Міністерство освіти і науки України
Державний університет телекомунікацій
Кафедра вищої математики

ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Частина 3

Теорія функцій комплексної змінної

Навчальний посібник

Київ — 2018

УДК 51.77
ВВК 22.1

Барабаш О.В., Замрій І. В. Лабораторний практикум з вищої математики. Ч. 3. Теорія функцій комплексної змінної. Навчальний посібник. – К.: ДУТ, 2018. – 170 с.

Схвалено до друку вченою радою
Державного університету телекомунікацій
(протокол №22 від 16 квітня 2018 року)

Рецензенти:

Працьовитий Микола Вікторович, заслужений діяч науки і техніки України, доктор фізико-математичних наук, професор, декан фізико-математичного факультету Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова.

Гавриленко Валерій Володимирович, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри інформаційних систем і технологій Національного транспортного університету.

Навчальний посібник розроблено згідно навчальної програми з дисципліни «Вища математика», що викладається для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня «Бакалавр» спеціальності «125 Кібербезпека».

Навчальний посібник являє собою сукупність індивідуальних лабораторних робіт із використанням системи компютерної математики «Maxima» та зразків виконання лабораторних робіт, які викладались студентам Державного університету телекомунікацій зазначеної спеціальності.

Посібник розрахований для студентів денної та заочної форм навчання.

Зміст

Вступ

Maxima — це система комп’ютерної алгебри, аналогічна Mathematica, Maple та іншим подібним системам. Незважаючи на складність програмних продуктів, що призначені для символьних обчислень, відмінність Maxima від аналогічних програм в тому, що вона є безкоштовною і розповсюджується з відкритим вихідним кодом (ліцензія GPL).

Maxima, як і Mathematica, бере свій початок від програми Macsyma — одної з самих перших систем комп’ютерної алгебри. Розробока цих продуктів ведеться в MIT (Massachusetts Institute of Technology — Массачусетський технологічний інститут) з 1968 року. Сама Maxima розроблялась з 1982 р. як комерційна система на основі Macsyma, а з 2000 року після публікації вихідного коду на SourceForge продовжує розвиватись завдяки багатьом розробникам.

Maxima має широкий набір засобів для проведення аналітичних обчислень, числових обчислень та побудови графіків. За своїми можливостями система близька до таких комерційних систем, як Maple та Mathematica. В той же час має високу ступінь мобільності: може працювати на всіх основних сучасних операційних системах.

Автори вважають, що даний навчальний посідник буде корисним для майбутніх фахівців технічних напрямів.

Лабораторна робота 1

Тема роботи: **«Комплексні числа»**

Мета роботи: навчитись виконувати операції з комплексними числами, використовуючи програму Maxima.

Завдання:

Варіант 1

Завдання 1. Задано комплексні числа $z_1 = 2 + 3i$ та $z_2 = -7 + 6i$. Обчислити:

$z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\dfrac{z_1}{z_2}$; $\overline{z_1}$; $\operatorname{Re}\dfrac{z_1}{z_2}$; $\operatorname{Im}\dfrac{z_1}{z_2}$.

Зобразити на комплексній площині z_1, $z_1 + z_2$.

Завдання 2. Розв'язати рівняння

a) $z^4 + 1 = 0$;

b) $z_2 + 1 - i = 0$.

Завдання 3. Виконати вказані дії та подати відповіді в алгебраїчній та показниковій формах комплексних чисел:

a) $\left(\dfrac{(1 + i\sqrt{3})}{(1 - i)}\right)^{40}$;

b) $(2 - 2i)^7$.

Варіант 2

Завдання 1. Задано комплексні числа $z_1 = 4 + 2i$ та $z_2 = -4 + 5i$. Обчислити:

$z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\dfrac{z_1}{z_2}$; $\overline{z_1}$; $\operatorname{Re}\dfrac{z_1}{z_2}$; $\operatorname{Im}\dfrac{z_1}{z_2}$.

Зобразити на комплексній площині z_1, $z_1 + z_2$.

Завдання 2. Розв'язати рівняння

a) $z^2 - 3z + 7 = 0$;

b) $z^6 - 9z^3 + 8 = 0$.

Завдання 3. Виконати вказані дії та подати відповіді в алгебраїчній та показниковій формах комплексних чисел:

a) $(\sqrt{3} - 3i)^6$;

b) $\left(\dfrac{1 - i}{1 + i}\right)^8$.

Варіант 3

Завдання 1. Задано комплексні числа $z_1 = 5 - 4i$ та $z_2 = 3 + 7i$. Обчислити:

$z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\dfrac{z_1}{z_2}$; $\overline{z_1}$; $\operatorname{Re}\dfrac{z_1}{z_2}$; $\operatorname{Im}\dfrac{z_1}{z_2}$.

Зобразити на комплексній площині z_1, $z_1 + z_2$.

Завдання 2. Розв’язати рівняння

a) $z^3 - 1 = 8$;

b) $z^4 - 3i = \frac{1}{i}$.

Завдання 3. Виконати вказані дії та подати відповіді в алгебраїчній та показниковій формах комплексних чисел:

a) $(1+i)^8(1-i\sqrt{3})^{-6}$;

b) $2i\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.

<u>Варіант 4</u>

Завдання 1. Задано комплексні числа $z_1 = 2 + 4i$ та $z_2 = -5 - i$. Обчислити:

$z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $\overline{z_1}$; $\operatorname{Re}\frac{z_1}{z_2}$; $\operatorname{Im}\frac{z_1}{z_2}$.

Зобразити на комплексній площині z_1, $z_1 + z_2$.

Завдання 2. Розв’язати рівняння

a) $|z| - 3i + 12 = 0$;

b) $z(z^2 - i)(z^3 + i) = 0$.

Завдання 3. Виконати вказані дії та подати відповіді в алгебраїчній та показниковій формах комплексних чисел:

a) $\left(\frac{(1+i)}{(1-i)} + \frac{(1-i)}{(1+i)}\right)$;

b) $\frac{(14+i)}{(2i^2 - i)} - 11$.

<u>Варіант 5</u>

Завдання 1. Задано комплексні числа $z_1 = 2 + 3i$ та $z_2 = 2 - 3i$. Обчислити:

$z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $\overline{z_1}$; $\operatorname{Re}\frac{z_1}{z_2}$; $\operatorname{Im}\frac{z_1}{z_2}$.

Зобразити на комплексній площині z_1, $z_1 + z_2$.

Завдання 2. Розв’язати рівняння

a) $z(2-i) + (2-i) = 6$;

b) $z^2(3+2i) + (3-2i) = 8$.

Завдання 3. Виконати вказані дії та подати відповіді в алгебраїчній та показниковій формах комплексних чисел:

a) $(2+3i)(3-i) + (1+2i)^2$;

b) $(1-i)^3 - (1+i)^3$.

Варіант 6

Завдання 1. Задано комплексні числа $z_1 = 5 + 3i$ та $z_2 = -1 + i$. Обчислити:

$z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $\overline{z_1}$; $\mathrm{Re}\frac{z_1}{z_2}$; $\mathrm{Im}\frac{z_1}{z_2}$.

Зобразити на комплексній площині z_1, $z_1 + z_2$.

Завдання 2. Розв’язати рівняння

a) $(2 - i)^3(2 + 11i) = 0$;

b) $4x^4 - 5x^2 - 36 = 0$.

Завдання 3. Виконати вказані дії та подати відповіді в алгебраїчній та показниковій формах комплексних чисел:

a) $(2i - i^2)^2 + (1 - 3i)^3$;

b) $\frac{1}{1 + 4i} + \frac{1}{4 - i}$.

Варіант 7

Завдання 1. Задано комплексні числа $z_1 = 3 - 6i$ та $z_2 = 1 + 2i$. Обчислити:

$z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $\overline{z_1}$; $\mathrm{Re}\frac{z_1}{z_2}$; $\mathrm{Im}\frac{z_1}{z_2}$.

Зобразити на комплексній площині z_1, $z_1 + z_2$.

Завдання 2. Розв’язати рівняння

a) $x^4 + 15x^2 + 54 = 0$;

b) $(2 - i)(3 + 2i) - z = 0$.

Завдання 3. Виконати вказані дії та подати відповіді в алгебраїчній та показниковій формах комплексних чисел:

a) $\left(\frac{1 - i}{1 + i}\right)^3$;

b) $\frac{(1 + i)(3 + i)}{(3 - i)} - \frac{(1 - i)(3 - i)}{(3 + i)}$.

Варіант 8

Завдання 1. Задано комплексні числа $z_1 = 1{,}5 - 2i$ та $z_2 = 0{,}5 + 4i$. Обчислити:

$z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $\overline{z_1}$; $\mathrm{Re}\frac{z_1}{z_2}$; $\mathrm{Im}\frac{z_1}{z_2}$.

Зобразити на комплексній площині z_1, $z_1 + z_2$.

Завдання 2. Розв’язати рівняння

a) $4x^2 - 8x + 13 - i^2 = 0$;

b) $x^4 - 2x^2 + 4 = 0$.

Завдання 3. Виконати вказані дії та подати відповіді в алгебраїчній та показниковій формах комплексних чисел:

a) $\left(\dfrac{i^5+2}{i^{10}+1}\right)^2$;

b) $\dfrac{(-3+2i)^2}{(1-i)^3}-2i-5$.

Варіант 9

Завдання 1. Задано комплексні числа $z_1=\sqrt{3}-\sqrt{3}i$ та $z_2=2\sqrt{3}+i$. Обчислити:

z_1+z_2; z_1-z_2; $z_1\cdot z_2$; $\dfrac{z_1}{z_2}$; $\overline{z_1}$; $\operatorname{Re}\dfrac{z_1}{z_2}$; $\operatorname{Im}\dfrac{z_1}{z_2}$.

Зобразити на комплексній площині z_1, z_1+z_2.

Завдання 2. Розв'язати рівняння

a) $x^4-4x^2+16=0$;

b) $z^2i+9z-i^2=0$.

Завдання 3. Виконати вказані дії та подати відповіді в алгебраїчній та показниковій формах комплексних чисел:

a) $\dfrac{(-1+i)^3-(2+i)^3)}{(1-2i)^2}$;

b) $\left(\dfrac{(1-i\sqrt{3})}{(1+i)}\right)^{40}$.

Варіант 10

Завдання 1. Задано комплексні числа $z_1=2-3i$ та $z_2=-2-6i$. Обчислити:

z_1+z_2; z_1-z_2; $z_1\cdot z_2$; $\dfrac{z_1}{z_2}$; $\overline{z_1}$; $\operatorname{Re}\dfrac{z_1}{z_2}$; $\operatorname{Im}\dfrac{z_1}{z_2}$.

Зобразити на комплексній площині z_1, z_1+z_2.

Завдання 2. Розв'язати рівняння

a) $3-z-\bar{z}=-4+8i$;

b) $z=2\bar{z}=3+i$.

Завдання 3. Виконати вказані дії та подати відповіді в алгебраїчній та показниковій формах комплексних чисел:

a) $\left(\dfrac{(1+i\sqrt{3})}{(1-i)}\right)^{20}$

b) $(3-i\sqrt{3})^6$.

Варіант 11

Завдання 1. Задано комплексні числа $z_1 = 2 + 4i$ та $z_2 = 1 - 2i$. Обчислити:

$z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $\overline{z_1}$; $\mathrm{Re}\frac{z_1}{z_2}$; $\mathrm{Im}\frac{z_1}{z_2}$.

Зобразити на комплексній площині z_1 , $z_1 + z_2$.

Завдання 2. Розв'язати рівняння

a) $\left(\frac{1}{z} + \frac{2}{\bar{z}}\right) = 1$;

b) $z(1 - i) = |z| + 4i$.

Завдання 3. Виконати вказані дії та подати відповіді в алгебраїчній та показниковій формах комплексних чисел:

a) $\frac{(-1 + i\sqrt{3})^{15}}{(1 - i)^{18}} + \frac{(-1 - i\sqrt{3})^{15}}{(1 + i)^{18}}$;

b) $(1 - i)(-3 + 2i) + \frac{1}{i}$.

Варіант 12

Завдання 1. Задано комплексні числа $z_1 = -6 + 3i$ та $z_2 = 12 - 7i$. Обчислити:

$z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $\overline{z_1}$; $\mathrm{Re}\frac{z_1}{z_2}$; $\mathrm{Im}\frac{z_1}{z_2}$.

Зобразити на комплексній площині z_1 , $z_1 + z_2$.

Завдання 2. Розв'язати рівняння

a) $z^3 - 1 + i = 0$;

b) $x^5 - 32 = 0$.

Завдання 3. Виконати вказані дії та подати відповіді в алгебраїчній та показниковій формах комплексних чисел:

a) $i^2 + \frac{i^3}{2} + \frac{i^4}{3} + \frac{i^5}{4}$;

b) $\frac{1 + 3i}{4 - 2i} - \frac{2 - i}{1 + i}$.

Варіант 13

Завдання 1. Задано комплексні числа $z_1 = 8 - 3i$ та $z_2 = -2 + 5i$. Обчислити:

$z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $\overline{z_1}$; $\mathrm{Re}\frac{z_1}{z_2}$; $\mathrm{Im}\frac{z_1}{z_2}$.

Зобразити на комплексній площині z_1 , $z_1 + z_2$.

Завдання 2. Розв'язати рівняння

a) $x^4 - 2i + 2 = 0$;

b) $x^4 - 14x^2 + 58$.

Завдання 3. Виконати вказані дії та подати відповіді в алгебраїчній та показниковій формах комплексних чисел:

a) $\frac{28i}{4-2i}-\frac{5}{1+i^2}$;

b) $\left(\frac{i^7+2}{i^6+2}\right)^3$.

Варіант 14

Завдання 1. Задано комплексні числа $z_1=10-4i$ та $z_2=3+2i$. Обчислити:

z_1+z_2; z_1-z_2; $z_1\cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $\overline{z_1}$; $\mathrm{Re}\frac{z_1}{z_2}$; $\mathrm{Im}\frac{z_1}{z_2}$.

Зобразити на комплексній площині z_1 , z_1+z_2.

Завдання 2. Розв'язати рівняння

a) $5z^2-8|z|+3=0$;

b) $4z^2+(9|z|+5)^{-1}=10$.

Завдання 3. Виконати вказані дії та подати відповіді в алгебраїчній та показниковій формах комплексних чисел:

a) $(1+i)^{10}$;

b) $\frac{1-i}{(\sqrt{3}+i)(1+\sqrt{3}i)}$.

Варіант 15

Завдання 1. Задано комплексні числа $z_1=2{,}4-3i$ та $z_2=3{,}1-i$. Обчислити:

z_1+z_2; z_1-z_2; $z_1\cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $\overline{z_1}$; $\mathrm{Re}\frac{z_1}{z_2}$; $\mathrm{Im}\frac{z_1}{z_2}$.

Зобразити на комплексній площині z_1 , z_1+z_2.

Завдання 2. Розв'язати рівняння

a) $3x^2+7=0$;

b) $2z+2\sqrt{3}i=0$.

Завдання 3. Виконати вказані дії та подати відповіді в алгебраїчній та показниковій формах комплексних чисел:

a) $\left(\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})\right)^7$;

b) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{100}$.

Варіант 16

Завдання 1. Задано комплексні числа $z_1 = -1{,}8 - 3{,}3i$ та $z_2 = 0{,}8 + 1{,}7i$. Обчислити:

$z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $\overline{z_1}$; $\mathrm{Re}\frac{z_1}{z_2}$; $\mathrm{Im}\frac{z_1}{z_2}$.

Зобразити на комплексній площині z_1, $z_1 + z_2$.

Завдання 2. Розв'язати рівняння

a) $z^2 - 6|z| + 8 = 0$;

b) $z^2 + |z| = 0$.

Завдання 3. Виконати вказані дії та подати відповіді в алгебраїчній та показниковій формах комплексних чисел:

a) $\left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i}\right)^{10}$;

b) $\frac{(1+i)^{28}}{(1-i)^{24} - i(1+i)^{24}}$.

Варіант 17

Завдання 1. Задано комплексні числа $z_1 = -1 - 3i$ та $z_2 = -3$. Обчислити:

$z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $\overline{z_1}$; $\mathrm{Re}\frac{z_1}{z_2}$; $\mathrm{Im}\frac{z_1}{z_2}$.

Зобразити на комплексній площині z_1, $z_1 + z_2$.

Завдання 2. Розв'язати рівняння

a) $z^2 + 8|z| - 9 = 0$;

b) $z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.

Завдання 3. Виконати вказані дії та подати відповіді в алгебраїчній та показниковій формах комплексних чисел:

a) $\frac{6(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})\,(1-i)}{12(\cos -\frac{\pi}{6}) + i\sin -\frac{\pi}{6}}$;

b) $\left(\sqrt{2}\, e^{\frac{4\pi}{3}}\right)^3$.

Варіант 18

Завдання 1. Задано комплексні числа $z_1 = -2 + 6i$ та $z_2 = 2 + 9i$. Обчислити:

$z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $\overline{z_1}$; $\mathrm{Re}\frac{z_1}{z_2}$; $\mathrm{Im}\frac{z_1}{z_2}$.

Зобразити на комплексній площині z_1, $z_1 + z_2$.

Завдання 2. Розв'язати рівняння

a) $\left(\frac{2}{z}-1\right)^{n}=1$;

b) $(z+1)^2=z^2$.

Завдання 3. Виконати вказані дії та подати відповіді в алгебраїчній та показниковій формах комплексних чисел:

a) $\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)3\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

b) $\dfrac{10\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$.

Варіант 19

Завдання 1. Задано комплексні числа $z_1=\sqrt{2}+3i$ та $z_2=\sqrt{3}-\sqrt{2}\,i$. Обчислити:

z_1+z_2; z_1-z_2; $z_1\cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $\overline{z_1}$; $\operatorname{Re}\frac{z_1}{z_2}$; $\operatorname{Im}\frac{z_1}{z_2}$.

Зобразити на комплексній площині z_1 , z_1+z_2.

Завдання 2. Розв'язати рівняння

a) $x^2+12=0$;

b) $x^2+x+1=0$.

Завдання 3. Виконати вказані дії та подати відповіді в алгебраїчній та показниковій формах комплексних чисел:

a) $\left(2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right)^4$;

b) $\sqrt[3]{-i}$.

Варіант 20

Завдання 1. Задано комплексні числа $z_1=\sqrt{2}-\sqrt{6}\,i$ та $z_2=\sqrt{6}-\sqrt{2}\,i$. Обчислити:

z_1+z_2; z_1-z_2; $z_1\cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $\overline{z_1}$; $\operatorname{Re}\frac{z_1}{z_2}$; $\operatorname{Im}\frac{z_1}{z_2}$.

Зобразити на комплексній площині z_1 , z_1+z_2.

Завдання 2. Розв'язати рівняння

a) $x^3+6x^2+30x+25=0$;

b) $z^3-27i=0$.

Завдання 3. Виконати вказані дії та подати відповіді в алгебраїчній та показниковій формах комплексних чисел:

a) $((x-1)+3i)((x-1)-3i)=(x-1)^2+3^2=x^2-2x+10$;

b) $i^{15}+i^{16}+i^{17}+i^{18}$.

Варіант 21

Завдання 1. Задано комплексні числа $z_1 = 8 + 7{,}3i$ та $z_2 = 1 - 0{,}3i$. Обчислити:

$z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\dfrac{z_1}{z_2}$; $\overline{z_1}$; $\operatorname{Re}\dfrac{z_1}{z_2}$; $\operatorname{Im}\dfrac{z_1}{z_2}$.

Зобразити на комплексній площині z_1, $z_1 + z_2$.

Завдання 2. Розв'язати рівняння

a) $x^3 + 9x^2 + 18x + 28 = 0$;

b) $z^3 + 9z^2 + 18i = 0$.

Завдання 3. Виконати вказані дії та подати відповіді в алгебраїчній та показниковій формах комплексних чисел:

a) $(2 - i) + (3 + 2i)$;

b) $\dfrac{1-i}{1+i}\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{20}$.

Варіант 22

Завдання 1. Задано комплексні числа $z_1 = -3 + 5i$ та $z_2 = 2 - i$. Обчислити:

$z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\dfrac{z_1}{z_2}$; $\overline{z_1}$; $\operatorname{Re}\dfrac{z_1}{z_2}$; $\operatorname{Im}\dfrac{z_1}{z_2}$.

Зобразити на комплексній площині z_1, $z_1 + z_2$.

Завдання 2. Розв'язати рівняння

a) $x^3 + 18x + 15 = 0$;

b) $z(4.2e^{2,3i} + 17z) = 0$.

Завдання 3. Виконати вказані дії та подати відповіді в алгебраїчній та показниковій формах комплексних чисел:

a) $(5 - 4i) + (7 + 2i)$;

b) $(5 - 4i) \cdot (3 + 2i)$.

Варіант 23

Завдання 1. Задано комплексні числа $z_1 = 6 - 9i$ та $z_2 = 7 + 4i$. Обчислити:

$z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\dfrac{z_1}{z_2}$; $\overline{z_1}$; $\operatorname{Re}\dfrac{z_1}{z_2}$; $\operatorname{Im}\dfrac{z_1}{z_2}$.

Зобразити на комплексній площині z_1, $z_1 + z_2$.

Завдання 2. Розв'язати рівняння

a) $x^3 + 24x - 56 = 0$;

b) $z = (0{,}4^{\pi i} - z + 3z\sqrt{i})$.

Завдання 3. Виконати вказані дії та подати відповіді в алгебраїчній та показниковій формах комплексних чисел:

a) $(5-4i)+(7+4i)$;

b) $(-2-i)\cdot(1+i)$.

Варіант 24

Завдання 1. Задано комплексні числа $z_1=-1{,}6+3i$ та $z_2=2{,}6+2i$. Обчислити:

z_1+z_2; z_1-z_2; $z_1\cdot z_2$; $\dfrac{z_1}{z_2}$; $\overline{z_1}$; $\operatorname{Re}\dfrac{z_1}{z_2}$; $\operatorname{Im}\dfrac{z_1}{z_2}$.

Зобразити на комплексній площині z_1, z_1+z_2.

Завдання 2. Розв'язати рівняння

a) $x^3+8x^2+15x+18=0$;

b) $(z+8)^{2i}=16$.

Завдання 3. Виконати вказані дії та подати відповіді в алгебраїчній та показниковій формах комплексних чисел:

a) $(-6+2i)+(-6-2i)$;

b) $(1-i)-(7-3i)+(6-2i)-(2+i)$.

Варіант 25

Завдання 1. Задано комплексні числа $z_1=3-6i$ та $z_2=-7-4i$. Обчислити:

z_1+z_2; z_1-z_2; $z_1\cdot z_2$; $\dfrac{z_1}{z_2}$; $\overline{z_1}$; $\operatorname{Re}\dfrac{z_1}{z_2}$; $\operatorname{Im}\dfrac{z_1}{z_2}$.

Зобразити на комплексній площині z_1, z_1+z_2.

Завдання 2. Розв'язати рівняння

a) $x^3-4x^2-4x-5=0$;

b) $(z+1{,}5e^{0{,}7i})^2=(z+0{,}7e^{1{,}7i})^3$.

Завдання 3. Виконати вказані дії та подати відповіді в алгебраїчній та показниковій формах комплексних чисел:

a) $\dfrac{\sqrt{5}+i}{\sqrt{5}-2i}+\dfrac{1}{1-i}$;

b) $\dfrac{3-2i}{1+3i}$.

Варіант 26

Завдання 1. Задано комплексні числа $z_1=4+3i$ та $z_2=1+2i$. Обчислити:

z_1+z_2; z_1-z_2; $z_1\cdot z_2$; $\dfrac{z_1}{z_2}$; $\overline{z_1}$; $\operatorname{Re}\dfrac{z_1}{z_2}$; $\operatorname{Im}\dfrac{z_1}{z_2}$.

Зобразити на комплексній площині z_1, z_1+z_2.

Завдання 2. Розв’язати рівняння

a) $x^3 - 6x + 9 = 0$;

b) $\sqrt[3]{11z + i} = 0$.

Завдання 3. Виконати вказані дії та подати відповіді в алгебраїчній та показниковій формах комплексних чисел:

a) $2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)5\left(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})\right)$;

b) $\dfrac{2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)}{3\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)}$.

Варіант 27

Завдання 1. Задано комплексні числа $z_1 = 1{,}8 - 2i$ та $z_2 = 0{,}2 + 5i$. Обчислити:

$z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\dfrac{z_1}{z_2}$; $\overline{z_1}$; $\mathrm{Re}\dfrac{z_1}{z_2}$; $\mathrm{Im}\dfrac{z_1}{z_2}$.

Зобразити на комплексній площині z_1, $z_1 + z_2$.

Завдання 2. Розв’язати рівняння

a) $x^3 + 6x + 2 = 0$;

b) $4z^2 = \dfrac{1 - i}{\sqrt{3z} + i}$.

Завдання 3. Виконати вказані дії та подати відповіді в алгебраїчній та показниковій формах комплексних чисел:

a) $\left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{10}$;

b) $\sqrt{i} - \sqrt{-1}$.

Варіант 28

Завдання 1. Задано комплексні числа $z_1 = 3i - 5$ та $z_2 = 2 - 0{,}5i$. Обчислити:

$z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\dfrac{z_1}{z_2}$; $\overline{z_1}$; $\mathrm{Re}\dfrac{z_1}{z_2}$; $\mathrm{Im}\dfrac{z_1}{z_2}$.

Зобразити на комплексній площині z_1, $z_1 + z_2$.

Завдання 2. Розв’язати рівняння

a) $x^3 + 24x - 56 = 0$;

b) $z = \dfrac{3z}{2} + \dfrac{3z^{-3}\sqrt{3}i}{2}$.

Завдання 3. Виконати вказані дії та подати відповіді в алгебраїчній та показниковій формах комплексних чисел:

a) $\frac{5+2i}{2-5i}-\frac{3-4i}{4+3i}$;

b) $\frac{5+i}{2+3i}+(21+\mathrm{i})^7$.

Варіант 29

Завдання 1. Задано комплексні числа $z_1 = -8+6i$ та $z_2 = -4i$. Обчислити:

z_1+z_2; z_1-z_2; $z_1\cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $\overline{z_1}$; $\mathrm{Re}\frac{z_1}{z_2}$; $\mathrm{Im}\frac{z_1}{z_2}$.

Зобразити на комплексній площині z_1 , z_1+z_2.

Завдання 2. Розв'язати рівняння

a) $x^3+9x-26=0$;

b) $(z-1)^3 = 3-3i$.

Завдання 3. Виконати вказані дії та подати відповіді в алгебраїчній та показниковій формах комплексних чисел:

a) $\frac{4+3i}{3-4i}-\frac{5-4i}{4+5i}$;

b) $\frac{(1-2i)^3}{i}+4i^{16}$.

Варіант 30

Завдання 1. Задано комплексні числа $z_1 = -7-3i$ та $z_2 = 3i$. Обчислити:

z_1+z_2; z_1-z_2; $z_1\cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $\overline{z_1}$; $\mathrm{Re}\frac{z_1}{z_2}$; $\mathrm{Im}\frac{z_1}{z_2}$.

Зобразити на комплексній площині z_1 , z_1+z_2.

Завдання 2. Розв'язати рівняння

a) $x^3+44x-2=0$;

b) $z^{1}(16i+1)=\frac{\bar{z}}{i^2+z^2}$.

Завдання 3. Виконати вказані дії та подати відповіді в алгебраїчній та показниковій формах комплексних чисел:

a) $\left(2(1-i)^3+\frac{31-17i}{4-3i}\right)\frac{1+i}{6}-1$;

b) $\left(\frac{1}{3}(1-i)^4+\frac{7-24i}{4-3i}+i\right)\frac{8}{(1+i)^2}$.

Зразок виконання лабораторної роботи 1

Завдання 1. Задано комплексні числа $z_1 = 5 + 2i$ та $z_2 = 3 - 4i$. Обчислити:

$z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\dfrac{z_1}{z_2}$; $\overline{z_1}$; $\operatorname{Re}\dfrac{z_1}{z_2}$; $\operatorname{Im}\dfrac{z_1}{z_2}$.

Зобразити на комплексній площині z_1 , $z_1 + z_2$.

Завдання 2. Розв'язати рівняння

a) $(1 + 2i)(z - i) + (4i - 3)(1 - iz) + 1 + 7i = 0$;

b) $z^2 + \overline{z} = 0$.

Завдання 3. Виконати вказані дії та подати відповіді в алгебраїчній та показниковій формах комплексних чисел:

a) $i^{17} + i^{18} + i^{19} + i^{20}$;

b) $\dfrac{13 + 12i}{-8 + 6i} + \dfrac{(1 + 2i)^3}{2 + i}$.

Завдання 1. Розв'язок:

Задаємо комплексні числа z_1 та z_2.

```
(%i22)  z1:5 + 2*%i;
        z2:3 - 4*%i;
(z1)    2 %i+5
(z2)    3-4 %i
```

Обчислення суми чисел z_1 та z_2.

```
(%i23)  z1 + z2;
(%o23)  8-2 %i
```

Обчислення різниці.

```
(%i24)  z1 - z2;
(%o24)  6 %i+2
```

Обчислення добутку.

```
(%i25)  z1 * z2;
(%o25)  (3-4 %i) (2 %i+5)
```

```
(%i27)  ratsimp(%);
(%o27)  23-14 %i
```

Знайдемо число $\overline{z_1}$, спряжене до z_1

```
(%i46)  conjugate(z1);
(%o46)  5-2 %i
```

Обчислення частки. Для цього помножимо чисельник і знаменник отриманого дробу на спряжене комплексне число до знаменника та розкриємо дужки функцією expand().

```
(%i107) x:z1 / z2;
(x)     (2 %i+5)/(3-4 %i)

(%i108) zz2:conjugate(z2);
(zz2)   4 %i+3

(%i128) ratsimp(x / zz2) * zz2;
(%o128) ((2 %i+5) (4 %i+3))/25

(%i129) expand(%);
(%o129) (26 %i)/25 + 7/25
```

Виразимо явну та уявну частину виразу $\frac{z_1}{z_2}$

```
(%i50) realpart(z1/z2);
       imagpart(z1/z2);
(%o49) 7/25
(%o50) 26/25
```

Зобразимо на комплексній площині z_1. Для цього визначимо аргумент комплексного числа $\Psi = \mathrm{arctg}(\frac{b}{a})$, де b – уявна частина, a – явна частина комплексного числа z_1та завантажимо пакет “draw” для креслення.

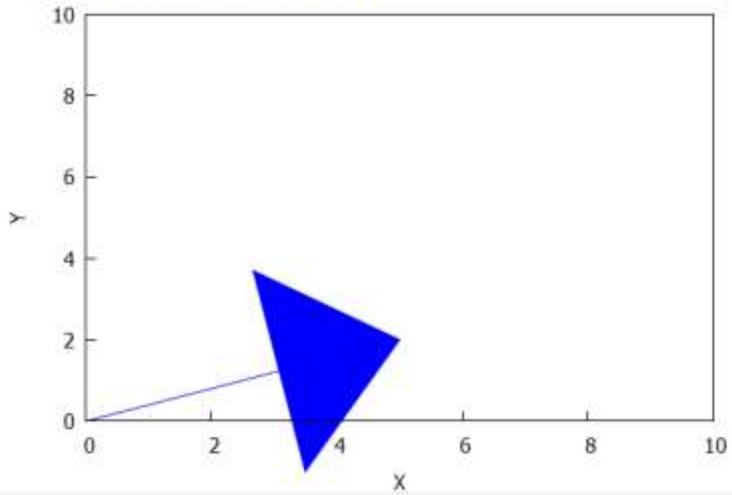
```
(%i4) a:realpart(z1);
      b:imagpart(z1);
(a)   5
(b)   2

(%i5) phi:atan(b/a) * 180 / float(%pi), numer;
(phi) 21.80140948635181

(%i9) load("draw") $
```

Зобразимо вектор за допомогою функції wxdraw2d, де:

- xrange, yrange – відрізки на осях абсцис та ординат, в межах яких відображається вектор;
- head_lengh – модуль комплексного числа z_1, довжина вектора;
- head_angle – кут між віссю абсцис та вектором

```
(%i21) wxdraw2d(
       xrange    = [0,10],
       yrange    = [0,10],
       head_length = abs(z1),
       head_angle = phi,
       color = blue,
       vector( [ 0 , 0 ],[a,b]));
```

(%t21)

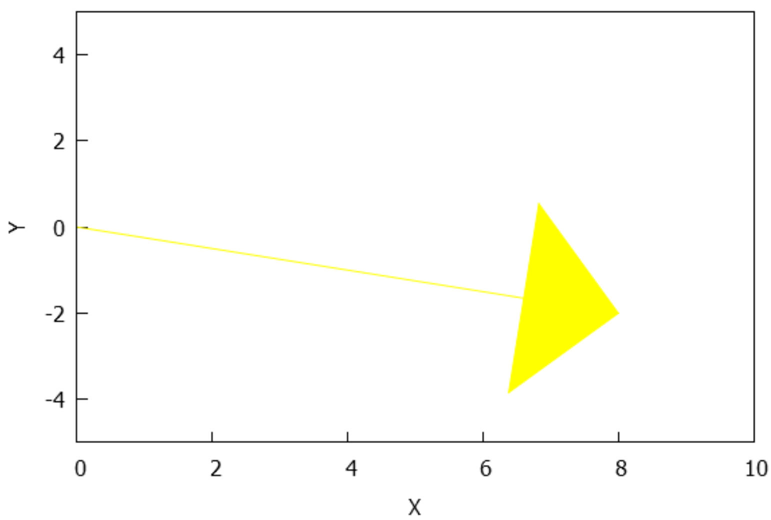


Зобразимо на комплексній площині $z_1 + z_2$.

```
(%i23) a:realpart(z1+z2);
       b:imagpart(z1+z2);
(a)    8
(b)    -2
```

```
(%i25) wxdraw2d(
       xrange    = [0,10],
       yrange    = [-5,5],
       color = yellow,
       vector( [ 0 , 0 ],[a,b]));
```

(%t25)



(%o25)

Завдання 2. Розв’язок:

Обнулим змінну z.

```
(%i38) kill(z);
(%o38) done
```

Введемо рівняння $(1+2i)(z-i)+(4i-3)(1-iz)+1+7i=0$.

```
(%i39) (1+2*%i)*(z - %i)+(4*%i-3)*(1 - %i*z)+1+7*%i = 0;
```
$$(\%o39)\quad (4\,\%i-3)\,(1-\%i\,z)+(2\,\%i+1)\,(z-\%i)+7\,\%i+1=0$$

Застосуємо функцію solve для знаходження коренів рівняння.

```
(%i40) z:solve(%);
```
$$(z)\quad [z=-\frac{2\,\%i}{\%i+1}]$$

```
(%i82) z1:z[1];
```
$$(z1)\quad z=-\frac{2\,\%i}{\%i+1}$$

Обнулим змінну z.

```
(%i38) kill(z);
(%o38) done
```

Введемо рівняння $z^2+\overline{z_1}=0$ та знайдемо його розв'язки.

```
(%i49) eq:z^2+conjugate(z) = 0;
```
$$(eq)\quad z^2+z=0$$

```
(%i51) s:solve(eq,z);
(s)    [z=-1,z=0]
```

```
(%i53) z1:s[1];
       z2:s[2];
(z1)   z=-1
(z2)   z=0
```

Завдання 3. Розв'язок:

Обчислимо $i^{17}+i^{18}+i^{19}+i^{20}$.

```
(%i58) z1:%i^17 + %i^18 + %i^19 + %i^20;
(z1)   0
```

Обчислимо $\dfrac{13+12i}{-8+6i}+\dfrac{(1+2i)^3}{2+i}$.

```
(%i73) z2:ratsimp((13 + 12*%i)/(-8+6*%i) + (1 + 2*%i)^3/(2 + %i));
```
$$(z2)\quad -\frac{13\,\%i-114}{4\,\%i-22}$$

Зведемо до

a) алгебраїчного вигляду, для цього застосуємо функцію rectform();
b) показникового вигляду, для цього застосуємо функцію polarform().

```
(%i3) rectform(z2);
```
$$(\%o3)\quad -\frac{17\,\%i}{50}-\frac{128}{25}$$

```
(%i23) polarform(z2);
```
$$(\%o23)\quad \frac{\sqrt{2633}\,\%e^{\%i\left(\operatorname{atan}\left(\frac{17}{256}\right)-\pi\right)}}{10}$$

Лабораторна робота №2

Тема роботи: **«Основні поняття теорії функції комплексної змінної»**
Мета роботи: навчитись виконувати операції з функціями комплексної змінної, використовуючи програму Maxima.

Завдання:

Варіант 1

Завдання 1. Знайти дійсну та уявну частини функції:
1) $\omega = i - z^3$;
2) $\omega = z^2 - \bar{z}$.

Завдання 2. Знайти образ заданої точки при вказаному відображенні:

$$z_0 = 2 + 3i\ ;\ \omega = \frac{z}{\bar{z}}\ .$$

Завдання 3. Знайти значення головного аргументу та модуля заданої функції у вказаній точці:

$$z_0 = 2i + \pi\ ;\ \omega = \cos(z)\ .$$

Завдання 4. Розв'язати задані рівняння:
1) $e^z = 3i$;
2) $\cos(z) = 3i$.

Варіант 2

Завдання 1. Знайти дійсну та уявну частини функції:
1) $w = i + \bar{z}$;
2) $w = z^4 - i$.

Завдання 2. Знайти образ заданої точки при вказаному відображенні:

$$z_0 = 3i\ ;\ w = z + \frac{i}{\bar{z}}\ .$$

Завдання 3. Знайти значення головного аргументу та модуля заданої функції у вказаній точці:

$$z_0 = \frac{\pi}{2} - i\ ;\ w = \cos(z)\ .$$

Завдання 4. Розв'язати задані рівняння:
1) $e^i = \ln z$;
2) $sh(z) = i$.

Варіант 3

Завдання 1. Знайти дійсну та уявну частини функції:

1) $w = i - \dfrac{z}{\overline{z}}$;

2) $w = i - \overline{z^2}$.

Завдання 2. Знайти образ заданої точки при вказаному відображенні:

$$z_0 = 5;\ w = z - i.$$

Завдання 3. Знайти значення головного аргументу та модуля заданої функції у вказаній точці:

$$z_0 = 2 + \frac{i\pi}{2};\ w = \sin(z).$$

Завдання 4. Розв'язати задані рівняння:

1) $sh(z) * i = 6i$;

2) $e^z = 5i + 2$.

Варіант 4

Завдання 1. Знайти дійсну та уявну частини функції:

1) $w = i - \overline{z}$;

2) $w = z^5 + i^3$.

Завдання 2. Знайти образ заданої точки при вказаному відображенні:

$$z_0 = 6i;\ w = \overline{z} + z^2.$$

Завдання 3. Знайти значення головного аргументу та модуля заданої функції у вказаній точці:

$$z_0 = i + \frac{\pi}{3};\ w = \sin(z).$$

Завдання 4. Розв'язати задані рівняння:

1) $e^z = 6i + 5$;

2) $\sin(z) = i - 2$.

Варіант 5

Завдання 1. Знайти дійсну та уявну частини функції:

1) $w = z^5 + i$;

2) $w = i^5 + z^3$.

Завдання 2. Знайти образ заданої точки при вказаному відображенні:

$$z_0 = -1;\ w = z + \frac{3i}{\bar{z}^2}.$$

Завдання 3. Знайти значення головного аргументу та модуля заданої функції у вказаній точці:

$$z_0 = \frac{\pi}{4} - i\ln 2;\ w = \cos(z).$$

Завдання 4. Розв'язати задані рівняння:

1) $\ln(z+i) = 6i$;

2) $e^{z+i} = 15i$.

<u>Варіант 6</u>

*Завдання 1.*Знайти дійсну та уявну частини функції:

1) $w = \overline{z^4 + i}$;

2) $w = z^2 - i$.

Завдання 2. Знайти образ заданої точки при вказаному відображенні:

$$z_0 = -i;\ w = \frac{z}{i\bar{z}}.$$

Завдання 3. Знайти значення головного аргументу та модуля заданої функції у вказаній точці:

$$z_0 = 2i + \ln 3 + \pi;\ w = \cos(z).$$

Завдання 4. Розв'язати задані рівняння:

1) $e^i = z - 5i$;

2) $sh(z) * i = 5$.

<u>Варіант 7</u>

Завдання 1. Знайти дійсну та уявну частини функції:

1) $w = i^5 - \frac{z^2}{\bar{z}}$;

2) $w = z - \overline{z^4}$.

Завдання 2. Знайти образ заданої точки при вказаному відображенні:

$$z_0 = i;\ w = z + iz.$$

Завдання 3. Знайти значення головного аргументу та модуля заданої функції у вказаній точці:

$$z_0 = \frac{\pi}{3} - i\ln 3\ ;\ w = \sin(z)\ .$$

Завдання 4. Розв’язати задані рівняння:

1) $\ln(z - i) = z + 6i$;

2) $e^{3z} = 7i + 1$.

Варіант 8

Завдання 1. Знайти дійсну та уявну частини функції:

1) $w = \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2$;

2) $w = i - \overline{z^2} + z$.

Завдання 2. Знайти образ заданої точки при вказаному відображенні:

$$z_0 = 2i^3 + 3i\ ;\ \ w = \frac{z}{\bar{z}}\ .$$

Завдання 3. Знайти значення головного аргументу та модуля заданої функції у вказаній точці:

$$z_0 = i\ln 2 + \frac{2\pi}{3}\ ;\ w = tg(z)\ .$$

Завдання 4. Розв’язати задані рівняння:

1) $csh(z + i) = 5i$;

2) $\ln(z - 3i) = 5 + 3i$.

Варіант 9

Завдання 1. Знайти дійсну та уявну частини функції:

1) $w = \frac{z}{\bar{z}^2}$;

2) $w = i + z - \overline{z^2}$.

Завдання 2. Знайти образ заданої точки при вказаному відображенні:

$$z_0 = i + 1\ ;\ w = z - z^2.$$

Завдання 3. Знайти значення головного аргументу та модуля заданої функції у вказаній точці:

$$z_0 = i\pi + \ln 2\ ;\ w = ctg(z).$$

Завдання 4. Розв’язати задані рівняння:

1) $e^{i-z} = z + 5i$;

2) $sh(z - i) = 2i + 1$.

Варіант 10

Завдання 1. Знайти дійсну та уявну частини функції:

1) $w = i^3 - z^2 + \bar{z}$;

2) $w = z^2 + i^3$.

Завдання 2. Знайти образ заданої точки при вказаному відображенні:

$$z_0 = 2i + i^2;\ \ w = z^2 - i.$$

Завдання 3. Знайти значення головного аргументу та модуля заданої функції у вказаній точці:

$$z_0 = 2\ln 6 + i + \frac{2\pi}{3}\ ;\ w = \sin(z).$$

Завдання 4. Розв’язати задані рівняння:

1) $\ln z * 5i = 0$;

2) $zi + 6i = \ln z$.

Варіант 11

Завдання 1. Знайти дійсну та уявну частини функції:

1) $w = \left(\dfrac{z^3}{\bar{z}}\right)^2$;

2) $w = \dfrac{\overline{z^2}}{z}$.

Завдання 2. Знайти образ заданої точки при вказаному відображенні:

$$z_0 = 2\ ;\ w = z - i^3.$$

Завдання 3. Знайти значення головного аргументу та модуля заданої функції у вказаній точці:

$$z_0 = i\ln 2 + \pi;\ \ w = tg(z).$$

Завдання 4. Розв'язати задані рівняння:

1) $\ln(z+5) = -i$;

2) $sh(i) * i = 5$.

Варіант 12

Завдання 1. Знайти дійсну та уявну частини функції:

1) $w = i + z - \overline{z^2}$;

2) $w = i + \overline{z^2}$.

Завдання 2. Знайти образ заданої точки при вказаному відображенні:

$$z_0 = 5i\ ;\ w = z^2 - \overline{z}.$$

Завдання 3. Знайти значення головного аргументу та модуля заданої функції у вказаній точці:

$$z_0 = 2 + \frac{\pi}{3} + i\ln 4;\ w = ctg(z).$$

Завдання 4. Розв'язати задані рівняння:

1) $\ln z = -6i$;

2) $\cos(i) = 5z$.

Варіант 13

Завдання 1. Знайти дійсну та уявну частини функції:

1) $w = i^5 - z$;

2) $w = i + z^4$.

Завдання 2. Знайти образ заданої точки при вказаному відображенні:

$$z_0 = 2 - 3i;\ w = \frac{z+i}{\overline{z}}.$$

Завдання 3. Знайти значення головного аргументу та модуля заданої функції у вказаній точці:

$$z_0 = 2i + \frac{5\pi}{2}\ ;\ w = \sin(z).$$

Завдання 4. Розв'язати задані рівняння:

1) $zi + 5i = \cos(i)$;

2) $sh(i) * i = 0$.

Варіант 14

Завдання 1. Знайти дійсну та уявну частини функції:

1) $w = \dfrac{z+i}{\bar{z}}$;

2) $w = i - \overline{z^2} - z^3$.

Завдання 2. Знайти образ заданої точки при вказаному відображенні:

$$z_0 = -i^3;\ w = \bar{z} + z^3.$$

Завдання 3. Знайти значення головного аргументу та модуля заданої функції у вказаній точці:

$$z_0 = \ln 2 + \frac{\pi}{3};\ w = ctg(z).$$

Завдання 4. Розв'язати задані рівняння:

1) $e^{i+2z} = z - i$;

2) $sh(z-7) = 0$.

Варіант 15

Завдання 1. Знайти дійсну та уявну частини функції:

1) $w = \dfrac{z}{i+\bar{z}}$;

2) $w = i^3 - z^4$.

Завдання 2. Знайти образ заданої точки при вказаному відображенні:

$$z_0 = 10;\ w = z - i^3.$$

Завдання 3. Знайти значення головного аргументу та модуля заданої функції у вказаній точці:

$$z_0 = 2i + \ln 3 + \frac{\pi}{6};\ w = \cos(z).$$

Завдання 4. Розв'язати задані рівняння:

1) $e^{z+6i} = 5i$;

2) $sh(z) = i$.

Варіант 16

Завдання 1. Знайти дійсну та уявну частини функції:

1) $w = \dfrac{z+i}{\bar{z}-i}$;

2) $w = i^3 + \dfrac{\overline{z^2}}{z}$.

Завдання 2. Знайти образ заданої точки при вказаному відображенні:

$$z_0 = 3+i\ ;\ w = \frac{z}{\bar{z}} + i^4 .$$

Завдання 3. Знайти значення головного аргументу та модуля заданої функції у вказаній точці:

$$z_0 = i\ln 5 + \frac{\pi}{3}\quad w = \cos(z) .$$

Завдання 4. Розв'язати задані рівняння:

1) $e^z * 6i = 0$;

2) $sh(i) * 5z = 0$.

Варіант 17

Завдання 1. Знайти дійсну та уявну частини функції:

1) $w = i^5 - z$;

2) $w = \dfrac{\overline{z^2}}{z}$.

Завдання 2. Знайти образ заданої точки при вказаному відображенні:

$$z_0 = 7\ ;\ w = z^2 + i .$$

Завдання 3. Знайти значення головного аргументу та модуля заданої функції у вказаній точці:

$$z_0 = i\ln\sqrt{5} + \frac{\pi}{4}\ ;\ w = \sin(z) .$$

Завдання 4. Розв'язати задані рівняння:

1) $e^{z+i} = 14i$;

2) $csh(i) * z = 5$.

Варіант 18

Завдання 1. Знайти дійсну та уявну частини функції:

1) $w = \dfrac{z}{\bar{z} + i^3}$;

2) $w = i^5 + z^2$.

Завдання 2. Знайти образ заданої точки при вказаному відображенні:

$$z_0 = 5i^3;\ w = z + i^2.$$

Завдання 3. Знайти значення головного аргументу та модуля заданої функції у вказаній точці:

$$z_0 = i\ln(4+\sqrt{5}) + \pi;\ w = tg(z).$$

Завдання 4. Розв’язати задані рівняння:

1) $\ln(z+1) + 15i - 2z = 0$;

2) $\cos(i) * 15i = z + 5$.

Варіант 19

Завдання 1. Знайти дійсну та уявну частини функції:

1) $w = \dfrac{z}{\bar{z}} + i^3$;

2) $w = i^5 - z^2$.

Завдання 2. Знайти образ заданої точки при вказаному відображенні:

$$w = \cos(z);\ w = \frac{i}{\bar{z}}.$$

Завдання 3. Знайти значення головного аргументу та модуля заданої функції у вказаній точці:

$$z_0 = i\ln(\sqrt{6}) + \frac{3\pi}{2};\ w = \sin(z).$$

Завдання 4. Розв’язати задані рівняння:

1) $\ln(z+5) = -i$;

2) $csh(z - i) = 0$.

Варіант 20

Завдання 1. Знайти дійсну та уявну частини функції:

1) $w = i + \dfrac{z}{\bar{z} - i^3}$;

2) $w = i - \dfrac{\overline{z^2}}{z}$.

Завдання 2. Знайти образ заданої точки при вказаному відображенні:

$$z_0 = 3 + 5i^2 \; ; w = \frac{z^3}{\bar{z}^2} .$$

Завдання 3. Знайти значення головного аргументу та модуля заданої функції у вказаній точці:

$$z_0 = i\ln 6 - \pi + 4 ; \; w = \sin(z) .$$

Завдання 4. Розв'язати задані рівняння:

1) $\ln(i) = -7z + i$;

2) $\sin(i) * 15z = z^2$.

Варіант 21

Завдання 1. Знайти дійсну та уявну частини функції:

1) $w = 3iz - z^2$;

2) $w = i - iz$.

Завдання 2. Знайти образ заданої точки при вказаному відображенні:

$$z_0 = 2 \; ; w = z + \frac{i^3}{\bar{z}} + i .$$

Завдання 3. Знайти значення головного аргументу та модуля заданої функції у вказаній точці:

$$w = i\ln(\sqrt{2} + 1) + \frac{\pi}{2} \; ; w = \cos(z) .$$

Завдання 4. Розв'язати задані рівняння:

1) $e^i = \ln(z - 6i)$;

2) $e^{z-i+2} = 0$.

Варіант 22

Завдання 1. Знайти дійсну та уявну частини функції:

1) $w = z - i\overline{z}$;

2) $w = i^3 - \overline{z^2} + iz$.

Завдання 2. Знайти образ заданої точки при вказаному відображенні:

$$z_0 = 1;\ w = z^2 + iz.$$

Завдання 3. Знайти значення головного аргументу та модуля заданої функції у вказаній точці:

$$z_0 = 3i + \pi\ ;\ w = ctg(z).$$

Завдання 4. Розв’язати задані рівняння:

1) $2e^i = \ln(z - i)$;

2) $\sin(z + 4i) = 0$.

Варіант 23

Завдання 1. Знайти дійсну та уявну частини функції:

1) $w = i^3 - i\overline{z}$;

2) $w = \dfrac{\overline{z^2}}{z} + iz$.

Завдання 2. Знайти образ заданої точки при вказаному відображенні:

$$z_0 = 3 - 3i\ ;\ w = \frac{z}{\overline{z}}.$$

Завдання 3. Знайти значення головного аргументу та модуля заданої функції у вказаній точці:

$$z_0 = i\ln(\sqrt{7}) + \pi\ ;\ w = tg(z).$$

Завдання 4. Розв’язати задані рівняння:

1) $\ln(z + 5z^2) = i$;

2) $csh(i + 4) = 6z$.

Варіант 24

Завдання 1. Знайти дійсну та уявну частини функції:

1) $w = i - \dfrac{iz}{\overline{z}}$;

2) $w = -\overline{z^2} - z$.

Завдання 2. Знайти образ заданої точки при вказаному відображенні:

$$z_0 = i;\ w = z - i.$$

Завдання 3. Знайти значення головного аргументу та модуля заданої функції у вказаній точці:

$$z_0 = 5i + \pi + \ln 3;\ w = \cos(z).$$

Завдання 4. Розв'язати задані рівняння:

1) $e^i = -i$;

2) $\ln(z+2) = 5 + 7i - z$.

Варіант 25

Завдання 1. Знайти дійсну та уявну частини функції:

1) $w = iz - \dfrac{z}{\overline{z}}$;

2) $w = i^3 - \overline{z^2}$.

Завдання 2. Знайти образ заданої точки при вказаному відображенні:

$$z_0 = 2 + 3i;\ w = z - \frac{i}{z}.$$

Завдання 3. Знайти значення головного аргументу та модуля заданої функції у вказаній точці:

$$w = i\ln 4 + 5i + \frac{3\pi}{2};\ w = tg(z).$$

Завдання 4. Розв'язати задані рівняння:

1) $\ln(i+z) = 0$;

2) $e^z + 6i = 2$.

Варіант 26

Завдання 1. Знайти дійсну та уявну частини функції:

1) $w = \overline{z} + i^5$;

2) $w = i\overline{z^2} + i^3$.

Завдання 2. Знайти образ заданої точки при вказаному відображенні:

$$z_0 = 5 + 7i;\ w = z + \frac{2}{\overline{z}}.$$

Завдання 3. Знайти значення головного аргументу та модуля заданої функції у вказаній точці:

$$z_0 = i\ln\sqrt{5} + \pi + 6i \;;\; w = \cos(z).$$

Завдання 4. Розв'язати задані рівняння:

1) $e^i = \ln z + 6i$;

2) $sh(z) * i = 2z$.

Варіант 27

Завдання 1. Знайти дійсну та уявну частини функції:

1) $w = iz^2 - \frac{z}{\bar{z}}$;

2) $w = i + i\overline{z^2}$.

Завдання 2. Знайти образ заданої точки при вказаному відображенні:

$$z_0 = 2 + i \;;\; w = \frac{3z}{i\bar{z}}.$$

Завдання 3. Знайти значення головного аргументу та модуля заданої функції у вказаній точці:

$$z_0 = i\ln 3 + \frac{\pi}{4} + \ln 4 \;;\; w = ctg(z).$$

Завдання 4. Розв'язати задані рівняння:

1) $\ln z * i = 0$;

2) $sh(z) = -i + 5$.

Варіант 28

Завдання 1. Знайти дійсну та уявну частини функції:

1) $w = z - \frac{i}{\bar{z}}$;

2) $w = i - \overline{z^2} + i^3 z$.

Завдання 2. Знайти образ заданої точки при вказаному відображенні:

$$z_0 = 1 + i \;;\; w = \frac{z - z^2}{\bar{z}}.$$

Завдання 3. Знайти значення головного аргументу та модуля заданої функції у вказаній точці:

$$z_0 = i\ln(\sqrt{5}+3)+\frac{\pi}{3}\ ;\ w=\sin(z)\ .$$

Завдання 4. Розв'язати задані рівняння:

1) $e^i * 5i = 7z - 5i$;

2) $\ln z * i = 20z$.

Варіант 29

Завдання 1. Знайти дійсну та уявну частини функції:

1) $w = iz^3 + \frac{z^2}{\overline{z}}$;

2) $w = z + iz$.

Завдання 2. Знайти образ заданої точки при вказаному відображенні:

$$z_0 = -1 - i\ ;\ w = iz - \frac{z}{\overline{z}}\ .$$

Завдання 3. Знайти значення головного аргументу та модуля заданої функції у вказаній точці:

$$z_0 = i\ln(\sqrt{5}+5)+\frac{\pi}{3}+\ln 2\ ;\ w=\cos(z)\ .$$

Завдання 4. Розв'язати задані рівняння:

1) $e^i = z - 14i$;

2) $sh(z+5) * i = 0$.

Варіант 30

Завдання 1. Знайти дійсну та уявну частини функції:

1) $w = i - \frac{z}{\overline{z}}$;

2) $w = i - \overline{z^2}$.

Завдання 2. Знайти образ заданої точки при вказаному відображенні:

$$z_0 = -7 + i\ ;\ w = \frac{z}{\overline{z} + i^3}\ .$$

Завдання 3. Знайти значення головного аргументу та модуля заданої функції у вказаній точці:

$$z_0 = \frac{\pi}{2} + i\ln 5 \text{ ; } w = \sin(z) \text{ .}$$

Завдання 4. Розв'язати задані рівняння:

1) $zi + 6i = \ln z$;

2) $\cos(z) = -6i + z$.

Зразок виконання лабораторної роботи 2

Завдання 1. Знайти дійсну та уявну частини заданих функцій:

1) $w = \bar{z} - iz^2$

2) $w = z^2 + i$

3) $w = \dfrac{\bar{z}}{z}$

Завдання 2. Знайти образи заданих точок при вказаних відображеннях:

1) $z_0 = -i$; $w = z^2$

2) $z_0 = 1$; $w = \dfrac{1}{z - i}$

3) $z_0 = 1 - i$; $w = (z - i)^2$

Завдання 3. Знайти значення головного аргументу та модуля заданих функцій у вказаних точках:

1) $w = \cos(z)$; $z_0 = \dfrac{\pi}{2} + i\ln 2$

2) $w = \sin(z)$; $z_0 = \pi + i\ln 3$

3) $w = \sin(z)$; $z_0 = \pi + i\ln(2 + \sqrt{5})$

Завдання 4. Розв'язати задані рівняння:

1) $e^z + i = 0$

2) $sh(i) * z = -i$

3) $\ln(z + i) = 0$

Завдання 1. Розв'язок:

1) $w = \bar{z} - iz^2$

Перш за все визначаємо, що z — це комплексне число, тобто:

```
(%i1)   z: (x+%i·y);
(z)     %i y+x
```

Далі визначаємо саму функцію w. Користуємося функцією conjugate(z), щоб задати комплексно-спряжене число.

```
(%i2)   w: conjugate(z)−%i·z;
(w)     −%i(%i y+x) −%i y+x
```

Користуємося функціями realpart(z) — знаходження дійсної частини функції, та imagepart(z) — знаходження уявної частини функції. Після завершення всіх дій видаляємо функцію з буферу командою kill(w). Якщо z нам більше не потрібна, видаляємо її таким же способом.

```
(%i4)   realpart(w);
(%o4)   y+x
(%i5)   imagpart(w);
(%o5)   −y−x
(%i6)   kill(w);
(%o6)   done
```

Точно таким же способом вирішуємо другий та третій приклад:

2) $w = z^2 + i$;

3) $w = \dfrac{\bar{z}}{z}$.

А саме:

(%i125) w: z^2+%i;

(w) $(\%i\, y+x)^2+\%i$

(%i126) realpart(w);

(%o126) x^2-y^2

(%i127) imagpart(w);

(%o127) $2\, x\, y+1$

(%i134) kill(w);

(%o134) *done*

(%i135) w: conjugate(z)/z;

(w) $\dfrac{x-\%i\, y}{\%i\, y+x}$

(%i137) realpart(w);

(%o137) $\dfrac{x^2-y^2}{y^2+x^2}$

(%i138) imagpart(w);

(%o138) $-\dfrac{2\, x\, y}{y^2+x^2}$

(%i14) kill(w);

(%o14) *done*

(%i15) kill(z);

(%o15) *done*

Завдання 2. Розв'язок:

Задаємо точку, образ якої потрібно знайти. Задаємо функцію, та завдяки командам realpart(w) та imagpart(w) знаходимо образ цієї точки:

```
(%i18)
          z: -%i;
(z)       -%i
(%i19)    w: z^2;
(w)       -1
(%i21)    realpart(w);
(%o21)    -1
(%i22)    imagpart(w);
(%o22)    0
```

Видаляємо з буферу z та w:

```
(%i23)    kill(z);
(%o23)    done
(%i24)    kill(w);
(%o24)    done
```

Таким же способом вирішуємо інші приклади:

```
(%i25)    z: 1;
(z)       1
(%i26)    w: 1/(z-%i);
```

(w) $\dfrac{1}{1-\%i}$

```
(%i28)    realpart(w);
```

(%o28) $\dfrac{1}{2}$

```
(%i29)    imagpart(w);
```

(%o29) $\dfrac{1}{2}$

```
(%i30)    kill(w);
(%o30)    done
(%i31)    kill(z);
(%o31)    done
```

```
(%i32)  z: 1-%i;
(z)     1-%i
(%i33)  w: (z-%i)^2;
(w)     (1-2 %i)^2
(%i34)  realpart(w);
(%o34)  -3
(%i35)  imagpart(w);
(%o35)  -4
(%i36)  kill(w);
(%o36)  done
(%i37)  kill(z);
(%o37)  done
```

Завдання 3. Розв'язок:

1) Вводимо значення z_0. Далі вводимо саму функцію w. За допомогою команди carg(w) знаходимо значення головного аргументу, за допомогою cabs(w) знаходимо значення модуля. Команда float(%) обчислює ці значення та виводить на экран. Далі приклади: $w = \cos(z)$; $z_0 = \frac{\pi}{2} + i\ln 2$

```
        z: (%pi/2)+%i·log(2);
(z)     %i log(2) + π/2
(%i61)  w: cos(z);
(w)     -%i sinh(log(2))
(%i62)  carg(w);
(%o62)  -π/2
(%i63)  float(%);
(%o63)  -1.570796326794897
(%i64)  cabs(w);
(%o64)  sinh(log(2))
(%i65)  float(%);
(%o65)  0.75
(%i66)  kill(z);
(%o66)  done
```

(%i67) kill(w);
(%o67) *done*

(%i68) z: %pi+%i·log(3);
(z) $\%i \log(3) + \pi$

(%i69) w: sin(z);
(w) $-\%i \sinh(\log(3))$

(%i70) carg(w);
(%o70) $-\frac{\pi}{2}$

(%i71) float(%);
(%o71) -1.570796326794897

(%i72) cabs(w);
(%o72) $\sinh(\log(3))$

(%i74) float(%);
(%o74) 1.333333333333333

(%i75) kill(w);
(%o75) *done*

(%i76) kill(z);
(%o76) *done*

(%i77) z: %pi+%i·log(2+sqrt(5));
(z) $\%i \log(\sqrt{5}+2) + \pi$

(%i78) w: sin(z);
(w) $-\%i \sinh(\log(\sqrt{5}+2))$

(%i80) carg(w);
(%o80) $-\frac{\pi}{2}$

(%i81) cabs(w);
(%o81) $\sinh(\log(\sqrt{5}+2))$

(%i83) float(%);
(%o83) 2.0

(%i75) kill(w);
(%o75) *done*

(%i76) kill(z);
(%o76) *done*

Завдання 4. Розв’язок:

Вводимо рівняння $e^z + i = 0$ та інші.

За допомогою команди solve(f) знаходимо значення z. Команда float(%) переводить значення z в число. Далі приклади:

```
(%i115)  f:exp(z)+%i=0;
(f)      %e^z+%i=0
(%i117)  solve(f);
(%o117)  [z=log(-%i)]
(%i118)  float(%);
(%o118)  [z=-1.570796326794897 %i]
(%i119)  kill(f);
(%o119)  done
(%i120)  f:sinh(%i)·z=-%i;
(f)      %i sin(1) z=-%i
(%i121)  solve(f);
(%o121)  [z=-1/sin(1)]
(%i122)  float(%);
(%o122)  [z=-1.188395105778121]
(%i101)  kill(f);
(%o101)  done
(%i112)  f: log(z+%i)=0;
(f)      log(z+%i)=0
(%i113)  solve(f);
(%o113)  [z=1-%i]
(%i114)  float(%);
(%o114)  [z=1.0-1.0 %i]
```

Лабораторна робота 3

Тема роботи: **«Границя та неперервність функції комплексної змінної»**

Мета роботи: навчитись обчислювати границю функції, доводити неперервність функції комплексної змінної.

Завдання:

Варіант 1

Завдання 1. Користуючись означенням границі, довести, що:

a) $\lim_{z\to 2}(3z-8)=1$;

b) $\lim_{z\to 2}\dfrac{1}{z+2i}=\dfrac{1}{i+2}$.

Завдання 2. Знайти границі функції:

a) $\lim_{z\to 0}\dfrac{(z-2)(z)(z+4)+8}{z}$;

b) $\lim_{z\to\infty}\dfrac{z^3-3z}{z^2+1}$.

Завдання 3. Користуючись означенням неперервності функції довести неперервність заданих функції у вказаних точках z_0:

a) $f(z)=2z^2+4$; $z_0=-i$;

b) $f(z)=\dfrac{2z-2}{2z+2}$; $z_0=i$.

Завдання 4. Знайти точки розриву функції:

a) $f(z)=\dfrac{z}{z^2-4z+2}$;

b) $f(z)=\dfrac{z}{z^2+8}$.

Варіант 2

Завдання 1. Користуючись означенням границі, довести, що:

a) $\lim_{z\to 2}(3z-11)=1$;

b) $\lim_{z\to 2i}\dfrac{1}{z+2i}=1$.

Завдання 2. Знайти границі функції:

a) $\lim_{z\to 1}\dfrac{(z-2)(z+4)+8}{z}$;

b) $\lim_{z\to\infty}\dfrac{z^3-3z+1}{z^2+1}$.

Завдання 3. Користуючись означенням неперервності функції довести неперервність заданих функції у вказаних точках z_0:

a) $f(z)=3z^2+6$; $z_0=-i$;

b $f(z)=\frac{3z-3}{3z+3}$; $z_0=i$.

Завдання 4. Знайти точки розриву функції:

a) $f(z)=\frac{z}{2z^2-4z+2}$;

b) $f(z)=\frac{z}{2z^2+8}$.

<u>Варіант 3</u>

Завдання 1. Користуючись означенням границі, довести, що:

a) $\lim_{z\to 5}(3z-14)=1$;

b) $\lim_{z\to 1}\frac{1}{z+2i}=-\frac{1}{i-1}$.

Завдання 2. Знайти границі функції:

a) $\lim_{z\to 4}\frac{(z-2)^2+8}{z}$;

b) $\lim_{z\to 15}\frac{z+1}{z^2+1}$.

Завдання 3. Користуючись означенням неперервності функції довести неперервність заданих функції у вказаних точках z_0:

a) $f(z)=z^2+2$; $z_0=-i$;

b) $f(z)=\frac{z-1}{z+1}$; $z_0=i$.

Завдання 4. Знайти точки розриву функції:

a) $f(z)=\frac{z}{4z^3+8}$;

b) $f(z)=\frac{z}{2z^2+4z+8}$.

<u>Варіант 4</u>

Завдання 1. Користуючись означенням границі, довести, що:

a) $\lim_{z\to 6}(3z-17)=1$;

b) $\lim_{z\to 3-i}\frac{1}{z+2i}=-\frac{1}{i+3}$.

Завдання 2. Знайти границі функції:

a) $\lim_{z\to 0}\dfrac{8}{z}$;

b) $\lim_{z\to\infty}\dfrac{1}{z^2+1}$.

Завдання 3. Користуючись означенням неперервності функції довести неперервність заданих функції у вказаних точках z_0:

a) $f(z)=4z^2+8$; $z_0=-i$;

b) $f(z)=\dfrac{4z-4}{4z+4}$; $z_0=i$.

Завдання 4. Знайти точки розриву функції:

a) $f(z)=\dfrac{z}{4z^3+8z^2+8}$;

b) $f(z)=\dfrac{z}{z^3+2z^2+4z+8}$.

Варіант 5

Завдання 1. Користуючись означенням границі, довести, що:

a) $\lim_{z\to 7}(3z-20)=1$;

b) $\lim_{z\to 1-i}\dfrac{1}{z+2i}=\dfrac{i+1}{i-1}$.

Завдання 2. Знайти границі функції:

a) $\lim_{z\to 0}\dfrac{(z-2)*5}{z}$;

b) $\lim_{z\to 12}\dfrac{3z}{z^2+1}$.

Завдання 3. Користуючись означенням неперервності функції довести неперервність заданих функції у вказаних точках z_0:

a) $f(z)=5z^2+10$; $z_0=-i$;

b) $f(z)=\dfrac{5z-5}{5z+5}$; $z_0=i$.

Завдання 4. Знайти точки розриву функції:

a) $f(z)=\dfrac{z}{4z^3+2z}$;

b) $f(z)=\dfrac{z}{4z+8}$.

Варіант 6

Завдання 1. Користуючись означенням границі, довести, що:

a) $\lim_{z\to 1}(-3z+4)=1$;

b) $\lim_{z\to 2-i}\dfrac{z}{z+2i}=\dfrac{5i+10}{11i+2}$.

Завдання 2. Знайти границі функції:

a) $\lim_{z\to 0}\dfrac{(z-2)^2*(z+1)^3*(z+4)+8}{z}$;

b) $\lim_{z\to\infty}\dfrac{z^3-3z^2+1}{z^2+1}$.

Завдання 3. Користуючись означенням неперервності функції довести неперервність заданих функції у вказаних точках z_0:

a) $f(z)=z^3+1$; $z_0=-i$;

b) $f(z)=\dfrac{z^2}{z+1}$; $z_0=i$.

Завдання 4. Знайти точки розриву функції:

a) $f(z)=\dfrac{z}{(z+2)(z-8)}$;

b) $f(z)=\dfrac{z}{(z+2i)(z+3i)}$.

Варіант 7

Завдання 1. Користуючись означенням границі, довести, що:

a) $\lim_{z\to 2}(-3z+7)=1$;

b) $\lim_{z\to 3-2i}\dfrac{1}{z+2i}=\dfrac{1}{3}$.

Завдання 2. Знайти границі функції:

a) $\lim_{z\to 0}\dfrac{25-4z+z^2}{z}$;

b) $\lim_{z\to\infty}\dfrac{z^3-3z^2+1}{18z}$.

Завдання 3. Користуючись означенням неперервності функції довести неперервність заданих функції у вказаних точках z_0:

a) $f(z)=2z^3+2$; $z_0=-i$;

b) $f(z)=\dfrac{2z^2}{z+1}$; $z_0=i$.

Завдання 4. Знайти точки розриву функції:

a) $f(z)=\dfrac{z}{(z^2+2)(z-8)}$;

b) $f(z)=\dfrac{z}{(z+(2i)^2)(z^3+3i)}$.

Варіант 8

Завдання 1. Користуючись означенням границі, довести, що:

a) $\lim_{z\to 3}(-3z+10)=1$;

b) $\lim_{z\to 2-3i}\dfrac{z}{z+2i}=\dfrac{17i+6}{11i-2}$.

Завдання 2. Знайти границі функції:

a) $\lim_{z\to 1}\dfrac{z^5+z^6+8}{z}$;

b) $\lim_{z\to 15}\dfrac{z^3-1+z^0}{z^2+1}$.

Завдання 3. Користуючись означенням неперервності функції довести неперервність заданих функції у вказаних точках z_0:

a) $f(z)=3z^3+3$; $z_0=-i$;

b) $f(z)=\dfrac{3z^2}{z+1}$; $z_0=i$.

Завдання 4. Знайти точки розриву функції:

a) $f(z)=\dfrac{z}{2z+15i}$;

b) $f(z)=\dfrac{z}{18z+5z^2-87i}$.

Варіант 9

Завдання 1. Користуючись означенням границі, довести, що:

a) $\lim_{z\to 4}(-3z+13)=1$;

b) $\lim_{z\to 2-2i}\dfrac{z}{z+2i}=1-i$.

Завдання 2. Знайти границі функції:

a) $\lim_{z\to 0}\dfrac{(z-2)(z+1)(z+4)+8}{z+15-z^4}$;

b) $\lim_{z\to \infty}\dfrac{1-z^2}{3+z}$.

Завдання 3. Користуючись означенням неперервності функції довести неперервність заданих функції у вказаних точках z_0:

a) $f(z) = 4z^3 + 4$; $z_0 = -i$;

b) $f(z) = \dfrac{4z^2}{z+1}$; $z_0 = i$.

Завдання 4. Знайти точки розриву функції:

a) $f(z) = \dfrac{z}{2z^2 + 15i}$;

b) $f(z) = \dfrac{z}{5z^2 - 87i}$.

<u>Варіант 10</u>

Завдання 1. Користуючись означенням границі, довести, що:

a) $\lim_{z\to 5}(-3z + 16) = 1$;

b) $\lim_{z\to 5-i} \dfrac{1}{z+2i} = \dfrac{1}{i+5}$.

Завдання 2. Знайти границі функції:

a) $\lim_{z\to 6} \dfrac{(z-2)^5 + 8}{z}$;

b) $\lim_{z\to \infty} \dfrac{z^9 - z^5}{z^2 + 1}$.

Завдання 3. Користуючись означенням неперервності функції довести неперервність заданих функції у вказаних точках z_0:

a) $f(z) = 5z^3 + 5$; $z_0 = -i$;

b) $f(z) = \dfrac{5z^2}{z+1}$; $z_0 = i$.

Завдання 4. Знайти точки розриву функції:

a) $f(z) = \dfrac{z}{2z^2 + z + 15i}$;

b) $f(z) = \dfrac{z}{5z^2 + 5z - 87i}$.

<u>Варіант 11</u>

Завдання 1. Користуючись означенням границі, довести, що:

a) $\lim_{z\to 6}(-3z + 19) = 1$;

b) $\lim_{z\to 5-i} \dfrac{z}{z+2i} = \dfrac{13i + 65}{37i + 55}$.

Завдання 2. Знайти границі функції:

a) $\lim_{z\to 0}\dfrac{52z^5-89z^7}{z}$;

b) $\lim_{z\to 8}\dfrac{z^3-z^2+z+1}{z^2+1}$.

Завдання 3. Користуючись означенням неперервності функції довести неперервність заданих функції у вказаних точках z_0:

a) $f(z)=2z^2+2z$; $z_0=-i$;

b) $f(z)=\dfrac{2z^2+2z}{z}$; $z_0=i$.

Завдання 4. Знайти точки розриву функції:

a) $f(z)=\dfrac{z}{z^3+z^2+z-1}$;

b) $f(z)=\dfrac{z}{\frac{7z^4}{6}+32}$.

Варіант 12

Завдання 1. Користуючись означенням границі, довести, що:

a) $\lim_{z\to 1}(z)=1$;

b) $\lim_{z\to 1-i}\dfrac{z^2}{z+2i}=-\dfrac{2i}{i+1}$.

Завдання 2. Знайти границі функції:

a) $\lim_{z\to 1}\dfrac{(z-2)(z+1)(z+4)+8}{z+4z^4}$;

b) $\lim_{z\to 1}\dfrac{z^3-\sin(30)}{z^2+1}$.

Завдання 3. Користуючись означенням неперервності функції довести неперервність заданих функції у вказаних точках z_0:

a) $f(z)=z^2+z$; $z_0=-i$;

b) $f(z)=\dfrac{z^2+z}{z}$; $z_0=i$.

Завдання 4. Знайти точки розриву функції:

a) $f(z)=\dfrac{z}{z^3+5z^2+3z-1}$;

b) $f(z)=\dfrac{z}{z^4+2i+5}$.

Варіант 13

Завдання 1. Користуючись означенням границі, довести, що:

a) $\lim_{z\to 2}(3-z)=1$;

b) $\lim_{z\to 2-i}\dfrac{z^2}{z+2i}=-\dfrac{4i-3}{i+2}$.

Завдання 2. Знайти границі функції:

a) $\lim_{z\to 0}\dfrac{(z-2)*\cos(30)}{z+\sin(45)}$;

b) $\lim_{z\to 12}\dfrac{z}{z^2+2z+1}$.

Завдання 3. Користуючись означенням неперервності функції довести неперервність заданих функції у вказаних точках z_0:

a) $f(z)=3z^2+3z$; $z_0=-i$;

b) $f(z)=\dfrac{3z^2+3z}{z}$; $z_0=i$.

Завдання 4. Знайти точки розриву функції:

a) $f(z)=\dfrac{z}{z^2+3z-i}$;

b) $f(z)=\dfrac{z}{z^4+z^2+2i+5}$.

Варіант 14

Завдання 1. Користуючись означенням границі, довести, що:

a) $\lim_{z\to 3}(10-3z)=1$;

b) $\lim_{z\to 2-2i}\dfrac{z^2}{z+2i}=-4i$.

Завдання 2. Знайти границі функції:

a) $\lim_{z\to 0}\dfrac{(2z-2)(z+15)(z^2+4)+9}{z^3}$;

b) $\lim_{z\to 45}\dfrac{z^7-3z}{z^{2+z}+1}$.

Завдання 3. Користуючись означенням неперервності функції довести неперервність заданих функції у вказаних точках z_0:

a) $f(z) = 4z^2 + 4z$; $z_0 = -i$;

b) $f(z) = \dfrac{4z^2 + 4z}{z}$; $z_0 = i$.

Завдання 4. Знайти точки розриву функції:

a) $f(z) = \dfrac{z}{z^2 + 3z - i}$;

b) $f(z) = \dfrac{z}{z^4 + z^2 + 2i + 5}$.

<u>Варіант 15</u>

Завдання 1. Користуючись означенням границі, довести, що:

a) $\lim_{z\to 4}(9 - 2z) = 1$;

b) $\lim_{z\to 3-2i} \dfrac{z^2}{z + 2i} = -\dfrac{12i - 5}{3}$.

Завдання 2. Знайти границі функції:

a) $\lim_{z\to 0} \dfrac{(z-2)(z^z + 1)}{z^z}$;

b) $\lim_{z\to 14} \dfrac{z^3 - 3z + 1}{z^6 + 1}$.

Завдання 3. Користуючись означенням неперервності функції довести неперервність заданих функції у вказаних точках z_0:

a) $f(z) = 5z^2 + 5z$; $z_0 = -i$;

b) $f(z) = \dfrac{5z^2 + 5z}{z}$; $z_0 = i$.

Завдання 4. Знайти точки розриву функції:

a) $f(z) = \dfrac{z}{z^2 + 3z - i + 41}$;

b) $f(z) = \dfrac{z}{z^4 + 3z^2 + 2i + 5}$.

Варіант 16

Завдання 1. Користуючись означенням границі, довести, що:

a) $\lim_{z\to 5}(11-2z)=1$;

b) $\lim_{z\to 2-3i}\dfrac{z^2}{z+2i}=\dfrac{12i+5}{i-2}$.

Завдання 2. Знайти границі функції:

a) $\lim_{z\to 0}\dfrac{(z-2)(z+1)+4(z^2-5)}{z^2}$;

b) $\lim_{z\to\infty}\dfrac{2z-8}{z^{-2}}$.

Завдання 3. Користуючись означенням неперервності функції довести неперервність заданих функції у вказаних точках z_0:

a) $f(z)=z^2+z+5$; $z_0=-i$;

b) $f(z)=\dfrac{z^2+z+4}{z}$; $z_0=i$.

Завдання 4. Знайти точки розриву функції:

a) $f(z)=\dfrac{z}{z^3+7i+2}$;

b) $f(z)=\dfrac{z}{z^5+8i-8}$.

Варіант 17

Завдання 1. Користуючись означенням границі, довести, що:

a) $\lim_{z\to 7}(8-z)=1$;

b) $\lim_{z\to 1-i}\dfrac{z^2}{2i}=-1$.

Завдання 2. Знайти границі функції:

a) $\lim_{z\to 0}\dfrac{(4z+1)(z^2+4)+8}{4z^2}$;

b) $\lim_{z\to 7}\dfrac{z^3-3z}{z^4+1}$.

Завдання 3. Користуючись означенням неперервності функції довести неперервність заданих функції у вказаних точках z_0:

a) $f(z)=z^2+z+8$; $z_0=-i$;

b) $f(z)=\dfrac{z^2+z+6}{z}$; $z_0=i$.

Завдання 4. Знайти точки розриву функції:

a) $f(z)=\dfrac{z}{z^3+z^2+7i+2}$;

b) $f(z)=\dfrac{z}{z^5+z^3+8i-8}$.

Варіант 18

Завдання 1. Користуючись означенням границі, довести, що:

a) $\lim_{z\to 28}(z-27)=1$;

b) $\lim_{z\to 2-i}\dfrac{z^2}{2i}=-\dfrac{3i+4}{2}$.

Завдання 2. Знайти границі функції:

a) $\lim_{z\to 0}\dfrac{(z-2)^2+(z+4)+8}{4}$;

b) $\lim_{z\to\infty}\dfrac{z^3-3z^2+4z+1}{z+1}$.

Завдання 3. Користуючись означенням неперервності функції довести неперервність заданих функції у вказаних точках z_0:

a) $f(z)=z^2+z+14$; $z_0=-i$;

b) $f(z)=\dfrac{z^2+z+19}{z}$; $z_0=i$.

Завдання 4. Знайти точки розриву функції:

a) $f(z)=\dfrac{z}{z^2+tg(60)}$;

b) $f(z)=\dfrac{z}{z^5+z^4+12i}$.

Варіант 19

Завдання 1. Користуючись означенням границі, довести, що:

a) $\lim_{z\to 15}(3z-44)=1$;

b) $\lim_{z\to 2-2i}\dfrac{z^2}{2i}=-4$.

Завдання 2. Знайти границі функції:

a) $\lim_{z\to 4}\dfrac{(z-2)(z+1)(z+4)+8}{z}$;

b) $\lim_{z\to\infty}\dfrac{z^3-3z+z^2-9}{z^2+z+1}$.

Завдання 3. Користуючись означенням неперервності функції довести неперервність заданих функції у вказаних точках z_0:

a) $f(z)=z^2+z+41$; $z_0=-i$;

b) $f(z)=\dfrac{z^2+z+23}{z}$; $z_0=i$.

Завдання 4. Знайти точки розриву функції:

a) $f(z)=\dfrac{z}{z^2+ctg(60)}$;

b) $f(z)=\dfrac{z}{z+z^3+12i}$.

<u>Варіант 20</u>

Завдання 1. Користуючись означенням границі, довести, що:

a) $\lim_{z\to i}(z^2+2)=1$;

b) $\lim_{z\to 2-3i}\dfrac{z^2}{2i}=\dfrac{5i-12}{2}$.

Завдання 2. Знайти границі функції:

a) $\lim_{z\to 0}\dfrac{(z-2)(z+1)^2}{z+8}$;

b) $\lim_{z\to\infty}\dfrac{arctg(z)}{z^2+1}$.

Завдання 3. Користуючись означенням неперервності функції довести неперервність заданих функції у вказаних точках z_0:

a) $f(z)=z^2+z+23$; $z_0=-i$;

b) $f(z)=\dfrac{z^2+z+32}{z}$; $z_0=i$.

Завдання 4. Знайти точки розриву функції:

a) $f(z)=\dfrac{z}{z^2+ctg(30)}$;

b) $f(z)=\dfrac{z}{z^2+i^2+z^3+12i}$.

Варіант 21

Завдання 1. Користуючись означенням границі, довести, що:

a) $\lim_{z\to 2i}(z^2+5)=1$;

b) $\lim_{z\to 3-2i}\dfrac{z^2}{2i}=-\dfrac{5i+12}{2}$.

Завдання 2. Знайти границі функції:

a) $\lim_{z\to 0}\dfrac{(z-2)(z+1)+8z^7}{z^7}$;

b) $\lim_{z\to\infty}\dfrac{arcctg(z)}{z^2}$.

Завдання 3. Користуючись означенням неперервності функції довести неперервність заданих функції у вказаних точках z_0:

a) $f(z)=z-z^2+5i$; $z_0=-i$;

b) $f(z)=z^2+\cos(30)$; $z_0=i$.

Завдання 4. Знайти точки розриву функції:

a) $f(z)=\dfrac{z}{z^2+tg(30)}$;

b) $f(z)=\dfrac{z}{z^2+i^2+z+12i}$.

Варіант 22

Завдання 1. Користуючись означенням границі, довести, що:

a) $\lim_{z\to 3}(3z-8)=1$;

b) $\lim_{z\to 1-i}\dfrac{z^2+2i}{z}=0$.

Завдання 2. Знайти границі функції:

a) $\lim_{z\to 0}\dfrac{(z-2)(z+1)(z+4)+8}{z}$;

b) $\lim_{z\to\infty}\dfrac{z*\cos(45)}{z+1}$.

Завдання 3. Користуючись означенням неперервності функції довести неперервність заданих функції у вказаних точках z_0:

a) $f(z)=2z-2z^2+10i$; $z_0=-i$;

b) $f(z)=2z^2+2\cos(30)$; $z_0=i$.

Завдання 4. Знайти точки розриву функції:

a) $f(z)=\dfrac{z}{z^2+\sin(30)}$;

b) $f(z)=\dfrac{z}{z^5+z^4+z+5}$.

Варіант 23

Завдання 1. Користуючись означенням границі, довести, що:

a) $\lim_{z\to 2i+3}(z^2+3-12i)=1$;

b) $\lim_{z\to 2-i}\dfrac{z^2+2i}{z}=\dfrac{2i-3}{i-2}$.

Завдання 2. Знайти границі функції:

a) $\lim_{z\to 0}\dfrac{(z-2)(z+1)^3+8z}{z^2}$;

b) $\lim_{z\to\infty}\dfrac{z*\sin(45)}{z^2+1}$.

Завдання 3. Користуючись означенням неперервності функції довести неперервність заданих функції у вказаних точках z_0:

a) $f(z)=3z-3z^2+15i$; $z_0=-i$;

b) $f(z)=3z^2+3\cos(30)$; $z_0=i$.

Завдання 4. Знайти точки розриву функції:

a) $f(z)=\dfrac{z}{z^2+\cos(30)}$;

b) $f(z)=\dfrac{z}{z^5+2z^2+z+5}$.

Варіант 24

Завдання 1. Користуючись означенням границі, довести, що:

a) $\lim_{z\to 3}(3z-8)=1$;

b) $\lim_{z\to 1-2i}\dfrac{z^2+2i}{z}=\dfrac{2i+3}{2i-1}$.

Завдання 2. Знайти границі функції:

a) $\lim_{z\to 0}\dfrac{(z-2)+tg(z)}{z}$;

b) $\lim_{z\to\infty}\dfrac{tg(1)}{z^2+1}$.

Завдання 3. Користуючись означенням неперервності функції довести неперервність заданих функції у вказаних точках z_0:

a) $f(z) = 2z - 2z^2 + 8i$; $z_0 = -i$;

b) $f(z) = 2z^2 + \cos(45)$; $z_0 = i$.

Завдання 4. Знайти точки розриву функції:

a) $f(z) = \dfrac{z}{z^2 + \cos(60)}$;

b) $f(z) = \dfrac{z}{8z^5 + 2z^2 + 8i + 5}$.

<u>Варіант 25</u>

Завдання 1. Користуючись означенням границі, довести, що:

a) $\lim_{z \to 5i+3}(z^2 + 17 - 30i) = 1$;

b) $\lim_{z \to 2-2i} \dfrac{z^2 + 2i}{z} = \dfrac{3i}{i-1}$.

Завдання 2. Знайти границі функції:

a) $\lim_{z \to 0} \dfrac{(2z-2)^5}{z}$;

b) $\lim_{z \to \infty} \dfrac{z^3 + 2z^2 + 3z + 4}{7z^2 + 1}$.

Завдання 3. Користуючись означенням неперервності функції довести неперервність заданих функції у вказаних точках z_0:

a) $f(z) = 2z - 2z^2 + 8i + 4$; $z_0 = -i$;

b) $f(z) = 2z^2 + \sin(90)$; $z_0 = i$.

Завдання 4. Знайти точки розриву функції:

a) $f(z) = \dfrac{z}{z^2 + \sin(60)}$;

b) $f(z) = \dfrac{z}{5z^9 + 81 + 42i}$.

<u>Варіант 26</u>

Завдання 1. Користуючись означенням границі, довести, що:

a) $\lim_{z \to 4+i}(z^2 - 14 - 8i) = 1$;

b) $\lim_{z \to 2-3i} \dfrac{z^2 + 2i}{z} = \dfrac{10i + 5}{3i - 2}$.

Завдання 2. Знайти границі функції:

a) $\lim_{z\to 0}\dfrac{(12z-8)(z+1)^2}{6z+3}$;

b) $\lim_{z\to 7}\dfrac{(z+1)^2}{z^2+1}$.

Завдання 3. Користуючись означенням неперервності функції довести неперервність заданих функції у вказаних точках z_0:

a) f(z)=z^2+2; z_0=-i;

b) f(z)=$\dfrac{z-1}{z+1}$; z_0=i.

Завдання 4. Знайти точки розриву функції:

a) $f(z)=\dfrac{z}{z^2+z+\sin(60)}$;

b) $f(z)=\dfrac{z}{z^3+62+7i}$.

Варіант 27

Завдання 1. Користуючись означенням границі, довести, що:

a) $\lim_{z\to 3+i}(z-2-i)=1$;

b) $\lim_{z\to 3-2i}\dfrac{z^2+2i}{z}=\dfrac{10i-5}{2i-3}$.

Завдання 2. Знайти границі функції:

a) $\lim_{z\to 6}\dfrac{(z^3-2)(z^2+1)(z+4)-7}{z^3+z^2+z+1}$;

b) $\lim_{z\to 35}\dfrac{z+1}{18}$.

Завдання 3. Користуючись означенням неперервності функції довести неперервність заданих функції у вказаних точках z_0:

a) $f(z)=2z+8i+4$; $z_0=-i$;

b) $f(z)=3z^2+ctg(90)$; $z_0=i$.

Завдання 4. Знайти точки розриву функції:

a) $f(z)=\dfrac{z}{z^3+z^2+\cos(60)}$;

b) $f(z)=\dfrac{z}{z^3+\cos(60)+6z^2+7i}$.

<u>Варіант 28</u>

Завдання 1. Користуючись означенням границі, довести, що:

a) $\lim_{z\to 3i+5}(3z-9i-14)=1$;

b) $\lim_{z\to 1-i}\dfrac{z^2+2i}{z+2i}=0$.

Завдання 2. Знайти границі функції:

a) $\lim_{z\to 0}\dfrac{(z-2)*z^5}{z+5}$;

b) $\lim_{z\to\infty^{-1}}\dfrac{z^7-8z}{4z^2+1}$.

Завдання 3. Користуючись означенням неперервності функції довести неперервність заданих функції у вказаних точках z_0:

a) $f(z)=2z+8i+4\cos(60)$; $z_0=-i$;

b) $f(z)=z^2+ctg(45)$; $z_0=i$.

Завдання 4. Знайти точки розриву функції:

a) $f(z)=\dfrac{z}{z^3+z^2+i\cos(60)}$;

b) $f(z)=\dfrac{z}{z^3+ctg^2(60)}$.

<u>Варіант 29</u>

Завдання 1. Користуючись означенням границі, довести, що:

a) $\lim_{z\to 8-i}(z-7+i)=1$;

b) $\lim_{z\to 1-2i}\dfrac{z^2+2i}{z+2i}=-2i-3$.

Завдання 2. Знайти границі функції:

a) $\lim_{z\to 0}\dfrac{1}{z}$;

b) $\lim_{z\to 8}\dfrac{z^3-8z}{z+1}$.

Завдання 3. Користуючись означенням неперервності функції довести неперервність заданих функції у вказаних точках z_0:

a) $f(z)=2z^2+8i+4tg(45)$; $z_0=-i$;

b) $f(z)=3z^3+\sin(45)$; $z_0=i$.

Завдання 4. Знайти точки розриву функції:

a) $f(z)=\dfrac{z}{2z^3+3z^2+i\cos(60)}$;

b) $f(z)=\dfrac{z}{z^3+z^2+z+ctg^2(60)}$.

Варіант 30

Завдання 1. Користуючись означенням границі, довести, що:

a) $\lim_{z\to 8i+2}(z-8i-1)=1$;

b) $\lim_{z\to 2-2i}\dfrac{z^2+2i}{z+2i}=-3i$.

Завдання 2. Знайти границі функції:

a) $\lim_{z\to 3}\dfrac{(z-2)(z+1)(z+4)+8}{z+8-z^3}$;

b) $\lim_{z\to\infty}\dfrac{arctg(z)}{arcctg(z)}$.

Завдання 3. Користуючись означенням неперервності функції довести неперервність заданих функції у вказаних точках z_0:

a) $f(z)=2z^2+8zi+tg(45)$; $z_0=-i$;

b) $f(z)=3z^3+z+\sin(45)$; $z_0=i$.

Завдання 4. Знайти точки розриву функції:

a) $f(z)=\dfrac{z}{zi+z^3+5i}$;

b) $f(z)=\dfrac{z}{zi+z^2 i+5}$.

Зразок виконання лабораторної роботи 3

*Завдання 1.*Користуючись означенням границі, довести, що:

a) $\lim_{z\to 2}(3z-5)=1$

b) $\lim_{z\to 1-i}\dfrac{1}{z+2i}=\dfrac{1-i}{2}$

*Завдання 2.*Знайти границі функції:

a) $\lim_{z\to 0}\dfrac{(z-2)(z+1)(z+4)+8}{z}$

b) $\lim_{z\to\infty}\dfrac{z^3-3z+1}{z^2+1}$

*Завдання 3.*Користуючись означенням неперервності функції довести неперервність заданих функції у вказаних точках z_0:

a) $f(z)=z^2+2$; $z_0=-i$

b) $f(z)=\dfrac{z-1}{z+1}$; $z_0=i$

*Завдання 4.*Знайти точки розриву функції:

a) $f(z)=\dfrac{z}{z^2-2z+2}$

b) $f(z)=\dfrac{z}{z^2+4}$

Завдання 1. Розв'язок:

Число ω називається границею $f(z)$ в точці $z_0\in D$, якщо для кожного $\varepsilon>0$ існує таке, $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ що виконуються нерівність: $\left|f(z)-\omega_0\right|<\varepsilon$ для усіх z із δ-околу точки z_0, тобто $\left|z-z_0<\delta\right|$. Позначається так: $\lim_{z\to z_0} f(z)=\omega_0$.

a) Знайдемо задану границю:

```
(%i1) limit(3*z-5,z,2);
(%o1) 1
```

Відповідь збігається. Отже, тведження доведено.

b) Знайдемо задану границю:

```
(%i2) limit((1/(z+2*%i)),z,(1-%i));
(%o2)   1
      ------
      %i + 1
```

$$\frac{1}{i+1}\equiv\frac{1(i-1)}{(i+1)(i-1)}\equiv\frac{i-1}{2}$$

Відповідь збігається. Отже, тведження доведено.

Завдання 2. Розв'язок:

Знайдемо задану границю:

a) $\lim_{z\to 0}\dfrac{(z-2)(z+1)(z+4)+8}{z}$

```
(%i3) limit(((z-2)*(z+1)*(z+4)+8)/z,z,0);
(%o3) -6
```

b) $\lim_{z\to\infty}\dfrac{z^3-3z+1}{z^2+1}$

```
(%i4) limit((z^3-3*z+1)/(z^2+1),z,inf);
(%o4) ∞
```

Завдання 3. Розв'язок:

Однозначна функція називається неперервною в точці, якщо вона визначена в точці і в її околі та виконується рівність $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.

a) Знайдемо границю заданої функції:

```
(%i5) limit(z^2+2,z,-%i);
(%o5) 1
```

Задамо функцію та знайдемо її значення в точці z_0:

```
(%i6) f(z):=z^2+2;
      ev(f(z),z=-%i);
(%o6) f(z):=z^2+2
(%o7) 1
```

Оскільки рівність виконується, то функція в точці z_0 неперервна.

b) Знайдемо границю заданої функції:

```
(%i8) limit((z-1)/(z+1),z,%i);
```

(%o8) $-\dfrac{\%i+1}{\%i-1}$

(%i9) ratsimp(%);

(%o9) $-\frac{\%i+1}{\%i-1}$

Задамо функцію та знайдемо її значення в точці z_0 :

(%i10) f(z):=(z-1)/(z+1);

(%o10) $f(z):=\frac{z-1}{z+1}$

(%i11) ev(f(z),z=%i);

(%o11) $\frac{\%i-1}{\%i+1}$

$$-\frac{i+1}{i-1}=\frac{i-1}{i+1}$$

Отже, рівність виконується і функція в точці z_0 неперервна.

Завдання 4. Розв'язок:

Функція має розриви в точках – коренях рівняння отриманого шляхом прирівняння знаменника до нуля, отже:

а) Задамо рівняння:

(%i12) eq:z^2-2*z+2=0;

(%o12) $z^2-2\ z+2=0$

Знайдемо його корені:

(%i13) solve(eq,z);

(%o13) $[z=1-\%i, z=\%i+1]$

Отже, функція має розриви в точках $z=1-i, z=1+i$;

b) Задамо рівняння:

(%i14) eq:z^2+4=0;

(%o14) $z^2+4=0$

Знайдемо його корені:

```
(%i15) solve(eq,z);
(%o15) [z=-2 %i, z=2 %i]
```

Отже, функція має розриви в точках $z = -2i, z = 2i$.

Лабораторна робота 4

Тема роботи: **«Диференційовність функції комплексної змінної»**
Мета роботи: навчитись досліджувати функції комплексної змінної на диференційовність, аналітичність та гармонічність використовуючи програму Maxima.
Завдання:

Варіант 1

Завдання 1. Дослідити функцію комплексної змінної на аналітичність: $w(z) = z \cdot \sin(x)$.

Завдання 2. Дослідити функцію комплексної змінної на гармонічність $u(x, y) = e^{z}$.

Завдання 3. Перевірити пари гармонічних функцій на спряженість:

$$u(x, y) = \cos(y),\ v(x, y) = \sin(y).$$

Завдання 4. Знайти коефіцієнт розтягу r і кут повороту φ при заданих відображеннях $w(z)$ в заданих точках: $w(z) = \cos(z),\ z_0 = 0$.

Варіант 2

Завдання 1. Дослідити функцію комплексної змінної на аналітичність: $w(z) = z^2 \cdot \operatorname{Re} z$.

Завдання 2. Дослідити функцію комплексної змінної на гармонічність: $u(x, y) = |z|$.

Завдання 3. Перевірити пари гармонічних функцій на спряженість:

$$u(x, y) = x,\ v(x, y) = -y.$$

Завдання 4. Знайти коефіцієнт розтягу r і кут повороту φ при заданих відображеннях $w(z)$ в заданих точках: $w(z) = z \cdot e^{z},\ z_0 = 2 + i$.

Варіант 3

Завдання 1. Дослідити функцію комплексної змінної на аналітичність: $w(z) = 2z \cdot \bar{z}$.

Завдання 2. Дослідити функцію комплексної змінної на гармонічність: $v(x, y) = 2e^{x} \cdot \sin(y)$.

Завдання 3. Перевірити пари гармонічних функцій на спряженість:

$$u(x,y)=y^2+x^2,\ v(x,y)=0.$$

Завдання 4. Знайти коефіцієнт розтягу r і кут повороту φ при заданих відображеннях $w(z)$ в заданих точках: $w(z)=\cos(z)$, $z_1=2-i$, $z_2=4+4i$.

Варіант 4

Завдання 1. Дослідити функцію комплексної змінної на аналітичність: $w(z)=\dfrac{\operatorname{Re} z}{z}$.

Завдання 2. Дослідити функцію комплексної змінної на гармонічність: $u(x,y)=x^2+y^2+xy$.

Завдання 3. Перевірити пари гармонічних функцій на спряженість:

$$u(x,y)=x^2,\ v(x,y)=y.$$

Завдання 4. Знйти коефіцієнт розтягу r і кут повороту φ при заданих відображеннях $w(z)$ в заданих точках: $w(z)=|z|\cdot\operatorname{Re}\bar{z}$, $z_1=1+i$, $z_2=0$.

Варіант 5

Завдання 1. Дослідити функцію комплексної змінної на аналітичність: $w(z)=(1-2i)z^3$.

Завдання 2. Дослідити функцію комплексної змінної на гармонічність: $u(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$.

Завдання 3. Перевірити пари гармонічних функцій на спряженість:

$$u(x,y)=3y^2+xy,\ v(x,y)=3(x^2-2y).$$

Завдання 4. Знайти коефіцієнт розтягу r і кут повороту φ при заданих відображеннях $w(z)$ в заданих точках: $w(z)=z^3$, $z_1=2-i$, $z_2=1+i\dfrac{\pi}{2}$.

Варіант 6

Завдання 1. Дослідити функцію комплексної змінної на аналітичність: $w(z)=2\bar{z}\cdot\sin(z)$.

Завдання 2. Дослідити функцію комплексної змінної на гармонічність: $v(x,y)=e^x\cdot\dfrac{x+4y^2}{x-1}$.

Завдання 3. Перевірити пари гармонічних функцій на спряженість:

$$u(x,y)=-\frac{x}{x^2+y^2},\ v(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Завдання 4. Знайти коефіцієнт розтягу r і кут повороту φ при заданих відображеннях $w(z)$ в заданих точках: $w(z)=2e^z$, $z_1=\ln 2+i\cdot\pi$, $z_2=1+i$.

Варіант 7

Завдання 1. Дослідити функцію комплексної змінної на аналітичність: $w(z)=2z^2\cdot\bar{z}$.

Завдання 2. Дослідити функцію комплексної змінної на гармонічність: $v(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$.

Завдання 3. Перевірити пари гармонічних функцій на спряженість:

$$u(x,y)=2xy+3, v(x,y)=xy.$$

Завдання 4. Знайти коефіцієнт розтягу r і кут повороту φ при заданих відображеннях $w(z)$ в заданих точках: $w(z)=z\operatorname{Re}\bar{z}$, $z_0=2+i$.

Варіант 8

Завдання 1. Дослідити функцію комплексної змінної на аналітичність: $w(z)=2\cdot\bar{z}$.

Завдання 2. Дослідити функцію комплексної змінної на гармонічність: $v(x,y)=2e^x$.

Завдання 3. Перевірити пари гармонічних функцій на спряженість:

$$u(x,y)=x^3-3xy,\ v(x,y)=2e^x\sin(y).$$

Завдання 4. Знайти коефіцієнт розтягу r і кут повороту φ при заданих відображеннях $w(z)$ в заданих точках: $w(z)=-\sin(z)$, $z_1=2-2i$, $z_2=4i$.

Варіант 9

Завдання 1. Дослідити функцію комплексної змінної на аналітичність: $w(z) = z \cdot \operatorname{Im} z$.

Завдання 2. Дослідити функцію комплексної змінної на гармонічність: $v(x, y) = ze^z$.

Завдання 3. Перевірити пари гармонічних функцій на спряженість:

$$u(x, y) = \ln(x^2 + y^2),\ v(x, y) = 2e^x \sin(y).$$

Завдання 4. Знайти коефіцієнт розтягу r і кут повороту φ при заданих відображеннях $w(z)$ в заданих точках: $w(z) = \cos(z),\ z_0 = -2i$.

Варіант 10

Завдання 1. Дослідити функцію комплексної змінної на аналітичність: $w(z) = 2|z|$.

Завдання 2. Дослідити функцію комплексної змінної на гармонічність: $u(x, y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$.

Завдання 3. Перевірити пари гармонічних функцій на спряженість:

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2},\ v(x, y) = 2(ch(x)\sin(y) - xy).$$

Завдання 4. Знайти коефіцієнт розтягу r і кут повороту φ при заданих відображеннях $w(z)$ в заданих точках: $w(z) = -\cos(z),\ z_1 = 2 - i,\ z_2 = 1 - i$

Варіант 11

Завдання 1. Дослідити функцію комплексної змінної на аналітичність: $w(z) = |z|^2$.

Завдання 2. Дослідити функцію комплексної змінної на гармонічність: $v(x, y) = 2e^z \cdot \cos(y)$.

Завдання 3. Перевірити пари гармонічних функцій на спряженість:

$$u(x, y) = 3(x^2 - y^2),\ v(x, y) = 3x^2y - y^3.$$

Завдання 4. Знайти коефіцієнт розтягу r і кут повороту φ при заданих відображеннях $w(z)$ в заданих точках: $w(z) = |z|,\ z_1 = 5 + 2i,\ z_2 = \ln 2 + i\frac{\pi}{4}$.

Варіант 12

Завдання 1. Дослідити функцію комплексної змінної на аналітичність: $w(z) = 2z^2$.

Завдання 2. Дослідити функцію комплексної змінної на гармонічність: $u(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$.

Завдання 3. Перевірити пари гармонічних функцій на спряженість:

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} + 2y,\ v(x, y) = xy.$$

Завдання 4. Знайти коефіцієнт розтягу r і кут повороту φ при заданих відображеннях $w(z)$ в заданих точках: $w(z) = |z|\cos(z)$, $z_1 = \ln 2 + i\dfrac{\pi}{4}$, $z_2 = -1 - i\dfrac{\pi}{4}$.

Варіант 13

Завдання 1. Дослідити функцію комплексної змінної на аналітичність: $w(z) = |z|^2$.

Завдання 2. Дослідити функцію комплексної змінної на гармонічність: $v(x, y) = 2e^z \cdot \cos(y)$.

Завдання 3. Перевірити пари гармонічних функцій на спряженість:

$$u(x, y) = 3(x^2 - y^2),\ v(x, y) = 2e^x \cdot \sin(y).$$

Завдання 4. Знайти коефіцієнт розтягу r і кут повороту φ при заданих відображеннях $w(z)$ в заданих точках: $w(z) = -|z|$, $z_0 = 5 + 2i$.

Варіант 14

Завдання 1. Дослідити функцію комплексної змінної на аналітичність: $w(z) = 2|z|^2 \cdot \cos(x)$.

Завдання 2. Дослідити функцію комплексної змінної на гармонічність: $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$.

Завдання 3. Перевірити пари гармонічних функцій на спряженість:

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 2,\ v(x, y) = 3x^2y - y^3.$$

Завдання 4. Знайти коефіцієнт розтягу r і кут повороту φ при заданих відображеннях $w(z)$ в заданих точках: $w(z)=|z|\cos(z)$, $z_0=1-i\dfrac{\pi}{2}$.

Варіант 15

Завдання 1. Дослідити функцію комплексної змінної на аналітичність: $w(z)=|z|\cdot\bar{z}$.

Завдання 2. Дослідити функцію комплексної змінної на гармонічність: $u(x,y)=x^2-y^2+xy$.

Завдання 3. Перевірити пари гармонічних функцій на спряженість:

$$u(x,y)=arctg\left(\frac{y}{x}\right),\ v(x,y)=xy.$$

Завдання 4. Знайти коефіцієнт розтягу r і кут повороту φ при заданих відображеннях $w(z)$ в заданих точках: $w(z)=\operatorname{Re} z$, $z_1=0$, $z_2=\ln 2+3i$.

Варіант 16

Завдання 1. Дослідити функцію комплексної змінної на аналітичність: $w(z)=|z|\cdot z^2\cdot\sin(x)$.

Завдання 2. Дослідити функцію комплексної змінної на гармонічність: $u(x,y)=e^z\cdot\ln z$.

Завдання 3. Перевірити пари гармонічних функцій на спряженість:

$$u(x,y)=\cos(y),\ v(x,y)=-\sin(y).$$

Завдання 4. Знайти коефіцієнт розтягу r і кут повороту φ при заданих відображеннях $w(z)$ в заданих точках: $w(z)=z\cos(x)$, $z_0=2-i$.

Варіант 17

Завдання 1. Дослідити функцію комплексної змінної на аналітичність: $w(z)=z^3\cdot\operatorname{Im} z$.

Завдання 2. Дослідити функцію комплексної змінної на гармонічність: $v(x,y)=x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3$.

Завдання 3. Перевірити пари гармонічних функцій на спряженість:

$$u(x,y)=x,\ v(x,y)=2xy.$$

Завдання 4. Знайти коефіцієнт розтягу r і кут повороту φ при заданих відображеннях $w(z)$ в заданих точках: $w(z) = e^z \cos(z)$, $z_0 = 5 - 2i$.

Варіант 18

Завдання 1. Дослідити функцію комплексної змінної на аналітичність: $w(z) = 2\bar{z}^2$.

Завдання 2. Дослідити функцію комплексної змінної на гармонічність: $v(x, y) = xy$.

Завдання 3. Перевірити пари гармонічних функцій на спряженість:

$$u(x, y) = y^2 + x^2,\ v(x, y) = 2xy.$$

Завдання 4. Знайти коефіцієнт розтягу r і кут повороту φ при заданих відображеннях $w(z)$ в заданих точках: $w(z) = \sin(z) - \cos(z)$, $z_1 = \ln 1 - i$, $z_2 = 4 + 4i$.

Варіант 19

Завдання 1. Дослідити функцію комплексної змінної на аналітичність: $w(z) = \frac{\operatorname{Im} z}{z^2}$.

Завдання 2. Дослідити функцію комплексної змінної на гармонічність: $u(x, y) = x^2 - y^2 - xy$.

Завдання 3. Перевірити пари гармонічних функцій на спряженість:

$$u(x, y) = x,\ v(x, y) = y.$$

Завдання 4. Знйти коефіцієнт розтягу r і кут повороту φ при заданих відображеннях $w(z)$ в заданих точках: $w(z) = |z| \cdot \operatorname{Re} \bar{z}$, $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 0$.

Варіант 20

Завдання 1. Дослідити функцію комплексної змінної на аналітичність: $w(z) = (1 - 2i)z^3$.

Завдання 2. Дослідити функцію комплексної змінної на гармонічність: $u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$.

Завдання 3. Перевірити пари гармонічних функцій на спряженість:

$$u(x, y) = 3y^2 + xy,\ v(x, y) = 3(x^2 - 2y).$$

Завдання 4. Знайти коефіцієнт розтягу r і кут повороту φ при заданих відображеннях $w(z)$ в заданих точках: $w(z)=z^3$, $z_1=2-i$, $z_2=1+i\dfrac{\pi}{2}$.

Варіант 21

Завдання 1. Дослідити функцію комплексної змінної на аналітичність: $w(z)=2\bar{z}\cdot\sin(z)$.

Завдання 2. Дослідити функцію комплексної змінної на гармонічність: $v(x,y)=e^x\cdot\dfrac{x+4y^2}{x-1}$.

Завдання 3. Перевірити пари гармонічних функцій на спряженість:

$$u(x,y)=-\frac{x}{x^2+y^2},\ v(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Завдання 4. Знайти коефіцієнт розтягу r і кут повороту φ при заданих відображеннях $w(z)$ в заданих точках: $w(z)=2e^z$, $z_1=\ln 2+i\cdot\pi$, $z_2=1+i$.

Варіант 22

Завдання 1. Дослідити функцію комплексної змінної на аналітичність: $w(z)=2\bar{z}^2$.

Завдання 2. Дослідити функцію комплексної змінної на гармонічність: $v(x,y)=-\dfrac{x}{x^2+y^2}$.

Завдання 3. Перевірити пари гармонічних функцій на спряженість:

$$u(x,y)=4xy+3,\ v(x,y)=-xy.$$

Завдання 4. Знайти коефіцієнт розтягу r і кут повороту φ при заданих відображеннях $w(z)$ в заданих точках: $w(z)=z\,\mathrm{Im}\,\bar{z}$, $z_0=2+i$.

Варіант 23

Завдання 1. Дослідити функцію комплексної змінної на аналітичність: $w(z)=3\cdot\bar{z}\cdot\sin(z)$.

Завдання 2. Дослідити функцію комплексної змінної на гармонічність: $v(x,y)=3e^y$.

Завдання 3. Перевірити пари гармонічних функцій на спряженість:

$$u(x,y) = x^3 - 3xy,\ v(x,y) = 2e^x \sin(y).$$

Завдання 4. Знайти коефіцієнт розтягу r і кут повороту φ при заданих відображеннях $w(z)$ в заданих точках: $w(z) = -z\sin(z)$, $z_1 = 2-2i$, $z_2 = 4i$.

Варіант 24

Завдання 1. Дослідити функцію комплексної змінної на аналітичність: $w(z) = z \cdot \operatorname{Im} z$.

Завдання 2. Дослідити функцію комплексної змінної на гармонічність: $v(x,y) = z^2 e^x$.

Завдання 3. Перевірити пари гармонічних функцій на спряженість:

$$u(x,y) = \ln(x^2 + y^2),\ v(x,y) = xy.$$

Завдання 4. Знайти коефіцієнт розтягу r і кут повороту φ при заданих відображеннях $w(z)$ в заданих точках: $w(z) = z \cdot \cos(z)$, $z_0 = 2i$.

Варіант 25

Завдання 1. Дослідити функцію комплексної змінної на аналітичність: $w(z) = 2|z|$.

Завдання 2. Дослідити функцію комплексної змінної на гармонічність: $u(x,y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$.

Завдання 3. Перевірити пари гармонічних функцій на спряженість:

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2},\ v(x,y) = 2(ch(x)\sin(y) - xy).$$

Завдання 4. Знайти коефіцієнт розтягу r і кут повороту φ при заданих відображеннях $w(z)$ в заданих точках: $w(z) = -\cos(z)$, $z_1 = 2 - i$, $z_2 = 1 - i$

Варіант 26

Завдання 1. Дослідити функцію комплексної змінної на аналітичність: $w(z) = 3|z|^2 \cdot \cos(x)$.

Завдання 2. Дослідити функцію комплексної змінної на гармонічність: $v(x,y) = 2e^z \cdot |z|$.

Завдання 3. Перевірити пари гармонічних функцій на спряженість:

$$u(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2},\ v(x,y)=3x^2y-y^3.$$

Завдання 4. Знайти коефіцієнт розтягу r і кут повороту φ при заданих відображеннях $w(z)$ в заданих точках: $w(z)=|z|^2\cos(z),\ z_0=2+i\dfrac{\pi}{2}$.

Варіант 27

Завдання 1. Дослідити функцію комплексної змінної на аналітичність: $w(z)=2z^2$.

Завдання 2. Дослідити функцію комплексної змінної на гармонічність:

$$u(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}-2y.$$

Завдання 3. Перевірити пари гармонічних функцій на спряженість:

$$u(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2},\ v(x,y)=2e^x\sin(y).$$

Завдання 4. Знайти коефіцієнт розтягу r і кут повороту φ при заданих відображеннях $w(z)$ в заданих точках: $w(z)=\cos(|z|),\ z_0=\ln 2+i\dfrac{\pi}{4}$.

Варіант 28

Завдання 1. Дослідити функцію комплексної змінної на аналітичність: $w(z)=|z|^2$.

Завдання 2. Дослідити функцію комплексної змінної на гармонічність: $v(x,y)=2e^z\cdot\cos(y)$.

Завдання 3. Перевірити пари гармонічних функцій на спряженість:

$$u(x,y)=3\left(x^2-y^2\right),\ v(x,y)=2e^x\cdot\sin(y).$$

Завдання 4. Знайти коефіцієнт розтягу r і кут повороту φ при заданих відображеннях $w(z)$ в заданих точках: $w(z)=|z|^3,\ z_0=5+2i$.

Варіант 29

Завдання 1. Дослідити функцію комплексної змінної на аналітичність: $w(z)=\bar{z}\cdot\sin(y)$.

Завдання 2. Дослідити функцію комплексної змінної на гармонічність: $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$.

Завдання 3. Перевірити пари гармонічних функцій на спряженість:

$$u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 2,\ v(x,y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3.$$

Завдання 4. Знайти коефіцієнт розтягу r і кут повороту φ при заданих відображеннях $w(z)$ в заданих точках: $w(z) = |z|\cos(z)$, $z_0 = 1 - i\dfrac{\pi}{2}$.

Варіант 30

Завдання 1. Дослідити функцію комплексної змінної на аналітичність: $w(z) = \operatorname{Re} z \cdot |z| \cdot \bar{z}$.

Завдання 2. Дослідити функцію комплексної змінної на гармонічність: $u(x,y) = x^2 - y^2 - xy$.

Завдання 3. Перевірити пари гармонічних функцій на спряженість:

$$u(x,y) = x^2,\ v(x,y) = xy.$$

Завдання 4. Знайти коефіцієнт розтягу r і кут повороту φ при заданих відображеннях $w(z)$ в заданих точках: $w(z) = \operatorname{Im} z$, $z_1 = 0$, $z_2 = \ln 2 + 3i$.

Зразок виконання лабораторної роботи 4

Завдання 1. Дослідити функцію комплексної змінної на аналітичність: $w(z) = z \cdot \cos(z)$.

Завдання 2. Дослідити функцію комплексної змінної на гармонічність: $u(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$.

Завдання 3. Перевірити пари гармонічних функцій на спряженість:

$$u(x,y) = -y,\ v(x,y) = x.$$

Завдання 4. Знайти коефіцієнт розтягу r і кут повороту φ при заданих відображеннях $w(z)$ в заданих точках: $w(z) = \sin(z)$, $z_1 = 0$, $z_2 = 1 + i$.

Завдання 1. Розв'язок:

Знайдемо уявну і дійсну частини функції комплексної змінної

```
(%i3)   z: x+y*%i;
(z)     %i y+x
(%i4)   w: z*cos(z);
(w)     (%i y+x) cos(%i y+x)
(%i5)   u: realpart(w);
(u)     sin(x) y sinh(y)+x cos(x) cosh(y)
(%i6)   v: imagpart(w);
(v)     cos(x) y cosh(y)-x sin(x) sinh(y)
```

Використовуючи умову Коші-Рімана перевіряємо функцію на аналітичність.

Умова Коші-Рімана:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial y}.$$

```
(%i7)   d1: diff(u,x);
(d1)    cos(x) y sinh(y)-x sin(x) cosh(y)+cos(x) cosh(y)
(%i8)   d2: diff(v,y);
(d2)    cos(x) y sinh(y)-x sin(x) cosh(y)+cos(x) cosh(y)
(%i10)  d3: diff(u,y);
(d3)    sin(x) sinh(y)+x cos(x) sinh(y)+sin(x) y cosh(y)
(%i9)   d4: diff(v,x);
(d4)    -sin(x) sinh(y)-x cos(x) sinh(y)-sin(x) y cosh(y)
```

Як бачимо $d1=d2$ та $d3=-d4$. Отже функція є аналітичною.

Завдання 2. Розв'язок:

Проініціалізуємо змінну значенням функції:

```
→       u: log(x^2 + y^2);
(u)     log(y^2+x^2)
```

Використовуючи рівняння Лапласа, зясуємо чи є функція гармонічною.

Рівняння Лапласа: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

Завдання 3. Розв'язок:

```
→        d1: diff(u,x,2);
(%i1)    u: -y;
(u)      -y
(%i2)    v: x;
(v)      x
```

$$\text{(d2)}\quad \frac{2}{y^2+x^2}-\frac{4\,y}{\left(y^2+x^2\right)^2}$$

```
→        d1 + d2;
```

$$\text{(\%o25)}\quad \frac{4}{y^2+x^2}-\frac{4\,y^2}{\left(y^2+x^2\right)^2}-\frac{4\,x^2}{\left(y^2+x^2\right)^2}$$

Проініціалізуємо змінні відповідними значеннями:

Гармонічні функції $u(x,y)$ та $v(x,y)$ називають спряженими, якщо для них виконуються умови Коші – Рімана.

```
(%i4)    d1: diff(u,x);
(d1)     0
(%i5)    d2: diff(v,y);
(d2)     0
(%i6)    d3: diff(u,y);
(d3)     -1
(%i7)    d4: diff(v,x);
(d4)     1
```

Як бачимо $d1 = d2$ та $d3 = -d4$. Отже функції є спряженими.

Завдання 4. Розв'язок:

Проініціалізуємо змінні відповідними значеннями:

```
→        w: sin(z);
(w)      sin(z)

→        z1: 0;
(z1)     0

→        z2: 1+ %i;
(z2)     %i+1
```

Знайдемо коефіцієнт розтягу r за формулою:

$$r = |f'(z_k)|.$$

```
(%i4)    W: diff(w,z);
(W)      cos(z)

(%i5)    f1: W, z = z1;
(f1)     1

(%i7)    f1abs: abs(f1);
(f1abs)  1

(%i8)    f2: W, z = z2;
(f2)     cos(%i+1)

(%i9)    f2abs: abs(f2);
(f2abs)  |cos(%i+1)|
```

Та знайдемо кут повороту за формулою:

$$\varphi = \arg(f'(z_k)).$$

```
(%i10)   phi1: atan(imagpart(f1)/realpart(f1));
(phi1)   0

(%i11)   phi2: atan(imagpart(f2)/realpart(f2));
(phi2)   -atan(sin(1) sinh(1) / (cos(1) cosh(1)))
```

Лабораторна робота 5

Тема роботи: **«Інтегрування функції комплексної змінної»**
Мета роботи: навчитись обчислювати інтеграли функцій комплексної змінної, використовуючи програму Maxima.
Завдання:

<u>Варіант 1</u>

Завдання 1. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C \left((\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2\right)dz$, де C – відрізок прямої, що з'єднує точки $z_1 = 1 + i$ та $z_2 = 2 + 3i$.

Завдання 2. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C z \operatorname{Re} z dz$, де C – коло $|z| = 4$. Обхід проти годинникової стрілки.

Завдання 3. Обчислити інтеграл за допомогою інтегральної формули Коші:

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{tg(z)}{ze^{\frac{1}{z+2}}} dz.$$

<u>Варіант 2</u>

Завдання 1. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C \left(\operatorname{Im} z + i \operatorname{Re} z\right)dz$, де C – ламана, що з'єднує точки $z_1 = 0$, $z_2 = i$, $z_3 = 1 + i$.

Завдання 2. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C \bar{z} \cos z dz$, де C – коло $|z| = 3$. Обхід проти годинникової стрілки.

Завдання 3. Обчислити інтеграл за допомогою інтегральної формули Коші:

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{e^z \cos(\pi z)}{z^2 + 2z} dz.$$

<u>Варіант 3</u>

Завдання 1. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C e^{|z|^2} \operatorname{Re} z dz$, де C – відрізок прямої, що з'єднує точки $z_1 = 0$ та $z_2 = 1 + i$.

Завдання 2. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C \bar{z}dz$, де С – коло $x=\cos t$, $y=\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$.

Завдання 3. Обчислити інтеграл за допомогою інтегральної формули Коші:

$$\int\limits_{|z-1-i|=1} \frac{\sin \pi(z-1)}{z^2-2z+2}dz.$$

Варіант 4

Завдання 1. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C (2z+1)dz$, де С – ламана, що з'єднує точки $z_1 = 1+i$ та $z_2 = -1-i$.

Завдання 2. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C \ln(z+1)dz$, де С – дуга кола $|z|=1$, $\operatorname{Im} z \ge 0$. Обхід проти годинникової стрілки.

Завдання 3. Обчислити інтеграл за допомогою інтегральної формули Коші:

$$\int\limits_{|z|=3} \frac{\cos(z+\pi i)}{z(e^z+2)}dz.$$

Варіант 5

Завдання 1. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C \left(2z^2+3z\right)dz$, де С – ламана, що з'єднує точки $z_1 = 2+i$ та $z_2 = 1-i$.

Завдання 2. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C z^2 \operatorname{Im} \bar{z} dz$, де С – коло $|z|=1$. Обхід за годинниковою стрілкою.

Завдання 3. Обчислити інтеграл за допомогою інтегральної формули Коші:

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{\sin(z)}{e^z - \frac{1}{2}}dz.$$

Варіант 6

Завдання 1. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C \operatorname{Re} z dz$, де C – відрізок прямої $z = t(2+i)$ $0 \le t \le 1$.

Завдання 2. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C \operatorname{Im} z + e^z \operatorname{Re} z dz$, де C – коло $|z|=1$. Обхід за годинниковою стрілкою.

Завдання 3. Обчислити інтеграл за допомогою інтегральної формули Коші:

$$\int\limits_{|z-3|=4} \frac{z+6\cos\pi}{z(z-1)} dz.$$

Варіант 7

Завдання 1. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C \left(\bar{z}^2 + 3\cos z\right) dz$, де C – ламана, що з'єднує точки $z_1 = 1 - i$ та $z_2 = 4 + 2i$.

Завдання 2. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C (\operatorname{Im} \bar{z} + 2z) dz$, де C – коло $|z|=1$. Обхід за годинниковою стрілкою.

Завдання 3. Обчислити інтеграл за допомогою інтегральної формули Коші:

$$\int\limits_{|z|=3} \frac{e^z}{z(z^2-2)} dz.$$

Варіант 8

Завдання 1. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C \left(3z + 2z^3\right) dz$, де C – ламана, що з'єднує точки $z_1 = 2 + 6i$ та $z_2 = -3 + 8i$.

Завдання 2. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C \operatorname{Im} \bar{z} dz$, де C – дуга кола $|z|=1$, $\operatorname{Im} z \ge 0$, $\operatorname{Re} z \ge 0$. Обхід проти годинникової стрілки.

Завдання 3. Обчислити інтеграл за допомогою інтегральної формули Коші:

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{z(z+2)} dz.$$

Варіант 9

Завдання 1. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C \left(z\cos z + z^2\right)dz$, де C – ламана, що з'єднує точки $z_1 = 2+3i$, $z_2 = 1-i$, $z_3 = 4+i$.

Завдання 2. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C \sin z dz$, де C – коло $|z|=1$. Обхід проти годинникової стрілки.

Завдання 3. Обчислити інтеграл за допомогою інтегральної формули Коші:

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{2\cos^2 z}{\sin z} dz.$$

Варіант 10

Завдання 1. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C \left(z^3(z+8) + e^z\right)dz$, де C – ламана, що з'єднує точки $z_1 = 4$ та $z_2 = -i$.

Завдання 2. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C \sin z dz$, де C – дуга кола $|z|=1$, $\operatorname{Im} z \geq 0$, $\operatorname{Re} z \geq 0$. Обхід проти годинникової стрілки.

Завдання 3. Обчислити інтеграл за допомогою інтегральної формули Коші:

$$\int\limits_{|z|=\frac{1}{3}} \frac{9z-3}{ch(z)-1} dz.$$

Варіант 11

Завдання 1. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C \left(2\cos^2\left(z+\frac{\pi}{2}\right)\right)dz$, де C – ламана, що з'єднує точки $z_1 = 1+i$ та $z_2 = -1$.

Завдання 2. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C \cos(z)\cos(\pi)dz$, де C – дуга кола $|z|=1$, $\operatorname{Im} z \geq 0$. Обхід проти годинникової стрілки.

Завдання 3. Обчислити інтеграл за допомогою інтегральної формули Коші:

$$\int\limits_{|z+3|=1} \frac{z^2(z+3)}{\sin z}dz.$$

Варіант 12

Завдання 1. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C e^z \cos(z)dz$, де С – відрізок прямої $z = t(3+2i)$ $2 \le t \le 3$.

Завдання 2. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C z(z+4)dz$, де С – дуга кола $|z|=1$, $\operatorname{Im} z \ge 0$. Обхід проти годинникової стрілки.

Завдання 3. Обчислити інтеграл за допомогою інтегральної формули Коші:

$$\int\limits_{|z+3|=1} \frac{z^2(z+2)}{\sin(z)}dz.$$

Варіант 13

Завдання 1. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C \left(ch(z)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)dz$, де С – ламана, що з'єднує точки $z_1 = 4+3i$ та $z_2 = 2-i$.

Завдання 2. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C \sin z dz$, де С – дуга кола $|z|=1$, $\operatorname{Im} z \ge 0$, $\operatorname{Re} z \ge 0$. Обхід проти годинникової стрілки.

Завдання 3. Обчислити інтеграл за допомогою інтегральної формули Коші:

$$\int\limits_{|z|=\frac{1}{3}} \frac{2z^2e^4}{z(e^z - z)}dz.$$

Варіант 14

Завдання 1. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C \left((z+2)^2 \sin(z)\right)dz$, де С – ламана, що з'єднує точки $z_1 = 1-2i$ та $z_2 = 0$.

Завдання 2. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C ez^4 dz$, де C – дуга кола $|z|=6$, $\mathrm{Im}\, z \ge 0$. Обхід проти годинникової стрілки.

Завдання 3. Обчислити інтеграл за допомогою інтегральної формули Коші:

$$\int\limits_{|z-1|=\frac{e}{3}} \frac{2z^2}{1-\cos z} dz.$$

<u>Варіант 15</u>

Завдання 1. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C (z-e)^3 dz$, де C – ламана, що з'єднує точки $z_1 = 1$ та $z_2 = 2i$.

Завдання 2. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C tg(z) dz$, де C – дуга кола $|z|=\pi$, $\mathrm{Im}\, z \ge 0$, $\mathrm{Re}\, z \ge 0$. Обхід проти годинникової стрілки.

Завдання 3. Обчислити інтеграл за допомогою інтегральної формули Коші:

$$\int\limits_{|z+1|=2} \frac{2z^2 e^z}{z(z+3)} dz.$$

<u>Варіант 16</u>

Завдання 1. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C (z+8)^2 dz$, де C – ламана, що з'єднує точки $z_1 = 9+i$ та $z_2 = 10$.

Завдання 2. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C ze^2 (z+3) dz$, де C – дуга кола $|z|=\pi$, $\mathrm{Im}\, z \ge 0$. Обхід проти годинникової стрілки.

Завдання 3. Обчислити інтеграл за допомогою інтегральної формули Коші:

$$\int\limits_{|z-1|=5} \frac{2z^2+5z}{(z-3)(z+1)} dz.$$

Варіант 17

Завдання 1. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C (z+8)^2 dz$, де С – ламана, що з'єднує точки

$z_1 = 9+i$ та $z_2 = 10$.

Завдання 2. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C ze^2(z+3)dz$, де С – дуга кола $|z| = \pi$, $\operatorname{Im} z \geq 0$. Обхід проти годинникової стрілки.

Завдання 3. Обчислити інтеграл за допомогою інтегральної формули Коші:

$$\int\limits_{|z-1|=5} \frac{2z^2+5z}{(z-3)(z+1)} dz.$$

Варіант 18

Завдання 1. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C (4z+5)dz$, де С – ламана, що з'єднує точки

$z_1 = 1+2i$ та $z_2 = 1-i$.

Завдання 2. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C \ln(z+4)dz$, де С – дуга кола $|z| = 3$, $\operatorname{Im} z \geq 0$. Обхід проти годинникової стрілки.

Завдання 3. Обчислити інтеграл за допомогою інтегральної формули Коші:

$$\int\limits_{|z|=3} \frac{\cos(4z+\frac{\pi i}{3})}{z(e^z+7)} dz.$$

Варіант 19

Завдання 1. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C (4z^3+z)dz$, де С – ламана, що з'єднує точки $z_1 = 2+3i$ та $z_2 = 1+6i$.

Завдання 2. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C z \operatorname{Im} z dz$, де С – коло $|z| = 1$. Обхід за годинниковою стрілкою.

Завдання 3. Обчислити інтеграл за допомогою інтегральної формули Коші:

$$\int\limits_{|z|=3} \frac{\cos(z)}{ze^z}\,dz.$$

Варіант 20

Завдання 1. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C \operatorname{Re}(6z)dz$, де C – відрізок прямої $z = t(2+8i)\;\; 0 \le t \le 1$.

Завдання 2. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C e^z \operatorname{Im} z + \operatorname{Re} z dz$, де C – коло $|z| = 1$. Обхід за годинниковою стрілкою.

Завдання 3. Обчислити інтеграл за допомогою інтегральної формули Коші:

$$\int\limits_{|z-3|=4} \frac{(z^2-1)\left(z+2\sin\frac{2\pi}{3}\right)}{z(z+3)}\,dz.$$

Варіант 21

Завдання 1. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C \left(|\,\bar{z}\,| + \sin z\right)dz$, де C – ламана, що з'єднує точки $z_1 = 1-6i$ та $z_2 = 9+i$.

Завдання 2. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C (\operatorname{Re}\bar{z} + z^2)dz$, де C – коло $|z| = 3$. Обхід за годинниковою стрілкою.

Завдання 3. Обчислити інтеграл за допомогою інтегральної формули Коші:

$$\int\limits_{|z-2|=\frac{1}{8}} \frac{e^z}{z(e^z-5)}\,dz.$$

Варіант 22

Завдання 1. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C \left(2z + 3z^2\right)dz$, де C – ламана, що з'єднує точки $z_1 = 1+i$ та $z_2 = -i$.

Завдання 2. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C \bar{z}dz$, де С – дуга кола $|z|=5$, $\operatorname{Im} z \geq 0$, $\operatorname{Re} z \geq 0$. Обхід проти годинникової стрілки.

Завдання 3. Обчислити інтеграл за допомогою інтегральної формули Коші:

$$\int\limits_{|z-4|=2} \frac{\sin(z)}{z^2-3z-10}dz.$$

<u>Варіант 23</u>

Завдання 1. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C \left(z\sin z + z^5\right)dz$, де С – ламана, що з'єднує точки $z_1 = 3i$, $z_2 = -i$, $z_3 = 2+i$.

Завдання 2. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C z(z+3)dz$, де С – коло $|z|=1$. Обхід проти годинникової стрілки.

Завдання 3. Обчислити інтеграл за допомогою інтегральної формули Коші:

$$\int\limits_{|z|=\frac{\pi}{6}} \frac{\cos^2 z}{3\sin z}dz.$$

<u>Варіант 24</u>

Завдання 1. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C \left(z^7(z+7)+2e^z\right)dz$, де С – ламана, що з'єднує точки $z_1 = 4+2i$ та $z_2 = 7$.

Завдання 2. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C 2\operatorname{Re} z dz$, де С – дуга кола $|z|=1$, $\operatorname{Im} z \geq 0$, $\operatorname{Re} z \geq 0$. Обхід проти годинникової стрілки.

Завдання 3. Обчислити інтеграл за допомогою інтегральної формули Коші:

$$\int\limits_{|z|=\frac{e}{4}} \frac{z-1}{2ch(z)-2}dz.$$

Варіант 25

Завдання 1. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C \left(\sin^2\left(z + \frac{5\pi}{6} \right) \right) dz$, де C – ламана, що з'єднує точки $z_1 = 3 + i$ та $z_2 = 4 + i$.

Завдання 2. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C \sin(z)\sin(\pi)dz$, де C – дуга кола $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z \ge 0$, $\operatorname{Re} z \ge 0$. Обхід за годинниковою стрілкою.

Завдання 3. Обчислити інтеграл за допомогою інтегральної формули Коші:

$$\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{3tg(z)}{ze^{\frac{1}{z+3}}} dz.$$

Варіант 26

Завдання 1. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C e^z \sin(z)dz$, де C – відрізок прямої $z = t(3 + 2i)$ $2 \le t \le 3$.

Завдання 2. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C \bar{z}(z + 2)dz$, де C – дуга кола $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z \ge 0$. Обхід проти годинникової стрілки.

Завдання 3. Обчислити інтеграл за допомогою інтегральної формули Коші:

$$\int\limits_{|z-3|=\frac{2}{3}} \frac{z^2(z+3)}{2\sin z} dz.$$

Варіант 27

Завдання 1. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C (e \cdot ch(3z))dz$, де C – ламана, що з'єднує точки $z_1 = 4 + 3i$ та $z_2 = 2 - i$.

Завдання 2. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C z^3 dz$, де C – дуга кола $|z| = 3$, $\operatorname{Im} z \ge 0$, $\operatorname{Re} z \ge 0$. Обхід проти годинникової стрілки.

Завдання 3. Обчислити інтеграл за допомогою інтегральної формули Коші:

$$\int\limits_{|z-5|=\frac{1}{3}} \frac{2z^2e^4}{z(e^z - z)}dz.$$

Варіант 28

Завдання 1. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C \left((z+5)^2\cos(z)\right)dz$, де C – ламана, що з'єднує точки $z_1 = 1$ та $z_2 = i$.

Завдання 2. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C 3z(z+3)dz$, де C – дуга кола $|z| = 2$, $\operatorname{Im} z \ge 0$. Обхід проти годинникової стрілки.

Завдання 3. Обчислити інтеграл за допомогою інтегральної формули Коші:

$$\int\limits_{|z-1|=2} \frac{z^2+2z-7}{\frac{1}{2}-\cos z}dz.$$

Варіант 29

Завдання 1. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C (z+e)^2dz$, де C – ламана, що з'єднує точки $z_1 = 1+i$ та $z_2 = 4+i$.

Завдання 2. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C 2z(\bar{z}+6)dz$, де C – дуга кола $|z| = 2e$, $\operatorname{Im} z \ge 0$, $\operatorname{Re} z \ge 0$. Обхід проти годинникової стрілки.

Завдання 3. Обчислити інтеграл за допомогою інтегральної формули Коші:

$$\int\limits_{|z|=4} \frac{2z^3e^z}{z(z+3)}dz.$$

Варіант 30

Завдання 1. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C (z+1)^3dz$, де C – ламана, що з'єднує точки $z_1 = 3+2i$ та $z_2 = 6i$.

Завдання 2. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C 2z(z^4+3)dz$, де C – дуга кола $|z|=3$, $\operatorname{Im} z \geq 0$. Обхід проти годинникової стрілки.

Завдання 3. Обчислити інтеграл за допомогою інтегральної формули Коші:

$$\int\limits_{|z|=6} \frac{3z^2-18z-21}{z^2+z-6}dz.$$

Зразок виконання лабораторної роботи 5

Завдання 1. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C (1-z)dz$, де C – відрізок прямої, що з'єднує точки $z_1=1$ та $z_2=-i$.

Завдання 2. Обчислити інтеграл: $\int\limits_C z\cdot\bar{z}dz$, де C – коло $|z|=1$. Обхід проти годинникової стрілки.

Завдання 3. Обчислити інтеграл за допомогою інтегральної формули Коші:

1) $$\int\limits_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^{1/z}}{z^2+z}dz;$$

2) $$\int\limits_{|z-2|=2} \frac{ch(z)}{z^4-1}dz.$$

Завдання 1. Розв’язок:

Задаємо z_1 та z_2.

```
--> z1:1;
(z1) 1
```

```
--> z2:-%i;
(z2) -%i
```

Задамо zv як вектор на комплексній площині від z_1 до z_2, щоб за допомогою нього виразити z через параметричну функцію прямої.

```
-->     zv:z2-z1;
(zv)    -%i-1

-->     z:z1 + zv * t;
(z)     (-%i-1) t+1
```

Вводимо функцію $f(z)$, та інтегруємо за формулою:

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt.$$

Команди:

- diff(f, x) – обчислити похідну функції f за змінною x;
- integrate(f, x) – обчислити невизначений інтеграл функції f за змінною x;
- integrate(f, x, a, b) – аналогічно обчислити визначений інтеграл від a до b.

```
-->     f:1-%i*z;
(f)     1-%i ((-%i-1) t+1)

-->     ratsimp(integrate(f*diff(z,t), t));
(%o6)   t^2 -2 t

-->     ratsimp(integrate(f*diff(z,t), t, 0, 1));
(%o7)   -1
```

Завдання 2. Розв'язок:

Обхід кола проти годинникової стрілки задаємо за формулою:

$$z(t) = r(\cos(t) + i\sin(t)).$$

Таким чином, для повного оберту t змінює своє значення від 0 до π.

Команда conjugate(z) – ввести комплексно-спряжене до z число.

```
-->    z:1 * (cos(t) + %i * sin(t));
(z)    %i sin(t)+cos(t)

-->    f:ratsimp(z*conjugate(z));
(f)    sin(t)^2+cos(t)^2

-->    ratsimp(integrate(f*diff(z,t),t));
(%o7)  %i sin(t)+cos(t)

-->    ratsimp(integrate(f*diff(z,t),t,0,2*%pi));
(%o9)  0
```

Завдання 3. Розв’язок:

1) Перш за все, знайдемо особливі точки, та перевіримо, чи входять вони в межі заданого кола.

Команди:

- solve – вирішити рівняння;
- abs – обчислити модуль;
- rhs – повернути праву частину рівняння.

```
(%i13) f:%e^(1/z)/(z*z + z);
(f)    %e^(1/z)/(z^2+z)

(%i14) ans:solve(z*z+z=0);
(ans)  [z=-1,z=0]

(%i15) abs(rhs(ans[1])-1);
(%o15) 2

(%i16) abs(rhs(ans[2])-1);
(%o16) 1
```

Точки поза областю, обмеженою колом $|z-1|=\frac{1}{2}$.

В межах заданої фігури немає жодного полюса.
Отже, інтеграл дорівнює нулю.

2) Спочатку знайдемо особливі точки, та проаналізуємо, які з них входять в межі заданого кола.

Команди:

- ev(f(x, y, z,..), $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$,..) – обчислити функцію f, підставивши значення $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$, тощо;
- exponentialize – звести гіперболічні функції до експоненціальної форми;
- residue(f, z, z_0) – обчислити лишок функції f(z) в точці z_0.

```
(%i1)  ans:solve(z^4-1=0);
(ans)  [z=%i,z=-1,z=-%i,z=1]
```

```
(%i2)  abs(rhs(ans[1])-2);
(%o2)  √5
```

```
(%i3)  abs(rhs(ans[2])-2);
(%o3)  3
```

```
(%i4)  abs(rhs(ans[3])-2);
(%o4)  √5
```

```
(%i5)  abs(rhs(ans[4])-2);
(%o5)  1
```

В даному випадку тільки точка $z=1$ знаходиться всередині кола $|z-2|=2$

Перевіримо значення чисельника в даній точці.

Аналогічно тригонометричним функціям, Maxima поверне однозначні значення для відомих величин: $\sin(\pi/3)$, $\cos(7\pi/6)$, $\cosh(0)$, тощо.

Але, для наочності аналізу, можемо звести гіперболічний косинус до експоненціальної форми.

```
(%i6)  ev(cosh(z),ans[4]);
(%o6)  cosh(1)
```

```
(%i7)  exponentialize(ev(cosh(z),ans[4]));
(%o7)  (%e+%e^-1)/2
```

Чисельник дорівнює деякому числу, невизначеностей $\frac{0}{0}$ немає.

Задаємо функцію та обчислюємо інтеграл за формулою $2\pi i\sum_{k=1}^{n}\underset{z=z_k}{res} f(z)$.

```
(%i8)    f:cosh(z)/(z^4-1);
```

(f) $\frac{\cosh(z)}{z^4-1}$

```
(%i9)    2*%pi*%i*residue(f,z,1);
```

(%o9) $\frac{\%i\,\pi\cosh(1)}{2}$

Лабораторна робота 6

Тема роботи: **«Числові та степеневі ряди функції комплексної змінної»**
Мета роботи: навчитись досліджувати на збіжність числові та степеневі ряди, знаходити радіус збіжності степеневого ряду використовуючи програму Maxima.
Завдання:

Варіант 1.

Завдання 1. Дослідити на збіжність задані ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\sin in}{3^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{i\frac{15\pi}{n}}z^n$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos in^2}{5^{n^2}}$.

Завдання 2. Знайти радіуси збіжності степеневих рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{i\frac{15\pi}{n}}z^n$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^{3n}}{\sin^n(1+in)}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{i\frac{\pi}{n+9}}z^n$.

Варіант 2.

Завдання 1. Дослідити на збіжність задані ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n-10)\sin i(n+2)}{3^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{18\cos i(n+3)}{5^{(n+7)^2}}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i\frac{\pi}{n-8}}}{\sqrt{n}}$.

Завдання 2. Знайти радіуси збіжності степеневих рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{i\frac{\pi}{n^4}}z^{8n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{i\frac{\pi}{n}}z^{n+7}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{\sin^{3n}(3+in)}$.

Варіант 3.

Завдання 1. Дослідити на збіжність задані ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3\sin in}{3^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos in^2}{5^{n^2}}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i\frac{\pi+10}{n}}}{\sqrt{n}}$.

Завдання 2. Знайти радіуси збіжності степеневих рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{i\frac{\pi}{n}}z^{n^9}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{15z^n}{\sin^n(in)}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}24e^{i\frac{\pi}{n}}z^n$.

Варіант 4.

Завдання 1. Дослідити на збіжність задані ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin in}{3^{n-9}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos i(n+15)^2}{5^{n^2}}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i\frac{\pi}{n}}in}{\sqrt{n+10}}$.

Завдання 2. Знайти радіуси збіжності степеневих рядів:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}15e^{i\frac{\pi}{n}}z^{8n}\ ;\ 2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{\sin^n(3+in)}\ ;\ 3)\sum_{n=1}^{\infty}2e^{i\frac{\pi+9}{n-3}}z^n\ .$$

Варіант 5.

Завдання 1. Дослідити на збіжність задані ряди:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin in}{3^{n-9}};\ 2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos in^2}{5^{n^2}};\ 3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i\frac{\pi}{n}}in}{\sqrt{n}-10}\ .$$

Завдання 2. Знайти радіуси збіжності степеневих рядів:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}23e^{i\frac{\pi+7}{n}}z^n\ ;\ 2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{15\sin^n(1+in)};\ 3)\sum_{n=1}^{\infty}e^{i\frac{\pi}{n}}z^{n+2}\ .$$

Варіант 6.

Завдання 1. Дослідити на збіжність задані ряди:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+45)\sin in}{3^n};\ 2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos i(n-10)^2}{5^{n^2}};\ 3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i\frac{\pi}{n+7}}in}{\sqrt{n-10}}\ .$$

Завдання 2. Знайти радіуси збіжності степеневих рядів:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}3e^{i\frac{\pi}{n}}z^{9n};\ 2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n+15}}{\sin^n(9in)};\ 3)\sum_{n=1}^{\infty}e^{i\frac{\pi+9}{n}}z^n\ .$$

Варіант 7.

Завдання 1. Дослідити на збіжність задані ряди:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\sin in}{3^n}\ ;\ 2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cos in^2}{5^{n^2}};\ 3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{\sqrt{n}+15}\ .$$

Завдання 2. Знайти радіуси збіжності степеневих рядів:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}e^{i\frac{\pi}{n+5}}z^n\ ;\ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+7)^n}{\sin^{3n}(3+17in)};\ 3)\ \sum_{n=1}^{\infty}e^{i\frac{\pi}{n}}z^{9n}\ .$$

Варіант 8.

Завдання 1. Дослідити на збіжність задані ряди:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin in}{4\cdot 3^n};\ \ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{17\cos in^2}{5^{n^2}}\ ;\ 3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3e^{i\frac{\pi}{n}}}{\sqrt{n}}\ .$$

Завдання 2. Знайти радіуси збіжності степеневих рядів:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}e^{i\frac{\pi+3}{n}}z^n\ ;\ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{7z^n}{14\sin^n(1+in)};\ 3)\ \sum_{n=1}^{\infty}e^{i\frac{\pi+3}{n}}z^n\ .$$

Варіант 9.

Завдання 1. Дослідити на збіжність задані ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin in}{3^{n+1}}$;2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos in^2}{5^{(n+1)^2}}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{15\sqrt{n}}$.

Завдання 2. Знайти радіуси збіжності степеневих рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{i\frac{\pi}{n}}z^{n-3}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z+4)^n}{\sin^n(1+in)}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2e^{i\frac{\pi+2}{n}}z^n$.

Варіант 10.

Завдання 1. Дослідити на збіжність задані ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{8e^{i2n+7}}{n\sqrt{n}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos in^2}{7\cdot 5^{n^2}}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{8e^{i\frac{\pi}{n+7}}}{18\sqrt{n+100}+5}$.

Завдання 2. Знайти радіуси збіжності степеневих рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{i\frac{\pi}{n}}z^{2n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7z^n}{\sin^n(15in)}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}5e^{i\frac{\pi+7}{n}}z^n$.

Варіант 11.

Завдання 1. Дослідити на збіжність задані ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin in}{3^{n+2}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos i(n-7)^2}{5^{n^2}}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i\frac{3\pi}{n}}}{15\sqrt{n}}$.

Завдання 2. Знайти радіуси збіжності степеневих рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}15e^{i\frac{\pi}{n}}z^{8n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{8\sin^n(in)}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{i\frac{\pi-10}{n}}z^n$.

Варіант 12.

Завдання 1. Дослідити на збіжність задані ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin in}{3^{n-3}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{n\sqrt{n}}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{n+1}$.

Завдання 2. Знайти радіуси збіжності степеневих рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}15e^{i\frac{\pi}{n}}z^{n+5}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}4\frac{z^n}{\sin^n(9+3in)}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{i\frac{\pi}{n}}z^{8n}$.

Варіант 13.

Завдання 1. Дослідити на збіжність задані ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos in^2}{5^{n^2}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i2n+4}}{14n\sqrt{n}}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{n+10}$.

Завдання 2. Знайти радіуси збіжності степеневих рядів:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty} e^{i\frac{\pi}{n}} z^{n-3}\ ;\ 2)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3z^n}{\sin^n(1+in)}\ ;\ 3)\sum_{n=1}^{\infty} e^{i\frac{\pi-10}{n}} z^n\ .$$

Варіант 14.

Завдання 1. Дослідити на збіжність задані ряди:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{15n^2 \sin in}{3^{4n+2}};\ \ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3e^{i2(n+5)}}{n\sqrt{n}};\ 3)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{n+17}.$$

Завдання 2. Знайти радіуси збіжності степеневих рядів:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty} 15e^{i\frac{\pi}{n}} z^{n+5}\ ;\ 2)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\sin^n(3+in)}\ ;\ 3)\sum_{n=1}^{\infty} 5e^{i\frac{\pi+7}{n}} z^n\ .$$

Варіант 15.

Завдання 1. Дослідити на збіжність задані ряди:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos in^3}{5^{n^2}};\ \ 2)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i(n+5)}}{n\sqrt{n}};\ 3)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\frac{\pi+30}{n-7}}}{n+23}.$$

Завдання 2. Знайти радіуси збіжності степеневих рядів:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty} e^{i\frac{\pi}{n+5}} z^n\ ;\ 2)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\sin^n(12+in)}\ ;\ 3)\sum_{n=1}^{\infty} 2e^{i\frac{\pi+2}{n}} z^n\ .$$

Варіант 16.

Завдання 1. Дослідити на збіжність задані ряди:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos i(n-7)^3}{5^{n^2}};\ \ 2)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i7n+6}}{n\sqrt{n}};\ 3)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{2n}.$$

Завдання 2. Знайти радіуси збіжності степеневих рядів:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty} e^{i\frac{\pi+5}{n+5}} z^n\ ;\ 2)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{15z^{4n}}{\sin^n(8+in)}\ ;\ 3)\sum_{n=1}^{\infty} e^{i\frac{\pi+3}{n}} z^{12n}\ .$$

Варіант 17.

Завдання 1. Дослідити на збіжність задані ряди:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos in^2}{5^{(n+1)^2}};\ \ 2)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i2n}}{n\sqrt{n-37}}\ ;\ 3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\frac{\pi}{n-17}}}{n}.$$

Завдання 2. Знайти радіуси збіжності степеневих рядів:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty} e^{i\frac{\pi}{n}} z^{n-3}\ ;\ 2)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+7)^{2n}}{\sin^n(1+in)}\ ;\ 3)\sum_{n=1}^{\infty} 15e^{i\frac{\pi}{n}} z^n\ .$$

Варіант 18.

Завдання 1. Дослідити на збіжність задані ряди:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{17\cos i(n+7)^2}{12^{n^2}};\ 2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i2n}}{n\sqrt{n+5}};\ 3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{3n}.$$

Завдання 2. Знайти радіуси збіжності степеневих рядів:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-4}}{\sin^n(18+in)};\ 2)\sum_{n=1}^{\infty}e^{i\frac{\pi}{n}}z^{2n};\ 3)\sum_{n=1}^{\infty}5e^{i\frac{\pi+7}{n}}z^n.$$

Варіант 19.

Завдання 1. Дослідити на збіжність задані ряди:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{18\cos in^3}{32^{(n+8)^2}};\ 2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i2n}}{(n+5)\sqrt{n}};\ 3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i\frac{\pi}{n+15}}}{n}.$$

Завдання 2. Знайти радіуси збіжності степеневих рядів:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}e^{i\frac{\pi}{n+5}}z^n;\ 2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7z^n}{\sin^n(1+in)};\ 3)\sum_{n=1}^{\infty}e^{i\frac{\pi}{n+5}}z^n.$$

Варіант 20.

Завдання 1. Дослідити на збіжність задані ряди:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos i(n-10)^2}{5^{n^2}};\ 2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i2n}}{3n\sqrt{n+8}};\ 3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4e^{i\frac{\pi}{n}}}{n}.$$

Завдання 2. Знайти радіуси збіжності степеневих рядів:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}15e^{i\frac{\pi}{n}}z^{n+9};\ 2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+10)^{n+1}}{\sin^n(8+in)};\ 3)\sum_{n=1}^{\infty}12e^{i\frac{\pi+7}{n}}z^n.$$

Варіант 21.

Завдання 1. Дослідити на збіжність задані ряди:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos in^2}{7\cdot 5^{n^2}};\ 2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i2n}}{3n\sqrt{n}};\ 3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7e^{i\frac{\pi}{n}}}{32n}.$$

Завдання 2. Знайти радіуси збіжності степеневих рядів:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}e^{i\frac{\pi+3}{n}}z^n;\ 2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{\sin^n(17+in)};\ 3)\sum_{n=1}^{\infty}2e^{i\frac{\pi+2}{n}}z^n.$$

Варіант 22.

Завдання 1. Дослідити на збіжність задані ряди:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos in^2}{7\cdot 5^{n^2}};\ 2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3e^{in}}{n\sqrt{n}};\ 3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7e^{i\frac{\pi}{n}}}{32n}.$$

Завдання 2. Знайти радіуси збіжності степеневих рядів:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}15e^{i\frac{\pi}{n}}z^{n}\ ;\ 2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-8}}{\sin^{n}(15+in)}\ ;\ 3)\sum_{n=1}^{\infty}e^{i\frac{\pi}{n}}z^{n-3}\ .$$

Варіант 23.

Завдання 1. Дослідити на збіжність задані ряди:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{18\cos i(n+3)^{2}}{9^{(n+7)^{2}}};\ \ 2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-10)\sin i(n+2)}{7^{n}};\ 3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i\frac{\pi}{n-8}}}{\sqrt{n}}.$$

Завдання 2. Знайти радіуси збіжності степеневих рядів:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}15e^{i\frac{\pi}{n}}z^{n+55}\ ;\ 2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+4)^{n}}{\sin^{3n}(10+in)}\ ;\ 3)\sum_{n=1}^{\infty}5e^{i\frac{\pi+7}{n}}z^{n}\ .$$

Варіант 24.

Завдання 1. Дослідити на збіжність задані ряди:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos i(n+15)^{2}}{5^{n^{2}}};\ \ 2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin in}{3^{n-9}};\ 3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i\frac{\pi}{n-8}}}{\sqrt{n}}.$$

Завдання 2. Знайти радіуси збіжності степеневих рядів:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}e^{i\frac{\pi}{n+5}}z^{2n}\ ;\ 2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7z^{n}}{\sin^{n}(1+5in)}\ ;\ 3)\sum_{n=1}^{\infty}e^{i\frac{\pi}{n}}z^{8n}\ .$$

Варіант 25.

Завдання 1. Дослідити на збіжність задані ряди:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i\frac{\pi}{n-7}}}{\sqrt{n-10}};\ \ 2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos i(n-10)^{2}}{5^{n^{2}}};\ 3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin in}{3^{n+3}}\ .$$

Завдання 2. Знайти радіуси збіжності степеневих рядів:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}e^{i\frac{\pi+3}{n}}z^{n}\ ;\ 2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n}}{8\sin^{n}(1+in)}\ ;\ 3)\sum_{n=1}^{\infty}e^{i\frac{\pi}{n}}z^{3n}\ .$$

Варіант 26.

Завдання 1. Дослідити на збіжність задані ряди:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{17\cos in^{2}}{5^{n^{2}}};\ \ 2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin in}{7^{n-9}};\ 3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3e^{i\frac{\pi}{n}}}{\sqrt{n}}.$$

Завдання 2. Знайти радіуси збіжності степеневих рядів:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}2e^{i\frac{\pi+2}{n}}z^{n}\ ;\ 2)\sum_{n=1}^{\infty}4\frac{z^{n}}{\sin^{n}(1+in)}\ ;\ 3)\sum_{n=1}^{\infty}e^{i\frac{\pi-10}{n}}z^{n}\ .$$

Варіант 27.

Завдання 1. Дослідити на збіжність задані ряди:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos in^2}{7\cdot 5^{n^2}};\ \ 2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3e^{i2n+7}}{n\sqrt{n}};\ 3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8e^{i\frac{\pi}{n+7}}}{18\sqrt{n+100}+5}.$$

Завдання 2. Знайти радіуси збіжності степеневих рядів:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}5e^{i\frac{\pi+7}{n}}z^n;\ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3z^n}{\sin^n(1+in)};\ 3)\sum_{n=1}^{\infty}e^{i\frac{\pi}{n}}z^{n-3}.$$

Варіант 28.

Завдання 1. Дослідити на збіжність задані ряди:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin in}{3^{n+2}};\ 2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{3\pi}{n}}}{15\sqrt{n}};\ 3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i\frac{\pi}{n^3}}}{\sqrt{n+100}}.$$

Завдання 2. Знайти радіуси збіжності степеневих рядів:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}e^{i\frac{\pi-10}{n}}z^n;\ 2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{\sin^n(3+in)};\ 3)\sum_{n=1}^{\infty}e^{i\frac{\pi}{n}}z^{2n}.$$

Варіант 29.

Завдання 1. Дослідити на збіжність задані ряди:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos in^2}{7\cdot 5^{n^2}};\ \ 2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ne^{i2n}}{\sqrt{n}};\ 3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin in^2}{17^{n^2}}.$$

Завдання 2. Знайти радіуси збіжності степеневих рядів:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}e^{i\frac{\pi}{n}}z^{8n};\ 2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{\sin^n(in)};\ 3)\sum_{n=1}^{\infty}2e^{i\frac{\pi}{n}}z^n.$$

Варіант 30.

Завдання 1. Дослідити на збіжність задані ряди:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cos in^2}{e^n};\ \ 2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i2n-17}}{\sqrt{15n}};\ 3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5\sin in^2}{17^n}.$$

Завдання 2. Знайти радіуси збіжності степеневих рядів:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}e^{i\frac{\pi}{n}}z^{2n};\ 2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{\sin^n(1+in)};\ 3)\sum_{n=1}^{\infty}e^{i\frac{\pi}{n+5}}z^n.$$

Зразок виконання лабораторної роботи 6

Завдання 1. Дослідити на збіжність задані ряди:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\sin in}{3^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos in^2}{5^{n^2}}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i\frac{\pi}{n+7}}}{\sqrt{n}}$.

Завдання 2. Знайти радіус збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}e^{in}z^n$.

Завдання 1. Розв'язок:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\sin in}{3^n}$;

Нехай f_Dal_2 рівняння 1, а рівняння f_2 наступний член ряду 1, тоді за ознакою д'Аламбера знайдемо границю (%i16). Ряд збігається, бо результат менше 1.

```
(%i14) f_Dal_2: (n*sin(%i*n))/(3^n);
```

(%o14) $\frac{\%i\, n \sinh(n)}{3^n}$

```
(%i15) f_2:((n+1)*sin(%i*(n+1)))/(3^(n+1))
```

(%o15) $\%i\,(n+1)\,3^{-1-n}\sinh(n+1)$

```
(%i16) limit(f_2/f_Dal_2,n, inf);
```

(%o16) $\frac{\%e}{3}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos in^2}{5^{n^2}}$;

Нехай f_Dal_3 рівняння 2, а рівняння f_3 наступний член ряду 2, тоді за ознакою д'Аламбера знайдемо границю (%i3). Ряд збігається, бо результат менше 1.

```
(%i1) f_Dal_3: (cos((%i)*n^2)/(5^(n^2)));
```

(%o1) $\frac{\cosh(n^2)}{5^{n^2}}$

```
(%i2) f_3:(cos((%i)*(n+1)^2)/(5^((n+1)^2)))
```

(%o2) $\frac{\cosh((1+n)^2)}{5^{(1+n)^2}}$

```
(%i3) limit(f_3/f_Dal_3,n,inf);
```

(%o3) 0

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\frac{\pi}{n+7}}}{\sqrt{n}}$;

Нехай f_Dal_3 рівняння 3, а рівняння f_3 наступний член ряду 3, тоді за ознакою д’Аламбера знайдемо границю (%i8). Границя дорівнює 1.

```
(%i6) f_Dal_3: exp(%i*(pi/n))/sqrt(n);
```

(%o6) $\frac{\%e^{\frac{\%i\,\pi}{n}}}{\sqrt{n}}$

```
(%i7) f_3:  exp(%i*(pi/(n+1)))/sqrt(n+1);
```

(%o7) $\frac{\%e^{\frac{\%i\,\pi}{n+1}}}{\sqrt{n+1}}$

```
(%i8) limit(f_3/f_Dal_3,n,inf);
(%o8) 1

 -->  /*if limit = 1 -> use Cauchy root test*/
```

Отже, ознака не дає відповіді, замість неї застосуємо радикальну ознаку Коші. Нехай $f\_Dal\_3 = \sqrt[n]{f\_Dal\_3}$, тоді знайдемо необхідну границю (%i10).

Ряд збігається, бо вона дорівнює 0,

```
(%i9) f_Dal_3 = f_Dal_3^(1/n);
```

(%o9) $\frac{\%e^{\frac{\%i\,\pi}{n}}}{\sqrt{n}} = \left(\frac{\%e^{\frac{\%i\,\pi}{n}}}{\sqrt{n}}\right)^{1/n}$

```
(%i10) limit(f_Dal_3, n,inf);
(%o10) 0
```

Завдання 2. Розв’язок:

$\sum_{n=1}^{\infty} e^{in} z^n$;

Нехай f_Dal_1 рівняння 3, а рівняння f_1 наступний член ряду 3

```
(%i29) /*power series*/
       pows_Dal_1: exp(%i*n)*z^n;
```
(%o29) $\%e^{\%i\, n}\, z^n$

```
(%i30) pows_1: exp(%i*n+1)*z^(n+1);
```
(%o30) $\%e^{1+\%i\, n}\, z^{1+n}$

За ознакою д'Аламбера знайдемо границю (%i31). І позбавимось змінної z.

```
(%i31) border = limit(pows_1/pows_Dal_1,n,inf);
```
(%o31) $border=\%e\, z$

```
(%i32) border = border/z;
```
(%o32) $border=\frac{border}{z}$

Знайдемо протилежне значення border. З рівняння (%i34) та (%i35) складемо границю (%i36), що дорівнює радіусу збіжності. Таким чином, радіус збіжності дорівнює *e*.

```
(%i33) border_negative = border*(-1);
```
(%o33) $border\_negative=-border$

```
(%i34) pows_Dal_1 = exp(%i*n)*(border_negative)^(n);
```
(%o34) $\%e^{\%i\, n}\, z^n=border\_negative^n\, \%e^{\%i\, n}$

```
(%i35) pows_1= exp(%i*n+1)*border_negative^(n+1);
```
(%o35) $\%e^{1+\%i\, n}\, z^{1+n}=border\_negative^{1+n}\, \%e^{1+\%i\, n}$

```
(%i36) limit(pows_1/pows_Dal_1,n,inf);
```
(%o36) $\%e\, z$

Лабораторна робота 7

Тема: **«Ряди Тейлора та Лорана»**
Мета: навчитись розкладати функції в ряди Тейлора та Лорана за степенями z заданої функції, в околі заданої точки та в заданих кільцях, за степенями $z-z_0$ в її особливій точці; знаходити область збіжності, використовуючи програму Maxima.
Завдання:

Варіант 1

Завдання 1. Розкласти задану функцію в ряд Тейлора використовуючи відомі розклади:

$$f(z)=e^{z}\ ,\quad z_0=\frac{1}{2}.$$

Завдання 2. Знайти декілька перших членів розкладу в ряд за степенями z заданої функції. Знайти область збіжності отриманого ряду:

$$f(z)=e^{5z+2,5}.$$

Завдання 3. Знайти область збіжності заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(5n)}{z!}.$$

Завдання 4. Розкласти в ряд Лорана функцію в околі точки $z_0=0$, $w=\frac{1}{z+1}$.

Завдання 5. Розкласти задану функцію в ряд Лорана в заданому кільці

$$f(z)=\frac{2z+3}{z^2+3z+2},\ 1<|z|<2.$$

Завдання 6. Знайти розклад в ряд Лорана заданої функції $f(z)$ за степенями $z-z_0$ в залежності від її особливої точки:

$$f(z)=\frac{1}{(z-2)(z-5)},\quad z_0=5.$$

Варіант 2

Завдання 1. Розкласти задану функцію в ряд Тейлора використовуючи відомі розклади:

$$f(z)=\sin(z+2),\quad z_0=-1.$$

Завдання 2. Знайти декілька перших членів розкладу в ряд за степенями z заданої функції. Знайти область збіжності отриманого ряду:

$$f(z)=\cos\frac{1}{z+1}.$$

Завдання 3. Знайти область збіжності заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 3n}{(z-2)^{n+2}}.$$

Завдання 4. Розкласти в ряд Лорана функцію в околі точки $z_0=0$, $w=\dfrac{1}{z-3}$.

Завдання 5. Розкласти задану функцію в ряд Лорана в заданому кільці

$$f(z)=\frac{z}{(z^2-4)(z^2-1)},\quad 1<|z|<2.$$

Завдання 6. Знайти розклад в ряд Лорана заданої функції $f(z)$ за степенями $z-z_0$ в залежності від її особливої точки:

$$f(z)=\frac{2z+3}{z^2+3z+2},\ z_0=1.$$

<u>Варіант 3</u>

Завдання 1. Розкласти задану функцію в ряд Тейлора використовуючи відомі розклади:

$$f(z)=e^{z^{\frac{1}{2}}},\quad z_0=0.$$

Завдання 2. Знайти декілька перших членів розкладу в ряд за степенями z заданої функції. Знайти область збіжності отриманого ряду:

$$f(z)=\ln(6-z).$$

Завдання 3. Знайти область збіжності заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^{n-2}}{(z+3)^{n}}.$$

Завдання 4. Розкласти в ряд Лорана функцію в околі точки $z_0=0$, $w=\dfrac{1}{z(z-2)}$.

Завдання 5. Розкласти задану функцію в ряд Лорана в заданому кільці

$$f(z)=\frac{z+1}{z+2},\quad 3<|z-1|<+\infty.$$

Завдання 6. Знайти розклад в ряд Лорана заданої функції $f(z)$ за степенями $z-z_0$ в залежності від її особливої точки:

$$f(z)=\frac{2z+3}{z^2+3z+2},\ z_0=2.$$

Варіант 4

Завдання 1. Розкласти задану функцію в ряд Тейлора використовуючи відомі розклади:

$$f(z)=\cos\frac{1}{z+1},\ z_0=-1.$$

Завдання 2. Знайти декілька перших членів розкладу в ряд за степенями z заданої функції. Знайти область збіжності отриманого ряду:

$$f(z)=\frac{z+1}{z+2}.$$

Завдання 3. Знайти область збіжності заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{(z+3)^{n-1}}.$$

Завдання 4. Розкласти в ряд Лорана функцію в околі точки $z_0=0$, $w=z\sin\frac{1}{z}$.

Завдання 5. Розкласти задану функцію в ряд Лорана в заданому кільці

$$f(z)=\frac{1}{(z-2)(2-3)},\ 2<|z|<3.$$

Завдання 6. Знайти розклад в ряд Лорана заданої функції $f(z)$ за степенями $z-z_0$ в залежності від її особливої точки:

$$f(z)=\frac{z}{(z^2-4)(z^2-1)},\ z_0=1.$$

Варіант 5

Завдання 1. Розкласти задану функцію в ряд Тейлора використовуючи відомі розклади:

$$f(z)=\frac{1}{3-2z},\quad z_0=3.$$

Завдання 2. Знайти декілька перших членів розкладу в ряд за степенями z заданої функції. Знайти область збіжності отриманого ряду:

$$f(z)=\frac{z+2}{z^2+2z-8}.$$

Завдання 3. Знайти область збіжності заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2z+3)^n}{(z-2)^{n+2}}.$$

Завдання 4. Розкласти в ряд Лорана функцію в околі точки $z_0=0$, $w=\frac{1}{z^2}\sin z$.

Завдання 5. Розкласти задану функцію в ряд Лорана в заданому кільці

$$f(z)=\frac{1}{(z-2)(2-3)},\quad 0<|z-3|<1.$$

Завдання 6. Знайти розклад в ряд Лорана заданої функції $f(z)$ за степенями $z-z_0$ в залежності від її особливої точки:

$$f(z)=\frac{1}{(z-7)(z-3)},\quad z_0=7.$$

Варіант 6

Завдання 1. Розкласти задану функцію в ряд Тейлора використовуючи відомі розклади:

$$f(z)=\sin(2z+1),\ z_0=-2.$$

Завдання 2. Знайти декілька перших членів розкладу в ряд за степенями z заданої функції. Знайти область збіжності отриманого ряду:

$$f(z)=\frac{sinz}{z^z}.$$

Завдання 3. Знайти область збіжності заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(in)}{(z+i)^n}.$$

Завдання 4. Розкласти в ряд Лорана функцію в околі точки $z_0=0$, $w=e^{-1z}$.

Завдання 5. Розкласти задану функцію в ряд Лорана в заданому кільці

$$f(z)=\frac{z+8}{z^2+12z+2},\quad 0<|z+6|<2.$$

Завдання 6. Знайти розклад в ряд Лорана заданої функції $f(z)$ за степенями $z-z_0$ в залежності від її особливої точки:

$$f(z)=\frac{z}{(z^2-4)(z^2-1)},\ z_0=2.$$

Варіант 7

Завдання 1. Розкласти задану функцію в ряд Тейлора використовуючи відомі розклади:

$$f(z)=e^z,\ z_0=\frac{1}{2}.$$

Завдання 2. Знайти декілька перших членів розкладу в ряд за степенями z заданої функції. Знайти область збіжності отриманого ряду:

$$f(z)=(z+1)\sin 2z.$$

Завдання 3. Знайти область збіжності заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{3}+i\right)^n}{z^n}.$$

Завдання 4. Розкласти в ряд Лорана функцію в околі точки $z_0 = 0$, $w = \frac{1}{z^3} e^z$.

Завдання 5. Розкласти задану функцію в ряд Лорана в заданому кільці

$$f(z) = \frac{z}{(z^3 - 8)(z^2 - 1)}, \quad 1 < |z| < 2.$$

Завдання 6. Знайти розклад в ряд Лорана заданої функції $f(z)$ за степенями $z - z_0$ в залежності від її особливої точки:

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 2z - 3}, \; z_0 = 0.$$

Варіант 8

Завдання 1. Розкласти задану функцію в ряд Тейлора використовуючи відомі розклади:

$$f(z) = \frac{1}{3z + 1}, \quad z_0 = -2.$$

Завдання 2. Знайти декілька перших членів розкладу в ряд за степенями z заданої функції. Знайти область збіжності отриманого ряду:

$$f(z) = \frac{1 - e^{-z^2}}{z^2}.$$

Завдання 3. Знайти область збіжності заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-i)^n z^{-n}}.$$

Завдання 4. Розкласти в ряд Лорана функцію в околі точки $z_0 = 0$, $w = z\cos\frac{1}{z}$.

Завдання 5. Розкласти задану функцію в ряд Лорана в заданому кільці

$$f(z) = \frac{z}{(z^3 - 8)(z^2 - 1)}, \; 1 < |z - 2| < 2.$$

Завдання 6. Знайти розклад в ряд Лорана заданої функції $f(z)$ за степенями $z - z_0$ в залежності від її особливої точки:

$$f(z) = \frac{z + 1}{z^2 + 4z - 5}, \; z_0 = 2.$$

Варіант 9

Завдання 1. Розкласти задану функцію в ряд Тейлора використовуючи відомі розклади:

$$f(z) = \frac{1}{1 + e^z}, \quad z_0 = 0.$$

Завдання 2. Знайти декілька перших членів розкладу в ряд за степенями z заданої функції. Знайти область збіжності отриманого ряду:

$$f(z)=\frac{z+1}{z^2+2z-3}.$$

Завдання 3. Знайти область збіжності заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{-1}}{\cos(in)n!}.$$

Завдання 4. Розкласти в ряд Лорана функцію в околі точки $z_0=0$, $w=\frac{1}{z^2}\cos z$.

Завдання 5. Розкласти задану функцію в ряд Лорана в заданому кільці

$$f(z)=\frac{z}{(z^2-9)(z^2-1)},\quad 0<|z-3|<1.$$

Завдання 6. Знайти розклад в ряд Лорана заданої функції $f(z)$ за степенями $z-z_0$ в залежності від її особливої точки:

$$f(z)=\frac{1}{(z+5)(z-7)},\quad z_0=-5.$$

<u>Варіант 10</u>

Завдання 1. Розкласти задану функцію в ряд Тейлора використовуючи відомі розклади:

$$f(z)=\frac{1}{5-2z},\quad z_0=-1.$$

Завдання 2. Знайти декілька перших членів розкладу в ряд за степенями z заданої функції. Знайти область збіжності отриманого ряду:

$$f(z)=\frac{5-z}{z^2-z-2}.$$

Завдання 3. Знайти область збіжності заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{-2}}{(z+2)^n}.$$

Завдання 4. Розкласти в ряд Лорана функцію в околі точки $z_0=0$, $f(z)=\frac{e^z}{z^2}$.

Завдання 5. Розкласти задану функцію в ряд Лорана в заданому кільці

$$f(z)=\frac{z}{(z^2-9)(z^2-1)},\ 0<|z|<1.$$

Завдання 6. Знайти розклад в ряд Лорана заданої функції $f(z)$ за степенями $z-z_0$ в залежності від її особливої точки:

$$f(z)=\frac{z+2}{z^2+2z-8},\ z_0=-2.$$

Варіант 11

Завдання 1. Розкласти задану функцію в ряд Тейлора використовуючи відомі розклади:

$$f(z)=e^z\,,\quad z_0=-4\,.$$

Завдання 2. Знайти декілька перших членів розкладу в ряд за степенями z заданої функції. Знайти область збіжності отриманого ряду:

$$f(z)=z^2e^{\frac{1}{z}}\quad.$$

Завдання 3. Знайти область збіжності заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-z)^n z^{-n}}\,.$$

Завдання 4. Розкласти в ряд Лорана функцію в околі точки $z_0=0$,

$$f(z)=\frac{1-\cos z}{z^2}\,.$$

Завдання 5. Розкласти задану функцію в ряд Лорана в заданому кільці

$$f(z)=\frac{z-1}{z+2}\,,\;\; 3<|z+1|<+\infty.$$

Завдання 6. Знайти розклад в ряд Лорана заданої функції $f(z)$ за степенями $z-z_0$ в залежності від її особливої точки:

$$f(z)=\frac{1}{(z-2)(z-3)}\,,\;\; z_0=3\,.$$

Варіант 12

Завдання 1. Розкласти задану функцію в ряд Тейлора використовуючи відомі розклади:

$$f(z)=\frac{z}{z^2+3}\,,\quad z_0=0\,.$$

Завдання 2. Знайти декілька перших членів розкладу в ряд за степенями z заданої функції. Знайти область збіжності отриманого ряду:

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}\,.$$

Завдання 3. Знайти область збіжності заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-4)\cos z}{(z-1)^n}\,.$$

Завдання 4. Розкласти в ряд Лорана функцію в околі точки $z_0=0$,

$$f(z)=\frac{e^z}{z^3}\,.$$

Завдання 5. Розкласти задану функцію в ряд Лорана в заданому кільці

$$f(z)=\frac{1}{(z-5)(z-6)}\,,\; 5<|z|<6\,.$$

Завдання 6. Знайти розклад в ряд Лорана заданої функції $f(z)$ за степенями $z-z_0$ в залежності від її особливої точки:

$$f(z)=\frac{1}{z(z+2)},\ z_0=-2.$$

Варіант 13

Завдання 1. Розкласти задану функцію в ряд Тейлора використовуючи відомі розклади:

$$f(z)=cosz,\ z_0=\frac{\pi}{4}.$$

Завдання 2. Знайти декілька перших членів розкладу в ряд за степенями z заданої функції. Знайти область збіжності отриманого ряду:

$$f(z)=\frac{1}{(z+3)^3}.$$

Завдання 3. Знайти область збіжності заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n+2}}{z-3}.$$

Завдання 4. Розкласти в ряд Лорана функцію в околі точки $z_0=0$, $f(z)=z^5e^{z^{-1}}$.

Завдання 5. Розкласти задану функцію в ряд Лорана в заданому кільці

$$f(z)=\frac{1}{(z+4)(z-7)},\quad 0<|z-7|<1.$$

Завдання 6. Знайти розклад в ряд Лорана заданої функції $f(z)$ за степенями $z-z_0$ в залежності від її особливої точки:

$$f(z)=\frac{1}{z(z+2)},\ z_0=-1.$$

Варіант 14

Завдання 1. Розкласти задану функцію в ряд Тейлора використовуючи відомі розклади:

$$f(z)=\frac{z}{2z+1},\quad z_0=1.$$

Завдання 2. Знайти декілька перших членів розкладу в ряд за степенями z заданої функції. Знайти область збіжності отриманого ряду:

$$f(z)=\frac{e^z-1}{z}.$$

Завдання 3. Знайти область збіжності заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{zn!}.$$

Завдання 4. Розкласти в ряд Лорана функцію в околі точки $z_0 = 0$, $f(z) = \frac{2-\cos z}{z^3}$.

Завдання 5. Розкласти задану функцію в ряд Лорана в заданому кільці

$$f(z) = \frac{1}{(z+4)(z-7)}, \quad 0 < |z+4| < 1.$$

Завдання 6. Знайти розклад в ряд Лорана заданої функції $f(z)$ за степенями $z - z_0$ в залежності від її особливої точки:

$$f(z) = \frac{z+1}{z^2 - 3z + 2}, \ z_0 = 2.$$

Варіант 15

Завдання 1. Розкласти задану функцію в ряд Тейлора використовуючи відомі розклади:

$$f(z) = \cos\frac{1}{z-1}, \quad z_0 = -1.$$

Завдання 2. Знайти декілька перших членів розкладу в ряд за степенями z заданої функції. Знайти область збіжності отриманого ряду:

$$f(z) = \frac{1}{z(z+2)} \ .$$

Завдання 3. Знайти область збіжності заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)\cos z}{(z+2)^n n!}.$$

Завдання 4. Розкласти в ряд Лорана функцію в околі точки $z_0 = 0$, $f(z) = z^2 \cos\frac{1}{z}$

Завдання 5. Розкласти задану функцію в ряд Лорана в заданому кільці

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 12z}, \ 12 < |z| < +\infty.$$

Завдання 6. Знайти розклад в ряд Лорана заданої функції $f(z)$ за степенями $z - z_0$ в залежності від її особливої точки:

$$f(z) = \frac{1}{(z+4)(z+2)}, \quad z_0 = -3.$$

Варіант 16

Завдання 1. Розкласти задану функцію в ряд Тейлора використовуючи відомі розклади:

$$f(z) = e^{1+z} \ , \ z_0 = 2.$$

Завдання 2. Знайти декілька перших членів розкладу в ряд за степенями z заданої функції. Знайти область збіжності отриманого ряду:

$$f(z) = \frac{1-e^{-z}}{z^3}.$$

Завдання 3. Знайти область збіжності заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+i\sqrt{2}\right)^n}{z^{2-n}}.$$

Завдання 5. Розкласти в ряд Лорана функцію в околі точки $z_0=0$, $f(z)=z^3e^{\frac{1}{z}}$.

Завдання 5. Розкласти задану функцію в ряд Лорана в заданому кільці

$$f(z)=\frac{z-3}{z^2+12z},\ 6<|z|<+\infty.$$

Завдання 6. Знайти розклад в ряд Лорана заданої функції $f(z)$ за степенями $z-z_0$ в залежності від її особливої точки:

$$f(z)=\frac{z+1}{z^2-3z+2},\ z_0=1.$$

Варіант 17

Завдання 1. Розкласти задану функцію в ряд Тейлора використовуючи відомі розклади:

$$f(z)=\sin(3z-2),\ z_0=-1.$$

Завдання 2. Знайти декілька перших членів розкладу в ряд за степенями z заданої функції. Знайти область збіжності отриманого ряду:

$$f(z)=\frac{z+1}{z^2+4z-5}.$$

Завдання 3. Знайти область збіжності заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(in)}{\cos(in)n!}.$$

Завдання 4. Розкласти в ряд Лорана функцію в околі точки $z_0=0$, $f(z)=\frac{e^{2z}}{z^2}$.

Завдання 5. Розкласти задану функцію в ряд Лорана в заданому кільці

$$f(z)=\frac{1}{z^2-12z},\ 1<|z-12|<+\infty.$$

Завдання 6. Знайти розклад в ряд Лорана заданої функції $f(z)$ за степенями $z-z_0$ в залежності від її особливої точки:

$$f(z)=\frac{z+1}{z^2-3z+2},\ z_0=0.$$

Варіант 18

Завдання 1. Розкласти задану функцію в ряд Тейлора використовуючи відомі розклади:

$$f(z)=\sin\frac{1}{z+2},\ \ z_0=-1.$$

Завдання 2. Знайти декілька перших членів розкладу в ряд за степенями z заданої функції. Знайти область збіжності отриманого ряду:

$$f(z)=\frac{1-e^{-z}}{z^3}.$$

Завдання 3. Знайти область збіжності заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z-1}{z^{n+3}}.$$

Завдання 4. Розкласти в ряд Лорана функцію в околі точки $z_0=0$, $f(z)=\frac{\sin^2 z}{z^3}$.

Завдання 5. Розкласти задану функцію в ряд Лорана в заданому кільці

$$f(z)=\frac{1}{z^2+2},\ 0<\left|z-\sqrt{2}i\right|<2.$$

Завдання 6. Знайти розклад в ряд Лорана заданої функції $f(z)$ за степенями $z-z_0$ в залежності від її особливої точки:

$$f(z)=\frac{z-3}{z^3+2z^2-7z+4},\ z_0=1.$$

<u>Варіант 19</u>

Завдання 1. Розкласти задану функцію в ряд Тейлора використовуючи відомі розклади:

$$f(z)=\frac{2z+3}{z^2+3z+2},\quad z_0=1.$$

Завдання 2. Знайти декілька перших членів розкладу в ряд за степенями z заданої функції. Знайти область збіжності отриманого ряду:

$$f(z)=\frac{z+2}{z^2+2z-8}.$$

Завдання 3. Знайти область збіжності заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z-1}{z^{n+3}}.$$

Завдання 4. Розкласти в ряд Лорана функцію в околі точки $z_0=0$, $f(z)=\frac{1-\cos z}{z^4}$.

Завдання 5. Розкласти задану функцію в ряд Лорана в заданому кільці

$$f(z)=e^{\frac{1}{z}},\quad 0<|z|<\infty.$$

Завдання 6. Знайти розклад в ряд Лорана заданої функції $f(z)$ за степенями $z-z_0$ в залежності від її особливої точки:

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z+3)},\quad z_0=2.$$

Варіант 20

Завдання 1. Розкласти задану функцію в ряд Тейлора використовуючи відомі розклади:

$$f(z)=\frac{z-6}{z^2+12z+2},\quad z_0=-3.$$

Завдання 2. Знайти декілька перших членів розкладу в ряд за z заданої функції. Знайти область збіжності отриманого ряду:

$$f(z)=\frac{1}{z^2-5z+6}\ .$$

Завдання 3. Знайти область збіжності заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z^2-2)}{(1-i)^n z^n}\ .$$

Завдання 4. Розкласти в ряд Лорана функцію в околі точки $z_0=0$, $f(z)=z^3\cos\frac{1}{z}$.

Завдання 5. Розкласти задану функцію в ряд Лорана в заданому кільці

$$f(z)=\cos\frac{1}{z+1},\ 0<|z+1|<\infty.$$

Завдання 6. Знайти розклад в ряд Лорана заданої функції $f(z)$ за степенями $z-z_0$ в залежності від її особливої точки:

$$f(z)=\frac{z+1}{z^2-3z+2},\ z_0=1/2\,.$$

Варіант 21

Завдання 1. Розкласти задану функцію в ряд Тейлора використовуючи відомі розклади:

$$f(z)=\frac{z^5-2z^3+3}{z^4},\quad z_0=0\,.$$

Завдання 2. Знайти декілька перших членів розкладу в ряд за z заданої функції. Знайти область збіжності отриманого ряду:

$$f(z)=\ln(1+cosz).$$

Завдання 3. Знайти область збіжності заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ch(in)}{(z+i)^n}\ .$$

Завдання 4. Розкласти в ряд Лорана функцію в околі точки $z_0=0$, $f(z)=ze^{\frac{1}{2z}}$.

Завдання 5. Розкласти задану функцію в ряд Лорана в заданому кільці

$$f(z)=\sin\frac{1}{(z-i)^3}\quad,\quad 0<|z-i|<\infty.$$

Завдання 6. Знайти розклад в ряд Лорана заданої функції $f(z)$ за степенями $z - z_0$ в залежності від її особливої точки:

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)(z+3)}, \quad z_0 = 1.$$

Варіант 22

Завдання 1. Розкласти задану функцію в ряд Тейлора використовуючи відомі розклади:

$$f(z) = \frac{z}{2z+1}, \quad z_0 = 1.$$

Завдання 2. Знайти декілька перших членів розкладу в ряд за z заданої функції. Знайти область збіжності отриманого ряду:

$$f(z) = \ln\left(1 + e^{-z}\right).$$

Завдання 3. Знайти область збіжності заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(in)}{(z+1)^{n+1} n!}.$$

Завдання 4. Розкласти в ряд Лорана функцію в околі точки $z_0 = 0$, $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$.

Завдання 5. Розкласти задану функцію в ряд Лорана в заданому кільці

$$f(z) = (z+1)\sin\frac{1}{z+1}, \quad 1 < |z| < \infty.$$

Завдання 6. Знайти розклад в ряд Лорана заданої функції $f(z)$ за степенями $z - z_0$ в залежності від її особливої точки:

$$f(z) = \frac{z+1}{z^3 + 4z^2 - 3z - 18}, \quad z_0 = -3.$$

Варіант 23

Завдання 1. Розкласти задану функцію в ряд Тейлора використовуючи відомі розклади:

$$f(z) = \frac{1}{z(z+2)}, \quad z_0 = i.$$

Завдання 2. Знайти декілька перших членів розкладу в ряд за z заданої функції. Знайти область збіжності отриманого ряду:

$$f(z) = ln cos z.$$

Завдання 3. Знайти область збіжності заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{-1}}{cos(in)}.$$

Завдання 4. Розкласти в ряд Лорана функцію в околі точки $z_0 = 0$, $f(z) = \frac{e^{-z}}{z^{-3}}$.

Завдання 5. Розкласти задану функцію в ряд Лорана в заданому кільці

$$f(z)=\frac{z+1}{z^2-3z+2},\ 1<|z|<\infty.$$

Завдання 6. Знайти розклад в ряд Лорана заданої функції $f(z)$ за степенями $z-z_0$ в залежності від її особливої точки:

$$f(z)=\frac{z+1}{z^3+4z^2-3z-18},\ z_0=2.$$

Варіант 24

Завдання 1. Розкласти задану функцію в ряд Тейлора використовуючи відомі розклади:

$$f(z)=\frac{1}{z-3},\quad z_0=0.$$

Завдання 2. Знайти декілька перших членів розкладу в ряд за z заданої функції. Знайти область збіжності отриманого ряду:

$$f(z)=\ln(2-z).$$

Завдання 3. Знайти область збіжності заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{-1}}{sin(in)}.$$

Завдання 4. Розкласти в ряд Лорана функцію в околі точки $z_0=0$, $f(z)=\frac{1-\cos(2z)}{z^3}$.

Завдання 5. Розкласти задану функцію в ряд Лорана в заданому кільці

$f(z)=\frac{z+1}{z^2-3z+2},\ 2<|z|<\infty.$

Завдання 6. Знайти розклад в ряд Лорана заданої функції $f(z)$ за степенями $z-z_0$ в залежності від її особливої точки:

$$f(z)=\frac{z+1}{z^3+4z^2-3z-18},\ z_0=1{,}5.$$

Варіант 25

Завдання 1. Розкласти задану функцію в ряд Тейлора використовуючи відомі розклади:

$$f(z)=e^{\frac{1}{z}},\quad z_0=0.$$

Завдання 2. Знайти декілька перших членів розкладу в ряд за z заданої функції. Знайти область збіжності отриманого ряду:

$$f(z)=\sin^2(\frac{z}{2}).$$

Завдання 3. Знайти область збіжності заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cos(in)}{(z+i)^n}.$$

Завдання 4. Розкласти в ряд Лорана функцію в околі точки $z_0=0$, $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z}$.

Завдання 5. Розкласти задану функцію в ряд Лорана в заданому кільці

$$f(z)=\frac{1}{z(z+2)},\ 1<|z|<2.$$

Завдання 6. Знайти розклад в ряд Лорана заданої функції $f(z)$ за степенями $z-z_0$ в залежності від її особливої точки:

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-5)},\quad z_0=-1.$$

Варіант 26

Завдання 1. Розкласти задану функцію в ряд Тейлора використовуючи відомі розклади:

$$f(z)=\sin\frac{1}{(z-i)^3},\qquad z_0=i.$$

Завдання 2. Знайти декілька перших членів розкладу в ряд за z заданої функції. Знайти область збіжності отриманого ряду:

$$f(z)=\cos^2\frac{iz}{2}.$$

Завдання 3. Знайти область збіжності заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin(in)}{(z+i)^n}.$$

Завдання 4. Розкласти в ряд Лорана функцію в околі точки $z_0=0$, $f(z)=\dfrac{e^{1/z}}{z^2}$.

Завдання 5. Розкласти задану функцію в ряд Лорана в заданому кільці

$$f(z)=\frac{1}{z(z+2)},\ 0<|z-2|<\infty.$$

Завдання 6. Знайти розклад в ряд Лорана заданої функції $f(z)$ за степенями $z-z_0$ в залежності від її особливої точки:

$$f(z)=\frac{z-3}{z^3+2z^2-7z+4},\ z_0=-4.$$

Варіант 27

Завдання 1. Розкласти задану функцію в ряд Тейлора використовуючи відомі розклади:

$$f(z)=\frac{sin(z)}{z^{-1}},\ z_0=0.$$

Завдання 2. Знайти декілька перших членів розкладу в ряд за z заданої функції. Знайти область збіжності отриманого ряду:

$$f(z) = \frac{1}{3-2z}.$$

Завдання 3. Знайти область збіжності заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+z)}{(1-i)^n z^n}.$$

Завдання 4. Розкласти в ряд Лорана функцію в околі точки $z_0 = 0$, $f(z) = \frac{\sin^2 z}{z^3}$.

Завдання 5. Розкласти задану функцію в ряд Лорана в заданому кільці

$$f(z) = \frac{e^{z-1}-1}{z-1}, \quad 0 < |z-1| < \infty.$$

Завдання 6. Знайти розклад в ряд Лорана заданої функції $f(z)$ за степенями $z - z_0$ в залежності від її особливої точки:

$$f(z) = \frac{z-3}{(z^2+3z+2)^2}, \ z_0 = -1.$$

<u>Варіант 28</u>

Завдання 1. Розкласти задану функцію в ряд Тейлора використовуючи відомі розклади:

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1}, \ z_0 = 0.$$

Завдання 2. Знайти декілька перших членів розкладу в ряд за z заданої функції. Знайти область збіжності отриманого ряду:

$$f(z) = \frac{z}{z^2-2z-3}.$$

Завдання 3. Знайти область збіжності заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{3}+i\sqrt{3})^n}{z^n}.$$

Завдання 4. Розкласти в ряд Лорана функцію в околі точки $z_0 = 0$, $f(z) = \frac{1-e^{-z^2}}{z^2}$.

Завдання 5. Розкласти задану функцію в ряд Лорана в заданому кільці

$$f(z) = \frac{1}{z-3}, \ 1 < |z-2| < \infty.$$

Завдання 6. Знайти розклад в ряд Лорана заданої функції $f(z)$ за степенями $z - z_0$ в залежності від її особливої точки:

$$f(z) = \frac{z-3}{z^3 + 2z^2 - 7z + 4}\ ,\ z_0 = 1.$$

Варіант 29

Завдання 1. Розкласти задану функцію в ряд Тейлора використовуючи відомі розклади:

$$f(z) = \frac{z+2}{z^2 + 2z - 8},\quad z_0 = 2.$$

Завдання 2. Знайти декілька перших членів розкладу в ряд за z заданої функції. Знайти область збіжності отриманого ряду:

$$f(z) = \sin(2z+1).$$

Завдання 3. Знайти область збіжності заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-i)^n z^n}.$$

Завдання 4. Розкласти в ряд Лорана функцію в околі точки

$$z_0 = 0,\ f(z) = \frac{2z - z\cos z}{z^5}.$$

Завдання 5. Розкласти задану функцію в ряд Лорана в заданому кільці

$$f(z) = \frac{1}{z-3},\ -2 < |z-2| < 1.$$

Завдання 6. Знайти розклад в ряд Лорана заданої функції $f(z)$ за степенями $z - z_0$ в залежності від її особливої точки:

$$f(z) = \frac{1}{(2z-1)(z-4)},\quad z_0 = 4.$$

Варіант 30

Завдання 1. Розкласти задану функцію в ряд Тейлора використовуючи відомі розклади:

$$f(z) = \cos(2z+1),\quad z_0 = 0.$$

Завдання 2. Знайти декілька перших членів розкладу в ряд за z заданої функції. Знайти область збіжності отриманого ряду:

$$f(z) = e^z.$$

Завдання 3. Знайти область збіжності заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(in)}{(z-i)^n}.$$

Завдання 4. Розкласти в ряд Лорана функцію в околі точки $z_0 = 0$, $f(z) = \dfrac{\sin^2 z}{z}$.

Завдання 5. Розкласти задану функцію в ряд Лорана в заданому кільці

$$f(z) = (z+i)^2 \cos\frac{1}{z+i}, \quad 0 < |z-i| < \infty.$$

Завдання 6. Знайти розклад в ряд Лорана заданої функції $f(z)$ за степенями $z - z_0$ в залежності від її особливої точки:

$$f(z) = \frac{z-3}{z^3 + 2z^2 - 7z + 4}, \quad z_0 = 5.$$

Зразок виконання лабораторної роботи 7

Завдання 1. Розкласти задану функцію в ряд Тейлора використовуючи відомі розклади:

a) $f(z) = \dfrac{z}{z^2 - 2z - 3}$;

b) $f(z) = \dfrac{1}{3 - 2z}$, $z_0 = 3$;

c) $f(z) = \sin(2z+1)$, $z_0 = -1$.

Завдання 2. Знайти декілька перших членів розкладу в ряд за z заданої функції. Знайти область збіжності отриманого ряду:

$$f(z) = \ln(3 - z).$$

Завдання 3. Знайти область збіжності заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)^n}{z^n}$$

Завдання 4. Розкласти в ряд Лорана функцію в околі точки $z_0 = 0$:

a) $f(z) = \dfrac{e^z}{z}$;

b) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2}$.

Завдання 5. Розкласти задану функцію в ряд Лорана в заданому кільці

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + z} \quad \text{а)}\, 0 < |z| < 1; \quad \text{б)}\, 1 < |z| < +\infty.$$

Завдання 6. Знайти розклад в ряд Лорана заданої функції $f(z)$ за степенями $z - z_0$ в залежності від її особливої точки:

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)}.$$

Завдання 1. Розв'язок:

а)Внесемо занчення шуканої функції $f(z)=\dfrac{z}{z^2-2z-3}$ та значення відомих розкладів функцій

```
(%i1) f1(z):=z/(z^2-2*z-3);
      z0:0;
```

$$(\%o1)\ f1(z):=\frac{z}{z^2-2z-3}$$

$$(\%o2)\ 0$$

```
(%i3) g1(z):= 1/(1-z);
      tg1:powerseries(g1(z),z,0)$niceindices(%);
      g2(z):= 1/(1+z);
      tg2:powerseries(g2(z),z,0)$niceindices(%);
```

$$(\%o3)\ g1(z):=\frac{1}{1-z}$$

$$(\%o5)\ \sum_{i=0}^{\infty} z^i$$

$$(\%o6)\ g2(z):=\frac{1}{1+z}$$

$$(\%o8)\ \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i z^i$$

```
(%i9) f:partfrac(f1(z),z);
```

$$(\%o9)\ \frac{1}{4(z+1)}+\frac{3}{4(z-3)}$$

```
(%i10) f1:first(f);
       f2:last(f);
```

$$(\%o10)\ \frac{1}{4(z+1)}$$

$$(\%o11)\ \frac{3}{4(z-3)}$$

```
(%i12) s2:subst(z/3,z,tg1)/4$
       s1:sumcontract(intosum(niceindices(tg2/4)))$
       s2:sumcontract(intosum(niceindices(s2)))$
       series: sumcontract(intosum(s1-s2));
```

$$(\%o15)\ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i z^i}{4}-\frac{z^i}{4\,3^i}$$

Виконаємо часкове розділення функції та знайдемо ряди для кожного доданку. Перевіремо знайдений ряд за допомогою вбудованої функції для ряду Тейлора.

```
(%i16) taylor(f1(z),z,0,4);
       A(i):=((-1)^i-1/3^i)*z^i/4$
       a(i):=((-1)^i)/4-1/(4*3^i);
       sum(A(i),i,0,4);
```

(%o16)/T/ $-\frac{z}{3}+\frac{2\,z^2}{9}-\frac{7\,z^3}{27}+\frac{20\,z^4}{81}+\ldots$

(%o18) $a(i):=\frac{(-1)^i}{4}-\frac{1}{4\,3^i}$

(%o19) $\frac{20\,z^4}{81}-\frac{7\,z^3}{27}+\frac{2\,z^2}{9}-\frac{z}{3}$

--> abs(R:limit(abs(A(i)*z/A(i+1)),i,inf));

(%o20) 1

b) $f(z)=\frac{1}{3-2z}$, $z_0=3$;

Внеснемо задану функцію та функцію відомих розкладів та виразимо через відому з використанням коефіцієнтів.Знайдемо значення кооефіцієнтів

(%i23) f(z):=1/(3-2*z);
g(z):=1/(1-z);
eq:f(z)=n*g(a*(z-3));

(%o23) $f(z):=\frac{1}{3-2\,z}$

(%o24) $g(z):=\frac{1}{1-z}$

(%o25) $\frac{1}{3-2\,z}=\frac{n}{1-a\,(z-3)}$

Підставимо значення у відомий розклад ряду та порівняємо з розкладом за допомогою вбудованої функції

(%i26) v:solve([at(eq,z=0),
at(eq,z=2)],[n,a])[1];

(%o26) $[n=-\frac{1}{3},a=-\frac{2}{3}]$

(%i27) ratsimp(ev(at(eq,v)));

(%o27) $-\frac{1}{2\,z-3}=-\frac{1}{2\,z-3}$

Введемо формулу n-го члена ряду та знайдемо радіус та область зібжності

(%i28) at(at(n,v)*taylor(g(at(a,v)*z),z,0,4),z=z-3);

(%o28) $\frac{2\,(z-3)}{9}-\frac{16\,(z-3)^4}{243}+\frac{8\,(z-3)^3}{81}-\frac{4\,(z-3)^2}{27}-\frac{1}{3}$

(%i29) taylor(f(z),z,3,4);

(%o29)/T/ $-\frac{1}{3}+\frac{2\,(z-3)}{9}-\frac{4\,(z-3)^2}{27}+\frac{8\,(z-3)^3}{81}-\frac{16\,(z-3)^4}{243}+\ldots$

(%i30) powerseries(f(z),z,3)$
niceindices(%);

(%o31) $-\sum_{i=0}^{\infty} 3^{-i-1}(-2)^i (z-3)^i$

(%i1) A(n):=-1*3^(-n-1)*(-2)^n*(z-3)^n;

(%o1) $A(n):=(-1)\,3^{-n-1}(-2)^n (z-3)^n$

(%i2) sum(A(n),n,0,inf)$
factcomb(%);

(%o3) $-\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n-1}(-2)^n (z-3)^n$

(%i4) lim: limit(abs(A(n+1)/A(n)),n,inf);

(%o4) $\frac{2|z-3|}{3}$

--> load(fourier_elim)$

--> fourier_elim([lim<1],[z]);

(%o15) $[z=3]\vee[3<z, z<\frac{9}{2}]\vee[\frac{3}{2}<z, z<3]$

(%i5) r:limit(abs(A(n)*(z-3)/A(n+1)),n,inf);

(%o5) $\frac{3}{2}$

c) $f(z)=\sin(2z+1), \quad z_0=-1.$

(%i6) f(z):=sin(2*z+1);
g(z):=sin(z);
w(z):=cos(z);

(%o6) $f(z):=\sin(2\,z+1)$

(%o7) $g(z):=\sin(z)$

(%o8) $w(z):=\cos(z)$

(%i9) ratsimp(ev(sin(2*(z+1)-1)=f(z)));

(%o9) $\sin(2\,z+1)=\sin(2\,z+1)$

(%i11) trigexpand(sin(2*(z+1)-1));

(%o11) $\cos(1)\sin(2\,(z+1))-\sin(1)\cos(2\,(z+1))$

(%i12) at(cos(1)* taylor(g(2*(z)),z,0,4) - sin(1)* taylor(w(2*(z)),z,0,4),z=z+1);

(%o12) $-\frac{2\sin(1)(z+1)^4}{3}-\frac{4\cos(1)(z+1)^3}{3}+2\sin(1)(z+1)^2+2\cos(1)(z+1)-\sin(1)$

(%i13) taylor(f(z),z,-1,4);

(%o13)/T/ $-\sin(1)+2\cos(1)(z+1)+2\sin(1)(z+1)^2-\frac{4\cos(1)(z+1)^3}{3}-\frac{2\sin(1)(z+1)^4}{3}+\ldots$

(%i14) subst(z+1,z,cos(1)*powerseries(g(2*z),z,0) - sin(1)*powerseries(w(2*z),z,0));

(%o14) $\cos(1)\left(\sum_{i1=0}^{\infty}\frac{(-1)^{i1}\,2^{2\,i1+1}(z+1)^{2\,i1+1}}{(2\,i1+1)!}\right)-\sin(1)\sum_{i2=0}^{\infty}\frac{(-1)^{i2}\,2^{2\,i2}(z+1)^{2\,i2}}{(2\,i2)!}$

(%i15) A(n):=cos(1)*(-1)^n*2^(2*n+1)*(z+1)^(2*n+1)/(2*n+1)! - sin(1)*(-1)^n*2^(2*n)*(z+1)^(2*n)/(2*n)!;
a(n):=cos(1)*(-1)^n*2^(2*n+1)/(2*n+1)! - sin(1)*(-1)^n*2^(2*n)/(2*n)!;

(%o15) $A(n):=\frac{\cos(1)(-1)^n 2^{2n+1}(z+1)^{2n+1}}{(2n+1)!}-\frac{\sin(1)(-1)^n 2^{2n}(z+1)^{2n}}{(2n)!}$

(%o16) $a(n):=\frac{\cos(1)(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+1)!}-\frac{\sin(1)(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!}$

(%i17) sum(A(n),n,0,inf);

(%o17) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(1)(-1)^n 2^{2n+1}(z+1)^{2n+1}}{(2n+1)!}-\frac{\sin(1)(-1)^n 2^{2n}(z+1)^{2n}}{(2n)!}$

(%i18) r:limit(abs(a(n+1)/a(n)),n,inf);
(%o18) und

Завдання 2. Розв'язок:

Завдання 2. Знайти декілька перших членів розкладу в ряд за z заданої функції $f(z)=\ln(3-z)$. Знайти область збіжності отриманого ряду.

(%i1) f(z):=log(3-z);
(%o1) $f(z):=\log(3-z)$

(%i2) taylor(f(z),z,0,9);

(%o2)/T/ $\log(3)-\frac{z}{3}-\frac{z^2}{18}-\frac{z^3}{81}-\frac{z^4}{324}-\frac{z^5}{1215}-\frac{z^6}{4374}-\frac{z^7}{15309}-\frac{z^8}{52488}-\frac{z^9}{177147}+\ldots$

(%i9) powerseries(f(z),z,0)$
niceindices(%);

(%o10) $\log(-1)-\sum_{i=0}^{\infty}\frac{3^{-i-1}z^{i+1}}{i+1}$

(%i8) A(i):= (3^(-i-1)*z^(i+1))/(i+1);

(%o8) $A(i):=\frac{3^{-i-1}z^{i+1}}{i+1}$

(%i5) sum(A(n),n,0,inf);

(%o5) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{-n-1}z^{n+1}}{n+1}$

--> lim:limit(abs(A(n+1)/A(n)),n,inf);

(%o83) $\frac{|z|}{3}$

--> fourier_elim([lim<1],[z]);

(%o84) $[3<z, z<0]\vee[z=0]\vee[0<z, z<3]$

Завдання 3. Розв'язок:

Завдання 3. Знайти область збіжності заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^n}{z^n}.$$

(%i1) A(n):=(sqrt(2) + %i * sqrt(2))^n/z^n;

(%o1) $A(n):=\frac{(\sqrt{2}+\%i\sqrt{2})^n}{z^n}$

--> lim2:limit(abs(A(n))^(1/n),n,inf);

(%o2) ∞

--> lim:limit(abs(A(n+1)/A(n)),n,inf);

(%o3) $\frac{2}{|z|}$

--> fourier_elim([lim<1],[z]);

(%o4) $[2<z]\vee[z<2]$

Завдання 4. Розв'язок:

Розкласти в ряд Лорана функцію в околі точки $z_0 = 0$:

a) $f(z)=\frac{e^z}{z}$;

(%i2) f(z):=%e^z/z;

(%o2) $f(z):=\frac{\%e^z}{z}$

(%i3) powerseries(f(z),z,0)$
t:niceindices(%);
taylor(f(z),z,0,4);

(%o4) $\frac{\sum_{i=0}^{\infty}\frac{z^i}{i!}}{z}$

(%o5)/T/ $\frac{1}{z}+1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{6}+\frac{z^3}{24}+\frac{z^4}{120}+...$

b) $f(z)=\frac{\sin z}{z^2}$

(%i6) f(z):=sin(z)/z^2;

(%o6) $f(z):=\frac{\sin(z)}{z^2}$

(%i7) powerseries(f(z),z,0)$
t:niceindices(%);
taylor(f(z),z,0,5);

(%o8) $\frac{\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i z^{2i+1}}{(2i+1)!}}{z^2}$

(%o9)/T/ $\frac{1}{z}-\frac{z}{6}+\frac{z^3}{120}-\frac{z^5}{5040}+...$

Завдання 5. Розв'язок:

Розкласти задану функцію в ряд Лорана в заданому кільці

$f(z)=\dfrac{1}{z^2+z}$, а) $0<|z|<1$, б) $1<|z|<+\infty$.

(%i1) f(z):=1/(z^2+z);

(%o1) $f(z):=\frac{1}{z^2+z}$

(%i2) f:partfrac(f(z),z+1);

(%o2) $\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}$

(%i11) f1:first(f)$
f2:last(f)$

--> t1:powerseries(f1,z,0);

(%o5) $\frac{1}{z}$

(%i7) subst(1/z,z,powerseries(1/(1+z),z,0))$
t3:niceindices(%);

(%o8) $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{z^i}$

--> A(i):=(-1)^i/z^i$
lim:limit(abs(A(i+1)/A(i)),i,inf);
fourier_elim([lim<1],[z]);

(%o9) $\frac{1}{|z|}$

(%o10) $[1<z]\vee[z<1]$

а)) $0<|z|<1$, отримаємо

--> ["0<|z|<1",t1+t2];

(%o14) $[0<|z|<1,\frac{1}{z}\sum_{i=0}^{\infty}(1)^i z^i]$

б)) $1<|z|<+\infty$, отримаємо

--> ["1<|z|<inf",t1+t3];

(%o11) $[1<|z|<inf,\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(1)^i}{z^i}\right)+\frac{1}{z}]$

Завдання 6. Розв'язок:

Вводимо задану функцію $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$, $z_0=1$. Знаходимо особливі точки.

```
(%i1) f(z):= 1/(z*(z-1));
      z0:1$
```

(%o1) $f(z):=\frac{1}{z(z-1)}$

```
(%i3) solve(1/f(z)=0,z);
```

(%o3) $[z=0, z=1]$

```
(%i4) print(0, "<",abs(z-1),"<",1)$
      print(1, "<",abs(z-1),"<",inf)$
```

$0 < |z-1| < 1$

$1 < |z-1| < \infty$

```
(%i6) f:partfrac(f(z),z-1);
```

(%o6) $\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}$

```
(%i7) f1:first(f)$
      f2:last(f)$
```

```
(%i11) powerseries(f2,z,1)$
       t1:niceindices(%);
```

(%o12) $-\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i(z-1)^i$

```
(%i13) A(i):=-(-1)^i*(z-1)^i;
       lim:limit(abs(A(i+1)/A(i)),i,inf);
       fourier_elim([lim<1],[z]);
```

(%o13) $A(i):=\left(-(-1)^i\right)(z-1)^i$

(%o14) $|z-1|$

(%o13) $[0<z, z<2]$

```
(%i16) powerseries(f1,z,1)$
       t2:niceindices(%);
```

(%o17) $\frac{1}{z-1}$

```
(%i18) subst(1/(1-z),z,powerseries(1/(1+z),z,0))$
       t3:niceindices(%);
```

(%o19) $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{(1-z)^i}$

```
(%i20) A(i):=(-1)^i/(1-z)^i;
       lim:limit(abs(A(i+1)/A(i)),i,inf);
       fourier_elim([lim<1],[z]);
```

(%o20) $A(i):=\frac{(-1)^i}{(1-z)^i}$

(%o21) $\frac{1}{|z-1|}$

(%o20) $[2<z] \vee [z<0]$

```
(%i23) ["0<|z-1|<1",t2+t1];
       ["1<|z-1|<inf",t2+t3];
```

(%o23) $\left[0<|z-1|<1, \frac{1}{z-1}-\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i(z-1)^i\right]$

(%o24) $\left[1<|z-1|<inf, \frac{1}{z-1}+\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{(1-z)^i}\right]$

Лабораторна робота 8

Тема роботи: **«Нулі та особливі точки функції комплексної змінної»**
Мета роботи: навчитись шукати нулі та особливі точки, визначати порядок нулів та тип особливих точок використовуючи програму Maxima.
Завдання:

Варіант 1

Завдання 1. Знайти нулі функцій та визначити їх порядок:

a) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$;

b) $\mathrm{f(z)} = (\mathrm{z} + \pi i)\ \mathrm{shz}$;

c) $f(z)=1+chz$.

Завдання 2. Знайти особливі точки функцій та визначити їх характер:

a) $f(z)=\dfrac{1}{z-\sin z}$;

b) $f(z)=\dfrac{\sin z}{e^{-z}+z-1}$;

c) $f(z)=\dfrac{shz}{z-shz}$.

Варіант 2

Завдання 1. Знайти нулі функцій та визначити їх порядок:

a) $f(z)=z^2\sin z$;

b) $f(z)=1+chz$;

c) $f(z)=\dfrac{(1-shz)^2}{z}$.

Завдання 2. Знайти особливі точки функцій та визначити їх характер:

a) $f(z)=\dfrac{1}{1-\sin z}$;

b) $f(z)=\cos\dfrac{1}{z}$;

c) $f(z)=\dfrac{z}{z^5+2z^4+z^3}$.

Варіант 3

Завдання 1. Знайти нулі функцій та визначити їх порядок:

a) $f(z)=(z^2+\pi^2)(1+e^{-z})$;

b) $f(z)=\cos z+chiz$;

c) $f(z)=\dfrac{\cos z-1}{shz}$.

Завдання 2. Знайти особливі точки функцій та визначити їх характер:

a) $f(z)=\dfrac{1}{e^{-z}-1}+\dfrac{1}{z^2}$;

b) $f(z)=\dfrac{1-e^{-z}}{z}$;

c) $f(z)=(z-1)e^{\frac{1}{z-1}}$.

Варіант 4

Завдання 1. Знайти нулі функцій та визначити їх порядок:

a) $f(z)=2shz^4-z$;

b) $f(z)=(z+1)^3(z-2)$;

c) $f(z)=\dfrac{z}{(z+1)^3(z-2)^2}$.

Завдання 2. Знайти особливі точки функцій та визначити їх характер:

a) $f(z)=\dfrac{tgz}{z^2}$;

b) $f(z)=\dfrac{z^2\sin\frac{1}{z}}{z^2-4z}$;

c) $f(z)=\dfrac{z^3+5}{\sin z}$.

Варіант 5

Завдання 1. Знайти нулі функцій та визначити їх порядок:

a) $f(z)=\dfrac{shz}{z-shz}$;

a) $f(z)=(\sin z+\pi i)\cos z$;

a) $f(z)=\sin z+chz$.

Завдання 2. Знайти особливі точки функцій та визначити їх характер:

a) $f(z)=\dfrac{z-2}{1-\sin z}$;

b) $f(z)=\dfrac{\sin z}{e^{z+5}+tgz-1}$;

c) $f(z)=\dfrac{z^4-\cos z}{4z-shz}$.

Варіант 6

Завдання 1. Знайти нулі функцій та визначити їх порядок:

a) $f(z)=(shz+\pi^2)^2$;

b) $f(z)=\cos z+2iz$;

c) $f(z)=\sin z+\cos z-shz$.

Завдання 2. Знайти особливі точки функцій та визначити їх характер:

a) $f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3}$;

b) $f(z) = \frac{e^{-z}}{shz + chz}$;

c) $f(z) = \frac{(z-1)(z+\cos z)}{(z+2)z^5}$.

Варіант 7

Завдання 1. Знайти нулі функцій та визначити їх порядок:

a) $f(z) = z^3 ch2z$;

b) $f(z) = \cos z - z^2$;

c) $f(z) = \frac{z}{3} + shz^3$.

Завдання 2. Знайти особливі точки функцій та визначити їх характер:

a) $f(z) = \frac{1}{z - z^3}$;

b) $f(z) = \frac{z^4}{1+z^4}$;

c) $f(z) = \frac{z^5}{1-z}$.

Варіант 8

Завдання 1. Знайти нулі функцій та визначити їх порядок:

a) $f(z) = z^6 + 4z^2$;

b) $f(z) = z^2 \sin z$;

c) $f(z) = \frac{sh^2 z}{z}$.

Завдання 2. Знайти особливі точки функцій та визначити їх характер:

a) $f(z) = \frac{1}{z(z^2+4)^2}$;

b) $f(z) = \frac{e^z}{1+z^2}$;

c) $f(z) = \frac{z^2+1}{e^z}$.

Варіант 9

Завдання 1. Знайти нулі функцій та визначити їх порядок:

a) $f(z) = 1 + chz + shz$;

b) $f(z) = \frac{(1-shz)^2}{z}$;

c) $f(z) = (z + \pi i)shz$.

Завдання 2. Знайти особливі точки функцій та визначити їх характер:

a) $f(z) = ze^{-z}$;

b) $f(z) = \frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z}$;

c) $f(z) = \frac{e^z}{z(1 - e^{-z})}$.

Варіант 10

Завдання 1. Знайти нулі функцій та визначити їх порядок:

a) $f(z) = \cos z^3$;

b) $f(z) = z^2 - 8z^3$;

c) $f(z) = z + ch^2 z$.

Завдання 2. Знайти особливі точки функцій та визначити їх характер:

a) $f(z) = 1 - \frac{e^z}{2 + e^z}$;

b) $f(z) = \frac{1}{z^3(2 - \cos z)}$;

c) $f(z) = thz$.

Варіант 11

Завдання 1. Знайти нулі функцій та визначити їх порядок:

a) $f(z) = \frac{z^6}{(\frac{z}{2})^2 - (\sin\frac{z}{2})^2}$;

b) $f(z) = e^{\sin z} - e^{tgz}$;

c) $f(z) = \frac{z^3}{1 + z - e^z}$.

Завдання 2. Знайти особливі точки функцій та визначити їх характер:

a) $f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}$;

b) $f(z) = ze^{\frac{1}{z}}$;

c) $f(z) = e^{\frac{z}{1-z}}$.

Варіант 12

Завдання 1. Знайти нулі функцій та визначити їх порядок:

a) $f(z) = 2(chz - 1) - z^2$;

b) $f(z) = \frac{(1 - \cos 2z)^2}{z - shz}$;

c) $f(z) = e^z \ln(1 - z)$.

Завдання 2. Знайти особливі точки функцій та визначити їх характер:

a) $f(z) = e^{z - \frac{1}{z}}$;

b) $f(z) = \dfrac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^z - 1}$;

c) $f(z) = \dfrac{1}{\sin z}$.

<u>Варіант 13</u>

Завдання 1. Знайти нулі функцій та визначити їх порядок:

a) $f(z) = e^z(e^z - 1)$;

b) $f(z) = 6\sin z^3 + z^3(z^6 - 6)$;

c) $f(z) = 3(tgz - z)$.

Завдання 2. Знайти особливі точки функцій та визначити їх характер:

a) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2}$;

b) $f(z) = tgz$;

c) $f(z) = tg^2 z$.

<u>Варіант 14</u>

Завдання 1. Знайти нулі функцій та визначити їх порядок:

a) $f(z) = z^2 + 2z^3 + 3z^4$;

b) $f(z) = \sin z^4 + \cos z$;

c) $f(z) = th^2 z - z$.

Завдання 2. Знайти особливі точки функцій та визначити їх характер:

a) $f(z) = \dfrac{ctgz}{z^2}$;

b) $f(z) = ctgz - \dfrac{1}{z}$;

c) $f(z) = tg^2 z - \dfrac{2}{z}$.

<u>Варіант 15</u>

Завдання 1. Знайти нулі функцій та визначити їх порядок:

a) $f(z) = e^{-z} - ch^2 z$;

b) $f(z) = z^{\frac{1}{2}} + 4z^4$;

c) $f(z) = e^{\cos z} - e^{\sin z}$.

Завдання 2. Знайти особливі точки функцій та визначити їх характер:

a) $f(z)=\dfrac{1}{\sin z-\sin z^2}$;

b) $f(z)=\sin\dfrac{1}{1-z}$;

c) $f(z)=\dfrac{z^7}{(z^2-4)^2\cos\dfrac{1}{z-2}}$.

Варіант 16

Завдання 1. Знайти нулі функцій та визначити їх порядок:

a) $f(z)=thz-tgz$;

b) $f(z)=e^{-z}+z^4$;

c) $f(z)=2z-z^5(1-chz)$.

Завдання 2. Знайти особливі точки функцій та визначити їх характер:

a) $f(z)=\dfrac{1+\cos z}{z-\pi}$;

b) $f(z)=\dfrac{z^2-3z+2}{z^2-2z+1}$;

c) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2}$.

Варіант 17

Завдання 1. Знайти нулі функцій та визначити їх порядок:

a) $f(z)=\dfrac{\sin z-2z}{z+5}$;

b) $f(z)=(2z+\pi)\cos^2 z$;

c) $f(z)=tgz+chz-z^2$.

Завдання 2. Знайти особливі точки функцій та визначити їх характер:

a) $f(z)=\dfrac{z+5}{(z-\sin z)z}$;

b) $f(z)=\dfrac{\sin z+2}{shz^3+z}$;

c) $f(z)=\dfrac{e^{2z}}{1-shz}$.

Варіант 18

Завдання 1. Знайти нулі функцій та визначити їх порядок:

a) $f(z)=\sin z-5z$;

b) $f(z)=(1+chz)^2$;

c) $f(z)=\dfrac{1-shz}{2z+z^2}$.

Завдання 2. Знайти особливі точки функцій та визначити їх характер:

a) $f(z)=\dfrac{1}{1-\sin z}+1-\sin z$;

b) $f(z)=\cos 2z+e^{z}$;

c) $f(z)=\dfrac{z+7}{z-3}$.

Варіант 19

Завдання 1. Знайти нулі функцій та визначити їх порядок:

a) $f(z)=\dfrac{(z^2+\pi^2)}{1-\cos z}$;

b) $f(z)=e^{z}iz$;

c) $f(z)=\dfrac{z-1}{tgz(3+z)}$.

Завдання 2. Знайти особливі точки функцій та визначити їх характер:

a) $f(z)=\dfrac{z}{ctgz+3}$;

b) $f(z)=\dfrac{z}{z+2e^{\frac{1}{z}}}$;

c) $f(z)=\dfrac{1}{z+6+6e^{z}}$.

Варіант 20

Завдання 1. Знайти нулі функцій та визначити їх порядок:

a) $f(z)=shz(z-3)$;

b) $f(z)=(cthz-2)^2-2thz$;

c) $f(z)=(1-z^2)^2$.

Завдання 2. Знайти особливі точки функцій та визначити їх характер:

a) $f(z)=\dfrac{\cos z}{z(15-z)}$;

b) $f(z)=\dfrac{z^2+5}{z^2}$;

c) $f(z)=\dfrac{1}{z(2-\cos z)}$.

Варіант 21

Завдання 1. Знайти нулі функцій та визначити їх порядок:

a) $f(z)=shz(z+1)$;

b) $f(z)=z+z^4-2z^5$;

c) $f(z)=\sin z+11$.

Завдання 2. Знайти особливі точки функцій та визначити їх характер:

a) $f(z)=\dfrac{z-chz}{z(z-8)}$;

b) $f(z)=\dfrac{1}{z^3-z}$;

c) $f(z)=\dfrac{1}{2z-tgz}$.

Варіант 22

Завдання 1. Знайти нулі функцій та визначити їх порядок:

a) $f(z)=2z+z^2$;

b) $f(z)=z(z-18)$;

c) $f(z)=z^2-16$.

Завдання 2. Знайти особливі точки функцій та визначити їх характер:

a) $f(z)=\dfrac{1}{\sin z+2}$;

b) $f(z)=\dfrac{e^{-z}}{z+3}$;

c) $f(z)=\dfrac{(z-1)}{(z+2)z}$.

Варіант 23

Завдання 1. Знайти нулі функцій та визначити їх порядок:

a) $f(z)=(z+6)^2$;

b) $f(z)=\cos z+2$;

c) $f(z)=\dfrac{z}{3}+z^2$.

Завдання 2. Знайти особливі точки функцій та визначити їх характер:

a)$f(z)=\frac{1}{z(1-z^2)}$;

b)$f(z)=\frac{1}{1+z^4}$;

c)$f(z)=\frac{1}{(1-z)^2}$.

Варіант 24

Завдання 1. Знайти нулі функцій та визначити їх порядок:

a) $f(z)=z+z^2$;

b) $f(z)=\sin z-1$;

c) $f(z)=z^2+z+5$.

Завдання 2. Знайти особливі точки функцій та визначити їх характер:

a) $f(z)=\dfrac{1}{z(z+16)}$;

b) $f(z)=\dfrac{\sin z}{1+z^2}$;

c) $f(z)=\dfrac{z^2+4}{thz}$.

<u>Варіант 25</u>

Завдання 1. Знайти нулі функцій та визначити їх порядок:

a) $f(z)=1+z+e^z$;

b) $f(z)=(1-\sin z)(2+\sin z)$;

c) $f(z)=\sin z(z-21)$.

Завдання 2. Знайти особливі точки функцій та визначити їх характер:

a) $f(z)=\dfrac{ze^{-z}}{5+z}$;

b) $f(z)=\dfrac{1}{e^z-1}$;

c) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z(1-z)}$.

<u>Варіант 26</u>

Завдання 1. Знайти нулі функцій та визначити їх порядок:

a) $f(z)=z^3\sin z$;

b) $f(z)=z^2-4\sin z$;

c) $f(z)=z^2 cthz$.

Завдання 2. Знайти особливі точки функцій та визначити їх характер:

a) $f(z)=\dfrac{13z}{1+z+e^z}$;

b) $f(z)=\dfrac{z^3}{2-\cos z}$;

c) $f(z)=thz+2$.

<u>Варіант 27</u>

Завдання 1. Знайти нулі функцій та визначити їх порядок:

a) $f(z)=\dfrac{z+2}{2-(\sin\frac{z}{2})^2}$;

b) $f(z)=e^{2z}+4$;

c) $f(z)=\dfrac{z+2}{z-e^z}$.

Завдання 2. Знайти особливі точки функцій та визначити їх характер:

a) $f(z)=\dfrac{23z^3}{\sin z}$;

b) $f(z)=\dfrac{z}{z-e^{2z}}$;

c) $f(z)=e^{\frac{z}{1+2z}}$.

Варіант 28

Завдання 1. Знайти нулі функцій та визначити їх порядок:

a) $f(z)=(chz-1)^2-z^2$;

b) $f(z)=\dfrac{1+2z}{z-shz}$;

c) $f(z)=\ln(1-z)$.

Завдання 2. Знайти особливі точки функцій та визначити їх характер:

a) $f(z)=\dfrac{2thz^3}{z(z+6)}$;

b) $f(z)=\dfrac{\cos^2 z}{e^z-1}$;

c) $f(z)=\dfrac{z+3}{\sin z+3}$.

Варіант 29

Завдання 1. Знайти нулі функцій та визначити їх порядок:

a) $f(z)=z(e^z-2)$;

b) $f(z)=6\sin z^3+z^3$;

c) $f(z)=z(tgz-1)$.

Завдання 2. Знайти особливі точки функцій та визначити їх характер:

a) $f(z)=\dfrac{z+2}{z^2-1}$;

b) $f(z)=\dfrac{z(z-9)}{z-3}$;

c) $f(z)=\dfrac{tg^2 z}{z}$.

Варіант 30

Завдання 1. Знайти нулі функцій та визначити їх порядок:

a) $f(z)=z+z^3+z^4$;

b) $f(z)=\sin z+4shz$;

c) $f(z)=z^{-5}\sin z$.

Завдання 2. Знайти особливі точки функцій та визначити їх характер:

a) $f(z)=\dfrac{ctgz}{z^2+5z}$;

b) $f(z)=\dfrac{shz}{z(z^3-12)}$;

c) $f(z)=\dfrac{2}{tg^2z+6}$.

Зразок виконання лабораторної роботи 8

Завдання 1. Знайти нулі функції та визначити їх порядок.

a) $f(z)=(z^2+1)^3 shz$.

Завдання 2. Знайти особливі точки функцій та визначити їх характер:

a) $f(z)=\dfrac{1}{z-1}$;

b) $f(z)=\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{z}$;

c) $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)^3(z-2)}$;

d) $f(z)=\dfrac{1-e^{-z}}{z}$.

Завдання 1. Розв'язок:

a) $f(z)=(z^2+1)^3 shz$

Для знаходження нулів функції розв'язуємо рівняння $f(z)=0$.

```
(%i49) f:(z^2+1)^3*sinh(z);
```

$$\text{(\%o49)}\ (z^2+1)^3\sinh(z)$$

```
(%i50) solve(f=0,z);
(%o50) [z=0,z=-%i,z=%i]
```

Порядок нуля функції дорівнює порядку першої ненульової похідної в цій точці(нулі функції).

Знаходимо порядок нуля $z=0$. Для цього обчислюємо похідну першого порядку нашої функції.

```
(%i83) diff(f,z,1);
```

$$\text{(\%o83)}\ 6z(z^2+1)^2\sinh(z)+(z^2+1)^3\cosh(z)$$

Задаємо значення нуля функції через змінну z_1.

```
(%i88) z1:0;
(%o88) 0
```

Обчислюємо значення похідної в точці $z_1=0$.

```
(%i89) f1:6*z1*(z1^2+1)^2*sinh(z1)+(z1^2+1)^3*cosh(z1);
(%o89) 1
```

Оскільки значення похідної першого порядку відмінне від нуля(дорівнює 1), нуль функції $z_1=0$ – першого порядку.

Для обчислення порядку нуля функції $z_1=-i$ очищаємо значення змінної z1 та проводимо аналогічні дії до того моменту, коли похідна в точці z1 матиме відмінне від нуля значення. Порядок похідної дорівнюватиме порядку нуля функції.

```
(%i90) kill(z1);
(%o90) done

(%i91) z1:-%i;
(%o91) -%i

(%i93) f1:6*z1*(z1^2+1)^2*sinh(z1)+(z1^2+1)^3*cosh(z1);
(%o93) 0

(%i94) diff(f,z,2);
```

$$(z^2+1)^3\sinh(z)+6(z^2+1)^2\sinh(z)+24z^2(z^2+1)\sinh(z)+12z(z^2+1)^2\cosh(z) \quad (\%o94)$$

```
(%i99) f2:(z1^2+1)^3*sinh(z1)+6*(z1^2+1)^2*sinh(z1)+24*z1^2*(z1^2+1)*
       sinh(z1)+12*z1*(z1^2+1)^2*cosh(z1);
(%o99) 0

(%i97) diff(f,z,3);
```

$$18z(z^2+1)^2\sinh(z)+48z^3\sinh(z)+72z(z^2+1)\sinh(z)+(z^2+1)^3\cosh(z)+18(z^2+1)^2\cosh(z)+72z^2(z^2+1)\cosh(z) \quad (\%o97)$$

```
(%i100) f3:18*z1*(z1^2+1)^2*sinh(z1)+48*z1^3*sinh(z1)+72*z1*(z1^2+1)*
        sinh(z1)+(z1^2+1)^3*cosh(z1)+18*(z1^2+1)^2*cosh(z1)+72*z1^2*(z1^2+1)*cosh(z1);
(%o100) 48 sin(1)
```

Оскільки порядок першої похідної відмінної від нуля в точці $z_1=-i$ дорівнює 3, то і порядок точки z1(нуля) дорівнює 3.

Для обчислення порядку нуля функції $z_1=i$ очищаємо значення змінної z1 та проводимо аналогічні дії до того моменту, коли похідна в точці z1 матиме відмінне від нуля значення. Порядок похідної дорівнюватиме порядку нуля функції.

```
(%i21) kill(z1);

       z1: %i;
(%o21) done
(%o22) %i

(%i9) f1:6*z1*(z1^2+1)^2*sinh(z1)+(z1^2+1)^3*cosh(z1);
(%o9) 0

(%i11) diff(f,z,2);
```

(%o11) $(z^2+1)^3 \sinh(z)+6(z^2+1)^2 \sinh(z)+24 z^2 (z^2+1) \sinh(z)+12 z (z^2+1)^2 \cosh(z)$

```
(%i12) f2:(z1^2+1)^3*sinh(z1)+6*(z1^2+1)^2*sinh(z1)+24*z1^2*(z1^2+1)*
       sinh(z1)+12*z1*(z1^2+1)^2*cosh(z1);
(%o12) 0

(%i13) diff(f,z,3);
```

(%o13) $18 z (z^2+1)^2 \sinh(z)+48 z^3 \sinh(z)+72 z (z^2+1) \sinh(z)+(z^2+1)^3 \cosh(z)+18 (z^2+1)^2 \cosh(z)+72 z^2 (z^2+1) \cosh(z)$

```
(%i14) f3:18*z1*(z1^2+1)^2*sinh(z1)+48*z1^3*sinh(z1)+72*z1*(z1^2+1)
       *sinh(z1)+(z1^2+1)^3*cosh(z1)+18*(z1^2+1)^2*cosh(z1)
       +72*z1^2*(z1^2+1)*cosh(z1);
(%o14) 48 sin(1)
```

Оскільки порядок першої похідної відмінної від нуля в точці $z_1 = i$ дорівнює 3, то і порядок точки z1(нуля) дорівнює 3.

Завдання 2. Розв’язок:

а) $f(z) = \dfrac{1}{z-1}$

Для визначення особливої точки знаменник дробу прирівнюємо до нуля та розв’язуємо отримане рівняння.

```
(%i10) f: z-1;
(%o10) z-1

(%i11) solve(f=0,z);
(%o11) [z=1]
```

Отримуємо особливу точку $z = 1$. Для визначення характеру особливої точки обчислюємо границю функції в цій точці.

```
(%i12) f1: 1/(z-1);
```

(%o12) $\dfrac{1}{z-1}$

```
(%i14) limit(f1,z,1);
(%o14) infinity
```

Границя дорівнює нескінченності та степінь при z дорівнює 1 , отже особлива точка- простий полюс.

b) $f(z)=\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{z}$

Для визначення особливої точки знаменник дробу прирівнюємо до нуля та розв'язуємо отримане рівняння.

```
(%i30) f: z;
(%o30) z

(%i31) solve(f=0,z);
(%o31) [z=0]
```

Отримуємо особливу точку $z=0$. Для визначення характеру особливої точки обчислюємо границю функції в цій точці.

```
(%i36) f1: exp(1/z)/z;
(%o36) %e^(1/z)/z

(%i37) limit(f1,z,0);
(%o37) und
```

Границі в точці $z_0=0$ не існує, отже z_0 - суттєво особлива точка.

c) $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)^3(z-2)}$

Для визначення особливої точки знаменник дробу прирівнюємо до нуля та розв'язуємо отримане рівняння.

```
(%i23) f:((z+1)^3)*(z-2);
(%o23) (z-2)(z+1)^3

(%i24) solve(f=0,z);
(%o24) [z=-1,z=2]
```

Отримуємо особливі точки $z=-1$ та $z=2$. Для визначення характеру особливих точок обчислюємо границі функції в цих точках.

```
(%i26) f1: 1/((z-2)*((z+1)^3));
(%o26) 1/((z-2)(z+1)^3)

(%i28) limit(f1,z,2);
(%o28) infinity

(%i29) limit(f1,z,-1);
(%o29) infinity
```

Границя в точці $z=2$ є нескінченною і степінь при z дорівнює 1, отже $z=2$- простий полюс.

Границя в точці $z=-1$ є нескінченною і степінь при z дорівнює 3, отже $z=-1$- полюс 3-го порядку.

d) $f(z)=\dfrac{1-e^{-z}}{z}$

Для визначення особливої точки знаменник дробу прирівнюємо до нуля та розв'язуємо отримане рівняння.

```
(%i30) f: z;
(%o30) z

(%i31) solve(f=0,z);
(%o31) [z=0]
```

Отримуємо особливу точку $z=0$. Для визначення характеру особливої точки обчислюємо границю функції в цій точці.

```
(%i32) f1: (1-exp(-z))/z;
```

(%o32) $\dfrac{1-\%e^{-z}}{z}$

```
(%i33) limit(f1,z,0);
(%o33) 1
```

Границя в точці $z=0$ дорівнює 1, тобто є скінченною, отже $z=0$- усувна особлива точка.

Лабораторна робота 9

Тема роботи: **«Лишки функцій комплексної змінної та їх застосування»**
Мета роботи: навчитись знаходити лишки функцій в особливих точках та обчислювати інтеграли за теоремою Коші про лишки, використовуючи Maxima.
Завдання:

<u>Варіант 1</u>

Завдання 1. Знайти та обчислити лишки функцій в особливих точках:

1) $f(z)=\dfrac{e^z}{(z+1)^2(z-2)}$;

2) $f(z)=\dfrac{\sin^2 z}{z^2-5z+6}$.

Завдання 2. Обчислити інтеграли, використовуючи теорему Коші про лишки:

1) $\int\limits_C \dfrac{zdz}{(z-1)^2(z+2)}$, де C: $(x-1)^2+(y+1)^2=1$;

2) $\int\limits_{|z|=1}(\sin\dfrac{1}{z}+3z^3)dz$.

<u>Варіант 2</u>

Завдання 1. Знайти та обчислити лишки функцій в особливих точках:

1) $f(z)=\dfrac{z}{(z+1)^3(z-2)^2}$;

2) $f(z)=tg^2 z$.

Завдання 2. Обчислити інтеграли, використовуючи теорему Коші про лишки:

1) $\int\limits_{|z-i|=\frac{3}{2}} \dfrac{e^{1/z}}{z^2+1}dz$;

2) $\int\limits_C \dfrac{\cos^2 z}{z^2(z+1)(z-2)}dz$, де C – $(x+1)^2+y^2=9$.

<u>Варіант 3</u>

Завдання 1. Знайти та обчислити лишки функцій в особливих точках:

1) $f(z)=\cos\dfrac{1}{z}+z^3$;

2) $f(z)=\dfrac{e^{3-z}}{(z-1)^2}$.

Завдання 2. Обчислити інтеграли, використовуючи теорему Коші про лишки:

1) $\int\limits_{|z-i|=3} \dfrac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2}dz$;

2) $\int\limits_{|z|=1} \dfrac{\cos z}{\sqrt{z+1}}dz$.

Варіант 4

Завдання 1. Знайти та обчислити лишки функцій в особливих точках:

1) $f(z) = z^2 \sin\frac{1}{z}$;

2) $f(z) = ctg\, z - tg\, z$.

Завдання 2. Обчислити інтеграли, використовуючи теорему Коші про лишки:

1) $\int\limits_{|z+1|=4} \frac{z}{e^z + 3} dz$;

2) $\int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z^4 + 1}$.

Варіант 5

Завдання 1. Знайти та обчислити лишки функцій в особливих точках:

1) $f(z) = \cos\frac{1}{z} + z^3$;

2) $f(z) = \frac{z}{(z+1)^3 (z-2)^2}$.

Завдання 2. Обчислити інтеграли, використовуючи теорему Коші про лишки:

1) $\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}} z^2 \sin\frac{1}{z} dz$;

2) $\int\limits_{|z+1|=3} \frac{\cos z}{z^3 (z-1)^2} dz$.

Варіант 6

Завдання 1. Знайти та обчислити лишки функцій в особливих точках:

1) $f(z) = \frac{\sin 2z}{(z+i)(z-\frac{i}{2})^2}$;

2) $f(z) = \frac{e^z}{z^2 (z^2+1)}$.

Завдання 2. Обчислити інтеграли, використовуючи теорему Коші про лишки:

1) $\int\limits_{|z|=2} \frac{e^z}{(z+1)^3 (z-2)} dz$;

2) $\int\limits_{|z|=1} \frac{1}{\sin z} dz$.

Варіант 7

Завдання 1. Знайти та обчислити лишки функцій в особливих точках:

1) $f(z) = tgz$;

2) $f(z) = 1 - \cos\frac{1}{z}$.

Завдання 2. Обчислити інтеграли, використовуючи теорему Коші про лишки:

1) $\int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z^4 + 1}$;

2) $\int\limits_{|z|=2} tg^2 z\, dz$.

Варіант 8

Завдання 1. Знайти та обчислити лишки функцій в особливих точках:

1) $f(z) = \frac{e^{z^2}}{z^2 + 1}$;

2) $f(z) = \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1}$.

Завдання 2. Обчислити інтеграли, використовуючи теорему Коші про лишки:

1) $\int\limits_{|z|=2} \frac{\cos z}{z^3 - \frac{\pi}{4} z^2} dz$;

2) $\int\limits_{|z=1|=2} \frac{\cos z}{(z-1)^3 z^4} dz$.

Варіант 9

Завдання 1. Знайти та обчислити лишки функцій в особливих точках:

1) $f(z) = ctg^2 z$;

2) $f(z) = \frac{z - 1}{z^{10}(z + 2)}$.

Завдання 2. Обчислити інтеграли, використовуючи теорему Коші про лишки:

1) $\int\limits_{|z|=3} \frac{(\pi z)}{(z+2)^3 (z-3)} dz$;

2) $\int\limits_{|z|=1} (\sin\frac{1}{z} + z) dz$.

Варіант 10

Завдання 1. Знайти та обчислити лишки функцій в особливих точках:

1) $f(z) = \cos\frac{1}{z} + z^3$;

2) $f(z) = \frac{\sin^2 z}{z^2 - 5z + 6}$.

Завдання 2. Обчислити інтеграли, використовуючи теорему Коші про лишки:

1) $\int\limits_{|z|=1} (\sin\frac{1}{z} + 3z^3)dz$;

2) $\int\limits_{|z|<2} \frac{z\,dz}{(z^2-2)(z+1)}$.

<u>Варіант 11</u>

Завдання 1. Знайти та обчислити лишки функцій в особливих точках:

1) $f(z) = \frac{z}{(z+1)^3(z-2)^2}$;

2) $\int\limits_{|z+1|=4} \frac{z}{e^z+3}dz$.

Завдання 2. Обчислити інтеграли, використовуючи теорему Коші про лишки:

1) $\int\limits_{|z-i|=\frac{3}{2}} \frac{e^{1/z}}{z^2+1}dz$;

2) $\int\limits_{|z|=1} \frac{1}{\sin z}dz$.

<u>Варіант 12</u>

Завдання 1. Знайти та обчислити лишки функцій в особливих точках:

1) $f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^2(z-2)}$;

2) $f(z) = z^2 \sin\frac{1}{z}$.

Завдання 2. Обчислити інтеграли, використовуючи теорему Коші про лишки:

1) $\int\limits_{|z|=3} \frac{1}{z(z^2+4)}dz$;

2) $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1} (ctg^2 z + tg\, z^2)dz$.

<u>Варіант 13</u>

Завдання 1. Знайти та обчислити лишки функцій в особливих точках:

1) $f(z) = \frac{1}{z^2+9}$;

2) $f(z) = \frac{\sin \pi z}{z^2(1-z)}$.

Завдання 2. Обчислити інтеграли, використовуючи теорему Коші про лишки:

1) $\int\limits_{|z|=1} (\sin\frac{1}{z} + 3z^3)dz$;

2) $\int\limits_{|z|=1} e^{\frac{3}{z}}dz$.

Варіант 14

Завдання 1. Знайти та обчислити лишки функцій в особливих точках:

1) $f(z) = \cos\frac{1}{1-z}$;

2) $f(z) = \frac{e^{\pi z}}{(z-i)^4}$.

Завдання 2. Обчислити інтеграли, використовуючи теорему Коші про лишки:

1) $\int\limits_{|z-i|=1} \frac{z}{(z^2+1)(z+1)}dz$;

2) $\int\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{\sqrt{z+1}}dz$.

Варіант 15

Завдання 1. Знайти та обчислити лишки функцій в особливих точках:

1) $f(z) = \frac{z^2-1}{z^2+1}$;

2) $f(z) = ctg^2 z$.

Завдання 2. Обчислити інтеграли, використовуючи теорему Коші про лишки:

1) $\int\limits_{|z|=2} \frac{1}{(z-1)(z^2+1)}dz$;

2) $\int\limits_{|z|=1} \frac{e^z dz}{z^2(z-2)}$.

Варіант 16

Завдання 1. Знайти та обчислити лишки функцій в особливих точках:

1) $f(z) = \frac{e^z+1}{z^2-1}$;

2) $f(z) = \frac{\cos^2\frac{\pi}{z}}{z+1}$.

Завдання 2. Обчислити інтеграли, використовуючи теорему Коші про лишки:

1) $\int\limits_{|z-2|=4} \frac{z}{(1-z)(z+2)^2}dz$;

2) $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=2} \sin^2\frac{1}{z}dz$.

Варіант 17

Завдання 1. Знайти та обчислити лишки функцій в особливих точках:

1) $f(z) = \frac{\sin\pi z}{z^2(1-z)}$;

2) $f(z) = \frac{1}{z-\sin z}$.

Завдання 2. Обчислити інтеграли, використовуючи теорему Коші про лишки:

1) $\int\limits_{|z|=2} \frac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}dz$;

2) $\int\limits_{|z|=2} (\sin^2\frac{1}{z} - \frac{1}{\cos z})dz$.

<u>Варіант 18</u>

Завдання 1. Знайти та обчислити лишки функцій в особливих точках:

1) $f(z) = ctg\, z - tg\, z$;

2) $f(z) = \frac{\cos z}{z^2(z-\frac{\pi}{2})}$.

Завдання 2. Обчислити інтеграли, використовуючи теорему Коші про лишки:

1) $\int\limits_{|z|=3} \frac{(\pi z)}{(z+2)^3(z-3)}dz$;

2) $\int\limits_{|z|=2} tg^2 z\, dz$.

<u>Варіант 19</u>

Завдання 1. Знайти та обчислити лишки функцій в особливих точках:

1) $f(z) = z^2 \sin\frac{1}{z}$;

2) $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$.

Завдання 2. Обчислити інтеграли, використовуючи теорему Коші про лишки:

1) $\int\limits_{|z|=2} \frac{1}{(z-1)(z^2+1)}dz$;

2) $\int\limits_{|z|=2} \frac{1}{tg^2 z}dz$.

<u>Варіант 20</u>

Завдання 1. Знайти та обчислити лишки функцій в особливих точках:

1) $f(z) = \frac{e^z+1}{z^2-1}$;

2) $f(z) = \frac{\cos^2\frac{\pi}{z}}{z+1}$.

Завдання 2. Обчислити інтеграли, використовуючи теорему Коші про лишки:

1) $\int\limits_{|z|=1} e^{\frac{3}{z}} dz$;

2) $\int\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{\sqrt{z+1}}dz$.

Варіант 21

Завдання 1. Знайти та обчислити лишки функцій в особливих точках:

1) $f(z)=\cos\dfrac{1}{1-z}$;

2) $f(z)=\dfrac{e^{\pi z}}{(z-i)^4}$.

Завдання 2. Обчислити інтеграли, використовуючи теорему Коші про лишки:

1) $\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}(ctg^2 z+tg\,z^2)dz$;

2) $\int\limits_{|z-i|=1}\dfrac{z}{(z^2+1)(z+1)}dz$.

Варіант 22

Завдання 1. Знайти та обчислити лишки функцій в особливих точках:

1) $f(z)=\cos\dfrac{1}{z}+z^3$;

2) $f(z)=\dfrac{1}{z^2+9}$.

Завдання 2. Обчислити інтеграли, використовуючи теорему Коші про лишки:

1) $\int\limits_{|z|=3}\dfrac{(\pi z)}{(z+2)^3(z-3)}dz$;

2) $\int\limits_{|z|=3}\dfrac{1}{z(z^2+4)}dz$.

Варіант 23

Завдання 1. Знайти та обчислити лишки функцій в особливих точках:

1) $f(z)=\dfrac{\sin\pi z}{z^2(1-z)}$;

2) $f(z)=\dfrac{z-1}{e^{z^3-3}-1}$.

Завдання 2. Обчислити інтеграли, використовуючи теорему Коші про лишки:

1) $\int\limits_{|z|=1}\dfrac{e^z dz}{z^2(z-2)}$;

2) $\int\limits_{\}z-2\}=4}\dfrac{z}{(1-z)(z+2)^2}dz$.

Варіант 24

Завдання 1. Знайти та обчислити лишки функцій в особливих точках:

1) $f(z)=z^2\sin\dfrac{1}{z}$;

2) $f(z)=ctg\,z-tg\,z$.

Завдання 2. Обчислити інтеграли, використовуючи теорему Коші про лишки:

1) $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=2}\sin^2\frac{1}{z}dz$;

2) $\int\limits_{|z|=2}(\sin^2\frac{1}{z}-\frac{1}{\cos z})dz$.

Варіант 25

Завдання 1. Знайти та обчислити лишки функцій в особливих точках:

1) $f(z)=\frac{\cos z}{z^2(z-\frac{\pi}{2})}$;

2) $f(z)=z^2-\sin\frac{1}{z}$.

Завдання 2. Обчислити інтеграли, використовуючи теорему Коші про лишки:

1) $\int\limits_{|z|=1}(\sin\frac{1}{z}+3z^3)dz$;

2) $\int\limits_{|z|=2}\frac{tg^2 z}{(z+1)^4}dz$.

Варіант 26

Завдання 1. Знайти та обчислити лишки функцій в особливих точках:

1) $f(z)=\frac{\cos^2\frac{\pi}{z}}{z+1}$;

2) $f(z)=\frac{1}{z-\sin z}$.

Завдання 2. Обчислити інтеграли, використовуючи теорему Коші про лишки:

1) $\int\limits_{|z-i|=1}\frac{z}{(z^2+1)(z+1)}dz$;

2) $\int\limits_{|z|=2}\frac{1}{(z-1)(z^2+1)}dz$.

Варіант 27

Завдання 1. Знайти та обчислити лишки функцій в особливих точках:

1) $f(z)=\cos\frac{1}{1-z}$;

2) $f(z)=\frac{e^z+1}{z^2-1}$.

Завдання 2. Обчислити інтеграли, використовуючи теорему Коші про лишки:

1) $\int\limits_{|z|=1} \frac{1}{\sin z} dz$;

2) $\int\limits_{|z|<2} \frac{z\,dz}{(z^2-2)(z+1)}$.

Варіант 28

Завдання 1. Знайти та обчислити лишки функцій в особливих точках:

1) $f(z) = \frac{e^{\pi z}}{(z-i)^4}$;

2) $f(z) = \frac{1}{z^2+9}$.

Завдання 2. Обчислити інтеграли, використовуючи теорему Коші про лишки:

1) $\int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z^4+1}$;

2) $\int\limits_{|z|=1} e^{\frac{3}{z}} dz$.

Варіант 29

Завдання 1. Знайти та обчислити лишки функцій в особливих точках:

1) $f(z) = ctg\, z - tg\, z$;

2) $f(z) = \frac{z^2-1}{z^2+1}$.

Завдання 2. Обчислити інтеграли, використовуючи теорему Коші про лишки:

1) $\int\limits_{|z|=3} \frac{(\pi z)}{(z+2)^3(z-3)} dz$;

2) $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1} (ctg^2 z + tg\, z^2) dz$.

Варіант 30

Завдання 1. Знайти та обчислити лишки функцій в особливих точках:

1) $f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^2(z-2)}$;

2) $f(z) = \frac{e^z}{z^2(z^2+1)}$.

Завдання 2. Обчислити інтеграли, використовуючи теорему Коші про лишки:

1) $\int\limits_{|z|=2} \frac{tg^2 z}{(z+1)^4} dz$;

2) $\int\limits_{|z|=1} (\sin \frac{1}{z} + 3z^3) dz$.

Зразок виконання лабораторної роботи 9

Завдання 1. Знайти та обчислити лишки функцій в особливих точках:

1) $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^2(z-\frac{\pi}{4})}$;

2) $f(z)=\dfrac{z^2+1}{z^2-z}$.

Завдання 2. Обчислити інтеграли, використовуючи теорему Коші про лишки:

1) $\int\limits_{|z|=2} tg(z)dz$;

2) $\int\limits_{|z|=1} \dfrac{z^2}{\sin^3 z\cos z}dz$.

Завдання 1. Розв'язок:

1) Введемо функцію

```
f(z):=cos(z)/(z^2·(z−%pi/4));
```

(%o1) $f(z):=\dfrac{\cos(z)}{z^2\left(z-\frac{\pi}{4}\right)}$

Знайдемо особливі точки (нулі знаменника).

```
solve(z^2·(z−%pi/4)=0,z);
```

%o2) $[z=\frac{\pi}{4}, z=0]$

Бачимо, що $z_1=\dfrac{\pi}{4}$ простий полюс першого порядку, отже

$$res\ f(z_0)=c_{-1}=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z).$$

(%i7)
```
res1: limit((z−%pi/4)·f(z),z,%pi/4);
```

(res1) $\dfrac{2^{7/2}}{\pi^2}$

Бачимо, що $z_2=0$ простий полюс другого порядку, отже

$$res\ f(z_0)=\frac{1}{(m-1)!}\cdot\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m\cdot f(z)\right]$$

(%i17) limit(diff(z^2·f(z),z),z,0);

(%o17) $-\frac{16}{\pi^2}$

2) Введемо функцію:

(%i20) f(z):= (z^2+1)/(z^2−z);

(%o20) $f(z) := \frac{z^2+1}{z^2-z}$

Знайдемо особливі точки:

(%i21) solve(z^2−z=0);

(%o21) $[z=0, z=1]$

Оскільки $z_1 = 0$, $z_2 = 1$ прості полюси першого порядку, то формула обчислення лишків функції у цих точках – $res\ f(z_0) = c_{-1} = \lim_{z \to z_0}(z - z_0) f(z)$.

(%i22) res1: limit((z−1)·f(z),z,1);

(res1) 2

(%i23) res2: limit(z·f(z),z,0);

(res2) −1

Завдання 2. Розв'язок:

1) Введемо підінтегральну функцію розклавши її $tg\, z = \frac{\sin z}{\cos z}$.

➔ f(z):=sin(z)/cos(z);

(%o11) $f(z) := \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$

Знайдемо особливі точки:

➔ solve(cos(z)=0,z);

solve: using arc−trig functions to get a solution.
Some solutions will be lost.

(%o31) $[z = \frac{\pi}{2}]$

Оскільки $|z| = 2$, то особливі точки – $z_1 = \frac{\pi}{2}$, $z_2 = -\frac{\pi}{2}$.

Знайдемо лишки у цих точках:

(%i26) res1: limit((z−%pi/2)·f(z),z,%pi/2);

(res1) −1

(%i27) res2: limit((z+%pi/2)·f(z),z,−%pi/2);

(res2) −1

Формула обчислення інтегралу: $\oint\limits_C f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} res\ f(z_k).$

Обчислимо інтеграл:

→ integr: 2·%pi·%i·(rres1+rres2);

(integr) $-4\ \%i\ \pi$

2) Введемо підінтегральну функцію:

→ f(z):= z^2/(sin(z)^3·cos(z));

(%o5) $f(z) := \frac{z^2}{\sin(z)^3 \cos(z)}$

Знайдемо особливі точки:

→ solve(sin(z)^3·cos(z)=0);

solve: using arc−trig functions to get a solution.
Some solutions will be lost.

(%o6) $[z=0, z=\frac{\pi}{2}]$

Оскільки $|z|=1$, то в цей окіл входить лише точка $z_0=0$, яка є простим полюсом третього порядку.

Обчислимо лишок функції у цій точці за формулою

$$res\ f(z_0) = \frac{1}{(m-1)!}\cdot\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m\cdot f(z)\right]$$

→ diff1: diff(z^3·f(z), z);

(diff1) $\frac{z^5}{\cos(z)^2\sin(z)^2}+\frac{5z^4}{\cos(z)\sin(z)^3}-\frac{3z^5}{\sin(z)^4}$

→ diff2: diff(diff1, z);

(diff2) $\frac{2z^5}{\cos(z)^3\sin(z)}+\frac{10z^4}{\cos(z)^2\sin(z)^2}-\frac{2z^5}{\cos(z)\sin(z)^3}+\frac{20z^3}{\cos(z)\sin(z)^3}-\frac{30z^4}{\sin(z)^4}+\frac{12z^5\cos(z)}{\sin(z)^5}$

→ res: 1/2·limit(diff2,z,0);

(res) 1

Обчислимо інтеграл:

```
➔        int: 2·%pi·%i·res;
(int)    2 %i π
```

Лабораторна робота 10

Тема роботи: **«Операційне числення»**
Мета роботи: навчитись знаходити зображення функцій за їх оригіналами та оригінали функцій за їх зображеннями, використовуючи програму Maxima.
Завдання:

Варіант 1

Завдання 1. Знайти зображення заданих функцій:

а) $f(t) = \sin 3t$;

б) $f(t) = t + \frac{1}{2}e^{-t}$;

в) $f(t) = te^{t}$.

Завдання 2. Знайти оригінали за їх зображеннями:

а) $F(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 5}$;

б) $F(p) = \frac{p}{(p^2 + 1)^2}$;

в) $F(p) = \frac{p^2 + 2p - 1}{p^3 + 3p^2 + 3p + 1}$.

Варіант 2

Завдання 1. Знайти зображення заданих функцій:

а) $f(t) = t$;

б) $f(t) = 2\sin t - \cos t$;

в) $f(t) = e^{t}$.

Завдання 2. Знайти оригінали за їх зображеннями:

а) $F(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 3}$;

б) $F(p) = \frac{1}{p^2(p^2 + 1)}$;

в) $F(p) = \frac{p + 2}{(p + 1)(p - 2)(p^2 + 4)}$.

Варіант 3

Завдання 1. Знайти зображення заданих функцій:

а) $f(t) = 1 + t$;

б) $f(t) = \sin 4t$;

в) $f(t) = e^{2t}\sin t$.

Завдання 2. Знайти оригінали за їх зображеннями:

а) $F(p) = \frac{1}{7 - p + p^2}$;

б) $F(p) = \frac{1}{(p - 1)^2(p + 2)}$;

в) $F(p)=\dfrac{2p+3}{p^3+4p^2+5p}$.

Варіант 4

Завдання 1. Знайти зображення заданих функцій:

а) $f(t)=2\cos t-\sin t$;

б) $f(t)=\cos\omega t$;

в) $f(t)=e^t\cos nt$.

Завдання 2. Знайти оригінали за їх зображеннями:

а) $F(p)=\dfrac{p}{p^3+1}$;

б) $F(p)=\dfrac{3p^2}{(p^2-1)^2}$;

в) $F(p)=\dfrac{2p^3+p^2+2p+2}{p^5+2p^4+2p^3}$.

Варіант 5

Завдання 1. Знайти зображення заданих функцій:

а) $f(t)=\sin^2 t$;

б) $f(t)=sh(3t)$;

в) $f(t)=e^{-t}t^3$.

Завдання 2. Знайти оригінали за їх зображеннями:

а) $F(p)=\dfrac{1}{5+p+p^2}$;

б) $F(p)=\dfrac{1}{(p^2+1)^2}$;

в) $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p(p-1)}$.

Варіант 6

Завдання 1. Знайти зображення заданих функцій:

а) $f(t)=\sin mt\cdot\cos nt$;

б) $f(t)=\cos^3 t$;

в) $f(t)=e^t sh(t)$.

Завдання 2. Знайти оригінали за їх зображеннями:

а) $F(p)=\dfrac{p+4}{p^2+4p+5}$;

б) $F(p)=\dfrac{6}{p^3-8}$;

в) $F(p)=\dfrac{pe^{-p}}{p^2-25}$.

Варіант 7

Завдання 1. Знайти зображення заданих функцій:

а) $f(t) = \sin mt \cdot \sin nt$;

б) $f(t) = \sin^4 t$;

в) $f(t) = e^t \sin(t)$.

Завдання 2. Знайти оригінали за їх зображеннями:

а) $F(p) = \dfrac{3p - 7}{p^2 + 4p + 8}$;

б) $F(p) = \dfrac{5}{p(p^2 - 2p + 5)}$;

в) $F(p) = \dfrac{e^{-5p}}{p^2 + 9}$.

Варіант 8

Завдання 1. Знайти зображення заданих функцій:

а) $f(t) = \cos^4 t$;

б) $f(t) = t \sin \omega t$;

в) $f(t) = e^t \cos^2 t$.

Завдання 2. Знайти оригінали за їх зображеннями:

а) $F(p) = \dfrac{p}{p^2 + 8p + 25}$;

б) $F(p) = \dfrac{p}{(p^2 + 1)^2}$;

в) $F(p) = \dfrac{e^{-p}}{p(p - 1)}$.

Варіант 9

Завдання 1. Знайти зображення заданих функцій:

а) $f(t) = \sin(t - b)\eta(t - b)$;

б) $f(t) = \cos^2 t$;

в) $f(t) = te^{4t}$.

Завдання 2. Знайти оригінали за їх зображеннями:

а) $F(p) = \dfrac{3p - 2}{p^2 + 4p + 3}$;

б) $F(p) = \dfrac{p + 5}{(p + 2)(p^2 - 2p + 2)}$;

в) $F(p) = \dfrac{pe^{-4p}}{p^2 + 1}$.

Варіант 10

Завдання 1. Знайти зображення заданих функцій:

а) $f(t) = \cos^2(t - b)\eta(t - b)$;

б) $f(t) = t \cos \omega t$;

в) $f(t) = \sin mt \cdot \cos mt$.

Завдання 2. Знайти оригінали за їх зображеннями:

а) $F(p)=\dfrac{p}{(p^2+4p+8)^2}$;

б) $F(p)=\dfrac{2p+1}{(p+1)(p^2+2p+3)}$;

в) $F(p)=\dfrac{(p+4)e^{-2p}}{p^2+4p+5}$.

Варіант 11

Завдання 1. Знайти зображення заданих функцій:

а) $f(t)=e^{t-2}\eta(t-2)$;

б) $f(t)=t^2\cos t$;

в) $f(t)=(t+1)\sin 2t$.

Завдання 2. Знайти оригінали за їх зображеннями:

а) $F(p)=\dfrac{4p+10}{p(p^2+4p+5)}$;

б) $F(p)=\dfrac{e^{-2p}}{p^2+8p+25}$;

в) $F(p)=\dfrac{e^{-3p}}{p(p-2)}$.

Варіант 12

Завдання 1. Знайти зображення заданих функцій:

а) $f(t)=1+t$;

б) $f(t)=e^{-2t}t^2$;

в) $f(t)=t(e^t+cht)$.

Завдання 2. Знайти оригінали за їх зображеннями:

а) $F(p)=\dfrac{3p-2}{(p-1)(p^2-6p+10)}$;

б) $F(p)=\dfrac{1}{(p+1)(p^2+2)}$;

в) $F(p)=\dfrac{e^{-2p}}{p+3}$.

Варіант 13

Завдання 1. Знайти зображення заданих функцій:

а) $f(t)=4t^2-2t+3$;

б) $f(t)=\dfrac{e^t-1}{t}$;

в) $f(t)=e^t\cos^2 t$.

Завдання 2. Знайти оригінали за їх зображеннями:

а) $F(p)=\dfrac{2-p}{p^3-2p^2+5p}$;

б) $F(p)=\dfrac{8p}{(p-1)(p^2+2p+5)}$;

в) $F(p)=\dfrac{1}{p^2}-\dfrac{3e^{-2p}}{p^2}$.

Варіант 14

Завдання 1. Знайти зображення заданих функцій:

а) $f(t)=2t+3$;

б) $f(t)=t+2\sin t$;

в) $f(t)=\dfrac{1-e^{-t}}{t}$.

Завдання 2. Знайти оригінали за їх зображеннями:

а) $F(p)=\dfrac{p^2+1}{p(p^2+p+1)}$;

б) $F(p)=\dfrac{8p+16}{(p^2+1)(p^2+9)}$;

в) $F(p)=\dfrac{e^{-2p}}{p^6}$.

Варіант 15

Завдання 1. Знайти зображення заданих функцій:

а) $f(t)=3+4t+2t^2$;

б) $f(t)=1+e^{-2t}+t^2$;

в) $f(t)=t\cos 3t$.

Завдання 2. Знайти оригінали за їх зображеннями:

а) $F(p)=\dfrac{p+5}{(p-1)(p^2+2p+2)}$;

б) $F(p)=\dfrac{1}{p(p^2+5)}$;

в) $F(p)=\dfrac{e^{-3p}}{p^2-4}$.

Варіант 16

Завдання 1. Знайти зображення заданих функцій:

а) $f(t)=t+3$;

б) $f(t)=t^2\cos 2t$;

в) $f(t)=\dfrac{\sin^2 t}{t}$.

Завдання 2. Знайти оригінали за їх зображеннями:

а) $F(p)=\dfrac{3p+5}{p^2(p^2-2p+5)}$;

б) $F(p)=\dfrac{p}{(p^2+1)(p^2+4)}$;

в) $F(p)=\dfrac{e^{-2p}}{(p-1)^2}$.

Варіант 17

Завдання 1. Знайти зображення заданих функцій:

а) $f(t)=5t+8$;

б) $f(t)=e^{-t}t^3+e^{4t}\,\mathrm{sh}\,t$;

в) $f(t)=\dfrac{1-\cos t}{t}$.

Завдання 2. Знайти оригінали за їх зображеннями:

а) $F(p)=\dfrac{18}{(p+1)(p^2+8p+25)}$;

б) $F(p)=\dfrac{5}{(p+2)(p^2+2p+5)}$;

в) $F(p)=\dfrac{pe^{-3p}}{p^2+4}$.

Варіант 18

Завдання 1. Знайти зображення заданих функцій:

а) $f(t)=1+e^{-2t}+t^2$;

б) $f(t)=2te^{3t}$;

в) $f(t)=\sin^4+5\,\mathrm{sh}^2\,3t$.

Завдання 2. Знайти оригінали за їх зображеннями:

а) $F(p)=\dfrac{e^{-2p}}{p^2+9}$;

б) $F(p)=\dfrac{1}{p(p^2+3)}$;

в) $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{(p-8)p}$.

Варіант 19

Завдання 1. Знайти зображення заданих функцій:

а) $f(t)=\sin 2t\cos 4t$;

б) $f(t)=t^3-2t+1$;

в) $f(t)=\dfrac{\cos t-\cos 2t}{t}$.

Завдання 2. Знайти оригінали за їх зображеннями:

а) $F(p)=\dfrac{2p-1}{p(p^2-2p+2)}$;

б) $F(p)=\dfrac{15p+11}{(p-2)(p^2+6p+25)}$;

в) $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p(p+1)}$.

Варіант 20

Завдання 1. Знайти зображення заданих функцій:

а) $f(t)=t^2-2t-1$;

б) $f(t)=e^t\eta(t-3)$;

в) $f(t)=\cos^4 t$.

Завдання 2. Знайти оригінали за їх зображеннями:

а) $F(p)=\dfrac{12p+14}{(p-2)(p^2+6p+15)}$;

б) $F(p)=\dfrac{e^{-\frac{p}{2}}}{p+3}$;

в) $F(p)=\dfrac{e^{-2p}}{p^2+16}$.

Варіант 21

Завдання 1. Знайти зображення заданих функцій:

а) $f(t)=t\sin 2t$;

б) $f(t)=(t^2-t+2)\cos 3t$;

в) $f(t)=1+e^{-2t}+t^2$.

Завдання 2. Знайти оригінали за їх зображеннями:

а) $F(p)=\dfrac{10}{p(p^2+2p+10)}$;

б) $F(p)=\dfrac{e^{-3p}}{(p-8)p}$;

в) $F(p)=\dfrac{4-p}{p^3+4p^2+5p}$.

Варіант 22

Завдання 1. Знайти зображення заданих функцій:

а) $f(t)=7+t$;

б) $f(t)=t+\dfrac{1}{2}e^t$;

в) $f(t)=e^t\sin^2 t$.

Завдання 2. Знайти оригінали за їх зображеннями:

а) $F(p)=\dfrac{3p-7}{p^2+4p+8}$;

б) $F(p)=\dfrac{4}{p(p^2+5)}$;

в) $F(p)=\dfrac{e^{-0,5p}}{p^2-2p+5}$.

Варіант 23

Завдання 1. Знайти зображення заданих функцій:

а) $f(t)=(t+3)\sin 2t$;

б) $f(t)=t(e^{-2t}+cht)$;

в) $f(t)=2te^{2t}$.

Завдання 2. Знайти оригінали за їх зображеннями:

а) $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{(p^2-1)p}$;

б) $F(p)=\dfrac{3p}{(p^2+9)(p-1)^2}$;

в) $F(p)=\dfrac{5}{p(p^2-2p+5)}$.

Варіант 24

Завдання 1. Знайти зображення заданих функцій:

а) $f(t)=2t$;

б) $f(t)=t^3\cos 2t$;

в) $f(t)=\dfrac{1-\sin t}{t}$.

Завдання 2. Знайти оригінали за їх зображеннями:

а) $F(p)=\dfrac{3p-2}{p^2+4p+3}$;

б) $F(p)=\dfrac{e^{-1,5p}}{p+7}$;

в) $F(p)=\dfrac{e^{-4p}}{p^5}$.

Варіант 25

Завдання 1. Знайти зображення заданих функцій:

а) $f(t)=2\sin t-\cos t$;

б) $f(t)=\sin mt\cdot\sin nt$;

в) $f(t)=e^{t-2}\eta(t-2)$.

Завдання 2. Знайти оригінали за їх зображеннями:

а) $F(p)=\dfrac{p+4}{p^2+4p+5}$;

б) $F(p)=\dfrac{1}{p^2+2p}$;

в) $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p^2-1}+\dfrac{pe^{-2p}}{p^2-4}$.

<u>Варіант 26</u>

Завдання 1. Знайти зображення заданих функцій:

а) $f(t)=te^t$;

б) $f(t)=sh(3t)$;

в) $f(t)=\sin^3 t$.

Завдання 2. Знайти оригінали за їх зображеннями:

а) $F(p)=\dfrac{3p}{(p^2+9)(p-1)^2}$;

б) $F(p)=\dfrac{4}{p(p^2+5)}$;

в) $F(p)=\dfrac{e^{-2p}}{p^2+25}$.

<u>Варіант 27</u>

Завдання 1. Знайти зображення заданих функцій:

а) $f(t)=t+\dfrac{1}{2}e^{-t}$;

б) $f(t)=1+t$;

в) $f(t)=\cos\omega t$.

Завдання 2. Знайти оригінали за їх зображеннями:

а) $F(p)=\dfrac{2}{p(p^2-2p+2)}$;

б) $F(p)=\dfrac{p^2+1}{p(p^2+p+1)}$;

в) $F(p)=\dfrac{pe^{-2p}}{p^2-9}$.

<u>Варіант 28</u>

Завдання 1. Знайти зображення заданих функцій:

а) $f(t)=e^t$;

б) ; $f(t)=\dfrac{\sin^2 t}{t}$

в) $f(t)=\dfrac{\cos t-\cos 2t}{t}$.

Завдання 2. Знайти оригінали за їх зображеннями:

а) $F(p)=\dfrac{6p+14}{(p^2+4)(p^2+9)}$;

б) $F(p)=\dfrac{2-3p}{(p-2)(p^2+2p+3)}$;

в) $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p^2-p-12}$.

<u>Варіант 29</u>

Завдання 1. Знайти зображення заданих функцій:

а) $f(t)=t^2+1$;

б) $f(t)=t^2\sin t$;

в) $f(t)=\cos^2(t-b)\eta(t-b)$.

Завдання 2. Знайти оригінали за їх зображеннями:

а) $F(p)\dfrac{e^{-p}}{(p^2-1)p}$;

б) $F(p)=\dfrac{10}{(p-3)(p^2-4p+13)}$;

в) $F(p)=\dfrac{e^{-3p}}{p(p-5)}$.

<u>Варіант 30</u>

Завдання 1. Знайти зображення заданих функцій:

а) $f(t)=\sin 4t$;

б) $f(t)=\sin mt\cdot\sin nt$;

в) $f(t)=t^2 cht$.

Завдання 2. Знайти оригінали за їх зображеннями:

а) $F(p)=\dfrac{4}{p^2-8}$;

б) $F(p)=\dfrac{p+5}{(p+7)(p^2+2p+3)}$;

в) $F(p)=\dfrac{e^{-2p}}{p^6}$.

Зразок виконання лабораторної роботи 10

Завдання 1. Знайти зображення заданої функції

$$f(t)=\sin^4 t.$$

Завдання 2. Знайти оригінал заданої функції за її зображенням

$$F(p)=\frac{2p^3+p^2+2p+2}{p^5+2p^4+2p^3}.$$

Завдання 1. Розв'язок:

Введемо функцію, яка задана в умові:

```
➔ f: sin(t)·sin(t)·sin(t)·sin(t);
```

(f) $\sin(t)^4$

Застосуємо функцію laplace, щоб знайти зображення:

```
➔ laplace(%, t, p);
```

(%o12) $\dfrac{24}{p^5+20\,p^3+64\,p}$

Тут t – змінна початкової функції-оригіналу, p – нова змінна відповідної функції-зображення.

Розділимо отриманий результат на окремі доданки за допомогою функції partfrac:

```
➔ partfrac(%, p);
```

(%o13) $\dfrac{p}{8\,(p^2+16)}-\dfrac{p}{2\,(p^2+4)}+\dfrac{3}{8\,p}$

Аналогічні дії необхідно провести з іншими прикладами. За потреби також можна використовувати функцію ratsimp(%) для спрощення відповіді або функцію expand(%) для розкриття дужок.

Завдання 2. Розв'язок:

Введемо функцію, яка задана в умові:

```
➔ F: (2·p^3+p^2+2·p+2)/(p^5+2·p^4+2·p^3);
```

(F) $\dfrac{2\,p^3+p^2+2\,p+2}{p^5+2\,p^4+2\,p^3}$

Застосуємо функцію ilt, щоб знайти оригінал:

```
➔ ilt(%, p, t);
```

(%o28) $2\,\%e^{-t}\sin(t)+\dfrac{t^2}{2}$

Аналогічні дії необхідно провести з іншими прикладами.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Аладьев В. З. Программирование в пакетах Maple и Mathematica: Сравнительный аспект / Аладьев В. З., Бойко В. К., Ровба Е. А. — Гродно: Гродненский госуниверситет, 2011. — 518 с.
2. Алексеев Е. Р. Scilab: Решение инженерных и математических задач / Алексеев Е. Р., Чеснокова О. В., Рудченко Е. А. — М.: ALT Linux; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. — 269 с.
3. Биков В. Ю. Моделі організаційних систем відкритої освіти / В. Ю. Биков. — К. : Атіка, 2009. — 684 с.
4. Дьяконов В. П. Энциклопедия компьютерной алгебры. М.: ДМК-Пресс, 2009.
5. Дьяконов В.П. Компьютерная математика // Соросовский образовательный журнал, 2001. – Т. 7. – С. 116 – 121.
6. Дьяконов В. П. MATHEMATICA 5.1/5.2/6.0. Программирование и математические вычисления / Владимир Павлович Дьяконов. — М.: ДМК Пресс, 2006. — 576 с.
7. Дьяконов В. П. MatLab 6.0/6.1/6.5/6.5 + SP1 + Simulink 4/5. Обработка сигналов и изображений / Владимир Павлович Дьяконов. — М.: СОЛОН-Пресс, 2004. — 592 с.
8. Дьяконов В. П. Компьютерная математика. Теория и практика / Владимир Павлович Дьяконов. — М.: Нолидж, 2001. — 1296 с.
9. Жалдак М. І. Математика з комп’ютером: посібник для вчителів. — 2-ге вид. / Жалдак М. І., Горошко Ю. В., Вінниченко Є. Ф. — К.: НПУ імені Драгоманова, 2009. — 282 с.
10. Житников В. Компьютеры, математика и свобода. Компьютерра. №16 (636), 2006 г. — Режим доступу: http://maxima.sourceforge.net/ru/documentation.html
11. Ильина В.А., Силаев П.К. Система аналитических вычислений Maxima для физиков-теоретиков. — Режим доступу: http://maxima.sourceforge.net/ru/documentation.html
12. Клочко В. І. Застосування новітніх інформаційних технологій при вивченні вищої математики у технічному вузі: навч.-метод. посіб. / В. І. Клочко. — Вінниця: ВДТУ, 1997. — 300 с.
13. Компьютерная математика: Символьные и алгебраические вычисления / [пер. с англ.]; под ред. Б. Бухбергера, Дж. Коллинза, Р. Лооса. — М.: Мир, 1986. — 392 с.
14. Компьютерная математика с Maxima - http://www.intuit.ru/studies/curriculums/17584/courses/726/info.

15. Методическое пособие по изучению математического пакета Maxima. Математический практикум с применением пакета Maxima. http://www.pmtf.msiu.ru/chair31/students/spichkov/maxima2.pdf.
16. Морозов В. К., Рогачёв Г. Н. Моделирование информационных и динамических систем М.: ИЦ «Академия», 2011. — 384 с.
17. Парфьонова Н. Д. Нові підходи до використання вільно поширюваної системи комп'ютерної математики MAXIMA у навчанні функцій комплексної змінної // Електронне фахове видання. Інформаційні технології і засоби навчання. — 2012. — № 1 (27). — Режим доступу до журналу: http://journal.iitta.gov.ua.
18. Семеріков С. О. Maxima 5.13: довідник користувача / Сергій Олексійович Семеріков; за ред. академіка М. І. Жалдака. — К., 2007. — 48 с.
19. Семеріков С. О. Огляд інтерфейсів системи комп’ютерної математики Maxima / С. О. Семеріков, І. О. Теплицький // Модернізація освіти: пошуки, проблеми, перспективи : матеріали міжнародної науково-практичної конференції (Київ–Переяслав-Хмельницький, 22–25 травня 2006 року). – Київ–Переяслав-Хмельницький, 2006. – С. 178–181.
20. Стахин Н. А. Основы работы с системой аналитических (символьных) вычислений Maxima (ПО для решения задач аналитических (символьных) вычислений). М.: Федеральное агенство по образованию, 2008. — 86 с.
21. Чичкарев Е. А. Компьютерная математика с Maxima. Руководство для школьников и студентов. М.: ATL Linux, 2012.
22. www.maxima.sourceforge.net

Навчальне видання

Барабаш Олег Володимирович
Замрій Ірина Вікторівна

ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Частина 3

Теорія функцій комплексної змінної

Навчальний посібник