Міністерство освіти і науки України
Державний університет телекомунікацій
Кафедра вищої математики

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина 1
Лінійна алгебра та аналітична геометрія.
Диференціальне числення функції однієї та багатьох змінних

Київ – 2015

УДК 51
ББК 22.1

Вища математика. Ч.1. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Диференціальне числення функції однієї та багатьох змінних / О.В. Барабаш, С.Ю. Дзядик, Ю.Д. Жданова, О.Б. Омецинська, В.В. Онищенко, С.М. Шевченко. – К.: ДУТ, 2015. – 187 с.

Схвалено до друку вченою радою
Державного університету телекомунікацій
(протокол № 25 від 24.06.2015)

Навчальний посібник відповідає програмі курсу вищої математики у першому семестрі Державного університету телекомунікацій. Посібник складається з трьох розділів дисципліни: «Лінійна алгебра», «Векторна алгебра та аналітична геометрія», «Диференціальне числення функції однієї та багатьох змінних».

Посібник містить стислі основні теоретичні положення, методичні рекомендації для розв’язування задач, питання та завдання з відповідями для самоперевірки, задачі підвищеної складності, три розрахунково-графічні роботи та зразки їх виконання, а також типові контрольні роботи кожного розділу.

Посібник розрахований для студентів вищих технічних навчальних закладів всіх форм навчання (денної, заочної та дистанційної).

ЗМІСТ

ВСТУП

Вимоги до математичної освіти сучасного інженера за останній час суттєво змінилися. Виникли курси із спеціальних розділів математики. Однак перш, ніж вивчати ці розділи та застосовувати їх в інженерних дослідженнях та практиці, студент повинен зрозуміти основні поняття, ідеї і методи математичної науки. А цього неможливо досягнути без засвоєння класичних математичних дисциплін. Але на відміну від вивчення математики на математичних факультетах класичних університетів, в технічних закладах навчання математики не ставить своєю метою детального розкриття студентам розділів математики, їхньої логічної структури. Математика вивчається з прикладною, практичною метою і розглядається як засіб для *Розв'язання* інженерних питань. Головна увага звертається на засвоєння загальних прийомів та засобів, а не на розвиток навичок проведення строго логічних процесів міркування та доведення. Звичка користування готовими результатами і різного роду допоміжними засобами без доведень виступає на перше місце. У зв'язку з цим, ми вважаємо, що викладання математики в технічних вищих навчальних закладах має підпорядковуватись наступним цілям:

- повідомляти основні теоретичні положення, необхідні для вивчення загальнонаукових, загальноінженерних та спеціальних дисциплін, навчати відповідному математичному апарату, ґрунтуючись на принципах фундаментальності та професійної спрямованості та спираючись на логічне обґрунтування емпіричного матеріалу;
- розвивати первинні навички математичних прикладних питань: переклад реальної задачі на адекватну математичну мову, вибір оптимального методу дослідження, інтерпретація результату дослідження та оцінка його точності;
- формувати навички доведення *Розв'язання* задачі до кінцевого результату – числа, графіка, точного якісного висновку і т.д., застосовуючи при цьому обчислювальні засоби, таблиці, довідники;
- формувати уміння самостійно розбиратися у математичному апараті, який застосовується у літературі зі спеціальності;
- розвивати аналітичне мислення, виховувати у студентів прикладну математичну культуру, необхідну інтуїцію та ерудицію у питаннях застосування математики.

Для реалізації вище вказаного потрібне відповідне методичне забезпечення начального процесу, особливістю якого є розробка навчальних матеріалів для самостійної роботи студентів.

Даний збірник розрахований для студентів технічних навчальних закладів і є посібником для самостійного опанування способами та методами розв'язування задач вищої математики по темам «Лінійна алгебра», «Векторна алгебра та аналітична геометрія», «Диференціальне числення функції однієї та багатьох змінних».

При складанні посібника враховувалося, що ним будуть користуватися студенти різних форм навчання: денної, заочної, дистанційної. У зв'язку з цим кожний розділ містить:

- основні теоретичні положення та алгоритми *Розв'язання* типових задач;
- достатню кількість задач, зокрема задач підвищеної складності, та теоретичних питань для самоперевірки;
- три розрахунково-графічних роботи та зразки їх виконання;
- типові контрольні роботи кожного розділу трьох рівнів.

Навчальний посібник складено на основі досвіду проведення практичних занять викладачами кафедри вищої математики Державного університету телекомунікацій.

РОЗДІЛ 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

1.1 МАТРИЦІ ТА ВИЗНАЧНИКИ

1.1.1 МАТРИЦІ ТА ЇХ РІЗНОВИДИ

Матрицею розмірності $m \times n$ називається прямокутна таблиця з m рядків і n стовпців:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Числа $a_{ij}, i = 1, 2, ..., m, \quad j = 1, 2, ..., n$ називаються елементами матриці. Кожен елемент матриці a_{ij} забезпечений двома індексами : i - вказує номер рядка , j - номер стовпця , в яких розташований цей елемент. Матриці позначаються великими латинськими буквами $A, \ B, C, ..., X \ ,Y$.

Скорочено матрицю записують так: $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ або просто $A = \left(a_{ij}\right)$, де кількість рядків і кількість стовпців можуть бути довільними.

Різновиди матриць:

- матриця-рядок – матриця розмірності $1 \times n$;
- матриця-стовпець – матриця розмірності $m \times 1$;
- квадратна матриця – матриця, у якої кількість її рядків дорівнює кількості стовпців, тобто $m = n$. Число $m = n$ називається порядком квадратної матриці. Елементи a_{11}, a_{22} , ..., a_{nn} квадратної матриці утворюють її головну діагональ , елементи $a_{1n}, a_{2\, n-1}, ..., a_{n1}$ – побічну діагональ;
- діагональна матриця – квадратна матриця, у якої всі елементи ,що не належать до головної діагоналі дорівнюють 0;

- одинична матриця – це діагональна матриця, у якої всі елементи головної діагоналі дорівнюють 1, позначається Е;
- нульова матриця – матриця, всі елементи якої дорівнюють 0, позначається *O*.

1.1.2 ВИЗНАЧНИКИ ДРУГОГО ТА ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ

Будь – якій квадратній матриці можна поставити у відповідність певне число, яке називається визначником (детермінантом**)** матриці і позначається символом $|A|$ або $\det A$.

Визначником (детермінантом) другого порядку називається число, яке позначається символом $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ і обчислюється за правилом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Тобто, для обчислення визначника другого порядку потрібно від добутку елементів головної діагоналі відняти добуток елементів побічної діагоналі.

Приклад. Обчислимо визначник $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}$.

Розв'язання.

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 2 - 3 \cdot (-4) = -4 + 12 = 8$$

Визначником (детермінантом) третього порядку називається число, яке позначається символом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

і обчислюється за правилом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - \\ - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}. \end{matrix}$$

Це – правило Саррюса або правило трикутників.

Приклад. Обчислимо визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

Розв'язання.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot(-3)+(-2)\cdot 4\cdot 1+8\cdot 0\cdot 0-$$

$$-8\cdot 2\cdot 1-(-2)\cdot 0\cdot(-3)-1\cdot 4\cdot 0=-6-8-16=-30.$$

1.1.3 ВЛАСТИВОСТІ ВИЗНАЧНИКІВ

1. Визначник не змінюється при транспонуванні.

2. При переставлені місцями будь – яких двох рядків (стовпців) визначник змінює знак на протилежний.

3. Визначник з двома однаковими рядками (стовпцями)дорівнює нулю .

4. Спільний множник усіх елементів деякого рядка (стовпця) можна винести за знак визначника.

5. Визначник, що містить нульовий рядок (стовпець) дорівнює нулю.

6. Визначник з двома пропорційними рядками дорівнює нулю.

7. Якщо кожен елемент деякого рядка (стовпця) визначника є сумою двох доданків, то такий визначник дорівнює сумі двох визначників, у яких відповідні елементи замінюються відповідними доданками. Інші елементи усіх трьох визначників однакові.

8. Якщо до елементів одного рядка (стовпця) визначника додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне й те саме довільне число, то визначник не зміниться.

1.1.4 МІНОР ТА АЛГЕБРАЇЧНЕ ДОПОВНЕННЯ

Мінором елемента a_{ij} матриці A n-го порядку називається визначник матриці $(n-1)$-го порядку, яка утворена з матриці A викреслюванням i-го рядка і j-го стовпця. Позначається M_{ij}.

Приклад.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Знайдемо мінор елемента a_{23}. Для цього викреслимо другий рядок та третій стовпець.

$$M_{23}=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}=4+8+4+8=24$$

Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} матриці A n-го порядку називається його мінор, взятий із знаком $(-1)^{i+j}$. Позначається A_{ij}. Тобто

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Приклад. для матриці A з попереднього прикладу алгебраїчне доповнення елемента a_{23} дорівнює

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -24.$$

1.1.5 ВИЗНАЧНИКИ n-ГО ПОРЯДКУ

Визначником (детермінантом) n-го порядку називається число, яке позначається символом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Визначник n-го порядку дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення. *Приклад.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n},$$

де A_{ij} - алгебраїчне доповнення елемента a_{ij}.

Для зручності обчислень, спочатку виконують елементарні перетворення над рядками (стовпцями), щоб одержати у рядку (стовпцю) n-1 нулів.

Приклад. Обчислимо визначник n-го порядку $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & -3 & -1 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. Виберемо ведучий елемент. Бажано 1. Нехай це елемент a_{11} і під ним «зробимо» нулі: помножимо перший рядок на (-2) і додамо до другого; помножимо перший рядок на 3 і додамо до третього; четвертий рядок перепишемо, бо там є 0. Отже,

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & -3 & -1 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 10 & -9 & -1 \\ 0 & -6 & 10 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & -9 & -1 \\ -6 & 10 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -174.$$

Розкладемо визначник за елементами першого стовпця. Іншими словами, викреслимо перший рядок і перший стовпець. Одержали визначник третього порядку.

1.1.6 ОПЕРАЦІЇ НАД МАТРИЦЯМИ

1. Додавання та віднімання матриць.

Сумою двох матриць однієї розмірності називається матриця тої ж розмірності, кожний елемент якої являє собою суму відповідних елементів матриць A і B.

$\underset{m\times n}{A}+\underset{m\times n}{B}=\underset{m\times n}{C}$, де $a_{ij}+b_{ij}=c_{ij}$, $i=1,2,...,m$, $j=1,2,...,n$.

Приклад. Нехай матриця А – кількість студентів 1-го та 2-го курсу факультету телекомунікацій, які вивчають англійську мову (1 стовпець), французьку мову (2), німецьку мову (3), іспанську мову (4), В – аналогічно, але факультету радіотехніки. Знайти кількість підручників для студентів з кожної мови (суму матриць)

$$A=\begin{pmatrix}84 & 4 & 3 & 1\\ 56 & 2 & 1 & 2\end{pmatrix} \text{ і } B=\begin{pmatrix}76 & 3 & 1 & 2\\ 74 & 5 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

Розв'язання. $A+B=\begin{pmatrix}84 & 4 & 3 & 1\\ 56 & 2 & 1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}76 & 3 & 1 & 2\\ 74 & 5 & 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}160 & 7 & 4 & 3\\ 130 & 7 & 3 & 5\end{pmatrix}.$

2. Множення матриці на число

Добутком матриці A на число k називається матриця тієї ж розмірності , що й A, кожний елемент якої дорівнює добутку відповідного елемента матриці A на число k. Позначається kA.

$\underset{m\times n}{kA}=\underset{m\times n}{C}$, де $ka_{ij}=c_{ij}$ $i=1,2,...,m$, $j=1,2,...,n$.

Приклад. Обчислити $3\cdot A$, якщо $A=\begin{pmatrix}-4 & 4 & 3 & 0\\ 7 & 2 & 1 & -2\end{pmatrix}.$

Розв'язання. $3\cdot A=3\cdot\begin{pmatrix}-4 & 4 & 3 & 0\\ 7 & 2 & 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12 & 12 & 9 & 0\\ 21 & 6 & 3 & -6\end{pmatrix}$

3. Множення матриць

Добутком матриці A розмірності $m\times n$ на матрицю B розмірності $n\times p$ називається матриця розмірності $m\times p$, ij-й елемент якої дорівнює сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B. Позначається $A\cdot B$.

$\underset{m\times n}{A}\cdot\underset{n\times p}{B}=\underset{m\times p}{C}$, де $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+...+a_{in}b_{nj}$, $i=1,2,...,m$, $j=1,2,...,n$.

Перемножити можна тільки такі дві матриці, у яких число стовпців першої дорівнює числу рядків другої. Такі матриці називаються узгодженими.

Приклад. Знайти добуток матриць $A=\begin{pmatrix}1\,2\\ 3\,4\\ 2\,6\end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix}0 & -2 & 4\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$

Розв'язання:

$$A\cdot B=\underbrace{\begin{pmatrix}1\,2\\3\,4\\2\,6\end{pmatrix}}_{3\times 2}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}0&-2&4\\1&3&2\end{pmatrix}}_{2\times 3}=\underbrace{\begin{pmatrix}1\cdot 0+2\cdot 1&1\cdot(-2)+2\cdot 3&1\cdot 4+2\cdot 2\\3\cdot 0+4\cdot 1&3\cdot(-2)+4\cdot 3&3\cdot 4+4\cdot 2\\2\cdot 0+6\cdot 1&2\cdot(-2)+6\cdot 3&2\cdot 4+6\cdot 2\end{pmatrix}}_{3\times 3}=\underbrace{\begin{pmatrix}2&4&8\\4&6&20\\6&14&20\end{pmatrix}}_{3\times 3}$$

Знайдемо тепер добуток $B\cdot A$:

$$B\cdot A=\underbrace{\begin{pmatrix}0&-2&4\\1&3&2\end{pmatrix}}_{2\times 3}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1\,2\\3\,4\\2\,2\end{pmatrix}}_{3\times 2}=\underbrace{\begin{pmatrix}0\cdot 1+(-2)\cdot 3+4\cdot 2&0\cdot 2+(-2)\cdot 4+4\cdot 2\\1\cdot 1+3\cdot 3+2\cdot 2&1\cdot 2+3\cdot 4+2\cdot 2\end{pmatrix}}_{2\times 2}=\begin{pmatrix}2&0\\14&18\end{pmatrix}$$

1.1.7 РАНГ МАТРИЦІ

Рангом матриці A розмірності $m\times n$ називається найвищий порядок відмінних від 0 мінорів, утворених з елементів матриці A. Позначається *r(A)*, *r*. Зрозуміло, що $r(A)\le\min(m,n)$.

Ранг матриці можна знаходити методом обвідних мінорів або методом елементарних перетворень.

1) Метод обвідних мінорів застосовується таким чином: нехай в матриці А знайдено мінор к-того порядку М, відмінний від 0. Розглянемо тільки ті мінори (к+1) порядку, які містять у собі (обводять) мінор М. Якщо всі вони дорівнюють 0, то ранг матриці дорівнює к. В протилежному випадку серед обвідних мінорів знайдеться ненульовий мінор (к+1) порядку, і вся процедура повторюється.

Приклад. Знайти ранг матриці А=$\begin{pmatrix}2&-4&3&1&0\\1&-2&1&-4&2\\0&1&-1&3&1\\4&-7&4&-4&5\end{pmatrix}$

Розв'язання: Виберемо мінор 2-го порядку М=$\begin{vmatrix}-4&3\\-2&1\end{vmatrix}\neq 0$.

Фіксуємо мінор 3-го порядку М=$\begin{vmatrix}2&-4&3\\1&-2&1\\0&1&-1\end{vmatrix}\neq 0$. Мінори 4-го порядку дорівнюють 0. Тому ранг матриці *А* дорівнює 3.

Метод знаходження рангу матриці за її мінорами не завжди зручний, тому що пов'язаний з обчисленням значного числа визначників.

2) На практиці для знаходження рангу зручно користуватися елементарними перетвореннями матриці, за допомогою яких матрицю перетворюють в ступінчасту матрицю, ранг якої установлюється за її зовнішнім виглядом: зводять до матриці, у якої нижче головної діагоналі усі елементи – нулі. Тоді ранг матриці дорівнює кількості елементів головної діагоналі, відмінних від нуля.

Елементарними перетвореннями матриці називаються такі перетворення:

1) переставлення двох рядків (стовпців);
2) множення рядка (стовпця) на довільне дійсне число, відмінне від 0 ;
3) додавання до одного рядка (стовпця) іншого рядка (стовпця) помноженого на довільне дійсне число;
4) викреслювання або дописування нульового рядка (стовпця).

Елементарні перетворення не змінюють рангу матриці.

Дві матриці називаються *еквівалентними*, якщо одна отримана з другої за допомогою ланцюжка елементарних перетворень над рядками (стовпцями). Позначається $A \sim B$.

Приклад. Обчислити ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

за допомогою елементарних перетворень.

Розв'язання:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \end{pmatrix} \begin{matrix} I \\ II - 2 \cdot I \\ III - 3 \cdot I \\ IV - 4 \cdot I \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ III - (-2) \cdot II \\ IV - (-3) \cdot II \end{matrix} \quad \Rightarrow r(A) = 2.$$

Остання матриця – ступінчаста. Її ранг дорівнює кількості ненульових рядків.

1.1.8 ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ

Матрицею, оберненою до матриці A, називається матриця, що позначається A^{-1}, для якої виконуються рівності:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E .$$

Матриця, для якої існує обернена матриця, називається оборотною.

Не всяка матриця має обернену. В алгебрі матриць доведено, що матриця A має обернену при виконанні двох умов:

1) матриця A квадратна;
2) визначник матриці A не дорівнює нулю.

Квадратна матриця, у якої визначник не дорівнює нулю, називається невиродженою.

Для кожної невиродженої квадратної матриці існує єдина обернена матриця. Якщо квадратна матриця вироджена, то для неї оберненої матриці не існує.

Обернену матрицю до матриці А можна знаходити двома способами:

1) за допомогою формули

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A*, \text{ де } \quad A*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

яка отримана з матриці A заміною кожного елемента його алгебраїчним доповненням з подальшим транспонуванням. Матриця $A*$ називається приєднаною для матриці A.

Приклад. Знайти A^{-1}, якщо $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Розв'язання: $|A|=4-6=-2$;

$A_{11}=(-1)^{1+1}4=4$; $\qquad A_{12}=(-1)^{1+2}3=-3$;

$A_{21}=(-1)^{2+1}2=-2$; $\qquad A_{22}=(-1)^{2+2}1=1$;

$$A^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Перевірка: $A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2) Обчислення оберненої матриці за допомогою елементарних перетворень рядків

Будь-яку невироджену матрицю A за допомогою елементарних перетворень можна звести до одиничної матриці E.

Якщо до одиничної матриці порядку n застосувати ті ж самі елементарні перетворення рядків, за допомогою яких невироджена квадратна матриця порядку n зводиться до одиничної, то отримана при цьому матриця буде оберненою до матриці A.

Остання теорема дає спосіб знаходження оберненої матриці за допомогою елементарних перетворень рядків. При цьому матриці A і E записують поряд, відокремлюючи їх вертикальною рискою: $(A|E)$ і разом проводять елементарні перетворення рядків матриць A і E. В результаті отримують матрицю $\left(E\middle|A^{-1}\right)$.

Таким чином, $$\left(A\middle|E\right)\sim\left(E\middle|A^{-1}\right)$$

Приклад. Знайти A^{-1}, якщо $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

Розв'язання:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 0 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -3 & 1\end{array}\right)II-3\cdot I\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -2 & 1\\ 0 & -2 & -3 & 1\end{array}\right)I+II\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{array}\right)II:(-2)$$

Відповідь: $$A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Перший спосіб застосовується до матриць невеликих порядків, другий – до матриць будь-яких порядків.

1.1.9 ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1. Обчислити

   а) $A+B$, б) AB, в) BA, г) $6A$, д) $-7B$ якщо $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 4 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & 5\\ 4 & -4\end{pmatrix}$.

2. Обчислити AB, якщо:

   а) $A=\begin{pmatrix}0 & 3\\ -2 & 4\\ 1 & -5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 6\\ -1 & 3\end{pmatrix}$;

   б) $A=\begin{pmatrix}10 & 1 & 3\\ -1 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 3 & -1\\ 0 & 5 & -2\\ 1 & 1 & -4\end{pmatrix}$;

3. Знайти $f(A)$, якщо $A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & -3 & 0\end{pmatrix}$, $f(x)=2x^2-x-4$.

4. Знайти ранг матриці: $\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 4\\ 4 & -3 & -2 & 0\\ 1 & -2 & 3 & 4\\ -1 & 2 & -5 & 6\end{pmatrix}$.

5. Обчислити визначник другого порядку:

а) $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 7 & 20 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 6 & -5 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$.

6. Розв'язати рівняння: $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3x & x+22 \end{vmatrix} = 0$.

7. Обчислити визначник третього порядку трьома способами:
а) за правилом трикутника,
б) розкладанням за елементами будь-якого рядка,
в) розкладанням за елементами будь-якого стовпця:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 7 & -1 & 4 \\ 8 & 4 & -5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & 9 \\ 0 & -1 & -4 \end{vmatrix}$.

8. Знайти матрицю, обернену до даної:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$.

ВІДПОВІДІ.

1. а) $\begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 11 & -13 \\ -12 & 20 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 23 & -6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$, г) $\begin{pmatrix} -6 & 12 \\ 24 & 0 \end{pmatrix}$, д) $\begin{pmatrix} 21 & -35 \\ -28 & 28 \end{pmatrix}$.

2. а) $\begin{pmatrix} -3 & 9 \\ -8 & 0 \\ 7 & -9 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 3 & 38 & -24 \\ 0 & -13 & 5 \\ 1 & 5 & -9 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 8 & -6 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

4. $r(A) = 3$. 5. а) 88, б) 25. 6. $x = 2$. 7. а) 34, б) 49.

8. а) $-\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$, б) $\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 14 & -9 & 3 \\ 10 & -8 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

1.2 СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

В шкільному курсі алгебри розглядувались тільки системи лінійних рівнянь, в яких кількість рівнянь дорівнювала кількості невідомих і ця кількість, як правило, не перевищувала 3. До систем лінійних алгебраїчних рівнянь з більшою кількістю невідомих зводяться багато прикладних задач (техніки та економіки). Зокрема, за допомогою систем лінійних алгебраїчних рівнянь проводять розрахунок складних електричних ланцюгів.

Наша мета - навчитися оперувати з системами лінійних алгебраїчних рівнянь самого загального вигляду з довільною кількістю рівнянь і довільною кількістю невідомих.

Системою лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) , що містить m рівнянь і n невідомих, називається система вигляду :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases}$$

де m і n – довільні цілі додатні числа, a_{ij}, $i = 1, 2, \ldots m$, $j = 1, 2, \ldots n$ – дійсні числа , що називаються коефіцієнтами системи, b_i – дійсні числа, що називаються вільними членами рівнянь системи. Перший індекс у коефіцієнта вказує номер рівняння, другий – номер невідомого, при якому знаходиться даний коефіцієнт.

Кількість рівнянь m ніяк не пов'язана з кількістю невідомих; можливі випадки $m = n, m > n, m < n$.

Розв'язком СЛАР називається набір з n чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ такий, що після заміни невідомих $x_1, x_2, \ldots x_n$ числами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ кожне з рівнянь системи перетворюється на тотожність.

Існують системи з єдиним розв'язком і з кількістю розв'язків більше одного, і системи, що не мають розв'язків.

Система лінійних алгебраїчних рівнянь називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок . Система називається *несумісною*, якщо вона не має жодного розв'язку.

Сумісна система, що має єдиний розв'язок, називається *визначеною*. Сумісна система , що має більш одного розв'язку, називається *невизначеною* .

Вираз «розв'язати СЛАР» означає визначити чи сумісна вона чи не сумісна, у випадку сумісності знайти всі розв'язки .

Дві СЛАР з однаковими невідомими $x_1, x_2, \ldots x_n$ називаються еквівалентними, якщо вони обидві або сумісні або несумісні, або сумісні і множини їх розв'язків співпадають.

1.2.1 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СЛАР ЗА ФОРМУЛАМИ КРАМЕРА

Нехай задано СЛАР, в якій кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих $m = n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Складемо з коефіцієнтів цієї системи визначник Δ. Він називається визначником системи.

Якщо в системі лінійних симетричних рівнянь кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих і визначник матриці системи Δ відмінний від 0, то ця система має єдиний розв'язок, який може бути знайдений за формулами :

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad ..., \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

де визначники $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$ отримані з визначника Δ заміною відповідного стовпця стовпцем вільних членів.

З теореми Крамера випливає:

1) Якщо визначник матриці системи $\Delta = 0$, то система може або взагалі не мати розв'язків, або мати їх нескінченну множину.

2) Якщо визначник матриці системи $\Delta = 0$, і хоча б один з визначників $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$ не дорівнює 0, то система несумісна, тобто не має розв'язків.

3) Якщо визначник матриці системи $\Delta = 0$ і визначники $\Delta_1 = \Delta_2 = ... = \Delta_n = 0$, то система або несумісна, або невизначена, тобто має нескінченну множину розв'язків .

Метод розв'язування СЛАР за теоремою Крамера називається методом Крамера, а формули називаються формулами Крамера .

Приклад. Розв'язати систему методом Крамера $\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 = 1; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5; \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 4. \end{cases}$

Розв'язання. Складемо і обчислимо визначник системи $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 21$, отже система невироджена, тому можна використовувати формули Крамера .

Складемо і обчислимо визначники $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 5 & 2 & -3 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 42, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 1 & 5 & -3 \\ 3 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 63, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 21.$$

За формулами Крамера:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{42}{21}=2;x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{63}{21}=3;x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{21}{21}=1$$

Відповідь: $x_1=2,x_2=3,x_3=1$

1.2.2 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СЛАР МАТРИЧНИМ МЕТОДОМ

Нехай задано СЛАР, в якій кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих $m=n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1; \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2; \\ .... \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

Складемо матрицю A з коефіцієнтів системи:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Вона називається основною матрицею системи. Разом з матрицею системи А розглянемо ще дві матриці:

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \text{ та } B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$$

Згідно з правилом множення матриць систему можна записати у матричній формі:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix} \text{ або } AX=B$$

Розв'язок СЛАР $AX=B$ за умови $|A|\neq 0$ є єдиним і має вигляд $X=A^{-1}\cdot B$, де A^{-1} – матриця, обернена до матриці A.

Метод розв'язування СЛАР у матричній формі називається методом оберненої матриці .

Приклад. Розв'язати систему $\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 = 1; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5; \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 4. \end{cases}$ матричним методом.

Розв'язання. Складемо і обчислимо визначник системи $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 21$, отже система невироджена, тому можна використовувати метод оберненої матриці.

Знайдемо A^{-1} (будь-яким методом).

$$\left(\mathrm{A}|\mathrm{E}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & -8 & 5 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 16 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{21} & \frac{4}{21} & \frac{5}{21} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{13}{21} & \frac{16}{21} & -\frac{1}{21} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{21} & \frac{5}{21} & \frac{1}{21} \end{array}\right) = \left(\mathrm{E}|\mathrm{A}^{-1}\right); \text{ отже } \mathrm{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{21} & \frac{4}{21} & \frac{5}{21} \\ -\frac{13}{21} & \frac{16}{21} & -\frac{1}{21} \\ -\frac{8}{21} & \frac{5}{21} & \frac{1}{21} \end{pmatrix}$$

Знайдемо x_1, x_2, x_3

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{21} & \frac{4}{21} & \frac{5}{21} \\ -\frac{13}{21} & \frac{16}{21} & -\frac{1}{21} \\ -\frac{8}{21} & \frac{5}{21} & \frac{1}{21} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{21} & \frac{20}{21} & \frac{20}{21} \\ -\frac{13}{21} & \frac{80}{21} & -\frac{4}{21} \\ -\frac{8}{21} & \frac{25}{21} & \frac{4}{21} \end{pmatrix} = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 42 \\ 63 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Відповідь: $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 1$

1.2.3 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СЛАР МЕТОДОМ ГАУССА

Нехай задано СЛАР, в якій кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих $m = n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Складемо матрицю A з коефіцієнтів системи:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Доповнимо матрицю A стовпцем вільних членів.

Матриця системи, утворена приєднанням до неї стовпця вільних членів, називається розширеною матрицею системи. Позначається:

$$\tilde{A} = \left(A \middle| B\right) = \left(a_{ij} \middle| b_i\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{array}\right).$$

Здійснюючи елементарні перетворення над системою, ми здійснюємо елементарні перетворення відповідного вигляду над розширеною матрицею системи. Коли ж ми здійснюємо елементарні перетворення над розширеною матрицею, то такі ж самі перетворення будуть здійснюватися над самою системою.

Метод Гаусса полягає в наступному:

Для того щоб розв'язати систему, виписуємо розширену матрицю системи $\tilde{A}$ і над рядками матриці $\tilde{A}$ проводимо елементарні перетворення. Кожен раз після елементарного перетворення отримуємо розширену матрицю нової системи, яка еквівалентна початковій.

Перетворення матриці $\tilde{A}$ до еквівалентної матриці трикутно-трапецеїдального виду називається прямим ходом метода Гаусса. Невідомі відповідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, які відповідають коефіцієнтам, розташованим на головній діагоналі отриманої, називаються базисними**,** а всі відмінні від базисних – вільними.

Подальше перетворення розширеної матриці до матриці діагонального виду, з якого розв'язок системи видно безпосередньо, називається зворотним ходом метода Гаусса.

Приклад. Розв'язати систему методом Гаусса $\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 = 1; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5; \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 4. \end{cases}$

Розв'язання. Випишемо розширену матрицю системи і виконаємо над її рядками елементарні перетворення:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 4 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} I\cdot(-1)+II, \\ I\cdot(-1)+III \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 16 & 1 \end{array}\right) II\cdot 5+III \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 21 & 21 \end{array}\right).$$

Отже, $21x_3 = 21, x_3 = 1$.

З другого рядка випливає $x_2 + x_3 = 4, x_2 + 1 = 4, x_2 = 3$.

З першого рядка маємо $x_1 + x_2 - 4x_3 = 1, x_1 + 3 - 4 = 1, x_1 = 2$.

Відповідь: $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 1$

1.2.4 ОДНОРІДНІ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Система лінійних алгебраїчних рівнянь, в якій всі вільні члени дорівнюють 0, називається однорідною системою лінійних алгебраїчних рівнянь (ОСЛАР).

Загальний вигляд однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь такий:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Однорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь завжди сумісна, тому що для всіх m, n і коефіцієнтів a_{ij} вона має розв'язок 0, 0,..., 0. Цей розв'язок називається нульовим або тривіальним. Будь-який розв'язок однорідної СЛАР, відмінний від нульового, називається ненульовим або нетривіальним.

Для того, щоб однорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь мала нетривіальні розв'язки, необхідно і достатньо, щоб ранг матриці системи був менший числа невідомих, тобто $r(A) < n$.

Однорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь, в якій число рівнянь дорівнює числу невідомих має ненульові розв'язки тоді і тільки тоді, коли її визначник Δ дорівнює нулю.

Всі розв'язки однорідної система лінійних алгебраїчних рівнянь можна записати у вигляді $\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \ldots + \lambda_{n-r} C_{n-r}$, де n – число невідомих, r – ранг матриці системи, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r} \in R$.

Набір $n-r$ розв'язків $C_1, C_2, \ldots, C_{n-r}$ називається базисною системою розв'язків.

Запис $X = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \ldots + \lambda_{n-r} C_{n-r}$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r} \in R$ називається загальним розв'язком ОСЛАР.

Схема дослідження однорідної системи

1. Дослідимо систему на існування нетривіальних розв'язків; для чого визначимо ранг матриці системи. У випадку $r(A) < n$:
2. Визначимо число вільних і базисних невідомих.
3. Виразимо базисні невідомі через вільні. Для цього застосуємо метод Гаусса до матриці системи.
4. Знаходимо загальний розв'язок системи.

Приклад. Дослідити на існування нетривіальних розв'язків дану систему, у разі позитивної відповіді знайти розв'язки однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. 1) Дослідимо систему на сумісність, для чого визначимо ранг матриці системи:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 2 < n = 3,$$

отже система сумісна.

2) Визначимо число вільних і базисних невідомих.

$n = 3$, $r = 2$, $n - r = 3 - 2 = 1$ – є одне вільне невідоме, *Приклад.* x_3.

Невідомі x_1 і x_2 – базисні.

3) Виразимо базисні невідомі через вільні. Для цього застосуємо метод Гаусса до матриці системи:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} \end{pmatrix}, \text{ звідки } \quad \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{5}x_3; \\ x_2 = \frac{7}{5}x_3. \end{cases}$$

4) Знаходимо загальний розв'язок системи. Вільним невідомим можна надавати будь-яких значень. Нехай $x_3 = \lambda$, де $\lambda \in R$. Тоді

$$x_1 = -\frac{1}{5}\lambda, \ x_2 = \frac{7}{5}\lambda.$$

Загальний розв'язок: $x_1 = -\frac{1}{5}\lambda$, $x_2 = \frac{7}{5}\lambda$, $x_3 = \lambda$,

Загальний розв'язок можна також записати у вигляді матриці-рядка

$X = \lambda\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{7}{5} & 1 \end{pmatrix}$, де $\lambda \in R$.

Відповідь: $X = \lambda\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{7}{5} & 1 \end{pmatrix}$, де $\lambda \in R$.

1.2.5 НЕОДНОРІДНІ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Розглянемо довільну систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = в_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = в_2; \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = в_m. \end{cases}$$

Складемо з коефіцієнтів цієї системи основну A і розширену $\tilde{A}$ матрицю:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Система лінійних алгебраїчних рівнянь сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг основної матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці системи.

$$\text{СЛАР сумісна} \Leftrightarrow r(A) = r(\tilde{A}).$$

Як тільки з'ясовано, сумісна дана система лінійних алгебраїчних рівнянь чи ні, виникає питання про її визначеність або невизначеність, тобто єдиний розв'язок має система або безліч розв'язків.

1. Якщо ранг основної матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці системи і дорівнює числу невідомих, то система визначена, тобто має єдиний розв'язок.

$$r(A) = r(\tilde{A}) = n \Rightarrow \text{СЛАР визначена (має єдиний розв'язок)}$$

2. Якщо ранг основної матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці системи, але менше числа невідомих, то система невизначена, тобто має розв'язків.

$$r(A) = r(\tilde{A}) < n \Rightarrow \text{СЛАР невизначена (має безліч розв'язків)}$$

Загальний розв'язок неоднорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь дорівнює сумі деякого частинного розв'язку цієї системи і загального розв'язку однорідної системою асоційованої з даною.

ЗР НСЛАР = ЧР+ ЗР ОСЛАР

З теорем випливає наступна

Схема дослідження неоднорідної системи

1. Дослідимо систему на сумісність, для чого визначимо ранг матриці системи. У випадку сумісності:

2 Дослідимо систему на визначеність.

3. Визначимо число вільних і базисних невідомих.

4. Виразимо базисні невідомі через вільні. Для цього застосуємо метод Гаусса до матриці системи.

5. Знайдемо частинний розв'язок системи.

6. Знайдемо загальний розв'язок однорідної системи, асоційованої з даною.

(за схемою попереднього питання).

7. Знаходимо загальний розв'язок системи.

Приклад. Дослідити на сумісність, у випадку сумісності знайти розв'язки неоднорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1; \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 2; \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 \qquad = 3. \end{cases}$$

Розв'язання. 1) Дослідимо систему на сумісність, для чого визначимо ранги матриці і розширеної матриці системи:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 2,$$

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow r(\tilde{A}) = 2.$$

Оскільки $r(A) = r(\tilde{A}) = 2$, то система сумісна.

2) Дослідимо систему на визначеність. Оскільки $r(A) = r(\tilde{A}) = 2 < n = 4$, то система невизначена.

3) Визначимо число вільних і базисних невідомих.

$n = 4$, $r = 2$, $n - r = 4 - 2 = 2$ – є два вільних невідомих: x_3 і x_4.

Невідомі x_1 і x_2 – базисні.

4) Виразимо базисні невідомі через вільні. Для цього застосуємо метод Гаусса до розширеної матриці системи:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right),$$

звідки $\begin{cases} x_1 = 1 + 7x_3 - 5x_4; \\ x_2 = 1 - 3x_3 + 2x_4. \end{cases}$

5) Знайдемо частинний розв'язок системи. Надамо вільним невідомим значення, *Приклад.* $x_3 = 1$, $x_4 = 1$. Тоді $x_1 = 3$, $x_2 = 0$.

Отже, частинний розв'язок є $(3 \quad 0 \quad 1 \quad 1)$.

6) Знайдемо загальний розв'язок однорідної системи, асоційованої з даною.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0; \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 \qquad = 0. \end{cases}$$

1) Дослідимо на сумісність:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 1 & 3 & 2 & -1\\ 2 & 5 & 1 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 3 & -2\end{pmatrix}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & -7 & 5 & -1\\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1\end{array}\right)\Rightarrow r(A)=2,$$

2) Визначимо число вільних і базисних невідомих.

$n=4$, $r=2$, $n-r=4-2=2$ – є два вільних невідомих: x_3 і x_4.

Невідомі x_1 і x_2 – базисні.

3) Виразимо базисні невідомі через вільні:

$$\begin{cases} x_1=7x_3-5x_4;\\ x_2=-3x_3+2x_4.\end{cases}$$

4) Знаходимо загальний розв'язок однорідної системи.

Нехай $x_3=\lambda_1$, $x_4=\lambda_2$, де $\lambda_1,\lambda_2\in R$. Тоді

$x_1=7\lambda_1$, $x_2=-3\lambda_1$, $x_3=\lambda_1$, $x_4=0$;

$x_1=-5\lambda_2$, $x_2=2\lambda_2$, $x_3=0$, $x_4=\lambda_2$.

5) Загальний розв'язок записуємо у вигляді матриці-рядка:

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, де $\lambda_1,\lambda_2\in R$.

7) Знаходимо загальний розв'язок системи.

$$X=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}+\lambda_1\begin{pmatrix}7 & -3 & 1 & 0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}-5 & 2 & 0 & 1\end{pmatrix},\lambda_1,\lambda_2\in R.$$

1.2.6 ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Приклад. Знайти розрахункові об'єми робіт (число годин використовування обладнання), які покриють витрати на експлуатацію, якщо розцінки на проведення відповідних робіт вказані в таблиці:

Вид роботи	Нормативи використання обладнання (годин)			Повні витрати
	механічне	теплове	електричне	
Технічне обслуговування	2	3	1	45
Платні послуги	3	6	3	80
Капітальний ремонт	5	1	6	130

Розв'язання. Позначимо x_1,x_2,x_3- число годин роботи механічного, теплового та електричного обладнання відповідно. За умовою складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 45; \\ 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 80; \\ 5x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 130. \end{cases}$$

Використаємо метод Гаусса. Складемо розширену матрицю системи:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 45 \\ 3 & 6 & 3 & 80 \\ 5 & 9 & 6 & 130 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 45 \\ 0 & 3 & 3 & 25 \\ 0 & 3 & 7 & 35 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & -6 & 60 \\ 0 & 3 & 3 & 25 \\ 0 & 0 & 12 & 30 \end{array}\right).$$

Отже, $12x_3 = 30,\ x_3 = \dfrac{30}{12} = 2{,}5.$ З другого рядка маємо $3x_2 + 3x_3 = 25,\ x_2 = \dfrac{210}{36} \approx 5{,}83.$

З першого рядка маємо $6x_1 - 6x_3 = 60,\ x_1 = \dfrac{900}{72} = 12{,}5.$

Відповідь: $12{,}5$ год, $\approx 5{,}83$ год, $2{,}5$ год

1.2.7 ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ’ЯЗУВАННЯ

1. Розв’язати системи лінійних алгебраїчних рівнянь трьома способами (за формулами Крамера, матричним методом, методом Гаусса):

а) $\begin{cases} x - 2y + 4z = 3, \\ 2x + 6y + 3z = 1,; \\ 3x - y + 5z = 2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + y - z = -1, \\ x - 4y - 7z = -12,; \\ 3x + 8y + 3z = -4. \end{cases}$

2. Дослідити на існування нетривіальних розв’язків дану систему, у разі позитивної відповіді знайти загальний розв’язок однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0; \\ 5x_1 + x_3 - x_4 = 0; \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0; \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

3. Дослідити на сумісність дану систему, у разі позитивної відповіді знайти загальний розв’язок неоднорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 1; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = -1; \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 0; \\ x_1 - 3x_4 + 5x_5 = -2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2; \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5; \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 4; \\ 10x_1 - 9x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7 \end{cases}$

ВІДПОВІДІ

1. а) $(-1,0,1)$, б) $(1,-2,3)$.

2. $\lambda(1,-3,-16,-11)$

3. а) $\begin{cases} x_1 = -5x_5 - 2; \\ x_3 = x_3 + 8x_5 + 3; \\ x_4 = 0 \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_3 = \dfrac{19}{2}x_1 - \dfrac{1}{2}x_2 - 7; \\ x_4 = -\dfrac{11}{2}x_1 + \dfrac{3}{2}x_2 + 4 \end{cases}$

РОЗДІЛ 2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

2.1 ВЕКТОРИ

2.1.1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

Вектором називається величина, цілком визначена своїм напрямом і довжиною у просторі.

Вектор позначається $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ або однією малою буквою латинського алфавіту зі стрілкою (або рискою) зверху: $\vec{a}$, $\vec{b}$.

Координатами вектора $\vec{a}$ в ПДСК називаються проекції вектора $\vec{a}$ на осі координат. Вектор $\vec{a}$ з координатами x, y, z, позначається $\vec{a} = (x, y, z)$.

Відстань між початком вектора і його кінцем називається довжиною, або модулем вектора. Позначається $|\vec{a}|$ або $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$.

Якщо початок вектора $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ міститься в точці $A(x_1, y_1, z_1)$, а кінець – в точці $B(x_2, y_2, z_2)$, то $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Тоді довжина вектора $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ дорівнює

$$|\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Приклад. знайти координати та довжину вектора $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, якщо $A(2;3;-1)$ і $B(1;4;5)$.

Розв'язання. $\overrightarrow{AB} = (1-2; 4-3; 5-(-1)) = (-1;1;6)$;

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 6^2} = \sqrt{38}$

Вектори називаються колінеарними, якщо існує пряма, якій паралельний кожен з векторів.

Нульовий вектор вважається колінеарним будь-якому вектору.

Три вектори називаються компланарними, якщо вони лежать в одній площині або в паралельних площинах

Два вектори називаються рівними, якщо вони колінеарні, однаково напрямлені і мають рівні модулі.

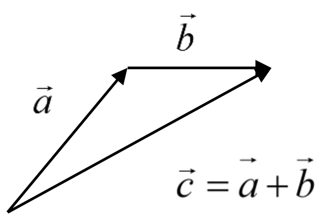
Вектор, модуль якого дорівнює одиниці, називається одиничним.

Одиничний вектор, що має такий самий напрям, як і вектор $\vec{a}$, називається ортом вектора $\vec{a}$ і позначається через $\vec{a}_0$.

2.1.2 ЛІНІЙНІ ОПЕРАЦІЇ НАД ВЕКТОРАМИ

Під лінійними операціями над векторами розуміють додавання векторів і множення вектора на число.

1) Сумою двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, називається третій вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, напрямлений з початку вектора $\vec{a}$ в кінець вектора $\vec{b}$ за умови, що початок вектора $\vec{b}$ збігається з кінцем вектора $\vec{a}$.



Правило обчислення суми векторів, дане в означенні, називається правилом трикутника. Існує ще правило паралелограма.

Різниця $\vec{a} - \vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ визначається як сума вектора $\vec{a}$ і вектора, протилежного вектору $\vec{b}$:

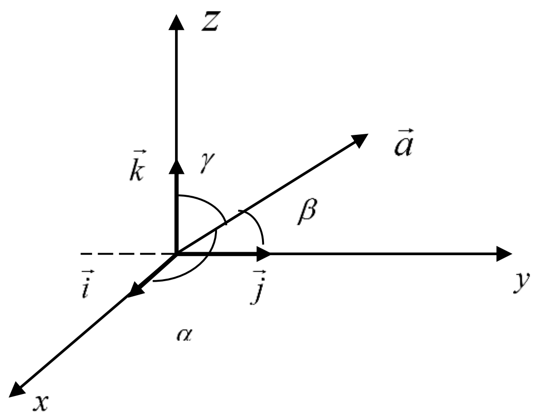
$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$$

2) Добутком вектора $\vec{a}$ на дійсне число α називається вектор $\alpha\vec{a}$, який має довжину $|\alpha||\vec{a}|$, а його напрям збігається з напрямом вектора $\vec{a}$, якщо $\alpha > 0$, і протилежний йому, якщо $\alpha < 0$. Якщо $\alpha = 0$ або $\vec{a} = \vec{0}$, то $\alpha\vec{a} = \vec{0}$.

2.1.3 НАПРЯМНІ КОСИНУСИ

Розглянемо кути, які утворює вектор $\vec{a}$ з координатними осями. Позначимо кут між вектором $\vec{a}$ і віссю Ox через α, між $\vec{a}$ і Oy – через β, між $\vec{a}$ і Oz – через γ:

$$\left(\overset{\wedge}{\vec{a}, Ox}\right) = \alpha, = \left(\overset{\wedge}{\vec{a}, Oy}\right) = \beta; \left(\overset{\wedge}{\vec{a}, Oz}\right) = \gamma$$



Оскільки $\Pr_{Ox}\vec{a} = x = |\vec{a}|\cos\alpha$, $\Pr_{Oy}\vec{a} = y = |\vec{a}|\cos\beta$, $\Pr_{Oz}\vec{a} = z = |\vec{a}|\cos\gamma$, то

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{a}|}; \ \cos\beta = \frac{y}{|\vec{a}|}; \ \cos\gamma = \frac{z}{|\vec{a}|}.$$

Косинуси кутів між вектором $\vec{a}$ і осями координат називаються напрямними косинусами вектора $\vec{a}$.

Приклад. Знайти напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, якщо $A(2;3;-1)$ і $B(1;4;5)$.

Розв'язання. $\overrightarrow{AB}=(1-2;4-3;5-(-1))=(-1;1;6)$;

$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\sqrt{(-1)^2+1^2+6^2}=\sqrt{38}$;

$\cos\alpha=\dfrac{x}{|\vec a|}=-\dfrac{1}{\sqrt{38}}$; $\cos\beta=\dfrac{y}{|\vec a|}=\dfrac{1}{38}$; $\cos\gamma=\dfrac{z}{|\vec a|}=\dfrac{6}{\sqrt{38}}$

2.1.4 СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

Скалярним добутком двох векторів $\vec a$ і $\vec b$ називається число, що позначається $\vec a\cdot\vec b$, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними.

$$\vec a\cdot\vec b=|\vec a|\left|\vec b\right|\cos\varphi$$

Приклад. відомо, що $|\vec a|=3;\ \left|\vec b\right|=4;\ \varphi=\angle\left(\vec a,\vec b\right)=\dfrac{2\pi}{3}$, отже $\vec a\vec b=|\vec a|\left|\vec b\right|\cos\varphi=3\cdot4\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-6$.

Геометричний зміст скалярного добутку: скалярний добуток двох векторів дорівнює добутку одного вектора на проекцію на нього іншого вектора:

$$\vec a\cdot\vec b=|\vec a|\,\mathrm{Pr}_{\vec a}\,\vec b=\left|\vec b\right|\mathrm{Pr}_{\vec b}\,\vec a;$$

Механічний зміст скалярного добутку: роботою сили $\vec F$ на переміщення $\vec S$ називається скалярна величина A, що дорівнює скалярному добутку вектора сили на вектор переміщення: $A=\vec F\cdot\vec S$.

Скалярний добуток в координатній формі: $\vec a\cdot\vec b=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$, де $\vec a=(x_1,y_1,z_1),\vec b=(x_2,y_2,z_2)$.

Приклад. відомо, що $\vec a=(1;-3;8)$ і $\vec b=(6;-1;0)$,

тоді $\vec a\cdot\vec b=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=1\cdot6+(-3)\cdot(-1)+8\cdot0=9$.

Кут між векторами $\vec a$ і $\vec b$: $\cos\angle\left(\vec a,\vec b\right)=\dfrac{\vec a\cdot\vec b}{|\vec a|\cdot\left|\vec b\right|}$.

Приклад. $\vec a=(1;-3;8)$ і $\vec b=(6;-1;0)$, тоді $\cos\angle\left(\vec a,\vec b\right)=\dfrac{\vec a\cdot\vec b}{|\vec a|\cdot\left|\vec b\right|}=$

$$\frac{9}{\sqrt{1^2+(-3)^2+8^2}\cdot\sqrt{6^2+(-1)^2+0^2}}=\frac{9}{\sqrt{74\cdot37}}=\frac{9}{37\sqrt{2}}$$

Властивості скалярного добутку векторів:

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ – комутативність скалярного добутку;
2. $(\alpha\vec{a})\vec{b}=\alpha\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$ – асоціативність відносно множення на число;
3. $\vec{a}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ – дистрибутивність відносно додавання векторів.
4. Якщо $\vec{a}\neq\vec{0}$ і $\vec{b}\neq\vec{0}$, то $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$, коли кут $\varphi=\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ – гострий і $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$, коли $\varphi=\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ – тупий.
5. Скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли ці вектори взаємно перпендикулярні:
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}.$$
6. Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, то $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$, якщо $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ ***і*** $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$, якщо $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$
7. $\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$тобто скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини.

2.1.5 ВЕКТОРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

Векторним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор, що позначається $\vec{a}\times\vec{b}$, який:

1) має довжину, що дорівнює добутку довжин векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ на синус кута φ між ними.
$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\sin\varphi;$$
2) перпендикулярний до кожного з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:
$$\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a};\;\;\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b};$$
3) утворює з векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ праву трійку

Фізичний зміст векторного добутку: момент сили $\overrightarrow{M}$ відносно точки O дорівнює векторному добутку радіус-вектора, проведеного з точки O до точки прикладання сили, на вектор сили $\vec{F}$, отже $\overrightarrow{M}=\overrightarrow{OA}\times\vec{F}$.

Векторний добуток в координатній формі: $\vec{a}\times\vec{b}==\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{\kappa}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$, де $\vec{a}=\left(x_1,y_1,z_1\right),\vec{b}=\left(x_2,y_2,z_2\right)$.

Властивості векторного добутку векторів:

1. $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ – антикомутативність;
2. $\alpha\vec{a}\times\vec{b}=\alpha\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$ – асоціативність відносно скалярного множника α;
3. $\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)+\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)$ – дистрибутивність відносно додавання векторів.

4. Векторний добуток двох векторів дорівнює нуль-вектору тоді і тільки тоді, коли ці вектори колінеарні:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}\text{ або }\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$$

5. Модуль векторного добутку двох неколінеарних векторів дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах, віднесених до спільного початку:

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=S=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\varphi$$

Приклад. Знайти площу трикутника, заданого вершинами $A(1,2,0)$, $B(0,-2,1)$, $C(-1,0,2)$.

Розв'язання.

$$\overrightarrow{AB}=(-1,-4,1),\quad \overrightarrow{AC}=(-2,-2,2)$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & -4 & 1\\ -2 & -2 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-4 & 1\\ -2 & 2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -2 & 2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1 & -4\\ -2 & -2\end{vmatrix}\vec{k}=$$

$$=(-8+2)\vec{i}-(-2+2)\vec{j}+(2-8)\vec{k}=-6\vec{i}-6\vec{k}=(-6;0;-6)$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{6^2+6^2}=\frac{1}{2}\sqrt{72}=\frac{1}{2}6\sqrt{2}=3\sqrt{2}\text{ (кв. од)}$$

2.1.6 МІШАНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

Мішаним добутком векторів $\vec{a},\vec{b}$ і $\vec{c}$ називається скалярний добуток вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$: $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\vec{c}$.

Мішаний добуток в координатній формі: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$, де $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1),\vec{b}=(x_2,y_2,z_2),\vec{c}=(x_3,y_3,z_3)$

Властивості мішаного добутку

1. При переставлені будь-яких двох множників мішаний добуток змінить знак на протилежний. Наприклад
   $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=-\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$.
2. При циклічному переставлені множників мішаний добуток не змінюється.
   $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$.
3. У мішаному добутку знаки векторного та скалярного добутків можна міняти місцями
   $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$.

З урахуванням властивості 3 мішаний добуток позначають просто $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

4. Вектори $\vec{a},\vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарні тоді і тільки тоді, коли їх мішаний добуток дорівнює 0.

$$\vec{a},\vec{b} \text{ і } \vec{c} \text{ компланарні} \Leftrightarrow (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0 \qquad (\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0)$$

5. Якщо вектори $\vec{a},\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють праву трійку, то їх мішаний добуток додатній, а якщо ліву, то від'ємний.
6. Модуль мішаного добутку трьох векторів дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах віднесених до спільного початку.

$$V_{пар}=\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|$$

Приклад. Довести, що точки $A(0,1,2)$, $B(-2,0,-1)$, $C(-1,5,8)$, $D(1,6,11)$ лежать в одній площині.

Доведення. Чотири точки лежать в одній площині, якщо вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ компланарні. Знаходимо вектори: $\overrightarrow{AB}=(-2,-1,-3)$, $\overrightarrow{AC}=(-1,4,6)$, $\overrightarrow{AD}=(1,5,9)$.

За властивістю 4, якщо $\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}=0$, то вектори компланарні. Перевіримо компланарність векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$.

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}-2 & -1 & -3\\ -1 & 4 & 6\\ 1 & 5 & 9\end{vmatrix}=-72+15-6+12+60-9=0.$$

Отже, вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ компланарні, тому задані точки лежать в одній площині.

2.1.7 РОЗКЛАДАННЯ ВЕКТОРА ЗА БАЗИСОМ

Лінійною комбінацією векторів $a_1,a_2,...,a_n$ векторного простору V називається вектор x виду $x=\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+...+\lambda_n a_n$, де $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ – деякі дійсні числа (коефіцієнти лінійної комбінації). У цьому випадку вектор x розкладений за системою векторів $a_1,a_2,...,a_n$, або лінійно виражається через вектори $a_1,a_2,...,a_n$.

Система векторів $a_1,a_2,...,a_n$ векторного простору V називається лінійно залежною, якщо існують числа $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$, які не всі водночас дорівнюють нулю ($\lambda_1^2+\lambda_2^2+...+\lambda_n^2\neq 0$), такі що $\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+...+\lambda_n a_n=0$.

Система векторів $a_1,a_2,...,a_n$ називається лінійно незалежною, якщо остання рівність виконується тільки в одному випадку , коли $\lambda_1=\lambda_2=...=\lambda_n=0$

Впорядкована система векторів $a_1,a_2,...,a_n$ називається базисом векторного простору V, якщо вона лінійно незалежна і кожен вектор x простору V лінійно виражається через вектори цієї системи, тобто

$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_n a_n$.

Отже, базис – це максимальна система лінійно незалежних векторів.

Приклад. Довести, що вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ утворюють базис у просторі R^3 та знайти координати вектора $\vec{b}$ в цьому базисі, якщо

$\vec{a}_1 = (3,-2,1)$, $\vec{a}_2 = (-1,1,-2)$, $\vec{a}_3 = (2,1,-3)$, $\vec{b} = (11,-6,5)$

Розв'язання. 1) Перевіримо необхідну і достатню умову компланарності векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$:

$$\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 8.$$

Оскільки $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3 = 8 \neq 0$, то вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ некомпланарні, тому вони лінійно незалежні і утворюють базис.

2) Розкладемо вектор $\vec{b}$ за базисом $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$:

$$\vec{b} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3$$

або в координатному вигляді:

$$(11,-6,5) = (3,-2,1)\,x_1 + (-1,1,-2)\,x_2 + (2,1,-3)\,x_3.$$

Вектори рівні, коли їх відповідні координати рівні. Тому одержимо систему:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 11; \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = -6; \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему будь-яким способом, знайдемо

$x_1 = 2$, $x_2 = -3$, $x_3 = 1$.

3) Отже, $\vec{b} = 2\vec{a}_1 - 3\vec{a}_2 + \vec{a}_3$.

Відповідь: $\vec{b} = (2,3,-1)$

2.1.8 ВЛАСНІ ЗНАЧЕННЯ ТА ВЛАСНІ ВЕКТОРИ ЛІНІЙНОГО ОПЕРАТОРА

Лінійним оператором у векторному просторі V називається відображення векторного простору V в себе $\varphi : V \to V$ таке, що виконані наступні умови (умови лінійності):

1) $\forall x, y \in V \;\; \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$;

1) $\forall x \in V \;\; \forall \lambda \in P \; \varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$.

Лінійний оператор називається також лінійним перетворенням векторного простору V .

Нехай у векторному просторі V заданий деякий базис $a_1, a_2, ..., a_n$.

Матрицею лінійного оператора φ в базисі $a_1, a_2, ..., a_n$ називається матриця

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & ... & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & ... & \alpha_{21} \\ ... & ... & ... & ... \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n1} & ... & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

елементами якої є коефіцієнти в розкладі образів векторів $a_1, a_2, ..., a_n$ за базисом $a_1, a_2, ..., a_n$.

Число $\lambda \in F$ називається власним значенням лінійного оператора ϕ, якщо існує ненульовий вектор $a \in V$, такий, що $\phi(a) = \lambda a$. Вектор a називається власним вектором лінійного оператора φ, який відповідає власному значенню λ.

Нехай $A = (a_{ij})$ – матриця порядку n, E – одинична матриця порядку n, λ – деяке невідоме.

Характеристичним многочленом матриці $A = (a_{ij})$ називається многочлен $f_A(\lambda)$, визначений рівністю:

$$f_A(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}.$$

Кожне власне значення лінійного оператора φ є коренем його характеристичного многочлена і навпаки, кожний корінь характеристичного многочлена є власним значенням лінійного оператора φ.

На практиці координати власного вектора a, який відповідає певному власному значенню λ визначають як ненульовий розв’язок однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$(A_\phi - \lambda E)x = 0.$$

Приклад. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора φ, який заданий в деякому базисі матрицею $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв’язання. 1) Складемо характеристичний многочлен і визначимо його корені:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$(1-\lambda)^2 - 4 = 0$; $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$; $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 3$.

Отже, $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 3$ – власні значення лінійного оператора.

2) Визначимо координати власних векторів:

Для $\lambda_1 = -1$

$\left(A_\phi - \lambda_1 E\right)x = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 0; \\ -2x_1 + 2x_2 = 0. \end{cases} \quad x_1 = x_2, \quad x = C\left(1,1\right),\ C \in R.$$

Отже, власному значенню $\lambda_1 = -1$ відповідає власний вектор $x = C\left(1,1\right)$, $C \in R$.

Для $\lambda_2 = 3$

$\left(A_\phi - \lambda_2 E\right)x = 0$;

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{cases} -2x_1 - 2x_2 = 0; \\ -2x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases} \quad x_1 = -x_2, \quad x = C\left(1,-1\right),\ C \in R.$$

Отже, власному значенню $\lambda_2 = 3$ відповідає власний вектор $x = C\left(1,-1\right)$, $C \in R$.

Відповідь: $\lambda_1 = -1,\ x = C\left(1,1\right);\ \lambda_2 = 3,\ x = C\left(1,-1\right)$

2.1.9 ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1. Знайти вектор $\bar{b}$, колінеарний вектору $\bar{a} = \bar{i} - 2\bar{j} - 2\bar{k}$, який утворює з ортом $\bar{j}$ гострий кут, якщо $\left|\bar{b}\right| = 15$.
2. Дано три вектори $\bar{a} = 3\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} - \bar{j} - 3\bar{k}$, $\bar{c} = \bar{i} + 2\bar{j} + 5\bar{k}$. Обчислити $Пр_{\bar{c}}\left(\bar{a} - \bar{b}\right)$.
3. Дано вершини трикутника *ABC*: $A(3;5)$, $B(-3;3)$, $C(5;-8)$. Знайти довжину медіани цього трикутника, проведеної з вершини *C*.
4. Дано три вершини *A*(2, 5, 4), *B*(0, 1, 0), *C*(4, 1, 3) паралелограма *ABCD*. Знайти координати четвертої вершини *D*.
5. Обчислити: $\left(2\bar{i} - \bar{j}\right)\cdot\bar{j} + \left(\bar{j} - 2\bar{k}\right)\cdot\bar{k} + \left(\bar{i} - 2\bar{k}\right)\cdot\bar{i}$.
6. Вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ утворюють кут 30°. Знаючи, що $\left|\bar{a}\right| = \sqrt{3}$, $\left|\bar{b}\right| = 1$, обчислити косинус кута між векторами $\bar{p} = \bar{a} + \bar{b}$ і $\bar{q} = \bar{a} - \bar{b}$.
7. Маємо трикутник з вершинами *A*(2; –1; 2), *B*(1; 2; –1), *C*(3; 2; 1). Знайти кут
при вершині *C*.
8. Довести, що в 4-кутнику з вершинами *A*(1; –2; 2), *B*(1; 4; 0), *C*(–4; 1; 1), *D*(–5; –5; 3) діагоналі *AC* і *BD* взаємно перпендикулярні.
9. Дано вектори $\bar{a}(1,-1,1)$, $\bar{b} = \bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$, $\bar{c}(0,1,2)$, $\bar{d} = 2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$. Обчислити: $(\bar{a} - \bar{b})\times(\bar{d} + \bar{c})$.
10. Знайти кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a} = 6\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$
і $\bar{b} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + \bar{k}$.

11. Вектор $\bar{c}$ ортогональний векторам $\bar{a}$ і $\bar{b}$, кут між якими 30°. Знаючи, що $|\bar{a}| = 6$, $|\bar{b}| = 3$, $|\bar{c}| = 3$, обчислити $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$.

12. Обчислити об'єми паралелепіпеда і тетраедра, побудованих на векторах $\bar{a}(3,6,3)$, $\bar{b}(1,3,-2)$, $\bar{c}(1,-4,-1)$.

ВІДПОВІДІ.

1. $(-5,10,10)$. 2. $\dfrac{27}{\sqrt{30}} \approx 4{,}93$. 3. 13. 4. $(6,5,7)$. 5. -2. 6. $\dfrac{2}{\sqrt{7}}$. 7. 90°.

8. Вказівка. Знайти скалярний добуток векторів *AC* і *BD.*

9. $(-7,4,6)$. 10. 120°. 11. 27. 12. 60;10

2.2 РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ ТА ПЛОЩИНИ

У шкільному курсі геометрії, який вивчає елементарну евклідову геометрію, предметом вивчення є геометричні об’єкти: точки, прямі, площини, криві та поверхні, фігури, а предметом вивчення алгебри – числа, операції над числами, рівняння.

Предметом аналітичної геометрії є вивчення геометричних об’єктів засобами алгебри на основі методу координат.

Метод координат є основним методом аналітичної геометрії. Його сутність полягає у тому, що дослідження геометричних об’єктів зводиться до дослідження зв’язків між координатами точок цих об’єктів (тобто між числами). Точки при цьому методі подаються упорядкованими парами або трійками чисел, а лінії та поверхні розглядаються як множини точок, що задовольняють певним умовам. Ці умови записуються у вигляді рівняння, яке зв’язує змінні координати точки, що належить лінії або поверхні.

Основними (типовими) задачами аналітичної геометрії є:

1. Складання рівняння геометричного об’єкта, який розглядається як геометричне місце певних точок.

2. (Обернена до 1.) Встановлення геометричного образу об’єкта, заданого рівнянням.

2.2.1 РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ НА ПЛОЩИНІ

Назва рівняння	Вид рівняння	Основні параметри	Зауваження

Назва рівняння	Вид рівняння	Основні параметри	Зауваження
Канонічне рівняння прямої	$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}$	$M_0\left(x_0,y_0\right)$ $\vec{s}=\left(l,m\right)$	точка, напрямний вектор
Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки	$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$	$M_1\left(x_1,y_1\right)$, $M_2\left(x_2,y_2\right)$	дві точки прямої
Рівняння прямої у відрізках на осях	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$	a, b	відрізки на координатни х осях
Параметричні рівняння прямої; векторне рівняння прямої	$\begin{cases} x=x_0+lt, \\ y=y_0+mt, \end{cases} t\in R$; $\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{s}$	$M_0\left(x_0,y_0\right)$, $\vec{s}=\left(l,m\right)$	точка, напрямний вектор
Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом	$y=kx+b$	k, b	кутовий коефіцієнт, відрізок на осі Oy
Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом ‘‘з точкою’’	$y-y_0=k\left(x-x_0\right)$	$M_0\left(x_0,y_0\right)$, k	точка прямої, кутовий коефіцієнт
Рівняння прямої, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора $\vec{n}$ (Загальне рівняння прямої‘‘з точкою’’)	$A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)=0$	$M_0\left(x_0,y_0\right)$, $\vec{n}=\left(A,B\right)$	точка прямої, нормальний вектор
Загальне рівняння прямої	$Ax+By+C=0$	$\vec{n}=\left(A,B\right)$	нормальний вектор

Приклад. Пряма задана точкою $M_0\left(-1,2\right)$ і напрямним вектором $\vec{s}=\left(3,-1\right)$.

Записати різні рівняння прямої.

Розв’язання

1) Записати канонічне рівняння прямої: $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}$, отже $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-1}$;

2) Записати загальне рівняння: $\left(-1\right)\left(x+1\right)=3\left(y-2\right)$ (у канонічному рівнянні застосували основну властивість пропорції), отже $x+3y-5=0$,

3) Записати рівняння у відрізках на осях: $\frac{x}{5}+\frac{y}{\frac{5}{3}}=1$ (у загальному рівняння поділили кожний член на 5);

4) Записати рівняння з кутовим коефіцієнтом: $y=-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$ (у загальному рівнянні виразили y через x).

2.2.2 ВЗАЄМНЕ РОЗТАШУВАННЯ ПРЯМИХ НА ПЛОЩИНІ

Назва рівняння	Параметри прямих	Умова паралельності	Умова перпендикулярності	Кут між прямими
Загальні	$\vec{n}_1=(A_1,B_1)$ $\vec{n}_2=(A_2,B_2)$	$\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$ $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$	$\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$ $A_1A_2+B_1B_2=0$	$\cos\phi=\frac{\vec{n}_1\vec{n}_2}{\lvert\vec{n}_1\rvert\lvert\vec{n}_2\rvert}$
Канонічні	$\vec{s}_1=(l_1,m_1)$ $\vec{s}_2=(l_2,m_2)$	$\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2$, $\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}$	$\vec{s}_1 \perp \vec{s}_2$ $l_1l_2+m_1m_2=0$	$\cos\phi=\frac{\vec{s}_1\vec{s}_2}{\lvert\vec{s}_1\rvert\lvert\vec{s}_2\rvert}$
З кутовим коефіцієнтом	$k_1,\ k_2$	$k_1=k_2$	$k_1k_2=-1$ $k_2=-\frac{1}{k_1}$	$tg\phi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$
Загальне і канонічне	$\vec{n}_1=(A_1,B_1)$ $\vec{s}_2=(l_2,m_2)$	$\vec{n}_1 \perp \vec{s}_2$ $A_1l_2+B_1m_2=0$	$\vec{n}_1 \parallel \vec{s}_2$, $\frac{A_1}{l_2}=\frac{B_1}{m_2}$	$\sin\phi=\frac{\lvert\vec{n}_1\vec{s}_2\rvert}{\lvert\vec{n}_1\rvert\lvert\vec{s}_2\rvert}$

Приклад. Визначити взаємне розташування прямих $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-1}$ та $y=-2x+1$. Якщо вони перетинаються, знайти кут між ними.

Розв'язання. Знайдемо кутовий коефіцієнт першої прямої $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-1}$. Для цього виразимо y через x, отже $y=-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$. Таким чином, $k_1=-\frac{1}{3}$, $k_2=-2$. Оскільки, $k_1 \neq k_2$, то прямі перетинаються. Знайдемо кут між ними за формулою $tg\phi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$, отже $tg\phi=\left|\frac{-2-\left(-\frac{1}{3}\right)}{1+(-2)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}\right|=\frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}}=1$, отже $\phi=45^\circ$.

Відстань між паралельними прямими l_1 *і* l_2 на площині визначається формулою:

$$d = \frac{\left|A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1\right|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}},$$

де $\vec{n}_1 = \left(A_1, B_1\right)$ – нормальний вектор прямої l_1, $M_0\left(x_0, y_0\right)$ – деяка точка прямої l_2.

Можна поміняти ролями прямі l_1 *і* l_2. За цією ж формулою обчислюється відстань від даної точки до даної прямої.

Приклад. Знайти відстань від початку координат до прямої $x + 3y - 5 = 0$.

Розв'язання. $d = \dfrac{\left|1 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 5\right|}{\sqrt{1+9}} = \dfrac{5}{\sqrt{10}}$ (у.о.)

2.2.3 РІВНЯННЯ ПЛОЩИНИ

Назва	Вид рівняння	Параметри
Рівняння площини, що проходить через три задані точки	$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$	$M_1\left(x_1, y_1, z_1\right)$, $M_2\left(x_2, y_2, z_2\right)$, $M_3\left(x_3, y_3, z_3\right)$
Рівняння " у відрізках" на осях	$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$	$a = -D / A$, $b = -D / B$, $c = -D / C$
Рівняння площини, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора $\vec{n}$ (Загальне рівняння площини ''з точкою'')	$A\left(x - x_0\right) + B\left(y - y_0\right) + C\left(z - z_0\right) = 0$	$M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$, $\vec{n} = \left(A, B, C\right)$
Загальне рівняння	$Ax + By + Cz + D = 0$	$\vec{n} = \left(A, B, C\right)$

Приклад. Задані точки $M_1\left(1, 2, 3\right)$, $M_2\left(-1, 0, 2\right)$, $M_3\left(-2, 1, 0\right)$.

а) Скласти рівняння площини, що проходить через три задані точки.

б) Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_1\left(1, 2, 3\right)$, перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_2 M_3}$.

в) Звести отримане рівняння до загального вигляду.

г) Побудувати площину в системі координат.

Розв'язання

а) Складемо рівняння площини, що проходить через три задані точки.

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0;\ \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -1-1 & 0-2 & 2-3 \\ -2-1 & 1-2 & 0-3 \end{vmatrix}=0;\ \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -2 & -2 & -1 \\ -3 & -1 & -3 \end{vmatrix}=0.$$

Обчислимо визначник розкладанням за першим рядком:

$$(x-1)\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}-(y-2)\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -3 \end{vmatrix}+(z-3)\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}=0;$$

$$5(x-1)-3(y-2)+(-4)(z-3)=0;$$

$$5x-5-3y-4z+12=0;$$

$$5x-3y-4z+13=0.$$

б) Складемо рівняння площини, що проходить через точку $M_1(1,2,3)$, перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_2M_3}$.

Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{M_2M_3}$:

$\overrightarrow{M_2M_3}=(-1,1,-2)=\vec{n}$.

Підставимо координати вектора $\overrightarrow{M_2M_3}$ і координати точки $M_1(1,2,3)$ у загальне рівняння площини ‘‘з точкою’’:

$-1(x-1)+1(y-2)-2(z-3)=0$.

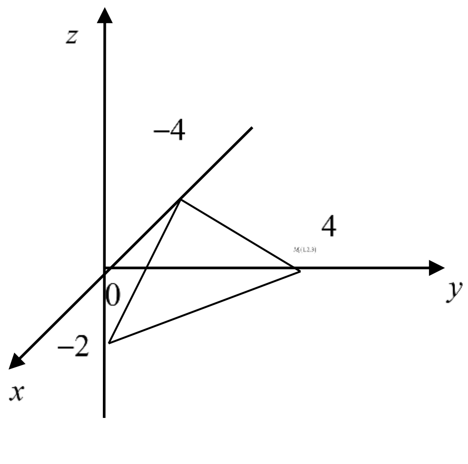
в) Зведемо отримане рівняння до загального вигляду:

$-x+1+y-2-2z-3=0$; $x-y+2z+4=0$.

г) Побудуємо площину в системі координат. Для цього запишемо рівняння

" у відрізках" на осях:

$$\frac{x}{-4}+\frac{y}{4}+\frac{c}{-2}=1$$



2.2.4 ВЗАЄМНЕ РОЗТАШУВАННЯ ПЛОЩИН

Нехай дві площини P_1 і P_2 задані загальними рівняннями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ відповідно.

Кут між площинами	$\cos\theta = \dfrac{\vec{n}_1\vec{n}_2}{\lvert\vec{n}_1\rvert\lvert\vec{n}_2\rvert}$, де $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$
Умова паралельності площин	$\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$
Умова перпендикулярності площин	$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

Відстань від заданої точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини $P: Ax + By + Cz + D = 0$ визначається формулою

$$d = \frac{\lvert Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\rvert}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Приклад. Знайти відстань від точки $M_0(-1,1,0)$ до площини P: $5x - 3y - 4z + 13 = 0$.

Розв'язання.

$$d = \frac{\lvert 5(-1) - 3\cdot 1 - 4\cdot 0 + 13\rvert}{\sqrt{5^2 + 3^2 + 4^2}} = \frac{\lvert -5 - 3 + 13\rvert}{\sqrt{50}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ (у.о.)}$$

2.2.5 РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ У ПРОСТОРІ

Назва рівняння	Вид рівняння	Дані
Канонічне рівняння прямої	$\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$	$M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка прямої, $\vec{s} = (l, m, n)$ – напрямний вектор прямої
Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки	$\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$	$M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ – дві точки прямої
Параметричні рівняння прямої; векторне рівняння прямої	$\begin{cases} x = x_0 + lt; \\ y = y_0 + mt; \quad t \in R; \\ z = z_0 + nt. \end{cases}$ $\vec{r} = r_0 + t\vec{s}$	$M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка прямої, $\vec{s} = (l, m, n)$ – напрямний вектор прямої
Загальні рівняння прямої	$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$	$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ – площини, лінією перетину яких є пряма

Приклад. Записати канонічні рівняння прямої, що проходить через точку M(1;-1;2) паралельно вектору $\vec{s} = (0; -2; 3)$. Скласти загальне рівняння цієї прямої.

Розв'язання. Канонічні рівняння шуканої прямої мають вигляд: $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$, отже $\frac{x-1}{0}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-2}{3}$

Тут запис нуля в знаменнику вважається припустимим, тому що це символічний запис.

Переведемо канонічне рівняння у загальне. Для цього застосуємо основну властивість пропорції. Отже,

$$\begin{cases} -2(x-1)=0(y+1); \\ 3(y+1)=-2(z-2). \end{cases} \qquad \begin{cases} x=1; \\ 3y+2z-1=0. \end{cases}$$

Відповідь: $\begin{cases} x=1; \\ 3y+2z-1=0. \end{cases}$

Розв'яжемо обернену задачу.

Складемо канонічні рівняння прямої $\begin{cases} 5x+y+z=0; \\ 2x+3y-2z+5=0. \end{cases}$

1) Знайдемо яку-небудь точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на прямій. Для цього покладемо в обох рівняннях $x=0$ і розв'яжемо систему

$\begin{cases} y+z=0; \\ 3y-2z+5=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-1; \\ z=1. \end{cases}$ Отже, $M_0(0,-1,1)\in L$.

2) Знайдемо напрямний вектор $\vec{s}$ прямої:

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-5\vec{i}+12\vec{j}+13\vec{k}$$

Отже, $\vec{s}=(-5,12,13)$.

3) Отже, знаючи точку M_0 і вектор $\vec{s}$, запишемо канонічні рівняння:

$$\frac{x}{-5}=\frac{y+1}{12}=\frac{z-1}{13}.$$

Відповідь: $\frac{x}{-5}=\frac{y+1}{12}=\frac{z-1}{13}$.

2.2.6 ВЗАЄМНЕ РОЗТАШУВАННЯ ПРЯМИХ У ПРОСТОРІ

Нехай дві прямі L_1 та L_2 задані канонічними рівняннями $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ та $\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$ відповідно.

Кут між прямими	$\cos\phi=\frac{\vec{s}_1\vec{s}_2}{\lvert\vec{s}_1\rvert\lvert\vec{s}_2\rvert}$, де $\overrightarrow{s_1}=(l_1,m_1,n_1)$, $\overrightarrow{s_2}=(l_2,m_2,n_2)$
Умова паралельності прямих	$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$
Умова перпендикулярності прямих	$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$

Умова мимобіжності прямих	$\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \neq 0$
Умова належності двох прямих одній площині	$\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$

Відстань від заданої точки $A(x_A, y_A, z_A)$ до прямої $L: \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ визначається формулою

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{MA} \times \vec{s}\right|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

Відстань між мимобіжними прямими L_1 та L_2, які задані канонічними рівняннями $\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$ та $\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$ відповідно визначається за формулою

$$d = \frac{\left|\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{s_1} \times \overrightarrow{s_2}\right|}$$

2.2.7 ВЗАЄМНЕ РОЗТАШУВАННЯ ПРЯМОЇ ТА ПЛОЩИНИ

Нехай задані пряма $L: \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ та площина P: $Ax+By+Cz+D=0$

Кут між прямою та площиною	$\sin\phi = \frac{\vec{s}\vec{n}}{\lvert\vec{s}\rvert\lvert\vec{n}\rvert}$, де $\vec{s} = (l, m, n)$, $\vec{n} = (A; B; C)$
Умова паралельності прямої та площини	$Al+Bm+Cn=0$
Умова перпендикулярності прямої та площини	$\frac{l}{A} = \frac{m}{B} = \frac{n}{C}$

Щоб знайти точку перетину прямої та площини, слід розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}; \\ Ax+By+Cz+D=0 \end{cases}$

Приклад. Знайти точку перетину прямої $L: \frac{x}{-5} = \frac{y+1}{12} = \frac{z-1}{13}$ та площини P: $5x-3y-4z+114=0$.

Розв'язання. Складемо систему рівнянь $\begin{cases} \dfrac{x}{-5} = \dfrac{y+1}{12} = \dfrac{z-1}{13}; \\ 5x - 3y - 4z + 114 = 0. \end{cases}$

Для зручності зведемо канонічні рівняння прямої $L: \dfrac{x}{-5} = \dfrac{y+1}{12} = \dfrac{z-1}{13}$ до параметричного вигляду $\dfrac{x}{-5} = \dfrac{y+1}{12} = \dfrac{z-1}{13} = t,$ отже $\begin{cases} x = -5t; \\ y = 12t - 1; \\ z = 13t + 1. \end{cases}$ Підставимо ці виразу у рівняння площини $5x - 3y - 4z + 114 = 0$. Отже, $5 \cdot (-5t) - 3(12t-1) - 4(13t+1) + 114 = 0;$

$-25t - 36t + 3 - 52t - 4 + 114 = 0;$ $t = 1$. Таким чином, $x = -5; y = 12 - 1 = 11; z = 13 + 1 = 14$.

Відповідь: $(-5;11;14)$

2.2.8 ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1. Пряма на площині

1.1. Скласти рівняння середньої лінії трикутника, що проходить через сторони AB і BC трикутника ABC, у якого $A(2;6), B(-4;0), C(4;2)$.

1.2. Маємо три вершини трикутника $A(1;-2), B(0;3), C(1;1)$. Скласти рівняння прямої, що проходить через вершину A паралельно стороні BC трикутника.

1.3. Маємо три вершини трикутника $A(-4,5), B(2,-3), C(0,-7)$. Скласти рівняння медіани, проведеної з вершини A до сторони BC.

1.4. Маємо точки $A(-2;3), B(3;-5)$. Через середину відрізка AB провести пряму, перпендикулярну до прямої AB.

1.5. Точка $A(3;2)$ є основою перпендикуляра, проведеного з точки $M(1;-1)$ на пряму m. Скласти рівняння прямої m.

1.6. Через точки $A(-1;2), B(2;3)$ проведено пряму. Знайти точки її перетину з осями координат.

1.7. Скласти параметричні рівняння прямої, яка:

а) проходить через точку $A(-2;3)$ паралельно вектору $\bar{p}(5,-1)$;

б) проходить через точки $A(0;-2)$ і $B(3;-4)$.

1.8. Маємо пряму $3x - y + 5 = 0$. Скласти рівняння її в параметричному виді.

1.9. Скласти загальне рівняння прямої, що задана в параметричному виді: $\begin{cases} x = -2 + 3t, \\ y = 4 - t. \end{cases}$

1.10. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $A(2;5)$, кутовий коефіцієнт якої дорівнює 3.

1.11. Знайти відстань:

а) від точки $A(-1;5)$ до прямої $3x-4y+1=0$;

б) між прямими $3x+4y-18=0$ і $3x+4y-43=0$.

1.12. Маємо три вершини трикутника $A(1,5), B(-4,3), C(2,9)$. Скласти рівняння та знайти довжину висоти, проведеної з вершини A до сторони BC.

1.13. Обчислити кут між прямими:

а) $y=-\frac{3}{2}x+4$ і $2x-3y+21=0$; б) $\frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{-2}$ і $y=3x-4$.

1.14. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку перетину прямих $2x+y+5=0$ і $x-3y-1=0$ перпендикулярно до прямої $2x-3y-6=0$.

1.15. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку перетину прямих $2x-y-5=0$ і $x-2y-7=0$ паралельно прямій $3x-y-8=0$.

2. Площина

2.1. Маємо чотири точки $M_1(0,-3,1)$, $M_2(-4,1,2)$, $M_3(2,-1,5)$, $M_4(-3,4,-5)$.

а)Скласти рівняння площини P_1, що проходить через точку M_3 перпендикулярно
до вектора $\overline{M_1M_2}$.

б) Скласти рівняння площини P_2, що проходить через точки M_1, M_2, M_3.

в) Знайти відстань від точки M_4 до площини P_2.

2.2. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $A(2;-3;3)$ паралельно площині XOY.

2.3. Скласти рівняння площини, яка проходить через вісь OX та точку $A(4;-1;2)$.

2.4. Скласти рівняння площини "у відрізках на осях", яка проходить через точки $A(1;1;1), B(3;1;5), C(1;2;3)$.

2.5. Знайти відрізки, які площина $3x-4y-24z-24=0$ відтинає на координатних осях.

2.6. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $A(3;2;4)$ та відтинає на осях однакові відрізки.

2.7. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $A(3;-2;-7)$ паралельно площині $x-3z+5=0$.

2.8. Знайти відстань між двома паралельними площинами $x-3y+2z+1=0$ і $2x-6y+4z+3=0$.

2.9. Знайти довжину висоту h_S піраміди $SABC$, якщо $S(0;6;4)$, $A(3;5;3)$, $B(-2;11;-5)$, $C(1;-1;4)$.

3. Пряма у просторі

3.1. Скласти канонічні рівняння прямої $\begin{cases} x-2y+3z+1=0, \\ 2x+y-4z-8=0. \end{cases}$

3.2. Скласти параметричні рівняння прямої, що проходить через точку $M(1;-1;-3)$ паралельно прямій $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{0}$.

3.3. Скласти параметричні рівняння прямої, що проходить через точку $M(1;-1;-3)$ паралельно прямій $\begin{cases} x=3t-1, \\ y=-2t+3, \\ z=5t+2. \end{cases}$

3.4. Маємо вершини трикутника $A(3,6,-7)$, $B(-5;2;3)$ і $C(4;-7;-2)$. Скласти параметричні рівняння його медіани, проведеної з вершини C.

3.5. Довести паралельність прямих $\begin{cases} x+y-3z+1=0, \\ x-y+z+3=0. \end{cases}$ і $\begin{cases} x+2y-5z-1=0, \\ x-2y+3z-9=0. \end{cases}$

3.6. Довести перпендикулярність прямих $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{3}$ і $\begin{cases} 3x+y-5z+1=0, \\ 2x+3y-8z+3=0. \end{cases}$

3.7. Довести перпендикулярність прямих $\begin{cases} x=2t+1, \\ y=3t-2, \\ z=-6t+1 \end{cases}$ і $\begin{cases} 2x+y-4z+2=0, \\ 4x-y-5z+4=0. \end{cases}$

3.8. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M(5;-2;1)$ паралельно прямим $\frac{x+1}{5}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-4}{2}$ і $\frac{x-0}{6}=\frac{y-0}{2}=\frac{z-0}{-3}$.

3.9. Знайти кут між прямими $\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{2}$ і $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{4}=\frac{z+1}{-2}$.

3.10. Знайти кут між прямою $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{2}$ і площиною $2x+y-z+4=0$.

3.11. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}$ і площини $2x+3y+z-1=0$.

3.12. Довести, що пряма $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{1}$ паралельна площині $x-2y+5z-6=0$, а пряма $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{1}$ належить цій площині.

3.13. Знайти координати точки, яка симетрична точці $M(1;5;2)$ відносно площини $2x-y-z+11=0$.

3.14. Знайти координати проекції точки $P(5;2;-1)$ на площину $2x - y + 3z + 23 = 0$.

ВІДПОВІДІ

1.1. $2x + y - 1 = 0$. 1.2. $2x + y = 0$. 1.3. $2x + y + 3 = 0$. 1.4. $10x - 16y - 21 = 0$. 1.5. $2x + 3y - 12 = 0$. 1.6. $\left(0;\frac{7}{3}\right)$, $(-7;0)$. 1.7. а) $x = 5t - 2, y = -t + 3$; б) $x = 3t, y = -2t - 2$. 1.8. $x = t, y = 3t + 5$. 1.9. $x + 3y + 6 = 0$. 1.10. $3x - y - 1 = 0$. 1.11. а) $\frac{22}{5}$; б) 5. 1.12. $x - y - 6 = 0, \frac{3\sqrt{2}}{2}$. 1.13. а) 90°; б) 45°. 1.14. $3x + 2y + 8 = 0$. 1.15. $3x - y - 6 = 0$. 2.1. а) $4x - 4y - z - 7 = 0$; б) $7x + 9y - 8z + 35 = 0$; в) $\frac{90}{\sqrt{194}} \approx 6,462$. 2.2. $z = 3$. 2.3. $2y + z = 0$. 2.4. $\frac{x}{3/2} + \frac{y}{3/2} + \frac{z}{-3} = 1$. 2.5. $8;-6;-1$. 2.6. $x + y + z - 9 = 0$. 2.7. $x - 3z - 24 = 0$. 2.8. $\frac{1}{\sqrt{56}} \approx 0,1336$. 2.9. 3. 3.1. $\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{1}$. Вказівка. Знайти точку на прямій, розв’язавши систему при $z = 0$; напрямлений вектор знаходиться за формулою $\vec{s} = \vec{n_1} \times \vec{n_2}$. 3.2. $x = 2t + 1, y = 4t - 1, z = -3$. 3.3. $x = 3t + 1, y = -2t - 1, z = 5t - 3$. 3.4. $x = 5t + 4, y = 11t - 7, z = -2$. 3.8. $16x - 27y + 14z - 148 = 0$. 3.9. $\arccos\frac{1}{2\sqrt{21}}$. 3.10. $\arcsin\frac{1}{\sqrt{6}}$. 3.11. $(2;-3;6)$. 3.13. $(-3;7;4)$. 3.14. $(1;4;-7)$

2.3 КРИВІ ТА ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

2.3.1КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Загальні рівняння першого і другого порядків мають вигляд:

1) лінії 1-го порядку (прямі): $Ax + By + C = 0$, де A і B не рівні нулю одночасно.
2) лінії 2-го порядку: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, де A,B,C не рівні нулю одночасно..

У залежності від співвідношень між коефіцієнтами $A, B, C, ..., F$, рівняння можна привести до одного з простих видів (у відповідній канонічній системі координат $O'x'y'$):

1) $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$ (еліпс)

2) $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$ (гіпербола)

3) $y'^2 = 2px'$ (парабола)

4) $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=0$ (точка)

5) $\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=0$ (дві прямі, які перерізаються в початку координат)

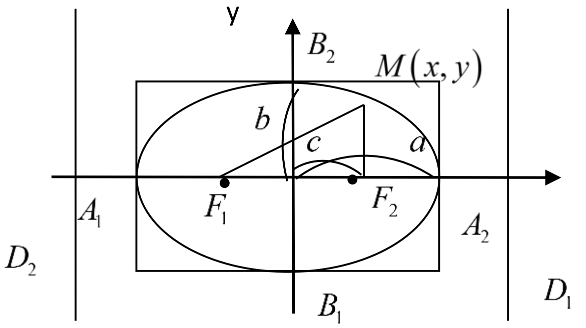
6) $\frac{x'^2}{a^2}=1$ (дві паралельні прямі)

7) $x'^2=0$ (одна пряма)

2.3.2 КАНОНІЧНЕ РІВНЯННЯ ЕЛІПСА

Еліпсом називається геометричне місце точок площини, сума відстаней яких від двох заданих точок F_1 і F_2 цієї площини (фокусів) є величина стала і більша від відстані між фокусами.

Канонічне рівняння еліпса



$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ a>0, b>0

Нехай $M(x,y)$ – довільна точка еліпса. Позначимо $r_1=F_1M$, $r_2=F_2M$, $r_1+r_2=2a$. Відстані r_1,r_2 називаються фокальними радіусами точки $M(x,y)$.

Весь еліпс вміщується в прямокутнику зі сторонами $2a$ і $2b$. Еліпс перетинає осі координат в точках $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$, $B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$. Ці точки називаються вершинами еліпса.

Величини $A_1A_2=2a$, $B_1B_2=2b$ називаються відповідно великою та малою осями еліпса, а величини a і b називають відповідно великою і малою півосями еліпса.

Позначимо відстань між фокусами $F_1(-c,0)$ $F_2(c,0)$ (фокальну відстань) через $2c$: $F_1\,F_2=2c$. Половина фокальної відстані $c=\sqrt{b^2-a^2}$.

Якщо $a=b$, то рівняння перетворюється на рівняння кола: $x^2+y^2=a^2$

Ексцентриситетом еліпса називається відношення половини фокальної відстані до довжини великої півосі еліпса. Позначається $\varepsilon=\frac{c}{a}$. Ексцентриситет характеризує ступінь витягнутості еліпса. $0\le\varepsilon<1$.

Якщо $\varepsilon=1$, то еліпс перетворюється на коло, якщо $\varepsilon\to1$,то еліпс стискується вздовж малої осі.

Директрисами еліпса називаються прямі D_1 і D_2 з рівняннями $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$.

Оптична властивість еліпса**:** всі промені, що виходять з F_1, зберуться в F_2.

Приклад. Звести дане рівняння еліпса $x^2+2y^2-8x+10y-10=0$ до канонічного вигляду.

Розв'язання. У рівнянні $x^2+2y^2-8x+10y-10=0$ виділимо повні квадрати:

$$x^2-8x+16-16+2\left(y^2+5y+6,25\right)-12,5-10=0;$$

$$\left(x-4\right)^2+2\left(y+2,5\right)^2=38,5;$$

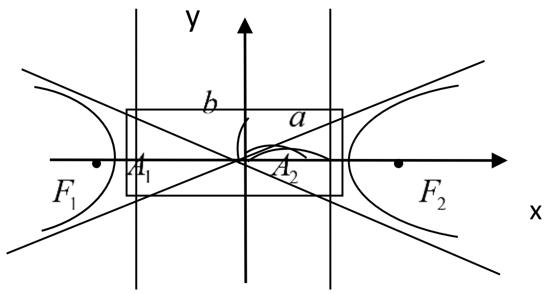
$$\frac{\left(x-4\right)^2}{38,5}+\frac{2\left(y+2,5\right)^2}{38,5}=1;$$

$$\frac{\left(x-4\right)^2}{38,5}+\frac{\left(y+2,5\right)^2}{19,25}=1.$$

Відповідь: $\frac{\left(x-4\right)^2}{38,5}+\frac{\left(y+2,5\right)^2}{19,25}=1.$

2.3.3 КАНОНІЧНЕ РІВНЯННЯ ГІПЕРБОЛИ

Гіперболою називається геометричне місце всіх точок площини, абсолютна величина різниці відстаней яких від двох заданих точок F_1 і F_2 цієї площини (фокусів) є величина стала і менша від відстані між фокусами.



Канонічне рівняння гіперболи:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad a>0,\ b>0$$

Нехай $M\left(x,y\right)$ – довільна точка гіперболи. Позначимо $r_1=F_1M$, $r_2=F_2M$, $\left|r_1-r_2\right|=2a$. Відстані r_1,r_2 називаються фокальними радіусами точки $M\left(x,y\right)$.

Вся гіпербола складається з двох віток (лівої і правої), має дві асимптоти $y=\pm\frac{b}{a}x$ і розташована поза прямокутником зі сторонами $2a$ і $2b$, який називається основним. Гіпербола перетинає вісь Ox в точках $A_1\left(-a,0\right)$, $A_2\left(a,0\right)$,які називаються вершинами гіперболи. Вісь Oy гіпербола не перетинає.

Величини $A_1A_2 = 2a$, $B_1B_2 = 2b$ називаються відповідно дійсною та уявною осями гіперболи, а величини a і b називаються відповідно дійсною та уявною півосями гіперболи.

Якщо $a = b$, то рівняння перетворюється на рівняння: $x^2 - y^2 = a^2$, яке визначає рівносторонню гіперболу, основним прямокутником якої є квадрат із стороною $2a$, а асимптотами – прямі $y = \pm x$.

Позначимо відстань між фокусами $F_1(-c,0)$ $F_2(c,0)$ (фокальну відстань) через $2c$: $F_1F_2 = 2c$. Половина фокальної відстані $c = \sqrt{b^2 + a^2}$.

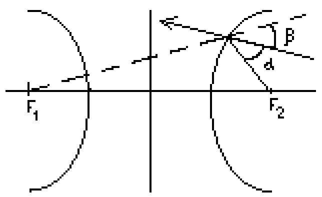
Рівняння $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ або $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ також визначає гіперболу з вершинами $B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$ і тими ж асимптотами. Гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ і $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ називаються спряженими.

Ексцентриситетом гіперболи називається відношення половини фокальної відстані до довжини дійної півосі еліпса. Позначається $\varepsilon = \frac{c}{a}$.

Чим більший ексцентриситет гіперболи, тим більше гіпербола відхиляється від осі Ox, якщо $\varepsilon \to 1$, то гіпербола наближується до осі Ox.

Директрисами гіперболи називаються прямі D_1 і D_2 з рівняннями $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$

Оптична властивість гіперболи: всі промені, що виходять з F_1, після віддзеркалення здаються витікаючими F_2.



$\alpha = \beta$

Приклад. Звести дане рівняння гіперболи $x^2 - 6y^2 + 6x - 12y - 9 = 0$ до канонічного вигляду.

Розв'язання. У рівнянні $x^2 - 6y^2 + 6x - 12y - 9 = 0$ виділимо повні квадрати:

$x^2 + 6x + 9 - 9 - 6\left(y^2 + 2y + 1 - 1\right) - 9 = 0;$

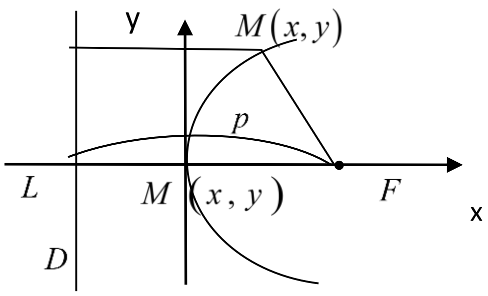
$(x+3)^2 - 6(y+1)^2 = 12;$;

$$\frac{(x+3)^2}{12} - \frac{(y+1)^2}{2} = 1$$

Відповідь: $\frac{(x+3)^2}{12} - \frac{(y+1)^2}{2} = 1$

2.3.4 КАНОНІЧНЕ РІВНЯННЯ ПАРАБОЛИ

Параболою називається геометричне місце всіх точок площини, рівновіддалених від заданої точки F цієї площини (фокуса) і від заданої прямої D (директриси), яка не проходить через фокус.



Канонічне рівняння параболи:

$$y^2 = 2px$$

Нехай $M(x,y)$ – довільна точка параболи. Позначимо $r = FM$, $d = MD$, $r = d$.

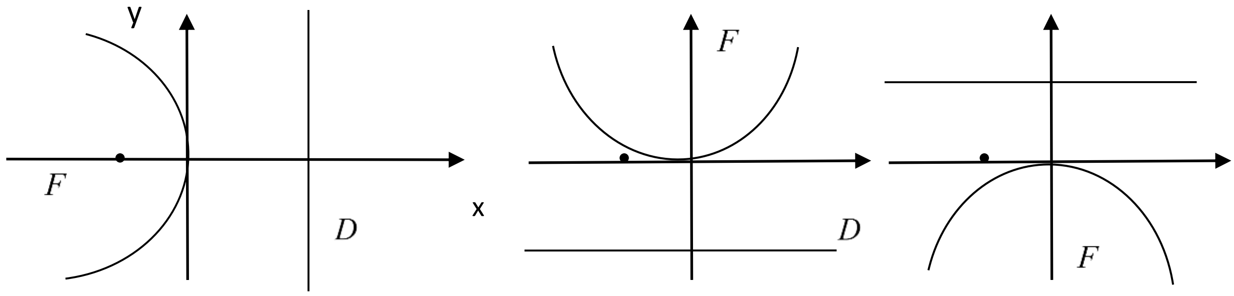
Число p називається параметром параболи. $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ – фокус параболи.

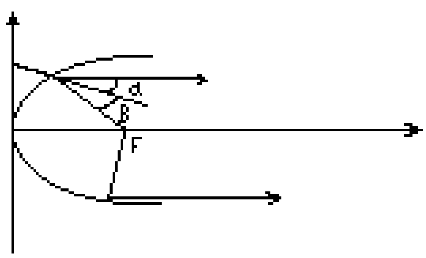
Парабола перетинає вісь Ox в точці $O(0,0)$, яка називається іі вершиною. Вісь симетрії Ox параболи називається її віссю.

Ексцентриситетом параболи $\varepsilon = \frac{r}{d} = 1$.

Директриса параболи має рівняння. $x = -\frac{p}{2}$

Рівняння $y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$, $x^2 = -2py$, в яких $p > 0$ теж визначають параболи





Оптична властивість гіперболи. α = β: промені, що виходять з фокусу, після віддзеркалення йдуть паралельно осі параболи. Ця властивість широко застосовується в техніці.

Приклад. Звести дане рівняння гіперболи $y^2-6x-18y-9=0$ до канонічного вигляду.

Розв'язання. У рівнянні $y^2-6x-18y-9=0$ виділимо повний квадрат:

$y^2-18y+81-81-6x-9=0;$

$(y-9)^2=6x+90;$;

$(y-9)^2=6(x+15).$

Відповідь: $(y-9)^2=6(x+15).$

2.3.5 ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Загальні рівняння поверхонь першого і другого порядків мають вигляд:

1) лінії 1-го порядку (площини):

$Ax+By+Cz+D=0$, де A, B, C не рівні нулю одночасно;

2) лінії 2-го порядку:

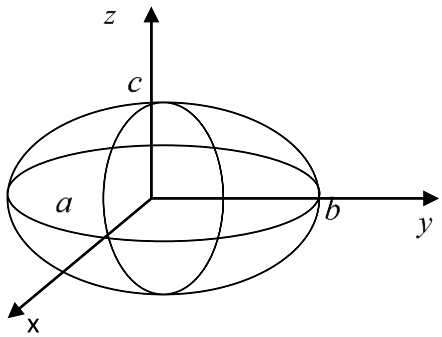
$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fzx+Gx+Hy+Kz+L=0$, перші шість коефіцієнтів не рівні нулю одночасно.

Для будь-якої поверхні S, заданої в деякій системі координат $Oxyz$ рівнянням виду можна так підібрати нову систему координат $O'x'y'z'$,що рівняння цієї поверхні прийме найпростішій (канонічний) вигляд. При цьому порядок поверхні зберігається. Таку систему координат називають канонічною для даної поверхні.

НАЙВАЖЛИВІШІ НЕВИРОДЖЕНІ ПОВЕРХНІ 2-ГО ПОРЯДКУ

1**)** Еліпсоїд**:**

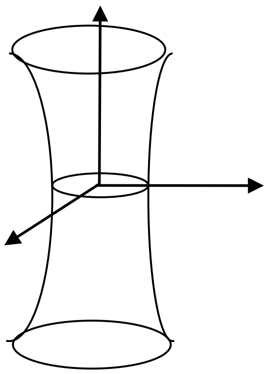
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



2) Гіперболоїди.

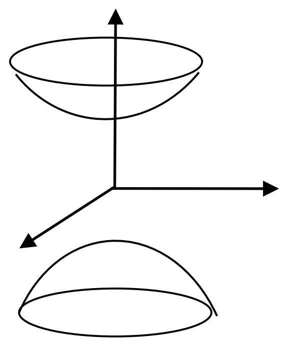
а) Однопорожнинний гіперболоїд:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

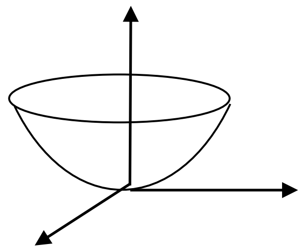


б) Двопорожнинний гіперболоїд:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$



3) Параболоїди.

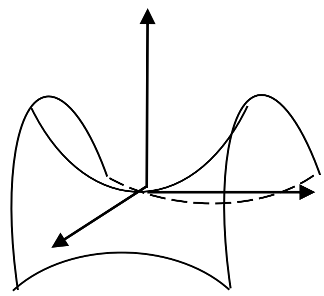


а) Еліптичний параболоїд:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$$

б) Гіперболічний параболоїд**:**

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$$



2.3.6 НАЙВАЖЛИВІШІ ВИРОДЖЕНІ ПОВЕРХНІ 2-ГО ПОРЯДКУ

Найважливіші вироджені поверхні 2-го порядку:

1) еліптичний циліндр: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, круговий, якщо $a=b$

2) Гіперболічний циліндр: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

3) Параболічний циліндр: $y^2=2px$.

4) Дійсний конус $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$, круговий, якщо $a=b$

2.3.7 ПОВЕРХНІ ОБЕРТАННЯ

Поверхнею обертання називається поверхня, утворена обертанням заданої лінії L навколо заданої прямої l (осі обертання).

Щоб дістати рівняння поверхні обертання кривої навколо якої-небудь координатної осі, треба:

1) в рівнянні кривої залишити без змін координату, однойменну з віссю обертання;

2) другу координату замінити на квадратний корінь із суми квадратів двох інших просторових координат, взятий зі знаком + або -.

Наведене правило дозволяє дістати рівняння багатьох важливих поверхонь.

2.3.8 ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1. Привести до канонічного вигляду рівняння і вказати вид кривої:

1) $9x^2-6x-y+2=0$; 5) $x+1+\sqrt{2-2y^2+4y}=0$;

2) $y=\dfrac{6x-x^2-13}{2}$ 6) $\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{9}y^2-x+\dfrac{2}{3}y-1=0$;

3) $4x^2+9y^2-8x-36y+4=0$; 7) $2x^2-4x+y=0$;

4) $4x^2-9y^2+8x+36y-68=0$; 8) $y^2+4y-x+5=0$.

2. Побудувати

1) $25x^2+100=4y^2$; 2) $4x^2+9y^2=36$; 3) $y^2=3x$; 4) $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$

3. Визначити півосі, координати фокусів, ексцентриситет, рівняння директрис еліпса $9x^2+5y^2-45=0$. Побудувати еліпс.

4. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо:

1) відстань між фокусами $2c=6$, ексцентриситет дорівнює 3/5 (фокуси лежать на осі абсцис);

2) мала вісь дорівнює 16, ексцентриситет дорівнює 3/5;

3) велика піввісь дорівнює 3, ексцентриситет дорівнює $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

4) еліпс проходить через точки $M_1(1;3)$ $M_2(4;1)$;

5) еліпс проходить через точку $M(-2;\dfrac{11}{\sqrt{15}})$ та має ексцентриситет $\dfrac{2}{\sqrt{15}}$;

6) відстань між директрисами $4\sqrt{15}$, ексцентриситет $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

5. Визначити півосі, координати фокусів, ексцентриситет гіперболи $x^2-4y^2-20=0$. Побудувати гіперболу.

6. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо відстань між фокусами $2c=6$ і ексцентриситет $\varepsilon=\dfrac{3}{2}$. Побудувати гіперболу.

7. Скласти рівняння гіперболи, якщо:

1) відстань між фокусами дорівнює 10 та уявна ось дорівнює 8;

2) рівняння її асимптот $4y\pm 3x=0$, а директрис $5x\pm 16=0$;

3) гіпербола проходить через точку $M(4\sqrt{3};2)$, а кут нахилу асимптот до осі OX – 30°.

8. Знайти ексцентриситет, рівняння директрис і асимптот гіперболи $16x^2-9y^2=144$.

ВІДПОВІДІ

1.1. $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}(y-2)$- парабола. 1.2. $(x-3)^2=-2(y+2)$- парабола. 1.3. $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$ - еліпс. 1.4. $\frac{(x+1)^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{4}=1$- гіпербола. 1.5. $\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{2}=1$- частина еліпса при умові $y\in\left(1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right)$. 1.6. $\frac{(x-2)^2}{56}-\frac{(y-12)^2}{126}=1$ - гіпербола. 1.7. $(x-1)^2=-\frac{1}{2}(y-2)$ - парабола. 1.8. $(y+2)^2=x-1$ - парабола. 2.1. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{25}=-1$ - гіпербола. 2.2. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ - еліпс. 2.3. парабола. 2.4. еліпс. 3. $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$; $a=\sqrt{5}; b=3; F_1(0;-2); F_2(0;2); \varepsilon=\frac{2}{3}; y=\pm\frac{9}{2}$. 4.1. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. 4.2. $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$. 4.3. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{6}=1$. 4.4. $\frac{x^2}{143/8}+\frac{y^2}{143/15}=1$. 4.5. $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{11}=1$. 4.6. $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{15}=1$. 5. $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$; $a=\sqrt{20}; b=\sqrt{5}; F_1(-5;0); F_2(5;0); \varepsilon=\frac{1}{2}$. 6. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$. 7.1. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$. 7.2. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. 7.3. $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{12}=1$. 8. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$; $a=3; b=4; c=5; \varepsilon=\frac{5}{3}; x=\pm 3; y=\pm\frac{4}{3}x$.

РОЗДІЛ 3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ТА БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

3.1 КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА ТА ДІЇ З НИМИ

3.1.1 ПОНЯТТЯ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Відомо, що не на будь-якій множині виконується будь-яка алгебраїчна операція. Так, на множині натуральних чисел не виконується операція віднімання (*Приклад.* $-5 \notin N$). Для цього вводять множину цілих чисел. На множині цілих чисел не виконується операція ділення (*Приклад.* $\frac{5}{2} \notin Z$). Якщо взяти множину раціональних чисел Q, частиною якої є множина цілих чисел Z, то на ній операція ділення вже виконується. Але, на множині раціональних чисел не виконується операція добування кореня (*Приклад.* рівняння $x^2 - 2 = 0$ не має раціональних коренів). Множина Q є підмножиною множини R дійсних чисел. Однак, на множині R операція добування кореня також не виконується (*Приклад.* рівняння $x^2 + 2 = 0$ і $x^2 + 1 = 0$ не мають дійсних коренів). Множина комплексних чисел вводиться як розширення множини R дійсних чисел таким чином, щоб на ній операція добування кореня виконувалась, тобто щоб було визначене число, квадрат якого дорівнював би -1, і, отже, існував би розв'язок рівняння $x^2 + 1 = 0$.

Комплексним числом z називається вираз вигляду $z = x + iy$, де x та y - дійсні числа ($x \in R,\ y \in R$), i - число, квадрат якого дорівнює -1 $\left(i^2 = -1\right)$.

Числа x та y називаються дійсною та уявною частинами числа z відповідно, і позначаються $x = \operatorname{Re} z;\ y = \operatorname{Im} z$, число i називається уявною одиницею.

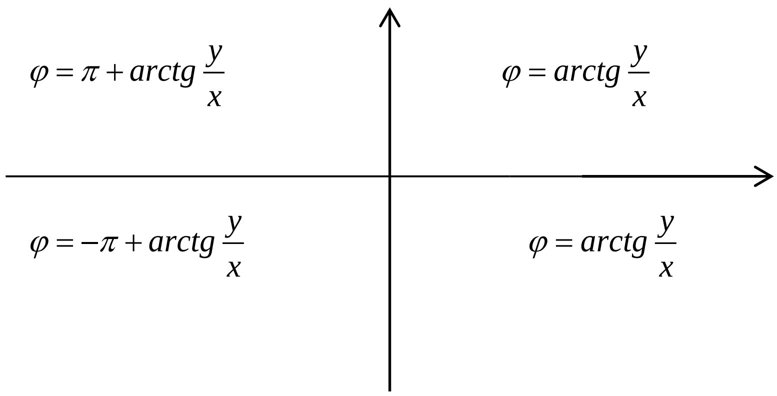
Множина комплексних чисел позначається C, $z \in C$ - елемент множини C.

Комплексні числа називаються (комплексно) спряженими, якщо в них дійсні частини дорівнюють одна одній , а уявні протилежні за знаком. Число, спряжене до числа $z = x + iy$ позначається $\bar{z} = x - iy$.

Комплексне число $z = x + iy$ можна зобразити точкою $M(x, y)$ або радіус-вектором цієї точки. Площину, точки якої зображають комплексні числа, називають комплексною площиною і позначають C.

3.1.2 ФОРМИ ЗАПИСУ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ

1. Алгебраїчна форма запису: $z = x + iy$.
2. Тригонометрична форма запису: $z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$, де $r = |z|$ називається модулем комплексного числа $z = x + iy$; $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$; число φ називається аргументом комплексного числа і позначається $\varphi = \arg z$; $-\pi \le \arg z \le \pi$. Всякий кут, який відрізняється від $\arg z$ на число, кратне 2π, позначається $Arg z = \arg z + 2\pi k,\quad k \in Z$. При розв'язуванні прикладів зручно користуватися наступною схемою:



3. Показникова форма числа: $z = re^{i\varphi}$.

Приклад. Записати комплексного числа $z = -1 + 2i$ у тригонометричній та показниковій формах.

Розв'язання. $x = \operatorname{Re} z = -1,\ y = \operatorname{Im} z = 2$. Тому $|z| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$,

Оскільки $\operatorname{Im} z > 0,\ \operatorname{Re} z < 0$, то $\varphi = \arg z = \pi + arctg(-2) = \pi - arctg\,2$.

Таким чином, $z = \sqrt{5}\left(\cos(\pi - arctg\,2) + \sin(\pi - arctg\,2)\right)$,

$$z = \sqrt{5}e^{i(\pi - arctg\,2)}$$

3.1.3 ДІЇ З КОМПЛЕКСНИМИ ЧИСЛАМИ

Дії в алгебраїчній формі

1) $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_1) + i(y_1 \pm y_2)$

Приклад, виконати дії $2z_1 - 3z_2$, якщо $z_1 = -2 + 7i$; $z_2 = 3 - 2i$.

Розв'язання. $2z_1 - 3z_2 = 2(-2 + 7i) - 3(3 - 2i) = (-4 - 9) + (14 + 6)i = -13 + 20i$.

2) $z = z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i(x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$,

3) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\dfrac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$

Приклад. знайти $z_1 \cdot z_2$ та $\dfrac{z_2}{z_1}$, якщо $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 1 + 2i$.

Розв'язання. Застосовуючи правило множення комплексних чисел, одержимо:

$$z_1 \cdot z_2 = (2 + i)\cdot(1 + 2i) = 2 + i + 4i + 2i^2 = 2 + 5i - 2 = 5i.$$

Застосовуючи правило ділення комплексних чисел, одержимо:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{1 + 2i}{2 + i} = \frac{(1 + 2i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{2 - i + 4i - 2i^2}{4 - i^2} = \frac{2 + 3i + 2}{5} = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i.$$

Дії в тригонометричній формі

1) $z_1z_2 = r_1r_2\left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right)$

2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right)$

Приклад. знайти $z_1 \cdot z_2$ та $\frac{z_2}{z_1}$, якщо $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, $z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

Розв'язання. Використовуючи правила множення та ділення комплексних чисел, що задані в тригонометричній формі, одержуємо:

$$z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)\right) = 6\left(\cos\frac{5}{12}\pi + i\sin\frac{5\pi}{12}\right);$$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{3}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{3}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right).$$

3) $z^n = |z|^n \left(\cos(nArgz) + i\sin(nArgz)\right)$;

4) $w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \qquad k = 0,1,2,...,n-1$

Дії в показниковій формі

1) $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$,

2) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$

Приклад. Знайти $z_3 \cdot z_4$ та $\frac{z_3}{z_4}$, якщо $z_3 = 4e^{\frac{i\pi}{3}}$; $z_4 = 2e^{\frac{i\pi}{6}}$

Розв'язання. Використовуючи правила множення та ділення комплексних чисел, що задані в показниковій формі, одержуємо:

$$z_3 \cdot z_4 = 4 \cdot 2e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)} = 8e^{i\frac{\pi}{2}}; \quad \frac{z_3}{z_4} = \frac{4}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)} = 2^{i\frac{\pi}{6}}.$$

3) $z^n = r^n e^{in\varphi}$;

4) $\sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i(\varphi + 2k\pi)}{n};} \qquad k = 0,1,...,n-1$

Приклад. Знайти: z^5 та $\sqrt[3]{z}$, якщо $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

Розв'язання. Комплексне число z задано в алгебраїчній формі. Для запису z в тригонометричній формі знайдемо модуль та аргумент z: $|z| = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{2}{4}} = 1$; $tg\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$.

Отже, $z = 1\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

За формулою Муавра знаходимо $z^5 = \left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$.

За формулою добування кореня n-го степеня з комплексного числа маємо

$$W_к=\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{1}\cdot\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi к}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi к}{3}\right),\qquad k=0;1;2$$

Таким чином, $W_0=\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}$; $\quad W_1=\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi}{3}=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}$;

$$W_2=\cos\frac{\frac{\pi}{4}+4\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+4\pi}{3}=\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}.$$

3.1.4 ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ КОМПЛЕКСНИХ АМПЛІТУД

Приклад. В електричному колі протікає гармонічний струм $i(t)=I_m\cdot\sin(\omega t+\varphi_i)=5\sqrt{2}\sin\left(10^3t+90^\circ\right)(A)$. На зажинах кола зафіксована напруга $u(t)=U_m\cdot\sin(\omega t+\varphi_n)=10\sqrt{2}\sin\left(10^3t+45^\circ\right)(B)$. Визначити опір кола.

Розв’язання. Гармонічні функції $i(t),u(t)$ запишемо комплексними числами у показниковій формі $i(t)\Leftrightarrow \dot{I}=5\cdot e^{j90^\circ}\,(A)$, $\quad u(t)\Leftrightarrow \dot{U}=10\cdot e^{j45^\circ}\,(B)$. В електротехніці миттєве значення струму позначається $i(t)$, тому прийнято вважати $j^2=-1$.

Застосовуючи закон Ома, маємо: опір кола

$$Z=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=\frac{10\cdot e^{j45^\circ}}{5\cdot e^{j90^\circ}}=2e^{-j45^\circ}\approx 1,414-1,414(Ом)$$

3.1.5 ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ’ЯЗУВАННЯ

1. Виконати вказані операції і подати комплексне число z в алгебраїчній формі.
   1) $z=(2i-i^2)^2+(1-3i)^3$,
   2) $z=(1+i)(1-3i)$,
   3) $z=\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}+\left(4-i^3\right)^2$
2. Представити задані комплексні числа у тригонометричній та показниковій формах.
   1)$5i$,
   2)$1+i\sqrt{3}$,
   3)$5-12i$,
   4)-8,
   5)$-2-2i$,
   6)$-5+2i$,
3. Обчислити заданий вираз.
   1) $(1+i)^{10}$,

2) $(1-i\sqrt{3})^6$,

3) $(\sqrt{3}+i)^{50}$

4. Знайти всі значення кореня $\sqrt[n]{z}$ та побудувати їх на комплексній площині.

1) $\sqrt[4]{1}$,

2) $\sqrt[3]{i}$,

3) $\sqrt[3]{-4+4i}$

ВІДПОВІДІ

1.1. $-29+22i$. 1.2. $4-2i$. 1.3. $\frac{31}{2}+\frac{16-\sqrt{3}}{2}i$. 2.1. $5\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=5e^{\frac{\pi}{2}i}$. 2.2. $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2e^{\frac{\pi}{3}i}$. 2.3. $13\left(\cos\left(-arctg2,4\right)+i\sin\left(-arctg2,4\right)\right)=13e^{\left(-arctg2,4\right)i}$. 2.4. $8\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)=8e^{\pi i}$. 2.5. $2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)=2\sqrt{2}e^{\left(-\frac{3\pi}{4}\right)i}$. 2.6. $\sqrt{29}\left(\cos\left(\pi-arctg0,4\right)+i\sin\left(\pi-arctg0,4\right)\right)=\sqrt{29}e^{\left(\pi-arctg0,4\right)i}$. 3.1. $32i$. 3.2. 2^6. 3.3. $2^{49}\left(1+i\sqrt{3}\right)$. 4.1. $\{1;i;-1;-i\}$. 4.2. $\left\{\frac{\sqrt{3}+i}{2};\frac{-\sqrt{3}+i}{2};i\right\}$. 4.3. $\left\{\sqrt[6]{32}e^{\frac{\pi}{4}i};\sqrt[6]{32}e^{\frac{11\pi}{12}i};\sqrt[6]{32}e^{-\frac{5\pi}{12}i}\right\}=\left\{\sqrt[6]{32}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right);\sqrt[6]{32}\left(-\cos15^\circ+i\sin15^\circ\right);\sqrt[6]{32}\left(\cos75^\circ-i\sin75^\circ\right)\right\}=$
$\left\{\sqrt[6]{32}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right);\sqrt[6]{32}\left(-0,97+i\cdot0,259\right);\sqrt[6]{32}\left(0,259-i\cdot0,97\right)\right\}$

3.2.ФУНКЦІЇ

3.2.1 ПОНЯТТЯ ФУНКЦІЇ. СПОСОБИ ЗАДАННЯ ФУНКЦІЇ

Якщо кожному елементу x множини X $(x\in X)$ за певним правилом поставлено у відповідність єдиний елемент y множини Y $(y\in Y)$, то кажуть, що задана функція (відображення) f множини X в множину Y. При цьому елемент y є функція від елемента x. Позначення: $f:X\to Y:x\to y=f(x)$

Елемент $x\in X$ називається аргументом функції f, елемент $y\in Y$ називається значенням функції f.

Областю визначення функції називається множина X. Позначається $D(y)$ Областю (множиною) значень функції називається множина всіх елементів $y\in Y$, таких, що $y=f(x)$ для кожного $x\in X$. Позначається $E(y)$

Основні способи завдання функції:

1) аналітичний, коли відповідність між аргументом і функцією задається формулою (аналітичним виразом).

2) графічний, коли відповідність між аргументом і функцією задається множиною точок (x, y) площини, прямокутні координати яких задовольняють рівняння $y = f(x)$.

3) табличний, коли відповідність між аргументом і функцією задається таблицею.

x	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$y = f(x)$	$y_1 = f(x_1)$	$y_2 = f(x_2)$	$\ldots$	$y_n = f(x_n)$

Крім розглянутих існують ще й інші способи задання функції, *Приклад.* мовний, коли відповідність між аргументом і функцією задається словесним описом.

3.2.2 ОСНОВНІ ЕЛЕМЕНТАРНІ ФУНКЦІЇ

1. Степенева $y = x^{\alpha}, \alpha \in R$.
2. Показникова $y = a^x, a > 0, a \neq 1$.
3. Логарифмічна $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$.
4. Тригонометричні: $y = \sin x; y = \cos x; y = tgx; y = ctgx$.
5. Обернені тригонометричні: $y = \arcsin x; y = \arccos x; y = arctgx; y = arcctgx$
6. Гіперболічні: $shx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$,

$$thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad cthx = \frac{chx}{shx} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

За допомогою перетворень графіків основних елементарних функцій можна дістати графіки багатьох інших функцій. Якщо графік $y = f(x)$ відомий, то

1. $Гy = f(x) \pm b, b > 0$, дістанемо з $Гf(x)$ паралельним перенесенням вздовж осі Oy вверх (вниз) на b од.

2. $Гy = f(x \pm a), a > 0$, дістанемо з $Гf(x)$ паралельним перенесенням вздовж осі Ox вліво (вправо) на a од.

3. $Гy = cf(a)$ - збільшенням всіх ординат в l разів ($l > 0$) або зменшенням в $\frac{1}{l}$ разів ($0 < l < 1$)

4. $Гy = f(kx)$- збільшенням всіх абсцис в $\frac{1}{k}$разів $(0 < k < 1)$ зменшенням в k разів $(1 < k < +\infty)$

5. $Гy = -f(x)$- симетрія відносно осі Ox.

6. $Гy = f(-x)$ - симетрія відносно осі Oy.

7. $Гy = |f(x)|$- всі точки графіка, що лежать нижче осі Ox, відображаються симетрично Ox

8. $Гy = f(|x|)$ - всі точки графіка, що лежать праворуч від осі Oy, залишаються і симетрично відображаються вліво, тобто графік симетричний відносно осі Oy.

3.2.3 ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЙ

1) Парність і непарність.

Функція $f(x)$ називається парною, якщо для будь – якого х з області визначення $D(y)$ вона задовольняє умову $f(-x) = f(x)$

Функція називається непарною, якщо для будь – якого х з області визначення $D(y)$ вона задовольняє умову $f(-x) = -f(x)$

Графік парної функції симетричний відносно осі Oy, непарної – відносно початку координат.

Приклад. 1) $y = x^2 + \cos x$ - парна, бо $y(-x) = (-x)^2 + \cos(-x) = x^2 + \cos x$;

2) $y = x - \sin x \cos x$ - непарна, бо

$y(-x) = (-x) - \sin(-x)\cos(-x) = -x + \sin x \cos x = -(x - \sin x \cos x) = -y(-x)$

2) Періодичність.

Функція $f(x)$ називається періодичною, якщо існує таке число T, що виконується рівність $f(x+T) = f(x)$. Число T називається періодом функції.

Якщо T – період функції, то періодами є також числа Tk, $k = \pm1; \pm2; ...$ Найменший з додатних періодів, якщо він існує, називається основним.

Приклад.

1) $y = \sin x; y = \cos x; T = 2\pi$ - основний

2) $y = tgx; y = ctgx; T = \pi$ - основний

3) $y = c$ - (c – стала) T – довільне ненульове число, не існує основного періоду.

4) якщо функція $f(x)$ періодична з періодом T_o, то $f(kx+b)$ періодична з періодом $T = \frac{T_0}{k}$

3) Обмеженість.

Функція $f(x)$, визначена на множині A називається обмеженою на цій множині, якщо існує таке число $M > 0$, що для всіх $x \in A$ виконується нерівність $|f(x)| \le M$.

Значення обмеженої функції не виходять за межі відрізка $[-M; M]$, тому її графік лежить між прямими $y = -M$ та $y = M$.

Приклад. $y = \sin x; y = \cos x$ обмежені на R.

4) Монотонність.

Якщо для двох довільних різних значень x_1, x_2 з області визначення функції $y = f(x)$ з нерівності $x_1 < x_2$ випливає, що

1) $f(x_1) < f(x_2)$, то функція називається зростаючою.

2) $f(x_1) \le f(x_2)$, то функція називається неспадною.

3) $f(x_1) > f(x_2)$, то функція називається спадною.

4) $f(x_1) \geq f(x_2)$, то функція називається незростаючою.

Функції зростаючі, незростаючі, спадні і неспадні називаються монотонними, а функції зростаючі і спадні називаються строго монотонними.

Якщо функція не є монотонною в усій області визначення, то вона може бути монотонною на деякій кількості проміжків, які не перетинаються, а в об'єднані співпадають з областю визначення. Такі проміжки називаються проміжками монотонності функції.

Приклад. функція $y = x^2$ не монотонна на R, але має два проміжки монотонності: на $(-\infty;0]$ вона спадає, на $[0;+\infty)$ зростає.

Функції $y = \sin x; y = \cos x$ мають нескінченну кількість проміжків монотонності.

3.2.4 АНАЛІТИЧНИЙ СПОСІБ ЗАДАННЯ ФУНКЦІЙ

1) Функції, задані неявно.

Якщо функція задана рівнянням $y = f(x)$, розв'язаним відносно змінної y, то кажуть, що функція задана явно (є явною).

Якщо функція задана рівнянням $f(x,y) = 0$, не розв'язаним відносно змінної y, то кажуть, що функція задана неявно (є неявною).

Приклад. $y = \sqrt{x} + 3$ - явна функція ; $2x + 3y - 1 = 0$ - неявна функція

2) Обернені функції.

Функція, що ставить кожному елементу y з множини значень заданої функції f у відповідність єдиний елемент x з області визначення функції f, для якого $y = f(x)$, називається оберненою для функції f.

Позначення: f^{-1}. За означенням $f^{-1}(y) = x$

Функція має обернену тоді і тільки тоді, коли вона задає взаємно однозначну відповідність між множинами D і E. Таку властивість мають строго монотонні функції.

Приклад.

1. $y = x^2$ на $(-\infty;+\infty)$ не має оберненої; а на $(0;+\infty)$ $y = \sqrt{x}$;
2. $y = a^x, x \in R, y \in (0;+\infty)$ має обернену $y = \log_a x, x \in (0;+\infty), y \in R$;
3. $y = \sin x, x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ має обернену $y = \arcsin x, x \in [-1;1]$, а

   $y = \sin x, x \in R$ не має оберненої.

3) Функції, задані параметрично.

Задання функції за допомогою допоміжної змінної, називається параметричним, тобто $\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t). \end{cases}$

Приклад. $x = R\cos t; y = R\sin t, t \in [0;\pi]$ – ця функція визначає півколо $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ у верхній півплощині.

3.2.5 ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0. Число A називається границею функції в точці x_0, якщо для довільного числа $\varepsilon>0$ існує число $\delta=\delta(E)>0$ таке, що для всіх x з δ- околу точка x_0, які задовольняють нерівність $0<|x-x_0|<\delta$, виконується нерівність $|f(x)-A|<E$. Скорочено:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon): 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<E$$

Число A називається границею функції $f(x)$ зліва (або лівою границею) в точці x_0, якщо для довільного числа $\varepsilon>0$ існує число $\delta=\delta(E)$>0 таке, що при $x\in(x_0-\delta;x_0)$ виконується нерівність $|f(x)-A|<E$. Скорочено:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)=\lim_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(E)>0:$$

$$\forall x\in(x_0-\delta;x_0)\ |f(x)-A|<\varepsilon$$

Число B називається границею функції $f(x)$ справа (або правою границею) в точці x_0, якщо для довільного числа $\varepsilon>0$ існує число $\delta=\delta(E)>0$, таке, що при $x\in(x_0;x_0+\delta)$ виконується нерівність $|f(x)-B|<\varepsilon$.

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}=\lim_{x\to x_0+0}=f(x_0+0)=B \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(E)>0: \forall x\in(x_0;x_0+\delta)\quad |f(x)-B|<E$$

Для того щоб існувала границя функції $f(x)$ в точці x_0 необхідно і достатньо, щоб в цій же точці існували і дорівнювали одна одній односторонні границі.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \left(f(x_0+0)=f(x_0-0)=A\right)$$

3.2.6 НЕСКІНЧЕННО ВЕЛИКІ ТА НЕСКІНЧЕННО МАЛІ ВЕЛИЧИНИ

Змінна, що прямує до нескінченності, називається нескінченно великою величиною (НВВ).

Властивості нескінченно великих величин:

1. Сума НВВ і величини обмеженої є НВВ: $C+\infty=\infty$
2. Сума двох НВВ одного знака є НВВ: $\infty+\infty=\infty$
3. Сума двох НВВ різних знаків є невизначеність: $\infty-\infty$
4. Добуток двох НВВ є НВВ: $\infty\cdot\infty=\infty$
5. Частка двох НВВ є невизначеність: $\dfrac{\infty}{\infty}$

Змінна, границя якої дорівнює 0, називається нескінченно малою величиною (НМВ)

Властивості нескінченно малих величин:

1. Сума скінченної кількості НМВ є НМВ.
2. Добуток обмеженої функції на НМВ є НМВ.
3. Частка від ділення НМВ на функцію, яка має відмінну від 0 границю, є НМВ.

Якщо функція $f(x)$ є НМВ при $x \to x_0$ і $f(x) \neq 0$ то функція $\frac{1}{f(x)}$ є НМВ при $x \to x_0$. Справедливе і обернене твердження: якщо функція $\varphi(x)$ - НВВ при $x \to x_0$ то $\frac{1}{\varphi(x)}$ є НМВ при $x \to x_0$.

Функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ нескінченно малі при $x \to x_0$, називаються еквівалентними НМ, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 1$

Еквівалентність НМ функцій позначається так: $f_1(x) \sim f_2(x)$

На практиці при знаходженні границі відношення двох заданих НМ функцій одну чи обидві функції заміняють еквівалентними НМ. У цьому допоможе таблиця еквівалентних НМВ:

$\sin x \sim x,\ x \to 0$

$tgx \sim x,\ x \to 0$

$\arcsin x \sim x,\ x \to 0$

$arctgx \sim x,\ x \to 0$

$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2},\ x \to 0$

$e^x - 1 \sim x,\ x \to 0$

$a^x - 1 \sim x \ln a,\ x \to 0$

$\log_a(1+x) \sim x \log_a e,\ x \to 0$

$\ln(1+x) \sim x,\ x \to 0$

$(1+x)^k \sim kx,\ x \to 0, k > 0$

3.2.7 ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ПРО ГРАНИЦІ

1) Якщо кожна з функцій $f(x)$ та $\phi(x)$ має скінченну границю в точці x_0, то в цій точці існують також границі функцій $f(x) \pm \phi(x); f(x)\phi(x); \frac{f(x)}{\phi(x)}$ (за умови, що $\lim\limits_{x \to x_0} \phi(x) \neq 0$) і справедливі формули:

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) \pm \phi(x) \right) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} \phi(x);$$

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x)\phi(x) \right) = \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} \phi(x);$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\phi(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} \phi(x)}$$

2) Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ існує, то виконуються рівності:

$$\lim_{x \to x_0} \left(cf(x) \right) = c \lim_{x \to x_0} f(x), c \in R;$$

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) \right)^n = \left(\lim_{x \to x_0} f(x) \right)^n;$$

$$\lim_{x \to x_0} x^n = {x_0}^n, n \in N$$

Приклад. Обчислити границі

а) $\lim\limits_{x\to 2}(5x^2-13x+5)=5\lim\limits_{x\to 2}x^2-13\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}5=5\cdot 4-13\cdot 2+5=-1$;

б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x+3)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-2}{x+3}=\dfrac{1}{6}$

3.2.8 ВИЗНАЧНІ ГРАНИЦІ

1) Перша визначна границя: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

Приклад. Знайти границі

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 2x}{2x}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}=2$;

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg 5x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x\cdot 5}{\cos 5x\cdot 5x}=5\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos 5x}=5$

2) Друга визначна границя: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$, $\lim\limits_{y\to\infty}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e$

Приклад. Знайти границю

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^{\frac{x}{7}\cdot 7}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{7}\cdot 7}=e^7$$

3.2.9 НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

Функція $f(x)$ називається неперервною в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови:

1) функція $f(x)$ визначена в точці x_0 і в деякому околі цієї точки.

2) Існують скінченні односторонні границі функції $f(x_0-0)$ і $f(x_0+0)$.

3) Односторонні границі рівні між собою і дорівнюють значенню функції в точці x_0, тобто $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$

Якщо хоча б одна з цих умов не виконується, то функція називається розривною в точці x_0, а сама точка x_0 називається точкою розриву функції.

Існує два види розривів:

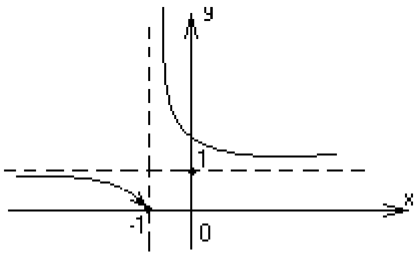
1) Якщо не всі числа $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$, $f(x_0)$ рівні між собою, то розрив в т. x_0 – називається розривом 1-го роду, а точка x_0 – точкою розриву 1-го роду. Величина $|f(x_0-0)-f(x_0+0)|$ називається стрибком функції. Якщо $f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$, то розрив називається усувним.

2) Якщо хоча б одна з односторонніх границь не існує або дорівнює ∞, то розрив називається розривом 2-го роду, а точка x_0 – точкою розриву 2-го роду.

Приклад. дослідити на неперервність функцію $f(x)=2^{\frac{1}{x+1}}$.

Розв'язання. Щоб з'ясувати вид розриву, знайдемо односторонні границі.

$$\lim_{x\to -1-0} f(x) = \lim_{x\to -1-0} 2^{\frac{1}{x+1}} = \left\{\begin{array}{l} x\to -1-0 \Rightarrow \\ x=1\to -0 \Rightarrow \\ \dfrac{1}{x+1}\to -\infty \Rightarrow \\ 2^{\frac{1}{x+1}}\to 0 \end{array}\right\} = 0$$



$$\lim_{x\to -1+0} f(x) = \lim_{x\to -1+0} 2^{\frac{1}{x+1}} = \{....\} = +\infty$$

Отже, $x=-1$ є точкою розриву 2-го порядку.

Функція називається неперервною на інтервалі (a,b), якщо вона неперервна в кожній точці цього інтервалу.

Функція називається неперервною на відрізку $[a,b]$, якщо вона неперервна на інтервалі (a,b) і, крім того, неперервна справа в точці a і зліва в точці b.

3.2.10 ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1. Знайти область визначення $D(y)$ функції:

1) $y=\sqrt[4]{|x-3|-4}$, 2) $y=\lg\left(7-2|x|\right)$

2. Знайти область значення $E(y)$ функції:

1) $y=-2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)+1$, 2) $y=\arccos(3x+1)-\dfrac{\pi}{2}$

3. Вибрати непарну функцію:

1) $y=x^2\cos x$; 2) $y=\sin x\cdot tg5x$; 3) $y=x^3-12$; 4) $y=x^2\sin x$

4. Графік якої функції буде симетричними відносно осі y:

1) $y=|x-5|$; 2) $y=3e^{|x|}$; 3) $y=\log_2(x+2)$; 4) $y=ctgx$

5. Знайти період функції 1) $y=-2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)+1$, 2) $y=tg\dfrac{x}{3}-2$

6. Обчислити границю функції на нескінченності:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x^2-2x}{5x^3-3x^2-x-4}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5-4x^2+x}{2x^5+2x-3}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-4x+2}{x^3-4x+1}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1}{x^2-1}$.

7. Обчислити границю функції у точці та на нескінченності:

1) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(x-5)^2}{x^2-3x-10}$; 2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-5x+1}{x^3-2x^2+1}$; 4) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x^2+7}-\sqrt{7-3x}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x^2-9}}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x-\sqrt{4x^2+3x})$.

8. Обчислити дані границі від тригонометричних функцій:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{\sin 8x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x^3}{arctg^3 20x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 4x-1}{10x\sin x}$

.

9. Обчислити границю функції за допомогою другої визначної границі:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{3x+1}\right)^x$$

10. Дослідити функції на неперервність, визначивши характер розриву:

1) $y=\begin{cases}-2x, \text{ якщо } x<-1,\\ x^2+1, \text{ якщо } -1\le x<2,\\ x-1, \text{ якщо } x\ge 2\end{cases}$; 2) $y=\frac{x^2-1}{x-1}$; 3) $f(x)=\frac{1}{x(x+2)}$.

ВІДПОВІДІ

1.1. $x\in(-\infty;-1]\cup[7;+\infty)$. 1.2. $x\in\left(-\frac{7}{2};\frac{7}{2}\right)$. 2.1. $y\in[-1;3]$. 2.2. $y\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. 3. $y=x^2\sin x$. 4. $y=3e^{|x|}$. 5.1. $T=\pi$. 5.2. $T=3\pi$. 6.1. $\frac{1}{5}$. 6.2. 3. 6.3. 0. 6.4. ∞. 7.1. 0. 7.2. -1. 7.3. ∞. 7.4. 0. 7.5. $-\infty$. 8.1. 2. 8.2. $\frac{1}{8}$. 8.3. $\frac{1}{1600}$. 8.4. $-0,4$. 9. $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$.
10.1. $x=2-$розрив першого роду «стрибок». 10.2. $x=1-$розрив першого роду «усувний». 10.3. $x_1=-2, x_2=0-$ розрив другого роду.

3.3 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

3.3.1.ПОХІДНА ФУНКЦІЇ

Похідною функції $y=f(x)$ в точці x називається границя відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx, коли Δx прямує до нуля. Якщо ця границя існує, то вона позначається через $f'(x)$ (або y', y'_x, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}$).

Таким чином, за визначенням: $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

Операцію знаходження похідної функції $y=f(x)$ називають диференціюванням цієї функції. Функцію $f(x)$, яка має похідну в точці x, називають диференційованою в точці x. Функцію $f(x)$, яка має похідну в кожній точці деякого проміжку, називають диференційованою в цьому проміжку.

1. Механічний зміст похідної: швидкість в даний момент часу – це похідна від пройденого шляху $s(t)$ в момент t: $v = s'(t)$.

Взагалі, якщо функція $y = f(x)$ описує деякий фізичний процес, то похідна $y' = f'(x)$ характеризує швидкість зміни цього процесу. В цьому полягає фізичний зміст похідної.

2. Геометричний зміст похідної: кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці з абсцисою x – це похідна функції $f(x)$.

Якщо функція $y = f(x)$ диференційована в деякій точці x_0, то вона в цій точці неперервна.

3.3.2 ФОРМУЛИ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

. $c' = 0$

2. $x' = 1$

3. $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha - 1}, \alpha \in R$; $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

4. $\left(a^{x}\right)' = a^{x}\ln a\cdot, a > 0, a \neq 1$; 5. $\left(e^{x}\right)' = e^{x}$

6. $\left(\log_{a} x\right)' = \frac{1}{x\ln a}$ 7. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

8. $(\sin x)' = \cos x$ 9. $(\cos x)' = -\sin x$

10. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ 11. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

12. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 13. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

14. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$ 15. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

16. $(shx)' = chx$ 17. $(chx)' = shx$ 18. $(thx)' = \frac{1}{ch^2 x}$ 19. $(cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x}$

3.3.3 ПРАВИЛА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

1) Похідна сталої величини дорівнює нулю: $c' = 0$

2) Якщо функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ диференційовані в точці x, то сума, різниця, добуток і частка цих функцій також диференційовані в цій же точці, причому

$(u \pm v) = u' \pm v'$;

$(uv)' = u'v + uv'$;

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ (за умови $v \neq 0$);

$(Cu)' = Cu'$

3) Похідна складеної функції: якщо функція $u=\phi(x)$ має похідну u'_x в точці x, а функція $y=f(u)$ має похідну y'_u у відповідній точці u, то складено функція $y=f(\phi(u))$ має похідну y'_x в точці x, причому $y'_x=y'_u u'_x$

Приклад. Знайти похідну $y=\sin\left(3x^2+2\right)$.

Розв'язання. $y'=\left(\sin(3x^2+2)\right)'=(\sin u)'u'_x=\cos u\cdot u'_x=\cos(3x^2+2)6x$.

4) Похідна оберненої функції: якщо функція $y=f(x)$ строго монотонна в інтервалі (a,b) і має відмінну від нуля похідну в довільній точці x з (a,b), то обернена функція $x=\phi(y)$ має у відповідній точці y похідну, причому

$$\phi'(y)=\frac{1}{f'(x)}\quad \left(f'(x)\neq 0\right)$$

Приклад. Знайти похідну $y=\arcsin x$.

Розв'язання. Функція $y=\arcsin x$ обернена до $x=\sin y$, яка на $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ зростає і $x'_y=\cos y>0$,отже, $\left(\arcsin x\right)'=y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

5) Похідна функції, заданої неявно: нехай y як функція від x, неявно задана рівнянням $f(x,y)=0$. Щоб знайти похідну y'_x, потрібно продиференціювати по x обидві частини цього рівняння, вважаючи x незалежною змінною, а y функцією від x, і розв'язати одержане рівняння відносно похідної y'. При цьому похідна має бути виражена через незалежну змінну x і саму функцію y.

Приклад. Продиференціювати функцію: $2^y-2xy+x^2-1=0$.

Розв'язання. Диференціюємо обидві частини по x, пам'ятаючи при цьому, що y –функція x:

$$\left(2^y\right)'-\left(2xy\right)'+\left(x^2\right)'-1'=0;$$

$$2^y\ln 2y'-2(y+xy')+2x=0;$$

$$y'\left(2^y\ln 2-2x\right)-2y+2x=0;$$

$$y'\left(2^y\ln 2-2x\right)=2y-2x;$$

$$y'=\frac{2y-2x}{2^y\ln 2-2x}=\frac{2(y-x)}{2^y\ln 2-2x}.$$

6) Похідна функції, заданої параметрично: нехай y, як функція x, задана параметричними рівняннями $\begin{cases}x=\phi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$, $t\in\left(\alpha,\beta\right)$, тоді $y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}$

Приклад. Продиференціювати функцію: $\begin{cases}x=R\cos t\\ y=R\sin t\end{cases}$

Розв'язання. $y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{R\cos t}{-R\sin t}=-ctgt$

7) Похідна показниково-степеневої функції (логарифмічне диференціювання): нехай задана функція вигляду u^v, де u, v–задані функції, диференційовані по x, тоді

$$\left(u^v\right)' = u^v\left(\ln(u^v)\right)' = u^v\left(v\ln u\right)' = u^v\left(v'\ln u + \frac{vu'}{u}\right)$$

Приклад. Продиференціювати функцію: $y = x^{\sin 2x}$.

Розв'язання.

$$y' = \left(x^{\sin 2x}\right)' = x^{\sin 2x}\left(\sin 2x \ln x\right)' =$$

$$= x^{\sin 2x}\left(2\cos x \ln x + \frac{\sin 2x}{x}\right) = x^{\sin 2x - 1}\left(2x\cos x\ln x + \sin 2x\right)$$

3.3.4 ПОХІДНІ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

1) Нехай функція $y = f(x)$ диференційована в точці x. Тоді вона має в цій точці похідну $f'(x)$. Якщо ця похідна в свою чергу диференційована в точці x, то вона має в цій точці похідну, яку називають похідною другого порядку функції $f(x)$ і позначають символом $f''(x)$.

Інші позначення: $y'', \dfrac{d^2y}{dx^2}, \dfrac{d^2f}{dx^2}, \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$

Механічний зміст другої похідної такий: $s'' = f''(t) = v'' = a$ дорівнює прискоренню точки в даний момент часу.

Аналогічно, визначається похідна n-го порядку: $f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}\right)'$

Приклад. Знайти похідну 4-го порядку функції: $y = 3x^5 + 7x^2 - 2x + 12$

Розв'язання.

$y' = 15x^4 + 14x - 2$; $y'' = 60x^3 + 14$; $y''' = 180x^2$; $y^{(4)} = 360x$

2) Похідні вищих порядків неявно заданої функції: нехай функція $y = f(x)$ неявно задана рівнянням $f(x, y) = 0$. Продиференціюємо це рівняння по x: $f'_x(x, y) = 0$ і знайдемо першу похідну y', розв'язуючи одержане рівняння відносно y': $y' = g(x, y)$.

Продиференціюємо рівняння $y' = g(x, y)$ по x: $y''_x = g'_x(x, y)$ і підставимо в одержане співвідношення вираз $y' = g(x, y)$. Отримаємо другу похідну: $y'' = h(x, y)$.

Продовжуючи таким чином, можна знайти похідну будь-якого порядку. Всі похідні виражаються через незалежну змінну x і саму функцію y.

Приклад. Знайти y'' з рівняння $x^3 + y^2 = 1$

Розв'язання. $x^3 + y^2 - 1 = 0$; $3x^2 + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\dfrac{3x^2}{2y}$;

$$y'' = -\frac{3}{2}\cdot\frac{2xy - x^2y'}{y^2} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{2xy - x^2\left(-\dfrac{3x^2}{2y}\right)}{y^2} =$$

$$= -\frac{3}{2}\cdot\frac{4xy^2 + 3x^4}{2y^3} = -\frac{3}{4}\cdot\frac{x(y^2 + 3(y^2 + x^3))}{y^3} = -\frac{3}{4}\cdot\frac{x(y^2+3)}{y^3}$$

3) Похідні вищих порядків параметрично заданої функції: нехай функція $y = f(x)$ задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, $t \in (\alpha, \beta)$, тоді $y''_{xx} = \dfrac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}$

Аналогічно можна знайти похідну будь-якого порядку від функції, заданої параметрично.

Приклад. Знайти y''_{xx} функції $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t \\ y = \sqrt{2}\sin t \end{cases}$, $t \in (0; 2\pi)$

Розв'язання.

$$\begin{cases} x' = -2\sqrt{2}\sin t; \\ y' = \sqrt{2}\cos t \end{cases}$$

Отже, $y'_x = -\dfrac{\sqrt{2}\cos t}{2\sqrt{2}\sin t} = -\dfrac{1}{2}ctgt$.

$$\left(y'_x\right)'_t = \frac{1}{2\sin^2 x},\ \text{тоді}\ y''_{xx} = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{\sin^2 t}}{-2\sqrt{2}\sin t} == -\frac{1}{4\sqrt{2}\sin^3 t} = -\frac{\sqrt{2}}{8\sin^3 t}.$$

3.3.5ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ

Диференціалом функції $y = f(x)$ в точці x називається головна частина приросту функції в цій точці, лінійна відносно приросту аргументу. Позначається dy . За означенням $dy = f'(x)\Delta x$

Оскільки $dx = \Delta x$, то $dy = f'(x)dx$

Властивості диференціала:

$d(C) = 0$

$d(Cu) = Cdu$

$d(u \pm v) = du \pm dv$

$duv = vdu + udv$

$d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$

Форма диференціалу функції не залежить від того, чи є аргумент функції незалежною змінною або є диференційованою функцією деякої іншої незалежної змінної.

Застосування диференціала до наближених обчислень:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$$

Приклад. Обчислити наближено $\sqrt[3]{28}$.

Розв'язання. $\sqrt[3]{x+\Delta x}=\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\cdot\Delta x$

Покладемо $\sqrt[3]{28}=\sqrt[3]{27+1}=\sqrt[3]{27\left(1+\dfrac{1}{27}\right)}=3^3\sqrt{1+\dfrac{1}{27}}$

$x=1;\quad \Delta x=\dfrac{1}{27}$

$\sqrt[3]{28}=3\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{27}}\approx3\left(\sqrt[3]{1}+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{12}}\cdot\dfrac{1}{27}\right)=3\left(1+\dfrac{1}{81}\right)=3\dfrac{82}{81}\approx3\cdot1,012=3,036$

Відповідь: $\sqrt[3]{28}\approx3,036$.

Інше розв'язання: $\sqrt[3]{28}=\sqrt[3]{27+1}=\sqrt[3]{27}+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{27^2}}\cdot1=3+\dfrac{1}{27}\approx3+0,37=3,037$

3.3.6 ДИФЕРЕНЦІАЛИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

1) Диференціалом другого порядку називається диференціал від диференціала першого порядку:

$d^2y=d(dy)$

Отже, $d^2y=f''(x)dx^2$

2) Так само можна виразити диференціал будь-якого порядку. Так диференціалом n-го порядку називається диференціал від диференціала ($n-1$)-го порядку:

$d^ny=d(d^{n-1}y)=f^{(n)}(x)dx^n$

Приклад. Знайти d^3y, якщо $y=\sin2x$.

Розв'язання. $dy=2\cos2xdx$; $d^2y=-4\sin2xdx^2$; $d^3y=-8\cos2xdx^3$.

3.3.7 ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ НА МОНОТОННІСТЬ

Точки, в яких похідна функції дорівнює нулю або не існує, називаються критичними.

Якщо функція $f(x)$ диференційована на інтервалі (a,b) і $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$ всюди, крім, можливо скінченної кількості точок, в яких $f'(x)=0$ на (a,b), то функція $f(x)$ зростає (спадає) на інтервалі (a,b).

Схема знаходження інтервалів монотонності функції:

1. Знаходимо область визначеності функції $D(y)$
2. Знаходимо похідну функції $f'(x)$
3. Знаходимо критичні точки з рівняння $f'(x)=0$ та з умови, що $f'(x)$ не існує.
4. Розділяємо область визначення функції критичними точками на інтервалі і до кожного застосовуємо достатні умови монотонності

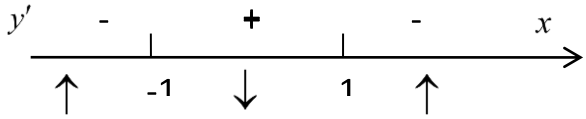
Приклад. Дослідити на монотонність функцію $y=x^3-3x$.

Дослідження проведемо за схемою.

1. $D(y)=R$;
2. $y'=3x^2-3$;

3. $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

4.



Відповідь: $f(x)$ зростає при $x \in [-1;1]$, $f(x)$ спадає при $x \in (-\infty;-1] \cup [1;+\infty)$.

3.3.8 ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ НА ЕКСТРЕМУМИ

Функція $y = f(x)$, визначена в інтервалі (a,b), має в точці $x_0 \in (a,b)$ (локальний) максимум MAX ((локальний) мінімум MIN), якщо існує δ-окіл точки x_0 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \in (a,b)$ такий, що

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta);\ f(x) < f(x_0);\ \left(f(x) > f(x_0)\right)$$

Максимуми і мінімуми функції називаються її (локальними) екстремумами. Точка x_0, де функція набуває максимуму MAX (мінімуму MIN), називається точкою (локального) максимуму MAX ((локального) мінімуму MIN) або точкою (локального) екстремуму.

Точки, в яких похідна функції дорівнює нулю або не існує, називаються критичними.

Точки екстремуму містяться серед критичних точок, у зв'язку з цим критичні точки називаються також точками можливого екстремуму. Виділити точки екстремуму з критичних можна за допомогою наступних теорем:

1) Перша достатня умова екстремуму: нехай функція $y = f(x)$ диференційована в деякому околі точки x_0 крім, можливо, самої точки x_0, і x_0 є критичною точкою функції $y = f(x)$. Тоді

1. Якщо для будь-якого $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ похідна $f'(x) > 0$ і для будь-якого $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, похідна $f'(x) < 0$, то x_0 є точкою максимуму.
2. Якщо для будь-якого $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ $f'(x) < 0$ і для будь-якого $x \in$ $(x_0, x_0 + \delta)$ $f'(x) > 0$, то x_0 є точкою мінімуму.
3. Якщо в інтервалах $(x_0 - \delta, x_0)$ і $(x_0, x_0 + \delta)$ похідна $f'(x)$ зберігає свій знак, то x_0 не є точкою екстремуму.

Іншими словами, якщо при переході зліва направо через критичну точку x_0 похідна функції $f(x)$ змінює свій знак з + на - ,то x_0 – точка максимуму, якщо з – на + , то x_0 – точка мінімуму, а якщо знак не змінюється, то x_0 не є точкою екстремуму.

Схема дослідження функції на екстремум:

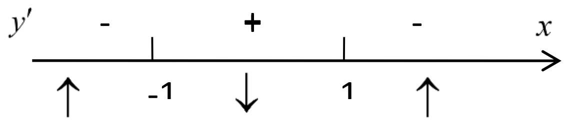
1. Знаходимо область визначення $D(y)$;
2. Знаходимо похідну $f'(x)$;
3. Знаходимо критичні точки функції;
4. Знаходимо всі інтервали, на які критичні точки розбивають область визначення $D(y)$ і з'ясовуємо знак похідної на кожному з цих інтервалів.

5. Застосовуємо до кожної критичної точки першу достатню умову екстремуму.

Приклад. дослідити на екстремум функцію $y = x^3 - 3x$.

Дослідження проведемо за схемою.

1. $D(y) = R$;
2. $y' = 3x^2 - 3$;
3. $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$
4.



5. $x = -1$ – точка максимуму. Значення функції в цій точці $y_{\max} = 2$.

$x = 1$ – точка мінімуму. Значення функції в цій точці $y_{\min} = -2$.

Відповідь: $y_{\max}(-1) = 2$; $y_{\min}(1) = -2$

2) Друга достатня умова локального екстремуму: нехай функція $y = f(x)$ в точці x_0 і в деякому її околі має неперервні першу і другу похідні, причому $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) \neq 0$. Тоді, якщо $f''(x_0) < 0$, то x_0 є точкою максимуму, якщо $f''(x_0) > 0$ то x_0 є точкою мінімуму.

Приклад. дослідити на екстремум функцію $y = x^3 - 3x$ користуючись другою достатньою умовою екстремуму.

Розв'язання.

1. $D(y) = R$;
2. $y' = 3x^2 - 3$;
3. $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$;

4) $y'' = 6x$: в точці $x = -1$ $y'' = -6 < 0 \Rightarrow x_0 = -1$ – точка максимуму.

в точці $x = 1$ $y'' = 6 > 0 \Rightarrow x_0 = 1$ – точка мінімуму.

3.3.9 НАЙБІЛЬШЕ ТА НАЙМЕНШЕ ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ

Щоб знайти найбільше і найменше значення функції, неперервної на відрізку, треба:

1) знайти критичні точки функції, які лежать в середині даного відрізку.

2) обчислити значення функції у критичних точках і на кінцях відрізку, і з усіх отриманих значень вибрати найбільше і найменше

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна в інтервалі (a,b), то вона може і не мати найбільшого і найменшого значення. Щоб з'ясувати наявність найбільшого і найменшого значень, треба

1) з'ясувати поведінку функції у кінцях інтервалу, тобто обчислити односторонні границі $\lim\limits_{x\to a+0} f(x),\quad \lim\limits_{x\to b-0} f(x)$;

2) обчислити значення функції у критичних точках, які належать інтервалу;

3) з отриманих чисел вибрати найбільше або найменше.

Приклад. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = x^3 - 3x$ на відрізку $[-2,3]$

Розв'язання

1. $D(y) = R$;
2. $y' = 3x^2 - 3$;
3. $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$;
4. обчислимо значення функції у критичних точках і на кінцях відрізку

$y(-1) = -1 + 3 = 2$; $y(1) = 1 - 3 = -2$;

$y(-2) = -8 + 3 = -2$; $y(3) = 27 - 9 = 18$

Відповідь: $\max\limits_{[-2;3]} y = y(3) = 18; \min\limits_{[-2;3]} y = y(-2) = y(1) = -2$

3.3.9 НАПРЯМ ОПУКЛОСТІ ТА ТОЧКИ ПЕРГИНУ ГРАФІКА ФУНКЦІЇ

Графік функції $y = f(x)$, диференційованої в інтервалі (a,b) називається опуклим (угнутим) в цьому інтервалі, якщо в цьому інтервалі він розташований нижче (вище) довільної своєї дотичної.

Достатні умови опуклості (угнутості) графіка функції: нехай функція $y = f(x)$ двічі диференційована в інтервалі (a,b). Тоді:

1. якщо $x \in (a,b)$ $f''(x) < 0$, то графік функції $y = f(x)$ опуклій в (a,b);
2. якщо $x \in (a,b)$ $f''(x) > 0$ то графік функції $y = f(x)$ угнутий в (a,b).

Нехай функція $y = f(x)$ двічі диференційована в околі $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0, причому в інтервалі $(x_0 - \delta, x_0)$ графік функції опуклий (угнутий), а в інтервалі $(x_0, x_0 + \delta)$- угнутий (опуклий). Тоді точка x_0 називається точкою перегину графіка функції.

Точки, в яких друга похідна дорівнює нулю або не існує, називається критичними точками другого роду функції $y = f(x)$.

Достатня умова існування точки перегину: нехай в деякому околі точки x_0 функція $y = f(x)$ неперервна і в усіх точках цього околу, крім, можливо, точки x_0, існує друга похідна функції $f''(x)$ і x_0 є критичною точкою другого роду функції $y = f(x)$. Тоді, якщо при переході через точку x_0 друга похідна $f''(x)$ змінює знак, то точка x_0 є точкою перегину графіка функції $y = f(x)$.

Схема знаходження інтервалів опуклості і точок перегину графіка функції:

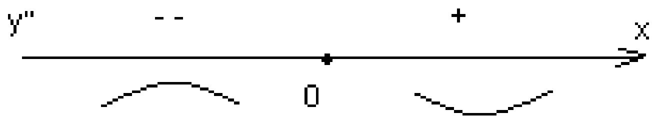
1. Знаходимо область визначення $D(y)$
2. Знаходимо першу $f'(x)$ і другу $f''(x)$ похідні.

3. Знаходимо критичні точки другого роду з рівняння $f''(x)=0$ і з умови, що $f''(x)$ не існує.
4. Розбиваємо критичними точками другого роду область визначення $D(y)$ на інтервалі і до кожного застосовуємо достатні умови опуклості. До критичних точок другого роду застосовуємо достатні умови існування точки перегину.

Приклад. знайти інтервали опуклості і точки перегину графіка функції $y=x^3-3x$.

Розв'язання

1. $D(y)=R$.
2. $f'(x)=3x^2-3;\ f''(x)=6x$
3. $f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x=0 \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow\ x=0$ – критична точка 2-го роду.
4.



$x=0$ – точка перегину.

3.3.10 АСИМПТОТИ ГРАФІКА ФУНКЦІЇ

Асимптотою графіка функції називається пряма, до якої як завгодно близько наближається точка графіка при прямуванні її вздовж графіка до нескінченності.

Асимптоти можуть бути вертикальні і похилі (невертикальні)

Пряма $x=a$ називається вертикальною асимптотою графіка функції $y=f(x)$, якщо хоча б одна з границь $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ дорівнює $+\infty$ $(-\infty)$.

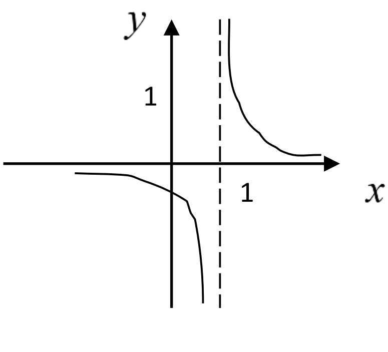
Приклад. $y=\dfrac{1}{x-1}$

Розв'язання

$D(y)=R\setminus\{1\}$, в точці $x=1$ функція невизначена:

$\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{1}{x-1}=-\infty;\ \lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$.

$x=1$ – вертикальна асимптота.



Пряма $y = kx + b$ називається похилою асимптотою графіка функції $y = f(x)$ при $x \to +\infty$(або при $x \to -\infty$), якщо $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(kx+b)\right)=0$ (або $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(kx+b)\right)=0$).

Пряма $y = kx + b$ є похилою асимптотою графіка функції $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ (або $x \to -\infty$), тоді і тільки тоді, коли існують границі

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k; \qquad \lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-kx\right)=b$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=k; \qquad \lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-kx\right)=b$$

Якщо $k=0$, то $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)$, тому $y=b$ - рівняння горизонтальної асимптоти. Горизонтальна асимптота розглядається як окремий випадок похилої (невертикальної).

Приклад. Знайти асимптоти графіка функції $y=\dfrac{x^2}{x+1}$

Розв'язання

1. $D(y)=R/\{-1\}$; $\lim\limits_{x\to-1-0}\dfrac{x^2}{x+1}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-1+0}\dfrac{x^2}{x+1}=+\infty$, отже $x=1$ – вертикальна асимптота

2. $y=kx+b$

$$\left.\begin{aligned} k&=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x(x+1)}=\lim_{x\to\pm1}\frac{x^2}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=1\\ b&=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-x^2-x}{x+1}=-1\end{aligned}\right\}\Rightarrow y=x-1 \text{- похила}$$

асимптота.

3.3.11 СХЕМА ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ ТА ПОБУДОВИ ЇЇ ГРАФІКА

1. Знайти область визначення функції.
2. Дослідити функцію на парність, непарність, періодичність. Враховувати результати досліджень при побудові графіка.
3. Знайти точки розриву функції і з'ясувати їх рід. Знайти вертикальні асимптоти графіка.
4. Знайти невертикальні асимптоти графіка окремо при $x \to +\infty$ і при $x \to -\infty$.
5. Знайти першу похідну і всі критичні точки функції.
6. Знайти інтервали монотонності, точки екстремумів, та значення функції в цих точках.
7. Знайти другу похідну і критичні точки другого роду.
8. Знайти інтервали напряму опуклості графіка, точки перегину та значення функції в цих точках.
9. Знайти (якщо це можна) точки перетину графіка з координатними осями.
10. Побудувати графік функції.

Якщо даних дослідження не достає для побудови графіка функції, треба знайти кілька додаткових точок, обчисливши значення функції при певних значеннях аргументу.

Приклад. Дослідити функцію $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$.

Розв'язання

1. $D(y)=R\setminus\{-1{,}1\}=(-\propto,-1)\cup(-1{,}1)\cup(1,+)$.

2. $f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{(-x^2)-1}=-\dfrac{x^3}{x^2-1}=-f(x)$ – функція непарна, її графік симетричний відносно початку координат.

3. Функція має дві точки розриву $x=-1$ і $x=1$. З'ясуємо їх рід:

а) $x=-1$, $\lim\limits_{x\to-1-0}\dfrac{x^3}{x^2-1}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-1+0}\dfrac{x^3}{x^2-1}=+\infty$;

б) $x=1$, $\lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{x^3}{x^2-1}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to1+0}\dfrac{x^3}{x^2-1}=+\infty$.

Отже, обидві точки розриву другого роду.

Вертикальні асимптоти: $x=-1$ і $x=1$.

4. а) при $x\to+\infty$

$$\left.\begin{aligned} k&=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x(x^2-1)}=\lim_{x\to+1}\frac{x^3}{x^3\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}=1;\\ b&=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x^3-x}{x^2-1}=0.\end{aligned}\right\}\Rightarrow y=x$$

– похила асимптота.

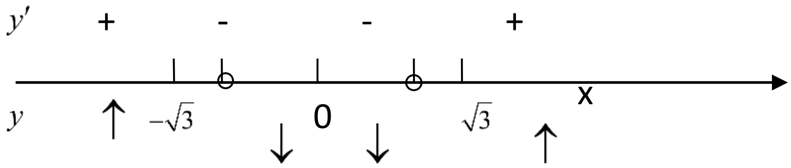
б) при $x\to-\infty$ асимптота та сама $y=x$.

5. Знайдемо першу похідну і всі критичні точки функції:

$$y'=\frac{x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2};$$

$y'=0$, $x^2\left(x^2-3\right)=0$, $x=0$, $x=\sqrt{3}$, $x=-\sqrt{3}$.

6. Знайдемо інтервали монотонності, точки екстремумів, та значення функції в цих точках.

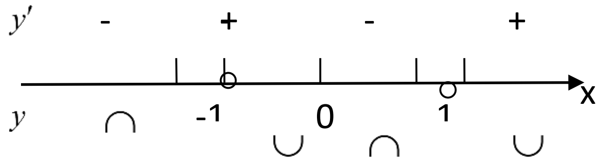


$x=-\sqrt{3}$ – точка максимуму, $x=\sqrt{3}$ – точка мінімуму.

7. Знайдемо другу похідну і критичні точки другого роду.

$$y'' = \frac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3}, \quad y''=0, \; 2x\left(x^2+3\right)=0, \; x=0.$$

8. Знайдемо інтервали напряму опуклості графіка, точки перегину та значення функції в цих точках.

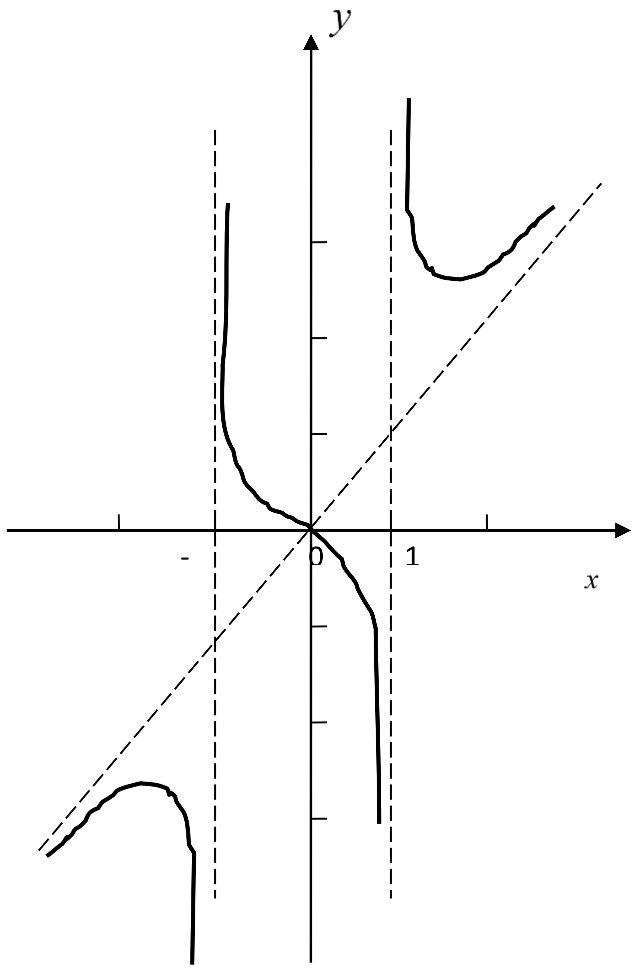


+

$x=0$ – точка перегину.

9. $(0,0)$ – точка перетину графіка функції з координатними осями.

10. Побудуємо графік функції



3.3.12 ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ’ЯЗУВАННЯ

1. Знайти похідну функції:

1) $y=\ln\sin(x^2+5)$; 2) $y=x^4\sqrt{1-x^2}$; 3) $y=\arccos\sqrt{1-3x^4}$;

4) $y=\sin^2 x - x^3\cos x$; 5) $y=2tg^3\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)$;

6) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\sin x}}$;

7) $y=5arctg(tg^2 x)$; 8) $y=2^x e^{-6x}$; 9) $y=\dfrac{1}{6}ctg^6 x-\dfrac{x}{\sin x}$;

2. Знайти похідну функції, користуючись логарифмічним диференціюванням:

1) $y=\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[6]{(7x-4)^5}\cdot\sqrt{(x-1)^3}}$; 2) $y=(\sin x-1)^{2\cos x}$

3. Знайти похідну неявної функції:

1) $b^2x^2+a^2y^2-c=0$; 2) $y^6-6xy+x^6=0$

4. Знайти похідну функції, заданої параметрично:

1) $\begin{cases} x=3t-t^3, \\ y=3t^2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=t+\ln t, \\ y=t^3 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x=3\cos t, \\ y=4\sin^2 t \end{cases}$

5. Знайти похідні вищих порядків.

1) $y=\sin^2 x,\quad y'''=?$; 2) $y=\ln\left(1+x^2\right),\quad y''=?$; 3) $y=\sqrt[3]{1-x^2},\quad y''=?$;

4) $y=e^{x^2},\quad y''=?$; 5) $y=x^2 10^{2x},\ y''=?$; 6) $\begin{cases} x=t^3, \\ y=t-1, \end{cases}\quad y''_{xx}=?$;

7) $\begin{cases} x=t^3, \\ y=\ln t, \end{cases}\quad y''=?$

6. Дослідити функції на зростання, спадання, екстремум.

1) $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$, 2) $y=x\ln x$, 3) $y=x^2e^{-x}$.

7. Дослідити функції на характер опуклості та знайти точки перегину.

1) $y=x^3-6x^2+12x+4$, 2) $y=\dfrac{x}{x^2+1}$.

8. Дослідити функції на найбільше, найменше значення.

1) $y=2x^3+3x^2-12x+1,\quad [-1;3]$, 2) $y=x^4-2x^2+5,\quad [-2;2]$.

9. Знайти асимптоти кривих.

1) $y=\dfrac{x}{x^2-4}$, 2) $y=\dfrac{x^3}{x^2-4x+3}$,

ВІДПОВІДІ

1.1. $y'=2xctg\left(x^2+5\right)$. 1.2. $y'=\dfrac{4x^3-5x^5}{\sqrt{1-x^2}}$. 1.3. $y'=\dfrac{6x}{\sqrt{3-9x^4}}$.

1.4. $y'=\sin 2x-3x^2\cos x+x^3\sin x$. 1.5. $y'=-\dfrac{12xtg^2\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)}{\left(x^2+1\right)^2\cos^2\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)}$.

1.6. $y'=\dfrac{1+\sin x-\cos x}{2(1-\cos x)(1+\sin x)}$. 1.7. . 1.8. $y'=2^x e^{-6x}(\ln 2-6)$.

1.9. $y'=\dfrac{-ctg^2x-\sin x+x\cos x}{\sin^2 x}$. 2.1. $y'=\left(\dfrac{1}{2(x-2)}-\dfrac{35}{6(7x-4)}-\dfrac{3}{2(x-1)}\right)\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[6]{(7x-4)^5}\sqrt{1-x^2}}$.

2.2. $y'=\left(-2\sin x\cdot\ln(\sin x-1)+\dfrac{2cos^2x}{\sin x-1}\right)(\sin x-1)^{2\cos x}$. 3.1. $y'=-\dfrac{b^2x}{a^2y}$. 3.2. $y'=\dfrac{y-x^5}{y^5-x}$.

4.1. $y'_x=\dfrac{2t}{1-t^2}$. 4.2. $y'_x=\dfrac{3t^3}{t+1}$. 4.3. $y'_x=-\dfrac{8\cos t}{3}$. 5.1. $y'''=-4\sin 2x$. 5.2. $y''=\dfrac{2-2x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$

.

5.3. $y''=-\dfrac{2x^2+6}{\sqrt[3]{\left(1-x^2\right)^5}}$. 5.4. $y''=2e^{x^2}\left(2x^2+1\right)$. 5.5. $y''=10^{2x}\left(2+8x\ln 10+4x^2\ln^2 10\right)$.

5.6. $y''_{xx}=-\dfrac{2}{9t^5}$. 5.7. $y''_{xx}=-\dfrac{1}{3t^6}$. 6.1. $x_{\max}=0, y(0)=-2; x_{\min}=2, y(2)=2$; зростає при $x\in(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$; спадає при $x\in[0;1)\cup(1;2]$. 6.2. $x_{\min}=\dfrac{1}{e}, y\left(\dfrac{1}{e}\right)=-\dfrac{1}{e}$; зростає при $x\in\left[\dfrac{1}{e};+\infty\right)$; спадає при $x\in\left(0;\dfrac{1}{e}\right]$. 7.1. $x_{пер}=2, y(2)=12$; опукла вгору при $x\in(-\infty;2]$; опукла вниз при $x\in[2;+\infty)$.

7.2. $x_{пер}=0, y(0)=0; x_{пер}=\sqrt{3}, y\left(\sqrt{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}; x_{пер}=-\sqrt{3}, y\left(-\sqrt{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$; опукла вгору при $x\in\left(-\infty;-\sqrt{3}\right]\cup\left[0;\sqrt{3}\right]$; опукла вниз при $x\in\left[-\sqrt{3};0\right]\cup\left[\sqrt{3};+\infty\right)$.

8.1. $\max\limits_{[-1;3]} y(x)=y(3)=46; \min\limits_{[-1;3]} y(x)=y(1)=-6$.

8.2. $\max\limits_{[-2;2]} y(x)=y(\pm2)=13; \min\limits_{[-2;2]} y(x)=y(\pm1)=4$. 9.1. $x=2; x=-2; y=0$.

9.2. $x=3; x=1; y=x+4$.

3.4 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

3.4.1 ФУНКЦІЯ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Змінна величина u називається функцією n незалежних змінних $x_1, x_2, ...x_n$, визначених на деякій множині D точок $M(x_1, x_2, ...x_n)$ n - вимірного простору, якщо кожній точці $M\in D$ відповідає певне значення величини u: $u=f(x_1, x_2, ...x_n)$ (або $u=f(M)$). Множина D називається областю визначення функції u.

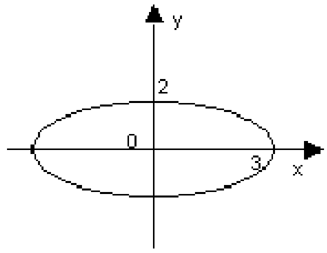
Якщо кожній парі значень (x, y) змінних x і y в деякій області їх зміни поставлено у відповідність одне значення z, то кажуть, що z є функцією від x та y і записують $z=f(x,y)$.

Множина пар (x, y) числових значень x та y, при яких функція $z = f(x, y)$ приймає певні дійсні значення, називається областю визначення цієї функції і позначається $D = D(f)$.

Приклад. Знайти область визначення функції $z = \sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2}$.

Розв'язання. Вираз в правій частині має зміст для тих пар (x, y), для яких

$$36 - 4x^2 - 9y^2 \geq 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 9y^2 \leq 36 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1,$$



отже $D = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1 \right\}$ – внутрішня частина еліпса разом з межею.

Способи задання функції двох змінних:

1) таблиця з двома входами,
2) графічно,
3) аналітично,
4) геометрично з використанням ліній рівня.

Лінією рівня функції $z = f(x, y)$ називається лінія на площині Oxy, в кожній точці якої функція приймає одне й те ж значення.

Рівняння лінії рівня $c = f(x, y)$, де с – стала.

Приклад. побудувати лінії рівня і з'ясувати характер поверхні, що зображується функцією $z = x^2 - y^2$.

1) $D(z) = \{(x; y) : x \in R, y \in R\}$;

2) $x^2 - y^2 = c$;

$c = 0$, то

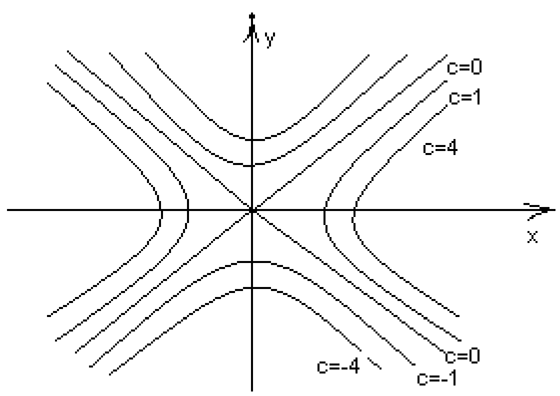
$$x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ y = -x \end{cases};$$

$c = 1$, то $x^2 - y^2 = 1$;

$c = -1$, то $x^2 - y^2 = -1 \Leftrightarrow -x^2 + y^2 = 1$;

$c = 4$, то $x^2 - y^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$;

$c = -4$, то $x^2 - y^2 = -4 \Leftrightarrow -\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$.



Гіперболічний параболоїд.

Якщо маємо функцію трьох змінних, то її можна задати геометрично за допомогою поверхні рівня.

Поверхнею рівня функції $\Phi = f(x, y, z)$ називається поверхня, в кожній точці якої функція приймає однакові значення.

3.4.2 ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

δ- околом точки $M_0(x_0, y_0)$ називається множина всіх точок $M(x, y)$, координати яких задовольняють нерівність $d(M, M_0) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$, де $d(M, M_0)$ - відстань від точки M до точки M_0.

Геометрично δ- окіл точки M_0 - це всі внутрішні точки круга з центром M_0 і радіусом δ.

Число A називається границею функції $z = f\left(x, y\right) = f(M)$ в точці M_0, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що для всіх точок $M(x, y) \in D$, які задовольняють умову $0 < d(M, M_0) < \delta$, виконується нерівність $|f(M) - A| < \varepsilon$. Символічно:

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = A \Leftrightarrow \forall a > 0\ \exists \delta > 0\ \forall M \in D\ 0 < d(M, M_0) < \delta \left| f(M) - A \right| < \varepsilon$$

Всі основні теореми про границі для функцій однієї змінної переносяться на функції двох змінних.

Приклад. Знайти границі:

1. $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{(x^2 + y^2)(\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1)}{x^2 + y^2 + 1 - 1} =$$
$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (\sqrt{x^2 + y^2 + 1} + 1) = 2;$$

2. $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 2}} \frac{\sin xy}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 2}} \frac{\sin xy}{\frac{xy}{y}} = \lim_{y \to 2} y = 2.$$

3.4.3 НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Функція $u = f\left(M\right)$ називається неперервною в точці M_0, якщо

1) вона визначена в точці M_0 і в деякому її околі;
2) існує границя $\lim\limits_{M \to M_0} f(M)$;
3) ця границя дорівнює значенню функції $f(M)$ в точці M_0: $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$.

Точки, в яких функція неперервна, називаються точками неперервності; точки в яких функція не є неперервною, називаються точками розриву.

Неперервні функції багатьох змінних мають такі ж властивості, як і неперервні в точці функції однієї змінної, а саме

1) якщо функції $f(M)$ і $g(M)$ неперервні в точці M_0, то в цій точці неперервні і функції $f(M) \pm g(M)$, $f(M) \cdot g(M)$, $\dfrac{f(M)}{g(M)}$ (за умови $g(M) \neq 0$).

2) якщо функція $u = f\left(M\right)$ неперервна в точці M_0, а функція $v = g(u)$ неперервна в точці $u_0 = f\left(M_0\right)$, то складена функція $v = g(f(M))$ неперервна в точці M_0.

Зауважимо, що функції багатьох змінних можуть мати розриви як в окремих точках, так і на множинах точок, які об'єднуються в лінії або поверхні розриву.

Приклад. знайти точки розриву функцій

1) $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$; $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ - точка розриву

2) $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - 1}$; $x^2 + y^2 = 1$ - лінія розриву.

3.4.4 ДИФЕРЕНЦІЙОВАНІСТЬ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$, якщо вона існує, називається частинною похідною функції $z = f\left(x, y\right)$ в точці $M\left(x, y\right)$ по змінній x і позначається: z'_x, $f'_x(x, y)$, $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, отже $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$.

Границя $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$, якщо вона існує, називається частинною похідною функції $z = f\left(x, y\right)$ в точці $M\left(x, y\right)$ по змінній y і позначається: z'_y, $f'_y(x, y)$, $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, отже $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$

При знаходженні частинної похідної $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ обчислюють звичайну похідну функції однієї змінної x, вважаючи змінну y сталою. Так само при знаходженні частинної похідної $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ обчислюють похідну функції однієї змінної y, вважаючи змінну x сталою. Тому при обчисленні частинних похідних діють всі правила і формули обчислення похідних функцій однієї змінної.

Приклад. знайти частинні похідні функції $z = x^3 y^2 + x + y$.

Розв'язання. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y^2 + 1$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2x^3 y + 1$.

Якщо функція $f(x,y)$ має частинні похідні в деякому околі точки M і ці похідні неперервні в точці M, то функція $f(x,y)$ диференційована в точці M.

Якщо функція $z=f(x,y)$ диференційована в точці M, то вона неперервна в цій точці.

3.4.5 ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ СКЛАДЕНОЇ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

1) Якщо функції $x=x(t)$ і $y=y(t)$ диференційовані в точці t, а функція $z=f(x,y)$ диференційована в точці $M(x,y)$, то складена функція $z=f(x(t),y(t))$ також диференційована в точці t і має місце формула: $\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$.

Приклад. Знайти похідну функції $z=e^{3x+2y}$, де $x=\cos t$, $y=t^2$.

Розв'язання:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=e^{3x+2y}\left(-3\sin t\right)+e^{3x+2y}\cdot 2\cdot 2t=e^{3x+2y}\left(4t-3\sin t\right)=e^{3\cos t+2t^2}\left(4t-3\sin t\right)$$

2) Якщо $y=y(x)$ - диференційована в точці x, а функція $z=f(x,y)$ диференційована в точці $M(x,y)$, то функція $z(x,y(x))$ диференційована в точці x і має місце формула: $\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$.

Приклад. Знайти повну похідну по x функції $z=x^3y^2+x+y$, де $y=\ln 2x$.

Розв'язання: $\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=\left(3x^2y^2+1\right)+\left(2x^3y+1\right)\frac{1}{x}$

3) Якщо функції $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ диференційовані в точці $M_1(u,v)$, а функція $z=f(x,y)$ диференційована в точці $M_2(x(u,v),y(u,v))$, то складена функція $f(x(u,v),y(u,v))$ диференційована в точці $M_1(u,v)$ і її частинні похідні знаходяться за формулами: $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$; $\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$.

3.4.6 ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ НЕЯВНО ЗАДАНОЇ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Якщо рівняння $F(x,y,z)=0$ неявно визначає функцію $z=\phi(x,y)$ в області D так, що $F(x,y,\phi(x,y))\equiv 0$,тоді можна знайти частинні похідні неявної функції $z=\phi(x,y)$ за формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Приклад. знайти частинні похідні функції $2xyz+x^3-y^2+z=2$.

Розв'язання: Введемо функцію $F(x,y,z)=2xyz+x^3-y^2+z-2=0$. Знайдемо частинні похідні:

$F'_x = 2yz + 3x^2; F'_y = 2xz - 2y; F'_z = 2xy + 1$.

Використовуючи формули $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ та $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$, маємо

$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2yz + 3x^2}{2xy + 1}; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2xz - 2y}{2xy + 1}$.

3.4.7 ПОХІДНА ЗА НАПРЯМОМ. ГРАДІЄНТ.

Похідною функції $z = f(x, y)$ за напрямом вектора $\vec{l}$ називається величина

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta,$$

яка характеризує зміну функції $z = f(x, y)$ в даному напрямі $\vec{l}$, де $\cos\alpha$, $\cos\beta$ – напрямні косинуси напряму $\vec{l}$.

Приклад. Знайти похідну функції $z = 4 - x^2 - y^2$ в точці $A(-1, 2)$ за напрямом вектора $\overrightarrow{AB}$, де $B(3,1)$.

Розв'язання.

1) Знаходимо частинні похідні в точці $A(-1, 2)$:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{A(-1,2)} = -2x\Big|_{A(-1,2)} = 2; \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{A(-1,2)} = -2y\Big|_{A(-1,2)} = -4.$$

2) Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB} = (3+1; 1-2) = (4; -1)$

і його напрямні косинуси: $\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{4^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$, $\cos\beta = \frac{-1}{\sqrt{17}}$

3) Обчислимо похідну за указаним напрямом:

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta = 2\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + (-4)\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = \frac{12}{\sqrt{17}} = \frac{12\sqrt{17}}{17}.$$

Відповідь: $\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}(A) = \frac{12\sqrt{17}}{17}$

Градієнтом функції $z = f(x, y)$ в точці $M(x, y)$ називається вектор, координатами якого є значення частинних похідних цієї функції в точці M. Позначається $gradz$. Отже, $gradz = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}$.

Саме $gradz$ вказує напрям найшвидшого зростання функції в даній точці, при цьому $\max\limits_{\vec{l}} \frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = |gradz| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$.

Приклад. Знайти найбільшу швидкість зростання функції $z = 4 - x^2 - y^2$ в точці $A(-1, 2)$.

Розв'язання. 1) Знаходимо частинні похідні в точці $A(-1, 2)$:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{A(-1,2)} = -2x\Big|_{A(-1,2)} = 2;$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{A(-1,2)} = -2y\Big|_{A(-1,2)} = -4.$$

1) Знаходимо градієнт: $gradz = \frac{\partial z}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$,

2) Найбільша швидкість зростання функції в точці $A(-1,2)$

$$\max_{\vec{l}} \frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = |gradz| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 4\sqrt{5}.$$

Відповідь: $\max_{\vec{l}} \frac{\partial z}{\partial \vec{l}}(A) = 4\sqrt{5}.$

3.4.8 ЧАСТИННІ ПОХІДНІ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Якщо існує частинна похідна по x від функції $\frac{\partial z}{\partial x}$, то вона називається частинною похідною другого порядку від функції $z = f(x, y)$ по змінній x і позначається $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ або z''_{xx}.

Якщо існує частинна похідна по y від функції $\frac{\partial z}{\partial x}$, то вона називається мішаною частинною похідною другого порядку від функції $z = f(x, y)$ і позначається $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ або z''_{yx}.

Якщо існує частинна похідна по y від функції $\frac{\partial z}{\partial y}$, то вона називається частинною похідною другого порядку від функції $z = f(x, y)$ по змінній y і позначається $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ або z''_{yy}.

Якщо існує частинна похідна по x від функції $\frac{\partial z}{\partial y}$, то вона називається мішаною частинною похідною другого порядку від функції $z = f(x, y)$ і позначається $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ або z''_{xy}.

Якщо функція $z = f(x, y)$ визначена разом із своїми похідними $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$, при чому мішані похідні неперервні в точці M_0 то в цій точці $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Приклад. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = x^3 y^2 + x + y$.

Розв'язання.

$1)\ \dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2y^2+1;$ $\qquad 2)\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=2x^3y+1;$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6x^2y;$ $\qquad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=6x^2y;$.

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6xy^2;$ $\qquad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2x^3$

3.4.9 ПОВНИЙ ДИФЕРЕНЦІАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

Повний диференціал функції $z=f\left(x,y\right)$ –

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

Приклад. знайти повний диференціал функції $z=x^3y^2+x+y$.

Оскільки, $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2y^2+1$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=2x^3y+1$ неперервні на всій площині, то повний диференціал на всій площині $dz=\left(3x^2y^2+1\right)dx+\left(2x^3y+1\right)dy$

Формула для наближених обчислень значень функції двох змінних:

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)\approx f(x,y)+\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y$$

Приклад. Обчислити наближено за допомогою повного диференціала

$$arctg\left(\frac{1,97}{1,02}-1\right)$$

Розв'язання. Розглянемо функцію $z=arctg\left(\dfrac{x}{y}-1\right)$.

$$z=arctg\left(\frac{x+\Delta x}{y+\Delta y}-1\right)\approx arctg\left(\frac{x}{y}-1\right)+\frac{y}{y^2+\left(x-y\right)^2}\Delta x-\frac{x}{y^2+\left(x-y\right)^2}\Delta y\ .$$

Покладемо $x=2$, $\Delta x=-0,03$, $y=1$, $\Delta y=-0,02$, будемо мати

$$arctg\left(\frac{1,97}{1,02}-1\right)=arctg\left(\frac{2-0,03}{1+0,02}-1\right)\approx$$

$$\approx arctg\left(\frac{2}{1}-1\right)+\frac{1}{1+\left(2-1\right)^2}\left(-0,03\right)-\frac{2}{1+\left(2-1\right)^2}0,02=\frac{\pi}{4}-0,015-0,02=0,75$$

3.4.10 ДИФЕРЕНЦІАЛИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Нехай $z=f\left(x,y\right)$ – функція двох незалежних змінних, яка має неперервні частинні похідні до n-го порядку включно.

1) Диференціал 1-го порядку: $dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy$;

2) Диференціал 2-го порядку: $d^2z=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$.

Скорочено останню формулу можна записати так: $d^2z=\left(\dfrac{\partial}{\partial x}dx+\dfrac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z$.

Аналогічно, диференціал n-го порядку визначається

$$d^n(z)=d(d^{n-1}z)=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{n-1}z\,.$$

Приклад. Знайти диференціал другого порядку функції $z=x^3y^2+x+y$

Розв'язання.

1) $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y^2+1;$ 2) $\frac{\partial z}{\partial y}=2x^3y+1;$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6x^2y;$ $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=6x^2y;$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6xy^2;$ $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2x^3;$

3) $d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2;$

$d^2z=6xy^2dx^2+2\cdot 6x^2ydxdy+2x^3dy^2$

Відповідь: $d^2z=6xy^2dx^2+12x^2ydxdy+2x^3dy^2$

3.4.11 ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1. Знайти частинні похідні першого порядку від функції

1) $z=\arccos\sqrt{1-x^2-y^2}$, 2) $z=3^{\sin^2 x+\cos^2 y}$

2. Знайти повну похідну від складеної функції:

1) $z=4x^2+6x^3y+y^2-x$, де $x=\sin 3t$, $y=e^{\cos t}$;

2) $z=\sqrt{x}-3\sin 4y$, $y=\frac{7}{x-2}$

3. Знайти частинні похідні функції, заданої неявно:

1) $z-x^2+6y+2xy^2-5zx=6$, 2) $z^3+\ln z+x^2+y^2=3$

4. Знайти d^2z:

1) $z=12xy-x^2+y^3$, 2) $z=\ln\left(y^2-x^3\right)$

5. Знайти похідну функції $z=arctgy+\ln(x^2+y^2)$ в точці $M\left(1,1\right)$ за напрямом вектора $\vec{l}=\vec{i}+2\vec{j}$.

6. Знайти градієнт функції $z=arctg\left(x\cdot\ln\left(1+y\right)\right)$ в точці $M\left(1,0\right)$.

7. Знайти частинні похідні другого порядку функції:

1) $z=xy$; 2) $z=\ln(x^2+y^2)$; 3) $z=e^{xy}$.

8. Показати, що функція $z=arctg\,\frac{y}{x}$ задовольняє рівняння $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

ВІДПОВІДІ

1.1 $z'_x=\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}};z'_y=\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. 1.2. $z'_x=3^{\sin^2 x+\cos^2 y}\ln 3\cdot\sin 2x; z'_y=-3^{\sin^2 x+\cos^2 y}\ln 3\cdot\sin 2y$.

2.1. $\frac{dz}{dt}=\left(8x+18x^2y-1\right)\cdot 3\cos 3t-\left(6x^3+2y\right)e^{\cos t}\cdot\sin t$. 2.2. $\frac{dz}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{84\cos 4y}{\left(x-2\right)^2}$.

3.1. $z'_x=-\frac{-2x+2y^2-5z}{1-5x};z'_y=-\frac{6+4xy}{1-5x}$. 3.2. $z'_x=-\frac{2x}{3z^2+\frac{1}{z}};z'_y=-\frac{2y}{3z^2+\frac{1}{z}}$.

4.1. $d^2z=-2dx^2+24dxdy+6ydy^2$. 4.2. $d^2z=-\dfrac{6xy^2+3x^4}{\left(y^2-x^3\right)^2}dx^2+\dfrac{12x^2y}{\left(y^2-x^3\right)^2}dxdy-\dfrac{2y^2+2x^3}{\left(y^2-x^3\right)^2}dy^2$

5. $\dfrac{\partial z}{\partial \vec{l}}(1;1)=\dfrac{7\sqrt{5}}{5}$. 6. $grad z(1;0)=\vec{j}$.

3.5 ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

3.5.1 ЛОКАЛЬНІ ЕКСТРЕМУМИ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ

Функція $z=f(x,y)$, визначена в області D, має в точці $M_0\in D$ локальний максимум MAX (локальний мінімум MIN), якщо існує окіл точки M_0, який належить області D, такий що для всіх відмінних від M_0 точок M цього околу виконується нерівність $f(M)<f(M_0)$ ($f(M)>f(M_0)$).

MAX і MIN функції називаються її локальними екстремумами. Точка M_0, де функція набуває MAX (MIN) називається точкою локального максимуму (мінімуму) або точкою локального екстремуму.

Необхідні умови екстремуму: якщо функція $z=f(x,y)$ має в точці $M_0(x_0,y_0)$ екстремум, то в цій точці обидві її частинні похідні дорівнюють нулю, або не існують.

Точки, в яких частинні похідні дорівнюють нулю, називаються стаціонарними точками функції $f(x,y)$. Стаціонарні точки і точки, в яких частинні похідні не існують, називаються критичними точками функції $f(x,y)$.

Достатні умови екстремуму функції двох змінних: нехай функція $f(x,y)$ двічі неперервно диференційована в деякому околі точки $M_0(x_0,y_0)$ і точка M_0 є критичною точкою функції $z=f(x,y)$. Тоді, якщо позначити

$$\left.\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\right|_{M_0}=A;\quad \left.\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)\right|_{M_0}=B;\quad \left.\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\right|_{M_0}=C, \text{ то}$$

1) функція $z=f(x,y)$ в точці M_0 має MAX, якщо $AC-B^2>0$ і $A<0$
2) функція $z=f(x,y)$ в точці M_0 має MIN, якщо $AC-B^2>0$ і $A>0$
3) функція $z=f(x,y)$ в точці M_0 має не має екстремуму, якщо $AC-B^2<0$
4) функція $z=f(x,y)$ в точці M_0 може мати або не мати екстремуму, якщо $AC-B^2=0$ (сумнівний випадок, потрібні додаткові дослідження)

Схема дослідження функції двох змінних на екстремум:

1) Знаходимо перші частинні похідні функції $z=f(x,y)$.

З системи $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$ знаходимо стаціонарні точки $M_0(x_0, y_0)$.

2) Знаходимо другі частинні похідні.

3) Для кожної стаціонарної точки (x_0, y_0) обчислюємо значення частинних похідних, позначаючи $\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\Bigg|_{M_0} = A$; $\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)\Bigg|_{M_0} = B$; $\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\Bigg|_{M_0} = C$

4) Складаємо вираз $\Delta = AC - B^2$.

1. Якщо $\Delta > 0$, $A < 0$, то точка (x_0, y_0) є точкою максимуму.
2. Якщо $\Delta > 0$, $A > 0$, то точка (x_0, y_0) є точкою мінімуму
3. Якщо $\Delta < 0$, то точка (x_0, y_0) не є точкою екстремуму
4. Якщо $\Delta = 0$, то висновку про характер стаціонарної точки зробити не можна, потрібне додаткове дослідження

Приклад. Дослідити на екстремум функцію $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$.

Розв'язання

1. Знайдемо перші частинні похідні

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + y + 1$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 1$.

Прирівняємо їх до нуля, одержимо систему

$$\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Отже, $(-1;1)$ - стаціонарна точка.

2. Обчислимо значення других частинних похідних в знайденій стаціонарній точці: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$.

3. Складаємо вираз $\Delta = AC - B^2 = 4 - 1 = 3 > 0$.

$\Delta > 0$ і $A = 2 > 0 \Rightarrow$ в точці $(-1;1)$ функція має мінімум

$z_{\min} = 1 - 1 + 1 - 1 - 1 + 1 = 0$

Відповідь: $z_{\min} = z(-1;1) = 0$.

3.5.2 ЗНАХОДЖЕННЯ НАЙБІЛЬШОГО ТА НАЙМЕНШОГО ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЙ В ОБМЕЖЕНІЙ ЗАМКНЕНІЙ ОБЛАСТІ

Згідно з теоремою Вейєрштрасса функція $z = f(x, y)$, неперервна в обмеженій замкненій області D, досягає в цій області найбільшого і найменшого значень (всередині D або на її межі). Тому для того щоб знайти найбільше і найменше значення функцій в обмеженій замкненій області, треба

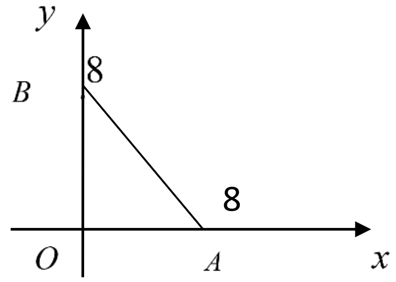
1) Знайти критичні точки, які лежать всередині області і обчислити значення функції в цих точках;

2) Знайти критичні точки на межі області і обчислити значення функції в цих точках;

3) Серед здобутих значень функції вибрати найбільше і найменше.

Приклад. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = xy(4-x-y)$ в області D, що визначена системою нерівностей $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x+y \le 8$.

Розв'язання. Побудуємо область D:



Область D є трикутник OAB.

1. Знайдемо критичні точки, які лежать всередині даного трикутника.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4y - 2xy - y^2 = y(4-2x-y),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4x - x^2 - 2xy = x(4-2y-x).$$

Прирівняємо частинні похідні до нуля, отримаємо систему:

$$\begin{cases} y(4-2x-y)=0; \\ x(4-2y-x)=0. \end{cases}$$

З урахуванням того, що всередині трикутника $x>0$, $y>0$, приходимо до системи

$$\begin{cases} 2x+y=4; \\ x+2y=4. \end{cases} \quad \text{звідки} \quad \begin{cases} x=\dfrac{4}{3}; \\ y=\dfrac{4}{3}. \end{cases}.$$

Отримана критична точка лежить всередині трикутника. Значення функції z в цій точці $z\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)=\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\left(4-\frac{4}{3}-\frac{4}{3}\right)=\frac{64}{27}$

2. Межа області складається з трьох ділянок OA, AB і BO, які мають різні рівняння.

а) На ділянці OA, рівняння якої $y=0$ функція $z=0$.

б) На ділянці BO, рівняння якої $x=0$ функція $z=0$.

в) На ділянці AB, рівняння якої $y=8-x$, функція z перетворюється на функцію однієї змінної:

$$z(x)=x(8-x)(4-x-8+x)=4x(x-8).$$

Знайдемо критичні точки цієї функції на відрізку $[0,8]$:

$z'(x)=4(2x-8)$, $4(2x-8)=0$, звідки $x=4$.

Обчислимо значення функції $z(x)$ на кінцях відрізку $[0,8]$ і в точці $x=4$:

$z(0)=0$, $z(4)=4\cdot 4\cdot(-4)=-64$, $z(8)=0$.

3. Шукаємо найбільше і найменше значення функції z серед наступних її значень:

$z=\frac{64}{27}$ в точці $\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$; $z=0$ – на прямих $x=0$ і $y=0$; $z=-64$ в точці $(4,4)$.

Таким чином, найбільшого значення $z=\frac{64}{27}$ функція z досягає всередині області в точці $\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$, а найменшого $z=-64$ – на межі області в точці $(4,4)$.

Відповідь: $\max\limits_{D} z=z\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)=\frac{64}{27}$, $\min\limits_{D} z=z(4,4)=-64$.

3.5.3 УМОВНИЙ ЕКСТРЕМУМ

Нехай в області D площини Oxy визначена функція $z=f(x,y)$, незалежні змінні якої зв'язані умовою $\varphi(x,y)=0$. Позначимо через E множину точок області D, в яких функціях $\varphi(x,y)$ обертається в 0.

Точка $M_0(x_0,y_0)\in D$ називається точкою умовного екстремуму функції $z=f(x,y)$ за наявністю зв'язку $\varphi(x,y)=0$, якщо вона є точкою звичайного екстремуму цієї функції, яка розглядається тільки на множині E.

Значення функції в точці умовного екстремуму порівнюється із значеннями цієї функції не в усіх точках області D, а лише в точках, які задовольняють рівняння $\varphi(x,y)=0$.

Рівняння $\varphi(x,y)=0$ називається рівнянням зв'язку.

Знайти умовні екстремуми функції $z=f(x,y)$ з рівнянням зв'язку $\varphi(x,y)=0$ можна так:

1. Рівняння зв'язку розв'язати відносно будь-якої змінної, наприклад. y: $y=\psi(x)$.

Підставити знайдене рівняння в дану функцію : $z=f(x,\psi(x))$ і дослідити на екстремум отриману функцію однієї змінної.

Але такий спосіб не завжди можливий, якщо рівняння зв'язку не може бути розв'язане відносно змінної y або x.

Більш загальний спосіб ґрунтується на методі множників Лагранжа:

1. Складають допоміжну функцію $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$, яка називається функцією Лагранжа, а число λ називається множником Лагранжа.

2. Досліджують на екстремум функцію $F(x,y,\lambda)$. Для цього знаходять і прирівнюють до нуля її частинні похідні, і з отриманої системи

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=0;\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=0;\\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=0.\end{cases}$$

знаходять критичні точки.

3. Характер критичних точок встановлюється за допомогою визначника

$$D=\begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{vmatrix},$$

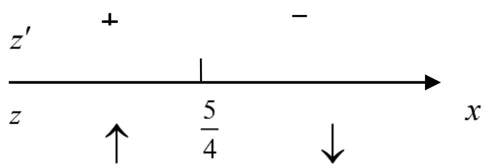
де всі похідні обчислюють в критичній точці, яка досліджується. Якщо $D>0$, то маємо умовний максимум, якщо $D<0$, то маємо умовний мінімум, якщо ж $D=0$, то потрібні додаткові дослідження.

Приклад. Знайти екстремум функції $z=xy$ за умови, що $2x+3y-5=0$.

Розв'язання. (1 спосіб)

1. З рівняння зв'язку виразимо y: $y=\dfrac{5-2x}{3}$. Тоді
2. $z=x\,\dfrac{5-2x}{3}$, $z=\dfrac{1}{3}\left(5x-2x^2\right)$ – функція однієї змінної x. Дослідимо її на екстремум.

$z'=\dfrac{1}{3}\left(5-4x\right)$; $z'=0$, $5-4x=0$, звідки $x=\dfrac{5}{4}$ – критична точка.



Отже, при $x=\dfrac{5}{4}$ функція має максимум, $z_{\max}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{25}{4}-2\cdot\dfrac{25}{16}\right)=\dfrac{25}{4}$. При $x=\dfrac{5}{4}$

$y=\dfrac{5-2\cdot\dfrac{5}{4}}{3}=\dfrac{5}{6}$.

Відповідь: $z_{\max}=z\left(\dfrac{5}{4},\dfrac{5}{6}\right)=\dfrac{25}{4}$.

(2 спосіб).

1. Утворимо функцію $F(x,y,\lambda)=xy+\lambda(2x+3y-5)$.

2. Дослідимо на екстремум функцію $F(x,y,\lambda)=xy+\lambda(2x+3y-5)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}=y+2\lambda=0; \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=x+3\lambda=0; \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=2x+3y-5=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2\lambda; \\ x=-3\lambda; \\ 2\left(-3\lambda\right)+3\left(-2\lambda\right)-5=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2\left(-\dfrac{5}{12}\right)=\dfrac{5}{6}; \\ x=-3\left(-\dfrac{5}{12}\right)=\dfrac{5}{4}; \\ \lambda=-\dfrac{5}{12}. \end{cases}$$

Отже, точка $\left(\frac{5}{4},\frac{5}{6}\right)$ – критична.

3. Встановимо характер критичної точки.

Для цього обчислимо значення наступних частинних похідних в цій точці:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=2,\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}=3,\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=0,\ \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=1,\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=0$$

З'ясуємо знак визначника D:

$$D=\begin{vmatrix}0 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-6 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 0\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}-6 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-(-6-6)=12>0\,.$$

Отже, в точці $\left(\frac{5}{4},\frac{5}{6}\right)$ маємо умовний максимум і $z_{\max}=\frac{25}{24}$

Відповідь: $z_{\max}=z\left(\frac{5}{4},\frac{5}{6}\right)=\frac{25}{4}$.

3.5.4 ДОТИЧНА ПЛОЩИНА ТА НОРМАЛЬ ДО ПОВЕРХНІ

Нехай задано поверхню $F(x,y,z)=0$ і точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$, яка належить цій поверхні. Функція $F(x,y,z)$ диференційована в точці M_0, причому не всі її частинні похідні дорівнюють нулю.

Дотичною площиною до поверхні в точці M_0 називається площина, в якій розташовані дотичні в точці M_0 до всіх кривих на поверхні $F(x,y,z)=0$, які проходять через цю точку. Рівняння дотичної площини до поверхні $F(x,y,z)=0$ в точці M_0:

$$F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)+F'_z(M_0)(z-z_0)=0\,.$$

Якщо рівняння поверхні задано в явній формі $z=f(x,y)$, то рівняння дотичної площини в точці М має вигляд:

$$f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$$

Нормаллю до поверхні в точці M_0 називається пряма, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до дотичної площини в цій точці. Канонічні рівняння нормалі мають такий вигляд: $\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}$

Якщо рівняння поверхні задано в явній формі $z=f(x,y)$, то рівняння нормалі в точці М має вигляд: $\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$

Приклад. написати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $2x^2+y^2+z^2=15$ (еліпсоїд) в точці $M_0(1,2,3)$.

Розв'язання. Маємо $F(x,y,z)=2x^2+y^2+z^2-15$,

$F'_x=4x$, $F'_y=2y$, $F'_z=2z$, $F'_x(M_0)=4$, $F'_y(M_0)=4$, $F'_z(M_0)=6$.

Отже, рівняння дотичної площини має вигляд:
$4(x-1)+4(y-2)+6(z-3)=0$; $2x+2y+3z-15=0$.
Рівняння нормалі:
$\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{6}$; $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}$.
Відповідь: $2x+2y+3z-15=0$; $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}$.

3.5.5 ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1. Дослідити на екстремум функцію:
1) $z=2xy+x^2+y^3-4x-5y+3$,
2) $z=x^2+y^2-2x+2y+3$
2. Обчислити найбільше та найменше значення функції
1) $z=x^2+y^2-9xy+27$ в області D, що визначена системою нерівностей $0\le x\le 3$, $0\le y\le 3$. Побудувати область;
2) $z=3-2x^2-xy-y^2$ в області D, що визначена системою нерівностей $x\le 1,\ y\ge 0,\ y\le x$. Побудувати область.
3. Написати рівняння нормалі до поверхні $x^4+x^2y^2+y^6+y^3z^2+z^8=5$ в точці M(1;1;1)
4. Написати рівняння дотичної площини до поверхні $x^4y+2x^2y^3+xyz^2+e^z=4$ в точці M(1;1;0)
5. Знайти умовний екстремум функції $z=x+4y$ при умові $x^2-y-2=0$

ВІДПОВІДІ

1.1. $z_{\min}(1;1)=-2$. 1.2. $z_{\min}(1;-1)=1$. 2.1. $\max\limits_{D} z=z(0;3)=z(3;0)=36$; $\min\limits_{D} z=z(3;3)=-36$. 2.2. $\max\limits_{D} z=z(0;0)=3$; $\min\limits_{D} z=z(1;1)=-1$.

3. $\frac{x-1}{6}=\frac{y-1}{11}=\frac{z-1}{10}$. 4. $8x+7y+z-15=0$. 5. $z_{\min}\left(-\frac{1}{8};-\frac{127}{64}\right)=-\frac{129}{16}$.

4 ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ДОМАШНІХ ЗАВДАНЬ

4.1 ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ДОМАШНІХ ЗАВДАНЬ З ТЕМИ «ЛІНІЙНА АЛГЕБРА»

Варіант 1

1. Обчислити визначник четвертого порядку.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

2. Виконати дії з матрицями.

$$2A(B-A),\ \text{якщо}\ A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

3. Розв’язати систему лінійних рівнянь трьома способами:
- за формулами Крамера;
- матричним методом;
- методом Гаусса.

$$\begin{cases} x+3y-z=8; \\ 2x+4y-3z=13; \\ x-2y-z=-2. \end{cases}$$

4. Дослідити, чи має нетривіальні розв’язки однорідна система лінійних рівнянь. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв’язок.

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2-x_3+5x_4=0; \\ x_1-x_2+2x_3-6x_4=0; \\ x_1-4x_2+x_3-3x_4=0; \\ 3x_1+3x_2+4x_3-x_4=0. \end{cases}$$

5. Дослідити неоднорідну систему лінійних рівнянь на сумісність. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв’язок.

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+4x_4=5; \\ 4x_1-2x_2+5x_3+6x_4=7; \\ 6x_1-3x_2+7x_3+8x_4=9; \\ 8x_1-4x_2+9x_3+10x_4=11. \end{cases}$$

Варіант 2

1. Обчислити визначник четвертого порядку.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -5 \end{vmatrix}$$

2. Виконати дії з матрицями.

$$2B(A+B), \text{ якщо } A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь трьома способами:
- за формулами Крамера;
- матричним методом;
- методом Гаусса.

$$\begin{cases} -x+2y+3z=14; \\ 2x+y-z=-3; \\ x+4y-2z=1. \end{cases}$$

4. Дослідити, чи має нетривіальні розв'язки однорідна система лінійних рівнянь. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв'язок.

$$\begin{cases} 2x_1+8x_2+14x_3+6x_4=0; \\ x_1+5x_2+9x_3+8x_4=0; \\ 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=0; \\ x_1+3x_2+5x_3-2x_4=0. \end{cases}$$

5. Дослідити неоднорідну систему лінійних рівнянь на сумісність. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв'язок.

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+4x_4=2; \\ 5x_1+4x_2+x_3+3x_4=-5; \\ x_1+3x_2-2x_3+2x_4=-4; \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4=-3. \end{cases}$$

Варіант 3

1. Обчислити визначник четвертого порядку.

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -5 \end{vmatrix}$$

2. Виконати дії з матрицями.

$$(A-2B)A, \text{ якщо } A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь трьома способами:
- за формулами Крамера;
- матричним методом;
- методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x+2y-7z=-19; \\ x+y-2z=-5; \\ 3x-y-z=-8. \end{cases}$$

4. Дослідити, чи має нетривіальні розв'язки однорідна система лінійних рівнянь. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв'язок.

$$\begin{cases} 4x_1+x_2+x_3-2x_4=0; \\ x_1+3x_2+x_3-x_4=0; \\ 2x_1-2x_2+x_4=0; \\ 2x_1+3x_2+x_3-3x_4=0. \end{cases}$$

5. Дослідити неоднорідну систему лінійних рівнянь на сумісність. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв'язок.

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2+3x_3-x_4=7; \\ 4x_1+6x_2+3x_3+5x_4=4; \\ 4x_1+14x_2+x_3+7x_4=4; \\ 2x_1+5x_2+x_3+3x_4=2. \end{cases}$$

Варіант 4

1. Обчислити визначник четвертого порядку.

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -5 \end{vmatrix}$$

2. Виконати дії з матрицями.

$$(B+3A)B\text{, якщо } A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь трьома способами:
- за формулами Крамера;
- матричним методом;
- методом Гаусса.

$$\begin{cases} x-y+8z=21; \\ 3x+3y-2z=-3; \\ 5x-4y-z=-16. \end{cases}$$

4. Дослідити, чи має нетривіальні розв'язки однорідна система лінійних рівнянь. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв'язок.

$$\begin{cases} 3x_1+5x_2-5x_3+5x_4=0; \\ x_1+x_2-3x_3+x_4=0; \\ x_1+x_2+x_3+3x_4=0; \\ x_1+2x_2-3x_3+x_4=0. \end{cases}$$

5. Дослідити неоднорідну систему лінійних рівнянь на сумісність. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв'язок.

$$\begin{cases} 5x_1+8x_2-x_3-4x_4=0; \\ x_1-2x_2-x_3+2x_4=2; \\ 4x_1+x_2-2x_3+x_4=3; \\ 3x_1+3x_2-x_3-3x_4=1. \end{cases}$$

Варіант 5

1. Обчислити визначник четвертого порядку.

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & -6 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 6 \\ -3 & 4 & 7 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -5 \end{vmatrix}$$

2. Виконати дії з матрицями.

$$(B-4A)A, \text{ якщо } A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

3. Розв’язати систему лінійних рівнянь трьома способами:
- за формулами Крамера;
- матричним методом;
- методом Гаусса.

$$\begin{cases} x+4y+z=10; \\ 3x-6y-z=-18; \\ 7x-2y+3z=-2. \end{cases}$$

4. Дослідити, чи має нетривіальні розв’язки однорідна система лінійних рівнянь. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв’язок.

$$\begin{cases} 4x_1-x_2+x_3+x_4+5x_5=0; \\ -x_1+4x_2-x_3+5x_4+4x_5=0; \\ x_1+x_2+2x_4+3x_5=0; \\ -x_1+x_2-3x_3+2x_4+x_5=0. \end{cases}$$

5. Дослідити неоднорідну систему лінійних рівнянь на сумісність. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв’язок.

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3-2x_4=-7; \\ x_1-3x_2-x_3+3x_4=4; \\ 2x_1-x_2-3x_3+2x_4=-1; \\ 5x_1-3x_2-5x_3+3x_4=-4. \end{cases}$$

Варіант 6

1. Обчислити визначник четвертого порядку.

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & -6 & 0 \\ 5 & 1 & -1 & 3 \\ -3 & -4 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 8 & -5 \end{vmatrix}$$

2. Виконати дії з матрицями.

$$2A(B-A), \text{ якщо } A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь трьома способами:
- за формулами Крамера;
- матричним методом;
- методом Гаусса.

$$\begin{cases} 6x-y+z=-5; \\ 3x+y-5z=-16; \\ x-4y+2z=-3. \end{cases}$$

4. Дослідити, чи має нетривіальні розв'язки однорідна система лінійних рівнянь. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв'язок.

$$\begin{cases} 3x_1+x_2-2x_3+x_4=0; \\ -x_1+3x_2-4x_3+5x_4=0; \\ 2x_1+4x_2-x_3+3x_4=0; \\ 4x_1-2x_2-3x_3-x_4=0. \end{cases}$$

5. Дослідити неоднорідну систему лінійних рівнянь на сумісність. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв'язок.

$$\begin{cases} -6x_1-9x_2+8x_3-7x_4=-2; \\ 10x_1+15x_2-10x_3+9x_4=4; \\ 2x_1+3x_2-6x_3+5x_4=0; \\ 2x_1+3x_2+9x_3-7x_4=3. \end{cases}$$

Варіант 7

1. Обчислити визначник четвертого порядку.

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & -6 & 1 \\ -5 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & -3 & 9 \\ -1 & -6 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

2. Виконати дії з матрицями.

$$(A-2B)A, \text{ якщо } A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь трьома способами:
- за формулами Крамера;
- матричним методом;
- методом Гаусса.

$$\begin{cases} 9x-y+z=-8; \\ 10x+y-2z=-14; \\ x-4y+3z=0. \end{cases}$$

4. Дослідити, чи має нетривіальні розв'язки однорідна система лінійних рівнянь. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв'язок.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0; \\ x_1 + 3x_3 - 2x_4 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0; \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$

5. Дослідити неоднорідну систему лінійних рівнянь на сумісність. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв'язок.

$$\begin{cases} 3x_1 + 10x_2 + 8x_3 - x_4 = 8; \\ -x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -2; \\ 6x_1 + 23x_2 - 5x_3 + 13x_4 = 13; \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12. \end{cases}$$

Варіант 8

1. Обчислити визначник четвертого порядку.

$$\begin{vmatrix} -4 & -1 & -6 & 1 \\ 5 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

2. Виконати дії з матрицями.

$$2B(A+B), \text{ якщо } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь трьома способами:
- за формулами Крамера;
- матричним методом;
- методом Гаусса.

$$\begin{cases} 8x - y + 4z = 2; \\ x + 7y - z = 10; \\ 3x - 4y + z = -8. \end{cases}$$

4. Дослідити, чи має нетривіальні розв'язки однорідна система лінійних рівнянь. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв'язок.

$$\begin{cases} 5x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 0; \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0; \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$

5. Дослідити неоднорідну систему лінійних рівнянь на сумісність. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв'язок.

$$\begin{cases} 3x_1-7x_2+x_3-5x_4=-8; \\ -x_1-x_2+3x_3+5x_4=6; \\ 5x_1-10x_2-10x_4=-15; \\ x_1-3x_2+x_3-x_4=-2. \end{cases}$$

Варіант 9

1. Обчислити визначник четвертого порядку.

$$\begin{vmatrix} 10 & 0 & -6 & -1 \\ 5 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

2. Виконати дії з матрицями.

$$(B+3A)B, \text{ якщо } A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Розв’язати систему лінійних рівнянь трьома способами:
- за формулами Крамера;
- матричним методом;
- методом Гаусса.

$$\begin{cases} -8x-y-9z=-21; \\ x-8y+11z=16; \\ 3x+2y+z=4. \end{cases}$$

4. Дослідити, чи має нетривіальні розв’язки однорідна система лінійних рівнянь. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв’язок.

$$\begin{cases} 3x_1-x_2+2x_3+x_4=0; \\ 4x_1-3x_2+3x_3=0; \\ 5x_1-5x_2+4x_3-x_4=0; \\ 2x_1+x_2+x_3+2x_4=0. \end{cases}$$

5. Дослідити неоднорідну систему лінійних рівнянь на сумісність. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв’язок.

$$\begin{cases} 6x_1+x_2-10x_4=5; \\ 2x_1+3x_2-4x_3-2x_4=3; \\ 2x_1+x_2-x_3-3x_4=2; \\ -2x_2+3x_3-x_4=-1. \end{cases}$$

Варіант 10

1. Обчислити визначник четвертого порядку.

$$\begin{vmatrix} 10 & 0 & -6 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

2. Виконати дії з матрицями.

$$(B-4A)A,\ \text{якщо}\ A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 1\\ -2 & 0 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ -4 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь трьома способами:
- за формулами Крамера;
- матричним методом;
- методом Гаусса.

$$\begin{cases} x-10y-9z=-48; \\ 6x+y+11z=29; \\ x-2y-7z=-26. \end{cases}$$

4. Дослідити, чи має нетривіальні розв'язки однорідна система лінійних рівнянь. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв'язок.

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2-3x_3+3x_4=0; \\ x_1+4x_2-4x_3+5x_4=0; \\ 4x_1-2x_2-x_3-x_4=0; \\ 4x_1+5x_2-6x_3+6x_4=0. \end{cases}$$

5. Дослідити неоднорідну систему лінійних рівнянь на сумісність. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв'язок.

$$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4; \\ 2x_1+x_2+3x_3-7x_4=5; \\ x_1+3x_2-3x_4=1; \\ -3x_2+x_3+x_4=-3. \end{cases}$$

Варіант 11

1. Обчислити визначник четвертого порядку.

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

2. Виконати дії з матрицями.

$$2A(B-A),\ \text{якщо}\ A=\begin{pmatrix}0 & 5 & -1\\ 3 & -3 & 0\\ -2 & 0 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4 & 0 & 1\\ 3 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь трьома способами:
- за формулами Крамера;
- матричним методом;
- методом Гаусса.

$$\begin{cases} x+3y-z=0; \\ 2x+4y-3z=3; \\ x-2y-z=5. \end{cases}$$

4. Дослідити, чи має нетривіальні розв'язки однорідна система лінійних рівнянь. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв'язок.

$$\begin{cases} 2x_1+2x_3-4x_4-x_5=0; \\ 5x_1-x_2+6x_3-5x_5=0; \\ 6x_1+2x_2+4x_3+7x_4-11x_5=0; \\ x_1+3x_2-2x_3+7x_4-6x_5=0. \end{cases}$$

5. Дослідити неоднорідну систему лінійних рівнянь на сумісність. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв'язок.

$$\begin{cases} 4x_1-2x_2+x_3-4x_4=3; \\ 5x_1-x_2-x_3-2x_4=-1; \\ 7x_1-2x_2-3x_4=0; \\ 2x_1-x_2-3x_4=2. \end{cases}$$

Варіант 12

1. Обчислити визначник четвертого порядку.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 6 \\ -2 & 1 & -1 & -2 \\ -3 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 7 & -5 \end{vmatrix}$$

2. Виконати дії з матрицями.

$$2B(A+B), \text{ якщо } A=\begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь трьома способами:
- за формулами Крамера;
- матричним методом;
- методом Гаусса.

$$\begin{cases} -x+2y+3z=-7; \\ 2x+y-z=4; \\ x+4y-2z=0. \end{cases}$$

4. Дослідити, чи має нетривіальні розв'язки однорідна система лінійних рівнянь. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв'язок.

$$\begin{cases} 2x_1+8x_2+14x_3+6x_4=0; \\ x_1+5x_2+9x_3+8x_4=0; \\ 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=0; \\ x_1+3x_2+5x_3-2x_4=0. \end{cases}$$

5. Дослідити неоднорідну систему лінійних рівнянь на сумісність. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв'язок.

$$\begin{cases} 2x_1+5x_2-16x_3-17x_4=0; \\ x_1+2x_2-3x_3-6x_4=1; \\ 5x_1+8x_2+5x_3-9x_4=9; \\ x_1+17x_3+15x_4=5. \end{cases}$$

Варіант 13.

1. Обчислити визначник четвертого порядку.

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & -3 & 8 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -5 \end{vmatrix}$$

2. Виконати дії з матрицями.

$$(A-2B)A, \text{ якщо } A=\begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Розв’язати систему лінійних рівнянь трьома способами:
- за формулами Крамера;
- матричним методом;
- методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x+2y-7z=9; \\ x+y-2z=3; \\ 3x-y-z=8. \end{cases}$$

4. Дослідити, чи має нетривіальні розв’язки однорідна система лінійних рівнянь. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв’язок.

$$\begin{cases} 2x_1+6x_2+5x_3+5x_4=0; \\ 2x_1+4x_2+3x_3+5x_4=0; \\ x_1+5x_2+5x_3+2x_4=0; \\ 4x_2+x_3-x_4=0. \end{cases}$$

5. Дослідити неоднорідну систему лінійних рівнянь на сумісність. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв’язок.

$$\begin{cases} 5x_1+3x_2-3x_4=3; \\ 4x_1+x_2-x_4=1; \\ 3x_1+2x_3=2; \\ 2x_1+3x_2-x_3-3x_4=2. \end{cases}$$

Варіант 14

1. Обчислити визначник четвертого порядку.

$$\begin{vmatrix} 6 & -2 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & -5 \end{vmatrix}$$

2. Виконати дії з матрицями.

$$\left(B+3A\right)B\text{, якщо } A=\begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Розв’язати систему лінійних рівнянь трьома способами:
- за формулами Крамера;
- матричним методом;
- методом Гаусса.

$$\begin{cases} x-y+8z=-5; \\ 3x+3y-2z=5; \\ 5x-4y-z=15. \end{cases}$$

4. Дослідити, чи має нетривіальні розв’язки однорідна система лінійних рівнянь. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв’язок.

$$\begin{cases} 5x_1+x_2-2x_3+5x_4=0; \\ 3x_1+4x_2-5x_3+7x_4=0; \\ 11x_1+9x_2-12x_3+19x_4=0; \\ 4x_1+11x_2-13x_3+16x_4=0. \end{cases}$$

5. Дослідити неоднорідну систему лінійних рівнянь на сумісність. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв’язок.

$$\begin{cases} 2x_1+5x_2-16x_3-17x_4=0; \\ x_1+2x_2-6x_3-6x_4=1; \\ 5x_1+8x_2+5x_3-9x_4=9; \\ x_1+x_2+7x_3+10x_4=3. \end{cases}$$

Варіант 15

1. Обчислити визначник четвертого порядку.

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & -6 & -1 \\ 12 & 0 & -1 & 6 \\ -3 & 1 & 8 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}$$

2. Виконати дії з матрицями.

$$\left(B-4A\right)A\text{, якщо } A=\begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Розв’язати систему лінійних рівнянь трьома способами:
- за формулами Крамера;
- матричним методом;
- методом Гаусса.

$$\begin{cases} x+4y+z=-3; \\ 3x-6y-z=13; \\ 7x-2y+3z=13. \end{cases}$$

4. Дослідити, чи має нетривіальні розв'язки однорідна система лінійних рівнянь. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв'язок.

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+5x_3+5x_4=0; \\ -x_1-6x_2+7x_3+14x_4=0; \\ x_1+3x_2+2x_4+7x_4=0; \\ -x_2+3x_3+7x_4=0. \end{cases}$$

5. Дослідити неоднорідну систему лінійних рівнянь на сумісність. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв'язок.

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+2x_3-3x_4=4; \\ 5x_1+x_2-x_3-3x_4=-2; \\ 2x_1+x_3-3x_4=2; \\ x_1-x_2+2x_3-4x_4=4. \end{cases}$$

Варіант 16.

1. Обчислити визначник четвертого порядку.

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 \\ 4 & 8 & -1 & 3 \\ -3 & -6 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 10 & -5 \end{vmatrix}$$

2. Виконати дії з матрицями.

$2A(B-A)$, якщо $A=\begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь трьома способами:
- за формулами Крамера;
- матричним методом;
- методом Гаусса.

$$\begin{cases} 6x-y+z=12; \\ 3x+y-5z=10; \\ x-4y+2z=4. \end{cases}$$

4. Дослідити, чи має нетривіальні розв'язки однорідна система лінійних рівнянь. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв'язок.

$$\begin{cases} -x_1-3x_2+2x_3+2x_4-2x_5=0; \\ 3x_1+10x_2-6x_3-6x_4+6x_5=0; \\ 3x_2-2x_3-2x_4+2x_5=0; \\ 3x_1-x_2-2x_3+x_4-x_5=0. \end{cases}$$

5. Дослідити неоднорідну систему лінійних рівнянь на сумісність. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв'язок.

$$\begin{cases} 3x_1+5x_2-3x_3-2x_4=2; \\ x_1+x_2-x_3=0; \\ 3x_1+x_2-3x_3+x_4=-2; \\ 2x_1+3x_2-2x_3-x_4=1. \end{cases}$$

Варіант 17

1. Обчислити визначник четвертого порядку.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & 4 \\ -5 & -6 & -7 & 8 \\ 0 & -4 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

2. Виконати дії з матрицями.

$(A-2B)A$, якщо $A=\begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3. Розв’язати систему лінійних рівнянь трьома способами:

- за формулами Крамера;
- матричним методом;
- методом Гаусса.

$$\begin{cases} 9x-y+z=18; \\ 10x+y-2z=21; \\ x-4y+3z=3. \end{cases}$$

4. Дослідити, чи має нетривіальні розв’язки однорідна система лінійних рівнянь. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв’язок.

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-2x_4=0; \\ 5x_1+x_2+4x_3+2x_4=0; \\ 3x_1+2x_2-2x_3+3x_4=0; \\ 8x_1+3x_2+3x_3+5x_4=0. \end{cases}$$

5. Дослідити неоднорідну систему лінійних рівнянь на сумісність. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв’язок.

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+2x_3-x_4=-3; \\ -x_1-x_2-x_3=2; \\ x_1+x_2-x_3+2x_4=4; \\ 5x_1+3x_2+3x_3-2x_4=-4. \end{cases}$$

Варіант 18

1. Обчислити визначник четвертого порядку.

$$\begin{vmatrix} 7 & -1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & -3 & 1 \\ 1 & 6 & 2 & 8 \end{vmatrix}$$

2. Виконати дії з матрицями.

$$2B(A+B),\text{ якщо } A=\begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь трьома способами:
- за формулами Крамера;
- матричним методом;
- методом Гаусса.

$$\begin{cases} 8x - y + 4z = 18; \\ x + 7y - z = 18; \\ 3x - 4y + z = 0. \end{cases}$$

4. Дослідити, чи має нетривіальні розв'язки однорідна система лінійних рівнянь. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв'язок.

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 15x_3 - 16x_4 = 0; \\ 7x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 15x_4 = 0; \\ 9x_1 - 30x_2 + 8x_3 + 13x_4 = 0; \\ x_1 + 6x_2 - 18x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$$

5. Дослідити неоднорідну систему лінійних рівнянь на сумісність. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв'язок.

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 - x_3 - 5x_4 = -6; \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 6; \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 3; \\ 3x_1 + 2x_2 - 7x_3 - 3x_4 = 6. \end{cases}$$

Варіант 19

1. Обчислити визначник четвертого порядку.

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 6 & -1 \\ 10 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & -5 \end{vmatrix}$$

2. Виконати дії з матрицями.

$$(B+3A)B,\text{ якщо } A=\begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь трьома способами:
- за формулами Крамера;
- матричним методом;
- методом Гаусса.

$$\begin{cases} -8x - y - 9z = -17; \\ x - 8y + 11z = -24; \\ 3x + 2y + z = 12. \end{cases}$$

4. Дослідити, чи має нетривіальні розв’язки однорідна система лінійних рівнянь. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв’язок.

$$\begin{cases} x_1+2x_2-5x_3+13x_4=0; \\ 5x_1+3x_2-8x_3+19x_4=0; \\ 7x_1-x_3-x_4=0; \\ 3x_1+5x_2-6x_3+18x_4=0. \end{cases}$$

5. Дослідити неоднорідну систему лінійних рівнянь на сумісність. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв’язок.

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3+x_4=-1; \\ 3x_1-4x_2+3x_3+4x_4=-4; \\ 5x_1-4x_2+5x_3+4x_4=-4; \\ x_1+2x_2+x_3-2x_4=2. \end{cases}$$

Варіант 20

1. Обчислити визначник четвертого порядку.

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 7 & 7 & -1 \\ 8 & -3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

2. Виконати дії з матрицями.

$(B-4A)A$, якщо $A=\begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

3. Розв’язати систему лінійних рівнянь трьома способами:
- за формулами Крамера;
- матричним методом;
- методом Гаусса.

$$\begin{cases} x-10y-9z=-8; \\ 6x+y+11z=9; \\ x-2y-7z=6. \end{cases}$$

4. Дослідити, чи має нетривіальні розв’язки однорідна система лінійних рівнянь. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв’язок.

$$\begin{cases} 6x_1-7x_2-4x_3-6x_4=0; \\ 2x_1+x_2+8x_3-8x_4=0; \\ -2x_1+4x_2+6x_3+x_4=0; \\ 5x_1-5x_2-x_3-7x_4=0. \end{cases}$$

5. Дослідити неоднорідну систему лінійних рівнянь на сумісність. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв’язок.

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 2x_3 - 6x_4 = -4; \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 0; \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -4; \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -4. \end{cases}$$

Варіант 21

1. Обчислити визначник четвертого порядку.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 6 & 7 & -1 \\ 4 & -3 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

2. Виконати дії з матрицями.

$2B(A+B)$, якщо $A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

3. Розв’язати систему лінійних рівнянь трьома способами:

- за формулами Крамера;
- матричним методом;
- методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x - 12y + z = 9; \\ -x + 2y + 11z = 33; \\ 10x - y - 7z = 2. \end{cases}$$

4. Дослідити, чи має нетривіальні розв’язки однорідна система лінійних рівнянь. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв’язок.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0; \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 6x_4 = 0; \\ 5x_1 + 5x_3 = 0; \\ 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 - 8x_4 = 0. \end{cases}$$

5. Дослідити неоднорідну систему лінійних рівнянь на сумісність. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв’язок.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = 6; \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 4; \\ x_1 - x_3 - x_4 = 2; \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$$

Варіант 22

1. Обчислити визначник четвертого порядку.

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & -6 & 7 & -1 \\ 4 & 8 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

2. Виконати дії з матрицями.

$(A-2B)A$, якщо $A=\begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

3. Розв’язати систему лінійних рівнянь трьома способами:
- за формулами Крамера;
- матричним методом;
- методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x+y=3; \\ 4x+3y-3z=2; \\ -6x+5y+7z=52. \end{cases}$$

4. Дослідити, чи має нетривіальні розв’язки однорідна система лінійних рівнянь. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв’язок.

$$\begin{cases} 5x_1+4x_2+2x_3+3x_4=0; \\ 7x_1+2x_2+4x_4=0; \\ 5x_1-x_2+x_3-x_4=0; \\ -x_1+2x_2-4x_3+7x_4=0. \end{cases}$$

5. Дослідити неоднорідну систему лінійних рівнянь на сумісність. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв’язок.

$$\begin{cases} 3x_1+x_2-4x_3-7x_4=-8; \\ 4x_1-3x_2-5x_3-x_4=-10; \\ 4x_1-4x_2-3x_3-x_4=-6; \\ x_1-4x_2-x_3+6x_4=-2. \end{cases}$$

Варіант 23

1. Обчислити визначник четвертого порядку.

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -6 & 5 & -1 \\ 4 & 8 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

2. Виконати дії з матрицями.

$(B+3A)B$, якщо $A=\begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

3. Розв’язати систему лінійних рівнянь трьома способами:
- за формулами Крамера;
- матричним методом;
- методом Гаусса.

$$\begin{cases} -2x+3y+5z=18; \\ x-3y+4z=25; \\ 7x+8y-z=1. \end{cases}$$

4. Дослідити, чи має нетривіальні розв’язки однорідна система лінійних рівнянь. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв’язок.

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0; \\ 6x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0; \\ 8x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0; \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

5. Дослідити неоднорідну систему лінійних рівнянь на сумісність. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв’язок.

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 7; \\ 7x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 23; \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 16; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$$

Варіант 24

1. Обчислити визначник четвертого порядку.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 3 & -6 & 0 & -1 \\ 1 & 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

2. Виконати дії з матрицями.

$(B-4A)A$, якщо $A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

3. Розв’язати систему лінійних рівнянь трьома способами:
- за формулами Крамера;
- матричним методом;
- методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + y + z = -2; \\ x - y + 2z = -7; \\ 2x + 3y - z = 1. \end{cases}$$

4. Дослідити, чи має нетривіальні розв’язки однорідна система лінійних рівнянь. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв’язок.

$$\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0; \\ x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 0; \\ 7x_1 - 4x_2 + 4x_3 - x_4 = 0; \\ 5x_1 - 2x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

5. Дослідити неоднорідну систему лінійних рівнянь на сумісність. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв’язок.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 - 3x_4 = -2; \\ 4x_1 - x_2 - 12x_3 - 15x_4 = -2; \\ x_1 + 8x_2 - 3x_3 - 12x_4 = 16; \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -4. \end{cases}$$

Варіант 25

1. Обчислити визначник четвертого порядку.

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & -2 \\ 3 & -6 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

2. Виконати дії з матрицями.

$2A(B-A)$, якщо $A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

3. Розв’язати систему лінійних рівнянь трьома способами:
- за формулами Крамера;
- матричним методом;
- методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + y + 3z = -5; \\ 2x - 3y + z = 0; \\ x + 2y - z = 5. \end{cases}$$

4. Дослідити, чи має нетривіальні розв’язки однорідна система лінійних рівнянь. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв’язок.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 0; \\ 4x_1 - x_2 + 4x_3 - 9x_4 = 0; \\ 5x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

5. Дослідити неоднорідну систему лінійних рівнянь на сумісність. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв’язок.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1; \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 + 22x_4 = -1; \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5; \\ 4x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 4. \end{cases}$$

Варіант 26

1. Обчислити визначник четвертого порядку.

$$\begin{vmatrix} 6 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 2 & -6 & 1 & 0 \\ -1 & 9 & -4 & -3 \end{vmatrix}$$

2. Виконати дії з матрицями.

$(A-2B)A$, якщо $A=\begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь трьома способами:
- за формулами Крамера;
- матричним методом;
- методом Гаусса.

$$\begin{cases} x-9y+3z=9; \\ 2x-3y+z=8; \\ 5x+2y-8z=43. \end{cases}$$

4. Дослідити, чи має нетривіальні розв'язки однорідна система лінійних рівнянь. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв'язок.

$$\begin{cases} 3x_1+5x_2-x_3+2x_4=0; \\ 2x_1+4x_2-x_3+3x_4=0; \\ x_1+3x_2-x_3+4x_4=0; \\ x_1-2x_2+6x_3+x_4=0. \end{cases}$$

5. Дослідити неоднорідну систему лінійних рівнянь на сумісність. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв'язок.

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_4=2; \\ 4x_1+3x_2-x_3+2x_4=6; \\ 8x_1+5x_2-3x_3+4x_4=12; \\ x_1+x_2-x_3+x_4=2. \end{cases}$$

Варіант 27

1. Обчислити визначник четвертого порядку.

$$\begin{vmatrix} 9 & -1 & 3 & 8 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

2. Виконати дії з матрицями.

$2B(A+B)$, якщо $A=\begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь трьома способами:
- за формулами Крамера;
- матричним методом;
- методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x-9y+z=23; \\ 2x-4y+3z=2; \\ x+2y-8z=31. \end{cases}$$

4. Дослідити, чи має нетривіальні розв’язки однорідна система лінійних рівнянь. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв’язок.

$$\begin{cases} 7x_1 + 25x_2 + 7x_3 + 6x_4 = 0; \\ 3x_1 + 10x_2 + 8x_3 - x_4 = 0; \\ 6x_1 + 23x_2 - 5x_3 + 13x_4 = 0; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

5. Дослідити неоднорідну систему лінійних рівнянь на сумісність. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв’язок.

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 6; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3; \\ 5x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 18; \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 3. \end{cases}$$

Варіант 28

1. Обчислити визначник четвертого порядку.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -4 \\ 9 & -1 & 0 & -2 \\ 6 & 0 & 1 & 8 \\ 4 & 1 & 7 & 5 \end{vmatrix}$$

2. Виконати дії з матрицями.

$$2A(B-A), \text{ якщо } A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

3. Розв’язати систему лінійних рівнянь трьома способами:
- за формулами Крамера;
- матричним методом;
- методом Гаусса.

$$\begin{cases} 4x - y - 2z = 22; \\ 3x - 4y - 7z = 45; \\ x + 2y + 3z = -13. \end{cases}$$

4. Дослідити, чи має нетривіальні розв’язки однорідна система лінійних рівнянь. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв’язок.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 0; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0; \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

5. Дослідити неоднорідну систему лінійних рівнянь на сумісність. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв’язок.

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 6; \\ x_1 + x_2 - x_3 + 6x_4 = 1; \\ 4x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 11x_4 = 7; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 = 2. \end{cases}$$

Варіант 29

1. Обчислити визначник четвертого порядку.

$$\begin{vmatrix} -8 & 0 & 7 & -6 \\ -1 & 3 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -7 & 5 \end{vmatrix}$$

2. Виконати дії з матрицями.

$2B(A+B)$, якщо $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

3. Розв’язати систему лінійних рівнянь трьома способами:

- за формулами Крамера;
- матричним методом;
- методом Гаусса.

$$\begin{cases} 7x - 7y - 2z = 43; \\ x - 5y - z = 17; \\ 3x + 2y - 9z = 41. \end{cases}$$

4. Дослідити, чи має нетривіальні розв’язки однорідна система лінійних рівнянь. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв’язок.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 0; \\ x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 9x_4 = 0; \\ 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 8x_4 = 0; \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

5. Дослідити неоднорідну систему лінійних рівнянь на сумісність. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв’язок.

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 8x_4 = 1; \\ x_1 + 6x_2 - x_3 + x_4 = 2; \\ 5x_1 + 3x_2 - 6x_3 - 7x_4 = 3; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 8x_4 = -4. \end{cases}$$

Варіант 30

1. Обчислити визначник четвертого порядку.

$$\begin{vmatrix} -5 & 2 & -3 & -6 \\ 7 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 8 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -7 & 5 \end{vmatrix}$$

2. Виконати дії з матрицями.

$$(A-2B)A, \text{ якщо } A=\begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

3. Розв’язати систему лінійних рівнянь трьома способами:
- за формулами Крамера;
- матричним методом;
- методом Гаусса.

$$\begin{cases} 10x-y-2z=42; \\ 5x-y+6z=-13; \\ x+9y-z=-10. \end{cases}$$

4. Дослідити, чи має нетривіальні розв’язки однорідна система лінійних рівнянь. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв’язок.

$$\begin{cases} -x_1-x_2-7x_3+2x_4=0; \\ 4x_1+2x_2-2x_3+7x_4=0; \\ 3x_1+x_2-9x_3++9x_4=0; \\ -5x_1-3x_2-5x_3-5x_4=0. \end{cases}$$

5. Дослідити неоднорідну систему лінійних рівнянь на сумісність. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв’язок.

$$\begin{cases} 6x_1-3x_2-x_3+2x_4=5; \\ 2x_1+5x_2-4x_3-x_4=3; \\ 8x_1+2x_2-5x_3+x_4=8; \\ 4x_1-8x_2+3x_3+3x_4=2. \end{cases}$$

4.2 ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ДОМАШНІХ ЗАВДАНЬ З ТЕМИ «ВЕКТОРНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ»

Варіант 1

1. Задані вектори $\vec{a}(0;1;2), \vec{b}(1;0;1), \vec{c}(-1;2;4), \vec{d}(-2;4;7)$. Визначити:

1)довжину векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 2) скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 3) косинус кута між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 4) векторний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{c}$ і площу трикутника, побудованого на цих векторах; 5) мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ і об'єм піраміди, побудованої на цих векторах; 6) довжину вектора $\vec{m} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$; 7) чи утворюють вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ базис і у випадку позитивної відповіді розкласти вектор $\vec{d}$ за цим базисом.

2. Задані дві прямі $l_1: 2x - 3y + 1 = 0, l_2: x + y - 3 = 0$ та точка $A(2;1)$. Визначити:

1) кутові коефіцієнти прямих l_1, l_2; 2) відстань від точки A до прямої l_1; 3) рівняння прямої l_3, яка перпендикулярна l_1 і проходить через A; 4) рівняння прямої l_4, яка паралельна l_2 і проходить через A; 5) рівняння прямої l_1 у відрізках на осях.

3. Задані чотири точки у просторі $A_1(3;1;4), A_2(-1;6;1), A_3(-1;1;6), A_4(0;4;-1)$. Знайти: 1) довжину відрізків A_1A_2 та A_1A_3; 2) кут між прямими A_1A_2 та A_1A_3; 3) рівняння прямої A_1A_4; 4)рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$; 6) точку перетину прямої A_1A_4 та площини $A_1A_2A_3$.

4. Звести рівняння кривої $4x^2 + 9y^2 - 16x + 36y + 16 = 0$ до канонічного вигляду та побудувати.

Варіант 2

1. Задані вектори $\vec{a}(1;2;3), \vec{b}(-1;3;2), \vec{c}(0;1;2), \vec{d}(2;-2;1)$. Визначити:

1)довжину векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 2) скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 3) косинус кута між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 4) векторний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{c}$ і площу трикутника, побудованого на цих векторах; 5) мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ і об'єм піраміди, побудованої на цих векторах; 6) довжину вектора $\vec{m} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$; 7) чи утворюють вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ базис і у випадку позитивної відповіді розкласти вектор $\vec{d}$ за цим базисом.

2. Задані дві прямі $l_1: x - 2y + 10 = 0, l_2: 2x - 6y - 1 = 0$ та точка $A(2;1)$. Визначити:

1) кутові коефіцієнти прямих l_1, l_2; 2) відстань від точки A до прямої l_1; 3) рівняння прямої l_3, яка перпендикулярна l_1 і проходить через A; 4) рівняння прямої l_4, яка паралельна l_2 і проходить через A; 5) рівняння прямої l_1 у відрізках на осях.

3. Задані чотири точки у просторі $A_1(3;3;9), A_2(6;9;1), A_3(1;7;3), A_4(8;5;8)$. Знайти: 1) довжину відрізків A_1A_2 та A_1A_3; 2) кут між прямими A_1A_2 та A_1A_3; 3)

рівняння прямої A_1A_4; 4)рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$; 6) точку перетину прямої A_1A_4 та площини $A_1A_2A_3$.

4. Звести рівняння кривої $4x^2-9y^2-8x-18y-41=0$ до канонічного вигляду та побудувати

Варіант 3

1. Задані вектори $\vec{a}(-1;1;1), \vec{b}(1;-1;1), \vec{c}(1;1;-1), \vec{d}(0;2;4)$. Визначити:

1)довжину векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 2) скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 3) косинус кута між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 4) векторний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{c}$ і площу трикутника, побудованого на цих векторах; 5) мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ і об'єм піраміди, побудованої на цих векторах; 6) довжину вектора $\vec{m}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$; 7) чи утворюють вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ базис і у випадку позитивної відповіді розкласти вектор $\vec{d}$ за цим базисом.

2. Задані дві прямі $l_1: 4x-y+3=0, l_2: x-3y-5=0$ та точка $A(2;1)$. Визначити:

1) кутові коефіцієнти прямих l_1, l_2; 2) відстань від точки A до прямої l_1; 3) рівняння прямої l_3, яка перпендикулярна l_1 і проходить через A; 4) рівняння прямої l_4, яка паралельна l_2 і проходить через A; 5) рівняння прямої l_1 у відрізках на осях.

3. Задані чотири точки у просторі $A_1(3;5;4), A_2(5;8;3), A_3(1;9;9), A_4(6;4;8)$. Знайти: 1) довжину відрізків A_1A_2 та A_1A_3; 2) кут між прямими A_1A_2 та A_1A_3; 3) рівняння прямої A_1A_4; 4)рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$; 6) точку перетину прямої A_1A_4 та площини $A_1A_2A_3$.

4. Звести рівняння кривої $y^2-5x-4y-1=0$ до канонічного вигляду та побудувати.

Варіант 4

1. Задані вектори $\vec{a}(2;-5;7), \vec{b}(1;3;-1), \vec{c}(1;3;2), \vec{d}(4;1;8)$. Визначити:

1)довжину векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 2) скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 3) косинус кута між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 4) векторний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{c}$ і площу трикутника, побудованого на цих векторах; 5) мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ і об'єм піраміди, побудованої на цих векторах; 6) довжину вектора $\vec{m}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$; 7) чи утворюють вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ базис і у випадку позитивної відповіді розкласти вектор $\vec{d}$ за цим базисом.

2. Задані дві прямі $l_1: 9x+5y-1=0, l_2: 2x+y-5=0$ та точка $A(2;1)$. Визначити:

1) кутові коефіцієнти прямих l_1, l_2; 2) відстань від точки A до прямої l_1; 3) рівняння прямої l_3, яка перпендикулярна l_1 і проходить через A; 4) рівняння прямої l_4, яка паралельна l_2 і проходить через A; 5) рівняння прямої l_1 у відрізках на осях.

3. Задані чотири точки у просторі $A_1(2;4;3), A_2(7;6;3), A_3(4;9;3), A_4(3;6;7)$. Знайти: 1) довжину відрізків A_1A_2 та A_1A_3; 2) кут між прямими A_1A_2 та A_1A_3; 3)

рівняння прямої A_1A_4; 4)рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$; 6) точку перетину прямої A_1A_4 та площини $A_1A_2A_3$.

4. Звести рівняння кривої $x^2+y^2+x-5y-3=0$ до канонічного вигляду та побудувати.

Варіант 5.

1. Задані вектори $\vec{a}(2;1;0),\vec{b}(0;3;-1),\vec{c}(1;0;5),\vec{d}(5;16;10)$. Визначити:

1)довжину векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 2) скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 3) косинус кута між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 4) векторний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{c}$ і площу трикутника, побудованого на цих векторах; 5) мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ і об'єм піраміди, побудованої на цих векторах; 6) довжину вектора $\vec{m}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$; 7) чи утворюють вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ базис і у випадку позитивної відповіді розкласти вектор $\vec{d}$ за цим базисом.

2. Задані дві прямі $l_1: 6x+2y-3=0, l_2: 2x-9y-1=0$ та точка $A(2;1)$. Визначити:

1) кутові коефіцієнти прямих l_1, l_2 ; 2) відстань від точки A до прямої l_1; 3) рівняння прямої l_3, яка перпендикулярна l_1 і проходить через A; 4) рівняння прямої l_4, яка паралельна l_2 і проходить через A; 5) рівняння прямої l_1 у відрізках на осях.

3. Задані чотири точки у просторі $A_1(9;5;5), A_2(-3;7;1), A_3(5;7;8), A_4(6;9;2)$. Знайти: 1) довжину відрізків A_1A_2 та A_1A_3; 2) кут між прямими A_1A_2 та A_1A_3; 3) рівняння прямої A_1A_4; 4)рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$; 6) точку перетину прямої A_1A_4 та площини $A_1A_2A_3$.

4. Звести рівняння кривої $9x^2+4y^2+36x-8y+4=0$ до канонічного вигляду та побудувати.

Варіант 6

1. Задані вектори $\vec{a}(1;3;2),\vec{b}(2;-5;7),\vec{c}(1;3;-1),\vec{d}(4;1;8)$. Визначити:

1)довжину векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 2) скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 3) косинус кута між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 4) векторний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{c}$ і площу трикутника, побудованого на цих векторах; 5) мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ і об'єм піраміди, побудованої на цих векторах; 6) довжину вектора $\vec{m}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$; 7) чи утворюють вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ базис і у випадку позитивної відповіді розкласти вектор $\vec{d}$ за цим базисом.

2. Задані дві прямі $l_1: 7x+y-4=0, l_2: x+4y-10=0$ та точка $A(2;1)$. Визначити:

1) кутові коефіцієнти прямих l_1, l_2 ; 2) відстань від точки A до прямої l_1; 3) рівняння прямої l_3, яка перпендикулярна l_1 і проходить через A; 4) рівняння прямої l_4, яка паралельна l_2 і проходить через A; 5) рівняння прямої l_1 у відрізках на осях.

3. Задані чотири точки у просторі $A_1(0;7;1), A_2(3;1;5), A_3(4;6;2), A_4(3;9;8)$. Знайти: 1) довжину відрізків A_1A_2 та A_1A_3; 2) кут між прямими A_1A_2 та A_1A_3; 3) рівняння прямої A_1A_4; 4)рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$; 6) точку перетину прямої A_1A_4 та площини $A_1A_2A_3$.

4. Звести рівняння кривої $9x^2-4y^2-36x+8y-4=0$ до канонічного вигляду та побудувати.

Варіант 7

1. Задані вектори $\vec{a}(-1;2;5), \vec{b}(4;1;-1), \vec{c}(2;0;1), \vec{d}(5;4;2)$. Визначити:

1)довжину векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 2) скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 3) косинус кута між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 4) векторний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{c}$ і площу трикутника, побудованого на цих векторах; 5) мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ і об'єм піраміди, побудованої на цих векторах; 6) довжину вектора $\vec{m}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$; 7) чи утворюють вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ базис і у випадку позитивної відповіді розкласти вектор $\vec{d}$ за цим базисом.

2. Задані дві прямі $l_1: x-7y-2=0, l_2: 4x+4y-1=0$ та точка $A(2;1)$. Визначити:

1) кутові коефіцієнти прямих l_1, l_2 ; 2) відстань від точки A до прямої l_1; 3) рівняння прямої l_3, яка перпендикулярна l_1 і проходить через A; 4) рівняння прямої l_4, яка паралельна l_2 і проходить через A; 5) рівняння прямої l_1 у відрізках на осях.

3. Задані чотири точки у просторі $A_1(5;5;4), A_2(3;8;4), A_3(3;5;10), A_4(5;8;2)$. Знайти: 1) довжину відрізків A_1A_2 та A_1A_3; 2) кут між прямими A_1A_2 та A_1A_3; 3) рівняння прямої A_1A_4; 4)рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$; 6) точку перетину прямої A_1A_4 та площини $A_1A_2A_3$.

4. Звести рівняння кривої $y^2+4y-3x+10=0$ до канонічного вигляду та побудувати.

Варіант 8

1. Задані вектори $\vec{a}(1;-2;3), \vec{b}(2;-4;1), \vec{c}(3;-1;2), \vec{d}(2;1;4)$. Визначити:

1)довжину векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 2) скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 3) косинус кута між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 4) векторний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{c}$ і площу трикутника, побудованого на цих векторах; 5) мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ і об'єм піраміди, побудованої на цих векторах; 6) довжину вектора $\vec{m}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$; 7) чи утворюють вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ базис і у випадку позитивної відповіді розкласти вектор $\vec{d}$ за цим базисом.

2. Задані дві прямі $l_1: 2x-7y+4=0, l_2: x+y-12=0$ та точка $A(2;1)$. Визначити:

1) кутові коефіцієнти прямих l_1, l_2 ; 2) відстань від точки A до прямої l_1; 3) рівняння прямої l_3, яка перпендикулярна l_1 і проходить через A; 4) рівняння

прямої l_4, яка паралельна l_2 і проходить через A; 5) рівняння прямої l_1 у відрізках на осях.

3. Задані чотири точки у просторі $A_1(6;1;1), A_2(4;6;6), A_3(4;2;0), A_4(1;2;6)$. Знайти: 1) довжину відрізків A_1A_2 та A_1A_3; 2) кут між прямими A_1A_2 та A_1A_3; 3) рівняння прямої A_1A_4; 4)рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$; 6) точку перетину прямої A_1A_4 та площини $A_1A_2A_3$.

4. Звести рівняння кривої $3x^2+3y^2-4y+6x-1=0$ до канонічного вигляду та побудувати.

Варіант 9

1. Задані вектори $\vec{a}(1;2;3), \vec{b}(2;-4;1), \vec{c}(3;-1;2), \vec{d}(12;-9;10)$. Визначити:

1)довжину векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 2) скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 3) косинус кута між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 4) векторний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{c}$ і площу трикутника, побудованого на цих векторах; 5) мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ і об'єм піраміди, побудованої на цих векторах; 6) довжину вектора $\vec{m}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$; 7) чи утворюють вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ базис і у випадку позитивної відповіді розкласти вектор $\vec{d}$ за цим базисом.

2. Задані дві прямі $l_1: 6x-y+2=0, l_2: 6x+9y-5=0$ та точка $A(2;1)$. Визначити:

1) кутові коефіцієнти прямих l_1, l_2 ; 2) відстань від точки A до прямої l_1; 3) рівняння прямої l_3, яка перпендикулярна l_1 і проходить через A; 4) рівняння прямої l_4, яка паралельна l_2 і проходить через A; 5) рівняння прямої l_1 у відрізках на осях.

3. Задані чотири точки у просторі $A_1(7;5;3), A_2(9;4;4), A_3(4;5;7), A_4(7;9;6)$. Знайти: 1) довжину відрізків A_1A_2 та A_1A_3; 2) кут між прямими A_1A_2 та A_1A_3; 3) рівняння прямої A_1A_4; 4)рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$; 6) точку перетину прямої A_1A_4 та площини $A_1A_2A_3$.

4. Звести рівняння кривої $16x^2+9y^2-18y+32x-119=0$ до канонічного вигляду та побудувати.

Варіант 10

1. Задані вектори $\vec{a}(3;5;6), \vec{b}(2;-7;1), \vec{c}(12;0;6), \vec{d}(0;20;18)$. Визначити:

1)довжину векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 2) скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 3) косинус кута між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 4) векторний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{c}$ і площу трикутника, побудованого на цих векторах; 5) мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ і об'єм піраміди, побудованої на цих векторах; 6) довжину вектора $\vec{m}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$; 7) чи утворюють вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ базис і у випадку позитивної відповіді розкласти вектор $\vec{d}$ за цим базисом.

2. Задані дві прямі $l_1: 5x-y+1=0, l_2: 8x+y-50=0$ та точка $A(2;1)$. Визначити:

1) кутові коефіцієнти прямих l_1, l_2 ; 2) відстань від точки A до прямої l_1; 3) рівняння прямої l_3, яка перпендикулярна l_1 і проходить через A; 4) рівняння прямої l_4, яка паралельна l_2 і проходить через A; 5) рівняння прямої l_1 у відрізках на осях.

3. Задані чотири точки у просторі $A_1(6;6;2), A_2(5;4;7), A_3(2;4;7), A_4(7;3;0)$. Знайти:

1) довжину відрізків A_1A_2 та A_1A_3; 2) кут між прямими A_1A_2 та A_1A_3; 3) рівняння прямої A_1A_4; 4)рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$; 6) точку перетину прямої A_1A_4 та площини $A_1A_2A_3$.

4. Звести рівняння кривої $x^2-4y^2-6x+40y-95=0$ до канонічного вигляду та побудувати.

Варіант 11

1. Задані вектори $\vec{a}(-3;1;2), \vec{b}(1;1;-1), \vec{c}(-1;1;-1), \vec{d}(-3;3;0)$. Визначити:

1)довжину векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 2) скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 3) косинус кута між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 4) векторний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{c}$ і площу трикутника, побудованого на цих векторах; 5) мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ і об'єм піраміди, побудованої на цих векторах; 6) довжину вектора $\vec{m}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$; 7) чи утворюють вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ базис і у випадку позитивної відповіді розкласти вектор $\vec{d}$ за цим базисом.

2. Задані дві прямі $l_1: -x-y-9=0, l_2: 9x+y-2=0$ та точка $A(2;1)$. Визначити:

1) кутові коефіцієнти прямих l_1, l_2 ; 2) відстань від точки A до прямої l_1; 3) рівняння прямої l_3, яка перпендикулярна l_1 і проходить через A; 4) рівняння прямої l_4, яка паралельна l_2 і проходить через A; 5) рівняння прямої l_1 у відрізках на осях.

3. Задані чотири точки у просторі $A_1(4;2;5), A_2(0;7;2), A_3(0;2;7), A_4(1;5;0)$. Знайти:

1) довжину відрізків A_1A_2 та A_1A_3; 2) кут між прямими A_1A_2 та A_1A_3; 3) рівняння прямої A_1A_4; 4)рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$; 6) точку перетину прямої A_1A_4 та площини $A_1A_2A_3$.

4. Звести рівняння кривої $y^2-2y+3x+13=0$ до канонічного вигляду та побудувати.

Варіант 12

1. Задані вектори $\vec{a}(2;1;3), \vec{b}(3;2;7), \vec{c}(5;2;4), \vec{d}(10;3;3)$. Визначити:

1)довжину векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 2) скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 3) косинус кута між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 4) векторний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{c}$ і площу трикутника, побудованого на цих векторах; 5) мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ і об'єм піраміди, побудованої на цих векторах; 6) довжину вектора

$\vec{m} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$; 7) чи утворюють вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ базис і у випадку позитивної відповіді розкласти вектор $\vec{d}$ за цим базисом.

2. Задані дві прямі $l_1 : -3x - y + 3 = 0, l_2 : 2x - y + 1 = 0$ та точка $A(2;1)$. Визначити:

1) кутові коефіцієнти прямих l_1, l_2 ; 2) відстань від точки A до прямої l_1; 3) рівняння прямої l_3, яка перпендикулярна l_1 і проходить через A; 4) рівняння прямої l_4, яка паралельна l_2 і проходить через A; 5) рівняння прямої l_1 у відрізках на осях.

3. Задані чотири точки у просторі $A_1(4;4;10), A_2(4;10;2), A_3(2;8;4), A_4(9;6;4)$. Знайти:

1) довжину відрізків A_1A_2 та A_1A_3; 2) кут між прямими A_1A_2 та A_1A_3; 3) рівняння прямої A_1A_4; 4)рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$; 6) точку перетину прямої A_1A_4 та площини $A_1A_2A_3$.

4. Звести рівняння кривої $x^2 + y^2 - 10x + 24y - 56 = 0$ до канонічного вигляду та побудувати.

Варіант 13

1. Задані вектори $\vec{a}(1;3;5), \vec{b}(1;2;-2), \vec{c}(-1;-3;-3), \vec{d}(1;2;0)$. Визначити:

1)довжину векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 2) скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 3) косинус кута між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 4) векторний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{c}$ і площу трикутника, побудованого на цих векторах; 5) мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ і об’єм піраміди, побудованої на цих векторах; 6) довжину вектора $\vec{m} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$; 7) чи утворюють вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ базис і у випадку позитивної відповіді розкласти вектор $\vec{d}$ за цим базисом.

2. Задані дві прямі $l_1 : x + 7y - 10 = 0, l_2 : 10x - 2y + 3 = 0$ та точка $A(2;1)$. Визначити:

1) кутові коефіцієнти прямих l_1, l_2 ; 2) відстань від точки A до прямої l_1; 3) рівняння прямої l_3, яка перпендикулярна l_1 і проходить через A; 4) рівняння прямої l_4, яка паралельна l_2 і проходить через A; 5) рівняння прямої l_1 у відрізках на осях.

3. Задані чотири точки у просторі $A_1(4;6;5), A_2(6;9;1), A_3(2;10;10), A_4(7;5;9)$. Знайти:

1) довжину відрізків A_1A_2 та A_1A_3; 2) кут між прямими A_1A_2 та A_1A_3; 3) рівняння прямої A_1A_4; 4)рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$; 6) точку перетину прямої A_1A_4 та площини $A_1A_2A_3$.

4. Звести рівняння кривої $9x^2 + 16y^2 - 36x + 32y - 92 = 0$ до канонічного вигляду та побудувати.

Варіант 14

1. Задані вектори $\vec{a}(1;3;3), \vec{b}(1;-1;2), \vec{c}(1;-2;1), \vec{d}(-4;3;6)$. Визначити:

1)довжину векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 2) скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 3) косинус кута між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 4) векторний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{c}$ і площу трикутника, побудованого на цих векторах; 5) мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ і об'єм піраміди, побудованої на цих векторах; 6) довжину вектора $\vec{m}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$; 7) чи утворюють вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ базис і у випадку позитивної відповіді розкласти вектор $\vec{d}$ за цим базисом.

2. Задані дві прямі $l_1: 10x+y-5=0, l_2: 3x-y+6=0$ та точка $A(2;1)$. Визначити:

1) кутові коефіцієнти прямих l_1, l_2; 2) відстань від точки A до прямої l_1; 3) рівняння прямої l_3, яка перпендикулярна l_1 і проходить через A; 4) рівняння прямої l_4, яка паралельна l_2 і проходить через A; 5) рівняння прямої l_1 у відрізках на осях.

3. Задані чотири точки у просторі $A_1(3;5;4), A_2(8;7;4), A_3(5;10;4), A_4(4;7;8)$. Знайти:

1) довжину відрізків A_1A_2 та A_1A_3; 2) кут між прямими A_1A_2 та A_1A_3; 3) рівняння прямої A_1A_4; 4)рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$; 6) точку перетину прямої A_1A_4 та площини $A_1A_2A_3$.

4. Звести рівняння кривої $4x^2-y^2+16x+2y+11=0$ до канонічного вигляду та побудувати.

Варіант 15

1. Задані вектори $\vec{a}(3;2;1), \vec{b}(-4;-3;-5), \vec{c}(-1;-1;1), \vec{d}(2;1;12)$. Визначити:

1)довжину векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 2) скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 3) косинус кута між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 4) векторний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{c}$ і площу трикутника, побудованого на цих векторах; 5) мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ і об'єм піраміди, побудованої на цих векторах; 6) довжину вектора $\vec{m}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$; 7) чи утворюють вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ базис і у випадку позитивної відповіді розкласти вектор $\vec{d}$ за цим базисом.

2. Задані дві прямі $l_1: 12x+3y-5=0, l_2: x-2y+8=0$ та точка $A(2;1)$. Визначити:

1) кутові коефіцієнти прямих l_1, l_2; 2) відстань від точки A до прямої l_1; 3) рівняння прямої l_3, яка перпендикулярна l_1 і проходить через A; 4) рівняння прямої l_4, яка паралельна l_2 і проходить через A; 5) рівняння прямої l_1 у відрізках на осях.

3. Задані чотири точки у просторі $A_1(10;6;6), A_2(-2;8;2), A_3(6;8;9), A_4(7;10;3)$. Знайти:

1) довжину відрізків A_1A_2 та A_1A_3; 2) кут між прямими A_1A_2 та A_1A_3; 3) рівняння прямої A_1A_4; 4)рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$; 6) точку перетину прямої A_1A_4 та площини $A_1A_2A_3$.

4. Звести рівняння кривої $y^2+4x-6y+5=0$ до канонічного вигляду та побудувати.

Варіант 16

1. Задані вектори $\vec{a}(2;3;4), \vec{b}(1;2;4), \vec{c}(-1;-3;-5), \vec{d}(1;-2;0)$. Визначити:

1)довжину векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 2) скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 3) косинус кута між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 4) векторний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{c}$ і площу трикутника, побудованого на цих векторах; 5) мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ і об'єм піраміди, побудованої на цих векторах; 6) довжину вектора $\vec{m} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$; 7) чи утворюють вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ базис і у випадку позитивної відповіді розкласти вектор $\vec{d}$ за цим базисом.

2. Задані дві прямі $l_1: 9x - y - 15 = 0, l_2: 2x + 3y + 4 = 0$ та точка $A(2;1)$. Визначити:

1) кутові коефіцієнти прямих l_1, l_2; 2) відстань від точки A до прямої l_1; 3) рівняння прямої l_3, яка перпендикулярна l_1 і проходить через A; 4) рівняння прямої l_4, яка паралельна l_2 і проходить через A; 5) рівняння прямої l_1 у відрізках на осях.

3. Задані чотири точки у просторі $A_1(1;8;2), A_2(5;2;6), A_3(5;7;4), A_4(4;10;9)$. Знайти:

1) довжину відрізків A_1A_2 та A_1A_3; 2) кут між прямими A_1A_2 та A_1A_3; 3) рівняння прямої A_1A_4; 4)рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$; 6) точку перетину прямої A_1A_4 та площини $A_1A_2A_3$.

4. Звести рівняння кривої $3x^2 + 3y^2 + 12x + 24y + 50 = 0$ до канонічного вигляду та побудувати.

Варіант 17

1. Задані вектори $\vec{a}(1;2;5), \vec{b}(1;3;2), \vec{c}(-2;-7;1), \vec{d}(6;16;16)$. Визначити:

1)довжину векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 2) скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 3) косинус кута між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 4) векторний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{c}$ і площу трикутника, побудованого на цих векторах; 5) мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ і об'єм піраміди, побудованої на цих векторах; 6) довжину вектора $\vec{m} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$; 7) чи утворюють вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ базис і у випадку позитивної відповіді розкласти вектор $\vec{d}$ за цим базисом.

2. Задані дві прямі $l_1: 3x - 3y - 1 = 0, l_2: 2x + 4y + 1 = 0$ та точка $A(2;1)$. Визначити:

1) кутові коефіцієнти прямих l_1, l_2; 2) відстань від точки A до прямої l_1; 3) рівняння прямої l_3, яка перпендикулярна l_1 і проходить через A; 4) рівняння прямої l_4, яка паралельна l_2 і проходить через A; 5) рівняння прямої l_1 у відрізках на осях.

3. Задані чотири точки у просторі $A_1(6;6;5), A_2(4;9;5), A_3(4;6;11), A_4(6;9;3)$. Знайти:

1) довжину відрізків A_1A_2 та A_1A_3; 2) кут між прямими A_1A_2 та A_1A_3; 3) рівняння прямої A_1A_4; 4)рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$; 6) точку перетину прямої A_1A_4 та площини $A_1A_2A_3$.

4. Звести рівняння кривої $x^2+4y^2+2x-8y+1=0$ до канонічного вигляду та побудувати.

Варіант 18

1. Задані вектори $\vec{a}(1;5;3),\vec{b}(-2;4;1),\vec{c}(1;-1;1),\vec{d}(-2;0;2)$. Визначити:

1)довжину векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 2) скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 3) косинус кута між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 4) векторний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{c}$ і площу трикутника, побудованого на цих векторах; 5) мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ і об'єм піраміди, побудованої на цих векторах; 6) довжину вектора $\vec{m}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$; 7) чи утворюють вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ базис і у випадку позитивної відповіді розкласти вектор $\vec{d}$ за цим базисом.

2. Задані дві прямі $l_1: 2x+2y-3=0, l_2: x-7y+14=0$ та точка $A(2;1)$. Визначити:

1) кутові коефіцієнти прямих l_1, l_2; 2) відстань від точки A до прямої l_1; 3) рівняння прямої l_3, яка перпендикулярна l_1 і проходить через A; 4) рівняння прямої l_4, яка паралельна l_2 і проходить через A; 5) рівняння прямої l_1 у відрізках на осях.

3. Задані чотири точки у просторі $A_1(7;2;2), A_2(5;7;7), A_3(5;3;1), A_4(2;3;7)$. Знайти:

1) довжину відрізків A_1A_2 та A_1A_3; 2) кут між прямими A_1A_2 та A_1A_3; 3) рівняння прямої A_1A_4; 4)рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$; 6) точку перетину прямої A_1A_4 та площини $A_1A_2A_3$.

4. Звести рівняння кривої $16x^2-9y^2-96x-90y-225=0$ до канонічного вигляду та побудувати.

Варіант 19

1. Задані вектори $\vec{a}(4;2;3),\vec{b}(4;-1;2),\vec{c}(3;1;-1),\vec{d}(5;7;-4)$. Визначити:

1)довжину векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 2) скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 3) косинус кута між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 4) векторний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{c}$ і площу трикутника, побудованого на цих векторах; 5) мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ і об'єм піраміди, побудованої на цих векторах; 6) довжину вектора $\vec{m}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$; 7) чи утворюють вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ базис і у випадку позитивної відповіді розкласти вектор $\vec{d}$ за цим базисом.

2. Задані дві прямі $l_1: 2x+4y-9=0, l_2: 7x-y+14=0$ та точка $A(2;1)$. Визначити:

1) кутові коефіцієнти прямих l_1, l_2; 2) відстань від точки A до прямої l_1; 3) рівняння прямої l_3, яка перпендикулярна l_1 і проходить через A; 4) рівняння

прямої l_4, яка паралельна l_2 і проходить через A; 5) рівняння прямої l_1 у відрізках на осях.

3. Задані чотири точки у просторі $A_1(8;6;4), A_2(10;5;5), A_3(5;6;8), A_4(8;10;7)$. Знайти:

1) довжину відрізків A_1A_2 та A_1A_3; 2) кут між прямими A_1A_2 та A_1A_3; 3) рівняння прямої A_1A_4; 4)рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$; 6) точку перетину прямої A_1A_4 та площини $A_1A_2A_3$.

4. Звести рівняння кривої $x^2+4x-4y+8=0$ до канонічного вигляду та побудувати.

Варіант 20

1. Задані вектори $\vec{a}(3;1;2), \vec{b}(-1;3;-4), \vec{c}(-1;2;-1), \vec{d}(1;6;-3)$. Визначити:

1)довжину векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 2) скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 3) косинус кута між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 4) векторний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{c}$ і площу трикутника, побудованого на цих векторах; 5) мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ і об'єм піраміди, побудованої на цих векторах; 6) довжину вектора $\vec{m}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$; 7) чи утворюють вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ базис і у випадку позитивної відповіді розкласти вектор $\vec{d}$ за цим базисом.

2. Задані дві прямі $l_1: 4x+2y-5=0, l_2: x-7y+21=0$ та точка $A(2;1)$. Визначити:

1) кутові коефіцієнти прямих l_1, l_2; 2) відстань від точки A до прямої l_1; 3) рівняння прямої l_3, яка перпендикулярна l_1 і проходить через A; 4) рівняння прямої l_4, яка паралельна l_2 і проходить через A; 5) рівняння прямої l_1 у відрізках на осях.

3. Задані чотири точки у просторі $A_1(7;7;3), A_2(16;5;8), A_3(3;5;8), A_4(8;4;1)$. Знайти:

1) довжину відрізків A_1A_2 та A_1A_3; 2) кут між прямими A_1A_2 та A_1A_3; 3) рівняння прямої A_1A_4; 4)рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$; 6) точку перетину прямої A_1A_4 та площини $A_1A_2A_3$.

4. Звести рівняння кривої $45x^2+45y^2+30x-13=0$ до канонічного вигляду та побудувати.

Варіант 21

1. Задані вектори $\vec{a}(1;1;2), \vec{b}(1;-1;3), \vec{c}(1;2;-1), \vec{d}(-2;-7;1)$. Визначити:

1)довжину векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 2) скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 3) косинус кута між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 4) векторний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{c}$ і площу трикутника, побудованого на цих векторах; 5) мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ і об'єм піраміди, побудованої на цих векторах; 6) довжину вектора $\vec{m}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$; 7) чи утворюють вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ базис і у випадку позитивної відповіді розкласти вектор $\vec{d}$ за цим базисом.

2. Задані дві прямі $l_1: 10x - y - 20 = 0, l_2: 4x + 8y + 1 = 0$ та точка $A(2;1)$. Визначити:

1) кутові коефіцієнти прямих l_1, l_2; 2) відстань від точки A до прямої l_1; 3) рівняння прямої l_3, яка перпендикулярна l_1 і проходить через A; 4) рівняння прямої l_4, яка паралельна l_2 і проходить через A; 5) рівняння прямої l_1 у відрізках на осях.

3. Задані чотири точки у просторі $A_1(0;7;2), A_2(4;10;2), A_3(6;9;4), A_4(8;7;1)$. Знайти:

1) довжину відрізків A_1A_2 та A_1A_3; 2) кут між прямими A_1A_2 та A_1A_3; 3) рівняння прямої A_1A_4; 4)рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$; 6) точку перетину прямої A_1A_4 та площини $A_1A_2A_3$.

4. Звести рівняння кривої $16x^2 + 25y^2 - 64x - 50y - 311 = 0$ до канонічного вигляду та побудувати.

Варіант 22

1. Задані вектори $\vec{a}(1;4;2), \vec{b}(1;-3;1), \vec{c}(-1;1;-1), \vec{d}(-2;1;1)$. Визначити:

1)довжину векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 2) скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 3) косинус кута між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 4) векторний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{c}$ і площу трикутника, побудованого на цих векторах; 5) мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ і об'єм піраміди, побудованої на цих векторах; 6) довжину вектора $\vec{m} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$; 7) чи утворюють вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ базис і у випадку позитивної відповіді розкласти вектор $\vec{d}$ за цим базисом.

2. Задані дві прямі $l_1: x + 3y = 0, l_2: 5x - 6y - 2 = 0$ та точка $A(2;1)$. Визначити:

1) кутові коефіцієнти прямих l_1, l_2; 2) відстань від точки A до прямої l_1; 3) рівняння прямої l_3, яка перпендикулярна l_1 і проходить через A; 4) рівняння прямої l_4, яка паралельна l_2 і проходить через A; 5) рівняння прямої l_1 у відрізках на осях.

3. Задані чотири точки у просторі $A_1(0;7;2), A_2(2;8;1), A_3(2;10;8), A_4(5;10;2)$. Знайти:

1) довжину відрізків A_1A_2 та A_1A_3; 2) кут між прямими A_1A_2 та A_1A_3; 3) рівняння прямої A_1A_4; 4)рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$; 6) точку перетину прямої A_1A_4 та площини $A_1A_2A_3$.

4. Звести рівняння кривої $4x^2 - y^2 - 16x + 2y + 19 = 0$ до канонічного вигляду та побудувати.

Варіант 23

1. Задані вектори $\vec{a}(1;2;1), \vec{b}(-1;1;-2), \vec{c}(2;-3;-1), \vec{d}(3;0;5)$. Визначити:

1)довжину векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 2) скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 3) косинус кута між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 4) векторний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{c}$ і площу трикутника, побудованого на цих векторах; 5) мішаний добуток векторів

$\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ і об'єм піраміди, побудованої на цих векторах; 6) довжину вектора $\vec{m}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$; 7) чи утворюють вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ базис і у випадку позитивної відповіді розкласти вектор $\vec{d}$ за цим базисом.

2. Задані дві прямі $l_1: x+y-12=0, l_2: 12x-4y+12=0$ та точка $A(2;1)$. Визначити:

1) кутові коефіцієнти прямих l_1, l_2 ; 2) відстань від точки A до прямої l_1; 3) рівняння прямої l_3, яка перпендикулярна l_1 і проходить через A; 4) рівняння прямої l_4, яка паралельна l_2 і проходить через A; 5) рівняння прямої l_1 у відрізках на осях.

3. Задані чотири точки у просторі $A_1(1;5;0), A_2(9;6;2), A_3(5;7;9), A_4(7;4;8)$. Знайти:

1) довжину відрізків A_1A_2 та A_1A_3; 2) кут між прямими A_1A_2 та A_1A_3; 3) рівняння прямої A_1A_4; 4)рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$; 6) точку перетину прямої A_1A_4 та площини $A_1A_2A_3$.

4. Звести рівняння кривої $4x^2-6x-2y-1=0$ до канонічного вигляду та побудувати.

Варіант 24

1. Задані вектори $\vec{a}(2;3;4), \vec{b}(3;-1;2), \vec{c}(-2;2;-1), \vec{d}(-1;3;0)$. Визначити:

1)довжину векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 2) скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 3) косинус кута між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 4) векторний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{c}$ і площу трикутника, побудованого на цих векторах; 5) мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ і об'єм піраміди, побудованої на цих векторах; 6) довжину вектора $\vec{m}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$; 7) чи утворюють вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ базис і у випадку позитивної відповіді розкласти вектор $\vec{d}$ за цим базисом.

2. Задані дві прямі $l_1: 10x+y-15=0, l_2: 15x-10y+1=0$ та точка $A(2;1)$. Визначити:

1) кутові коефіцієнти прямих l_1, l_2 ; 2) відстань від точки A до прямої l_1; 3) рівняння прямої l_3, яка перпендикулярна l_1 і проходить через A; 4) рівняння прямої l_4, яка паралельна l_2 і проходить через A; 5) рівняння прямої l_1 у відрізках на осях.

3. Задані чотири точки у просторі $A_1(6;10;6), A_2(1;8;2), A_3(5;6;5), A_4(2;7;2)$. Знайти:

1) довжину відрізків A_1A_2 та A_1A_3; 2) кут між прямими A_1A_2 та A_1A_3; 3) рівняння прямої A_1A_4; 4)рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$; 6) точку перетину прямої A_1A_4 та площини $A_1A_2A_3$.

4. Звести рівняння кривої $9x^2+9y^2-12y-32=0$ до канонічного вигляду та побудувати.

Варіант 25

1. Задані вектори $\vec{a}(4;1;3), \vec{b}(-1;2;-3), \vec{c}(-3;-2;4), \vec{d}(5;0;10)$. Визначити:

1)довжину векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 2) скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 3) косинус кута між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 4) векторний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{c}$ і площу трикутника, побудованого на цих векторах; 5) мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ і об'єм піраміди, побудованої на цих векторах; 6) довжину вектора $\vec{m} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$; 7) чи утворюють вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ базис і у випадку позитивної відповіді розкласти вектор $\vec{d}$ за цим базисом.

2. Задані дві прямі $l_1 : 8x + y - 8 = 0, l_2 : x - 9y + 9 = 0$ та точка $A(2;1)$. Визначити:

1) кутові коефіцієнти прямих l_1, l_2; 2) відстань від точки A до прямої l_1; 3) рівняння прямої l_3, яка перпендикулярна l_1 і проходить через A; 4) рівняння прямої l_4, яка паралельна l_2 і проходить через A; 5) рівняння прямої l_1 у відрізках на осях.

3. Задані чотири точки у просторі $A_1(6;8;4), A_2(10;5;6), A_3(6;8;5), A_4(10;7;8)$. Знайти:

1) довжину відрізків A_1A_2 та A_1A_3; 2) кут між прямими A_1A_2 та A_1A_3; 3) рівняння прямої A_1A_4; 4)рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$; 6) точку перетину прямої A_1A_4 та площини $A_1A_2A_3$.

4. Звести рівняння кривої $4x^2 + 16y^2 - 8x - -32y - 44 = 0$ до канонічного вигляду та побудувати.

Варіант 26

1. Задані вектори $\vec{a}(1;2;3), \vec{b}(2;3;-1), \vec{c}(-1;4;-1), \vec{d}(-1;-1;4)$. Визначити:

1)довжину векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 2) скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 3) косинус кута між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 4) векторний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{c}$ і площу трикутника, побудованого на цих векторах; 5) мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ і об'єм піраміди, побудованої на цих векторах; 6) довжину вектора $\vec{m} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$; 7) чи утворюють вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ базис і у випадку позитивної відповіді розкласти вектор $\vec{d}$ за цим базисом.

2. Задані дві прямі $l_1 : 20x + 10y - 9 = 0, l_2 : 4x - y + 16 = 0$ та точка $A(2;1)$. Визначити:

1) кутові коефіцієнти прямих l_1, l_2; 2) відстань від точки A до прямої l_1; 3) рівняння прямої l_3, яка перпендикулярна l_1 і проходить через A; 4) рівняння прямої l_4, яка паралельна l_2 і проходить через A; 5) рівняння прямої l_1 у відрізках на осях.

3. Задані чотири точки у просторі $A_1(-2;8;2), A_2(9;8;6), A_3(10;3;7), A_4(6;10;8)$. Знайти:

1) довжину відрізків A_1A_2 та A_1A_3; 2) кут між прямими A_1A_2 та A_1A_3; 3) рівняння прямої A_1A_4; 4)рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$; 6) точку перетину прямої A_1A_4 та площини $A_1A_2A_3$.

4. Звести рівняння кривої $16x^2-9y^2+96x+54y+207=0$ до канонічного вигляду та побудувати.

Варіант 27

1. Задані вектори $\vec{a}(2;1;1),\vec{b}(-3;4;-4),\vec{c}(1;2;0),\vec{d}(-7;-1;-5)$. Визначити:

1)довжину векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 2) скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 3) косинус кута між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 4) векторний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{c}$ і площу трикутника, побудованого на цих векторах; 5) мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ і об'єм піраміди, побудованої на цих векторах; 6) довжину вектора $\vec{m}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$; 7) чи утворюють вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ базис і у випадку позитивної відповіді розкласти вектор $\vec{d}$ за цим базисом.

2. Задані дві прямі $l_1: 7x+y-21=0, l_2: 5x-10y+1=0$ та точка $A(2;1)$. Визначити:

1) кутові коефіцієнти прямих l_1, l_2 ; 2) відстань від точки A до прямої l_1; 3) рівняння прямої l_3, яка перпендикулярна l_1 і проходить через A; 4) рівняння прямої l_4, яка паралельна l_2 і проходить через A; 5) рівняння прямої l_1 у відрізках на осях.

3. Задані чотири точки у просторі $A_1(3;-1;3), A_2(1;6;-1), A_3(1;-1;-6), A_4(4;0;-1)$. Знайти:

1) довжину відрізків A_1A_2 та A_1A_3; 2) кут між прямими A_1A_2 та A_1A_3; 3) рівняння прямої A_1A_4; 4)рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$; 6) точку перетину прямої A_1A_4 та площини $A_1A_2A_3$.

4. Звести рівняння кривої $x^2-6x+4y+5=0$ до канонічного вигляду та побудувати.

Варіант 28

1. Задані вектори $\vec{a}(5;3;2),\vec{b}(8;-2;1),\vec{c}(1;6;-1),\vec{d}(2;-7;-5)$. Визначити:

1)довжину векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 2) скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 3) косинус кута між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 4) векторний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{c}$ і площу трикутника, побудованого на цих векторах; 5) мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ і об'єм піраміди, побудованої на цих векторах; 6) довжину вектора $\vec{m}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$; 7) чи утворюють вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ базис і у випадку позитивної відповіді розкласти вектор $\vec{d}$ за цим базисом.

2. Задані дві прямі $l_1: 20x+2y+1=0, l_2: 8x+y-4=0$ та точка $A(2;1)$. Визначити:

1) кутові коефіцієнти прямих l_1, l_2 ; 2) відстань від точки A до прямої l_1; 3) рівняння прямої l_3, яка перпендикулярна l_1 і проходить через A; 4) рівняння прямої l_4, яка паралельна l_2 і проходить через A; 5) рівняння прямої l_1 у відрізках на осях.

3. Задані чотири точки у просторі $A_1(-3;-3;-9), A_2(6;1;8), A_3(1;-7;-3), A_4(1;-4;0)$. Знайти:

1) довжину відрізків A_1A_2 та A_1A_3; 2) кут між прямими A_1A_2 та A_1A_3; 3) рівняння прямої A_1A_4; 4)рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$; 6) точку перетину прямої A_1A_4 та площини $A_1A_2A_3$.

4. Звести рівняння кривої $8x^2+8y^2-16x+48y+73=0$ до канонічного вигляду та побудувати.

Варіант 29

1. Задані вектори $\vec{a}(1;2;5), \vec{b}(1;3;2), \vec{c}(-2;-7;1), \vec{d}(6;16;16)$. Визначити:

1)довжину векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 2) скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 3) косинус кута між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 4) векторний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{c}$ і площу трикутника, побудованого на цих векторах; 5) мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ і об'єм піраміди, побудованої на цих векторах; 6) довжину вектора $\vec{m}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$; 7) чи утворюють вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ базис і у випадку позитивної відповіді розкласти вектор $\vec{d}$ за цим базисом.

2. Задані дві прямі $l_1: x-8y-6=0, l_2: 6x-y+2=0$ та точка $A(2;1)$. Визначити:

1) кутові коефіцієнти прямих l_1, l_2 ; 2) відстань від точки A до прямої l_1; 3) рівняння прямої l_3, яка перпендикулярна l_1 і проходить через A; 4) рівняння прямої l_4, яка паралельна l_2 і проходить через A; 5) рівняння прямої l_1 у відрізках на осях.

3. Задані чотири точки у просторі $A_1(-3;5;-4), A_2(5;-8;3), A_3(0;1;9), A_4(-6;-4;-8)$. Знайти:

1) довжину відрізків A_1A_2 та A_1A_3; 2) кут між прямими A_1A_2 та A_1A_3; 3) рівняння прямої A_1A_4; 4)рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$; 6) точку перетину прямої A_1A_4 та площини $A_1A_2A_3$.

4. Звести рівняння кривої $y^2-10y+2x+31=0$ до канонічного вигляду та побудувати.

Варіант 30

1. Задані вектори $\vec{a}(7;5;10), \vec{b}(2;-3;-11), \vec{c}(3;2;5), \vec{d}(15;15;36)$. Визначити:

1)довжину векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 2) скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 3) косинус кута між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$; 4) векторний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{c}$ і площу трикутника, побудованого на цих векторах; 5) мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ і об'єм піраміди, побудованої на цих векторах; 6) довжину вектора $\vec{m}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$; 7) чи утворюють вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ базис і у випадку позитивної відповіді розкласти вектор $\vec{d}$ за цим базисом.

2. Задані дві прямі $l_1: 3x+2y+4=0, l_2: 9x+y+21=0$ та точка $A(2;1)$. Визначити:

1) кутові коефіцієнти прямих l_1, l_2 ; 2) відстань від точки A до прямої l_1; 3) рівняння прямої l_3, яка перпендикулярна l_1 і проходить через A; 4) рівняння прямої l_4, яка паралельна l_2 і проходить через A; 5) рівняння прямої l_1 у відрізках на осях.

3. Задані чотири точки у просторі $A_1(5;4;5), A_2(-3;8;-4), A_3(3;-5;10), A_4(0;-8;2)$. Знайти:

1) довжину відрізків A_1A_2 та A_1A_3; 2) кут між прямими A_1A_2 та A_1A_3; 3) рівняння прямої A_1A_4; 4)рівняння площини $A_1A_2A_3$; 5) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$; 6) точку перетину прямої A_1A_4 та площини $A_1A_2A_3$.

4. Звести рівняння кривої $16x^2+4y^2+64x+8y+4=0$ до канонічного вигляду та побудувати.

4.3 ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ДОМАШНІХ ЗАВДАНЬ З ТЕМИ «ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ І БАГАТЬОХ ЗМІННИХ»

Варіант 1

1. Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+2x^3-8x^4}{x^4+4x+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$; 3) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x^3-2x-1)(x+1)}{x^4+4x^2-5}$; 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{6x}$.

2. Знайти похідну функцій:

1) $y=\dfrac{3x^2-1}{\log_5^5 x}$; 2) $x^3+y^3-3xy=0$; 3) $\begin{cases}x=2tgt,\\ y=2\sin t+\sin 2t;\end{cases}$ 4) $y=(\cos x)^{2x}$

3. Знайти частинні похідні z_x, z_y функції $z=\ln\left(3x-x^2+5xy\right)$

4. Провести повне дослідження функції $y=\dfrac{17-x^2}{4x-5}$ та побудувати її графік

5. Дослідити функцію двох змінних $z=x^2+y^2-9xy+27$ на екстремум

Варіант 2

1.Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+2x^3-4}{x^4+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{5x-4}$; 3) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sqrt{1-x}-2}{x^2+x-6}$; 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg6x}{\sin 4x}$.

2. Знайти похідну функцій:

1) $y=\sqrt[3]{tg\dfrac{x}{2}}$; 2) $2(x-y)+y^3-3=0$; 3) $\begin{cases}x=t-tgt,\\ y=1+ctgt.\end{cases}$ 4) $y=(2x)^{\cos x}$

3. Знайти частинні похідні z_x, z_y функції $z=\sqrt{3xy-x^2+5y^2}$

4. Провести повне дослідження функції $y=\dfrac{x^3-4x}{3x^2-4}$ та побудувати її графік

5. Дослідити функцію двох змінних $z=x^2+2y^2+1$ на екстремум

Варіант 3

1.Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+1}{4x^2+3x+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-5x+4}-\sqrt{4x^2+3}\right)$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{5x-4}$;

4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{arctg\,6x}{\arcsin 4x}$.

2. Знайти похідну функцій:

1) $y=\ln\left(ctg\left(\arccos\left(\dfrac{x-2}{1-x}\right)\right)\right)$; 2) $(xy)+y-3x=0$; 3) $\begin{cases}x=t-\sin t,\\ y=1+\cos t.\end{cases}$ 4) $y=(2x)^{tgx}$

3. Знайти частинні похідні z_x, z_y функції $z=\left(3xy^2-3yx^2+5y\right)^4$

4. Провести повне дослідження функції $y=\dfrac{2x^2-6}{x-2}$ та побудувати її графік

5. Дослідити функцію двох змінних $z=3-2x^2-y^2-xy$ на екстремум

Варіант 4

1.Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-4x+9}{x^5+5x-7}$; 2) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-2x^2-8x-5}{x^2+4x+3}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+2}\right)^{x-4}$; 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-4x}{arctg\,4x}$.

2. Знайти похідну функцій:

1) $y=4^{-\sin x}\cdot arctg^2 3x$; 2) $y^3-3x+4y=0$; 3) $\begin{cases}x=7t^4-8t,\\ y=1+t.\end{cases}$ 4) $y=(2x-1)^{\sqrt{x}}$

3. Знайти частинні похідні z_x, z_y функції $z=e^{3xy+5y-4x}$

4. Провести повне дослідження функції $y=3-3\ln\dfrac{x}{x+4}$ та побудувати її графік

5. Дослідити функцію двох змінних $z=x^2+3y^2+x-y$ на екстремум

Варіант 5

1.Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x+5}{x^2-7x+7}$; 2) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-x-2}{x^3-2x-4}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x}{3x+2}\right)^{5x-7}$; 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{arctg^2 4x}$.

2. Знайти похідну функцій:

1) $y=\dfrac{\lg\sqrt{x}}{\sin 4x}$; 2) $x-y+y^3-3x^3=0$; 3) $\begin{cases}x=2^{t-1},\\ y=1+t^3.\end{cases}$ 4) $y=\left(\sqrt{2x-1}\right)^x$

3. Знайти частинні похідні z_x, z_y функції $z=\sin\left(6x^4-4y+xy\right)$

4. Провести повне дослідження функції $y=\ln\dfrac{x}{x-2}-2$ та побудувати її графік

5. Дослідити функцію двох змінних $z=5x^2+y^2-3xy+4$ на екстремум

Варіант 6

1.Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-\sqrt{x}+5x+1}{4x^3-7\sqrt{x}+7}$; 2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x}{2x^2-x-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{8x+1}{8x+1}\right)^{5x-4}$; 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 6x}{x^2}$.

2. Знайти похідну функцій:

1) $y=\ln 4x\cdot\arcsin(7x-4)$; 2) $x^5-y^2+yx+3=0$; 3) $\begin{cases}x=t^6-5t,\\ y=1+t^3.\end{cases}$ 4) $y=(\sin x)^{\cos x}$

3. Знайти частинні похідні z_x, z_y функції $z=tg^2\left(6y^2x^4-4xy+y\right)$

4. Провести повне дослідження функції $y=\dfrac{e^{2(x+2)}}{2(x+2)}$ та побудувати її графік

5. Дослідити функцію двох змінних $z=x^2+2y^2+2xy$ на екстремум

Варіант 7

1.Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^4-\sqrt{x}+5x+1}}{4x^2+7}$; 2) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{x^2-16}$; 3) $\lim\limits_{x\to0}\left(1-3tg\,\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$; 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 4x}{x\sin x}$.

2. Знайти похідну функцій:

1) $y=\arcsin^4(5x-4)$; 2) $(xy)+y-3\sqrt{x-1}=0;$ 3) $\begin{cases}x=\cos t,\\ y=t+\sin t.\end{cases}$ 4) $y=\left(x^2+4\right)^{tgx}$

3. Знайти частинні похідні z_x, z_y функції $z=\left(6y^2x^4-4xy+y\right)^2$

4. Провести повне дослідження функції $y=\dfrac{3x^2-7}{2x+1}$ та побудувати її графік

5. Дослідити функцію двох змінних $z=10-x^2+2xy$ на екстремум

Варіант 8

1.Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+x-x^2+5x^5}{4x^6+7x+9}$; 2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to0}(1-\sin 2x)^{\frac{1}{x}}$; 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 6x}{xtgx}$.

2. Знайти похідну функцій:

1) $y=tg\sin(5x-4)$; 2) $x-7y+\cos x-5y^4-1=0$; 3) $\begin{cases}x=2-tgt,\\ y=t+ctgx.\end{cases}$ 4) $y=\left(\dfrac{1}{x-3}\right)^{x^2}$

3. Знайти частинні похідні z_x, z_y функції $z=\cos(4xy+y-x)^2$

4. Провести повне дослідження функції $y=(2x+5)e^{-2(x+2)}$ та побудувати її графік

5. Дослідити функцію двох змінних $z=x^2-y^2+2xy+4x$ на екстремум

Варіант 9

1.Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+5x}{x^6+x+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3+4x^2+5x+2}{x^3-3x-2}$; 3) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^{\frac{2}{x}}$; 4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{6x^2}{arctgx\cdot tgx}$.

2. Знайти похідну функцій:

1) $y=\frac{arctg^3 4x}{\ln x-5}$; 2) $2\sin x+\cos y-3xy=0$; 3) $\begin{cases}x=4tgt,\\ y=\sin 4t-4.\end{cases}$ 4) $y=\left(e^{2x+1}\right)^{\sqrt{x}}$

3. Знайти частинні похідні z_x, z_y функції $z=\ln\left(x^2y+y^2x-3x+4y\right)^2$

4. Провести повне дослідження функції $y=\frac{e^{3-x}}{3-x}$ та побудувати її графік

5. Дослідити функцію двох змінних $z=x^2+xy-2$ на екстремум

Варіант 10

1.Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+5x-6x^3}{2x^3+x+12}$; 2) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2+3x+1}{5x^2+3x+3}\right)^{x^3}$; 4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2tgx}{x^4+x^3}$.

2. Знайти похідну функцій:

1) $y=\left(x^2-4\right)^4\sqrt{3x-1}$; 2) $2\cdot(xy)+\ln x-3y=0$; 3) $\begin{cases}x=t^3-3t^2+2,\\ y=1+\sqrt{2t}\end{cases}$ 4) $y=(\ln x)^{\sqrt{x}}$

3. Знайти частинні похідні z_x, z_y функції $z=\sin\left(2x^2y-3x^3+4y^4\right)$

4. Провести повне дослідження функції $y=2\ln\frac{x}{x+1}-1$ та побудувати її графік

5. Дослідити функцію двох змінних $z=x^2-2xy+2y^2-2y$ на екстремум

Варіант 11

1.Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(2x^3+4x+5\right)\left(x^2+x+1\right)}{(x+2)\left(x^4+2x^3+7x^2+1\right)}$; 2) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-x-6}{2x^2+x-21}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+8}{x-2}\right)^{\frac{3x-1}{4}}$;

4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{arctg\left(x^2+3x\right)}{\arcsin 2x}$.

2. Знайти похідну функцій:

1) $y=arctg^2\frac{1}{x}-e^{\sqrt{x}}$; 2) $\frac{x}{y}+\ln y-3y+3x=0$; 3) $\begin{cases}x=2\cos^3 t,\\ y=4\sin^3 t;\end{cases}$ 4) $y=(arctgx)^x$

3. Знайти частинні похідні z_x, z_y функції $z=\left(x^2+2x-1\right)^{\ln y}$

4. Провести повне дослідження функції $y=(x+2)^2(x-1)^2$ та побудувати її графік

5. Дослідити функцію двох змінних $z=x^3-9xy+y^3$ на екстремум

Варіант 12

1.Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(x^4+9\right)(x+10)(x-1)}{(x+2)\left(6x^2+1\right)x^3}$; 2) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{2x^2+9x-5}{x^3+3x^2-5x+25}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^4+8}{5x^4}\right)^{x^4+4}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x^2}{\cos 7x-\cos 9x}$.

2. Знайти похідну функцій:

1) $y=\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}+e^{tg3x}$; 2) $e^{x-y}+2x+4y^2-9=0$; 3) $\begin{cases} x=arctgt, \\ y=\ln\left(1+t^2\right); \end{cases}$

4) $y=\left(x^2+x+1\right)^{\sin x}$

3. Знайти частинні похідні z_x, z_y функції $z=\dfrac{\sqrt{x^2-y-2}}{x^2-y^2}$

4. Провести повне дослідження функції $y=\dfrac{x^3+2x^2}{(x-1)^2}$ та побудувати її графік

5. Дослідити функцію двох змінних $z=xy^2-4x+8y-11$ на екстремум

Варіант 13

1.Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+5)^2(7x+1)^2(x+6)}{\left(x^4+2x^3+7x^2+1\right)x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-x^2-2x-12}{x^3-27}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x-\sin 2x}{\sin x}$.

2. Знайти похідну функцій:

1) $y=arctg\sqrt[5]{4x^2-1}+ctg^7x^3$; 2) $4xy+\ln y-\ln x=0$; 3) $\begin{cases} x=4\cos^2 t, \\ y=2\sin^2 t; \end{cases}$ 4) $y=\left(x^3+9\right)^x$

3. Знайти частинні похідні z_x, z_y функції $z=\sqrt{\dfrac{2y+4}{\sin x}}$

4. Провести повне дослідження функції $y=x\cdot\ln^2 x$ та побудувати її графік

5. Дослідити функцію двох змінних $z=x^2+y^2-2x+4y+5$ на екстремум

Варіант 14

1.Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(4x^3+1\right)^3}{(x+2)\left(7x^2+1\right)(x-1)^6}$; 2) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-5x-6}{x^3-4x^2-8x-24}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-2}\right)^{2x+3}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x^2+7x}$.

2. Знайти похідну функцій:

1) $y=\arcsin^2\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^3$; 2) $y-2x-arcctgy=0$; 3) $\begin{cases} x=2(\cos t+t\sin t), \\ y=2(\sin t-t\cos t); \end{cases}$

4) $y=(\sin x)^{\arcsin x}$

3. Знайти частинні похідні z_x, z_y функції $z=\arcsin\dfrac{2x}{y-2}$

4. Провести повне дослідження функції $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ та побудувати її графік

5. Дослідити функцію двох змінних $z=xy+2x+6y-7$ на екстремум

Варіант 15

1.Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(2x^3+4x+5\right)\left(x^2+x+1\right)^2}{(x+2)^3\left(x^4+2x^3+7x^2+1\right)}$; 2) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+3x+2}{x^3+x^2+4}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+9}{5x-2}\right)^{-x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{3\mathrm{arc}tg2x}$.

2. Знайти похідну функцій:

1) $y=\sqrt{\ln^4 x+1}$; 2) $\sin\left(\dfrac{x}{y}\right)+\cos(xy)=0$; 3) $\begin{cases} x=\dfrac{t}{1+t^3}, \\ y=\dfrac{t^2}{1+t^3}; \end{cases}$ 4) $y=(tgx)^{arctgx}$

3. Знайти частинні похідні z_x, z_y функції $z=e^{-\cos^2(3x-5y)}$

4. Провести повне дослідження функції $y=x^2\cdot e^{-x}$ та побудувати її графік

5. Дослідити функцію двох змінних $z=2xy+x^2+y^2-4x+2y+3$ на екстремум

Варіант 16

1.Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(3x^2+x+1\right)^4}{(x+2)^8}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^4+2}{x+2}\right)^{\frac{4}{x}}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos x}{1-\cos x}$.

2. Знайти похідну функцій:

1) $y=\sin\sqrt{\lg x-2}$; 2) $\frac{x}{8}+\frac{8}{y}-8xy=0$; 3) $\begin{cases} x=\arccos t, \\ y=\sqrt{1-t^2}; \end{cases}$ 4) $y=(\ln x)^{\ln x}$

3. Знайти частинні похідні z_x, z_y функції $z=x^{4-y^2}$

4. Провести повне дослідження функції $y=x^2\ln x$ та побудувати її графік

5. Дослідити функцію двох змінних $z=4xy-x^2-y^2+6x+4y-5$ на екстремум

Варіант 17

1.Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(2x^3+4x+5\right)^6}{\left(x^6+2x^3+7x^2+1\right)^3}$; 2) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^2+8x+15}{x^2+5x+6}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{10x+8}{10x-2}\right)^{5x}$;

4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{\arcsin 3x}$.

2. Знайти похідну функцій:

1) $y=\left(\sin 2^{x+5}\right)^{10}$; 2) $\sqrt{xy}=x$; 3) $\begin{cases} x=\cos t+t\sin t, \\ y=\sin t-t\cos t; \end{cases}$ 4) $y=(\cos x)^{9x}$

3. Знайти частинні похідні z_x, z_y функції $z=arctg\left(x^4-y^2\right)$

4. Провести повне дослідження функції $y=\frac{\ln x}{x}$ та побудувати її графік

5. Дослідити функцію двох змінних $z=2x^2+9y^2-4x-6y+2$ на екстремум

Варіант 18

1.Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(2x^3+5\right)(x+1)}{x^4+2x^3+7x^2+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^3+3x^2-4x-12}{x^3+3x^2+x+3}$; 3) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{11x+1}{12x+1}\right)^{\frac{11}{x}}$;

4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{8}\right)}{x}$.

2. Знайти похідну функцій:

1) $y=\ln\sqrt[5]{\left(7-12x^2\right)^3}$; 2) $xe^y+e^x=0$; 3) $\begin{cases} x=e^t\cos t, \\ y=e^t\sin t; \end{cases}$ 4) $y=(\sin x)^{5x}$

3. Знайти частинні похідні z_x, z_y функції $z=arcctg\frac{y^2}{x}$

4. Провести повне дослідження функції $y=(x-2)e^{-\frac{1}{x}}$ та побудувати її графік

5. Дослідити функцію двох змінних $z=3x^2+y^2+6x-4y-10$ на екстремум

Варіант 19

1.Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(4x+5)\left(x^2+x+1\right)}{(x+2)\left(7x^2+1\right)}$; 2) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2x^2-11x-21}{x^2-9x+14}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^2+10}{5x^2+12}\right)^{5x+11}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\left(5(x+\pi)\right)}{e^{3x}-1}$.

2. Знайти похідну функцій:

1) $y=5\ln^4(\arcsin^2 5x)$; 2) $\dfrac{x}{y}+xy-1=0$; 3) $\begin{cases} x=\ln\left(1+4t^2\right), \\ y=arcctg\,2t; \end{cases}$ 4) $y=(tgx)^{3x+1}$

3. Знайти частинні похідні z_x, z_y функції $z=(\ln y)^{2x-1}$

4. Провести повне дослідження функції $y=xe^{-2x+2}$ та побудувати її графік

5. Дослідити функцію двох змінних $z=x^3+y^3-6xy+10$ на екстремум

Варіант 20

1.Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(2x^3+x+5\right)\left(x^8+x+1\right)}{(x+2)\left(x^7+2x^3+7x^2+1\right)}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2-5x}{3x^2-5x+7}\right)^{x+1}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x\arcsin 4x}$.

2. Знайти похідну функцій:

1) $y=4^{-\cos x}\cdot ctg^2 3x$; 2) $4\ln(x+y)-y^2=0$; 3) $\begin{cases} x=\arcsin 3t, \\ y=\ln\left(1+9t^2\right); \end{cases}$ 4) $y=\left(x^2-1\right)^{\ln x}$

3. Знайти частинні похідні z_x, z_y функції $z=(\sin x)^{tgy}$

4. Провести повне дослідження функції $y=\dfrac{x^3}{x^2-4}$ та побудувати її графік

5. Дослідити функцію двох змінних $z=xy+4x+12y+24$ на екстремум

Варіант 21

1.Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)\left(x^9+x+1\right)}{\left(x^3+2\right)\left(3x^7+x^3+x^2+8\right)}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4+6x-2x^3}{4x^2-5x+1}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{5-2x}{11-2x}\right)^{x+1}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2-x}{\sin x-\sin 3x}$.

2. Знайти похідну функцій:

1) $y=\sqrt{tg5x}\cdot e^{-\cos^2 x}$; 2) $4y^4x-\sin\left(\frac{x}{y}\right)=1$; 3) $\begin{cases} x=2t+\cos 3t, \\ y=-\sin 3t; \end{cases}$ 4) $y=\left(\ln x^2+5\right)^{\sqrt{x}}$

3. Знайти частинні похідні z_x, z_y функції $z=\sqrt{2x+5y-xy}$

4. Провести повне дослідження функції $y=x+\frac{2}{x-4}$ та побудувати її графік

5. Дослідити функцію двох змінних $z=2(x-y)-3x^2-3y^2$ на екстремум

Варіант 22

1.Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(2x^4+x+1\right)\left(x+1\right)}{\left(4x^3+2\right)\left(2x^3+7x^2+1\right)}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2+4x-8}{3x^2-5x-2}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{7x+5}{7x-2}\right)^{\frac{x^2}{x+1}}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x^2-x^3}{\sqrt{1-\cos x}}$.

2. Знайти похідну функцій:

1) $y=\arccos^3(5x-3)\cdot 8^{ctg^2 3x}$; 2) $\sin\frac{2x}{y}-xy=4$; 3) $\begin{cases} x=\sin^3 3t, \\ y=\cos^3 3t; \end{cases}$ 4) $y=\left(\sqrt{x}-1\right)^{3\ln x}$

3. Знайти частинні похідні z_x, z_y функції $z=\frac{y+4x}{x+4y}$

4. Провести повне дослідження функції $y=x\cdot e^{2x^2-3}$ та побудувати її графік

5. Дослідити функцію двох змінних $z=x^3+y^3-3xy+10$ на екстремум

Варіант 23

1.Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(2x^{10}+5\right)\left(4x^2+x-9\right)}{\left(9x^9-2\right)\left(2x^3+7x^2+1\right)}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^3-x-1}{x^3-4x+3}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+9}{x^2+7}\right)^{x+8}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\left(\sin 4x+\sin 6x\right)}$.

2. Знайти похідну функцій:

1) $y=\arcsin 4^{-\cos x}\cdot\ln\left(\sqrt{2x+3}\right)$; 2) $\sin(2x+3y)-\cos(3x+2y)=0$;

3) $\begin{cases} x=\frac{4}{3t}, \\ y=t^4+t^3+t^2+1; \end{cases}$ 4) $y=(x+9)^{tg5x}$

3. Знайти частинні похідні z_x, z_y функції $z=y\ln\left(x^2-2x+6\right)$

4. Провести повне дослідження функції $y=\frac{x^2}{x-9}$ та побудувати її графік

5. Дослідити функцію двох змінних $z=x^3+8y^3-6xy+5$ на екстремум

Варіант 24

1.Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(0,2x^3+x^5\right)\left(5x^8+x\right)}{(x+2)(x-6)\left(0,1x^2+4\right)\left(x^7+2x^3+7x^2+1\right)}$; 2) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3+2x-33}{2x^3-5x^2-2x-3}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\ln(x+3)-\ln(x+1)\right)$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x\cdot\operatorname{arc}tg 4x}$.

2. Знайти похідну функцій:

1) $y=\ln^3(\sin x+4)-\frac{3x+8}{\cos^2 x}$; 2) $arctg\left(\frac{x+y}{x-y}\right)-5y^2+3x^2=0$; 3) $\begin{cases}x=(1+\cos 2t)t,\\ y=(1-\sin 2t)t;\end{cases}$

4) $y=\left(\ln x^2-1\right)^{ctgx}$

3. Знайти частинні похідні z_x, z_y функції $z=(tgx)^{2\sin y}$

4. Провести повне дослідження функції $y=\frac{16}{x^2(x+4)}$ та побудувати її графік

5. Дослідити функцію двох змінних $z=10+6x-x^2-xy-y^2$ на екстремум

Варіант 25

1.Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3(x+5)\left(x^3+x+7\right)}{9x^7+2x^3-9x^2+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^4-1}{2x^3+3x^2+2x+1}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{\sin x}}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{cos 6x-\cos 4x}{3x\cdot\sin 4x}$.

2. Знайти похідну функцій:

1) $y=\sqrt[4]{3+ctg^2 3x}-\left(x^2+4x\right)^5$; 2) $(x-y)\sin x+e^{xy}=0$; 3) $\begin{cases}x=\operatorname{arc}tg 2t,\\ y=\ln\left(1+4t^2\right);\end{cases}$

4) $y=\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{x}}$

3. Знайти частинні похідні z_x, z_y функції $z=e^{xy}+2x^3-5y^4$

4. Провести повне дослідження функції $y=\frac{4}{x^2}-8x-12$ та побудувати її графік

5. Дослідити функцію двох змінних $z=x^2+xy+y^2-6x-9y$ на екстремум

Варіант 26

1.Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x^3+6)(x+9)(x^2+x+1)}{(x-2)(2x^3-7x^5+1)}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{2x}}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2+7x}$.

2. Знайти похідну функцій:

1) $y=2^{3-\sqrt{\cos x}}\cdot ctg^4(3x+2)$; 2) $e^{2x}-y^2+\frac{y}{x}=0$; 3) $\begin{cases} x=\arccos 3t, \\ y=\frac{1}{1-9t^2}; \end{cases}$ 4) $y=(\ln x-1)^{x^2}$

3. Знайти частинні похідні z_x, z_y функції $z=\arcsin(2x-5y)$

4. Провести повне дослідження функції $y=\frac{x^3}{x^2-x+1}$ та побудувати її графік

5. Дослідити функцію двох змінних $z=-xy+15x-2x^2-2y^2+12$ на екстремум

Варіант 27

1.Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^8+x+1}}{(x+2)(2x^3+1)}$; 2) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{3x^3-11x^2-3x-4}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-\frac{1}{\cos x}\right)^{3ctg^2 x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{tgx\cdot\arcsin 4x}$.

2. Знайти похідну функцій:

1) $y=\frac{\ln^2(\sin x+1)}{\ln(\sin x+1)^2}-\sqrt{tg^5 3x}$; 2) $xy^3+yx^3-\ln(x+y)=1$; 3) $\begin{cases} x=e^{2t+3}, \\ y=(1+9t^2)^3; \end{cases}$

4) $y=\left(\sqrt{x^5-1}\right)^{arctgx}$

3. Знайти частинні похідні z_x, z_y функції $z=\sqrt{x}\cos\frac{x}{y}$

4. Провести повне дослідження функції $y=x^2-x+\frac{2}{x^2-x}$ та побудувати її графік

5. Дослідити функцію двох змінних $z=8xy-x^2y-xy^2$ на екстремум

Варіант 28

1.Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+9}-x\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^4-16}{3x^2-x-10}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x}{x^2+x+7}\right)^{x-5}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x-1}{x\sin 2x}$.

2. Знайти похідну функцій:

1) $y=\ln^3\left(x^2-2x+4\right)\cdot\cos^2 3x$; 2) $\sin\left(x^2+y\right)-y^2+10=0$; 3) $\begin{cases} x=5e^{3t}, \\ y=10e^{6t}; \end{cases}$

4) $y=\left(arctgx^2\right)^{4\ln x}$

3. Знайти частинні похідні z_x, z_y функції $z=\dfrac{y^2}{x}-\dfrac{x}{2y}$

4. Провести повне дослідження функції $y=\dfrac{3x}{x^2-4}$ та побудувати її графік

5. Дослідити функцію двох змінних $z=-2x^2-y^2+xy+20x+30y-10$ на екстремум

Варіант 29

1.Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^6+x+5}}{(x+2)(5x-6)(3x-4)}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-4}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+3x}{3x-8}\right)^{\frac{6x^2+1}{x}}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 x-\sin^3 3x}{8x}$.

2. Знайти похідну функцій:

1) $y=arctg^3 2x\cdot(5x-2)^6$; 2) $\sin(2xy)-3y+5x^2=0$; 3) $\begin{cases} x=4t^2+3t+5, \\ y=\ln t; \end{cases}$

4) $y=\left(\dfrac{x+1}{2x}\right)^{\sqrt{x}}$

3. Знайти частинні похідні z_x, z_y функції $z=\dfrac{x^2-y^2}{2x+4y}$

4. Провести повне дослідження функції $y=(3-x)e^{-x}$ та побудувати її графік

5. Дослідити функцію двох змінних $z=x^3+y^2-6xy-39x+18y+12$ на екстремум

Варіант 30

1.Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{3x-1}-\sqrt{6x+4}\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-8x-3}{x^2-9}$; 3) $\lim\limits_{x\to 4}\left(4-\dfrac{3x}{4}\right)^{8tg\frac{\pi x}{8}}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 7x}{\cos^2 x-1}$.

2. Знайти похідну функцій:

1) $y=\sqrt[3]{6x^3+2x+3}-\cos\dfrac{3x+3}{x-1}$; 2) $\ln\left(\dfrac{x+y}{3}\right)-2y^2x=0$; 3) $\begin{cases} x=\cos 2t, \\ y=\sin^4 t; \end{cases}$

4) $y=(ctg5x)^{3\ln x+2}$

3. Знайти частинні похідні z_x, z_y функції $z=\left(\sqrt{\ln x}-\sqrt{\ln y}\right)^3$

4. Провести повне дослідження функції $y=\dfrac{4+x^2}{4x}$ та побудувати її графік

5. Дослідити функцію двох змінних $z=x^3+y^3-2xy+4$ на екстремум

5. ЗРАЗКИ ВИКОНАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ДОМАШНІХ ЗАВДАНЬ.

5.1 ЗРАЗОК ВИКОНАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ДОМАШНІХ ЗАВДАНЬ З ТЕМИ «ЛІНІЙНА АЛГЕБРА»

1. Обчислити визначник четвертого порядку

$$\begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 8 & 1 \\ -7 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

1) Виберемо «ведучий» елемент, бажано 1. Будемо утворювати нулі в рядку або стовпці, де міститься цей елемент. Візьмемо $a_{24}=1$. Утворимо нулі у четвертому стовпці. Для цього:

– елементи першого рядка перепишемо без змін, тому що перший рядок вже містить 0 у 4-му стовпці;
– елементи другого рядка перепишемо без змін, тому що він містить «ведучий» елемент $a_{24}=1$;
– елементи третього рядка змінимо так: елементи другого рядка помножимо на –1 і додамо до елементів третього рядка;
– елементи четвертого рядка змінимо так: елементи другого рядка помножимо на –4 і додамо до елементів четвертого рядка.

Отже, будемо мати:

$$\begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & \boxed{1} \\ 5 & -2 & 8 & 1 \\ -7 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I \\ II \\ III+(-1)\,II \\ III+(-4)\,II \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 1 \\ 6 & -6 & 5 & 0 \\ -3 & -13 & -11 & 0 \end{vmatrix}.$$

2) Розкладемо отриманий визначник за елементами четвертого стовпця, використовуючи формулу:

$$|A| = a_{14}A_{14} + A_{24}a_{24} + A_{34}a_{34} + A_{44}a_{44},$$

де a_{i4} – елементи четвертого стовпця, A_{i4} – їх алгебраїчні доповнення.

$$\begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & 1 \\ 6 & -6 & 5 & 0 \\ -3 & -13 & -11 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 6 & -6 & 5 \\ -3 & -13 & -11 \end{vmatrix}$$

Обчислимо визначник третього порядку будь-яким відомим способом і одержимо відповідь 645.

2. Виконати дії з матрицями.

$$C = 2A\cdot(3B - A), \text{ якщо } A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

1) Обчислимо $3B$, для чого помножимо кожен елемент матриці B на 3:

$$3B = 3\cdot\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -3 \\ 6 & -12 & 18 \end{pmatrix}.$$

2) Обчислимо $3B - A$, для чого від кожного елемента матриці $3B$ віднімемо відповідний елемент матриці A:

$$3B - A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -3 \\ 6 & -12 & 18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 5 & -6 & -7 \\ 7 & -11 & 16 \end{pmatrix}.$$

3) Обчислимо $2A$, для чого помножимо кожен елемент матриці A на 2:

$$2A = 2\cdot\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 2 \\ -4 & 6 & 8 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

4) Обчислимо добуток матриць

$$2A\cdot(3B - A) = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 2 \\ -4 & 6 & 8 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 5 & -6 & -7 \\ 7 & -11 & 16 \end{pmatrix},$$

для чого елементи i-го рядка, i=1,2,3, матриці $2A$ помножимо відповідно на елементи j-го, j=1,2,3, стовпця матриці $3B - A$, а результати додамо. Таким чином будемо мати елементи c_{ij} матриці C:

$c_{11} = 8\cdot5 + 0\cdot5 + 2\cdot7 = 54$,

$c_{12} = 8\cdot0 + 0\cdot(-6) + 2\cdot(-11) = -22$,

$c_{13} = 8\cdot(-1) + 0\cdot(-7) + 2\cdot16 = 24$,

$c_{21} = -4\cdot5 + 6\cdot5 + 8\cdot7 = 66$,

$c_{22} = -4\cdot0 + 6\cdot(-6) + 8\cdot(-11) = -124$,

$c_{23} = -4\cdot(-1) + 6\cdot(-7) + 8\cdot16 = 90$,

$c_{31} = -2\cdot5 + (-2)\cdot5 + 4\cdot7 = 8$,

$c_{32} = -2\cdot0 + (-2)\cdot(-6) + 4\cdot(-11) = -32$,

$c_{33} = -2\cdot(-1) + (-2)\cdot(-7) + 4\cdot16 = 80$.

Відповідь: $C = \begin{pmatrix} 54 & -22 & 24 \\ 66 & -124 & 90 \\ 8 & -32 & 80 \end{pmatrix}$.

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь трьома способами:

1) за формулами Крамера;

2) матричним методом;
3) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 17; \\ 4x_1 - x_2 + 7x_3 = -9; \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 19. \end{cases}$$

Розв'язання.

1) Розв'яжемо систему за формулами Крамера.

Складемо і обчислимо визначник системи Δ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 7 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 122 .$$

Оскільки $\Delta = 122 \neq 0$, то система невироджена, тому можна використовувати формули Крамера. Складемо і обчислимо визначники $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, які одержуються заміною відповідного стовпця (першого, другого або третього) стовпцем вільних членів:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 17 & 3 & -1 \\ -9 & -1 & 7 \\ 19 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 610, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 17 & -1 \\ 4 & -9 & 7 \\ 5 & 19 & 1 \end{vmatrix} = 122, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 17 \\ 4 & -1 & -9 \\ 5 & -2 & 19 \end{vmatrix} = -488 .$$

За формулами Крамера маємо:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{610}{122} = 5, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{122}{122} = 1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-488}{122} = -4 .$$

Відповідь: $x_1 = 5$, $x_2 = 1$, $x_3 = -4$.

2) Розв'яжемо систему матричним методом. Запишемо систему у матричній формі $A \cdot X = B$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 7 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ -9 \\ 19 \end{pmatrix},$$

де $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 7 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 17 \\ -9 \\ 19 \end{pmatrix}$.

Складемо і обчислимо визначник системи:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 7 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 122 .$$

Оскільки $|A| = 122 \neq 0$, то матриця невироджена, значить, існує A^{-1}, і систему можна розв'язати матричним методом. Побудуємо матрицю, транспоновану до матриці системи:

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & -2 \\ -1 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для кожного елемента матриці A^T знайдемо його алгебраїчне доповнення

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 7 & 1\end{vmatrix}=13;\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3 & -2\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-1;\quad A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3 & -1\\ -1 & 7\end{vmatrix}=20;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}4 & 5\\ 7 & 1\end{vmatrix}=31;\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2 & 5\\ -1 & 1\end{vmatrix}=7;\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2 & 4\\ -1 & 7\end{vmatrix}=-18;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}4 & 5\\ -1 & -2\end{vmatrix}=-3;\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2 & 5\\ 3 & -2\end{vmatrix}=19;\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-14.$$

Отже

$$A^*=\begin{pmatrix}13 & -1 & 20\\ 31 & 7 & -18\\ -3 & 19 & -14\end{pmatrix}.$$

Таким чином, за формулою $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$ будемо мати:

$$A^{-1}=\frac{1}{122}\cdot\begin{pmatrix}13 & -1 & 20\\ 31 & 7 & -18\\ -3 & 19 & -14\end{pmatrix}.$$

Знайдемо розв’язок системи за формулою $X=A^{-1}\cdot B$:

$$X=\frac{1}{122}\cdot\begin{pmatrix}13 & -1 & 20\\ 31 & 7 & -18\\ -3 & 19 & -14\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}17\\ -9\\ 19\end{pmatrix}=\frac{1}{122}\cdot\begin{pmatrix}13\cdot 17+(-1)\cdot(-9)+20\cdot 19\\ 31\cdot 17+7\cdot(-9)+(-18)\cdot 19\\ -3\cdot 17+19\cdot(-9)+(-14)\cdot 19\end{pmatrix}=\frac{1}{122}\cdot\begin{pmatrix}610\\ 122\\ -488\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ 1\\ -4\end{pmatrix}.$$

Відповідь: $x_1=5$, $x_2=1$, $x_3=-4$.

3) Розв’яжемо систему методом Гаусса.

Випишемо розширену матрицю системи і виконаємо над її рядками елементарні перетворення.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 3 & -1 & 17\\ 4 & -1 & 7 & -9\\ 5 & -2 & 1 & 19\end{array}\right)$$

Виберемо «ведучий» елемент, бажано 1. Будемо утворювати нулі у стовпці, де міститься цей елемент. Візьмемо $a_{13}=-1$. Утворимо нулі у третьому стовпці. Для цього:

– елементи другого рядка змінимо так: елементи першого рядка помножимо на 7 і додамо до елементів другого рядка;

– елементи третього рядка змінимо так: елементи першого додамо до елементів третього рядка.

Отже, будемо мати:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 3 & \boxed{-1} & 17\\ 4 & -1 & 7 & -9\\ 5 & -2 & 1 & 19\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 3 & -1 & 17\\ 18 & 20 & 0 & 110\\ 7 & 1 & 0 & 36\end{array}\right)\sim$$

Переставимо другий та третій рядок:

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 17 \\ 7 & 1 & 0 & 36 \\ 18 & 20 & 0 & 110 \end{array}\right)\sim$$

Елементи третього рядка помножимо на $\frac{1}{2}$.

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 17 \\ 7 & 1 & 0 & 36 \\ 9 & 10 & 0 & 55 \end{array}\right)\sim$$

Виберемо новий «ведучий» елемент, нехай $a_{22}=1$, і будемо утворювати нуль під ним. Для цього елементи другого рядка помножимо на –10 і додамо до елементів третього рядка;

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 17 \\ 7 & \boxed{1} & 0 & 36 \\ 9 & 10 & 0 & 55 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 17 \\ 7 & 1 & 0 & 36 \\ -61 & 0 & 0 & -305 \end{array}\right).$$

Складемо систему, яка відповідає останній матриці:

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=17; \\ 7x_1+x_2=36; \\ -61x_1=-305. \end{cases}$$

З останнього рівняння $x_1=5$.

З другого рівняння $7\cdot5+x_2=36$, $x_2=1$.

З першого рівняння $2\cdot5+3\cdot1-x_3=17$, $x_3=-4$.

Відповідь: $x_1=5$, $x_2=1$, $x_3=-4$.

4. Дослідити, чи має нетривіальні розв'язки однорідна система лінійних рівнянь. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв'язок.

$$\begin{cases} 4x_1-x_2+7x_3+8x_4=0; \\ x_1+3x_2+x_3-7x_4=0; \\ 5x_1+2x_2+8x_3+x_4=0; \\ 3x_1-4x_2+6x_3+15x_4=0. \end{cases}$$

Розв'язання. Дослідимо систему на сумісність, для чого визначимо ранг матриці системи. Для визначення рангу випишемо матрицю системи і виконаємо над її рядками елементарні перетворення.

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 1 & -7 \\ 5 & 2 & 8 & 1 \\ 3 & -4 & 6 & 15 \end{pmatrix}\sim$$

Переставимо перший та другий рядок і виберемо «ведучий» елемент

$$\sim\begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 1 & -7 \\ 4 & -1 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 8 & 1 \\ 3 & -4 & 6 & 15 \end{pmatrix}\begin{Vmatrix} I \\ II+I\cdot(-4) \\ III+I\cdot(-5) \\ IV+I\cdot(-5) \end{Vmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -7 \\ 0 & -13 & 3 & 36 \\ 0 & -13 & 3 & 36 \\ 0 & -13 & 3 & 36 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -7 \\ 0 & -13 & 3 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\sim$$

Викреслимо нульові рядки.

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -7 \\ 0 & -13 & 3 & 36 \end{pmatrix}\Rightarrow r(A)=2.$$

Оскільки $r(A)=2<n=4$, то система сумісна і невизначена, тобто має безліч розв'язків.

Визначимо число вільних і базисних невідомих.

$n=4$, $r=2$, $n-r=4-2=2$ – є два вільних невідомих: x_2 і x_4.

Невідомі x_1 і x_3 – базисні.

Виразимо базисні невідомі через вільні. Для цього застосуємо метод Гаусса до матриці системи:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -7 \\ 0 & -13 & 3 & 36 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -7 \\ 0 & -\frac{13}{3} & 1 & 12 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & \frac{22}{3} & 0 & -19 \\ 0 & -\frac{13}{3} & 1 & 12 \end{pmatrix},$$

звідки $\begin{cases} x_1=-\dfrac{22}{3}x_2+19x_4; \\ x_3=\dfrac{13}{3}x_2-12x_4. \end{cases}$

Знаходимо загальний розв'язок системи. Вільним невідомим можна надавати будь-яких значень. Нехай $x_2=\alpha$, $x_4=\beta$, де $\alpha,\beta\in R$. Тоді

$$x_1=-\frac{22}{3}\alpha+19\beta,\ x_3=\frac{13}{3}\alpha-12\beta.$$

Нехай $\alpha\neq 0$, $\beta=0$. Тоді

$$x_1=-\frac{22}{3}\alpha,\ x_2=\alpha,\ x_3=\frac{13}{3}\alpha,\ x_4=0.$$

Нехай $\alpha=0$, $\beta\neq 0$. Тоді

$$x_1=19\beta,\ x_2=0,\ x_3=-12\beta,\ x_4=\beta.$$

Запишемо загальний розв'язок у вигляді матриці-рядка

$$X=\alpha\begin{pmatrix} -\frac{22}{3} & 1 & \frac{13}{3} & 0 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 19 & 0 & -12 & 1 \end{pmatrix},\text{ де }\alpha,\beta\in R.$$

5. Дослідити неоднорідну систему лінійних рівнянь на сумісність. У випадку позитивної відповіді, знайти її загальний розв'язок.

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4=10; \\ 2x_1+3x_2-x_3+5x_4=1; \\ 4x_1-2x_2+5x_3+7x_4=-3; \\ 6x_1+x_2+4x_3+12x_4=-2. \end{cases}$$

Розв'язання. Дослідимо систему на сумісність, для чого визначимо ранг розширеної матриці системи. Для визначення рангу випишемо розширену матрицю системи і виконаємо над її рядками елементарні перетворення.

$$A=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -4 & 10 \\ 2 & 3 & -1 & 5 & 1 \\ 4 & -2 & 5 & 7 & -3 \\ 6 & 1 & 4 & 12 & -2 \end{array}\right)\begin{array}{|c} I \\ II+(-2)\cdot I \\ III+(-4)\cdot I \\ IV+(-6)\cdot I \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -4 & 10 \\ 0 & 5 & -3 & 13 & -19 \\ 0 & 2 & 1 & 23 & -43 \\ 0 & 7 & -2 & 36 & -62 \end{array}\right)\begin{array}{|c} I+(-1)\cdot III \\ II+3\cdot III \\ III \\ IV+2\cdot III \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 0 & -27 & 53 \\ 0 & 11 & 0 & 82 & -148 \\ 0 & 2 & 1 & 23 & -43 \\ 0 & 11 & 0 & 82 & -148 \end{array}\right)\begin{array}{|c} \\ \\ \\ IV-II \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 0 & -27 & 53 \\ 0 & 11 & 0 & 82 & -148 \\ 0 & 2 & 1 & 23 & -43 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 0 & -27 & 53 \\ 0 & 11 & 0 & 82 & -148 \\ 0 & 2 & 1 & 23 & -43 \end{array}\right)\begin{array}{|c} \\ II\cdot\dfrac{1}{11} \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 0 & -27 & 53 \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{82}{11} & -\dfrac{148}{11} \\ 0 & 2 & 1 & 23 & -43 \end{array}\right)\begin{array}{|c} I+3\cdot II \\ II \\ III+(-2)\cdot II \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\dfrac{51}{11} & \dfrac{139}{11} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{82}{11} & -\dfrac{148}{11} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{89}{11} & -\dfrac{177}{11} \end{array}\right).$$

Оскільки $r(A)=r(\tilde{A})=3$, то система сумісна.

Дослідимо систему на визначеність. Оскільки $r(A)=r(\tilde{A})=3<n=4$, то система невизначена, тобто має безліч розв'язків.

Визначимо число вільних і базисних змінних.

$n=4$, $r=3$, $n-r=4-3=1$ – є одна вільна змінна x_4.

Невідомі x_1, x_2, x_3 – базисні.

Виразимо базисні змінні через вільні. Для цього запишемо систему, відповідну останній матриці:

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{139}{11}+\dfrac{51}{11}x_4; \\ x_2=-\dfrac{148}{11}-\dfrac{82}{11}x_4; \\ x_3=-\dfrac{177}{11}-\dfrac{89}{11}x_4. \end{cases}$$

Знайдемо частинний розв'язок системи. Надамо вільному невідомому довільне значення, *Приклад.* $x_4=11$. Тоді $x_1=190$, $x_2=-230$, $x_3=-266$

Отже, частинний розв'язок є $(190 \quad -230 \quad -266 \quad 11)$.

Знайдемо загальний розв'язок однорідної системи, відповідної даній.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0; \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0; \\ 6x_1 + x_2 + 4x_3 + 12x_4 = 0. \end{cases}$$

Використовуючи вище розв'язане, маємо

$$\begin{cases} x_1 = \frac{51}{11}x_4; \\ x_2 = -\frac{82}{11}x_4; \\ x_3 = -\frac{89}{11}x_4. \end{cases}$$

Нехай $x_4 = \alpha$, $\alpha \in R$. Тоді загальний розв'язок однорідної системи має вигляд:

$$\alpha\begin{pmatrix} \frac{51}{11} & -\frac{82}{11} & -\frac{89}{11} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\alpha\begin{pmatrix} 51 & -82 & -89 & 11 \end{pmatrix}, \text{ де } \alpha \in R.$$

Оскільки загальний розв'язок неоднорідної системи дорівнює сумі деякого частинного розв'язку цієї системи і загального розв'язку відповідної однорідної системи, то

$$X = \begin{pmatrix} 190 & -230 & -266 & 11 \end{pmatrix} + \frac{1}{11}\alpha\begin{pmatrix} 51 & -82 & -89 & 11 \end{pmatrix}$$

5.2 ЗРАЗОК ВИКОНАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ДОМАШНІХ ЗАВДАНЬ З ТЕМИ «ВЕКТОРНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ»

1. Задані вектори $\vec{a}(3;3;-1)$, $\vec{b}(2;-1;4)$, $\vec{c}(1;-2;5)$, $\vec{d}(19;-23;51)$

Визначити:

1) довжину векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$;

2) скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$;

3) косинус кута між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$;

4) векторний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{c}$ і площу трикутника, побудованого на цих векторах;

5) мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і об'єм піраміди, побудованої на цих векторах;

6) довжину вектора $\vec{m} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$;

7) чи утворюють вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ базис, і у випадку позитивної відповіді розкласти вектор $\vec{d}$ за цим базисом .

Розв'язання.

1) Знайдемо довжину вектора $\vec{a}(x,y,z)$ за формулою $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, отже

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{9+9+1} = \sqrt{19} \approx 4,36 \text{ (од.)}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{4+1+16} = \sqrt{21} \approx 4,58 \text{ (од.)}$$

2) скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ визначимо, використовуючи формулу

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2,$$

отже $\vec{a}\cdot\vec{b} = 3\cdot 2 + 3\cdot(-1) + (-1)\cdot 4 = 6 - 3 - 4 = -1$.

3) за формулою $\cos\lambda = \dfrac{\overrightarrow{a\cdot b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$ маємо $\cos\lambda = \dfrac{-1}{\sqrt{19}\cdot\sqrt{21}} = \dfrac{-1}{\sqrt{399}} \approx -0,0501.$

Оскільки $\cos\lambda < 0$, то λ – тупий кут, $\lambda \approx 93^o$

4) використаємо формулу $\vec{a}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$, щоб знайти векторний добуток, отже

$$\vec{a}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 13\vec{i} - 16\vec{j} - 9\vec{k}.$$

$S_\Delta = \dfrac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{c}|$ – площа трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{c}$, отже

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\sqrt{13^2 + (-16)^2 + (-9)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{169 + 256 + 81} = \frac{1}{2}\sqrt{506} \approx 11,25\,(\text{кв.од})$$

5) мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ знаходимо за формулою

$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$, отже

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 9 - 18 + 3 = -6$$

$V = \dfrac{1}{6}|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$ – об’єм піраміди, побудованої на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ тоді

$$V = \frac{1}{6}\cdot|-6| = \frac{1}{6}\cdot 6 = 1\,(\text{куб.од})$$

6) знайдемо координати вектора $\vec{m} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$

$\vec{m} = 2(3;3;-1) - 3(2;-1;4) + (1;-2;5) = (6;6;-2) - (6;-3;12) + (1;-2;5) = (1;7;-9)$

Отже, довжина вектора $\vec{m}$

$$|\vec{m}| = \sqrt{1^2 + 7^2 + (-9)^2} = \sqrt{1 + 49 + 81} = \sqrt{131} \approx 11,45\ (\text{од.})$$

7) за вище знайденим $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -6 \neq 0$, отже $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – лінійно незалежні, тому можуть утворювати базис, тоді $\vec{d} = \lambda\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$. Для знаходження чисел λ, β, γ складемо і розв’яжемо систему

$$\begin{cases} 19 = 3\lambda + 2\beta + \gamma; \\ -23 = 3\lambda - \beta - 2\gamma; \\ 51 = -\lambda + 4\beta + 5\gamma. \end{cases}$$

Система має єдиний розв'язок, тому її можна розв'язати будь-яким способом (Крамера, Гаусса, матричним). Використаємо метод Гаусса

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 19 \\ 3 & -1 & -2 & -23 \\ -1 & 4 & 5 & 51 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -5 & -51 \\ 3 & 2 & 1 & 19 \\ 3 & -1 & -2 & -23 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -5 & -51 \\ 0 & 14 & 16 & 172 \\ 0 & 11 & 13 & 130 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -5 & -51 \\ 0 & 7 & 8 & 86 \\ 0 & 11 & 13 & 130 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -5 & -51 \\ 0 & 7 & 8 & 86 \\ 0 & 0 & 3 & -36 \end{array}\right)$$

Таким чином, $3\gamma = -36, \gamma = -12;$

$7\beta + 8\gamma = 86,\ \ 7\beta + 8\cdot(-12) = 86,\ \ \beta = 26;$

$\lambda - 4\beta - 5\gamma = -51,\ \ \lambda - 4\cdot 26 - 5\cdot(-12) = -51,\ \ \lambda = -7$

Отже, $\vec{d} = -7\vec{a} + 26\vec{b} - 12\vec{c}$.

2. Задані дві прямі $l_1: 20x - 5y + 1 = 0$, $l_2: 4x + 7y + 8 = 0$ та точка $M(2;1)$. Визначити:

1) кутові коефіцієнти прямих l_1, l_2;

2) відстань від точки A до прямої l_1;

3) рівняння прямої l_3, яка перпендикулярна l_1 і проходить через A;

4) рівняння прямої l_4, яка паралельна l_2 і проходить через A;

5) рівняння прямої l_1 у відрізках на осях.

Розв'язання.

1) Для знаходження кутових коефіцієнтів потрібно записати рівняння прямих l_1, l_2 у вигляді $y = kx + b$. Маємо

$l_1: 5y = 20x + 1$, $y = 4x + \frac{1}{5}$, $k_1 = 4$;

$l_2: 7y = -4x - 8$, $y = -\frac{4}{7}x - \frac{8}{7}$, $k_2 = -\frac{4}{7}$.

2) $d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ – відстань від точки (x_1, y_1) до прямої $ax + by + c = 0$, отже

$d = \frac{|20\cdot 2 - 5\cdot 1 + 1|}{\sqrt{20^2 + (-5)^2}} = \frac{36}{\sqrt{425}} \approx 1,75$ (од.)

3) Якщо $l_1 \perp l_3$, то $k_1 \cdot k_3 = -1$. Отже, $k_3 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{4}$.

$l_3: y - y_A = k_3(x - x_A)$,

$l_3: y - 1 = -\frac{1}{4}(x - 2)$,

$l_3: x + 4y - 6 = 0$.

4) Якщо $l_2 \parallel l_4$, то $k_2 = k_4$. Отже, $k_4 = -\frac{4}{7}$.

$l_4: y - y_A = k_4(x - x_A)$,

$l_4: y-1=--\frac{4}{7}(x-2)$,

$l_4: 4x+7y-15=0$.

5) $l_1: 20x-5y+1=0$,

$l_1: 20x-5y=-1$,

$l_1: -20x+5y=1$,

$l_1: \frac{x}{-\frac{1}{20}}+\frac{y}{\frac{1}{5}}=1$ – рівняння прямої l_1 у відрізках на осях.

3. Задані чотири точки у просторі $A_1(-1;2;3), A_2(5;1;6), A_3(0;4;-1), A_4(2;-2;-3)$. Знайти:

1) довжину відрізків A_1A_2 та A_1A_3;

2) кут між прямими A_1A_2 та A_1A_3;

3) рівняння прямої A_1A_4;

4) рівняння площини $A_1A_2A_3$;

5) відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$;

6) точку перетину прямої A_1A_4 та площини $A_1A_2A_3$.

Розв'язання.

1) Використаємо формулу $A_1A_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$, отже

$$A_1A_2=\sqrt{(5-(-1))^2+(1-2)^2+(6-3)^2}=\sqrt{36+1+9}=\sqrt{46}\approx 6,78 \text{ (од.)}$$

$$A_1A_3=\sqrt{(0-(-1))^2+(4-2)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{1+4+16}=\sqrt{21}\approx 4,58 \text{ (од.)}$$

2) Кут між прямими A_1A_2 та A_1A_3 знаходимо за формулою $\cos\alpha=\frac{\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2}{|\vec{s}_1|\cdot|\vec{s}_2|}$, де $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ – напрямні вектори прямих A_1A_2, A_1A_3 відповідно. Отже

$\vec{s}_1=\overrightarrow{A_1A_2}=(6;-1;3)$, $\vec{s}_2=\overrightarrow{A_1A_3}=(1;2;-4)$, $|\vec{s}_1|=\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|=\sqrt{46}$, $|\vec{s}_2|=\left|\overrightarrow{A_1A_3}\right|=\sqrt{21}$,

$\vec{s}_1\cdot\vec{s}=6\cdot1+(-1)\cdot2+3\cdot(-4)=6-2-12=-8$.

$\cos\alpha=\frac{8}{\sqrt{46}\cdot\sqrt{21}}=\frac{8}{\sqrt{966}}\approx 0,2574$, звідки $\alpha\approx 75^0$.

3) A_1A_4: $\frac{x-x_1}{x_4-x_1}=\frac{y-y_1}{y_4-y_1}=\frac{z-z_0}{z_4-z_1}$ – рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.

Отже, A_1A_4: $\frac{x+1}{2+1}=\frac{y-2}{-2-2}=\frac{z-3}{-3-3}$,

A_1A_4: $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-3}{-6}$.

4) рівняння площини $A_1A_2A_3$ знаходимо за формулою:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$ – рівняння площини, що проходить через три задані точки.

Отже, $A_1A_2A_3:\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-3 \\ 5+1 & 1-2 & 6-3 \\ 0+1 & 4-2 & -1-3 \end{vmatrix}=0$,

$A_1A_2A_3:\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-3 \\ 6 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix}=0$,

Обчислимо визначник розкладанням за першим рядком:

$(x+1)\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}-(y-2)\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}+(z-3)\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=0$;

$-2(x-1)+27(y-2)+13(z-3)=0$;

$A_1A_2A_3: 2x-27y-13z+95=0$.

5) Відстань від заданої точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до площини $Ax+By+Cz+D=0$ визначається формулою $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. Отже, відстань від точки A_4 до площини $A_1A_2A_3$

$$d=\frac{|2\cdot 2-27\cdot(-2)-13\cdot(-3)+95|}{\sqrt{2^2+(-27)^2+(-13)^2}}=\frac{192}{\sqrt{902}}\approx 6,39\,(\text{од.})$$

6) Щоб знайти точку перетину прямої A_1A_4 та площини $A_1A_2A_3$, розв’яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x-27y-13z+95=0; \\ \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{-4}=\dfrac{z-3}{-6}. \end{cases}$$

Для зручності запишемо рівняння прямої у параметричній формі:

$\dfrac{x+1}{3}=t$, $x+1=3t$, $x=3t-1$,

$\dfrac{y-2}{-4}=t$, $y-2=-4t$, $y=-4t+2$,

$\dfrac{z-3}{-6}=t$, $z-3=-6t$, $z=-6t+3$.

Підставимо дані вирази у рівняння площини:

$2(3t-1)-27(-4t+2)-13(-6t+3)+95=0$,

$6t-2+108t-54+78t-39+95=0$,

$192t=0,\quad t=0$.

Тоді $x=-1$, $y=2$, $z=3$.

Отже, $(-1,2,-3)$ – точка перетину прямої A_1A_4 та площини $A_1A_2A_3$.

4. Звести рівняння кривої

1) $4x^2+3y^2+24x-18y-189=0$;

2) $4x^2-3y^2-8x-6y-35=0$;

3) $y^2+4x-10y+5=0$;

до канонічного вигляду та побудувати її.

Розв'язання.

1) У рівнянні $4x^2+3y^2+24x-18y-189=0$ $A=4>0$, $B=3>0$, отже це рівняння еліпса. Виділимо повні квадрати за x і за y:

$$4\left(x^2+6x+9-9\right)+3\left(y^2-6y+9-9\right)-189=0,$$

$$4\left((x+3)^2-9\right)+3\left((y-3)^2-9\right)-189=0,$$

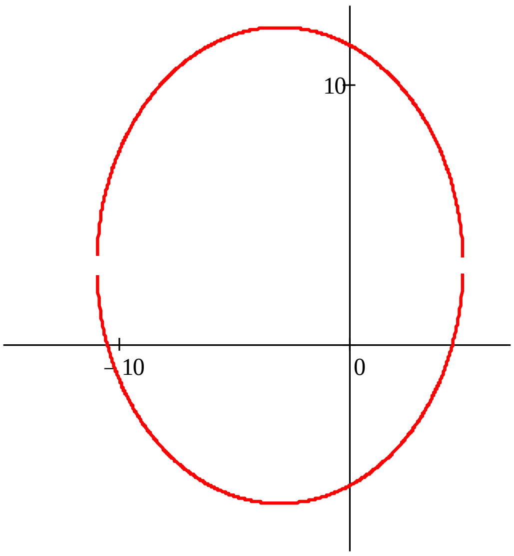
$$4(x+3)^2-36+3(y-3)^2-27-189=0,$$

$$4(x+3)^2+3(y-3)^2-252=0,$$

$$4(x+3)^2+3(y-3)^2=252,$$

$\dfrac{(x+3)^2}{63}+\dfrac{(y-3)^2}{84}=1$ – канонічне рівняння еліпса.

Побудуємо еліпс:



2) У рівнянні $4x^2-3y^2-8x-6y-35=0$ $A=4>0$, $B=-3<0$, отже це рівняння гіперболи. Виділимо повні квадрати за x і за y:

$$4x^2-8x-3y^2-6y-35=0,$$

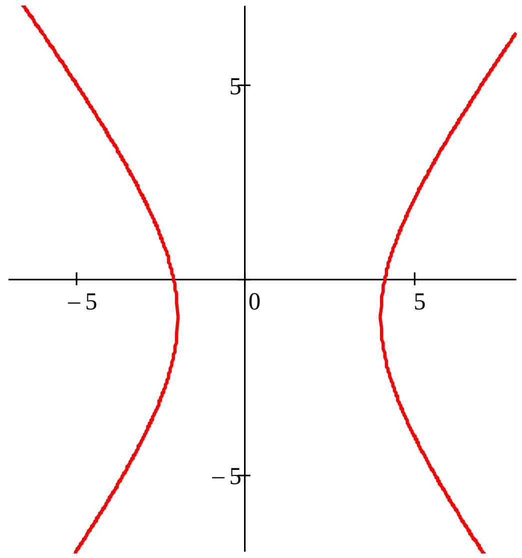
$$4\left(x^2-2x+1-1\right)-3\left(y^2+2y+1-1\right)-35=0,$$

$$4(x-1)^2-4-3(y+1)^2+3-35=0,$$

$$4(x-1)^2-3(y+1)^2=36,$$

$\dfrac{(x-1)^2}{9}-\dfrac{(y+1)^2}{12}=1$ – канонічне рівняння гіперболи.

Побудуємо гіперболу:



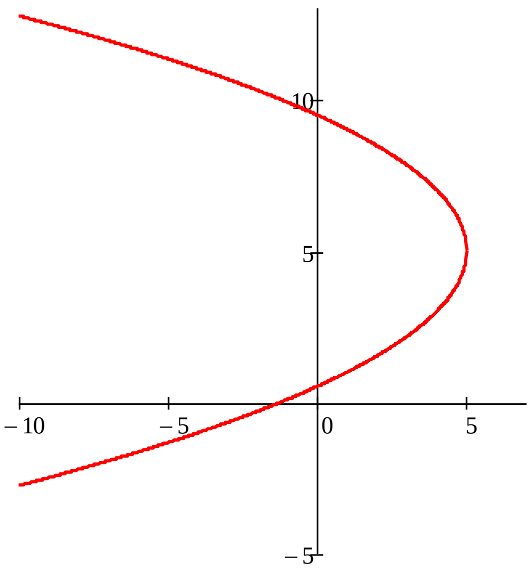
3) У рівнянні $y^2+4x-10y+5=0$ $A=0$, $B=1>0$, отже це рівняння параболи. Виділимо повний квадрат за y:

$y^2-10y+25-25+4x+5=0$,

$(y-5)^2=-4x+20$,

$(y-5)^2=-4(x-5)$ – канонічне рівняння параболи.

Побудуємо параболу:



5.3 ЗРАЗОК ВИКОНАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ДОМАШНІХ ЗАВДАНЬ З ТЕМИ «ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ І БАГАТЬОХ ЗМІННИХ»

1. Знайти границі функцій:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(5x^3-1\right)\left(x+2\right)\left(4x^4+x^3+2x^2-1\right)}{\left(x^2-1\right)\left(x^7+x^6-3x^5+x^4-x^3+7x^2-3\right)}$,

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{10x+1}{10x+4}\right)^{2x-3}$,

3. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^3-4x^2-3x-10}{2x-11x+5}$,

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\arcsin x}{4x^3-x^4}$,

5. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{4x-1}-\sqrt{3}}{x^2-1}$.

Розв'язання

1. $$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(5x^3-1\right)\left(x+2\right)\left(4x^4+x^3+2x^2-1\right)}{\left(x^2-1\right)\left(x^7+x^6-3x^5+x^4-x^3+7x^2-3\right)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Використаємо еквівалентність нескінченно великих величин: $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...a_n\sim a_0x^n$ при $x\to\infty$.

Оскільки при $x\to\infty$ $5x^3-1\sim5x^3,\ x+2\sim x,\ 4x^4+x^3+2x^2-1\sim4x^4$, то добуток $5x^3\cdot x\cdot4x^4$ еквівалентний $20x^8$, тобто $5x^3\cdot x\cdot4x^4\sim20x^8$

Аналогічно, $\left(x^2-1\right)\left(x^7+x^6-3x^5+x^4-x^3+7x^2-3\right)\sim x^9$ при $x\to\infty$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(5x^3-1\right)\left(x+2\right)\left(4x^4+x^3+2x^2-1\right)}{\left(x^2-1\right)\left(x^7+x^6-3x^5+x^4-x^3+7x^2-3\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{20x^8}{x^9}=0$$

2. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{10x+1}{10x+4}\right)^{2x-3}=\left[1^\infty\right]$$

Виділимо цілу частину $\dfrac{10x+1}{10x+4}=\dfrac{\left(10x+4\right)-4+1}{10x+4}=1+\dfrac{-3}{10x+4}$.

Отже, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{10x+1}{10x+4}\right)^{2x-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{-3}{10x+4}\right)^{2x-3}=$

// Використаємо другу визначну границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ //

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-3}{10x+4}\right)^{\frac{10x+4}{-3}\cdot\frac{-3}{10x+4}\cdot(2x-3)}=\left|\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-3}{10x+4}\right)^{\frac{10x+4}{-3}}=e\right|=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3}{10x+4}\cdot(2x-3)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-6x}{10x}}=e^{-\frac{3}{5}}.$$

3. $$\lim_{x\to5}\frac{x^3-4x^2-3x-10}{2x-11x+5}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

Розкладемо дані многочлени на множники. Оскільки многочлен $x^3-4x^2-3x-10$ при $x\to5$ перетворюється в нуль, то $x^3-4x^2-3x-10$ ділиться націло на $x-5$. Отже,

$\left(x^3-4x^2-3x-10\right)/\left(x-5\right)=x^2+x+2$,тому $x^3-4x^2-3x-10=\left(x-5\right)\left(x^2+x+2\right)$.

Аналогічно, $2x^2-11x+5=\left(x-5\right)\left(2x-1\right)$.

Маємо, $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^3-4x^2-3x-10}{2x-11x+5}=\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\left(x-5\right)\left(x^2+x+2\right)}{\left(x-5\right)\left(2x-1\right)}=\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2+x+2}{2x-1}=\dfrac{32}{9}$.

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\arcsin x}{4x^3-x^4}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Використаємо еквівалентність нескінченно малих величин: $\arcsin x\sim x$ при $x\to0$. Отже,

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2\arcsin x}{4x^3-x^4}=\lim_{x\to0}\frac{x^2\cdot x}{x^3\left(4-x\right)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{4-x}=\frac{1}{4}\ .$$

5. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{4x-1}-\sqrt{3}}{x^2-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Позбудемося ірраціонального виразу у чисельнику. Для цього чисельник і знаменник помножимо на $\left(\sqrt{4x-1}+\sqrt{3}\right)$. Отже,

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{4x-1}-\sqrt{3}}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{4x-1}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{4x-1}+\sqrt{3}\right)}{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt{4x-1}+\sqrt{3}\right)}=\lim_{x\to1}\frac{4x-1-3}{\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(\sqrt{4x-1}+\sqrt{3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{4\left(x-1\right)}{\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(\sqrt{4x-1}+\sqrt{3}\right)}=\lim_{x\to1}\frac{4}{\left(x+1\right)\left(\sqrt{4x-1}+\sqrt{3}\right)}=\frac{4}{2\cdot2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

2. Знайти похідну функції:

1. $y=\dfrac{\sqrt{\sin3x^7}}{\ln^2x}$,
2. $5xy-4x^3+y^4-1=0$,
3. $\begin{cases}x=3t^2-4t+2,\\ y=\ln t\end{cases}$
4. $y=(7x^3+2x-1)^{\cos3x}$.

Розв'язання

1. Для знаходження похідної функції $y=\dfrac{\sqrt{\sin3x^7}}{\ln^2x}$ використаємо правило частки $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$.

Отже,

$$y'=\frac{\left(\sqrt{\sin3x^7}\right)'\cdot\ln^2x-\left(\ln^2x\right)'\sqrt{\sin3x^7}}{\left(\ln^2x\right)^2}=\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{\sin3x^7}}\cdot\cos3x^7\cdot21x^6\cdot\ln^2x-2\ln x\cdot\dfrac{1}{x}\cdot\sqrt{\sin3x^7}}{\ln^4x}=$$

$$=\frac{\ln x\left(\dfrac{21x^6}{2\sqrt{\sin3x^7}}\cdot\cos3x^7\cdot\ln x-\dfrac{2\sqrt{\sin3x^7}}{x}\right)}{\ln^4x}=\frac{\dfrac{21x^6}{2\sqrt{\sin3x^7}}\cdot\cos3x^7\cdot\ln x-\dfrac{2\sqrt{\sin3x^7}}{x}}{\ln^3x}\ .$$

2. Для того, щоб знайти похідну неявної функції $5xy-4x^3+y^4-1=0$ потрібно взяти похідну кожної змінної, але змінну y вважати залежною змінною від x. Тому

$$(5xy)'-(4x^3)'+(y^4)'-(1)'=0$$

$$5(1\cdot y+xy')-12x^2+4y^3\cdot y'=0$$

$$5y+5xy'-12x^2+4y^3\cdot y'=0$$

Виразимо y' через x та y.

$$5xy'+4y^3\cdot y'=12x^2-5y$$

$$y'\left(5x+4y^3\right)=12x^2-5y$$

$$y'=\frac{12x^2-5y}{5x+4y^3}.$$

3. Якщо функція задана параметрично $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t)\end{cases}$, то $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Маємо $\begin{cases}x=3t^2-4t+2,\\ y=\ln t\end{cases}$, тоді $\begin{cases}x'_t=6t-4,\\ y'_t=\dfrac{1}{t}\end{cases}$, отже $y'_x=\dfrac{\frac{1}{t}}{6t-4}=\dfrac{1}{6t^2-4t}$.

4. Функція $y=(u(x))^{v(x)}$ є степенево-показниковою. Її похідну обчислюють за допомогою логарифмування.

Прологарифмуємо функцію $y=(7x^3+2x-1)^{\cos 3x}$ за основою e. Отже, $\ln y=\ln(7x^3+2x-1)^{\cos 3x}$.

Застосуємо властивість логарифмів $\ln a^p=p\ln a$.

$$\ln y=\cos 3x\cdot\ln(7x^3+2x-1).$$

Знайдемо похідну функції, яка задана неявно:

$$\frac{1}{y}y'=-\sin 3x\cdot 3\cdot\ln(7x^3+2x-1)+\cos 3x\cdot\frac{1}{7x^3+2x-1}\cdot\left(21x^2+2\right)$$

$$y'=\left(-3\sin 3x\cdot\ln(7x^3+2x-1)+\frac{\left(21x^2+2\right)\cos 3x}{7x^3+2x-1}\right)\cdot y$$

$$y'=\left(-3\sin 3x\cdot\ln(7x^3+2x-1)+\frac{\left(21x^2+2\right)\cos 3x}{7x^3+2x-1}\right)\cdot(7x^3+2x-1)^{\cos 3x}$$

3. Знайти частинні похідні функції $z=\arccos\left(\sqrt{3x-y^2}\right)$.

Розв'язання

При знаходженні z'_x змінну y вважаємо константою, отже:

$$z'_x=-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{3x-y^2}\right)^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3x-y^2}}\cdot 3,$$

$$z'_x=-\frac{3}{2\sqrt{1-3x+y^2}\cdot\sqrt{3x-y^2}}.$$

При знаходженні z'_y змінну x вважаємо константою, отже:

$$z'_y = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{3x-y^2}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3x-y^2}} \cdot (-2y)$$

$$z'_y = \frac{y}{\sqrt{1-3x+y^2} \cdot \sqrt{3x-y^2}}.$$

4. Провести повне дослідження функції $y = \ln\left(\frac{3+x}{x}\right) - 3$ та побудувати її графік.

Розв'язання.

1) Знайдемо область визначення функції: $\frac{3+x}{x} > 0$

$D(y) = (-\infty; -3) \cup (0; +\infty)$

2) $x = -3$ та $x = 0$ - точки розриву. Знайдемо їх вид:

$$\lim_{x \to -3-0}\left(\ln\left(\frac{3+x}{x}\right) - 3\right) = -\infty$$

$\lim\limits_{x \to -3+0}\left(\ln\left(\frac{3+x}{x}\right) - 3\right)$ - не існує, тому $x = -3$ - точка розриву другого роду.

$\lim\limits_{x \to -0}\left(\ln\left(\frac{3+x}{x}\right) - 3\right)$ - не існує,

$\lim\limits_{x \to +0}\left(\ln\left(\frac{3+x}{x}\right) - 3\right) = +\infty$, тому $x = 0$ - точка розриву другого роду.

Отже, $x = 0$, $x = -3$ - вертикальні асимптоти.

Визначимо, чи має функція похилі асимптоти:

$y = kx + b$, де $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - kx\right)$.

Отже, $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{\ln\left(\frac{3+x}{x}\right) - 3}{x} = \frac{-3}{\infty} = 0$, звідки

$b = \lim\limits_{x \to \pm\infty}\left(\ln\left(\frac{3+x}{x}\right) - 3\right) = -3$, отже $y = -3$ - горизонтальна асимптота.

3) Оскільки область визначення несиметрична відносно початку координат, то функція є ні парною, ні непарною.

4) Знайдемо точки перетину з осями координат. Оскільки $x \neq 0$, то графік вісь $0Y$ не перетинає.

Нехай $y = 0$, отже

$$\ln\left(\frac{3+x}{x}\right)-3=0,$$

$$\ln\left(\frac{3+x}{x}\right)=3,$$

$$1+\frac{3}{x}=e^3,$$

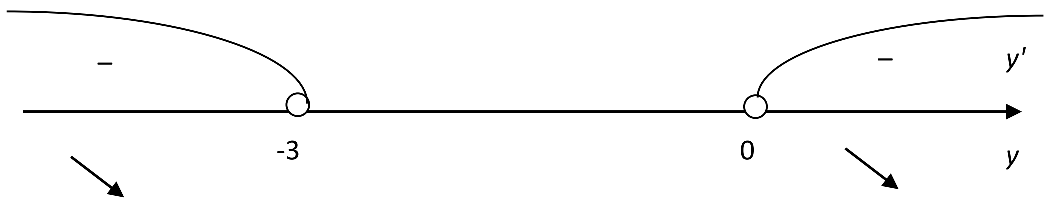
$$x=\frac{3}{e^3-1}\approx 0.16$$

$(\approx 0.16;0)$ - точка перетину графіка функції з віссю $0X$.

$$y'=\frac{1}{\frac{3x+x}{x}}\cdot\frac{x-(x+3)}{x^2}=\frac{-3}{x(3+x)}$$

$y'=0$, звідки $\frac{-3}{x(3+x)}=0$. Рівняння коренів не має, тому екстремальних точок немає.

Визначимо проміжки монотонності:



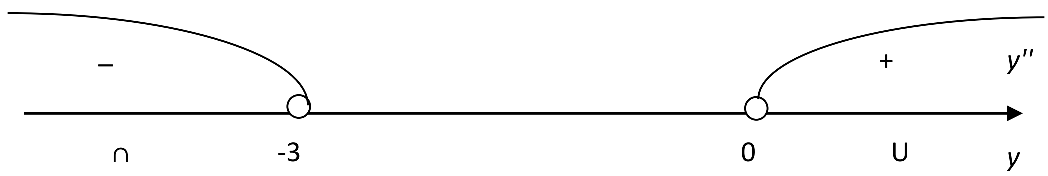
Таким чином, $y(x)$ спадає при $x\in(-\infty;-3)\cup(0;+\infty)$.

5) Знайдемо проміжки опуклості та точки перегину графіка функції. Перепишемо першу похідну у вигляді $y'=-3(3x+x^2)^{-1}$

$$y''=-3\cdot(-1)(3x+x^2)^{-2}\cdot(2x+3)=\frac{3(2x+3)}{(3x+x^2)^2}$$

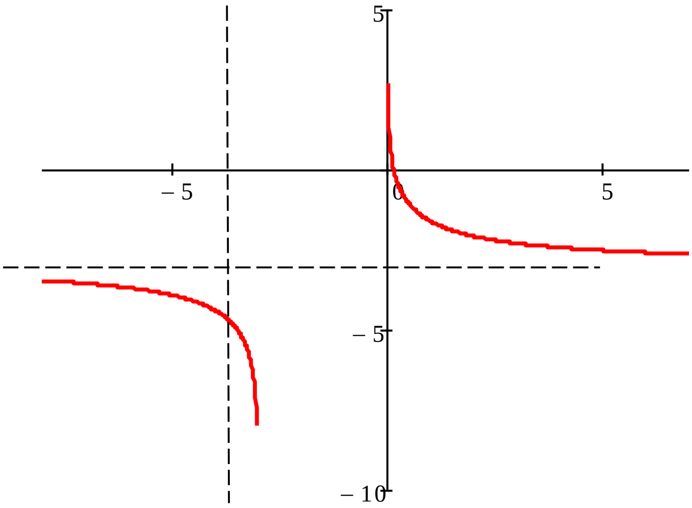
$y''=0$, отже $\frac{3(2x+3)}{(3x+x^2)^2}=0$, $x=-\frac{3}{2}\notin D(y)$

Отже, точок перегину немає.



Таким чином, $y(x)$ опукла вгору при $x\in(-\infty;-3)$, опукла вниз при $x\in(0;+\infty)$.

6) Побудуємо графік функції, враховуючи всі дослідження



5. Дослідити функцію двох змінних $z = 3x^2 - 35x + 3y^2 - xy + 3$ на екстремум.

Розв'язання.

1) Знайдемо частинні похідні функції $z(x, y)$

$z'_x = 6x - 35 - y$, $z'_y = 6y - x$

2) знайдемо стаціонарні точки, розв'язавши систему

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$$

Отже,

$\begin{cases} 6x - 35 - y = 0, \\ 6y - x = 0, \end{cases}$, $\begin{cases} x = 6y \\ 6 \cdot 6y - 35 - y = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} 35y = 35 \\ x = 6y \end{cases}$, $\begin{cases} y = 1 \\ x = 6 \end{cases}$, отже $M(6,1)$ - стаціонарна точка.

3) Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$z''_{xx} = 6 = A, z''_{yy} = 6 = C, z''_{xy} = -1 = B.$

Обчислимо $\Delta = AC \cdot B^2 = 36 - 1 = 35 > 0$, отже точка $M(6,1)$ - екстремум .

4) Маємо $\Delta = 35 > 0$ і $A = 6 > 0$, тому точка $M(6,1)$ - мінімальна.

Отже, $z_{\min} = z(6,1) = 3 \cdot 6^2 - 35 \cdot 6 + 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 3 = -102$

Відповідь: $z_{\min} = -102$

6. ЗРАЗКИ ТИПОВИХ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ

6.1 ЗРАЗОК КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ З ТЕМИ «ЛІНІЙНА АЛГЕБРА»

1 рівень

1. Яку розмірність має матриця $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$?

А) 3×3; Б) 2×3; В) 3×2; Г) 2×2.

2. Матрицею, транспонованою до матриці $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ буде

А) $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; Б) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$; В) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$; Г) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Визначник $\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$ дорівнює А) 42; Б) 18; В) -42; Г) -18.

4.Дано матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -8 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Знайти елемент c_{32} матриці $C=A\cdot B$.

А) 15; Б) 9; В) -5; Г) 3.

5. Дано матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -8 \\ -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$. Знайти елемент c_{32} матриці $C=A+B$.

А) 2; Б) -12; В) 8; Г) -4.

6. Знайти основний визначник системи лінійних алгебраїчних рівнянь
$$\begin{cases} 3x_1-x_2-x_3=1; \\ x_1-3x_2+2x_3=6; \\ 2x_1-4x_2-x_3=-3. \end{cases}$$

А) -12; Б) -26; В) -20; Г) 26.

7. Знайти алгебраїчне доповнення елемента a_{32} матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

А) 5; Б) -7; В) -1; Г) 1.

8. Знайти елемент a_{32} матриці A^{-1}, якщо $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, Δ- визначник матриці A

А) 5; Б) -5; В) -1; Г) 1.

9.Ранг матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -4 & 6 \\ -3 & -6 & 6 & -9 \end{pmatrix}$ дорівнює А) 4; Б) 3; В) 2; Г) 1.

10. Розв'язати рівняння $\begin{vmatrix} x & x+2 \\ x-2 & 2x-5 \end{vmatrix}=0$

А) коренів нема; Б) $1;4$; В) $-1;-4$; Г) $\frac{5\pm\sqrt{41}}{2}$.

11. Дано матрицю $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -1 & -3 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & -5 & -6 & 9 \end{pmatrix}$. Знайти відповідності між виразами (1-4) та їх значеннями (А-Д)

1. Елемент a_{41}	А. 12.		А	Б	В	Г	Д
2. Мінор елемента a_{41}	Б. -4.						
3. Визначник матриці А	В. 4.						
4. Сума елементів головної діагоналі	Г. 1.						
	Д. 7						

2 рівень.

12. Розв'язати матричне рівняння $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

13. Довести, що система несумісна $\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3=2; \\ 4x_1+3x_2-4x_3=7; \\ 4x_1+8x_2-12x_3=3. \end{cases}$

3 рівень.

14. Дослідити систему на сумісність та у випадку позитивної відповіді знайти загальний розв'язок.

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=0; \\ x_1-x_2+x_3+2x_4=4; \\ x_1+5x_2+5x_3-4x_4=-4; \\ x_1+8x_2+7x_3-7x_4=-8 \end{cases}$$

6.2 ЗРАЗОК ТИПОВОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ З ТЕМИ «ВЕКТОРНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ»

1 рівень

1. Довжина вектора $\bar{a}(6;1;-2)$ дорівнює

А) $\sqrt{33}$; Б) $\sqrt{41}$; В) 41; Г) $\sqrt{42}$

2. Координати $\bar{c}=2\bar{a}+3\bar{b}$, якщо $\bar{a}(-1;2;5)$ і $\bar{b}(0;4;-6)$, дорівнюють

А) $(-2;16;28)$; Б) $(-2;16;8)$; В) $(-2;16;-8)$; Г) $(-1;6;-1)$

3. Вектори $\bar{a}(t;-3;8)$ і $\bar{b}(-4;6;-16)$ колінеарні. Знайти t.

А) 2; Б) -2; В) 1; Г) визначити неможливо

4. Який кут між векторами $\bar{a}(3;-1;5)$ і $\bar{b}(-2;-3;0)$

А) гострий; Б) тупий; В) прямий; Г)визначити неможливо

5. Координати вектора AB, якщо $A(3;4;-2)$, $B(-1;8;3)$, дорівнюють

А) $(2;4;-1)$; Б) $(-2;-4;1)$; В) $(4;-4;-5)$; Г) $(-4;4;5)$

6. При яких z вектори $\bar{a}(6;0;12)$ і $\bar{b}(-8;13;z)$ перпендикулярні

А) -4; Б) 4; В) 5; Г) визначити неможливо

7. Вказати кутовий коефіцієнт прямої $3x-2y+7=0$

А) -2; Б) $-1,5$; В) 3; Г) $1,5$

8. Вказати нормаль прямої $\frac{x+4}{2}=\frac{y-1}{3}$

А) $(3;-2)$; Б) $(1;1)$; В) $(2;3)$; Г) $(3;2)$

9. Вказати відрізок, який відтинає площина $3x-2y+7z-42=0$ на осі у

А) -2; Б) -21; В) 42; Г) 21

10. Знайти нормаль площини $\frac{x}{5}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=1$

А) $(5;2;1)$; Б) $(1;2;5)$; В) $(2;5;10)$; Г) визначити неможливо

11. Вказати вид поверхні $\frac{x^2}{25}+\frac{z^2}{16}-\frac{y^2}{1}=0$

А) двопорожнинний гіперболоїд; Б) однопорожнинний гіперболоїд; В) параболоїд; Г) конус

12. Серединою відрізка $AB,$ якщо $A(-1;3;9), B(1;5;-3)$, є

А) $(0;4;6)$; Б) $(-1;-1;6)$; В) $(0;4;3)$; Г) $(1;1;-6)$

13. Вказати напрямний вектор прямої $\begin{cases} x=3t-1, \\ y=4t+2, \\ z=5t-3 \end{cases}$

А) $(-1;2;-3)$; Б) $(3;4;5)$; В) $(1;-2;3)$; Г) $(-3;-4;-5)$

14. Дано пряму $l: 3x-2y+7=0,$, пряму $L: \frac{x+4}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+1}{1}$, площини $P_1: 3x-2y+7z-42=0; P_2: 6x-4y+14z-42=0$, точки $A(-4;1;-1), B(3;1)$. Знайти відповідності між виразами (1-4) та їх значеннями (А-Д)

1. Відстань від точки B до прямої l	А. 0.	А Б В Г Д
2. Відстань від точки A до прямої L	Б. $\frac{63}{\sqrt{62}}$.	
3. Відстань від точки A до площини P_1	В. $\frac{21}{\sqrt{62}}$.	
4. Відстань між паралельними площинами	Г. $\frac{14}{\sqrt{13}}$.	
	Д. $\frac{7}{\sqrt{13}}$	

2 рівень.

15. Звести до канонічного виду і вказати вид кривої другого порядку $4x^2-4y^2-24x-4y+33=0$

16. В квадраті *ABCD,* задані вершина $A(2;-1)$ та точка перетину діагоналей $K(-1;-4)$. Скласти рівняння сторін квадрата та знайти координати інших вершин.

17. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі ОХ, більша піввісь дорівнює 20, ексцентриситет $\frac{3}{5}$.

3 рівень.

18. $|\bar{a}|=\sqrt{3}$, $|\bar{b}|=1$, кут між $\bar{a}$ і $\bar{b}$ дорівнює $\frac{\pi}{6}$. Знайти $\overline{p}\overline{q}$, якщо $\bar{p}=\bar{a}+\bar{b}$, $\bar{q}=\bar{a}-2\bar{b}$.

19. Знайти точку A_1, симетричну точці $A(1;2;3)$ відносно площини $2x+y+z+1=0$.

6.3 ЗРАЗОК ТИПОВОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ З ТЕМИ «ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ТА БАГАТЬОХ ЗМІННИХ»

1 рівень

1. Вказати функцію, областю визначення якої є проміжок $(-\infty;1)$:

А) $y=\sqrt{1-x}$; Б) $y=\ln(x-1)$; В) $y=\ln(1-x)$; Г) $y=\sqrt{x-1}$

2. Вибрати парну функцію:

А) $y=x^2+x$; Б) $y=x^2+x^4+1$; В) $y=x^3+x$; Г) $y=x^2+x^4+x$

3. Обчислити $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$

А) 0; Б) ∞; В) 4; Г) 1

4. Точка $x=1$ функції $y=\frac{x^2-1}{x^2-x}$ є точкою розриву

А) першого роду (усувна); Б) першого роду (стрибок);В)другого роду;Г) не є точкою розриву

5. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctgx}{x^2}$

А) 0; Б) ∞; В) 2; Г) 1

6. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1-2x)(1+2x)(1+4x^2)}{(2x+3)^2(2x)^2}$

А) 0; Б) ∞; В) -1; Г) 1

7. Знайти похідну функції, заданої неявно $4x^2-3y^2+2xy=0$

А) $y'=\frac{y+4x}{3y-x}$; Б) $y'=\frac{y+4x}{x-3y}$; В) $y'=\frac{4x-3y}{-x}$; Г) $y'=3y-4x$

8. Знайти похідну функції, заданої параметрично $\begin{cases} x=2t^3-3t^2+t+1, \\ y=2t^2-2t \end{cases}$

А) $y'=\frac{4t-2}{6t^2-6t}$; Б) $y'=\frac{6t^2-6t}{4t-2}$; В) $y'=\frac{6t^2-6t+1}{4t-2}$; Г) $y'=\frac{4t-2}{6t^2-6t+1}$

9. Знайти похідну степенево-показникової функції $y=x^x$

А) $y'=x\cdot x^{x-1}$; Б) $y'=x^x\cdot\ln x$; В) $y'=x^x\cdot(\ln x+1)$; Г) $y'=x\cdot\ln x$

10. Знайти $f'(2)$, якщо кут між дотичною, проведеною до графіка функції $y=f(x)$ у точці з абсцисою $x_0=2$, і додатним напрямом осі Ох дорівнює 60°.

А) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; Б) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; В) 1; Г) $\sqrt{3}$

11. Встановити відповідності між функціями (1-4) та їх проміжками (А-Д), які є множинами значень цих функцій, якщо множина значень функції $y=f(x)$ $\mathrm{E}(f)=[4;10]$

1. $y=2f(x)$	А. $[2;5]$.	А Б В Г Д
2. $y=f(2x)$	Б. $[6;12]$.	
3. $y=\frac{1}{2}f(x)$	В. $[8;20]$.	
4. $y=2+f(x)$	Г. $[2;8]$.	
	Д. $[4;10]$	

12. Встановити відповідності між функціями (1-4) та їх похідними (А-Д)

1. $y=x^2+2x+2$
2. $y=(x-1)\left(x^2+x+1\right)$
3. $y=\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)(x+1)$
4. $y=\dfrac{x^3-1{,}5x^2-7}{3}$

А. $y'=3x^2$.

Б. $y'=x^2-x$.

В. $y'=2(x+1)$.

Г. $y'=x^2-x-7$.

Д. $y'=2x$

А Б В Г Д

2 рівень

13. Число $T=5$ є періодом функції $y=f(x)$, визначеної на проміжку $(-\infty;+\infty)$. Знайти значення виразу $6-3\cdot f(11)$, якщо $f(1)=7$.

14. Скласти рівняння дотичної, проведеної до графіка функції $y=\dfrac{5x-1}{x+3}$, яка паралельна прямій $y=4x-9$.

15. Знайти проміжки монотонності функції $y=(x+1)e^x$.

16.Знайти прискорення тіла, яке рухається прямолінійно за законом $s(t)=2t^3-0{,}5t^2+7t-5$, через 2 с після початку руху (s - в метрах, t - у секундах).

17. Знайти градієнт функції $z=2x^3+xy-y^4$ у точці $A(1;-1)$

3 рівень

18. Перерізом кабельного каналу для кабелю зв'язку типу МКСБ є прямокутник, периметр якого 8 см. На нижній стороні прямокутника побудовано півкруг, діаметр якого є більша сторона прямокутника. При якому радіусі півкруга площа перерізу буде найбільшою?

19. Знайти екстремуми функції $z=\left(y^3-27y\right)\left(x^2+2\right)$

7. ЗАДАЧІ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

7.1 ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

1. Обчислити матрицю: $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}^{100}$

Відповідь: $\begin{pmatrix} 3\cdot 2^{100}-2\cdot 3^{100} & 2(3^{100}-2^{100}) \\ -3(3^{100}-2^{100}) & 3^{101}-2^{101} \end{pmatrix}^{100}$

2. Довести, що матриця $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ задовольняє рівняння:

$X^2-(a+d)X+(ad-bc)E=0$, де E - одинична матриця

3. Числа α,β,γ - корені кубічного рівняння $x^3+px+q=0$

Обчислити $\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \gamma & \alpha & \beta\\ \beta & \gamma & \alpha\end{vmatrix}$.

Відповідь : 0.

4. Визначити всі матриці другого порядку з дійсними елементами, які задовольняють рівняння $A^3-4A=0$ де 0 - нульова матриця.

Відповідь : $A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$; $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$; $A=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$; $A=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$.

5. Обчислити :

a) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^n$

b) $\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}^n$

Відповідь : a) $\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1}\\ 0 & \lambda^n\end{pmatrix}$

6. Визначити значення многочлену $f(x)=3x^2-2x+5$ від матриці $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -4 & 1\\ 3 & -5 & 2\end{pmatrix}$.

Відповідь : $f(A)=\begin{pmatrix}21 & -23 & 15\\ -13 & 4 & 10\\ -9 & 22 & 25\end{pmatrix}$.

7. Обчислити $\begin{vmatrix}1 & 1 & a\\ 1 & 1 & a^2\\ a^2 & a & 1\end{vmatrix}$, де $a=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi,\quad i=\sqrt{-1}$

Відповідь : -3.

8. Довести, що $\begin{vmatrix}1 & \cos\varphi_3 & \cos\varphi_2\\ \cos\varphi_3 & 1 & \cos\varphi_1\\ \cos\varphi_2 & \cos\varphi_1 & 1\end{vmatrix}=0$, коли $\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3=0$.

9. Обчислити визначник:

$$\Delta=\begin{vmatrix}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} & \sin\frac{\alpha+\beta}{2} & \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\\ \cos\frac{\beta-\gamma}{2} & \sin\frac{\beta+\gamma}{2} & \cos\frac{\beta+\gamma}{2}\\ \cos\frac{\gamma-\alpha}{2} & \sin\frac{\gamma+\alpha}{2} & \cos\frac{\gamma+\alpha}{2}\end{vmatrix}$$

Відповідь : $\Delta=\frac{1}{2}\left(\sin(\beta-\alpha)+\sin(\gamma-\beta)+\sin(\alpha-\gamma)\right)$.

10. Довести, що якщо A та B – квадратні матриці одного і того ж порядку , при цьому $AB \neq BA$, то:

a) $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

b) $(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$

11. Довести, що для довільних трьох векторів, паралельних до однієї площини, виконується рівність

$$\Delta = \begin{vmatrix} \overline{r_1}\overline{r_1} & \overline{r_1}\overline{r_2} & \overline{r_1}\overline{r_3} \\ \overline{r_2}\overline{r_1} & \overline{r_2}\overline{r_2} & \overline{r_2}\overline{r_3} \\ \overline{r_3}\overline{r_1} & \overline{r_3}\overline{r_2} & \overline{r_3}\overline{r_3} \end{vmatrix} = 0$$

де $\overline{r_i}\overline{r_j}$ - скалярний добуток векторів.

7.2 ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

1. Довести, що для довільних трьох векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ та трьох сталих α, β, γ вектори $\alpha\vec{a} - \beta\vec{b}, \gamma\vec{b} - \alpha\vec{c}, \beta\vec{c} - \gamma\vec{a}$ - компланарні.

2. Дані 4 вектори $\vec{a} = (1,5,3), \vec{b} = (6,-4,-2), \vec{c} = (0,-5,7), \vec{d} = (-20,27,-35)$. Знайти числа α, β, γ такі, щоб вектори $\alpha\vec{a}, \beta\vec{b}, \gamma\vec{c}, \vec{d}$ утворювали ламану лінію, для якої початок кожного наступного вектора співпадає з кінцем попереднього.

Відповідь: $\alpha = 2, \beta = 3, \gamma = 5.$

3. Перевірити, що для довільних чотирьох векторів $\vec{b}(\vec{a}\vec{c}\vec{d}) - \vec{a}(\vec{b}\vec{c}\vec{d}) + \vec{d}(\vec{c}\vec{a}\vec{b}) - \vec{c}(\vec{b}\vec{a}\vec{d}) = 0$.

4. Точка O є центром трикутника ABC. Довести, що $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 0$.

5. Довести, що вектори $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{b} \times \vec{b}$ та $\vec{a} \times \vec{b}$ - колінеарні.

6. Довести, що з компланарності векторів $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{b} \times \vec{c}$, $\vec{c} \times \vec{a}$ випливає їх колінеарність.

7. Як розташовані одиничні вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$, якщо $(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) \times (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) = \vec{e}_4$?

Відповідь: $\vec{e}_4 = \vec{e}_2$.

8. Довести, якщо $(\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{b} \times \vec{c}) + (\vec{c} \times \vec{a}) = 0$, то вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - компланарні.

9. Задані три некомпланарні вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Визначити значення λ , при яких вектори $\lambda\vec{a} + \vec{b} + \vec{c},\ \vec{a} + \lambda\vec{b} + \vec{c},\ \vec{a} + \vec{b} + \lambda\vec{c}$ є компланарні.

Відповідь: 0; 1; 2.

10. В просторі задана шістка векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$.

Довести тотожність

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c})(\vec{x}\vec{y}\vec{z}) = \begin{vmatrix} \vec{a}\vec{x} & \vec{a}\vec{y} & \vec{a}\vec{z} \\ \vec{b}\vec{x} & \vec{b}\vec{y} & \vec{b}\vec{z} \\ \vec{c}\vec{x} & \vec{c}\vec{y} & \vec{c}\vec{z} \end{vmatrix}$$

тут $\vec{a}\vec{b}\vec{c}, \vec{x}\vec{y}\vec{z}$ - мішані добутки трьох векторів, $\vec{a}\vec{x}, \vec{a}\vec{y}, \vec{a}\vec{z}, ...$ - скалярні добутки відповідних двох векторів.

7.3 АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

1. Довести, що відстань точки перетину дотичної в довільній точці кривої $y=\frac{1}{2}\sqrt{x-4x^2}$ до початку координат і точки дотику рівні.

2. Довести, що сума відрізків на осях координат, утворених дотичною до кривої $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$ для всіх її точок дорівнює a.

3. На астроїді $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ знайти точку (x_0, y_0) таку, щоб площа трикутника, обмеженого дотичною до астроїди в цій точці та осями координат, була найбільшою.

4. Знайти найкоротшу відстань від кривої $4x^2+3y^2+16x-6y+7=0$ до прямої $2x+y=2$.

5. Серед усіх точок осі абсцис знайти таку, сума відстаней від якої до точок $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$, $M_4(x_4, y_4)$ була б найменшою.

6. Скласти рівняння сторін трикутника, якщо задана одна з його вершин $B(-4;-5)$ та рівняння його висот $5x+3y-4=0,\ 3x+8y+13=0$.

7. Знайти сторони прямокутного трикутника, який при заданій площині S має найменший період.

8. Знайти рівняння дотичних, проведених із точки $(4;-1)$ до еліпсу $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$.

9. Написати рівняння кривої, за якою рухається точка M, якщо відстань від неї до точки $F(3;0)$ залишається вдвічі меншою відстані до прямої $x+y-1=0$.

Відповідь: $7x^2-2xy+7y^2-46x+2y+71=0$.

10. На гіперболі $\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{18}=1$ знайти точку M_0, найближчу до прямої $3x+2y+1=0$ і обчислити відстань від точки M_0 до цієї прямої.

Відповідь: $M_0(-6;3); \rho=\frac{11}{\sqrt{13}}$.

7.4 ФУНКЦІОНАЛЬНІ ЗАЛЕЖНОСТІ

1. а) Визначити два кореня рівняння $f(x)=f\left(\frac{x+8}{x-1}\right)$, якщо відомо,що $f(x)$ визначена на сегменті $[-5;5]$.

б) Визначити всі корені рівняння для випадку, коли $f(x)=x^2-2x+3$.

Відповідь: а) $x_1=-2,\ x_2=4$

б) $x_1=-2,\ x_2=4,\ x_3=1-3i,\ x_4=1+3i$ ($x_3,\ x_4$ задовольняють умові $x_3\notin[-5;5],\ x_4\notin[-5;5]$).

2. Визначити $\varphi(\psi(x))$ і $\psi(\varphi(x))$, якщо $\varphi(x)=x^2;\ \psi(x)=2^x$

Відповідь: $\begin{matrix} \varphi(\psi(x)) = (2^x)^2 = 2^{2x} \\ \psi(\varphi(x)) = \psi(x^2) = 2^{x^2} \end{matrix}$.

3. Визначити $f(f(f(x)))$, якщо $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Відповідь: $f(f(f(x))) = x$.

4. Визначити $f(x+1)$, якщо $f(x-1) = x^2$.

Відповідь: $f(x+1) = (x+2)^2$.

5. $f(n)$ є сумою n членів арифметичної прогресії. Перевірити , що $f(n+3) - 3f(n+2) + 3f(n+1) - f(n) = 0$.

6. Якщо $f(x+c) = \frac{A^2}{A - f(x)}$, то функція $f(x)$ періодична з періодом $T = 3c$.

7. Якщо $\begin{matrix} f(a+x) = f(a-x) \\ f(b+x) = f(b-x) \end{matrix}$

$(b > 0)$, то функція $f(x)$ є періодичною з періодом $T = 2(b-a)$.

8. Якщо для усіх $x \in R$ і деякого $T > 0$ справджується рівність $f(x+T) = \frac{1 - f(x)}{1 + f(x)}$, то функція $f(x)$ є періодичною з періодом $2T$.

9. Побудувати графік функції, заданої параметричним рівнянням $\begin{cases} x = \frac{1}{1+t^2} \\ y = \frac{t}{1+t^2} \end{cases}$.

10. Для функції $f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x}$ перевірити рівність $f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$.

7.5 ГРАНИЦІ

1. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x}\right)$.

2. Обчислити $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{25} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{5^n}\right)$.

3. Обчислити $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2}\right)$.

Відповідь: $\frac{1}{2}$.

4. Обчислити $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2\ldots}}}$

Відповідь: 2.

5. Обчислити $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2\ldots}}}$

Відповідь: $\sqrt{2}$.

6. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{i\varphi}{n}\right)^n = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, де φ - дійсне число.

7. Послідовність $\{x_n\}$ така, що $x_1 > 0,\ \ x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)$ при $n \geq 1$. Довести, що існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ і обчислити її.

Відповідь: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

8. Обчислити границю: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+...+\frac{n}{2}}{\frac{n^2}{4}+n+3}$.

Відповідь: 1.

9. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+3x)-3\sin(a+2x)+3\sin(a+x)-\sin a}{x^3}$.

Відповідь: $-\cos a$.

10. Розв'язати рівняння: $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{arctg(x+arctg(x+arctg(x+...+arctgx)}_{n\ \mathrm{arctg}} = \frac{\pi}{4}$.

Відповідь: x=1-$\frac{\pi}{4}$.

7.6 ПОХІДНІ

1. Обчислити y' , де $y = \ln x^{\sin x^{\cos^4 x}}$

Відповідь: $y'' = (\sin x)^{\cos^4 x}$

2. Обчислити y', якщо $y = \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x^4+2x+1}$.

3. Визначити y'', якщо $y = x + arctgy$.

Відповідь: $y' = \frac{1}{y^2}+1;\quad y'' = -\frac{2y'}{y^3}$

4. Довести, що функція $y = f(x)$, що задана параметрично

$$\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases},$$

задовольняє співвідношенню $36y''(y-\sqrt{3x}) = x+3$.

5. Визначити найбільше і найменше значення функції $z = x^2 + y^2 - xy$ в області $|x|+|y| \leq 1$.

6. Якщо $F = f * \varphi$ і $f' * \varphi' = 0$, то $\frac{F''}{F} = \frac{f''}{f} + \frac{\varphi''}{\varphi};\quad \frac{F'''}{F} = \frac{f'''}{f} + \frac{\varphi'''}{\varphi}$.

7. Довести, що $S = \frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2$ не зміниться, якщо замінити y на $\frac{1}{y}$.

8. Визначити похідну десятого порядку при $x = 0$ від функції $y = x^2\cos 2x$.

Відповідь: $y^{(10)}(0)=\dfrac{2^8\cdot 10!}{8!}=23040$.

9. Нехай $f(x)=\sin x+\dfrac{\sin 3x}{3}+\dfrac{\sin 5x}{5}+\dfrac{\sin 7x}{7}$. Показати, що $f'\left(\dfrac{\pi}{9}\right)=\dfrac{1}{2}$.

10. Перевірити, що функція $u=\varphi(xy)+\sqrt{xy}\psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ задовольняє рівняння $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

11. Довести, що функція $y=\cos e^x+\sin e^x$ задовольняє рівняння $y''-y'+ye^{2x}=0$.

12. Довести, що співвідношення $(a+bx)e^{\frac{y}{x}}=x$ задовольняє рівняння $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}=\left(x\dfrac{dy}{dx}-y\right)^2$.

8. ПИТАННЯ НАВЧАЛЬНОЇ ПРОГРАМИ ТА ЗАДАЧІ ДЛЯ ПІДГОТОВКИ ДО ЗАЛІКУ

8.1 ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

1. Визначники 2-го, 3-го, n-го порядків, властивості та правила обчислення.
2. Матриці. Дії над матрицями: рівність; сума; добуток матриці на число; добуток матриць.
3. Означення та обчислення оберненої матриці.
4. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) та їх розв'язки.

Приклад 1. Обчислити визначники.

$$\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ \boldsymbol{N} & 7 \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -\boldsymbol{N} \\ 3 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Приклад 2. Обчислити $NA+(-1)^N B$, $AB-NE$, якщо $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & N \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5N & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathrm{E}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Приклад 3. Обчислити A^{-1}, якщо $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 6 \\ N & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Приклад 4. Знайти розв'язки СЛАР за правилом Крамера .

$$\begin{cases} (2+N)x_1+5x_2+x_3=N-2; \\ 3x_1+4x_2-x_3=-N-2; \\ 6x_1+7x_2+Nx_3=N-1. \end{cases}$$

8.2 ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

1. Векторні величини, їх визначення. Рівні, колінеарні, компланарні вектори. Орт вектора. Напрямні косинуси вектора.

2. Дії над векторами: рівність, сума, різниця, добуток вектора на число в геометричному зображенні та координатах.

Означення векторного добутку двох векторів, властивості та його вигляд в координатній формі. Геометричний зміст.

Мішаний добуток трьох векторів, його властивості та вигляд в координатній формі. Геометричний зміст. „Ліва” та „права” трійка векторів.

Приклад 1. Задані вектори: $\bar{a}_1 = (N, -4)$, $\bar{b}_1 = (2, N, -2+N)$. Обчислити орти векторів $\bar{a}_1$ і $\bar{b}_1$. Вказати їх направляючі косинуси.

Приклад 2. Обчислити $3\bar{b}_1 + \mathrm{N}\bar{b}_2 - (-1)^{\mathrm{N}}\bar{b}_3$, якщо $\bar{b}_1 = (3, -\mathrm{N}, 1)$, $\bar{b}_2 = ((-1)^{\mathrm{N}}, 2, 2)$, $\bar{b}_3 = (1, 2, \mathrm{N})$.

Приклад 3. Визначити кут між векторами: $\bar{a}_1 = (3, -\mathrm{N}, 1)$, $\bar{a}_2 = ((-1)^{\mathrm{N}}, 2, 2)$.

Приклад 4. При якому значенні сталої α вектори $\bar{b}_1 = (\alpha, 2, \mathrm{N})$, $\bar{b}_2 = ((-1)^{\mathrm{N}}, 3, \alpha)$ перпендикулярні.

Приклад 5. Обчислити векторний добуток векторів $\bar{a}_1 = (2, -1, \mathrm{N})$, $\bar{a}_2 = ((-1)^{\mathrm{N}}, 1, 0)$ та площу S трикутника, побудованого на цих векторах.

Приклад 6. При яких значеннях сталих α та β вектори $\bar{b}_1 = (\alpha, 2, 5)$, $\bar{b}_2 = ((-1)^{\mathrm{N}}, 1, \beta)$ колінеарні.

Приклад 7. Для заданих векторів $\bar{a}_1 = (2, \mathrm{N}, 1)$, $\bar{a}_2 = ((-1)^{\mathrm{N}}, 1, 2)$, $\bar{a}_3 = (\mathrm{N}, 0, 1)$ визначити:

а) мішаний добуток $\bar{a}_1\,\bar{a}_2\,\bar{a}_3$;

б) яку трійку векторів вони утворюють;

в) об’єм піраміди, побудованої на векторах $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$.

Приклад 8. При якому значенні сталої α вектори $\bar{b}_1 = (\alpha, 1, -1)$, $\bar{b}_2 = (0, \alpha, 2)$, $\bar{b}_2 = (1, -3, 0)$ компланарні.

8.3 АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

1. Найпростіші задачі аналітичної геометрії на площині.

2. Лінія та пряма на площині. Визначення точки перетину та кута між прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямих.

3. Лінії другого порядку на площині: коло, еліпс, гіпербола, парабола.

Приклад 1. Побудувати прямі $y = 2x - \mathrm{N}$, $3x - 2y - 6 = 0$.

Визначити:

а) точку перетину цих прямих;

б) кут між ними.

Приклад 2. Для заданих прямих $ax + 6y + 4 = 0$, $3x - \mathrm{N}y + \mathrm{N} = 0$ визначити сталу a, при якій прямі:

а) паралельні;

б) перпендикулярні.

Приклад 3. Визначити відстань точки $M_0(5;-N)$ до прямої $3x-4y+N=0$.

Приклад 4. Визначити та побудувати криві:

$x^2+y^2=N^2$; $4x^2+9y^2=36$; $4x^2-9y^2=36$; $x^2=2Ny$; $y^2=(-1)^N Nx$.

8.4 АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ У ПРОСТОРІ

1. Найпростіші задачі аналітичної геометрії в просторі.
2. Площина в просторі. Кут між площинами. Умови паралельності і перпендикулярності.
3. Задання прямої в просторі. Кут між прямими. Умови паралельності і перпендикулярності.
4. Площина та пряма в просторі, їх взаємне положення:

а) точка перетину прямої та площини;

б) кут між прямою та площиною;

в) умови перпендикулярності та паралельності прямої та площини.

5. Циліндричні поверхні в просторі.
6. Поверхні другого порядку в просторі.

Приклад 1. Для заданих точок $M_1((-1)^N;N;-2)$, $M_2(2;(-1)^N N;5)$ визначити:

а) відстань M_1M_2;

б) точку M_0, що поділяє проміжок M_1M_2 у відношенні $\lambda=3$;

в) точку Р, що є серединою відрізка M_1M_2.

Приклад 2. Для площини $2x+(-1)^N 3y+z-N=0$ визначити:

а) вектор, перпендикулярний до площини;

б) точку $M_0(1;2;z_0)$ на заданій площині.

Приклад 3. Визначити кут між площинами:

$2x+(-1)^N 3y+2z-N=0$, $5x+(-1)^N y-2z+10=0$.

Приклад 4. При яких значеннях сталих α та β площини $\alpha x+6y+12z-N=0$, $3x+(-1)^N y+\beta z+N=0$ паралельні.

Приклад 5. При якому значенні сталої α площини $5x+2y+\alpha z+4=0$, $9x+\alpha y+(-1)^N 7z-28=0$ перпендикулярні.

Приклад 6. Для прямих $\frac{x-N}{2}=\frac{y+1}{(-1)^N}=\frac{z-2}{N}$, $\frac{x-1}{N}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{3}$ визначити:

а) направляючі вектори;

б) кут між прямими.

Приклад 7. При якому значенні сталої α прямі $\frac{x+N}{2\alpha}=\frac{y-N}{(-1)^N}=\frac{z+2}{1}$, $\frac{x}{(-1)^N}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{\alpha}$ перпендикулярні.

Приклад 8. При яких значеннях сталих α та прямі $\frac{x-N}{\alpha}=\frac{y+N}{2}=\frac{z+2}{1}$, $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{\beta}=\frac{z-N}{3}$ паралельні.

Приклад 9. Для прямої $\frac{x+N}{4}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-N}{2}$ та площини $x+2Ny-2z+13N=0$ визначити:

а) точка перетину;

б) кут між прямою та площиною.

Приклад 10. Визначити та намалювати циліндричні поверхні:

$9x^2+4y^2=36$; $9x^2-4y^2=36$; $y^2=(-1)^N Nx$; $x^2=Ny$.

Приклад 11. Визначити вид поверхонь в просторі та намалювати:

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$; $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$; $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{4}=-1$; $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=2z$;; $x^2+y^2+z^2=16$; $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{9}=0$.

8.5 АЛГЕБРА КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ

1. Означення уявної одиниці та комплексного числа, його дійсної та уявної частин, модуля та аргументу. Геометричне зображення комплексного числа. Три форми комплексного числа.
2. Комплексно-спряжені числа, їх властивості та положення на комплексній площині.
3. Дії над комплексними числами:

а) рівність двох комплексних чисел;

б) алгебраїчна сума;

в) добуток та частка;

г) степінь комплексного числа;

д) вилучення кореня із комплексного числа.

Приклад 1. Для комплексного числа: $z=N+(-1)^N Ni$ визначити: $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\arg z$, $\operatorname{Arg} z$, побудувати z на комплексній площині, записати три форми комплексного числа: $z=(-1)^N N+iN$.

Приклад 2. Для заданого комплексного числа $z=N+(-1)^N\sqrt{3}i$ записати $\bar{z}$. Зобразити числа z і $\bar{z}$ на комплексній площині.

Приклад 3. Задані комплексні числа $z_1=2N+(-1)Ni$, $z_2=-3N+4Ni$.

Визначити: $z_1\pm z_2$, $z_1\cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$.

Приклад 4. Обчислити $z_5{}^4$, $\sqrt[3]{z_5}$, де $z_5=-\sqrt{3}N+iN$.

8.6 ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛЗУ

1. Визначення та способи задання функції.
2. Класифікація функцій.
3. Перелічити елементарні функції.
4. Поняття границі змінної величини, послідовності та функції.
5. Нескінченно малі та великі величини, їх властивості та зв’язок.
6. Перша та друга визначна границі, їх наслідки.

7. Дослідження неперервності функції.

Приклад 1. Обчислити границі виразів:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+5N}{Nx^2-3}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+(2N-1)x-2N}{x^2-(N+1)x+N}$; 3) $\lim\limits_{x\to N}\frac{x^2-N^2}{\sqrt{x}-\sqrt{N}}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin Nx}{x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+(-1)^N x\right)^{\frac{1}{x}}$.

Приклад 2. Дослідити неперервність функції $y=2^{\frac{1}{x-N}}$

8.7 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

1. Означення похідної функції однієї змінної.
2. Таблиці похідних.
3. Правила диференціювання.
4. Похідні спеціально заданих функцій:

а) похідна показниково-степеневої функції;

б) похідна функції, заданої параметрично;

в) похідна неявно заданої функції.

5. Поняття диференціалу функції, його властивості. Наближене обчислення значень функції за допомогою диференціала.
6. Поняття похідних та диференціалів вищих порядків.
7. Дослідження функцій методами диференціального числення:
8. Задача про найбільше і найменше значення функції.

Приклад 1. Обчислити похідні $y'=\frac{dy}{dx}$:

$y=N+2x+\frac{2N}{3}x^3$; $y=e^{x^2}\cdot\cos Nx$ $y=\frac{x^2+Nx-4}{x+N}$; $y=\left(x^2+N\right)\ln\left(x^2+N\right)$;

$y=\left(N^2x^2+1\right)\operatorname{arctg}Nx$; $y=\frac{\sin x-N\cos x}{N\sin x+\cos x}$; $y=\operatorname{sh}Nx+(-1)^N\operatorname{th}3x$.

Приклад 2. Обчислити похідні $y'=\frac{dy}{dx}$ функцій:

а) $y=x^{\sqrt{x+N}}$;

б) $\begin{cases}x=\ln\left(1+N^2t^2\right)\\ y=t-\operatorname{arctg}Nt\end{cases}$ в) $e^x\sin Ny-e^y\cos(N+1)y=0$;

$\begin{cases}x=N\cos t\\ y=(N+1)\sin t\end{cases}$ $x^N+y^N=x^Ny^N$.

Приклад 3. Обчислити $\frac{dy}{dx}$ та $\frac{d^2y}{dx^2}$:

а) $y=x^{2N}-4x^N-1$; б) $y=x^N\ln x$; в) $\begin{cases}x=N\ln t,\\ y=t^2-N^2.\end{cases}$

Приклад 4. Обчислити dy та d^2y функцій:

$y=(x+1)^{N+5}$; $y=\sin^2 2Nx$; $y=(N+5)^{x^2}$.

Приклад 5. Точка рухається прямолінійно за законом $S(t)=\frac{2}{N}\sin\frac{\pi t}{2}+N^2t^2$. Визначити швидкість та прискорення в кінці першої хвилини (S розраховується в м, час t – в хвилинах).

Приклад 6. Визначити інтервали монотонності та екстремуми функцій.

$$y=\frac{x^4}{4}+\frac{N}{3}x^3-N^2x^2+N.$$

Приклад 7. Визначити інтервали опуклості та точки перегину графіка функцій.

$$y=\frac{x^5}{20}-\frac{N^2x^3}{6}+2Nx-N^2.$$

Приклад 8. Визначити асимптоти графіка функцій.

$$y=\frac{1}{x^2-N^2};\ y=\frac{x^2+Nx+1}{x}.$$

Приклад 9. Визначити найбільше та найменше значення функції $y=x^4-2N^2x^2$ на сегменті $[-2N;\ 2N]$.

8.8 ДИФЕРЕНЦАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

1. Означення функції багатьох змінних. Способи задання. Лінії та поверхні рівня. Область визначення функції багатьох змінних.
2. Поняття частинного приросту та частинної похідної.
3. Поняття повного приросту функції та повного диференціалу.
4. Частинні похідні і повні диференціали вищих порядків.
5. Градієнт та похідна за напрямом.

Приклад 1. Визначити області існування функцій:

$z=\sqrt{N^2-x^2-y^2}$; $z=\frac{1}{N^2-x^2-y^2}$; $z=\ln\left(y^2-4x+4N\right)$.

Приклад 2. Обчислити $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ функцій:

$z=x^Ny-y^Nx$; $z=\frac{x}{y}+(-1)^N\frac{y}{x}$; $z=\ln\left(x^2-xy+Ny^2\right)$; $z=\operatorname{arctg}\frac{Ny}{x}$.

Приклад 3. Обчислити dz і d^2z функцій:

$z=x^3+x^3y-Nxy^2+(-1)^Ny^3$; $z=e^{x^2-Ny}$; $z=x^N\sin Ny$; $z=N\operatorname{arctg}\left(x+(-1)^Ny\right)$.

Приклад 4. Обчислити $\overline{gradU(M_0)}$, якщо

$U=Nx^3z+xy^2z+5x+y+N$ та $M_0(-1,1,N)$.

Приклад 5. Обчислити $\frac{\partial U(M_0)}{\partial l}$, якщо $M_0(-1,1,N)$.

$U=N\left(x^3y\right)-x^2z^2-y^2+z^N-3N$, $M_1(2,1,N+4)$,

$\vec{l}=\overline{M_0M_1}$.

Приклад 6. Знайти екстремум функції $z=x^3+3xy^2-15x-12y+6$.

Приклад 7. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = 4x^2y - x^3y - x^2y^2 - 12$ у області $D = \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 6\}$

9. ЛІТЕРАТУРА

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1985. – 446 с.
2. Бермант А. Ф., Араманович И. Г. Краткий курс математического анализа: Учебник для вузов. — СПб.: Издательство «Лань», 2005. — 736 с.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика: Учеб. для вузов в 3-х т. Т.2: Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Дрофа, 2004. – 512 с.
4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Сборник задач по высшей математике. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 304 с.
5. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – Москва: Наука, 1988. – 240 с.
6. Валєєв К.Г., Джалладова І.А. Вища математика. НМП для самостійного вивчення дисципліни. – К.: КНЕУ, 2002. – 606 с.
7. Вища математика: Збірник задач / В.П. Дубовик, І.І. Юрик, І.П Вовкодав та ін. – Київ: А.С.К., 2001. – 480 с.
8. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч 1-2. Москва.: Высшая школа, 1986.
9. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – Київ: А.С.К., 2001. – 648с.
10. Кривуца В.Г., Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика. Практикум. – К.:ЦУЛ, 2003. – 536 с.
11. Овчинніков П.П. Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика, ч. 1,2. – Київ: Техніка, 2000. – 576 с., 786 с.
12. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. В 2-х т. Т 1. – Москва: Интеграл-Пресс, 2007. – 416 с.
13. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. В 2-х т. Т 2. – Москва: Интеграл-Пресс, 2007. – 544 с.
14. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. Ч 1. Линейная алгебра и основы математического анализа. Под ред. Ефимова А.В., Демидовича Б.П. – М.: Наука, 1993. – 480 с.
15. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г. Вища математика у прикладах і задачах. Ч.1. Лінійна алгебра і аналітична геометрія. Диференціальне числення функції однієї змінної. 2-ге вид., доп. і доопр. – Х.: ХТУРЕ, Фактор, 2004. – 592 с.