

ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙ

Кафедра Телекомунікаційних технологій

**МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК З
ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ**

з дисципліни

ТЕХНІЧНА ЕЛЕКТРОДИНАМІКА

Бондаренко Т.Г. Технічна електродинаміка. Методичний посібник з практичних занять. - Київ, ДУТ, 2018, 34с.

Посібник написаний відповідно до програми дисципліни "Технічна електродинаміка" для студентів, що навчаються у Державному університеті телекомунікацій за напрямами підготовки "Телекомунікації", освітньо-кваліфікаційний рівень "бакалавр". Приділено увагу розв'язанню задач, за допомогою яких можливо чисельно аналізувати властивості електромагнітних хвиль у різних середовищах та напрямних системах, що широко використовуються в техніці зв'язку на надвисоких частотах. Наведено приклади розрахунків параметрів ліній передачі в діапазоні НВЧ.

1. Матеріальні рівняння електродинаміки

1.1. Вектори електромагнітного поля у матеріальному середовищі

Наявність речовини у середовищі впливає на величину векторів електромагнітного поля. Якщо ми послідовно візьмемо різні речовини, то в одній й тій же самій точці простору можемо отримати різні значення векторів поля, різні струми, заряди. Тобто, електромагнітне поле взаємодіє з речовиною у середовищі.

Причини цієї взаємодії:

- а) рух електричних вільних зарядів під дією електричного та магнітного полів;
- б) поляризація речовини;
- в) намагніченість речовини.

1.2. Поляризація діелектриків

Якщо у матеріалі середовища немає вільних електричних зарядів (у діелектрику), то при розміщенні речовини у зовнішньому електричному полі відбувається поляризація діелектриків — явище, пов'язане з обмеженим зміщенням пов'язаних електричних зарядів в діелектрику або з поворотом електричних диполів. Ці зміщені заряди створюють своє електричне поле.

Існують такі основні види поляризації діелектриків:

- а) електронна;
- б) іонна;
- в) дипольна (орієнтаційна),

та деякі інші види (електронно-релаксаційна, іонно-релаксаційна, спонтанна, структурна, резонансна), які мають менший вплив.

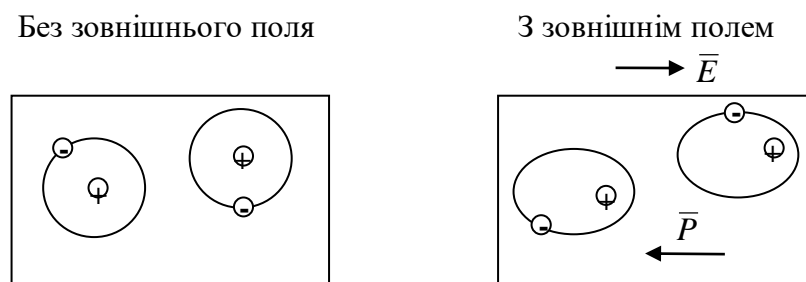


Рис.1.1. Електронна поляризація

Електронна та іонна поляризації мають місце в неполяризованих діелектриках, відбуваються за малий час (10^{-13} с), без втрат на нагрівання. Орієнтаційна поляризація (або дипольна) спостерігається в полярних діелектриках, пов'язана з переорієнтацією молекул у зовнішньому електричному полі та супроводжується втратами на нагрівання.

Загальним для всіх видів поляризації є те, що у діелектрику з'являється вектор поляризації \vec{P} . В постійному або достатньо повільно змінному від часу зовнішньому електричному полі при достатньо малій величині напруженості цього поля вектор поляризації \vec{P} , як правило (виняток складають сегнетоелектрики), лінійно залежить від вектора напруженості поля \vec{E} .

В результаті в діелектрику буде виникати власне електричне поле, пропорційне зовнішньому \vec{E} :

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_d \vec{E},$$

де χ_d (читається як "хі") - коефіцієнт, що залежить від хімічного складу, концентрації, структури (в тому числі від агрегатного стану) середовища, температури, механічного напруження та т. і., має назву діелектричної сприйнятливості,

$\varepsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12} \approx \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \frac{\Phi}{\text{м}}$ - електрична стала (стара назва - діелектрична проникність вакууму).

Для врахування впливу середовища на електричне поле вводять вектор електричної індукції (електричного зміщення) \vec{D} , який пропорційний сумі вектора напруженості електричного поля та вектора поляризації.

У вакуумі (де немає вектора поляризації) вектор електричної індукції просто пропорційний вектору електричного поля

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E},$$

але у реальному діелектричному середовищі добавляється вектор поляризації

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi_d \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi_d) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon_a \vec{E},$$

де $\varepsilon_r = 1 + \chi_d$ - відносна діелектрична проникність,

$\varepsilon_a = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ - абсолютна діелектрична проникність.

Вакуум, у якому нема чому поляризуватися та $\chi_d = 0$, має абсолютну діелектричну проникність $\varepsilon_a = \varepsilon_0$ та відносну діелектричну проникність $\varepsilon_r = 1$. З великою точністю це справедливо також для повітря та газів атмосфери Землі. Відносна діелектрична проникність ε_r твердих та рідинних діелектриків більша за 1, у більшості з них становить від 2 до 10 (для поліетилену 2,25, для фторопласта 2,2, для паперу 2,0...3,5, для

склотекстоліту 5, для гуми 7, для кераміки 8...20), у деяких випадках ще більше (для води на низьких частотах в залежності від температури $\epsilon_r = 55 \dots 88$, для спирту 27, для титанату барію 1250...10000).

Таким чином, отримуємо матеріальне рівняння для електричного поля, в яке входять параметри середовища

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon_a \vec{E}.$$

У випадку, коли величина відносної діелектричної проникності залежить від орієнтації матеріалу, тобто неоднакова в різних напрямках, вводять тензор діелектричної проникності

$$\|\vec{\epsilon}\| = \begin{vmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{vmatrix}.$$

Такими середовищами є сегнетоелектрики, намагнічена плазма, деякі кристали. Внаслідок залежності діелектричної проникності від орієнтації з'являється непаралельність векторів \vec{E} та \vec{D} .

У цьому випадку складові вектора електричної індукції знаходять за допомогою матричного рівняння:

$$\|\vec{D}\| = \|\vec{\epsilon}\| \cdot \|\vec{E}\| = \begin{vmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \epsilon_{xx} E_x + \epsilon_{xy} E_y + \epsilon_{xz} E_z \\ \epsilon_{yx} E_x + \epsilon_{yy} E_y + \epsilon_{yz} E_z \\ \epsilon_{zx} E_x + \epsilon_{zy} E_y + \epsilon_{zz} E_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{vmatrix}.$$

1.3. Закон Ома у диференційній формі.

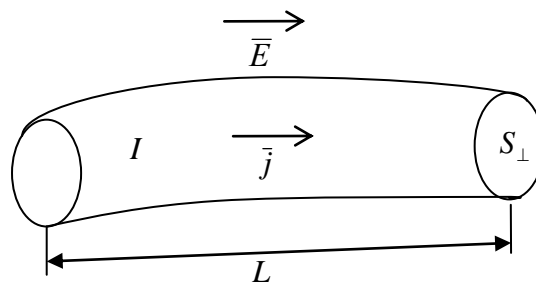


Рис.1.2. Закон Ома у диференційній формі

Оберемо дуже малу ділянку середовища з вільними носіями заряду (провідник) таку, що можливо вважати значення струму однаковим у всій частині. Позначимо довжину ділянки L , перпендикулярну площу поперечного перетину S_{\perp} . Помістимо середовище у зовнішнє електричне поле \vec{E} . У середовищі почнеться рух вільних зарядів з густиною струму \vec{j} .

Буде створено струм з силою $I = j \cdot S_{\perp}$.

Якщо в матеріалі напруженість електричного поля E , а довжина матеріалу L , то різниця потенціалів між боковими перетинами частини середовища буде $U = E \cdot L$.

З іншого боку, згідно з законом Ома, на бокових перетинах буде різниця потенціалу

$$U = I \cdot R = I \cdot \rho_{\text{опір}} \cdot \frac{L}{S_{\perp}},$$

де $\rho_{\text{опір}}$ - питомий електричний опір.

Після підстановки виразу для струму, отримуємо $U = I \cdot R = j \cdot S_{\perp} \cdot \rho_{\text{опір}} \cdot \frac{L}{S_{\perp}} = E \cdot L$,

або $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ - закон Ома у диференціальній формі,

де $\sigma = \frac{1}{\rho_{\text{опір}}}$ - питома електрична провідність.

1.4. Діелектрики, провідники та напівпровідники.

Задача.

Визначити, чи провідниками або діелектриками є деякі середовища на різних частотах:

№ №	Середовище	ϵ_r	σ , См/м
1	Сухий ґрунт	5	10^{-4}
2	Вологий ґрунт	20	10^{-3}
3	Морська вода	80	3
4	Прісна вода	80	10^{-2}
5	Скло	7,5	$2 \cdot 10^{-10}$

Частота $f = 10^3, 10^5, 10^7, 10^9$ Гц.

Розв'язання.

Значення параметра $\frac{j_{\text{пров}}}{j_{\text{см ец}}} = \frac{\sigma}{\omega \epsilon}$ визначає відношення середовища до діелектриків

або провідників.

Якщо $\frac{j_{\text{пров}}}{j_{\text{см ец}}} = \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \gg 1$, то середовище є провідником.

Якщо $\frac{j_{\text{пров}}}{j_{\text{см ец}}} = \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \ll 1$, то середовище є діелектриком.

№ №	Середовище	Частота, Гц			
		10^3	10^5	10^7	10^9
1	Сухий ґрунт	$3,6 \cdot 10^2$ пров	3,6 пров	$3,6 \cdot 10^{-2}$ діел	$3,6 \cdot 10^{-4}$ діел
2	Вологий ґрунт	$0,9 \cdot 10^3$ пров	$0,9 \cdot 10^1$ пров	$0,9 \cdot 10^{-1}$ діел	$0,9 \cdot 10^{-3}$ діел
3	Морська вода	$0,68 \cdot 10^6$ пров	$0,68 \cdot 10^4$ пров	$0,68 \cdot 10^2$ пров	$0,68 \cdot 10^0$ п/пр
4	Прісна вода	$2,25 \cdot 10^3$ пров	$2,25 \cdot 10^1$ пров	$2,25 \cdot 10^{-1}$ п/пр	$2,25 \cdot 10^{-3}$ діел
5	Скло	$4,8 \cdot 10^{-4}$ діел	$4,8 \cdot 10^{-6}$ діел	$4,8 \cdot 10^{-8}$ діел	$4,8 \cdot 10^{-10}$ діел

Висновок: одне й теж саме середовище на різних частотах може бути провідником або діелектриком. Тому реальні середовища, в залежності від частоти, можуть бути як діелектриками, так і провідниками.

В теорії електромагнітного поля звичайно всі середовища вважаються ідеалізованими.

Реальні всі середовища нелінійні, але ми їх вважаємо лінійними.

В техніці широко застосовуються такі анізотропні середовища, як сегнетоелектрики та ферити. З їх допомогою побудовані різні пристрої НВЧ: фазообертачі на ефекті Фарадея, різні типи циркуляторів, фільтри НВЧ.

1.5. Намагніченість матеріалів

Вірну інтерпретацію магнетизму можливо дати тільки за допомогою квантомеханічної теорії. Елементарні магнітні диполі атомів та молекул пов'язані з квантовим орбітальним моментом та спіном електронів.

Тому в макроскопічній електродинаміці спрощено припускають існування елементарних магнітних диполів, пов'язаним з класичними струмами. Молекулярні струми можливо інтерпретувати як кругові струми, що циркулюють в атомах або молекулах речовини. Середні по об'єму молекулярні струми називають струмами намагнічування. Коли зовнішнього поля немає, струми намагнічування в середньому дорівнюють нулю.

При наявності зовнішнього поля молекулярні струми можуть орієнтуватися однаково в один бік та створювати магнітний момент.

Таким чином, у речовині за відсутності зовнішнього магнітного поля магнітні моменти атомів та молекул направлені хаотично, а при наявності такого поля магнітні моменти у речовині орієнтуються однаково, їх магнітні поля підсумовуються. Кажуть, що речовина намагнічується.

При цьому можливі різні варіанти співвідношення напрямів зовнішнього магнітного поля та поля, створеного магнітними моментами атомів та молекул речовини. Можливе невелике послаблення (діамагнетика) або невелике підсилення (парамагнетика) зовнішнього поля. У випадку сильного підсилення ми отримуємо ферромагнетика.

Намагніченість середовища визначається як магнітний момент одиниці об'єму та позначається \bar{M} .

Для характеристики магнітних властивостей середовища вводиться вектор напруженості магнітного поля \bar{H} . Це векторна величина, що дорівнює різниці вектора магнітної індукції та вектора намагніченості у середовищі:

$$\bar{H} = \frac{1}{\mu_0} \bar{B} - \bar{M}.$$

де $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\Gamma H}{M}$ - магнітна стала (стара назва - магнітна проникність вакууму).

Зрозуміло, що у вакуумі, де немає намагніченості, $\bar{H} = \frac{1}{\mu_0} \bar{B}$.

У невеликих полях для діа- та парамагнетиків справедливо лінійне співвідношення

$$\bar{M} = \chi_m \bar{H},$$

де χ_m - магнітна сприйнятливість. Значення χ_m можуть бути як негативними, так і позитивними, близькими до нуля або дуже великими (наприклад, для діамагнетика срібла $\chi_m = -2,6 \cdot 10^{-5}$, для парамагнетика кальцію $\chi_m = +4,4 \cdot 10^{-5}$, для ферромагнетика чистого заліза $\chi_m = +2 \cdot 10^5$).

Таким чином, отримуємо матеріальне рівняння для магнітного поля

$$\bar{B} = \mu_0 (\bar{H} + \bar{M}) = \mu_0 \bar{H} + \mu_0 \chi_m \bar{H} = \mu_0 (1 + \chi_m) \bar{H} = \mu_0 \mu_r \bar{H} = \mu_a \bar{H},$$

де $\mu_r = 1 + \chi_m$ - відносна магнітна проникність,

$\mu_a = \mu_0 \mu_r$ - абсолютна магнітна проникність.

Для вакууму, повітря, діамагнетиків та парамагнетиків з великою точністю можливо вважати, що $\mu_r = 1$, $\mu_a = \mu_0$.

Ферромагнітні матеріали мають властивість залежності магнітної проникності від напрямку. Для них користуються тензором магнітної проникності

$$\|\vec{\mu}\| = \begin{vmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{vmatrix}.$$

У цьому випадку складові вектора магнітної індукції знаходять за допомогою матричного рівняння:

$$\|\vec{B}\| = \|\vec{\mu}\| \cdot \|\vec{H}\| = \begin{pmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{xx}H_x + \mu_{xy}H_y + \mu_{xz}H_z \\ \mu_{yx}H_x + \mu_{yy}H_y + \mu_{yz}H_z \\ \mu_{zx}H_x + \mu_{zy}H_y + \mu_{zz}H_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}.$$

Завдання на самостійну роботу.

Побудувати графіки залежності відношення струму провідності до струму зміщення від частоти.

2. Граничні умови до рівнянь Максвелла

Задача 1. Використання граничних умов електричного поля

Дано: Значення вектора електричної індукції на плоскій поверхні розділу двох середовищ дорівнює $D_1 = 8 \cdot 10^{-8} \frac{Кл}{м^2}$ Н.

Вектор \vec{D} створює з нормаллю до поверхні кут 45° .

Обидва середовища однорідні та ізотропні.

Відносні діелектричні проникності середовищ $\epsilon_1 = 1$, $\epsilon_2 = 3$.

На поверхні розділу рівномірно розподілений поверхневий електричний заряд

$$\rho_{пов} = 1 \cdot 10^{-9} \frac{Кл}{м^2}.$$

Визначити: значення векторів напруги електричного поля E_1 та E_2 , індукції електричного поля D_2 .

Розв'язання.

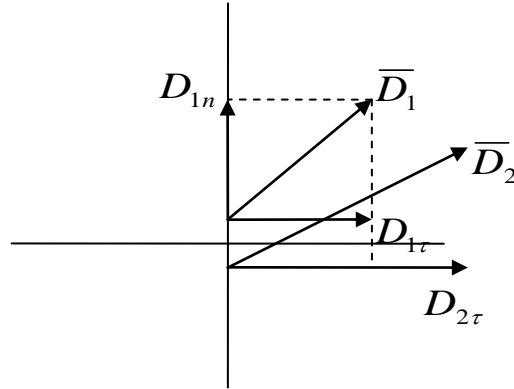


Рис. 2.1. Вектори індукції на межі розділу двох середовищ.

1. Розрахунок складових в першому середовищі:

Граничні умови для вектора D :

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_{\text{нов}} = 1 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}.$$

$$D_{1n} = D_1 \cos 45^\circ = 5,58 \cdot 10^{-9} \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}.$$

$$D_{1\tau} = D_1 \sin 45^\circ = 5,68 \cdot 10^{-9} \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}.$$

2. Розрахунок складових вектора індукції в другому середовищі:

$$D_{2n} = D_1 - \rho_{\text{нов}} = (5,68 - 1) \cdot 10^{-9} = 4,68 \cdot 10^{-9} \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}.$$

3. Розрахунок дотичної складової $D_{2\tau}$ через вектор E :

$$D_{2\tau} = \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_{2\tau}.$$

Граничні умови для вектора E :

$$E_{2\tau} = E_{1\tau}.$$

$$\text{Далі необхідно знайти } E_{2\tau} = E_{1\tau} = \frac{D_{1\tau}}{\varepsilon_0 \varepsilon_1}.$$

$$D_{2\tau} = \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_{2\tau} = \varepsilon_0 \varepsilon_2 \frac{D_{1\tau}}{\varepsilon_0 \varepsilon_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} D_{1\tau} = 3 \cdot 5,68 \cdot 10^{-9} = 17 \cdot 10^{-9} \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}.$$

$$D_2 = \sqrt{D_{2\tau}^2 + D_{2n}^2} = \sqrt{4,68^2 + 17^2} \cdot 10^{-9} = 17,35 \cdot 10^{-9} \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}.$$

$$4. \text{ Вектор } E_2 = \frac{D_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_2} = \frac{17,35 \cdot 10^{-9}}{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 3} = 6,5 \cdot 10^2 \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

Задача 2. Вектор Умова-Пойтинга. Теорема Пойтинга.

Дано. Розрахувати миттєву потужність, що проходить через прямокутну площадку площею $0,1\text{м}^2$ що лежить в площині xOy , якщо вектора в цей момент часу:

$$\vec{E} = (5\bar{x}_0 + 2\bar{z}_0) \frac{B}{m},$$

$$\vec{H} = (3\bar{y}_0 - 2\bar{z}_0) \frac{A}{m}.$$

Розв'язання.

1. Щільність миттєвої потужності дорівнює значенню вектора Пойтинга $\vec{P} = [\vec{E}, \vec{H}]$.

$$2. \vec{P} = \begin{vmatrix} \bar{x}_0 & \bar{y}_0 & \bar{z}_0 \\ E_x & E_y & E_z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{x}_0 & \bar{y}_0 & \bar{z}_0 \\ 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -6\bar{x}_0 + 10\bar{y}_0 + 15\bar{z}_0.$$

3. Потужність $P = \vec{P} \cdot \vec{S} = \vec{P} \cdot \vec{n}_0 \cdot S$.

де $\vec{n}_0 = 1 \cdot \bar{z}_0$.

$$P = 15\bar{z}_0 \cdot 0,1\bar{z}_0 = 1,5Bm.$$

Висновок: вектор Пойтинга представляє собою щільність потоку потужності електромагнітного поля, що проходить в даному місці простору. Напрямок вектора Пойтинга показує напрям розповсюдження енергії електромагнітного поля.

3. Хвильові рівняння для векторів електричного та магнітного поля

Постановка задачі: необхідно розв'язати систему рівнянь Максвелла відносно векторів \vec{E} та \vec{H} у випадку, коли вони змінюються за гармонійним законом.

Зробимо деякі припущення та обмеження, які дозволять спростити знаходження формул для векторів \vec{E} та \vec{H} :

а) параметри середовищ не змінюються в часі, $\epsilon, \mu, \sigma = const$;

б) в середовищі немає вільних зарядів, $\dot{\rho}_m = 0$.

3.1. Хвильове рівняння для вектору \vec{E}

Візьмемо операцію ротора від лівої та правої частини другого рівняння Максвелла:

$$rot\ rot\dot{\vec{E}}_m = rot\left(-i\omega\mu\dot{\vec{H}}_m\right).$$

Тому що $\mu = const$, цю величину можливо винести за знак ротора.

Відома наступна тотожність з векторної алгебри: $rot\,rot\bar{a} = grad\,div\bar{a} - \nabla^2\bar{a}$. Тому розпишемо так ліву частину рівняння:

$$grad\,div\dot{\bar{E}}_m - \nabla^2\dot{\bar{E}}_m = -i\omega\mu\,rot\dot{\bar{H}}_m.$$

Підставимо в цей вираз перше рівняння Максвелла $rot\dot{\bar{H}}_m = i\omega\varepsilon_\kappa\dot{\bar{E}}_m + \dot{j}_{сторм}$:

$$grad\,div\dot{\bar{E}}_m - \nabla^2\dot{\bar{E}}_m = -i\omega\mu\left(i\omega\varepsilon_\kappa\dot{\bar{E}}_m + \dot{j}_{сторм}\right).$$

Згадаємо, що $div\dot{\bar{E}}_m = \frac{\dot{\rho}_m}{\varepsilon}$, а з урахуванням зроблених припущень

$$(\dot{\rho}_m = 0)\,div\dot{\bar{E}}_m = 0.$$

Тому $-\nabla^2\dot{\bar{E}}_m = -i\omega\mu\left(i\omega\varepsilon_\kappa\dot{\bar{E}}_m + \dot{j}_{сторм}\right) = \omega^2\varepsilon_\kappa\mu\dot{\bar{E}}_m - i\omega\mu\dot{j}_{сторм}$,

Остаточно одержуємо хвильове рівняння для вектора \bar{E} :

$$\nabla^2\dot{\bar{E}}_m + \omega^2\varepsilon_\kappa\mu\dot{\bar{E}}_m = i\omega\mu\dot{j}_{сторм}.$$

Позначаючи $\omega^2\varepsilon_\kappa\mu = k^2$, прийдемо до рівняння

$$\nabla^2\dot{\bar{E}}_m + k^2\dot{\bar{E}}_m = i\omega\mu\dot{j}_{сторм}. \quad (3.3)$$

Це неоднорідне диференційне рівняння другого порядку, відоме як векторне хвильове неоднорідне рівняння Гельмгольца. Параметр $k = \sqrt{\omega^2\varepsilon_\kappa\mu}$ має назву хвильового числа. Як ми побачимо пізніше, рішення цього рівняння описують хвилі, що розповсюджуються у середовищі.

У випадку відсутності сторонніх струмів $\dot{j}_{сторм} = 0$ одержимо однорідне рівняння Гельмгольца

$$\nabla^2\dot{\bar{E}}_m + k^2\dot{\bar{E}}_m = 0. \quad (3.4)$$

Рівняння (4) є векторним. Воно представляє собою систему рівнянь з трьох скалярних рівнянь відносно складових \dot{E}_{xm} , \dot{E}_{ym} та \dot{E}_{zm} по координатах (x, y, z) :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2\dot{E}_{xm}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\dot{E}_{xm}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\dot{E}_{xm}}{\partial z^2} + k^2\dot{E}_{xm} = 0, \\ \frac{\partial^2\dot{E}_{ym}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\dot{E}_{ym}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\dot{E}_{ym}}{\partial z^2} + k^2\dot{E}_{ym} = 0, \\ \frac{\partial^2\dot{E}_{zm}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\dot{E}_{zm}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\dot{E}_{zm}}{\partial z^2} + k^2\dot{E}_{zm} = 0. \end{cases} \quad \text{або записується так: } \begin{cases} \nabla^2\dot{E}_{xm} + k^2\dot{E}_{xm} = 0, \\ \nabla^2\dot{E}_{ym} + k^2\dot{E}_{ym} = 0, \\ \nabla^2\dot{E}_{zm} + k^2\dot{E}_{zm} = 0. \end{cases}$$

Після того, як векторна функція $\dot{\bar{E}}_m$ знайдена, функцію $\dot{\bar{H}}_m$ простіше всього знайти за допомогою другого рівняння Максвелла у комплексному вигляді:

$$\dot{\vec{H}}_m = -\frac{1}{i\omega\mu} \text{rot} \dot{\vec{E}}_m.$$

3.2. Хвильове рівняння для вектору \vec{H}

Візьмемо операцію ротора від лівої та правої частини першого рівняння Максвелла:

$$\text{rot} \text{rot} \dot{\vec{H}}_m = \text{rot} (i\omega\epsilon \dot{\vec{E}}_m + \dot{\vec{j}}_{\text{сторонн}}).$$

Аналогічно вектору \vec{E} , послідовно одержимо:

$$\text{grad} \text{div} \dot{\vec{H}}_m - \nabla^2 \dot{\vec{H}}_m = i\omega\epsilon \text{rot} \dot{\vec{E}}_m + \text{rot} \dot{\vec{j}}_{\text{сторонн}}.$$

Враховуючи, що $\text{div} \dot{\vec{H}}_m = 0$ (четверте рівняння системи рівнянь) та $\text{rot} \dot{\vec{E}}_m = -i\omega\mu \dot{\vec{H}}_m$ (друге рівняння), отримуємо неоднорідне хвильове рівняння для вектора \vec{H} :

$$\nabla^2 \dot{\vec{H}}_m + k^2 \dot{\vec{H}}_m = -\text{rot} \dot{\vec{j}}_{\text{сторонн}}. \quad (3.5)$$

У випадку відсутності сторонніх струмів $\dot{\vec{j}}_{\text{сторонн}} = 0$ одержимо однорідне рівняння Гельмгольца для вектора \vec{H}

$$\nabla^2 \dot{\vec{H}}_m + k^2 \dot{\vec{H}}_m = 0. \quad (3.6)$$

Висновок: хвильові рівняння широко застосовуються для розв'язання практичних задач. Для цього звичайно робляться припущення відносно характеристик поля, які дозволять спростити розв'язання хвильових рівнянь.

4. Властивості плоских хвиль у необмеженому середовищі

4.1. Відбиття та заломлення плоских хвиль на межі розділу двох середовищ

Постановка крайової задачі. Визначення основних понять.

У реальних умовах хвилі поширюються за наявності різних середовищ, які відрізняються електричними параметрами ϵ , μ та σ . В техніці зв'язку дуже часто телекомунікаційні сигнали передаються вздовж меж розділу кількох середовищ, у так званих напрямних системах.

Поверхня, що відокремлює середовище з одними параметрами від середовища з іншими параметрами, називається межею розділу.

Наприклад – межею розділу є поверхня Землі, межі між серцевиною і оболонкою оптичного волокна, між струмопровідною жилою та діелектриком в симетричному або коаксіальному кабелі.

Сьогодні ми вивчатимемо хвилі за наявності простих меж розділу. Розуміння явищ на межі розділу, властивостей хвиль необхідно при вивченні антенної техніці, властивостей різних типів ліній передачі, для розуміння особливостей поширення радіохвиль в атмосфері.

Задачі електродинаміки, що пов'язані з визначенням напруженості поля за наявності меж розділу, називають крайовими задачами електродинаміки.

Постановка крайової задачі: припустимо, що в середовищі з відомими електричними параметрами ϵ, μ, σ знаходиться предмет з параметрами $\epsilon_1, \mu_1, \sigma_1$.

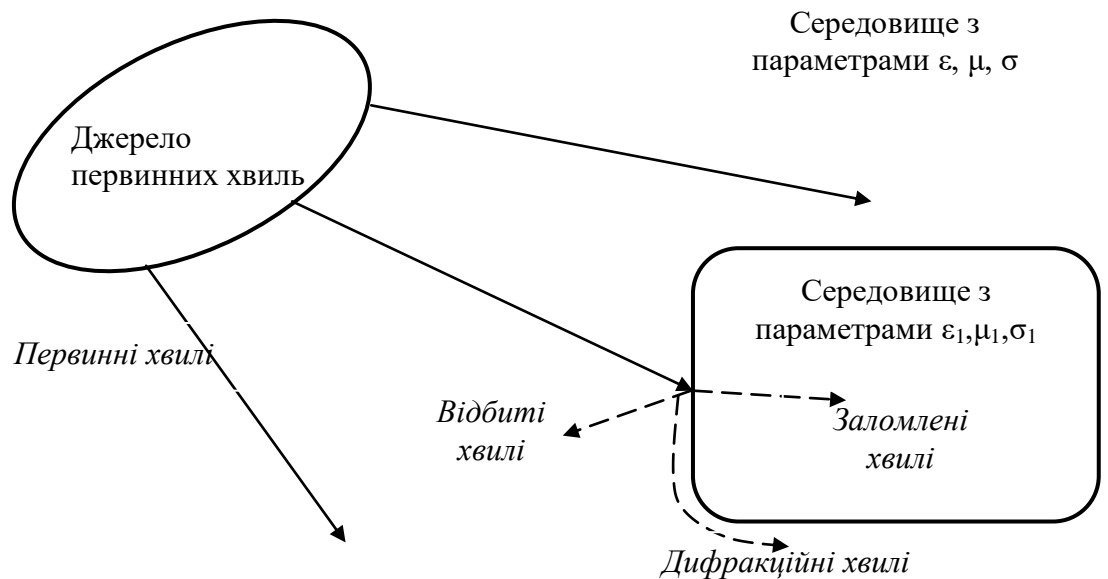


Рис.4.1. Первинні та вторинні (відбиті, заломлені, дифракційні) хвилі

Первинну хвилю збуджує джерело із заданими параметрами – це випромінювач (антена). Внаслідок наявності меж розділу середовищ з'являються вторинні хвилі:

- відбиті хвилі у області прямої видимості;
- заломлені хвилі у середовищі з параметрами $\epsilon_1, \mu_1, \sigma_1$;
- дифракційні хвилі у області тіні.

Нам відомо:

- характеристики первинних хвиль;
- електричні параметри середовищ;
- форма межі розділу.

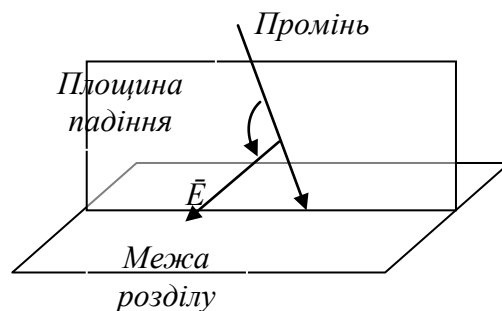
Звичайно крайові задачі розв'язуються за таким планом:

- обирається система координат так, щоб поверхня розділу середовищ співпадала з однією з координатних площин;
- в обраній системі координат записуються відомі умови задачі;
- записуються рівняння граничних умов;
- за допомогою граничних умов визначаються характеристики вторинних хвиль;
- проводиться аналіз отриманих рішень та вивчаються властивості вторинних хвиль.

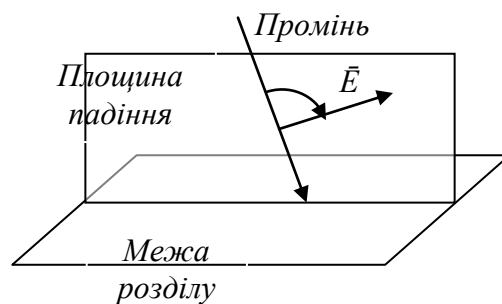
4.2. Рівняння плоскої хвилі, промінь якої не паралельний до координатних осей

Будемо розв'язувати найпростішу задачу: межа розділу плоска, первинна хвиля плоска.

Розрізняють два випадки поляризації падаючої хвилі: горизонтальна та вертикальна поляризація.



Горизонтальна (нормальна) поляризація – вектор \vec{E} перпендикулярний до площини падіння.



Вертикальна (паралельна) поляризація – вектор \vec{E} паралельний до площини падіння.

Рис.4.2. Горизонтальна та вертикальна поляризації

Площина падіння – це площина, яка проходить через промінь та перпендикулярна межі розділу. У випадку горизонтальної поляризації вектор \vec{E} перпендикулярний до площини падіння. У випадку вертикальної поляризації вектор \vec{E} лежить у площині падіння (паралельний цій площині).

Потрібно знайти рівняння падаючої хвилі у загальному випадку, коли промінь падаючої хвилі не співпадає з жодною з координатних осей.

Раніше було записано рівняння для комплексної амплітуди хвилі, що поширюється у напрямку збільшення координати r :

$$\vec{E}_m(r) = \vec{E}_0 e^{-ikr}. \quad (4.1)$$

Зрозуміло, що фаза та амплітуда вектора \vec{E} залежить від пройденого шляху вздовж координати r . Знайдемо вираз для фази комплексної амплітуди хвилі у випадку, коли хвиля розповсюджується під кутом до координатних осей.

Для спрощення розглянемо двомірну задачу в координатах xOz (рис.4.3). Позначимо кути між променем хвилі та координатними осями Ox та Oz відповідно α та γ , як показано на рисунку.

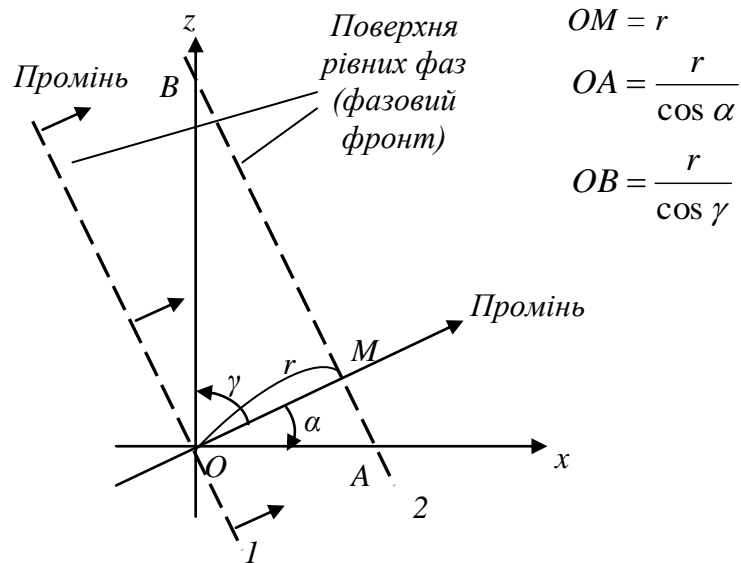


Рис.4.3. Поширення плоскої хвилі під кутом до координатних осей

Положення фазового фронту, коли він проходив через початок координат, позначено цифрою 1. За деякий час хвиля пройде відстань r та займе положення 2. Потрібно виразити відстань r через відомі кути α та γ .

Загальне рівняння прямої лінії фазового фронту має вигляд

$$ax + cz = d. \quad (4.2)$$

$$\text{Якщо } x = 0, \text{ то } z = OB = \frac{r}{\cos \gamma}; \quad cz = d; \quad c = \frac{d}{z} = \frac{d \cos \gamma}{r}.$$

$$\text{Якщо } z = 0, \text{ то } x = OA = \frac{r}{\cos \alpha}; \quad ax = d; \quad a = \frac{d}{x} = \frac{d \cos \alpha}{r}.$$

Підставляючи ці значення в рівняння (2), отримуємо

$$\frac{d \cos \alpha}{r} x + \frac{d \cos \gamma}{r} z = d,$$

звідки

$$x \cos \alpha + z \cos \gamma = r.$$

Це так зване рівняння площини фазового фронту через направляючі косинуси. Аналогічно, у тривимірному випадку, якщо нам відомі кути між променем хвилі та координатними осями α , β та γ , ми можемо знайти комплексну амплітуду вектора у точці спостереження з координатами x , y та z :

$$\dot{\vec{E}}_m(\mathbf{r}) = \dot{\vec{E}}_{0m} e^{-ikr} = \dot{\vec{E}}_{0m} e^{-ik(x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)}. \quad (4.3)$$

де $\dot{\vec{E}}_{0m}$ - комплексна амплітуда вектора в початку координат.

4.3 Комплексні амплітуди падаючої, відбитої та заломленої хвилі

Нам відомі: параметри середовищ, частота падаючої хвилі, направляючі косинуси падаючої хвилі. Спочатку припустимо, що падаюча хвиля має горизонтальну поляризацію.

Систему координат повернемо так, щоб межа розділу співпадала з площиною xOy , а вектор $\dot{\vec{E}}$ з горизонтальної поляризацією був паралельний до вісі Oy (яка спрямована у площину рисунка). Тому вектор $\dot{\vec{E}}$ буде мати тільки одну складову E_y (рис.4.4).

Зробимо такі позначення (рис.4.4):

- φ_n - кут падіння, між нормаллю до межі розділу та променем падаючої хвилі;
- φ_v - кут відбиття, між нормаллю до межі розділу та променем відбитої хвилі;
- φ_z - кут заломлення, між нормаллю до межі розділу та променем заломленої хвилі.

Припустимо, що відбита та заломлена хвилі мають таку ж поляризацію, як і падаюча.

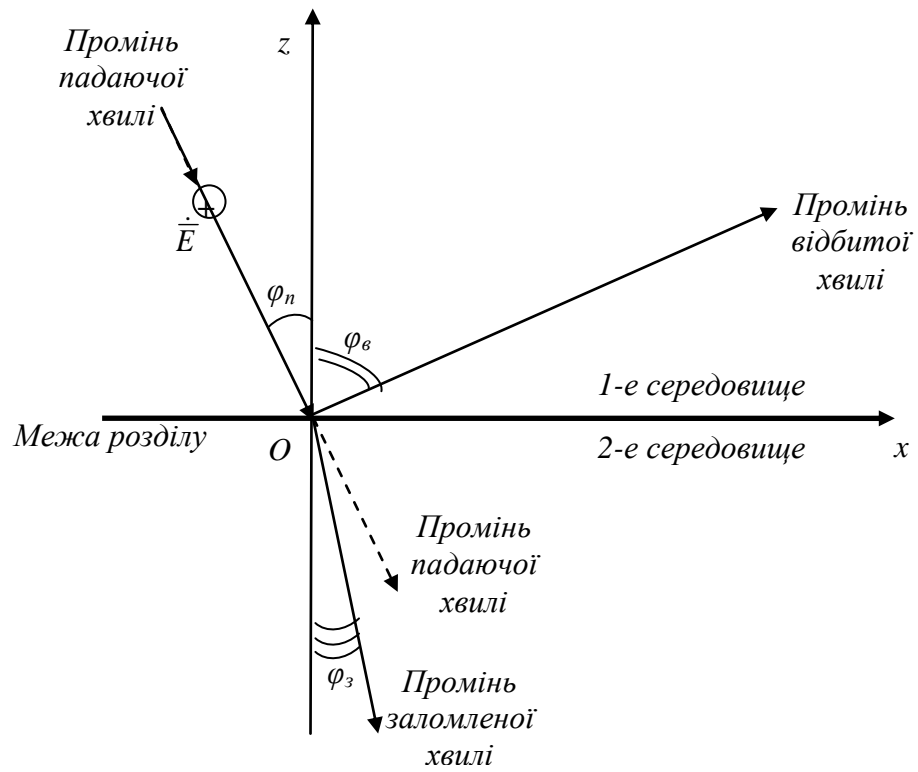


Рис.4.4. Падіння плоскої хвилі на плоску межу розділу

Щоб отримати вирази для комплексних амплітуд всіх трьох хвиль, потрібно записати направляючі косинуси через кути падіння, відбиття та заломлення (рис.4.5).

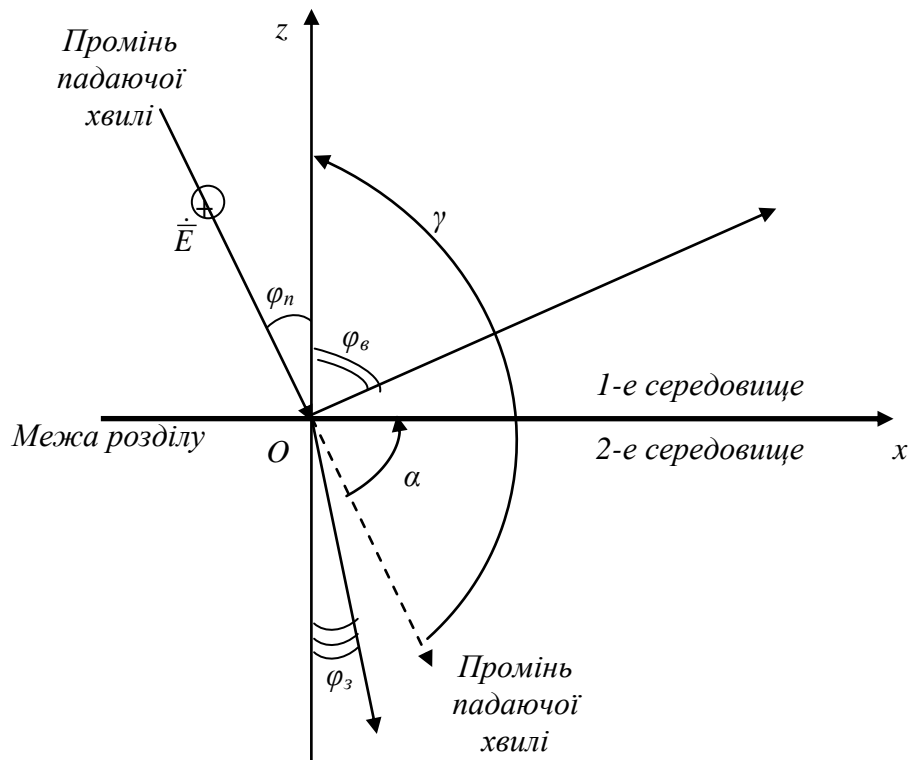


Рис.4.5. Направляючі косинуси падаючої хвилі

На рисунку видно, що кут між променем падаючої хвилі та Ох $\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi_n$, а кут між променем падаючої хвилі та Oz $\gamma = \pi - \varphi_n$. Тому комплексна амплітуда падаючої хвилі

$$\dot{E}_{ym}^n = \dot{E}_{0ym}^n \cdot e^{-ik_1(x \cos \alpha + z \cos \gamma)} = \dot{E}_{0ym}^n \cdot e^{-ik_1(x \sin \varphi_n - z \cos \varphi_n)}. \quad (4.4)$$

Аналогічно знайдемо дві інші комплексні амплітуди:

$$\dot{E}_{ym}^e = \dot{E}_{0ym}^e \cdot e^{-ik_1(x \sin \varphi_e + z \cos \varphi_e)} - \text{відбита хвиля}; \quad (4.5)$$

$$\dot{E}_{ym}^z = \dot{E}_{0ym}^z \cdot e^{-ik_2(x \sin \varphi_z - z \cos \varphi_z)} - \text{заломлена хвиля}, \quad (4.6)$$

де \dot{E}_{0ym} - комплексні амплітуди при $z = 0$, на межі розділу;

$$k_1 = \omega \sqrt{\varepsilon_{k1} \mu_1}; \quad k_2 = \omega \sqrt{\varepsilon_{k2} \mu_2} - \text{хвильові числа середовищ.}$$

В рівняннях (4.4...6) задано кут φ_n та амплітуду падаючої хвилі \dot{E}_{0ym}^n , невідомі кути φ_e, φ_z та амплітуди відбитої та заломленої хвилі $\dot{E}_{0ym}^e, \dot{E}_{0ym}^z$.

4.4. Закони Снелліуса

Для знаходження невідомих величин використаємо межові умови для дотичних складових вектора $\dot{\vec{E}}$:

$$\dot{E}_{1\tau} = \dot{E}_{2\tau} \text{ при } z = 0.$$

У першому середовищі є дві хвилі, падаюча та відбита: $\dot{E}_{1\tau} = \dot{E}_{ym}^n + \dot{E}_{ym}^e$. У другому середовищі тільки заломлена: $\dot{E}_{2\tau} = \dot{E}_{ym}^z$. Звідки отримуємо, що повинне виконуватись рівняння

$$\dot{E}_{ym}^n + \dot{E}_{ym}^e = \dot{E}_{ym}^z \text{ при } z = 0. \quad (4.7)$$

Підставимо в рівняння (7) вирази (4-6), та при $z = 0$ отримуємо:

$$\dot{E}_{0ym}^n \cdot e^{-ik_1 x \sin \varphi_n} + \dot{E}_{0ym}^e \cdot e^{-ik_1 x \sin \varphi_e} = \dot{E}_{0ym}^z \cdot e^{-ik_2 x \sin \varphi_z}. \quad (4.8)$$

Це рівняння повинне виконуватись при всіх значеннях x . А це можливо тільки тоді, коли при всіх x буде справедливе:

$$e^{-ik_1 x \sin \varphi_n} = e^{-ik_1 x \sin \varphi_e} = e^{-ik_2 x \sin \varphi_z}. \quad (4.9)$$

З першої частини рівняння (4.9) отримуємо $e^{-ik_1 x \sin \varphi_n} = e^{-ik_1 x \sin \varphi_e}$, звідки виводимо перше рівняння Снелліуса

$$\varphi_n = \varphi_e. \quad (4.10)$$

З другої частини виразу (9) $e^{-ik_1 x \sin \varphi_n} = e^{-ik_2 x \sin \varphi_3}$ отримуємо друге рівняння Снелліуса

$$k_1 \sin \varphi_n = k_2 \sin \varphi_3. \quad (4.11)$$

4.5 Явище повного відбиття. Граничний кут повного відбиття

Розглянемо більш докладно випадок, коли обидва середовища – діелектрики, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$. Загасання в середовищах немає, хвильові числа будуть цілком дійсними числами та дорівнюватимуть фазовим сталим: $k_1 = \beta_1$, $k_2 = \beta_2$:

Розв'яжемо рівняння $\beta_1 \sin \varphi_n = \beta_2 \sin \varphi_3$ відносно кута заломлення, під яким розповсюджується хвиля у другому середовищі:

$$\sin \varphi_3 = \frac{\beta_1}{\beta_2} \sin \varphi_n.$$

Якщо перше середовище більш оптично щільне, $\beta_1 > \beta_2$, то може існувати такий кут падіння, при якому буде $\sin \varphi_3 = \frac{\beta_1}{\beta_2} \sin \varphi_n = 1$. Це означає, що $\varphi_3 = \frac{\pi}{2}$, заломлена хвиля розповсюджується паралельно межі розділу. Це відповідає граничному куту падіння.

При збільшенні кута падіння може бути, що $\sin \varphi_3 > 1$, а це означає, що кут заломлення буде уявним і не існує в області дійсних чисел. В друге середовище хвиля не проходить, спостерігається повне відбиття від межі розділу.

Таке явище відбувається в оптичних світловодах на межі серцевини та оболонки. Промінь світла, що поширюється в серцевині, повністю відбивається від межі та не проходить в оболонку, завдяки чому є можливість передавати сигнали на великі відстані (десятки та сотні кілометрів).

Якщо $\sin \varphi_3 > 1$, то кут φ_3 буде чисто уявним, $\cos \varphi_3 = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi_3} = \pm ic$. Можливо довести, що з фізичних міркувань може існувати тільки рішення $\cos \varphi_3 = -ic$.

З виразу (6) проаналізуємо залежність амплітуди заломленої хвилі від z ($x = 0$):

$$\dot{E}_{ym}^z = \dot{E}_{0ym}^z \cdot e^{-ik_2(x\sin\varphi_3 - z\cos\varphi_3)} = \dot{E}_{0ym}^z \cdot e^{-ik_2(-z(-ic))} = \dot{E}_{0ym}^z \cdot e^{+k_2cz}.$$

Таким чином, при проникненні в друге середовище збільшується від'ємне значення координати z та зменшується амплітуда заломленої хвилі за експоненціальним законом.

5. Коефіцієнт загасання та фазова швидкість електромагнітних хвиль.

Задача № 1. Розрахувати коефіцієнт загасання та фазову швидкість електромагнітних хвиль. Дисперсія електромагнітних хвиль.

Дано: середовище - вологий ґрунт,

відносна діелектрична проникність $\epsilon_r = 20$,

електрична провідність $\sigma = 10^{-3}$ См/м,

частоти $10^4, 10^6, 10^8, 10^{10}$ Гц.

Розрахувати:

- коефіцієнт загасання електромагнітних хвиль,
- фазову сталу,
- фазову швидкість електромагнітних хвиль,
- глибину проникнення електромагнітних хвиль в середовище.

Розв'язання:

$$\text{коефіцієнт загасання } \alpha = \omega\sqrt{\epsilon\mu} \sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2}},$$

$$\text{фазова стала } \beta = \omega\sqrt{\epsilon\mu} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2}}.$$

У провідниках виконується нерівність $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$, тому можливо використовувати

наближені формули

$$\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \sqrt{\pi f \sigma \mu}.$$

У діелектриках справедливо $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \ll 1$, розрахунок можливо проводити за

наближеними формулами

$$\alpha \approx \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}},$$

$$\beta \approx \omega\sqrt{\varepsilon\mu}\left(1 + \frac{1}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right) \approx \omega\sqrt{\varepsilon\mu}.$$

Фазова швидкість знаходиться за формулою $V_\phi = \frac{\omega}{\beta}$,

глибина проникнення в середовище $\Delta = \frac{1}{\alpha}$.

Для аналізу залежності параметрів від частоти розрахунків доцільно проводити по кількох варіантах. Результати розрахунків наведено у таблиці 4.1.

Таблиця 4.1

Варіант	1	2	3	4
Частота, Гц	10^4	10^6	10^8	10^{10}
Довжина хвилі λ	30 км	300 м	3 м	3 см
$\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$	$9,366 \cdot 10^{-4}$	$9,366 \cdot 10^{-2}$	9,366	$9,366 \cdot 10^2$
$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}$	90»	0,9≈1	0,009«1	0,00009«1
Розрахункова формула для α	$\sqrt{\pi f \sigma \mu}$	$\alpha = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}\sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}}$	$\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$	$\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$
α , 1/м	$6,28 \cdot 10^{-3}$	$3,892 \cdot 10^{-2}$	$4,215 \cdot 10^{-2}$	$4,215 \cdot 10^{-2}$
Розрахункова формула для β	$\sqrt{\pi f \sigma \mu}$	$\beta = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}}$	$\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$	$\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$
Фазова швидкість V_ϕ , м/с	10^7	$6,196 \cdot 10^7$	$6,708 \cdot 10^7$	$6,708 \cdot 10^7$
Глибина проникнення в середовище Δ , м	159,2	25,69	23,72	23,72

Висновок: в реальних середовищах фазова швидкість електромагнітної хвилі залежить від частоти. Це явище називається дисперсією. Середовища, у яких спостерігається це явище, називаються такими, що мають дисперсію.

Завдання на самостійну роботу: побудувати графік залежності швидкості електромагнітної хвилі від частоти.

6. Поляризація електромагнітних хвиль.

Задача. Визначити вид поляризації електромагнітної хвилі

Дано. Комплексна амплітуда вектора E має значення:

$$\bar{E} = (Ae^{i\varphi_x} \bar{x}_0 + Be^{i\varphi_y} \bar{y}_0) \frac{B}{m}$$

Розрахувати миттєві значення вектора E в моменти часу $t = 0, T/4, T/2, T$, за умови $\varphi_x = 0, A = B$, при різних значеннях фази $\varphi_y = 0, \pi/4, \pi/2, \pi$.

Побудувати фігуру, яку описує кінець вектора за період коливань. Результати розрахунків для різних значень часу та, відповідно, фази φ_y , зведені у таблицю 6.1.

Таблиця 6.1

φ_y	0	$\pi/4$	$\pi/2$	π
$\bar{E}(M, t)$	$\bar{E} = 1 \cos(\omega t) \bar{x}_0 + 1 \cos(\omega t) \bar{y}_0$	$\bar{E} = 1 \cos(\omega t) \bar{x}_0 + 1 \cos(\omega t + \frac{\pi}{4}) \bar{y}_0$	$\bar{E} = 1 \cos(\omega t) \bar{x}_0 + 1 \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) \bar{y}_0$	$\bar{E} = 1 \cos(\omega t) \bar{x}_0 + 1 \cos(\omega t + \pi) \bar{y}_0$
$t = 0$	$\bar{E} = 1 \bar{x}_0 + 1 \bar{y}_0$	$\bar{E} = 1 \bar{x}_0 + 0,7 \bar{y}_0$	$\bar{E} = 1 \bar{x}_0 + 0 \bar{y}_0$	$\bar{E} = 1 \bar{x}_0 - 1 \bar{y}_0$
$t = T/4$	$\bar{E} = 0 \bar{x}_0 + 0 \bar{y}_0$	$\bar{E} = 0 \bar{x}_0 - 0,7 \bar{y}_0$	$\bar{E} = 0 \bar{x}_0 - 1 \bar{y}_0$	$\bar{E} = 0 \bar{x}_0 + 0 \bar{y}_0$
$t = T/2$	$\bar{E} = -1 \bar{x}_0 - 1 \bar{y}_0$	$\bar{E} = -1 \bar{x}_0 - 0,7 \bar{y}_0$	$\bar{E} = -1 \bar{x}_0 + 0 \bar{y}_0$	$\bar{E} = -1 \bar{x}_0 + 1 \bar{y}_0$
$t = 3T/4$	$\bar{E} = 0 \bar{x}_0 + 0 \bar{y}_0$	$\bar{E} = 0 \bar{x}_0 + 0,7 \bar{y}_0$	$\bar{E} = 0 \bar{x}_0 + 1 \bar{y}_0$	$\bar{E} = 0 \bar{x}_0 + 0 \bar{y}_0$
$t = T$	$\bar{E} = 1 \bar{x}_0 + 1 \bar{y}_0$	$\bar{E} = 1 \bar{x}_0 + 0,7 \bar{y}_0$	$\bar{E} = 1 \bar{x}_0 + 0 \bar{y}_0$	$\bar{E} = 1 \bar{x}_0 - 1 \bar{y}_0$



Рис. 6.1. Фігура, яку описує кінець вектора E за час одного періоду коливань.

Висновок: При збільшенні часу кінець вектора E описує в просторі фігуру: лінію, коло або еліпс.

Якщо ця фігура:

- а) коло, то поляризація називається круговою,
- б) лінія, то поляризація називається лінійною,
- в) еліпс, то поляризація називається еліптичною.

Ознака кругової поляризації: необхідна рівність амплітуд складових E_x та E_y , та різниця фаз повинна бути $\pm\pi/2$.

Ознака лінійної поляризації: відсутність однієї із складових або різниця фаз складових дорівнює 0 або π .

В усіх інших випадках буде спостерігатися еліптична поляризація.

7. Поширення електромагнітних хвиль в умовах Землі й атмосфери

Задача № 1. Знайти відстань прямої видимості за таких умов:

Висота приймальної антени $h = 1, 4, 10, 16, 25$ м.

Висота передавальної антени $h = 1, 4, 10, 16, 25$ м.

Розв'язання:

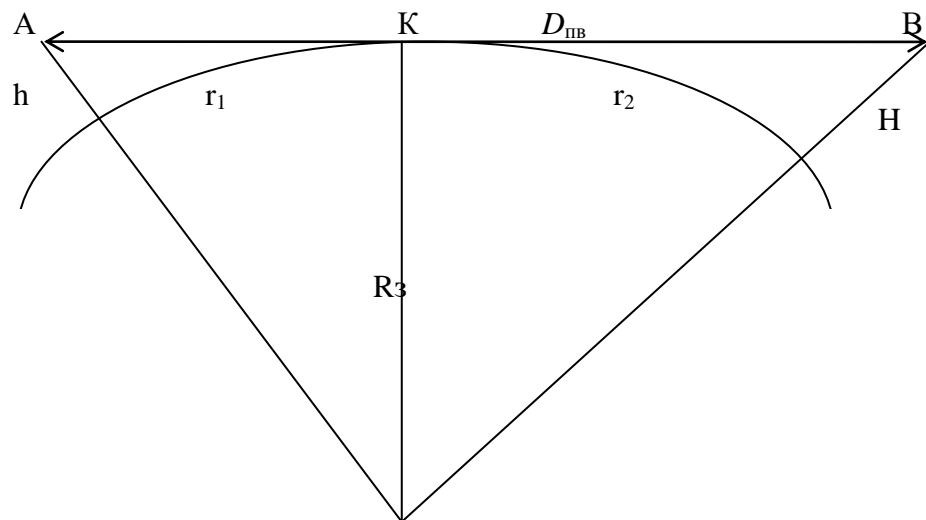


Рис.7.1. Відстань прямої видимості

Відстань прямої видимості – це відстань по поверхні Землі, між двома точками, коли ці точки знаходяться на лінії горизонту (рис.7.1):

$$D_{пв} = r_1 + r_2 \approx AK + KB,$$

$$r_1 = \sqrt{(R_з + h)^2 - R_з^2} = \sqrt{2R_зh + h^2} \approx \sqrt{2R_зh},$$

$$r_2 = \sqrt{(R_з + H)^2 - R_з^2} = \sqrt{2R_зH + H^2} \approx \sqrt{2R_зH},$$

$$\text{остаточно } D_{пв} = \sqrt{2R_з}(\sqrt{h} + \sqrt{H}).$$

Радіус Землі 6370 км, але потрібно враховувати нормальну рефракцію електромагнітних хвиль над Землею. Це виконується введенням еквівалентного радіуса Землі, що дорівнює 8500 км.

Таким чином, відстань прямої видимості з урахуванням нормальної рефракції розраховується за формулою:

$$D_{не} [км] = 4,12 \left(\sqrt{h [м]} + \sqrt{H [м]} \right). \quad (7.1)$$

Результати розрахунків відстані прямої видимості зведено у таблицю 7.1.

Таблиця 7.1

Висота приймальної антени, м	Висота передавальної антени, м				
	1	4	10	16	25
1	8,24	12,36	17,15	20,60	24,72
4	12,36	16,48	21,27	24,72	28,84
10	17,15	21,27	26,06	29,51	33,63
16	20,60	24,72	29,51	32,96	37,08
25	24,72	28,84	33,63	37,08	41,20

Таким чином, за допомогою формули (7.1), коли відомі висоти передавальної та приймальної антени, можливо визначити, чи знаходяться ці антени у межах прямої видимості або ні. Для цього достатньо порівняти відстань прямої видимості з реальною відстанню між антенами.

8. Загасання електромагнітних хвиль різних діапазонів в атмосфері

На загасання електромагнітних хвиль у земній атмосфері впливає багато факторів. Необхідно вміти враховувати їх всі. Від їх дії залежить можливість встановлення зв'язку між передавальною та приймальною апаратурою.

Задача № 1.

Чи можливо встановлення зв'язку між наземними пунктами на частоті 5 МГц, якщо відстань між пунктами 50 км, висота обох антен однакова 4 м?

Розв'язання:

1. Довжина хвилі, що відповідає частоті 50 МГц, дорівнює $\frac{300}{50} = 6 м$. Це метровий

діапазон ультракоротких хвиль. Хвилі з такою частотою практично не відбиваються від іоносфери, на них не впливають дощ, кисень атмосфери на водяний пар.

На такій довжині хвилі зв'язок можливий тільки в умовах прямої видимості, але погода на це не впливає.

Відстань прямої видимості

$$D_{\text{не}}[\text{км}] = 4,12(\sqrt{h[\text{м}]} + \sqrt{H[\text{м}]}) = 4,12(2+2) = 16,48 \text{ км.}$$

Це менше, ніж відстань між пунктами. Тому відповідь: зв'язок встановити неможливо.

Задача № 2.

Чи впливає загасання в газах тропосфери та в дощу на встановлення зв'язку між наземними пунктами на довжині хвилі 10 см?

Розв'язання:

На довжині хвилі 10 см дощ та гази атмосфери не впливають на поширення хвиль, але зв'язок можливий тільки в межах прямої видимості.

Задача № 3.

Чи можливо встановлення зв'язку між наземним пунктом та супутником на довжині хвилі 500 м?

Розв'язання:

Довжина хвилі 500 м відноситься до середніх хвиль. Відомо, що середні хвилі відбиваються від іоносфери вночі або загасають в іоносфері вдень, тому хвилі цього діапазону в космос через атмосферу не проходять.

Тому зв'язок з супутником у цьому діапазоні неможливий.

9. Властивості поля в напрямних системах. Побудова структури векторів електромагнітного поля у хвилеводі прямокутного перерізу.

Задача 1. Побудувати структуру поля хвилі типу H_{10} .

Розв'язання:

Відомо, що у хвилі типу H , що поширюється вздовж осі Oz , вектори поля описуються виразами:

$$\dot{E}_{mx} = C_1 n \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) (Ae^{-i\beta z} + Be^{i\beta z})$$

$$\dot{E}_{my} = C_1 m \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) (Ae^{-i\beta z} + Be^{i\beta z})$$

$$\dot{H}_{mx} = C_2 m \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) (Ae^{-i\beta z} - Be^{i\beta z})$$

$$\dot{H}_{my} = C_2 n \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) (Ae^{-i\beta z} - Be^{i\beta z})$$

Для хвилі типу H_{10} індекси $m = 1$, $n = 0$.

З рівнянь видно, що вектор E має одну складову, в вектор H дві, тому побудову структури поля у поперечному перерізі потрібно починати з вектору E :

$$\dot{E}_{my} = C \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right),$$

Вздовж координати x вектор змінюється за законом синуса:

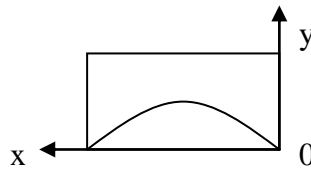


Рис.9.1. Закон зміни E_y вздовж координати x .

Біля стінок хвилеводу $E_y = 0$, в середині хвилеводу значення E_y максимальне.

Вздовж координати y вектор не змінюється, а залишається постійним:

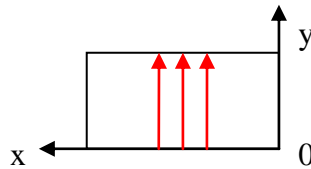


Рис.9.2. Структура вектора E_y .

Через половину довжини хвилі, де $z = \lambda/2$, фаза векторів поля змінюється на протилежну і напрям вектору E_y також змінюється на протилежний:

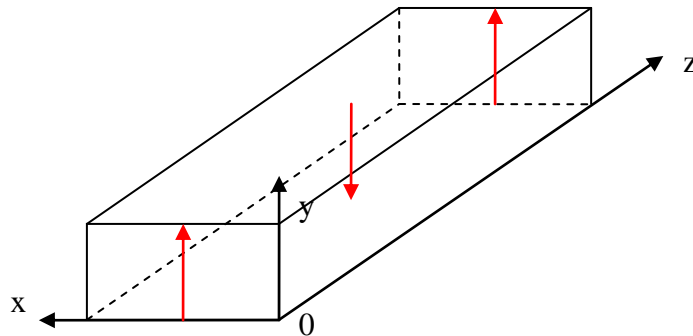


Рис.9.3. Структура вектора E_y вздовж координати z .

Після побудови структури вектора E виконується побудова вектора H . Силкові лінії вектора H будуть перпендикулярні вектору E та мають замкнену форму:

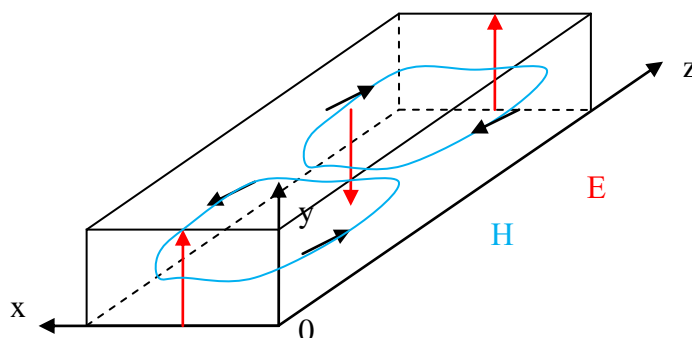


Рис. 9.4. Структура векторів E та H хвилі типу H_{10} . Хвиля поширюється вздовж осі Oz .

10. Розрахунок діаграми типів хвиль у прямокутному хвилеводі.

Задача 1. Побудувати діаграму типів хвиль у хвилеводі.

Розмір стінок хвилеводу $a = 23$ мм, $b = 10$ мм. У хвилеводі знаходиться пінополістирол з відносною діелектричною проникністю $\epsilon_r = 1,15$.

Розв'язання.

Діаграма типів хвиль – це графік, на якому показані критичні частоти (або критичні довжини хвиль) в залежності від типу хвиль (тобто в залежності від значень індексів m та n).

Відомо, що критична довжина хвилі в прямокутному хвилеводі визначається формулою

$$\lambda_{кр} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}},$$

відповідна їй критична частота – це відношення швидкості хвилі у вільному просторі до критичної довжини, тому

$$f_{кр} = \frac{v_{св.прост}}{\lambda_{кр}} = \frac{1}{2\sqrt{\epsilon\mu}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} = \frac{c}{2\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}.$$

Результати розрахунків для деяких перших значень індексів m та n зведені у таблицю 10.1.

Таблиця 10.1

n	m			
	0	1	2	3
0	-	2a = 46 мм	a = 23 мм	2/3a = 15,33 мм
		6,08 ГГц	12,16 ГГц	18,24 ГГц
1	2b = 20 мм	18,34 мм	15,09 мм	-
	13,99 ГГц	15,25 ГГц	18,54 ГГц	
2	b = 10 мм	9,772 мм	-	-
	27,98 ГГц	28,63 ГГц		

Завдання на самостійну роботу: за даними розрахунків побудувати діаграму типів хвиль.

11. Розрахунок коефіцієнта відбиття в лінії передачі.

11.1. Розрахунок коефіцієнта стоячої хвилі

Відомо, що в результаті інтерференції падаючої та відбитої хвилі в лінії передачі будуть спостерігатися максимуми та мінімуми напруги.

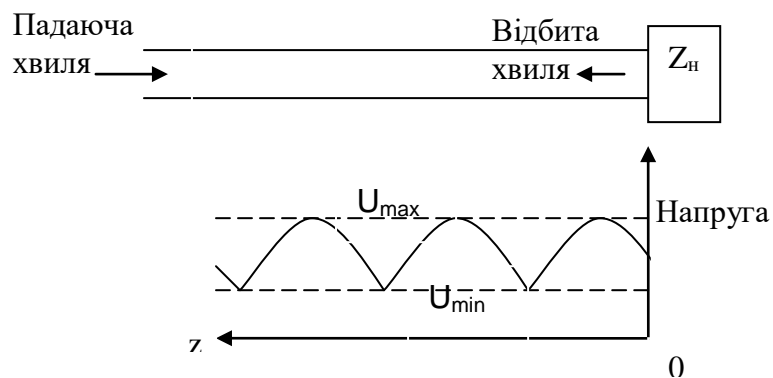


Рис.11.1. Розподіл напруги в лінії внаслідок складання падаючої та відбитої хвиль.

В тих місцях, де ці дві хвилі синфазні, буде знаходитися максимум напруги U_{\max} . Там, де хвилі протифазні – спостерігається мінімум U_{\min} .

Дуже важливий параметр у техніці зв'язку – коефіцієнт стоячої хвилі:

$$КСВ = \frac{U_{\max}}{U_{\min}}$$

Задача 1. Розрахунок коефіцієнта стоячої хвилі.

Дано: хвильовий опір лінії передачі $Z_{\text{хв}} = 75$ Ом, опір навантаження $Z_{\text{н}} = 50$ Ом.

Знайти: коефіцієнт стоячої хвилі КСВ, що буде в лінії.

Розв'язання.

Відомо, що коефіцієнт стоячої хвилі та модуль коефіцієнта відбиття пов'язані рівнянням:

$$КСВ = \frac{U_{\text{max}}}{U_{\text{min}}} = \frac{1 + P_0}{1 - P_0},$$

де $P_0 = |\dot{P}_0|$ - модуль коефіцієнта відбиття на навантаженні.

Як знайти модуль коефіцієнта відбиття на навантаженні?

Комплексний коефіцієнт відбиття на навантаженні залежить від співвідношення опорів хвильового та навантаження:

$$\dot{P}_0 = \frac{\dot{Z}_{\text{н}} - Z_{\text{хв}}}{\dot{Z}_{\text{н}} + Z_{\text{хв}}} = \frac{50 - 75}{50 + 75} = -0,2.$$

Модуль коефіцієнта відбиття $P_0 = |\dot{P}_0| = 0,2$.

Коефіцієнт стоячої хвилі

$$КСВ = \frac{1 + P_0}{1 - P_0} = \frac{1 + 0,2}{1 - 0,2} = 1,5.$$

Висновок. Чим ближче КСВ до одиниці, тим краще для передачі сигналів в лінії передачі, бо це означає, що амплітуда відбитої хвилі менше, і більше енергії сигналу потрапляє до навантаження.

Найкращий випадок, коли $КСВ = 1$, буде тоді, коли відбитої хвилі немає,

$\dot{P}_0 = \frac{\dot{Z}_{\text{н}} - Z_{\text{хв}}}{\dot{Z}_{\text{н}} + Z_{\text{хв}}} = 0$, тобто коли опір навантаження $Z_{\text{н}}$ дорівнює хвильовому опору лінії

передачі $Z_{\text{хв}}$.

11.2. Вхідний опір відрізка лінії передачі.

Відомо, що вхідний опір відрізка лінії передачі $Z_{\text{вх}}$, довжиною L , з'єднаного в кінці з навантаженням $Z_{\text{н}}$, у загальному випадку має комплексне значення. Якщо не враховувати загасання в лінії передачі, то справедлива формула:

$$\dot{Z}_{\text{вх}} = Z_{\text{хв}} \frac{\dot{Z}_{\text{н}} + iZ_{\text{хв}} \text{tg} \beta L}{\dot{Z}_{\text{хв}} + i\dot{Z}_{\text{н}} \text{tg} \beta L},$$

де β - повздовжня стала поширення хвилі (фазова стала).

Задача 2. Розрахунок вхідного опору відрізка лінії передачі

Дано: хвильовий опір лінії передачі $Z_{\text{хв}} = 50$ Ом,

опір навантаження $Z_{\text{н}} = 25$ Ом,

довжина відрізка лінії $L = 0,8 \lambda$.

Знайти: вхідний опір відрізка лінії передачі $Z_{\text{вх}}$.

Розв'язання.

Для розв'язання задачі потрібно пов'язати фазову сталу β з довжиною хвилі в лінії передачі λ .

Відомо, що фазова швидкість V_{ϕ} пов'язана з фазовою сталою β рівнянням

$$V_{\phi} = \frac{\omega}{\beta},$$

$$\text{звідки } \beta = \frac{\omega}{V_{\phi}}.$$

З іншого боку, довжина хвилі λ – це відстань, яку проходить хвиля з фазовою швидкістю V_{ϕ} за один період коливань T :

$$\lambda = V_{\phi} T = \frac{V_{\phi}}{f}, \text{ тому } V_{\phi} = \lambda f.$$

$$\text{Звідки } \beta = \frac{\omega}{V_{\phi}} = \frac{2\pi f}{\lambda f} = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Вхідний опір:

$$\begin{aligned} \dot{Z}_{\text{вх}} &= Z_{\text{хв}} \frac{\dot{Z}_{\text{н}} + iZ_{\text{хв}} \operatorname{tg} \beta L}{\dot{Z}_{\text{хв}} + i\dot{Z}_{\text{н}} \operatorname{tg} \beta L} = 50 \frac{25 + i50 \operatorname{tg} \left(0,8\lambda \frac{2\pi}{\lambda} \right)}{50 + i25 \operatorname{tg} \left(0,8\lambda \frac{2\pi}{\lambda} \right)} = 50 \frac{25 + i50 \operatorname{tg} (1,6\pi)}{50 + i25 \operatorname{tg} (1,6\pi)} = 50 \frac{25 - i50 \cdot 3,08}{50 - i25 \cdot 3,08} = \\ &= 50 \frac{(25 - i154) \cdot (50 + i77)}{(50 - i77) \cdot (50 + i77)} = 50 \frac{13108 - i9625}{50^2 + 77^2} = 77,8 - i57,1 \text{ Ом.} \end{aligned}$$

Висновок: незважаючи на те, що опір навантаження має дійсне значення 25 Ом, вхідний опір відрізка лінії передачі є комплексним, та має уявну складову.

Для того, що вхідний опір був дійсним, бажана (достатня, але не обов'язково), рівність хвильового опору лінії передачі та опору навантаження.

Завдання на самостійну роботу: у яких ще випадках вхідний опір буде дійсним?

11.3. Розрахунок розмірів направлено розгалужувача.

Задача 3.

Направлений розгалужувач має конструкцію, показану на рис. 11.2:

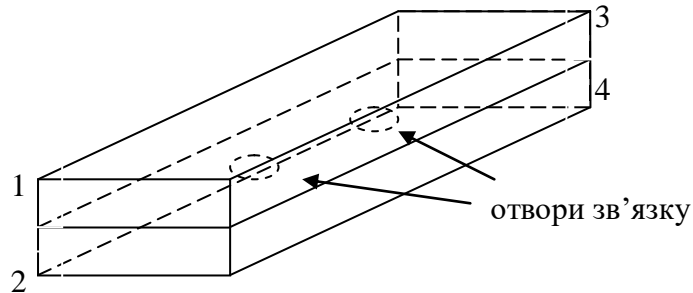


Рис. 11.2. Два хвилеводи, з'єднані широкими стінками, створюють направлений розгалужувач. В загальній стінці є два отвори зв'язку.

Дано: широка стінка хвилеводів $a = 0,04$ м,
частота $f = 5$ ГГц,
енергія поступає в плече 1.

Розрахувати: відстань між отворами зв'язку, щоб енергія не проходила в плече 2.

Розв'язання.

Для того, щоб енергія не проходила в плече 2, необхідно, щоби хвилі у хвилеводі 2-4, збуджені від отворів зв'язку у напрямку кінця 2, були протифазні. Це буде у випадку, коли відстань x між отворами буде дорівнювати $\frac{\lambda_{xв}}{4}$.

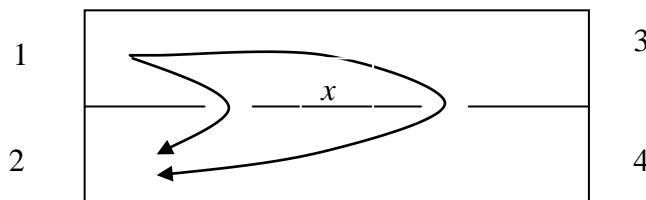


Рис. 11.3. Протифазні хвилі у плечі 2 розгалужувача.

При цьому хвилі, збуджені від отворів, пройдуть різні шляхи, які відрізняються на $\frac{\lambda_{xв}}{4} + \frac{\lambda_{xв}}{4} = \frac{\lambda_{xв}}{2}$. Тоді такі хвилі будуть протифазними та будуть компенсувати одна іншу.

Відомо, що довжина хвилі у хвилеводі $\lambda_{xв} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda / \lambda_{кр})^2}}$,

де λ - довжина хвилі в середовищі, що наповнює хвилевод. Якщо не вказано окремо, то вважається, що у хвилеводі повітря. Відносні діелектрична і магнітна проникності повітря $\varepsilon_r=1$, $\mu_r=1$;

$\lambda_{кр}$ - критична довжина хвилі для типу хвилі H_{10} .

В прямокутному хвилеводі для хвиль типу E_{mn} і H_{mn}

$$\lambda_{кр} = \frac{2}{\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}}, \quad (11.1)$$

де a і b - розміри поперечного перерізу (широкої стінки a та вузької стінки b , $a > b$);

m, n - цілі числа, що характеризують структуру електромагнітної хвилі в площині поперечного перерізу хвилеводу.

Тип хвилі, який має найбільшу критичну довжину хвилі або найменшу критичну частоту, називається основним типом. Основний тип хвилі може поширюватись у хвилеводі один, без інших типів хвиль. Всі інші типи хвиль називаються вищими типами.

В прямокутному хвилеводі основним є тип хвилі H_{10} ($m=1, n=0$), для якого з формули (11.1) виходить, що $\lambda_{кр} = 2a$.

Розрахунок. Знайдемо довжину хвилі у хвилеводі.

Довжина хвилі у вакуумі $\lambda = \frac{C}{f}$.

Швидкість світла у вакуумі $C = 3 \cdot 10^8 \frac{м}{с}$.

Критична довжина хвилі $\lambda_{кр} = 2a = 0,08$ м.

Довжина хвилі у необмеженому середовищі $\lambda = \frac{C}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^9} = 0,06$ м.

Відстань між отворами зв'язку

$$x = \frac{\lambda_{хв}}{4} = \frac{\lambda}{4\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{кр})^2}} = \frac{0,06}{4 \cdot 10^9 \sqrt{1 - \left(\frac{0,06}{0,08}\right)^2}} = 0,0227 \text{ м.}$$

Задача 4. Розрахунок опору навантаження за результатами виміру КСВ в лінії.

Дано: в лінії передачі існує режим, при якому КСВ = 2,

відомий хвильовий опір лінії передачі $Z_{хв} = 75$ Ом.

Знайти: опір навантаження Z_n , за умови, що від має дійсне значення.

Розв'язання.

Зв'язок між КСВ та модулем коефіцієнта відбиття P_0 :

$$КСВ = \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{1 + P_0}{1 - P_0}.$$

З цього рівняння знаходимо модуль коефіцієнта відбиття $P_0 = \frac{КСВ - 1}{КСВ + 1}$.

В випадку, коло опір навантаження Z_n – дійсна величина, з відомого рівняння

$$\dot{P}_0 = \frac{\dot{Z}_n - Z_{x\phi}}{\dot{Z}_n + Z_{x\phi}}$$

знаходимо, що коефіцієнт відбиття на навантаженні повинен бути також тільки дійсним, але може бути позитивним чи негативним.

Тому по знайденому модулю коефіцієнта відбиття на навантаженні P_0 знаходимо два можливі варіанти:

$$\dot{P}_0 = \pm P_0. \quad (11.2)$$

Розв'язуємо рівняння (11.2) відносно опору навантаження і отримуємо віжливе рівняння $\dot{Z}_n = Z_{x\phi} \frac{1 + \dot{P}_0}{1 - \dot{P}_0}$.

Розрахунок:

Модуль коефіцієнта відбиття на навантаженні $P_0 = \frac{КСВ - 1}{КСВ + 1} = \frac{2 - 1}{2 + 1} = \frac{1}{3}$.

Коефіцієнт відбиття на навантаженні $\dot{P}_0 = \pm P_0 = \pm \frac{1}{3}$.

а) $\dot{P}_0 = +\frac{1}{3}$,

$$\dot{Z}_n = Z_{x\phi} \frac{1 + \dot{P}_0}{1 - \dot{P}_0} = 75 \cdot \frac{1 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 150 \text{ Ом}.$$

б) $\dot{P}_0 = -\frac{1}{3}$,

$$\dot{Z}_n = Z_{x\phi} \frac{1 + \dot{P}_0}{1 - \dot{P}_0} = 75 \cdot \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = 37,5 \text{ Ом}.$$

Висновок: безпосередньою перевіркою можливо впевнитися, що обидва значення Z_n відповідають значенню $КСВ = 2$.