау також довів, що в точці переходу можливі не довільні зміни симетрії, а лише допустимі. Отже, існують певні обмеження для фазових переходів другого роду. Такі переходи неможливі між кристалом і рідиною. Стрибкоподібна зміна симетрії в точці фазового переходу другого роду пов'язана із зміщенням досить малого числа атомів, або з переміщенням їх на досить малі відстані. Тому такі переміщення не приводять до енергетичних затрат і до стрибкоподібної зміни об'єму. Разом з тим у точці переходу відбувається стрибкоподібна зміна температурної залежності цих величин і відповідно теплоємності $C_p = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p$, коефіцієнта стисливості $\gamma = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$, коефіцієнта об'ємного теплового розширення $\beta = \frac{1}{V_0}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$.

Л. Д. Ландау в 1937 році розробив загальну теорію фазових переходів другого роду як точок зміни симетрії: вище точки переходу система, як правило, має більш високу симетрію, ніж нижче точки переходу. Теорія Ландау не є самодостатньою.

Проблема фазових перетворень другого роду належить до фундаментальних проблем фізики. Вона є однією з типових задач багатьох тіл, в яких визначальну роль відіграють "кооперативні явища", тобто суттєвим стає характер зміни ентропії, а не енергії. Тому загальна теорія цих явищ знаходиться поки що на шляху становлення.

§ 21.6. Метастабільні стани

Розглянемо деякі особливості діаграми стану і фазових перетворень першого роду (рис. 21.10). До кривих фазових рівноваг прилягають області метастабільних станів (штрихові лінії на рис. 21.10). Метастабільні фазові стани — це не повністю стійкі стани системи з великим числом частинок, яка здатна до фазових перетворень першого роду. Система є стійкою щодо малих (неперервних) змін термодинамічних параметрів, але виявляє нестійкість при появі в ній нової конкуруючої фази. Це означає, що, наприклад, в області *3* (газоподібна фаза) рідина може існувати в метастабільному стані лише за певних умов. Таку рідину називають *перегрітою.* При цьому газоподібна фаза є термодинамічно стійкою. В області *2*, в якій стійка рідка фаза, за певних умов може існувати пара в метастабільному стані. Її називають *пересиченою парою.* В області *1*, де стійка тверда кристалічна фаза, за певних умов у метастабільному стані може існувати рідина, яку називають *переохолодженою.* Існування метастабільних станів пов'язане

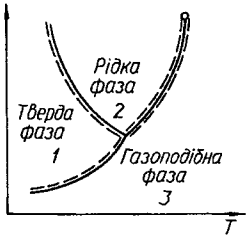


Рис. 21.10

з певними утрудненнями здійснення початкової стадії фазового переходу першого роду, тобто відсутністю центрів фазових переходів. Наявність метастабільних станів раніше ілюструвалась за допомогою порівняння теоретичних ізотерм Ван-дер-Ваальса і дослідних ізотерм.

Для аналізу умов стійкості рівноваги в термодинаміці використовують залежність термодинамічного потенціалу Гіббса Z як функції стану $Z = F + pV$ (F — вільна енергія, p і V — тиск і об'єм) від певного параметра стану системи. Потенціал Гіббса визначає напрям самовільного перебігу процесів для систем, які перебувають при сталих температурах і тиску. В системах при $p = \text{const}$ і $T = \text{const}$ самовільно процеси можуть відбуватися лише при зменшенні Z. Границею перебігу, тобто умовою рівноваги системи, буде досягнення системою певного мінімального для даних умов значення функції Z.

Нехай крива (рис. 21.11) — це залежність потенціалу Гіббса від певних змін умов існування системи, на якій точки A_1, A_2 і A_3 є мінімумами функції Z. Стан A_3 відповідає найбільшій термодинамічній стійкості системи.

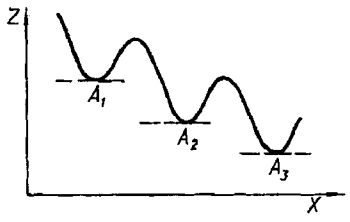


Рис. 21.11

Стани, які відповідають невеликій відносній стійкості, називають *метастабільними*. Перехід системи в більш стійкі стани може відбуватися внаслідок досить слабких зовнішніх дій. Так, кристалізацію розчиненої речовини з пересиченого розчину можна здійснити, якщо внести невеликий кристалик розчиненої речовини. Пересичена пара легко конденсується при іонізації. Це явище лежить в основі роботи камери Вільсона, що використовується для реєстрації елементарних частинок.

Маленькі пилинки (аерозолі), що містяться в повітрі, — це центри конденсації скінченних розмірів. Через це тумани легко утворюються в повітрі, яке містить пил, кіпоть уже при незначних переохолодженнях.

Явище перегрівання рідини використовується в так званій бульбашковій камері, приладі, що аналогічний за призначенням камері Вільсона. Елементарна частинка, рухаючись через перегріту рідину бульбашкової камери, гальмується і частина її енергії перетворюється на теплоту. Вона є достатньою для інтенсивного утворення бульбашок на шляху частинки.

Речовини в метастабільному стані можуть перебувати в істинній (динамічній) рівновазі між різними частинами системи. Так, переохолоджена вода перебуває в динамічній рівновазі з своєю насиченою парою (при $t = -15$ °C, $p_н = 190$ Па). Але, як і сама вода, ця пара перебуває в метастабільному стані, будучи пересиченою відносно льоду. Такі рівноваги також називаються метастабільними. Для метастабільних станів є характерним їхнє більш-менш тривале існування, оскільки вони самі по собі стійкі, а перехід у стабільну фазу, якщо немає центрів фазового переходу, потребує подолання деякого потенціального бар'єру.

§ 21.7. Поняття про квантові рідини

Однією з характерних властивостей рідин є їхня в'язкість, яка для звичайних класичних рідин при зменшенні температури збільшується.

Проте, досліджуючи властивості рідкого гелію $^4_2$He при низьких температурах, П. Л. Капіца в 1937 р. зробив фундаментальне відкриття у фізиці — надплинність гелію $^4_2$He. Вона полягає в здатності He II протікати через вузькі капіляри ($10^{-4} - 10^{-5}$ см) без виявлення в'язкості. При цьому об'ємна швидкість течії рідкого He II не залежить від тиску і довжини капіляра. Із збільшенням радіуса капіляра об'ємна швидкість не збільшується, а зменшується. Зазначимо, що для рідкого He II існує певна критична швидкість течії, вище від якої течія стає в'язкісною. Одночасно зазначимо, що результати безпосереднього вимірювання в'язкості по затуханню крутильних коливань тіла, зануреного в He II та He I, досить близькі між собою. Отже, в цьому разі не йдеться про надплинність He II. Взагалі проблема рідкого гелію у 30-х роках стала однією з провідних проблем фізики.

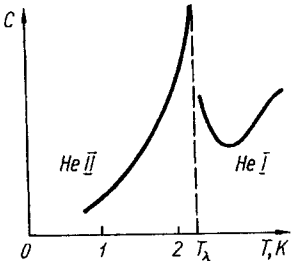


Рис. 21.12

Двома фазами рідкого $^4_2$He є He I і He II. Розглянемо докладніше загальні властивості рідкого гелію, використовуючи при цьому і діаграму стану. Рідкий гелій — легка, прозора, без кольору рідина. Він залишається рідким при атмосферному тиску навіть при температурі абсолютного нуля (з такою властивістю він єдина речовина в природі). У рідкий стан гелій-газ переходить при $T = 4{,}22$ K і атмосферному тиску. При $T = 2{,}19$ K у ньому відбувається фазовий перехід другого роду.

У 1932 р. В. Х. Кеєзом разом з К. Клаузіусом встановили, що при цій температурі теплоємність рідкого $^4_2$He зазнає аномальної зміни (рис. 21.12). Графік стрибкоподібної залежності $C(T)$ в області $T_\lambda = 2{,}19$ K нагадує грецьку букву λ. Тому цю температуру називають λ-точкою. Це точка фазового переходу другого роду. Вона розділяє рідкий $^4_2$He на дві фази He I при $T > 2{,}19$ K і He II при $T < 2{,}19$ K. Зростання C при наближенні до T_λ має логарифмічний характер.

He I і He II відрізняються за зовнішніми ознаками. He I бурхливо кипить в усьому об'ємі, He II — спокійна рідина з чітким меніском.

Ці відмінності зумовлені великою інтенсивністю теплопереносу в Не II. Вона в багато мільйонів разів вища порівняно з Не I, Не II — порівняно легко стислива рідина.

Температура T_λ при підвищенні тиску зміщується в сторону більш низьких температур (рис. 21.13 — діаграма стану $^4_2$He).

Незвичайну властивість надплинності Не II можна пояснити на основі квантових уявлень. Згідно з уявленнями класичної фізики частинки твердого кристала здійснюють коливальні рухи поблизу положень рівноваги, тобто біля вузлів кристалічної гратки. З підвищенням температури амплітуда коливань збільшується і при досягненні нею міжатомних відстаней кристал плавиться. При $T = 0$ теплові коливання повинні зникнути, а частинки перебувати в стані спокою у вузлах кристалічних граток. Таким чином, при $T = 0$ всі тіла повинні бути твердими кристалами.

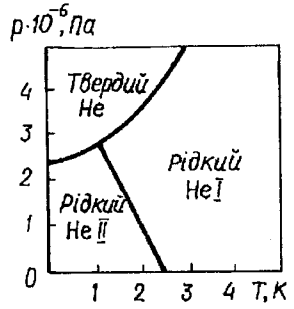


Рис. 21.13

Рідкий гелій, як уже зазначалося, при $T \to 0$, внаслідок відносно слабкої взаємодії інертних атомів і великих значень нульової енергії* W_0 ($W_0 \sim 1/\sqrt{m_0}$, де m_0 — маса частинки) залишається рідким.

Усі тіла тверднуть раніше, ніж з'являються квантові закономірності. Лише гелій стає "квантовим" до затвердіння. Зважаючи на цю аномалію рідкого гелію, його називають квантовою рідиною. Це не означає, що гелій взагалі не може бути твердим. У твердий стан він переходить при підвищених тисках і тим більших, чим вища його температура. Для кристалізації гелію при $T = 0$ потрібний тиск $p = 25{,}27 \cdot 10^5$ Па (див. рис. 21.13). При збільшенні тиску відстані між атомами зменшуються, а сили взаємодії зростають, що сприяє твердненню рідкої фази.

Згідно з теорією Ландау перехід гелію в надплинний стан при $T = 2{,}19$ К є переходом від класичної до квантової рідини. Введення поняття про квантові рідини мало велике значення для фізики загалом. Огляд результатів дослідження в'язкості гелію показав, що в одному випадку Не II поводить себе як надплинна рідина (протікання

* Згідно з уявленнями квантової механіки частинки навіть при $T = 0$ не перебувають у стані спокою, а здійснюють так звані "нульові" коливання. Якщо їм відповідає досить великий запас нульової енергії, то кристалізація не реалізується (амплітуда "нульових" коливань така сама за величиною, як і міжатомні відстані).

через тонкі капіляри), а в другому (вимірювання в'язкості за затуханням крутильних коливань) — як звичайна рідина із скінченною в'язкістю, що на чотири порядки менша за в'язкість повітря. В'язкість Не II в десятки тисяч разів менша від в'язкості Не I. Макроскопічні уявлення теорії надплинності Не II грунтуються на двокомпонентній моделі. Згідно з цією моделлю Не II — це суміш двох компонент — нормальної і надплинної*. Густину рідкого гелію Не II записують так: $\rho = \rho_н + \rho_{н.п}$, де $\rho_н$ — густина нормальної компоненти Не II, властивості якої аналогічні властивостям Не I; $\rho_{н.п}$ — густина надплинної компоненти. Очевидно, при $T \to 0$, $\rho_н \to 0$ вся рідина стає надплинною. При переході через λ-точку зліва направо вся рідина стає нормальною. Виявляється, що дослідним шляхом можна визначити відношення $\rho_н/\rho = f(T)$. Знаючи ρ і $\rho_н/\rho$, можна обчислити величини $\rho_н$ і $\rho_{н.п}$.

Надплинність можна пояснити так. Коли гелій протікає через тонкі капіляри, то тут без в'язкості рухається надплинна компонента. Нормальна компонента рухається повільніше. Ці одночасні течії відбуваються без передачі імпульсу одна одній, що у сукупності і приводить до надплинності.

Для Не II характерним є ще ряд цікавих і незвичайних властивостей. Спочатку розглянемо утворення тонких рухливих плівок рідкого Не II на поверхні твердого тіла, яке стикається з Не II. Плівка рухається в сторону, де температура вища, і там випаровується. Товщина плівки становить приблизно $2 \cdot 10^{-8}$ м, тобто близько 100 атомних шарів. Цікаво зазначити, що залежність швидкості течії рідкого Не II в плівках від температури має такий самий характер, як і для його течії у вузьких капілярах. Крім того, для обох течій існує певна критична швидкість, вище від якої течія стає в'язкою.

Причину течії Не II в плівках П. Л. Капіца пояснює на основі гіпотези про різницю ентальпій Не II в тонких шарах і в об'ємі (вільному стані). Це дає змогу вважати, що надплинність Не II у вузьких капілярах не є об'ємним явищем, а відбувається у поверхневому шарі, тобто у місцях безпосереднього контакту Не II з капілярами текучої компоненти.

Для рідкого Не II є також характерні два термодинамічно обернені явища. Одне з них — механокалоричний, або механотермічний, ефект. Він полягає в тому, що при швидкому витіканні рідкого Не II з посудини змінюється його температура. Всередині посудини, з якої

* Двокомпонентна модель — це наочний спосіб описання процесів у квантовій рідині, точніше, слід говорити не про дві компоненти квантової рідини, а про два можливі типи її течії — нормальний і надплинний. Як зазначає Л. Д. Ландау, будь-яке описання квантових явищ у класичних термінах не є повністю адекватним.

витікає гелій, температура підвищується, а температура самого гелію знижується.

Обернений процес — термомеханічний, або "фонтан-ефект". При підведенні теплоти (освітленні) до посудини, заповненої дрібним порошком і поміщеної в другу посудину з рідким гелієм, через пори порошку протікає гелій і з верхнього вільного кінця першої посудини б'є фонтаном.

Теорія Ландау передбачає, що в рідкому гелію, як у квантовій рідині, повинно поширюватися два типи звукових хвиль: хвилі стиску, тобто звичайний, або "перший звук", і температурні хвилі — "другий звук" із швидкістю, істотно відмінною від швидкості "першого звуку". При $T = T_\lambda$ швидкість другого звуку дорівнює нулю, а при зниженні температури вона швидко зростає до кількох десятків метрів за секунду. Значний внесок у теорію надплинності зробив також своїми працями академік М. М. Боголюбов.

У квантовій механіці крім звичайних "класичних" характеристик, таких як маса, кожна частинка має ще специфічну квантову характеристику — спін, тобто значення власного моменту імпульсу. Ця величина має ту саму розмірність, що й стала Планка $\hbar$, і може виражатися цілим або половиною числа $\hbar$.

Істотна відмінність між атомами $^4_2$He і $^3_2$He полягає в тому, що перші мають спін, який дорівнює нулю, а другі — спін 1/2.

Частинки, спін яких дорівнює нулю або цілому числу, описують статистикою Бозе — Ейнштейна, а частинки з напівцілим спіном — статистикою Фермі — Дірака.

Довгий час вважалося, що надплинний He II є єдиною квантовою рідиною. Проте тепер ясно, що в природі є інші квантові рідини. Нуклід гелію $^3_2$He є також квантовою рідиною. Його властивості пояснюються на основі квантово-механічних уявлень. Рідкий $^3_2$He не виявляє надплинності принаймні до 0,1 K. Відомо, що надплинність речовини тісно пов'язана з парністю частинок в атомі. Тільки в системах з "парними" атомами у вказаному вище розумінні виникає спектр елементарних збуджень, який допускає надплинність. Рідини, яким властива надплинність, називають бозе-рідинами, а рідини, які не мають надплинності, — фермі-рідинами. Їх так названо на честь індійського фізика Ш. Бозе (1894—1974) та італійського фізика Е. Фермі (1901—1954), які першими вказали на відмінність у поведінці парних і непарних атомів взагалі. Зазначимо, що картину тут спеціально спрощено. Якщо в фермі-рідині взаємодії такі, що в результаті їхні атоми можуть асоціюватись у пари, то при цьому молекулярна рідина уже буде бозе-рідиною з характерною надплинністю. Це можливо при температурах близько 0,001 K.

Своєрідний клас квантових рідин створюють рідини нуклідів $^4_2$He і $^3_2$He при дуже низьких температурах. До квантових рідин належать електрони провідності ("електронна рідина") в металах при низьких

температурах. При температурах близько 10 K в "електронній рідині" стає можливим спарювання електронів. У 1956 р. американський фізик Л. Купер показав, що надпровідність металів зумовлена спарюванням електронів, так що спін пари електронів дорівнює одиниці. Такі куперівські пари за своїми властивостями повинні бути аналогічними надплинним рідинам. Число куперівських пар із зниженням температури поступово зростає і вони конденсуються в найнижчому за енергією (основному) стані. Своєрідний "конденсат" куперівських пар утворює квантову рідину, яка протікає через метал без "тертя", тобто метал переходить у надпровідний стан.

Надпровідність і надплинність у квантових рідинах — це макроскопічні квантові ефекти, тобто ефекти, які проявляються в макроскопічних масштабах, а не на рівні окремих атомів або молекул.

Розділ 22. Поняття про газодинаміку

§ 22.1. Основні рівняння газодинаміки

При вивченні механіки рідин і газів ми не враховували їхню стисливість. Вивчаючи рух тіл у газах із швидкостями, які близькі і більші від швидкості звуку, треба користуватися не тільки законами механіки, а й термодинаміки. Розвиток *аеродинаміки* на основі термодинаміки — це газодинаміка. До неї належать динаміка розріджених газів, магнітогазодинаміка, динаміка плазми. Газодинаміка є теоретичною основою багатьох галузей сучасної техніки: літако- і ракетобудування, турбобудування, балістики тощо.

Газодинаміка вивчає потік газу великих швидкостей при значних різницях тисків і температур. Дістанемо основні рівняння газодинаміки. При стаціонарному потоці маса газу, що протікає через будь-який переріз S труби, величина стала, тобто

$$\rho_1 v_1 S_1 dt = \rho_2 v_2 S_2 dt, \tag{22.1}$$

або

$$\rho v S = \text{const}, \tag{22.2}$$

де ρ — густина; v — швидкість потоку.

Рівняння (22.2) виражає закон збереження маси.

Розглянувши газовий потік одиниці маси з урахуванням його стисливості та зміни внутрішньої енергії, на основі аналогічних міркувань, які було проведено при виведенні рівняння Бернуллі (§ 7.3), дістаємо

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + u = \text{const}, \tag{22.3}$$

де u — внутрішня енергія одиниці маси газу. Рівняння (22.3) виражає закон збереження енергії.

Оскільки для ідеального газу

$$u = \frac{C_V T}{M}; \quad \frac{p}{\rho} = \frac{RT}{M}; \quad C_p = C_V + R,$$

то рівняння (22.3) можна записати так:

$$\frac{C_p T}{M} + \frac{1}{2}v^2 = \text{const}, \tag{22.4}$$

де M — молярна маса; C_p і C_V — молярні теплоємності.

Зміна імпульсу рухомого газу під дією зовнішніх сил виражається співвідношенням

$$(p_1 S_1 - p_2 S_2)\, dt = v_2 dm_2 - v_1 dm_1. \tag{22.5}$$

На основі рівняння (22.1) вираз (22.5) набуває вигляду

$$(p_1 S_1 - p_2 S_2)\, dt = v_2 \rho_2 v_2 S_2 dt - v_1 \rho_1 v_1 S_1 dt$$

або

$$p_1 S_1 + \rho_1 v_1^2 S_1 = p_2 S_2 + p_2 v_2^2 S_2. \tag{22.6}$$

Звідси випливає, що

$$p + \rho v^2 = \text{const}. \tag{22.7}$$

Рівняння (22.2), (22.3) і (22.7) є основними рівняннями газодинаміки.

§ 22.2. Адіабатне витікання газу

Одним із завдань газодинаміки є дослідження адіабатних потоків без урахування сил опору. Дістанемо основні висновки з рівнянь газодинаміки. Продиференціюємо рівняння (22.2) і поділимо почленно на $\rho v S$. При цьому маємо

$$\frac{dS}{S} + \frac{dv}{v}\left(1 + \frac{v}{\rho}\frac{d\rho}{dv}\right) = 0. \tag{22.8}$$

Оскільки в гідродинаміці вважалось, що $\rho = \text{const}$, то з (22.8) дістаємо

$$\frac{dv}{dS} = -\frac{v}{S} < 0, \tag{22.9}$$

тобто при збільшенні площі поперечного перерізу ($dS > 0$) швидкість потоку зменшується ($dv < 0$).

Враховуючи стисливість газів, у газодинаміці можливі і протилежного характеру явища. Справді, зміна імпульсу елемента газу масою dm буде

$$Sv\rho dt dv = -Sdpdt. \tag{22.10}$$

Звідси маємо

$$dp = -\rho v dv. \tag{22.11}$$

У § 12.1 було знайдено формулу швидкості поширення звуку в газах

$$v_{зв} = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}. \tag{22.12}$$

На основі формули (22.12) вираз (22.11) перепишемо у такому вигляді:

$$v_{зв}^2 d\rho = -\rho v dv \quad \text{або} \quad \frac{v}{\rho}\frac{d\rho}{dv} = -\frac{v^2}{v_{зв}^2}.$$

Тоді рівність (22.8) перепишемо як

$$\frac{dS}{S} + \frac{dv}{v}\left(1 - \frac{v^2}{v_{зв}^2}\right) = 0. \tag{22.13}$$

З цієї рівності випливає, що коли швидкість потоку газу більша від швидкості звуку (число Маха $M > 1$), то

$$\frac{dv}{dS} > 0. \tag{22.14}$$

Отже, випливає, що при переході до більш широкого перерізу швидкість потоку зростає. Для досягнення надзвукової швидкості потоку газу користуються трубами спеціальних профілів. У них газовий потік із швидкістю, що близька до звукової, спрямовується у звужену ділянку труби, в якій газ досягає звукової швидкості. Потім його направляють у ділянку труби, переріз якої збільшується. У цій ділянці швидкість потоку стає надзвуковою. Збільшення швидкості потоку відбувається внаслідок зменшення внутрішньої енергії газу. Це зумовлює зниження його температури. Течію, при якій кінетична енергія

потоку зростає, а густина, тиск і температура зменшуються, називають течією з розширенням.

Знайдемо швидкість адіабатного витікання ідеального газу. З рівняння (22.4) дістаємо

$$v_2 = \sqrt{\frac{2C_p}{M}(T_1 - T_2) + v_1^2}\,. \qquad (22.15)$$

Враховуючи те, що

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad \text{і} \quad C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}\,,$$

рівняння (22.15) можна подати у вигляді

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\gamma RT_1}{M(\gamma-1)}\left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right) + v_1^2}\,. \qquad (22.16)$$

При витіканні ідеального газу з резервуара ($v_1 = 0$) у вакуум ($p_2 = 0$) швидкість потоку

$$v = \sqrt{\frac{2\gamma RT_1}{M(\gamma-1)}} = v_{зв}\sqrt{\frac{2}{\gamma-1}}\,. \qquad (22.17)$$

Звідси видно, що швидкість витікання газу залежить від швидкості звуку та величини γ.

Предметний покажчик

Абсолютна температура 410
Абсолютно тверде тіло 14, 86
Автоколивання 243
Адитивність 53
Адсорбція 476
Аеродинаміка 519
Акустика 266
Акустична течія 283
Аморфні тіла 444
Амплітуда коливань 210
Анізотропія 445

Барометрична формула 332
Биття 226
Бінауральний ефект 276
Бінодаль 429
Ближній порядок 462
Броунівський рух 309

Вакуум 364
Вектор
— Бюргерса 456
— імпульсу 57
— осьовий 24
— переміщення 16
— полярний 24
— Умова 256
Вільна вісь обертання 105
Внутрішнє тертя 348
Водоструминний насос 159
В'язкість рідини 467

Газ ідеальний 299
— реальний 419
Газодинаміка 519
Гармонічний аналіз 241
Гідроаеромеханіка 148
Гідродинаміка 154
Гіроскоп 106
Гіроскопічний ефект 106
Гравітаційна стала 126, 130
Градієнт 72
Гратка Браве 447
Густина 38

Дальній порядок 444
Декремент згасання коливань 234
Детандер 442
Дефекти кристалів 453
Деформація 115, 456
— абсолютна 117
— відносна 117
— згину 118
— зсуву 118
— кручення 118
— пластична 115
— пружна 115
— розтягу 116
Динаміка класична 33
— релятивістська 200
Директор 483
Дислокація 455
Дисоціація 291
Дифракація хвиль 265
Дифузія 310
Діаграма станів 379, 511
Добротність 235
Довжина хвилі 247
Дослід Штерна 318
— Перрена 337
Дроселювання 437

Енергія 63
— вільна 469
— внутрішня 374
— гармонічного коливання 215
— кінетична 67
— кінетична обертального руху 100
— потенціальна 70
— потенціальна взаємодії мас 139
— пружної деформації 122
— хвильового руху 254
Ентропія 406
Ефект Джоуля — Томсона 437
— Допплера 279
— Магнуса 176
Ефективний поперечний переріз 344

Задача двох тіл 54
Закон Авогадро 316
— Архімеда 152
— Бойля —Маріотта 389
— Больцмана 377

— Вант-Гоффа 480
— взаємозв'язку маси і енергії 204
— відповідних станів 432
— всесвітнього тяжіння 126
— Гей-Люссака 389
— Гука 117
— динаміки обертального руху 59
— Дюлонга і Пті 461
— збереження енергії в механіці 75
— збереження імпульсу 46
— збереження маси 53
— збереження моменту імпульсу 61
— Кеплера 125
— Кулона 111
— Ньютона перший 35
— — другий 40
— — третій 44
— Паскаля 149
— Рауля 478
— фізичний 3
— Фіка 356
— Фур'є 352
Зведена теплота 404
Звук 266
Звукові хвилі 266
Змочування 472
Зрідження газів 442

Ідеальний газ 300
Ізотерми газу Ван-дер-Ваальса 425
Імпульс 36
Інваріантна величина 50
Інертність 36
Інтенсивність звуку 269
Інтервал просторовоподібний 199
— часоподібний 199
Інтерференція хвиль 257
Інфразвук 288

Калоричне рівняння стану 372, 376
Капілярність 474
Квантові рідини 515
Кипіння 503
Кілограм 37
Кінематика 12
Кінематичне рівняння руху 14
Кількість речовини 297
Кількість теплоти 380
Коефіцієнт тертя 111
— внутрішнього 113
— динамічної в'язкості 164, 348
— дифузії 356
— ізотермічної стисливості 314
— ковзання (динамічний) 112
— критичний 431
— лінійного розширення 459
— об'ємного розширення 315
— поверхневого натягу 469
— поглинання звуку 272
— Пуассона 117
— розсіяння 346
— термічний тиску316
— теплопровідності 352
Коливальний процес 209
Коливання 209
— вимушені 236
— вільні 213
— власні 213
— гармонічні 210
— згасаючі 231
— параметричні 241
— періодичні 209
Конус Маха 282
Космічні швидкості 142
Крива інверсії 439
— випаровування 510
— сублімації 506, 510
— плавлення 510
Кристали 444
— ліотропні 482
— термотропні 482
Критична опалесценція 433
— точка 426
— інверсії 440
— швидкість 169
Критичний стан 426
Кут атаки 173

Лава Жуковського 98
Ламінарна течія 167
Ламінарний потік 166
Лінія течії 155
Логарифмічний декремент згасання 234

Макроскопічне тіло 291
Макроскопічний стан 311, 412
Масса 36
— гравітаційна (важка) 131
— інертна 36
— молекул 296
Матеріальна точка 12
Маятник математичний 219
— пружинний 213
— фізичний 220
Межа міцності 121
— пружності 121
— текучості 121
Меніск 471
Метастабільний стан 514
Метод кріоскопічний 479
— ебуліоскопічний 478
— Ейлера 155
— Лагранжа 154
Метр 10
Механіка квантова 7
— класична 7
— релятивістська 7
Міжмолекулярні сили 421
Мікроскоп 412
Модуль зсуву 118
— кручення 118
— пружності 117
— Юнга 117
Молекулярна фізика 290
Молекулярний хаос 300
Молекулярні пучки 311
Молярна газова стала 312
Момент імпульсу 57
— інерції 92
— сили 58
Монокристал 445

Надплинність 515
Напруження нормальне 116
— тангенціальне 116
Необоротний процес 416
Нульове начало термодинаміки 306

Область текучості 121
— чутності 273
Основне рівняння МКТ газів 303
Осцилятор класичний 217
Оператор Гамільтона 72

Пара сил 103
Перегріта рідина 429
Переміщення 15
— кутове 23
— лінійне 16
Пересичена пара 429
Перетворення Галілея 49
Перигелий 125
Периметр змочування 472
Період 211
— ідентичності 446
— обертання 25
Петля пружного гістерезису 124
Плавлення 505
Поле тяжіння 133
Полікристал 445
Полімери 486
Полярон 454
Поріг больового відчуття 273
— чутності 273
Потенціал поля тяжіння 139
Потік енергії 255
Потрійна точка 499, 510
Потужність 66
Правило Гіббса 498
Прецесія 108
Принцип близькодії 133
— Гюйгенса 264
— далекодії 133
Прискорення 18
— абсолютне 179
— відносне 179
— коріолісове 180
— кутове 26
— нормальне 20
— переносне 180
— тангенціальне 20
Простір 8
Процес адіабатний 383
— ізобарний 315
— ізотермічний 314
— ізохорний 315
— квазістатичний 372
— коловий (цикл) 398
— необоротний 397
— оборотний 397
— політропний 388

Реальний газ 419
Резонанс 238
Релаксація 305
Рівноважний стан 371
Рівняння Бернуллі 158
— гармонічних коливань 211
— Мещерського 56
— моментів 59
— Клапейрона 312
— Клапейрона — Клаузіуса 501
— Клапейрона — Менделєєва 313
— Пуассона 383
Рідкі кристали 481
Робота 64
— макроскопічна 377
— сил тяжіння 138
Розподіл Максвелла 327
— Максвелла — Больцмана 337
Розчини 476
Рух 7
— аперіодичний 234
— броунівський 309
— відносний 49
— коливальний 15
— обертальний 15
— плоский 15
— поступальний 15
— реактивний 56
— тепловий 300

Світовий конус 200
Секунда 9

Середня довжина вільного пробігу молекул 343
Середнє число зіткнень 344
Сила 39
— вертальна 213
— відцентрова 181
— внутрішня 45
— в'язкості 162
— гіроскопічна 69, 109
— дисипативна 78
— змушуюча 236
— зовнішня 45
— інерції 181
— квазіпружна 213
— консервативна 68
— Коріоліса 181
— лобового опору 181
— міжмолекулярна 421
— неконсервативна 69
— об'ємна (масова) 148
— опору 66
— поверхнева 149
— реактивна 56
— рівнодійна 42
— рушійна 66
— тертя 110
— тяжіння 128
— центральна 68
Сингонія 447
Система відліку 13
— інерціальна 35
— неінерціальна 177
Спінодаль 430
Стала Больцмана 308
— Планка 34
Статистичний метод 293
Ступені вільності 372, 376
Сублімація 505

Температура 305
— Бойля 420
— інверсії 439
Теорема Гюйгенса — Штейнера 93
— Карно 404
— Остроградського — Гаусса 136
— руху центра мас 52
Теплоємність 380
— ідеального газу 390
Теплопровідність газів 352
Термодинамічна рівновага 371
— система 371
Термодинамічний метод 293
Тертя 110
— в'язке 110
— ковзання 111
— кочення 111
— руху (кінематичне) 110
— спокою (статичне) 110
— сухе 110
Тиск 149
— внутрішній 423
— газу 301
— гідростатичний 151
— динамічний 159
— осмотичний 480
Точка Бойля 420
— сублімації 505
Траєкторія 14
Трубка Піто 159
— Прандтля 159
— течії 155
Турбулентна течія 167

Удар непружний 81
— пружний 81
— центральний 81
Ультразвук 282

Фаза 373, 497
— хвилі 249
Фазова площина 217
— траєкторія 217
Фазовий портрет осцилятора 218
Фазові криві резонансні 240
— переходи 499
Фігури Ліссажу 229
— Хладні 278
Фізичне моделювання 298
Флотація 476
Флуктуації 339
Формула Жуковського — Кутта 176
— Кулона 112
— Лапласа 268
— Ньютона 268
— Пуазейля 166
— Стокса 114
— Томсона 503
Функція розподілу 322

Хвилі 244
— когерентні 257
— плоскі 248
— поздовжні 244
— поперечні 244
— пружні 244
— стоячі 261
— ударні 281
— циліндричні 248
Хвильове поле 248
— рівняння 251
— число 249
Хвильова поверхня 248
Хвильовий опір 263, 270
Холодильна машина 399, 403

Центр карданового підвісу 106
— мас 52, 86
— симетрії 445
Цикл Карно 399

Час 8
— власний 197
— реверберації 278
— релаксації 305
Частота власна 214
— обертання 25
— резонансна 238
Частотний спектр 242
Число Авогадро 297
— Маха 169, 521
— Рейнольдса 169
— Струхаля 169
— Фруда 169

Швидкість 16
— звуку 267
— кутова 24
— лінійна 23
— найбільш імовірна 328
— секторіальна 62
— середня арифметична 317, 329
— — квадратична 318, 330
— фазова 246
Шкала температур (термодинамічна) 409

Явища переносу 348

Зміст

Вступ . . . 3

Частина І. Фізичні основи механіки . . . 7

Розділ 1. Основи кінематики . . . 7

§ 1.1. Механічний рух. Уявлення про простір і час у класичній механіці. Кінематичне описання руху . . . 7

§ 1.2. Основні види руху твердих тіл . . . 14

§ 1.3. Вектор переміщення. Швидкість . . . 15

§ 1.4. Прискорення . . . 18

§ 1.5. Кінематика обертального руху . . . 23

§ 1.6. Плоский рух твердого тіла . . . 28

Розділ 2. Основи динаміки . . . 32

§ 2.1. Межі застосування класичної механіки . . . 32

§ 2.2. Перший закон Ньютона. Інерціальні системи відліку . . . 35

§ 2.3. Маса. Імпульс . . . 36

§ 2.4. Другий закон Ньютона. Сила . . . 39

§ 2.5. Третій закон Ньютона і закон збереження імпульсу . . . 44

§ 2.6. Принцип відносності Галілея . . . 49

§ 2.7. Деякі наслідки законів Ньютона . . . 52

§ 2.8. Рух тіл змінної маси. Реактивний рух . . . 55

§ 2.9. Момент імпульсу. Момент сили. Закон збереження моменту імпульсу . . . 57

Розділ 3. Робота і енергія . . . 63

§ 3.1. Енергія — універсальна міра руху та взаємодії . . . 63

§ 3.2. Робота і потужність . . . 64

§ 3.3. Кінетична енергія. Види механічних сил . . . 66

§ 3.4. Потенціальна енергія системи . . . 70

§ 3.5. Закон збереження енергії в механіці. Дисипація енергії . . . 75

§ 3.6. Межі руху і умови рівноваги частинки в потенціальному полі . . . 79

§ 3.7. Абсолютно пружний і абсолютно непружний удари . . . 81

Розділ 4. Механіка твердого тіла . . . 86

§ 4.1. Рух абсолютно твердого тіла . . . 86

§ 4.2. Момент інерції. Теорема Гюйгенса—Штейнера . . . 91

§ 4.3. Основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла навколо закріпленої осі . . . 96

§ 4.4. Робота зовнішніх сил при обертанні тіла. Кінетична енергія обертального руху . . . 98

§ 4.5. Пара сил. Умови рівноваги тіла . . . 103

§ 4.6. Вільні осі обертання. Гіроскопи . . . 105

Розділ 5. Сили тертя і сили пружності . . . 110

§ 5.1. Сили тертя. В'язке тертя . . . 110

§ 5.2. Сили пружності . . . 115

§ 5.3. Основні види деформації. Закон Гука . . . 116

§ 5.4. Пружні властивості реальних тіл. Енергія пружної деформації. Пружний гістерезис . . . 120

Розділ 6. Всесвітнє тяжіння . . . 124

§ 6.1. Рухи планет. Закони Кеплера . . . 124

§ 6.2. Закон всесвітнього тяжіння . . . 125

§ 6.3. Гравітаційна стала. Гравітаційна та інертна маси . . . 130

§ 6.4. Поле тяжіння. Напруженість гравітаційного поля . . . 132

§ 6.5. Робота сил поля тяжіння. Потенціальна енергія взаємодії мас. Потенціал . . . 137

§ 6.6. Застосування законів збереження до руху тіл у центральному гравітаційному полі . . . 141

§ 6.7. Космічні швидкості . . . 142

Розділ 7. Механіка рідин і газів . . . 147

§ 7.1. Тиск у рідинах і газах. Закон Паскаля. Закон Архімеда . . . 147

§ 7.2. Ідеальна рідина. Рівняння неперервності . . . 154

§ 7.3. Рівняння Бернуллі. Реакція рідини, що витікає . . . 156

§ 7.4. Рух в'язкої рідини. В'язкість. Формула Пуазейля . . . 162

§ 7.5. Ламінарний та турбулентний режими течії. Число Рейнольдса . . . 167

§ 7.6. Рух тіл у рідинах і газах . . . 170

§ 7.7. Піднімальна сила крила літака . . . 173

Розділ 8. Рух тіл у неінерціальних системах відліку . . . 176

§ 8.1. Неінерціальні системи відліку. Сили інерції . . . 176

§ 8.2. Сили інерції у системах відліку, що перебувають у поступальному прискореному русі . . . 182

§ 8.3. Сили інерції у системах відліку, що рівномірно обертаються . . . 183

§ 8.4. Вплив обертання Землі на рух тіл . . . 185

Розділ 9. Елементи релятивістської механіки . . . 189

§ 9.1. Відхилення від законів механіки Ньютона . . . 189

§ 9.2. Постулати Ейнштейна . . . 190

§ 9.3. Перетворення Лоренца . . . 191

§ 9.4. Наслідки з перетворень Лоренца . . . 195

§ 9.5. Інтервал у чотиривимірному просторі. Світовий конус . . . 198

§ 9.6. Елементи релятивістської динаміки . . . 200

§ 9.7. Взаємозв'язок маси і енергії . . . 202

§ 9.8. Закон збереження маси, енергії та імпульсу . . . 205

Розділ 10. Механічні коливання . . . 209

§ 10.1. Коливальні процеси . . . 209

§ 10.2. Гармонічні коливання . . . 210

§ 10.3. Векторне зображення гармонічних коливань та їхнє вираження в комплексній площині. Гармонічний осцилятор . . . 215

§ 10.4. Математичний маятник . . . 219

§ 10.5. Фізичний маятник . . . 220

§ 10.6. Додавання коливань однакового напряму. Биття . . . 223

§ 10.7. Додавання взаємно перпендикулярних коливань . . . 227

§ 10.8. Згасаючі коливання . . . 231

§ 10.9. Вимушені коливання . . . 235

§ 10.10. Гармонічний аналіз складних коливань . . . 241
§ 10.11. Поняття про автоколивання . . . 242

Розділ 11. Пружні хвилі . . . 244
§ 11.1. Поширення хвиль . . . 244
§ 11.2. Рівняння хвилі . . . 248
§ 11.3. Миттєвий розподіл швидкостей і деформацій у хвилі . . . 253
§ 11.4. Енергія хвильового руху. Потік енергії. Вектор Умова . . . 254
§ 11.5. Інтерференція хвиль . . . 257
§ 11.6. Стоячі хвилі . . . 261
§ 11.7. Принцип Гюйгенса. Дифракція хвиль . . . 264

Розділ 12. Елементи акустики . . . 266
§ 12.1. Природа звуку. Швидкість звуку . . . 266
§ 12.2. Поширення звукових хвиль. Інтенсивність звуку . . . 269
§ 12.3. Сприймання звуку . . . 273
§ 12.4. Джерела звуку . . . 276
§ 12.5. Ефект Доплера . . . 279
§ 12.6. Ударні хвилі . . . 281
§ 12.7. Ультразвук та його застосування . . . 282
§ 12.8. Поняття про інфразвуки . . . 288

Частина II. Молекулярна фізика і термодинаміка . . . 290

Розділ 13. Основні означення і поняття . . . 290
§ 13.1. Предмет і методи молекулярної фізики . . . 290
§ 13.2. Короткий історичний огляд розвитку молекулярно-кінетичної теорії . . . 294
§ 13.3. Основи молекулярно-кінетичної теорії будови речовини . . . 295
§ 13.4. Основні фізичні величини . . . 296

Розіл 14. Основи молекулярно-кінетичної теорії газів . . . 298
§ 14.1. Моделювання у молекулярній фізиці . . . 298
§ 14.2. Основні положення молекулярно-кінетичної теорії газів . . . 299
§ 14.3. Тиск газу. Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії газів . . . 301
§ 14.4. Температура . . . 305
§ 14.5. Броунівський рух. Дифузія. Молекулярні пучки . . . 309
§ 14.6. Рівняння стану ідеального газу . . . 311
§ 14.7. Основні закони ідеального газу . . . 313
§ 14.8. Швидкості газових молекул та вимірювання їх . . . 317
§ 14.9. Поняття про статистичний розподіл. Функція розподілу. Розподіл молекул за швидкостями (розподіл Максвелла) . . . 320
§ 14.10. Експериментальна перевірка закону розподілу Максвелла . . . 331
§ 14.11. Барометрична формула. Розподіл Максвелла— Больцмана . . . 331
§ 14.12. Дослід Перрена з визначення числа Авогадро . . . 337
§ 14.13. Поняття про флуктуації . . . 339

Розділ 15. Явища переносу в газах . . . 343
§ 15.1. Середня довжина вільного пробігу молекул. Число зіткнень . . . 343
§ 15.2. Внутрішнє тертя (в'язкість) у газах . . . 348
§ 15.3. Теплопровідність газів . . . 352
§ 15.4. Дифузія газів . . . 356
§ 15.5. Газ у стані вакууму. Одержання та вимірювання низьких тисків . . . 364

Розділ 16. Основи термодинаміки . . . 371
§ 16.1. Основні поняття і означення . . . 371
§ 16.2. Перший закон термодинаміки . . . 374
§ 16.3. Адіабатний процес. Рівняння Пуассона . . . 383
§ 16.4. Робота ідеального газу при ізопроцесах. Політропний процес . . . 386
§ 16.5. Теплоємність ідеального газу . . . 390
§ 16.6. Оборотні та необоротні процеси. Колові процеси (цикли). Цикл Карно та його коефіцієнт корисної дії . . . 397
§ 16.7. Теплові машини . . . 402
§ 16.8. Другий закон термодинаміки. Теорема Карно. Поняття про ентропію. Характеристичні функції . . . 403
§ 16.9. Термодинамічна шкала температур . . . 409
§ 16.10. Зв'язок ентропії з імовірністю стану системи . . . 411
§ 16.11. Третій закон термодинаміки. Недосяжність абсолютного нуля температур . . . 414
§ 16.12. Елементи термодинаміки необоротних процесів . . . 415

Розділ 17. Реальні гази . . . 419
§ 17.1. Реальні гази та відхилення їхніх властивостей від законів ідеального газу. Сили міжмолекулярної взаємодії в газах . . . 419
§ 17.2. Рівняння Ван-дер-Ваальса . . . 422
§ 17.3. Ізотерми газу Ван-дер-Ваальса. Критичний стан речовини. Порівняння ізотерм газу Ван-дер-Ваальса з експериментальними ізотермами . . . 425
§ 17.4. Порівняння даних рівняння Ван-дер-Ваальса з дослідними даними . . . 430
§ 17.5. Властивості речовини у критичному стані. Визначення критичних параметрів . . . 433
§ 17.6. Внутрішня енергія газу. Ефект Джоуля—Томсона . . . 436
§ 17.7. Зрідження газів та одержання низьких температур . . . 441

Розділ 18. Тверді тіла . . . 444
§ 18.1. Кристалічні та аморфні тіла. Основні характеристики кристалів . . . 444
§ 18.2. Сили зв'язку в твердих тілах . . . 450
§ 18.3. Дефекти в реальних кристалах . . . 453
§ 18.4. Механічні властивості твердих тіл . . . 456
§ 18.5. Тепловий рух у твердих тілах. Теплове розширення твердих тіл . . . 459
§ 18.6. Теплоємність твердих тіл . . . 461

Розділ 19. Рідини . . . 462
§ 19.1. Загальні властивості та будова рідин . . . 462
§ 19.2. В'язкість рідин . . . 467
§ 19.3. Поверхневий шар рідини. Поверхневий натяг . . . 468
§ 19.4. Формула Лапласа. Змочування та капілярні явища . . . 471
§ 19.5. Поверхнево-активні речовини. Адсорбція. Флотація . . . 474
§ 19.6. Рідкі розчини. Закони Рауля . . . 476
§ 19.7. Осмотичний тиск. Закон Вант-Гоффа . . . 479
§ 19.8. Рідкі кристали . . . 481

Розділ 20. Полімери . . . 485
§ 20.1. Основні уявлення про хімічну будову та структуру полімерів . . . 485
§ 20.2. Структура полімеру в конденсованому стані . . . 489
§ 20.3. Термомеханічні властивості полімерів . . . 491

§ 20.4. Механічні властивості та застосування полімерів 493
Розділ 21. Рівновага фаз і фазові переходи 497
§ 21.1. Поняття фази. Крива фазової рівноваги 497
§ 21.2. Випаровування. Рівняння Клапейрона —Клаузіуса. Кипіння 499
§ 21.3. Сублімація, плавлення та кристалізація твердих тіл 505
§ 21.4. Потрійна точка 510
§ 21.5. Поняття про фазові переходи першого та другого родів 511
§ 21.6. Метастабільні стани 513
§ 21.7. Поняття про квантові рідини 515
Розділ 22. Поняття про газодинаміку 519
§ 22.1. Основні рівняння газодинаміки 519
§ 22.2. Адіабатне витікання газу 520
Предметний покажчик 523

Навчальне видання

Кучерук Іван Митрофанович,
Горбачук Іван Тихонович,
Луцик Петро Павлович

ЗАГАЛЬНИЙ КУРС ФІЗИКИ

У ТРЬОХ ТОМАХ

ТОМ 1

Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка

Редактор *Л.І. Гринь*
Оформлення художника *В.О. Гурлєва*
Художній редактор *С.В. Анненков*
Коректор *Н.М. Мірошниченко*
Комп'ютерна верстка *В.Ф. Зелтиньша*

Підписано до друку 26.01.99. Формат 60x84$^{1}/_{16}$.
Папір друк. № 1. Гарнітура Таймс. Друк офсетний.
Умов. друк. арк. 31,16. Обл.-вид. арк. 33,10.
Тираж 4000 прим. Зам. № **25**.

Видавництво "Техніка". 254053 м. Київ-53,
вул. Обсерваторна, 25.
Свідоцтво про державну реєстрацію
№ 02473145 від 22.12.95 р.

Віддруковано на Білоцерківській книжковій фабриці
256400 м. Біла Церква, вул. Леся Курбаса, 4

Кучерук І.М. та ін.

К95 Загальний курс фізики: Навч. посібник для студентів вищих техн. і пед. закладів освіти / І. М. Кучерук, І. Т. Горбачук, П. П. Луцик; За ред. І. М. Кучерука. – К.: Техніка, 1999.

ISBN 966-575-196-4

Т. 1: Механіка. Молекулярна фізика і термодинаміка.– 536 с.: іл.– Предм. покажч.: с. 523–527. – ISBN 966-575-017-8

У книжці систематично викладено фізичні основи механіки і молекулярної фізики. Головну увагу приділено розкриттю фізичного змісту і сучасного розуміння основних законів і понять механіки та молекулярної фізики, обгрунтуванню фундаментальних теорій і встановленню меж їх застосовності.

К $\frac{1604030000\text{-}013}{202\text{-}99}$ Без оголош. ББК 22.3

ДЕРЖАВНЕ СПЕЦІАЛІЗОВАНЕ ВИДАВНИЦТВО «ТЕХНІКА» ПРОПОНУЄ

ЗБІРНИК ЗАДАЧ З ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ТА ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ.
Автори: Головач Г. П., Калайда О. Ф. 1997 р. 286 с.

У навчальному посібнику вміщено грунтовно проілюстровані теоретичні відомості та добірку задач з диференціальних та інтегральних рівнянь. Диференціальні рівняння представлені класами елементарних, лінійних, неявних рівнянь та систем. Значну увагу приділено виродженим системам, побудові загального розв'язку рівнянь, диференціальним задачам, аналітичним, асимптотичним методам та теорії стійкості. Інтегральні рівняння представлені класами рівнянь, розв'язуваних методом Пікара, методом заміни ядра, методом інтегральних перетворень тощо; значну увагу приділено рівнянням першого роду, кратним та сингулярним рівнянням.
Розрахований на студентів технічних вузів і університетів.

РОСІЙСЬКО-УКРАЇНСЬКО-АНГЛІЙСЬКИЙ НАУКОВО-ТЕХНІЧНИЙ СЛОВНИК.
Автори: Карачун В. Я., Бех П. О., Гульчук Г. Г. та ін. 1997 р. 536 с.

Вперше вийшов трьома мовами. Загальний обсяг словника – понад 10 тис. термінів з різних галузей науки і техніки – інформатики, обчислювальної техніки, математики, фізики, хімії, електроніки, інженерної графіки та механіки.
Складається з трьох частин: власне російсько-українсько-англійського словника та українського й англійського покажчиків (реєстрів слів). Ці покажчики дають змогу виконати переклад з української або англійської мови на будь-яку з двох інших мов словника. Таким чином, одна книга фактично містить шість двомовних словників: російсько-український і російсько-англійський, українсько-російський і українсько-англійський та англо-український і англо-російський.
Словник розрахований на широке коло користувачів – викладачів вищих навчальних закладів і технікумів, учителів, студентів та учнів, інженерів, наукових і видавничих працівників та перекладачів.

ДЕРЖАВНЕ СПЕЦІАЛІЗОВАНЕ ВИДАВНИЦТВО «ТЕХНІКА» ПРОПОНУЄ

Готується до друку в 1999 р.

ІНЖЕНЕРНА ГРАФІКА. ДОВІДНИК.
Автори: Богданов В. М, Верхола А. П., Коваленко В. Є. та ін.

У довіднику систематизовано матеріали з класифікації та оформлення технічних креслень. Наведено основні принципи та прийоми геометричних побудов, які застосовуються в практиці виконання креслень.
На основі положень державних стандартів розглянуто теоретичні засади та практичні прийоми проекційного зображення різноманітних технічних виробів як традиційними способами, так і за допомогою комп'ютерів.
Подано нормативно-технічні положення щодо виконання креслень згідно з державними стандартами України.
Довідник призначений для студентів вищих та середніх навчальних закладів.

ЗАГАЛЬНИЙ КУРС ФІЗИКИ: Т. 2 , Т. 3.
НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК ДЛЯ СТУДЕНТІВ ВИЩИХ ТЕХНІЧНИХ І ПЕДАГОГІЧНИХ ЗАКЛАДІВ ОСВІТИ.
Автори: Кучерук І. М. та ін.

Замовити і купити книжки можна у видавництві за адресою: 254053 Київ, вул. Обсерваторна, 25.
Тел. 212-10-80