

**Міністерство освіти і науки України  
Державний університет телекомунікацій**

**Сайко В.Г., Оксіюк О.Г., Дікарєв О.В.**

**Основи цифрового оброблення сигналів в системах цифрового радіозв'язку**

**Частина 1**

Навчальний посібник

**Київ 2016**

**УДК 621.372.083.92**

**П201**

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів (лист № 1/11-5516 від 15.04. 2014)

Рецензенти:

Стрелковська І.В. доктор техн. наук, професор  
Одеська національна академія зв'язку ім. О.С. Попова

Міхайленко В.М., доктор техн. наук, професор  
Київський національний університет будівництва та прикладної математики

**Сайко В.Г., Оксіюк О.Г., Дікарев О.В. Основи цифрового оброблення сигналів в системах цифрового радіозв'язку. Частина 1. Навчальний посібник. – К.: ДУТ, 2016. – 107 с.**

В навчальному посібнику викладенні основи цифрового оброблення сигналів та питання його застосування. Розглянуті методи аналізу дискретних кіл при детермінованих і випадкових впливах, синтезу і реалізації цифрових фільтрів та застосування цифрового оброблення сигналів в системах мобільного цифрового радіозв'язку. Викладення ґрунтується на сучасному математичному апараті та супроводжується великою кількістю прикладів та вправ.

Видання призначено для студентів, які навчаються за спеціалізацією „Мобільні телекомунікації”. Він також буде дуже корисний для аспірантів, інженерів та наукових співробітників, які спеціалізуються у застосуванні, проектуванні та дослідженні систем та комплексів радіозв'язку та їх елементів.

**УДК 621.372.083**

@ Сайко В.Г., Оксіюк О.Г., Дікарев О.В., 2016  
@ Державний університет телекомунікацій

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
<b>1. ОСНОВИ ЦИФРОВОЇ ОБРОБКИ СИГНАЛІВ</b>	
1.1 Принципи модуляції гармонійних сигналів.....	7
1.2 Способи дискретизації безперервних сигналів.....	9
1.3 Формула Ейлера.....	11
1.4 Розкладання періодичних сигналів в ряд Фур'є.....	12
1.5 Формули Фур'є-перетворення.....	14
1.6 Приклади розкладання періодичних сигналів в ряд Фур'є.....	16
1.7 Властивості спектрів дискретних сигналів.....	19
1.8 Теорема Найквіста і нормована частота.....	20
1.9 Теорема Котельникова: відновлення сигналу за його дискретними вибірками.....	22
1.10 Дельта-функція та білий шум.....	23
1.11 Зв'язок спектрів дискретизованих і аналогових сигналів.....	24
1.12 Приклади дискретизованих сигналів.....	25
1.13 Ортогональний та ортонормований базис.....	27
1.14 Дискретизація квадратурних сигналів.....	29
1.15 Дискретне перетворення Фур'є.....	30
1.16 Перехід до дискретного перетворення Фур'є.....	31
1.17 Властивості дискретного перетворення Фур'є.....	32
1.18 Матриця Френкса.....	32
1.19 Швидке дискретне перетворення Фур'є.....	33
1.19.1 ШПФ для ряду з чотирьох членів.....	35
1.19.2 Операція «метелик» для ШПФ ряду з чотирьох членів...	36
1.19.3 ШПФ ряду з восьми членів.....	38
1.20 Більш строге обґрунтування ШПФ.....	39
1.20.1 Проріджування послідовності $x(n)$ за часом.....	40
1.20.2 Графічне відображення ШПФ.....	42
1.20.3. Перестановка членів вхідної послідовності.....	42
1.20.4. Загальний алгоритм ШПФ.....	42
1.21 Згортка сигналів.....	43
1.21.1 Обчислення лінійної дискретної згортки.....	43
1.21.2 Обчислення кругової дискретної згортки.....	44
1.22 Перетворення Лапласа, Фур'є та z-перетворення.....	46
1.23 Перетворення Фур'є в $p$ - та $z$ -областях.....	48
1.23.1 Основні властивості z-перетворення.....	48
1.24 Ефект Гіббса.....	49
1.25 Інтеграл Гільберта.....	49
<b>2. ОСНОВИ ЛІНІЙНИХ ДИСКРЕТНИХ ЛАНЦЮГІВ</b> .....	<b>50</b>
2.1 Визначення лінійних ланцюгів.....	50
2.2 Приклади простих лінійних безперервних ланцюгів.....	50

2.2.1.	Інтегруюча ланка.....	50
2.2.2	Диференціююча ланка.....	51
2.2.3	Коливальна ланка II порядку.....	52
2.3	Опис лінійних безперервних ланцюгів.....	54
2.4	Параметри лінійних систем.....	56
2.5	Кінцеворізнцеве рівняння лінійних дискретних систем.....	57
2.6	Три види формули передаточної функції ЛДС.....	59
2.7	Загальний вигляд опису лінійної дискретної мережі.....	60
2.8	Вихідний сигнал та імпульсна характеристика ЛДС.....	61
2.8.1.	Імпульсна характеристика ЛДС.....	61
2.9	Основні властивості лінійних дискретних мереж.....	62
2.10	Z- передаточна функція складного перетворювача.....	62
2.11	Визначення вихідного сигналу ЛДС з використанням перетворення Фур'є.....	64
2.12	Застосування лінійних дискретних систем.....	64
2.13	Фільтри з кінцевою імпульсною характеристикою - КІХ- фільтри.....	64
2.13.1	Рівняння фільтрації.....	65
2.13.2	КІХ-фільтри з лінійною фазою.....	66
2.13.3	Симетричні фільтри з лінійною фазою.....	66
2.13.4	Асиметричні фільтри з лінійною фазою.....	67
2.13.5	Формули АЧХ та ФЧХ.....	68
2.13.6.	Шість формул розрахунку КІХ-фільтрів з лінійною фазою.....	69
2.13.7	Однорідні КІХ- фільтри.....	70
2.13.8	Розрахунок однорідного КІХ – фільтра.....	70
2.14	Фільтри з нескінченною імпульсною характеристикою - НІХ- фільтри.....	74
2.14.1	Біквдратний блок.....	78
2.14.2	Частотна характеристика НІХ-фільтра.....	79
2.14.3	Аналогові фільтри-прототипи.....	80
2.14.4	Розрахунок НІХ-фільтрів.....	82
2.15	Метод лінійного передбачення.....	82
2.16	Цифрова корекція каналів.....	85
2.16.1	Корекція частотної характеристики каналу зв'язку гармонійним коректором.....	92
Література.....		106

## Вступ

Збільшення об'єму інформації під час її передавання сучасними системами і засобами радіозв'язку призводить до необхідності використання все більшої кількості різних каналів радіозв'язку. Сама організація інформаційних потоків і методи їх передавання в мережах радіозв'язку за останні роки зазнали значних змін. При цьому для забезпечення високої пропускнуєї спроможності радіоканалів приймаються інноваційні технічні рішення. Відповідно, для практичної реалізації перелічених способів необхідні знання і розвиток методів цифрової обробки сигналів (ЦОС) з урахуванням специфіки поширення сигналів в системах рухомого радіозв'язку. Проте, вивчивши теорію на відмінно, можна не вирішити завдання ЦОС. Для цього необхідні радіоінженери, які мали б системні знання по методам цифрової обробки сигналів в мережах мобільного цифрового радіозв'язку і спеціально підготовлені для вирішення численних питань, які виникають в цій області. На жаль, в Україні до недавнього часу не достатньо приділялося належної уваги щодо підготовки таких фахівців у вищих навчальних закладах.

І хоча останніми роками з'явилася низка видань [24-30], присвячених розглядуваній проблематиці, досі відчувається доволі гострий дефіцит книг, особливо підручників та навчальних посібників, із тематики цифрового оброблення сигналів в системах мобільного і бездротового зв'язку з урахуванням сучасного рівня та тенденцій розвитку телекомунікацій.

Мета цього навчального посібника полягає:

- у викладенні теоретичних основ методів цифрової обробки сигналів -- базової основи цифрового радіозв'язку;
- в розгляді сучасних напрямків в сфері обробки сигналів в цифровому радіозв'язку;
- в тісній взаємодії теоретичного матеріалу з комп'ютерними обчисленнями за допомогою математичного пакету програм Mathcad.

Вибір Mathcad визначається наступними основними міркуваннями:

- порівняльна простота і велика поширеність цієї універсальної програмної системи комп'ютерної математики серед користувачів (студентів, науковців, викладачів);
- універсальність, пристосованість до вирішення широкого кола завдань в області радіозв'язку;
- можливість вирішення завдань з виділенням досить дрібних етапів і глибоким проникненням в суть кожного з них в тісному зв'язку з особливостями завдання в цілому, без механіцизму, характерного для програмних середовищ високої міри інтеграції;
- можливість інтеграції Mathcad з безліччю інших програмних систем (Matlab, Labview та ін.);
- простота створення пояснювальних звітів з лабораторних робіт.

У книзі використанні матеріали згаданих щойно джерел, нормативних документів та, звичайно, особистий досвід. Матеріал навчального посібника складений на основі ряду лекційних курсів, що читаються авторами протягом багатьох років студентам Державного університету телекомунікацій (ДУТ) та на курсах підвищення кваліфікації керівного складу та спеціалістів державного підприємства „Український

державний центр радіочастот" за напрямком навчання „Сучасні технології бездротового радіодоступу та цифрового телебачення" в навчально-науковому інституті післядипломної освіти ДУТ і багаторічних напрацювань, пов'язаних із розробкою і впровадженням новітніх технологій.

В представленому рукописі навчального посібника авторами реалізовано багаторічний досвід викладання цієї дисципліни і всієї своєї науково - педагогічної діяльності, що відображається в грамотному застосуванні класичних принципів навчання, комплексному охопленні і послідовному викладанні матеріалу. Досліджуваний теоретичний матеріал автори, в контексті з розкриттям фізичних процесів у підсистемах мереж цифрового радіозв'язку, на конкретних прикладах показують методику практичного застосування досліджуваних методів синтезу в області ЦОС із застосуванням систем комп'ютерної математики. Таке структурування змісту навчального посібника сприяє інтенсифікації процесу навчання, надає йому практичну спрямованість і мотивацію навчання. Активне застосування програмних систем комп'ютерної математики Mathcad в ході аудиторних занять, вже на лекціях дозволяє тим, хто навчається, виявити сутність, переваги і недоліки, наприклад, кожного з методів комп'ютерної обробки сигналів систем радіозв'язку, провести порівняльний аналіз і наочно переконатись в рекомендаціях з використання цих методів і т. д.

Навчальний посібник призначений для широкого кола читачів -- студентів, слухачів закладів підвищення класифікації, науковців та всіх тих, хто цікавиться питаннями цифрового оброблення сигналів в сучасних системах цифрового радіозв'язку. Він надає можливість викладачам кафедр вітчизняних ВУЗів використовувати частину матеріалу посібника під час проведення лекційних та практичних занять при вивченні дисциплін «Цифрова обробка сигналів», «Цифрове оброблення сигналів», «Генерування та формування сигналів», «Приймання та оброблення сигналів» та ін., керування самостійною та науково-дослідною роботою студентів для підготовки фахівців за спеціалізацією «Мобільні телекомунікації та системи цифрового телебачення». Він буде корисний студентам та аспірантам вищих технічних та технологічних навчальних закладів для поглиблення і розширення знань з багатьох навчальних дисциплін, для активної творчої участі у науково-дослідницькій роботі, при вивченні дисциплін за вибором і підготовці до кандидатських іспитів. Потрібно також відмітити, що авторський колектив представлений провідними фахівцями в галузі мобільного та бездротового зв'язку в Україні, відомими за своїми численними публікаціями в періодичних науково-технічних виданнях.

# Розділ 1

## І. ЦИФРОВЕ ОБРОБЛЕННЯ СИГНАЛІВ

### 1.1. Принципи модуляції гармонічних сигналів

Інформація, що передається по каналах зв'язку, закладається в зміни параметрів несучих сигналів. Для гармонічних сигналів цей процес називається **модуляцією**, а для дискретних - **маніпуляцією**.

Цифрове оброблення сигналів базується на формулах розкладання гармонічних і періодичних сигналів за синус-косинусним базисом, тобто, на формулах розкладання в **ряд Фур'є**.

Безперервний гармонічний сигнал подається виразом

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi).$$

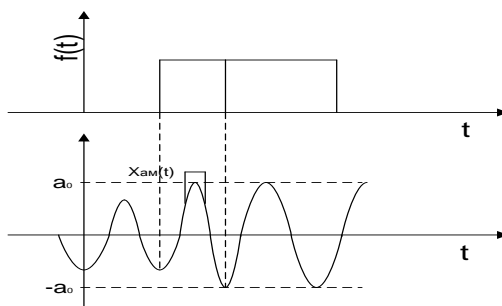
де  $A$  – амплітуда,  $\omega$  – кутова швидкість, рад/с.,  $\varphi$  – початкова фаза сигналу;  $T = 2\pi/\omega$  – період цього сигналу;  $\frac{1}{T}$  – його частота, Гц.

Під час передавання як аналогових, так і дискретних даних гармонічний сигнал відіграє роль носія інформації, що надходить від джерела до споживача. Частоту такого сигналу називають носійною частотою. При цьому вплив передаваних інформаційних кодів поширюється на амплітуду, фазу й частоту носійного гармонічного сигналу або на комбінацію зазначених параметрів. Тому розглядають три основні види модуляції носійної частоти - **амплітудну, частотну і фазову**. У результаті дістають три основні види модульованих сигналів.

#### 1. Амплітудно-модульований сигнал - АМ сигнал

$$X_{AM}(t) = A(\omega) \cos(\omega(t) + \varphi),$$

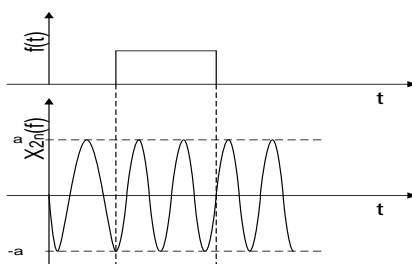
де  $A(\omega) = A(0) [1 + m f(t)]$ ;  $m$  – глибина модуляції,  $m \in [0; 1]$ ;  $\omega(t)$  – модулююча функція,  $|\omega(t)| \leq 1$ .



#### 3. Частотно-модульований сигнал – ЧМ сигнал

$$X_{ЧМ}(t) = A \cos(\omega(t)t + \varphi).$$

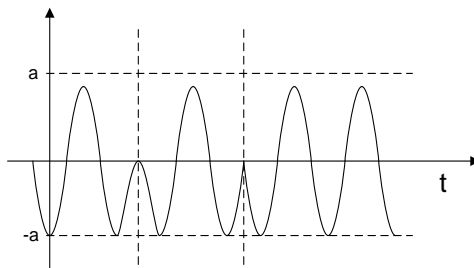
Тут  $\omega(t) = \omega_0 \left[ 1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \cos(\omega(t)) \right]$ ,  $\omega_0$  – носійна частота;  $\Delta\omega$  – девіація;  $\Delta\omega / \omega_0$  – глибина модуляції ( $\omega \ll 1$ ).



### 3. Фазомодульований сигнал – ФМ сигнал

$$X_{\text{ФМ}}(t) = A \cos(\omega(t) + \varphi(t)),$$

Тут  $\varphi(t) = \varphi_0 + \Delta\varphi \cos(\omega(t))$ , де  $\Delta\varphi$  – прирощення фази.



Модулюючі сигнали для аналогової і дискретної інформації подаються по-різному. Найпоширеніші методи кодування дискретної інформації – ІКМ (імпульсно – кодова модуляція), ДІКМ (диференціальна імпульсно-кодова модуляція) і ДМ (дельта-модуляція) – забезпечують створення інформаційних послідовностей двійкових символів, що описують вихідне повідомлення – **контент**. Елементи цих послідовностей модулюють носійну частоту. Щоб зменшити обсяг вхідної інформації, здійснюють її ортогоналізацію. Для цього інформаційну двійкову послідовність поділяють на дві однакові частини. Символи першої половини групують по одному елементу, по два, по три, чотири і т. д., а далі множать на синус, дістаючи **синфазну складову** модулюючого сигналу. Символи другої половини аналогічно групують і множать на косинус, дістаючи **квадратурну складову**. Квадратурна і синфазна складові, підсумовані за правилами тригонометричних перетворень, надходять у каналний модулятор носійної частоти.

Нехай, наприклад, контент кодується двобітним кодом 00, 01, 10, 11. Кожна з чотирьох комбінацій може бути модуляційним символом носійної частоти, а саме: одним із чотирьох станів її амплітуди та фази після модуляції. Кількість знаків коду (один, два, три, чотири і т. д.) визначає тип модуляції.

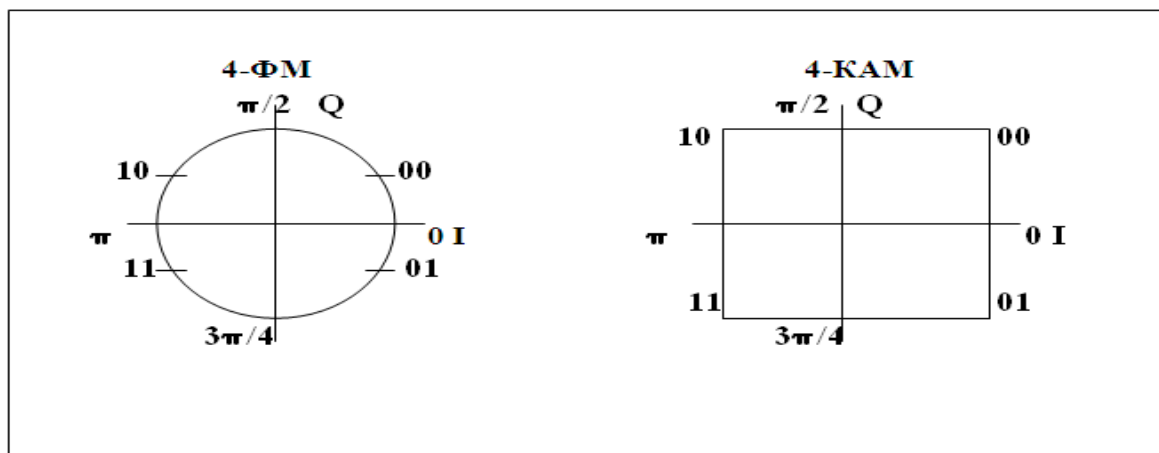
У російськомовній технічній літературі використовують різні терміни для визначення одного і того ж типу модуляції. До найбільш поширених два типи модуляції: **QPSK** (*Quadro Phase Shift Keying*) – квадратурно-фазове кодування і **QAM** (*Quadrature Amplitude Modulation*) – квадратурно-амплітудна модуляція. У вітчизняній термінології перший тип модуляції називають **фазовою модуляцією** і позначають як 4-ФМ, 8-ФМ, 16-ФМ-16, 64-ФМ і т. д., коли довжина коду становить 2, 3, 4, 6 і



т. д. двійкових символів.

Маніпуляція QAM також має низку різновидів: QAM-8, QAM-16, ... , QAM -256. Число після аббревіатури «QAM» означає кількість значень амплітуди і фази носійної, яких вона набуває в залежності від довжини і значень кодових комбінацій. У вітчизняній літературі цю модуляцію часто позначають як 8-КАМ, 16-КАМ, 64-КАМ, ... ,256-КАМ .

Квадратурну амплітудно-фазову маніпуляцію часто унаочнюють за допомогою кругової діаграми, поділеної на чотири квадранти. Осі діаграми відповідають синфазній  $I$  та квадратурній  $Q$  складовим модулюючого сигналу (рис. 1.1).



	<b>Q</b>		<b>*</b>
100000 110000 101010 100001	<b>8</b>	010001 011000 000110 000000	<b>8</b>
000001 110001 101001 100101	<b>6</b>	001001 011011 000011 000101	<b>6</b>
001100 100101 101111 100101	<b>4</b>	001100 000111 000011 000101	<b>4</b>
000100 100100 001110 110000	<b>2</b>	001100 011100 000010 001100	<b>2</b>
<b>-8 -6 -4 -2</b>		<b>8 6 4 2 I</b>	
111000 100110 111110 111101	<b>-2</b>	011101 010100 010010 000100	<b>-2</b>
010001 110111 111111 110101	<b>-4</b>	011101 011111 010011000101	<b>-4</b>
110001 101001 101001 110001	<b>-6</b>	010001 011011 010011 010101	<b>-6</b>
110000 10000 111100 1100000	<b>-8</b>	011000 011001 010010 010000	<b>-8</b>

**Рис. 1.1. Простір сигналів 4-ФМ (зображення а), 4-КАМ (зображення б), і 64-КАМ(зображення в).**

Широко застосовуються й більш складні методи маніпуляції, такі як COFM (*Coded Orthogonal Fricuency Division Multiplexing*) – кодування з ортогональним частотним мультиплексуванням, де роль модулюючих сигналів ввідіграють коефіцієнти оберненого швидкого дискретного перетворювання Фур'є, які дістаємо після операцій QPSK або QAM.

### 1.2. Способи дискретизації неперервних сигналів

*Дискретизація неперервних (аналогових) сигналів може здійснюватись за амплітудою, за часом або як за амплітудою, так і за часом.*

Істотний недолік неперервних сигналів полягає в тому, що в процесі реалізації вони набувають нескінченної кількості (континуум) значень на всьому інтервалі визначення. Натомість дискретні, зокрема цифрові, сигнали набувають лише двох значень: 0 і 1 або – 1 і 1. і Завдяки цьому їхня завадозахищеність значно вища.

Періодичні гармонічні сигнали можуть бути дискретизовані за амплітудою і тоді їх називають *дискретно-неперервними*, або за часом, і тоді йдеться про *неперервно-дискретні* сигнали, або і за амплітудою і за часом, коли утворюються *дискретні* сигнали.

Якщо аналоговий сигнал дискретизується за амплітудою, то номери дискретів описують здебільшого двійковими кодами однакової довжини, наприклад 8, 10, 12, 16, 20 біт. Такими кодами можна пронумерувати від  $2^8 = 256$  до  $2^{20} = 1049000$  рівнів дискретизації.

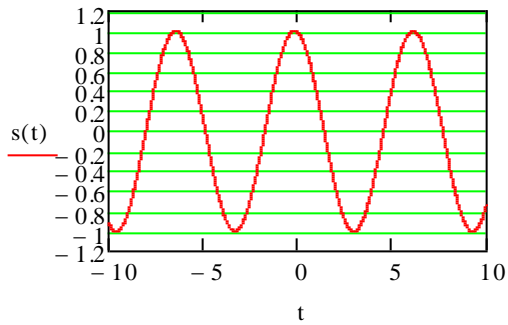
Зауважимо, що від кількості рівнів дискретизації залежить рівень шумів квантування цифрового сигналу. Крок дискретизації за часом зазвичай вибирають такий, щоб за відліками дискретного сигналу можна було без спотворень відновити його аналоговий еквівалент.

Якщо в дискретному сигналі дискрети описані дискретними двійковими кодами, то такі сигнали називаються *цифровими*.

**Приклад 1.1.** Різні види дискретизації аналогового періодичного сигналу.

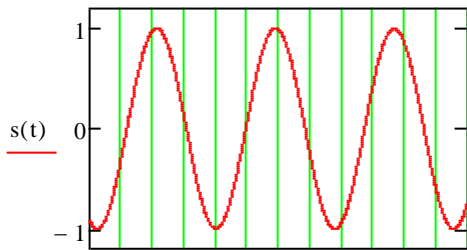
### Дискретно-безперервний сигнал

$$\omega := 1 \quad \phi := \frac{\pi}{16}$$
$$s(t) := A \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi)$$



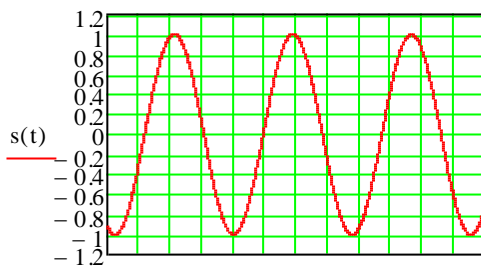
### Безперервно-дискретний сигнал

$$\omega := 1 \quad \phi := \frac{\pi}{16}$$
$$s(t) := A \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi)$$



### Дискретний (цифровий) сигнал

$$\omega := 1 \quad \phi := \frac{\pi}{16}$$
$$s(t) := A \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi)$$



## 1.3. Формула Ейлера

Формула Леонарда Ейлера дозволяє перейти до найзручнішої в застосуванні – показникової форми ряду Фур'є.

Сигнали, що підлягають цифровій обробці, зазвичай набувають значень з області дійсних чисел. Проте математичні вирази для ряду Фур'є в комплексній формі набагато простіші і на практиці постійно доводиться оперувати комплексними величинами.

Вираз виду  $z = a + jb$  називають **комплексним числом**, якщо в ньому коефіцієнти  $a$  і  $b$  – будь-які дійсні числа, а  $j = \sqrt{-1}$  – так звана **уявна одиниця**.

Комплексне число складається з дійсної частини  $a = \operatorname{Re} z$  і **уявної частини**  $b = \operatorname{Im} z$ .

На площині комплексне число  $z = a + jb$  зручно зображати як точку на колі радіусом  $z$  у декартовій системі координат, що має дійсну вісь  $Ox$  і уявну вісь  $Oy$ .

**Модуль  $r$  комплексного числа  $z$**  дорівнює гіпотенузі прямокутного трикутника з катетами  $a$  та  $b$  (рис. 1.2). Кут  $\varphi$  між віссю  $Ox$  і відрізком  $Oz$  називають **аргументом** комплексного числа  $z$ :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}(b/a).$$

Два числа  $z = a + jb$  та  $z = a - jb$  називають **комплексно-спряженими**.

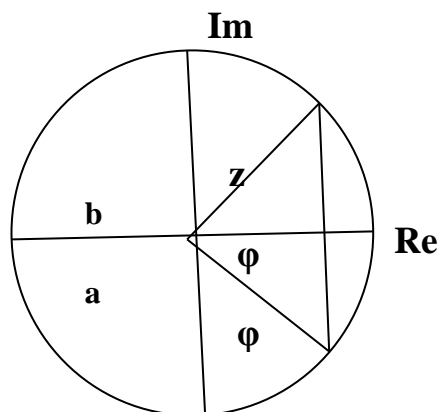


Рис.1.2. Графічне зображення і двох комплексно-спряжених чисел  $z$  і  $\bar{z}$ .

Як випливає з рис.1.2, комплексне число  $z$  можна подати не лише в алгебраїчній, а й у **тригонометричній формі**:

$$z = a + jb = z \cos \varphi + jz \sin \varphi = z(\cos \varphi + j \sin \varphi)$$

Звідси, використовуючи відому **формулу Ейлера**

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi,$$

дістаємо **показникову форму** комплексного числа:

$$z = r e^{j\varphi}.$$

Зокрема, при  $\tau = 1$  маємо

$$\bar{z} = e^{-j\varphi}.$$

Останнє співвідношення дає змогу інтерпретувати комплексне число як точку на одиничному колі, розміщену так, що пряма, яка сполучає цю точку з початком координат, утворює з дійсною віссю кут  $\varphi$ .

Зауважимо, що зв'язок між числом  $e$  (основа натурального логарифма) і тригонометричними функціями у формулі Ейлера зовсім не випадковий. Справді, знехтувавши деталями, розкладемо в ряд Тейлора кожен з функцій  $\cos \varphi$  і  $\sin \varphi$ :

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \dots,$$

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \dots,$$

Аналогічно подамо  $e^{j\varphi}$ :

$$\begin{aligned} e^{j\varphi} &= 1 + \frac{j\varphi}{1!} + \frac{(j\varphi)^2}{2!} + \frac{(j\varphi)^3}{3!} + \frac{(j\varphi)^4}{4!} + \dots = \\ &= 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \dots + j\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \dots\right) = \cos \varphi + j \sin \varphi, \end{aligned}$$

Звідки й випливає правильність формули Ейлера.

Згідно з формулою Ейлера тригонометричні функції можна подати в такому вигляді:

$$\cos \varphi = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2},$$

$$\sin \varphi = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}.$$

Ці співвідношення широко використовують на практиці.

#### 1.4. Розкладання періодичних сигналів у ряд Фур'є

*У 1822 р. французький інженер та математик Жан Батіст Жозеф Фур'є (1768-1830), узагальнивши результати, здобуті для хвильового рівняння, висловив надзвичайно сміливу для свого часу гіпотезу, згідно з якою періодичний сигнал будь-якої форми можна розкласти на синусоїди різних частот, або ж, навпаки, за допомогою відповідного додавання синусоїд із різними частотами можна синтезувати сигнал довільної форми. Згодом правильність цієї гіпотези (у разі виконання певних умов, про які йдеться далі) було підтверджено як теоретично, так і практично.*

Періодичні сигнали, описувані періодичними функціями  $s(t)$  [15], можуть бути розкладені на певному інтервалі у ряд Фур'є, якщо вони на цьому інтервалі задовольняють **умови Діріхле**:

- 1) відсутність розривів другого роду (з вітками, що сягають у нескінченність);

- 2) кількість стрибків (розривів першого роду) скінченна;
- 3) кількість екстремумів скінченна (приклад функції, що має нескінченну кількість екстремумів -  $\sin \frac{1}{x}$  в околі нуля).

Залежно від конкретної форми базисних функцій розрізняють кілька форм запису ряду Фур'є.

### **Синусно - косинусна форма ряду Фур'є**

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)). \quad (1.1)$$

Тут  $\omega_1$  – кругова частота, що відповідає періоду  $T$  повторення сигналу  $\omega_1 = 2\pi/T$ . Кратні їй частоти  $k\omega_1$  називають **гармоніками**; гармоніки нумеруються згідно з індексом  $k$ . Частоту  $\omega_k = k\omega_1$  називають  **$k$ -ю гармонікою** сигналу.

Коефіцієнти  $a_k$  і  $b_k$  цього ряду визначаються за формулами:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos(k\omega_1 t) dt, \quad (1.2)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin(k\omega_1 t) dt. \quad (1.3)$$

Доданок  $\frac{a_0}{2}$  у (1.1) являє собою **середнє значення сигналу на періоді**:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt.$$

Якщо  $s(t)$  – **функція парна**, то всі коефіцієнти  $b_k$  дорівнюють нулю, а отже, відповідна формула ряду Фур'є містить **лише косинусні доданки**. А якщо  $s(t)$  – **функція непарна**, то нульовими будуть, навпаки, косинусні коефіцієнти  $a_k$  і у формулу ряду Фур'є входять **лише синусні доданки**.

### **Косинусна форма ряду Фур'є**

Деяка незручність синусно-косинусної форми ряду Фур'є полягає в тому, що для кожного значення індексу підсумовування  $k$  (тобто для кожної гармоніки з частотою  $k\omega_1$ ) у формулу входять два доданки – синус і косинус. Скориставшись формулами тригонометричних перетворень, суму цих двох доданків можна трансформувати в косинус тієї самої частоти з іншою амплітудою і деякою початковою фазою:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t + \varphi_k). \quad (1.4)$$

Цю форму ряду Фур'є називають **дійсною формою**.

Якщо  $s(t)$  – **функція парна**, то фази  $\varphi_k$  можуть набувати лише значень  $0$  і  $\pi$ , а якщо  $s(t)$  – функція непарна, то можливі значення фази становлять  $\pm\pi/2$ .

### Комплексна форма ряду Фур'є

Ця форма подання ряду Фур'є найбільш поширена в радіотехніці. Її дістають із дійсної форми (1.4) підставленням косинуса у вигляді півсуми комплексних експонент:

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx})$$

Застосувавши це перетворення до дійсної форми ряду Фур'є (1.4), дістанемо суми комплексних експонент із додатними і від'ємними показниками:

$$s(t) = \frac{1}{2} * a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{2} (\exp(jk\omega_1 t + j\varphi_k) + \exp(-jk\omega_1 t - j\varphi_k)), \quad (1.5)$$

А тепер розглядатимемо експоненти зі знаком «мінус» у показнику як член ряду з від'ємними номерами. Згідно з цим підходом сталий доданок  $a_0/2$  буде членом ряду з нульовим номером.

У результаті дістаємо **комплексну форму ряду Фур'є**:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_1 t}. \quad (1.6)$$

Комплексні коефіцієнти  $C_k$  ряду Фур'є пов'язані з амплітудами  $A_k$  і фазами  $\varphi_k$ , Що фігурують у (1.6), такими нескладними співвідношеннями:

$$C_k = \frac{1}{2} A_k e^{j\varphi_k},$$

$$A_k = 2|C_k|, \quad \varphi_k = \arg(C_k).$$

Достатньо простого вигляду набирають і ті формули, якими подається зв'язок коефіцієнтів  $C_k$  із коефіцієнтами  $a_k$  і  $b_k$  синусно-косинусної форми ряду Фур'є:

$$C_k = \frac{a_k}{2} - j \frac{b_k}{2}.$$

$$A_k = 2\operatorname{Re}(C_k), \quad b_k = -2\operatorname{Im}(C_k).$$

Звідси відразу випливає формула безпосереднього розрахунку коефіцієнтів  $C_k$  Ряду Фур'є в комплексній формі:

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \exp(-jk\omega_1 t) dt. \quad (1.7)$$

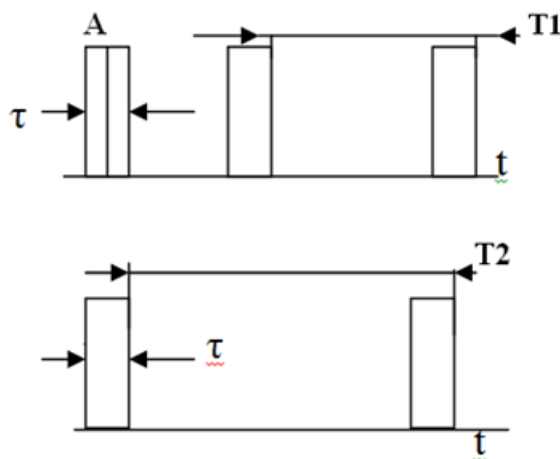
Якщо  $s(t)$  – функція **парна**, то коефіцієнти  $C_k$  – суто **дійсні**, а якщо  $s(t)$  – функція **непарна**, то коефіцієнти  $C_k$  – суто **уявні**.

Сукупність амплітуд гармонік ряду Фур'є називають **амплітудним спектром**, а сукупність їхніх фаз – **фазовим спектром**.

Якщо аналізований сигнал  $s(t)$  дійсний, то його амплітудний і фазовий спектри характеризуються симетрією:

$$A_{-k} = A_k, \varphi_{-k} = \varphi_k, C_{-k} = C_k.$$

Описані зміни проілюструємо, розглянувши випадок дворазового збільшення періоду надходження прямокутних імпульсів (рис. 1.4). Здобутий спектр має три головні характеристики:  $2\pi/T$  – відстань між сусідніми гармоніками;  $2\pi/\tau$  – ширину пелюсток спектра, обернено пропорційну до тривалості імпульсів, що є проявом загального закону: чим коротший сигнал, тим ширший його спектр;  $A_\tau/T$  – максимальне значення амплітуди частоти в головній пелюстці. Тут  $A$  – амплітуда;  $\tau$  – ширина прямокутного імпульсу;  $T$  – період послідовності. Зокрема, зі збільшенням періоду  $T$  імпульсів удвічі відстань між пелюстками не змінюється, а кількість синусоїд у кожній пелюстці подвоюється зі зменшенням їхніх амплітуд (рис. 1.3).





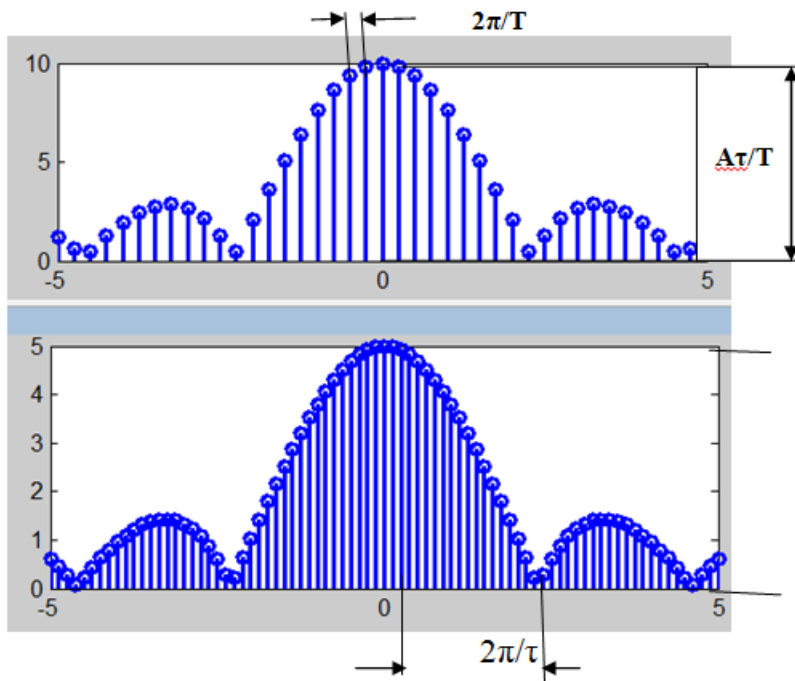


Рис.1.3. Зміна спектра послідовності прямокутних імпульсів унаслідок дворазового збільшення періоду їх надходження

**Приклад 1.2.** Розкладемо в ряд Фур'є послідовність прямокутних імпульсів із періодом  $T$ , амплітудою  $A$  та тривалістю  $\tau$  кожного імпульсу  $\tau$  (рис. 1.4).

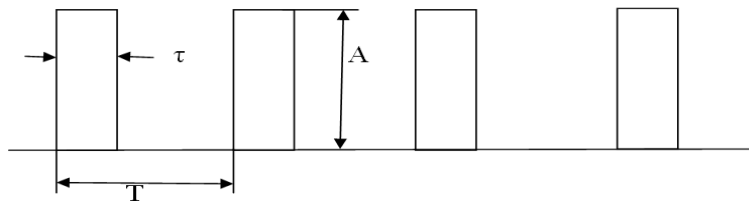


Рис.1.3. Періодична послідовність прямокутних імпульсів

Прямокутний імпульс – функція парна. Тому для його розкладання зручно скористатись синусно-косинусним поданням ряду Фур'є виду (1.1), в якому будуть присутні тільки косинусні складові:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A \cos \left[ \frac{\pi k}{q} t \right] dt = \frac{2A}{\pi k} \sin \left[ \frac{\pi k \tau}{q} \right]. \quad (1.8)$$

Позначимо відношення періоду  $T$  послідовності до довжини  $\tau$  прямокутного імпульсу, *так звану шпаруватість*, як  $q = T/\tau$ . Тоді коефіцієнти розкладання послідовності прямокутних імпульсів можна подати так:

$$a_k = \frac{2A}{\pi k} \sin \left[ \frac{\pi k}{q} \right] = \frac{2A}{q} \frac{\sin(\pi k/q)}{\pi k/q}. \quad (1.9)$$

За такої форми запису легко побачити, чому дорівнює значення сталого доданка ряду:

$$\text{оскільки при } x \rightarrow 0 \frac{\sin x}{x} \rightarrow 0,$$

$$\text{то } \frac{a_0}{2} = \frac{A}{q} = \frac{A\tau}{T}.$$

Отже, розкладання Фур'є періодичної послідовності прямокутних імпульсів набуває вигляду:

$$s(t) = \frac{A}{q} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2A}{\pi k} \sin \left[ \frac{\pi k}{q} \right] \cos \left[ \frac{2\pi k}{T} \right] t. \quad (1.10)$$

### 1.5. Формули Фур'є - перетворення

*Перехід від формул розкладання функцій в ряд Фур'є до формул Фур'є - перетворення дозволяє застосувати їх до знаходження форми спектра одиночного сигналу довільної форми, якщо він описується інтегрованою функцією.*

Для унаочнення переходу від ряду Фур'є до перетворення Фур'є часто використовують такий не цілком строгий, але зрозумілий підхід.

Уявімо собі періодичну послідовність поодиноких імпульсів довільного вигляду і сформуємо для неї ряд Фур'є. Далі, не змінюючи форми поодиноких імпульсів, збільшимо період їх повторення (заповнивши проміжки нульовим значенням) і знову обчислимо коефіцієнти ряду Фур'є. Формула (1.7) для розрахунку зазначених коефіцієнтів показує, що нам доведеться обчислити **той самий інтеграл**, але для **більш щільно розміщених частот**  $\omega_k = k\omega_1$ . Зміна меж інтегрування неістотна, оскільки на доданому між імпульсами проміжку сигнал має нульове значення. Єдина додаткова зміна полягатиме у зменшенні загального рівня гармонік унаслідок ділення результату інтегрування на збільшений період  $T$ .

Отже, зі зростанням періоду надходження імпульсів гармоніки розміщуються дедалі ближче одна до одної за частотою, а загальний рівень спектральних складових стає все менший. При цьому вигляд обчислюваного інтеграла (1.7) не змінюється.

І, нарешті, спрямувавши період до нескінченності (перетворивши тим самим періодичну послідовність у поодинокий імпульс), дістанемо таку картину: гармоніки спектра дедалі щільніше займатимуть усю частотну вісь, тоді як їхні амплітуди спадатимуть до нуля (перетворяться на нескінченно малі). Проте **взаємне співвідношення між рівнями гармонік не змінюється** і визначається тим самим інтегралом (1.7).

Отже, при спектральному аналізі неперіодичних сигналів формула для розрахунку коефіцієнтів комплексного ряду Фур'є модифікується в таким спосіб:

- частота перестає бути дискретно змінюваною і стає неперервним параметром перетворення (тобто  $k\omega_1$  змінюється в (1.7) на  $\omega$ );
- відкидається множник  $1/T$ ;
- результатом обчислень замість нумерованих коефіцієнтів ряду  $C_k$  виступає функція частоти  $S(\omega)$  - *спектральна функція* сигналу  $s(t)$ . Іноді її називають також *спектральною густиною*.

Зрештою, внаслідок зазначених модифікацій формула (1.7) перетворюється на формулу *прямого перетворення* Фур'є:

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{j\omega t} dt \quad (1.11)$$

У формулі самого ряду Фур'є підсумовування, природно, замінюється інтегруванням (і, окрім того, перед інтегралом з'являється ділення на  $2\pi$ . Здобутий вираз називають *оберненим перетворенням Фур'є*:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{j\omega t} d\omega . \quad (1.12)$$

Якщо взяти не кругову частоту  $\omega$ , а звичайну частоту  $f = \frac{\omega}{2\pi}$ , то формули прямого і оберненого перетворення набирають все більшого симетричного вигляду:

$$\dot{S}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{j2\pi f t} dt ,$$

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(f) e^{j2\pi f t} df .$$

## 1.6. Приклади розкладання поодиноких сигналів у ряд Фур'є

*Розкладання сигналу у ряд Фур'є, виконване в середовищі Mathcad і Matlab, через особливості швидкого дискретного перетворення Фур'є, реалізовані в цих технологіях, не завжди виконується адекватно. Проте, є сенс освоїти роботу в цих технологіях, аби дістати чітке уявлення про особливості амплітудно-і фазочастотних спектрів поодиноких періодичних сигналів різної форми.*

### 1. Спектр поодинокого прямокутного імпульсу

Прямокутний імпульс – парна функція (рис. 1.5), тому його розклад у ряд Фур'є містить лише дійсні складові комплексних коефіцієнтів Фур'є.

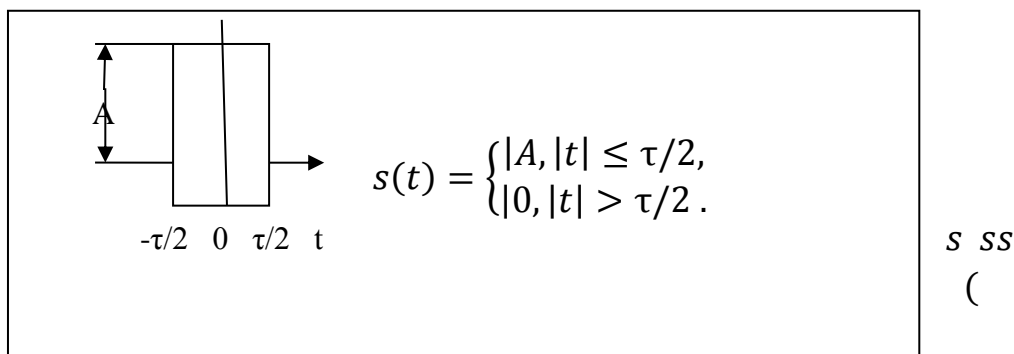


Рис. 1.5. Прямокутний імпульс та його опис

У загальному вигляді спектр прямокутного імпульсу подається через інтеграл Фур'є:

$$S(j\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} A e^{-j\omega t} dt = \frac{2A}{\omega} \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = A\tau \frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\omega\tau/2} .$$

Графіки, наведені на рис. 1.6, унаочнюють поведінку цього імпульсу в часовій і частотній областях.

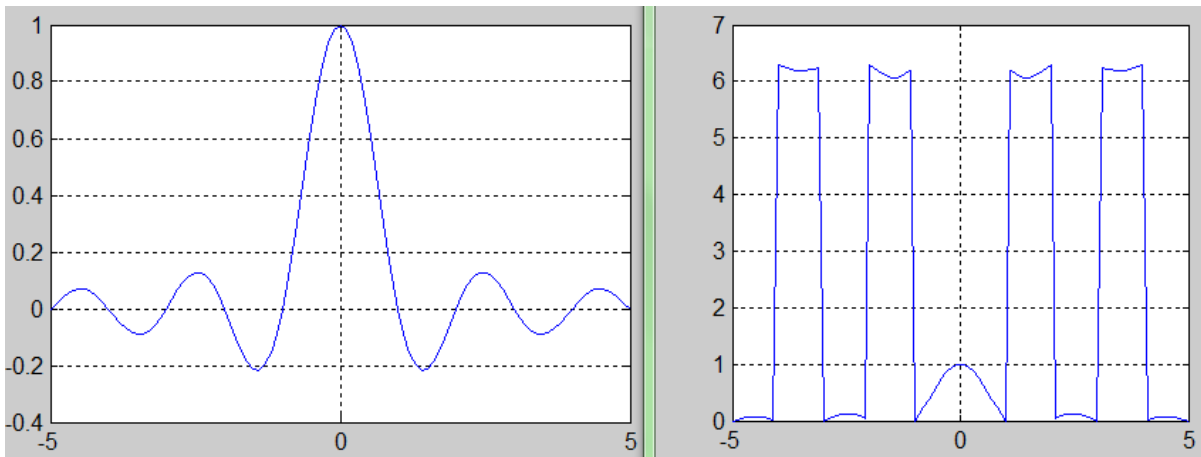


Рис.1.6. Амплітудно- та фазочастотний спектр поодинокого прямокутного імпульсу в середовищі Matlab

Зауважимо, що спектр поодинокого прямокутного імпульсу, як і спектр послідовності прямокутних імпульсів, описується функцією  $\text{sinc } \alpha = \text{sinc } \alpha / \alpha$ , яку називають **функцією вибірки** (одиночного відліку). Відстань між сусідніми бічними пелюстками дорівнює  $2\pi/t$ , амплітуда основної пелюстки становить  $At$ , де  $A$  – амплітуда імпульсу, а  $t$  – його ширина. Значення фази спектра залежно від знака функції  $\text{sinc } \alpha$  змінюється від 0 до  $\pi$ . При  $\omega < 0$  спектр має значення  $-\pi$ , а при  $\omega > 0$  – значення  $\pi$ .

## 2. Спектр поодинокого трикутного симетричного імпульсу

Трикутний симетричний імпульс, як і прямокутний імпульс – функція парна (рис. 1.7). Тому його розклад у ряд Фур'є також містить лише дійсні складові комплексних коефіцієнтів Фур'є.

Опис трикутного симетричного імпульсу

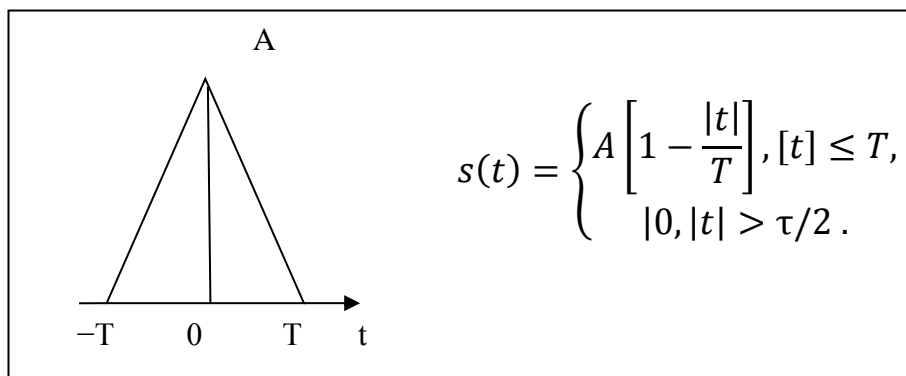


Рис. 1.7. Трикутний симетричний імпульс і його опис

Спектр такого імпульсу подається формулою:

$$S(j\omega) = \int_{-T}^T A \left[ 1 - \frac{|t|}{T} \right] e^{-j\omega t} dt = AT \frac{\text{sin}^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\left(\frac{\omega T}{2}\right)^2}.$$

Результат відповідного моделювання подано на рис. 1.8.

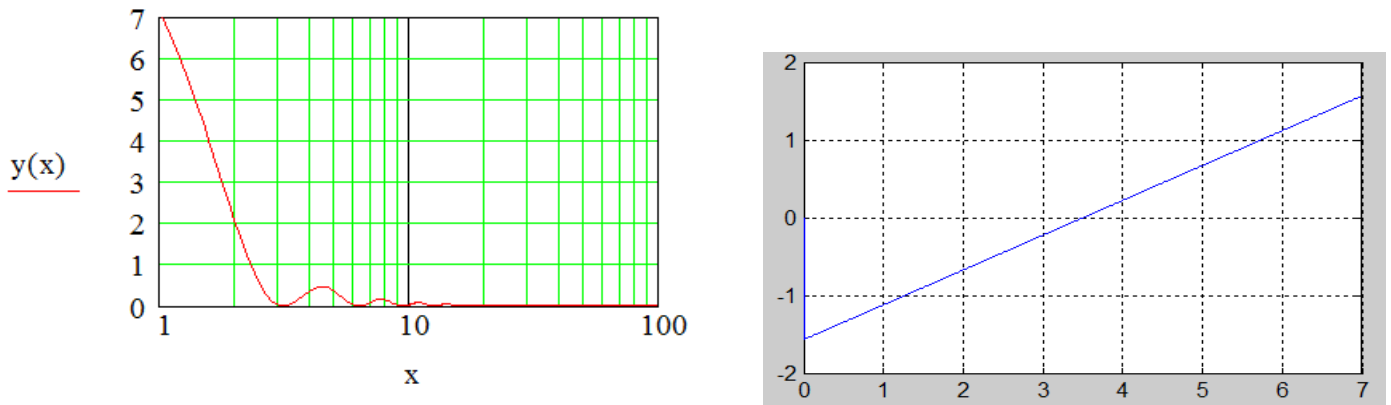


Рис.1.8. Амплітудно- і фазочастотний спектр трикутного симетричного імпульсу в середовищі Mathcad і Matlab

### 3. Експоненціальний гауссів імпульс

Опис цього імпульсу подається за формулою:

$$s(t) = A \exp(-a^2 t^2),$$

а його спектр набирає вигляду

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A \exp(-a^2 t^2) e^{-j\omega t} dt = \frac{A\sqrt{\pi}}{a} * \exp(-\frac{\omega^2}{4a^2}).$$

Результати моделювання амплітудно-частотного спектра експоненціального гауссового імпульсу подано на рис. 1.9.

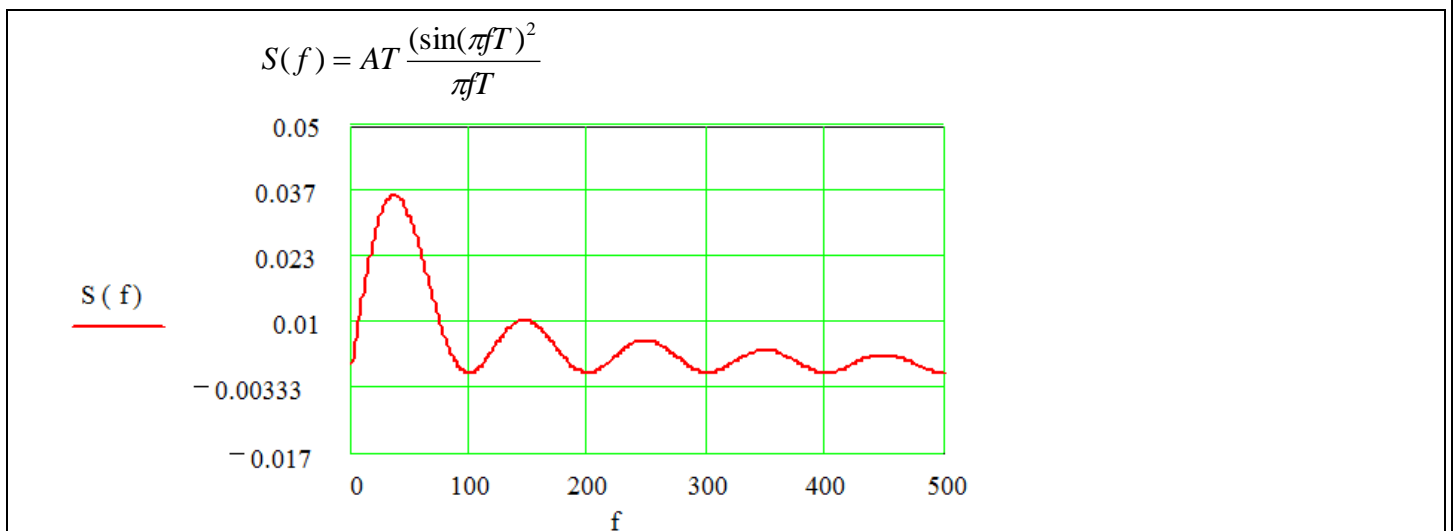


Рис.1.9. Амплітудно-частотний спектр експоненціального гауссового імпульсу

Як бачимо, цей імпульс має нескінченну протяжність і спектр його нескінченний. Спектр має одну головну пелюстку, бічних пелюсток не має. Ця властивість дозволила використовувати його для згладжування перепадів на  $\pi/2$  фазової функції в системах мобільного зв'язку.

## 1.7. Властивості спектрів дискретних сигналів

Далі без доведень сформульовано основні властивості спектрів дискретних сигналів, що випливають з формул Фур'є – перетворення (відповідні доведення можна знайти в багатьох підручниках).

1. Лінійність:

$$s(t) = af(t) + bg(t),$$
$$S(\omega) = aF(\omega) + bG(\omega).$$

2. Затримка сигналу на час  $\tau$  еквівалентна множенню його спектра на експоненту

$e^{-j\omega\tau}$ :

$$s(t) = f(t - \tau),$$
$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) * e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) * e^{-j\omega(t-\tau)} d(t - \tau) e^{-j\omega\tau} =$$
$$= F(\omega) e^{-j\omega\tau}.$$

3. Змінювання масштабу сигналу по осі часу:

$$s(t) = f(at),$$
$$S(\omega) = \frac{1}{a} * F\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

4. Диференціювання сигналу:

$$s(t) = \frac{df}{dt} = j\omega F(\omega)..$$

5. Інтегрування сигналу (без постійної складової):

$$S(\omega) = \frac{F(\omega)}{j\omega}..$$

6. Спектр згортки сигналів:

$$s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t - \tau)d\tau = F(\omega)G(\omega).$$

7. Зв'язок між енергією (дискретного) сигналу в часовій і частотній областях (теорема Парсеваля)

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x(nT)|^2 = \frac{T}{2\pi} * \int_{-\pi/T}^{\pi/T} |X(j\omega)|^2 d\omega,$$

де  $T$  – період дискретизації аналогового сигналу.

## 1.8. Теорема Найквіста. Нормування частоти

Теорема Найквіста встановлює умову, за якої аналоговий гармонічний сигнал можна адекватно подати дискретними відліками.

Вихідний фізичний сигнал являє собою неперервну функцію часу. Такі сигнали, визначені в усі моменти часу, називають, як уже зазначалося, аналоговими.

Послідовність чисел, якою подається сигнал при цифровій обробці, являє собою дискретний ряд і не може повністю відповідати аналоговому сигналу. Числа, з яких

складається така послідовність, – це значення сигналу в окремі (дискретні) моменти часу. Їх називають відліками сигналу.

Як правило, відліки беруться через однакові проміжки часу  $T$ , які називають періодом дискретизації.

Величину, обернену до періоду дискретизації, називають частотою дискретизації:

$$f_D = \frac{1}{T}.$$

Відповідну частоті дискретизації кругову частоту  $\omega_D$  визначають такою рівністю:  $\omega_D = 2\pi/T$ .

Американський фізик Гаррі Найквіст у 1938 році сформулював теорему, згідно з якою гармонічний сигнал може бути адекватно поданий дискретними відліками, якщо його частота не перевищує половини частоти дискретизації.

Зазначена обмежувальна частота називається частотою Найквіста  $f_N$ . При цьому справджуються такі рівності:

$$f_N = f_D/2 = 1/(2T);$$

$$\omega_N = \omega_D/2 = \pi/T.$$

Залежно від співвідношення між частотою дискретизованого гармонічного сигналу та частотою Найквіста можливі три випадки.

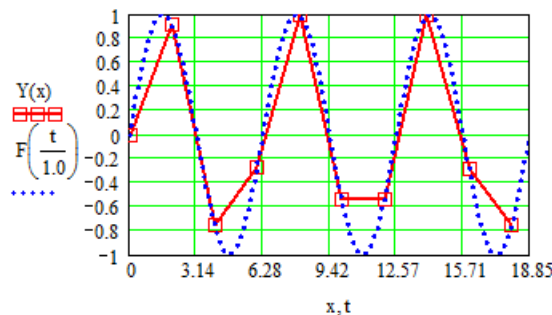
1. Якщо частота гармонічного сигналу менша за частоту Найквіста, то дискретні відліки дають змогу правильно відновити аналоговий сигнал (рис. 1.10, а).

2. Якщо частота гармонічного сигналу дорівнює частоті Найквіста, то дискретні відліки дають змогу відновити аналоговий гармонічний сигнал із тією самою частотою, але амплітуда та фаза відновленого сигналу (рис.10,б, пунктирна лінія) можуть зазнати спотворень. У найгіршому випадку всі дискретні відліки синусоїди можуть дорівнювати нулю.

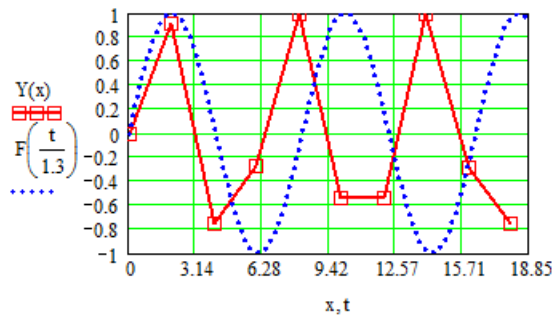
3. Якщо частота гармонічного сигналу більша частоти Найквіста, то відновлений за дискретними відліками аналоговий сигнал (як і в попередньому випадку його зображено пунктиром) також буде гармонічним, але з іншою частотою (рис.10,в). Цей ефект відомий як поява хибних частот (aliasing).

$$x := 0, 2 \dots 6 \cdot \pi \quad t := 0, 0.1 \dots 6 \cdot \pi$$

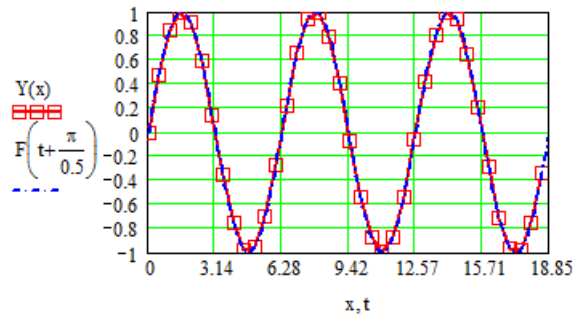
$$Y(x) := \sin(x) \quad F(t) := \sin(t)$$



a)



б)



в)

Рис.1.10. Дискретизація гармонічних сигналів із різною частотою, що дорівнює (а), менша (б), більша (в) за частоту Найквіста.

З огляду на те, що максимальна частота  $f_B$  аналогового сигналу не повинна перевищувати половини частоти  $f_D$ , є сенс у частотній області всі дискретні сигнали розглядати в діапазоні  $[0, f_D/2]$ . Це дає змогу ввести поняття нормованої частоти

$$\hat{f} = \frac{f}{f_D} = f t,$$

або

$$\hat{\omega} = \frac{\omega}{f_D} = \omega T,$$

і, відповідно, розглядати дискретний сигнал в області  $\hat{f} \in [0; 0,5]$  або  $\hat{\omega} \in [0; \pi]$ . На практиці переважно використовують нормовану частоту  $\hat{\omega}$ .

Зауважимо, що застосування нормованих частот дає змогу досліджувати частотні характеристики дискретних систем і спектри дискретних сигналів у єдиній смузі частот. **Адже для цифрової обробки сигналів важливі не абсолютні значення частоти сигналу та частоти дискретизації, а їх відношення, тобто значення нормованої частоти.**

Проілюструємо цей висновок на прикладі двох дискретних косинусоїд:

$$1) \quad \bar{x}_1(n) = \cos(2\pi f_1 T_1 n) = \cos\left(2\pi \frac{f_1}{f_{D1}} n\right), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

де  $f_1 = 2$  Гц,  $f_{D1} = 16$  Гц;

$$2) \quad \bar{x}_2(n) = \cos(2\pi f_2 T_2 n), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad \text{де } f_2 = 5 \text{ кГц}, \quad f_{D2} = 40 \text{ кГц}.$$

Підставивши значення частот, дістанемо:

$$1) \quad \bar{x}_1(n) = \cos\left(2\pi \frac{2}{16} n\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} n\right);$$

$$2) \quad \bar{x}_2(n) = \cos\left(2\pi \frac{5000}{40000} n\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} n\right).$$



Справді ці дискретні сигнали однакові, оскільки рівні між собою їхні нормовані частоти.

### 1.9. Дельта-функція і білий шум

*В аналізі сигналів широко використовуються два схожі між собою і водночас різні тестові сигнали дельта – функція і білий шум.*

Дельта функція  $\delta(t)$ , або функція Дірака, являє собою нескінченно вузький імпульс із нескінченною амплітудою, розміщений при нульовому значенні аргументу функції. Утім «площа» такого імпульсу дорівнює одиниці:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Вочевидь, сигнал у вигляді дельта-функції неможливо реалізувати фізично, але ця функція дуже важлива для теоретичного аналізу сигналів і систем.

На графіках дельта-функцію зображують, як правило, жирною стрілкою, висота якої пропорційна до множника, записаного перед дельта-функцією (рис.1.11.)

Одна з найважливіших властивостей дельта-функції – це так звана фільтрувальна властивість. Полягає вона в тому, що коли дельта функція присутня під інтегралом як множник, то результат інтегрування дорівнює значенню решти підінтегрального виразу в тій точці, де зосереджено дельта-імпульс:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0) dt = f(t_0)$$

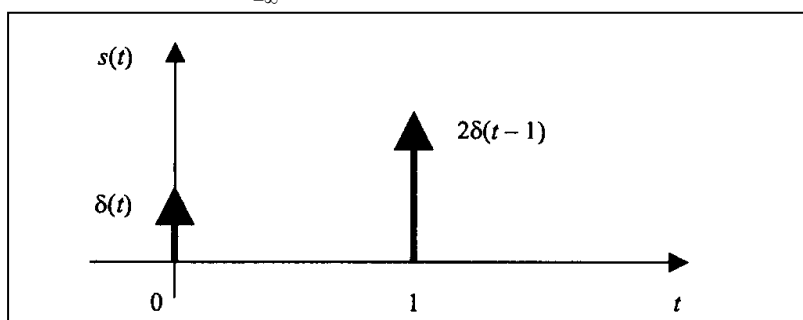


Рис.1.11. Графік сигналу  $s(t) = \delta(t) + 2\delta(t - 1)$

Із того факту, що інтеграл від дельта-функції дає безрозмірну одиницю, випливає, що розмірність самої дельта-функції обернена до розмірності її аргументу. Наприклад, дельта-функція часу має розмірність  $s^{-1}$ , тобто розмірність частоти.

Спектр сигналу у вигляді дельта-функції набирає такого вигляду:

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t} dt = 1$$

Отже, спектр дельта-функції – це константа, тобто спектр амплітуд дельта-функції не залежить від кутової частоти  $\omega$ , причому *внесок усіх частот рівномірний*. **Що ж до спектра фаз, то він на всіх частотах дорівнює нулю.**

Існує, проте, що один сигнал, котрий як і дельта-функція, має єдиний спектр амплітуд у всій частотній області. Натомість спектр його фаз – повна абракадабра.

Такий сигнал за аналогією з білим світлом, що утворюється з комбінацій різних кольорів, фази яких не пов'язані одна з одною, називається білим шумом.

Як бачимо, дельта-функція і білий шум – два схожі і водночас дуже різні сигнали. Обидва вони широко використовуються в аналізі сигналів.

Той факт, що спектр дельта-функції характеризується рівномірністю в нескінченій смузі частот, цілком узгоджується із загальним співвідношенням між тривалістю сигналу та шириною його спектра: дельта-імпульс має нескінченно малу тривалість, тоді як спектр його нескінченно широкий.

### 1.10. Спектр дискретного сигналу

Перетворення Фур'є дає змогу обчислити спектральну густину сигналу, що являє собою функцію (як правило, часу або просторових координат). Що ж до дискретного сигналу, то він являє собою послідовність чисел, а тому для аналізу його спектра звичайними (аналоговими) засобами необхідно зіставити з цією послідовністю деяку функцію.

Традиційний спосіб такого зіставлення полягає в поданні відліків у вигляді дельта-функцій із відповідними множниками та затримками.

Наприклад, для послідовності відліків  $\{x(k)\}$  дістанемо такий сигнал:

$$S(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(t-k).. \quad (1)$$

Перетворення Фур'є лінійне, спектр дельта-функції дорівнює одиниці, а затримка сигналу в часі призводить до множення спектра на комплексну експоненту. Усе це дає підстави відразу записати спектр дискретного сигналу:

$$\dot{S}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-j\omega k}. \quad (2)$$

Із цієї формули випливає головна властивість спектра будь-якого дискретного сигналу: спектр його завжди періодичний. У даному разі період дорівнює  $2\pi$  (тобто круговій частоті дискретизації,  $\omega_d=2\pi$ ):

$$\dot{S}(\omega \pm 2\pi) = \dot{S}(\omega).$$

Нехай тепер значення  $x(k)$  являють собою відліки аналогового сигналу  $S(t)$ , узяті з періодом  $T$ :

$$x(k) = S(kT).$$

З'ясуємо, як у цьому разі спектр дискретного сигналу (2) пов'язаний зі спектром  $\dot{S}(\omega)$  аналогового сигналу.

Розглянемо дискретизований сигнал у вигляді послідовності дельта-функцій, «зваженої» значеннями відліків  $S(kT)$  аналогового сигналу  $S(t)$  (рис.1.12):

$$S_d(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(kT)\delta(t-kT). \quad (3)$$

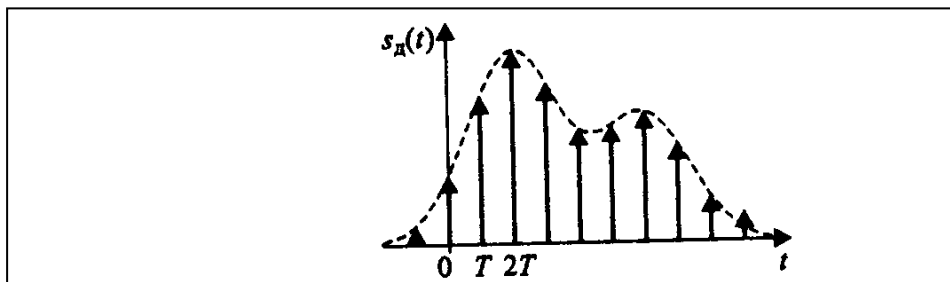


Рис.1.12. Дискретизований сигнал у вигляді послідовності дельта-функцій

Оскільки функція  $\delta(t - kT)$  дорівнює нулю скрізь, крім моменту  $t = kT$ , можна замінити у виразі (3) константи на вихідний неперервний сигнал  $S(t)$ :

$$S_d(t) = S(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT). \quad (4)$$

Зауважимо, що сума, яка входить у (4), являє собою періодичний сигнал, а отже, її можна подати у вигляді ряду Фур'є, коефіцієнти якого:

$$\dot{C} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{j\omega_n t} dt = \frac{1}{T}. \quad (5)$$

У формулі (5) ураховано, що в інтервал  $(-T/2, T/2)$  потрапляє тільки одна дельта-функція, яка відповідає  $k=0$ .

Таким чином періодичну послідовність дельта-функцій можна подати у вигляді комплексного ряду Фур'є:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \frac{1}{T} * \int_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega_n T} .,$$

де  $\omega_n = 2\pi n/T$ .

Підставивши (6) у (4), дістанемо:

$$S_d(t) = \frac{S(t)}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_n t} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(t) e^{j\omega_n t}.$$

Множення сигналу на  $\exp(j\omega_n t)$  відповідає зсуву спектральної функції на  $\omega_n$ , тому спектр дискретизованого сигналу можна записати так:

$$\dot{S}_d(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega - \frac{2\pi m}{T}). \quad (7)$$

Отже, спектр дискретизованого сигналу являє собою нескінченний ряд зсунених копій спектра вихідного неперервного сигналу  $S(t)$  (рис.1.13). Відстань за частотою між сусідніми копіями спектра дорівнює частоті дискретизації  $\omega_d = 2\pi/T$ .

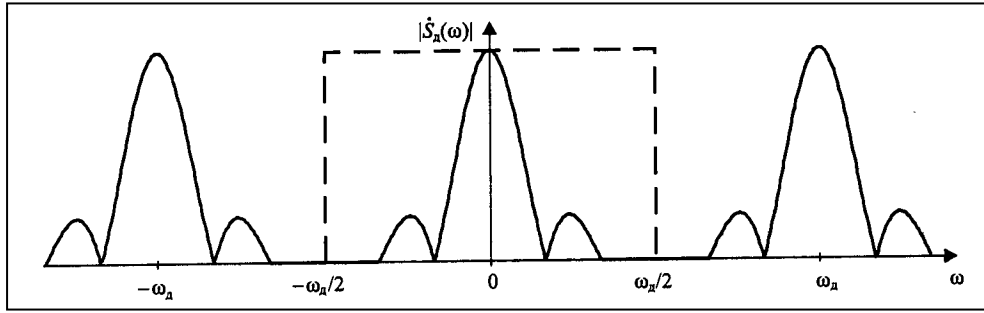


Рис. 1.13. Спектр дискретизованого сигналу

Зауважимо, що рис.1.13 унаочнює і спосіб відновлення неперервного сигналу за дискретними відліками. Для цього необхідно пропустити дискретний сигнал через ідеальний фільтр нижніх частот (ФНЧ) із частотою зрізу, яка дорівнює половині частоти дискретизації. АЧХ такого фільтра зображено пунктиром на рис.1.13.

Вочевидь, точне відновлення сигналу можливе, якщо зсунені копії сигналу не перекриваються.

Як впливає з рис. 1.13, для цього необхідно, аби частота дискретизації принаймні вдвічі перевищувала верхню граничну частоту в спектрі сигналу:

$$\omega_d > 2 \omega_v \quad (8)$$

Спектральне подання дискретного сигналу дає змогу пояснити згадувану вже появу хибних частот (див. рис. 1.10, в). Нехай, наприклад, дискретизації зазнає гармонічний сигнал із частотою  $\omega_0$ , яка перевищує частоту Найквіста, але менша за частоту дискретизації. Спектр такого сигналу подано на рис. 1.14 (верхнє зображення). Зсунені копії спектра, що з'являються при дискретизації, утворюють спектральні складові з частотою  $\omega_d - \omega_0$ , які потрапляють у смугу відновлення (від нуля до частоти Найквіста). Цю ситуацію ілюструє рис. 1.14 (нижнє зображення). Як бачимо, спектри, утворювані внаслідок дискретизації гармонічних сигналів із частотами  $\omega_0$  і  $\omega_d - \omega_0$  цілком ідентичні.

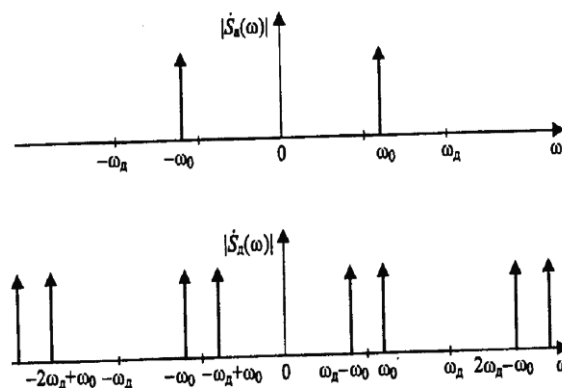


Рис.1.14. Спектри аналогової (верхнє зображення) і дискретизованої (нижнє зображення) синусоїди з частотою, яка перевищує частоту Найквіста.

Зауважимо, що рис. 1.14 ілюструє в частотній області процес дискретизації гармонічного сигналу, поданий на рис. 1.10.

У разі довільного сигналу, якщо умова (8) не виконується, зсунені копії спектра накладатимуться одна на одну, що призведе до неминучих спотворень при відновленні неперервного сигналу (рис. 1.15).

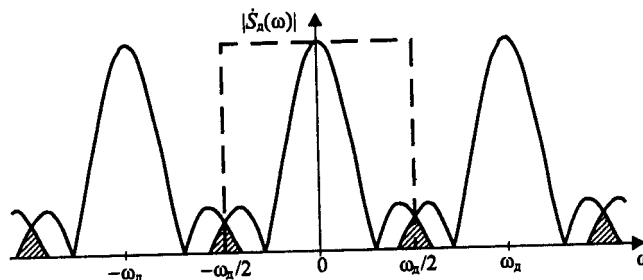


Рис. 1.15. Перекриття зсунених копій спектра в разі недостатньо високої частоти дискретизації.

Зазначені спотворення виникають через те, що спектральні складові сигналу з частотами, вищими за частоту Найквіста, яка дорівнює  $\omega_d/2$ , не можуть бути відновлені правильно – замість цього вони викликають накладання «хвостів» сусідніх зсунених копій спектра та появу фальшивих частот.

У разі, коли сигнал, що підлягає дискретизації, може містити спектральні складові з частотами, вищими за частоту Найквіста, є сенс заздалегідь пропустити його через ФНЧ із частотою зрізу, яка дорівнює частоті Найквіста (рис.1.16). При цьому все одно буде втрачено високочастотні складові (зберегти їх можна лише підвищенням частоти дискретизації). Але в такому разі завдяки відсутності накладання «хвостів» не з'являться фальшиві частоти, а отже діапазон частот від нуля до  $\omega_d/2$  буде відтворено в дискретному сигналі без спотворень.

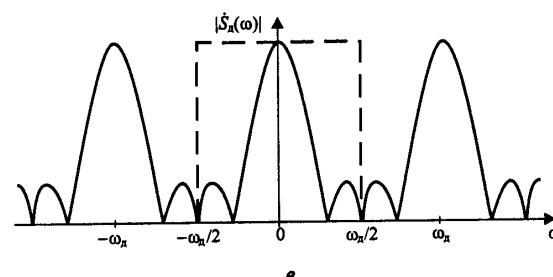
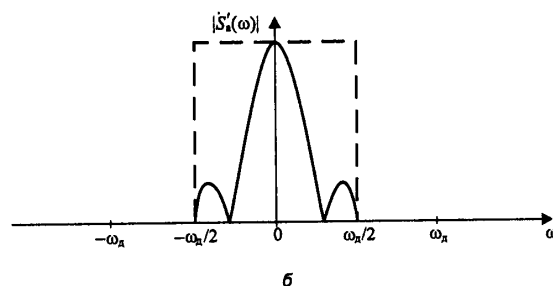
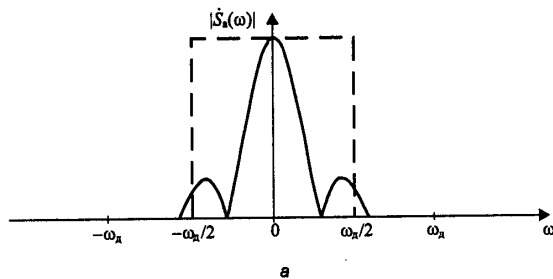


Рис. 1.16. При дискретизації сигналу, що містить високочастотні складові (а), корисно пропустити його через ФНЧ (б), щоб уникнути появи фальшивих частот (в).

### 1.11 Теорема Котельникова

Як уже зазначалося, деякі сигнали можуть бути без втрат інформації подані своїми дискретними відліками. Виведений у попередньому підрозділі вираз для спектра дискретизованого сигналу дозволяє виокремити той клас сигналів, для яких це можливо, і описати спосіб такого відновлення.

Згідно із (7) спектр дискретизованого сигналу являє собою суму зсунених копій спектра вихідного сигналу, причому крок зсуву дорівнює частоті дискретизації  $\omega_d$ .

Якщо у спектрі аналогового сигналу (див. рис.1.13) немає складових із частотами, вищими за частоту Найквіста  $\omega_d/2$ , то зсунені копії спектра не перекриватимуться. Тоді використання ідеального ФНЧ із прямокутною АЧХ дозволить виокремити вихідну (незсунену) копію спектра, зосереджену в околах нульової частоти, і в такий спосіб точно відновити вихідний аналоговий сигнал.

АЧХ ідеального ФНЧ, який відновлює аналоговий сигнал, наведено на рис.1.17 ліворуч. Коефіцієнт передачі в смузі пропускання дорівнює  $T$ , а не одиниці, аби компенсувати множник  $1/T$  у формулі (7). За допомогою оберненого перетворення Фур'є знайдемо імпульсну характеристику фільтра, наведену на рис.1.17 праворуч:

$$h(t) = \frac{\sin(\pi \frac{t - kT}{T})}{(\pi \frac{t - kT}{T})} \quad (11)$$

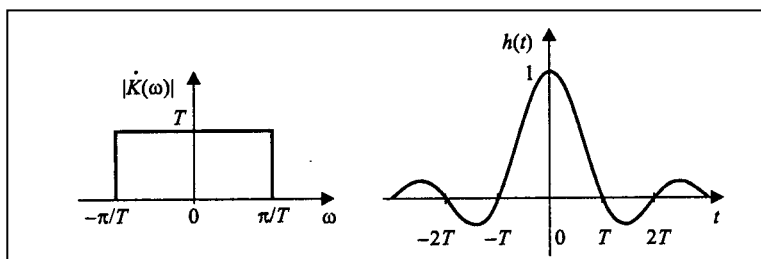


Рис.1.17. Амплітудно-частотна (ліворуч) та імпульсна (праворуч) характеристики ідеального відновлення фільтра

Дискретизований сигнал (3) являє собою суму дельта-функцій. При проходженні такого сигналу через відновлювальний ФНЧ кожна дельта-функція породить на виході відповідним чином зсунену та масштабовану копію імпульсної характеристики фільтра. Вихідний сигнал, який *точно відповідає вихідному аналоговому сигналу*, являтиме собою суму зсунених і помножених на відліки сигналу копій імпульсних характеристик (11) ідеального ФНЧ:

$$S(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(kT) \frac{\sin(\pi \frac{t-kT}{T})}{(\pi \frac{t-kT}{T})}. \quad (12)$$

Згідно зі сказаним сформулюємо *теорему Котельникова*:

*Довільний сигнал  $S(t)$ , спектр якого не містить складових із частотами, що перевищують деяке значення  $\omega_B = 2\pi f_B$ , може бути без втрат інформації поданий своїми дискретними відліками  $\{S(kT)\}$ , узятими з інтервалом  $T$ , що задовольняє таку нерівність:*

$$T \leq \frac{1}{2f} = \frac{\pi}{\omega_B} \quad (13)$$

Відновлення вихідного неперервного сигналу  $S(t)$  за набором його дискретних відліків  $\{S(kT)\}$  здійснюється за формулою (12).

Формула (12) являє собою розклад сигналу  $S(t)$  у ряд за системою функцій  $\{\varphi_k(t)\}$ , яку називають *базисом Котельникова*:

$$\varphi_k(t) = \frac{\sin(\pi \frac{t-kT}{T})}{(\pi \frac{t-kT}{T})}.$$

Формування неперервного сигналу за його дискретними відліками унаочнює рис.1.18. Пунктиром зображено графіки окремих доданків формули (12), суцільною лінією – відновлений сигнал.

Зауважимо, що рис.1.18 ілюструє головну властивість сигналу з обмеженим спектром – його нескінченність у часі.

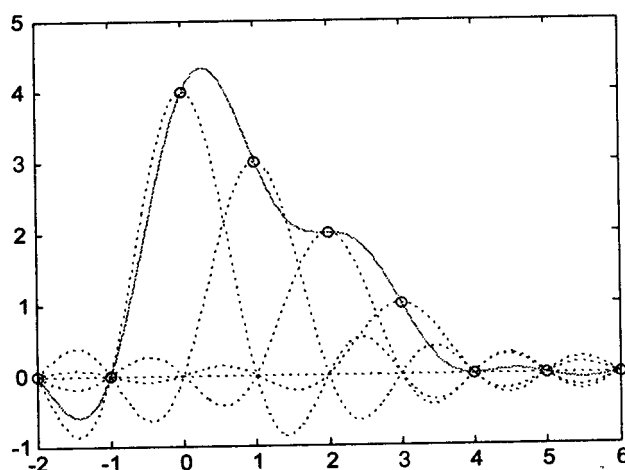


Рис.1.18. Відновлення неперервного сигналу за його дискретними відліками

### **1.9. Теорема Котельникова: відновлення сигналу за його дискретними вибірками**

*Теорема Найквіста встановлює нижню граничну частоту перетворення і отримання вибірок аналогового сигналу, на підставі якої аналоговий сигнал може бути відновлений без втрат за своїми вибірками. Теорема В.А. Котельникова 1933 дає теоретичну формулу, за якою аналоговий сигнал відновлюється на часовому інтервалі.*

Теорема В.А. Котельникова. Будь-яку функцію  $f$ , що складається з частот від 0 до  $f$  (max) включно, можна передавати з будь-яким ступенем точності за допомогою чисел, що слідує один за одним через інтервали часу  $1/2f$  (max) секунд.

Доказ (за А.А.Харкевичем, [20]). Застосуємо формули прямого та зворотного перетворення Фур'є:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) * e^{-j\omega t} dt,$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} * \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) * e^{j\omega t} d\omega.$$

В розглянутому окремому випадку обмеженого спектра  $\omega$  (max) =  $2\pi f$  (max) і перший вираз прямого Фур'є - перетворення буде мати вигляд:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} * \int_{-\omega(\max)}^{\omega(\max)} S(\omega) * e^{j\omega t} d\omega, \quad (1.13)$$

Оскільки частотний спектр за межами  $f(\max)$   $S(\omega)=0$ , то саму функцію  $S(\omega)$  на інтервалі  $[-\omega(\max), \omega(\max)]$ . за частотами також можна розкласти в ряд Фур'є:

$$S(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k * e^{jk\pi \frac{\omega}{\omega(\max)}}.$$

У цьому розкладанні подвоєний кінцевий спектр грає роль періоду за частотою. Відліки функції знаходяться за формулою зворотного Фур'є - перетворення

Тут  $D$  ( $\omega$ )- обмежене значенням  $f$  (max) пряме перетворення Фур'є: частотна функція вихідного сигналу. Ця функція з частотою дискретизації  $T$  точно так само може бути розкладена в ряд Фур'є (за формулою прямого перетворення):

$$D_k = \frac{1}{2\omega(\max)} * \int_{-\omega(\max)}^{\omega(\max)} S(\omega) * e^{-jk\pi \frac{\omega}{\omega(\max)}} d\omega. \quad (1.14)$$

Підставляючи формулу b) у а) останній вираз в аналогічну формулу прямого перетворення Фур'є і змінюючи порядок виконання операцій, отримуємо:

$$f(t) := \frac{1}{2\pi} * \int_{k=-\omega(\max)}^{\omega(\max)} \left( \sum_{-\infty}^{\infty} D_k e^{jk\pi \frac{\omega}{\omega(\max)}} \right) e^{j\omega t} d\omega.$$

Після зміни порядку підсумовування та інтегрування отримаємо

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} * \sum_{-\infty}^{\infty} D_k * \int_{-\omega(\max)}^{\infty} e^{j\omega(t+k\frac{\pi}{\omega(\max)})} d\omega$$

Після інтегрування цей вираз має вигляд:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} * \sum_{-\infty}^{\infty} D_k * \frac{\sin(\omega(\max))(t + \pi / \omega(\max))}{(t + \pi / \omega(\max))}. \quad (1.15)$$

$D_k$  мають смисл частотних вибірок на часовій осі



$$D_k = f(kT).: \quad D_k = \frac{\pi}{\omega(\max)} * f\left(-k \frac{\pi}{\omega(\max)}\right) = \Delta t * f(-k\Delta t). \quad (1.16)$$

Підставляючи  $D_k$  в формулу с), отримаємо остаточний вигляд формули Котельникова:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) * \frac{\sin\left(\pi * \frac{t-kT}{T}\right)}{\left(\pi * \frac{t-kT}{T}\right)}. \quad (1.17)$$

З останньої формули випливає основна властивість сигналу з обмеженим спектром: він нескінченний у часі, спектр кожної вибірки є добутком функції  $\text{sinc} \alpha = \text{sinc} \alpha / \alpha$  помноженої на масштабуючий множник  $f(kT)$ .

### 1.10. Дельта-функція та білий шум

У цифровій обробці сигналів широко використовуються властивості спеціального  $\delta$ -імпульсу, частотний спектр якого рівномірний і нескінченний, схожий на спектр білого шуму, але за рахунок фазових особливостей має принципові відмінності.

За визначенням  $\delta$ -функція ( $\delta$ -імпульс) - це дуже короткий прямокутний імпульс, ширина якого дорівнює  $\tau$ , а висота  $1 / \tau$ . При  $\tau \rightarrow 0$  площа  $\delta$ -імпульсу дорівнює 1. Висота імпульсу прагне до нескінченності, а ширина  $\tau$  до 0. У цьому випадку для  $\delta$ -функції справедливі наступні рівності:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \quad (1.18)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) f(t) dt = f(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) dt = f(\tau). \quad (1.19)$$

З останнього співвідношення випливає, випливає, що  $\delta$ -функція в нульовій точці володіє фільтруючим властивістю, що дозволяє вибрати в ній значення сигналу  $f(\tau)$ .

Якщо  $\delta$ -функції рівномірно розмістити на часовій осі через інтервали часу  $T$  - інтервали дискретизації Найквіста - то можна знайти спектр вже періодичної  $\delta$ -функції, розклавши її в степеневий ряд Фур'є. Оскільки спектр  $\delta$ -функції одиничний, а інтервал її повторення дорівнює  $T$ , ряд Фур'є на інтервалі періоду дискретизації дорівнює частоті дискретизації  $f(T)=1/T$ . Виходять такі закономірності:

$$\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT), \quad (1.20)$$

$$S(\delta(kT)) = \frac{1}{T} * \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) * e^{-jt\omega} dt = \frac{1}{T}.$$

Отже, періодична послідовність  $\delta$ -функцій, зсунених на крок дискретизації, має вигляд:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \frac{1}{T} * \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jt\omega}. \quad (1.21)$$

Формула (1.18) показує, що впродовж всього нескінченного частотного спектра амплітуди всіх частот  $\delta$ -імпульсу однакові і сам частотний спектр дорівнює 1. Фази ж усіх частот строго впорядковані, оскільки всі вони починаються на початку координат, де для  $\delta$  ( $\tau$ ),  $\tau = 0$ . Якщо ж на часовій осі фази частотного спектра короткого прямокутного сигналу еквівалентного  $\delta$ -імпульсу невпорядковані, випадкові, безладні, виходить білий шум. Завдяки такій властивості фаз частотного спектра спектр  $\delta$ -імпульсу і білий шум - два абсолютно різних фізичних явища.

### 1.11. Зв'язок спектрів дискретизованих і аналогових сигналів

Спектр дискретизованого сигналу являє собою нескінченний ряд копій спектрів аналогового сигналу, зсунених на частоту дискретизації  $\omega_d$ .

Цей результат виходить з формули прямого і зворотного Фур'є - перетворення Доказ наведено в [18].

$$X_a(j\omega) = \int_0^{\infty} x_a(t) e^{-j\omega t} dt, \quad x_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)_a e^{j\omega t} d\omega.$$

Після заміни функції часу для аналогового сигналу його відліками з періодом дискретизації  $T$  маємо:

$$x(nT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)_a e^{j\omega nT} d\omega \quad (1.22)$$

На періоді  $2\pi$  буде розрахункова безліч інтервалів дискретизації  $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$  і для кожного чергового періоду  $mT$  справедлива формула зворотного Фур'є - перетворення за умови, що число періодів  $m$  нескінченно. Тоді інтеграл можна замінити нескінченною сумою періодів і формула зворотного Фур'є - перетворення для дискретизованого сигналу буде мати вигляд:

$$x(nT) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{(2m-1)\frac{\pi}{T}}^{(2m+1)\frac{\pi}{T}} X(j\omega)_a e^{j\omega nT} d\omega \quad (1.23)$$

де  $m$ -номер інтервалу  $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$ . Обчислення інтеграла  $\int_{(2m-1)\frac{\pi}{T}}^{(2m+1)\frac{\pi}{T}}$  зі змінними від  $m$  межами

можна замінити обчисленням інтеграла з постійними межами  $\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}}$ , але залежною від  $m$

підінтегральною функцією  $X_n\left[j\left(\omega + m\frac{2\pi}{T}\right)\right]$ , яка відповідає спектра, зсуненому по осі частот на  $m\frac{2\pi}{T}$ , де  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ . Тому останню рівність можна переписати як:

$$x(nT) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} X_a \left[ j\left(\omega + m \frac{2\pi}{T}\right) \right] e^{j\omega nT} d\omega.$$

Після зміни порядку підсумовування та інтегрування виходить:

$$x(nT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a \left[ j\left(\omega + m \frac{2\pi}{T}\right) \right] e^{j\omega nT} d\omega. \quad (1.24)$$

Якщо останньому виразу поставити у відповідність пряме перетворення Фур'є, можна знайти відповідність між спектром аналогового і дискретного перетворення Фур'є:

$$X(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a \left[ j\left(\omega + m \frac{2\pi}{T}\right) \right] e^{j\omega nT}. \quad (1.25)$$

З останнього виразу видно, що спектр дискретного сигналу дорівнює сумі спектрів аналогового сигналу зсунених на інтервал дискретизації і помножених на константу  $1/T$ . Звідси випливає, що спектр аналогового сигналу можна отримати на виході фільтра нижніх частот на інтервалі одного періоду дискретизації. Вид спектра дискретизованого сигналу показано на рис. \*

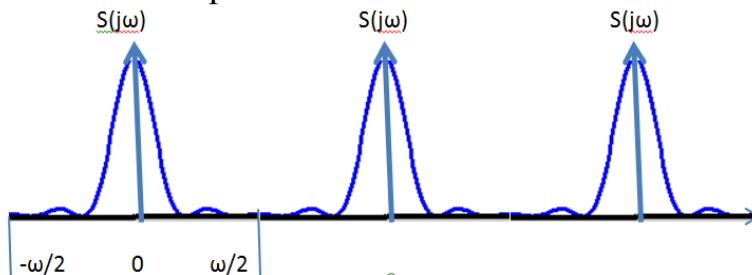


Рис.1.9. Спектр дискретизованого сигналу

## 1.12. Приклади дискретизованих сигналів

У загальному випадку дискретизований в часі сигнал є довільним за величиною і на часовій осі відображається решітчастою функцією

Зазвичай при відображенні сигналу рядом Фур'є в комплексній формі знаходиться його комплексний частотний спектр. Амплітудно-частотний спектр сигналу знаходиться як модуль, а фазочастотний спектр як аргумент комплексно частотного спектра.

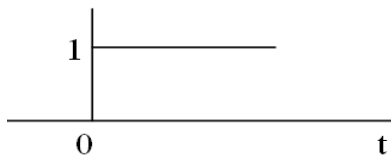
Числові значення  $\gamma$  решітчастого сигналу записуються послідовністю дійсних чи комплексних чисел як вектор на кожному часовому інтервалі  $T$ , який є періодом дискретизації. Типовими дискретними імпульсами є:

1. Цифровий одиничний імпульс, який описується як

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases} \quad n - \text{натуральний ряд чисел.}$$

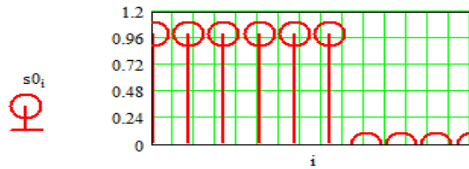
1. Цифровий одиничний скачок

$$1(n) = \begin{cases} 1, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases}.$$



Дискретизований одиничний скачок на 6 часових інтервалів без затримки та з затримкою на 4 інтервалу дискретизації наведено на рис. 1.5.

$i := 0..9$      $j := 6..9$      $s_{0i} := 1$      $s_{0j} := 0$



$i := 0..9$      $j := 4..9$      $s_{0i} := 0$      $s_{0j} := 1$

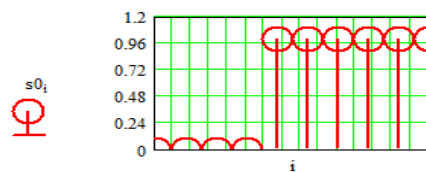
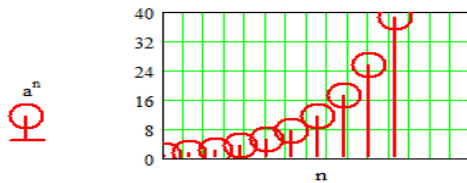


Рис.1.5. Одинична функція без затримки та з затримкою

3. Показові дискретизовані функції з основою  $a \geq 1$  та  $a < 1$  представлені на рис. 1.6.

$a := 1.5$      $n := 0..9$      $D(n) := a^n$



$a := 0.8$      $n := 0..9$      $D(n) := a^n$

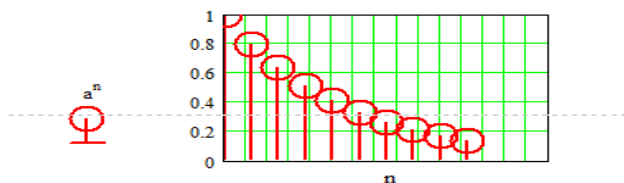


Рис.1.6. Показова ( $a \geq 1$  зверху та  $a < 1$  знизу)

4. Дискретна синусоїда

$$D(n) = A \cos(2fTn)$$

$A$  - амплітуда,  $f$  - частота,  $T$  - період дискретизації,  $n$  - натуральний ряд чисел.

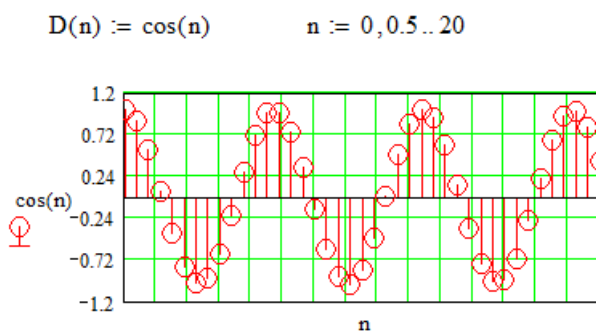


Рис. 1.10. Дискретна косинусоїда

### 1.13. Ортогональний та ортонормований базис

*Особливі властивості перетворення Фур'є пояснюються системою базисних функцій, за якими проводиться розкладання сигналу при переході від часової області до частотної і назад. Ця система утворює ортогональний або ортонормований базис.*

В формулі ряду Фур'є сигнал для кожної частоти з нескінченного їх ряду розкладається за синус-косинусними компонентами. Нормою розкладання сигналу за кожною із частот  $f_k$  є вираз

$$\|f_k\| = \sqrt{\sin(k\omega t)^2 + \cos(k\omega t)^2} = 1$$

Такий базис, який складається із взаємно-перпендикулярних векторів, називається ортогональним. Якщо в базисі всі вектори, за якими проводиться розкладання функції або векторів сигналу, одиничні, то

Базис є ортонормованим. Зокрема, для багатовимірного сигналу багатовимірний  $\delta$ -імпульс утворює ортонормований базис  $N$ -мірного простору:

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0, m \neq n \\ 1, m = n \end{cases} \quad (1.26)$$

Нехай є система функцій, що складають систему координат, за якими передбачається розкласти сигнал у часовій області.

Нехай два вектори  $v_1$  і  $v_2$  взаємно перпендикулярні і дорівнюють 1, іншими словами утворюють ортонормований базис. Нехай деякий сигнал, що виражається функцією  $f$ , за кожним з напрямків ортонормованого базису описується набором величин-векторів  $c_1$  і  $c_2$ . Цю функцію-сигнал через вектори ортонормованого базису можна виразити як  $f = c_1 * v_1 + c_2 * v_2$ .

Коефіцієнти-вектори  $c_1$  і  $c_2$  виражають величину складових вектора  $f$  за напрямками  $c_1$  і  $c_2$ . Два вектора  $c_1 * v_1$  і  $c_2 * v_2$  називають проєкціями вектора  $f$ . Отримання проєкцій вектора  $f$  ортонормованого базису найпростіше продемонструвати на конкретних прикладах.

**Приклад 1.4.** Показати, що два вектора  $v_1 = \left[ \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right]$ ,  $v_2 = \left[ \frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$  утворюють

ортогональний базис [14].

Рішення. Проробимо наступні операції:

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \right] * \left[ \frac{-1}{2} \right] + \left[ \frac{1}{2} \right] * \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \right] = 0,$$

$$\|v_1\| = \sqrt{\left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \right]^2 + \left[ \frac{1}{2} \right]^2} = 1, \quad \|v_2\| = \sqrt{\left[ \frac{-1}{2} \right]^2 + \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \right]^2} = 1.$$

Добуток векторів дорівнює 0, модуль кожного вектора дорівнює 1, отже, зазначені вектори утворюють ортонормований базис.

**Приклад 1.5.** Розкласти вектор  $f = \left[ \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2} \right]$  за базисом  $(v_1, v_2)$ , який задано в прикладі 1.

Рішення. Вектор  $f$  можна подати як  $f = c_1 * v_1 + c_2 * v_2$ . Виконаємо це відображення:

$$c_1 = \langle f, v_1 \rangle = \frac{\sqrt{3}}{2} * \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2} * \frac{1}{2} = 2$$

$$c_2 = \langle f, v_2 \rangle = \frac{\sqrt{3}}{2} * \frac{-1}{2} + \frac{5}{2} * \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Отже,  $f = 2v_1 + \sqrt{3}v_2$ .

Якщо сигнал представлено великим числом своїх вимірювань  $N$ , то приходимо до необхідності отримання норми  $N$ -мірного простору, яка визначається наступним чином:

$$\|f\| = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \dots + f_N^2} = \sum_N \sqrt{f_i^2} \quad (1)$$

Для безперервного вектора від підсумовування під знаком радикала переходять до інтегрування. Якщо до того ж відомий інтервал всіх складових  $[a, b]$ , норму вектора нормують за його величиною:

$$\|f(t)\| = \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{b-a} * \int_a^b f^2(t) dt}. \quad (1.27)$$

З цієї ж причини у формулах розкладання і перетворення Фур'є використовується нормуючий множник за періодом сигналу.

Висновок. Система функцій, використовувана в розкладанні Фур'є періодичних сигналів, а саме:

$$\cos \omega t, \sin \omega t, \cos 2\omega t, \sin 2\omega t, \cos 3\omega t, \sin 3\omega t, \dots, \cos n\omega t, \sin n\omega t$$

має властивість ортогональності, а сигнали що розкладаються за системою цих функцій, називаються сигналами, розкладеними за ортогональним базисом. Основна властивість таких сигналів полягає в тому, що інтеграл, взятий від добутку будь-яких двох функцій на періоді  $T = 2\pi / \omega$ , завжди дорівнює 0:

$$\int_0^T \cos k\omega t dt = 0; \int_0^T \sin k\omega t dt = 0; \int_0^T \cos k\omega t \cos n\omega t dt = 0; \quad (1.28)$$

$$\int_0^T \cos k\omega t \sin n\omega t dt = 0; \int_0^T \sin k\omega t \sin n\omega t dt = 0 \dots$$

Властивості ортонормованого базису широко використовуються в сучасних технологіях зв'язку. Наприклад, для стиснення дискретних сигналів може використовуватись одинична ортогональна матриця, яка при множенні на вектор або

матрицю сигналу з корельованими елементами, дозволяє в першому елементі результуючого вектора або матриці отримати головну частину описуваного сигналу. Деталі сигналу зберігаються в інших

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 3 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

елементах. В ортонормованій одиничній матриці векторний добуток будь-яких двох рядків дорівнює нулю. Одержувачу може передаватись перший елемент і алгебраїчне середнє інших елементів або деталей . На приймальній стороні за цими двома цифрами в наближеному вигляді однозначно відновлюється вихідний вектор - сигнал.

Іншим прикладом використання ортогонального базису є модуляція в мобільному зв'язку GSM. Модуляція являє собою частотну маніпуляцію, при якій несуча частота дискретно через інтервали часу  $T$ , кратні довжині біта, приймає значення  $f = f(\text{ніс}) - F/4$  або  $F = f(\text{ніс}) + F/4$ , де  $F = 1/T$  - частота бітової послідовності . При цьому забезпечується ортогональність коливань з бітами різних знаків. Сама вхідна інформаційна бітова послідовність ділиться на дві підпослідовності з парними і непарними бітами, які множаться відповідно на синус і косинус для отримання синфазних і квадратурних сигналів, які за певним законом одночасно впливають на модулятор. Це дозволяє стискати спектр переданого сигналу і збільшувати завадозахищеність.

Наступним прикладом використання ортонормованого базису є дискретизація квадратурних сигналів [ 15].

#### **1.14. Дискретизація квадратурних сигналів**

*Корисні властивості ортонормованих сигналів знайшли широке застосування в цифрових системах, зокрема, в мобільному зв'язку під час маніпуляції сигналів.*

Розглянемо сигнал, в якому функцією часу є амплітуда та фаза:  $s(t) = A(t) \cos(\omega t + \varphi(t))$ .  $\omega$ -несуча частота сигналу, в порівнянні з якою зміна амплітуди і фази відбувається значно повільніше. Частоту дискретизації сигналу виконаємо на підставі алгоритму квадратурної дискретизації, що передбачає додаткову його обробку. Вихідний сигнал

можна записати, як  $s(t) = A(t)e^{j\varphi(t)}e^{j\omega t}$ . Інформативною є перша частина сигналу, до складу якої входить функція зміни амплітуди в часі:  $A(t) = A(t)e^{j\varphi(t)}$ . Спектр цього комплексного сигналу  $\omega \ll \omega$  частоти дискретизації вихідного сигналу, однак, для своєї реалізації він потребує квадратурної дискретизації, алгоритм якої полягає в наступному.

Вхідний сигнал множиться на два колювання генератора-гетеродина носійної частоти  $\omega$ , які зсунені один відносно одного на 90 градусів:  $\cos \omega t$  і  $\sin \omega t$ . Розглянемо отримані перетворення:

$$\begin{aligned}
 s(t) \cos \omega t &= A(t) \cos(\omega t + \varphi(t)) \cos \omega t = \\
 &= \frac{1}{2} * A(t) \cos \varphi(t) + \frac{1}{2} * A(t) \cos(2\omega t + \varphi(t)) = \\
 &= \frac{1}{2} * \operatorname{Re} A(t) + \frac{1}{2} * A(t) \cos(2\omega t + \varphi(t)), \\
 s(t) \sin \omega t &= A(t) \cos(\omega t + \varphi(t)) \sin \omega t = \\
 &= -\frac{1}{2} * A(t) \sin \varphi(t) + \frac{1}{2} * A(t) \cos(2\omega t - \varphi(t)) = \\
 &= -\frac{1}{2} * \operatorname{Im} A(t) + \frac{1}{2} * A(t) \cos(2\omega t - \varphi(t)).
 \end{aligned}
 \tag{1.29}$$

Отже, для отримання дійсної та уявної частин комплексної обвідної сигналу потрібно після перемноження пропустити результати через фільтри нижніх частот для усунення другої гармоніки носійної. Після цього отримані сигнали, пропорційні дійсній та уявній частинам, піддаються дискретизації. Такий процес в радіотехніці називається гетеродинуванням. Воно просто реалізується аналоговими схемами.

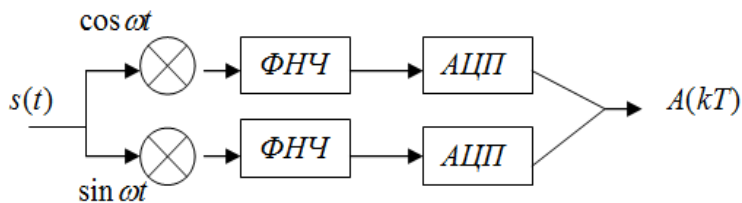


Рис. 1.12. Квадратурний детектор

### 1.15. Дискретне перетворення Фур'є

*Дискретне перетворення Фур'є (ДПФ) кінцевих послідовностей дає можливість набір дійсних чи комплексних чисел, що становлять числовий вектор, на інтервалі періоду  $2\pi$  переводити з часової області в частотну і навпаки.*

Формули прямого та зворотного дискретного перетворення Фур'є (:

$$\text{прямого } X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} ; \tag{1.30}$$

$$\text{зворотного } x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} . \tag{1.31}$$

У цих формулах  $N$ -довжина числового вектора або кількість вибірок аналогового сигналу,  $n$ - номер частотної компоненти спектра,  $k$ - номер вибірки аналогового сигналу



або елемента вектора.

Дискретне пряме і зворотне перетворення Фур'є було отримано для дискретизованого періодичного сигналу, відображеного решітчастою функцією, на нескінченній тимчасовій осі, який описується виразами:

$$X(j\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) e^{-j\omega T n} \quad x(nT) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} X(j\omega) e^{j\omega T n} d\omega. \quad (1.32)$$

Комплексну частоту можна подати через модуль і аргумент, що складають амплітудно-і фазочастотний спектр решітчастої функції:

$$X(j\omega) = |X(j\omega)| e^{j \arg[X(j\omega)]}.$$

*Приклад.* Обчислити спектр дискретизованого сигналу, який описується експоненційною функцією  $x(nT) = e^{anT}$ .

Спектральні коефіцієнти являють суму нескінченної геометричної прогресії

$$X(j\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{anT} * e^{-j\omega nT} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{(a-j\omega)nT} = \frac{1}{1 - e^{(a-j\omega)T}}.$$

Амплітудно-частотний спектр:

$$|X(j\omega)| = \sqrt{[(1 - \exp(aT) * \cos(\omega T))]^2 + [\exp(aT) * \sin(\omega T)]^2}.$$

Фазочастотний спектр:

$$\arg(X(j\omega)) = -\arctg \frac{\exp(aT) * \sin(\omega T)}{1 - \exp(aT) * \cos(\omega T)}.$$

## 1.16. Перехід до дискретного перетворення Фур'є

На практиці в цифровій обчислювальній техніці скінченими є сигнали та їх вибірки і спектри сигналів кінцеві. Перехід до ДПФ проводиться таким чином [18].

Нехай безперервна функція дискретизована на періоді  $2\pi$  з частотою  $\omega_d = \frac{2\pi}{T}$ .

Частота дискретизації як мінімум в два рази більше найвищої частоти кінцевого спектра  $T \leq 1/2 f_{\max}$ . і в межах утворення спектра сигналу  $[-\omega_{\max}, \omega_{\max}]$  часовий інтервал його утворення відповідає  $2\omega_{\max} \Leftrightarrow NT$ , де N-кількість вибірок або  $2f_{\max} \Leftrightarrow NT/2\pi$ . Нехай періоду дискретизації за часом  $T$  відповідає період дискретизації за частотою  $\Delta\omega \leq 2\pi/NT$ . З останньої рівності може бути отримана кількість комплексних частотних компонент при числі вибірок N:

$$\frac{\omega_{\max}}{\Delta\omega} = \frac{2\pi}{T} : \frac{2\pi}{NT} = N.$$

Після заміни безперервного спектра у формулі прямого і зворотного Фур'є - перетворення для решітчастої функції його дискретними відліками в точках  $T$  отримаємо формулу прямого дискретного перетворення Фур'є (ДПФ) для обчислення кожної з k комплексних частотних компонент:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi kn}{N}} \cdot k=0,1,2,\dots,N-1$$

За аналогією з прямим і зворотним Фур'є - перетворенням можна написати формулу зворотного дискретного перетворення Фур'є для обчислення значень кожного з  $n$  відліків обмеженого аналогового сигналу з кінцевим спектром.

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j \frac{2\pi kn}{N}} \cdot n=0,1,2,\dots,N-1$$

$\frac{1}{N}$  - нормуючий множник, що використовується для однозначного переходу від прямого дискретного перетворення Фур'є до зворотного і навпаки.

### 1.17. Властивості дискретного перетворення Фур'є

*Властивості ДПФ, як і слід чекати, багато в чому збігається з властивостями перетворення Фур'є.*

1. Спектр решітчастої функції, його модуль і аргумент являють собою безперервні періодичні функції з періодом, який дорівнює  $2\pi / T$ .
2. Якщо послідовність відліків решітчастої функції описується дійсними функціями, то модуль спектра буде парною функцією, а аргумент-непарною функцією частоти.

#### 3. Лінійність спектра

$$\text{Якщо } x(nT) = a_1 x_1(nT) + a_2 x_2(nT) + a_3 x_3(nT) + \dots$$

$$\text{то } X(j\omega) = a_1 X_1(j\omega) + a_2 X_2(j\omega) + a_3 X_3(j\omega) + \dots$$

#### 3. Зсув решітчастих сигналів по осі частот

Зсув спектра по осі частот на величину  $\omega_0$ . відповідає перемноженню частотного спектра на  $\exp(j\omega_0 nT)$ , те.  $X(\exp(jnT(\omega - \omega_0))$ ..

### 1.18. Матриця Френкса

*Пряме і зворотне дискретне перетворення Фур'є векторноматричним способом розраховується за такими ж формулами, як і невідомі системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Коефіцієнти СЛАР для прямого і зворотного перетворення зі знаковими модифікаціями і ваговим коефіцієнтом  $1/N$  для зворотного ДПФ дає матриця Френкса.*

Дискретне перетворення Фур'є являє собою систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), за допомогою якого від вектора дискретних відліків аналогового сигналу можливий однозначний перехід до їх частотного перетворення. Таке перетворення

виконується множенням квадратної матриці на вектор-стовпець вхідних сигналів:

$$X(n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & e^{-j(2\pi/N)} & e^{-j(4\pi/N)} & e^{-j(6\pi/N)} & \dots & \dots & e^{-j(2 \cdot 1 \cdot (N-1)\pi/N)} \\ 1 & e^{-j(4\pi/N)} & e^{-j(8\pi/N)} & e^{-j(12\pi/N)} & \dots & \dots & e^{-j(2 \cdot 2 \cdot (N-1)\pi/N)} \\ 1 & e^{-j(6\pi/N)} & e^{-j(12\pi/N)} & e^{-j(18\pi/N)} & \dots & \dots & e^{-j(2 \cdot 3 \cdot (N-1)\pi/N)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & e^{-j(2\pi \cdot (N-1) \cdot N)} & e^{-j(2\pi \cdot (N-1) \cdot N)} & \dots & \dots & \dots & e^{-j(2 \cdot (N-1) \cdot (N-1)\pi/N)} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ \dots \\ f(N-1) \end{pmatrix}$$

Загальна формула, для розрахунку спектральних коефіцієнтів кожної вибірки аналогового сигналу векторноматричним способом з використанням матриці Л. Френкса [3], має вигляд:

$$A(m, n) = \exp(-2j\pi * \frac{(m-1)(n-1)}{N}), \quad (1.34)$$

$$1 \leq m \leq N, 1 \leq n \leq N.$$

Таким чином, маючи один і той же набір вибірок дискретного сигналу, можна розрахувати або його спектральну функцію, або числові значення окремих вибірок.

### 1.19. Швидке дискретне перетворення Фур'є

Швидке дискретне перетворення Фур'є (ШПФ) є зручним алгоритмом автоматизованих розрахунків за формулами прямого і зворотного дискретного перетворення Фур'є.

З розгляду матриці Френкса слідує, що знаходження дискретного перетворення Фур'є вимагає виконання  $N * N$  операцій множення і майже стільки ж операцій додавання, що за великого числа вибірок, наприклад, 1000 становить уже приблизно 2 млн. операцій, які зазвичай повинні проводитися в реальному часі, що ускладнює його практичне застосування. Тому для розрахунків користуються швидким дискретним перетворенням Фур'є, алгоритм якого заснований на закономірностях періодичних синус-косинусних функцій.

Принцип ШПФ найпростіше показати на прикладах, використовуючи для демонстраційних цілей матрицю Френкса. Наочне пояснення алгоритму ШПФ, яке наводиться нижче, дається в [14]. Зазначимо, що кожен елемент матриці Френкса складено з експонент  $w = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ . Розглянемо випадок, коли число вибірок аналогового сигналу  $N=8$ :  $f(0), f(1), f(2), \dots, f(7)$ . З урахуванням вживаних позначень пряме ДПФ набуває вигляду:

$$X(n) = \sum_{k=0}^7 f(k)w(k, n).$$

Для  $N=8$  матриця Френкса виглядає наступним чином:

<b>X0</b>	<b>w0</b>	<b>w0</b>	<b>w0</b>	<b>w0</b>	<b>w0</b>	<b>w0</b>	<b>w0</b>	<b>w0</b>	<b>w0</b>	<b>f0</b>
<b>X1</b>	<b>w0</b>	<b>w1</b>	<b>w2</b>	<b>w3</b>	<b>w4</b>	<b>w5</b>	<b>w6</b>	<b>w7</b>	<b>w7</b>	<b>f1</b>
<b>X2</b>	<b>w0</b>	<b>w2</b>	<b>w4</b>	<b>w6</b>	<b>w8</b>	<b>w10</b>	<b>w12</b>	<b>w14</b>	<b>w14</b>	<b>f2</b>
	$X^3 =$	$w^0$	$w^3$	$w^6$	$w^9$	$w^{12}$	$w^{15}$	$w^{18}$	$w^{21} *$	$f^3$
<b>X4</b>	<b>w0</b>	<b>w4</b>	<b>w8</b>	<b>w12</b>	<b>w16</b>	<b>w20</b>	<b>w24</b>	<b>w28</b>	<b>w28</b>	<b>f4</b>
<b>X5</b>	<b>w0</b>	<b>w5</b>	<b>w10</b>	<b>w15</b>	<b>w20</b>	<b>w25</b>	<b>w30</b>	<b>w35</b>	<b>w35</b>	<b>f5</b>
<b>X6</b>	<b>w0</b>	<b>w6</b>	<b>w12</b>	<b>w18</b>	<b>w24</b>	<b>w30</b>	<b>w36</b>	<b>w42</b>	<b>w42</b>	<b>f6</b>
<b>X7</b>	<b>w0</b>	<b>w7</b>	<b>w14</b>	<b>w21</b>	<b>w28</b>	<b>w35</b>	<b>w42</b>	<b>w49</b>	<b>w49</b>	<b>f7</b>

Добуток даної матриці на вектор, що являє собою ряд дискретних відліків сигналу, визначає частотні коефіцієнти дискретного розкладання Фур'є.

Візьмемо до уваги лінійну і кругову періодичність та взаємну відповідність  $N \equiv 2\pi$ ,  $N / 2 \equiv \pi$ ,  $N / 4 \equiv \pi / 2$ ,  $N / 8 \equiv \pi / 4$  і т.д., звідки впливає періодичність степеневому ряду множника  $w$ , що повертається при різних кратностях  $N$  вибірок на періоді  $2\pi$  (рис.1).

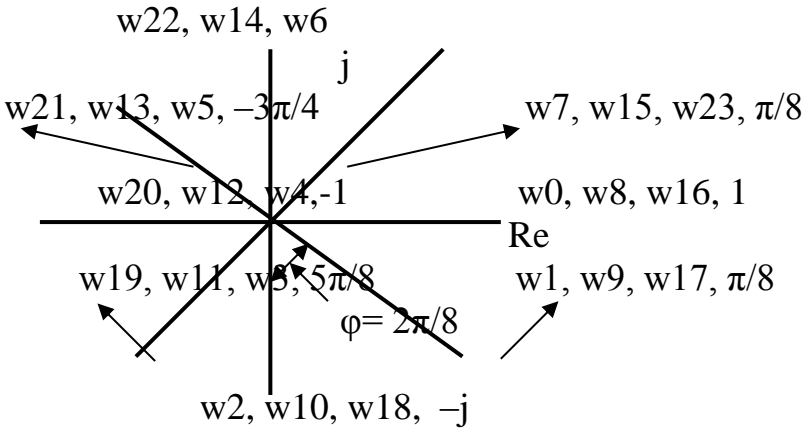


Рис. 1.13. Степеневий ряд повертаючих множників  $w$

Який же висновок можна зробити з рисунка степеневому ряду  $w$ ? Всі значення повертаючого множника  $w$ , починаючи з  $w_8$ , дорівнюють тільки відповідному значенню  $w$  в інтервалі від  $w_0$  до  $w_7$ . Якщо залишок від ділення на 8 показника  $w$  "n" записати як  $n \bmod 8$ , то значення показників ступеня  $w$  (n) після пониження їх значень можна подати як

$$w(n) = w(n \bmod 8).$$

Зокрема,  $8 \bmod 8 = 0$ ,  $9 \bmod 8 = 1$ ,  $10 \bmod 8 = 2$ ,  $11 \bmod 8 = 3$  и т.д. Тоді через показники ступеня матриця Френкса записується наступним чином:

<b>X0</b>	<b>w0</b>	<b>w0</b>	<b>w0</b>	<b>w0</b>	<b>w0</b>	<b>w0</b>	<b>w0</b>	<b>w0</b>	<b>w0</b>	<b>f0</b>
<b>X1</b>	<b>w0</b>	<b>w1</b>	<b>w2</b>	<b>w3</b>	<b>w4</b>	<b>w5</b>	<b>w6</b>	<b>w7</b>	<b>w7</b>	<b>f1</b>
<b>X2</b>	<b>w0</b>	<b>w2</b>	<b>w4</b>	<b>w6</b>	<b>w0</b>	<b>w2</b>	<b>w4</b>	<b>w6</b>	<b>w6</b>	<b>f2</b>
	$X^3 =$	$w^0$	$w^3$	$w^6$	$w^1$	$w^4$	$w^7$	$w^2$	$w^5$	$f^3$
<b>X4</b>	<b>w0</b>	<b>w4</b>	<b>w0</b>	<b>w4</b>	<b>w0</b>	<b>w4</b>	<b>w0</b>	<b>w4</b>	<b>w4</b>	<b>f4</b>
<b>X5</b>	<b>w0</b>	<b>w5</b>	<b>w2</b>	<b>w7</b>	<b>w4</b>	<b>w1</b>	<b>w6</b>	<b>w3</b>	<b>w3</b>	<b>f5</b>
<b>X6</b>	<b>w0</b>	<b>w6</b>	<b>w4</b>	<b>w2</b>	<b>w0</b>	<b>w6</b>	<b>w4</b>	<b>w2</b>	<b>w2</b>	<b>f6</b>
<b>X7</b>	<b>w0</b>	<b>w7</b>	<b>w6</b>	<b>w5</b>	<b>w4</b>	<b>w3</b>	<b>w2</b>	<b>w1</b>	<b>w1</b>	<b>f7</b>

Швидке перетворення Фур'є - це алгоритм ефективного обчислення коефіцієнтів розкладання на підставі закономірностей, прихованих в матриці Френкса при подальшому зниженні ступеня  $n$  на кожному кроці в два рази, зокрема від  $n = 27 = 128$  до  $n = 26 = 64$ , від  $n = 26 = 64$  до  $n = 25 = 32$ , від  $n = 25 = 32$  до  $n = 24 = 16$ , від  $n = 24 = 16$  до  $n = 23 = 8$  і від  $n = 23 = 8$  до  $n = 22 = 4$ , яку можна вважати БАЗОВОЮ. У цьому випадку вибірка складається з чотирьох членів  $f_0, f_1, f_2, f_3$ . Розглянемо особливості ШПФ для цього базового випадку.

### 1.19.1. ШПФ для ряду з чотирьох членів

Для вказаного випадку з урахуванням рис.1.13 – степеневого ряду нормованих частот  $w$  для  $N=4$  - ДПФ можна виразити у вигляді добутку матриці Френкса на вектор сигналу наступним чином:

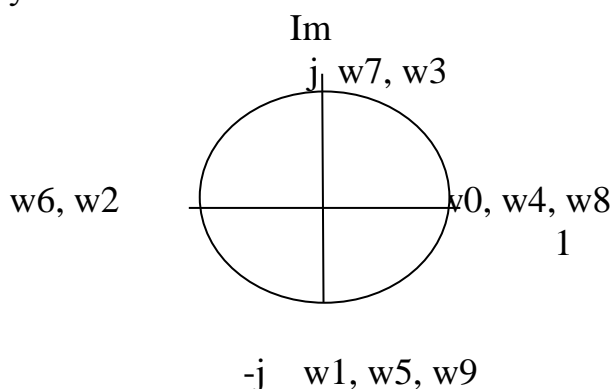


Рис. 1.14. Степеневий ряд  $w$  для  $N=4$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c}
 \mathbf{X0} \\
 \mathbf{X1} \\
 \mathbf{X2}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|}
 \hline
 \mathbf{w0} & \mathbf{w0} & \mathbf{w0} & \mathbf{w0} & \mathbf{w0} \\
 \hline
 \mathbf{w0} & \mathbf{w1} & \mathbf{w2} & \mathbf{w3} & \\
 \hline
 \mathbf{w0} & \mathbf{w2} & \mathbf{w4} & \mathbf{w6} & \\
 \hline
 & \mathbf{X3} & \mathbf{w0} & \mathbf{w3} & \\
 \hline
 \end{array}
 *
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 \mathbf{f0} \\
 \mathbf{f1} \\
 \mathbf{f2} \\
 \mathbf{f3}
 \end{array}
 \quad (1.34)
 \end{array}$$

Враховуючи структуру і знак “мінус” в повертаючому множнику  $w = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ , легко зрозуміти відповідності між кутом зсуву  $\phi$  і повертаючим множником  $w$ , які наведені в нижченаведеній матриці Френкса для  $N = 4(3)$ :

- $n=0$  відповідає куту повороту повертаючого множника  $\phi = 0$  або в радіанах  $\omega=1$  і  $w_0, w_4, w_8$ ;

- $n=1$  відповідає  $\varphi=2\pi*1/4$ ,  $\omega=j$ ,  $w_3$ ,  $w_7$ ;
- $n=2$  відповідає  $\varphi=2\pi*2/4$ ,  $\omega=-1$ ,  $w_2$ ,  $w_6$ ;
- $n=3$  відповідає  $\varphi=2\pi*3/4$ ,  $\omega=-j$ ,  $w_1$ ,  $w_5$ ,  $w_9$ .

В результаті таких заміни матриця Френкса набуває вигляду:

$$\begin{array}{c|cccc|c|c} \mathbf{X0} & 1 & 1 & 1 & 1 & \mathbf{f0} & \\ \mathbf{X1} & 1 & -j & -1 & j & \mathbf{f1} & \\ \mathbf{X2} & 1 & -1 & 1 & -1 & \mathbf{f2} & \\ \hline & & x_3 & 1 & j & -1 & -j & \beta \end{array} \quad (1.35)$$

Подальші спрощення зводяться до наступного. Матриця (3) ділиться на 2 матриці, а саме, матрицю, яка містить непарні стовпці вихідної матриці, і матрицю, що містить парні стовпці вихідної матриці (вектор вирізок сигналу  $f(k)$  для ілюстрації відповідностей доводиться у вигляді матриці-рядка писати вгорі, що не відповідає прийнятим правилам векторно-матричних перетворень):

$$\begin{array}{c|cc|cc|cc} & \mathbf{f0} & \mathbf{f2} & \mathbf{f1} & \mathbf{f3} & & \\ \mathbf{X0} & w_0 & w_0 & w_0 & w_0 & & \\ \mathbf{X1} & w_0 & w_2 & w_1 & w_3 & & \\ \mathbf{X2} & w_0 & w_4 & w_2 & w_6 & & \\ \hline & & x_3 & w_0 & w_6 & w_3 & w_9 \end{array} \quad (1.36)$$

На основі рівності  $w^{k+1} = w^k w^1$  становиться можливим в (5) виконати наступні перетворення:

$$\begin{array}{c|cc|cc|cc} & \mathbf{f0} & \mathbf{f2} & \mathbf{f1} & \mathbf{f3} & & \\ \mathbf{X0} & w_0 & w_0 & w_0 w_0 & w_0 w_0 & & \\ \mathbf{X1} & w_0 & w_2 & w_1 w_0 & w_1 w_2 & & \\ \mathbf{X2} & w_0 & w_4 & w_2 w_0 & w_2 w_4 & & \\ \hline & & x_3 & w_0 & w_6 & w_3 w_0 & w_3 w_6 \end{array}$$

или

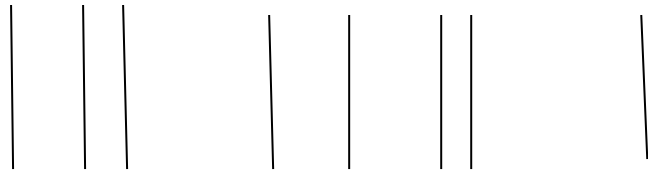
$$\begin{array}{c|cc|cc|cc} & \mathbf{f0} & \mathbf{f2} & \mathbf{f1} & \mathbf{f3} & & \\ \mathbf{X0} & w_0 & w_0 & w_0 & w_0 & w_0 & \\ \mathbf{X1} & w_0 & w_2 & w_1 & w_0 & w_2 & \\ \mathbf{X2} & w_0 & w_4 & w_2 & w_0 & w_4 & \\ \hline & & x_3 & w_0 & w_6 & w_3 & w_0 & w_6 \end{array} \quad (1.37)$$

На основі рис.2 різні ступені повертаючого множника мають наступні відповідності:

$$w_4 = w_0 = 1, w_6 = w_2 = -1, w_2 = -w_0, w_3 = w_1. \quad (*)$$

Після підстановки цих значень повертаючого множника в (6) маємо:

$$\begin{array}{c|cc|cc|cc} & \mathbf{f0} & \mathbf{f2} & \mathbf{f1} & \mathbf{f3} & & \\ \mathbf{X0} & 1 & 1 & w_0 & 1 & 1 & \\ \mathbf{X1} & 1 & -1 & w_1 & 1 & -1 & \\ \mathbf{X2} & 1 & 1 & -w_0 & 1 & 1 & \\ \hline & & x_3 & 1 & -1 & -w_1 & 1 & -1 \end{array} \quad (1.38)$$



Для подальшого пояснення алгоритму ШПФ скористаємося методом повної індукції: наступного переходу від ШПФ для  $N = 4$  до ШПФ для  $N = 8$  і знаходження наявних при цьому аналогій.

### 1.19.2. Операція «метелик» для ШПФ ряду з чотирьох членів

Розглянемо вирази ШПФ для  $X(k)$  при  $N = 4$  і для першої частини цих виразів поставимо у відповідність операцію «метелик»:

$$\begin{aligned}
 X(0) &= w_0 f(0) + w_0 f(1) + w_0 f(2) + w_0 f(3), \\
 X(1) &= w_0 f(0) + w_1 f(1) + w_2 f(1) + w_3 f(3), \\
 X(2) &= w_0 f(0) + w_2 f(1) + w_4 f(2) + w_6 f(3), \\
 X(3) &= w_0 f(0) + w_3 f(1) + w_6 f(2) + w_9 f(3).
 \end{aligned}
 \tag{1.39}$$

Ці ж вирази після підстановки відповідностей повертаючого множника з попередніх перетворень:

$$\begin{aligned}
 X(0) &= w_0 f(0) + w_0 f(1) + w_0 f(2) + w_0 f(3), \\
 X(1) &= w_0 f(0) + w_1 f(1) - w_0 f(1) - w_1 f(3), \\
 X(2) &= w_0 f(0) - w_0 f(1) + w_0 f(2) - w_0 f(3), \\
 X(3) &= w_0 f(0) - w_1 f(1) - w_0 f(2) - w_1 f(3).
 \end{aligned}
 \tag{1.40}$$

Відповідності між елементами парних та непарних стовпців матриці (7) і першими двома складовими останніх рівностей и виражаються першою операцією «метелик»

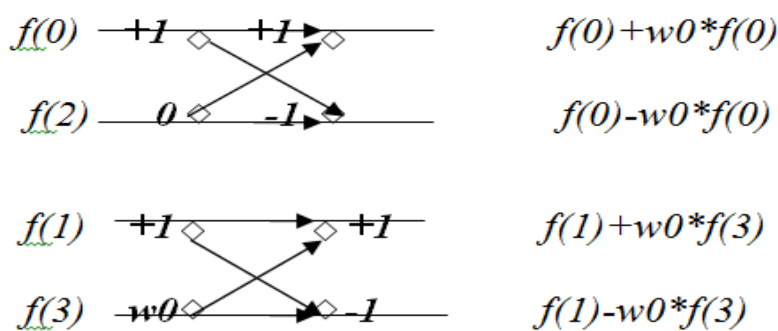
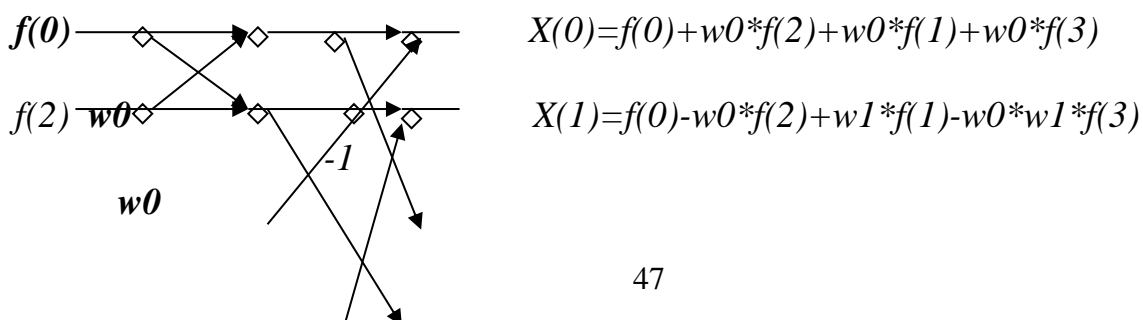


Рис. 1.15. Перший «метелик» для  $N=4$



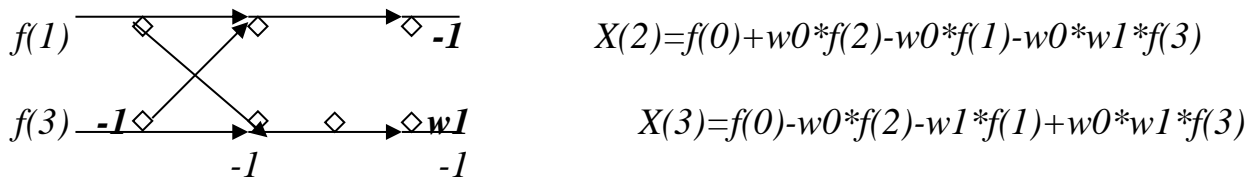


Рис. 1.16. Другий «метелик» для N=4

Таким чином, ШПФ із ДПФ виходить за рахунок того, що групуються стовпці з парними і непарними показниками ступеня повертаючого множника, зводяться до

однакового виду і програмна обробка їх призводить до однакового результату. Для ілюстрації спільності методу ШПФ перейдемо до розгляду алгоритму дискретного перетворення Фур'є послідовності з 8 вірізок аналогового сигналу.

### 1.19.3. ШПФ ряду з восьми членів

Загальна формула ШПФ ряду з 8 членів:

$$X(n) = w_0 f(0) + w_1 f(1) + w_2 f(2) + w_3 f(3) + w_4 f(4) + w_5 f(5) + w_6 f(6) + w_7 f(7). \quad (1.41)$$

Наведену в четвертому параграфі матрицю Френкса для N = 8 розділимо на дві групи з парними і непарними індексами і проробимо ті ж перетворення, як і для матриці з N = 4.

X0	w0	w0	w0	w0	w0	w0	w0	w0	f0
X1	w0	w1	w2	w3	w4	w5	w6	w7	f1
X2	w0	w2	w4	w6	w8	w10	w12	w14	f2
X3	w0	w3	w6	w9	w12	w15	w18	w21	f3
X4	w0	w4	w8	w12	w16	w20	w24	w28	f4
X5	w0	w5	w10	w15	w20	w25	w30	w35	f5
X6	w0	w6	w12	w18	w24	w30	w36	w42	f6
X7	w0	w7	w14	w21	w28	w35	w42	w49	f7

(1.42)

	[ f0	f2	f4	f6 ]	[ f1	f3	f5	f7 ]
X0	w0	w0	w0	w0	w0	w0	w0	w0
X1	w0	w2	w4	w6	w1	w3	w5	w7
X2	w0	w4	w8	w12	w2	w6	w10	w14
X3	w0	w3	w6	w9	w12	w15	w18	w21
X4	w0	w8	w16	w24	w4	w12	w20	w28
X5	w0	w10	w20	w30	w5	w15	w25	w35
X6	w0	w12	w24	w36	w6	w18	w30	w42
X7	w0	w14	w28	w42	w7	w21	w35	w49



	[ f0 f2 f4 f6 ]		[ f1 f3 f5 f7 ]
X0	w0 w0 w0 w0	w0	w0 w0 w0 w0
X1	w0 w2 w4 w6	w1	w1 w3 w5 w7
X2	w0 w4 w8 w12	w2	w2 w6 w10 w14
X4	w0 w8 w16 w24	w4	w4 w12 w20 w28
X5	w0 w10 w20 w30	w5	w5 w15 w25 w35
X6	w0 w12 w24 w36	w6	w6 w18 w30 w42
X7	w0 w14 w28 w42	w7	w7 w21 w35 w49

$X3 = w0 \quad w6 \quad w12 \quad w18 \quad + \quad w3 \quad w3 \quad w9 \quad w15 \quad w21$

	[ f0 f2 f4 f6 ]		[ f1 f3 f5 f7 ]
X0	w0 w0 w0 w0	w0	w0 w0 w0 w0
X1	w0 w2 w4 w6	w1	w0 w2 w4 w6
X2	w0 w4 w0 w4	w2	w0 w4 w0 w4
X4	w0 w0 w0 w0	w4	w0 w0 w0 w0
X5	w0 w2 w4 w6	w5	w0 w2 w4 w6
X6	w0 w4 w0 w4	w6	w0 w4 w0 w4
X7	w0 w6 w4 w2	w7	w0 w6 w4 w2

$X3 = w0 \quad w6 \quad w4 \quad w2 \quad + \quad w3 \quad w0 \quad w6 \quad w4 \quad w2 \quad (1.43)$

Використовуючи закономірності рис.1.14, отримаємо рівності:

$$w0=1, w2=-j, w4=-w0=-1, w6=j, w5=-w1, w6=-w2, w7=-w3.$$

Після підстановки їх у (1.43) маємо:

	[ f0 f2 f4 f6 ]		[ f1 f3 f5 f7 ]
X0	1 1 1 1	w0	1 1 1 1
X1	1 -j -1 j	w1	1 -j -1 j
X2	1 -1 1 -1	w2	1 -1 1 -1
X4	1 1 1 1	-w0	1 1 1 1
X5	1 -j -1 j	-w1	1 -j -1 j
X6	1 -1 1 -1	-w2	1 -1 1 -1
X7	1 j -1 -j	-w3	1 j -1 -j

$X3 = 1 \quad j \quad -1 \quad -j \quad + \quad w3 \quad 1 \quad j \quad -1 \quad -j \quad (1.44)$

Існує декілька алгоритмів різних авторів для розрахунків ШПФ як в часовій так і в частотній областях. Найбільш відомі алгоритм Кулі і Тьюкі (1965р.) і Винограда.

### 1.20. Більш строгі обґрунтування ШПФ

*Алгоритми швидкого дискретного перетворення Фур'є засновані на періодичності повертаючого множника.*

Ідея скорочення загального обсягу обчислень полягає в наступному:

1) Вихідна  $N$ -точкова послідовність  $x(n)$  розділяється на дві  $N/2$ -точкові послідовності з непарними і парними елементами, потім обчислюються ДПФ кожної з них і конструюється ДПФ  $X(k)$ .

Обсяг обчислень скорочується в 2 рази.

2) Аналогічно замість ДПФ  $N/2$ -точкові послідовності можна обчислити ДПФ по дві  $N/4$ -точкові послідовності і знову зменшити кількість обчислень в 2 рази.

3) Процес зменшення кількості обчислень, який називається проріджуванням, продовжується до тих пір, поки не залишаться тільки двоточкові послідовності, що розраховуються ДПФ.

Якщо  $N = 2^m$ , тобто  $m = \log_2 N$ , то обсяг обчислень можна зменшити в  $N/m$  разів.

Наприклад, при  $N = 1024 = 2^{10}$  це становить приблизно  $\frac{1024}{10} \approx 100$  разів.

Зазначена процедура зменшення числа обчислень називається проріджуванням.

Проріджування вихідної  $N$ -елементної послідовності  $X(n)$  може проводитися за часом або за частотою.

#### 1.20.1. Проріджування послідовності $x(n)$ за часом

Нехай  $N = 2^m$ . Позначимо вихідну  $N$ -точкову послідовність як  $x_m(n) = x(nT)$ .

Розділимо її на дві  $N/2$ -точкові послідовності для парних та непарних членів.

$$x_{m-1,0}(n) = x(2nT) \quad n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \text{ - парні члени}$$

$$x_{m-1,1}(n) = x((2n+1)T) \quad \text{- непарні члени}$$

Тоді  $N$ -точкову ДПФ можна записати у вигляді

$$X_m(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{m-1,0}(n) \cdot W_N^{2k \cdot n} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{m-1,1}(n) \cdot \underbrace{W_N^{(2n+1)k}}_{W_N^{2nk} \cdot W_N^k} \quad (1.45)$$

Враховуючи, що  $W_N^2 = e^{-j \frac{2\pi}{N/2}} = W_{N/2}$ , отримуємо

$$X_m(k) = X_{m-1,0}(k) + W_N^k \cdot X_{m-1,1}(k) \quad (1.46)$$

Для парних та непарних елементів послідовності отримаємо вирази:

$$\begin{cases} X_{m-1,0}(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} X_{m-1,0}(n) \cdot W_N^{nk} \\ X_{m-1,1}(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} X_{m-1,1}(n) \cdot W_N^{nk} \end{cases} \quad (1.47)$$

Оскільки  $X_m(k)$  повинно бути визначено для  $N$  точок ( $k = 0, 1, \dots, N-1$ ), а (1.47) визначено тільки для  $N/2$  точок ( $k = 0, 1, \dots, N/2 - 1$ ). Тому необхідно довизначити його для  $k = N/2; N/2+1, \dots, N-1$ . При цьому приймається до уваги, що  $X_{m-1,0}, X_{m-1,1}(k)$  - періодичні функції з періодом  $N/2$ . Тоді

$$X_m(k + \frac{N}{2}) = X_{m-1,0}(k + \frac{N}{2}) + W_N^{(k+\frac{N}{2})} \cdot X_{m-1,1}(k + \frac{N}{2}) = X_{m-1,0}(k) - W_N^k \cdot X_{m-1,1}(k) \quad (1.48)$$

Знак ‘ - ’ з’явився так як

$$W_N^{\frac{N}{2}} = e^{-j \frac{2\pi}{N} \cdot \frac{N}{2}} = e^{-j\pi} = \cos \pi - j \sin \pi = -1$$

$$X_m(k + \frac{N}{2}) = X_{m-1,0}(k) - W_N^k \cdot X_{m-1,1}(k) \quad (1.49)$$

Вирази (1.48) та (1.49) визначають алгоритм обчислення  $N$ -точкового ДПФ через два  $N/2$  - точкових ДПФ.

Аналогічно можна виразити  $N/2$  - точкові ДПФ  $X_{m-1,0}(k)$  і  $X_{m-1,1}(k)$  через  $N/4$  - точкові ДПФ

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{m-1,0}(k) = X_{m-2,0}(k) - W_N^{2k} \cdot X_{m-2,1}(k) \\ X_{m-1,0}(k + \frac{N}{4}) = X_{m-2,0}(k) - W_N^{2k} \cdot X_{m-2,1}(k) \\ X_{m-1,1}(k) = X_{m-2,2}(k) - W_N^{2k} \cdot X_{m-2,3}(k) \\ X_{m-1,1}(k + \frac{N}{4}) = X_{m-2,2}(k) - W_N^{2k} \cdot X_{m-2,3}(k) \end{array} \right\} k = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1 \quad (1.50)$$

Тут  $X_{m-2,h}(k) - \frac{N}{4}$  - точкові ДПФ для:

$k = 0$  – парних номерів  $X_{m-1,0}(n)$

$k = 1$  – непарних номерів  $X_{m-1,0}(n)$

$k = 2$  - парних номерів  $X_{m-1,1}(n)$

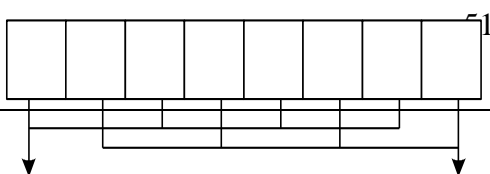
$k = 3$  – непарних номерів  $X_{m-1,1}(n)$ .

Процес продовжується до тих пір, поки на  $m$ -кроці не залишаться тільки два двоточкових ДПФ. Позначимо їх  $\Phi(k)$   $k = 0, 1$ . Вони відповідають 2- точковим послідовностям  $\varphi(0), \varphi(1)$ .

$$\begin{cases} \Phi(0) = \varphi(0) + W_N^0 \cdot \varphi(1) = \varphi(0) + \varphi(1) \\ \Phi(1) = \varphi(1) + W_N^{\frac{N}{2}} \cdot \varphi(1) = \varphi(0) + \varphi(1) \end{cases} \quad (1.51)$$

Розглянемо випадок для  $N = 8 = 2^3$ , тобто,  $m = 3$ .

Вихідна послідовність  $x_3(n)$



$x(1) \ x(2) \ x(3) \ x(4) \ x(5) \ x(6) \ x(7)$

$x(0) \ x(2) \ \parallel \ x(6) \ \qquad \qquad \qquad x(1) \ x(3) \ x(5) \ x(7)$

$x(0) \ x(4) \ \qquad \qquad x(2) \ x(6) \ \qquad \qquad x(1) \ x(5) \ \qquad \qquad x(3)$

Рис. 1.17. ДПФ для  $N=8$

### 1.20.2. Графічне відображення ШПФ

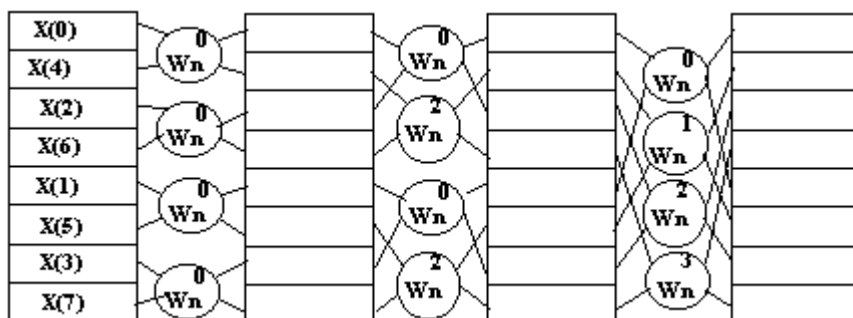


Рис. 1.17. Графічне відображення алгоритму ДПФ

### 1.20.3. Перестановка членів вхідної послідовності

Перестановка здійснюється відповідно до двійкової інверсії номерів, тобто, елемент з номером  $(n_{m-1}, \dots, n_1, n_0)$  записується в комірку з номером  $(n_0, n_1, \dots, n_{m-1})$

Номер	Двійковий код	Двійкова інверсія	Інверсний номер
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

#### 1.20.4. Загальний алгоритм ШПФ

З графічного відображення ШПФ випливає:

- 1) ШПФ виконується поетапно. Число етапів дорівнює  $m = \log_2 N$ . Необхідно організувати цикл  $l = 1..m$
- 2) На кожному  $l$ -му етапі отримуємо  $l = 2^l$  - точкову послідовність. Необхідно організувати цикл  $j = 1..l/2$
- 3) Доцільно один і той же повертаючий множник використовувати для відповідних елементів усіх послідовностей на кожному етапі. Ці елементи віддалені один від одного на  $l/2$  індексів. Повинен бути організований цикл  $n = j, j+l, \dots, N$
- 4) Результати кожної операції «метелик» повинні записуватись на місце операндів, забезпечуючи принцип заміщення.

#### 1.21. Згортка сигналів

*В цифровій обробці сигналів широко використовується лінійна та кругова дискретна згортка. Лінійною згорткою двох кінцевих послідовностей  $x(nT)$  та  $g(nT)$  по  $N$  і  $M$  елементів називається послідовність  $y(nT)$ , яка визначається співвідношенням  $y(nT) = \sum_{k=0}^n x(kT)g(n-k)T, n=0, \dots, N+M-2$ , котра є кінцевою і має  $N+M-1$  відліків.*

*Круговою або циклічною дискретною згорткою двох періодичних послідовностей  $x(nT)$  та  $g(nT)$  з періодом  $N$  називається послідовність  $y(nT)$ , яка визначається співвідношенням  $y(nT) = \sum_{k=0}^{N-1} x(kT)g(n-k)T$ .*

*Для безперервних сигналів використовується аналогічна дискретна аналогова згортка.*

Згортка сигналів є однією з головних операцій лінійних систем. Відповідно до фільтруючої властивості дельта-функції, будь-який сигнал на вході лінійної системи можна подати у вигляді безперервної згортки, під знаком інтеграла, яка знаходиться як добуток вхідного сигналу і дельта-функції, таким чином:  $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) * \delta(t-\tau) d\tau$ . В

процесі проходження сигналу за лінійною системою дельта-функція перетворюється на її імпульсну характеристику і сигнал на виході лінійного ланцюга знаходиться як згортка вхідного сигналу і імпульсної характеристики каналу  $g(t-\tau)$  або:

$x(t)_{\text{вих}} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)_{\text{вх}} g(t-\tau) d\tau$ . Аналогічно знаходиться вихідний сигнал дискретного каналу.

Інтеграл при цьому замінюється нескінченною або кінцевою сумою.

Порядок виконання операцій дискретної лінійної і кругової згортки ілюструють рис.1.18. і 1.19.

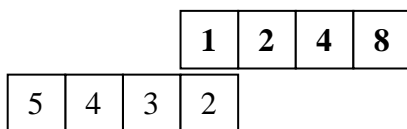
### 1.21.1. Обчислення лінійної дискретної згортки

Вихідні сигнали:  $x(kT)$ 

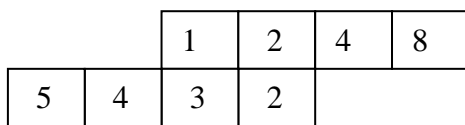
1	2	4	8
---	---	---	---

$g(kT)$ 

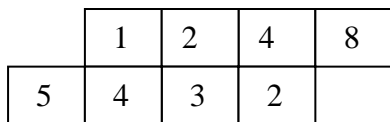
	2	3	4	5
--	---	---	---	---



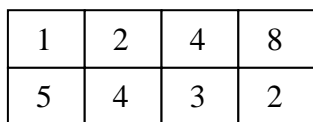
$$y(0) = 1 * 2 = 2$$



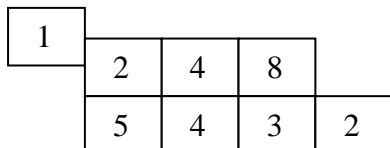
$$y(1) = 1 * 3 + 2 * 2 = 7$$



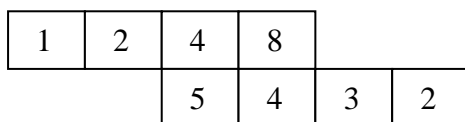
$$y(2) = 1 * 4 + 2 * 3 + 4 * 2 = 18$$



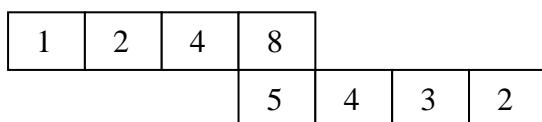
$$y(3) = 1 * 5 + 2 * 4 + 4 * 3 + 8 * 2 = 41$$



$$y(4) = 2 * 5 + 4 * 4 + 8 * 3 = 50$$



$$y(5) = 4 * 5 + 8 * 4 = 52$$



$$y(6) = 8 * 5 = 40$$

Результат

2	7	18	41	50	52	40
---	---	----	----	----	----	----

Рис.1.18. Лінійна дискретна згортка

**1.21.2. Обчислення кругової дискретної згортки**

Вихідні сигнали  $x(kT)$  і  $g(kT)$

1	2	4	8
2	5	4	3

$$y(0)=1*2+2*5+4*4+8*3=52$$

1	2	4	8
3	2	5	4

$$y(1)=1*3+2*2+4*5+8*4=59$$

1	2	4	8
4	3	2	5

$$y(2)=1*4+2*3+4*2+8*5=58$$

1	2	4	8
5	4	3	2

$$y(3)=1*5+2*4+4*3+8*2=41$$

Результат

52	59	58	41
----	----	----	----

Рис.1.19. Кругова дискретна згортка

Проміжні результати при обчисленні частинних сум лінійної і кругової згортки збігаються і цим може перевірятися правильність здійснених розрахунків.

Співмножники в лінійній і круговій згортках можуть мінятися місцями, що видно з наведеного нижче розрахунку лінійної і кругової згортки. Кінцеві результати при цьому співпадають.

Обчислення лінійної дискретної згортки за формулою, в якій вхідні сигнали доповнені нулями до A1+B1-11.

$$r := 2 \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{B1} := \\ \text{***} \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad y(k) := \sum_{m=0}^k (A1_m \cdot B1_{k-m})$$

$m := 0..2$   
 $k := 0..6$

Другий вид формули дискретної згортки:

$$p(k) := \sum_{m=0}^k (A1_{k-m} \cdot B1_m) \quad p(k) =$$

2
7
18
41
50
52
40

2
7
18
41
50
52
40

## 1.22. Перетворення Лапласа, Фур'є та z-перетворення

На практиці для математичного описання аналогових та дискретних лінійних систем і сигналів використовується три способу, між якими існує взаємно-однозначна відповідність.

**а) Перетворення Лапласа.** Математичний опис аналогових сигналів і лінійних систем проводиться в певній абстрактній комплексній  $p$  (або  $s$ ) - області Лапласа. Використовуються односторонні і двосторонні перетворення Лапласа.

Оператор Лапласа  $p=c+jk$ , де  $c$ -константа. Одностороннє пряме та зворотнє перетворення Лапласа для функцій  $f(t)$ , задовольняючих умові Діріхле, має вигляд:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad (1.52)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} * \int_C F(p) e^{pt} dp$$

Функція  $f(t)$  носить назву "оригінал" і є безперервною або кусково-безперервною дійсною чи комплексною функцією, що задовольняє умові Діріхле. В результаті перетворення  $F(p)$  виходить "зображення" функції  $f(t)$ .  $C$  - замкнутий контур в області збіжності інтеграла по контуру існування функції. Перетворення Лапласа існує для дійсної області  $Re(p) = c$ , якщо при певному значенні "с" сходиться інтеграл для абсолютного значення підінтегральної функції  $f(t)$ :

$$\int_0^{\infty} |f(t) * e^{at}| * dt .$$

**б) Фур'є - перетворення.** Математичний опис аналогових сигналів і лінійних систем проводиться в конкретній частотно-часовій комплексній  $p$  (або  $s$ ) області, де  $p = j\omega$ , тут  $\omega$ -кругова частота  $\omega = 2\pi f$ ,  $f = 1 / T$ ,  $T$ -період повторення сигналу,  $j$ -уявна одиниця. Оскільки  $p = j\omega$ , перетворення Фур'є тотожно перетворенню



**Лапласа на комплексній осі  $j\omega$  р-площини. Відповідно, одностороннє пряме і зворотнє перетворення Фур'є для функцій  $f(t)$ , що задовольняють умовам Діріхле, має вигляд:**

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} * \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1.53)$$

**в) z-перетворення. При дослідженні дискретних сигналів і лінійних дискретних систем замість аналогового і дискретного перетворення Лапласа математики використовують так зване z-перетворення, яке можна отримати з перетворення Лапласа шляхом заміни змінних. При цьому аналогова функція  $f(t)$  розбивається на дискрети згідно теореми Котельникова - Найквіста і стає решітчастою  $f(nT)$ ,  $T$ -інтервал дискретизації,  $n$ -номер вибірки. Вихідна аналогова функція  $f(t)$  в результаті дискретизації зображується у вигляді решітчастої функції  $f(nT)$ , а  $F(z)$ -ї z-перетворення має вигляд:**

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{-n}. \quad (1.54)$$

В останній формулі  $n$ -номер дійсної чи комплексної вибірки сигналу,  $f(nT)$  – оригінал - послідовність дійсних або комплексних відліків, а  $F(z)$  -  $z$ -зображення або  $z$ -образ функції  $f(nT)$ .

в)Зв'язок z-перетворення та Фур'є - перетворення решітчастої функції z-перетворення гратчастої функції з періодом  $T$   $f(nT)$  тотожно даної функції на одиничному колі

$$z = r e^{j\omega T} \quad I_{r=1} = e^{j\omega T}.$$

Пряме перетворення Фур'є функції  $f(nT)$ :

$$F(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-j\omega T n}. \quad (1.55)$$

Оригінал решітчастої функції  $f(nT)$  являє собою набір дійсних або комплексних чисел,  $F(e^{j\omega T})$  - Фур'є - відображення функції  $f(nT)$ .

Повинна виконуватись умова  $\sum_{n=0}^{\infty} |f(nT)| < \infty$ .

Результатом перетворення Фур'є решітчастої функції  $f(nT)$  є безперервна періодична функція  $F(e^{j\omega T})$ . В свою чергу аргумент цієї функції також є періодичною з періодом по частоті  $\omega$ , що дорівнює  $2\pi/T$ :

$$e^{j\omega T} = e^{jT(\omega + k\frac{2\pi}{T})} = e^{j\omega T} e^{j2\pi k} = e^{j\omega T}. \quad (1.56)$$

Таким чином, співвідношення  $F(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-j\omega T n}$  є:

- прямим перетворенням Фур'є решітчастої функції  $f(nT)$ ,
- рядом Фур'є безперервної функції

$$F(e^{j\omega T}) = F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{-jn\Delta\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) e^{-j\omega n T} \text{ при нормованому часі } T=1.$$

Тому коефіцієнти ряду Фур'є обчислюються за формулою:

$$f(n) = \frac{T}{2\pi} \sum_{-\pi/T}^{\pi/T} F(e^{j\omega T}) e^{j\omega T n} d\omega, \quad \omega = 2\pi/T. \quad (1.57)$$

Ці коефіцієнти є зворотним перетворенням Фур'є решітчастої функції і одночасно коефіцієнтами ряду Фур'є безперервної функції  $F(e^{j\omega T})$ . Отже, пряме і зворотне перетворення Фур'є решітчастої функції  $f(nT)$  зображується парою виразів:

$$F(e^{j\omega T}) = F(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) e^{-j\omega n T}, \quad (1.58)$$

$$f(n) = \frac{T}{2\pi} \sum_{-\pi/T}^{\pi/T} F(e^{j\omega T}) e^{j\omega T n} d\omega. \quad (1.59)$$

Решітчаста функція  $f(nT)$  одночасно може знаходитись в трьох областях: часовій, частотній та z-області, між якими існує функціональна залежність.

### 1.23. Перетворення Фур'є в p- та z-областях

Одностороннє і двостороннє перетворення Фур'є відкриває можливості опису лінійних сигналів і систем в p-області Лапласа і в частотній областях. Нехай  $z = a + jb$ , а  $p = \sigma + j\omega$ . Тоді при переході від p-області Лапласа до Z-перетворення і безперервному збільшенні змінної  $j\omega$  в p-області відбувається багаторазовий циклічний обхід одиничного кола в z-області проти годинникової стрілки (рис.1.20):

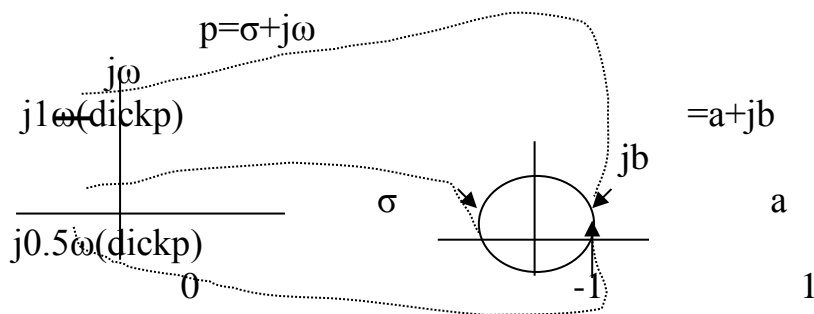


Рис.1.20. Перехід від p- до z-області

### 1.23.1. Основні властивості z-перетворення

1. Лінійність:

$$\begin{aligned} \text{Якщо } s(nT) &= ax(nT) + by(nT), \\ \text{то } S(Z) &= aX(Z) + bY(Z). \end{aligned}$$

2. Запізнення:

$$\begin{aligned} \text{Якщо } s(nT) &= ax(nT - \Psi T), \\ \text{то } S(Z) &= aX(Z) Z^{-\Psi}. \end{aligned}$$

3. Згортка сигналів:

$$\begin{aligned} \text{Якщо } S(nT) &= \sum_{k=0}^n x(kT)y(nT - kT), \\ \text{то } S(Z) &= X(Z)Y(Z). \end{aligned}$$

### 1.24. Ефект Гіббса

Послідовність прямокутних імпульсів має скачки, в той час як сума будь-якого числа гармонійних компонент є безперервною функцією. Тому на прилеглих до розривів першого роду ділянках періодичної послідовності прямокутних імпульсів сума ряду Фур'є дає пульсації. Амплітуда найбільшого викиду пульсацій наближається до 9% від величини імпульсу. Це явище носить назву ефекту Гіббса.

### 1.25. Інтеграл Гільберта

*Перетворення Гільберта дозволяє виділити амплітудний і фазовий спектр довільного сигналу.*

Перетворення Фур'є сигналу  $x(t)$  тривалістю  $t_0$  розкладається в ряд Фур'є відомим способом:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(\omega_k t) + b_k \sin(\omega_k t), \quad \omega_k = k \omega_0 = k \frac{2\pi}{t_0}, \quad (1.60)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(\omega_k t) dt; \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(\omega_k t) dt;$$

$$\text{або } x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{j\omega_k t}.$$

Для дійсного сигналу або дійсної частини комплексного повинно виконуватись перетворення Гільберта, при якому сигнал складається з суми двох спряжених зсунених по фазі на  $90^\circ$  сигналів  $x(t)$  и  $\tilde{x}(t)$   $x(t) = x(t) + j\tilde{x}(t)$ , що еквівалентно виразу

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} [a_k \cos(\omega_k t) + b_k \sin(\omega_k t)] * j \sum_{k=0}^{\infty} [a_k \sin(\omega_k t) - b_k \cos(\omega_k t)] \quad (1.61)$$

На основі квадратурних залежностей

$$\cos(\omega_k t) = \sin(\omega_k t + \frac{\pi}{2}), \quad \sin(\omega_k t) = \cos(\omega_k t + \frac{\pi}{2})$$

Перетворення Гільберта (1.61) дає пару перетворень

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{x}(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (1.62)$$

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

Отримання компонентів розкладання Гільберта ілюструє рис.

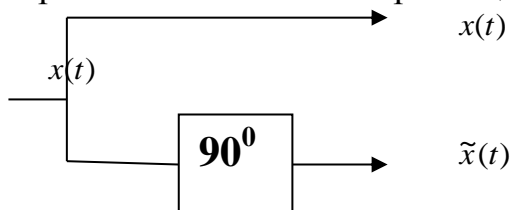


Рис.1.21. Отримання двох спряжених сигналів

Отримання миттєвих значень амплітудно і фазочастотного спектра з використанням співвідношень

$$x(t) = s(t) + j\tilde{x}(t) = s(t) e^{j\varphi(\omega t)} = s(t) \cos \varphi(\omega t) + js(t) \sin \varphi(\omega t), \quad (1.63)$$

$$s(t) = \sqrt{x^2(t) + \tilde{x}_{copr}^2(t)} \quad \varphi(t) = -\arctg \frac{\tilde{x}_{copr}(t)}{x(t)}$$

## II. ОСНОВИ ЛІНІЙНИХ ДИСКРЕТНИХ ЛАНЦЮГІВ

### 2.1. Визначення лінійних ланцюгів

*В лінійних аналогових і дискретних ланцюгах проходження сигналів описується лінійними операторами, які масштабують комплексний частотний спектр сигналів, що проходять по них, але не міняють його складу.*

Система є лінійною [6, 7], якщо в ній виконуються принципи:

- Адитивності, коли реакція системи на суму кількох вхідних сигналів дорівнює її реакції на суперпозицію цих сигналів,;
- однорідності, коли зміна масштабу вхідного сигналу призводить до такої ж зміни масштабу вихідного сигналу,
- інваріантності, коли зсув за часом вхідного сигналу викликає такий же зсув вихідного.

Перевага лінійних систем полягає в методах обробки інформації. У лінійних системах вхідний сигнал як завгодно складної форми може бути зображений більш простими складовими з відомим відгуком на них у вигляді відомих математичних виразів. В якості компонентів вхідних сигналів зазвичай використовуються гармонічні сигнали, одиничні імпульси і періодичні послідовності прямокутних імпульсів. Іншою важливою особливістю лінійних систем є те, що будь-яку складну лінійну систему можна

розкласти на комбінацію простих систем і з'єднати їх послідовно (каскадно), паралельно або комбінованим способом.

## 2.2 Приклади простих лінійних безперервних ланцюгів

Прості аналогові лінійні ланцюги описуються лінійними диференціальними рівняннями, які можуть вирішуватися операторним методом за допомогою перетворення Лапласа як рівняння алгебраїчні.

### 3.2.1. Інтегруюча ланка

Інтегруюча ланка (інерційна ланка першого порядку), представлена на рис. 2.1, описується рівнянням 2.1. На рис. 2.1  $u(t)$  і  $y(t)$ - сигнали збудження і реакції ланки.  $T=RC$ -постійна часу.



Рис. 2.1. Інтегруюча ланка

Формула прямого перетворення Лапласа  $F(s)$  для аналогових ланцюгів

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad s = \text{const} + j\omega$$

Звідки слідує, що диференціювання та інтегрування підінтегральної функції  $f(t)$  приводить відповідно множення або ділення перетворення  $F(s)$  (зображення вихідної функції) на оператор Лапласа  $s$ .

Перетворення Лапласа (зображення) виразу (2.1) приводить до виразу

$$TsY(s) + Y(s) = U(s) \quad \text{або} \quad Y(s)(Ts + 1) = U(s) \quad (2.2)$$

Передаточною функцією лінійного ланцюга є відношення зображення Лапласа вихідного сигналу до вхідного:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{Ts + 1} \quad (2.3)$$

Комплексна частотна характеристика (КЧХ)  $W(j\omega)$  лінійного ланцюга можна отримати заміною оператора Лапласа оператором Фур'є  $s \Rightarrow j\omega$ :

$$W(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{1}{j\omega T + 1} = \frac{1 - j\omega T}{1 + \omega^2 T^2} = \frac{1}{1 + \omega^2 T^2} + j \frac{-\omega T}{1 + \omega^2 T^2} = \text{Re}(\omega) + \text{Im}(\omega) \quad (2.4)$$

Із формули (2.4) знаходиться амплітудно - та фазочастотна характеристика схеми:

$$A(\omega) = \sqrt{(\text{Re}(\omega))^2 + (\text{Im}(\omega))^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}, \quad (2.5)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{\text{Im}(\omega)}{\text{Re}(\omega)} = \arctg(-\omega T) = -\arctg(\omega T)$$

### 2.2.2. Диференціююча ланка

Схема (рис.2.2) та диференціальне рівняння реакції ланки на вхідний сигнал:

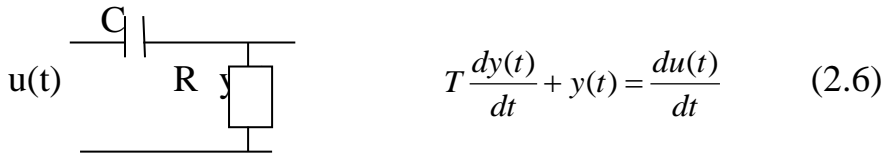


Рис. 2.2. Диференціююча ланка

$T=RC$ -постійна часу.

Перетворення Лапласа (зображення) виразу (2.6):

$$TsY(s) + Y(s) = TsU(s) \quad (2.7)$$

Передаточна функція диференціюючої ланки  $W(j\omega)$ :

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Ts}{Ts+1} \quad (2.8)$$

Комплексна частотна характеристика (КЧХ) ланки:

$$W(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{j\omega T}{j\omega T + 1} = \frac{(1 - j\omega T)j\omega T}{1 + \omega^2 T^2} = \frac{\omega^2 T^2}{1 + \omega^2 T^2} + j \frac{\omega T}{1 + \omega^2 T^2} = \text{Re}(\omega) + \text{Im}(\omega) \quad (2.9)$$

Амплітудно- та фазочастотна характеристика:

$$A(\omega) = \sqrt{(\text{Re}(\omega))^2 + (\text{Im}(\omega))^2} = \frac{\omega T}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}, \quad (2.10)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{\text{Im}(\omega)}{\text{Re}(\omega)} = \arctg(1/\omega T)$$

### 2.2.3. Коливальна ланка II порядку

Схема (рис. 2.3) та диференціальне рівняння реакції ланки на вхідний сигнал:

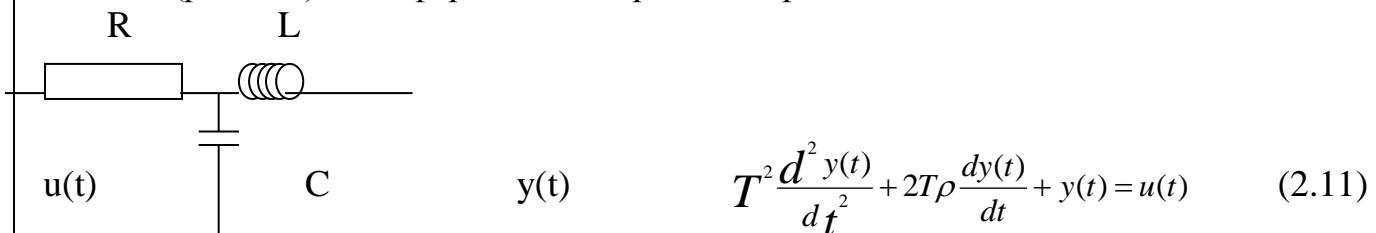


Рис. 2.3. Коливальна ланка

$T = \sqrt{LC}$  - постійна часу,  $\rho$  - коефіцієнт згасання.

Передаточна функція ланки:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{T^2 s^2 + 2T\rho s + 1} \quad (2.12)$$

Комплексна частотна характеристика  $W(j\omega)$ :

$$W(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{T}{T^2 \omega^2 + 2j\omega T\rho + 1} \quad (2.13)$$

Амплітудно- та фазочастотна характеристика:

$$A(\omega) = \sqrt{(\operatorname{Re}(\omega))^2 + (\operatorname{Im}(\omega))^2} = \frac{1}{\sqrt{(1 + \omega^2 T^2)^2 + 4\rho^2 \omega^2 T^2}}, \quad (2.14)$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg \frac{\operatorname{Im}(\omega)}{\operatorname{Re}(\omega)} = -\arctg(2\rho\omega T / (1 - \omega^2 T^2))$$

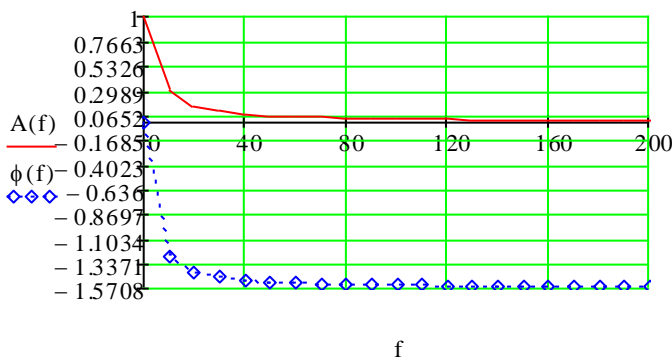
Нижче в якості ілюстрації наведені амплітудно- та фазочастотні характеристики розглянутих ланок.

### Приклад 2.1.

Амплітудно- і фазочастотна характеристика інтегруючої ланки

$$f := 0, 10..1000 \quad \omega_f := 2 \cdot \pi \cdot f \quad T := 0.05$$

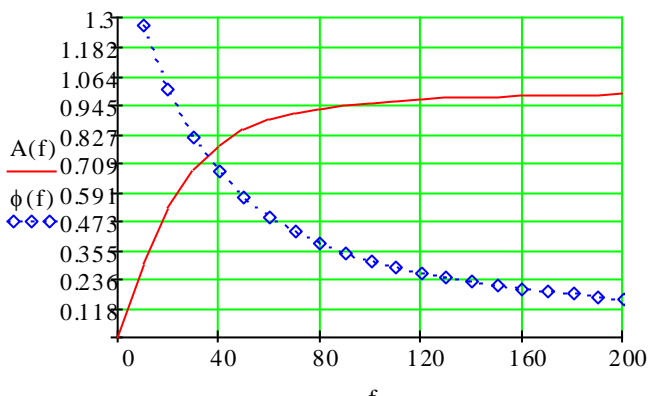
$$A(f) := \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_f)^2 \cdot T^2}} \quad \phi(f) := -\operatorname{atan}(\omega_f \cdot T)$$



Амплітудно- і фазочастотна характеристика диференціюючої ланки

$$f := 0, 10..200 \quad \omega_f := 2 \cdot \pi \cdot f \quad T := 0.005$$

$$A(f) := \frac{\omega_f \cdot T}{\sqrt{1 + (\omega_f)^2 \cdot T^2}} \quad \phi(f) := \operatorname{atan}\left(\frac{1}{\omega_f \cdot T}\right)$$



### Амплітудно- і фазочастотна характеристика коливальної ланки

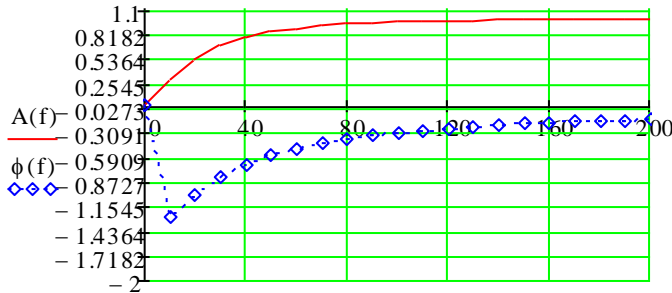
$$f := 0, 10..200$$

$$\omega_f := 2 \cdot \pi \cdot f$$

$$T := 0.8$$

$$p := 80$$

$$A(f) = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega_f)^2 \cdot T^2]^2 + 4p^2 \cdot T^2 \cdot (\omega_f)^2}} \quad \phi(f) := \text{atan} \left[ \frac{2 \cdot p \cdot \omega_f \cdot T}{1 - (\omega_f)^2 \cdot T^2} \right]$$



### 2.3 Опис лінійних безперервних ланцюгів

Після розгляду окремих прикладів становиться зрозумілим смисл опису лінійних безперервних ланцюгів (систем) зі зворотним зв'язком, які складаються з простих лінійних перетворювачів, які характеризуються своїми постійними часу  $b_i$ ,  $i=0,1,2,\dots,m$ . в прямому напрямку та  $a_j$ ,  $j=0,1,2,\dots,n$   $n \geq m$  в зворотному напрямку, де  $a_j$  и  $b_i$  - звичайні компоненти.

Умовно лінійний безперервний ланцюг зі зворотним зв'язком, на вході та виході якого діють безперервні сигнали  $x(t)$  и  $y(t)$ , показаний на рис. 2.1.

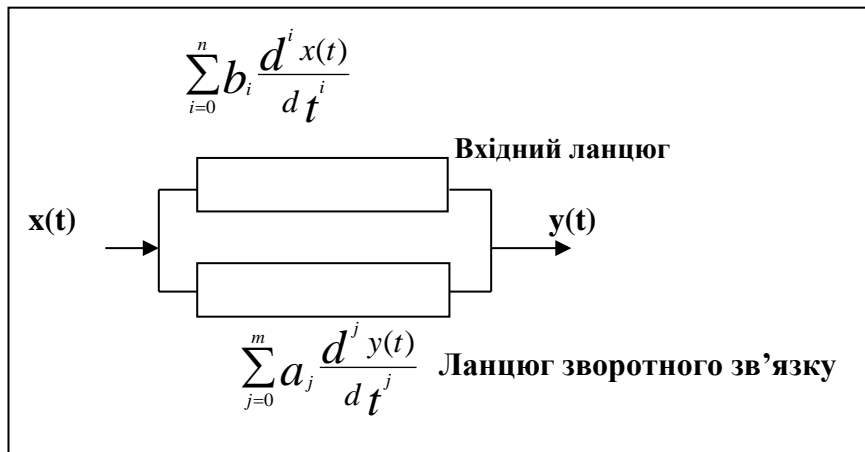


Рис.2.4. Аналоговий лінійний ланцюг зі зворотним зв'язком

Під описом лінійних систем з зосередженими стаціонарними параметрами розуміють зв'язок між наступними за ним вхідними та вихідними сигналами. У загальному вигляді цей зв'язок виражається лінійним диференціальним рівнянням:



:

$$\begin{aligned}
 & a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} y(t)}{dt^{n-2}} + \dots + a_1 \frac{d^1 y(t)}{dt^1} + a_0 y(t) = \\
 & b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + b_{m-2} \frac{d^{m-2} x(t)}{dt^{m-2}} + \dots + b_1 \frac{d^1 x(t)}{dt^1} + b_0 x(t),
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Або в більш компактному вигляді:

$$\sum_{i=0}^n b_i \frac{d^i x(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m a_j \frac{d^j y(t)}{dt^j}. \tag{2.16}$$

Якщо задатись конкретною функцією вхідного сигналу  $x(t)$ , вийде лінійне неоднорідне диференціальне рівняння з постійними коефіцієнтами, рішення якого дозволяє отримати сигнал на виході лінійної безперервної системи (ЛБС)  $y(t)$ . Застосуємо до обох частин рівняння (2.15) перетворення Лапласа. Тоді в чисельнику і знаменнику отримаємо два поліноми з постійними коефіцієнтами ступеня  $m$  і  $n$ .

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + b_{m-2} s^{m-2} + \dots + b_1 s^1 + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s^1 + a_0}. \tag{2.17}$$

Функція  $H(s)$  є найважливішою характеристикою лінійної безперервної системи (ЛБС) і називається функцією передачі.

Корні рівнянь:

$$M(s) = b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + b_{m-2} s^{m-2} + \dots + b_1 s^1 + b_0 = 0,$$

$$N(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s^1 + a_0 = 0$$

називаються відповідно нулями і полюсами передаточної функції. Передаточна функція являє собою оператор, який вхідний вплив ЛНС перетворює в вихідну реакцію заміною оператора Лапласа оператором Фур'є  $s=j\omega$ :

$$K(\omega) = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + b_{m-2} (j\omega)^{m-2} + \dots + b_1 (j\omega)^1 + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + a_{n-2} (j\omega)^{n-2} + \dots + a_1 (j\omega)^1 + a_0}.$$

Якщо у виразі (2.17) знайти корні поліномів чисельника і знаменника, попередньо прирівнявши їх до нуля, то він зображується як:

$$H(s) = k \frac{(s - z_m)(s - z_{m-1})(s - z_{m-2}) \dots (s - z_1)}{(s - p_n)(s - p_{n-1})(s - p_{n-2}) \dots (s - p_1)}, \tag{2.18}$$

В виразі функції передачі  $H(s)$  (2.18)  $s$  - оператор Лапласа,  $k = \frac{b_m}{a_n}$  - коефіцієнти підсилення,  $z_m$  - нулі функції передачі,  $p_i$  - полюси. Функцію передачі можна також подати у вигляді суми простих дробів:

$$H(s) = C_0 + \frac{r_n}{s - p_n} + \frac{r_{n-1}}{s - p_{n-1}} + \frac{r_{n-2}}{s - p_{n-2}} + \dots + \frac{r_1}{s - p_1}. \quad (2.19)$$

У виразі (2.19)  $C_0$  --ціла частина функції передачі,  $p_i$  - полюси,  $r_i$  -- відрахування, які можуть бути комплексними і комплексно - спряженими.

## 2.4 Параметри лінійних систем

*Основні характеристики лінійних систем сформулюємо у вигляді стверджень.*

*Ствердження 1.* Імпульсною характеристикою лінійної безперервної системи  $g(t)$  називається її реакція на проходження по ній безперервного  $\delta(t)$ -імпульсу.

*Ствердження 2.* Вихідний сигнал ЛБС з постійними параметрами (інваріантної системи) дорівнює згортці вхідного сигналу та її імпульсній характеристиці:

$$y_{vix}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_{vix}(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Цей факт можна уявити собі як результат теореми Котельникова для сигналу з необмеженою верхньою частотою.

На основі властивостей перетворення Фур'є спектр вихідного сигналу ЛБС знаходиться у вигляді добутку спектра вхідного сигналу, помноженого на комплексну частотну характеристику ЛБС:  $S(\omega)_{vix} = S(\omega)_{vx} K(\omega)$ .

*Ствердження 3.* Передаточною функцією ЛБС  $H(s)$  називається відношення перетворення Лапласа вихідного сигналу до вхідного  $H(s) = Y(s)/X(s)$ . Замінивши оператор Лапласа оператором Фур'є  $s \Rightarrow j\omega$ , отримаємо комплексний частотний спектр або іншими словами комплексний коефіцієнт передачі ЛБС  $K(j\omega) = Y(j\omega)/X(j\omega)$ .

*Ствердження 4.* Комплексним коефіцієнтом передачі виходить як перетворення Фур'є імпульсної характеристики ЛБС з постійними параметрами:

$$K(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-jt\omega}. \quad (2.20)$$

Комплексний коефіцієнт передачі  $K(\omega)$  - це характеристика, що показує зміну комплексної частоти  $j\omega$  в лінійній системі. Модуль комплексного коефіцієнта передачі являє собою амплітудно-частотну характеристику ЛБС, а аргумент - фазочастотну характеристику. Амплітудно-частотна характеристика (АЧХ) показує, у скільки разів змінюється її амплітуда в ЛБС, а фазочастотна характеристика (ФЧХ) показує її фазовий зсув.

*Ствердження 5.* Фазова затримка на частоті  $\omega$  – це затримка, що вноситься ЛБС на даній частоті зі зворотним знаком:  $t(\text{зат}) = -\varphi(\omega)/\omega$ .  $\tau(\omega) = -\varphi(\omega)/\omega$ .

Групова затримка на частоті  $\omega$  – це затримка огинаючої вузькосмугового сигналу із середньою частотою  $\omega$  з протилежним знаком  $\tau_{групп}(\omega) = d\varphi(\omega)/\omega$ .

Для ЛБС без завад комплексна частотна характеристика дорівнює 1 або константі, фазочастотна характеристика лінійна і групова затримка постійна.

*Ствердження 6.* Для ЛБС без завад і спотворень сигналу КЧХ і АЧХ дорівнюють одиниці або константі, ФЧХ лінійна, груповий час затримки постійний.

$$K(j\omega) = A e^{-j\omega\tau_0}, \quad A = \text{const}, \quad \tau_0 = \text{const},$$

$$|K(j\omega)| = 1,$$

$$\arg Y(j\omega) = \omega\tau_0$$

Оскільки лінійні дискретні ланцюги є різновидом аналогових, то наведені тут характеристики справедливі і для них.

## 2.5. Кінцеворізницеве рівняння лінійних дискретних систем

*В результаті проведених міркувань стає можливий перехід від опису лінійних безперервних систем до опису дискретних лінійних систем рекурсивними кінцеворізницевими рівняннями.*

*Лінійне диференціальне рівняння порядку  $m$  з постійними коефіцієнтами для лінійного безперервного ланцюга при переході до лінійної дискретного ланцюга замінюється лінійним кінцеворізницевим рівнянням, до складу якого входять тільки операції зсуву, множення і додавання.*

Швидкість зміни безперервної функції  $f(t)$  визначається її першою похідною  $df(t)/dt$ . Відповідно, швидкість зміни дискретної функції  $f(nT)$  визначається першою кінцевою різницею  $\Delta f(n) = f[n+1] - f[n]$ . Часова різниця для першої кінцевої різниці і всіх інших, на яку повинна ділитись величина  $\Delta f(n)$ , дорівнює одиниці як різниця аргументів  $[n+1] - [n] = 1$ . Утворення перших різниць зображено на рис. 2.5.

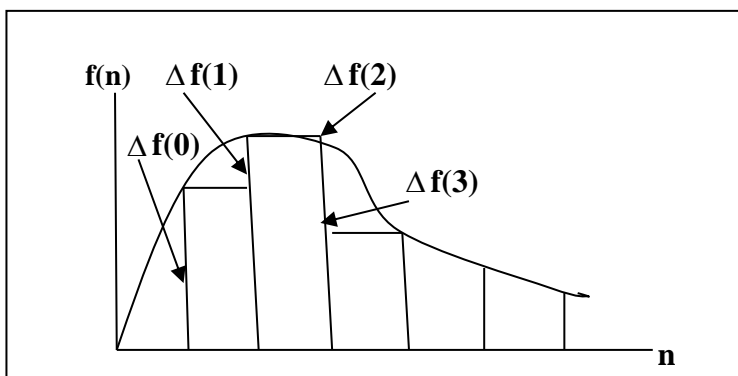


Рис. 2.5. Отримання першої кінцевої різниці

Друга, третя і наступні різниці знаходяться аналогічно:

$$\Delta^2 f(n) = \Delta f[n+1] - \Delta f[n],$$

$$\Delta^3 f(n) = \Delta^2 f[n+1] - \Delta^2 f[n],$$

.....

$$\Delta^m f(n) = \Delta^{m-1} f[n+1] - \Delta^{m-1} f[n]$$

При дослідженні безперервних систем використовують диференціальні рівняння, які визначають зв'язок між безперервною функцією і її похідною. При розгляді дискретних систем використовують різницеві рівняння, що визначають зв'язок між дискретною функцією  $f(n)$  і  $\Delta^m f(n)$ ,  $m = 1, 2, \dots, k$ . Якщо лінійне диференціальне рівняння має вигляд:

$$b_0 \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{dx(t)}{dt} + b_m x(t) = y(t), \quad (2.21)$$

то лінійне відповідне йому дискретно-різницеве рівняння з постійними коефіцієнтами відображається як

$$b_0 x(n+m) + b_1 x(n+m-1) + b_2 x(n+m-2) + \dots + b_m x(n) = y(n). \quad (2.22)$$

Різницеве рівняння порядку  $m$  відповідає диференціальному рівнянню того ж порядку. Диференціальне рівняння можна розглядати як граничне для різницевого, коли період дискретизації функції  $y(t)$  прагне до нуля. Рішення різницевого рівняння проводиться різними методами, але чисельний метод, який використовується дуже часто, дозволяє знаходити точні значення відліків функції  $y(n)$ .

Повторимо рівняння (2.15):

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} y(t)}{dt^{n-2}} + \dots + a_1 \frac{d^1 y(t)}{dt^1} + a_0 y(t) =$$

$$b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + b_{m-2} \frac{d^{m-2} x(t)}{dt^{m-2}} + \dots + b_1 \frac{d^1 x}{dt^1} + b_0 x(t),$$

Заміна безперервного часу дискретними відліками  $t \rightarrow nT$  дозволяє перейти від наведеного вище диференціального рівняння до рекурсивному звичайно-різницевого рівняння, в якому значення  $k$ -ого відліку сигналу на виході лінійної дискретної ланцюга залежить від значень вхідного сигналу  $x(nT)$  в моменти часу від  $k$ -ого до  $(k-m)$ -го включно і попередніх відліків вихідного сигналу  $y(nT)$  от  $(k-1)$ -го до  $(k-n)$ -го. В цьому полягає його рекурсивність.

$$y(kT) = b_0 x(kT) + b_1 x(kT-T) + b_2 x(kT-2T) + b_3 x(kT-3T) + \dots$$

$$b_m x(kT-mT) - a_1 y(kT-T) - a_2 y(kT-2T) - \dots - a_n y(kT-nT). \quad (2.23)$$

В останніх виразах (...) та  $y(\dots)$  – відповідні часові відліки сигналу збудження на вході і виході лінійної дискретної ланцюга,  $a_j$  і  $b_i$  – певні константи, що залежать від її параметрів.

Численними дослідженнями встановлено, що основні властивості лінійного дискретного перетворювача (ЛДП) в часовій області базуються на закономірностях його імпульсної характеристики, відліки якої мають позначення  $g(kT)$ .

*Визначення.* Імпульсною характеристикою лінійного дискретного перетворювача (ЛДП) або, іншими словами, лінійної дискретної системи (ЛДС)  $g(kT)$  називається її реакція на вхідний сигнал у вигляді дискретного  $\delta$ - імпульсу:  $\delta(kT) = \frac{1: k=0}{0: k \neq 0}$ .

*Ствердження.* Значення  $k$ -ого відліку сигналу на виході ЛДС дорівнює дискретній згортці  $k$  відліків вхідного сигналу з імпульсною характеристикою ЛДС :

$$y(kT) = \sum_{n=0}^k x(nT)g(kT - nT). \quad (2.24)$$

## 2.6. Три види формули передаточної функції ЛДС

В рівності (2.22) маємо справу з дискретними відліками вихідного сигналу і тому маємо право піддати її ліву і праву частини  $z$ -перетворенню. Тоді:

$$Y(Z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(kT) z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} x(jT)g(kT - jT) z^{-k}.$$

Співмножники останнього виразу некорельовані, тому можна розділити суми:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} y(kT) z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} x(jT)g(kT - jT) z^{-k} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x(jT) \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(kT - jT) z^{-k}. \quad (2.25)$$

Введемо нову змінну в індексах:  $n=k-j$ ,  $k=n+j$ . З урахуванням  $n$  та  $k$ , вираз (2.24) перепишемо наступним чином:

$$Y(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x(jT) \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT) z^{-n-j} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x(jT) z^{-j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT) z^{-n}. \quad (2.25)$$

В останньому виразі є дві незалежні суми, а саме -  $z$ -перетворення двох функцій, що описують вхідний сигнал і імпульсну характеристику, які позначимо наступним чином:

$$X(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x(jT) z^{-j}, \quad (2.26)$$

$$W(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nT) z^{-n}.$$

Приймаючи до уваги рівність (2.25), в результаті пророблених перетворень маємо:

$$Y(z) = X(z)W(z). \quad (2.27)$$

$$W(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}.$$

Отримані результати можна сформулювати у вигляді трьох висновків.

*Висновок 1.* Передаточна функція  $W(z)$  ЛДС являє собою  $z$  - перетворення її імпульсної характеристики.

*Висновок 2.*  $z$ -перетворення вихідного сигналу для ЛДС дорівнює добутку  $z$ -перетворення сигналу на вході на  $z$  - перетворення передаточної функції.

*Висновок 3.*  $z$ -перетворення передаточної функції  $W(z)$  ЛДС дорівнює відношенню  $Z$ -перетворень вихідного сигналу до сигналу на вході системи.

Повернемо до опису ЛДС кінцеворізнцевим рівнянням в рекурсивній формі (2.22) та складові, що відносяться до відліків сигналу на вході, перенесемо до лівої частини, а складові, що відносяться до відліків сигналу на виході системи, до правої частини:

$$b_0 X(z) + b_1 x(kT - T) + b_2 x(kT - 2T) + \dots + b_m x(kT - mT) = y(kT) + a_1 y(kT - T) + a_2 y(kT - 2T) + \dots + a_n y(kT - nT) \quad (2.28)$$

Виконаємо  $z$ -перетворення цього виразу:

$$b_0 X(z) + b_1 X(z) z^{-1} + b_2 X(z) z^{-2} + b_3 X(z) z^{-3} + \dots + b_m X(z) z^{-m} = Y(z) + a_1 Y(z) z^{-1} + a_2 Y(z) z^{-2} + a_3 Y(z) z^{-3} + \dots + a_n Y(z) z^{-n} \quad (2.29)$$

Подальші операції дозволяють отримати передаточну функцію ЛДС через кінцеворізнцеве рівняння:

$$X(z)(b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + \dots + b_m z^{-m}) = Y(z)(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + \dots + a_n z^{-n}), \quad (2.30)$$

$$W(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + \dots + a_n z^{-n}}.$$

Вираз (2.30) показує, яким чином передаточна функція лінійного дискретного перетворювача може бути отримана безпосередньо з кінцеворізнцевого рівняння.

## 2.7. Загальний вигляд опису лінійної дискретної мережі

*Лінійні дискретні мережі (ЛДС) можуть бути рекурсивними та нерекурсивними.*

В результаті проведених міркувань та перетворювань для дискретних та безперервних лінійних систем отримані дуже схожі за змістом та за написанням вирази для знаходження значень вихідного сигналу  $y(nT)$  і  $y(t)$ :

$$y(nT) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(nT - iT) - \sum_{k=0}^{M-1} a_k y(nT - kT). \quad (2.31)$$

Для нормованого часу дискретизації  $T=1$ :

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i) - \sum_{k=0}^{M-1} a_k y(n-k). \quad (2.32)$$

$$y(t) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i \frac{d^i x(t)}{dt^i} - \sum_{k=0}^{M-1} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k}. \quad (2.33)$$

Реакція для ЛДС на вхідне збудження, як правило, знаходиться методом підстановки, який в кінцевий результат не вносить розрахункових похибок.

Наведений нижче приклад показує отримання відліків вихідного сигналу  $y(kT)$  ЛДС чисельним методом.

**Приклад 2.2.** Рішення різницевого рівняння для п'яти відліків

$$y(n) = x(n) - 0.5y(n-1), \quad x(n) = (0.1)^n.$$

*Рішення.*  $x(0) = 0, y(0) = x(0) - 0.5y(-1) = 0 - 0.5 \cdot 0 = 0;$

$$x(1) = 0.1, y(1) = x(1) - 0.5y(0) = 0.1 - 0.5 \cdot 0 = 0.1;$$

$$x(2) = 0.01, y(2) = x(2) - 0.5y(1) = 0.01 - 0.5 \cdot 0.1 = -0.04;$$

$$x(3) = 0.001,$$

$$y(3)=x(3)-0.5y(2)=0.001-0.5*(-0.04)=0.21;$$

$$x(4)=0.0001,$$

$$y(4)=x(4)-0.5y(3)=0.0001-0.5*0.21=-0.1049\dots$$

З прикладу видно, що вихідний сигнал для ЛДС, що описується рівнянням (2.15), є нескінченним.

## 2.8. Вихідний сигнал та імпульсна характеристика ЛДС

*Наводяться формули отримання вихідного сигналу та імпульсної характеристики ЛДС.*

*Визначення.* Лінійна дискретна система (ЛДС) називається рекурсивною, якщо хоча б один з коефіцієнтів кінцеворізницевого рівняння не дорівнює нулю. Іншими словами, ЛДС зі зворотним зв'язком описується рекурсивним кінцеврізницеvim рівнянням. І навпаки, ЛДС без зворотного зв'язку описується нерекурсивним кінцеврізницеvim рівнянням і є нерекурсивною.

*Визначення.* Порядком нерекурсивної ЛДС називають найбільше число відліків сигналу збудження  $N$  або реакції системи  $M$ :

$$\max\{(M-1), (N-1)\}.$$

Приклад різницевого рекурсивного рівняння ЛДС першого порядку:

$$y(n)=b_0x(n)-a_1y(n-1).$$

Приклад різницевого нерекурсивного рівняння ЛДС другого порядку:

$$y(n)=b_0x(n)+b_1x(n-1)+b_2y(n-2).$$

### 2.8.2. Імпульсна характеристика ЛДС

Це питання зручно розглянути на конкретних прикладах.

**Приклад 2.3.** Обчислити імпульсну характеристику нерекурсивної ЛДС другого порядку, що описується рівнянням:

$$y(kT)=b_0x(kT)+b_1x(kT-T)+b_2y(kT-2T). \quad (2.34)$$

Скористаємось тим фактом, що якщо на вхід ЛДС подати дискретний  $\delta$ -імпульс, на виході у вигляді реакції системи отримаємо її імпульсну характеристику. Тоді (2.34) прийме наступний вигляд:

$$g(kT)=b_0\delta(kT)+b_1\delta(kT-T)+b_2\delta(kT-2T). \quad (2.35)$$

Методом прямої підстановки, використовуючи властивості  $\delta$ -імпульсу, обчислимо відліки імпульсної характеристики ЛДС:

$$k=0, \quad g(0)=b_0;$$

$$k=1, \quad g(T)=b_1;$$

$$k=2, \quad g(2T)=b_2;$$

$$k=3, \quad g(3T)=0.$$

**Приклад 2.4.** Обчислити імпульсну характеристику рекурсивної ЛДС другого порядку, що описується рівнянням:

$$y(kT)=b_0x(kT)+b_1x(kT-T)-a_1y(kT-T). \quad (2.36)$$

Замінивши вхідний сигнал дискретним  $\delta$ -імпульсом, а вихідний сигнал - імпульсною характеристикою, отримаємо:

$$g(kT)=b_0\delta(kT)+b_1\delta(kT-T)-a_1g(kT-T).$$

$$\begin{aligned}
k=0, & \quad g(0) = b_0; \\
k=1, & \quad g(T) = b_1 - a_1 g(0) = b_1 - a_1 b_0; \\
k=2, & \quad g(2T) = (a_1)^1 * (b_1 - a_1 b_0); \\
k=3, & \quad g(3T) = (a_1)^2 * (b_1 - a_1 b_0); \\
k=4, & \quad g(4T) = (a_1)^3 * (b_1 - a_1 b_0); \\
& \dots\dots\dots \\
k=n, & \quad g(nT) = (a_1)^{n-1} * (b_1 - a_1 b_0).
\end{aligned}$$

Загальний вигляд формули обчислення імпульсної характеристики ЛДС:

$$g(kT) = b_0 \delta(kT) + b_1 \delta(kT-T) + b_2 \delta(kT-2T) + \dots + b_m \delta(kT-mT) - a_1 g(kT-T) - a_2 g(kT-2T) - a_3 g(kT-3T) - \dots - a_n g(kT-nT). \quad (2.37)$$

Розрахунки імпульсної характеристики в загальному вигляді дають наступні результати:

$$\begin{aligned}
k=0, & \quad g(0) = b_0; \\
k=1, & \quad g(T) = b_1 - a_1 g(0) = b_1 - a_1 b_0; \\
k=2, & \quad g(2T) = b_2 - a_1 g(T) - a_2 g(0) = b_2 - a_1 b_1 - (a_1)^2 * b_0 - a_2 b_0; \\
k=3, & \quad g(3T) = b_3 - a_1 g(2T) - a_2 g(T) - a_3 g(0); \\
k=4, & \quad g(4T) = b_4 - a_1 g(3T) - a_2 g(2T) - a_3 g(T) - a_4 g(0); \\
& \dots\dots\dots \\
k=n, & \quad g(nT) = b_n - a_1 g[(n-1)T] - a_2 g[(n-2)T] - \dots - a_n g(0).
\end{aligned}$$

Висновок. Імпульсна характеристика нерекурсивних ЛДС без зворотного зв'язку кінцева, а нерекурсивних ЛДС зі зворотним зв'язком нескінченна.

## 2.9. Основні властивості лінійних дискретних мереж

*Основні властивості ЛДС є в основному результатом їх стаціонарності.*

**Властивість пам'яті.** У випадку нерекурсивної ЛДС для знаходження реакції  $y(n)$  ЛДС на  $n$ -й відлік повинна пам'ятати значення  $(n-1)$  попередніх відліків. У разі рекурсивної ЛДС для цього ж випадку треба пам'ятати всю передісторію впливів, а, отже, пам'ять рекурсивної ЛДС нескінченна.

**Властивість стійкості.** Ця властивість полягає в тому, що при обмеженому впливі і довільних початкових умовах реакція ЛДС також обмежена. В часовій області стійкість визначається за імпульсною характеристикою і стійка ЛДС повинна відповідати вимозі

$$\sum_{m=0}^{\infty} |g(m)| < \infty. \quad (2.38)$$

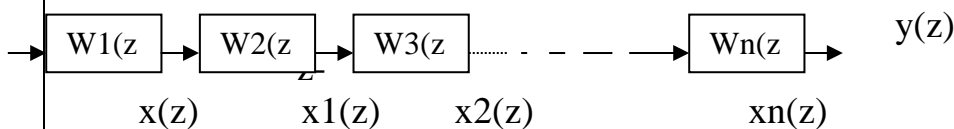
Таким чином, нерекурсивні лінійні дискретні системи з кінцевою імпульсною характеристикою завжди стійкі. Рекурсивні системи з нескінченною імпульсною характеристикою вимагають перевірки на стійкість за формулою (2.38).

## 2.10. Z- передаточна функція складного перетворювача

*Будь-який складний лінійний дискретний перетворювач можна розглядати як систему з'єднаних паралельно, послідовно або зі зворотним зв'язком пристроїв або ланок. z - передаточна функція їх розраховується по-різному.*



### 1. Послідовне з'єднання ланок



z- передаточна функція виходить наступним чином:

$$x_1(z) = W_1(z)x(z),$$

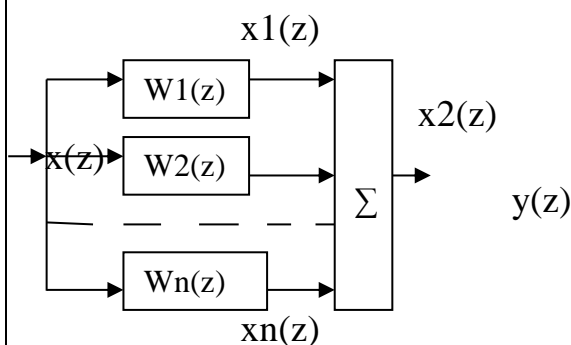
$$x_2(z) = W_2(z)x_1(z) = W_2(z)W_1(z)x(z), \dots,$$

$$y(z) = W_n(z)x_{(n-1)}(z) = W_n(z) * W_{(n-1)}(z) * \dots * W_1(z)x(z), \quad (2.39)$$

$$W(z) = \prod_{i=1}^n W_i(z)$$

### 1. Паралельне з'єднання ланок

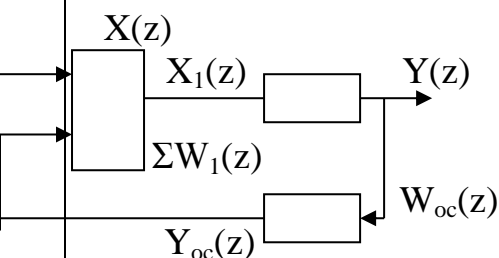
2.



$$y(z) = x(z)W_1(z) + x(z)W_2(z) + x(z)W_3(z) + \dots + x(z)W_n(z),$$

$$W(z) = \sum_{i=1}^n W_i(z). \quad (2.40)$$

### 2. З'єднання ланок зі зворотним зв'язком



$$1) Y_1(z) = Y(z) \pm Y_{oc}(z)$$

$$2) Y_{oc}(z) = W_{oc}(z) * Y(z)$$

$$Y_1(z) = X(z) \pm W_{oc}(z) * Y(z)$$

$$3) Y(z) = W_1(z) * X_1(z) = W_1(z) * X(z) \pm W_1(z) * W_{oc}(z) * Y(z) = W_1(z) * X(z) \pm W_{oc}(z) * Y(z);$$

$$Y(z) = W_1(z) * W_{oc}(z) * Y(z) = W_1(z) * X(z)$$

Звідси отримуємо,

$$W(z) = Y(z)/X(z) = \frac{W_1(z)}{1 \pm W_1(z) * W_{oc}(z)} \quad (2.41)$$

## 2.11 Визначення вихідного сигналу ЛДС з використанням перетворення Фур'є

Визначення вихідного сигналу ЛБП за допомогою перетворення Фур'є складається з 4-х етапів:

- 1) Визначаємо комплексну частотну характеристику (КЧХ) перетворювача  $W(j\omega)$ .
- 2) Визначаємо спектр  $X(j\omega)$  вхідного сигналу  $x(t)$  за допомогою прямого перетворення Фур'є.
- 3) Визначаємо спектр вихідного сигналу  $Y(j\omega) = W(j\omega) * X(j\omega)$ .
- 4) Визначаємо вихідний сигнал  $y(t)$  за його спектром  $Y(j\omega)$  за допомогою зворотного перетворення Фур'є.

## 2.12. Застосування лінійних дискретних систем

*В залежності від співвідношення між коефіцієнтами  $a_n$  і  $b_m$  лінійні ланцюги можуть бути підсилювачами, фільтрами, коректорами і т.п.*

## 2.13. Фільтри з кінцевою імпульсною характеристикою - КІХ- фільтри

*Фільтри з кінцевою імпульсною характеристикою - КІХ- фільтри знайшли широке практичне застосування завдяки простоті і можливості програмної реалізації.*

Логічні поняття “Дискретна система” і “дискретний фільтр” абсолютно ідентичні. Відмінності полягають лише в тому, що для фільтрів різних типів – нижніх частот ФНЧ, верхніх частот ФВЧ і смугових ПФ- смуга пропускання і затримки конкретизується і задається в початкових даних. Обробка сигналів і розрахунок фільтрів здійснюються зазвичай в цифровій формі, коли кожному відліку ставиться у відповідність двійкове кодове слово і, таким чином, дії над дискретними відліками замінюються діями над кодовими словами. Дискретний ланцюг стає цифровим ланцюгом і в загальному випадку цифровим фільтром (ЦФ). Перетворення дискретних відліків в двійкові кодові слова здійснюється АЦП – аналого- цифровим перетворювачем. На виході цифрового фільтра здійснюється зворотна операція (рис.2.6): у цифро-аналоговому перетворювачі кодові слова перетворюються у відліки дискретного сигналу і після синтезуючого фільтра знову стають аналоговим сигналом.

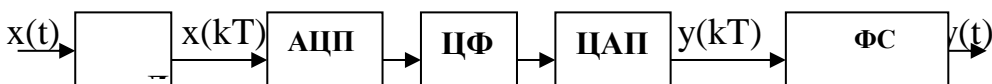


Рис. 2.6. Лінійна дискретна система

- Д – дискретизатор сигналу
- АЦП – аналого-цифровий перетворювач
- ЦФ – цифровий фільтр
- ЦАП – цифро-аналоговий перетворювач

## ФС - фільтр-синтезатор.

Дискретний і цифровий ланцюги описуються однаковими виразами. Помилки пов'язані зазвичай з розмірністю квантування. Проте, збільшуючи розрядність кодових слів, помилки (шуми) квантування можна зменшити до задалегідь заданої величини.

Розрізняють нерекурсивні і рекурсивні цифрові фільтри (ЦФ). Нерекурсивні ЦФ унаслідок великого числа значень імпульсної характеристики мають велике число конструктивних елементів. Але разом з тим володіють рядом переваг: вони завжди стійкі, дозволяють отримати лінійний фазовий зсув, прості в настройці. Тому нерекурсивні цифрові фільтри з кінцевою імпульсною характеристикою – КІХ-фільтри – розглядаються окремо і розраховуються за окремою методикою.

Найважливішою особливістю лінійних дискретних систем є те, що всі вони можуть бути задані композицією наступних трьох елементів (рис.2):

1. Суматора відліків:  $y(kT)=x_1(kT)+x_2(kT)$ ;
2. Помножувача на постійний коефіцієнт  $A$ :  $y(kT)=Ax(kT)$ ;
3. Затримки на такт дискретизації:  $y(kT)=y(kT-T)$ .

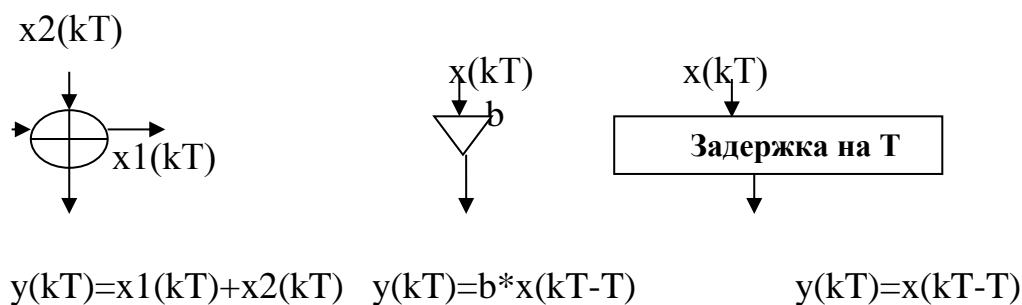


Рис.2.7. Основні структурні елементи ЛДС

### 2.13.1. Рівняння фільтрації

Рівняння фільтрації нерекурсивних фільтрів для нормованого часу  $T=1$  має вигляд:

$$y(k) = \sum_{i=0}^m b_i x(k-i). \quad (2.42)$$

Структурна схема нерекурсивних фільтрів показана на рис.2.8.

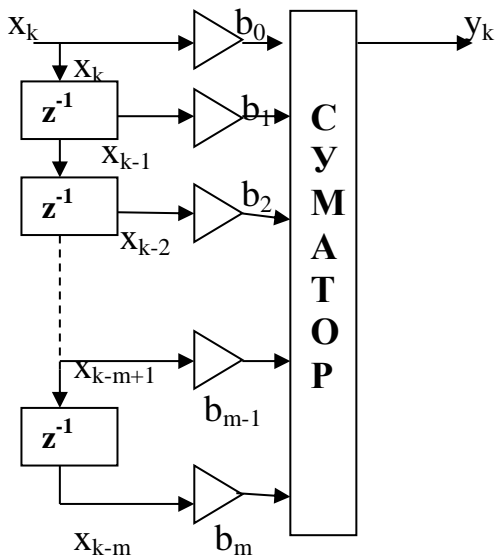


Рис.2.8. Нерекурсивний фільтр

Порядком фільтра називається кількість попередніх відліків сигналу, що використовуються для отримання вихідної реакції.

Імпульсна характеристика фільтра знаходиться, якщо в рівняння (2.40) замість вхідного сигналу  $x(k-i)$  підставити дискретний д-імпульс. Тоді на виході можна отримати значення імпульсної характеристики в точках, де аргумент д-імпульсу дорівнює 0. Результат виходить наступний:

$$g(k) = b_k. \quad (2.42)$$

**Висновок.** Імпульсна характеристика КІХ-фільтра кінцева і дорівнює коефіцієнтам  $b_k$ .

### 2.13.2. КІХ-фільтри з лінійною фазою

Нерекурсивний фільтр дозволяє отримати парну або непарну імпульсну характеристику і, як результат, лінійну ФЧХ при довільній АЧХ, що виходить з теореми про спектр парних і непарних сигналів: *спектр фаз парних і непарних сигналів лінійний*.

КІХ-фільтри з парними імпульсними характеристиками називаються симетричними, а з непарними – асиметричними. Кожен з двох типів КІХ-фільтрів має свої особливості.

### 2.13.3. Симетричні фільтри з лінійною фазою

1. Симетричні КІХ-фільтри з непарним  $N$ . На рис. 2.9 представлена структурна схема фільтра для випадку  $N=5$ .

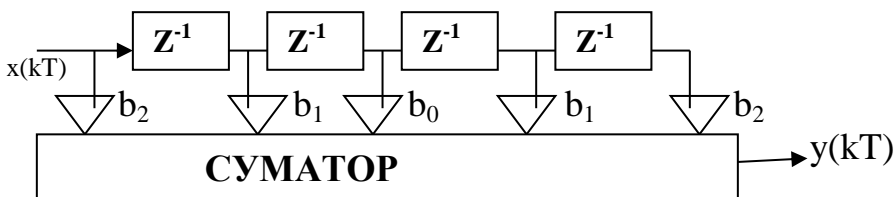


Рис.2.9. Симетричний КІХ-фільтр з  $N=5$

z-передаточна функція лінійного дискретного ланцюга з N=5 має вигляд:

$$W(Z) = a_2 + a_1 Z^{-1} + a_0 Z^{-2} + a_1 Z^{-3} + a_2 Z^{-4} = \quad (2.42)$$

$$= Z^{-2}(a_0 + a_1(Z + Z^{-1}) + a_2(Z^2 + Z^{-2})).$$

Після підстановки  $Z = e^{j\omega T}$  з урахуванням формули Ейлера вираз для передаточної функції приймає вигляд:

$$W(j\omega) = e^{-j2\omega T} (b_0 + 2b_1 \cos \omega T + 2b_2 \cos 2\omega T).$$

Формули АЧХ та ФЧХ:

$$A(\omega) = b_0 + 2b_1 \cos \omega T + 2b_2 \cos 2\omega T, \quad \varphi(\omega) = -2\omega T.$$

Фазочастотна характеристика строго лінійна.

2. Симетричні КІХ-фільтри з парним N. На рис. 5 зображена структурна схема фільтра для випадку N=4.

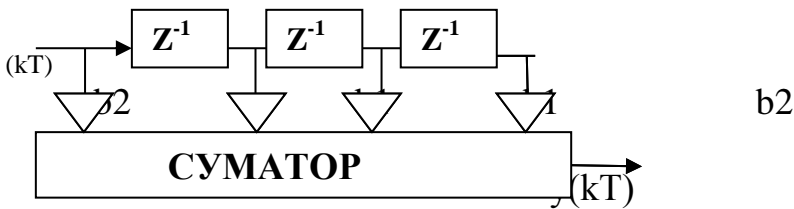


Рис.2.10. Симетричний КИХ-фільтр з N=4

z - передаточна функція лінійного дискретного ланцюга з N=4 має вигляд:

$$W(Z) = b_2 + b_1 Z^{-1} + b_1 Z^{-2} + b_2 Z^{-3} = \quad (2.43)$$

$$= Z^{-1.5} (b_1 (Z^{0.5} + Z^{-0.5}) + b_2 (Z^{1.5} + Z^{-1.5})).$$

Після підстановки  $Z = e^{j\omega T}$  з урахуванням формули Ейлера вираз для передаточної функції приймає вигляд:

$$W(j\omega) = e^{-j1.5\omega T} (2b_1 \cos 0.5\omega T + 2b_2 \cos 1.5\omega T).$$

Формули АЧХ та ФЧХ:

$$A(\omega) = 2b_1 \cos 0.5\omega T + 2b_2 \cos 1.5\omega T, \quad \varphi(\omega) = -1.5\omega T.$$

#### 2.13.4. Асиметричні фільтри з лінійною фазою

На рис. 2.11 представлена структурна схема асиметричного фільтра з лінійною фазою фільтра для випадку N=5.

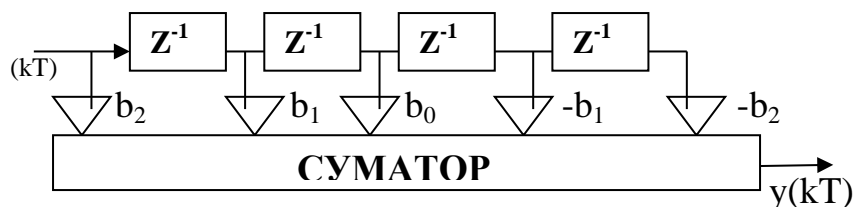


Рис.2.11. Асиметричний КИХ-фільтр с N=5

z-передаточна функція лінійного дискретного ланцюга з N=5 має вигляд:

$$W(Z) = b_2 + b_1 Z^{-1} + 0 Z^{-2} - b_1 Z^{-3} - b_2 Z^{-4} = \quad (2.44)$$

$$= Z^{-2} (b_1 (Z - Z^{-1}) + b_2 (Z^2 - Z^{-2})).$$

Після підстановки  $Z = e^{j\omega T}$  з урахуванням формули Ейлера вираз для передавальної функції приймає вигляд:

$$W(j\omega) = e^{-j2\omega T} j(2b_1 \sin \omega T + 2b_2 \sin 2\omega T).$$

### 2.13.5. Формули АЧХ та ФЧХ

$$A(\omega) = 2b_1 \sin \omega T + 2b_2 \sin 2\omega T, \quad \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - 2\omega T.$$

2. Асиметричні КИХ-фільтри з парним N. На рис. 2.12 представлена структурна схема фільтра для випадку N=4.

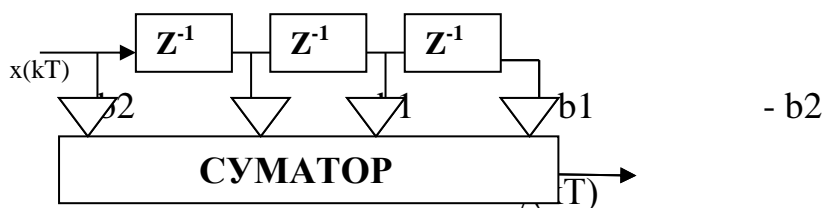


Рис.2.12. Асиметричний КИХ-фільтр з N=4

z-передаточна функція лінійного дискретного ланцюга з N=4 має вигляд:

$$W(Z) = b_2 + b_1 Z^{-1} - b_1 Z^{-2} - b_2 Z^{-3} = \quad (2.45)$$

$$= Z^{-1.5} (b_1 (Z^{0.5} - Z^{-0.5}) + b_2 (Z^{1.5} - Z^{-1.5})).$$

Після підстановки  $Z = e^{j\omega T}$  з урахуванням формули Ейлера вираз для передаточної функції приймає вигляд:

$$W(j\omega) = e^{-j1.5\omega T} j(2b_1 \sin 0.5\omega T + 2b_2 \sin 1.5\omega T).$$

Формули АЧХ та ФЧХ:

$$A(\omega) = 2b_1 \sin 0.5\omega T + 2b_2 \sin 1.5\omega T, \quad \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - 1.5\omega T.$$

### 2.13.6. Шість формул розрахунку КИХ-фільтрів з лінійною фазою

Нижче наведено шість формул розрахунку КІХ-фільтрів з лінійною фазою, отримані на основі розглянутих вище прикладів [3]

1. Симетричні фільтри.

$$а) W(0) \neq 0, \quad \varphi(\omega) = -\frac{N-1}{2} * \omega T \quad (1)$$

б) Якщо N-непарне, то АЧХ- парна функція:

$$W(\omega) = b_0 + 2 * \sum_{k=1}^{0.5N} b_k \cos k\omega T. \quad (2)$$

Застосовується за умови  $W(0.5\omega_d) \neq 0$ .

в) Якщо N-парне, то АЧХ- непарна функція:

$$W(\omega) = 2 * \sum_{k=1}^{0.5N} b_k \cos((k-0.5)\omega T). \quad (3)$$

Застосовується за умови  $W(0.5\omega_d)=0$ .

2. Асиметричні фільтри.

$$а) W(0) = 0, \quad \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2} * \omega T \quad (2.46) \quad W(0) = 0, \quad \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2} * \omega T$$

б) Якщо N-непарне, то АЧХ- непарна функція:

$$W(\omega) = 2 * \sum_{k=1}^{0.5N-1} a_k \sin k\omega T. \quad (2.47)$$

Застосовується за умови  $W(0.5\omega_d)=0$ .

в) Якщо N-парне, то АЧХ- парна функція:

$$W(\omega) = 2 * \sum_{k=1}^{0.5N} b_k \sin((k-0.5)\omega T). \quad (2.48)$$

Застосовується за умови  $W(0.5\omega_d) \neq 0$ .

**Висновки.** 1. КІХ- фільтри з лінійною фазою повинні мати симетричні або асиметричні коефіцієнти  $b_k$ .

2. z-передаточна функція КІХ-фільтра описується виразом:

$$W(z) = \sum_{k=0}^n b_k z^{-k}. \quad (2.49)$$

3. Імпульсна характеристика КІХ- фільтра за значеннями співпадає з його коефіцієнтами  $b_k$ :

$$g(kT) = b_k, \quad k=0,1,..,n. \quad (2.50)$$

**Приклад 2.5.** Сигнал на виході КІХ- фільтра описується різницеvim рівнянням:

**z-передаточна функція такого КІХ- фільтра має вигляд:**

$$W(z) = 1 + 2z^{-1}.$$

**Імпульсна характеристика:**  $g(0) = 1, \quad g(1) = 2, \quad g(3) = g(4) = \dots = 0$ .

**Нехай вхідний сигнал нашого КІХ- фільтра дорівнює:**

$$x(kT) = 1 \text{ для } k = 0, 1 \text{ и } x(kT) = 0, \text{ для } k \geq 2.$$

Вихідний сигнал розраховується наступним чином:

$$y(0) = 1 * 1 + 2 * 0 = 1,$$

$$y(1T) = 1 * x(T) + 2 * x(0) = 1 + 2 = 3,$$

$$y(2T) = 1 * x(2T) + 2 * x(T) = 0 + 2 = 2.$$

### 2.13.7. Однорідні КІХ- фільтри

*КІХ- фільтри, всі коефіцієнти яких  $b_m$  дорівнюють 1, називаються однорідними.*

Повернемося до поняття частоти поточної частоти  $\omega$ , що нормується по відношенню до частоти Котельникова - Найквіста. Тоді  $\omega T = 2\pi w$ ,  $w = \omega T / 2\pi$ . Зважаючи на періодичність частотних характеристик ЛДС нормовану частоту достатньо розглядати в діапазоні  $w = 0.0.5$ . Для однорідного фільтра його характеристики через нормовану частоту знаходяться таким чином.

Передаточна функція однорідного КІХ- фільтра:

$$W(z) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} z^{-k} \quad (2.51)$$

Амплітудно-частотна характеристика однорідного КІХ- фільтра (модуль комплексної частотної характеристики КЧХ):

$$A(w) = |K(w)| = \frac{1}{N} \frac{\sin(N\pi w)}{\sin(\pi w)} \quad (2.52)$$

Фазочастотна характеристика (аргумент комплексної частотної характеристики):

$$\varphi(w) = - N \pi w \quad (2.53)$$

Перейдемо до розгляду особливостей однорідних фільтрів.

Оскільки всі коефіцієнти однорідного КІХ- фільтра дорівнюють 1 і передаточна функція його описується рівнянням (2.48), при числі ланок

$N = 2p$ , операцію множення на коефіцієнт  $1/N$  можна замінити зсувом на  $p$  розрядів вправо, і тоді структурна схема однорідного КІХ- фільтра виглядатиме таким чином, рис.2.13:

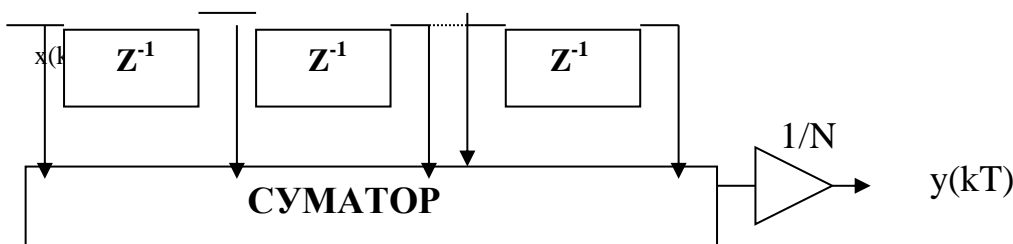


Рис.2.13. Структурна схема однорідного КІХ- фільтра

### 2.13.8. Розрахунок однорідного КІХ - фільтра

*При розрахунку однорідного КІХ- фільтра до нього пред'являються загальні вимоги як і до будь-якого фільтра, щоб ширина смуги пропускання на заданому рівні (наприклад, 0.707) складала величину  $\omega_{\text{пропуск}}$ , а ширина смуги затримки складала величину  $\omega_{\text{затрим}}$ .*



Нехай потрібно синтезувати фільтр нижніх частот ФНЧ. Якби можна було створити ідеальний фільтр, то в смузі пропускання такого фільтра АЧХ дорівнювала одиниці  $A_{ід}=1$ , а в смузі затримки  $A_{ід}=0$ . Іншими словами, для ідеального фільтра нижніх частот АЧХ в смузі пропускання:

$$A_{проп}=1 \text{ при } 0 \leq \omega \leq \omega_{проп}$$

а в смузі затримки :  $\omega_{затрим} \leq \omega \leq 0.5$   $A_{затрим}=0$

у перехідній смузі:  $\omega_{пропуск} \leq \omega \leq \omega_{затрим}$  АЧХ ідеального ФНЧ  $A_{ід}$  не визначена. Ширина пелюстки в смузі пропускання залежить від числа ланок фільтра і послідовно підключених каскадів. Сказане ілюструє рис.2.14.

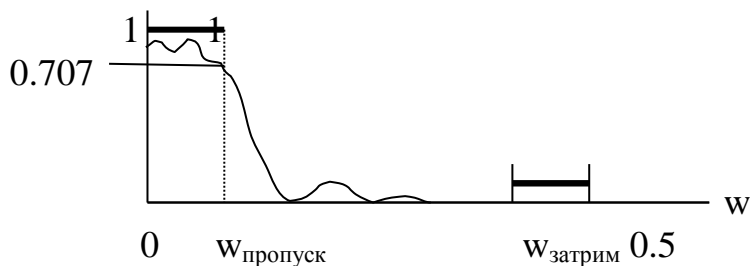


Рис.2.14. Початкові дані до розрахунку ФНЧ

Таким чином, єдиним параметром однорідного фільтра є його порядок  $N$ . При збільшенні  $N$  ширина головної пелюстки зменшується. Оскільки ширина головної пелюстки повинна бути більше смуги пропускання, то з формули (2.52) виходить, що порядок фільтра є величиною, зворотною до ширини головної пелюстки  $N < 1/\omega_{гп}$ . Але при цьому може не виконуватись вимога щодо допустимих відхилень АЧХ в смузі затримки. Виходом з положення, що створилося, може служити послідовне (каскадне) з'єднання  $q$  однакових однорідних фільтрів (рис.2.15), порядок кожного з яких рівний  $N/Q$ . АЧХ такого фільтра визначається формулою:

$$A_q(\omega, N) = \left[ A, \left( \omega, \frac{N}{q} \right) \right]^q. \quad (2.51)$$

Синтезований за таким принципом однорідний фільтр має ширшу головну пелюстку і в той же час значно менший рівень бічних пелюсток, як показано на рис. 2.16.

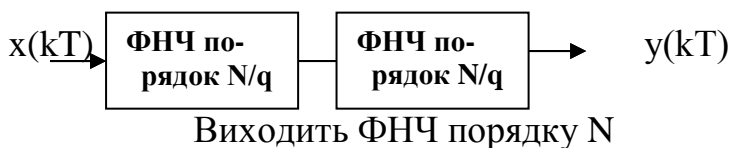


Рис.2.15. Каскадне з'єднання однорідних фільтрів

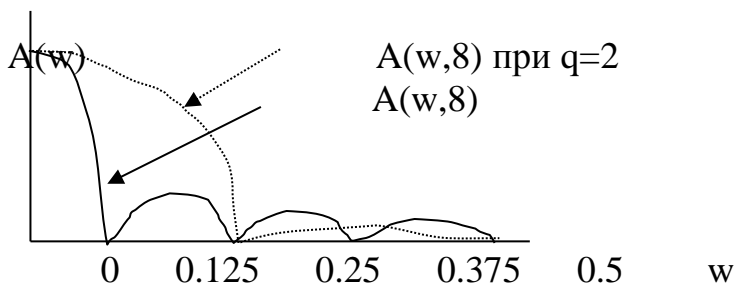
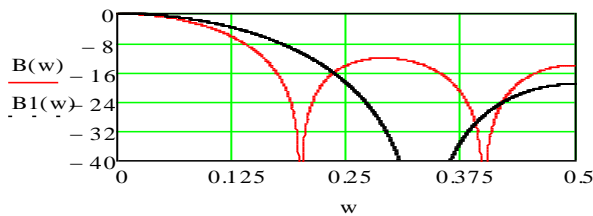


Рис.2.16. Розширення АЧХ каскадних КІХ- фільтрів

Порядок фільтра і число каскадів можна отримати методом підбору, що з використанням сучасних розрахункових комп'ютерних технологій дуже просто

**Пример 2.6.** Потрібно синтезувати однорідний фільтр нижніх частот ФНЧ таким чином, щоб відхилення АЧХ в смузі пропускання і смузі затримки не перевищували наперед заданих величин  $A(w)_{\text{пропуск}} = 0.707$ ,  $A(w)_{\text{затрим}} = -20\text{Дб}$ , а ширина смуги пропускання складала  $w_{\text{пропуск}} = 0..0.1$ , і смуги затримки  $w_{\text{затрим}} = 0.4..0.5$ . У наведеному нижче прикладі число ланок для однокаскадного фільтра розраховується, виходячи з  $A(w)_{\text{пропуск}} = 0.707$

за формулою  $n1 = \sqrt{1 + \frac{0.17806}{2q w_{\text{пропуск}}}} + 0.1$ , де  $q=1$  або 2-число каскадів в смузі пропускання і затримки. Розрахунки виконані в середовищі Mathcad і наведені нижче.



Розрахунок сигналу на виході однорідного фільтра

$$N := 4 \quad k := i + 1 \quad n := 0..k \quad b_n := \frac{1}{N} \quad T := 1$$

$$y(kT) := \sum_{n=0}^k (b_n \cdot x(k \cdot T - n \cdot T)) \quad y(k) := \sum_{n=0}^k \left[ \frac{1}{N} \cdot (j + 1) \right] \quad y(k) = 8.75 \quad y(n) =$$

1.25
2.5
3.75
5
6.25
7.5
8.75

Приклад розрахунку простого КІХ- фільтра.

**Приклад 2.7.** Сигнал на виході КІХ- фільтра описується різницеvim рівнянням:

$$y(kT) = b_0 x(kT) + b_1 x(kT - T),$$

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 2, \quad n = 1.$$

z-передаточна функція такого КІХ- фільтра має вигляд:

$$W(z) = 1 + 2z^{-1}.$$

Значення відліків імпульсної характеристики:  $g(0) = 1, \quad g(1) = 2, \quad g(3) = g(4) = \dots = g(n) = 0.$

Нехай значення відліків вхідного сигналу нашого КІХ- фільтра:

$$x(kT) = 1 \quad \text{для } k = 0 \quad \text{и } k = 1; \quad x(kT) = 0, \quad \text{для } k \geq 2.$$

Вихідний сигнал розраховується таким чином:

$$y(0) = 1 * 1 + 2 * 0 = 1,$$

$$y(1T) = 1 * x(T) + 2 * x(0) = 1 + 2 = 3,$$

$$y(2T) = 1 * x(2T) + 2 * x(T) = 0 + 2 = 2.$$

**Приклад 2.8.** Оптимізація коефіцієнтів КІХ- фільтра методом найменших квадратів.

**Завдання.** За критерієм найменших квадратів (G) оптимізувати коефіцієнти КІХ- фільтра заданого порядку N.

Критерій найменших квадратів G дає можливість відшукати мінімум квадрата різниці між ідеальною і реальною АЧХ з урахуванням вагових призначених для користувача коефіцієнтів  $q_p$  і  $q_z$ .

Початкове співвідношення для критерію мінімізації G(C):

$$G(C) = q_p \int_{wp_0}^{wp_1} (1 - A(w, C))^2 dw + q_z \int_{wz_0}^{wz_1} (0 - A(w, C))^2 dw \Rightarrow \min.$$

У прикладі оптимізуються коефіцієнти однорідного КІХ- фільтра порядку N=5. АЧХ і критерій оптимізації такого фільтра має вигляд:

$$A(w, C) = \sum_{l=0}^2 C_l \cos(2\pi l w) = C_0 \cos(0 * 2\pi w) + C_1 \cos(1 * 2\pi w) + C_2 \cos(2 * 2\pi w),$$

$$G(C) = q_p \int_{wp_0}^{wp_1} \left(1 - \sum_{l=0}^2 \cos(2\pi l w)\right)^2 dw + q_z \int_{wz_0}^{wz_1} \left(0 - \sum_{l=0}^2 \cos(2\pi l w)\right)^2 dw.$$

Знайдемо часткові похідні за коефіцієнтами КІХ-фільтра C для критерія оптимізації. У нашому випадку:

$$\frac{\partial G(C)}{\partial C_0} = 0 \rightarrow \frac{\partial G(C_0, C_1, C_2)}{\partial C_0} = 0 \rightarrow D_{1,0} * C_0 + D_{1,1} * C_1 + D_{1,2} * C_2 = E_0,$$

$$\frac{\partial G(C)}{\partial C_1} = 0 \rightarrow \frac{\partial G(C_0, C_1, C_2)}{\partial C_1} = 0 \rightarrow D_{2,0} * C_0 + D_{2,1} * C_1 + D_{2,2} * C_2 = E_1,$$

$$\frac{\partial G(C)}{\partial C_2} = 0 \rightarrow \frac{\partial G(C_0, C_1, C_2)}{\partial C_2} = 0 \rightarrow D_{3,0} * C_0 + D_{3,1} * C_1 + D_{3,2} * C_2 = E_2.$$

Знайдемо частинну похідну від критерію мінімізації по  $C_0$ :

Аналогічно попередньому знайдемо частинні похідні за коефіцієнтами КІХ- фільтра від АЧХ: 
$$\frac{\partial A(w, C)}{\partial C_0} = \frac{\partial [C_0 * \cos(0 * 2\pi w) + C_1 * \cos(1 * 2\pi w) + C_2 * \cos(2 * 2\pi w)]}{\partial C_0} = \cos(0 * 2\pi w) = 1.$$

Ті ж самі вирази в загальному вигляді:

$$D_{m,i} = q_p \int_{wp_0}^{wp_1} \cos(i2\pi w) * \cos(m2\pi w) dw - q_z \int_{wz_0}^{wz_1} \cos(i2\pi w) * \cos(m2\pi w) dw,$$

$$E_m = q_p \int_{wp_0}^{wp_1} \cos(m\pi w) dw,$$

$$\frac{\partial A(w, C)}{\partial C_i} = \cos(i * 2\pi w),$$

$$m = 1, 2, 3; \quad i = 0, 1, 2.$$

Рішення в векторно-матричному вигляді:

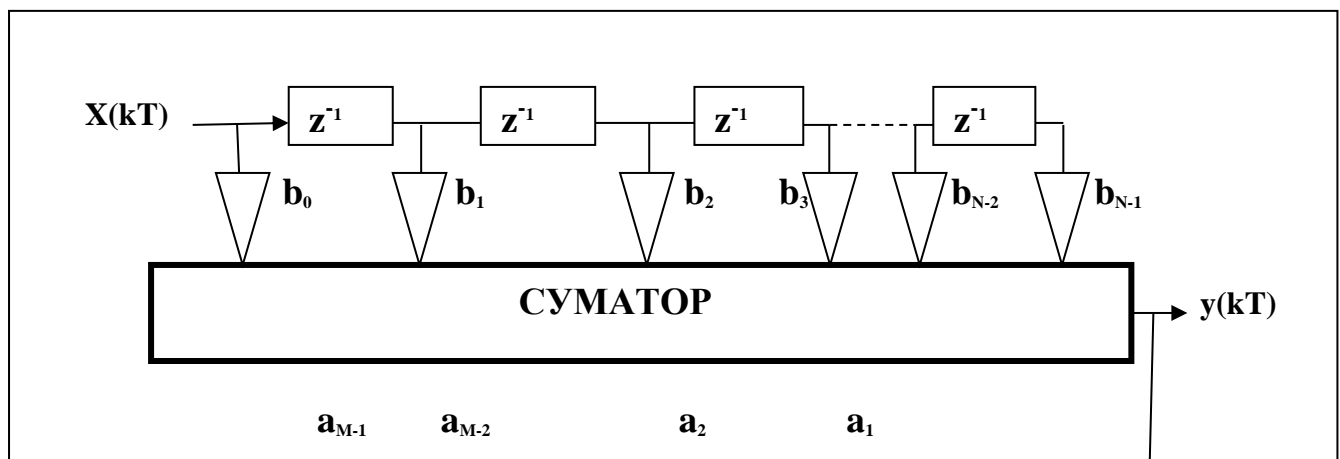
$$C = D^{-1} * E.$$

По аналогії з даним прикладом такі ж результати можна отримати для фільтрів з довільним порядком  $N$ .

### 2.14. Фільтри з нескінченною імпульсною характеристикою - НІХ-фільтри

*НІХ-фільтри- це рекурсивні лінійні дискретні системи із зворотним зв'язком і нескінченною імпульсною характеристикою.*

Для рекурсивних фільтрів з нескінченною імпульсною характеристикою – НІХ-фільтрів – рівняння фільтрації містить як входні, так і вихідні відліки сигналу збудження, а в схемі присутні елементи зворотного зв'язку (рис.1). Такі системи і фільтри називаються рекурсивними.



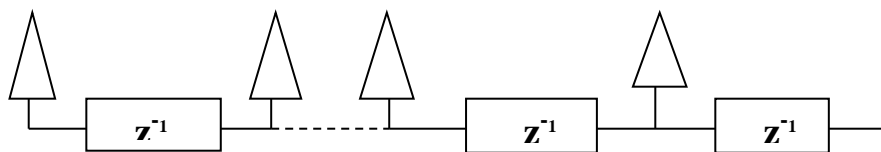


Рис.2.17. Пряма реалізація НІХ-фільтра

НІХ-фільтр описується різницевою рівнянням в рекурсивній формі:

$$y(kT) = \sum_{n=0}^{N-1} b_n x(kT - nT) - \sum_{m=1}^{M-1} a_m y(kT - mT). \quad (2.52)$$

z-передаточна функція НІХ-фільтрів описується стандартним виразом:

$$W(z) = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} b_n z^{-n}}{1 + \sum_{m=1}^{M-1} a_m z^{-m}}. \quad (2.53)$$

Оскільки НІХ-фільтри реалізуються або у вигляді мікросхем, або програмним шляхом на спеціальних процесорах, передаточна функція може відображатись по-різному.

Розділимо загальний суматор на два окремі блоки: для рекурсивної і нерекурсивної частини фільтра. В результаті виходять два послідовно сполучених КІХ-фільтра, один з яких містить нерекурсивну, а інший рекурсивну частину схеми. Оскільки результат послідовного проходження сигналу через ряд лінійних стаціонарних пристроїв не залежить від послідовності їх з'єднання, можна поміняти місцями обидві частини нашого фільтра. Важливо прослідкувати, щоб в обидві лінії затримки подавався один і той же сигнал, виражений через одні і ті ж відліки. Тому лінії затримки можна об'єднати. В результаті виходить різновид схеми НІХ-фільтра, яка називається канонічною. Теоретично обидві форми еквівалентні. Але практично відмінності між цими формами істотні. У канонічному фільтрі використовується одна лінія затримки, а це зменшує загальне число елементів пам'яті. Але при цьому амплітуди окремих відліків можуть значно перевершувати амплітуду вхідного і вихідного сигналів. Це приводить до необхідності збільшувати розрядність відображення чисел в лінії затримки в порівнянні з розрядністю вхідного і вихідного сигналів. Для прямої форми реалізації НІХ-фільтрів в лініях затримки зберігаються безпосередні відліки вхідного і вихідного сигналів і підвищена розрядність лінії затримки не потрібна. Єдиним елементом, що вимагає підвищеної розрядності в даному випадку, є суматор і цей факт враховується в архітектурі мікропроцесорів, спеціально призначених для обробки сигналів в реальному часі. Ці міркування відбиваються на структурній схемі. Віобразимо НІХ-фільтр, як ЛДС, що складається з двох послідовних ланок (рис.2):

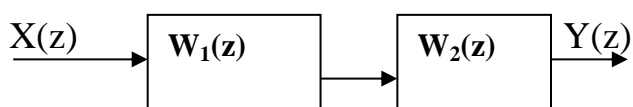


Рис.2.18. Відображення НІХ-фільтра каскадним з'єднанням двох КІХ-фільтрів

В цьому випадку справедлива наступна рівність:

$$W(z) = \frac{V(z)}{U(z)} = W(z)_1 W(z)_2, \text{ ГДЕ}$$

$$W(z)_1 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{N-1} a_n z^{-n}} = \frac{Y(z)}{X(z)}, \quad (2.54)$$

$$W(z)_2 = \sum_{m=0}^{M-1} b_m z^{-m} = \frac{X(z)}{Y(z)}.$$

Перша ланка описується різницевою рівнянням:

$$y(kT) = x(kT) - \sum_{n=1}^{N-1} a_n y(kT - nT), \quad (2.55)$$

Друга ланка описується різницевою рівнянням:

$$y(kT) = \sum_{m=1}^{M-1} b_m y(kT - mT). \quad (2.56)$$

За такої форми запису в НІХ-фільтрі затримується тільки проміжний сигнал  $y(kT)$  і структурну схему можна подати таким чином (рис.2.19):

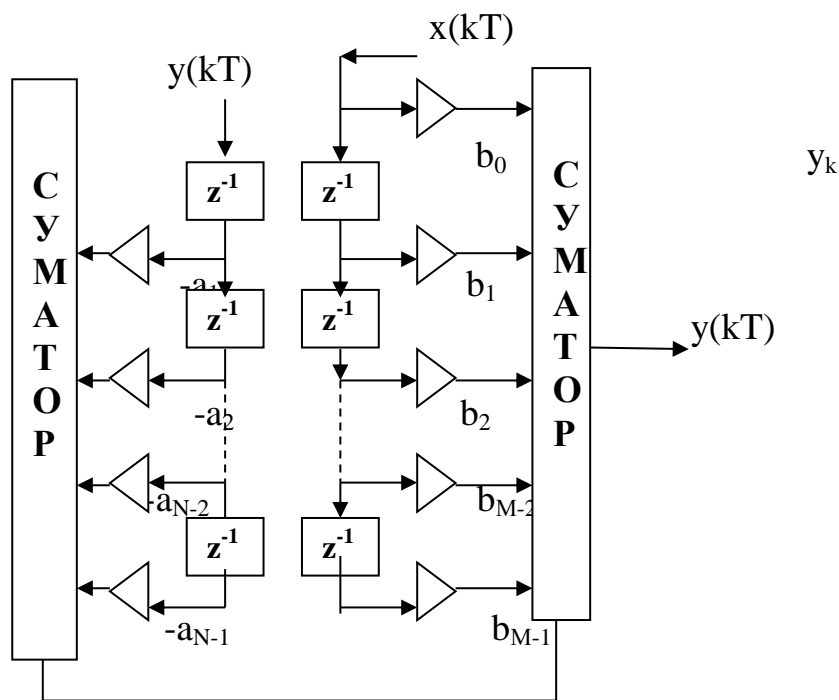
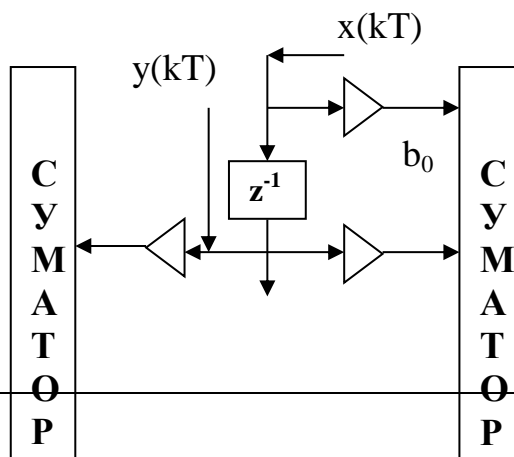


Рис.2.19. Перехід до канонічної форми НІХ-фільтра



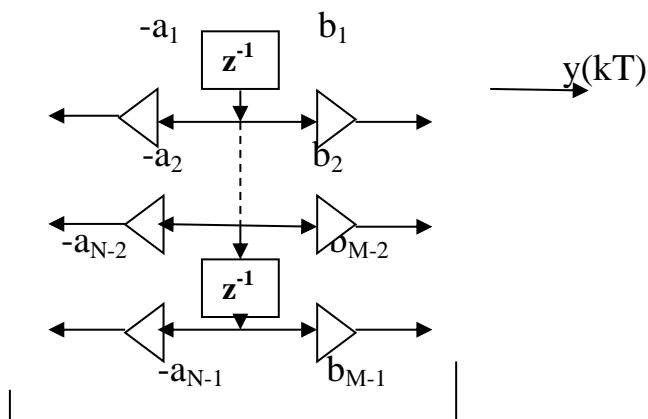


Рис. 2.20. Канонічна реалізація НІХ-фільтра

У структурних елементах НІХ-фільтра рис.2.20 затримується тільки проміжний сигнал  $y(kT)$ . Ця схема є однією з форм канонічного відображення НІХ-фільтрів.

**Приклад 2.9.** Є рекурсивний НІХ-фільтр, що описується рівнянням:

$$y(kT) = x(kT) + ay(kT), \quad N = 1, \quad M = 2, \quad b_0 = 1, \quad a_1 = -a.$$

Структурна схема фільтра представлена на рис.5.

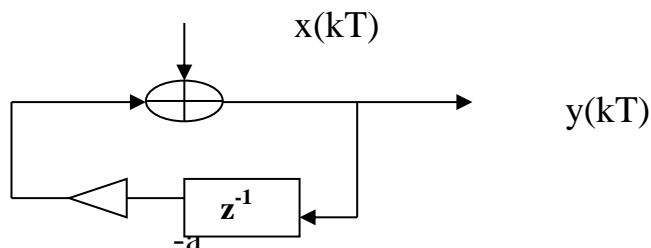


Рис.2.21. Приклад простого НІХ-фільтра

$z$ -передаточна функція фільтра має вигляд:

$$W(z) = \frac{1}{1 - a z^{-1}}.$$

Імпульсна характеристика НІХ-фільтра нашого прикладу виходить під час подачі на вхід дискретного  $\delta$ -імпульсу:

$$x(kT) = \delta(kT) = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}.$$

$$g(kT) = \delta(kT) + ag(kT - T),$$

$$k = 0 \quad g(0) = 1,$$

$$k = 1 \quad g(T) = ag(0) = a,$$

$$k = 2 \quad g(2T) = ag(T) = aa = a^2,$$

$$k = 3 \quad g(3T) = ag(2T) = a a^2 = a^3,$$

.....

$$k = n \quad g(nT) = a^n.$$

З прикладу видно, що у міру того, як вихідна лінія затримки заповнюється відліками імпульсної характеристики, складність аналітичних формул швидко зростає. Наявність в схемі зворотних зв'язків приводить до отримання нескінченної імпульсної характеристики. Із-за зворотних зв'язків робота НІХ-фільтрів може бути нестійкою.

### 2.14.1. Біквдратний блок

*Основним структурним елементом НІХ-фільтрів є біквдратний блок.*

Як правило, реалізація цифрових фільтрів в прямій або канонічній формі через помилки обчислень, обумовлені кінцевою розрядністю коди, недоцільна. Завжди прагнуть реалізувати фільтри з використанням простих ланок другого порядку - біквдратних блоків.

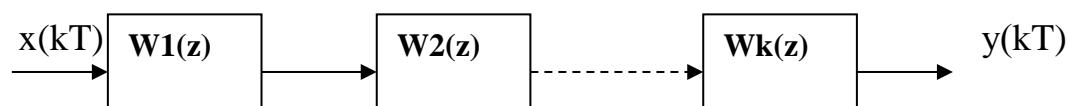
Біквдратний блок є універсальним структурним елементом НІХ-фільтрів, послідовне (каскадне) з'єднання яких дозволяє отримати фільтр будь-якого ступеня складності. Біквдратний блок описується рівнянням:

$$y(kT) = -a_1 y(kT - T) - a_2 y(kT - 2T) + b_0 x(kT) + b_1 x(kT - T) + b_2 x(kT - 2T), \quad (2.57)$$

z-передаточна функція біквдратного блоку:

$$W(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (2.58)$$

Каскадна схема підключення біквдратних блоків представлена на рис. 6:



Мал. 2.22. Каскадна форма реалізації НІХ-фільтра

В цьому випадку передаточна функція фільтра:

$$W(z) = \prod_{k=0}^{L-1} W(z)_k.$$



Структурна схема біквдратного блоку представлена на рис.7.

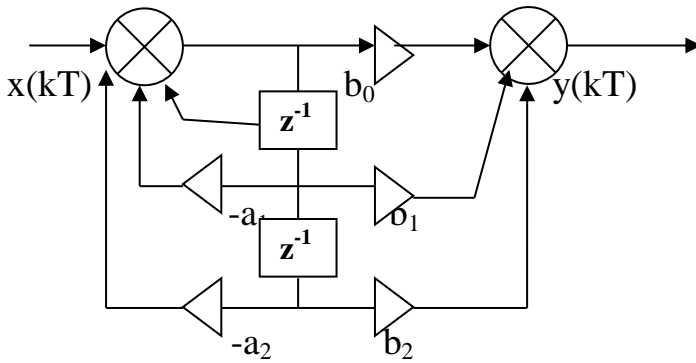


Рис.2.23. Структурна схема біквдратного блоку

Біквдратний блок є результатом білінійного z-перетворення аналогового блоку. Для цього з формули виділяють оператор Лапласа  $p$ , а десятковий логарифм розкладають в ряд Тейлора:

$$z = e^{pT}, \quad p = \frac{1}{T} \ln z,$$

$$\ln z = 2 \left[ \frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3} \left[ \frac{z-1}{z+1} \right]^3 + \frac{1}{2n+1} \left[ \frac{z-1}{z+1} \right]^{2n+1} + \dots \right].$$

У вказаному розкладанні залишають перший член ряду і шляхом множення чисельника і знаменника на  $z^{-1}$  переходять до негативних ступенів змінної  $z$ :

$$p = \frac{2}{T} * \frac{z-1}{z+1}, \quad \text{при умноженні на } z^{-1} \quad p = \frac{2}{T} * \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}.$$

Вводиться позначення:  $\gamma=2/T$ , тоді:

$$p = \gamma * \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}.$$

Звідки змінна  $z$  як функція оператора Лапласа має вигляд

$$z = \frac{\gamma + p}{\gamma - p}.$$

Передаточна функція цифрового фільтра  $W(z)$  можна отримати з передаточної функції аналогового фільтра  $W(p)$  заміною:

$$p = \gamma * \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}. \quad (2.59)$$

### 2.14.2. Частотна характеристика НІХ-фільтра

Підставляючи в z-передаточну функцію повертаючий множник  $z = e^{j\omega T}$ , отримуємо АЧХ та ФЧХ НІХ-фільтра звичайним способом:

$$W(e^{j\omega T}) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)},$$

$$A(\omega) = |W(e^{j\omega T})|, \quad \varphi(\omega) = \arg(W(e^{j\omega T})) = \arctg \frac{\text{Im}(\omega)}{\text{Re}(\omega)}.$$

Кругова частота вибирається нормованою:  $w = \frac{\omega}{2\pi/T} = \frac{\omega T}{2\pi}$ .

В цьому випадку АЧХ НІХ- фільтрів має вигляд:

$$A(w) = \sqrt{\frac{\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} b_m b_n \cos((m-n) * 2\pi w)}{\sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} a_k a_l \cos((k-l) * 2\pi w)}}.$$

Для наведеного вище прикладу:  $A(w) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2a \cos(2\pi w) + a^2}}$ .

НІХ-фільтри мають нелінійну ФЧХ.

### 2.14.3. Аналогові фільтри-прототипи

Як і аналогові, цифрові фільтри підрозділяються на фільтри нижніх, верхніх частот і смугові фільтри. Розроблено різні способи синтезу дискретних фільтрів. Великого поширення набув спосіб розрахунку дискретних фільтрів на основі перетворення комплексної частотної характеристики аналогового фільтра-прототипу [19].

Фільтром-прототипом називається ідеалізований аналоговий фільтр нижніх частот з частотою зрізу 1 рад.-сек, який допускає перетворення, необхідні для розрахунку дискретних фільтрів нижніх частот (ФНЧ), верхніх частот (ФВЧ) та смугових фільтрів (СФ).

При проектуванні фільтрів задаються двома основними параметрами, які в літературі позначаються по-різному: нерівномірністю АЧХ в смузі пропускання  $R=20\log(\delta A(\omega))\text{дБ}$  і загасанням в смузі затримання  $L=20\log(\xi A(\omega))\text{дБ}$ .

**Фільтр Баттерворта.** Функція передачі фільтра Баттерворта:  $K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 - (\omega/\omega_{\text{ср}})^{2n}}}$ ,

тут  $n$  – порядок фільтра,  $\omega(0)$ - частота зрізу на рівні  $1/\sqrt{2}=0.707=-3\text{дБ}$ . Полюси фільтра, число яких дорівнює порядку фільтра, розташовуються в лівій частині комплексної області. Порядок  $n$  фільтра Баттерворта при заданих значеннях  $R$  і  $L$  визначаються за формулою:

$$n \geq \frac{\log \sqrt{(10^{0.1L} - 1)/(10^{0.1R} - 1)}}{\log(\omega/\omega_1)}, \quad \omega_1 - \text{частота}_- \text{зрізу}.$$

Передаюча функція нормованого фільтра Баттерворта нижніх частот:

$$H(p) = 1/N(p) = 1/\prod_{k=1}^n (p - p_k).$$

$N(p)$  - поліном Баттерворта  $n$ -ого порядку,  $p_k$ -полюси фільтра:

$$p_k = \cos \pi \frac{n-1+2k}{2n} + j \sin \pi \frac{n-1+2k}{2n}.$$

Поліноми  $N(p)$  нормованих фільтрів Баттерворта затабульовані.

**Фільтр Чебишева 1-го роду.** Функція передачі фільтра

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 T_n^2(\omega/\omega_{cp})}}, \quad T_n(\omega) = \frac{\cos(n \arccos(\omega))}{2^{n-1}}.$$

тут  $T(\omega)$ - поліном Чебишева  $n$ -ого порядку, де  $n$ -порядок фільтра. Поліном Чебишева коливається в смузі  $[-1,1]$ , внаслідок чого АЧХ фільтра Чебишева 1-го роду в смузі пропускання пульсує в інтервалі  $[1, \sqrt{1 + \varepsilon^2}]$ , де  $\varepsilon$  - величина пульсацій. Порядок фільтра Чебишева визначається формулою:

$$n \geq \frac{\text{Arch}\sqrt{(10^{0.1L} - 1)/(10^{0.1R} - 1)}}{\text{Arch}(\omega/\omega_1)}, \quad \omega_1 - \text{частота зрізу}.$$

У фільтрах Чебишева 1-го і 2-го роду простежується взаємозв'язок між тригонометричними і еліптичними функціями.

В порівнянні з фільтром Баттерворта того ж порядку фільтр Чебишева забезпечує крутіший спад АЧХ в перехідній області від смуги пропускання до смуги затримання.

**Фільтр Чебишева 2-го роду.** Функція передачі фільтра

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2}{T_n^2(\omega_0/\omega)}}}.$$

АЧХ фільтра Чебишева 2-го роду монотонно згасає в смузі пропускання, а в смузі затримання коливається в інтервалі між нулем і величиною  $1/\sqrt{1 + \varepsilon^2}$ . Коефіцієнт передачі на нульовій частоті дорівнює 1, а в смузі затримання – заданому рівню пульсацій напруги.

**Еліптичний фільтр Кауера.** Функція передачі фільтра

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 R_n^2(\omega_0/\omega), L}}. \text{ Тут: } R_n -$$

функція Чебишева  $n$ -ого порядку. Фільтр Кауера об'єднує в собі достоїнства фільтрів Чебишева 1-го і 2-го роду: має пульсації заданої величини як в смузі пропускання, так і в смузі затримання і максимальну крутизну переходу між вказаними областями.

**Фільтр Бесселя.** Фільтр Бесселя не апроксимує прямокутну АЧХ, а швидше функцію, близьку до експоненти. Для фільтра Бесселя груповий час в смузі пропускання залишається постійним. Функція передачі фільтра описується виразом:

$$H(s) = \frac{d_0}{\sum_{k=0}^n d_k s^k}, \quad \text{де } d_k = \frac{(2n-k)!}{2^{n-1} k!(n-k)!} - \text{коефіцієнти поліному}.$$

Зміна частоти зрізу ФНЧ фільтра-прототипу для перетворення його у ФВЧ проводиться за формулою  $s > s/\omega$ , де  $\omega$ -частота зрізу ФНЧ.

#### 2.14.4. Розрахунок НІХ-фільтрів

НІХ-фільтри розраховуються на основі аналогових фільтрів-прототипів нижніх частот з частотою зрізу  $\Omega=1$ . В якості фільтрів-прототипів можуть використовуватися фільтри Баттерворта, Чебишева, еліптичні та ін.

Початковими даними до розрахунку НІХ-фільтрів є:

- Смуга пропускання (СП)  $0 \leq \Omega \leq 1$ .
- Смуга затримання (СЗ).
- Нерівномірність АЧХ в СП в дБ.
- Мінімальне загасання в СЗ в дБ.

Для аналогових фільтрів парного порядку  $n$ , зокрема, для фільтрів Баттерворта передавальна функція має вигляд:

$$W(s) = \frac{1}{c \prod_{i=1}^{n/2} [s^2 - 2a_i s + a_i^2 + b_i^2]}$$

тут  $c, a_i, b_i$  – коефіцієнти фільтра-прототипу.

Перехід від фільтра-прототипу до цифрового фільтра виконується за допомогою заміни:

$$s = \gamma \frac{1 - k z^{-1}}{1 + k z^{-1}}, \quad \gamma = \frac{\operatorname{ctg}(\pi W_{zn})_{\text{для ФНЧ}} \rightarrow \text{ФНЧ}}{\operatorname{tg}(\pi W_{zn})_{\text{для ФНЧ}} \rightarrow \text{ФВЧ}},$$
$$k = \frac{+1_{\text{для ФНЧ}} \rightarrow \text{ФНЧ}}{-1_{\text{для ФНЧ}} \rightarrow \text{ФВЧ}},$$

$W_{zn}$  – межа смуги пропускання.

**Приклад 2.10.** Отримати ФНЧ НІХ-фільтр з аналогового ФНЧ с передаточною функцією:

$$W(p)_n = \frac{1}{p + 0.4}, \quad \gamma = 2.5,$$

$$p = 2.5 \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}},$$

$$W(z) = \frac{1}{2.5 \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} + 0.4} = \frac{1 + z^{-1}}{2.5(1 - z^{-1}) + 0.4(1 + z^{-1})} = \frac{1 + z^{-1}}{2.9 - 2.1 z^{-1}}.$$

#### 2.15. Метод лінійного передбачення

*Теорія цифрових рекурсивних цифрових фільтрів знайшла велике застосування в пристроях стиснення і розпаковування даних, зокрема системах мобільного зв'язку при кодуванні мови на основі методу лінійного передбачення. Метод лінійного передбачення використовується також при розрахунку цифрових коректорів.*

Суть кодування цифрових даних на основі методу лінійного передбачення полягає в наступному. По каналу зв'язку передаються не параметри мовного сигналу, а

коефіцієнти деякого НІХ-фільтра, що повторюють особливості мовного апарату абонента, і параметри сигналу збудження. Такий фільтр носить назва фільтра лінійного передбачення. На передавальному кінці проводиться формування сигналів збудження і коефіцієнтів фільтра. На приймальному кінці сигнал збудження пропускається через фільтр з відомими коефіцієнтами, внаслідок чого відновлюється мовний сигнал. В цьому випадку черговий відлік мовного сигналу  $y(nT)$  з деякою мірою точності передбачається лінійною комбінацією  $K-1$  попередніх його відліків:

$$y(nT) = \sum_{k=1}^K a_k y(nT - kT). \text{ Тут } a_k - \text{ коефіцієнти фільтра лінійного передбачення, а } K -$$

порядок передбачення. Різниця між дійсним і передбаченим значенням відліку  $y(nT)$  дає помилку передбачення:  $e_{\text{передск}} = \tilde{y}(nT) - \sum_{k=1}^K a_k y(nT - kT)$ , де  $\tilde{y}(nT)$  - істинне значення  $k$ -ої вибірки мовного сигналу. Виконавши  $z$ -перетворення для помилки передбачення, отримаємо різницю:

$$e_{\text{передск}}(z) = \tilde{y}_k(z) - \sum_{k=1}^K a_k z^{-k}. \quad (2.60)$$

Вираз інтерпретується як передаточна функція інверсного фільтра-аналізатора (трансверсального фільтра), характеристика якого зворотна характеристиці мовного сигналу. При подачі на вхід цього інверсного фільтра мовного сигналу на виході виходить сигнал збудження, подібний до сигналу збудження на вході фільтра голосового тракту. Помилка визначається кінцевим порядком фільтра і відхиленням дійсної величини вибірки від її оцінки. Значення коефіцієнтів трансверсального фільтра передбачення вибираються постійними на інтервалі деякого наперед вибраного тимчасового інтервалу (для мовного сигналу він зазвичай дорівнює 20мс). Після вибору порядку фільтра  $K$  методом найменших квадратів мінімізується помилка передбачення  $e_{\text{передск}}$ . Для цього знаходяться частинні похідні від помилки передбачення за коефіцієнтами, тобто, які прирівнюються нулю і вирішується система лінійних рівнянь (СЛАУ) алгебри, щоб мінімізувати величину помилки. Отримані коефіцієнти і посилаються на приймальний кінець. Аналізуючий трансверсальний фільтр передбачення порядку  $K=3$  показано на рис. 2.23.

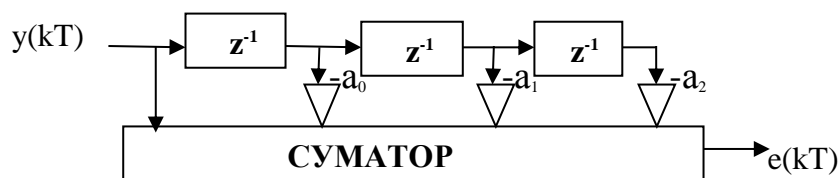


Рис.2.23. Аналізуючий трансверсальний блок порядку  $K=3$

З приведених міркувань виходить, що [Гук] алгоритм лінійного передбачення дозволяє за деякою лінійною комбінацією  $K-1$  попередніх зважених відліків недетермінованого сигналу з деякою точністю передбачити майбутнє значення відліку. Алгоритм знайшов широке застосування в мобільному зв'язку і інших цифрових системах для стиснення і розпаковування даних. Практична важливість

лінійного передбачення полягає в оцінці спектра досліджуваного сигналу на відрізку завдовжки  $K$  відліків. З погляду фільтрації алгоритм полягає в отриманні коефіцієнтів НІХ-фільтра на відрізку дискретизації  $KT$ , де  $T$ -період дискретизації. Передбачається, що на цьому відрізку коефіцієнти фільтра постійні. В результаті рішення задачі лінійного передбачення знаходяться коефіцієнти НІХ-фільтра на відрізку  $KT$ , амплітудно-частотна характеристика якого приблизно співпадає з формою спектра сигналу на цьому відрізку. Задача лінійного передбачення формулюється таким чином:

Сигнал  $y(kT)$  на ділянці  $KT$  описується виразом

$$y(kT) = b_0 x(kT) - \sum_{k=1}^K a_k y(nT - kT)$$

Передаточна функція вихідного сигналу:

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + \sum_{k=1}^K a_k z^{-k}} \quad (2.61)$$

З цієї передаточної функції можна отримати рекурсивний фільтр лінійного передбачення з коефіцієнтами  $a_k$ . Для цього послідовно з шуканою системою включається КІХ-фільтр з передаточною функцією  $B(z)$ , що описується формулою

$$B(z) = \frac{b_0}{1 + \sum_{k=1}^K \tilde{a}_k z^{-k}} * \left[ 1 + \sum_{k=1}^K a_k z^{-k} \right] = b_0 = const - \quad (2.62)$$

Як було сказано вище, КІХ-фільтр з передаточною функцією  $1 + \sum_{k=1}^K a_k z^{-k}$  називається фільтром лінійного передбачення або фільтром - передбачувачем, а його коефіцієнти - коефіцієнтами лінійного передбачення. Ці коефіцієнти відрізнятимуться від точних значень на величину помилки передбачення:

$$e_{\text{передск}}(nT) = \tilde{y}(KT) - \sum_{k=1}^K a_k y(nT - kT).$$

Структурна схема отримання помилки передбачення показана на рис. 2.678.

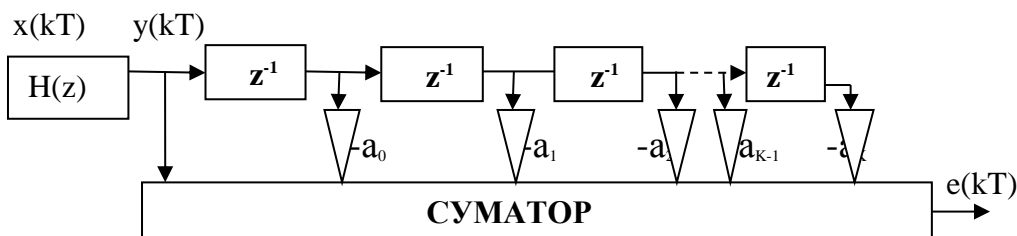


Рис.2.23. Аналізуючий трансверсальний блок порядку  $K=3$

Алгоритмів оптимізації помилки передбачення (відхилів) можна назвати декілька, з яких розробник пристрою вибирає найбільш відповідний.

## 2.16. Цифрова корекція каналів

Окрім зовнішніх завад велику проблему при обміні дискретною інформацією складають взаємні спотворення сигналів, які є результатом нескінченності спектра прямокутних імпульсів. Для корекції їх використовуються різні коди (наприклад, RLL2,7), а також гармонійні і цифрові коректори.

У випадку, коли передача здійснюється прямокутними імпульсами, необхідно враховувати, що його частотна характеристика нескінченна. Спрощена схема системи передачі дискретного зв'язку показана на рис. 2.24. Фільтр нижніх частот (ФНЧ) на передаточному кінці системи залишає головну пелюстку амплітудно-частотної характеристики (АЧХ), прибираючи всі бічні. Тому на виході ФНЧ форма прямокутного імпульсу змінюється, він розширюється і в сусідні відлікові моменти часу вже не дорівнює нулю. Це явище носить назву міжсимвольної інтерференції сигналу. При проходженні через лінію зв'язку з нерівномірною АЧХ і нелінійною фазочастотною характеристикою (ФЧХ) форма імпульсів додатково спотворюється і міжсимвольна інтерференція збільшується. Завдання цифрового коректора, який як буде показано, є КІХ-фільтром, - по можливості, позбавитися від цього явища.

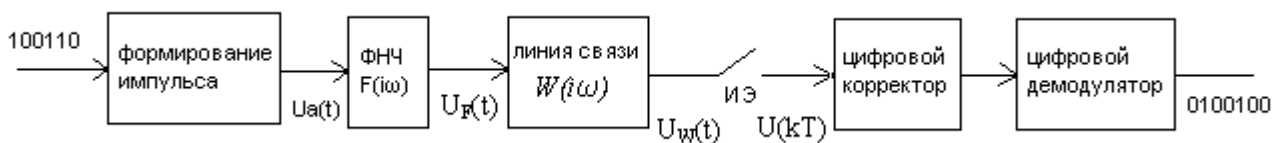


Рис. 2.24. Спрощена схема системи передачі дискретного зв'язку

Розрахунок цифрового коректора проводиться в часовій області на основі відліків імпульсної характеристики каналу таким чином. Подамо на вхід системи передачі сигнал у вигляді одиниці, оточеної нулями ".00100."-аналог дискретного д(кТ) - імпульсу. Тоді вхідний сигнал коректора складатимуть відліки імпульсній характеристиці системи "ФНЧ + лінія зв'язку" g(кТ) в дискретні моменти, відповідні інтервалу Котельникова (рис. 2.25). Методику розрахунку коефіцієнтів цифрового коректора краще всього показати на конкретному прикладі. Використаємо в якості коректора КІХ фільтр порядку  $n = 3$ .

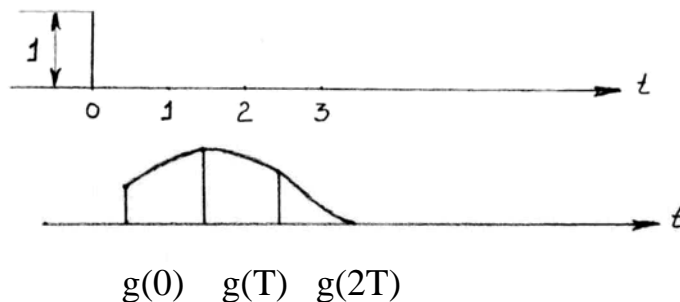


Рис. 2.25. Сигнали на вході коректора

Позначимо відліки імпульсної характеристики як  $g_0=g(0)$ ,  $g_1=g(T)$ ,  $g_2=g(2T)$ .

Відобразимо динаміку проходження сигналу через коректор за тактами тактового генератора у вигляді зсуву інформації в трьохкомірковому зсувному регістрі (рис. 2.26).

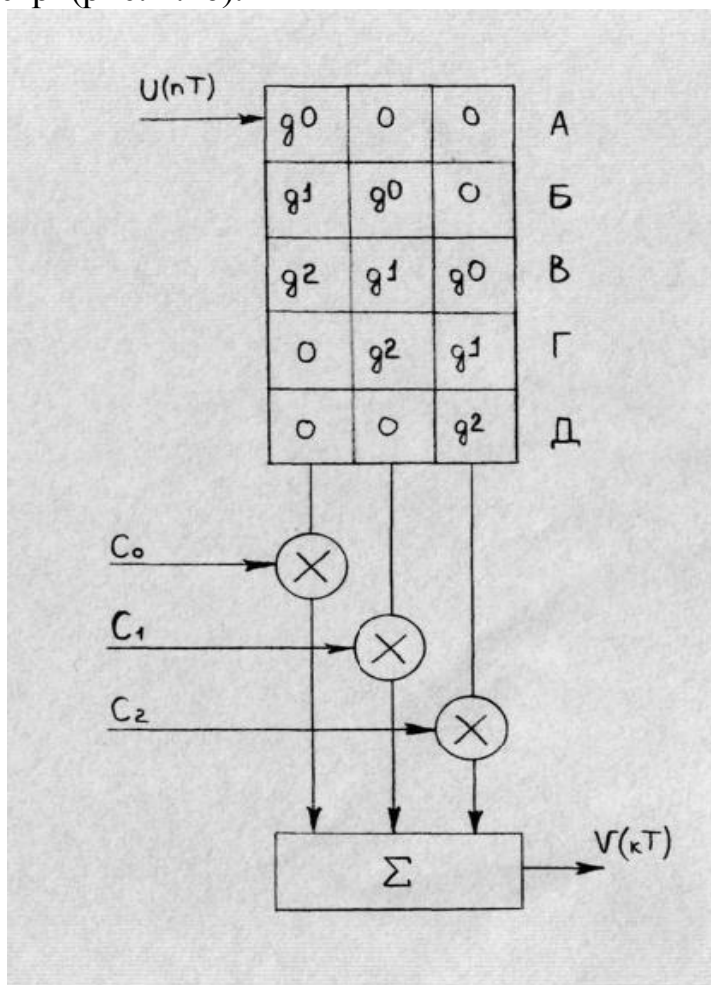


Рис. 2.26. Потактове проходження відліків  $g(kT)$  через зсувний регістр

У відлікові моменти часу сигнал на виході цифрового коректора описується наступною системою лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР):

$$\begin{aligned}
 V_A &= C_0 \cdot g_0 + 0 + 0 \\
 V_B &= C_0 \cdot g_1 + C_1 \cdot g_0 + 0 \\
 V_B &= C_0 \cdot g_2 + C_1 \cdot g_0 + C_2 \cdot g_0 \quad (2.63) \\
 V_\Gamma &= 0 + C_1 \cdot g_2 + C_2 \cdot g_1 \\
 V_D &= 0 + 0 + C_3 \cdot g_2
 \end{aligned}$$

$C_0, C_1, C_2$  – невідомі коефіцієнти коректора.

$g_0, g_1, g_2$  – відомі значення вхідного сигналу.

$V_A, V_B, V_B, V_\Gamma, V_D$  – бажаний сигнал на виході цифрового коректора.

Потрібно, вирішуючи систему лінійних рівнянь алгебри, знайти коефіцієнти коректора  $C_0, C_1, C_2$ , які забезпечували б необхідні значення вихідного сигналу.

1. Перший спосіб вирішення задачі заснований на визначенні невідомих системи лінійних алгебраїчних рівнянь СЛАР (2.63).



Система рівнянь (2.63) несумісна, оскільки число  $V_i$  більше числа невідомих  $C_k$ . Відкинемо  $V_A$  і  $V_D$ , залишивши  $V_B$ ,  $V_V$  і  $V_G$ . СЛАР прийме вигляд:

$$\left. \begin{aligned} V_B &= C_0 \cdot g_1 + C_1 \cdot g_0 + 0 \\ V_V &= C_0 \cdot g_2 + C_1 \cdot g_1 + C_2 \cdot g_0 \\ V_G &= 0 + C_1 \cdot g_2 + C_2 \cdot g_1 \end{aligned} \right\} \begin{matrix} \begin{pmatrix} g_1 & g_0 & 0 \\ g_2 & g_1 & g_0 \\ 0 & g_2 & g_1 \end{pmatrix} \\ G \end{matrix} \cdot \begin{matrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \\ C \end{matrix} \quad (2.64)$$

Відобразимо бажаний вихідний сигнал як вектор  $H = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Запишемо СЛАР у векторно-матричній формі

$$G \cdot C = H \rightarrow \underline{G^{-1}} \cdot G \cdot C = G^{-1} \cdot H$$

одинична матриця

Шуканий вектор коефіцієнтів коректора визначається формулою (2.65):

$$C = G^{-1} \cdot H \quad (2.65)$$

2. Другий спосіб вирішення задачі методом найменших квадратів (мінімізації відхилів).

Залишимо всі рівняння від А до Д але замість точної рівності лівих і правих частин зажадаємо мінімуму суми квадратів різниць - відхилів.

Позначимо:

$$G = \begin{pmatrix} g_0 & 0 & 0 \\ g_1 & g_0 & 0 \\ g_2 & g_1 & g_0 \\ 0 & g_2 & g_1 \\ 0 & 0 & g_2 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ - бажаний вихідний сигнал.}$$

Сума квадратів відхилів для даного прикладу дорівнює:

$$D(C_0, \dots, C_{n-1}) = \sum_{i=0}^{m-1} \left( \sum_{j=0}^{n-1} G_{i,j} \cdot C_j - H_i \right)^2 \quad m=5, \quad n=3. \quad (2.66)$$

$$D(C_0, \dots, C_{n-1}) = \sum_{i=0}^{m-1} \left( \sum_{j=0}^{n-1} G_{i,j} \cdot C_j - H_i \right)^2$$

Диференціюємо (2.66) за  $C_K$  ( $K=0, \dots, n-1$ ) і прирівнюємо до 0 частинні похідні:

$$\frac{\partial D}{\partial C_K} = \sum_{i=0}^{m-1} 2 \cdot \left( \sum_{j=0}^{n-1} G_{i,j} \cdot C_j - H_i \right) \cdot G_{i,K} = 0$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \left( \sum_{i=0}^{m-1} G_{i,j} \cdot G_{i,K} \right) \cdot C_j = \sum_{i=0}^{m-1} H_i \cdot G_{i,K} \quad (2.67)$$

A      C      B

У (2.67) введемо наступні позначення:

$A_{j,k}$  – елемент матриці А правої частини (2.67), яка дорівнює  $A = G^T G$

$V_k$  – елемент вектора лівої частини (2.67)  $V=G^T H$ ,  $G^T$  - матриця, транспонована до  $G$ .  
Запишемо систему рівнянь (2.67) в векторно- матричній формі:

$$AC=B \Rightarrow A^{-1}AC=A^{-1}B, \quad A^{-1} - \text{одинична матриця.}$$

Звідки шукані коефіцієнти цифрового коректора знаходяться як

$$C=a-1b \quad (2.68)$$

Вираз (2.68) легко програмується і вирішується в математичних системах Mathcad і Matlab.

**Висновки.** 1. Цифровий коректор, є різновидом КІХ-фільтра і дозволяє компенсувати міжсимвольні спотворення, а також стаціонарні лінійні спотворення в дискретних каналах.

2. Початковими даними до розрахунку цифрового коректора є відліки імпульсної характеристики на інтервалах Котельникова.

3. СЛАР для знаходження коефіцієнтів цифрового коректора легко програмується і вирішується в системах Mathcad і Matlab.

4. Як показують перевіірочні розрахунки, що виправляюча здатність сигналів цифрового коректора для вказаних в роботі умов знаходиться в межах 92-97%.

Розрахунок цифрового коректора показано на прикладі 2.11.

**Приклад 2.11.** Розрахунок цифрового коректора.

**Початкові дані.** Задано канал передачі дискретних повідомлень. Міжсимвольна інтерференція сигналів в каналі визначається імпульсною характеристикою, відліки якої відповідно дорівнюють  $g_0=0.2$ ;  $g_1=1$ ;  $g_2= -0.5$ ;  $U=11$ .

1. Використовуючи вираз дискретної згортки, розрахувати сигнал на виході каналу у відлікові моменти 0,1,2,3 для послідовності вхідних сигналів  $u(0)$ , і  $u(T)$  для двох варіантів а) і б):

а)  $u(0)=U$ ,  $u(T)=0$ , де  $U=n+1$ ;

б)  $u(0)=U$ ,  $u(T)=U$ .

У інші відлікові моменти  $u(2T)=u(3T)=0$ .

2. Розрахувати коефіцієнти цифрового коректора  $C$ ,  $C$ ,  $C$ , що забезпечують вихідний сигнал “010” при подачі на вхід каналу сигналу “100”.

3. Розрахувати сигнали на виході коректора при вхідних сигналах (а) (б). Проаналізувати ефективність роботи цифрового коректора.

Приклад виконання роботи за умови  $m=3$ ,  $n=10$ .

### **Перший етап**

Позначимо через  $u_1(kT)$  сигнал на виході каналу зв'язку і отже на вході цифрового коректора. Відповідно до виразу дискретної згортки він дорівнює

$$u_1(kT) = \sum_{j=0}^k u(jT) * g((k-j)) \quad k=0, 1, 2, 3.$$

Враховуючи, що  $u(jT)=0$  для  $j>1$  та  $g(mT)=0$  для  $m>2$ , отримуємо

$$\begin{aligned} k=0 & \quad u_1(0)=u(0)*g(0)=u(0)*g_0, \\ k=1 & \quad u_1(T)=u(0)*g(T)+u(T)*g(0)=u(0)*g_1+u(T)*g_0, \\ k=2 & \quad u_1(2T)=u(0)*g(2T)+u(T)*g(T)=u(0)*g_2+u(T)*g_1, \\ k=3 & \quad u_1(3T)=u(T)*g(2T)=u(T)*g_2. \end{aligned}$$

Для варіанту (а)  $u(0)=11, u(T)=0$ :

$$\begin{aligned} u_1(0) &= 11*0.2 = 2.2 \\ u_1(T) &= 11*1 + 0*0.2 = 11 \\ u_1(2T) &= 11*(-0.55) + 0*1 = -6.05 \\ u_1(3T) &= 0*(-0.55) = 0 \end{aligned} \quad U_1 = \begin{pmatrix} 2.2 \\ 11 \\ -6.05 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Для варіанту (б)  $u(0)=11, u(T)=11$

$$\begin{aligned} u_1(0) &= 11*0.2 = 2.2 \\ u_1(T) &= 11*1 + 11*0.2 = 13.2 \\ u_1(2T) &= 11*(-0.55) + 11*1 = 4.95 \\ u_1(3T) &= 11*(-0.55) = -6.05 \end{aligned} \quad U_1 = \begin{pmatrix} 2.2 \\ 13.2 \\ 4.95 \\ -6.05 \end{pmatrix}$$

### Другий етап

Обчислення коефіцієнтів цифрового коректора. З цією метою складаємо систему трьох рівнянь з трьома невідомими, матрицю коефіцієнтів при невідомих  $G$  і векторі вільних членів  $H$ , які необхідні для знаходження коефіцієнтів векторно-матричним способом в середовищі Mathcad або вручну методом Крамера.

Система з 3-х рівнянь

з 3-ма невідомими:

$$\left. \begin{aligned} C*g_1 + C + 0 &= 0 \\ C*g_2 + C*g_1 + *g_0 &= 1 \\ 0 + C*g_2 + C*g_1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Матриця коефіцієнтів

коректора:

$$G = \begin{pmatrix} g_1 & g_0 & 0 \\ g_2 & g_1 & g_0 \\ 0 & g_2 & g_1 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} C \\ C \\ C \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ -бажаний сигнал на виході коректора}$$

В векторно-матричній формі:  $G*C=H$

$$\begin{pmatrix} abc \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} d \\ c \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a*d + b*c + c*f \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

Умножаємо зліва на зворотну матрицю G  
 $G * G * C = G * H$ , звідки  $C = G * H$ , де  
 $(G * G)$ - одинична матриця

Рішення за допомогою програми Mathcad

Ввести:  $g0 := 0.2$        $g1 := 1$        $g2 := -0.055$

Задати матрицю G і вектор H  
 G=      Вектор H:=

$$C := G^{-1} * H$$

$$C = \begin{pmatrix} -0.164 \\ 0.82 \\ 0.451 \end{pmatrix}$$

Обчислити  $C := G^{-1} * H$  Результат:

Рішення системи рівнянь за формулою Крамера

$$C_0 = D_1 / D \quad C_1 = D_2 / D \quad C_2 = D_3 / D$$

де D- визначник матриці G

$$D = \begin{vmatrix} g1 & g0 & 0 \\ g2 & g1 & g0 \\ 0 & g2 & g1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} g1 & g0 \\ g2 & g1 \\ 0 & g2 \end{vmatrix} = g1^3 - g2 * g0 * g1 - g1 * g2 * g0 =$$

$$= 1 - 2 * g0 * g2 = 1 - 2 * 0.2 * (-0.055) = 1.22$$

$$D = 1.22$$

D- визначник матриці G, де 1-й стовпець замінено на вектор H

$$D = 0 - g1 * 1 * g0 = -g0 = -0.2$$

D-визначник матриці G, де 2-й стовпець замінено на H

$$D_2 = \begin{vmatrix} g1 & 0 & 0 \\ g2 & 1 & g0 \\ 0 & 0 & g1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} g1 & 0 \\ g2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = g1^2 - 0 = 1$$

D<sub>3</sub> - визначник матриці G, де 3-й стовпець замінено на H

$$D_3 = \begin{vmatrix} g1 & g0 & 0 \\ g2 & g1 & 1 \\ 0 & g2 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} g1 & g0 \\ g2 & g1 \\ 0 & g2 \end{vmatrix} = 0 - g2 * 1 * g1 = -0.55$$

Таким чином, коефіцієнти  
 коректора дорівнюють:

Вектор коефіцієнтів:

$$C_0 = D_1/D = -0.2/1.22 = -$$

$$0.164$$

$$C_1 = D_2/D = 1/1.22 = 0.82$$

$$C_2 = D_3/D = 0.55/1.22 = 0.451$$

$$C = \begin{pmatrix} -0.164 \\ 0.82 \\ 0.451 \end{pmatrix}$$

### Третій етап

Проходження сигналу  $U_1(kT)$  через коректор описується лінійною дискретною згорткою вихідних сигналів з коефіцієнтами цифрового коректора, що ілюструється схемою рис. 2.27.

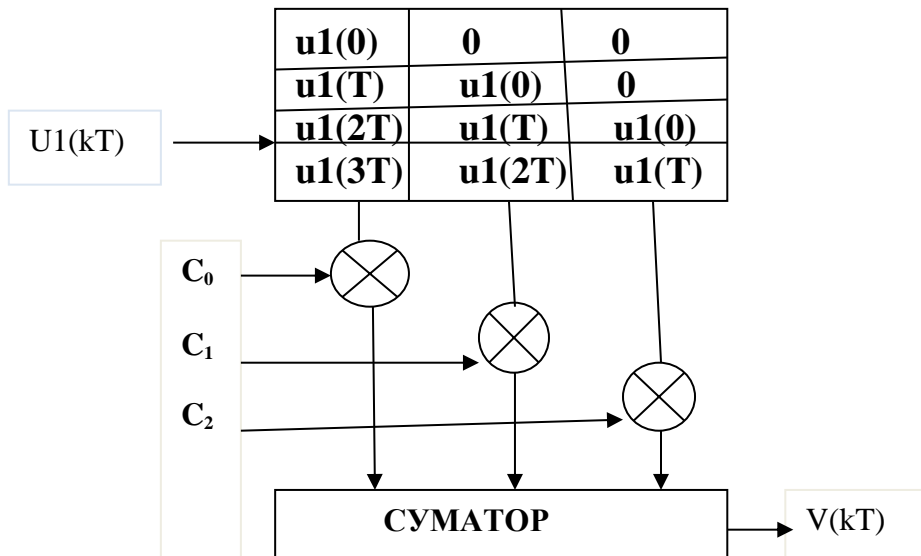


Рис. 2.27. Корекція вихідного сигналу цифровим коректором

$$v(0) = u_1(0) * C$$

$$v(T) = u_1(T) * C_0 + u_1(0) * C$$

$$v(2T) = u_1(2T) * C_0 + u_1(T) * C_1 + u_1(0) * C_2$$

$$v(3T) = u_1(3T) * C_0 + u_1(2T) * C_1 + u_1(T) * C_2$$

Для випадку а)

$$v(0) = 2.2 * (-0.164)$$

$$v(T) = 11 * (-0.164) + 2.2 * 0.82 = 0$$

$$v(2T) = (-0.05) * (-0.164) + 11 * 0.82 + 2.2 * 0.451 = 11.0044$$

$$v(3T) = 0 * (-0.164) + (-6.05) * 0.82 + 11 * 0.451 = 0$$

Для випадку а) вектор сигналу до і після корекції:

$$U_1 = \begin{pmatrix} 2.2 \\ 11 \\ -0.05 \\ 0 \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} -0.361 \\ 0 \\ 11.0044 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Для випадку б) вектор сигналу до  $i$  після корекції

$$U_1 = \begin{pmatrix} 2.2 \\ 13.2 \\ 4.95 \\ -6.05 \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} -0.361 \\ -0.361 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}$$

В обох випадках ясно прослідковується ефективна робота цифрового коректора.

### 2.16.1. Корекція частотної характеристики каналу зв'язку гармонійним коректором

*Завдання корекції частотної характеристики каналу зв'язку може вирішуватися на частотному рівні за допомогою гармонійних коректорів [10].*

1. Постановка завдання корекції частотних спотворень

Позначимо:

1)  $F(j)$  – необхідна КЧХ каналу зв'язку.

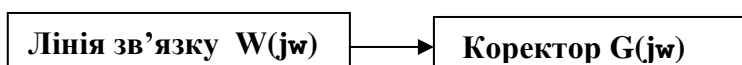
$$\text{АЧХ: } |F(j\omega)| = \begin{cases} 1, \text{ для } |\omega| \leq 1 \\ 0, \text{ для } |\omega| > 1 \end{cases} \quad (2.69)$$

де  $\nu = 2\pi f_{\max}$  – гранична частота смуги пропускання.

ФЧХ:  $\arg(F(j))$  – лінійна, відповідає затримці  $T_0$ .

2)  $W(j)$  – реальна КЧХ каналу зв'язку  $W(j) \neq F(j)$

3) Підключимо коректор з КЧХ  $G(i)$  на вихід лінії зв'язку



Результуюча КЧХ:  $R(i\omega) = W(i\omega) * G(i\omega)$

**Потрібно:** Підібрати  $G(i)$  так, щоб  $R(i)$  якомога менше відрізнялося від  $F(i)$ .  
 Структурна схема коректора:  $C_0$

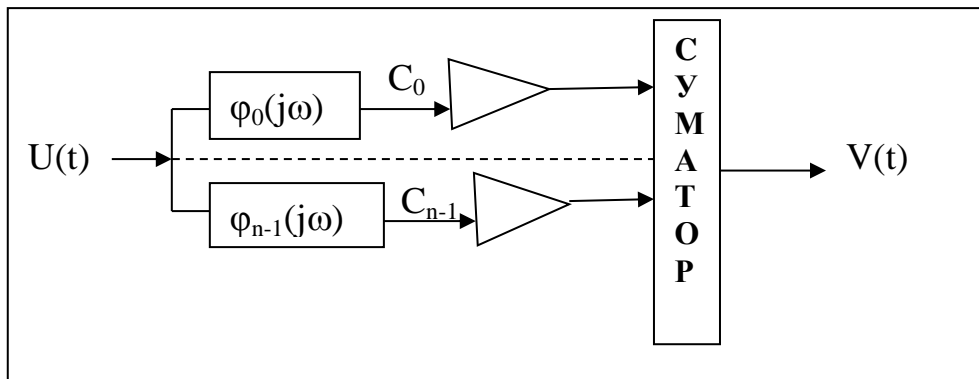


Рис. 2.27. Структурна схема гармонічного коректора

$$G(j\omega) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k * \varphi_k(j\omega) \quad (2.70)$$

В останній формулі  $\varphi_0(j\omega), \dots, \varphi_{n-1}(j\omega)$  – базисні функції, які задовольняють умову ортогональності для  $k \neq l$ .

$$\int_{-\nu}^{\nu} \varphi_k(j\omega) * \varphi_l(j\omega) d\omega = 0$$

Таким чином,  $G(j\omega)$  залежать тільки від коефіцієнтів  $C_0, \dots, C_{n-1}$   
 Позначимо помилку корекції:

$$e(j\omega) = F(j\omega) - W(j\omega) = F(j\omega) - \sum_{k=0}^{n-1} C_k * W(j\omega) * \varphi_k(j\omega) \quad (2.71)$$

$$W(j\omega) * \varphi_k(j\omega) \Rightarrow \Phi_k(j\omega).$$

Необхідно знайти  $C_0, \dots, C_{n-1}$ , які забезпечують мінімум критерію оптимізації.

$$D(C_0, \dots, C_{n-1}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\nu}^{\nu} |e(j\omega)|^2 d\omega \quad (2.72)$$

Підставимо (2.71) в (2.72):

$$D(C) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\nu}^{\nu} \left| F(j\omega) - \sum_{k=0}^{n-1} C_k * \Phi_k(j\omega) \right|^2 d\omega \Rightarrow$$

нехай  $a$  і  $b$  – комплексні величини

$$|a - b|^2 = (a - b)(\overline{a - b}) = (a - b) * (\overline{a} - \overline{b}) = a * \overline{a} - a * \overline{b} - \overline{a} * b + b * \overline{b}$$

$$\Rightarrow D(C) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\nu}^{\nu} \left\{ |F(j\omega)|^2 - F(j\omega) * \sum_{k=0}^{n-1} C_k \Phi_k(j\omega) - \overline{F(j\omega)} * \sum_{k=0}^{n-1} C_k \Phi_k(j\omega) + \left( \sum_{k=0}^{n-1} C_k \Phi_k(j\omega) \right) * \left( \sum_{k=0}^{n-1} C_k \overline{\Phi_k(j\omega)} \right) \right\} d\omega$$

Виділимо окремо:

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\nu}^{\nu} |F(j\omega)|^2 d\omega = \frac{2\nu}{2\pi} = \frac{\nu}{\pi} \quad (2.74)$$

$$B_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\nu}^{\nu} \text{Re} [F(j\omega) * \overline{\Phi_k(j\omega)}] d\omega \quad (2.75)$$

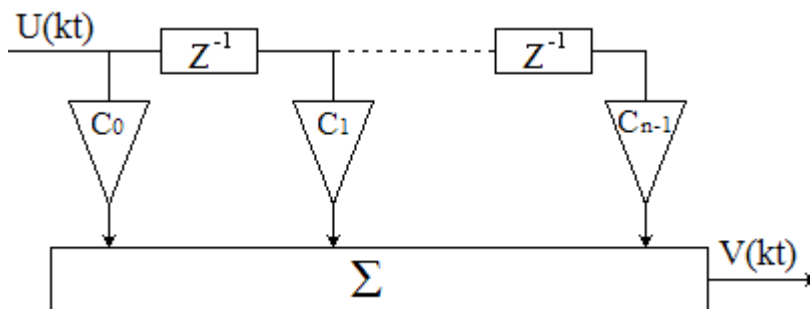
$$A_{k,l} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\nu}^{\nu} \text{Re} [\Phi_k(j\omega) * \overline{\Phi_l(j\omega)}] d\omega \quad (2.76)$$

Тоді критерій оптимізації приймає вигляд:

$$D(C_0, \dots, C_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} C_k C_l A_{k,l} - 2 \sum_{k=0}^{n-1} C_k B_k + P \quad (2.77)$$

### Визначення коефіцієнтів критерію оптимізації

Систему базисних функцій  $\varphi_k(i\omega)$  можна реалізувати за допомогою елементів затримки, тоді коректор набуває структури КІХ фільтрів:



$$\varphi_k(j\omega) = e^{-j\omega k T}, \quad \text{де } T = \frac{1}{2f_{\max}} = \frac{\pi}{\nu} \text{ - дорівнює інтервалу Котельникова}$$

Підставляючи  $\varphi_k(j\omega)$  і  $T$  отримаємо замість (2.75),..., (2.77) для даного варіанту коректора

$$P = \frac{1}{T} \quad (2.78)$$



$$B_k = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left[ \int_{-v}^v W(j\omega) * e^{j\omega(kT-T_0)} d\omega \right] \quad (2.79)$$

$$A_{k,l} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left[ \int_{-v}^v |W(j\omega)|^2 * e^{j\omega T(l-k)} d\omega \right] \quad (2.80)$$

З (2.80) витікає, що матриця  $A$  є симетричною і елемент  $A_{k,l}$  залежить від  $[k-l]$ . Тому обчислення  $A_{k,l}$  доцільно виконати таким чином:

$$\begin{cases} r_m = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left[ \int_{-v}^v |W(j\omega)|^2 * e^{j\omega T} d\omega \right] \\ A_{k,l} = r_{|k-l|} \end{cases} \quad (2.81)$$

1. Аналітичне визначення оптимальних коефіцієнтів коректора.

Відповідно до необхідної умови екстремуму знайдемо частинну похідну критерію (11.9) за коефіцієнтом  $C_k$  і прирівняємо її до нуля:

$$\frac{\partial D}{\partial C_k} \equiv 2 \sum_{l=0}^{n-1} C_l A_{k,l} - 2B_k = 0$$

Звідси отримаємо систему лінійних рівнянь:

$$C_0 A_{k,0} + C_1 A_{k,1} + \dots + C_{n-1} A_{k,n-1} = B \quad (k=0,1,\dots,n-1)$$

Відобразимо її у векторно-матричній формі:

$$A * c = B$$

Умножаємо зліва на  $A^{-1}$

$$A^{-1} * A * c = A^{-1} * B \quad \Longrightarrow \quad c = A^{-1} * B \quad (2.82)$$

Вираз аналогічний (2.82) для коректора міжсимвольних спотворень, аналогічно формулі знаходження коефіцієнтів цифрового коректора, проте матриця  $A$  і вектор  $B$  визначаються іншими співвідношеннями.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Айфічер Еммануїл, Джервіс Баррі У. Цифровая обробка сигналів.:Пер. з англ.- М.:”Вільямс”, 2004.- 992 с.
2. Бондарев В.Н. Цифровая обработка сигналов: методы и средства/ Бондарев В.Н., Трёстер Г., Чернега В.С. –М.: Конус, 2001.-398 с.
3. Бизин А.Т. Введение в цифровую обработку сигналов/ Бизин А.Т.- Новосибирск: Логос, 1998. – 50 с.
4. Ганеев Р.М. Математические модели в задачах обработки сигналов/ Ганеев Р.М.-М.: Горячая линия-Телеком, 2004.- 80 с.
5. Гольденберг Л.М. Цифровая обработка сигналов: Справочник/ Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д., Поляк М.Н.-М.: Радио и связь, 1985.- 312 с.
6. Давыдов А.В. Цифровая обработка сигналов: Тематические лекции/ Давыдов А.В.- Екатеринбург: фонд электронных документов, 2005.- 182 с.
7. Давыдов А.В. Сигналы и линейные системы: Тематические лекции/ Давыдов А.В.- Екатеринбург: фонд электронных документов, 2005.-260 с.
8. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы/ Двайт Г.Б.- М.: Наука, - 1966.- 228 с.
9. Дьяконов В.П. Mathcad 8 PRO в математике, физике и Internet/ Дьяконов В.П., Абраменкова И.В. – М.: Нолидж, 2000. -512 с.
10. Захарченко М.В. Автоматизація проектування пристроїв, систем та мереж зв'язку/ Захарченко М.В., Стеклов В.К., Князева Н.О., Фоміна Г.Т.- К.: Радіоаматор, 1996. - 268 с.
11. Закиров З.Г. Сотовая связь стандарта GSM/ Закиров З.Г., Надеев А.Ф., Файзуллин Р.Р. – М.: Эко-Трендз, 2004. – 264 с.
12. Кривуца В.Г. Математичне моделювання телекомунікаційних систем: Навчальний посібник/ Кривуца В.Г., Барковський В.В., Беркман Л.Н.- К.: Зв'язок, 2007.-270 с.
13. Лайонс Ричард. Цифровая обработка сигналов. Пер. с англ./ Лайонс Ричард.- М.: ООО ”Бином-Пресс”, 2006.- 656 с.
14. Мартыненко В.С. Операционное исчисление/ Мартыненко В.С.– К.: из-во Киевского университета, 1968. 197 с.
15. Сато Ю. Обработка сигналов: первое знакомство. Пер.с яп./Сато Ю.: М.: ”Додэка-XXI”,- 2002.- 176 с.
16. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов/ Сергиенко А.Б.- Спб.: Питер, 2002. – 608 с.
17. Сиберт У.М. Цепи, сигналы, системы: в 2-х частях. Пер. с англ./ Сиберт У.М.-М.: Мир, 1988. 336 и 360 с.
18. Скляр Бернанд. Цифровая связь: Теоретические основы и практическое применение. Пер. с англ./ Скляр Бернанд.-М.: дом ”Вильямс”, 2007.-1104 с.

19. Солонина А.И. Основы цифровой обработки сигналов: курс лекцій/ Солонина А.И., Улахович Д.А., Арбузов С.М., Соловьёва Е.Б., Гук И.И.- СПб.: БХВ-Петербург, 2003. - 608 с.
20. Смирнов А.В. Цифровое телевидение: от теории к практике/ Смирнов А.В., Пескин А.Е.-М.: Горячая линия-Телеком, 2005.-2005 с.
21. Харкевич А.А. Спектры и анализ/ Харкевич А.А.– М.: ФМ, - 1962.-236 с.
22. Цыпкин А.Г. Математические формулы: Справочник/ Цыпкин А.Г., Цыпкин Г.Г.- М.: Наука, 1985. -128 с.
23. Френкс Л. Теорія сигналів/Пер. з англ.-М.:Сов. Радіо, 1974. – 312 с.
24. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов: пер. с англ./под ред. А.Б. Сергиенко. – 2-е изд., испр. – М.: Техносфера, 2007
25. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов: учебное пособие. – 3-е изд.. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 768с.
26. Гонсалес Р., вудс Р., Эддинс С. Цифровая обработка изображений в среде Matlab: пер. с англ. – М.: Техносфера, 2006.
27. Солонина А.И., Арбузов С.М. Цифровая обработка сигналов. Моделирование в Matlab. – СПб.: БХВ-Петербург, 2008.
28. Цифровая обработка сигналов и изображений в радиофизических приложениях / Под ред. В.Ф. Кравченко. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 544с.
29. Обробка сигналів у радіоканалах цифрових систем передавання інформації: Навч. посібник / За заг. ред. Чл.-кор. НАН України В.П. Бабака. К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005. – 476с.
30. Цифрова обробка аудіо- та відеоінформації у мультимедійних системах: Навчальний посібник / Коваль В.В., Розорінов Г.М., Сукач Г.О. – К.: Наукова думка, 2008. – 144с.