

ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ТА СИГНАЛІВ

Курс лекцій

ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙ

**В.М. Бондаренко, М.П. Трембовецький,
П.В. Афанасьєв, Є.В. Іваніченко**

**ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ
ТА СИГНАЛІВ**

Курс лекцій

Київ ДУТ 2018

Рекомендовано до друку Вченою радою Державного університету телекомунікацій (протокол №15 від 22 січня 2018 р.)

Рецензенти: доктор технічних наук, професор Козелков С. В., кандидат технічних наук, професор Якорнов Є.А.

Автори: В.М. Бондаренко, М.П. Трембовецький, П.В. Афанасьєв,
Є.В. Іваніченко

Теорія електричних кіл та сигналів. Курс лекцій В.М. Бондаренко, М.П. Трембовецький, П.В. Афанасьєв, Є.В. Іваніченко.- Київ, ДУТ, 2018.

Курс лекцій містить матеріал, визначений програмою однойменної навчальної дисципліни навчального плану підготовки бакалаврів спеціальності 172 Телекомунікації та радіотехніка. Розглянуті основні методи розрахунку лінійних електричних кіл в усталеному та перехідному режимах, основні відомості про сигнали та особливості їх проходження через лінійні електричні кола.

Адресований студентам університету усіх форм навчання.

Навчальна дисципліна „Теорія електричних кіл та сигналів“ належить до загальноінженерних дисциплін, що визначають фундаментальну підготовку фахівців спеціальності 172 Телекомунікації та радіотехніка. Якісне її засвоєння – необхідна умова впевненого оволодіння спеціально – технічними дисциплінами і, як наслідок, досягнення високого професійного рівня випускників.

Науковою основою дисципліни „Теорія електричних кіл та сигналів“ є загальна теорія електричних кіл та теорія сигналів, підґрунтям яких є закони фізики, що визначають електромагнітні явища в просторово обмежених системах, а також ряд розділів математики, зокрема, лінійна та векторна алгебра, теорія матриць, диференціальне та інтегральне числення, звичайні диференціальні рівняння, ряди та інтеграл Фур'є, функції комплексної змінної, операційне числення та ін.

При вивченні та використанні методів дослідження та розрахунку електричних кіл реальні фізичні об'єкти представляються в спрощеній ідеалізованій формі, у вигляді еквівалентних, або розрахункових схем. При цьому, схеми з певною точністю відтворюють властивості реального електричного кола.

Характерними для дисципліни є великий обсяг інформації, різноманітність фізичних процесів, що протікають в електричних колах, складність математичних моделей цих процесів, висока насиченість перетвореннями та розрахунками. Все це потребує від студентів регулярної та наполегливої роботи над навчальним матеріалом.

Курс лекцій містить матеріал, визначений програмою однойменної навчальної дисципліни навчального плану підготовки бакалаврів спеціальності 172 Телекомунікації та радіотехніка.

1. Основи символічного методу розрахунку електричних кіл

1.1. Основні поняття та закони електричних кіл

1.1.1. Електричне коло: визначення, склад

Електричне коло – це сукупність елементів (пристроїв), певним чином з'єднаних поміж собою та створюючих шлях для електричного струму. Електричні кола мають велику кількість призначень та функцій, серед яких важливе місце займають генерація електромагнітних коливань, їх передача, прийом та обробка.

Електромагнітні процеси в електричному колі можна описати поняттями **струм, напруга, електрорушійна сила (ЕРС)**. Ці електричні величини можуть бути постійними (незмінними в часі), а можуть мати певну часову залежність. У зв'язку з цим, загальноприйнятими є їх відповідні позначення, а саме:

Фізична величина	Позначення, в залежності від характеру	
	Змінні в часі	Незмінні
Струм	$i(t)$	I
Напруга	$u(t)$	U
Електрорушійна сила	$e(t)$	E

Пригадаємо:

Електричний струм – упорядкований рух вільних носіїв електричного заряду (електронів, іонів). За напрямком струму прийнятий напрямок руху позитивних зарядів.

Величина струму вимірюється в амперах (А). Використовують також дробові одиниці: $1\text{ма} = 10^{-3}\text{А}$, $1\ \mu\text{А} = 10^{-6}\text{А}$.

Електрична напруга між двома точками кола є різниця потенціалів між цими точками. Вона спрямована від точки з більшим потенціалом до точки з меншим потенціалом, тобто співпадає з напрямком струму на даній ділянці кола.

Напруга вимірюється в вольтах (В), а також: $1\text{кВ} = 10^3\text{В}$, $1\text{мВ} = 10^{-3}\text{В}$, $1\text{мкВ} = 10^{-6}\text{В}$ і т. д.

Електрорушійна сила (ЕРС) – характеризує роботу сторонніх сил по переміщенню зарядів в джерелі енергії. Сторонні сили є силами не електромагнітного походження. Вони обумовлені механічною, хімічною, світловою та іншими видами енергії. Напрямок ЕРС збігається з напрямком

струму в джерелі та протилежний напрямку напруги на зовнішніх затискачах джерела.

ЕРС, як і напруга, вимірюється в вольтах (В), вона чисельно дорівнює напрузі на затискачах джерела у відсутність струму в ньому.

1.1.2. Елементи електричних кіл, їх моделі та характеристики

Елементи електричних кіл розподіляють на *пасивні* (споживачі електричної енергії) та *активні* (джерела електричної енергії).

Пасивні елементи об'єднують властивість перетворювати електричну енергію в інші види або запасати її.

До типових пасивних елементів належать резистор, конденсатор та котушка індуктивності.

Методи теорії електричних кіл засновані на наближеному представленні реальних електричних кіл, пристроїв та систем за допомогою їх ідеалізованих моделей – еквівалентних електричних кіл, графічним зображенням яких є електричні схеми.

При цьому всі реальні пасивні елементи замінюють ідеальними пасивними моделями. Ці моделі з певною точністю відображають залежність між струмом і напругою реального елемента.

Моделями резистора, конденсатора, котушки індуктивності є відповідно опір, ємність, індуктивність.

Ці терміни мають подвійний сенс: по-перше, – це назва елемента (моделі), по-друге, – це основна кількісна характеристика, або параметр, цього елемента.

Параметри елементів можуть бути постійними або мати певну часову залежність. Елемент, параметр якого змінюється в часі, називається *параметричним*.

Крім того, елементи можуть бути лінійними і нелінійними. *Лінійним* називається елемент, параметр якого не залежить від величини струму або напруги, що діють на нім.

Якщо параметр залежить від величини струму (напруги), то елемент називають нелінійним.

Розглянемо моделі пасивних елементів.

Опір – це елемент, в якому відбувається необоротне перетворення електричної енергії в інші види енергії. Опором можна представити, наприклад, резистор, гучномовець, передавальну антену, електродвигун, лампу розжарювання та ін. Нагромадження енергії в опорі не відбувається.

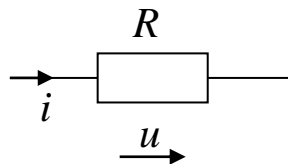
Здатність опору перетворювати електричну енергію кількісно характеризується величиною опору R в Омах або величиною провідності G в Сименсах.

Традиційно опір позначають літерою R (r), його розмірність – “Ом”; провідність позначають літерою G (g), її розмірність – “Сименс” (См). Опір та провідність – взаємно зворотні величини:

$$R = \frac{1}{G}$$

У лінійному опорі струм i напруга зв'язані законом Ома:

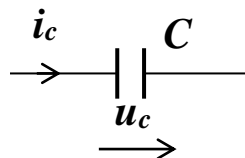
$$R = \frac{u}{i}$$



Умовне позначення опору на схемах має вигляд:

За властивостями найближчим до опору пасивним елементом є резистор.

Ємність – це ідеалізований елемент, в електричному полі якого нагромаджується енергія. Нагромаджена енергія може за певних умов віддаватися в зовнішнє коло. Перетворення енергії в ємності не відбувається.



Умовне позначення ємності:

Величина нагромадженої енергії визначається зарядом q , який вимірюється в кулонах

$$q = \int_{-\infty}^t i dt$$

Здатність елемента нагромаджувати енергію кількісно характеризується величиною ємності C , яка визначається відношенням заряду до різниці потенціалів на виводах

$$C = \frac{q}{u}$$

Ємність вимірюється у Фарадах (Ф).

При зміні напруги на виводах ємності в зовнішньому, по відношенню до неї, колі утворюється струм провідності, величина якого визначається швидкістю зміни заряду. Струм провідності замикається струмом зміщення через діелектрик ємності, тобто струм в ємності – поняття умовне, адже він обумовлений не рухом зарядів в діелектрику, а зміною напруги на обкладинках.

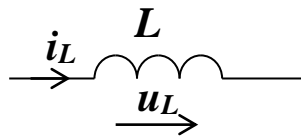
Таким чином, струм і напруга на ємності зв'язані співвідношеннями

$$i_C = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt}; \quad u_C = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \int i_C dt. \quad (1.1)$$

За властивостями найближчим до ємності пасивним елементом є конденсатор.

Індуктивність – це ідеалізований елемент, в магнітному полі якого нагромаджується енергія. Нагромаджена енергія за певних умов може передаватися в зовнішнє коло. Перетворення енергії в індуктивності не відбувається.

Умовне позначення індуктивності:



Здатність індуктивності нагромаджувати енергію кількісно характеризується величиною індуктивності L , яка визначається відношенням потокозчеплення Ψ до струму i , який це потокозчеплення зумовив:

$$L = \frac{\Psi}{i}$$

Індуктивність вимірюється в Генрі (Гн).

Зв'язок між напругою і струмом в індуктивності визначається законом електромагнітної індукції:

$$u_L = -e_L = \frac{d\psi}{dt} = \frac{d}{dt} Li_L = L \frac{di_L}{dt}; \quad i_L = \frac{1}{L} \int u_L dt \quad (1.2)$$

За властивостями найближчим до індуктивності пасивним елементом є котушка індуктивності.

Ємність і індуктивність називають енергоємними, або реактивними, на відміну від опору, елементами у зв'язку з їх властивістю нагромаджувати електричну енергію і віддавати її в зовнішнє коло при певних умовах.

Активні елементи, або джерела електричної енергії, живлять електричне коло, обумовлюючи в ньому певні процеси.

Реальні джерела в рамках теорії електричних кіл представляють однією з двох ідеалізованих моделей – джерела напруги і джерела струму.

Ідеальним джерелом напруги (джерелом ЕРС) називають джерело, напруга на зовнішніх затискачах якого не залежить від величини струму, який протікає через затискачі (віддається в коло).

Вольт-амперна характеристика такого джерела представлена на рис. 1.1.

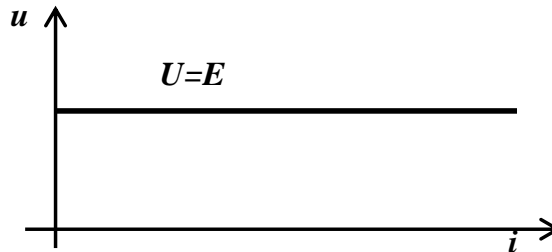


Рис. 1.1

Таким чином, ідеальне джерело напруги не має власного внутрішнього опору, а значить має нескінченно велику потужність. Напруга на його затискачах дорівнює ЕРС.

На умовному графічному зображенні показують напрями ЕРС і напруги (рис. 1.2).

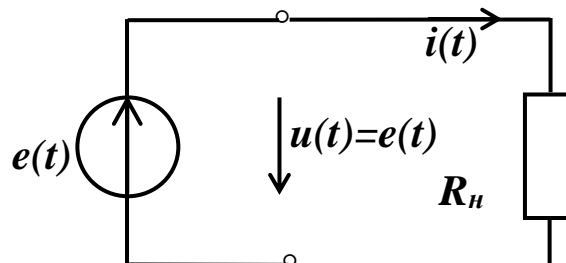


Рис. 1.2

Ідеальним джерелом струму називається активний елемент, для якого струм, що віддається в зовнішнє коло, не залежить від напруги на його затискачах.

Таким чином, внутрішній опір ідеального джерела струму нескінченно великий; його потужність – нескінченно велика.

Вольт-амперна характеристика такого джерела представлена на рис. 1.3.

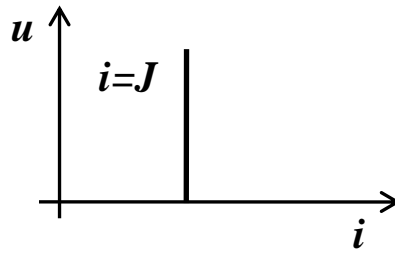


Рис. 1.3

На умовному графічному зображенні показують напрям струму в джерелі і напругу на його затискачах (рис. 1.4).

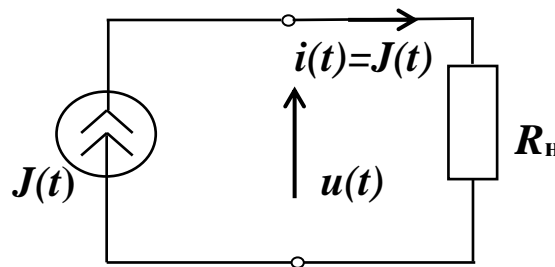


Рис. 1.4

Характеристики реальних джерел, зокрема величина внутрішнього опору та потужність, істотно відрізняються від ідеальних. Лише в окремих випадках можливе певне наближення.

Умовні зображення реальних джерел містять внутрішній опір, який в джерелі напруги включається послідовно, а в джерелі струму – паралельно зовнішнім затискачам (рис.1.5).

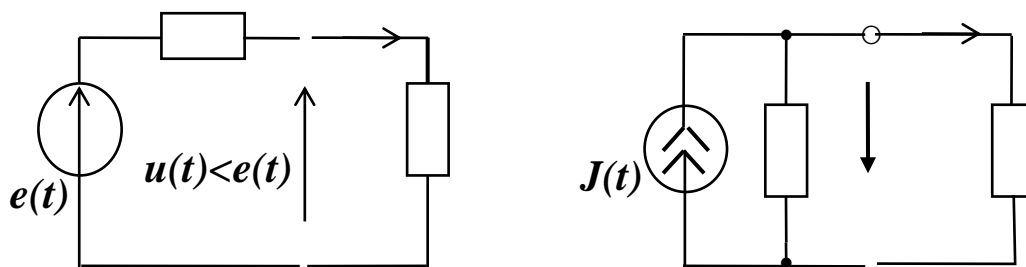


Рис. 1.5

На певних етапах розрахунків електричних кіл можуть бути доцільними еквівалентні перетворення джерела одного типу в інший.

1.1.3. Класифікація електричних кіл

Електричні кола найчастіше прийнято класифікувати за наступними ознаками:

- по наявності активних елементів розрізняють пасивні і активні кола;

– по властивостям (характеристикам) елементів розрізняють лінійні і нелінійні кола; нелінійним називають коло, яке містить хоча б один нелінійний елемент;

– по часовій залежності параметрів елементів розрізняють кола з постійними параметрами і параметричні кола, до складу яких входить хоч би один параметричний елемент;

– по складу пасивних елементів розрізняють резистивні, реактивні і змішані кола;

– по числу зовнішніх полюсів (затискачів) розрізняють двополюсні, триполюсні і, в загальному випадку, багатопольсні кола. Найчастіше в теорії кіл мають справу з двополюсниками і чотиріполюсниками;

– по співвідношенню геометричних розмірів кола і довжини хвилі коливань, які діють в колі, розрізняють кола із зосередженими і розподіленими параметрами.

1.1.4. Елементи топології електричних схем

Топологія – розділ математики, що вивчає властивості фігур, які не змінюються при перетвореннях. У теорії кіл такими фігурами є електричні схеми. Ми згадували, що при аналізі процесів і властивостей електричних кіл їх представляють у вигляді схеми, тобто графічної моделі.

Електрична схема – це графічне зображення реального електричного кола за допомогою умовних позначень у відповідності зі стандартами і нормами. Розрізняють структурні, принципові, еквівалентні та інші види схем.

На структурній схемі відображають лише найважливіші функціональні елементи кола і зв'язки між ними.

Принципова схема містить усі елементи кола і зв'язки між ними.

Еквівалентна (розрахункова) – це схема, в якій усі реальні елементи замінені ідеалізованими моделями. Моделі з відповідною точністю відображають залежність між напругою і струмом реальних елементів.

На рис. 1.6 представлена еквівалентна схема електричного кола, яка представляє собою відповідні з'єднання резисторів $R1.. R5$, конденсаторів $C1$ та $C2$, котушки індуктивності L і джерела постійної напруги, представленого джерелом постійної ЕРС з внутрішнім опором $R_{вн}$.

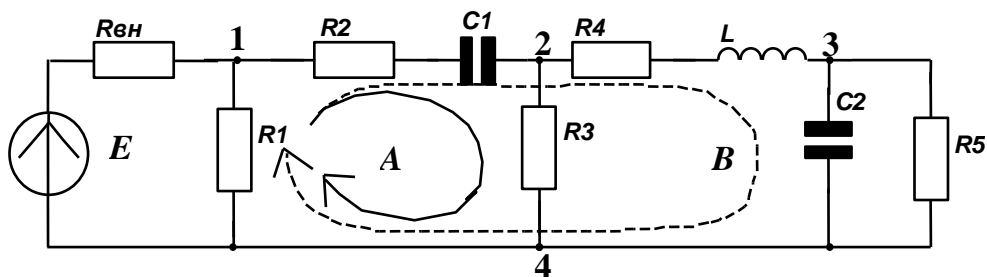


Рис. 1.6

Основними топологічними елементами схеми є гілка, вузол, контур.

Гілка – це ділянка електричної схеми, вздовж якої протікає один і той же струм. Гілка може бути утворена одним або декількома елементами, з'єднаними послідовно. На наведеній схемі кілька гілок, а саме: $E, R_{вн}; R_2, C_1; R_3; R_5; R_4 L; C_2$.

Вузол – це місце електричного з'єднання трьох і більше гілок. На схемі місце з'єднання позначають точкою. Схема, яку ми розглядаємо, має чотири вузли – 1, 2, 3, 4. Гілки, підключені до однієї пари вузлів, називають паралельними; вони знаходяться під однією й тією ж напругою, або різницею потенціалів; у нашому прикладі – гілка C_2 і гілка R_5 .

Контур – це замкнена ділянка схеми, утворена однією або декількома гілками; досліджувана схема містить декілька контурів, наприклад, контур A – утворений гілками R_2, C_1, R_3, R_1 ; контур B – гілками $R_2, C_1, R_4, L, C_2, R_1$.

1.1.5. Основні закони електротехніки

До основних законів електротехніки відносяться закон Ома, перший та другий закони Кірхгофа.

Представимо їх зараз в найбільш загальному вигляді, з перспективою найближчим часом ретельного відпрацювання.

Отже, закон Ома встановлює зв'язок між напругою u та струмом i в опорі R :

$$R = \frac{u}{i} \quad (1.3)$$

Перший закон Кірхгофа, закон балансу струмів в вузлі електричного кола, стверджує: *алгебраїчна сума струмів в вузлі дорівнює нулю*:

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0, \quad (1.4)$$

де $n = 3, 4, \dots$ – число гілок, які утворюють вузол.

Загальноприйнято вважати струми, спрямовані до вузла, додатними, а струми, що спрямовані від вузла, – від'ємними.

Другий закон Кірхгофа, закон балансу напруг в замкненій ділянці електричного кола: *алгебраїчна сума е.р.с. джерел в контурі дорівнює алгебраїчній сумі падіннь напруги на елементах даного контуру:*

$$\sum_{k=1}^n e_k = \sum_{j=1}^m u_j, \quad (1.5)$$

де $n = 1, 2, \dots$ – число джерел ЕРС, включених в контур;

$m = 1, 2, \dots$ – число пасивних елементів в контурі.

Е.р.с. та падіння напруги, напрямки яких співпадають з довільно вибраним напрямком обходу контура, беруться в рівнянні з однаковими знаками. Таким чином, алгебраїчна сума напруг на гілках замкненого контуру у відповідності з другим законом Кірхгофа дорівнює нулю.

1.2. Символічний (комплексний) метод розрахунку електричних кіл синусоїдального струму

1.2.1. Синусоїдальний струм та його характеристики

Електричний струм, електричну напругу, електрорушійну силу характеризують переліком однакових понять. У зв'язку з цим домовимося надалі відомості про згадані електричні величини представляти стосовно електричного струму, пам'ятаючи, що вони можуть бути поширені на електрорушійну силу і електричну напругу.

Залежно від того, як поводить ся струм в часі, розрізняють постійний струм і змінний струм.

Постійний струм – це струм з незмінними напрямком і величиною. Традиційно постійний струм позначають літерою I .

Змінним електричним струмом називають струм, який змінюється в часі як за величиною, так і за напрямком. Він характеризується миттєвим значенням, тобто значенням струму в будь-який момент часу; загальноприйняте позначення – $i(t)$.

В електротехніці, а тим більше в радіотехніці, в телекомунікаціях основне застосування знаходить не постійний, а змінний струм; кола постійного струму в радіотехнічних пристроях застосовуються в основному для живлення електронних і напівпровідникових приладів.

Окремим випадком змінного струму є періодичний струм.

Періодичний струм – це струм, миттєве значення якого повторюється через однакові проміжки часу, тобто

$$i(t) = i(t + nT), \quad n = 1, 2, \dots$$

Мінімальний проміжок часу T , через який повторюються миттєві значення періодичного струму, називається періодом. Період вимірюють у секундах (с).

Величина, зворотна періоду, називається частотою:

$$f = \frac{1}{T}$$

Частота вимірюється в герцах (Гц), $Гц = с^{-1}$.

Частоті в 1 Гц відповідає період $T = 1 с$, тобто за одну секунду відбувається одне повне коливання.

У промислових та побутових електромережах застосовується струм з частотою 50 Гц, в радіотехніці мають справу з частотами, вимірюваними в кілогерцах ($1кГц=10^3Гц$), мегагерцах ($1МГц=10^6Гц$), гігагерцах ($1ГГц=10^9Гц$).

Закони зміни періодичного струму можуть бути різними. Одним з найпоширеніших варіантів періодичного струму є гармонічний струм, тобто струм, миттєве значення якого змінюється за законом синуса (косинуса).

Поширення гармонічного струму обумовлено рядом причин:

- способом отримання електричної енергії на електростанціях – обертання провідника в магнітному полі призводить до появи на затискачах генератора електрорушійної сили синусоїдальної форми;

- способом формування коливань з використанням коливальних контурів в електронних генераторах;

- гармонічні коливання лежать в основі класичного спектрального представлення періодичних негармонічних процесів, а саме, коливання будь-якої форми можна представити сумою гармонічних коливань;

- гармонічні коливання являють собою єдиний вид коливань, які проходячи через лінійні кола не зазнають змін форми. Це обумовлено властивостями гармонічних функцій – в результаті лінійних операцій над цими функціями (множення на постійне число, алгебраїчне додавання, диференціювання, інтегрування) отримують гармонічні функції тієї ж частоти з новими значеннями амплітуди і початкової фази.

Зобразимо графік часової залежності гармонічного, зокрема, синусоїдального струму (рис. 1.7).

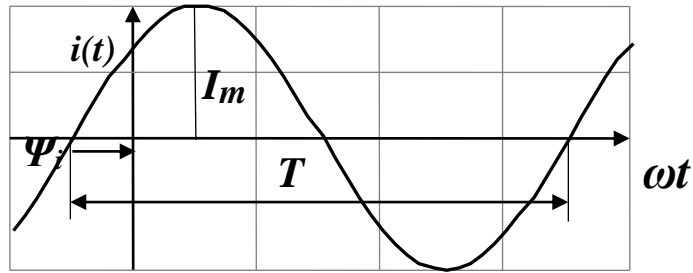


Рис. 1.7

Миттєве значення гармонічного струму представляє співвідношення:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i),$$

де I_m – амплітуда, або максимальне значення, струму;

ω – кутова частота коливань; одиниця виміру "радіан/с" (1/с); кутова частота пов'язана з лінійною частотою співвідношенням $\omega = 2\pi f$;

ψ_i – початкова фаза коливання; одиниця виміру – радіан (градус).

Початкова фаза визначає величину струму в початковий момент відліку часу, тобто при $t = 0$; початкова фаза може мати додатнє значення (кажуть про "випередження по фазі") або від'ємне ("запізнювання по фазі"), у відповідності зі знаком синуса при $t = 0$;

$\Phi(t) = \omega t + \psi_i$ – миттєва фаза коливання; визначає струм в будь-який момент часу, вимірюється, як і початкова фаза, в градусах або радіанах.

Якщо в одному колі порівнюють два або кілька гармонічних коливань однакової частоти, але з різними початковими фазами, то говорять про **фазовий зсув** цих коливань або, що коливання **зміщені по фазі**. Зміщення фаз (фазовий зсув) двох коливань $\Delta\psi$ – є алгебраїчна величина, що дорівнює різниці початкових фаз. Величина $\Delta\psi$ може бути довільною. Зазвичай, враховуючи періодичність коливань, різницю фаз обмежують границями $-\pi \leq \Delta\psi \leq \pi$.

Різниця початкових фаз є визначальним фактором при додаванні (інтерференції) коливань однакової частоти. При цьому можливі три характерних випадки:

- синфазні коливання, коли $\Delta\psi = 2\pi n$, $n = 0, 1, 2, \dots$;
- квадратурні коливання, коли $\Delta\psi = \pm \frac{\pi}{2}$;
- протифазні коливання, коли $\Delta\psi = \pm\pi$.

При аналізі властивостей кіл важливим параметром є зміщення фаз між напругою і струмом в елементі, гілці, на певній ділянці кола $\varphi = \psi_u - \psi_i$.

Якщо $\varphi > 0$, то напруга випереджає по фазі струм ($\psi_u > \psi_i$);

Якщо, $\varphi < 0$, то напруга відстає по фазі від струму ($\psi_u < \psi_i$).

До силових характеристикам синусоїдального струму, крім амплітуди, відносяться діюче і середнє значення.

Діюче значення I синусоїдального струму $i(t)$ чисельно дорівнює значенню такого постійного струму, який при проходженні через опір R протягом періоду T виділяє таку ж кількість енергії, як і струм $i(t)$.

Діюче значення обчислюють як середньоквадратичне значення функції:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T [i(t)]^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T I_m^2 \sin^2(\omega t + \psi_i) dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \approx 0.707 \cdot I_m \quad (1.6)$$

Більшість електротехнічних вимірювальних приладів показують саме діючі значення вимірюваних величин.

Середнє за період значення I_{cp} синусоїдального струму:

$$I_{cp} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T I_m \sin(\omega t + \psi_i) dt = 0 \quad (1.7)$$

Середньовипрямлене $I_{срв}$, або середнє за половину періоду, значення синусоїдального струму:

$$I_{срв} = \frac{2}{T} \cdot \int_0^{T/2} I_m \sin(\omega t + \psi_i) dt = \frac{2}{\pi} \cdot I_m \approx 0.637 \cdot I_m \quad (1.8)$$

Нагадаємо, розглянуті параметри синусоїдального струму використовують також для характеристики гармонічних напруги і електрорушійної сили.

1.2.2. Представлення гармонічних коливань векторами, що обертаються, і комплексними числами

Представляти гармонічні коливання можна не тільки за допомогою тригонометричних функцій, а й через проєкції на координатні вісі прямокутної системи координат векторів, що обертаються, а також комплексними числами.

Відомо, що гармонічне коливання з частотою ω символічно можна представити за допомогою вектора, який обертається з круговою частотою ω в прямокутній системі координат. Обертання вектора відповідає зміні фази

коливання в часі. Додатнім напрямком вважається обертання вектора проти годинникової стрілки. Миттєвому значенню фази коливання відповідає кут між горизонтальною віссю і вектором.

При цьому проекція вершини вектора на вертикальну вісь в будь-який момент часу дорівнює миттєвому значенню синусоїдального струму, а проекція вершини цього вектора на горизонтальну вісь – миттєвому значенню косинусоїдального струму (рис. 1.8).

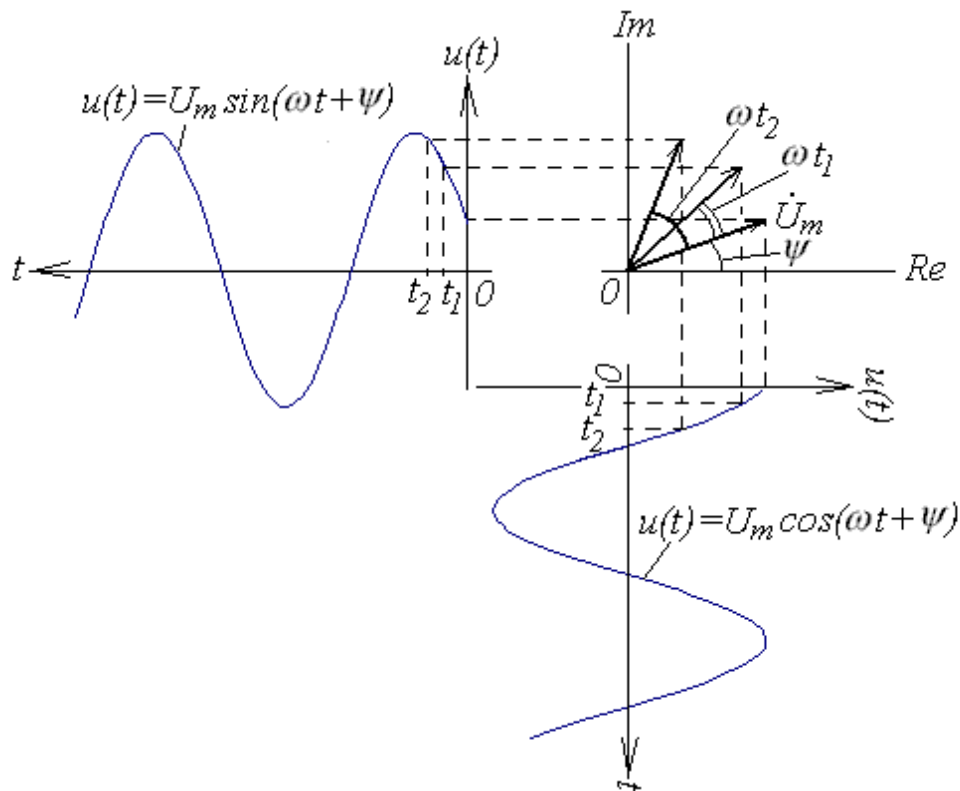


Рис. 1.8

Векторне представлення гармонічних коливань в порівнянні з їх поданням через тригонометричні функції при розрахунках обумовлює ряд переваг.

Перенесення прямокутної системи координат на комплексну площину з вісями дійсних (горизонтальна вісь) і уявних (вертикальна вісь) величин, дозволяє будь-якому вектору, що обертається, а, отже, гармонічному коливанню, поставити у відповідність комплексне число, модуль якого дорівнює амплітуді коливання, а аргумент – його фази.

Отже, гармонічному струму $i(t)$ відповідає комплексний миттєвий струм $\dot{I}_m(t)$, тобто:

$$i(t) \Rightarrow \dot{I}_m(t) \quad (1.9)$$

(Домовимося, в рамках даного посібника позначати відповідність знаком « \Rightarrow »)

При цьому,

$$\dot{I}_m(t) = i'(t) + j i''(t) = I_m \cos(\omega t + \psi_i) + j I_m \sin(\omega t + \psi_i),$$

тобто синусоїдальний струм дорівнює уявній складовій комплексного струму:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i) = \text{Im}[\dot{I}_m(t)],$$

а косинусоїдальний струм – дійсній складовій:

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \psi_i) = \text{Re}[\dot{I}_m(t)]$$

Використовуючи формулу Ейлера $e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$, алгебраїчну і тригонометричну форму комплексного числа можна представити у показниковій формі:

$$\dot{I}_m(t) = I_m e^{j(\omega t + \psi_i)} \quad (1.10)$$

Таким чином, комплексний миттєвий струм (комплексне миттєве значення гармонічного струму) – це комплексне число, модуль якого дорівнює амплітуді, а аргумент – миттєвій фазі гармонічного струму.

Скористаємося показниковою формою представлення комплексного миттєвого струму і здійснимо ряд очевидних перетворень:

$$\dot{I}_m(t) = I_m e^{j(\omega t + \psi_i)} = I_m e^{j \psi_i} e^{j \omega t} = \dot{I}_m e^{j \omega t}$$

де $e^{j \omega t}$ – оператор обертання; (1.11)

$$\dot{I}_m = I_m e^{j \psi_i} \text{ – комплексна амплітуда струму.} \quad (1.12)$$

Комплексна амплітуда гармонічного струму - це комплексне число, модуль якого дорівнює амплітуді коливання, а аргумент – його початковій фазі.

Перехід від амплітуди до діючого значенням дає ще один різновид комплексних зображень – комплексне діюче значення гармонічного струму, або комплексний струм:

$$\dot{I} = \frac{\dot{I}_m}{\sqrt{2}} = I \cdot e^{j \psi_i} \quad (1.13)$$

Комплексне діюче значення гармонічного струму – це комплексне число, модуль якого дорівнює діючому значенню коливання, а аргумент – початковій фазі.

Наведені різновиди комплексних зображень гармонічного струму можуть бути поширені і на інші електричні величини – напругу і електрорушійну силу.

1.2.3. Часові і векторні діаграми

Процеси в електричних колах досить зручно аналізувати з використанням діаграм.

Використовують два види діаграм – часові і векторні.

Часовою діаграмою називають графіки часової залежності електричних величин, побудовані в прямокутній системі координат.

Як приклад, на рисунку 1.9 представлена часова діаграма двох гармонічних функцій:

напруги $u(t) = 5 \cdot \sin(2\pi \cdot 10^3 \cdot t + 45^\circ)$, В

та струму $i(t) = 0.5 \cdot \sin(2\pi \cdot 10^3 \cdot t - 45^\circ)$, А.

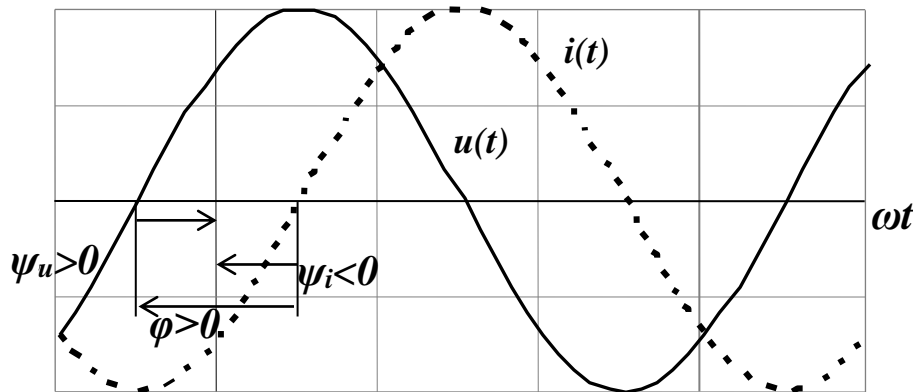


Рис. 1.9

Початкова фаза на діаграмі визначає зміщення нуля синусоїди, або максимуму косинусоїди відносно початку координат (початку спостереження), тобто $t = 0$. Відлік початкової фази здійснюють уздовж вісі ωt в напрямку до початку координат. Якщо напрямок відліку збігається з додатнім напрямком вісі, початкова фаза – додатня, має місце випередження по фазі; якщо напрямок відліку протилежний, початкова фаза – від’ємна, має місце відставання по фазі. Відлік фазового зсуву між напругою і струмом $\varphi = \psi_u - \psi_i$ здійснюють від "нуля" напруги до "нуля" струму. Якщо напрямок відліку збігається з додатнім напрямком вісі ωt , різниця початкових фаз напруги та струму додатня, $\varphi > 0$, тобто напруга випереджає по фазі струм. Якщо напрямок відліку протилежний, напруга відстає по фазі від струму.

У наведеному на рис. 1.9 прикладі $\varphi = \psi_u - \psi_i = 45^\circ - (-45^\circ) = 90^\circ$, тобто напруга випереджає струм на кут 90° .

Часові діаграми досить наочні, але зі збільшенням числа графіків будувати і досліджувати їх стає все складніше. У таких випадках доцільно користуватися векторними діаграмами.

Векторною діаграмою називається сукупність зображуючих гармонічні коливання векторів, побудованих на комплексній площині з дотриманням їх взаємної орієнтації по фазі. Довжина векторів з урахуванням масштабу відповідає амплітуді або діючому значенню відповідного коливання. Кутове положення векторів відносно горизонтальної вісі визначається початковими фазами коливань, при цьому додатні значення кутів відраховуються в напрямку, протилежному напрямку руху годинникової стрілки.

Як правило, вектори на векторній діаграмі зображують для моменту часу $t=0$. Залежність процесів від часу формально відображається обертанням всієї векторної діаграми назустріч годинниковій стрілці з кутовою частотою ω .

Фазовий зсув між напругою і струмом відраховують від вектора, який зображує струм, до вектора, який зображує напругу. Якщо напрямок відліку збігається з додатнім напрямком обертання векторів, то фазовий зсув – додатній, тобто $\varphi > 0$, напруга випереджає по фазі струм, в іншому випадку – навпаки.

Представлений на рис. 1.9 часової діаграмі відповідає векторна діаграма, побудована на наступному рисунку (рис. 1.10).

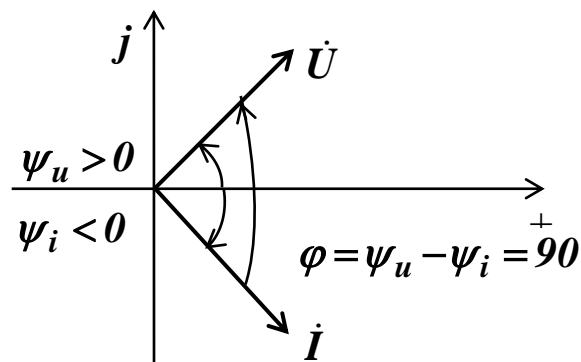


Рис. 1.10

1.2.4. Поняття про розрахунок електричного кола

Якщо на коло діє зовнішній вплив, наприклад, підключається джерело напруги, то на її елементах з'явиться відгук (реакція) на цей вплив у вигляді струмів і падінь напруги на елементах та ділянках кола.

Задача розрахунку (аналізу) кола полягає у визначенні цих відгуків. Отже, розрахувати коло – значить визначити струми і напруги на кожному його

елементі. В окремому випадку можуть визначатися тільки окремі струми і напруги.

Для розрахунку струмів і напруг складають рівняння (системи рівнянь), що зв'язують струми і напруги в елементах і ділянках кола. Число рівнянь у системі визначається числом невідомих струмів (напруг).

Рівняння, що описують процеси в колі, складаються у відповідності з основними законами електротехніки – законом Ома та першим і другим законами Кірхгофа.

1.2.5. Сутність символічного методу (методу комплексних амплітуд) розрахунку електричних кіл синусоїдального струму

Розрахунки електричних кіл синусоїдального струму, коли гармонічні величини представлені в тригонометричній формі або графічно у вигляді часових діаграм, застосовується на практиці тільки у випадку простих схем. З ускладненням схем тригонометричні і графічні розрахунки стають вкрай скрутні. Необхідний метод, що дозволяє розраховувати кола змінного струму алгебраїчно, аналогічно колам постійного струму.

Таким зручним розрахунковим методом є символічний метод (*метод комплексних амплітуд, або комплексний метод*). В основі методу лежить представлення гармонічних коливань їх комплексними зображеннями, комплексними числами. При цьому, в розрахунках громіздкі операції з тригонометричними функціями замінюються більш простими операціями з комплексними числами, зокрема, спрощуються операції диференціювання та інтегрування зображень:

$$\frac{d}{dt} e^{j\omega t} = j\omega e^{j\omega t}; \int e^{j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t},$$

тобто диференціюванню комплексного зображення в часі відповідає множення його на $j\omega$, а інтегруванню – ділення його на $j\omega$.

Метод вдало поєднує аналітичні розрахунки з геометричними інтерпретаціями, адже залучення векторних діаграм забезпечує розрахунку та аналізу наочність.

Комплексний метод відноситься до символічних методів розрахунку.

Розв'язання будь-якої задачі комплексним методом складається з трьох етапів:

– пряме перетворення: від вихідних (заданих) тригонометричних функцій (оригіналів) переходять до їх комплексних зображень (символів). Домовимося, умовно цю дію позначають знаком відповідності:

$$\dot{I}_m(t) \Rightarrow i(t); \quad \dot{U}_m(t) \Rightarrow u(t); \quad \dot{E}_m(t) \Rightarrow e(t);$$

– визначення (розрахунок) комплексних зображень шуканих струмів і напруг в колі шляхом розв’язання рівнянь або систем рівнянь, складених відносно комплексних зображень невідомих величин;

– зворотне перетворення, коли від знайдених комплексних зображень шуканих величин переходять до оригіналів, тобто комплексні функції замінюють тригонометричними, використовуючи формулу Ейлера:

$$i(t) \Rightarrow \dot{I}_m(t); \quad u(t) \Rightarrow \dot{U}_m(t); \quad e(t) \Rightarrow \dot{E}_m(t).$$

З усіх різновидів комплексних зображень найбільш зручно при розрахунках використовувати комплексні діючі значення гармонічних функцій – це забезпечує найбільш компактний варіант запису.

При переході до оригіналів для відновлення ознак часової залежності розраховані на другому етапі зображення шуканих величин множать на оператор обертання $e^{j\omega t}$, а перехід до амплітудних значень забезпечують множенням їх на коефіцієнт $\sqrt{2}$.

Комплексний метод є методом, який регламентує способи подання елементів схем і діючих у них електричних величин, в цьому сенсі він об’єднує всі відомі методи розрахунку електричних кіл.

Недоліком методу є можливість його застосування тільки для кіл гармонічного струму.

1.2.6. Комплексний опір і комплексна провідність

Опір змінному струму чинять всі пасивні елементи, але природа цього ефекту різна. Опір ідеального резистора (опору) називають активним, так як він споживає енергію, перетворюючи її в інші види.

Опори ідеальних котушки індуктивності і конденсатора (індуктивності та ємності відповідно) називають реактивними тому, що ці елементи нагромаджують енергію і за певних умов можуть віддавати її в зовнішнє коло (без перетворення).

Всі реальні пристрої і кола мають і активний, і реактивний опори. Цей факт при розрахунку електричного кола комплексним методом відбивається введенням поняття "*комплексний опір*".

Розглянемо електричне коло у вигляді пасивного двохполюсника, перейдемо від миттєвих значень напруги і струму, що діють в колі, до комплексних зображень (рис. 1.11).

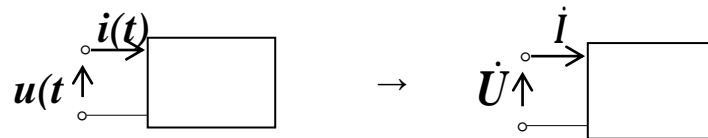


Рис. 1.11

Комплексний опір Z – це відношення комплексної напруги до комплексного струму, що діють на елементі або ділянці електричного кола:

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U}{I} e^{j(\psi_u - \psi_i)} \quad (1.15)$$

Використовують три форми подання комплексного опору – показову, тригонометричну, алгебраїчну:

$$Z = z e^{j\varphi} = z \cos \varphi + jz \sin \varphi = r + jx.$$

Тут $z = \frac{U}{I} = \sqrt{r^2 + x^2}$ – **модуль** комплексного опору, або **повний опір**; (1.16)

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = \text{arctg} \frac{x}{r} \quad (1.17)$$

– аргумент комплексного опору, або зсув фаз між напругою і струмом;

$$r = z \cos \varphi \text{ – активний опір;} \quad (1.18)$$

$$x = z \sin \varphi \text{ – реактивний опір.} \quad (1.19)$$

Одиниці вимірювань складових Z , r , x – Ом; φ – Радіан (градус).

Комплексна провідність Y – величина, зворотна комплексному опору, тобто – це відношення комплексного струму до комплексної напруги:

$$Y = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{I}{U} e^{j(\psi_i - \psi_u)}. \quad (1.20)$$

За аналогією з комплексним опором форми представлення комплексної провідності:

$$Y = ye^{-j\varphi} = y \cos \varphi + jy \sin \varphi = g - jb,$$

$$\text{де} \quad y = \frac{I}{U} = \sqrt{g^2 + b^2} \quad (1.21)$$

– модуль комплексної провідності, або повна провідність;

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = \operatorname{arctg} \frac{b}{g} \quad (1.22)$$

– аргумент комплексної провідності, або зсув фаз між напругою і струмом;

$$g = y \cos \varphi \text{ – активна провідність;} \quad (1.23)$$

$$b = y \sin \varphi \text{ – реактивна провідність.} \quad (1.24)$$

Одиниця виміру складових y , g , b – Сіменс (См).

Встановимо зв'язок між компонентами комплексного опору Z і комплексної провідності Y .

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{r + jx} \cdot \frac{r - jx}{r - jx} = \frac{r}{r^2 + x^2} - j \frac{x}{r^2 + x^2} = g - jb;$$

отже,

$$g = \frac{r}{r^2 + x^2} = \frac{r}{z^2}; \quad b = \frac{x}{r^2 + x^2} = \frac{x}{z^2}. \quad (1.25)$$

Аналогічно:

$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{g - jb} \cdot \frac{g + jb}{g + jb} = \frac{g}{g^2 + b^2} + j \frac{b}{g^2 + b^2} = r + jx;$$

отже,

$$r = \frac{g}{g^2 + b^2} = \frac{g}{y^2}; \quad x = \frac{b}{g^2 + b^2} = \frac{b}{y^2}. \quad (1.26)$$

Комплексні опір і провідність, а також їх компоненти можуть бути представлені векторними діаграмами на комплексній площині (рис. 1.12).

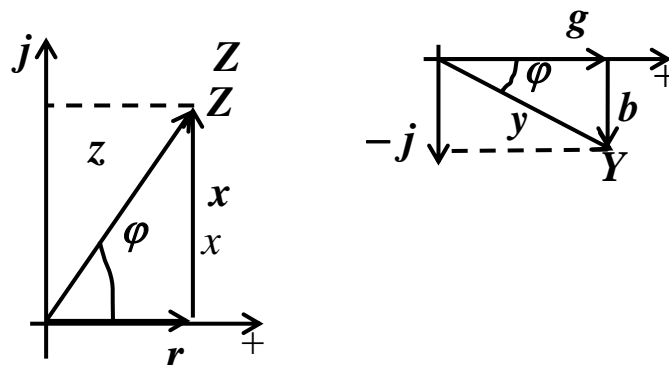


Рис. 1.12

Отримані в результаті побудови діаграми носять назви відповідно "трикутник опорів" і "трикутник провідностей".

1.2.7. Закон Ома і закони Кірхгофа в комплексній формі

Раніше ми зауважили, що закон Ома в дійсній формі (1.3) – найпростіший варіант, справедливий тільки для активного опору. Представимо ще два різновиди формули:

$$i = \frac{u}{R} = g \cdot u \quad \text{або} \quad u = i \cdot R = \frac{i}{g}.$$

Замінюючи в попередніх формулах оригінали електричних величин комплексними зображеннями, а активний опір комплексним, отримаємо варіанти запису закону Ома в комплексній формі:

$$\dot{I}_m(t) = \frac{\dot{U}_m(t)}{Z(j\omega)} = \dot{U}_m(t) \cdot Y(j\omega); \quad (1.27.1)$$

$$\dot{U}_m(t) = \dot{I}_m(t) \cdot Z(j\omega) = \frac{\dot{I}_m(t)}{Y(j\omega)}; \quad (1.27.2)$$

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{Z(j\omega)} = \dot{U}_m \cdot Y(j\omega); \quad \dot{U}_m = \dot{I}_m \cdot Z(j\omega) = \frac{\dot{I}_m}{Y(j\omega)}; \quad (1.28)$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z(j\omega)} = \dot{U} \cdot Y(j\omega); \quad \dot{U} = \dot{I} \cdot Z(j\omega) = \frac{\dot{I}}{Y(j\omega)}. \quad (1.29)$$

Наведені співвідношення справедливі для будь-якого лінійного пасивного елемента, а також для електричного кола (ділянки кола) з довільним з'єднанням таких елементів.

Перший закон Кірхгофа – закон балансу струмів – стверджує: алгебраїчна сума миттєвих значень струмів у вузлі електричного кола дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0,$$

де $n = 3, 4, \dots$ – число гілок, які утворюють вузол.

Струми, спрямовані до вузла, враховують зі знаком "плюс", струми, спрямовані від вузла, – зі знаком "мінус". Отже, сума струмів, спрямованих до вузла, дорівнює сумі струмів, спрямованих від вузла.

Рівняння, складені за першим законом Кірхгофа, називаються вузловими рівняннями.

Відомо, що додаванню гармонічних функцій відповідає додавання їх комплексних зображень. На цій підставі від дійсної форми першого закону Кірхгофа перейдемо до комплексної форми, зокрема, для комплексних амплітуд струмів:

$$\sum_{k=1}^n \dot{I}_{mk} = 0. \quad (1.30)$$

Отже, алгебраїчна сума комплексних струмів у вузлі електричного кола дорівнює нулю.

Аналогічно можна записати вираз для комплексних миттєвих значень і комплексних діючих значень струмів.

Другий закон Кірхгофа – закон балансу напруг – стверджує: алгебраїчна сума миттєвих значень напруги на пасивних елементах контуру електричного кола дорівнює алгебраїчній сумі миттєвих значень ЕРС джерел, які містять цей контур:

$$\sum_{k=1}^n e_k = \sum_{j=1}^m u_j,$$

де $n = 1, 2, \dots$ – число джерел ЕРС, включених в контур;

$m = 1, 2, \dots$ – число пасивних елементів в контурі.

Рівняння, складені за другим законом Кірхгофа, називаються контурними рівняннями.

Для складання контурних рівнянь вибирають довільно напрямок обходу контуру. ЕРС джерел, а також падіння напруги на елементах враховують в рівнянні зі знаком "плюс", якщо їх напрям (полярність) збігається з напрямом обходу контуру, і зі знаком мінус, якщо ці напрямки не збігаються.

Перехід від оригіналів ЕРС і падінь напруги до їх комплексних зображень приводить до другого закону Кірхгофа в комплексній формі, зокрема, для комплексних амплітуд:

$$\sum_{k=1}^n \dot{E}_{mk} = \sum_{j=1}^v \dot{U}_{mj}. \quad (1.31)$$

Отже, в будь-якому контурі електричного кола алгебраїчна сума

комплексних зображень ЕРС джерел дорівнює алгебраїчній сумі комплексних зображень падінь напруги на пасивних елементах.

Формулу другого закону Кірхгофа аналогічно можна записати для комплексних миттєвих значень та комплексних діючих значень ЕРС і падінь напруги.

1.2.8. Комплексна схема заміщення електричного кола

Розрахунок електричного кола символічним методом передбачає складання комплексної схеми заміщення.

Комплексна схема заміщення (комплексна еквівалентна схема) електричного кола – це схема, в якій всі пасивні елементи кола представлені комплексними опорами або комплексними провідностями, а всі струми і напруги, включаючи джерела енергії, представлені відповідними комплексними зображеннями.

На рис. 1.13 наведено приклад переходу від вихідної схеми кола до комплексної схеми заміщення.

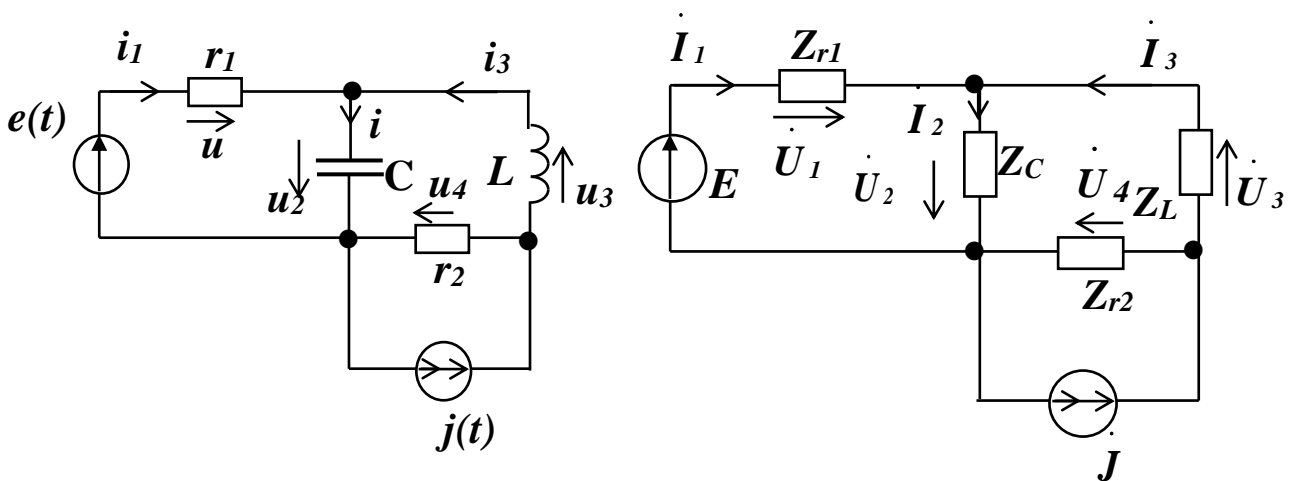


Рис. 1.13

1.2.9. Потужність в колі синусоїдального струму

Для визначення та оцінки енергетичних характеристик електричних кіл гармонічного струму використовується ряд понять.

Миттєва потужність - добуток миттєвих значень напруги та струму:

$$p(t) = u(t)i(t) \quad (1.32)$$

Для кіл синусоїдального струму

$$p(t) = U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin(\omega t - \varphi) = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t - \varphi) \quad (1.33)$$

Таким чином, миттєва потужність містить постійну складову і складову, яка змінюється з подвоєною частотою джерела.

Поняття потужності в колах змінного струму неоднозначне. У зв'язку з тим, що напруга і струм в навантаженні в загальному випадку зміщені по фазі, частина потужності, що віддається джерелом в навантаження, повертається в джерело назад. Цей факт при розрахунках кіл формально враховується шляхом використання поняття „комплексна потужність“.

Комплексною потужністю називається добуток комплексного діючого значення напруги і спряженого комплексного діючого значення струму:

$$\dot{P}_S = \dot{U} I^* = U e^{j\psi_u} I e^{-j\psi_i} = P_S e^{j\varphi} = P_S \cos \varphi + j P_S \sin \varphi = P + j P_Q \quad (1.34)$$

Повна потужність – це модуль комплексної потужності:

$$P_S = \sqrt{P^2 + P_Q^2} = UI \quad (1.35)$$

Повна потужність показує, яку потужність може віддати джерело в навантаження з чисто активним опором, тобто при синфазних в навантаженні напрузі і струмі. Вимірюється повна потужність в вольт-амперах (ВА). Це значення потужності вказується на щитках джерел електричної енергії в системах змінного струму.

Активна потужність – це дійсна частина комплексної потужності:

$$P = P_S \cos \varphi = UI \cos \varphi \quad (1.36)$$

Активна потужність характеризує роботу, яка відбувається в електричному колі. Для її розрахунку можна скористатися наступними співвідношеннями:

$$P = \frac{U^2}{z} \cos \varphi = I^2 z \cos \varphi = RI^2; \quad (1.37)$$

$$P = \frac{I^2}{y} \cos \varphi = U^2 y \cos \varphi = GU^2, \quad (1.38)$$

де z – повний опір навантаження;

R – активний опір навантаження;

y – повна провідність навантаження;

G – активна провідність навантаження.

Активна потужність вимірюється у ватах (Вт).

Активна потужність – це середня за період коливань миттєва потужність.

Насправді,

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T [UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t - \varphi)] dt = UI \cos \varphi \quad (1.39)$$

Реактивна потужність – це уявна частина комплексної потужності:

$$P_Q = UI \sin \varphi = P_S \sin \varphi \quad (1.40)$$

Реактивна потужність характеризує потужність, яка запасається в реактивних елементах електричного кола і може повертатися в джерело. При цьому робота в колі не відбувається.

Для розрахунку реактивної потужності можна скористатися наступними співвідношеннями:

$$P_Q = \frac{U^2}{z} \sin \varphi = I^2 z \sin \varphi = XI^2; \quad (1.41)$$

$$P_Q = \frac{I^2}{y} \sin \varphi = U^2 y \sin \varphi = BU^2, \quad (1.42)$$

де Z – повний опір навантаження;

X – реактивний опір навантаження;

y – повна провідність навантаження;

B – реактивна провідність навантаження.

Реактивна потужність вимірюється в *вольт-амперах реактивних* (вар).

У багатьох випадках реактивна потужність, яка присутня в колі, небажана, її прагнуть зменшити.

У промислових мережах ступінь використання повної потужності оцінюють коефіцієнтом потужності, рівним відношенню активної потужності до повної:

$$\cos \varphi = \frac{P}{P_S} \quad (1.43)$$

Як правило, намагаються забезпечити коефіцієнт потужності, близький до одиниці, при цьому реактивна потужність в колі прагне до нуля.

2. Стаціонарні процеси в електричних колах

2.1. Електричне коло з резистором

Розглянемо процеси в електричному колі, яке містить один резистор, представлений у схемі (рис. 2.1) активним опором R , якщо на його вході діє гармонічна напруга $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$

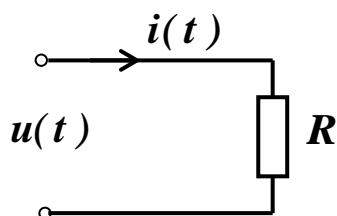


Рис. 2.1

Відповідно до закону Ома миттєве значення струму:

$$i_R(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + \psi_u) = I_{mR} \sin(\omega t + \psi_{iR})$$

Зрозуміло, що

$$I_{mR} = \frac{U_m}{R}; \quad \psi_{iR} = \psi_u; \quad \varphi = \psi_u - \psi_{iR} = 0;$$

тобто, струм і напруга в опорі (в резистивному колі) синфазні.

Перенесемо дії на комплексну площину.

Напрузі і струму відповідають комплексні зображення

$$u(t) \Rightarrow \dot{U}; \quad i(t) \Rightarrow \dot{I}.$$

Відповідно до закону Ома в комплексній формі:

$$Z_R = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U}{I} e^{j(\psi_u - \psi_i)} = \frac{U}{I} = R; \quad Y_R = \frac{1}{Z_R} = \frac{1}{R} = G. \quad (2.1)$$

Таким чином, комплексний опір і комплексна провідність опору містять тільки дійсну складову, тобто мають активний характер.

Комплексна схема заміщення активного опору представлена на рис. 2.2

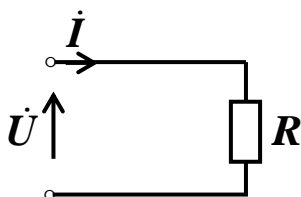


Рис. 2.2.

Часова (рис. 2.3) і векторні (рис. 2.4) діаграми, що представляють процеси в опорі, мають вигляд:

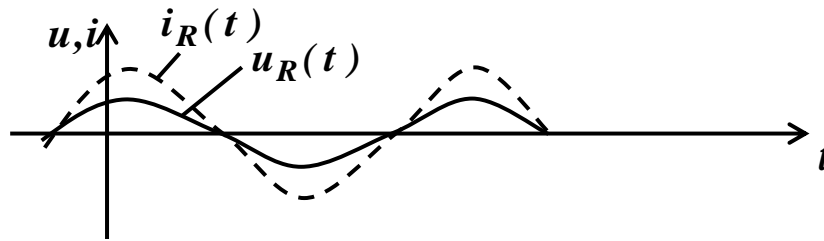


Рис. 2.3

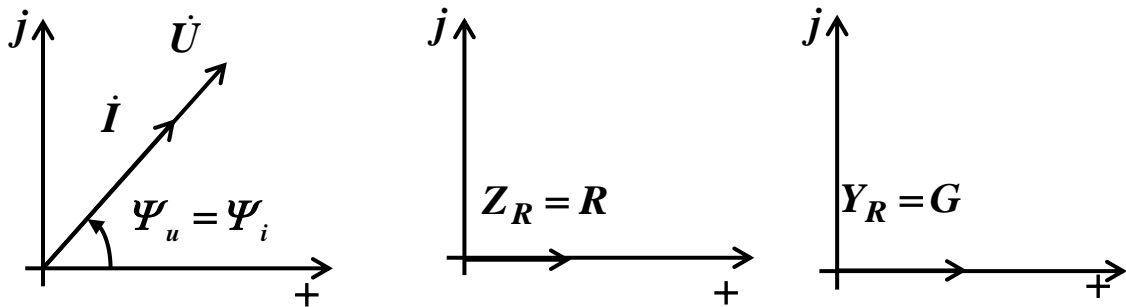


Рис. 2.4

Процеси в даному колі характеризуються тільки активною потужністю:

$$P = U \cdot I \cos \varphi = UI = RI^2 = GU^2$$

реактивна потужність дорівнює нулю $P_Q = U \cdot I \sin \varphi = 0$.

2.2. Електричне коло з котушкою індуктивності

Розглянемо процеси в електричному колі, яке містить котушку індуктивності (схема на рис. 2.5), якщо на його вході діє гармонічна напруга:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

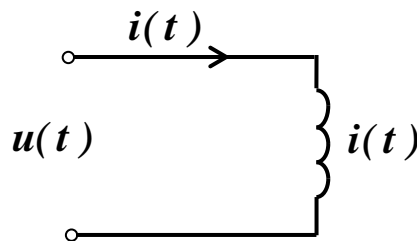


Рис. 2.5.

Струм в індуктивності:

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u_L(t) dt$$

Перенесемо дії на комплексну площину:

$$\dot{I}_m e^{j\omega t} = \frac{1}{L} \int \dot{U}_m e^{j\omega t} dt = \frac{\dot{U}_m}{j\omega L} e^{j\omega t}$$

або, виключаючи оператор обертання,

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{j\omega \cdot L} = \frac{U_m}{\omega \cdot L} e^{j(\psi_u - 90^\circ)},$$

де $I_m = \frac{U_m}{\omega L}$; $\psi_i = \psi_u - 90^\circ$; $\phi = \psi_u - \psi_i = \psi_u - \psi_u + 90^\circ = 90^\circ$.

Комплексний опір індуктивності:

$$Z_L = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = \frac{\dot{U}_m}{\dot{U}_m} \cdot j\omega L = j\omega L = jx_L = x_L e^{j90^\circ} = \omega L e^{j90^\circ}. \quad (2.2)$$

Таким чином, комплексний опір індуктивності містить тільки уявну (реактивну) складову; модуль комплексного опору індуктивності називається індуктивним опором.

Комплексна провідність індуктивності:

$$Y_L = \frac{1}{Z_L} = \frac{1}{j\omega L} = -j \cdot b_L = b_L \cdot e^{-j90^\circ} = \frac{1}{\omega L} \cdot e^{-j90^\circ}; \quad b_L = \frac{1}{\omega L}. \quad (2.3)$$

Комплексна еквівалентна схема індуктивності

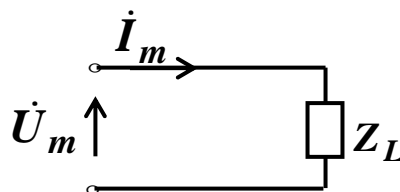


Рис. 2.6

Отримані співвідношення для індуктивного опору і індуктивної провідності вказують на частотну залежність, яку ілюструють графіки, наведені на рис. 2.7.

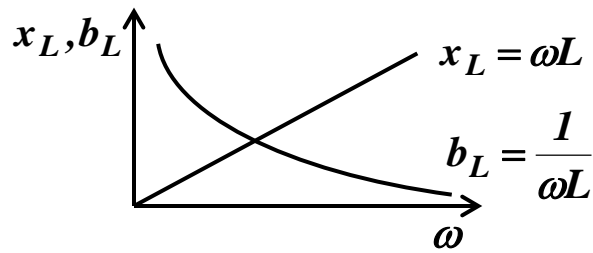
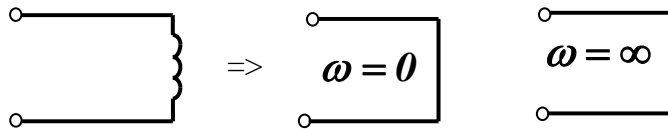


Рис. 2.7

Характерно, що при $\omega = 0$, $x = 0$, тобто індуктивність в колі постійного струму еквівалентна короткому замиканню, на частотах $\omega \rightarrow \infty$ індуктивний опір $x \rightarrow \infty$, тобто індуктивність в таких умовах еквівалентна розриву в колі:



Зазначена властивість може бути використана для поділу постійного і змінного струму в колах живлення електронних схем, а також при здійсненні частотної фільтрації в електричних колах.

Потужність в індуктивності має тільки уявну складову – реактивну потужність; активна потужність дорівнює нулю, тобто перетворення енергії в індуктивності не відбувається:

$$P = U \cdot I \cos \varphi = U \cdot I \cdot \cos 90^\circ = 0;$$

$$P_Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi = U \cdot I \cdot \sin 90^\circ = UI = x_L I^2 = \omega LI^2.$$

Це означає, що в даному елементі робота не відбувається, а в магнітному полі індуктивності запасується енергія:

$$W_L = \int_{-\infty}^t p_L dt = \int_{-\infty}^t u \cdot i \cdot dt = \int_{-\infty}^t L \frac{di}{dt} \cdot i \cdot dt = L \int_0^i i \cdot di = \frac{Li^2}{2},$$

тобто, в момент часу t енергія в магнітному полі індуктивності становить:

$$W_L = \frac{Li^2(t)}{2}.$$

Миттєве значення струму в індуктивності:

$$i(t) = \text{Im}\{\dot{I}_m e^{j\omega t}\} = \frac{U_m}{\omega L} \sin(\omega t + \psi_u - 90^\circ).$$

Часова і векторна діаграми процесів в індуктивності представлені відповідно на рис. 2.8, 2.9.

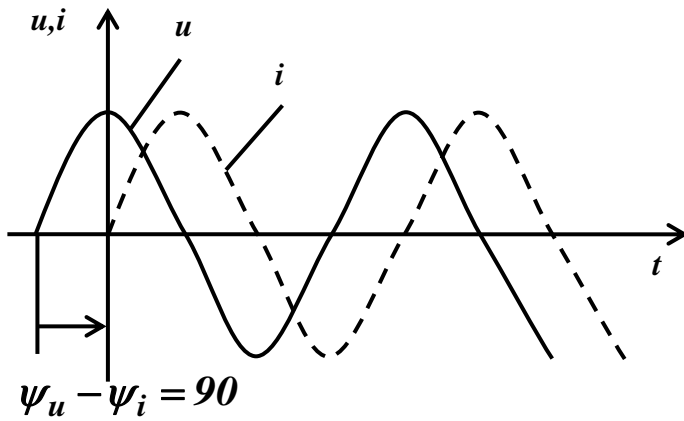


Рис. 2.8

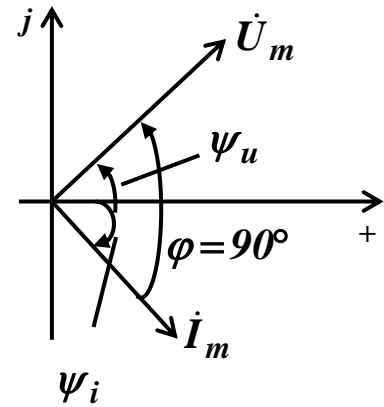


Рис. 2.9

2.3. Електричне коло з конденсатором

Розглянемо процеси в електричному колі, яке містить конденсатор (схема – на рис.2.10), якщо на його вході діє гармонічна напруга $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$.

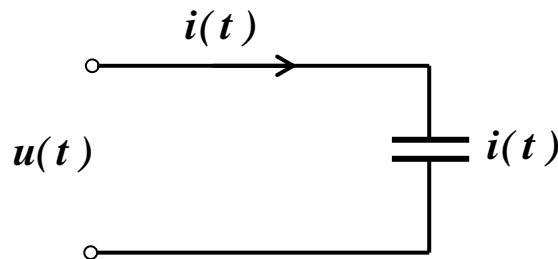


Рис. 2.10

Струм в ємності визначається: $i(t) = C \frac{du_c}{dt}$.

Перенесемо дії на комплексну площину:

$$\dot{I}_m(t) = \dot{I}_m e^{j\omega t} = C \frac{d}{dt} \dot{U}_m e^{j\omega t} = j\omega C \dot{U}_m e^{j\omega t},$$

$$\dot{I}_m = j\omega C \dot{U}_m = \omega C U_m e^{j\psi_u} e^{j90^\circ} = I_m e^{j\psi_i},$$

$$I_m = \omega C U_m, \quad \psi_i = \psi_u + 90^\circ, \quad \varphi = \psi_u - \psi_u - 90^\circ = -90^\circ.$$

Комплексний опір ємності

$$Z_c = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = \frac{\dot{U}_m}{j\omega C \dot{U}_m} = \frac{1}{j\omega C} = -jx_c = x_c \cdot e^{-j90^\circ} = \frac{1}{\omega C} e^{-j90^\circ}. \quad (2.4)$$

Таким чином, комплексний опір ємності містить тільки уявну (реактивну) складову; модуль комплексного опору ємності називається ємнісним опором.

Комплексна провідність ємності:

$$Y_c = \frac{1}{Z_c} = j\omega C = \omega C e^{j90^\circ} = jb_c; \quad b_c = \omega C. \quad (2.5)$$

Комплексна еквівалентна схема ємності представлена на рис. 2.11.

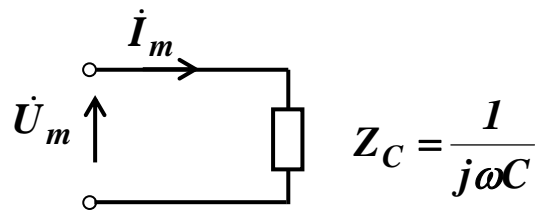


Рис. 2.11

Ємнісний опір (ємнісна провідність) залежать від частоти (рис. 2.12).

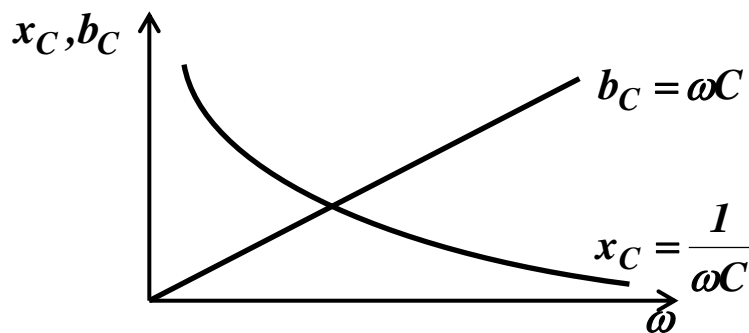
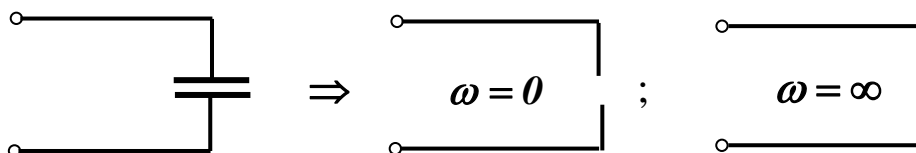


Рис. 2.12

Характерно, що при $\omega = 0$ – $x_c = \infty$, тобто ємність в колі постійного струму еквівалентна розриву.

На частотах $\omega \rightarrow \infty$ опір ємності $x_c \rightarrow 0$, тобто ємність в таких умовах еквівалентна короткому замиканню.



Зазначена властивість ємності, по аналогії з індуктивністю, може бути використана для поділу постійного і змінного струму в колах живлення електронних схем, а також при здійсненні частотної фільтрації в електричних колах.

Потужність в колі з ємністю має тільки уявну складову – реактивну потужність:

$$P_Q = U \cdot I \sin(-90) = -U \cdot I = -x_c I^2 = -\frac{I^2}{\omega C}.$$

Це означає, що в даному колі робота не відбувається, а в електричному полі ємності нагромаджується енергія:

$$W_C = \int_{-\infty}^t p_c dt = \frac{Cu^2(t)}{2}.$$

Миттєве значення струму в ємності:

$$i(t) = \text{Im}\{ \dot{I}_m e^{j\omega t} \} = \omega C U_m \sin(\omega t + \psi_u + 90^\circ).$$

Часова (рис. 2.13) і векторна (рис. 2.14) діаграми процесів в ємності:

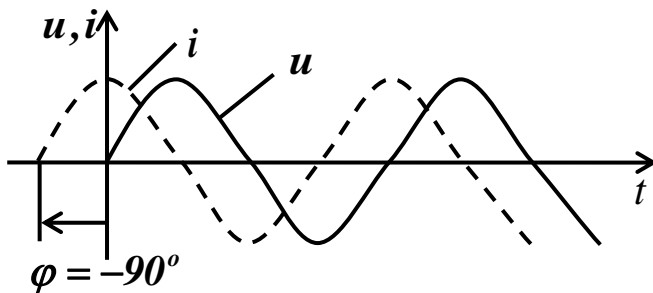


Рис. 2.13

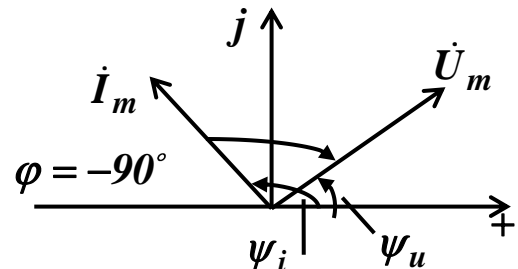


Рис. 2.14

2.4. Процеси в електричних колах з послідовним з'єднанням елементів

2.4.1. Еквівалентні перетворення схем з послідовним з'єднанням елементів

Розглянемо електричне коло, утворене послідовним з'єднанням n елементів, опори яких – відповідно: Z_1, Z_2, \dots, Z_n .

Складемо комплексну схему заміщення (рис. 2.15):

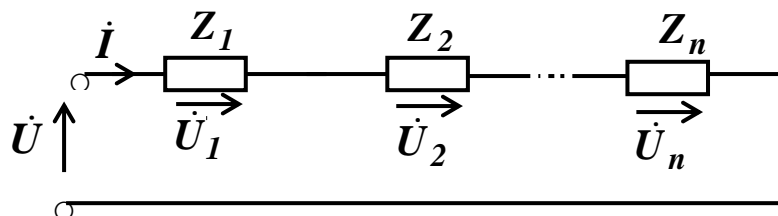


Рис. 2.15

Рівняння електричного кола відповідно до другого закону Кірхгофа:

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dots + \dot{U}_n = \dot{I} \cdot Z_1 + \dot{I} \cdot Z_2 + \dots + \dot{I} \cdot Z_n = \\ &= \dot{I} \cdot (Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n) = \dot{I} \cdot Z_3, \end{aligned}$$

де

$$Z_e = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n = \sum_{k=1}^n Z_k = (r_1 + r_2 + \dots + r_n) + j(x_1 + x_2 + \dots + x_n) =$$

$$= \sum_{k=1}^n r_k + j \sum_{k=1}^n x_k = r_e + jx_e \quad - \quad \text{еквівалентний опір ділянки схеми}$$

електричного кола з послідовним з'єднанням елементів. (2.6)

Таким чином, еквівалентний опір схеми кола (ділянки схеми) з послідовним з'єднанням елементів дорівнює сумі опорів цих елементів.

Комплексна провідність перетвореної схеми кола (ділянки схеми):

$$Y_e = \frac{1}{Z_e} = \frac{1}{Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n}. \quad (2.7)$$

Отже, при розрахунках електричних кіл ділянки схем, утворені послідовним з'єднанням пасивних елементів, можна замінити одним елементом, опір якого дорівнює сумі опорів елементів. Цей прийом використовують при дослідженні процесів, з'ясуванні властивостей і параметрів типових з'єднань пасивних елементів, а також з метою спрощення розрахунків електричних кіл.

2.4.2. Процеси в послідовному RL -колі

Розглянемо процеси в електричному колі, утвореному послідовним з'єднанням R і L елементів (схема – рис. 2.16)

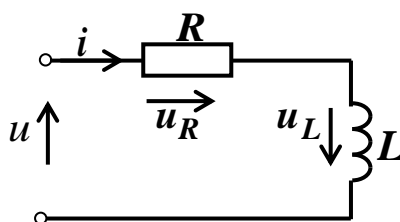


Рис. 2.16

Визначимо струм і напругу на елементах, якщо на вході кола діє напруга:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u).$$

Побудуємо комплексну еквівалентну схему:

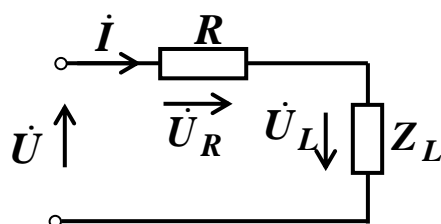


Рис. 2.17

Згідно з другим законом Кірхгофа:

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L = R \cdot \dot{I} + Z_L \cdot \dot{I} = Z \cdot \dot{I},$$

де $Z = R + Z_L = r + j\omega L = ze^{j\varphi}$ – комплексний еквівалентний опір кола.

Повний опір z і фазовий зсув φ між напругою і струмом:

$$z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}; \quad \varphi = \arctg \frac{\omega L}{R}$$

залежать від параметрів елементів і частоти зовнішнього впливу.

Комплексний струм в колі

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{Ue^{j\psi_u}}{ze^{j\varphi}} = \frac{U}{z} e^{j(\psi_u - \varphi)} = I \cdot e^{j(\psi_u - \varphi)}.$$

Напруга на елементах

$$\dot{U}_R = R \cdot I \cdot e^{j(\psi_u - \varphi)};$$

$$\dot{U}_L = Z_L \cdot \dot{I} = j\omega L \cdot I \cdot e^{j(\psi_u - \varphi)} = \omega L \cdot I \cdot e^{j(\psi_u - \varphi + 90^\circ)}.$$

Перейдемо до миттєвих значень (оригіналів) струму і напруги

$$i(t) = \frac{U_m}{z} \sin(\omega t + \psi_u - \varphi);$$

$$u_R(t) = R \frac{U_m}{z} \sin(\omega t + \psi_u - \varphi);$$

$$u_L(t) = \omega L \frac{U_m}{z} \sin(\omega t + \psi_u - \varphi + 90^\circ).$$

З останніх співвідношень випливає, що:

- струм в колі запізнюється по фазі від прикладеної напруги на кут $90^\circ > \varphi > 0$;
- струм і напруга на активному опорі синфазні;
- напруга на індуктивності випереджає по фазі струм на кут 90° , а прикладену напругу на кут $90^\circ > \alpha > 0$.

Векторна діаграма струму і напруги для даного випадку має вигляд:

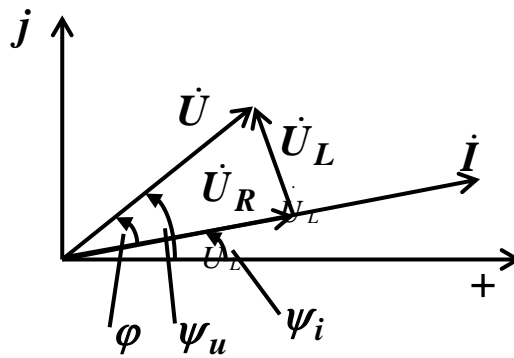


Рис. 2.18

Векторна діаграма опорів ("трикутник опорів") має вигляд

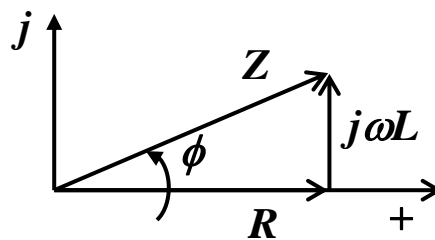


Рис. 2.19

В даному колі діють як активна так і реактивна складові потужності:

$$P = UI \cos \varphi = RI^2; \quad P_Q = UI \sin \varphi = \omega LI^2.$$

2.4.3. Процеси в послідовному RC-колі

Розглянемо процеси в електричному колі, утвореному послідовним з'єднанням R і C елементів (схема – рис. 2.20).

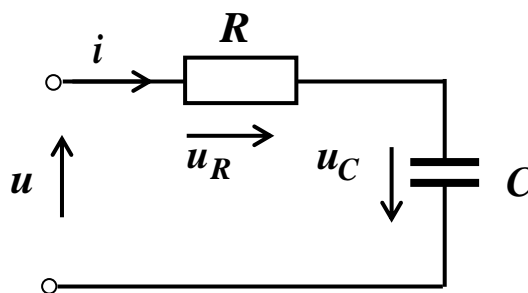


Рис. 2.20

Визначимо струм і напругу на елементах, якщо на вході кола діє напруга:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u).$$

Побудуємо комплексну еквівалентну схему (рис. 2.21):

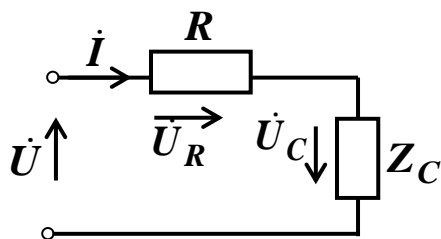


Рис. 2.21

Згідно з другим законом Кірхгофа: $\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_C = R\dot{i} + Z_C\dot{i} = Z\dot{i}$,

де $Z = R + Z_C = R - j\frac{1}{\omega C} = ze^{j\varphi}$ – комплексний еквівалентний опір кола.

Повний опір z і фазовий зсув φ між напругою і струмом залежать від параметрів елементів і частоти зовнішнього впливу:

$$z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}; \quad \varphi = -\text{arctg} \frac{1}{R\omega C}$$

Комплексний струм в колі: $\dot{i} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{Ue^{j\psi_u}}{ze^{j\varphi}} = \frac{U}{z}e^{j(\psi_u - \varphi)}$.

Напруга на елементах $\dot{U}_R = R \cdot \dot{i} \cdot e^{j(\psi_u - \varphi)}$;

$$\dot{U}_C = Z_C \cdot \dot{i} = -j\frac{1}{\omega C} \cdot \dot{i} \cdot e^{j(\psi_u - \varphi)} = \frac{1}{\omega C} \cdot \dot{i} \cdot e^{j(\psi_u - \varphi - 90^\circ)}$$

Перейдемо до миттєвих значень (оригіналів) струму і напруги:

$$i(t) = \frac{U_m}{z} \sin(\omega t + \psi_u - \varphi);$$

$$u_R(t) = R \frac{U_m}{z} \sin(\omega t + \psi_u - \varphi);$$

$$u_C(t) = \frac{U_m}{z} \cdot \frac{1}{\omega C} \sin(\omega t + \psi_u - \varphi - 90^\circ).$$

З останніх співвідношень випливає, що:

- струм в колі випереджає по фазі прикладену напругу на кут $90^\circ > \varphi > 0$;
- струм і напруга на активному опорі синфазні;

– напруга на ємності запізнюється по фазі від струму на кут 90° , а від прикладеної напруги на кут $90^\circ > \alpha > 0$.

Векторна діаграма струму і напруги для даного випадку має вигляд:

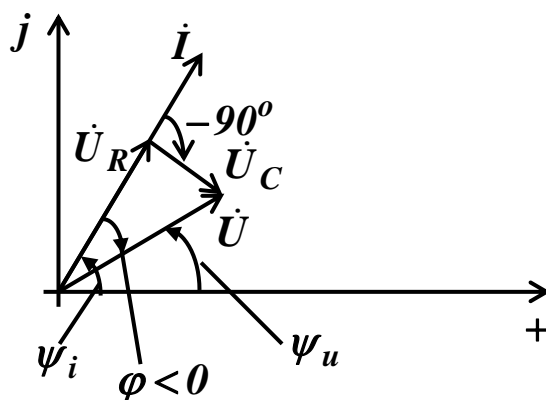
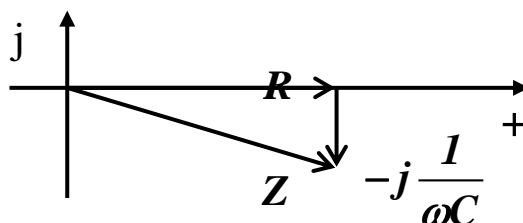


Рис. 2.22



Векторна діаграма опорів ("трикутник опорів") має вигляд:

Рис. 2.23

В даному колі діють як активна, так і реактивна складові потужності

$$P = UI \cos \varphi = RI^2; \quad P_Q = -x_C \cdot I^2 = -\frac{1}{\omega C} \cdot I^2.$$

2.4.4. Процеси в послідовному RLC-колі

Розглянемо електричне коло, утворене послідовним з'єднанням елементів R, L, C (схема представлена на рис. 2.24)

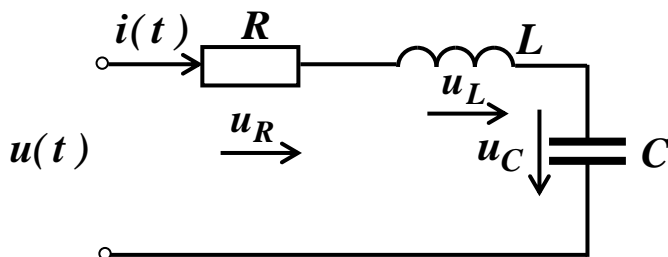


Рис. 2.24

Комплексні схеми заміщення – вихідна і після еквівалентних перетворень (рис.2.25):

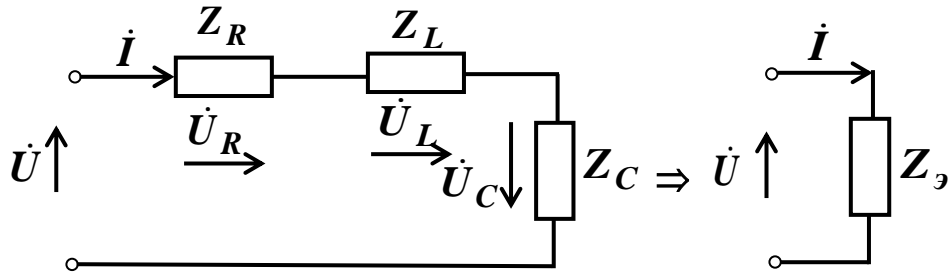


Рис. 2.25

Визначимо струм і падіння напруги на елементах.

Еквівалентний опір $Z_e = Z_R + Z_L + Z_C = R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} = R + jx = z \cdot e^{j\varphi}$,

де $x = x_L + x_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ – еквівалентний реактивний опір кола;

$z = \sqrt{R^2 + x^2}$ – модуль комплексного опору, або повний опір кола;

$\varphi = \arctg \frac{x}{R}$ – аргумент комплексного опору.

Відповідно до закону Ома визначимо комплексні зображення струму і падінь напруги на елементах кола:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z_e} = \frac{U \cdot e^{j\psi_u}}{z \cdot e^{j\varphi}} = \frac{U}{z} \cdot e^{j(\psi_u - \varphi)} = I \cdot e^{j\psi_i}; \quad I = \frac{U}{z}; \quad \psi_i = \psi_u - \varphi;$$

$$\dot{U}_R = \dot{I} \cdot R = \frac{U}{z} \cdot R \cdot e^{j\psi_i} = U_R \cdot e^{j\psi_{uR}}; \quad U_R = U \cdot \frac{R}{z}; \quad \psi_{uR} = \psi_i = \psi_u - \varphi;$$

$$\dot{U}_L = \dot{I} \cdot Z_L = \dot{I} \cdot j\omega L = \frac{U}{z} \omega L e^{j(\psi_i + 90^\circ)} = U_L e^{j\psi_{uL}};$$

$$U_L = U \frac{\omega L}{z}; \quad \psi_{uL} = \psi_u - \varphi + 90^\circ;$$

$$\dot{U}_C = \dot{I} \cdot Z_C = \dot{I} \frac{1}{j\omega C} = \frac{U}{z} \frac{1}{\omega C} e^{j(\psi_i - 90^\circ)} = U_C e^{j\psi_{uC}};$$

$$U_C = U \frac{1}{z\omega C}; \quad \psi_{uC} = \psi_u - \varphi - 90^\circ$$

Перейдемо до оригіналів струму і напруги:

$$i(t) = \frac{U}{z} \sqrt{2} \cos(\omega t + \psi_u - \varphi) = I_m \cos(\omega t + \psi_i);$$

$$u_R(t) = \frac{U}{z} R \sqrt{2} \cos(\omega t + \psi_u - \varphi) = U_{mR} \cos(\omega t + \psi_{uR});$$

$$u_L(t) = \frac{U}{z} \omega L \sqrt{2} \cos(\omega t + \psi_u - \varphi + 90^\circ) = U_{mL} \cos(\omega t + \psi_{uL});$$

$$u_C(t) = \frac{U}{z \omega C} \sqrt{2} \cos(\omega t + \psi_u - \varphi - 90^\circ) = U_{mC} \cos(\omega t + \psi_{uC}).$$

Отримані результати показують, що параметри процесів в колі залежать як від співвідношення між параметрами елементів кола, так і від частоти прикладеного впливу.

Побудуємо графіки залежності від частоти компонентів комплексного опору кола (рис.2.26):

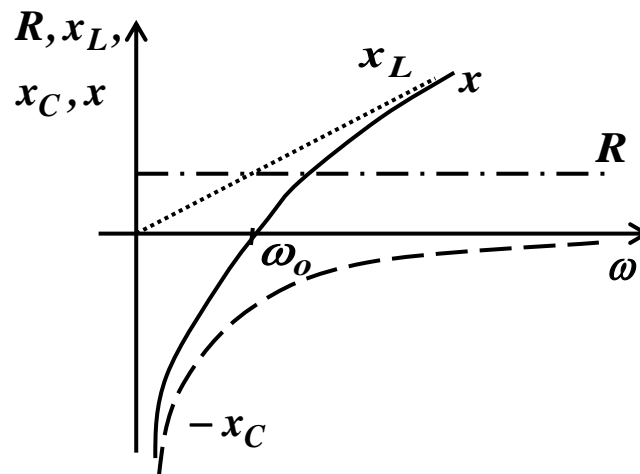


Рис. 2.26

На частоті $\omega = \omega_0$ реактивні опори індуктивності та ємності мають одне і те ж значення, тобто $x_L = x_C$, еквівалентний реактивний опір кола $x = 0$, тобто опір – чисто активний, а повний опір кола має мінімальне значення $z = z_{\min} = R$. Амплітуда струму в колі при цьому – максимальна.

Режим в електричному колі, який встановлюється на частоті ω_0 , називається резонансом, а частота ω_0 – резонансною частотою.

Залежність реактивних опорів від частоти обумовлює не тільки частотну залежність амплітуд струму і напруги, а й характеру кола.

В діапазоні частот від 0 до ω_0 , $x_L < x_C$, еквівалентний реактивний опір $x < 0$, тобто має ємнісний характер, а досліджуване коло еквівалентне послідовному RC -колу, струм випереджає по фазі прикладена до входу кола напругу, тобто $\varphi = \psi_u - \psi_i < 0$.

На резонансній частоті ω_0 еквівалентний реактивний опір $x = 0$, еквівалентний опір кола чисто активний, коло еквівалентне колу з активним опором, струм і прикладена напруга синфазні.

В діапазоні частот від ω_0 до ∞ , $x_L > x_C$, еквівалентний реактивний опір $x > 0$, тобто має індуктивний характер, а досліджуване коло еквівалентне послідовному RL -колу, струм відстає по фазі від прикладеної до входу кола напруги, тобто $\varphi = \psi_u - \psi_i < 0$.

Зазначені особливості наочно можна проілюструвати за допомогою векторних діаграм.

Якщо задана початкова фаза напруги на вході кола, то побудову діаграми можна починати з вектора, який зображує цю напругу.

Раніше ми відзначали, що побудову векторної діаграми в загальному випадку доцільно починати з вектора, що зображує електричну величину, яка є загальною для більшості елементів. В даному випадку – з вектора, який зображує струм \dot{I} в колі. Положення вектора на комплексній площині можна вибрати довільно, так як принципово важливо встановити фазові співвідношення для певних величин, а не власне їх початкові фази. Далі будуємо вектор напруги \dot{U}_R на активному опорі, який збігається з вектором струму – ці величини синфазні. З кінця вектора \dot{U}_R під кутом 90° до нього будуємо вектор напруги на індуктивності \dot{U}_L (напруга на індуктивності випереджає струм в ній на 90°). З кінця вектора \dot{U}_L під кутом -90° до вектора \dot{U}_R будуємо вектор напруги на ємності \dot{U}_C (напруга на ємності відстає від струму в ній на 90°).

Будуємо результуючий вектор, або вектор, що зображає сумарну (вхідну) напругу \dot{U} .

Кожному значенню частоти відповідає певне співвідношення між реактивними опорами, а також між напругою на індуктивності та на ємності і, як наслідок, вид векторної діаграми.

Як приклад, наведемо векторну діаграму для частоти $\omega > \omega_0$ (рис. 2.27):

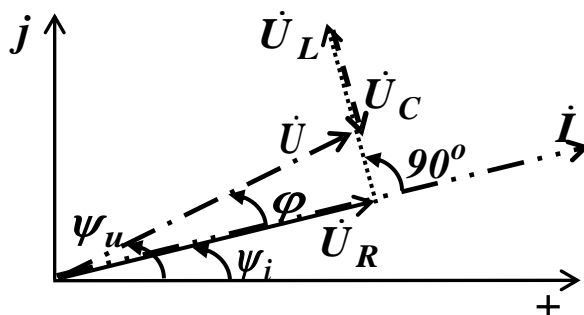


Рис. 2.27

2.4.5. Дільники напруги

При конструюванні електро- і радіоапаратури іноді вдаються до забезпечення живлення декількох окремих елементів або частин електричних кіл (пристроїв) різними напругами від одного джерела. Цей прийом здійснюють за допомогою дільників напруги.

Для поділу напруги використовують електричне коло у вигляді послідовного з'єднання двох або більше пасивних елементів. Струм в такому колі – загальний для всіх елементів, а падіння напруги на кожному елементі визначається величиною його опору.

У загальному випадку схема дільника напруги має вигляд:

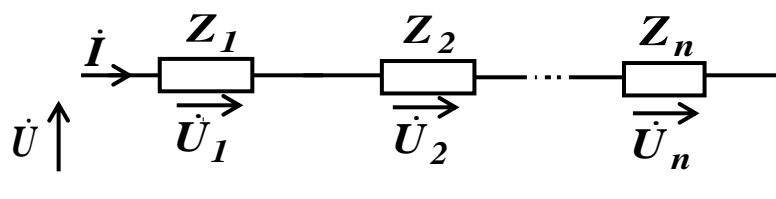


Рис. 2.28

Розрахунок дільника напруги здійснюють згідно з другим законом Кірхгофа і законом Ома.

З огляду на властивості послідовного з'єднання пасивних елементів, запишемо формулу дільника напруги

$$\dot{U}_{zk} = \dot{I} \cdot Z_k = \dot{U} \cdot \frac{Z_k}{Z_e}, \quad (2.8)$$

де $Z_e = \sum_{k=1}^n Z_k$ – еквівалентний опір.

Таким чином, напруга на елементах дільника знаходиться в тому ж співвідношенні, що і їх опори.

У ділянках напруги, складених з резисторів, частина енергії перетворюється в теплову, тому такі ділянки використовують для живлення малопотужних споживачів.

У ділянках напруги змінного струму з метою зменшення енергії, яка витрачається власне в ділянці, можна використовувати ділянку, складену з ємностей.

Формула ділянки напруги в окремих випадках при розрахунках електричних кіл дозволяє досягти певних спрощень.

2.5. Процеси в електричних колах з паралельним з'єднанням елементів

2.5.1. Еквівалентні перетворення схем з паралельним з'єднанням елементів

Розглянемо електричне коло, утворене паралельним з'єднанням n елементів, опір яких відповідно Z_1, Z_2, \dots, Z_n . Складемо комплексну схему заміщення (рис. 2.29):

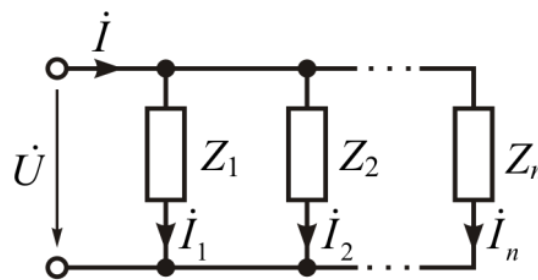


Рис. 2.29

Рівняння, що представляє процеси в розглянутому електричному колі, відповідно до першого закону Кірхгофа:

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dots + \dot{I}_n = \frac{\dot{U}}{Z_1} + \frac{\dot{U}}{Z_2} + \dots + \frac{\dot{U}}{Z_n} = \frac{\dot{U}}{Z_e} = Y_e \dot{U},$$

де

$$Y_e = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = (G_1 + G_2 + \dots + G_n) + j(B_1 + B_2 + \dots + B_n) = \sum_{k=1}^n G_k + j \sum_{k=1}^n B_k = G_e + jB_e \quad (2.9)$$

еквівалентна провідність ділянки кола (схеми) з паралельним з'єднанням елементів.

Таким чином, еквівалентна провідність схеми (ділянки схеми) з паралельним з'єднанням елементів дорівнює сумі провідностей цих елементів.

При розрахунках схему (ділянки схеми) з паралельним з'єднанням n елементів можна замінити одним елементом з еквівалентною провідністю (опором).

Комплексний опір перетвореної схеми в загальному випадку визначається наступним співвідношенням:

$$Z_e = \frac{1}{Y_e} = \frac{1}{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n}. \quad (2.10)$$

Поширеним в практиці розрахунків і перетворень є випадок, коли коло (ділянка кола) складається з двох паралельно з'єднаних елементів. Тоді еквівалентна провідність цієї ділянки:

$$Y_e = \frac{1}{Z_e} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1 Z_2}, \text{ а її опір: } Z_e = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}. \quad (2.11)$$

Звернемо увагу на те, що еквівалентний опір кола з паралельним з'єднанням елементів менше найменшого з опорів елементів.

2.5.2. Процеси в паралельному RL - колі

Розглянемо процеси в електричному колі, утвореному паралельним з'єднанням R і L елементів. Визначимо струми в гілках, якщо на вході кола діє напруга $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$. Побудуємо комплексну еквівалентну схему рис. 2.30.

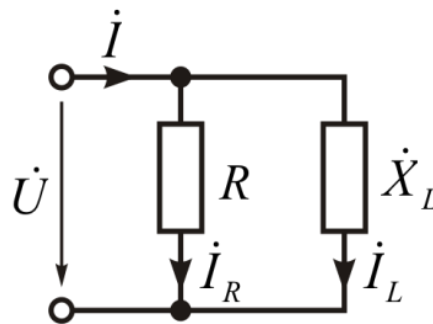


Рис. 2.30

Відповідно до першого закону Кірхгофа:

$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_L = \frac{\dot{U}}{R} + \frac{\dot{U}}{\dot{X}_L} = Y_e \dot{U}$$

де $Y_e = G - jB = \frac{1}{R} - j \frac{1}{\omega L} = ye^{-j\varphi}$ – комплексна еквівалентна провідність

кола.

Повна провідність та фазовий зсув між напругою і струмом:

$$y = \sqrt{G^2 + B_L^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L}\right)^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{R}{\omega L}$$

залежать від параметрів елементів і частоти зовнішнього впливу.

Комплексні струми в гілках:

$$\dot{I} = I e^{j\psi_i} = Y \dot{U} = y U e^{j(\psi_u - \varphi)}; \quad \dot{I}_R = I_R e^{j\psi_{iR}} = \frac{\dot{U}}{R} = \frac{U}{R} e^{j\psi_u};$$

$$\dot{I}_L = I_L e^{j\psi_{iL}} = \frac{\dot{U}}{j\omega L} = \frac{U}{\omega L} e^{j(\psi_u - 90^\circ)}.$$

Перейдемо до миттєвих значень (оригіналів) струмів:

$$i(t) = \frac{U_m}{z} \sin(\omega t + \psi_u - \varphi);$$

$$i_R(t) = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + \psi_u);$$

$$i_L(t) = \frac{U_m}{\omega L} \sin(\omega t + \psi_u - 90^\circ).$$

З останніх співвідношень випливає:

– струм в нерозгалуженій частині схеми відстає по фазі від прикладеної напруги на кут $90^\circ > \varphi > 0$;

– струм і напруга на активному опорі синфазні;

– струм в індуктивності відстає по фазі від напруги на кут 90° .

Векторна діаграма напруги і струмів для даного випадку представлена на рис. 2.31; векторна діаграма провідностей («трикутник провідностей») – на рис. 2.32.

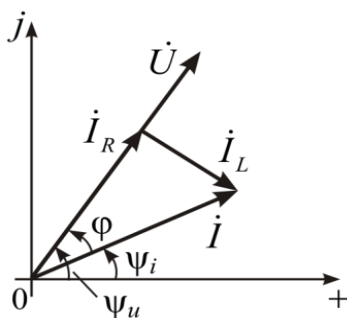


Рис. 2.31

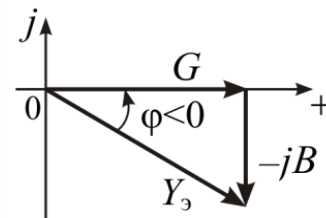


Рис. 2.32

В даному колі діють як активна, так і реактивна складові потужності:

$$P = UI \cos \varphi; P_Q = UI \sin \varphi.$$

2.5.3. Процеси в паралельному RC-колі

Розглянемо процеси в електричному колі, утвореному паралельним з'єднанням R і C елементів (рис. 2.33). Визначимо струми в гілках, якщо на вході кола діє напруга $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$.

Побудуємо комплексну еквівалентну схему (рис. 2.34).

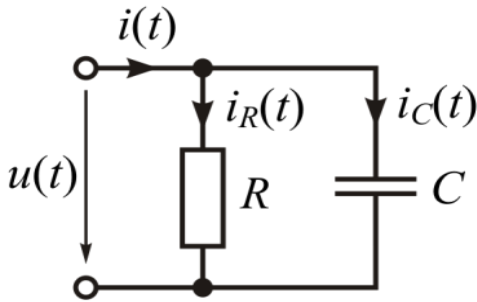


Рис. 2.33

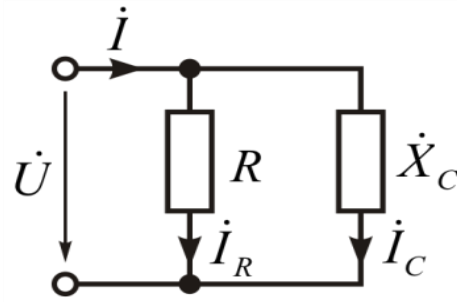


Рис. 2.34

Відповідно до першого закону Кірхгофа:

$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_C = \frac{\dot{U}}{R} + \dot{U} j\omega C = Y_e \dot{U},$$

де $Y_e = G + jB = \frac{1}{R} + j\omega C = ye^{j\varphi}$ – комплексна еквівалентна

провідність схеми.

Повна провідність та фазовий зсув між напругою і струмом: $y = \sqrt{(1/R)^2 + (\omega C)^2}$, $\varphi = \arctg R\omega C$ залежать від параметрів елементів та частоти зовнішнього впливу.

Комплексні струми в гілках:

$$\dot{I} = I e^{j\psi_i} = Y_e \dot{U} = y U e^{j(\psi_u + \varphi)};$$

$$\dot{I}_R = I_R e^{j\psi_{iR}} = \frac{\dot{U}}{R} = \frac{U}{R} e^{j\psi_u};$$

$$\dot{I}_C = I_C e^{j\psi_{iC}} = \dot{U} j\omega C = \omega C U e^{j(\psi_u + 90^\circ)}.$$

Перейдемо до миттєвих значень (оригіналів) струмів:

$$i(t) = \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t + \psi_u + \varphi);$$

$$i_R(t) = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + \psi_u);$$

$$i_C(t) = \omega C U_m \sin(\omega t + \psi_u + 90^\circ).$$

З останніх співвідношень випливає:

– струм в нерозгалуженій частині кола випереджає по фазі прикладену напругу на кут $90^\circ > \varphi > 0$;

– струм і напруга на активному опорі синфазні;

– струм в ємності випереджає по фазі прикладену напругу на кут 90° .

Векторна діаграма напруги і струмів для даного кола на рис. 2.35; векторна діаграма провідностей («трикутник провідностей») – на рис. 2.36:

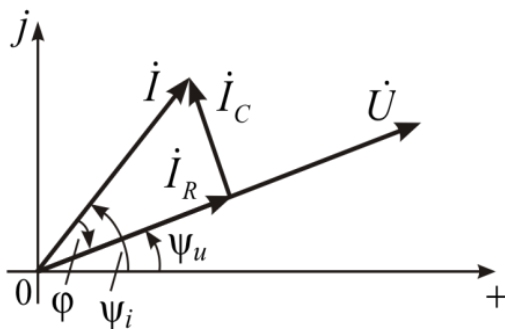


Рис. 2.35

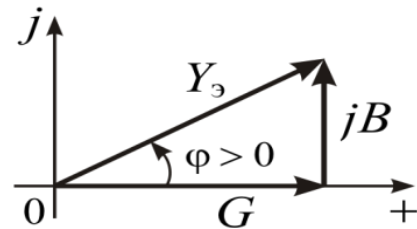


Рис. 2.36

В даному колі діють як активна, так і реактивна складові потужності:

$$P = UI \cos \varphi, P_Q = UI \sin \varphi.$$

2.5.4. Процеси в паралельному RLC-колі

Розглянемо процеси в електричному колі, утвореному паралельним з'єднанням R, L, C елементів (схема на рис. 2.37), на вході якої діє гармонічна напруга $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$.

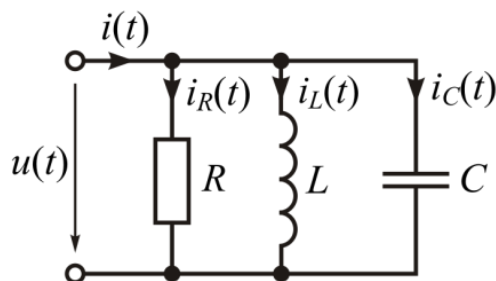


Рис. 2.37

Побудуємо комплексні схеми заміщення – вихідну і після еквівалентних перетворень (рис. 2.38).

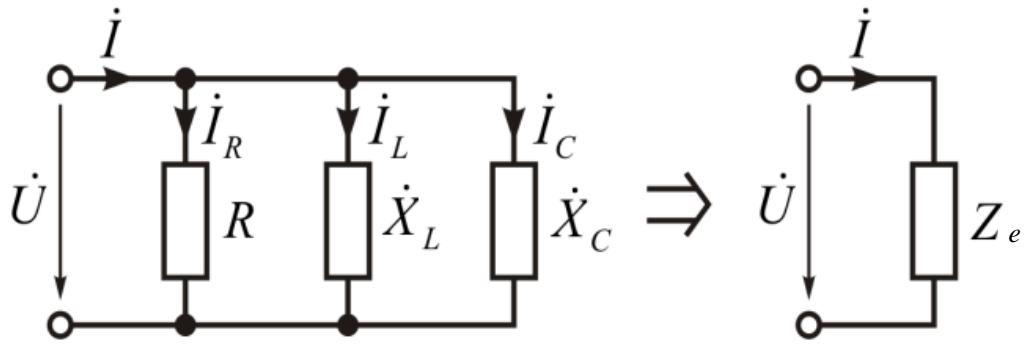


Рис. 2.38

Для визначення струмів в гілках знайдемо еквівалентну провідність:

$$Y_e = G_R + \dot{B}_L + \dot{B}_C = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = G_R + jB = ye^{j\varphi}$$

де $B = B_L - B_C = \frac{1}{\omega L} - \omega C$ – еквівалентна реактивна провідність кола;

$y = \sqrt{G_R^2 + B^2}$ – модуль комплексної провідності, або повна провідність, кола;

$$\varphi = \text{artg} \frac{B}{G_R} \text{ – аргумент комплексної провідності.}$$

Відповідно до закону Ома визначимо комплексні зображення струмів в нерозгалуженій частині схеми і в гілках:

$$\dot{I} = Y_e \dot{U} = y U e^{j(\psi_u + \varphi)} = I e^{j\psi_i}, \text{ де } I = Uy; \psi_i = \psi_u + \varphi;$$

$$\dot{I}_R = \frac{\dot{U}}{R} = \frac{U}{R} e^{j\psi_u} = I_R e^{j\psi_{iR}}, \text{ де } I_R = \frac{U}{R}, \psi_{iR} = \psi_u;$$

$$\dot{I}_L = \dot{B}_L \dot{U} = \frac{\dot{U}}{j\omega L} = \frac{U}{\omega L} e^{j(\psi_u - 90^\circ)} = I_L e^{j\psi_{iL}}, \text{ де } I_L = \frac{U}{\omega L}, \psi_{iL} = \psi_u - 90^\circ;$$

$$\dot{I}_C = \dot{B}_C \dot{U} = j\omega C \dot{U} = \omega C U e^{j(\psi_u + 90^\circ)} = I_C e^{j\psi_{iC}}, \text{ де } I_C = U\omega C, \psi_{iC} = \psi_u + 90^\circ.$$

Від комплексних зображень перейдемо до оригіналів шуканих величин:

$$i(t) = \text{Im} \left\{ \dot{I} \sqrt{2} e^{j\omega t} \right\} = U_m y \sin(\omega t + \psi_u + \varphi) = I_m \sin(\omega t + \psi_i);$$

$$i_R(t) = \text{Im} \left\{ \dot{I}_R \sqrt{2} e^{j\omega t} \right\} = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + \psi_u) = I_{mR} \sin(\omega t + \psi_{iR});$$

$$i_L(t) = \text{Im} \left\{ \dot{I}_L \sqrt{2} e^{j\omega t} \right\} = \frac{U_m}{\omega L} \sin(\omega t + \psi_u - 90^\circ) = I_{mL} \sin(\omega t + \psi_{iL});$$

$$i_c(t) = \text{Im} \left\{ \dot{I}_c \sqrt{2} e^{j \omega t} \right\} = \omega C U_m \sin(\omega t + \psi_u + 90^\circ) = I_{mC} \sin(\omega t + \psi_{iC}).$$

Отримані результати показують, що процеси в розглянутому колі залежать як від співвідношення між параметрами його елементів, так і від частоти зовнішнього впливу.

Побудуємо графіки залежності від частоти компонентів комплексної провідності (рис. 2.39):

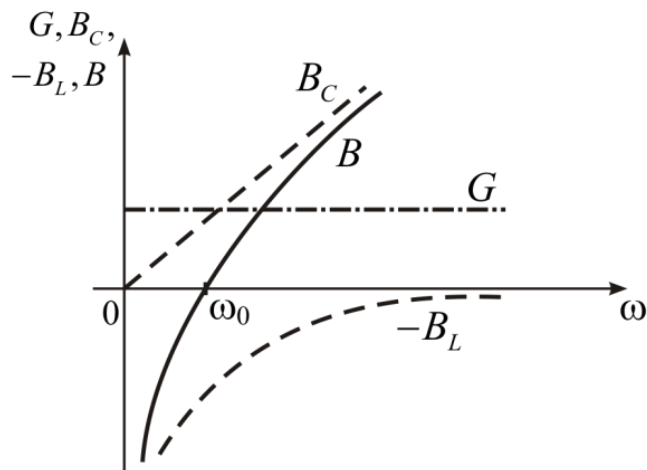


Рис. 2.39

На частоті ω_0 реактивні провідності індуктивності і ємності мають одне й те ж значення (по модулю), тобто $|-B_L| = |B_C|$. В цьому випадку еквівалентна реактивна провідність кола $B=0$, комплексна провідність – чисто активна, а повна провідність має мінімальне значення $y = y_{\min} = G_R$. Амплітуда струму I_m в нерозгалуженій частині кола при цьому мінімальна.

Режим в електричному колі, який встановлюється на частоті ω_0 , називається резонансом, а частота $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ – резонансною частотою. Залежність реактивних провідностей від частоти обумовлює частотну залежність не тільки амплітуд струмів в гілках, але і загального характеру кола.

В діапазоні частот від 0 до ω_0 еквівалентна реактивна провідність $B < 0$, так як $|B_L| > B_C$, комплексна провідність при цьому має індуктивний характер, а досліджуване коло еквівалентне паралельному RL -колу, струм в нерозгалуженій частині відстає по фазі від прикладеної до входу кола напруги, тобто, $\varphi = \psi_u - \psi_i > 0$.

На резонансній частоті ω_0 еквівалентна реактивна провідність $B=0$, так як $|B_L| = B_C$, комплексна провідність чисто активна, коло еквівалентне колу з

активною провідністю, струм в нерозгалуженій частині з прикладеною напругою синфазні, тобто, $\varphi = \psi_u - \psi_i = 0$.

В діапазоні частот від ω_0 до ∞ еквівалентна реактивна провідність $B > 0$, так як $|B_L| < B_C$, комплексна провідність при цьому має ємнісний характер, а досліджуване коло еквівалентне паралельному **RC**-колу, струм в нерозгалуженій частині випереджає по фазі прикладену до входу напругу, тобто $\varphi = \psi_u - \psi_i < 0$.

Зазначені особливості розглянутого кола наочно подамо за допомогою векторної діаграми. Проілюструємо основні прийоми її побудови. Як приклад на рис. 2.40 зображена векторна діаграма, що представляє процеси в колі з паралельним включенням R, L, C елементів для частоти $\omega > \omega_0$.

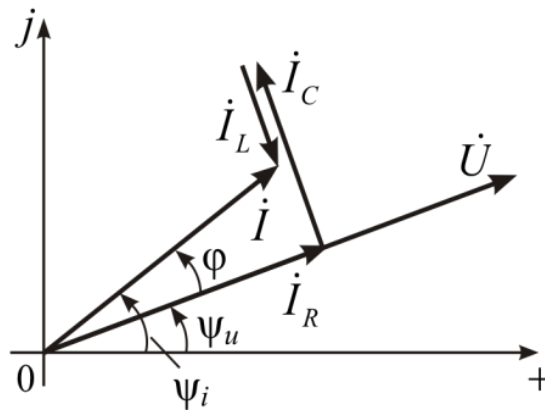


Рис. 2.40

Побудову векторної діаграми в загальному випадку доцільно починати з вектора, який зображує електричну величину, загальну для більшості елементів кола, в даному випадку з вектора, який зображує напругу \dot{U} на вході кола. Положення цього вектора на комплексній площині вибираємо довільно, так як принципово важливо встановити фазові співвідношення для певних електричних величин, а не власне їх початкові фази. Далі будуємо вектор струму \dot{I}_R в активному опорі, який збігається за напрямком з вектором напруги \dot{U} . З огляду на наступне додавання зображуючих векторів, з кінця вектора \dot{I}_R під кутом $+90^\circ$ до нього і до вектора \dot{U} (струм в ємності випереджає напругу на ній на 90°) будуємо вектор, що зображує струм в ємності \dot{I}_C . З кінця вектора \dot{I}_C під кутом -90° до вектора \dot{I}_R і до вектора \dot{U} (струм в індуктивності відстає від напруги на ній на 90°) будуємо вектор, що зображує струм в індуктивності

\dot{I}_L . Довжина вектора \dot{I}_L менше довжини вектора \dot{I}_C , так як характер реактивності на частоті $\omega > \omega_0$ – ємнісний.

Будуємо результуючий вектор \dot{I} , який зображує сумарний струм в нерозгалуженій частині кола. Цей струм випереджає напругу на вході кола на кут φ в зв'язку з ємнісним характером кола. Кожному значенню частоти відповідає певне співвідношення між реактивними провідностями, а також між струмами в індуктивності і ємності і, як наслідок, вид векторної діаграми.

2.5.5. Дільники струму

Електричне коло (ділянка електричного кола), утворена паралельним з'єднанням пасивних елементів, являє собою дільник струму (рис. 2.41).

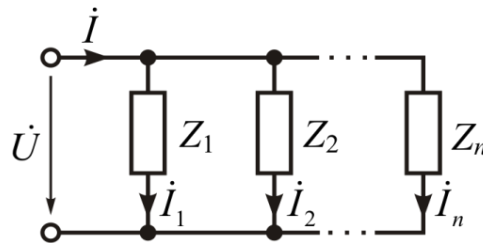


Рис. 2.41

Якщо на вході кола діє напруга, струми в її гілках обернено пропорційні опорам гілок.

Насправді
$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{Z_1}, \quad \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}}{Z_2}, \quad \dot{I}_n = \frac{\dot{U}}{Z_n}.$$

Представляючи напругу на вході кола через еквівалентний опір (провідність) $\dot{U} = Z\dot{I}_3 = \frac{\dot{I}}{Y_3}$, отримуємо в загальному вигляді формулу для розрахунку струму в будь-якій гілці, або формулу дільника струму:

$$\dot{I}_k = \frac{Y_k}{Y_e} \dot{I}, \quad \text{або} \quad \dot{I}_k = \frac{Z_e}{Z_k} \dot{I}, \quad (2.12)$$

де \dot{I} – струм в нерозгалуженій частині, або струм, що віддається джерелом.

Використовуючи загальну формулу, запишемо формули для розрахунку струмів в гілках поширеного на практиці випадку двоелементного дільника:

$$\dot{I}_{Z1} = \frac{Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2) Z_1} \dot{I} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \dot{I} \quad (2.13)$$

$$\dot{i}_{Z_2} = \frac{Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2) Z_2} \dot{i} = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \dot{i} \quad (2.14)$$

Крім розрахунку параметрів дільників струму, використання наведених співвідношень в ряді випадків дозволяє в певній мірі спростити розрахунки розгалужених електричних кіл.

3. Методи розрахунку розгалужених електричних кіл

3.1. Поняття про розрахунок розгалуженого електричного кола

Пригадаємо: якщо на коло діє зовнішній вплив, наприклад, підключається джерело напруги, то на її елементах з'являється відгук (реакція) на цей вплив у вигляді струмів і падінь напруги на елементах.

У загальному випадку розрахунок електричного кола при відомій схемі і параметрах її елементів передбачає визначення струмів і напруг, які діють на всіх ділянках кола. Якщо умовою завдання визначено характер реакції і ділянку кола, де вона реєструється, то розрахунку підлягає саме ця величина.

Для розрахунку струмів і напруг складають рівняння (системи рівнянь – для розгалужених електричних кіл), що зв'язують струми і напруги в елементах і ділянках кола. Число рівнянь у системі визначається числом невідомих струмів (напруг).

Рівняння, що описують процеси в колі, складаються у відповідності з основними законами електротехніки – законом Ома і законами Кірхгофа – першим і другим.

Розрахунок розгалуженого електричного кола може бути виконаний різними методами, зокрема:

- методом рівнянь Кірхгофа;
- методом контурних струмів;
- методом вузлових напруг;
- методом накладення;
- методом еквівалентного генератора.

Вибір раціонального методу або поєднань методів залежить від характеру завдання і особливостей досліджуваного кола.

На завершальному етапі розрахунку здійснюють перевірку результатів, використовуючи певні прийоми, зокрема, перевірку балансу струмів в вузлах, балансу напруг в контурах, балансу потужностей.

3.2. Еквівалентні перетворення схем електричних кіл

Як правило, на попередньому етапі розрахунку розгалужену, багатоконтурну схему спрощують шляхом поступової заміни окремих її ділянок простішими аж до перетворення вихідної схеми в одноконтурну. Розрахунок струму в перетвореній схемі здійснюють використовуючи безпосередньо закон Ома. На наступному етапі здійснюють поступове зворотне

перетворення схеми, аж до початкового варіанту, обчислюючи на кожному черговому кроці струм (напругу) на відповідних ділянках.

Найбільш характерними видами еквівалентних перетворень є:

– заміна послідовно і паралельно з'єднаних пасивних елементів еквівалентними;

– перетворення з'єднань виду "зірка" в з'єднання виду "трикутник" і навпаки;

– перетворення джерел напруги в джерела струму і навпаки.

Перехід від однієї моделі представлення джерела енергії до іншої здійснюють відповідно до наступних правил:

заміна джерела напруги з параметрами \dot{E} , $Z_{внE}$ на еквівалентне джерело струму з параметрами \dot{J} , $Z_{внJ}$, причому

$$\dot{J} = \frac{\dot{E}}{Z_{внE}}, \quad Z_{внJ} = Z_{внE};$$

заміна джерела струму з параметрами \dot{J} , $Z_{внJ}$ на еквівалентне джерело напруги з параметрами \dot{E} , $Z_{внE}$, причому

$$\dot{E} = \dot{J} \cdot Z_{внJ}, \quad Z_{внE} = Z_{внJ}$$

Внутрішній опір джерела напруги включається послідовно з джерелом ЕРС, а внутрішній опір джерела струму – паралельно.

Еквівалентні перетворення використовують, як правило, на початковому етапі розрахунків, як допоміжний прийом.

В окремих випадках при розрахунках розгалужених кіл користуються тільки еквівалентними перетвореннями.

3.3. Розрахунок електричних кіл методом рівнянь Кірхгофа

В основі методу лежить складання та рішення системи незалежних рівнянь, записаних відповідно до першого та другого законів Кірхгофа. Число рівнянь в системі визначається числом невідомих, або шуканих, струмів.

За першим законом Кірхгофа складають вузлові рівняння для незалежних вузлів.

Незалежні вузли – вузли, які відрізняються один від іншого хоча б однією гілкою. Число незалежних вузлів в схемі на одиницю менше їх загального числа.

За другим законом Кірхгофа складають контурні рівняння для незалежних контурів.

Незалежні контури – контури, які відрізняються один від іншого хоча б однією гілкою. Будь-який з незалежних контурів не може бути складений тільки з гілок інших контурів.

Порядок розрахунку схеми електричного кола методом рівнянь Кірхгофа:

1. Проводять топологічний аналіз схеми – визначають гілки (їх число) з невідомими струмами, вибирають незалежні вузли і незалежні контури.

2. Вибирають (умовно) напрямки струмів в гілках, напруг на елементах і напрямки обходу контурів.

3. Будують комплексну схему заміщення. Наступні розрахунки виконують в рамках комплексного методу.

4. Складають вузлові рівняння для незалежних вузлів.

5. Складають контурні рівняння для незалежних контурів.

6. Вирішують систему рівнянь, тим самим розраховують комплексні зображення шуканих струмів, далі розраховують падіння напруги на елементах схеми.

7. Перевіряють правильність розрахунків, зокрема по балансу потужностей.

8. Від розрахованих комплексних зображень струмів і напруг переходять до оригіналів.

Проілюструємо основні етапи розрахунку схеми електричного кола методом рівнянь Кірхгофа наступним прикладом.

Скласти систему рівнянь для розрахунку струмів в гілках електричного кола, комплексна еквівалентна схема якого представлена на рис. 3.1.

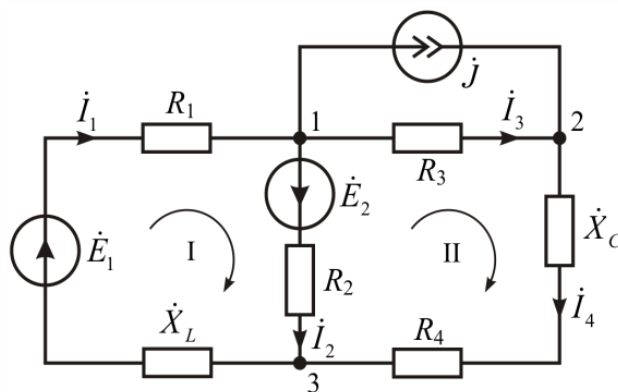


Рис. 3.1

Рішення:

1. Розрахунку підлягають струми $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$, $i_4(t)$, тобто, система повинна складатися з чотирьох рівнянь.

2. Схема має три вузли, з них незалежних – два і три контури; виберемо в якості незалежних – 1-й і 2-й вузли, а також I-й і II-й контури.

3. Умовно обрані напрямки шуканих струмів в гілках позначимо стрілками.

4. Комплексна еквівалентна схема задана в умові задачі (рис. 3.1).

5. Для обраних незалежних вузлів складемо вузлові рівняння відповідно до першого закону Кірхгофа, а для обраних незалежних контурів – контурні рівняння відповідно до другого закону Кірхгофа:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3 - \dot{J} = 0; \\ \dot{I}_3 - \dot{I}_4 + \dot{J} = 0; \\ \dot{I}_1(R_1 + \dot{X}_L) + \dot{I}_2 R_2 = \dot{E}_1 + \dot{E}_2; \\ -\dot{I}_2 R_2 + \dot{I}_3 R_3 + \dot{I}_4(R_4 + \dot{X}_C) = -\dot{E}_2. \end{cases} \quad (3.1)$$

6. Рішення отриманої системи рівнянь дає значення комплексних зображень шуканих струмів.

Наступні дії, тобто перехід до миттєвих значень струмів, а також визначення падінь напруги на елементах схеми здійснюють визначеним раніше порядком.

Метод рівнянь Кірхгофа є універсальним, тобто, може бути використаний для розрахунку схеми довільного кола. Його застосування обмежене в зв'язку з громіздкістю, пов'язаною з необхідністю вирішувати систему з великою кількістю рівнянь.

Задачу розрахунку складного кола можна істотно спростити, звівши її до рішення тільки системи контурних або тільки системи вузлових рівнянь.

Це спрощення досягається введенням нових шуканих змінних замість невідомих струмів в гілках. Такими шуканими змінними є „контурні струми“ і „вузлові напруги“.

Ці прийоми лежать в основі двох наступних методів розрахунку електричних кіл – методу контурних струмів і методу вузлових напруг.

3.4. Розрахунок електричних кіл методом контурних струмів

Метод контурних струмів (МКС) передбачає складання і рішення системи контурних рівнянь (відповідно до другого закону Кірхгофа) відносно, так званих, контурних струмів.

Контурний струм – це струм, який співпадає зі струмом власної гілки незалежного контуру. При цьому, струми в гілках, які належать суміжним контурам, являють алгебраїчні суми контурних струмів цих контурів.

Розглянемо схему, показану на рис. 3.1.

Перетворимо джерело струму в еквівалентне джерело ЕРС. Це пов'язано з тим, що другий закон Кірхгофа передбачає врахування саме цієї моделі джерел енергії (рис. 3.2).

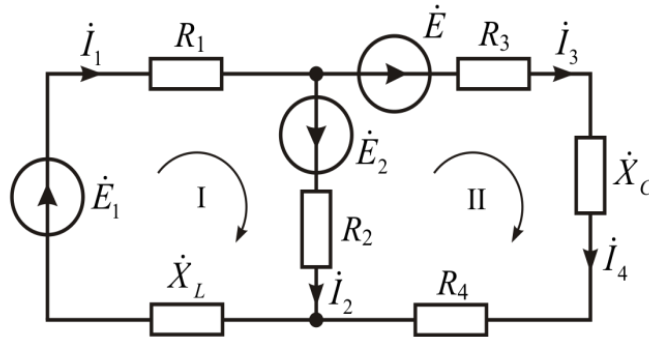


Рис. 3.2

Складемо контурні рівняння для обраних незалежних контурів, враховуючи, що $\dot{I}_3 = \dot{I}_4$:

$$\begin{cases} \dot{I}_1(R_1 + \dot{X}_L) + \dot{I}_2 R_2 = \dot{E}_1 + \dot{E}_2; \\ -\dot{I}_2 R_2 + \dot{I}_4(R_3 + R_4 + \dot{X}_C) = \dot{E} - \dot{E}_2. \end{cases} \quad (3.2)$$

Позначимо контурні струми: першого контуру – \dot{I}_{II} ; другого контуру – \dot{I}_{22} . Як правило, при розрахунках напрямки контурних струмів і напрямки обходу контурів вибирають однаковими. Власними гілками позначених контурів є: першого контуру – гілка з елементами R_1 , \dot{X}_L ; другого – гілка з елементами R_3 , R_4 , \dot{X}_C .

Відповідно до визначення контурних струмів струми в зазначених гілках можуть розглядатися як відповідні контурні струми, тобто: $\dot{I}_1 = \dot{I}_{II}$, $\dot{I}_4 = \dot{I}_{22}$.

Через контурні можуть бути виражені й інші струми, в даному випадку струм \dot{I}_2 :

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_{11} - \dot{I}_{22}.$$

Представимо в системі контурних рівнянь всі струми в гілках через контурні, і після об'єднання в отриманих рівняннях відповідних доданків отримаємо:

$$\begin{cases} \dot{I}_{11}(R_1 + R_2 + \dot{X}_L) - \dot{I}_{22}R_2 = \dot{E}_1 + \dot{E}_2; \\ -\dot{I}_{11}R_2 + \dot{I}_{22}(R_2 + R_3 + \dot{X}_C + R_4) = -\dot{E}_2 + \dot{E}. \end{cases} \quad (3.3)$$

Позначимо:

$$\begin{aligned} Z_{11} &= R_1 + R_2 + \dot{X}_L; & Z_{12} &= Z_{21} = -R_2; \\ Z_{22} &= R_2 + R_3 + \dot{X}_C + R_4; & \dot{E}_{11} &= \dot{E}_1 + \dot{E}_2; \\ & & \dot{E}_{22} &= -\dot{E}_2 + \dot{E}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Тут: Z_{11} , Z_{22} – власні опори контурів, першого і другого відповідно; Z_{12} , Z_{21} – взаємний опір двох суміжних контурів, в даному випадку першого і другого (другого і першого); \dot{E}_{11} , \dot{E}_{22} – контурні ЕРС.

Зауважимо, якщо напрями контурних струмів усіх контурів вибрані однаковими, взаємні опори в системі контурних рівнянь враховують зі знаком «мінус».

Система контурних рівнянь з урахуванням введених позначень набуває вигляду:

$$\begin{cases} Z_{11}\dot{I}_{11} + Z_{12}\dot{I}_{22} = \dot{E}_{11}; \\ Z_{21}\dot{I}_{11} + Z_{22}\dot{I}_{22} = \dot{E}_{22}. \end{cases} \quad (3.5)$$

Ця ж система рівнянь в матричній формі має вигляд:

$$\begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{I}_{11} \\ \dot{I}_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{E}_{11} \\ \dot{E}_{22} \end{vmatrix}, \quad (3.6)$$

де:

$$\begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix} \quad (3.7)$$

– матриця контурних опорів (МКО);

$$\begin{vmatrix} \dot{I}_{11} \\ \dot{I}_{22} \end{vmatrix} - \text{матриця контурних струмів (МКС);} \quad (3.8)$$

$$\begin{vmatrix} \dot{E}_{11} \\ \dot{E}_{22} \end{vmatrix} - \text{матриця контурних ЕРС (МКЕ).} \quad (3.9)$$

Система рівнянь може бути вирішена будь-яким з відомих методів, зокрема, за правилом Крамера:

$$\dot{I}_{kk} = \frac{\Delta_k}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^m \dot{E}_{ii} \Delta_{ik}, \quad (3.10)$$

де \dot{I}_{kk} – шуканий контурний струм;

Δ – визначник матриці контурних опорів;

Δ_k – визначник матриці контурних опорів, в якій k -й стовпчик замінений матрицею контурних ЕРС;

Δ_{ik} – алгебраїчне доповнення елемента, який розміщений на перетині i -го рядка і k -го стовпчика матриці Δ_k ;

\dot{E}_{ii} – контурна ЕРС i -го контуру.

Для розглянутого прикладу:

$$\dot{I}_{11} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^2 \dot{E}_{ii} \Delta_{i1}; \quad \dot{I}_{22} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^2 \dot{E}_{ii} \Delta_{i2}. \quad (3.11)$$

Від контурних струмів переходимо до струмів в гілках:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{11}; \quad \dot{I}_4 = \dot{I}_{22}; \quad \dot{I}_2 = \dot{I}_{11} - \dot{I}_{22}.$$

Якщо на початковому етапі розрахунків здійснено перетворення джерел струму в еквівалентні джерела ЕРС, то струм в гілці, паралельній джерелу струму у вихідній схемі, визначають з вузлового рівняння, складеного за першим законом Кірхгофа, для перетвореної ділянки. Так, в розглянутому прикладі для визначення струму \dot{I}_3 складають рівняння для другого вузла $\dot{I}_3 + \dot{J} - \dot{I}_4 = 0$ і вирішують його відносно \dot{I}_3 , а саме, $\dot{I}_3 = \dot{I}_4 - \dot{J}$.

З огляду на викладене, сформулюємо алгоритм розрахунку електричного кола методом контурних струмів:

1. Скласти комплексну еквівалентну схему заданого електричного кола, перетворюючи джерела струму в еквівалентні джерела ЕРС.

2. Вибрати незалежні контури, обрати і позначити напрямки контурних струмів.
3. Розрахувати власні і взаємні опори контурів, а також контурні ЕРС.
4. Скласти систему контурних рівнянь відносно контурних струмів і вирішити її.
5. Через контурні струми визначити струми в гілках схеми.
6. Перевірити правильність розрахунків за балансом потужностей.
7. Від комплексних зображень знайдених величин перейти до оригіналів (миттєвих значень).

3.5. Розрахунок електричних кіл методом вузлових напруг

Метод вузлових напруг (МВН) передбачає вирішення системи вузлових рівнянь, складених відповідно до першого закону Кірхгофа відносно вузлових напруг.

Вузлові напруги – це напруги незалежних вузлів відносно базисного, або опорного, вузла.

Таким чином, число рівнянь в системі дорівнює числу незалежних вузлів.

Додатній напрямок вузлової напруги на підготовленій до розрахунку схемі, як правило, позначають стрілкою в напрямку від розглянутого вузла до базисного. За розрахованими вузловими напругами визначають шукані струми в гілках електричного кола.

Для з'ясування особливостей методу звернемося до розглянутої раніше схеми (рис. 3.1) і перетворимо джерела ЕРС в еквівалентні джерела струму (перший закон Кірхгофа враховує джерела енергії, представлені цією моделлю):

$$\dot{j}_1 = \frac{\dot{E}_1}{Z_{e1}} = \frac{\dot{E}_1}{R_1 + \dot{X}_L}; \quad \dot{j}_2 = \frac{\dot{E}_1}{R_2}$$

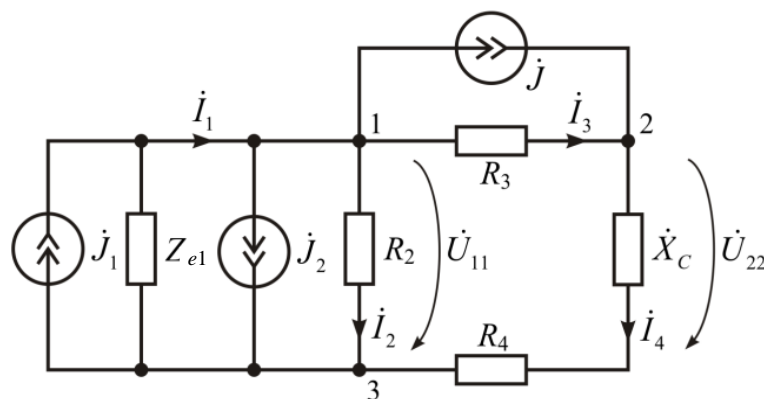


Рис. 3.3

З трьох вузлів схеми перший і другий виберемо як незалежні, а третій вузол – в якості базисного. Складемо систему вузлових рівнянь для незалежних вузлів:

$$\begin{cases} -\dot{U}_{11}Y_{e1} - \dot{U}_{11}Y_2 - (\dot{U}_{11} - \dot{U}_{22})Y_3 + \dot{J}_1 - \dot{J}_2 - \dot{J} = 0; \\ (\dot{U}_{11} - \dot{U}_{22})Y_3 - \dot{U}_{22}Y_{e2} + \dot{J} = 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

Тут враховано, що:

$$Y_{e1} = \frac{1}{R_1 + \dot{X}_L}; Y_2 = \frac{1}{R_2}; Y_3 = \frac{1}{R_3}; Y_{e2} = \frac{1}{R_4 + \dot{X}_C}.$$

Розкриваючи дужки і об'єднуючи відповідні складові, отримуємо систему рівнянь в наступному вигляді:

$$\begin{cases} \dot{U}_{11}(Y_{e1} + Y_2 + Y_3) - \dot{U}_{22}Y_3 = \dot{J}_1 - \dot{J}_2 - \dot{J}; \\ -\dot{U}_{11}Y_3 + \dot{U}_{22}(Y_3 + Y_{e2}) = \dot{J}. \end{cases} \quad (3.13)$$

Введемо позначення:

$$Y_{11} = Y_{e1} + Y_2 + Y_3 - \text{власна провідність першого вузла}; \quad (3.14)$$

$$Y_{22} = Y_{e2} + Y_3 - \text{власна провідність другого вузла}; \quad (3.15)$$

$$Y_{12} = Y_{21} = -Y_3 - \text{взаємна провідність першого і другого (другого і першого) вузлів}; \quad (3.16)$$

$$\dot{J}_{11} = \dot{J}_1 - \dot{J}_2 - \dot{J} - \text{вузловий струм першого вузла}; \quad (3.17)$$

$$\dot{J}_{22} - \dot{J} - \text{вузловий струм другого вузла}. \quad (3.18)$$

Власна провідність незалежного вузла дорівнює сумі провідностей гілок, які сходяться в даному вузлі.

Взаємна провідність двох незалежних вузлів дорівнює сумі провідностей гілок, які з'єднують ці вузли. Якщо напрямок вузлових напруг щодо базисного вузла вибрано однаковим (як правило, так і діють на практиці), взаємна провідність у вузлових рівняннях враховується зі знаком «-».

Вузловий струм незалежного вузла дорівнює алгебраїчній сумі струмів всіх джерел струму, які з'єднані з цим вузлом. Струми джерел, спрямовані «до вузла», враховуються зі знаком «+», струми джерел, спрямовані «від вузла», враховуються зі знаком «-».

З урахуванням введених позначень система вузлових рівнянь набуває канонічного вигляду:

$$\begin{cases} Y_{11}\dot{U}_{11} + Y_{12}\dot{U}_{22} = \dot{J}_{11}; \\ Y_{21}\dot{U}_{11} + Y_{22}\dot{U}_{22} = \dot{J}_{22}. \end{cases} \quad (3.19)$$

Ця ж система в матричній формі:

$$\begin{vmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{U}_{11} \\ \dot{U}_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{J}_{11} \\ \dot{J}_{22} \end{vmatrix} \quad (3.20)$$

де

$$\begin{vmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{vmatrix} - \text{матриця вузлових провідностей (МВП);} \quad (3.21)$$

$$\begin{vmatrix} \dot{U}_{11} \\ \dot{U}_{22} \end{vmatrix} - \text{матриця вузлових напруг (МВН);} \quad (3.22)$$

$$\begin{vmatrix} \dot{J}_{11} \\ \dot{J}_{22} \end{vmatrix} - \text{матриця вузлових струмів (МВС).} \quad (3.23)$$

Розв'язують систему рівнянь будь-яким з відомих способів або прийомів, зокрема, за формулою Крамера:

$$\dot{U}_{kk} = \frac{\Delta_k}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^m \dot{J}_{ii} \Delta_{ik}, \quad (3.24)$$

де \dot{U}_{kk} – шукана вузлова напруга;

Δ – визначник матриці вузлових провідностей;

Δ_k – визначник матриці вузлових провідностей, в якій k -й стовпчик замінений матрицею вузлових струмів;

Δ_{ik} – алгебраїчне доповнення елемента, який розміщений на перетині i -го рядка і k -го стовпчика матриці Δ_k ;

\dot{J}_{ii} – вузловий струм i -го вузла.

Для розрахунку струмів в гілках повертаються до вихідної схеми. Струми в гілках, в яких здійснювалися перетворення джерел ЕРС в еквівалентні джерела струму, визначають з урахуванням вузлових напруг, а також ЕРС джерел. Для перетворених ділянок складають рівняння за другим законом Кірхгофа.

У загальному випадку розрахункова формула має вид:

$$\dot{I}_k = \frac{\dot{U}_{kk} \pm \dot{E}_k}{Z_k}. \quad (3.25)$$

Визначимо струми в гілках розглянутої схеми:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{II} + (Z_1 + \dot{X}_L)\dot{I}_1 &= \dot{E}_1 \Rightarrow \dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_1 - \dot{U}_{II}}{Z_1 + \dot{X}_L}; \\ \dot{U}_{II} - Z_2\dot{I}_2 &= -\dot{E}_2 \Rightarrow \dot{I}_2 = \frac{\dot{E}_2 + \dot{U}_{II}}{Z_2}. \end{aligned}$$

Струми в гілках, які не піддавалися еквівалентним перетворенням, розраховують через знайдені вузлові напруги і опір гілок, а саме:

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_{II} - \dot{U}_{22}}{Z_3}; \quad \dot{I}_4 = \frac{\dot{U}_{22}}{\dot{X}_C + R_4}. \quad (3.26)$$

Узагальнюючи отримані результати, визначимо послідовність дій при реалізації розглянутого методу.

1. Складають комплексну схему заміщення, при цьому джерела ЕРС замінюють еквівалентними джерелами струму.
2. Вибирають незалежні вузли, вибирають і позначають напрямки вузлових напруг.
3. Розраховують власні і взаємні вузлові провідності, а також вузлові струми.
4. Складають і вирішують систему вузлових рівнянь.
5. Повертаються до вихідної схеми і розраховують струми в гілках.
6. Перевірка правильності розрахунків за балансом потужностей.
7. Від комплексних зображень розрахованих струмів переходять до оригіналів.

3.6. Розрахунок електричних кіл методом накладання

В основі методу накладання лежить принцип накладення, або принцип суперпозиції, сутність якого полягає в тому, що реакція лінійної фізичної системи на суму однотипних зовнішніх впливів дорівнює сумі реакцій на кожний вплив окремо.

Стосовно лінійного електричного кола принцип накладення зводиться до наступного: реакція лінійного електричного кола на суму однотипних зовнішніх впливів дорівнює сумі реакцій на кожний вплив окремо.

Одним із прикладів використання принципу суперпозиції є розрахунок електричних кіл, у складі яких діють декілька однотипних джерел живлення.

Порядок розрахунку електричних кіл методом накладення:

1. Вихідна схема електричного кола представляється сукупністю часткових схем, в кожній з яких діє одне джерело живлення. Інші джерела зі схеми виключаються: затискачі джерел ЕРС з'єднуються накоротко, джерела струму замінюють розривом; при цьому в схемі залишають внутрішні опори джерел.

2. Відповідно до загальноприйнятих правил розраховуються струми (напруги) в кожній з часткових схем.

3. Шукані струми (напруги) у вихідній схемі обчислюють як алгебраїчну суму часткових струмів (напруг).

3.7. Розрахунок електричних кіл методом еквівалентного генератора

Відомо, що одним з можливих варіантів побудови схем є представлення досліджуваного електричного кола або його ділянок у вигляді двополюсника, тобто кола з двома зовнішніми затискачами, або полюсами. Двополюсники можуть бути пасивними і активними. Пасивні двополюсники не містять незалежних джерел енергії, на їх зовнішніх затискачах відсутня напруга.

Активні двополюсники містять хоча б одне джерело енергії, а на їх зовнішніх затискачах діє певна різниця потенціалів.

Активні двополюсники характеризуються такими параметрами:

– напруга холостого ходу \dot{U}_{xx} – напруга, яка діє на розімкнених затискачах двополюсника;

– струм короткого замикання $\dot{I}_{кз}$ – струм в гілці, яка закорочує зовнішні затискачі двополюсника;

– внутрішній опір $Z_{вн}$ – опір двополюсника відносно зовнішніх затискачів; при розрахунках внутрішнього опору двополюсника джерела живлення зі схеми виключають – джерела ЕРС закорочують, а джерела струму розмикають.

Метод еквівалентного генератора заснований на теоремі про еквівалентний генератор (теоремі Гельмгольца-Тевенена): будь-який активний двополюсник може бути представлений еквівалентним генератором з електрорушійною силою, яка дорівнює напрузі холостого ходу, і внутрішнім опором, рівним внутрішньому опору двополюсника.

Метод еквівалентного генератора використовують у випадках, коли в складному розгалуженому колі необхідно визначити струм в одній гілці з

опором Z_n , який представляє собою навантаження кола. При реалізації методу зовнішню, по відношенню до гілки з шуканим струмом, частину кола представляють у вигляді активного двополюсника.

Порядок розрахунку електричного кола методом еквівалентного генератора:

1. Визначають ЕРС еквівалентного генератора. Для цього вилучають зі схеми гілку з опором Z_n , струм в якій необхідно визначити, і будь-яким раціональним способом розраховують напругу холостого ходу, тобто напругу на розімкнених затискачах кола, яке утворилося.

2. Визначають внутрішній опір еквівалентного генератора. Для цього закорочують затискачі джерел ЕРС, розмикають гілки з джерелами струму (внутрішні опори джерел залишають) і будь-яким зручним способом визначають еквівалентний опір відносно розімкнених затискачів кола.

3. Розраховують шуканий струм за формулою:

$$\dot{I}_n = \frac{\dot{U}_{xx}}{Z_{вн} + Z_n}. \quad (3.27)$$

4. Комплексні функції та частотні характеристики лінійних електричних кіл

4. 1. Комплексна функція: визначення, класифікація

Комплексною функцією (комплексною частотною характеристикою) лінійного електричного кола, яке не містить незалежних джерел енергії, називається відношення комплексного зображення реакції (вихідної величини) до комплексного зображення зовнішньої дії (вхідної величини) в усталеному режимі.

$$K(j\omega) = \frac{\dot{X}_m(t)}{\dot{F}_m(t)} = \frac{\dot{X}_m}{\dot{F}_m} = \frac{\dot{X}}{\dot{F}} = \frac{X \cdot e^{j\psi_X}}{F \cdot e^{j\psi_F}} \quad (4.1)$$

де: $\dot{X}_m(t)$, \dot{X}_m , \dot{X} – комплексне миттєве значення, комплексна амплітуда, комплексне діюче значення (відповідно) реакції;

$\dot{F}_m(t)$, \dot{F}_m , \dot{F} – аналогічні комплексні зображення зовнішньої дії;

ψ_X – початкова фаза реакції;

ψ_F – початкова фаза впливу.

Домовимось надалі в якості комплексних зображень струмів і напруг використовувати їх комплексні діючі значення.

Комплексні функції в теорії електричних кіл, зокрема в частотному аналізі, представляють важливий інструмент. В подальшому ми переконаємося, що комплексна функція, з одного боку, сама по собі містить відомості про частотні властивості кола, з іншого боку, дозволяє визначити реакцію кола на довільну гармонічну дію, тобто $\dot{X} = \dot{F} \cdot K(j\omega)$

Комплексні функції прийнято класифікувати за наступними ознаками.

Залежно від місця визначення реакції комплексні функції поділяють на вхідні та передавальні.

Вхідна комплексна функція – відношення комплексних зображень реакції і дії, якщо реакція розглядається на вході, тобто на ділянці кола, де прикладена зовнішня дія.

Передавальна комплексна функція – відношення комплексних зображень реакції і дії, якщо реакція розглядається на виході кола.

Передавальна функція характеризує "передачу" кола.

Залежно від того, які електричні величини розглядаються в якості вхідних і вихідних, передавальні комплексні функції поділяють на комплексні коефіцієнти передачі, комплексні передавальні опір і провідність.

Представимо лінійне електричне коло, що не містить незалежні джерела, в загальному вигляді і позначимо на виділених вхідних і вихідних затискачах струми і напруги (рис. 4.1). Розглядаючи різні варіанти дії і реакції, перерахуємо різновиди комплексних функцій.

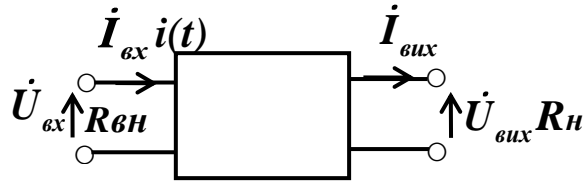


Рис. 4.1.

Комплексна вхідна провідність:

$$Y_{\text{вх}} = \frac{\dot{I}_{\text{вх}}}{\dot{U}_{\text{вх}}} = \frac{I_{\text{вх}}}{U_{\text{вх}}} \cdot e^{j(\psi_i - \psi_u)} \quad (4.2)$$

Комплексний вхідний опір:

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_{\text{вх}}}{\dot{I}_{\text{вх}}} = \frac{U_{\text{вх}}}{I_{\text{вх}}} \cdot e^{j(\psi_u - \psi_i)} \quad (4.3)$$

Комплексний коефіцієнт передачі напруги:

$$K_U(j\omega) = \frac{\dot{U}_{\text{вих}}}{\dot{U}_{\text{вх}}} = \frac{U_{\text{вих}}}{U_{\text{вх}}} \cdot e^{j(\psi_{u_{\text{вих}}} - \psi_{u_{\text{вх}}})} \quad (4.4)$$

Комплексний коефіцієнт передачі струму:

$$K_I(j\omega) = \frac{\dot{I}_{\text{вих}}}{\dot{I}_{\text{вх}}} = \frac{I_{\text{вих}}}{I_{\text{вх}}} \cdot e^{j(\psi_{i_{\text{вих}}} - \psi_{i_{\text{вх}}})} \quad (4.5)$$

Комплексна передавальна провідність:

$$Y_{\text{пер}}(j\omega) = \frac{\dot{I}_{\text{вих}}}{\dot{U}_{\text{вх}}} = \frac{I_{\text{вих}}}{U_{\text{вх}}} \cdot e^{j(\psi_{i_{\text{вих}}} - \psi_{u_{\text{вх}}})} \quad (4.6)$$

Комплексний передавальний опір

$$Z_{\text{пер}}(j\omega) = \frac{\dot{U}_{\text{вих}}}{\dot{I}_{\text{вх}}} = \frac{U_{\text{вих}}}{I_{\text{вх}}} \cdot e^{j(\psi_{u_{\text{вих}}} - \psi_{i_{\text{вх}}})} \quad (4.7)$$

4.2. Частотні характеристики

Відповідно до загальних властивостей комплексних чисел будь-яка з наведених вище комплексних функцій може бути представлена в показниковій і алгебраїчній формах:

$$K(j\omega) = K(\omega) \cdot e^{j\Phi(\omega)} = A(\omega) + jB(\omega),$$

де: $K(\omega) = \text{mod}[K(j\omega)] = \sqrt{[A(\omega)]^2 + [B(\omega)]^2}$ – модуль комплексної функції;

$$\Phi(\omega) = \text{arg}[K(j\omega)] = \text{arctg} \frac{B(\omega)}{A(\omega)} \text{ – аргумент комплексної функції;}$$

$A(\omega) = \text{Re}[K(j\omega)] = K(\omega) \cdot \cos\Phi(\omega)$ – дійсна частина комплексної функції;

$B(\omega) = \text{Im}[K(j\omega)] = K(\omega) \cdot \sin\Phi(\omega)$ – уявна частина комплексної функції.

Кожен компонент комплексної функції, будучи функцією частоти, характеризує певні частотні властивості кола, тобто визначає певну частотну характеристику.

Введемо поняття частотних характеристик кіл.

Амплітудно-частотна характеристика (АЧХ) – залежність від частоти модуля комплексної функції. АЧХ відображає зміну співвідношення між амплітудами (діючими значеннями) вихідного і вхідного коливань при зміні частоти вхідного.

$$K(\omega) = \frac{X}{F} \quad (4.8)$$

Фазо-частотна характеристика (ФЧХ) – залежність від частоти аргументу комплексної функції. ФЧХ показує зміну початкової фази коливання на виході кола щодо початкової фази коливання на вході при зміні частоти вхідного коливання.

$$\Phi(\omega) = \psi_X - \psi_F \quad (4.9)$$

Дійсна частотна характеристика (ДЧХ) – залежність від частоти дійсної частини комплексної функції.

Уявна частотна характеристика (УЧХ) – залежність від частоти уявної частини комплексної функції.

Названі пари частотних характеристик графічно зображують у прямокутній системі координат.

У зв'язку з тим, що комплексна функція об'єднує амплітудно-частотну і фазо-частотну, а також дійсну частотну і уявну частотну характеристики, вона може розглядатися як амплітудно-фазова характеристика. Графік амплітудно-фазової характеристики будується на комплексній площині.

4.3. Розрахунок комплексних функцій

Розрахунок комплексних функцій простих кіл може бути виконаний безпосередньо за законами Ома і Кірхгофа.

Проілюструємо порядок розрахунку комплексних функцій простих кіл на прикладі дільника напруги.

Еквівалентна комплексна схема кола представлена на рис. 4.2

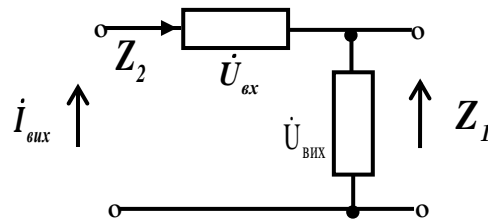


Рис. 4.2

Запишемо вирази, які визначають комплексні функції:

$$\text{вхідна провідність } Y_{\text{вх}}(j\omega) = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{U}_1}{(Z_1 + Z_2) \cdot \dot{U}_1} = \frac{1}{Z_1 + Z_2}; \quad (4.10)$$

$$\text{вхідний опір } Z_{\text{вх}}(j\omega) = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{U}_1 (Z_1 + Z_2)}{\dot{U}_1} = Z_1 + Z_2; \quad (4.11)$$

коефіцієнт передачі напруги:

$$K_U(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{I}_1 \cdot Z_2}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{U}_1 \cdot Z_2}{(Z_1 + Z_2) \cdot \dot{U}_1} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (4.12)$$

та інші.

У разі розгалужених (складних) кіл для розрахунку струмів і напруг, що входять до складу комплексних функцій, використовують відомі універсальні методи розрахунку, зокрема, метод контурних струмів і метод вузлових напруг.

Розрахунок комплексних функцій методом контурних струмів

Представимо електричне коло комплексною еквівалентною схемою в загальному вигляді, виділимо в ній в якості незалежних контурів – вхідний,

в якому включене джерело (дія), і вихідний, в якому включене навантаження і реєструється реакція, (рис. 4.3).

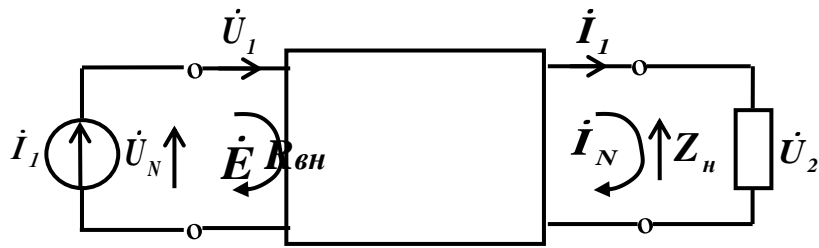


Рис. 4.3

Система контурних рівнянь в загальному випадку має вигляд:

$$\begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1N} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{N1} & Z_{N2} & \dots & Z_{NN} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dots \\ \dot{I}_N \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{U}_1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{vmatrix} \quad (4.13)$$

Визначаючи через параметри матриць струм в першому (вхідному) контурі $\dot{I}_1 = \dot{U}_1 \cdot \frac{\Delta_{11}}{\Delta}$, струм в N -му (вихідному) контурі $\dot{I}_N = \dot{U}_1 \cdot \frac{\Delta_{1N}}{\Delta}$, з огляду на опір навантаження Z_n , легко розрахувати усі різновиди комплексних функцій:

вхідна провідність: $Y_{ex}(j\omega) = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta}; \quad (4.14)$

вхідний опір: $Z_{ex}(j\omega) = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\Delta}{\Delta_{11}}; \quad (4.15)$

коефіцієнт передачі напруги:

$$K_U(j\omega) = \frac{\dot{U}_N}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{I}_N \cdot Z_n}{\dot{U}_1} = Z_n \cdot \frac{\Delta_{1N}}{\Delta} \quad (4.16)$$

коефіцієнт передачі струму: $K_I(j\omega) = \frac{\dot{I}_N}{\dot{I}_1} = \frac{\Delta_{1N}}{\Delta_{11}} \quad (4.17)$

передавальний опір: $Z_{nep}(j\omega) = \frac{\dot{U}_N}{\dot{I}_1} = Z_n \cdot \frac{\Delta_{1N}}{\Delta_{11}} \quad (4.18)$

передавальну провідність: $Y_{nep}(j\omega) = \frac{\dot{I}_N}{\dot{U}_1} = \frac{\Delta_{1N}}{\Delta}. \quad (4.19)$

Розрахунок комплексних функцій методом вузлових напруг

Зобразимо комплексну еквівалентну схему кола, задамо в ній вхідний (1) і вихідний (N) вузли (рис. 4.4)

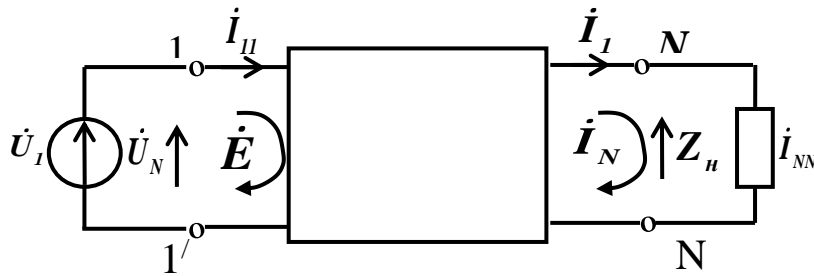


Рис. 4.4

У загальному випадку система вузлових рівнянь має вигляд:

$$\begin{vmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1N} \\ Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{N1} & Y_{N2} & \dots & Y_{NN} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dots \\ \dot{U}_N \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} j_1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{vmatrix}$$

Розв'язуючи систему, знайдемо напругу на вході і на виході кола:

$$\dot{U}_1 = j_1 \cdot \frac{\Delta_{11}}{\Delta}, \quad \dot{U}_N = j_1 \cdot \frac{\Delta_{1N}}{\Delta}$$

Використовуючи вузлові напруги \dot{U}_1 , \dot{U}_N та опір навантаження Z_n , запишемо вирази для комплексних функцій:

вхідна провідність $Y_{ex}(j\omega) = \frac{j_1}{\dot{U}_1} = \frac{\Delta}{\Delta_{11}}$ (4.20)

вхідний опір $Z_{ex}(j\omega) = \frac{\dot{U}_1}{j_1} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta}$; (4.21)

коефіцієнт передачі напруги $K_U(j\omega) = \frac{\dot{U}_N}{\dot{U}_1} = \frac{\Delta_{1N}}{\Delta_{11}}$; (4.22)

коефіцієнт передачі струму $K_I(j\omega) = \frac{i_N}{j_1} = \frac{1}{Z_n} \cdot \frac{\Delta_{1N}}{\Delta}$; (4.23)

передавальний опір $Z_{nep}(j\omega) = \frac{\dot{U}_N}{j_1} = \frac{\Delta_{1N}}{\Delta}$; (4.24)

передавальна провідність

$$Y_{nep}(j\omega) = \frac{\dot{I}_N}{\dot{U}_1} = \frac{1}{Z_n} \cdot \frac{\Delta_{IN}}{\Delta_{II}}. \quad (4.25)$$

Отримані вирази свідчать про те, що комплексні функції кола залежать від схеми, параметрів її елементів і навантаження. Вони можуть бути розраховані через параметри матриці контурних опорів або матриці вузлових провідностей кола і параметри навантаження.

При експериментальному визначенні частотних характеристик на вхід досліджуваного кола подають коливання з незмінними амплітудою та початковою фазою і частотою, що змінюється. Кожному значенню частоти будуть відповідати певні амплітуда і фаза коливань на виході. Співвідношення амплітуд і початкових фаз вихідного і вхідного коливань визначають амплітудно-частотну і фазо-частотну характеристики кола.

4.4. Фільтрація коливань в електричних колах

Одним з найбільш переконливих прикладів практичного використання в радіотехніці частотних властивостей електричних кіл, які містять реактивні елементи, є здійснення з їх допомогою частотної вибіркової, або частотної фільтрації коливань. Під частотною вибірковістю системи, пристрою розуміють їх властивість виділяти з коливань всієї сукупності частот коливання заданої частоти або заданого діапазону частот. При цьому в певному діапазоні частот, який називається смугою пропускання, коливання передаються колом з невеликим загасанням (з великим коефіцієнтом передачі), на інших ділянках частотного діапазону коливання передаються з великим загасанням (з малим коефіцієнтом передачі). Ці ділянки відповідають смузі затримування.

Загальноприйнятим є таке визначення:

Смуга пропускання кола – діапазон частот, на границях якого потужність коливань на виході кола зменшується в два рази, а напруга і струм – в $\sqrt{2}$ раз у порівнянні з максимальними значеннями.

Частоти, які відповідають границям смуги пропускання, називаються **граничними частотами**, або **частотами зрізу**.

Отже, будь-яке електричне коло, в складі якого є хоча б один реактивний елемент, – це **фільтруюче по частоті коло**, або **фільтр**.

Однак, ефективність фільтрації різних за складом і структурою кіл далеко не однакова і визначається в основному їх амплітудно-частотними характеристиками. Очевидно, що ідеальні вибіркові властивості має коло,

амплітудно-частотна характеристика якого має прямокутну форму, причому, в межах смуги пропускання коефіцієнт передачі кола повинен бути максимальним, а в смугі затримування – дорівнювати нулю.

Залежно від взаємного положення смуги пропускання і смуги затримування уздовж частотної вісі (шкали частот) фільтри поділяють на фільтри нижніх частот, фільтри верхніх частот, смугові фільтри і загороджувальні фільтри.

На рис. 4.5 наведені нормовані амплітудно-частотні характеристики (у вигляді залежностей від частоти модуля нормованого комплексного коефіцієнта передачі напруги) ідеальних фільтрів

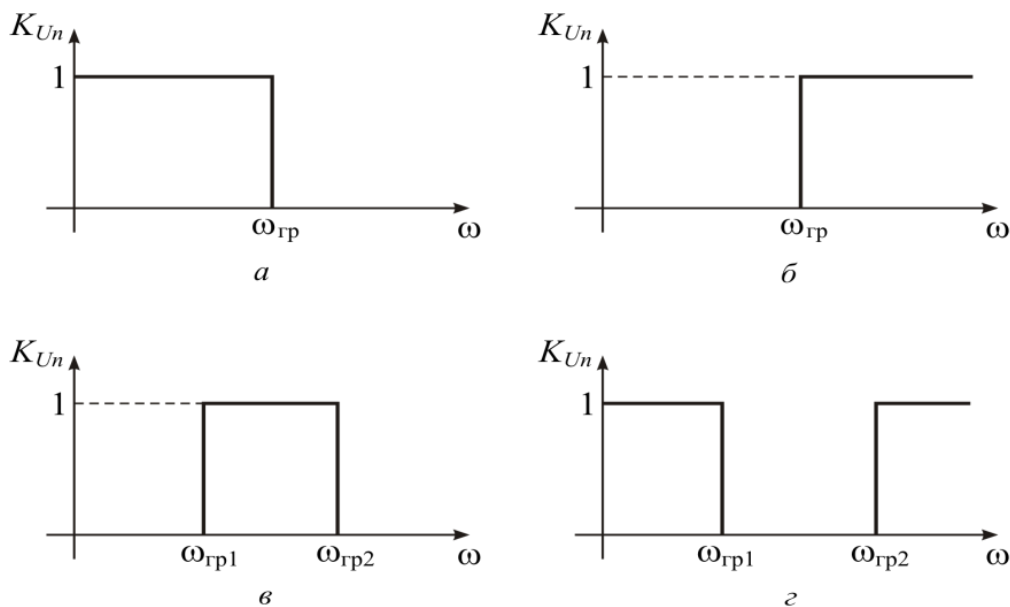


Рис. 4.5

Фільтр нижніх частот (ФНЧ) – електричне коло, смуга пропускання якого лежить в діапазоні $\Delta\omega_n = 0 \dots \omega_{зп}$, а смуга затримування – $\Delta\omega_з = \omega_{зп} \dots \infty$. Ідеальна амплітудно-частотна характеристика ФНЧ зображена на рисунку 4.5.а.

Фільтр верхніх частот (ФВЧ) – електричне коло, смуга пропускання якого лежить в межах $\Delta\omega_n = \omega_{зп} \dots \infty$, а смуга затримування $\Delta\omega_з = 0 \dots \omega_{зп}$. Ідеальна амплітудно-частотна характеристика ФВЧ зображена на рисунку 4.5.б.

Смуговий фільтр (СФ) – електричне коло, смуга пропускання якого лежить в межах $\Delta\omega_n = \omega_{зп1} \dots \omega_{зп2}$, а смуга затримування $\Delta\omega_з = 0 \dots \omega_{зп1}; \omega_{зп2} \dots \infty$. Ідеальна амплітудно-частотна характеристика СФ зображена на рисунку 4.5.в.

Загороджувальний фільтр (ЗФ) – електричне коло, смуга пропускання якого лежить в межах $\Delta\omega_n = 0 \dots \omega_{zp1}; \omega_{zp2} \dots \infty$, а смуга затримування $\Delta\omega_z = \omega_{zp1} \dots \omega_{zp2}$ (рис. 4.5.г).

Задача створення фільтрів з характеристиками, які наближаються до ідеальних, вирішується в спеціальному розділі теорії кіл – теорії фільтрів.

У той же час, ряд простих, так званих типових, кіл мають частотно-вибіркові властивості, які відповідають фільтрам різних типів.

Далі розглянемо частотні властивості і основні характеристики найбільш поширених у радіотехнічній практиці типових кіл.

4.5. Частотні характеристики RC -кіл

Розглянемо коло, яке містить послідовно з'єднані елементи **R** і **C**.

Частотні властивості цього кола найбільш зручно досліджувати через комплексний коефіцієнт передачі напруги:

$$K_U(j\omega) = K_U(\omega) e^{j\Phi(\omega)} = \frac{\dot{U}_{вих}}{\dot{U}_{вх}} = \frac{U_{вих}}{U_{вх}} \cdot e^{j(\psi_{u_{вих}} - \psi_{u_{вх}})} \quad (4.26)$$

Можливі два варіанти ввімкнення даної схеми (рис. 4.6):

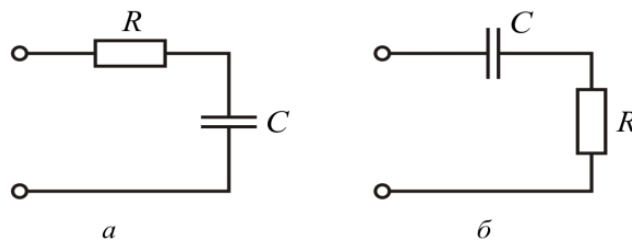


Рис. 4.6

по-перше, вихідна напруга знімається з ємності (рис.4.6, а), тобто:

$$Z_1 = R, \quad Z_2 = \frac{1}{j\omega C};$$

по-друге, вихідна напруга знімається з опору (рис.4.6, б), тобто:

$$Z_1 = \frac{1}{j\omega C}, \quad Z_2 = R.$$

Для першого варіанту схеми (рис. 4.6, а) комплексний коефіцієнт передачі напруги

$$K_{UC}(j\omega) = \frac{\dot{U}_C}{\dot{U}_{вх}} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{1}{1 + j\omega\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \cdot e^{-j \arctg \omega\tau} \quad (4.27)$$

$$\text{де: } \tau = R \cdot C \text{ – стала часу кола.} \quad (4.28)$$

Фізичний зміст цього параметра розглянемо в подальшому, зараз же вкажемо, що його розмірність дійсно відповідає часу:

$$[\tau] = [R] \cdot [C] = [\text{Ом}] / [\text{Фарада}] = [\text{Ом}] \left[\frac{\text{с}}{\text{Ом}} \right] = [\text{с}]$$

Виділимо в отриманому виразі модуль, який визначає амплітудно-частотну характеристику

$$K_{uc}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \quad (4.29)$$

і аргумент, який визначає фазо-частотну характеристику:

$$\Phi_U(\omega) = -\text{arctg } \omega\tau \quad (4.30)$$

Графік АЧХ наведено на рис. 4.7, а, ФЧХ – на рис. 4.7, б.

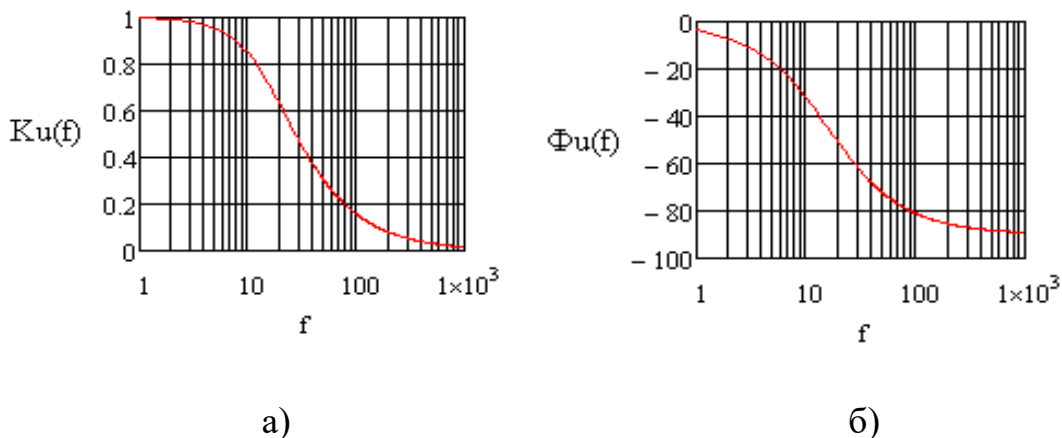


Рис. 4.7

Відповідно до амплітудно - частотної характеристики низькочастотні коливання проходять через данне коло з великим коефіцієнтом передачі (малим загасанням). Зі зростанням частоти амплітуда коливань на виході зменшується.

Отже, RC -коло, у разі, коли вихідна напруга знімається з ємності, являє собою фільтр нижніх частот.

До цього висновку можна прийти, аналізуючи якісно проходження через розглянуте коло коливань різних частот, а саме: очевидно, що постійна напруга ($\omega=0$) передається з входу на вихід без змін – опір поперечного плеча (ємності) нескінченно великий, струм в колі не протікає, падіння напруги на опорі відсутнє. У міру зростання частоти вхідної гармонічної напруги опір ємності зменшується, все збільшується струм, який виділяє на опорі все більше падіння

напруги; при цьому напруга на виході кола зменшується. При необмеженому зростанні частоти значення вихідної напруги прагне до нуля.

Для визначення смуги пропускання фільтра прирівняємо вираз $K_U(\omega)$ значенню $\frac{1}{\sqrt{2}}$, яке відповідає граничній частоті ω_{zp} .

$$K_U(\omega_{zp}) = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega_{zp}\tau)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (4.31)$$

Розв'язуючи отримане рівняння щодо ω_{zp} , знайдемо:

$$\omega_{zp} = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC} \quad (4.32)$$

Таким чином, смуга пропускання RC -фільтра нижніх частот лежить в межах від нуля до ω_{zp} , тобто $\Delta\omega_n = 0 \dots \omega_{zp}$.

Фазо-частотна характеристика свідчить про те, що данне коло обумовлює відставання по фазі вихідного сигналу по відношенню до вхідного. При зміні частоти від нуля до нескінченності різниця фаз вихідного і вхідного сигналів змінюється від нуля до $-\frac{\pi}{2}$, приймаючи на граничній частоті значення $-\frac{\pi}{4}$.

Для другого варіанту схеми (рис.4.6.б)

Підставимо в формулу (4.6) значення опорів $Z_1 = \frac{1}{j\omega C}$, $Z_2 = R$:

$$K_{UR}(j\omega) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}} \cdot e^{j(\frac{\pi}{2} - \arctg \omega\tau)} \quad (4.33)$$

Амплітудно-частотна характеристика

$$K_{UR}(\omega) = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}} \quad (4.34)$$

Фазо-частотна характеристика

$$\Phi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctg \omega\tau \quad (4.35)$$

Графіки АЧХ і ФЧХ наведені на рисунку 4.8.

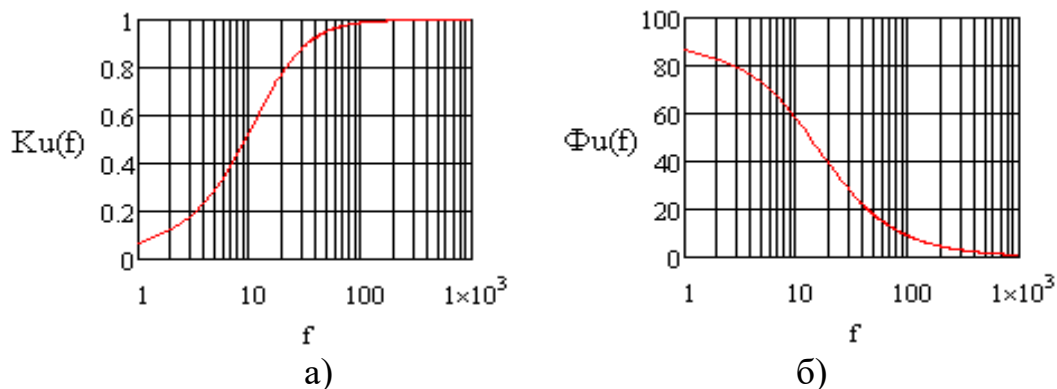


Рис.4.8

Таким чином, **RC**- коло, у разі, коли вихідна напруга знімається з опору, являє собою фільтр верхніх частот.

Постійна напруга на вихід кола не передається внаслідок нескінченно великого опору ємності в поздовжньому плечі. Збільшення частоти вхідного сигналу призводить до зменшення цього опору, зростаючий за величиною струм виділяє на елементі **R** все більшу напругу; при $\omega = \infty$ напруга на виході кола максимальна і дорівнює вхідній напрузі.

Гранична частота визначається з рівняння

$$\frac{\omega_{zp} \tau}{\sqrt{1 + (\omega_{zp} \tau)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (4.36)$$

і дорівнює

$$\omega_{zp} = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{R \cdot C}. \quad (4.37)$$

Смуга пропускання **RC**-фільтра верхніх частот лежить в межах:

$$\Delta\omega_n = \omega_{zp} \dots \infty.$$

З фазо-частотної характеристики видно, що данне коло обумовлює випередження по фазі вихідної напруги по відношенню до вхідної на кут від $\frac{\pi}{2}$ на частоті $\omega \approx 0$ до нуля на частоті $\omega = \infty$.

4.6. Частотні характеристики **RL**-кіл

Розглянемо кола, які містять послідовно з'єднані елементи **R** і **L** (рис. 4.9).

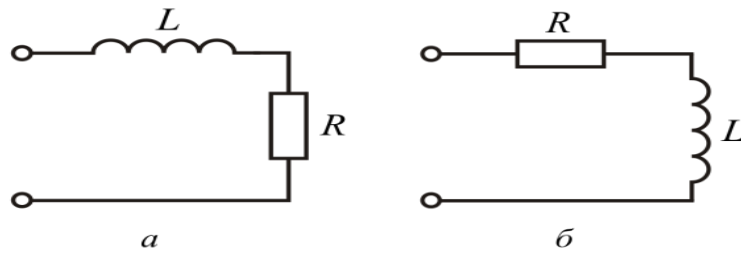


Рис. 4.9

Для схеми, коли вихідна напруга знімається з опору (рис. 4.9.а), комплексний коефіцієнт передачі напруги:

$$K_{UR}(j\omega) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{R}{j\omega L + R} = \frac{1}{1 + j\omega\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \cdot e^{-j \arctg \omega\tau} \quad (4.38)$$

де $\tau = \frac{L}{R}$ – стала часу RL -кола. (4.39)

$$[\tau] = \frac{[L]}{[R]} = \frac{[\text{Гн}]}{[\text{Ом}]} = \frac{[\text{Ом} \cdot \text{с}]}{[\text{Ом}]} = [\text{с}].$$

Вираз для амплітудно-частотної характеристики:

$$K_{UR}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}, \quad (4.40)$$

фазо-частотної характеристики:

$$\Phi(\omega) = -\arctg \omega\tau \quad (4.41)$$

Порівнюючи отримані вирази з відповідними виразами для схеми (рис.4.6.а), відзначаємо, що частотні властивості кіл однакові, тобто RL -коло, коли вихідна напруга знімається з опору, являє собою **фільтр нижніх частот**

з граничною частотою $\omega_{zp} = \frac{1}{\tau} = \frac{R}{L}$ (4.42)

і смугою пропускання $\Delta\omega = 0 \dots \omega_{zp}$.

Для схеми, коли вихідна напруга знімається з індуктивності (рис.4.9.б):

$$\begin{aligned} K_{UL}(j\omega) &= \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} = \\ &= \frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \cdot e^{j(\frac{\pi}{2} - \arctg \omega\tau)} \end{aligned} \quad (4.43)$$

З виразу для $K_{UL}(j\omega)$ знайдемо:

амплітудно-частотну характеристику

$$K_{UL}(\omega) = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}; \quad (4.44)$$

фазо-частотну характеристику

$$\Phi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \text{arctg } \omega\tau \quad (4.45)$$

Отримані вирази збігаються з аналогічними для схеми (рис.4.6.б), а це означає, що **RL**- коло, у разі, коли вихідна напруга знімається з індуктивності, являє собою **фільтр верхніх частот**:

з граничною частотою

$$\omega_{zp} = \frac{1}{\tau} = \frac{R}{L} \quad (4.46)$$

і смугою пропускання

$$\Delta\omega_n = \omega_{zp} \dots \infty.$$

Аналізуючи частотно-вибіркові властивості **RC** - і **RL**-кіл, як найпростіших фільтрів нижніх і верхніх частот, слід зазначити низьку ефективність фільтрації коливань. Це пов'язано з малою крутизною амплітудно-частотних характеристик в області граничної частоти, що вказує на істотне ослаблення коливань в смузі пропускання фільтра поряд із задовільним проходженням коливань в смузі затримування.

4.7. Частотні характеристики **RLC**-кіл

4.7.1. Умови резонансу

Послідовним коливальним контуром називається електричне коло, яке представляє собою послідовне по відношенню до зовнішніх затискачів з'єднання конденсатора і котушки індуктивності. Схема послідовного коливального контуру в загальному випадку містить ємність, індуктивність і активний опір, який враховує втрати енергії (рис. 4.10).

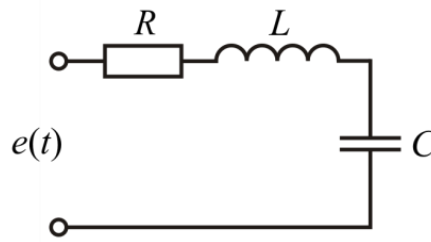


Рис. 4.10

Аналіз властивостей послідовного контуру доцільно почати з аналізу властивостей елементів, які входять до складу його схеми.

Побудуємо графіки залежності від частоти опорів елементів контуру і сумарного реактивного опору (рис. 4.11). При цьому врахуємо такі відомі співвідношення:

$$r(\omega) = \text{const}; x_L(\omega) = \omega L; x_C(\omega) = \frac{1}{\omega C}; x = x_L - x_C.$$

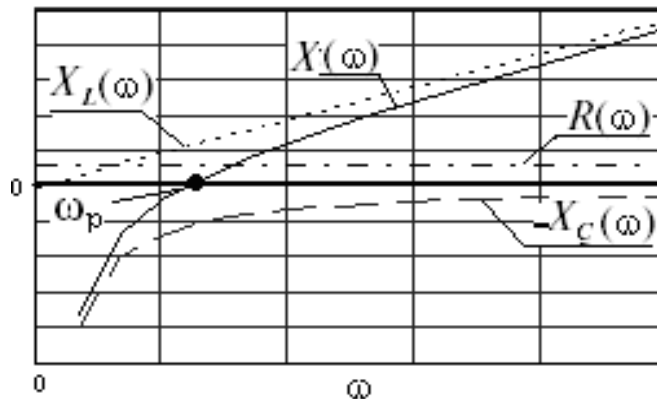


Рис. 4.11

В області нижніх частот ($\omega < \omega_0$) $x_L < x_C$, контур в цілому працює подібно ємності, тобто його еквівалентна реактивність відповідає ємності.

В області верхніх частот ($\omega > \omega_0$) $x_L > x_C$ і контур еквівалентний індуктивності.

На частоті $\omega = \omega_0$ реактивні опори рівні і контур еквівалентний активному опору. Характер еквівалентного опору в діапазоні частот наочно ілюструє графік $x(\omega)$. Таким чином, характер і величина опору послідовного коливального контуру залежать від параметрів його елементів і частоти коливань, які діють в контурі (які включені до контуру ззовні).

Особливу цікавість представляє випадок, коли сумарний реактивний опір контуру дорівнює нулю.

Режим в послідовному коливальному контурі, при якому його результуючий реактивний опір дорівнює нулю і при цьому напруга і струм на зовнішніх затискачах синфазні, називається *резонансом*.

Таким чином, умова резонансу в послідовному контурі:

$$X = \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0 \quad (4.47)$$

З умови резонансу випливає, що при заданих параметрах L і C він виникає на одній, строго певній частоті.

Частота, на якій в контурі виникає резонанс, називається резонансною.

З умови 4.47 резонансна частота визначається співвідношенням:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (4.48)$$

4.7.2. Первинні і вторинні параметри

Послідовний коливальний контур характеризують рядом первинних та вторинних параметрів.

Первинні параметри – це значення активного опору R , індуктивності L і ємності C .

Вторинні параметри: резонансна частота $\omega_0(f_0)$, характеристичний (хвильовий) опір ρ , добротність Q , загасання d , смуга пропускання Π , коефіцієнт прямокутності частотної характеристики K_{Π} .

Визначення резонансної частоти і розрахункова формула наведені вище.

З круговою резонансною частотою ω_0 відомими співвідношеннями пов'язані:

резонансна лінійна частота

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, \text{ Гц}; \quad (4.49)$$

період коливань в контурі

$$T_0 = \frac{1}{f_0} = 2\pi\sqrt{LC}, \text{ с}; \quad (4.50)$$

довжина хвилі коливань

$$\lambda_0 = \frac{c}{f_0} = 2\pi \cdot c \cdot \sqrt{LC}, \text{ м}; \quad (4.51)$$

де $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ – швидкість світла.

При резонансі опір послідовного контуру активний, мінімальний за величиною і дорівнює R , тобто $Z(j\omega_0) = R$.

$$\text{Струм в контурі при резонансі } \dot{I}_0 = \frac{\dot{U}}{r},$$

де \dot{I}_0 – комплексне діюче значення струму при резонансі;

\dot{U} – комплексне діюче значення напруги, прикладеної до контуру.

Напруга на елементах контуру при резонансі:

на активному опорі

$$\dot{U}_{r0} = \dot{I}_0 \cdot r = \dot{U}; \quad (4.52)$$

на індуктивності

$$\dot{U}_{L0} = \dot{I}_0 \cdot j\omega_0 L = j \frac{\omega_0 L}{r} \dot{U} = \frac{\rho}{r} \dot{U} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} = Q \cdot \dot{U} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}; \quad (4.53)$$

на ємності

$$\dot{U}_{C0} = \dot{I}_0 \cdot \frac{1}{j\omega_0 C} = -j \frac{1}{\omega_0 r C} \dot{U} = \frac{\rho}{r} \dot{U} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} = Q \cdot \dot{U} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}. \quad (4.54)$$

Тут ρ – характеристичний (хвильовий) опір контуру;

Q – добротність (якість) контуру.

Характеристичний (хвильовий) опір контуру – відношення напруги на одному з реактивних елементів контуру до струму в контурі при резонансі

$$\rho = \frac{U_{L0}}{I_0} = \frac{I_0 \omega_0 L}{I_0} = \omega_0 L; \quad \rho = \frac{U_{C0}}{I_0} = \frac{I_0}{\omega_0 C I_0} = \frac{1}{\omega_0 C} \quad (4.55)$$

Таким чином, хвильовий опір контуру чисельно дорівнює опорі реактивного елемента контуру (індуктивності або ємності) на резонансній частоті.

Зв'язок хвильового опорі з первинними параметрами контуру встановлюється співвідношенням, яке виходить з (4.55):

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (4.56)$$

Добротність контуру – відношення напруги на будь-якому з реактивних елементів контуру при резонансі до напруги, яка прикладена до контуру.

Добротність характеризує ефективність, або якість контуру. З формул (4.53) і (4.54), отримаємо:

$$Q = \frac{U_{L0}}{U} = \frac{U \omega_0 L}{rU} = \frac{U_{C0}}{U} = \frac{U}{r \omega_0 C U} = \frac{\omega_0 L}{r} = \frac{1}{r \omega_0 C} = \frac{\rho}{r} \quad (4.57)$$

Таким чином, якість контуру, або його добротність, тим вища, чим більше його характеристичний опір і менший активний опір, тобто втрати.

Традиційними значеннями добротності радіотехнічних контурів є $Q = 50 \dots 150$. Зі збільшенням резонансної частоти (десятки МГц і вище) забезпечити високі значення добротності контурів складно.

Аналіз виразів (4.52), (4.53) і (4.54) вказує на наступне:

– при резонансі напруга на активному опорі контура дорівнює напрузі, яка прикладена до контуру;

– напруги на реактивних елементах протифазні, рівні по амплітуді і в Q разів перевищують напругу, прикладену до контуру.

У зв'язку з цим, резонанс в послідовному коливальному контурі називають резонансом напруги.

Загасання послідовного коливального контуру – величина, зворотна добротності:

$$d = \frac{1}{Q} \quad (4.58)$$

Смуга пропускання – діапазон частот, на межах якого потужність коливань становить $0,5$ максимального значення, а їх амплітуда $\frac{1}{\sqrt{2}}$ від максимального значення.

Смуга пропускання лежить між граничними частотами ω_{zp1} та ω_{zp2} .

При кількісній оцінці розрізняють абсолютну Π і відносну Π_0 смуги пропускання.

Абсолютна смуга пропускання – різниця граничних частот:

$$\Pi = \omega_{zp2} - \omega_{zp1} \quad (4.59)$$

Відносна смуга пропускання – відношення абсолютної смуги пропускання до резонансної частоти контуру

$$\Pi_0 = \frac{\Pi}{\omega_0} \quad (4.60)$$

Співвідношення, які встановлюють зв'язок між смугою пропускання і іншими параметрами контуру, отримаємо в подальшому, при аналізі його частотних характеристик.

Таким чином, послідовний коливальний контур має властивість певної частотної вибіркості, тобто здатність з безлічі коливань різних частот виділяти коливання, частоти яких лежать в межах його смуги пропускання.

Вибірковість реальних частотно-вибіркових систем, в тому числі і послідовного коливального контуру, оцінюється ступенем прямокутності їх частотних або резонансних характеристик, який кількісно визначається коефіцієнтом прямокутності характеристики.

Коефіцієнт прямокутності частотної характеристики – це відношення смуги пропускання на рівні ≈ 0.707 до смуги пропускання на рівні 0.1 , тобто:

$$K_{\Pi} = \frac{\Pi_{0,7}}{\Pi_{0,1}} \quad (4.61)$$

4.7.3. Частотні та резонансні характеристики

Для аналізу частотно-вибіркових властивостей послідовного коливального контуру використовують комплексні вхідні та передавальні функції, причому, найбільш зручними є комплексна вхідна провідність $Y_{\text{вх}}(j\omega)$ і комплексні коефіцієнти передачі напруги $K_U(j\omega)$ на елементах контуру. Компоненти цих функцій, як відомо, визначають частотні характеристики. Поряд з частотними характеристиками на практиці використовують резонансні характеристики.

Резонансні характеристики – це залежності від частоти струму в контурі або напруги на його затискачах.

Частотні характеристики і резонансні характеристики – поняття взаємопов'язані.

При побудові та дослідженні частотних і резонансних характеристик частотно-вибіркових систем в якості незалежної змінної використовують не тільки частоту ω , але і величини, які характеризують розстроювання контуру відносно частоти діючого на нього сигналу. Розстроювання показує ступінь відхилення частоти сигналу ω від резонансної частоти контуру ω_0 . Використання відносних одиниць надає розрахунковим співвідношенням більш загальний вигляд, а також дозволяє проводити порівняльний аналіз частотних властивостей кола в різних ділянках частотного діапазону.

Розрізняють декілька видів розстроювання.

Абсолютне розстроювання – різниця між частотою сигналу і резонансною частотою контуру:

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0 . \quad (4.62)$$

Знак абсолютного розстроювання залежить від співвідношення частот ω і ω_0 .

Відносне розстроювання – відношення абсолютного розстроювання до резонансної частоти контуру:

$$\delta = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} . \quad (4.63)$$

Узагальнене розстроювання – відношення реактивного опору x до активного R :

$$\xi = \frac{x}{r} = \frac{\omega L \omega_0}{r \omega_0} - \frac{\omega_0}{r \omega C \omega_0} = Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = Q \cdot \nu \quad (4.64)$$

де $\nu = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}$ – фактор розстроювання. (4.65)

Аналіз виразів (4.62), (4.63), (4.64), (4.65) показує, що при резонансі, тобто при $\omega = \omega_0$, всі види розстроювання дорівнюють нулю.

В області частот, близьких до резонансної частоти, тобто при $\omega \approx \omega_0$, величини розстроювання малі і пов'язані між собою співвідношеннями:

$$\nu = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \approx \frac{2\omega(\omega - \omega_0)}{\omega\omega_0} \approx \frac{2\Delta\omega}{\omega_0} \approx 2\delta ; \quad (4.66)$$

$$\xi = Q \cdot \nu \approx 2 \cdot \delta \cdot Q . \quad (4.67)$$

Розглянемо комплексні функції послідовного коливального контуру.

4.7.3.1. Комплексна вхідна провідність

Відповідно до визначення:

$$Y(j\omega) = Y(\omega) \cdot e^{j\phi(\omega)} = \frac{1}{Z(j\omega)} = \frac{1}{r + jx} = \frac{1}{r(1 + j\xi)} \quad (4.68)$$

Більш зручно використовувати провідність, нормовану відносно провідності на резонансній частоті, а саме

$$Y_n(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{Y(j\omega_0)} = \frac{1}{1 + j\xi} . \quad (4.69)$$

Виділяючи з останнього виразу модуль і аргумент, отримуємо формули, які визначають відповідно амплітудно-частотну характеристику:

$$Y_n(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+Q^2v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \quad (4.70)$$

та фазо-частотну характеристику:

$$\Phi(\omega) = \psi_i - \psi_u = -\varphi(\omega) = -\arctg \xi, \quad (4.71)$$

або
$$\varphi(\omega) = \arctg \xi. \quad (4.72)$$

З (4.70) і (4.71) виходить, що частотні характеристики послідовного коливального контуру залежать від добротності контуру. Нижче наводяться сімейства амплітудно-частотних (рис. 4.12) і фазо-частотних (рис. 4.13) характеристик для трьох значень добротності $Q_1 > Q_2 > Q_3$.

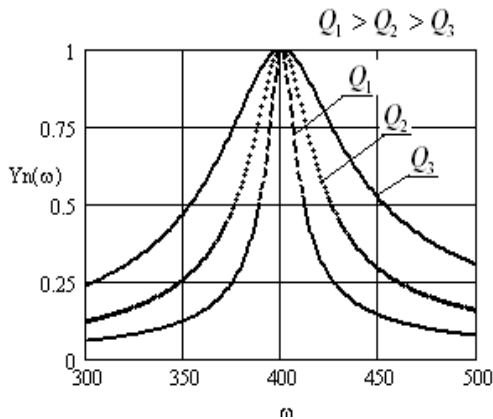


Рис. 4.12

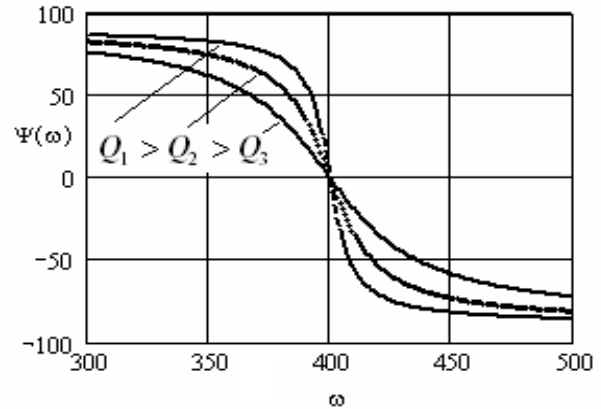


Рис. 4.13

Від модуля нормованої вхідної провідності контура, який визначає його амплітудно-частотну характеристику, легко перейти до нормованої резонансної характеристики струму, вважаючи, що параметри напруги, яка діє на контур, не залежать від частоти:

$$I_n(\omega) = \frac{I(\omega)}{I(\omega_0)} = \frac{U \cdot Y(\omega)}{U \cdot Y(\omega_0)} = Y_n(\omega). \quad (4.73)$$

Резонансні нормовані характеристики струму послідовного коливального контуру збігаються з його амплітудно-частотними характеристиками $Y_n(\omega)$.

$$I_n(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} \quad (4.74)$$

Частотні та резонансні характеристики, як функції узагальненого розстроювання особливо зручні для порівняння частотних властивостей різних частотно-вибіркових пристроїв.

4.7.3.2. Комплексні коефіцієнти передачі напруги

Відповідно до схеми (рис. 4.10) послідовний коливальний контур може характеризуватися трьома коефіцієнтами передачі напруги, в залежності від того, який з елементів контуру відповідає виходу схеми.

Коефіцієнт передачі напруги на активному опорі:

$$K_{Ur}(j\omega) = \frac{\dot{U}_r}{\dot{U}} = r \cdot Y(j\omega) = \frac{1}{1 + jQv} = \frac{1}{1 + j\xi}. \quad (4.75)$$

Амплітудно-частотна і фазо-частотна характеристики визначаються:

$$K_{Ur}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}}; \quad (4.76)$$

$$\Phi_{Ur}(\omega) = -\arctg Q \cdot v = -\arctg \xi. \quad (4.77)$$

Коефіцієнт передачі напруги на індуктивності:

$$K_{UL}(j\omega) = \frac{\dot{U}_L}{\dot{U}} = j\omega L \cdot Y(j\omega) = \frac{j\omega L}{r(1 + jQv)}. \quad (4.78)$$

Виконавши ряд перетворень, отримаємо:

$$K_{UL}(j\omega) = \frac{\omega L}{r(\sqrt{1 + Q^2 v^2})} \cdot \frac{\omega_o}{\omega_o} \cdot e^{j(\frac{\pi}{2} - \arctg Qv)} = \frac{Q}{\sqrt{1 + \xi^2}} \cdot \frac{\omega}{\omega_o} \cdot e^{j(\frac{\pi}{2} - \arctg \xi)} \quad (4.79)$$

Амплітудно-частотна характеристика:

$$K_{UL}(\omega) = \frac{Q}{\sqrt{1 + \xi^2}} \cdot \frac{\omega}{\omega_o} \quad (4.80)$$

Фазо-частотна характеристика:

$$\Phi_{UL}(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctg \xi. \quad (4.81)$$

Коефіцієнт передачі напруги на ємності

Діючи аналогічно попередньому випадку, отримаємо вираз для комплексного коефіцієнта передачі напруги на ємності

$$K_{UC}(j\omega) = \frac{1}{\omega Cr \sqrt{1+Q^2\nu^2}} \frac{\omega_o}{\omega_o} e^{-j(\frac{\pi}{2} + \text{arctg } Q\nu)} = \frac{Q}{\sqrt{1+\xi^2}} \cdot \frac{\omega_o}{\omega} \cdot e^{-j(\frac{\pi}{2} + \text{arctg } \xi)} \quad (4.82)$$

амплітудно-частотної характеристики:

$$K_{UC}(\omega) = \frac{Q}{\sqrt{1+\xi^2}} \cdot \frac{\omega_o}{\omega} \quad (4.83)$$

фазо-частотної характеристики:

$$\Phi_{UC}(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \text{arctg } \xi \quad (4.84)$$

Припускаючи напругу, що діє на контурі, $U=\text{const}$, від амплітудно-частотних характеристик (4.76), (4.80), (4.83) перейдемо до нормованих резонансних характеристик напруги:

на активному опорі:

$$U_{rn}(\omega) = \frac{U_r(\omega)}{U_r(\omega_o)} = K_{Urn}(\omega); \quad (4.85)$$

на індуктивності:

$$U_{Ln}(\omega) = \frac{U_L(\omega)}{U_L(\omega_o)} = K_{ULn}(\omega); \quad (4.86)$$

на ємності:

$$U_{Cn}(\omega) = \frac{U_C(\omega)}{U_C(\omega_o)} = K_{UCn}(\omega). \quad (4.87)$$

Таким чином, нормовані резонансні характеристики напруги на елементах контуру збігаються з відповідними нормованими коефіцієнтами передачі напруги.

Графіки амплітудно-частотних характеристик, які відповідають виразами (4.85), (4.86), (4.87), наведені на рисунку 4.14

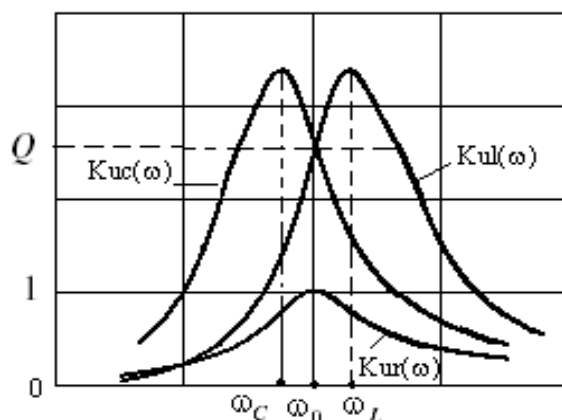


Рис. 4.14

Аналізуючи характеристики, відзначимо такі особливості:

- при резонансі, тобто при $\omega = \omega_0$, напруга на активному опорі дорівнює напрузі, яка діє на контурі; коефіцієнт передачі $K_{Ur}(\omega_0) = 1$;
- при резонансі напруга на індуктивності і на ємності в Q разів перевищує напругу, яка діє на контурі; коефіцієнт передачі напруги $K_{UL}(\omega_0) = K_{UC}(\omega_0) = Q$;
- максимальні значення на реактивних елементах напруга набуває на частотах ω_L, ω_C , тобто осторонь від резонансної частоти.

Дослідження на екстремум функцій $K_{UL}(\omega)$ і $K_{UC}(\omega)$ дають значення частот ω_L і ω_C :

$$\omega_L = \omega_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot Q^2}{2 \cdot Q^2 - 1}}; \quad (4.88)$$

$$\omega_C = \omega_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot Q^2 - 1}{2 \cdot Q^2}} \quad (4.89)$$

і максимальні значення коефіцієнтів передачі:

$$K_{UL \text{ макс}} = K_{UC \text{ макс}} = \frac{2 \cdot Q^2}{\sqrt{4 \cdot Q^2 - 1}}. \quad (4.90)$$

У загальному випадку про настроювання контуру в резонанс можливо свідчити по максимуму напруги на активному опорі. У той же час, в реальних контурах активний опір обумовлений опором проводу котушки індуктивності, який не може бути виділено. Це означає, що строго факт резонансу в реальному контурі по максимуму напруги на його елементах встановити неможливо.

Проте, як свідчить аналіз виразів для ω_L і ω_C , для контурів з високою добротністю $\omega_L \approx \omega_C \approx \omega_0$, це означає, що про резонанс в контурі можна судити по максимуму напруги на будь-якому з реактивних елементів.

Як правило, при практичному використанні послідовних коливальних контурів вихідну напругу «знімають» з конденсатора.

5. Основи теорії чотиріполюсників

5.1. Рівняння і параметри чотиріполюсників

5.1.1. Основні положення і класифікація

Аналіз реальних електричних кіл різного призначення часто зводиться до аналізу струмів і напруг, що діють на вході та виході кола. При цьому процеси, що відбуваються в колі, не розглядають. Це пов'язано з тим, що в більшості випадків електричні кола призначені для передачі сигналів (енергії) від генератора (джерела) до навантаження.

Наприклад, при аналізі трансформаторів, підсилювачів, фільтрів, ліній передачі та інших буває достатнім встановити зв'язок між вхідними і вихідними величинами, не з'ясовуючи характер і особливості внутрішніх процесів.

При такому підході реальне, будь-якої складності, електричне коло можна представити еквівалентною схемою, або чотиріполюсником.

Чотиріполюсник – це узагальнене поняття електричного кола, яке розглядається по відношенню до двох пар їх зовнішніх затискачів (рис. 5.1).

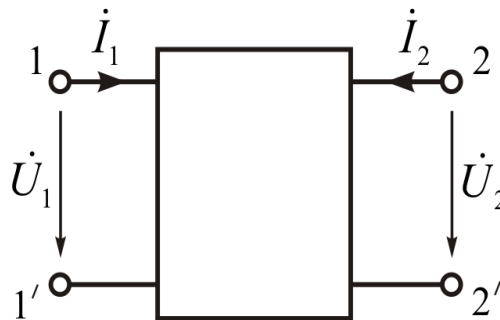


Рис. 5.1.

Затискачі чотиріполюсника, до яких приєднується джерело сигналу, називаються вхідними (1-1), затискачі, до яких підключається навантаження, називаються вихідними (2-2).

При аналізі властивостей чотиріполюсників використовуються різні варіанти вибору додатніх напрямків струмів на вході і виході. Ми прийнемо так званий зустрічний напрямок струмів. Крім цього, можливі: варіант прямої передачі, коли обидва струми спрямовані від входу до виходу, тобто зліва направо, і варіант зворотної передачі, коли струми спрямовані від виходу до входу, тобто справа наліво.

Різноманіття схем і пристроїв, які подаються чотиріполюсниками, обумовлюють необхідність класифікації. Загальноприйнятою є класифікація чотиріполюсників за такими ознаками.

За характером основних залежностей між струмами та напругами чотириполюсники поділяють на **лінійні та нелінійні**.

Лінійні – чотириполюсники, до складу яких входять тільки лінійні елементи.

Нелінійні – чотириполюсники, до складу яких входять нелінійні елементи, наприклад, електронні або напівпровідникові прилади. В окремому випадку, коли електронні прилади працюють в лінійному режимі, чотириполюсник розглядають як лінійний.

Чотириполюсники бувають **пасивні та активні**.

Пасивними називають чотириполюсники, в складі яких відсутні джерела енергії. Напруги на обох парах розімкнутих затискачів пасивного чотириполюсника дорівнюють нулю.

Активними називають чотириполюсники, які містять джерела енергії.

У свою чергу, активні чотириполюсники поділяють на **автономні і неавтономні**.

Автономний активний чотириполюсник містить незалежні джерела енергії. На одній або обох парах розімкнутих затискачах активного автономного чотириполюсника присутня напруга.

Неавтономний активний чотириполюсник містить залежні джерела енергії; наприклад джерела в схемах заміщення електровакуумних і напівпровідникових приладів. Напруга на розімкнутих затискачах неавтономного активного чотириполюсника дорівнює нулю.

Розрізняють чотириполюсники **оборотні та необоротні**.

Оборотний чотириполюсник відповідає умові оборотності, тобто відношення напруги на вході до струму на виході не залежить від того, яка пара затискачів є вхідною, а яка – вихідною. Іншими словами, у оборотного чотириполюсника передавальні опору з боку обох пар затискачів однакові.

В іншому випадку чотириполюсник називається **необоротним**.

За ознакою симетрії чотириполюсники поділяють на симетричні і несиметричні.

Симетричний – чотириполюсник, в якому зміна місцями його вхідних і вихідних затискачів не змінює струмів і напруг у зовнішніх колах, тобто в колах, з якими чотириполюсник з'єднаний.

Несиметричний – чотириполюсник, в якому сформульована вище умова не виконується.

Пасивні лінійні та симетричні чотириполюсники – оборотні; несиметричні активні чотириполюсники – необоротні.

Теорія чотириполюсників – це розділ теорії електричних кіл, який займається виявленням властивостей і закономірностей, властивих певним класам чотириполюсників. Основний зміст теорії чотириполюсників полягає в тому, що використовуючи ряд узагальнених для даного класу чотириполюсників параметрів, можна розраховувати струми і напруги на виході кола по відомим струмам і напругам на вході.

Теорія чотириполюсників, крім завдань аналізу, забезпечує вирішення завдань синтезу, коли за заданими характеристиками пристрою знаходять структуру і елементи чотириполюсника.

5.1.2. Системи рівнянь та типові параметри чотириполюсників

Відповідно до прийнятої еквівалентної схеми чотириполюсника електричні процеси в ньому характеризуються чотирма змінними: напругою на вході \dot{U}_1 , струмом на вході \dot{I}_1 , напругою на виході \dot{U}_2 , струмом на виході \dot{I}_2 . Для лінійних пасивних чотириполюсників зазначені величини пов'язані лінійними залежностями – рівняннями. Зазвичай дві величини приймають за незалежні (задані), а дві інші – за залежні (шукані). При цьому можливі шість форм запису рівнянь чотириполюсника, тобто шість систем по два незалежних рівняння. Назви рівнянь визначаються коефіцієнтами, які входять до їх складу. Коефіцієнти, що зв'язують змінні в рівняннях, називаються параметрами і всі разом утворюють систему.

Шість систем параметрів, за допомогою яких встановлюється зв'язок між струмами і напругами на затискачах чотириполюсника, називаються звичайними або типовими параметрами.

Типові параметри чотириполюсника визначаються параметрами елементів, що входять до складу чотириполюсника, схемою їх з'єднання і частотою.

Розглянемо системи рівнянь чотириполюсників і з'ясуємо фізичний зміст параметрів.

Рівняння чотириполюсника в Y-формі

В якості незалежних змінних приймемо напруги \dot{U}_1 та \dot{U}_2 , як залежних – струми \dot{I}_1 , \dot{I}_2 .

Для визначення співвідношень, що зв'язують струми і напруги, скористаємося методом контурних струмів (рис. 5.2.).

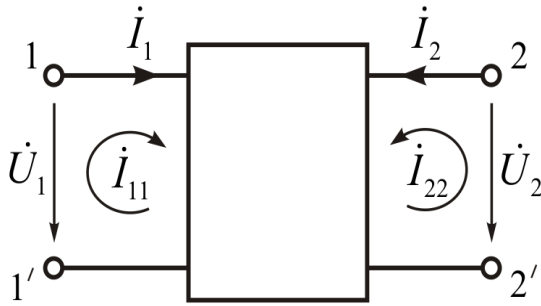


Рис. 5.2.

Виділимо вхідний і вихідний незалежні контури і запишемо систему контурних рівнянь, враховуючи при цьому, що, $\dot{\mathbf{I}}_{11} = \dot{\mathbf{I}}_1$, $\dot{\mathbf{I}}_{22} = \dot{\mathbf{I}}_2$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{Z}_{11} & \mathbf{Z}_{12} \\ \mathbf{Z}_{21} & \mathbf{Z}_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \dot{\mathbf{I}}_1 \\ \dot{\mathbf{I}}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{\mathbf{U}}_1 \\ \dot{\mathbf{U}}_2 \end{vmatrix}$$

Розв'яжемо систему рівнянь щодо струмів, скориставшись виразом:

$$\dot{\mathbf{I}}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta_{ik}}{\Delta} \dot{\mathbf{U}}_i,$$

де $\dot{\mathbf{U}}_i$ – контурна напруга i -го контуру;

Δ – визначник матриці контурних опорів;

Δ_{ik} – алгебраїчне доповнення матриці контурних опорів.

Отримаємо:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{I}}_1 = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} \dot{\mathbf{U}}_1 + \frac{\Delta_{21}}{\Delta} \dot{\mathbf{U}}_2 \\ \dot{\mathbf{I}}_2 = \frac{\Delta_{12}}{\Delta} \dot{\mathbf{U}}_1 + \frac{\Delta_{22}}{\Delta} \dot{\mathbf{U}}_2 \end{cases}$$

Коефіцієнти отриманих рівнянь мають розмірність провідності.

Позначимо їх:

$$\mathbf{Y}_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta}; \quad \mathbf{Y}_{12} = \frac{\Delta_{21}}{\Delta}; \quad \mathbf{Y}_{21} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta}; \quad \mathbf{Y}_{22} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta}.$$

З огляду на позначення, перепишемо систему у наступному вигляді:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{I}}_1 = \mathbf{Y}_{11} \dot{\mathbf{U}}_1 + \mathbf{Y}_{12} \dot{\mathbf{U}}_2 \\ \dot{\mathbf{I}}_2 = \mathbf{Y}_{21} \dot{\mathbf{U}}_1 + \mathbf{Y}_{22} \dot{\mathbf{U}}_2 \end{cases} \quad (5.1)$$

Ця ж система в матричній формі: $[\dot{\mathbf{I}}] = [\mathbf{Y}][\dot{\mathbf{U}}]$

Система рівнянь (5.1) є рівняннями чотириполюсника в Y -формі. Коефіцієнти Y в рівняннях називаються Y -параметрами чотириполюсника, а матриця $[Y]$ – матрицею провідностей, або матрицею Y -параметрів.

Визначимо фізичний зміст Y -параметрів. Для цього послідовно перетворимо рівняння до виду, відповідному режиму короткого замикання на одній зі сторін чотириполюсника. Отримаємо:

$$Y_{11} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1}, \text{ при } \dot{U}_2 = 0 \text{ – вхідна провідність при короткому замиканні на}$$

виході;

$$Y_{12} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2}, \text{ при } \dot{U}_1 = 0 \text{ – передавальна провідність з боку виходу при}$$

короткому замиканні на вході;

$$Y_{21} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1}, \text{ при } \dot{U}_2 = 0 \text{ – передавальна провідність з боку входу при}$$

короткому замиканні на виході;

$$Y_{22} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2}, \text{ при } \dot{U}_1 = 0 \text{ – вихідна провідність при короткому замиканні на}$$

виході.

Загальною ознакою Y -параметрів є режим короткого замикання на одній з пар затискачів чотириполюсника. Тому Y -параметри називаються параметрами короткого замикання.

Для оборотних чотириполюсників $\Delta_{12} = \Delta_{21}$ (згадаємо: лінійні пасивні кола – оборотні), а отже, $Y_{12} = Y_{21}$, тобто оборотні чотириполюсники повністю характеризуються трьома параметрами: $Y_{11}, Y_{22}, Y_{12} = Y_{21}$.

Для симетричних чотириполюсників, крім того, $\Delta_{11} = \Delta_{22}$, а отже, $Y_{11} = Y_{22}$.

Це означає, що симетричні чотириполюсники повністю характеризуються двома параметрами: $Y_{11} = Y_{22}, Y_{12} = Y_{21}$.

Рівняння чотириполюсника в Z-формі

Якщо в якості незалежних змінних вибрати струми \dot{I}_1, \dot{I}_2 , то розв'язуючи рівняння (5.1) щодо \dot{U}_1, \dot{U}_2 , отримаємо:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 \end{cases} \quad (5.2)$$

або в матричній формі: $[\dot{U}] = [Z][\dot{I}]$

$$\text{де } Z_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} = \frac{Y_{22}}{|Y|}; \quad Z_{12} = \frac{\Delta_{21}}{\Delta} = -\frac{Y_{12}}{|Y|}; \quad Z_{21} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta} = -\frac{Y_{21}}{|Y|};$$

$$Z_{22} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta} = \frac{Y_{11}}{|Y|}; \quad |Y| = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}.$$

Система рівнянь (5.2) є рівняння чотириполюсника в Z-формі. При цьому:

$$Z_{11} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}, \text{ при } \dot{I}_2 = 0 \text{ – вхідний опір в режимі холостого ходу на виході;}$$

$$Z_{12} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2}, \text{ при } \dot{I}_1 = 0 \text{ – передавальний опір з боку виходу в режимі}$$

холостого ходу на вході;

$$Z_{21} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1}, \text{ при } \dot{I}_2 = 0 \text{ – передавальний опір з боку входу в режимі}$$

холостого ходу на виході;

$$Z_{22} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}, \text{ при } \dot{I}_1 = 0 \text{ – вихідний опір в режимі холостого ходу на вході.}$$

Z – параметри чотириполюсника називаються параметрами холостого ходу.

Для оборотних чотириполюсників $Z_{12} = Z_{21}$, для симетричних чотириполюсників $Z_{11} = Z_{22}$.

Рівняння чотириполюсника в A-формі

В якості незалежних змінних приймають $\dot{U}_2, -\dot{I}_2$, як залежних \dot{U}_1, \dot{I}_1 .

Система рівнянь в A-формі має вигляд:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = A_{11}\dot{U}_2 - A_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 = A_{21}\dot{U}_2 - A_{22}\dot{I}_2 \end{cases} \quad (5.3)$$

A-параметри можуть бути виражені через Y-параметри шляхом розв'язання системи (5.1) щодо \dot{U}_1, \dot{I}_1 :

$$A_{11} = -\frac{Y_{22}}{Y_{21}}; \quad A_{12} = -\frac{1}{Y_{21}}; \quad A_{21} = -\frac{|Y|}{Y_{21}}; \quad A_{22} = -\frac{Y_{11}}{Y_{21}}.$$

При цьому:

$$A_{11} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2}, \text{ при } \dot{I}_2 = 0 \text{ – комплексний коефіцієнт передачі напруги в}$$

режимі холостого ходу на виході;

$$A_{12} = \frac{\dot{U}_1}{-\dot{I}_2}, \text{ при } \dot{U}_2 = 0 \text{ – комплексний передавальний опір в режимі}$$

короткого замикання на виході;

$$A_{21} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2}, \text{ при } \dot{I}_2 = 0 \text{ – комплексна передавальна провідність в режимі}$$

холостого ходу на виході;

$$A_{22} = \frac{\dot{I}_1}{-\dot{I}_2}, \text{ при } \dot{U}_2 = 0 \text{ – комплексний коефіцієнт передачі струму в}$$

режимі короткого замикання на виході.

Для оборотних чотириполосників, враховуючи зв'язок A-параметрів з Y-параметрами, отримаємо:

$$|A| = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1;$$

для симетричних чотириполосників, крім того $A_{11} = A_{22}$.

Рівняння чотириполосника в B-формі

В цьому випадку незалежними змінними є $\dot{U}_1, -\dot{I}_1$, а шуканими \dot{U}_2, \dot{I}_2 .

Система рівнянь в B-формі має вигляд

$$\begin{cases} \dot{U}_2 = B_{11}\dot{U}_1 - B_{12}\dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 = B_{21}\dot{U}_1 - B_{22}\dot{I}_1 \end{cases} \quad (5.4)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (5.1) щодо \dot{U}_2 та \dot{I}_2 , отримаємо співвідношення, що зв'язують B параметри з Y-параметрами:

$$B_{11} = -\frac{Y_{11}}{Y_{12}}; \quad B_{12} = -\frac{1}{Y_{12}}; \quad B_{21} = -\frac{|Y|}{Y_{12}}; \quad A_{22} = -\frac{Y_{22}}{Y_{12}}.$$

При цьому:

$$B_{11} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}, \quad \text{при } \dot{I}_1 = 0 \quad - \text{ комплексний коефіцієнт передачі напруги в}$$

режимі холостого ходу на вході;

$$B_{12} = \frac{\dot{U}_2}{-\dot{I}_1}, \quad \text{при } \dot{U}_1 = 0 \quad - \text{ комплексний передавальний опір в режимі}$$

короткого замикання на вході;

$$B_{21} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1}, \quad \text{при } \dot{I}_1 = 0 \quad - \text{ комплексна передавальна провідність в режимі}$$

холостого ходу на вході;

$$B_{22} = \frac{\dot{I}_2}{-\dot{I}_1}, \quad \text{при } \dot{U}_1 = 0 \quad - \text{ комплексний коефіцієнт передачі струму в}$$

режимі короткого замикання на вході.

Для оборотних чотиріполюсників, враховуючи зв'язок А-параметрів з Y-параметрами, отримаємо

$$|B| = B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21} = 1;$$

для симетричних чотиріполюсників, крім того $B_{11} = B_{22}$.

Параметри А та В являють собою комплексні передавальні функції чотиріполюсника в режимах холостого ходу і короткого замикання і називаються, в зв'язку з цим, параметрами передачі.

Рівняння чотиріполюсника в Н-формі.

Для цього випадку незалежними змінними є \dot{U}_2, \dot{I}_1 , залежними змінними \dot{U}_1, \dot{I}_2 . Система рівнянь чотиріполюсника в Н-формі має вигляд:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = H_{11}\dot{I}_1 + H_{12}\dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 = H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{U}_2 \end{cases} \quad (5.5)$$

Розв'язуючи систему (5.1) щодо \dot{U}_1 та \dot{I}_2 , встановимо зв'язок між Н- та Y-параметрами:

$$H_{11} = \frac{1}{Y_{11}}; \quad H_{12} = -\frac{Y_{12}}{Y_{11}}; \quad H_{21} = \frac{Y_{21}}{Y_{11}}; \quad H_{22} = \frac{|Y|}{Y_{11}}.$$

З системи (5.5) випливає, що:

$$H_{11} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}, \text{ при } \dot{U}_2 = 0 \text{ – комплексний вхідний опір в режимі короткого}$$

замикання на виході;

$$H_{12} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2}, \text{ при } \dot{I}_1 = 0 \text{ – комплексний коефіцієнт передачі напруги в}$$

режимі холостого ходу на вході;

$$H_{21} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1}, \text{ при } \dot{U}_2 = 0 \text{ – комплексний коефіцієнт передачі струму в}$$

режимі короткого замикання на виході;

$$H_{22} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2}, \text{ при } \dot{I}_1 = 0 \text{ – комплексна вхідна провідність в режимі}$$

холостого ходу на вході.

Для оборотних чотиріполіусників $H_{12} = -H_{21}$;

для симетричних, крім того $|H| = H_{11}H_{22} - H_{12}H_{21} = 1$.

Рівняння чотиріполіусника в G-формі

Для цього випадку незалежними змінними є \dot{U}_1, \dot{I}_2 , залежними змінними \dot{U}_2, \dot{I}_1 . Система рівнянь чотиріполіусника в G-формі:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = G_{11}\dot{U}_1 + G_{12}\dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = G_{21}\dot{U}_1 + G_{22}\dot{I}_2 \end{cases} \quad (5.6)$$

Розв'язок системи (5.1) щодо \dot{I}_1 та \dot{U}_2 дає співвідношення, що зв'язують G- та Y-параметри:

$$G_{11} = \frac{|Y|}{Y_{22}}; \quad G_{12} = \frac{Y_{12}}{Y_{22}}; \quad G_{21} = -\frac{Y_{21}}{Y_{22}}; \quad G_{22} = \frac{1}{Y_{22}}.$$

З виразів (5.6) випливає, що

$$G_{11} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1}, \text{ при } \dot{I}_2 = 0 \text{ – комплексна вхідна провідність в режимі холостого}$$

ходу на виході;

$$G_{12} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2}, \text{ при } \dot{U}_1 = 0 \text{ – комплексний коефіцієнт передачі струму в режимі}$$

короткого замикання на вході;

$$G_{21} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}, \text{ при } \dot{I}_2 = 0 \text{ – комплексний коефіцієнт передачі напруги в}$$

режимі холостого ходу на виході;

$$G_{22} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}, \text{ при } \dot{U}_1 = 0 \text{ – комплексний вихідний опір в режимі короткого}$$

замикання на вході.

$$\text{Для оборотних чотириполюсників } G_{12} = -G_{21};$$

$$\text{для симетричних, крім того } |G| = G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21} = 1.$$

Параметри H і G є комплексні вхідні та передавальні функції чотириполюсника в режимах холостого ходу і короткого замикання і складають групу гібридних, або змішаних параметрів.

Визначаючи фізичний зміст і значення параметрів чотириполюсника, ми встановили зв'язок між параметрами Z , A , B , H , G і параметрами Y .

Вибираючи в якості вихідної систему рівнянь чотириполюсника в інших формах, можна представити кожен параметр через будь-яку іншу. Формули перерахунку систем параметрів чотириполюсника зведені в таблиці.

Параметри	Z	Y	A	B	H	G
Z	$Z_{11} \quad Z_{12}$ $Z_{21} \quad Z_{22}$	$\frac{Y_{22}}{ Y } \quad -\frac{Y_{12}}{ Y }$ $-\frac{Y_{21}}{ Y } \quad \frac{Y_{11}}{ Y }$	$\frac{A_{11}}{A_{21}} \quad \frac{ A }{A_{21}}$ $\frac{1}{A_{21}} \quad \frac{A_{22}}{A_{21}}$	$\frac{B_{22}}{B_{21}} \quad \frac{1}{B_{21}}$ $\frac{ B }{B_{21}} \quad \frac{B_{11}}{B_{21}}$	$\frac{ H }{H_{22}} \quad \frac{H_{12}}{H_{22}}$ $-\frac{H_{21}}{H_{22}} \quad \frac{1}{H_{21}}$	$\frac{1}{G_{11}} \quad -\frac{G_{12}}{G_{11}}$ $\frac{G_{21}}{G_{11}} \quad \frac{ G }{G_{11}}$
Y	$\frac{Z_{22}}{ Z } - \frac{Z_{12}}{ Z }$ $-\frac{Z_{21}}{ Z } \quad \frac{Z_{11}}{ Z }$	$Y_{11} \quad Y_{12}$ $Y_{21} \quad Y_{22}$	$\frac{A_{22}}{A_{12}} - \frac{ A }{A_{12}}$ $\frac{1}{A_{12}} \quad \frac{A_{11}}{A_{12}}$	$\frac{B_{11}}{B_{12}} - \frac{1}{B_{12}}$ $-\frac{ B }{B_{12}} \quad \frac{B_{22}}{B_{12}}$	$\frac{1}{H_{11}} - \frac{H_{12}}{H_{11}}$ $\frac{H_{21}}{H_{11}} \quad \frac{ H }{H_{11}}$	$\frac{ G }{G_{22}} \quad \frac{G_{12}}{G_{22}}$ $\frac{G_{21}}{G_{22}} \quad \frac{1}{G_{22}}$

Пара- метри	Z	Y	A	B	H	G
A	$\frac{Z_{11}}{Z_{21}} \quad \frac{ Z }{Z_{21}}$ $\frac{1}{Z_{21}} \quad \frac{Z_{22}}{Z_{12}}$	$\frac{Y_{22}}{Y_{21}} \quad \frac{1}{Y_{21}}$ $\frac{ Y }{Y_{21}} \quad \frac{Y_{11}}{Y_{21}}$	$A_{11} \quad A_{12}$ $A_{21} \quad A_{22}$	$\frac{B_{22}}{ B } \quad \frac{B_{12}}{ B }$ $\frac{B_{21}}{ B } \quad \frac{B_{11}}{ B }$	$\frac{ H }{H_{21}} \quad \frac{H_{11}}{H_{21}}$ $\frac{H_{12}}{H_{21}} \quad \frac{1}{H_{21}}$	$\frac{1}{G_{21}} \quad \frac{G_{22}}{G_{21}}$ $\frac{G_{11}}{G_{21}} \quad \frac{ G }{G_{21}}$
B	$\frac{Z_{22}}{Z_{12}} \quad \frac{ Z }{Z_{12}}$ $\frac{1}{Z_{12}} \quad \frac{Z_{11}}{Z_{12}}$	$\frac{Y_{11}}{Y_{12}} \quad \frac{1}{Y_{12}}$ $\frac{ Y }{Y_{12}} \quad \frac{Y_{22}}{Y_{12}}$	$\frac{A_{22}}{ A } \quad \frac{A_{12}}{ A }$ $\frac{A_{21}}{ A } \quad \frac{A_{11}}{ A }$	$B_{11} \quad B_{12}$ $B_{21} \quad B_{22}$	$\frac{1}{H_{12}} \quad \frac{H_{11}}{H_{12}}$ $\frac{H_{22}}{H_{12}} \quad \frac{ H }{H_{12}}$	$\frac{ G }{G_{12}} \quad \frac{G_{22}}{G_{12}}$ $\frac{G_{11}}{G_{12}} \quad \frac{1}{G_{12}}$
H	$\frac{ Z }{Z_{22}} \quad \frac{Z_{12}}{Z_{22}}$ $\frac{Z_{21}}{Z_{22}} \quad \frac{1}{Z_{22}}$	$\frac{1}{Y_{11}} \quad \frac{Y_{12}}{Y_{11}}$ $\frac{Y_{21}}{Y_{11}} \quad \frac{ Y }{Y_{11}}$	$\frac{A_{12}}{A_{22}} \quad \frac{ A }{A_{22}}$ $\frac{1}{A_{22}} \quad \frac{A_{21}}{A_{22}}$	$\frac{B_{12}}{B_{11}} \quad \frac{1}{B_{11}}$ $\frac{ B }{B_{11}} \quad \frac{B_{21}}{B_{11}}$	$H_{11} \quad H_{12}$ $H_{21} \quad H_{22}$	$\frac{G_{22}}{ G } \quad \frac{G_{12}}{ G }$ $\frac{G_{21}}{ G } \quad \frac{G_{11}}{ G }$
G	$\frac{1}{Z_{11}} \quad \frac{Z_{12}}{Z_{11}}$ $\frac{Z_{21}}{Z_{11}} \quad \frac{ Z }{Z_{11}}$	$\frac{ Y }{Y_{22}} \quad \frac{Y_{12}}{Y_{22}}$ $\frac{Y_{21}}{Y_{22}} \quad \frac{1}{Y_{12}}$	$\frac{A_{21}}{A_{11}} \quad \frac{ A }{A_{11}}$ $\frac{1}{A_{11}} \quad \frac{A_{12}}{A_{11}}$	$\frac{B_{21}}{B_{22}} \quad \frac{1}{B_{22}}$ $\frac{ B }{B_{22}} \quad \frac{B_{12}}{B_{22}}$	$\frac{H_{22}}{ H } \quad \frac{H_{12}}{ H }$ $\frac{H_{21}}{ H } \quad \frac{H_{11}}{ H }$	$G_{11} \quad G_{12}$ $G_{21} \quad G_{22}$

Всі перераховані системи власних параметрів чотириполюсника в принципі рівноцінні, тому що характеризують один і той же об'єкт. Однак, в ряді застосувань елементів теорії чотириполюсників та чи інша система параметрів виявляється кращою у порівнянні з іншими. Так, наприклад, в транзисторній техніці найбільшого поширення набули Y-система і H-система параметрів.

5.1.3. Односторонні параметри

Поряд з наведеними вище системами параметрів для характеристики чотириполюсників застосовують параметри холостого ходу і короткого замикання, що утворюють систему односторонніх параметрів. Односторонні параметри визначаються значеннями струму і напруги на одній стороні чотириполюсника при певному режимі на іншій стороні.

З наведених вище власних (типових) параметрів чотириполюсників виберемо ті, що відповідають зазначеним умовам:

вхідний опір при холостому ході на виході:

$$Z_{1X} = \frac{1}{Y_{1X}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} (\dot{I}_2 = 0) = Z_{11};$$

вихідний опір при холостому ході на вході:

$$Z_{2X} = \frac{1}{Y_{2X}} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} (\dot{I}_1 = 0) = Z_{22};$$

вихідний опір при короткому замиканні на виході:

$$Z_{1K} = \frac{1}{Y_{1K}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} (\dot{U}_2 = 0) = \frac{1}{Y_{11}};$$

вихідний опір при короткому замиканні на вході:

$$Z_{2K} = \frac{1}{Y_{2K}} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} (\dot{U}_1 = 0) = \frac{1}{Y_{22}}.$$

Односторонні параметри характеризують тільки оборотні чотириполюсники. Для запису рівнянь необоротного чотириполюсника параметрів холостого ходу і короткого замикання недостатньо.

Це випливає з того, що односторонні параметри пов'язані між собою співвідношенням:

$$\frac{Z_{1K}}{Z_{1X}} = \frac{Z_{2K}}{Z_{2X}},$$

і, отже, тільки три з них є незалежними.

Для симетричних чотириполюсників

$$Z_{1X} = Z_{2X}; \quad Z_{1K} = Z_{2K},$$

тобто симетричні чотириполюсники характеризуються тільки двома односторонніми параметрами.

Односторонні параметри можуть бути виражені через будь-яку систему власних параметрів. У свою чергу, будь-яка система власних параметрів в разі оборотного чотириполюсника може бути виражена через односторонні параметри.

Параметри чотириполюсника можуть бути визначені експериментально або шляхом розрахунків.

Експериментально параметри визначаються шляхом вимірювання комплексних значень відповідних напруг і струмів в режимах холостого ходу або короткого замикання і подальшій обробці результатів вимірювань.

Для розрахунку параметрів чотириполюсника необхідно знати його схему. Розрахунок невідомих напруг і струмів, що визначають той чи інший параметр, може виконуватися будь-яким з відомих методів, способів або прийомів розрахунку електричних кіл.

5.2. Схеми заміщення чотириполюсників

Кожній системі рівнянь чотириполюсника відповідають певні еквівалентні схеми, або схеми заміщення. Ці схеми доповнюють перелік варіантів представлення чотириполюсника. Сутність подання чотириполюсника еквівалентною схемою полягає в незмінності струмів і напруг на його зовнішніх затискачах.

Еквівалентна П-подібна схема, відповідна Y-рівнянням, представлена на рисунку 5.3.а. У ній провідності гілок виражені через Y-параметри.

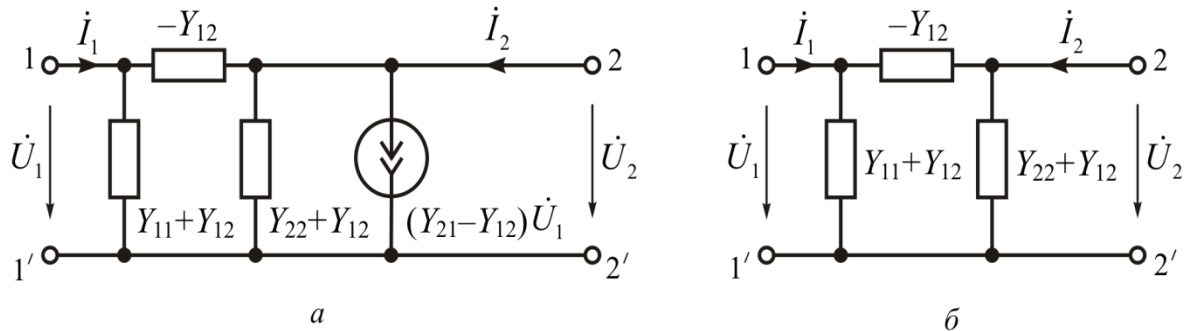


Рис. 5.3

В відповідності схеми системі рівнянь неважко перекопати:

$$\dot{I}_1 = Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2 = Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2 - Y_{12}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_1 = (Y_{11} + Y_{12})\dot{U}_1 - Y_{12}(\dot{U}_1 - \dot{U}_2);$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_2 &= Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2 = Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2 - Y_{12}\dot{U}_2 + Y_{12}\dot{U}_1 - Y_{12}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2 = \\ &= (Y_{22} + Y_{12})\dot{U}_2 - Y_{12}(\dot{U}_2 - \dot{U}_1) + (Y_{21} - Y_{12})\dot{U}_1. \end{aligned}$$

Число елементів в еквівалентній схемі дорівнює числу параметрів в системі, тобто чотирьом. Залежне джерело струму $\dot{J} = (Y_{21} - Y_{12})\dot{U}_1$ міститься в еквівалентній схемі необоротного чотириполюсника.

Схема заміщення оборотних (пасивних) чотириполюсників містить три елементи (рис. 5.3 б): залежне джерело струму в ній відсутнє, так як $Y_{12} = Y_{21}$ і, отже, $(Y_{21} - Y_{12})\dot{U}_1 = 0$.

Рівнянням чотириполюсника в Z-формі відповідає T-подібна схема заміщення, в якій опори гілок виражені через Z-параметри (рис.5.4). Джерело ЕРС $\dot{E} = (Z_{21} - Z_{12})\dot{I}_1$ містять еквівалентні схеми необоротних

чотириполіусників. У схемі заміщення оборотного чотириполіусника залежне джерело ЕРС відсутнє, так як $Z_{12} = Z_{21}$ (Рис.5.4 б).

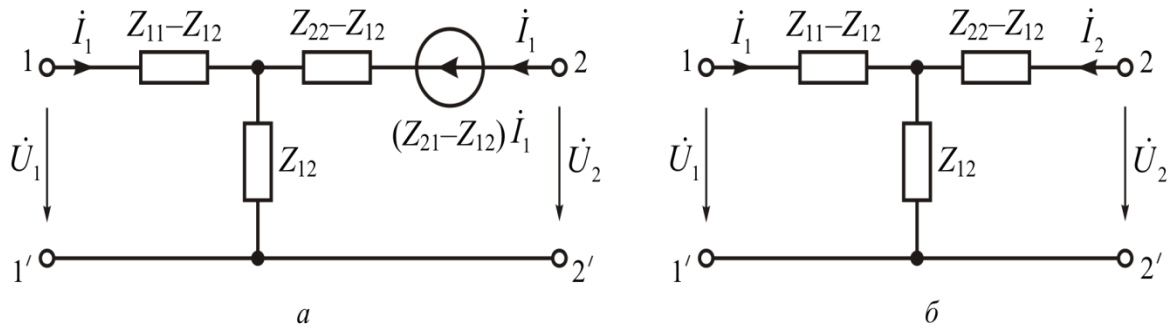


Рис. 5.4.

Параметри елементів схем заміщення чотириполіусників можуть бути виражені також через інші власні параметри. Перехід здійснюють, використовуючи співвідношення, що зв'язують відповідні системи параметрів.

Схеми заміщення необоротних чотириполіусників, що містять залежні джерела, застосовують при аналізі кіл, до складу яких входять напівпровідникові або електронні прилади.

5.3. Комплексні функції чотириполіусників

5.3.1. Вхідні комплексні функції

До вхідних комплексних функцій належать вхідний комплексний опір $Z_{вх}$ та вхідна комплексна провідність $Y_{вх}$.

Як правило, комплексні функції визначають для так званих "навантажених чотириполіусників", тобто, обліку підлягають не тільки параметри чотириполіусників, але і параметри зовнішніх кіл, зокрема, генератора і навантаження.

Представимо чотириполіусник у вигляді схеми (рис.5.5), в якій позначені Z_i – внутрішній опір генератора (джерела), Z_n – опір навантаження.

Вхідний опір з боку затискачів $1 - 1'$ позначимо через $Z_{вх}$, а вхідний опір з боку затискачів $2 - 2'$ – через $Z_{вих}$.

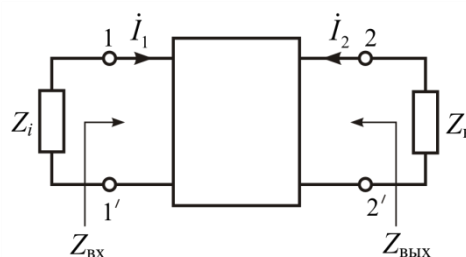


Рис. 5.5

Опори Z_{ex} і $Z_{вих}$, визначені з урахуванням зовнішніх кіл, називаються вхідними опорами навантаженого чотириполюсника.

Представимо вхідний опір через власні параметри і опір навантаження. В даному випадку зручно скористатися А-параметрами

$$Z_{ex} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{A_{11}\dot{U}_2 - A_{12}\dot{I}_2}{A_{21}\dot{U}_2 - A_{22}\dot{I}_2} = \frac{A_{11}Z_n + A_{12}}{A_{21}Z_n - A_{22}}.$$

З огляду на зв'язок між А- та Z-параметрами, надамо виразу наступний вигляд:

$$Z_{ex} = Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_n + Z_{22}} \quad (5.7)$$

Вхідна провідність через А-параметри:

$$Y_{ex} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1} = \frac{\frac{A_{21}}{Y_n} + A_{22}}{\frac{A_{11}}{Y_n} + A_{12}}$$

і далі через Y-параметри

$$Y_{ex} = Y_{11} - \frac{Y_{12}Y_{21}}{Y_n + Y_{22}} \quad (5.8)$$

Для визначення вихідних опору і провідності використаємо В-параметри і далі перейдемо до Z- і Y-параметрів, вважаючи при цьому $\dot{E} = 0$

$$Z_{вих} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = Z_{22} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_i + Z_{11}}; \quad (5.9)$$

$$Y_{вих} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2} = Y_{22} - \frac{Y_{12}Y_{21}}{Y_i + Y_{11}}. \quad (5.10)$$

У співвідношеннях (5.7), (5.8), (5.9), (5.10), перші доданки представляють комплексні вхідні функції чотириполюсника в режимі холостого ходу або короткого замикання, а другі доданки враховують параметри зовнішніх кіл, з якими з'єднаний чотириполюсник.

5.3.2. Комплексні передавальні функції

З комплексних передавальних функцій на практиці часто використовують комплексні коефіцієнти передачі напруги і струму з урахуванням параметрів зовнішніх кіл – внутрішнього опору джерела Z_i і опору навантаження Z_n . В

даному випадку комплексні передавальні функції називають робочими комплексними коефіцієнтами передачі.

5.3.2.1. Робочий комплексний коефіцієнт передачі напруги

$$\dot{K}_{U_{\text{роб}}} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{E}} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z_i} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} \cdot \frac{1}{1 + Y_{\text{ex}} Z_i} = \dot{K}_U \cdot \frac{1}{1 + \frac{Y_{\text{ex}}}{Y_i}}, \quad (5.11)$$

де \dot{K}_U – коефіцієнт передачі напруги без урахування внутрішнього опору джерела – випадок ідеального джерела.

Вираз для \dot{K}_U через власні параметри чотиріполюсника і параметри навантаження має вид

$$\dot{K}_U = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{U}_2}{A_{11}\dot{U}_2 - A_{12}\dot{I}_2} = \frac{1}{A_{11} + A_{12}Y_n} = \frac{-Y_{21}}{Y_{22} + Y_n} \quad (5.12)$$

5.3.2.2. Робочий комплексний коефіцієнт передачі струму

$$\dot{K}_{I_{\text{роб}}} = \frac{-\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{-\dot{I}_2}{\frac{\dot{E}}{Z_i}} = \frac{-\dot{I}_2 Z_i}{\dot{I}_1 Z_i + \dot{I}_1 Z_{\text{ex}}} = \dot{K}_I \cdot \frac{Z_i}{Z_i + Z_{\text{ex}}} = \dot{K}_I \cdot \frac{1}{1 + \frac{Z_{\text{ex}}}{Z_i}} \quad (5.13)$$

де \dot{K}_I – комплексний коефіцієнт передачі струму без урахування внутрішнього опору джерела – випадок ідеального джерела.

Вираз для \dot{K}_I через власні параметри чотиріполюсника і параметри навантаження має вид

$$\dot{K}_I = \frac{-\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{-\dot{I}_2}{A_{21}\dot{U}_2 - A_{22}\dot{I}_2} = \frac{1}{A_{21}Z_n + A_{22}} = \frac{Z_{21}}{Z_{22} + Z_n} \quad (5.14)$$

У випадках, коли втрати, зумовлені внутрішнім опором джерела малі, комплексні коефіцієнти передачі напруги і струму розраховуються відповідно до співвідношень (5.12), (5.14).

5.4. Характеристичні параметри

Крім розглянутих вище параметрів, в теорії чотиріполюсників, зокрема при аналізі електричних фільтрів, ліній зв'язку та ін., використовують групу характеристичних параметрів, в яку входять характеристичні опори і характеристичний коефіцієнт передачі.

Характеристичні параметри використовують для опису взаємних чотириполіусників.

Розглянемо навантажений чотириполіусник (рис. 5.5).

Нехай внутрішній опір джерела Z_i і опір навантаження Z_n підібрані відповідно до умов узгодження: $Z_i = Z_{\text{вх}}$ і $Z_n = Z_{\text{вих}}$. Значить, є два опори $Z_{1c} = Z_i$ і $Z_{2c} = Z_n$, при яких вхідний опір чотириполіусника $Z_{\text{вх}}$, навантаженого опором Z_{2c} , дорівнює Z_{1c} і вихідний опір $Z_{\text{вих}}$ чотириполіусника, навантаженого з боку затискачів $1-1'$ опором Z_{1c} , дорівнює Z_{2c} , тобто має місце узгоджений режим, а саме:

$$Z_{1c} = Z_{\text{вх}}; \quad Z_{2c} = Z_{\text{вих}} \quad (5.15)$$

Такі два опори називаються характеристичними.

З огляду на (5.15), запишемо співвідношення для характеристичних опорів через типові параметри:

$$\begin{cases} Z_{1c} = Z_{\text{вх}} = Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{22} + Z_{2c}} \\ Z_{2c} = Z_{\text{вих}} = Z_{22} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{11} + Z_{1c}} \end{cases} \quad (5.16)$$

Розв'язуючи систему (5.16) щодо Z_{1c} і Z_{2c} та використовуючи таблицю переходу від однієї системи параметрів до іншої, отримаємо:

$$\begin{cases} Z_{1c} = \sqrt{\frac{Z_{11}(Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21})}{Z_{22}}} = \sqrt{\frac{Z_{11}}{Y_{11}}} \\ Z_{2c} = \sqrt{\frac{Z_{22}(Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21})}{Z_{11}}} = \sqrt{\frac{Z_{22}}{Y_{22}}} \end{cases}$$

Характеристичні параметри можуть бути виражені через односторонні, а саме:

$$Z_{1c} = \sqrt{Z_{1x}Z_{1k}}; \quad Z_{2c} = \sqrt{Z_{2x}Z_{2k}}.$$

Для симетричних чотириполіусників

$$Z_{1c} = Z_{2c} = \sqrt{Z_x Z_k}.$$

Отже, для забезпечення узгодженого режиму роботи чотириполюсника необхідно відповідно до його характеристичних опорів вибрати внутрішній опір джерела і опір навантаження.

Характеристичний коефіцієнт передачі чотириполюсника визначається з виразу $\dot{K}_U \dot{K}_I = e^{-2\gamma}$, який відповідає експоненційній формі представлення комплексних функцій кіл.

Таким чином, характеристичний коефіцієнт передачі – це половина натурального логарифму відношення добутків комплексних напруги і струму на вході і виході чотириполюсника

$$\gamma = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\dot{K}_U \dot{K}_I}.$$

Використовуючи вирази для \dot{K}_U і для \dot{K}_I , представимо характеристичний коефіцієнт передачі через власні і односторонні параметри для симетричного чотириполюсника, що працює в узгодженому режимі:

$$\gamma = \frac{1}{2} \ln \left[-\frac{(Z_{22} + Z_n)(Y_{22} + Y_n)}{Y_{21}Z_{21}} \right] = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{Z_{11}Y_{11}} + 1}{\sqrt{Z_{11}Y_{11}} - 1} = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{\frac{Z_{1x}}{Z_{1k}}} + 1}{\sqrt{\frac{Z_{1x}}{Z_{1k}}} - 1}.$$

У загальному випадку характеристичний коефіцієнт передачі є комплексним, тобто $\gamma = \alpha + j\beta$. Щоб з'ясувати сенс дійсної та уявної частин, представимо комплексний коефіцієнт передачі напруги через характеристичний коефіцієнт передачі

$$\frac{\dot{U}_2 \cdot (-\dot{I}_2)}{\dot{U}_1 \cdot \dot{I}_1} = \frac{\dot{U}_2 \cdot \dot{U}_2 \cdot Z_c}{\dot{U}_1 \cdot \dot{U}_1 \cdot Z_c} = \left(\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} \right)^2 = e^{-2\gamma}$$

або
$$\dot{K}_U = \frac{U_2 e^{j\psi_2}}{U_1 e^{j\psi_1}} = \frac{U_2}{U_1} e^{j(\psi_2 - \psi_1)} = e^{-(\alpha + j\beta)} = e^{-\alpha} \cdot e^{-j\beta}.$$

Значить,
$$\frac{U_2}{U_1} = e^{-\alpha}; \quad \alpha = -\ln \frac{U_2}{U_1}; \quad \beta = \psi_1 - \psi_2,$$

де α – коефіцієнт загасання, що визначає ослаблення сигналу при його проходженні через чотириполюсник;

β – коефіцієнт фази, що характеризує зміну фази сигналу при його проходженні через чотириполюсник.

Такий же висновок впливає і з розгляду характеристичного коефіцієнта передачі струму.

Отже, характеристичний коефіцієнт передачі чотириполосника визначає і амплітудні, і фазові зміни сигналу при його проходженні від входу до виходу чотириполосника.

5.5. Складні чотириполосники

5.5.1. Параметри складних чотириполосників

Складними називаються чотириполосники, які представляють собою сукупність декількох складових чотириполосників, певним чином з'єднаних один з одним (Рис. 5.6). Важливою задачею є визначення параметрів складного чотириполосника по відомим параметрам його складових.

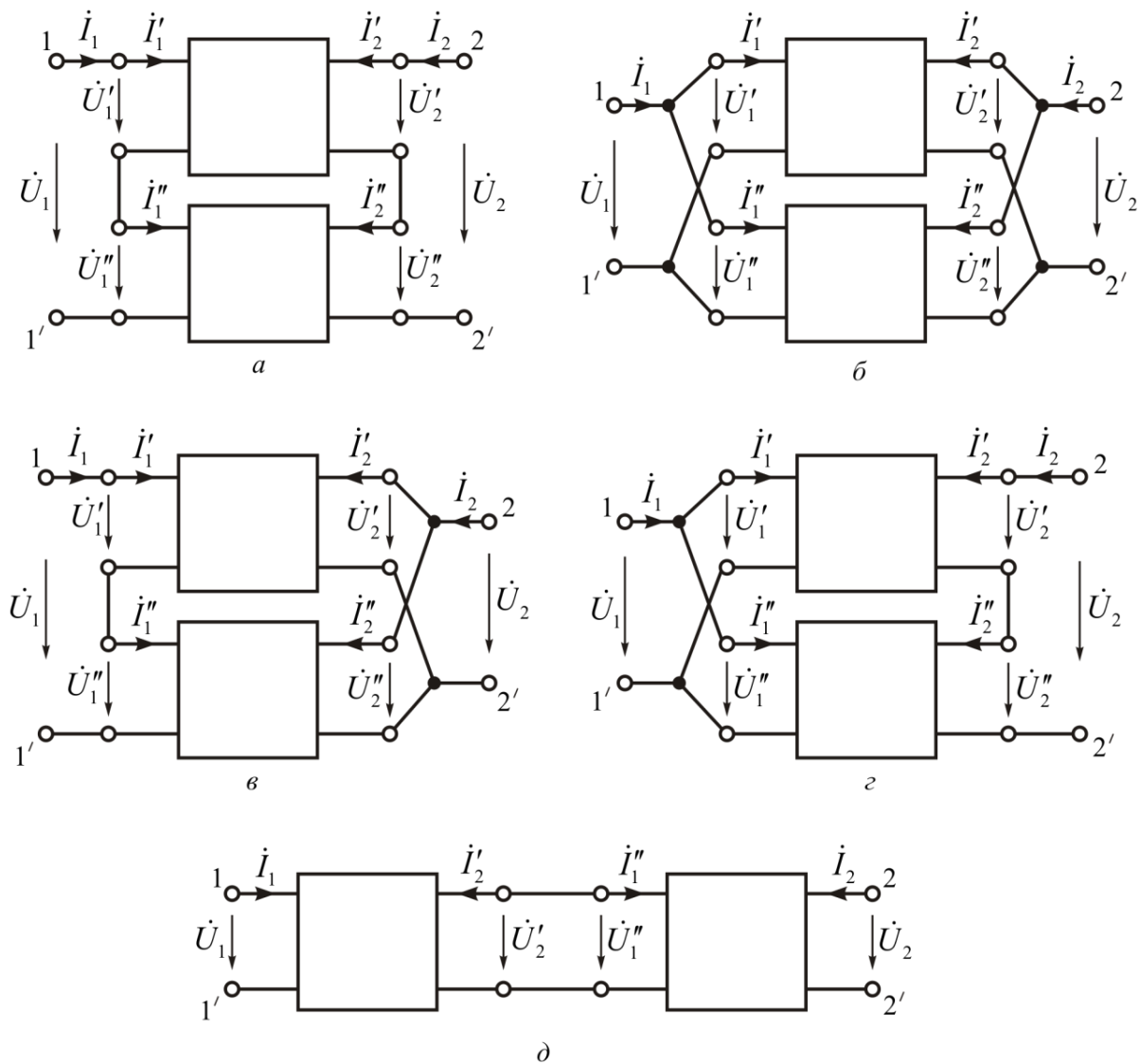


Рис. 5.6

Розрізняють такі види з'єднань чотириполосників:

– *послідовне* – з'єднання, при якому входи складових чотириполіусників з'єднані між собою послідовно і виходи складових чотириполіусників з'єднані між собою послідовно (рис.5.6,а);

– *паралельне* – з'єднання, при якому входи складових чотириполіусників з'єднані між собою паралельно і їх виходи між собою з'єднані паралельно (рис.5.6,б);

– *послідовно-паралельне* – з'єднання, при якому входи складових чотириполіусників з'єднані між собою послідовно, а їх виходи – паралельно (рис.5.6,в);

– *паралельно-послідовне* – з'єднання, при якому входи складових чотириполіусників з'єднані між собою паралельно, а їх виходи – послідовно (рис.5.6,г);

– *каскадне* – з'єднання, при якому вихід попереднього складового чотириполіусника з'єднаний зі входом наступного (рис.5.6,д).

Параметри складного чотириполіусника певним чином пов'язані з параметрами складових і залежать від виду з'єднання. Для встановлення цих зв'язків вибирають певну форму рівнянь чотириполіусника і знаходять співвідношення між вхідними та вихідними величинами складного чотириполіусника через параметри його складових. При цьому, як правило, використовують матричну форму запису рівнянь.

Виведемо співвідношення для розрахунку параметрів складних чотириполіусників при різних видах з'єднань.

Послідовне з'єднання

При послідовному з'єднанні зручно скористатися Z -параметрами. Складовим чотириполіусникам відповідають наступні системи рівнянь

$$\begin{vmatrix} \dot{U}'_1 \\ \dot{U}'_2 \end{vmatrix} = |Z'| \times \begin{vmatrix} \dot{I}'_1 \\ \dot{I}'_2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} \dot{U}''_1 \\ \dot{U}''_2 \end{vmatrix} = |Z''| \times \begin{vmatrix} \dot{I}''_1 \\ \dot{I}''_2 \end{vmatrix},$$

де $|Z'|$, $|Z''|$ – матриці Z -параметрів першого і другого чотириполіусників відповідно.

Для даної схеми справедливі такі рівності:

$$\begin{vmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{U}'_1 \\ \dot{U}'_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dot{U}''_1 \\ \dot{U}''_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{U}'_1 + \dot{U}''_1 \\ \dot{U}'_2 + \dot{U}''_2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{I}'_1 \\ \dot{I}'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{I}''_1 \\ \dot{I}''_2 \end{vmatrix}.$$

З огляду на це, запишемо рівняння для складного чотириполіусника:

$$\begin{vmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{vmatrix} = |Z| \times \begin{vmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{vmatrix} = \{|Z'| + |Z''|\} \times \begin{vmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{vmatrix}.$$

Звідси $|Z| = |Z'| + |Z''|$, (5.17)

тобто матриця Z -параметрів складного чотириполюсника, утвореного послідовним з'єднанням складових, дорівнює сумі матриць Z -параметрів складових чотириполюсників.

Паралельне з'єднання

При паралельному з'єднанні використовують рівняння в Y -формі. Складовим чотириполюсникам відповідають такі системи рівнянь:

$$\begin{vmatrix} \dot{I}'_1 \\ \dot{I}'_2 \end{vmatrix} = |Y'| \times \begin{vmatrix} \dot{U}'_1 \\ \dot{U}'_2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} \dot{I}''_1 \\ \dot{I}''_2 \end{vmatrix} = |Y''| \times \begin{vmatrix} \dot{U}''_1 \\ \dot{U}''_2 \end{vmatrix},$$

де $|Y'|$, $|Y''|$ – матриці Y -параметрів складових чотириполюсників.

Для даної схеми справедливі наступні співвідношення:

$$\begin{vmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{U}'_1 \\ \dot{U}'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{U}''_1 \\ \dot{U}''_2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{I}'_1 \\ \dot{I}'_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dot{I}''_1 \\ \dot{I}''_2 \end{vmatrix}.$$

З урахуванням цих співвідношень рівняння складного чотириполюсника набувають виду:

$$\begin{vmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{vmatrix} = |Y| \times \begin{vmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{vmatrix} = \{|Y'| + |Y''|\} \times \begin{vmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{vmatrix},$$

звідки $|Y| = |Y'| + |Y''|$, (5.18)

тобто матриця Y -параметрів складного чотириполюсника, утвореного паралельним з'єднанням складових, дорівнює сумі матриць Y -параметрів складових чотириполюсників.

Діючи аналогічно по відношенню до послідовно-паралельного та паралельно-послідовного з'єднання, легко встановити, що:

для послідовно-паралельного з'єднання $|H| = |H'| + |H''|$; (5.19)

для паралельно-послідовного з'єднання $|G| = |G'| + |G''|$. (5.20)

Каскадне з'єднання

Для каскадного з'єднання використовують рівняння в A -формі.

Складовим чотириполюсникам відповідають такі системи рівнянь:

$$\begin{vmatrix} \dot{U}'_1 \\ \dot{I}'_1 \end{vmatrix} = |A'| \times \begin{vmatrix} \dot{U}'_2 \\ -\dot{I}'_2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} \dot{U}''_1 \\ \dot{I}''_1 \end{vmatrix} = |A''| \times \begin{vmatrix} \dot{U}''_2 \\ -\dot{I}''_2 \end{vmatrix},$$

де $|A'|$, $|A''|$ – матриці A -параметрів складових чотириполіусників.

Зв'язок між струмами і напругами встановлюється співвідношеннями:

$$\begin{vmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{U}'_1 \\ \dot{I}'_1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} \dot{U}''_1 \\ -\dot{I}''_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{U}'_2 \\ -\dot{I}'_2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} \dot{U}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{U}''_2 \\ -\dot{I}''_2 \end{vmatrix}.$$

З огляду на це, запишемо:

$$\begin{vmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{vmatrix} = |A'| \times \begin{vmatrix} \dot{U}'_2 \\ -\dot{I}'_2 \end{vmatrix}$$

тобто $|A| = |A'| \times |A''|$. (5.21)

Таким чином, матриця A -параметрів складного чотириполіусника, утвореного каскадним з'єднанням складових, дорівнює добутку їх матриць A -параметрів.

Враховуючи, що множення матриць не підпорядковане перестановочному закону, множення матриць складових чотириполіусників необхідно здійснювати в тому порядку, в якому вони з'єднані.

Крім того, необхідно врахувати, що співвідношення (5.17), (5.18), (5.19), (5.20) справедливі тільки для регулярних з'єднань.

Умова регулярності з'єднань чотириполіусників формулюється так: через обидва вхідних затискачі кожного складового чотириполіусника повинні протікати рівні за величиною і протилежні за напрямком струми; аналогічні умови відносяться і до вихідних затискачів.

При регулярному з'єднанні параметри складових чотириполіусників залишаються незмінними, а, отже, матриця параметрів кожного чотириполіусника залишається такою ж якою вона була до з'єднання чотириполіусників.

Каскадне з'єднання завжди відповідає умові регулярності, для інших видів з'єднань ця умова виконується не завжди.

5.5.2. Чотириполіусники зі зворотним зв'язком

Численні радіоелектронні пристрої, зокрема, автогенератори, підсилювачі представляють собою пристрої зі зворотним зв'язком. Для цих пристроїв характерно, що частина напруги або струму з виходу пристрою подається через так зване коло зворотного зв'язку на його вхід.

Застосування зворотного зв'язку переслідує різні цілі. Наприклад, в автогенераторах зворотний зв'язок забезпечує автоколивальний режим, тобто підтримує режим незатухаючих коливань; в підсилювачах – корекцію частотних характеристик, зменшення нелінійних спотворень, стабілізацію режимів електронних і напівпровідникових приладів та інші функції.

У загальному вигляді структурну схему пристрою зі зворотним зв'язком можна представити таким чином (рис.5.7):

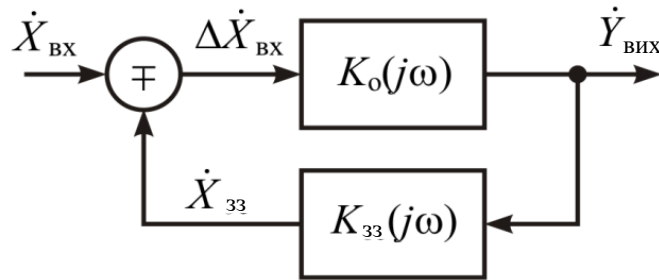


Рис. 5.7

Основний чотириполіусник, або чотириполіусник прямої передачі, характеризується передавальною функцією $K(j\omega) = \frac{\dot{X}_{вих}}{\dot{X}_{вх}}$, чотириполіусник зворотного зв'язку має передавальну функцію $K_{oc}(j\omega) = \frac{\dot{X}_{oc}}{\dot{X}_{вих}}$. Коефіцієнт зворотного зв'язку $K_{oc}(j\omega)$ показує, яка частина вихідного сигналу передається назад на вхід; в зв'язку з цим його називають коефіцієнтом зворотного зв'язку. Як правило, $|\dot{K}_{oc}| \leq 1$, тобто в якості чотириполіусника зворотного зв'язку застосовуються пасивні лінійні чотириполіусники.

Сигнал на вході основного чотириполіусника:

$$\dot{X}'_{вх} = \dot{X}_{вх} + \dot{X}_{oc} = \dot{X}_{вх} + \dot{K}_{oc} \dot{X}_{вих}.$$

Сигнал на вході пристрою

$$\dot{X}_{вих} = \dot{K} \cdot \dot{X}'_{вх} = \dot{K} (\dot{X}_{вх} + \dot{K}_{oc} \dot{X}_{вих}).$$

Коефіцієнт передачі пристрою, охопленого зворотним зв'язком

$$\dot{K}_o = \frac{\dot{X}_{вих}}{\dot{X}_{вх}} = \frac{\dot{K}}{1 - \dot{K}_{oc} \dot{K}}. \quad (5.22)$$

Наведене співвідношення є основним в теорії чотириполіусників зі зворотним зв'язком. Воно показує, що коефіцієнт передачі системи в значній мірі залежить від коефіцієнта передачі чотириполіусника зворотного зв'язку. Регулюючи коефіцієнт передачі чотириполіусника зворотного зв'язку, можна в широких межах змінювати коефіцієнт передачі всієї системи. Це особливо важливо в тих випадках, коли зміна коефіцієнта передачі основного чотириполіусника з певних причин ускладнена або неможлива.

Величина $\dot{K}_{oc}\dot{K}$ характеризує підсилення петлі зворотного зв'язку.

Залежно від співвідношення між коефіцієнтом передачі основного чотириполіусника і коефіцієнта передачі усієї системи розрізняють додатній і від'ємний зворотний зв'язок.

Додатній зворотний зв'язок має місце, якщо $|\dot{K}_o| > |\dot{K}|$; для від'ємного зворотного зв'язку $|\dot{K}_o| < |\dot{K}|$. При додатному зворотному зв'язку сигнал на вході основного чотириполіусника представляє суму вхідного сигналу і сигналу зворотного зв'язку, при від'ємному зворотному зв'язку – різницю зазначених сигналів. Додатній зворотний зв'язок застосовується в автогенераторах, від'ємний – в підсилувачах.

Для реалізації систем зі зворотним зв'язком можна застосувати одне з розглянутих вище з'єднань складових чотириполіусників.

Залежно від способу з'єднання основного чотириполіусника й чотириполіусника зворотного зв'язку розрізняють:

- послідовний зворотний зв'язок по напрузі (при послідовно-паралельному з'єднанні);
- послідовний зворотний зв'язок по струму (при послідовному з'єднанні);
- паралельний зворотний зв'язок по напрузі (при паралельному з'єднанні);
- паралельний зворотний зв'язок по струму (при паралельно-послідовному з'єднанні).

6. Перехідні процеси в лінійних електричних колах

6.1. Причини виникнення перехідних процесів в електричних колах

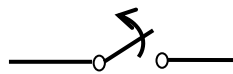
Будь-яке електричне коло, що містить реактивні елементи, може перебувати в одному з двох варіантів стану – стаціонарному (усталеному) або нестаціонарному (перехідному). Відповідно до цього називають режими в електричних колах, а також процеси в них, а саме – стаціонарний, або усталений, режим і перехідний режим; стаціонарні процеси та перехідні процеси. Електричне коло знаходиться в стаціонарному стані, якщо струми і напруги в ньому не змінюються в часі (режим постійного струму, кола постійного струму) або є гармонічними функціями часу (режим гармонічного струму, кола гармонічного струму). Окремим випадком стаціонарного стану є стан спокою, коли струми і напруги в колі відсутні, тобто дорівнюють нулю.

До цих пір мова йшла саме про стаціонарні процеси, або про кола, що перебувають в усталеному режимі.

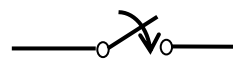
Перехідні процеси виникають в електричних колах, які містять реактивні елементи, при переході їх з одного стаціонарного стану в інший. Цей перехід пов'язаний зі зміною запасів енергії в колі, або в елементах, які входять до його складу.

Поширені причини виникнення перехідних процесів (їх умовно називають комутаціями): підключення або відключення джерел живлення, поява або зникнення на вході кола зовнішніх впливів (сигналів), зміни параметрів елементів кола та інші.

На схемах комутації умовно позначають у вигляді ключа:



Розмикання



Замикання.

Вважають, що комутації відбуваються в момент $t = 0$ миттєво, тобто тривалість комутацій $t_k = 0$. Моменти часу до і після комутації, які безпосередньо до неї примикають, позначають відповідно $t(0_-)$ і $t(0_+)$ (рис. 6.1).

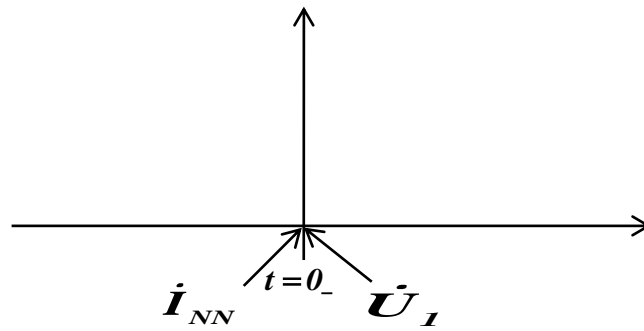


Рис. 6.1

Виникнення перехідних процесів пов'язано з тим, що енергія електричного поля конденсатора і енергія магнітного поля котушки індуктивності не можуть змінюватися миттєво, скоком. Дійсно, це було б можливим при нескінченно великій потужності джерела (навантаження), що є нереальним. (Згадаймо:

$P = \frac{dW}{dt}$; якщо $dt \rightarrow 0$, то $P \rightarrow \infty$). Отже,

$$W_L(0_-) = W_L(0_+) \quad (6.1)$$

$$W_C(0_-) = W_C(0_+) \quad (6.2)$$

Твердження про неможливість миттєвих змін енергії, що запасається в реактивних елементах електричного кола, справедливе в межах класичної теорії електрики. У квантовій теорії цей факт – реальний.

Перехідний режим в електричному колі свідчить про те, що перехід його з одного усталеного стану в інший відбувається не миттєво, а протягом певного часу.

В резистивних електричних колах, накопичення енергії в яких не відбувається, перехідні процеси не виникають, тобто перехід резистивних електричних кіл з одного стаціонарного стану в інший відбувається миттєво.

Перехідні процеси, з одного боку, негативно впливають на характеристики і параметри пристроїв і систем, з іншого – можуть бути використані з певною метою. У зв'язку з цим аналізу перехідних процесів в електричних колах приділяють значну увагу.

Аналіз перехідних процесів полягає в розрахунку і дослідженні струмів і напруг, які діють в електричному колі, на відріжку часу від моменту комутації до нескінченності, тобто до набуття електричним колом усталеного режиму. Він передбачає використання певних положень, понять, термінів, прийомів.

Звернемо увагу на основні з них.

6.2. Закони комутації, початкові умови

Неможливість миттєвих змін запасу енергії в колі обумовлена принципом безперервності в часі потокозчеплення індуктивності $\psi = Li$ і заряду ємності $q = Cu$ і лежить в основі законів комутації.

По суті рівності (6.1), (6.2) являють собою закони комутації. Проте їх формулюють, як правило, в іншому вигляді.

Згадаймо, що для лінійних енергоємних елементів справедливі співвідношення:

для індуктивності, як спрощеної моделі котушки індуктивності:

$$W_L(t) = \frac{Li^2(t)}{2} \quad (6.3)$$

для ємності, як спрощеної моделі конденсатора:

$$W_C(t) = \frac{Cu^2(t)}{2} \quad (6.4)$$

Враховуючи (6.1), (6.2) і припускаючи, що $L = const$, $C = const$, отримаємо загальноприйнятий запис законів комутації:

1-й закон. У початковий момент після комутації струм в індуктивності $i_L(0_+)$ зберігає напрямок і значення, які мали місце безпосередньо перед комутацією $i_L(0_-)$, а далі плавно змінюється, починаючи з цього значення:

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) \quad (6.5)$$

2-й закон. У початковий момент після комутації напруга на ємності $u_C(0_+)$ зберігає полярність і значення, які мали місце безпосередньо перед комутацією $u_C(0_-)$, а далі плавно змінюється, починаючи з цього значення:

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) \quad (6.6)$$

Отже, струм в індуктивності і напруга на ємності в момент комутації не змінюються. У той же час, миттєво можуть змінюватися струм в опорі і ємності, а також напруга в опорі і індуктивності.

До речі, дієвість законів комутації може бути доведена по іншому, а саме – на підставі законів Кірхгофа.

І, нарешті, ще одне зауваження – в ряді практичних схем при їх макроскопічному дослідженні перехідні процеси протікають з формальними ознаками порушень законів комутації. Ці специфічні деталі ми не розглядаємо.

Початковими умовами називають значення струмів і напруг на елементах і ділянках кола в момент комутації, тобто при $t = 0$.

Розрізняють незалежні початкові умови – струм в індуктивності $i_L(0)$ і напруга на ємності $u_C(0)$, і залежні початкові умови – решта струмів і напруг.

Крім того, виділяють нульові початкові умови і ненульові початкові умови.

Нульові та ненульові початкові умови визначають відносно незалежних початкових умов, тобто:

– початкові умови *нульові*, якщо $i_L(0) = 0$; $u_C(0) = 0$;

– початкові умови *ненульові*, якщо $i_L(0) \neq 0$; $u_C(0) \neq 0$.

При нульових початкових умовах індуктивність в момент комутації еквівалентна розриву в колі, а ємність – короткому замиканню.

Якщо початкові умови ненульові, індуктивність в момент комутації еквівалентна джерелу струму, при чому $j = i_L(0)$, а ємність – джерелу ЕРС $e = u_C(0)$.

Зауважимо, ми не розглядаємо випадки, коли комутації в електричних колах супроводжуються виникненням іскри або електричної дуги.

6.3. Класичний метод аналізу перехідних процесів

Важливе місце в теорії електричних кіл займають дослідження проходження через кола електричних сигналів. По суті, це – дослідження специфічного варіанту перехідних процесів, що виникають під впливом діючого на вході кола сигналу. Надалі ми розглянемо проходження через електричні кола сигналів окремо.

Перехідні процеси в електричних колах, в тому числі проходження через них сигналів, як варіанту перехідних процесів, можна аналізувати декількома методами:

– часовими, до яких відноситься класичний метод, а також метод накладання (інтегралу накладання);

– спектральним, або частотним;

– операторним.

Методи мають переваги і недоліки, вибирають їх залежно від характеру задачі та деяких специфічних міркувань. Ми їх розглянемо послідовно.

У загальному випадку процеси в лінійному електричному колі описуються лінійним диференціальним рівнянням з постійними коефіцієнтами виду:

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = f(t), \quad (6.7)$$

де $x(t)$ – часова функція, яка визначає невідому, шукану величину;

$f(t)$ – функція, яка визначає зовнішню дію;

a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 – постійні коефіцієнти, які залежать від параметрів елементів кола;

n – порядок рівняння, відповідний порядку електричного кола, який визначається загальною кількістю не скомпенсованих реактивних елементів в складі кола.

Рівняння наведеного вище виду отримують після перетворення рівнянь Кірхгофа (систем рівнянь для розгалужених кіл) з урахуванням відомих співвідношень, що встановлюють зв'язок між напругою і струмом в реактивних елементах:

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}; \quad i_L(t) = \frac{1}{L} \int u_L(t) dt; \quad (6.8)$$

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}; \quad u_C(t) = \frac{1}{C} \int i_C(t) dt. \quad (6.9)$$

Класичний метод аналізу перехідних процесів базується на інтегруванні диференціальних рівнянь, які описують процеси в колі. Його сутність полягає в тому, що після складання диференціального рівняння післякомутаційного кола його рішення, яке задовольняє заданим початковим умовам, записують у вигляді суми двох складових:

– часткового рішення неоднорідного рівняння – вимушеної складової x_{np} ;

– загального рішення однорідного рівняння – вільної складової x_e .

Отже,
$$x(t) = x_{np} + x_e. \quad (6.10)$$

При цьому
$$x_e = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t}, \quad (6.11)$$

де A_k – постійна інтегрування;

p_k – корені характеристичного рівняння, яке відповідає рівнянню післякомутаційного кола;

n – порядок рівняння (порядок кола).

Постійні інтегрування визначають з урахуванням початкових умов для шуканої функції та її похідних.

Вимушена складова відповідає вимушеному усталеному режиму, тобто режиму, зумовленому зовнішньою дією.

Вільна складових перехідного процесу обумовлена запасеною в реактивних елементах кола енергією і визначає поведінку кола за відсутності зовнішніх джерел.

Порядок розрахунку перехідних процесів класичним методом.

1. Відповідно до законів Кірхгофа скласти диференціальне рівняння післякомутаційного кола відносно обраної змінної. Доцільно для забезпечення певних зручностей у розрахунках в якості шуканих змінних обирати величини, підпорядковані законам комутації.

2. Перейти від неоднорідного диференціального рівняння до однорідного, скласти відповідне йому характеристичне рівняння і знайти його корені.

3. Знайти вимушену складову перехідного процесу, для чого розрахувати усталений по закінченні перехідного процесу режим роботи кола.

4. Розрахувати значення шуканої змінної в усталеному до комутації режимі і за допомогою законів комутації визначити початкові умови.

5. Невідому функцію записати в загальному вигляді, як суму складових і, враховуючи початкові умови, знайти постійні інтегрування.

6. Записати остаточний вираз невідомої функції, знайти інші, пов'язані з нею величини, побудувати графіки залежності їх від часу, провести аналіз.

6.4. Аналіз перехідних процесів в колах першого порядку

6.4.1. Процеси в колах першого порядку при підключенні джерела постійної напруги

6.4.1.1. Процеси в послідовному RC -колі

Розглянемо процеси, які виникають в RC -колі при підключенні до нього джерела постійної ЕРС.

Схема, яка відповідає даному випадку, наведена на рис. 6.2.

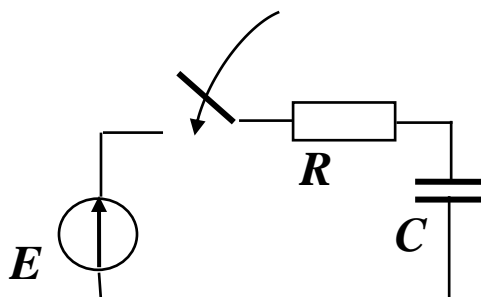


Рис. 6.2

Визначимо часові залежності струму і падіння напруги на елементах кола, тобто $i(t) - ?$, $u_R(t) - ?$, $u_C(t) - ?$.

Скористаємося сформульованим вище алгоритмом класичного методу аналізу перехідних процесів.

1. Складання диференціального рівняння післякомутаційного кола

В якості шуканої величини оберемо часову залежність напруги на ємності $u_C(t)$.

Згідно з другим законом Кірхгофа

$$u_R + u_C = E,$$

і далі

$$RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C = E.$$

2. Визначення коренів характеристичного рівняння

Перетворюючи вихідне диференціальне рівняння в однорідне, складаємо характеристичне рівняння

$$RCp + 1 = 0.$$

Його корінь

$$p = -\frac{1}{RC}.$$

3. Визначення вимушеної складової перехідного процесу

Очевидно, що в досліджуваному колі в усталеному по закінченні перехідних процесів режимі струм не протікає, а напруга на ємності дорівнює ЕРС джерела, тобто: $u_{Cnp} = E$.

4. Визначення початкових умов.

До комутації, тобто до підключення до кола джерела, напруга на ємності відсутня, або дорівнює нулю. Відповідно до закону комутації в момент комутації вона зберігає своє значення, а саме:

$$u_C(0_-) = u_C(0_+) = u_C(0) = 0.$$

5. Визначення постійної інтегрування.

Запишемо вираз для шуканої функції в загальному вигляді:

$$u_C(t) = u_{Cnp} + u_{Cв} = u_{Cnp} + Ae^{pt} = E + Ae^{pt}$$

і для моменту $t = 0$ з урахуванням початкових умов $u_C(0) = E + A = 0$.

З отриманого співвідношення визначимо постійну інтегрування $A = -E$.

б. Запис остаточного виразу для шуканої величини і пов'язаних з нею величин.

Враховуючи визначені вище компоненти, запишемо формулу для розрахунку напруги на ємності в остаточному вигляді:

$$u_C(t) = E - Ee^{-\frac{t}{RC}} = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}}).$$

Співвідношення для розрахунку струму:

$$i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = CE \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}};$$

напруги на опорі:

$$u_R(t) = i(t)R = Ee^{-\frac{t}{RC}}.$$

Будуємо графіки отриманих функцій (рис. 6.3.а – $u_C(t)$, $u_R(t)$; рис. 6.3.б – $i(t)$)

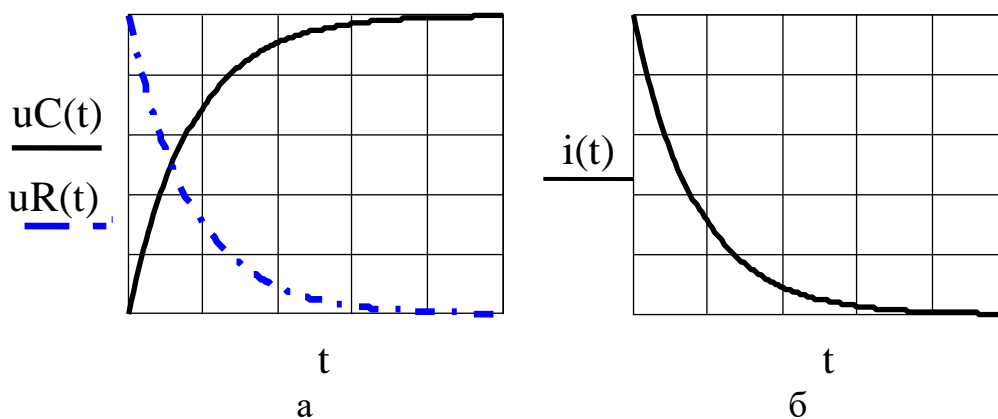


Рис. 6.3

Аналіз отриманих результатів.

Відзначимо наступні особливості:

– напруга на ємності протягом перехідного процесу змінюється за експоненціальним законом від нуля до напруги джерела що підключається;

– струм в момент комутації миттєво досягає значення $i(0) = \frac{E}{R}$ (незаряджена ємність в момент комутації еквівалентна короткому замиканню), а в перехідному режимі змінюється за експоненціальним законом до нуля;

– напруга на активному опорі повторює часову залежність струму, тобто, в момент комутації миттєво змінюється до напруги джерела (прикладена ззовні

напруга повністю виділяється на активному опорі), а в перехідному режимі змінюється за експоненціальним законом до нуля;

– усі електричні величини (струм, падіння напруги на ємності і активному опорі) в перехідному режимі змінюються за одним і тим же законом і з однаковою швидкістю – коефіцієнт в показнику ступеня експоненціального множника для всіх величин – один і той же.

6.4.1.2. Процеси в послідовному RL -колі

Розглянемо процеси, які виникають в RL -колі при підключенні до нього джерела постійної ЕРС.

Схема, яка відповідає даному випадку, наведена на рис. 6.4.

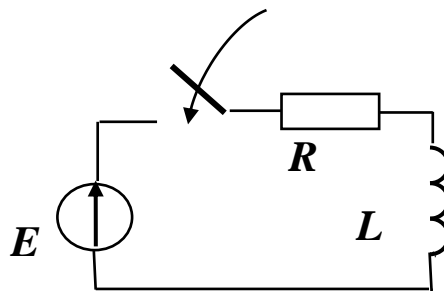


Рис. 6.4

Визначимо часові залежності струму і падінь напруги на елементах кола, тобто: $i(t) - ?$, $u_R(t) - ?$, $u_L(t) - ?$

Скористаємося сформульованим вище алгоритмом класичного методу аналізу перехідних процесів.

1. Складання диференціального рівняння післякомутаційного кола.

В якості шуканої величини оберемо часову залежність струму в індуктивності $i_L(t)$.

Згідно з другим законом Кіірхгофа: $u_R + u_L = E$,

$$\text{і далі } i_L(t)R + L \frac{di_L(t)}{dt} = E.$$

2. Визначення коренів характеристичного рівняння.

Перетворюючи вихідне диференціальне рівняння в однорідне, складаємо характеристичне рівняння $pL + R = 0$, його корінь $p = -\frac{R}{L}$.

3. Визначення вимушеної складової перехідного процесу.

Очевидно, що після закінчення перехідних процесів струм в розглянутому колі залежить тільки від опору (після закінчення перехідних процесів в колі

встановлюється режим постійного струму, індуктивність в таких умовах еквівалентна короткому замиканню) і дорівнює $i_{L np} = \frac{E}{R}$.

4. Визначення початкових умов.

До комутації, тобто, до підключення до кола джерела, струм в колі відсутній, тобто, дорівнює нулю. Відповідно до закону комутації в момент комутації він зберігає своє значення: $i_L(0_-) = i_L(0_+) = i_L(0) = 0$.

5. Визначення постійної інтегрування.

Запишемо вираз для шуканої функції в загальному вигляді:

$$i_L(t) = i_{L np} + i_{L cb} = i_{L np} + Ae^{pt} = \frac{E}{R} + Ae^{pt}$$

і для моменту $t = 0$ з урахуванням початкових умов:

$$i_L(0) = \frac{E}{R} + A = 0.$$

З отриманого співвідношення визначимо постійну інтегрування:

$$A = -\frac{E}{R}.$$

6. Запис остаточного виразу для шуканої величини і пов'язаних з нею величин.

З огляду на визначені вище компоненти, запишемо остаточну формулу для розрахунку струму в колі:

$$i_L(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}).$$

Співвідношення для розрахунку

– напруги на опорі $u_R(t) = i(t)R = E(1 - e^{-\frac{R}{L}t});$

– напруги на індуктивності $u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = Ee^{-\frac{R}{L}t}.$

Будуємо графіки отриманих функцій (рис. 6.5.а – $i(t)$; рис. 6.5.б – $u_R(t)$; $u_L(t)$)

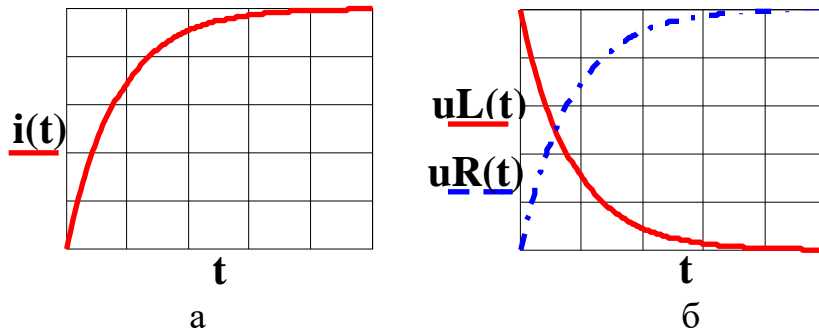


Рис. 6.5

Аналіз отриманих результатів.

Відзначимо наступні особливості:

– струм в індуктивності протягом перехідного процесу змінюється за експоненціальним законом від нуля до максимального, яке визначається напругою джерела і активним опором кола;

– напруга на активному опорі повторює часову залежність струму, тобто, в момент комутації дорівнює нулю, а в перехідному режимі змінюється за експоненціальним законом до максимальної, яка дорівнює напрузі джерела;

– напруга на індуктивності в момент комутації миттєво досягає значення $u_L(0) = E$ (за відсутності струму в момент комутації і, як наслідок, відсутності напруги на активному опорі, прикладена ззовні напруга повністю виділяється на індуктивності), а в перехідному режимі змінюється за експоненціальним законом до нуля;

– всі електричні величини (струм, падіння напруги на індуктивності і активному опорі) в перехідному режимі змінюються за одним і том же законом і з однаковою швидкістю – коефіцієнт в показнику ступеня експоненціального

множника для всіх величин один і той же, а саме: $-\frac{R}{L}$.

6.4.2. Вільні процеси в колах першого порядку

6.4.2.1. Вільні процеси в RC-колі

Вільні процеси виникають під впливом енергії, запасеної в реактивних елементах до комутації в колі.

Розглянемо процеси, що виникають при замиканні кола, яке складається з опору і зарядженої ємності. Схема, яка відповідає даному випадку, наведена на рис. 6.6

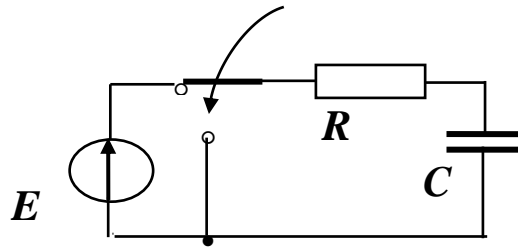


Рис. 6.6

Визначимо часові залежності струму і падінь напруги на елементах кола, тобто $i(t) - ?$, $u_R(t) - ?$, $u_C(t) - ?$

Скористаємося сформульованим вище алгоритмом класичного методу аналізу перехідних процесів.

1. Складання диференціального рівняння післякомутаційного кола

В якості шуканої величини оберемо часову залежність напруги на ємності $u_C(t)$.

Згідно з другим законом Кірхгофа

$$u_R + u_C = 0,$$

і далі

$$RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C = 0.$$

2. Визначення коренів характеристичного рівняння

Складаємо характеристичне рівняння:

$$RCp + 1 = 0,$$

його корінь:

$$p = -\frac{1}{RC}.$$

3. Визначення вимушеної складової перехідного процесу

Очевидно, що після закінчення перехідних процесів напруга на ємності дорівнює нулю – за відсутності зовнішніх джерел напруга на елементах замкненого кола відсутня, тобто $u_{Cnp} = 0$.

4. Визначення початкових умов.

До комутації, тобто, до відключення від кола джерела напруга на ємності дорівнює ЕРС джерела E . Відповідно до закону комутації в момент комутації вона зберігає своє значення.

Отже, $u_C(0_-) = u_C(0_+) = u_C(0) = E$.

5. Визначення постійної інтегрування.

Запишемо вираз для шуканої функції в загальному вигляді:

$$u_C(t) = u_{C_{np}} + u_{C_{св}} = u_{C_{np}} + Ae^{pt} = 0 + Ae^{pt}$$

і для моменту $t=0$ з урахуванням початкових умов:

$$u_C(0) = 0 + A = E.$$

З отриманого співвідношення визначимо постійну інтегрування $A = E$.

6. Запис остаточного виразу для шуканої величини і пов'язаних з нею величин.

З огляду на визначені вище компоненти, запишемо остаточну формулу для розрахунку напруги на ємності $u_C(t) = Ee^{-\frac{t}{RC}}$.

Співвідношення для розрахунку

струму
$$i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = -CE \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = -\frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}};$$

напруги на опорі
$$u_R(t) = i(t)R = -Ee^{-\frac{t}{RC}}.$$

Будуємо графіки отриманих функцій (рис.6.7.а – $u_C(t)$, $u_R(t)$; рис.6.7.б – $i(t)$).

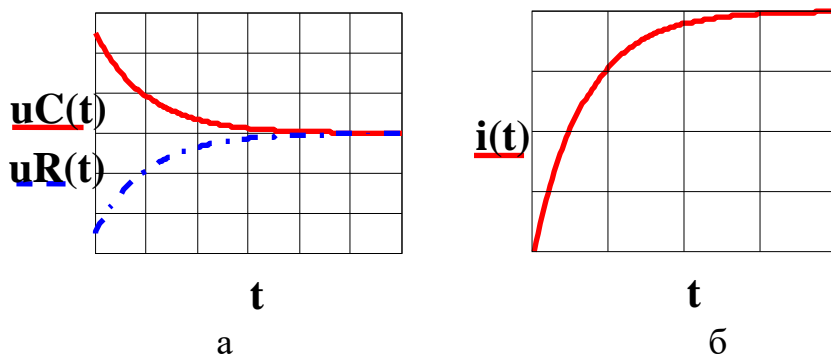


Рис. 6.7

Аналіз отриманих результатів.

Відзначимо наступні особливості:

– напруга на ємності протягом перехідного процесу змінюється за експоненціальним законом від початкової, рівної напрузі джерела, до нуля;

– струм в момент комутації миттєво досягає значення $i(0) = -\frac{E}{R}$

(заряджена до комутації ємність еквівалентна джерелу ЕРС), а в перехідному режимі змінюється за експоненціальним законом до нуля. Знак "мінус"

формально вказує на протилежний, по відношенню до струму заряду ємності, напрямок струму розряду;

– напруга на активному опорі повторює часову залежність струму, тобто, в момент комутації миттєво змінюється від нуля до напруги, рівній напрузі на ємності, а в перехідному режимі змінюється за експоненціальним законом до нуля (знак "мінус" вказує на "зустрічний" характер дії напруги на ємності і падіння напруги на опорі);

– всі електричні величини (струм, напруга на ємності і активному опорі) в перехідному режимі змінюються за одним і тим же законом і з однаковою швидкістю – коефіцієнт в показнику ступеня експоненціального множника для всіх величин – один і той же: $-\frac{1}{RC}$.

6.4.2.2. Вільні процеси в RL – колі

Схема, яка відповідає даному випадку, наведена на рис. 6.8

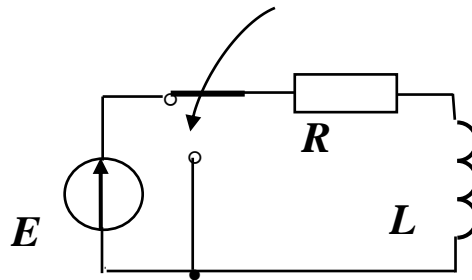


Рис. 6.8

Визначимо часові залежності струму і падінь напруги на елементах кола, тобто $i(t) - ?$, $u_R(t) - ?$, $u_L(t) - ?$

Скористаємося сформульованим вище алгоритмом класичного методу аналізу перехідних процесів.

1. Складання диференціального рівняння післякомутаційного кола.

В якості шуканої величини вибираємо часову залежність струму в індуктивності $i_L(t)$.

Згідно з другим законом Кірхгофа $u_R + u_L = E$, і далі

$$i_L(t)R + L \frac{di_L(t)}{dt} = 0.$$

2. Визначення кореня характеристичного рівняння.

Перетворюючи початкове диференціальне рівняння в однорідне, складаємо характеристичне рівняння $pL + R = 0$. Його корінь $p = -\frac{R}{L}$.

3. Визначення вимушеної складової перехідного процесу.

Очевидно, що після закінчення перехідних процесів струм в колі дорівнює нулю – в колі, що утворилося після комутації відсутні джерела енергії, а енергія, запасена в магнітному полі індуктивності, протягом перехідного процесу перетвориться в опори R в теплову

$$i_{L\ np} = 0.$$

4. Визначення початкових умов.

До комутації, тобто, до перемикання ключа струм в колі залежить від напруги джерела і опору. Відповідно до закону комутації в момент комутації він зберігає свої напрямки і значення, тобто:

$$i_L(0_-) = i_L(0_+) = i_L(0) = \frac{E}{R}.$$

5. Визначення постійної інтегрування.

Запишемо вираз для шуканої функції в загальному вигляді

$$i_L(t) = i_{L\ np} + i_{L\ св} = i_{L\ np} + Ae^{pt} = 0 + Ae^{pt}$$

і для моменту $t = 0$ з урахуванням початкових умов $i_L(0) = 0 + A = \frac{E}{R}$.

З отриманого співвідношення визначимо постійну інтегрування

$$A = \frac{E}{R}.$$

6. Запис остаточного виразу для шуканої величини і пов'язаних з нею величин.

З огляду на визначені вище компоненти, запишемо формулу для розрахунку струму в колі $i_L(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$.

Співвідношення для розрахунку

$$\text{напруги на опорі } u_R(t) = i(t)R = Ee^{-\frac{R}{L}t};$$

$$\text{напруги на індуктивності } u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = -L \frac{E}{R} \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t} = -Ee^{-\frac{R}{L}t}.$$

Будуємо графіки отриманих функцій (рис.6.9.а – $i(t)$; рис.6.9.б – $u_R(t)$; $u_L(t)$)

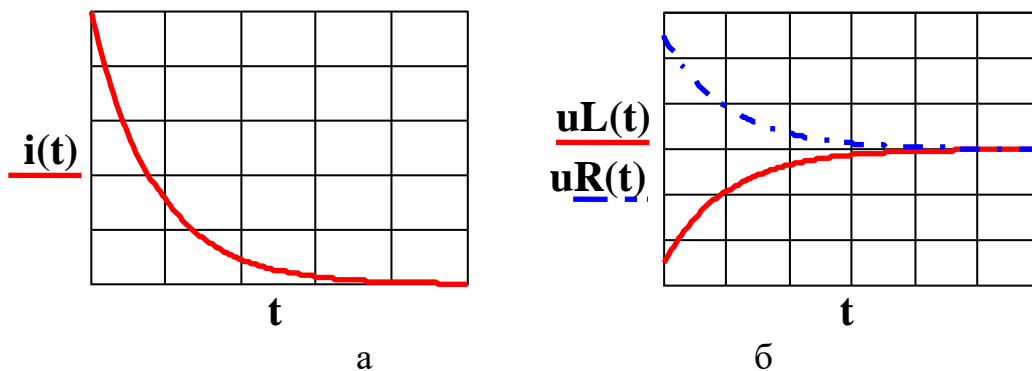


Рис. 6.9

Аналіз отриманих результатів.

Відзначимо наступні особливості:

- струм в індуктивності не змінюється в момент комутації, а протягом перехідного процесу зменшується за експоненціальним законом від докомутаційного (максимального) значення до нуля;

- напруга на активному опорі повторює часову залежність струму, тобто, в момент комутації зберігає докомутаційне значення, що дорівнює напрузі джерела, а в перехідному режимі змінюється за експоненціальним законом до нуля;

- напруга на індуктивності в момент комутації миттєво досягає значення $u_L(0) = -E$, врівноважуючи в замкненому колі, що утворилося, падіння напруги на активному опорі, а в перехідному режимі змінюється за експоненціальним законом до нуля;

- всі електричні величини (струм, падіння напруги на індуктивності і активному опорі) в перехідному режимі змінюються за одним і тим же законом і з однаковою швидкістю – коефіцієнт в показнику ступеня експоненціального

множника для всіх величин один і той же: $-\frac{R}{L}$.

Узагальнюючи отримані результати, відзначимо:

швидкість загасання вільних складових перехідних процесів не залежить від характеру комутацій і визначається вичерпно параметрами елементів кола.

6.4.3. Параметри перехідних процесів в електричних колах першого порядку

До параметрів перехідних процесів належать «стала часу електричного кола» і «тривалість перехідних процесів».

Ми вже відзначали незалежність швидкості, з якою протікають перехідні процеси від характеру комутацій.

Формально швидкість перехідних процесів в розглянутих вище прикладах визначається коефіцієнтом при t в показниках ступеня експоненціальних множників часових функцій. Введемо позначення:

$$\tau = RC \quad - \text{ для } RC\text{-кіл}; \quad \tau = \frac{L}{R} \quad - \text{ для } RL\text{-кіл}. \quad (6.12)$$

Величина

$$\tau = \frac{1}{|p|}, \quad (6.13)$$

зворотна кореню (по модулю) характеристичного рівняння післякомутаційного кола, має розмірність часу і називається «сталю часу» електричного кола. Оцінюючи вплив сталої часу кола на швидкість, з якою протікають в колі перехідні процеси, сформулюємо визначення цього параметра: *стала часу електричного кола – це час, протягом якого модуль вільної складової перехідного процесу зменшується в e разів у порівнянні зі своїм початковим значенням, тобто:*

$$x_{cv}(\tau) = Ae^{-1} = x_{cv}(0)e^{-1}.$$

Зрозуміло, що чим більша стала часу кола, тим повільніше в ній протікають перехідні процеси. Теоретично, як випливає з отриманих вище результатів, процес встановлення в колі нового стаціонарного режиму триває нескінченно довго, але на практиці прийнято вважати перехідний процес закінченим, коли його вільні складові зменшуються приблизно в **100** разів, тобто досягають рівня **0.01** від свого початкового значення.

Виходячи з цього припущення, з'ясуємо зв'язок між тривалістю перехідних процесів t_{nep} і сталою часу кола.

Відповідно до прийнятого припущення складемо рівняння, виконаємо ряд перетворень і дій і розв'яжемо його.

$$\begin{aligned} x_{cv}(t_{nep}) &= Ae^{-\frac{t_{nep}}{\tau}} = 0.01A; \\ -\frac{t_{nep}}{\tau} &= \ln 0.01; \\ t_{nep} &\approx 4.6 \tau. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Таким чином, тривалість перехідних процесів в електричному колі не залежить від стану докомутаційного кола, характеру комутації, а визначається його сталою часу, або параметрами елементів.

6.4.4. Якісний (спрощений) аналіз перехідних процесів в колах першого порядку

Перехідні процеси в колах першого порядку незалежно від їх складу і характеру комутацій, як свідчать отримані результати, мають спільну ознаку: струм і напруга на будь-якій ділянці кола змінюються за експоненціальним законом від початкового значення $t = 0$ до кінцевого $t \rightarrow \infty$ з певною швидкістю. На цій підставі аналіз перехідних процесів в таких колах можна провести якісно, тобто наближено, без складання диференціального рівняння післякомутаційного кола і його вирішення.

Найпростіший варіант такого дослідження полягає в тому, що визначають значення шуканої величини в моменти $t = 0$ і $t \rightarrow \infty$, відзначають їх на координатній площині і з'єднуючи ці значення експонентою, отримують графік часової залежності шуканої величини в перехідному режимі.

Можна скористатися ще одним скороченим методом дослідження. Він полягає в наступному:

- вибирають шукану величину $x(t)$ виходячи із зазначених раніше міркувань;
- аналізуючи стаціонарний стан кола до комутації, визначають значення шуканої величини в момент комутації, тобто початкові умови;
- аналізуючи стаціонарний стан кола після закінчення перехідних процесів, визначають вимушену складову шуканої величини;
- зі співвідношення $A = x(0) - x_{np}$ визначають постійну інтегрування;
- визначають корінь характеристичного рівняння одним з представлених далі способів;
- записують остаточне співвідношення для шуканої величини.

Способи визначення кореня характеристичного рівняння електричних кіл першого порядку (без складання диференціального рівняння післякомутаційного кола)

1. З використанням матриці контурних опорів або матриці вузлових провідностей:

- скласти комплексну схему заміщення досліджуваного кола;

– скласти матрицю контурних опорів або матрицю вузлових провідностей;
– записати вираз для головного визначника складеної матриці замінюючи $j\omega$ на p і прирівняти його до нуля;

– розв’язуючи отримане рівняння відносно p , отримують значення кореня характеристичного рівняння.

Зазначений спосіб визначення кореня характеристичного рівняння компактно можна представити таким чином

$$\det \left[Z(j\omega) \Big|_{j\omega \rightarrow p} \right] = 0 \Rightarrow p;$$
$$\det \left[Y(j\omega) \Big|_{j\omega \rightarrow p} \right] = 0 \Rightarrow p.$$

2.3 використанням виразів для комплексного вхідного опору або комплексної вхідної провідності:

– скласти комплексну схему заміщення досліджуваного кола;

– записати вираз для комплексного вхідного опору або комплексної вхідної провідності замінюючи $j\omega$ на p і прирівняти його до нуля. Тут під "вхідними" розуміють еквівалентні опір або провідність відносно ділянки, де має місце комутація;

– розв’язуючи рівняння відносно p , отримують значення кореня характеристичного рівняння:

$$Z_{ex}(j\omega) \Big|_{j\omega \rightarrow p} = 0 \Rightarrow p;$$
$$Y_{ex}(j\omega) \Big|_{j\omega \rightarrow p} = 0 \Rightarrow p$$

3.3 використанням сталої часу кола:

– скласти еквівалентну схему досліджуваного кола після комутації для визначення еквівалентного опору зовнішньої по відношенню до реактивного елемента ділянки. Для цього джерело, присутнє в колі, вилучити, залишивши його внутрішній опір, реактивний елемент зі схеми вилучити, зберігши затискачі, до яких він підключений;

– розрахувати еквівалентний, вхідний по відношенню до затискачів реактивного елемента опір R_e ;

– з огляду на формули для визначення сталої часу розгалужених кіл в залежності від типу реактивного елемента, що входить до їх складу, $\tau = R_e C$ і

$\tau = \frac{L}{R_e}$, розрахувати сталу часу досліджуваного кола;

– розрахувати корінь характеристичного рівняння, використовуючи формулу $p = -\frac{1}{\tau}$.

6.5. Аналіз перехідних процесів в колах другого порядку

6.5.1. Вільний процес в нерозгалуженому колі другого порядку

6.5.1.1. Вивід загальних співвідношень

Розглянемо вільні процеси в колі другого порядку на прикладі послідовного коливального контуру у відповідності з наступною схемою (рис. 6.10)

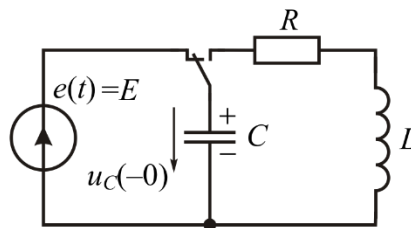


Рис. 6.10

Скористаємося класичним методом аналізу перехідних процесів.

1. Складання диференціального рівняння післякомутаційного кола.

В якості шуканої величини вибираємо часову залежність напруги на ємності $u_C(t)$.

Згідно з другим законом Кірхгофа

$$u_L + u_R + u_C = 0$$

і далі

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0.$$

Розділимо всі члени рівняння на LC і позначимо

$$2\delta = \frac{R}{L}; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

Рівняння післякомутаційного кола набуде наступного вигляду

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + 2\delta \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = 0 .$$

2. Визначення коренів характеристичного рівняння

Складаємо характеристичне рівняння

$$p^2 + 2\delta p + \omega_0^2 = 0$$

і визначаємо його корені

$$p_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} .$$

3. Визначення вимушеної складової перехідного процесу

Очевидно, що після закінчення перехідних процесів, після розряду ємності напруга на ній дорівнює нулю, тобто

$$u_{Cnp} = 0 .$$

4. Визначення початкових умов

До комутації напруга на ємності дорівнює ЕРС джерела E . Відповідно до закону комутації в момент комутації вона зберігає своє значення. Отже,

$$u_C(0) = E .$$

5. Визначення постійних інтегрування

Запишемо вираз для шуканої функції в загальному вигляді

$$u_C(t) = u_{Cnp} + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

і для моменту $t = 0$ з урахуванням початкових умов

$$u_C(0) = u_{Cnp} + A_1 + A_2 = E .$$

Для визначення двох постійних інтегрування необхідно мати систему з двох незалежних рівнянь. Скористаємося співвідношенням, яке визначає струм в досліджуваному колі в загальному вигляді

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} = C(p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t})$$

і для моменту $t = 0$ з урахуванням початкових умов отримуємо друге рівняння

$$i(0) = C(p_1 A_1 + p_2 A_2) = 0 .$$

Розв'язуючи систему рівнянь

$$\left. \begin{aligned} A_1 + A_2 &= E \\ p_1 A_1 + p_2 A_2 &= 0 \end{aligned} \right\} ,$$

визначимо постійні інтегрування

$$A_1 = \frac{p_2}{p_2 - p_1} E; \quad A_2 = -\frac{p_1}{p_2 - p_1} E .$$

6. Запис остаточного виразу для шуканої величини і пов'язаних з нею величин

Враховуючи визначені раніше компоненти, запишемо формули для розрахунку напруги на ємності

$$u_C(t) = \frac{p_2}{p_2 - p_1} E e^{p_1 t} - \frac{p_1}{p_2 - p_1} E e^{p_2 t} = \frac{E}{p_2 - p_1} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}), \quad (6.15)$$

струму

$$i(t) = \frac{CEp_1 p_2}{p_2 - p_1} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) = \frac{E}{L} \frac{1}{p_2 - p_1} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}), \quad (6.16)$$

напруги на опорі

$$u_R(t) = \frac{ER}{L} \frac{1}{p_2 - p_1} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}), \quad (6.17)$$

напруги на індуктивності

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = \frac{E}{p_2 - p_1} (p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}). \quad (6.18)$$

Отримані співвідношення свідчать про те, що процеси в колі другого порядку, на відміну від процесів в колах першого порядку, можуть мати різний характер. Він залежить від співвідношення між параметрами елементів кола, які формально відбиваються на характері коренів характеристичного рівняння.

6.5.1.2. Вплив параметрів елементів електричного кола на характер перехідних процесів

Можливі три варіанти процесів, в залежності від характеру коренів характеристичного рівняння. Розглянемо їх послідовно.

1. Корені характеристичного рівняння - числа дійсні, від'ємні, різні, причому $|p_2| > |p_1|$.

Це має місце, якщо

$$\delta > \omega_0 \text{ або } \frac{R}{2L} > \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad R > 2\rho; \quad Q < 0.5, \quad (6.19)$$

тобто в разі дуже низької добротності контуру.

Для цього випадку, відповідно до отриманих виразів, часові залежності напруги на ємності, струму, напруги на активному опорі і індуктивності представляють собою суми двох, згасаючих з різною швидкістю, експонент.

Отже, процеси в досліджуваному колі при від'ємних дійсних і різних коренях характеристичного рівняння носять аперіодичний характер.

2. Корені характеристичного рівняння - комплексно - спряжені числа.

Це можливо, якщо

$$\delta < \omega_0 \text{ або } \frac{R}{2L} < \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad R < 2\rho; \quad Q > 0.5. \quad (6.20)$$

Тоді

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \\ &= -\delta \pm j\omega_{cs} = -\sqrt{\delta^2 + \omega_{cs}^2} e^{\mp j \arctg \frac{\omega_{cs}}{\delta}} = -\omega_0 e^{\mp j\alpha}. \end{aligned}$$

Підставимо значення коренів у формули для $u_C(t)$, $i(t)$, $u_R(t)$, $u_L(t)$.

Враховуючи, що

$$p_1 \cdot p_2 = \omega_0^2, \quad p_2 - p_1 = -j2\omega_{cs},$$

а також формули Ейлера

$$\frac{e^{jX} - e^{-jX}}{2j} = \sin X; \quad \frac{e^{jX} + e^{-jX}}{2} = \cos X,$$

і здійснюючи ряд перетворень, отримаємо

$$\begin{aligned} u_C(t) &= \frac{E}{p_2 - p_1} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}) = \frac{E}{-j2\omega_{c\delta}} (-\omega_0 e^{j\alpha} e^{-\delta t} e^{j\omega_{c\delta} t} + \omega_0 e^{-j\alpha} e^{-\delta t} e^{-j\omega_{c\delta} t}) = \\ &= E \frac{\omega_0}{\omega_{c\delta}} e^{-\delta t} \left(\frac{e^{j(\omega_{c\delta} t + \alpha)} - e^{-j(\omega_{c\delta} t + \alpha)}}{2j} \right) = E \frac{\omega_0}{\omega_{c\delta}} e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_{c\delta} t + \alpha); \end{aligned} \quad (6.21)$$

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{E}{L(p_2 - p_1)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) = \frac{E}{-j2\omega_{c\delta} L} (e^{-\delta t} e^{j\omega_{c\delta} t} - e^{-\delta t} e^{-j\omega_{c\delta} t}) = \\ &= E \frac{\omega_0}{\omega_{c\delta}} e^{-\delta t} \left(\frac{e^{j(\omega_{c\delta} t + \alpha)} - e^{-j(\omega_{c\delta} t + \alpha)}}{2j} \right) = -\frac{E}{L\omega_{c\delta}} e^{-\delta t} \cdot \sin \omega_{c\delta} t; \end{aligned} \quad (6.22)$$

$$u_R(t) = -\frac{ER}{L\omega_{c\delta}} e^{-\delta t} \cdot \sin \omega_{c\delta} t; \quad (6.23)$$

$$\begin{aligned} u_L(t) &= \frac{E}{p_2 - p_1} (p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}) = \frac{E}{-j2\omega_{c\delta}} (-\omega_0 e^{-j\alpha} e^{-\delta t} e^{j\omega_{c\delta} t} + \omega_0 e^{j\alpha} e^{-\delta t} e^{-j\omega_{c\delta} t}) = \\ &= E \frac{\omega_0}{\omega_{c\delta}} e^{-\delta t} \left(\frac{e^{j(\omega_{c\delta} t - \alpha)} - e^{-j(\omega_{c\delta} t - \alpha)}}{2j} \right) = E \frac{\omega_0}{\omega_{c\delta}} e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_{c\delta} t - \alpha). \end{aligned} \quad (6.24)$$

Таким чином, струм і напруга на елементах кола представляють собою гармонічні коливання з згасаючими за експонентою амплітудами. Швидкість згасання коливань визначається коефіцієнтом згасання.

3. Корені характеристичного рівняння - дійсні, від'ємні, рівні.

Це можливо, якщо

$$\delta = \omega_0 \text{ або } \frac{R}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad R = 2\rho; \quad Q = 0.5. \quad (6.25)$$

Характер зміни струму і напруги на елементах в цьому режимі можна визначити, здійснюючи перехід до границі коливального розряду ємності при $\omega_B \rightarrow 0$.

Враховуючи, що при $\omega_B \rightarrow 0$, $\sin \omega_B t \rightarrow \omega_B t$ з виразу для струму отримаємо

$$i(t) = -\frac{E}{L\omega_B} e^{-\delta t} \omega_B t = -\frac{E}{L} \cdot t \cdot e^{-\delta t}; \quad (6.26)$$

для напруги на індуктивності

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = E \cdot e^{-\delta t} (\delta t - 1); \quad (6.27)$$

напруги на ємності

$$u_C(t) = -u_R - u_L = E \cdot e^{-\delta t} (1 + \delta t). \quad (6.28)$$

Отже, характер часових залежностей струму і напруги на елементах для цього випадку подібний випадку $R > 2\rho$.

Розглянутий режим називається критичним. Він є проміжним між аперіодичним і коливальним. Опір втрат контуру в цьому випадку називається критичним $R = 2\rho = R_{кр}$.

6.5.1.3. Параметри вільних коливань

До основних параметрів вільних коливань в контурі відносять: коефіцієнт загасання, частоту вільних, або власних, коливань контура, період вільних коливань, декремент коливань, логарифмічний декремент коливань, сталу часу коливального контуру.

Коефіцієнт загасання δ характеризує швидкість загасання коливань, або швидкість зменшення їх амплітуди

$$\delta = \frac{R}{2L}.$$

Частота вільних, або власних, коливань контура:

$$\text{кругова} - \omega_{\text{в}} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}; \quad \text{лінійна} - f_{\text{в}} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}{2\pi}.$$

Період вільних, або власних, коливань контура:

$$T_{\epsilon} = \frac{1}{f_{\epsilon}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

Декремент коливань – відношення двох сусідніх амплітуд вільного коливання (як приклад, струму)

$$\Delta = \frac{I_{m1}}{I_{m2}} = \frac{I_0 e^{-\delta t_1}}{I_0 e^{-\delta(t_1 + T_{\epsilon})}} = e^{\delta T_{\epsilon}} ;$$

логарифмічний декремент коливання

$$\ln \Delta = \frac{I_{m1}}{I_{m2}} = \frac{I_0 e^{-\delta t_1}}{I_0 e^{-\delta(t_1 + T_{\epsilon})}} = \ln e^{\delta T_{\epsilon}} = \delta T_{\epsilon} .$$

Стала часу коливального контуру – час, протягом якого огинаюча вільного коливання зменшується в e разів

$$\tau = \frac{1}{\delta} = \frac{2L}{R} .$$

6.6. Аналіз перехідних процесів в лінійних електричних колах методом накладання

6.6.1. Сутність методу накладання

Розглянутий класичний метод в принципі дозволяє визначити перехідні процеси не тільки при дії на електричне коло постійної або синусоїдальної напруги, але і при будь-якій формі зовнішньої дії. Втім, одним з недоліків класичного методу аналізу перехідних процесів є необхідність визначення примушеної складової перехідного процесу.

Існує інший, відмінний від класичного, часовий метод аналізу, який дозволяє визначити відгук кола на довільний вплив без поділу його на вільну і примушену складові. Він називається методом інтегралу згортання накладання, базується на принципі накладання і відзначається введенням понять типових (елементарних) впливів і часових характеристик.

Принцип накладання (ми посилалися на нього раніше) - одна з найважливіших ознак, властивостей лінійних систем і, зокрема, лінійних електричних кіл. Він є наслідком лінійності їх рівнянь і дозволяє шукати загальне рішення лінійних рівнянь як лінійну комбінацію, тобто, накладання,

більш простих часткових рішень. У застосуванні до електричних кіл він формулюється так: реакція лінійного електричного кола на суму однотипних впливів дорівнює сумі її реакцій на кожний з впливів окремо.

У разі, коли на лінійне коло діє сигнал складної форми і потрібно знайти його реакцію як функцію часу, тобто, визначити характер перехідного процесу, або сигналу на виході кола, діють наступним чином.

Припускають, що зовнішній вплив $x(t)$ можна представити сукупністю більш простих, аналітично однотипних функцій $x_k(t)$, тобто

$$x(t) = \sum_k x_k(t).$$

Якщо знайти реакцію досліджуваного лінійного кола $y_k(t)$ на вплив $x_k(t)$, то на підставі принципу накладання можна стверджувати, що реакція кола $y(t)$ на заданий вплив $x(t)$ дорівнює сумі реакцій $y_k(t)$, тобто,

$$y(t) = \sum_k y_k(t).$$

Таким чином, рішення задачі розпадається на два етапи: перший - визначення реакції кола на заданий елементарний вплив $x_k(t)$ і другий – складання, або накладання, часткових рішень $y_k(t)$. Очевидно, вид функції $y_k(t)$ при заданому типі елементарного впливу $x_k(t)$ залежить тільки від схеми і параметрів електричного кола. При цьому $y_k(t)$ можна розглядати як певну часову характеристику досліджуваного кола. Вона знаходиться аналітично або експериментально: розрахунковим або дослідним шляхом. Систему функцій $x_k(t)$ необхідно вибирати так, щоб, по-перше, їх сукупність дозволяла представити будь-яку функцію зовнішнього впливу, і, по-друге, визначення часових характеристик кола було б достатньо простим.

В якості елементарних впливів використовують кілька стандартних, типових сигналів. Реакція кола на кожен з них представляє різновиди часових характеристик.

6.6.2. Типові дії

При дослідженні властивостей лінійних кіл і систем в якості типових, елементарних дій зазвичай використовуються *одинична ступінчаста функція* і *дельта-функція*.

Одинична ступінчаста функція $I(t)$ (функція Хевісайда) (рис. 6.11, а), має значення

$$I(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0 \\ 1, & \text{при } t > 0 \end{cases} \quad (6.29)$$

При $t=0$ одинична ступінчаста функція має розрив неперервності 1-го роду, а значення функції в точці розриву невизначене.

В окремих випадках, враховуючи особливості задачі, що розв'язується, їй надають певне значення: $0, 0.25, 0.5, 1$ та інші.

При зміщенні такої функції вправо по вісі абсцис (запізненні) на час τ (рис. 6. , б) її представляють наступним чином

$$I(t - \tau) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < \tau \\ 1, & \text{при } t > \tau \end{cases} \quad (6.30)$$

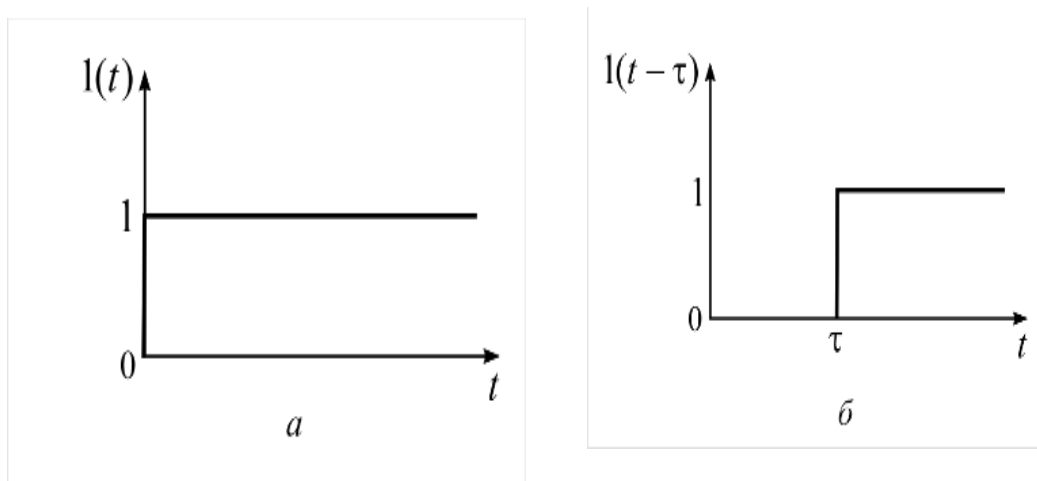


Рис. 6.11

Функцію Хевісайда можна використовувати для аналітичного представлення різних варіантів зовнішніх впливів на електричне коло.

Наприклад, підключенню до кола в момент $t = 0$ джерела постійної напруги E відповідає запис

$$E \cdot I(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0 \\ E, & \text{при } t > 0 \end{cases};$$

дії на коло в момент $t = \tau$ неперервної функції $f(t)$

$$f(t) \cdot I(t - \tau) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < \tau \\ f(t), & \text{при } t > \tau \end{cases}.$$

В таких випадках ступінчасту функцію називають *функцією ввімкнення*.

Дельта-функція $\delta(t)$, функція Дірака, може бути визначена по-різному.

З інженерної точки зору – це імпульс з нескінченно великою амплітудою та нескінченно малою тривалістю, площа якого дорівнює одиниці.

Розглянемо імпульс, тривалістю Δt , амплітуда якого $U_m = \frac{1}{\Delta t}$ (рис. 6.12).

На границі, коли $\Delta t \rightarrow 0$, амплітуда імпульсу $U_m \rightarrow \infty$, а площа залишається незмінною, тобто дорівнює одиниці $U_m \cdot \Delta t = 1$.

В математичному відношенні, більш строго, δ -функція визначається як границя послідовності неперервних функцій, що рівномірно збігається

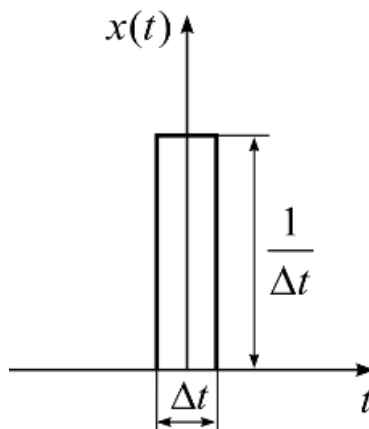


Рис. 6.12

Аналітичне представлення дельта-функції:

без зміщення

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{при } t = 0 \\ 0 & \text{при } t \neq 0 \end{cases};$$

зміщеної на τ

$$\delta(t - \tau) = \begin{cases} \infty & \text{при } t = \tau \\ 0 & \text{при } t \neq \tau \end{cases}.$$

Відповідні варіанти графічного представлення дельта-функції наведені на рис. 6.13.

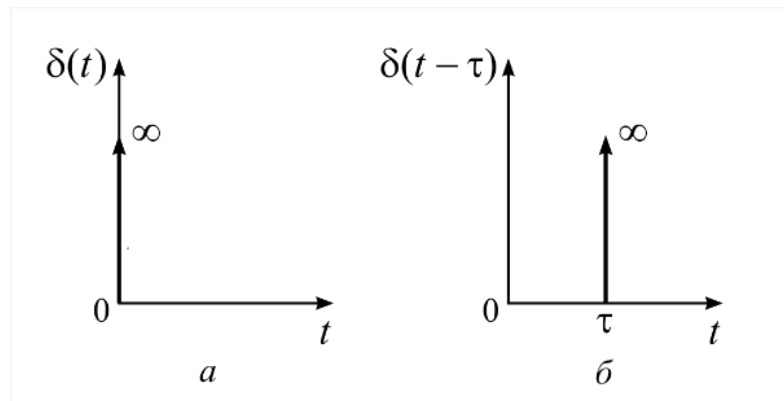


Рис. 6.13

Важливою властивістю $\delta(t)$ -функції є можливість виділити (відфільтрувати) з її допомогою значення неперервної функції в заданий момент часу. У зв'язку з цим говорять про фільтруючу властивість δ -функції. Ця властивість визначається наступними співвідношеннями

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \delta(t) dt = f(0); \quad (6.31)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \delta(t - \tau) dt = f(\tau). \quad (6.32)$$

Між одиничної ступінчастою функцією $I(t)$ і δ -функцією існує лінійний зв'язок відповідно до наступних співвідношень

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} I(t) = I'(t); \quad (6.33)$$

$$\int_{-\infty}^0 \delta(t) dt = 1(t), \quad (6.34)$$

тобто, δ – функція являє собою похідну від одиничної ступінчастої функції, а одинична ступінчаста функція – інтеграл від δ – функції.

6.6.3. Часові характеристики електричного кола

Часовою характеристикою кола називається реакція її на типовий вплив в часовій області. Реакція кола на заданий типовий вплив залежить лише від схеми кола і параметрів її елементів і, отже, може служити її характеристикою. Часові характеристики визначають для лінійних кіл, що не містять незалежних джерел енергії, і при нульових початкових умовах. Часові характеристики залежать від виду заданого типового впливу. У зв'язку з цим їх поділяють на дві групи: **перехідні $h(t)$** і **імпульсні $g(t)$** часові характеристики. **Перехідна характеристика**, або **перехідна функція** визначається реакцією кола на вплив у вигляді одиничної ступінчастої функції. Вона має кілька різновидів.

Вид впливу	Вид реакції	Перехідна характеристика	
		Назва	Позначення
Одиничний стрибок напруги	Напруга	коефіцієнт передачі напруги	$h_U(t)$
	Струм	перехідна провідність	$h_Y(t)$
Одиничний стрибок струму	Напруга	перехідний опір	$h_Z(t)$
	Струм	коефіцієнт передачі струму	$h_I(t)$

Якщо вплив задано у вигляді одиничного стрибка напруги і реакцією є також напруга, то перехідна характеристика виявляється безрозмірною, чисельно дорівнює напрузі на виході кола і називається перехідною функцією $h_U(t)$, або коефіцієнтом передачі напруги. Якщо ж за вихідну величину реєструють струм, то перехідна характеристика має розмірність провідності, чисельно дорівнює цьому струму і називається перехідною провідністю $h_Y(t)$. Аналогічно при впливі у вигляді струму і реакції у вигляді напруги перехідна

функція має розмірність опору і називається перехідним опором $h_z(t)$. Якщо ж при цьому вихідний величиною є струм, то перехідна характеристика безрозмірна і називається перехідною функцією $h_I(t)$, або коефіцієнтом передачі струму.

Перехідні характеристики легко визначаються розрахунком реакції кола на одиничний ступінчастий вплив, тобто, розрахунком перехідного процесу при підключенні до кола джерела постійної напруги 1 В або постійного струму 1 А.

Імпульсна характеристика визначається реакцією кола на вплив δ -функції. Як і перехідна характеристика, вона має кілька різновидів, які визначаються видом впливу і реакції - напругою або струмом. У загальному випадку імпульсну характеристику позначають через $g(t)$.

Вид впливу	Вид реакції	Імпульсна характеристика	
		Назва	Позначення
δ -функція напруги	Напруга	імпульсний коефіцієнт передачі напруги	$g_U(t)$
	Струм	імпульсна провідність	$g_Y(t)$
δ -функція струму	Напруга	імпульсний опір	$g_Z(t)$
	Струм	імпульсний коефіцієнт передачі струму	$g_I(t)$

Імпульсні характеристики мають розмірність відповідної перехідної характеристики, поділеної на час.

Враховуючи, що в лінійних електричних колах реакції на певні впливи зв'язані такими ж функціональними співвідношеннями, що і впливи, легко встановити зв'язок перехідної та імпульсної характеристик, зокрема:

імпульсна характеристика являє похідну від перехідної характеристики

$$g(t) = \frac{d}{dt} [h(t) \cdot 1(t)] = h'(t) \cdot 1(t) + h(0) \cdot \delta(t) \quad (6.35)$$

Тут враховано, що $h(t) \delta(t) = h(0) \delta(t)$, а множення $h(t)$ на $1(t)$ еквівалентне вказівці на те, що значення функції $h(t)$ при $t < 0$ дорівнює нулю.

В свою чергу,

$$h(t) = \int_{-\infty}^t g(t) \cdot dt, \quad (6.36)$$

тобто, перехідна характеристика являє інтеграл від імпульсної характеристики.

Для розрахунку імпульсної характеристики можна скористатися виразом (6.35), тобто обчислити її через перехідну характеристику.

7. Елементи теорії сигналів

7.1. Загальні відомості про сигнали

7.1.1. Класифікація сигналів

У відповідності з найбільш загальним тлумаченням, сигнал – це процес зміни в часі фізичного стану деякого об'єкту, який може бути використаний для відображення, реєстрації та передачі повідомлень, або інформації.

Сигнали, як деякі фізичні процеси, можна спостерігати за допомогою різних приладів та пристроїв. Але при такому, апаратурному, вивченні сигналів кожен дослід виступає як окремий випадок, можливість фундаментальних узагальнень відсутня.

Щоб зробити сигнали об'єктами теоретичного вивчення та розрахунків, необхідно винайти спосіб їх математичного представлення, іншими словами, створити математичну модель досліджуваного сигналу.

Математична модель сигналу представляє собою певну функціональну залежність, аргументом якої є час.

Функції, що представляють сигнали, можуть набувати як дійсні, так і комплексні значення. Відповідно до цього розрізняють дійсні та комплексні моделі сигналів. Використання того чи іншого способу представлення сигналу обумовлене виключно математичними зручностями.

Знання математичних моделей сигналу дає змогу порівнювати їх між собою, встановлювати тотожність та відмінність і проводити їх класифікацію.

Представимо основні різновиди сигналів за окремими класифікаційними ознаками.

Одномірні та багатомірні сигнали.

Типовим для радіотехніки сигналом є напруга або струм на ділянці кола. Такий сигнал, представлений однією функцією часу, прийнято називати одномірним. Цей випадок – найпоширеніший. І все ж іноді звертаються до багатомірного сигналу виду $V(t) = \{v_1(t), v_2(t), \dots, v_N(t)\}$, утвореного деякою множиною одномірних сигналів. Ціле число N називається розмірністю такого сигналу.

Поняття багатомірного сигналу ілюструється, наприклад, системою напруг на затискачах багатополісника.

Використання багатомірних моделей, в першу чергу, доцільне при дослідженні складних систем.

Детерміновані та випадкові сигнали.

Інша класифікаційна ознака сигналів базується на можливості або неможливості точного передбачення їх миттєвих значень у будь-який момент часу.

Якщо сигнал та його математична модель дозволяють здійснити такі передбачення, то сигнал називається детермінованим. Способи його представлення можуть бути різними, зокрема, математична формула, обчислювальний алгоритм, текстовий опис.

В строгому розумінні детермінованих сигналів в природі не існує. Неминуча і строго невідома взаємодія джерела повідомлень з оточуючими фізичними об'єктами, наявність хаотичних, різної природи флуктуацій – все це примушує розглядати реальні сигнали як випадкові функції часу і, таким чином, вести мову про випадкові сигнали.

Імпульсні сигнали.

Важливий клас сигналів представляють собою імпульси, тобто коливання, що існують в межах кінцевого відрізка часу. При цьому розрізняють відеоімпульси та радіоімпульси. Різниця між цими видами імпульсів полягає в наступному:

– якщо $u_e(t)$ – відеоімпульс, то відповідний йому радіоімпульс $u_p(t) = u_e(t) \cos(\omega_0 t + \psi_0)$. При цьому $u_e(t)$ називається огинаючою радіоімпульса, а функція $\cos(\omega_0 t + \psi_0)$ – його заповненням.

Аналогові, дискретні та цифрові сигнали.

Звичайно фізичний процес, породжуючий сигнал, розвивається в часі таким чином, що значення сигналу можна вимірювати в будь-які моменти часу. Сигнали цього класу прийнято називати аналоговими.

Одномірний аналоговий сигнал наочно представляється своїм графіком, причому, цей графік може бути як неперервним, так і містити точки розриву.

Початково в радіотехніці використовувались сигнали виключно аналогового типу.

Зростання вимог до радіотехнічних систем, різноматність застосувань примусили шукати нові принципи їх побудови. На заміну аналоговим в ряді випадків прийшли імпульсні системи, робота яких заснована на використанні дискретних сигналів.

Найпростіша математична модель дискретного сигналу $s_d(t)$ – це злічена множина точок $\{t_i\}$, ($i = 1, 2, \dots$) на вісі часу, в кожній з яких визначене відлікове значення сигналу $s_i(t)$. Як правило, інтервал дискретизації $\Delta = t_{i+1} - t_i$ для кожного сигналу незмінний.

Одна з переваг дискретних сигналів в порівнянні з аналоговими – відсутність необхідності відтворювати сигнал неперервно в усі моменти часу, що дозволяє по одній і тій же радіолінії передавати повідомлення від різних джерел різним споживачам, організуючи багатоканальний зв'язок з розділенням каналів в часі.

Особливим різновидом дискретних сигналів є цифрові сигнали. Вони характерні тим, що відлікові значення представляються в формі чисел. Широко використовують числа в двійковій системі з обмеженим числом розрядів.

Слід мати на увазі, що по сутності, будь-який дискретний чи цифровий сигнал (мова йде про фізичний процес, а не його модель) є сигналом аналоговим.

Так, аналоговому сигналу $s(t)$, що повільно змінюється в часі, можна поставити у відповідність його дискретний образ, який має вид послідовності прямокутних імпульсів однакової тривалості. Амплітуда цих імпульсів пропорційна значенню $s(t)$ у відлікових точках (рис. 7.1).

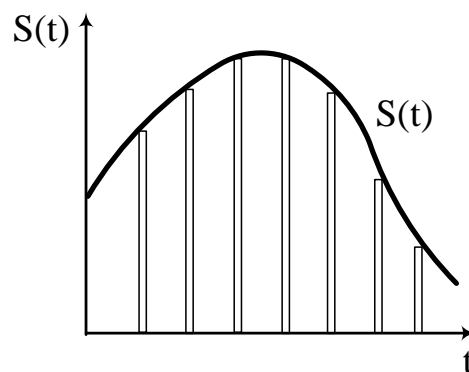


Рис. 7.1

Можна діяти по-іншому: зберігаючи амплітуди імпульсів незмінними, змінювати їх тривалість у відповідності з поточними відліковими значеннями (рис. 7.2.).

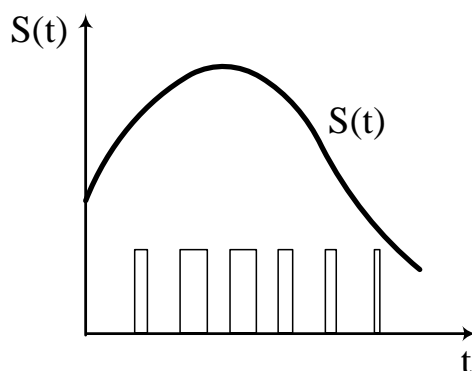


Рис. 7.2.

Реєстрація відлікових значень у вигляді чисел здійснюється також шляхом відображення послідовності відеоімпульсів. Двійкова система числення ідеально пристосована для цієї процедури.

7.1.2. Способи представлення сигналів

Виділяють два основних варіанти представлення сигналів – динамічне та спектральне.

Динамічне представлення сигналів відображує процес, що розвивається в часі, тобто динамічне представлення здійснюється в часовій області. При цьому реальний сигнал наближено описують сукупністю деяких елементарних сигналів, що виникають в послідовні моменти часу. Якщо тривалість окремих елементарних сигналів спрямувати до нуля, то гранично буде отримане точне представлення вихідного сигналу.

Серед можливих варіантів елементарних сигналів часто називають два: ступінчасту функцію (функцію ввімкнення, функцію Хевісайда) та дельта-функцію (функцію Дірака).

В першому випадку сигнал довільної форми представляється сукупністю ступінчастих функцій, що виникають через рівні проміжки часу Δ . Висота кожної сходинки дорівнює прирощенню сигналу на інтервалі часу Δ .

В другому випадку аналоговий сигнал представляється сукупністю прямокутних імпульсів, що примикають один до одного. Тривалість імпульсів однакова, а їх висота дорівнює значенню сигналу в відліковий момент.

Спектральне представлення полягає в розкладанні сигналу в узагальнений ряд Фур'є по системі ортогональних функцій, або ортогональному базису:

$$s(t) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \cdot v_i(t)$$

де $v_i(t)$ – елементарна складова системи ортогональних функцій;

C_i – коефіцієнт ряду Фур'є.

Отже, будь-який реальний сигнал можна представити сукупністю (сумою) простих, елементарних сигналів, які складають (утворюють) систему ортогональних функцій.

З відомих систем ортогональних функцій найбільш широко використовують тригонометричні ($\sin nx$, $\cos nx$) та комплексні експоненціальні ($e^{\pm jnx}$) функції. Згадані функції лежать в основі, так званого, гармонічного, або класичного, спектрального представлення сигналів.

Поширення цих функцій пояснюється, головним чином, двома причинами:

– по-перше, гармонічне коливання є єдиним сигналом, що проходить без спотворень через будь-яке лінійне електричне коло (можуть змінюватися лише амплітуда і фаза коливання);

– по-друге, розкладання реального сигналу на гармонічні складові дозволяє використовувати для аналізу процесів в електричних колах комплексний метод.

При такому аналізі припускають, що гармонічні складові діють на електричне коло в інтервалі часу $-\infty \dots +\infty$, тому розрахунок ведеться для усталеного режиму.

Гармонічне спектральне представлення застосовують як для періодичних, так і для неперіодичних сигналів.

7.2. Спектральне представлення періодичних сигналів

7.2.1. Представлення сигналів рядом Фур'є

Розглянемо періодичний сигнал, що представляє собою послідовність імпульсів довільної форми (рис. 7.3)

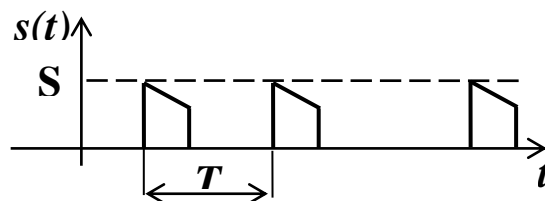


Рис. 7.3.

$$s(t) = s(t + nT) \quad (7.1)$$

де T – період проходження (повторення) імпульсів;
 $n = 1, 2, \dots$ – цілі числа.

Якщо функція $s(t)$ задовольняє умовам Дирихле, то вона може бути представлена рядом Фур'є в будь-якій з наступних форм

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t) \quad (7.2)$$

$$s(t) = \frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_1 t - \psi_n) \quad (7.3)$$

$$s(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n \cdot e^{jn\omega_1 t} \quad (7.4)$$

Усі форми мають між собою зв'язок, їх коефіцієнти визначаються наступними співвідношеннями

$$\frac{a_0}{2} = \frac{C_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt \quad (7.5)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos n\omega_1 t dt \quad (7.6)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin n\omega_1 t dt \quad (7.7)$$

$$\dot{C}_n = C_n \cdot e^{-j\psi_n} = a_n - jb_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cdot e^{-jn\omega_1 t} dt \quad (7.8)$$

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (7.9)$$

$$\psi_n = \operatorname{arctg} \frac{b_n}{a_n} \quad (7.10)$$

$$a_n = C_n \cos \psi_n \quad (7.11)$$

$$b_n = C_n \sin \psi_n \quad (7.12)$$

Фізичний зміст гармонічного спектрального представлення полягає в наступному:

– періодичний сигнал представляється постійною складовою C_0 та нескінченним числом гармонік, кожна з яких має певні, "свої", частоту $\omega_n = n\omega_1$, амплітуду C_n і початкову фазу ψ_n .

Сукупність усіх гармонік, з яких складається сигнал, називається частотним спектром сигналу. З частотного спектру виділяють амплітудно-частотний (АЧС) та фазо-частотний (ФЧС) спектри.

Амплітудно-частотний спектр – це сукупність постійної складової C_0 та усіх гармонік з амплітудами C_n . Він показує, як залежать від частоти амплітуди спектральних складових.

Постійну складову C_0 спектру умовно називають «нульовою гармонікою».

Гармонічне коливання з частотою ω_1 називається першою, або основною, гармонікою. Далі йдуть друга, третя і т.д. гармоніки з частотами відповідно $\omega_2 = 2\omega_1$, $\omega_3 = 3\omega_1$, $\omega_n = n\omega_1$. Частота першої гармоніки дорівнює частоті проходження імпульсів

$$\omega_1 = 2\pi f_1 = \frac{2\pi}{T} \quad (7.13)$$

Аргумент $n\omega_1 t - \psi_n$ є повна фаза n -ої гармоніки, а ψ_n – її початкова фаза.

Часто мають справу з сигналами, затриманими на час t_0 відносно початку спостереження, тобто відносно моменту $t = 0$. Запишемо формулу ряду з врахуванням затримки сигналу:

$$s(t - t_0) = \frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos[n\omega_1(t - t_0) - \psi_n] \quad (7.14)$$

Видно, що затримка сигналу не впливає на амплітуди гармонік, тобто АЧС від початкового зміщення сигналу не залежить. При цьому початкові фази визначаються співвідношенням:

$$\psi_n' = n\omega_1 t_0 - \psi_n, \quad (7.15)$$

яке визначає вплив початкового зміщення сигналу на його ФЧС.

7.2.2. Частотні спектри періодичної послідовності прямокутних імпульсів

Розглянемо спектральне представлення сигналу у вигляді періодичної послідовності прямокутних імпульсів напруги.

Епюра сигналу приведена на рис. 7.4.

На епюрі позначені параметри сигналу: U_m – амплітуда, T – період повторення, τ_i – тривалість імпульсів, t_0 – початкове зміщення.

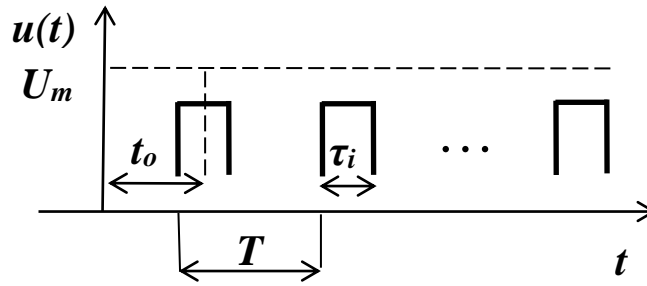


Рис. 7.4

Співвідношення між періодом та тривалістю імпульсів встановлює параметр під назвою шпаруватість q :

$$q = \frac{T}{\tau_i}$$

Представимо сигнал рядом Фур'є. Його коефіцієнти:

$$\frac{a_o}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = \frac{U_m}{T} \int_{-\tau_i/2}^{\tau_i/2} dt = U_m \frac{\tau_i}{T} = \frac{U_m}{q} = U_o; \quad (7.16)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\tau_i/2}^{\tau_i/2} U_m \cos n\omega_1 t dt = \frac{4U_m}{T} \frac{\sin \frac{n\omega_1 \tau_i}{2}}{n\omega_1} = \frac{2U_m}{q} \frac{\sin \frac{n\pi}{q}}{\frac{n\pi}{q}}. \quad (7.17)$$

Інтеграл від непарної функції в симетричних границях дорівнює 0, тому $b_n = 0$.

Знайдені коефіцієнти, підставимо в вихідну формулу:

$$u(t) = \frac{U_m}{q} + \frac{2U_m}{q} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{q}}{\frac{n\pi}{q}} \cdot \cos(n\omega_1 t - n\omega_1 t_o). \quad (7.18)$$

Отримане співвідношення показує залежність амплітуд і початкових фаз гармонік спектру від частоти і параметрів сигналу.

Розглянемо частотні спектри окремо.

Амплітудно-частотний спектр (АЧС)

$$U_{mn}(n) = U_o + \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} = \frac{U_m}{q} + \frac{2U_m}{q} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin \frac{n\pi}{q}}{\frac{n\pi}{q}} \right|; \quad (7.19)$$

де значення постійної складової, або «нульової» гармоніки U_o :

$$U_o = \frac{U_m}{q}; \quad (7.20)$$

значення амплітуди n -ої гармоніки:

$$U_{mn} = \frac{2U_m}{q} \left| \frac{\sin \frac{n\pi}{q}}{\frac{n\pi}{q}} \right| (f_k = kqf_1 = kq \frac{1}{T} = k \frac{1}{\tau_i}). \quad (7.21)$$

Огинаюча АЧС визначається функцією $\left| \frac{\sin x}{x} \right|$. Ця функція має назву «арочний синус» і позначається $S_a(x)$. Графік «арочного синусу» представлений на рис. 7.5.

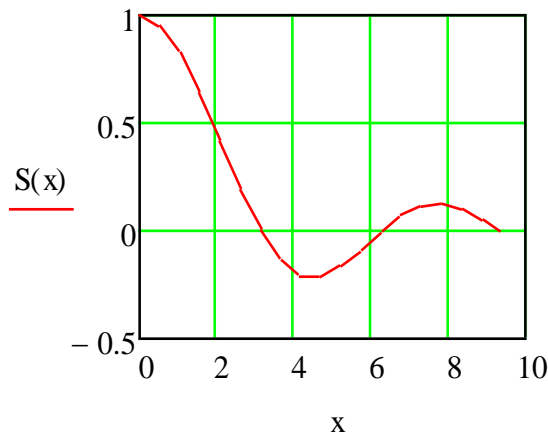


Рис. 7.5

Основні властивості:

- функція має періодичну (арочну) форму і знакозмінний характер;
- при $x = 0$ функція має максимальне значення, тобто $S_a(0) = 1$;
- функція $S_a(x) = 0$, якщо $x = k\pi$, ($k = 1, 2, \dots$); k визначає номер арки;
- максимальне значення функції в кожній наступній арці зменшується.

Представимо аргумент "арочного синуса" в формулі амплітуд спектральних складових наступним чином:

$$\frac{n\pi}{q} = \frac{n\pi\tau_i}{T} = \frac{n\omega_1\tau_i}{2} = k\pi$$

З отриманого співвідношення знайдемо частоти $\omega_k = n\omega_1$, на яких $S_a(x) = 0$, як наслідок, амплітуди відповідних спектральних складових дорівнюють нулю, тобто частоти складових, відсутніх в спектрі

$$\omega_k = \frac{2k\pi}{\tau_i} = kq\omega_1 \quad (7.22)$$

Якщо шпаруватість сигналу q – ціле число, то частоти ω_k співпадають з частотами певних гармонік, а саме з тими, номери яких кратні сквапності:

$$\omega_k = kq\omega_1 = n\omega_1, \quad n = kq.$$

Амплітуди цих гармонік дорівнюють нулю, тобто ці складові в спектрі сигналу відсутні. При цьому в кожній арці спектру розміщені $q - 1$ гармонік.

В загальному випадку шпаруватість може бути дробовим числом.

У формулі для амплітуд спектральних складових для зручності враховане модульне значення «арочного сіносу».

Наочне уявлення про структуру спектру, його ширину і відносну величину його складових дає графічне зображення спектру, або спектрограма АЧС в координатах «частота – амплітуда».

Можна скористатися наступним порядком побудови спектрограми:

– розраховують частоти гармонік ω_n або f_n :

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}, \quad \omega_2 = \frac{4\pi}{T}, \quad \omega_n = n\frac{2\pi}{T}, \quad \dots \quad (f_1 = \frac{1}{T}, \quad f_2 = \frac{2}{T}, \quad f_n = n\frac{1}{T}, \dots)$$

– розраховують частоти ω_k (f_k), на яких функція $S_a(x) = 0$:

$$\omega_k = kq\omega_1 = kq\frac{2\pi}{T} = k\frac{2\pi}{\tau_i}; \quad (f_k = kqf_1 = kq\frac{1}{T} = k\frac{1}{\tau_i})$$

– розраховані частоти позначають на частотній вісі, дотримуючись вибраного масштабу;

– розраховують постійну складову, амплітуди гармонік, починаючи з першої і наносять їх на спектрограму у вигляді відрізків прямих відповідної довжини, перпендикулярних вісі частот з точок, які відповідають частотам гармонік.

Спектрограма АЧС може бути побудована наближено, без деяких розрахунків. Для цього, визначивши і позначивши на частотній вісі характерні частоти ω_n або f_n , а також ω_k або f_k , будують огинаючу АЧС відповідно з графіком модуля функції $S_a(x)$. Далі, з точок, що відповідають частотам гармонік, будують перпендикуляри до перетину з огинаючою.

Приклад: побудуємо наближено АЧС сигналу зі шпаруватістю $q = 4$ (рис. 7.6)

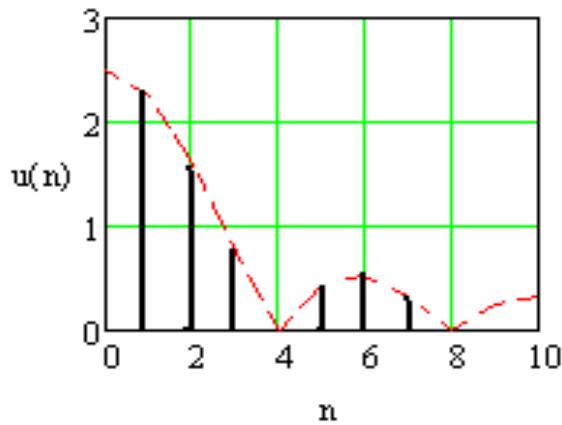


Рис. 7.6

Відзначимо основні властивості АЧС ПППІ.

1. Частотний спектр дискретний та еквідистантний. Дискретний характер спектру свідчить про те, що енергія сигналу зосереджена в окремих гармоніках.

2. Частоти сусідніх гармонік відрізняються на величину ω_1 , яка визначається частотою повторення імпульсів, або їх періодом T .

3. Амплітуди гармонік прямо пропорційні амплітуді імпульсів та обернено пропорційні шпаруватості. Їх величина змінюється відповідно до функції $S_a(x)$, тому найбільші амплітуди мають гармоніки, розташовані в перших арках спектру, зі зростанням номера гармонік, їх амплітуди зменшуються.

4. Ширина спектральних арок (діапазон частот арки) однакова і залежить тільки від тривалості імпульсів:

$$\Delta\omega_a = \frac{2\pi}{\tau_i}, \quad (\Delta f_a = \frac{1}{\tau_i}).$$

5. Зміна тривалості імпульсів при $T=const$ супроводжується зміною ширини арок, а також числа гармонік в них. Частоти гармонік при цьому не змінюються.

6. Зміна частоти повторення імпульсів при $\tau_i=const$ не викликає зміни ширини арок. При цьому змінюються частоти гармонік і їх число в кожній арці.

7. АЧС не залежить від часового зміщення t_0 імпульсів.

Фазо-частотний спектр (ФЧС).

Зі співвідношення, що визначає фазо-частотний спектр витікає, що початкові фази гармонік визначаються зміщенням імпульсів. Крім того, функція $S_a(x)$ обумовлює зміну початкових фаз гармонік на π при переході через нуль (з однієї арки в наступну). Отже, вираз для ФЧС запишемо у вигляді:

$$\psi_n = n\omega_1 t_0 \pm (k-1)\pi. \quad (7.23)$$

Спектрограма ФЧС будується аналогічно АЧС. Початкові фази, розраховані за попереднім співвідношенням, зображують у вигляді перпендикулярів до частотної вісі, їх довжина відповідає значенням початкових фаз з врахуванням масштабу. Знак перед другим доданком, вибирається, виходячи зі зручності побудови. Для ілюстрації побудуємо ФЧС ПППШ, шпаруватість якого $q = 4$, для двох випадків (рис. 7.7):

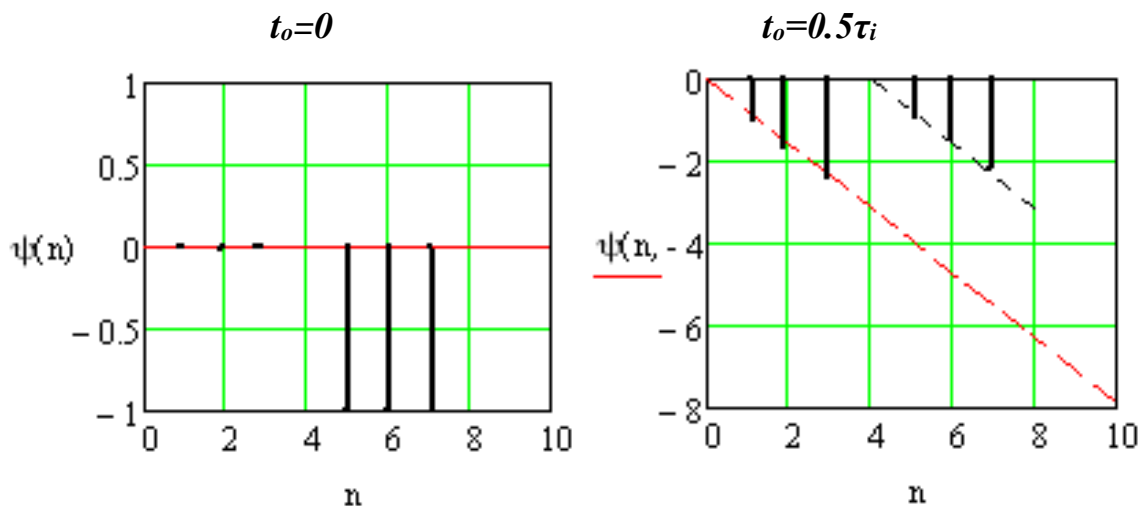


Рис. 7.7

Основні властивості ФЧС.

1. Початкові фази гармонік залежать від їх номера, номера арки, в якій вони знаходяться, а також від t_0 . Якщо $t_0=0$, то в межах кожної арки всі гармоніки мають однакові початкові фази. Перехід в сусідню арку супроводжується зміною початкової фази на $\pm \pi$. Якщо $t_0 > 0$, то в межах арки початкові фази змінюються лінійно зі зміною частоти. При цьому здвиг початкової фази в межах кожної арки дорівнює:

$$\Delta\psi_a = q\omega_1 t_0 = \frac{2\pi}{\tau_i} t_0. \quad (7.24)$$

2. Огинаюча ФЧС – це відрізки прямих ліній в межах кожної арки. Вони проходять паралельно вісі частот або під певним кутом, в залежності від величини початкового зміщення сигналу.

Спектрограма ФЧС також може бути побудована наближено.

7.2.3. Розподіл потужності та енергії в спектрі ПППШ

Відповідно до теореми (рівності) Парсеваля, яка встановлює зв'язок між енергетичними параметрами періодичного сигналу та його спектральних складових, активна потужність, як середня за період величина миттєвого значення потужності, визначається формулою:

$$P = U_0 I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n I_n \cos \phi_n$$

Вважаючи опір навантаження чисто активним, величиною $R_n = 1 \text{ Ом}$, отримаємо:

$$U_0 I_0 = U_0^2; \quad U_n I_n \cos \phi_n = U_n^2.$$

Таким чином,

$$P = U_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n^2, \quad (7.25)$$

тобто, активна потужність і енергія періодичного сигналу пропорційні сумі потужностей його спектральних складових, при цьому, огинаюча амплітудно – частотного спектру сигналу дає уявлення про розподіл енергії між складовими.

Ширина спектру періодичного сигналу теоретично нескінчена, але зі зростанням номера гармонік їх амплітуди і потужність стрімко зменшуються.

На практиці під шириною спектру сигналу розуміють діапазон частот, в межах якого зосереджена переважна частина ($\approx 95\%$) енергії. Її називають "ефективна ширина спектра" або "ефективний спектр" і позначають $\Delta\omega_e$.

Легко довести, що гармоніки сигналу у вигляді ПППІ, розміщені в першій та другій арках спектру, містять не менше 95% енергії. Тому, як правило, під ефективною шириною спектру такого сигналу розуміють діапазон частот в межах двох перших арок, тобто:

$$\Delta\omega_e \approx 2q\omega_1 \approx 4\pi/\tau_i \quad \text{або} \quad \Delta f_e \approx 2/\tau_i \quad (7.26)$$

Отже, ширина спектра ПППІ визначається тільки тривалістю імпульсів. Чим коротший імпульс, тим більшу смугу частот займає його ефективний спектр і навпаки.

7.3. Спектральне представлення неперіодичних сигналів

7.3.1. Перетворення Фур'є

Окремим випадком неперіодичного сигналу можна вважати одиничний імпульс, розглядаючи його, як граничний випадок періодичної послідовності імпульсів при необмеженому збільшенні періоду, тобто:

$$s_i(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} s(t + nT) \quad (7.27)$$

Припустимо, що при такому граничному переході представлення в ряд Фур'є зберігає справедливість.

Тоді, звертаючись до формули ряду Фур'є в комплексній формі (7.4) і враховуючи (7.8), запишемо:

$$\begin{aligned}
s_i(t) &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{T} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \cdot e^{jn\omega_1 t} = \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \right] \cdot e^{jn\omega_1 t} \cdot \omega_1
\end{aligned} \tag{7.28}$$

Збільшення періоду T супроводжується зменшенням амплітуди гармонік C_n . Крім того, скорочується інтервал між сусідніми гармоніками в спектрі і лінійчатий спектр все більше згущується.

Якщо спрямувати T до нескінченності, то частота ω_1 перетворюється в $d\omega$, дискретні частоти $n\omega_1$ – в неперервну частоту ω , операція складання – в операцію інтегрування, і спектр з дискретного – в суцільний. Отримаємо:

$$s_i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt \tag{7.29}$$

Внутрішній інтеграл позначимо:

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt \tag{7.30}$$

Величину $S(j\omega)$ називають спектральною густиною, або спектральною характеристикою, або спектром функції $s_i(t)$.

Компоненти спектральної густини, як комплексної величини

$$S(j\omega) = S(\omega) \cdot e^{-j\psi(\omega)}$$

визначають:
$$S(\omega) = |S(j\omega)| \tag{7.31}$$

залежність від частоти модуля комплексної спектральної густини – амплітудно-частотний спектр (АЧС) неперіодичного сигналу;

$$\psi(\omega) = \arg[S(j\omega)] \tag{7.32}$$

залежність від частоти аргументу комплексної спектральної густини – фазо-частотний спектр (ФЧС) неперіодичного сигналу.

Повертаючись до виразу (7.29), отримаємо:

$$s_i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \tag{7.33}$$

Формули (7.30) і (7.33) називають відповідно прямим та оберненим перетворенням Фур'є.

Скорочене позначення:

$$S(j\omega) = F[s_i(t)] \quad s_i(t) = F^{-1}[S(j\omega)]$$

Отже, неперіодичний сигнал $s_i(t)$ та його спектр $S(j\omega)$ взаємно–однозначно зв'язані парою перетворень Фур'є – прямим та оберненим.

Формула (7.33) представляє неперіодичну функцію $s_i(t)$ у вигляді суми нескінченно великого числа гармонічних коливань з нескінченно малими амплітудами і з частотами ω , що займають весь спектр від $-\infty$ до $+\infty$.

Розглядаючи (7.33) і (7.4), приходимо до висновку, що амплітуди цих гармонік дорівнюють:

$$\dot{C}_n = \frac{1}{\pi} \cdot S(j\omega) d\omega \quad (7.34)$$

Зміст поняття *спектральна густина* пояснимо, порівнюючи формулу (7.30) з (7.8) для комплексної амплітуди відповідної гармоніки періодичної функції.

Виділимо будь-яку дискретну частоту $\omega_n = n\omega_1$, яка відповідає n -й гармоніці періодичної функції. Амплітуда цієї гармоніки:

$$C_n = \frac{2}{T} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-j\omega_n t} dt$$

Для спектральної густини неперіодичної функції, що відповідає тій же частоті, отримаємо таке співвідношення

$$S(j\omega_n) = \int_{-\infty}^{\infty} s_i(t) e^{-j\omega_n t} dt$$

Отже:

$$S(j\omega_n) = \frac{T}{2} \cdot \dot{C}_n = \frac{\pi}{\omega_1} \dot{C}_n \quad \text{або} \quad S(j\omega_n) = \frac{1}{2F} \cdot \dot{C}_n \quad (7.35)$$

Таким чином, модуль комплексної спектральної густини на частоті ω_n визначають шляхом ділення амплітуди C_n n -ої гармоніки на подвоєне значення частотного інтервалу, що відділяє сусідні гармоніки дискретного спектру, тобто $S(j\omega)$ має зміст *густина амплітуд* і відповідно розмірність – *амплітуда/частота*.

До такого висновку можна прийти іншим шляхом.

Розглянемо лінійчатий спектр будь-якої періодичної функції і визначимо відношення амплітуди n -ої гармоніки C_n до частотного інтервалу між сусідніми

гармоніками, тобто до частоти повторення F періодичного сигналу. Якщо період необмежено збільшувати $T \rightarrow \infty$, відношення $\frac{C_n}{2F}$ залишається незмінним, оскільки збільшення T супроводжується однаковим зменшенням C_n і F . На границі, при $T \rightarrow \infty$, прийдемо до **спектральної густини** неперіодичної функції.

Зі співвідношень (7,35), що встановлюють зв'язок між комплексною амплітудою спектральних складових періодичного сигналу та спектральною густиною неперіодичного сигналу, витікає важливе положення:

Спектр неперіодичного сигналу – суцільний, його огинаюча (модуль комплексної спектральної густини) і огинаюча лінійчатого спектру періодичної функції, отриманої із неперіодичної шляхом її продовження з періодом T , співпадають по формі і відрізняються масштабом.

Відзначимо, що при $\omega=0$, коли постійна складова визначається:

$$\frac{C_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt$$

$$S(0) = C_0 \cdot T = \frac{2\pi}{\omega_1} \cdot C_0$$

можна записати:

(7.36)

Комплексна спектральна густина має всі основні властивості комплексної амплітуди.

7.3.2. Основні властивості та теореми перетворення Фур'є

Перетворенню Фур'є притаманні ряд властивостей та теорем:

– лінійність:

$$\sum_k A_k \cdot s_k(t) \Leftrightarrow \sum_k A_k \cdot S_k(j\omega)$$

(7.37)

– спектральна густина похідної та інтегралу функції:

$$\frac{d}{dt}[s(t)] \Leftrightarrow j\omega S(j\omega); \quad \frac{d^{(n)}}{dt^{(n)}}[s(t)] \Leftrightarrow (j\omega)^n S(j\omega);$$

(7.38)

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t) dt \Leftrightarrow \frac{1}{j\omega} S(j\omega);$$

(7.39)

– спектральна густина сигналу, зміщеного в часі:

$$s(t - t_0) \Leftrightarrow S(j\omega) \cdot e^{-j\omega t_0};$$

(7.40)

– спектральна густина добутку сигналів:

$$s_1(t) \cdot s_2(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} [S_1(\omega) * S_2(\omega)] \quad (7.41)$$

тобто, добуток сигналів з точністю до постійного множника дорівнює згортанню їх спектральних густин та інші.

7.3.3. Спектри одиночного прямокутного імпульсу

Визначимо спектр прямокутного імпульсу напруги, зміщеного відносно початку спостереження на t_0 (рис. 7.8).

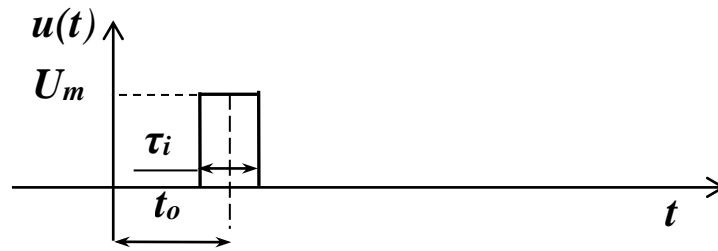


Рис. 7.8

Його аналітичне представлення:

$$u(t) = U_m \quad \text{при} \quad t_0 + \frac{\tau_i}{2} > t > t_0 - \frac{\tau_i}{2}$$

$$u(t) = 0 \quad \text{при} \quad t_0 - \frac{\tau_i}{2} > t > t_0 + \frac{\tau_i}{2}$$

Для знаходження спектру (комплексної спектральної густини) скористаємось прямим перетворенням Фур'є (7.30) та виконаємо ряд стандартних операцій:

$$\begin{aligned} S(j\omega) &= F[s(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{U_m}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{t_0 - \frac{\tau_i}{2}}^{t_0 + \frac{\tau_i}{2}} = \frac{U_m}{-j\omega} \left[e^{-j\omega t_0} \cdot e^{-j\omega \frac{\tau_i}{2}} - e^{-j\omega t_0} \cdot e^{j\omega \frac{\tau_i}{2}} \right] = \\ &= \frac{U_m}{j\omega} e^{-j\omega t_0} (e^{j\omega \frac{\tau_i}{2}} - e^{-j\omega \frac{\tau_i}{2}}) = U_m \cdot \tau_i \cdot e^{-j\omega t_0} \cdot \frac{\sin \frac{\omega \tau_i}{2}}{\frac{\omega \tau_i}{2}} = U_m \cdot \tau_i \cdot \left| \frac{\sin \frac{\omega \tau_i}{2}}{\frac{\omega \tau_i}{2}} \right| \cdot e^{-j[\omega t_0 \pm (k-1)\pi]} \end{aligned} \quad (7.42)$$

При перетвореннях врахована формула Ейлера: $\sin \alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}$

Виділяючи з (7.42) модуль та аргумент, отримаємо вирази амплітудно-частотного:

$$S(\omega) = U_m \cdot \tau_i \left| \frac{\sin \frac{\omega \tau_i}{2}}{\frac{\omega \tau_i}{2}} \right| \quad (7.43)$$

та фазо-частотного спектрів сигналу:

$$\psi(\omega) = \omega \cdot t_0 \pm (k-1)\pi \quad (7.44)$$

Спектрограми амплітудно-частотного та фазо-частотного спектрів одиничного імпульсу, зміщеного в часі, в загальному випадку представлені на рис. 7.9:

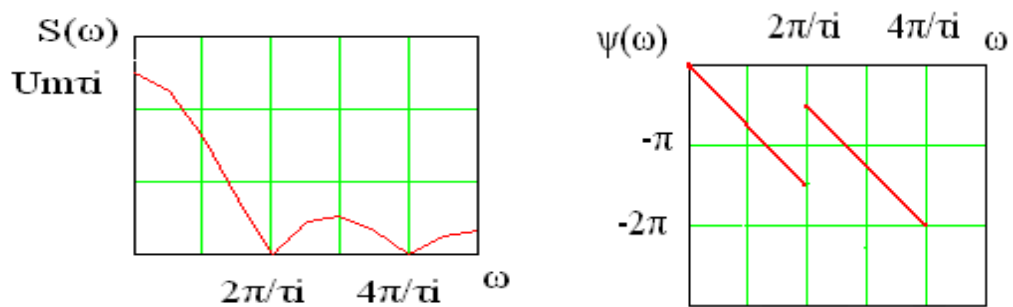


Рис. 7.9

Відзначимо, що спектральна густина на нульовій частоті дорівнює площі імпульсу:

$$S(0) = U_m \cdot \tau_i$$

8. Проходження сигналів через лінійні електричні кола

8.1. Сутність спектрального методу аналізу проходження сигналів

Сутність спектрального методу аналізу процесів в електричному колі полягає в наступному:

– дія, або сигнал, на вході кола представляють в частотній області у вигляді сукупності гармонічних складових, які діють на інтервалі $-\infty < t < \infty$, тобто задовго до початку спостереження; сигнал на виході кола (реакція) у відповідності із принципом накладання визначається як сума гармонічних реакцій на кожну складову вхідного сигналу окремо.

Таким чином, задача зводиться до аналізу усталеного режиму в колі гармонічного струму.

Нагадаємо, що відповідно до спектрального представлення, на вході одночасно діє сукупність гармонічних коливань з певною амплітудою, частотою й початковою фазою.

8.2. Проходження сигналів з дискретним спектром

Нехай на вході кола діє будь-який періодичний сигнал. Його представлення в частотній області, як відомо, здійснюють за допомогою ряду Фур'є, зокрема в комплексній формі (7.4):

$$s_{ex}(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_{n\ ex} \cdot e^{jn\omega_1 t} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{n\ ex} \cdot e^{-j\psi_{n\ ex}} \cdot e^{jn\omega_1 t}$$

Згадаємо, що зв'язок між комплексними зображеннями гармонічної дії на вході кола і його реакції визначається комплексною функцією кола:

$$K(j\omega) = \frac{\dot{C}_{вих}}{\dot{C}_{вх}}$$

Отже, для визначення складових реакції необхідно комплексні амплітуди складових вхідної величини помножити на значення комплексної функції на відповідних частотах складових:

$$\dot{C}_{n\ вих} = \dot{C}_{n\ вх} \cdot K(j\omega_n)$$

Тоді для вихідного сигналу в часовій області маємо:

$$s_{вих}(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_{n\ вх} \cdot K(j\omega_n) \cdot e^{jn\omega_1 t}$$

Таким чином, амплітудно-частотний спектр сигналу на виході кола одержують шляхом перемноження амплітудно-частотного спектру сигналу на

вході кола на модуль комплексної функції кола, а його фазо-частотний спектр – додаванням фазо-частотного спектру вхідного сигналу і значення аргументу комплексної функції кола на відповідних частотах.

Порядок розрахунку спектра вихідного сигналу

1. Представити вхідний сигнал у вигляді ряду Фур'є.
2. Визначити, відповідно з умовою задачі, комплексну функцію кола.
3. Обчислити комплексні амплітуди складових вихідного сигналу як добуток комплексних амплітуд складових вхідного сигналу на комплексну функцію кола на відповідних частотах.

8.3. Проходження сигналів з суцільним спектром

Якщо на вході кола діє неперіодичний сигнал, то його представлення в частотній області здійснюють за допомогою прямого перетворення Фур'є:

$$S_{ex}(j\omega) = F[s_{ex}(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt$$

Зрозуміло, що в цьому випадку, по аналогії з попереднім, спектральна густина вихідного сигналу визначається добутком спектральної густини вхідного сигналу і комплексної функції кола, тобто:

$$S_{eux}(j\omega) = S_{ex}(j\omega) \cdot K(j\omega)$$

Порядок розрахунку спектра вихідного сигналу

1. Обчислити спектральну густину вхідного сигналу.
2. Визначити відповідну комплексну функцію кола.
3. Обчислити спектральну густину вихідного сигналу.
4. Якщо необхідно, знайти вихідний сигнал як функцію часу шляхом оберненого перетворення Фур'є.

8.4. Диференціювання та інтегрування сигналів в електричних колах

Розглянемо умови перетворення сигналів при проходженні через коло, що мають характер диференціювання або інтегрування:

$$s_{eux}(t) = \tau_0 \frac{ds_{ex}(t)}{dt}$$

$$s_{eux}(t) = \frac{1}{\tau_0} \int s_{ex}(t) dt$$

де τ_0 – постійний коефіцієнт, що має розмірність часу.

Дослідимо **RC**-коло, схема якого представлена на рис. 8.1

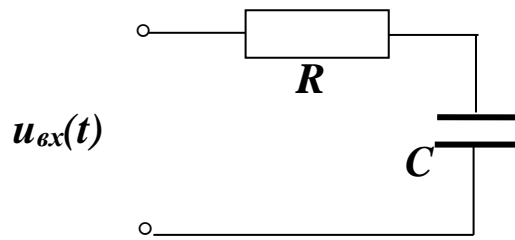


Рис.8.1

Рівняння балансу напруг для даної схеми:

$$u_{ex}(t) = u_C(t) + u_R(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt + i(t)R$$

Помножимо обидві частини рівняння на C і позначимо $\tau = RC$:

$$u_{ex}(t) \cdot C = \int i(t) dt + i(t)\tau.$$

Характер функціонального зв'язку між напругою на вході $u_{ex}(t)$ і струмом $i(t)$ залежить від величини τ .

Розглянемо два випадки значень сталої часу: 1). τ – дуже мала; 2). τ – дуже велика.

1). Другим доданком в правій частині рівняння можна зневажити, тобто:

$$u_{ex}(t) \cdot C \approx \int i(t) dt.$$

Візьмемо похідну по t :

$$C \frac{du_{ex}(t)}{dt} \approx i(t)$$

Отже, напруга $u_R(t)$ на елементі R , обумовлена струмом $i(t)$, пропорційна похідній вхідного сигналу:

$$u_{oux}(t) = u_R(t) = i(t) \cdot R \approx \tau \frac{du_{ex}(t)}{dt}.$$

Таким чином, схема диференціюючого RC-кола має вид, представлений на рисунку 8.2

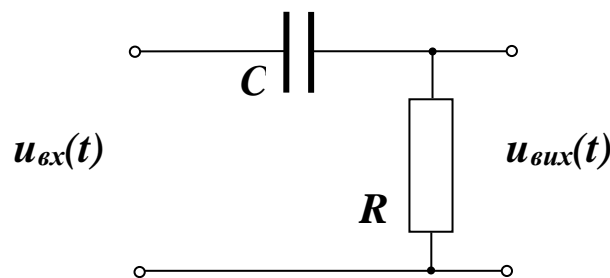


Рис. 8.2

2). Можна зневажити першим доданком:

$$u_{ex}(t) \cdot C \approx i(t)\tau$$

$$i(t) \approx \frac{C}{\tau} u_{ex}(t) \approx \frac{1}{R} u_{ex}(t)$$

Струм співпадає з вхідним сигналом, а напруга на ємності:

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \approx \frac{1}{RC} \int u_{ex}(t) dt$$

пропорційна інтегралу від вхідного сигналу. Отже, інтегруюче RC -коло має схему (рис. 8.3)

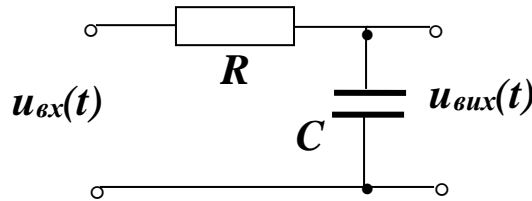


Рис. 8.3

Аналогічні результати можна одержати і для RL -кіл.

Уточнимо використані вище поняття "мала" і "велика" щодо сталої часу τ . Скористаємось спектральним представленням вхідного і вихідного сигналів. Згадаємо, що відповідно з властивостями перетворення Фур'є

$$u_{vux}(t) = \tau \frac{du_{ex}(t)}{dt} \Leftrightarrow S_{vux}(j\omega) = j\omega\tau S_{ex}(j\omega);$$

$$u_{vux}(t) = \frac{1}{\tau} \int u_{ex}(t) dt \Leftrightarrow S_{vux}(j\omega) = \frac{1}{j\omega\tau} S_{ex}(j\omega)$$

Це значить, що для точного диференціювання потрібне електричне коло з коефіцієнтом передачі напруги $K_U(j\omega) = j\omega\tau$,

а для точного інтегрування $K_U(j\omega) = \frac{1}{j\omega\tau}$.

Для розглянутих вище RC -кіл коефіцієнт передачі дорівнює:

для диференціюючого $K_U(j\omega) = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}$;

для інтегруючого $K_U(j\omega) = \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$

Порівнюючи данні вирази з виразами потрібних коефіцієнтів передачі, приходимо до висновків:

1. Для задовільного диференціювання необхідно, щоб виконувалась умова $\omega\tau \ll 1$. За ω слід прийняти максимальну частоту в спектрі вхідного сигналу. Наприклад, для сигналу у вигляді періодичної послідовності прямокутних імпульсів, враховуючи зв'язок між тривалістю імпульсу і ефективною шириною його спектру, одержуємо:

$$\omega_{\text{макс}} \approx \frac{4\pi}{\tau_i}; \quad \frac{\tau}{\tau_i} \ll 1; \quad \tau \ll \tau_i$$

2. Для задовільного інтегрування необхідно, щоб виконувалась умова $\omega\tau \gg 1$. Діючи аналогічно попередньому випадку, маємо:

$$\frac{\tau}{\tau_i} \gg 1; \quad \tau \gg \tau_i$$

3. Для заданого електричного кола диференціювання тим точніше, чим нижче частоти, на яких концентрується енергія вхідного сигналу, а інтегрування тим точніше, чим вище ці частоти.

4. Чим точніше диференціювання або інтегрування, тим менше (по модулю) значення має передаточна функція кола, яка здійснює ці перетворення. Сказане відноситься до найпростіших кіл.

5. Типові **RC**- та **RL**-кола придатні лише для наближених перетворень.

9. Аналіз процесів в лінійних електричних колах операторним методом

9.1. Сутність операторного методу

Ускладнення електричного кола, зокрема, збільшення його порядку, а також ускладнення зовнішньої дії обумовлюють ускладнення диференціальних та інтегрально-диференціальних рівнянь післякомутаційного кола і певні труднощі його розв'язку. Насамперед, це стосується знаходження примушених складових перехідного процесу і постійних інтегрування. У зв'язку з цим в теорії електричних кіл при дослідженні процесів широко застосовують операторний метод аналізу, який дозволяє уникнути ряду незручностей, характерних для класичного методу.

Операторний метод заснований на перетворенні Лапласа. Сутність його полягає в тому, що функції з області дійсної змінної t (часової області) переносяться в область комплексної змінної – оператора $p = \sigma + j\omega$ (область комплексних величин) таким чином, щоб замість інтегрально-диференціальних рівнянь отримати алгебраїчні рівняння. При цьому математичні дії над функціями часу, або оригіналами, замінюють більш простими діями над їхніми зображеннями, або символами. Після розв'язку цих рівнянь здійснюють зворотний перехід до функції дійсної змінної t .

Таким чином, операторний метод належить до символічних методів. Оператор p визначають як узагальнену комплексну частоту, тобто:

$$p = \sigma + j\omega.$$

Взаємна відповідність між функціями часу (оригіналами) $f(t)$ та їх операторними зображеннями (зображеннями за Лапласом) $F(p)$ встановлюється парою перетворень Лапласа:

$$\text{прямого} \quad F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt; \quad (9.1)$$

$$\text{оберненого} \quad f(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} F(p)e^{pt} dp. \quad (9.2)$$

При цьому вважають, що "оригіналу $f(t)$ відповідає зображення за Лапласом $F(p)$ ":

$$f(t) \Rightarrow F(p),$$

або "зображенню за Лапласом $F(p)$ відповідає оригінал $f(t)$ ":

$$F(p) \Rightarrow f(t).$$

Скорочений варіант посилання на перетворення Лапласа має наступний вид: прямого $F(p) = L[f(t)]$; зворотного $f(t) = L^{-1}[F(p)]$.

Нагадаємо: для того щоб функція $f(t)$ мала зображення (6.1), необхідно наступне:

- а) щоб вона задовольняла умовам Діріхле;
- б) дорівнювала нулю для від'ємних значень t , тобто при $t < 0, f(t) = 0$;
- в) в інтервалі t від 0 до ∞ не збільшується швидше, ніж деяка показова функція:

$$|f(t)| \leq M e^{\sigma_0 t},$$

де M і σ_0 – довільні додатні числа, тобто, тут не потрібна абсолютна інтегрованість функції $f(t)$, як це потрібно в перетворенні Фур'є. Тому перетворення Лапласа можливі для більш широкого класу функцій, ніж перетворення Фур'є.

9.2. Основні властивості і теореми перетворення Лапласа

Перетворенню Лапласа притаманний ряд властивостей і теорем, зокрема:

- Властивість єдиності – якщо оригіналу $f(t)$ відповідає зображення $F(p)$, то це зображення єдине і навпаки, якщо зображенню $F(p)$ відповідає оригінал $f(t)$, то цей оригінал єдиний.
- Властивість лінійності – сумі оригіналів відповідає сума їх зображень:

$$\sum_{k=1}^n A_k f_k(t) \Rightarrow \sum_{k=1}^n A_k F_k(p). \quad (9.3)$$

З цієї властивості випливає: множенню оригіналу на постійний коефіцієнт A відповідає множення його зображення на той же коефіцієнт;

$$A f(t) \Rightarrow A F(p). \quad (9.4)$$

- Теорема диференціювання – якщо $f(t) \Rightarrow F(p)$, то похідній оригіналу n -го порядку відповідає зображення:

$$f^{(n)}(t) \Rightarrow p^n F(p) - \sum_{k=1}^n p^{n-k} f^{(k-1)}(0), \quad (9.5)$$

де $f^{(k-1)}(0)$ – похідна $k-1$ порядку функції $f(t)$ при $t=0$.

Наприклад,

$$\frac{d}{dt} f(t) \Rightarrow pF(p) - f(0).$$

При нульових початкових умовах ($f(0) = 0$):

$$f^{(n)}(t) \Rightarrow p^n F(p), \quad (9.6)$$

тобто, n -кратному диференціюванню оригіналу відповідає n -кратне множення його зображення на оператор p .

• Теорема інтегрування – якщо $f(t) \Rightarrow F(p)$, то:

$$\int_0^t f(t) dt \Rightarrow \frac{F(p)}{p}, \quad (9.7)$$

тобто, інтегруванню оригіналу відповідає ділення його зображення на оператор p .

• Теорема запізнювання (зміщення оригіналу) – запізнюванню (зміщенню) оригіналу на час t_0 відповідає множення його зображення на множник e^{-pt_0} , тобто:

$$f(t - t_0) \Rightarrow F(p) e^{-pt_0}. \quad (9.8)$$

• Теорема зсуву зображення – множенню оригіналу на множник $e^{\pm \alpha t}$ відповідає заміна в його зображенні оператора p на оператор $p \mp \alpha$, тобто:

$$f(t) e^{\pm \alpha t} \Rightarrow F(p \mp \alpha); \quad (9.9)$$

• Теорема згортання – добутку зображень відповідає згортання їх оригіналів, а саме, якщо $f_1(t) \Rightarrow F_1(p)$ і $f_2(t) \Rightarrow F_2(p)$, то:

$$F_1(p) F_2(p) \Rightarrow \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t f_2(\tau) f_1(t - \tau) d\tau; \quad (9.10)$$

• Теорема розкладання - якщо зображення має вигляд раціонального дробу

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n},$$

причому ступінь многочлена $F_1(p)$ менше ступеня многочлена $F_2(p)$, тобто, коефіцієнти a_k, b_k - дійсні числа, а корені p_k рівняння $m < n$ $F_2(p) = 0$ різні, то оригінал визначається як

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t}, \quad (9.11)$$

де $F_1(p_k)$ - значення полінома в чисельнику при відповідному корені; $F_2'(p_k)$ - значення похідної полінома в знаменнику при відповідному корені.

Якщо один з коренів рівняння $F_2(p) = 0$ дорівнює нулю, тобто $F_2(p) = pF_3(p)$, то оригінал можна обчислити за формулою:

$$f(t) = \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{p_k F_3'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (9.12)$$

Відомі й інші модифікації теореми розкладання.

Теорема розкладання в поєднанні з іншими теоремами і властивостями перетворення Лапласа дозволила скласти великі таблиці пар відповідностей оригіналів і зображень.

Таблиця містить найбільш поширені в практиці розрахунків електричних кіл пари відповідностей оригіналів та зображень:

№ з/п	Оригінал $f(t)$	Зображення $F(p)$
1	$A = \text{const}$	$\frac{A}{p}$
2	$1(t)$	$\frac{1}{p}$
3	$\delta(t)$	1
4	t	$\frac{1}{p^2}$
5	$e^{p_k t}$	$\frac{1}{p - p_k}$
6	$e^{\pm \alpha t}$	$\frac{1}{p \mp \alpha}$

№ з/п	Оригінал $f(t)$	Зображення $F(p)$
7	$\frac{1}{\alpha}(1 - e^{\pm\alpha t})$	$\frac{1}{p(p \mp \alpha)}$
8	$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p + \alpha)^2}$
9	$t^n, n - \text{ціле число}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
10	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
11	$\sin(\omega t + \psi)$	$\frac{p \sin \psi + \omega \cos \psi}{p^2 + \omega^2}$
12	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
13	$\cos(\omega t + \psi)$	$\frac{p \cos \psi - \omega \sin \psi}{p^2 + \omega^2}$
14	$e^{-\alpha t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}$
15	$e^{-\alpha t} \cos \omega t$	$\frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}$
16	$\frac{1}{\beta - \alpha}(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})$	$\frac{1}{(p + \alpha)(p + \beta)}$
17	$e^{j(\omega t + \psi)}$	$\frac{e^{j\psi}}{p - j\omega}$

• Граничні співвідношення – між граничними значеннями оригіналів і їх зображень має місце наступний зв'язок:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} f(t); \quad \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} f(t). \quad (9.13)$$

9.3. Операторні схеми заміщення пасивних елементів електричних кіл

Перехід в комплексну область при реалізації операторного методу передбачає не тільки перехід від оригіналів електричних величин до їх зображень за Лапласом, але і до певним чином представлених елементів електричного кола (схеми). Визначимо ці представлення, використовуючи згадані властивості і теореми перетворення Лапласа.

Сформулюємо визначення операторного опору і операторної провідності в найбільш загальному вигляді:

операторний опір $Z(p)$ елемента або ділянки електричного кола – це відношення операторного зображення напруги до операторного зображення струму, що діють на елементі або ділянці кола, тобто

$$Z(p) = \frac{U(p)}{I(p)}. \quad (9.14)$$

Величина, зворотна операторному опору, – це операторна провідність $Y(p)$, або

$$Y(p) = \frac{I(p)}{U(p)}. \quad (9.15)$$

Схема заміщення активного опору

Розглянемо ділянку схеми (рис. 9.1), що містить активний опір

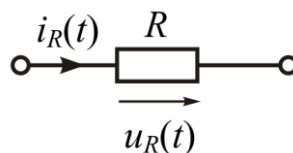


Рис. 9.1

Якщо $i_R(t) \Rightarrow I_R(p)$ і $u_R(t) \Rightarrow U_R(p)$, то цілком природно представити опір R зображенням у вигляді операторного опору $Z_R(p)$.

Враховуючи властивість лінійності, маємо $U_R(p) = RI_R(p)$, в той же час у загальному вигляді $U_R(p) = Z_R(p)I_R(p)$.

Таким чином,

$$Z_R(p) = R, \quad (9.16)$$

тобто, операторний опір активного опору дорівнює самому активному опору, а його еквівалентна операторна схема має вид, представлений на рис. 9.2.

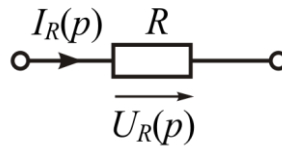


Рис. 9.2

Схема заміщення індуктивності

Ділянка схеми містить індуктивність (рис. 9.3).

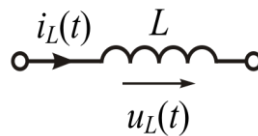


Рис. 9.3

Зв'язок між струмом і напругою в індуктивності встановлює відоме співвідношення

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}. \quad (9.17)$$

Якщо $i_L(t) \Rightarrow I_L(p)$, $u_L(t) \Rightarrow U_L(p)$, то на підставі властивості лінійності і теореми диференціювання:

$$\begin{aligned} U_L(p) &= L[pI_L(p) - i_L(0)] = LpI_L(p) - Li_L(0) = \\ &= Z_L(p)I_L(p) - E_{L\text{вн}}(p), \end{aligned} \quad (9.18)$$

де $Z_L(p) = Lp$ – операторний опір індуктивності;

$E_{L\text{вн}}(p) = Li_L(0)$ – ЕРС, обумовлена ненульовими початковими умовами, так звана внутрішня операторна ЕРС, обумовлена початковим запасом енергії (струмом $i_L(0)$). Напрямок ЕРС цього джерела збігається з напрямком початкового струму. При нульових початкових умовах операторна схема не містить додаткове джерело.

Таким чином, еквівалентна операторна схема індуктивності з струмом (випадок ненульових початкових умов) містить операторний опір індуктивності $Z_L(p)$ і внутрішнє джерело ЕРС (Рис. 9.4).

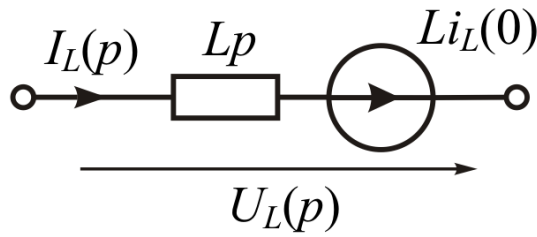


Рис. 9.4

Операторну схему індуктивності можна представити з внутрішнім джерелом струму, якщо розв'язати рівняння (9.18) для $U_L(p)$ відносно $I_L(p)$, а саме:

$$I_L(p) = \frac{U_L(p)}{pL} + \frac{Li_L(0)}{pL} = Y_L(p)U_L(p) + \frac{i_L(0)}{p}, \quad (9.19)$$

де $Y_L(p) = \frac{1}{pL}$ – операторна провідність індуктивності;

$J_{\text{ЛВН}}(p) = \frac{i_L(0)}{p}$ – струм, обумовлений ненульовими початковими

умовами, так званий внутрішній операторний струм.

Співвідношенню (6.19) відповідає схема, представлена на рис. 9.5

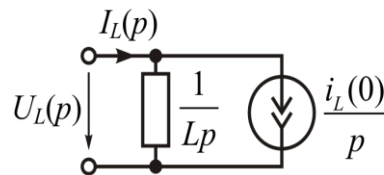


Рис. 9.5

Схема заміщення ємності

Ділянка схеми містить ємність (рис. 9.6).

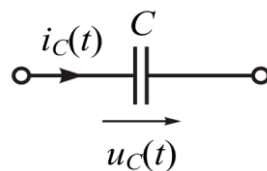


Рис. 9.6

Діємо аналогічно попередньому випадку, як і з індуктивністю.

Зв'язок між струмом і напругою в ємності встановлює наступне співвідношення:

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}. \quad (9.20)$$

Якщо $i_C(t) \Rightarrow I_C(p)$, $u_C(t) \Rightarrow U_C(p)$, то на підставі властивості лінійності і теореми диференціювання отримаємо:

$$\begin{aligned} I_C(p) &= C[pU_C(p) - u_C(0)] = CpU_C(p) - Cu_C(0) = \\ &= Y_C(p)U_C(p) - J_{C \text{ вн}}, \end{aligned} \quad (9.21)$$

де $Y_C(p) = Cp$ – операторна провідність ємності;

$J_{C \text{ вн}} = Cu_C(0)$ – струм, обумовлений ненульовими початковими умовами, так зване внутрішнє операторне джерело.

Таким чином, еквівалентна операторна схема зарядженої ємності (випадок ненульових початкових умов) містить операторну провідність ємності $Y_C(p)$ і внутрішнє джерело струму $J_{C \text{ вн}}$ (Рис. 9.7).

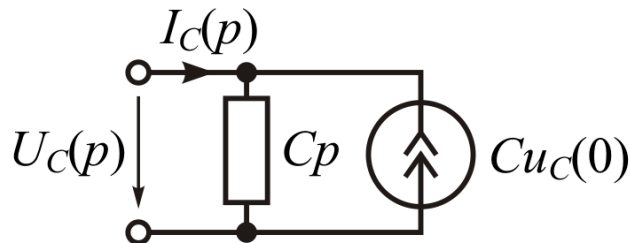


Рис. 9.7

Операторну схему заміщення ємності з внутрішнім джерелом ЕРС (рис. 9.8) отримаємо після розв'язку рівняння (9.21) відносно $U_C(p)$, а саме:

$$U_C(p) = \frac{1}{Cp} I_C(p) + \frac{u_C(0)}{p} = Z_C(p)I_C(p) + E_{C \text{ вн}}(p), \quad (9.22)$$

де $Z_C(p) = \frac{1}{Cp}$ – операторний опір ємності;

$E_{C \text{ вн}}(p) = \frac{u_C(0)}{p}$ – ЕРС, обумовлена ненульовими початковими умовами,

внутрішнє операторне джерело.

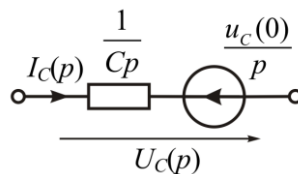


Рис. 9.8

Напрямок ЕРС джерела визначається полярністю початкової напруги на ємності $u_c(0)$.

Таким чином, при ненульових початкових умовах операторні еквівалентні схеми реактивних елементів містять крім операторних опорів (операторних провідностей), так звані "внутрішні" джерела енергії у вигляді джерел ЕРС або струму.

Операторна еквівалентна схема заміщення електричного кола

Операторна еквівалентна схема електричного кола – це схема, в якій напруги і струми, у тому числі джерела енергії, представлені операторними зображеннями, а пасивні елементи – операторними еквівалентними схемами з урахуванням початкових умов (рис. 9.9.а, б). Саме операторна еквівалентна схема (рис. 9.9.б) підлягає розрахункам при дослідженні процесів в електричному колі операторним методом.

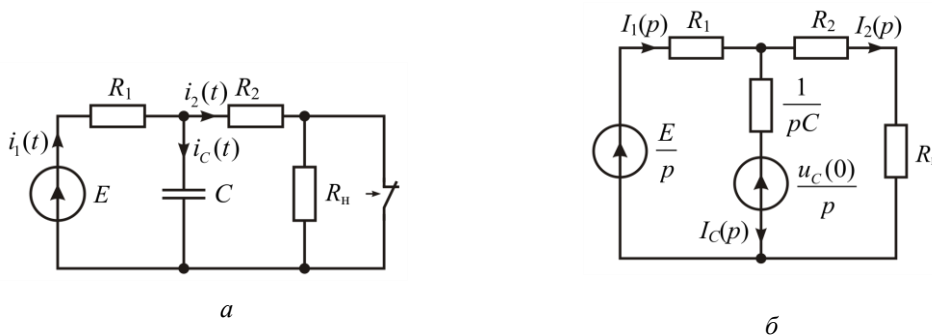


Рис. 9.9

9.4. Закони Кірхгофа і Ома в операторній формі

Закони Кірхгофа в операторній формі формулюються на підставі основних властивостей і теорем перетворення Лапласа.

Згадаймо, що згідно з першим законом Кірхгофа алгебраїчна сума миттєвих значень струмів гілок, що сходяться у вузлі електричного кола, дорівнює нулю, тобто

$$\sum_{k=1}^n i_k(t) = 0, \quad (9.23)$$

де n – число гілок, що сходяться у вузлі.

Якщо кожному з струмів $i_k(t)$ поставити у відповідність їх зображення за Лапласом $I_k(p)$, то, враховуючи властивість лінійності перетворення Лапласа, можна записати:

$$\sum_{k=1}^n i_k(t) \Rightarrow \sum_{k=1}^n I_k(p).$$

Отже, перший закон Кірхгофа в операторній формі представляє наступне співвідношення:

$$\sum_{k=1}^m I_k(p) = 0. \quad (9.24)$$

За другим законом Кірхгофа алгебраїчна сума миттєвих значень ЕРС джерел в контурі електричного кола дорівнює алгебраїчній сумі миттєвих значень падінь напруги на пасивних елементах. Для формулювання другого закону Кірхгофа в операторній формі звернемося до схеми електричного кола, показаної на рис. 9.10.

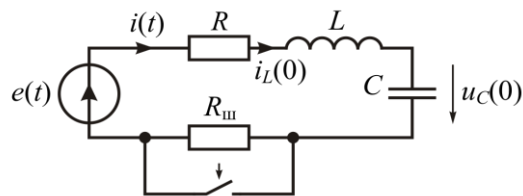


Рис. 9.10

Очевидно, що обраний приклад відповідає ненульовим початковим умовам, як найбільш загальному випадку, тобто, в момент комутації ($t = 0$) струм в індуктивності і напруга на ємності мають кінцеві значення, або

$$i_L(0) \neq 0; \quad u_C(0) \neq 0.$$

Відповідно до другого закону Кірхгофа, рівняння балансу для миттєвих значень електричних величин післякомутаційного кола:

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt = e(t). \quad (9.25)$$

Нехай $i(t) \Rightarrow I(p)$, $e(t) \Rightarrow E(p)$. Тоді операторні зображення падінь напруги на пасивних елементах будуть такими:

на активному опорі $U_R(p) = RI(p);$

на індуктивності $U_L(p) = L[pI(p) - i(0)];$

на ємності $U_C(p) = \frac{I(p)}{Cp} + \frac{u_C(0)}{p}.$

Рівняння балансу для операторних зображень:

$$RI(p) + LpI(p) - Li(0) + \frac{1}{Cp} I(p) + \frac{u_c(0)}{p} = E(p). \quad (9.26)$$

Останній вираз перетворимо до виду:

$$\left(R + Lp + \frac{1}{Cp} \right) I(p) = E(p) + Li(0) - \frac{u_c(0)}{p}. \quad (9.27)$$

Отриманий вираз представляє другий закон Кірхгофа в операторній формі для розглянутого часткового прикладу.

У загальному випадку для будь-якої замкненої ділянки електричного кола, що складається з n гілок, рівняння другого закону Кірхгофа для миттєвих значень струму і напруги має вигляд:

$$\sum_{k=1}^n R_k i_k(t) + \sum_{k=1}^n L_k \frac{di_k(t)}{dt} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k} \int_{-\infty}^t i_k(t) dt = \sum_{k=1}^n e_k(t). \quad (9.28)$$

З урахуванням сформульованих вище міркувань запишемо вираз, що представляє другий закон Кірхгофа в операторній формі в загальному вигляді при ненульових початкових умовах:

$$\sum_{k=1}^n I_k(p) \left(R_k + L_k p + \frac{1}{C_k p} \right) = \sum_{k=1}^n \left[E_k(p) + L_k i_k(0) - \frac{u_{ck}(0)}{p} \right] \quad (9.29)$$

або, використовуючи поняття "приведеної" (з урахуванням і зовнішніх, і внутрішніх джерел) операторної ЕРС і "приведеного" операторного опору, отримаємо:

$$\sum_{k=1}^n I_k(p) Z_k(p) = \sum_{k=1}^n E_{npk}(p) \cdot \frac{1}{2} \quad (9.30)$$

У разі нульових початкових умов отриманий вираз спрощується:

$$\sum_{k=1}^n I_k(p) Z_k(p) = \sum_{k=1}^n E_k(p). \quad (9.31)$$

Для запису формули, що представляє закон Ома в операторній формі, звернемося до виразу (9.27). З нього випливає, що:

$$I(p) = \frac{E(p) + Li(0) - \frac{u_c(0)}{p}}{R + pL + \frac{1}{pC}} = \frac{E_{np}(p)}{Z(p)}. \quad (9.32)$$

Отриманий вираз відповідає закону Ома в операторній формі при ненульових початкових умовах.

При нульових початкових умовах закон Ома в операторній формі представляє наступне вираз:

$$I(p) = \frac{E(p)}{Z(p)}. \quad (9.33)$$

9.5. Операторні функції лінійних електричних кіл

9.5.1. Визначення та класифікація операторних системних функцій

Операторною функцією (передавальною функцією) $K(p)$ лінійного електричного кола називають відношення операторного зображення вихідної величини (реакції) $Y(p)$ кола до операторного зображення вхідної величини (зовнішньої дії) $X(p)$ при нульових початкових умовах, тобто:

$$K(p) = \frac{Y(p)}{X(p)},$$

Згадаймо, що в загальному випадку процеси в лінійному електричному колі описуються лінійним диференціальним рівнянням n -го порядку (відповідно до порядку електричного кола):

$$\begin{aligned} a_0 \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_n y(t) = \\ = b_0 \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{dx(t)}{dt} + b_m x(t). \end{aligned}$$

Це ж рівняння з урахуванням властивостей і теорем перетворення Лапласа в операторній формі має вид

$$\begin{aligned} (a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) Y(p) = \\ = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m) X(p). \end{aligned}$$

Повертаючись до визначення операторної функції, отримаємо

$$K(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n}.$$

Нагадаємо, що в наведених співвідношеннях $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0;$
 $b_0, b_1, \dots, b_{m-1}, b_m$ – дійсні постійні коефіцієнти, значення яких визначаються

параметрами пасивних елементів і керованих джерел, які входять до складу кола.

Попередній вираз можна привести до виду:

$$K(p) = \frac{b_m(p - p_{01})(p - p_{02}) \dots (p - p_{0m})}{a_n(p - p_{*1})(p - p_{*2}) \dots (p - p_{*n})},$$

де $p_{01}, p_{02}, \dots, p_{0m}$ – нулі функції $K(p)$, або корені рівняння

$$b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m = 0;$$

$p_{*1}, p_{*2}, \dots, p_{*n}$ – полюси функції $K(p)$, або корені рівняння

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0.$$

Останнє рівняння називають характеристичним.

Таким чином, знаючи операторну функцію, можна визначити корені характеристичного рівняння, які дозволяють судити про характер перехідного процесу в колі.

Вирази $K(p)$ свідчать про те, що операторні функції не залежать від зовнішнього впливу і визначаються схемою кола і параметрами його елементів. Щоб провести класифікацію операторних функцій, представимо лінійне електричне коло в загальному вигляді, виділивши дві пари затискачів: вхідні і вихідні (рис. 9.11).

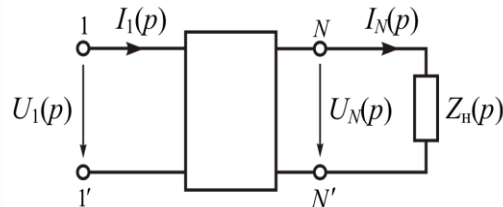


Рис. 9.11

Залежно від того, на яких парах затискачів розглядають зовнішній вплив і реакцію, операторні функції поділяють на вхідні, коли вплив і реакція розглядаються на одній і тій же парі затискачів, і передавальні, коли вплив і реакція розглядаються на різних парах затискачів.

Відомості про різновиди операторних функцій і порядок їх утворення представимо у вигляді таблиці

Зовнішня дія	Реакція	Запис функції	Назва функції
$U_1(p)$	$U_N(p)$	$K_U(p) = \frac{U_N(p)}{U_1(p)}$	Операторний коефіцієнт передачі напруги (операторна передавальна функція напруги)
	$I_N(p)$	$Y_{\text{пер}}(p) = \frac{I_N(p)}{U_1(p)}$	Операторна передавальна провідність
	$I_1(p)$	$Y_{\text{вх}}(p) = \frac{I_1(p)}{U_1(p)}$	Операторна вхідна провідність
$I_1(p)$	$U_N(p)$	$Z_{\text{пер}}(p) = \frac{U_N(p)}{I_1(p)}$	Операторний передавальний опір
	$I_N(p)$	$K_I(p) = \frac{I_N(p)}{I_1(p)}$	Операторний коефіцієнт передачі струму (операторна передавальна функція струму)
	$U_1(p)$	$Z_{\text{вх}}(p) = \frac{U_1(p)}{I_1(p)}$	Операторний вхідний опір

Залежно від того, які величини визначають вплив і реакцію, операторні функції поділяють на операторні коефіцієнти передачі, операторні опори і операторні провідності.

Операторні функції можуть бути розраховані для простих кіл – безпосередньо по співвідношенням, які наведені в таблиці, а для складних (розгалужених) кіл – через параметри матриці вузлових провідностей (при використанні методу вузлових напруг) або параметри матриці контурних опорів (при використанні методу контурних струмів).

Зведемо формули для розрахунку операторних функцій складних кіл в таблицю

Операторні функції через параметри матриці вузлових провідностей	Операторні функції через параметри матриці контурних опорів
$Y_{\text{пер}}(p) = Y_{\text{Н}}(p) \frac{\Delta_{1N}}{\Delta_{11}}$	$Z_{\text{пер}}(p) = Z_{\text{Н}}(p) \frac{\Delta_{1N}}{\Delta_{11}}$

Операторні функції через параметри матриці вузлових провідностей	Операторні функції через параметри матриці контурних опорів
$Z_{\text{пер}}(p) = \frac{\Delta_{1N}}{\Delta}$	$Y_{\text{пер}}(p) = \frac{\Delta_{1N}}{\Delta}$
$K_U(p) = \frac{\Delta_{1N}}{\Delta_{11}}$	$K_I(p) = \frac{\Delta_{1N}}{\Delta_{11}}$
$K_I(p) = Y_H(p) \frac{\Delta_{1N}}{\Delta}$	$K_U(p) = Z_H(p) \frac{\Delta_{1N}}{\Delta}$
$Y_{\text{вх}}(p) = \frac{1}{Z_{\text{вх}}(p)} = \frac{\Delta}{\Delta_{11}}$	$Y_{\text{вх}}(p) = \frac{1}{Z_{\text{вх}}(p)} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta}$

Нагадаємо значення використаних у співвідношеннях символів:

Δ – головний визначник матриці вузлових провідностей або матриці контурних опорів в залежності від обраного методу розрахунку;

Δ_{11}, Δ_{1N} – алгебраїчні доповнення відповідних матриць;

$Y_H(p), Z_H(p)$ – операторна провідність і операторний опір навантаження.

9.5.2. Властивості операторних функцій

Зазначені вище властивості операторних функцій доповнимо іншими і зведемо їх в загальний список:

- операторна функція лінійного електричного кола не залежить від зовнішнього впливу і визначається схемою кола і параметрами його елементів;
- операторна функція може бути представлена відношенням поліномів з дійсними коефіцієнтами;
- знаменник операторної функції - це характеристичний поліном.

Якщо характеристичний поліном прирівняти нулю, отримаємо характеристичне рівняння

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0.$$

Коренями цього рівняння є полюси $P_{*1}, P_{*2}, \dots, P_{*n}$ операторної функції.

Коренями рівняння, яке відповідає поліному в чисельнику операторної функції $b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m = 0$, є нулі операторної функції;

- дійсний характер коефіцієнтів a_0, \dots, a_n і b_0, \dots, b_m обумовлює особливість нулів і полюсів операторної функції, а саме нулі і полюси – це або дійсні числа, або комплексно-спряжені пари;

- нулі операторних функцій можуть розміщуватися як в лівій, так і в правій півплощині комплексної площини. Передавальні функції, у яких нулі розташовуються в лівій напівплощині, називаються мінімально фазовими функціями, або функціями мінімальної фази. Передавальні функції, у яких нулі розташовуються в правій напівплощині, називаються функціями не мінімальної фази;

- полюси операторних функцій пасивних електричних кіл можуть розміщуватися тільки в лівій напівплощині, тобто $Re\{p_{*k}\} < 0$, що є умовою стійкості кола. Дійсно, при виконанні цієї умови всі експоненціальні складові у формулі розкладання з часом зменшуються. В іншому випадку, якщо навіть один полюс має додатну дійсну частину, в оригіналі з'являється доданок, амплітуда якого необмежено зростає за експоненціальним законом, що свідчить про порушення стійкості системи.

Іншими словами, полюси операторної функції є коренями характеристичного рівняння. Корені характеристичного рівняння в разі пасивного кола можуть мати тільки негативну або рівну нулю дійсну частину, так як перехідний процес в пасивних електричних колах носить затухаючий характер (в ідеальному випадку, в відсутність втрат – незгасаючі коливання), але не може супроводжуватись необмеженим зростанням вільних складових перехідного процесу.

По розташуванню нулів і полюсів можна судити про властивості електричного кола. Якщо полюси розміщені тільки на від'ємній дійсній напіввісі, то перехідний процес буде мати аперіодичний характер. Якщо в лівій півплощині є комплексно-спряжені полюси, то перехідний процес в колі має характер згасаючих коливань. Чим ближче розташовані полюси до уявної вісі (чим менше їх дійсна частина), тим менше згасання і тим більше тривалість перехідного процесу.

Раніше, досліджуючи перехідні процеси в послідовному коливальному контурі класичним методом, було встановлено вплив виду коренів характеристичного рівняння кола на характер перехідних процесів.

Таким чином, в обох випадках маємо аналогічні висновки.

9.5.3. Зв'язок операторних функцій з комплексними функціями та часовими характеристиками

Відзначимо, що операторні функції лінійного електричного кола, так як і його комплексні функції і часові характеристики, не залежать від зовнішніх впливів. Всі вони визначаються тільки схемою кола і параметрами його елементів, а значить, пов'язані між собою.

Встановимо ці зв'язки.

З порівняння співвідношень для прямих перетворень Фур'є та Лапласа виходить, що

$$K(p) = K(j\omega) \Big|_{j\omega=p}, \quad (9.37)$$

тобто, операторну функцію можна визначити з комплексної функції шляхом заміни комплексної частоти $j\omega$ оператором p .

Отже, для розрахунків операторних функцій можна скористатися усіма методами розрахунку комплексних функцій.

Далі - про зв'язок між операторними функціями та часовими характеристиками кола.

Нагадаємо, що до часових характеристик електричного кола відносяться перехідна характеристика $h(t)$, яка визначає реакцію кола на дію у вигляді одиничної ступінчастої функції і імпульсна $g(t)$, яка визначає реакцію кола на дію у вигляді дельта-функції $\delta(t)$.

Операторна функція $K(p)$ встановлює зв'язок між операторними зображеннями реакції $Y(p)$ і впливу $X(p)$, а саме

$$Y(p) = K(p) \cdot X(p). \quad (9.38)$$

Операторним зображенням дії і реакції відповідають оригінали, тобто

$$X(p) \Rightarrow x(t); \quad Y(p) \Rightarrow y(t).$$

Нехай вхідна дія на коло є одиничною ступінчастою функцією $x(t) = 1 \cdot I(t)$.

Її операторне зображення

$$F(p) = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} 1 \cdot I(t) \cdot e^{-pt} dt = \frac{1}{p}. \quad (9.39)$$

Реакцією кола на вибрану вхідну дію є перехідна характеристика, тобто $y(t) = h(t)$; при цьому перехідній характеристиці відповідає певне операторне зображення $h(t) \Rightarrow H(p)$.

Тоді вираз (9.38) набуває вигляду

$$H(p) = Y(p) = K(p) \cdot \frac{1}{p} \quad (9.40)$$

Це означає, що операторне зображення перехідної характеристики дорівнює операторній функції, поділеній на оператор p .

Іншими словами: перехідній характеристиці лінійного електричного кола відповідає операторна функція, поділена на оператор p , тобто

$$h(t) \Rightarrow \frac{K(p)}{p}. \quad (9.41)$$

З рівняння (9.40) виходить співвідношення, яке встановлює зв'язок між операторною функцією і операторним зображенням перехідної характеристики кола:

$$K(p) = p \cdot H(p). \quad (9.42)$$

Виберемо в якості дії δ -функцію, тобто, $x(t) = \delta(t)$.

Її операторне зображення

$$L\{\delta(t)\} = F(p) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} \delta(t)e^{-pt} dt = 1$$

Відповідно до виразу (9.38) операторне зображення реакції кола на δ -функцію має вигляд

$$Y(p) = K(p) \cdot L\{\delta(t)\} = K(p). \quad (9.43)$$

Реакцією кола на δ -функцію є імпульсна характеристика кола $g(t)$.

Таким чином, співвідношення, яке встановлює зв'язок між операторною функцією і імпульсною характеристикою лінійного електричного кола, має вигляд

$$g(t) \Rightarrow K(p), \quad (9.44)$$

тобто, імпульсній характеристиці кола відповідає операторна функція.

В загальному випадку перехідна та імпульсна характеристики можуть бути визначені через зворотне перетворення Лапласа їх операторних зображень.

**Перелік підручників і навчальних посібників,
що забезпечують навчальний процес
з дисципліни „Теорія електричних кіл та сигналів“**

Базові

1. Атабеков Г.И. Теоретические основы электротехники, ч. 1. – М: Энергия, 1978.
2. Арсеньев Г.М., Бондаренко В.М., Смирнов В.С., Булгач Т.В., Харатішвілі Н.Г. Основы теории кіл: Навчальний посібник – Ніжин: аспект – Поліграф, 2007.
3. Арсеньев Г.Н., Бондаренко В.Н., Чепурнов И.А. Основы теории цепей.- М: ИД «ФОРУМ» – ИНФРА – М, 2011.
4. Белецкий А.Ф. Теория линейных электрических цепей.-М.: Радио и связь, 1986.
5. Бондаренко В.Н., Голиков В.Ф., Попиль Б.Г. Теория электрорадиоцепей. М: Военное издательство, 1995.
6. Бондаренко В.Н., Арсеньев Г.Н., Самков А.В., Булгач В.Л., Зайцев Г.Ф. Основы теории цепей: Учебное пособие – К.: Институт электродинамики НАН Украины. – 2012.
7. Шебес М.Р. Теория линейных электрических цепей в упражнениях и задачах. М: Высшая школа, 1973.

Допоміжні

1. Бакалов В.П., Воробиенко П.П., Крук Б.И.. Теория электрических цепей. Учебник для вузов. Под ред. В.П. Бакалова. - М: Радио и связь, 1998.
2. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. – М: Высшая школа, 1983.
3. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. – М: Радио и связь, 1986.

4. Радиотехнические цепи и сигналы. Под ред. К.А. Самойло. - М: Радио и связь, 1982.
5. Попов В.П. Основы теории цепей. – М: Высшая школа, 1985.
6. Зернов Н.А., Карпов В.Г. Теория радиотехнических цепей, - М: Энергия, 1972.

Зміст

1.	Основи символічного методу розрахунку електричних кіл	5
1.1.	Основні поняття та закони електричних кіл	5
1.1.1.	Електричне коло: визначення, склад	5
1.1.2.	Елементи електричних кіл, їх моделі та характеристики	6
1.1.3.	Класифікація електричних кіл	10
1.1.4.	Елементи топології електричних схем	11
1.1.5.	Основні закони електротехніки	12
1.2.	Символічний (комплексний) метод розрахунку електричних кіл синусоїдального струму	13
1.2.1.	Синусоїдальний струм та його характеристики	13
1.2.2.	Представлення гармонічних коливань векторами, що обертаються, і комплексними числами	16
1.2.3.	Часові і векторні діаграми	19
1.2.4.	Поняття про розрахунок електричного кола	20
1.2.5.	Сутність символічного методу (методу комплексних амплітуд) розрахунку електричних кіл синусоїдального струму	21
1.2.6.	Комплексний опір і комплексна провідність	22
1.2.7.	Закон Ома і закони Кірхгофа в комплексній формі	25
1.2.8.	Комплексна схема заміщення електричного кола	27
1.2.9.	Потужність в колі синусоїдального струму	27
2.	Стаціонарні процеси в електричних колах	30
2.1.	Електричне коло з резистором	30
2.2.	Електричне коло з котушкою індуктивності	31
2.3.	Електричне коло з конденсатором	34
2.4.	Процеси в електричних колах з послідовним з'єднанням елементів	36
2.4.1.	Еквівалентні перетворення схем з послідовним з'єднанням елементів	36
2.4.2.	Процеси в послідовному RL-колі	37
2.4.3.	Процеси в послідовному RC-колі	39
2.4.4.	Процеси в послідовному RLC-колі	41
2.4.5.	Дільники напруги	45
2.5.	Процеси в електричних колах з паралельним з'єднанням елементів	46
2.5.1.	Еквівалентні перетворення схем з паралельним з'єднанням елементів	46
2.5.2.	Процеси в паралельному RL-колі	47
2.5.3.	Процеси в паралельному RC-колі	49
2.5.4.	Процеси в паралельному RLC-колі	50

2.5.5.	Дільники струму	54
3.	Методи розрахунку розгалужених електричних кіл	56
3.1.	Поняття про розрахунок розгалуженого електричного кола	56
3.2.	Еквівалентні перетворення схем електричних кіл	56
3.3.	Розрахунок електричних кіл методом рівнянь Кірхгофа	57
3.4.	Розрахунок електричних кіл методом контурних струмів	60
3.5.	Розрахунок електричних кіл методом вузлових напруг	63
3.6.	Розрахунок електричних кіл методом накладання	66
3.7.	Розрахунок електричних кіл методом еквівалентного генератора	67
4.	Комплексні функції та частотні характеристики лінійних електричних кіл	69
4.1.	Комплексна функція: визначення, класифікація	69
4.2.	Частотні характеристики	71
4.3.	Розрахунок комплексних функцій	72
4.4.	Фільтрація коливань в електричних колах	75
4.5.	Частотні характеристики RC-кіл	77
4.6.	Частотні характеристики RL-кіл	80
4.7.	Частотні характеристики RLC-кіл	82
4.7.1.	Умови резонансу	82
4.7.2.	Первинні і вторинні параметри	84
4.7.3.	Частотні та резонансні характеристики	87
4.7.3.1.	Комплексна вхідна провідність	88
4.7.3.2.	Комплексні коефіцієнти передачі напруги	90
5.	Основи теорії чотириполіусників	94
5.1.	Рівняння і параметри чотириполіусників	94
5.1.1.	Основні положення і класифікація	94
5.1.2.	Системи рівнянь та типові параметри чотириполіусників	96
5.1.3.	Односторонні параметри	104
5.2.	Схеми заміщення чотириполіусників	106
5.3.	Комплексні функції чотириполіусників	107
5.3.1.	Вхідні комплексні функції	107
5.3.2.	Комплексні передавальні функції	108
5.3.2.1.	Робочий комплексний коефіцієнт передачі напруги	109
5.3.2.2.	Робочий комплексний коефіцієнт передачі струму	109
5.4.	Характеристичні параметри	109
5.5.	Складні чотириполіусники	112
5.5.1.	Параметри складних чотириполіусників	112
5.5.2.	Чотириполіусники зі зворотним зв'язком	115
6.	Перехідні процеси в лінійних електричних колах	118
6.1.	Причини виникнення перехідних процесів в електричних колах	118

6.2.	Закони комутації, початкові умови	120
6.3.	Класичний метод аналізу перехідних процесів	121
6.4.	Аналіз перехідних процесів в колах першого порядку	123
6.4.1.	Процеси в колах першого порядку при підключенні джерела постійної напруги	123
6.4.1.1.	Процеси в послідовному RC-колі	123
6.4.1.2.	Процеси в послідовному RL-колі	126
6.4.2.	Вільні процеси в колах першого порядку	128
6.4.2.1.	Вільні процеси в RC-колі	128
6.4.2.2.	Вільні процеси в RL – колі	131
6.4.3.	Параметри перехідних процесів в електричних колах першого порядку	133
6.4.4.	Якісний (спрощений) аналіз перехідних процесів в колах першого порядку	135
6.5.	Аналіз перехідних процесів в колах другого порядку	137
6.5.1.	Вільний процес в нерозгалуженому колі другого порядку	137
6.5.1.1.	Вивід загальних співвідношень	137
6.5.1.2.	Вплив параметрів елементів електричного кола на характер перехідних процесів	140
6.5.1.3.	Параметри вільних коливань	142
6.6.	Аналіз перехідних процесів в лінійних електричних колах методом накладання	143
6.6.1.	Сутність методу накладання	143
6.6.2.	Типові дії	145
6.6.3.	Часові характеристики електричного кола	148
7.	Елементи теорії сигналів	151
7.1.	Загальні відомості про сигнали	151
7.1.1.	Класифікація сигналів	151
7.1.2.	Способи представлення сигналів	154
7.2.	Спектральне представлення періодичних сигналів	155
7.2.1.	Представлення сигналів рядом Фур'є	155
7.2.2.	Частотні спектри періодичної послідовності прямокутних імпульсів	157
7.2.3.	Розподіл потужності та енергії в спектрі ППП	162
7.3.	Спектральне представлення неперіодичних сигналів	163
7.3.1.	Перетворення Фур'є	163
7.3.2.	Основні властивості та теореми перетворення Фур'є	166
7.3.3.	Спектри одиночного прямокутного імпульсу	167
8.	Проходження сигналів через лінійні електричні кола	169
8.1.	Сутність спектрального методу аналізу проходження сигналів	169
8.2.	Проходження сигналів з дискретним спектром	169
8.3.	Проходження сигналів з суцільним спектром	170

8.4.	Диференціювання та інтегрування сигналів в електричних колах	170
9.	Аналіз процесів в лінійних електричних колах операторним методом	174
9.1.	Сутність операторного методу	174
9.2.	Основні властивості і теореми перетворення Лапласа	175
9.3.	Операторні схеми заміщення пасивних елементів електричних кіл	179
9.4.	Закони Кірхгофа і Ома в операторній формі	183
9.5.	Операторні функції лінійних електричних кіл	186
9.5.1.	Визначення та класифікація операторних системних функцій	186
9.5.2.	Властивості операторних функцій	189
9.5.3.	Зв'язок операторних функцій з комплексними функціями та часовими характеристиками	191
	Література	193