Міністерство освіти і науки України

ОДЕСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ ЗВ'ЯЗКУ ІМ. О.С. ПОПОВА

Кафедра комп'ютерно-інтегрованих технологічних процесів і виробництв

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
для виконання лабораторних робіт студентами

з дисципліни

«СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ СКЛАДНИХ СИСТЕМ УПРАВЛІННЯ»
Напрям 6.050202 – «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»

Одеса – 2013

УДК 681.51 План НМВ 2013р

Укладач: к.т.н., доц. А.О. Стопакевич

Приведені завдання і описана методика виконання лабораторних робіт з дисципліни «Системний аналіз складних систем управління» для студентів напряму 6.050202 «Автоматизація і комп'ютерно – інтегровані технології».

Методичні вказівки забезпечують виконання семи лабораторних робіт. Для виконання робіт потрібні комп'ютери та програмне забезпечення Matlab.

Ухвалено
на засіданні кафедри комп'ютерно-інтегрованих технологічних процесів і виробництв
Протокол № 2 від 14 лютого 2013 р.

Затверджено
методичною радою академії зв'язку.
Протокол №3/14 від 9 квітня 2013 р.

ЗМІСТ

Лабораторна робота 1

Матричні операції у системному аналізі

Мета роботи: ознайомитись з основними матричними операціями, що використовують в системному аналізі для побудови моделей технологічних об’єктів та розрахунку систем керування.

1 Теоретичні посилання

Системний аналіз – теорія і практика застосування системного підходу до розроблення складних систем. Системний підхід пов'язаний з розглядом будь-якого об'єкта як системи, що складається зі взаємозв'язаних елементів і підсистем, на функціонування яких впливає зовнішнє середовище і які самі впливають на зовнішнє середовище.

У курсі вивчається аналіз і розробка складних систем керування з орієнтацією на керування технологічними процесами.

Під складною системою будемо розуміти систему, модель якої є:

- багатовимірною, тобто з багатьма входами і виходами;
- багатозв’язною, тобто з багатьма взаємозв'язками між входами і виходами.

Для розробки складних систем управління на сьогодні є оптимальною інтерактивне середовище для математичних розрахунків і мова програмування високого рівня Matlab (Matrix Lab – матрична лабораторія), оскільки:

1. Matlab з початку розроблення орієнтовано на матричні операції. Будь-яка змінна у Matlab є матрицею, тому просте число розглядається як елемент матриці 1 x 1. Це дозволяє реалізовувати більшість розрахункових функцій з аргументами у вигляді матриць і векторів. Якщо змінна містить множину елементів, то значення в розрахунковій функції може розраховуватися окремо для кожного елементу. Ця операція називається векторизацією і забезпечує спрощення запису операцій, що проводяться одночасно над усіма елементами векторів і матриць, а також значно підвищує швидкість розрахунків.
2. Зручне для використання середовище розробки, засоби візуалізації та аналізу даних, багаті можливості інтеграції з іншими програмними пакетами та мовами програмування збільшують швидкість роботи з результатами розрахунків. Matlab має значну кількість додаткових програмних пакетів (Toolbox), завдяки яким його стало можливо використовувати не тільки для математичних розрахунків та синтезу систем керування, але і в широкому спектрі галузей господарства від механіки до економіки.
3. Пакет для синтезу систем керування (Control System Toolbox) є найбільш розвиненим порівняно з конкуруючими програмними продуктами і може бути застосований не тільки для синтезу простих лінійних систем керування з

класичними регуляторами, але і для побудови складних багатовимірних систем керування з регуляторами довільного типу для складних багатовимірних об'єктів керування високого порядку.

4. Пакет для символьних розрахунків (Symbolic Math Toolbox) надає низку функцій для розв'язання і маніпуляції символьними математичними виразами з урахуванням необхідної точності розрахунків. Пакет дозволяє аналітично проводити диференціювання та інтегрування, спрощення, переведеня в інші форми запису, розв'язувати рівняння будь-якої складності.

Матриця **A**(n, m) – це таблиця чисел, що містить ***n*** рядків та ***m*** стовпців. Діагональна матриця – це квадратна матриця (n = m), елементи якої розміщені тільки по діагоналі, тобто від лівого верхнього до правого нижнього кута. Якщо по діагоналі стоять лише одиниці – це одинична матриця, яку прийнято позначати **I**. Матриця з нулів позначається 0. Верхній індекс ^{T} наверху матриці означає операцію транспонування, тобто заміну рядків матриці стовпцями Симетрична матриця – це матриця, елементи якої відносно діагоналі збігаються, тобто вихідна матриця дорівнює транспонованій.

У Matlab матриця записується в квадратних дужках і вводиться по рядках, елементи рядка розділяють пропусками, рядки – символом «;». Одинична матриця генерується програмою **eye**(n). Нульова матриця – **zeros**(n). Транспонування матриці проводиться за допомогою оператора **«'»,** наприклад **A'.** Розмір матриці отримується за допомогою функції **size**, наприклад [n,m]=**size**(A**).**

Арифметичні операції з матрицями

Додавання і віднімання матриць однакового розміру проводиться поелементно.

Правило розрахунку при множенні матриць має вигляд:

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}}\\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\mathbf{b_{11}} & \mathbf{b_{12}}\\ \mathbf{b_{21}} & \mathbf{b_{22}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}} & \mathbf{a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}}\\ \mathbf{a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}} & \mathbf{a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}}\end{bmatrix}$$

Приклади.

$$\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}=11;\quad \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 6\\4 & 8\end{bmatrix};\quad \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times5+2\times6\\3\times5+4\times6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}17\\39\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}5 & 6\\7 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times5+2\times7 & 1\times6+2\times8\\3\times5+4\times7 & 3\times6+4\times8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}19 & 22\\43 & 50\end{bmatrix}$$

Висновки:

1. Множення (n, m) матриці на (m, k) матрицю дає в результаті (n,k) матрицю, m всередині повинно збігатися, інакше множення неможливо.

2. (i, j) елемент добутку дорівнює сумі добутків елементів i-го рядка першої матриці на елементи j-го стовпця другої матриці.

3. При добутку матриці неможливо переставляти місцями (див. приклади 1 і 2)

У матричній арифметиці ділення матриць замінюється множенням на зворотну матрицю**.** Правило розрахунку зворотної матриці має вигляд:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det} \times \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}^{T} = \frac{1}{\det} \times \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

$$\det = a_{11} \times a_{22} - a_{21} \times a_{12}$$

Приклад:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det} \times \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{T} = \frac{1}{\det} \times \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det = 1 \times (-3) - 1 \times (-2) = -1$$

Перевірка:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 3 + 1 \times (-2) & 1 \times 1 + 1 \times (-1) \\ -2 \times 3 + (-3) \times (-2) & -2 \times 1 + (-3) \times (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} -$$

Множення на одиничну матрицю не змінює вихідну матрицю. Зворотна від одиничної матриці теж одинична. Зворотна від діагональної матриці теж діагональна і складається з елементів, кожен з яких дорівнює одиниці, що поділена на відповідний діагональний елемент вихідної матриці.

У Matlab зворотна матриця розраховується за допомогою функції **inv(A),** визначник - **det(A).**

Власні значення матриці розраховуються з рівняння:

$$\det(\lambda \times \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 .$$

Приклад:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}. \quad \det\left(\lambda \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}\right) =$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 6 & \lambda + 5 \end{bmatrix}\right) = \lambda \times (\lambda + 5) - (-1) \times 6 = \lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1,$$

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-5 + \sqrt{1}}{2 \times 1} = -2,\ \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-5 - \sqrt{1}}{2 \times 1} = -3$$

В Matlab власні значення розраховують за допомогою функції **L=eig(A).**

Власні вектора. Вектори $\mathbf{t_i}$ отримуються з рівності

$$(\lambda_i \times I - A) \times t_i = 0.$$

Приклад:

Перший вектор:

$$\left((-2) \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}\right) \times \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{matrix} -2 \times t_{11} - 1 \times t_{21} = 0 \\ 6 \times t_{11} + 3 \times t_{21} = 0 \end{matrix} \quad t_{11} = 1,\ t_{21} = -2 \to\ t_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Коефіцієнти $\mathbf{t_{11}, t_{21}}$ обираються з першої рівності довільно, але щоб вони задовольняли рівності (вибір усіх нулів є неприпустимим). Друга рівність служить для перевірки правильності і коректності коефіцієнтів і власних значень.

Другий вектор:

$$\left((-3) \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}\right) \times \begin{bmatrix} t_{12} \\ t_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} t_{12} \\ t_{22} \end{bmatrix} = \begin{matrix} -3 \times t_{12} - 1 \times t_{22} = 0 \\ 6 \times t_{12} + 2 \times t_{22} = 0 \end{matrix}$$

$$t_{12} = 1, t_{22} = -3 \to\ t_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Матриця власних векторів - $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$.

У Matlab власні вектори отримуються за допомогою наступних функцій:

[T,L]=**eig(A)** – якщо всі власні значення різні.

[T,L]=**jordan(A)** – якщо є однакові власні значення.

Матрична функція. Правило розрахунку:

$$f(A) = T \times \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) \end{bmatrix} \times T^{-1}, \quad f(A \times t) = T \times \begin{bmatrix} f(\lambda_1 \times t) & 0 \\ 0 & f(\lambda_2 \times t) \end{bmatrix} \times T^{-1}.$$

Приклад:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -6 & -5\end{bmatrix}. \quad \mathbf{e^{At}}=\mathbf{T}\cdot\begin{bmatrix}e^{\lambda_1\cdot t} & 0\\ 0 & e^{\lambda_2\cdot t}\end{bmatrix}\cdot\mathbf{T}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}e^{-2\cdot t} & 0\\ 0 & e^{-3\cdot t}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & 1\\ -2 & -1\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}1\cdot e^{-2\cdot t}+1\cdot 0 & 1\cdot 0+1\cdot e^{-3\cdot t}\\ (-2)e^{-2\cdot t}+(-3)\cdot 0 & (-2)\cdot 0+(-3)e^{-3\cdot t}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & 1\\ -2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{-2\cdot t} & e^{-3\cdot t}\\ -2e^{-2\cdot t} & -3e^{-3\cdot t}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & 1\\ -2 & -1\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}3e^{-2\cdot t}-2e^{-3t} & e^{-2\cdot t}-e^{-3\cdot t}\\ 3(-2e^{-2\cdot t})-2(-3e^{-3\cdot t}) & 1(-2e^{-2\cdot t})-1(-3e^{-3\cdot t})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3e^{-2\cdot t}-2e^{-3t} & e^{-2\cdot t}-e^{-3\cdot t}\\ -6e^{-2\cdot t}+6e^{-3\cdot t} & -2e^{-2\cdot t}+3e^{-3\cdot t}\end{bmatrix}$$

У Matlab матрична функція розраховується:

expm(A) – чисельний розрахунок;

syms t B; A=[0 1;-6 -5]; B=**expm**(A*t) – символьний розрахунок.

2 Контрольні питання

2.1 Що вивчає дисципліна «Системний аналіз складних систем керування»?

2.2 Які переваги використання програмного пакета Matlab для розрахунків у системному аналізі?

2.3 Як виконуються арифметичні операції з матрицями?

2.4 Як обчислювати власні значення та власні вектори матриць?

2.5 Як обчислювати матричну функцію?

3 Домашнє завдання

3.1 Обчислити вручну $\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_1\cdot\mathbf{C}_1$, $\mathbf{A}_1\cdot\mathbf{B}_1$, $\mathbf{A}_1\cdot\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_1^{-1}$.

3.2 Обчислити вручну власні значення і власні вектори матриці $\mathbf{A}_1$.

3.3 Обчислити вручну матричну функцію $\mathbf{e}^{\mathbf{A}_1\cdot t}$.

Матриці для обчислень наведено в додатку А.

4 Завдання на дослідження

4.1 Обчислити в Matlab $\mathbf{C}_1\cdot\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_1\cdot\mathbf{C}_1$, $\mathbf{A}_1\cdot\mathbf{B}_1$, $\mathbf{A}_1\cdot\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_1^{-1}$.

4.2 Обчислити в Matlab власні значення і власні вектори матриці $\mathbf{A}_1$.

4.3 Обчислити в Matlab матричну функцію $\mathbf{e}^{\mathbf{A}_1\cdot t}$.

4.4 Порівняйте результати розрахунків з результатами, що отримано в п.3. Врахуйте, що кожний власний вектор може відрізнятись на довільний постійний множник від розрахованого.

4.5 Виконайте захист роботи.

5 Зміст протоколу

Протокол лабораторної роботи оформлюється на аркушах формату А4 і повинен мати назву лабораторної роботи та її мету, відповіді на контрольні запитання, хід виконання домашнього та лабораторного завдання.

Лабораторна робота 2

Лінійні та квадратні матричні рівняння

Мета роботи: ознайомитись з методами розв'язання рівнянь Ляпунова та Ріккаті.

1 Теоретичні посилання

У теорії систем найбільш часто використовуються лінійні та квадратні матричні рівняння, які мають спеціальні назви. Лінійне матричне рівняння називається рівнянням Ляпунова, а квадратне матричне рівняння називається рівнянням Ріккаті.

Рівняння Ляпунова. Правило розрахунку: розв'язується рівняння виду $\mathbf{A^T \times P + P \times A + Q = 0}$, де $\mathbf{Q}$ – симетрична матриця, частіше за все обирається діагональна матриця з додатними елементами. Тоді $\mathbf{P}$ є теж симетричною матрицею.

Приклад:

$$\mathbf{A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}; \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad A^T = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}}.$$

$$\mathbf{\begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

$$\mathbf{\begin{bmatrix} -6p_2 & -6p_3 \\ p_1 - 5p_2 & p_2 - 5p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6p_2 & p_1 - 5p_2 \\ -6p_3 & p_2 - 5p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} =}$$

$$\mathbf{\begin{bmatrix} -12p_2 + 1 & p_1 - 5p_2 - 6p_3 \\ p_1 - 5p_2 - 6p_3 & 2p_2 - 10p_3 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

$$\mathbf{\begin{cases} -12p_2 + 1 = 0 \\ p_1 - 5p_2 - 6p_3 = 0 \\ 2p_2 - 10p_3 + 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} p_2 = 1/12 = 0.08 \\ p_1 = \dfrac{5}{12} + \dfrac{78}{60} = \dfrac{103}{60} = 1.71 \\ \dfrac{13}{6} = 10p_3, p_3 = \dfrac{13}{60} = 0.21. \end{matrix} \rightarrow P = \begin{bmatrix} 1.71 & 0.08 \\ 0.08 & 0.21 \end{bmatrix}}$$

В Matlab рівняння Ляпунова розв'язується за допомогою команди P=**lyap**(A',Q).

Квадратне матричне рівняння Ріккаті. Рівняння має вигляд:

$$\mathbf{A^T \times P + P \times A + Q - P \times B \times R^{-1} \times B^T \times P = 0}.$$

Загальний алгоритм розв’язання рівняння:

1.Скласти матрицю М наступного виду: $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{BR}^{-1}\mathbf{B}^{T} \\ -\mathbf{Q} & -\mathbf{A}^{T} \end{bmatrix}$.

2.Розрахувати матрицю власних значень і власних векторів, розмістив власні вектори таким чином, щоб спочатку йшли власні вектори ($\mathbf{t}_1$), що відповідають додатковим власним значенням, а потім вектори ($\mathbf{t}_2$), що відповідають від’ємним власним значенням. Тоді матрицю власних векторів можливо представити у вигляді:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{12} \\ \mathbf{T}_{21} & \mathbf{T}_{22} \end{bmatrix}.$$

3.Розрахувати рішення: $\mathbf{P} = \mathbf{T}_{22} \times \mathbf{T}_{12}^{-1}$.

Розглянемо простий приклад:

$$\mathbf{A} = -5, \mathbf{B} = 2, \mathbf{Q} = 1, \mathbf{R} = 1,$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -5 & -2 \times 1 \times 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det\left(\lambda \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}\right) =$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda + 5 & -4 \\ -1 & \lambda - 5 \end{bmatrix}\right) = (\lambda - 5)(\lambda + 5) - (-4) \times (-1) = \lambda^2 - 29 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \lambda_1 = 5.385 \quad \lambda_2 = -5.385.$$

Корені беруться тільки від’ємні.

$$\left((-5.385) \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}\right) \times \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{12} \\ \mathbf{T}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.385 & 4 \\ 1 & -10.385 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{12} \\ \mathbf{T}_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{matrix} -0.385\mathbf{T}_{12} + 4\mathbf{T}_{22} = 0 \\ \mathbf{T}_{12} - 10.385\mathbf{T}_{22} = 0 \end{matrix}$$

$$\mathbf{T}_{12} = 10.385, \mathbf{T}_{22} = 1 \rightarrow \mathbf{t}_2 = \begin{bmatrix} 10.385 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{P} = \frac{1}{10.385} = 0.0963$$

Перевірка:

$$4\mathbf{P}^2 + 10 \times \mathbf{P} - 1 = 0, \ \mathbf{D} = \mathbf{b}^2 - 4\mathbf{ac} = 100 + 16 = 116, \ \mathbf{P} = \frac{-10 + 10.770}{8} = 0.0963$$

Рівняння розв’язане вірно.
Складний приклад.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -6 & -5\end{bmatrix},\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix},\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix},\mathbf{R}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}\times\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -5\\ -5 & 13\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2 & 5\\ -6 & -5 & 5 & -13\\ -1 & 0 & 0 & 6\\ 0 & -2 & -1 & 5\end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda\times\mathbf{I}-\mathbf{M})=\det\left(\lambda\times\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1 & -2 & 5\\ -6 & -5 & 5 & -13\\ -1 & 0 & 0 & 6\\ 0 & -2 & -1 & 5\end{bmatrix}\right)=$$

$$=\det\left(\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1 & -2 & 5\\ -6 & -5 & 5 & -13\\ -1 & 0 & 0 & 6\\ 0 & -2 & -1 & 5\end{bmatrix}\right)=$$

$$\det\left(\begin{bmatrix}\lambda & -1 & 2 & -5\\ 6 & \lambda+5 & -5 & 13\\ 1 & 0 & \lambda & -6\\ 0 & 2 & 1 & \lambda-5\end{bmatrix}\right)=\lambda\times\det\begin{bmatrix}\lambda+5 & -5 & 13\\ 0 & \lambda & -6\\ 2 & 1 & \lambda-5\end{bmatrix}-$$

$$-6\times\det\begin{bmatrix}-1 & 2 & -5\\ 0 & \lambda & -6\\ 2 & 1 & \lambda-5\end{bmatrix}+1\times\det\begin{bmatrix}-1 & 2 & -5\\ \lambda+5 & -5 & 13\\ 2 & 1 & \lambda-5\end{bmatrix}=$$

$$=\lambda\times(\lambda+5)\times\det\left(\begin{bmatrix}\lambda & -6\\ 1 & \lambda-5\end{bmatrix}\right)+2\lambda\times\det\left(\begin{bmatrix}-5 & 13\\ \lambda & -6\end{bmatrix}\right)-$$

$$-6(-1)\times\det\left(\begin{bmatrix}\lambda & -6\\ 1 & \lambda-5\end{bmatrix}\right)-6\times2\det\left(\begin{bmatrix}2 & -5\\ \lambda & -6\end{bmatrix}\right)+$$

$$+1\times(-1)\times\det\left(\begin{bmatrix}-5 & 13\\ 1 & \lambda-5\end{bmatrix}\right)-1\times(\lambda+5)\times\det\left(\begin{bmatrix}2 & -5\\ 1 & \lambda-5\end{bmatrix}\right)+1\times2\det\left(\begin{bmatrix}2 & -5\\ -5 & 13\end{bmatrix}\right)=$$

$$(\lambda^2+5\lambda)\times(\lambda^2-5\lambda+6)+2\lambda\times(30-13\lambda)+6\times(\lambda^2-5\lambda+6)-$$
$$-12\times(-12+5\lambda)-(-5\lambda+12)-(\lambda+5)\times(2\lambda-5)+2\times1=$$
$$\lambda^4-5\lambda^3+6\lambda^2+5\lambda^3-25\lambda^2+30\lambda+60\lambda-26\lambda^2+6\lambda^2-$$
$$-30\lambda+36+144-60\lambda+5\lambda-12-2\lambda^2+5\lambda-10\lambda+25+2=$$
$$=\lambda^4-41\lambda^2+195=0$$
$$D=41^2-4\times1\times195=1681-780=901,$$
$$\lambda_1{}^2=\frac{41+\sqrt{901}}{2}=\frac{41+30.02}{2}=35.5,\ \lambda_2{}^2=\frac{41-\sqrt{901}}{2}=5.49.$$
$$\lambda_1=-5.96 \quad \lambda_2=-2.3434$$
$$\begin{bmatrix}-5.96 & -1 & 2 & -5\\ 6 & -0.96 & -5 & 13\\ 1 & 0 & -5.96 & -6\\ 0 & 2 & 1 & -10.96\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}t_{11}\\ t_{21}\\ t_{31}\\ t_{41}\end{bmatrix}=\begin{matrix}-5.96t_{11}-t_{21}+2t_{31}-5t_{41}=0\\ 6t_{11}-0.96t_{21}-5t_{31}+13t_{41}=0\\ t_{11}-5.96t_{31}-6t_{41}=0\\ 2t_{21}+t_{31}-10.96t_{41}=0\end{matrix}$$
$$t_{11}=5.96t_{31}+6t_{41}$$
$$t_{21}=-0.5t_{31}+5.48t_{41}$$
$$-35.5216t_{31}-35.76t_{41}+0.5t_{31}-5.48t_{41}+2t_{31}-5t_{41}=0$$
$$-33.0216t_{31}-46.24t_{41}=0$$
$$\rightarrow\begin{pmatrix}t_{11}=77.46\\ t_{21}=-204.1\\ t_{31}=46.24\\ t_{41}=-33.0\end{pmatrix}.$$
$$t_{11}=5.96\times46.24+6(-33.0216)=77.4608$$
$$t_{21}=-0.5\times46.24+5.48(-33.0216)=-204.08$$
$$\begin{bmatrix}-2.3434 & -1 & 2 & -5\\ 6 & 2.6566 & -5 & 13\\ 1 & 0 & -2.3434 & -6\\ 0 & 2 & 1 & -7.3434\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}t_{12}\\ t_{22}\\ t_{32}\\ t_{42}\end{bmatrix}=\begin{matrix}-2.3434t_{12}-t_{22}+2t_{32}-5t_{42}=0\\ 6t_{12}+2.6566t_{22}-5t_{32}+13t_{42}=0\\ t_{12}-2.3434t_{32}-6t_{42}=0\\ 2t_{22}+t_{32}-7.3434t_{42}=0\end{matrix}$$
$$t_{12}=2.3434t_{32}+6t_{42}$$
$$t_{22}=-0.5t_{32}+3.6717t_{42}$$
$$-2.3434\times(2.3434t_{32}+6t_{42})+0.5t_{32}-3.6717t_{42}+2t_{32}-5t_{42}=0$$
$$-3t_{32}-22.73t_{42}=0$$
$$\rightarrow\begin{pmatrix}t_{12}=35.3\\ t_{22}=-22.4\\ t_{32}=22.7\\ t_{42}=-3\end{pmatrix}.$$
$$t_{12}=2.3434\times22.73+6\times(-3)$$
$$t_{22}=-0.5\times22.73+3.6717\times(-3)$$

$$\begin{bmatrix} T_{12} \\ T_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 77.46 & 35.3 \\ -204.1 & -22.4 \\ 46.24 & 22.7 \\ -33 & -3 \end{bmatrix}, T_{12} = \begin{bmatrix} 77.46 & 35.3 \\ -204.1 & -22.4 \end{bmatrix}, T_{22} = \begin{bmatrix} 46.24 & 22.7 \\ -33 & -3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det} \times \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}^{T} = \frac{1}{\det} \times \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

$$\det = a_{11} \times a_{22} - a_{21} \times a_{12}$$

$$T_{12}^{-1} = \frac{1}{77.46 \times (-22.4) - (-20.4) \times 35.3} \begin{pmatrix} -22.4 & -35.3 \\ 204.1 & 77.46 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{5469.63} \begin{pmatrix} -22.4 & -35.3 \\ 204.1 & 77.46 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.00446 & -0.00645 \\ 0.0373 & 0.0141 \end{pmatrix}.$$

$$P = \begin{bmatrix} 46.24 & 22.7 \\ -33 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -0.00446 & -0.00645 \\ 0.0373 & 0.0141 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0.640 & 0.0230 \\ 0.0352 & 0.1704 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.640 & 0.0291 \\ 0.0291 & 0.1704 \end{pmatrix}.$$

Оскільки, отримана матриця не зовсім симетрична, її необхідно симетризувати, тобто скласти недіагональні елементи і поділити навпіл.

У Matlab розрахунок проводиться за допомогою [K,P]=**lqr**(A,B,Q,R).

Точне рішення: $P = \begin{pmatrix} 0.6583 & 0.0233 \\ 0.0233 & 0.1707 \end{pmatrix}.$

Існують рівняння Ляпунова і Ріккаті другого роду, що розв'язуються за допомогою функцій **dlyap** і **dlqr**.

2 Контрольні питання

2.1 Наведіть правило розрахунку рівняння Ляпунова?

2.2 Наведіть правило розрахунку рівняння Ріккаті?

2.3 За допомогою яких команд у Matlab розв'язуються лінійні матричні рівняння?

3 Домашнє завдання

3.1 Обчислити вручну рівняння Ляпунова для матриці $\mathbf{A}_1$ при $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

3.2 Обчислити вручну рівняння Ріккаті для матриць $\mathbf{A}_1$ і $\mathbf{B}_1$ при $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Матриці для обчислень наведено в додатку А.

4 Завдання на дослідження

4.1 Обчислити рівняння Ляпунова у Matlab для матриці $\mathbf{A}_1$ при

$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

4.2 Обчислити рівняння Ріккаті у Matlab для матриць $\mathbf{A}_1$ і $\mathbf{B}_1$ при $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

4.3 Обчислити рівняння Ріккаті другого роду у Matlab для матриць п.4.2.

4.4 Порівняти результати розрахунків з результатами, що отримано в п.3.

4.5 Виконати захист роботи.

5 Зміст протоколу

Протокол лабораторної роботи оформлюється на аркушах формату А4 і повинен мати назву лабораторної роботи та її мету, відповіді на контрольні питання, хід виконання домашнього та лабораторного завдання.

Лабораторна робота 3

Побудова моделей систем у просторі станів

Мета роботи: ознайомитись з методами побудови моделей систем у просторі станів, навчитись розраховувати перехідний процес системи.

1 Теоретичні посилання

Модель системи у матричній формі (простір станів) записується у вигляді:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{u},$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{D}\cdot\mathbf{u},$$

де **u** – вектор вхідних впливів, розмірності m,
y – вектор вихідних змінних, розмірності l,
x – вектор проміжних змінних, що називається вектором станів, розмірності n,
A, B, C, D – матриці коефіцієнтів (**D** найчастіше нульова і не враховується в запису).
Наприклад, матриці системи рівні:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матриця передатних функцій. Правило розрахунку:

$$\mathbf{W(p)} = \mathbf{C}\cdot\left(\mathbf{p}\cdot\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^{-1}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{D}.$$

Приклад:

$$\mathbf{W(p)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\left(\mathbf{p}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}\right)^{-1}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix} \mathbf{p} & -1 \\ 6 & \mathbf{p}+5 \end{bmatrix}\right)^{-1}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\mathbf{p}^2 + 5\mathbf{p} + 6}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \mathbf{p}+5 & 1 \\ -6 & \mathbf{p} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{det} = \mathbf{p}\times(\mathbf{p}+5) - (-1)\times 6 = \mathbf{p}^2 + 5\mathbf{p} + 6 = (\mathbf{p}+2)\times(\mathbf{p}+3),$$

де 2 і 3 - власні значення матриці А

$$\frac{1}{\mathbf{p}^2+5\mathbf{p}+6}\begin{bmatrix} 2\mathbf{p}+10 & 2 \\ -6 & \mathbf{p} \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{(\mathbf{p}+2)(\mathbf{p}+3)}\begin{bmatrix} 2(\mathbf{p}+3) & 2(\mathbf{p}+2) \\ -2(\mathbf{p}+3) & -3(\mathbf{p}+2) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{\mathbf{p}+2} & \frac{2}{\mathbf{p}+3} \\ \frac{-2}{\mathbf{p}+2} & \frac{-3}{\mathbf{p}+3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{0.5\mathbf{p}+1} & \frac{0.66}{0.33\mathbf{p}+1} \\ \frac{-1}{0.5\mathbf{p}+1} & \frac{-1}{0.33\mathbf{p}+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{11}(\mathbf{p}) & \mathbf{W}_{12}(\mathbf{p}) \\ \mathbf{W}_{21}(\mathbf{p}) & \mathbf{W}_{22}(\mathbf{p}) \end{bmatrix}$$

Власні значення матриці А розраховані в лабораторній роботі 1.

Визначення системи по передатній функції. Знайдемо матриці системи за заданою передатною функцією високого порядку. Нехай задана передатна функція виду:

$$\mathbf{W}(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{b}_{n-1}\times\mathbf{p}^{n-1} + \ldots + \mathbf{b}_1\mathbf{p} + \mathbf{b}_0}{\mathbf{p}^n + \mathbf{a}_{n-1}\times\mathbf{p}^{n-1} + \ldots + \mathbf{a}_1\mathbf{p} + \mathbf{a}_0}.$$

Тоді матриці системи дорівнюють:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -\mathbf{a}_0 & -\mathbf{a}_1 & \ldots & -\mathbf{a}_{n-1} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_0 & \mathbf{b}_1 & \ldots & \mathbf{b}_{n-1} \end{bmatrix}, \mathbf{D} = 0$$

Приклад:

$$\mathbf{W}(\mathbf{p}) = \frac{2\times\mathbf{p}^2 + 3\mathbf{p} + 4}{10\mathbf{p}^3 + 5\mathbf{p}^2 + 4\mathbf{p} + 1} = \frac{0.2\times\mathbf{p}^2 + 0.3\mathbf{p} + 0.4}{\mathbf{p}^3 + 0.5\mathbf{p}^2 + 0.4\mathbf{p} + 0.1}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.1 & -0.4 & -0.5 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = 0$$

У Matlab передатна функція за матрицями системи розраховується наступною функцією:

[num,den]=**ss2tf**(A,B,C,D,i),

де num – вектор коефіцієнтів чисельника i-го стовпця матриці передатних функцій,

den – вектор коефіцієнтів спільного знаменника.

Зворотна операція – матриці за передатною функцією отримуються за допомогою функції Matlab:

[A,B,C,D] = **tf2ss**(num,den);

де num – вектор коефіцієнтів чисельника

den – вектор коефіцієнтів знаменника.

Представлення типових ланок у вигляді систем

Представлення інерційної ланки першого порядку:

$$\mathbf{W(p)} = \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{Tp}+1} = \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{u}} \to \mathbf{T \times p \times y} + \mathbf{y} = \mathbf{k \times u} \to \mathbf{T \times \dot{y}} + \mathbf{y} = \mathbf{ku} \to$$

$$\mathbf{\dot{y}} = -\frac{1}{\mathbf{T}}\mathbf{y} + \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{T}}\mathbf{u} \to \mathbf{A} = -\frac{1}{\mathbf{T}}, \mathbf{B} = \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{T}}, \mathbf{C} = 1, \mathbf{D} = 0.$$

Представлення інтегральної ланки першого порядку:

$$\mathbf{W(p)} = \frac{1}{\mathbf{Tp}} = \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{u}} \to \mathbf{Tpy} = \mathbf{u} \to \mathbf{T\dot{y}} = \mathbf{u} \to \mathbf{\dot{y}} = \frac{1}{\mathbf{T}}\mathbf{u} \to \mathbf{A} = 0, \mathbf{B} = \frac{1}{\mathbf{T}}, \mathbf{C} = 1, \mathbf{D} = 0$$

Представлення ланки запізнення апроксимацією Паде 1-го порядку:

$$\mathbf{e}^{-\mathbf{p}\tau} \approx \frac{1-0.5\mathbf{p}\tau}{1+0.5\mathbf{p}\tau} = \frac{2}{0.5\tau\mathbf{p}+1} - 1 \to \mathbf{A} = -\frac{2}{\tau}, \mathbf{B} = \frac{4}{\tau}, \mathbf{C} = 1, \mathbf{D} = -1,$$

$$\begin{array}{r|l} 1-0.5\mathbf{p}\tau & 1+0.5\mathbf{p}\tau \\ \hline -\underline{\;-1-0.5\mathbf{p}\tau\;} & -1 \\ 2 & \end{array}.$$

$\mathbf{D} \neq 0$, у випадку коли чисельник і знаменник мають один порядок.

Перевід системи в дискретний час. Система в дискретному часі записується різницевим рівнянням виду:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \overline{\mathbf{A}}\mathbf{x}_i + \overline{\mathbf{B}}\mathbf{u}_i, \qquad \mathbf{y}_i = \mathbf{C \times x}_i + \mathbf{Du}_i,$$

При переведенні матриці **C** і **D** не змінюються.

Формули переведення: $\begin{bmatrix} \overline{\mathbf{A}} & \overline{\mathbf{B}} \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \mathbf{e}^{\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \Delta \mathbf{t}}$ чи $\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{e}^{\mathbf{A} \times \Delta \mathbf{t}}, \overline{\mathbf{B}} = \mathbf{A}^{-1} \times \left(\overline{\mathbf{A}} - \mathbf{I} \right) \mathbf{B}$.

У Matlab переведення системи в дискретний час проводиться за допомогою команди [Ad Bd]=**c2d**(A,B,dt).

Розрахунок перехідного процесу в системи. Переведемо систему

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

в дискретний час і побудуємо розгінну характеристику.

Матрична функція для матриці A розрахована в лабораторній роботі 1.

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 3\mathbf{e}^{-2\times t} - 2\mathbf{e}^{-3t} & \mathbf{e}^{-2\times t} - \mathbf{e}^{-3\times t} \\ -6\mathbf{e}^{-2\times t} + 6\mathbf{e}^{-3\times t} & -2\mathbf{e}^{-2\times t} + 3\mathbf{e}^{-3\times t} \end{bmatrix}.$$

Оберемо крок дискретності $\Delta \mathbf{t} = \mathbf{min}\left(\left|\frac{1}{\lambda(\mathbf{A})}\right|\right) = \mathbf{min(abs(}\frac{1}{\mathbf{-2}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{-3}}\mathbf{))} = \frac{1}{3} = 0.33$,

тоді

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{e}^{\mathbf{A}\times\Delta \mathbf{t}} = \mathbf{e}^{\mathbf{A}\times 0.33} = \begin{bmatrix} 3\mathbf{e}^{-2\times 0.33} - 2\mathbf{e}^{-3\times 0.33} & \mathbf{e}^{-2\times 0.33} - \mathbf{e}^{-3\times 0.33} \\ -6\mathbf{e}^{-2\times 0.33} + 6\mathbf{e}^{-3\times 0.33} & -2\mathbf{e}^{-2\times 0.33} + 3\mathbf{e}^{-3\times 0.33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8074 & 0.1453 \\ -0.8716 & 0.0810 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\mathbf{det}} \times \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{\mathbf{T}} = \frac{1}{\mathbf{det}} \times \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.8333 & -0.1667 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{det} = 0 \times (-5) - 1 \times (-6) = 6.$$

$$\overline{\mathbf{B}} = \mathbf{A}^{-1} \times \left(\overline{\mathbf{A}} - \mathbf{I} \right) \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -0.8333 & -0.1667 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 0.8074 & 0.1453 \\ -0.8716 & 0.0810 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -0.8333 & -0.1667 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -0.1926 & 0.1453 \\ -0.8716 & -0.9190 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2416 & 0.2095 \\ -0.4831 & -0.6224 \end{bmatrix}.$$

Зверніть увагу, що $\Delta \mathbf{t}$ обирається за вказаною вище формулою у випадку, якщо виконується тільки моделювання. Якщо необхідно розраховувати регулятор для системи, то знайдене $\Delta \mathbf{t}$ треба зменшити у 10 разів. Розрахуємо розгінну характеристику при подачі одиничного стрибка на перший вхід:

$$\mathbf{x}_1 = \overline{\mathbf{A}} \times \mathbf{x}_0 + \overline{\mathbf{B}} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{y}_0 = \mathbf{C} \times \mathbf{x}_0 \to \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0.2416 \\ -0.4831 \end{bmatrix}, \mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{x}_2 = \overline{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x}_1 + \overline{\mathbf{B}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{y}_1 = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}_1 \to \ \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0.3664 \\ -0.7329 \end{bmatrix}, \mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0.4831} \\ \mathbf{-0.4831} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{x}_3 = \overline{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x}_2 + \overline{\mathbf{B}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{y}_2 = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}_2 \to \ \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{0.4310} \\ \mathbf{-0.8619} \end{bmatrix}, \mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0.7329} \\ \mathbf{-0.7329} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{x}_4 = \overline{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x}_3 + \overline{\mathbf{B}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{y}_3 = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}_3 \to \ \mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{0.4643} \\ \mathbf{-0.9286} \end{bmatrix}, \mathbf{y}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{0.8619} \\ \mathbf{-0.8619} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{x}_5 = \overline{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x}_4 + \overline{\mathbf{B}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{y}_4 = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}_4 \to \ \mathbf{x}_5 = \begin{bmatrix} \mathbf{0.4816} \\ \mathbf{-0.9631} \end{bmatrix}, \mathbf{y}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{0.9286} \\ \mathbf{-0.9286} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{x}_6 = \overline{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x}_5 + \overline{\mathbf{B}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{y}_5 = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}_5 \to \ \mathbf{x}_6 = \begin{bmatrix} \mathbf{0.4905} \\ \mathbf{-0.9809} \end{bmatrix}, \mathbf{y}_5 = \begin{bmatrix} \mathbf{0.9631} \\ \mathbf{-0.9631} \end{bmatrix}.$$

Графік розрахованого перехідного процесу наведено на рис. 1.

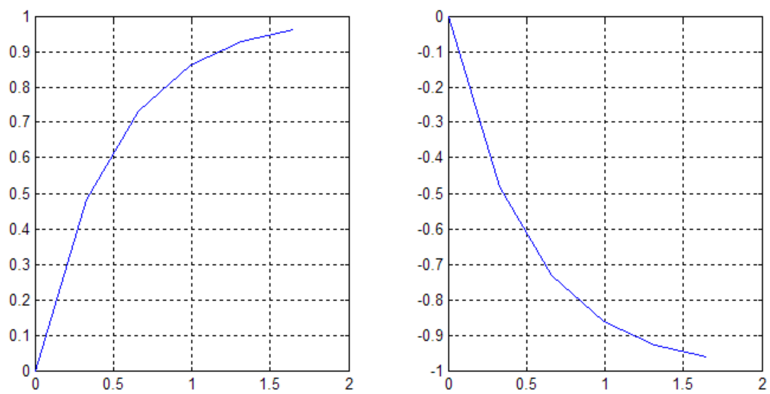


Рис. 1 – Графік перехідного процесу системи

Як бачимо, графіки перехідних процесів виходять на ті ж самі значення коефіцієнтів передачі, які ми отримали в матриці передатних функцій, і постійна часу на графіках дорівнює 0.5 с. Тому розрахунок виконано вірно.

Аналогічно, можливо розв'язати систему лінійних диференційних рівнянь будь-якого порядку і побудувати її перехідний процес. Усі рішення зводяться до складання і множення матриць відповідного розміру, що для цифрової розрахункової техніки є елементарною задачею.

2 Контрольні питання

2.1 Наведіть форму запису моделі системи у матричній формі (просторі станів).

2.2 Що таке вектор станів?

2.3 Наведіть правило розрахунку матриці передатних функцій за моделлю у просторі станів.

2.4 Наведіть правило визначення матриць системи за передатною функцією високого порядку.

2.5 Наведіть формули представлення типових ланок у вигляді системи.

2.6 У чому сенс переведення системи в дискретний час? Наведіть форму запису системи в дискретному часі.

2.7 Наведіть формулу переведення системи в дискретний час.

2.8 Як розраховуються процеси в дискретній системі?

3 Домашнє завдання

3.1 Обчислити вручну матриці передатних функцій $\mathbf{W_1(p)}$ і $\mathbf{W_2(p)}$ систем $\mathbf{A_1,B_1,C_1}$ і $\mathbf{A_2,B_2,C_2,D_2}$.

3.2 Сформувати матриці системи для передатної функції $\mathbf{W_1(p)\times W_2(p)}$.

3.3 Перевести систему $\mathbf{A_1,B_1,C_1}$ у дискретний час, попередньо визначивши крок дискретності.

3.4 Розрахувати розгінну характеристику для системи $\mathbf{A_1,B_1,C_1}$.

3.5 Апроксимувати розгінну характеристику інерційною ланкою першого порядку з запізненням і представити її в вигляді системи **A**, **B**, **C.**

Матриці для обчислень наведено в додатку **А**.

4 Завдання на дослідження

4.1 Обчислити у Matlab матриці передатних функцій $\mathbf{W_1(p)}$ і $\mathbf{W_2(p)}$ систем $\mathbf{A_1,B_1,C_1}$ і $\mathbf{A_2,B_2,C_2,D_2}$.

4.2 Сформувати матриці системи для передатної функції $\mathbf{W_1(p)\times W_2(p)}$ за допомогою Matlab.

4.3 Перевести систему $\mathbf{A_1,B_1,C_1}$ за допомогою Matlab у дискретний час, попередньо визначивши крок дискретності у Matlab.

4.4 Розрахувати за допомогою Matlab розгінну характеристику для системи $\mathbf{A_1,B_1,C_1}$.

4.5 Виконати захист роботи.

5 Зміст протоколу

Протокол лабораторної роботи оформлюється на аркушах формату А4 і повинен мати назву лабораторної роботи та її мету, відповіді на контрольні питання, хід виконання домашнього та лабораторного завдання.

Лабораторна робота 4

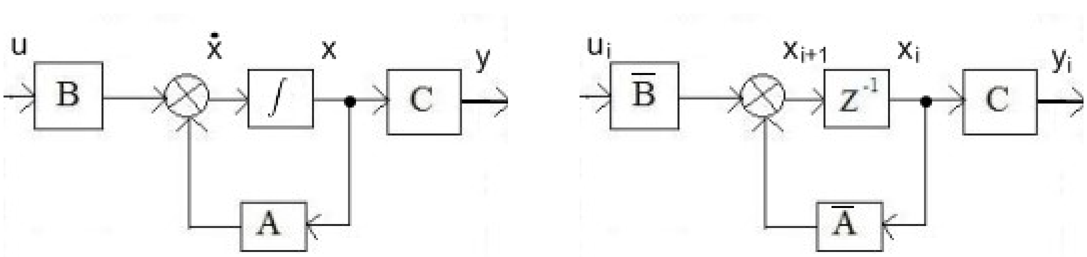
Побудова структурних схем багатовимірних систем

Мета роботи: ознайомитись з методами формування матриць складних з матриць більш простих систем і систем, що записані у формі нелінійних рівнянь.

1 Теоретичні посилання

Виділяють два типи структурних схем: матричні і деталізовані. Матричні структурні схеми використовують для формування матриць складної системи з матриць більш простих підсистем. Деталізовані структурі схеми служать для формування матриць системи з наборів елементарних ланок і зв’язків між ними. Елементарними ланками в теорії лінійних систем є інтегратор, ланка запізнення, коефіцієнт, суматор.

Розглянемо побудову матричних структурних схем. Для системи в неперервному дискретному часі матрична структурна схема має вигляд:



а) неперервний час   б) дискретний час

Рис. 1 – Матрична структурна схема

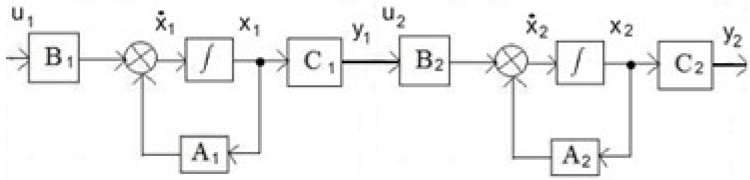
Позначення z^{-1} – запізнення на один такт, тобто $z^{-1} = e^{-\Delta t p}$.

Складемо з матричних структурних схем матриці систем, що з’єднані послідовно, паралельно і за допомогою зворотного зв’язку. Процедура з’єднання підсистем у дискретному часі виконується повністю аналогічно.

Структурні схеми з’єднань та відповідні матриці в просторі станів наведені в табл. 1.

Таблиця 1 – МАТРИЦІ ОСНОВНИХ ТИПІВ З’ЄДНАНЬ СИСТЕМ

<table>
<tr><th>Структурна схема з’єднання</th><th>Матричне представлення</th></tr>
<tr><td>

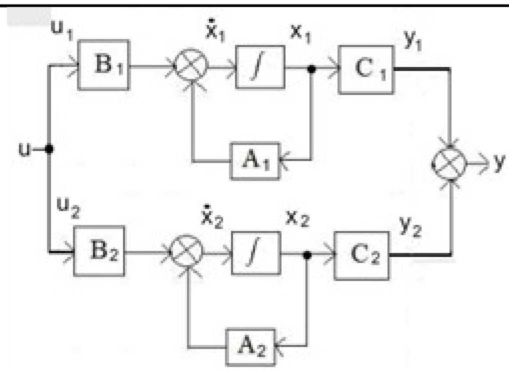


</td><td>

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 \end{matrix} \\ A = \begin{matrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{matrix} & \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2C_1 & A_2\end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{c} u \\ B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0\end{bmatrix}\end{array},$$

$$C = y\begin{bmatrix}0 & C_2\end{bmatrix}$$

</td></tr>
<tr><td>

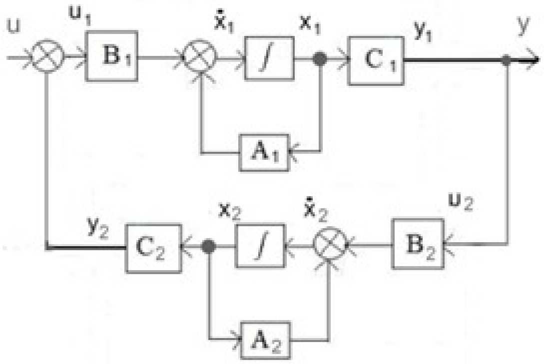


</td><td>

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 \end{matrix} \\ A = \begin{matrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{matrix} & \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2\end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{c} u \\ B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2\end{bmatrix}\end{array},$$

$$C = y\begin{bmatrix}C_1 & C_2\end{bmatrix}$$

</td></tr>
<tr><td>



</td><td>

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 \end{matrix} \\ A = \begin{matrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{matrix} & \begin{bmatrix} A_1 & B_1C_2 \\ B_2C_1 & A_2\end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{c} u \\ B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0\end{bmatrix}\end{array},$$

$$C = y\begin{bmatrix}C_1 & 0\end{bmatrix}$$

</td></tr>
</table>

Розглянемо побудову деталізованої структурної схеми системи. Нехай, дана система в матричній формі виду:

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \\ A = \begin{matrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.1 & -0.4 & -0.5\end{bmatrix} \end{array}, \begin{array}{c} u \\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1\end{bmatrix}\end{array},$$

$$C = y\begin{bmatrix}0.4 & 0.3 & 0.2\end{bmatrix}, \quad D = 0$$

Деталізована структурна схема будується за наступним алгоритмом (див. рис. 2):

1. Розміщуються інтегратори (чи ланки запізнення для системи в дискретному часі) кількістю, що дорівнює розмірності матриці **A**.

2. Перед кожним інтегратором пишуть похідну елементу вектора стану з номером, що відповідає номеру рядку в матриці **A**. На виході інтегратора пишуть змінну.

3. На вході інтегратора підсумовується стільки змінних, скільки є ненульових елементів у рядку, що розглядається, в матрицях **A** і **B**.

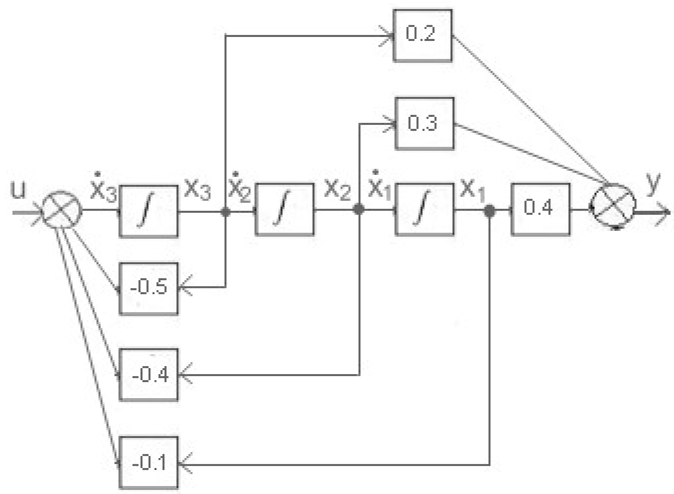


Рис. 2 – Деталізована структурна схема системи в матричній формі

Для системи, що задана у формі матриці передатних функцій, наприклад,

$$\mathbf{W(p)} = \begin{bmatrix} \dfrac{\mathbf{0.24}}{\mathbf{321p+1}}\mathbf{e^{-35p}} & \dfrac{\mathbf{-0.17}}{\mathbf{214p+1}}\mathbf{e^{-33p}} \\ \dfrac{\mathbf{0.28}}{\mathbf{170p+1}}\mathbf{e^{-23p}} & \dfrac{\mathbf{-0.74}}{\mathbf{321p+1}}\mathbf{e^{-65p}} \end{bmatrix}$$

деталізована структурна схема будується аналогічно. За матрицею передатних функцій будуємо структурну схему (див. рис. 3).

u1

Рис. 3 – Структурна схема системи