I. Шеннон ввел понятие количественной меры измерения информации в сообщении, которое определяется, как:

$$I(a) = \log \frac{1}{p(a)} = -\log p(a)$$

где $p(a)$ - вероятность сообщения

Количество информации - это характеристика апостериорная и становится известной только после поступлення сообщения

Свойства I(a)

а)При p(a) =1 I(a)=0

I(a) тем більше, чем менее вероятно событие

б) I(a) >0 см. формулу

в) I(a) – есть аддитивная величина. т.е.

$$I(a_1,a_2,\ldots\ldots a_n)=\sum_{i=1}^{n} I(a_i)= -\sum_{i=1}^{n} \log p(a_i)$$

1.Основание log =2 и определяет единицу измерения информации—бит. В двоичном коде для элементов «0» и «1» применем

p(0)=p(1)=1/2,

тогда I(a)= -log (1/2)=1 дв.ед/символ –эту ед.информации назвали битом.

2.Для ограниченного числа сообщений, образующих группу. т.е. ансамбль:

$$\sum_{i=1}^{m} p(a_i)=1$$

При равновероятных событиях

$p(a_1) = p(a_2) = p(a_3) =\ldots.= p(a_n) = 1/m$

$I(a)=-\log p(a_i)=-\log (1/m)= \log m$

3. Для алфавита из m букв (ансамбль m), в слове состоящем из n букв

$$I(a)= -\sum_{i=1}^{n}\log p(a) = -\sum_{i=1}^{n} \log(1/m) = n \log m$$

В двоичном коде m =2, тогда

I(a)= n log 2=n

<u>Среднее количество информации -</u>

$$I(X)=\sum_{i=1}^{n} p(x_i)\log\frac{1}{p(x_i)} = -\sum_{i=1}^{n} p(x_i)\log p(x_i)$$

II. ***Энтропия***

определяет среднее количество информации, приходящееся на одно сообщение источника и является мерой неопределенности сообщения перед его передачей, т.е объективной характеристикой источника сообщения и может быть вычисленна априорно, т.е. до получения сообщения.

$$H(A)=\overline{I(a_i)}=-\sum_{i=1}^{m}p(a_i)\log p(a_i)=-\sum_{i=1}^{m}p(a_i)\log p(a_i)$$

1)Для равновероятного сообщения

$$H(A)_{\max}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\log\frac{1}{n}=\log_2 n$$

при равновероятных событиях энтропия возрастает с увеличением количества событий от 1 до бесконечности ?????

<u>Свойства энтропии:</u>

Энтропия детерминированных сообщений равно нулю.

Энтропия максимальна при равновероятных сообщениях

Энтропия двух независимых сообщений

$$H(A)=-p(x_1)\log p(x_i)-p(x_2)\log p(x_2)$$

<u>Энтропия сложных сообщений (т.е. совокупность сообщений вырабатываемых несколькими источниками)</u>

Совместная энтропия двух источников:

$$H(X,Y)=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p(x_i\ ,y_j\ )\log p(x_i\ ,y_j)=H(X)+\sum_{i=1}^{n}p(x_i)H(Y/x_i)$$ ***<u>, где</u>***

$p(x_i,y_j)$ - вероятность совместного появления сообщений у, х;

$p(x_i,y_j)=p(x_i)p(y_j/x_i)$ где $p(y_j/x_i)$ условная вероятность сообщения yj при условии , что поступило сообщений x i.

$H(Y/x_i)=\sum_{j=1}^{m}p(y_j/x_i)\log p(y_j/x_i)$ - ***это частная условная энтропия***, выражающая энтропию сообщения Y при условии, что имело место сообщение X.

$H(Y/X)=-\sum_{i=1}^{n}p(x_i)H(Y/x_i)=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p(x_iy_j)\log p(y_j/x_i)$ ***<u>- средняя</u>*** или просто условная энтропия показывает, какую энтропию дают сообщения X, когда уже известна энтропия сообщения У.

<u>Совместная энтропия</u>

$H(X/Y)=H(Y)+H(X/Y)$ ***<u>т.е. равна</u>*** сумме безусловной энтропии одного сообщения и условной энтропии второго сообщения

<u>Свойства энтропии сложных сообщений при статистически независимых сообщениях</u> X,Y

1. С***<u>овместная энтропия</u>*** равна сумме энтропий сообщений

$$H(X,Y)=H(X)+H(Y)$$

2.Условная энтропия равна безусловной

$$H(Y/X)=H(Y)$$

Свойства энтропии сложных сообщений при полной статистической зависимости сообщениях X,Y
Совместная энт ропия равна безусловной энтропии одного сообщения

$$H(X,Y) = H(X) = H(Y)$$

Это выплывает из того, что при полной статистической зависимости условные вероятности равны 0 или 1 и следовательно условные энтропии равны 0 т.е H(X/Y)=H(Y/X)=0 тогда

H(X,Y)=H(X)=H(Y)

3.Условная энтропия может меняться в пределах
$0 <= H(Y/X) <= H(Y)$ т.е..условная энтропия положительна, равна 0 при полной статистической зависимости событий, максимальна при полной статистической независимости событий и равна безусловной энтропии , то отсюда и вытекает это неравенство.
4.Для совместной энтропии всегда справедливо соотношение

$$H(X,Y) <= H(X) + H(Y)$$

При корреляционной связи между элементами энтропия сообщения , а следовательно и количество передаваемой информации уменьшается , причем уменьшение будет тем интенсивнее, чем сильнее корреляционная связь и чем большее число элементов будет охвачено этими связями .

Ш Дискретне сообщения

Рассмотрим систему передаваемых сообщений X и принимаемых –Y.
Наличие помех имеют случайный характер и невозможно точно установить при приеме, какое сообщение было передано, поэтому говорят об условной вероятности P(xi/yj), определяющей вероятность передачи сообщения xi при условии, что будет прийнято сообщение yi.

Условная энтропия $H(x_i/y_j) = -\log p(x_i/y_j)$ говорит о том, что имеется неопределенность в сообщении y_j относительно x_i

Частным количеством информации $I(y_j,x_i)=\log p(x_i/y_j)/p(x_i)$ –это количество информации, которое содержится в принятом сообщении **yj** относительно переданного **xi**

Среднее количество информации о всех **xi**, содержащееся в одном принятом сообщении **yi**

$$I(y_j, X) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i / y_j) I(y_j, x_i) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i / y_j) \log \frac{p(x_i/y_j)}{p(x_i)}$$

Среднее количество информации содержащееся в У относительноX

$$I(Y, X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p(x_i / y_j) \log \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i) p(y_j)} = \text{H(X)-H(X/Y)= H(X)+H(Y)-H(X,Y)}$$

Т.е H(X)- характеризует начальную априорную неопределенность сообщения , а Условная H(X/Y) єнтропия характеризует остаточную (апостериорную) неопределенность сообщения.

H(X)-энтропия передаваемого X
H(Y)- энтропия принимаемого У

H(X,Y)- совместная энтропия

Полная взаимная информация I(Y,X)=I(X,Y)

<u>Два предельных случая передачи</u>

1. Полная статистическая зависимость передаваемых X и принимаемых У имеет место при незначительных уровнях поме хили при полном отсутствии.
Тогда условная энтропия равна нулю

H(X/У)=0; Количество информации содержащееся в У относительно X , равно энтропии передаваемых сообщений.

2.Полная статистическая независимость сообщений имеет место при высоком уровне помех, корда помела подавляет полезный сигнал.
Тога условная энтропия равна начальной

I(Y,X)=0 т.е сообщение У не содержит ни какой информации о сообщении X.

Избыточность сообщения измеряется формулой

$$K = \frac{H\max - H(X)}{H\max}$$

Если элементы источника сообщения принимают состояния a1,a2, ….,an с вероятностями p (a1), p(a2)......p(an) , а элементы адресата – состояния b1, b2, b3…..bn с вероятностями p(b1), p(b2),….p(bn), то **<u>условная энтропия $H(b_j/a_i)$</u>** выражает неуверенность, что отправив ai мы получим bj
<u>Понятие H(A/bj) -</u>неуверенность, которая остается после получения bj, в том что было отправлено именно ai. Если помехи отсутствуют, то посланному символу a1 соответствует прийнятый b 1 и т.д. При этом H(A)=H(B).

Но помехи уничтожают или искажают часть передаваемой информации.
Информационныеп отери описываются частной и общей условной энтропией. Вычисление этих энтропий удобно призводить при помощи канальних матриц.

Если ***<u>канал</u>*** описывается ***<u>со стороны источника (т.е. известен посланный сигнал)</u>*** , то вероятность того, что при передачи сигнала ai по каналу связи мы получим bj обозначается как условная вероятность p(bj/ai) и канальная матрица имеет вид

	B			
	B1	B2	Bj	Bn
A1	P(b1/a1)	P(b2/a1)	P(bj/a1)	P(bn/a1)
A2	P(b1/a2)	P(b2/a2)	P(bj/a2)	P(bn/a2)
Ai	P(b1/ai)	P(b2/ai)	P(bj/ai)	P(bn/ai)
An	P(b1/an)	P(b2/an)	P(bj/an)	P(bn/an)

Вероятности , расположенные по диагонали определяют вероятность правильного приема, остальные –ложного . ∑ вероятностей по строкам равна 1.

Потери информации, приходящиеся на долю сигнала ai описываются ***частной условной энтропиеей***

Например для сигнала А1

$$H(B/a1)=-\sum^{n} p(bj/a1)\log p(bj/a1)$$

Потери при передачи всех сигналов описывается общей условной энтропией, которая является суммой всех возможных частный энтропий.

$$H(B/A)=-\sum^{n}_{J=1} p(ai)\sum p(bj/ai)\log p(bj/ai)\ p(bj/ai)=\sum^{n}_{i=1}\sum^{n}_{j=1} p(ai)p(bj/ai)\log p(bj/ai)=$$

$$=.\sum^{N}_{i=1}\sum^{n}_{j=1} p(ai,bj)\log p(bj/ai)-$$ ---Общее выражение неравновероятных и взаимозависимых каналов.

<u>Если исследовать канал со стороны приемника (известен прийнятый сигнал)</u>

Канальная матрица имеет вид

$$H(A/B)=-\sum\ \sum p(bj)\ p(ai/bj)\log p(ai/bj)$$

$$H(A/bj)=-\sum^{n}_{I=1} p(ai/bj)\log p(ai/bj)$$

	B			
	B1	B2	Bj	Bn
A1	P(a1/b1)	P(a1/b2)	P(a1/bj)	P(a1/bn)
A2	P(a2b1)	P(a2/b2)	P(a2/bj)	P(a2/bn)
Ai	P(ai/b1)	P(a2/b2)	P(ai/bj)	P(a3/bn)
An	P(an/b1)	P(an/b2)	P(an/bj)	P(an/bn)

Сумма вероятностей по столбцам равна 1.

$$H(A,B)=-\sum^{N}_{I=1}\sum^{n}_{j=1} p(ai,bj)\log p(ai,bj)$$ бит.дв.сим.

$$H(A,B)=H(A)+H(B/A)=H(B)+H(A/B)$$

Энтропия объединения м.б. определена с помощью матрицы вида

P(ai,bj)=	P(a1, b1)	P(a1, b2)	P(a1,bn)
	P(a2, b1)	P(a2, b2)	P(a2, bn)
	P(ai, b1)	P(a2, b2)	P(a3, bn)
	P(an, b1)	P(an, b2)	P(an, bn)

Сумма вероятностей по столбцам и по строкам равна 1 .

Такая матрица обладает свойствами:

$$\sum_{i} p(ai,bj)=p\,(bj),$$

$$\sum_{j} p(ai,bj)=p\,(ai),$$

∑ p(ai) =∑ p (bj)=1

p(ai,bj)=p(ai)*p(bj/ai)=p(bj)*o(ai/bj)

Задача
Задана матрица вероятности системы объединения из двух систем А и Б.

$$p(A,B)=\begin{bmatrix}0{,}3\\0{,}2\\0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}0\\0{,}3\\0{,}1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0.1\\0\end{pmatrix}$$

Определить 1.безусловную энтропию системы А .
2. Безусловную энтропию системы В.
3. Полную условную энтропию H(B/A), H(A/B)
4. Взаимную энтропию H(A, B)
5.Количество полученной информации
6.Частную энтропию H(A/b1), H(B/a3)

p(ai)
0.3

$$p(A,B)=\begin{bmatrix}0{,}3\\0{,}2\\0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}0\\0{,}3\\0{,}1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0.1\\0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}0.3\\0.6\\0.1\end{bmatrix}\begin{matrix}0.6\\0.1\end{matrix}$$

$p(j)\,0.5 \quad 0.4 \quad 0.1$

H(A)= - $\sum_{I=1}^{m}$ p(ai) log p(ai)= -[0.3 log 0.3+0.6 log0.6+0.1 log 0.1]=1,295 бит/сост.

H(B)=-[0.5 log0.5+0.4 log 0.4+0.1 log0.1] =1.36 бит/сост.

2. Построим матрицу условных вероятностей, но сначало надо эти вероятности определить.

P(ai/bj)=p(ai,bj)/p(bj);
P(a1/b1)=0.3/0.5=0.6
P(a1/b2)=0/0.4=0
P(a1/b3)=0/0.1=0
P(a2/b1)=0.2/0.5=0.4
P(a2/b2=0.3/0.4=0.7
P(a2/b3)=0.1/0.1=1
P(a3/b1)=0./0.5=0
P(a3/b2)=0.1/0.4=0.25
P(a3/b3)=0

$$P(ai/bj)=\begin{matrix}0.6 & 0 & 0\\0.4 & 0.75 & 1\\0 & 0.25 & 0\end{matrix}$$

$H(A/B)=-\sum\sum p(bj)\, p(ai/bj) \log p(ai/bj)=-0.5(0.6 \log 0.6 +0.4 \log 0.4+0 \log 0)+0.4(0 \log 0$ $0.75 \log 0.75+0.25 \log 0.25] +0.1[0 \log 0+1 \log 1+0 \log 0]=0.324+0.485=0.809$ бит/сост

или

$H(A/B)=-\sum\sum p(ai)\, p(ai/bj) \log p(ai/bj)=-[0.3(0.6 * \log 0.6+0 \log 0+ 0 \log 0)+0.6(0.4 \log 0.4+0.75 \log 0.75+1 \log 1)+0.1(0 \log 0+ 0.25 \log 0.25+0 \log 0)]=0,809$ бит/сост.

Аналогично для H(B/A)

$P(bj/ai)=p(ai, bj)/ p(ai);$

$P(b1/a1)=0.3/0.3=1$
$P(b1/a2)=0.2/0.6=0.33$
$P(b1/a3)=0/0.1=0$
$P(b2/a1)=0/0.3=0$
$P(b2/a2)=0.3/0.6=0.5$
$P(b2/a3)=0.1/0.1=1$
$P(b3/a1)=0/0.3=0$
$P(b3/a2)=0.1/0.6=0.167$
$P(b3/a3)=0/0.1=0$

$$P(bj/ai)=\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0.33 & 0.5 & 0.167 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$H(B/A)=-\sum_{I=1}\sum_{J=1} p(ai)\, p(bj/ai) \log p(bj/ai)=-[0.3(1 \log 1+0 \log 0+0 \log 0)+0.6(0.33 \log 0.33+0.5 \log 0.5+0.167 \log 0.167)+0.1(0 \log .+1 \log 1+ 0 \log 0)]=0.875$ бит/сим.

Или

$H(B/A)=-\sum_{I=1}\sum_{j=1} p(ai,bj) \log p(bj/ai)= -(0.2 \log 0.33+0.3 \log 0.5+0.1 \log 0.167)=0.87$ бит/сост.

Взаимная энтропия

$H(A,B)= -\sum\sum p(ai,bj) \log p(ai,bj)= -(2*0.3 \log 0.3+2*0.1 \log 0.1+0.2 \log 0.2)=2.17$ бит/сост.

Проверка:
$H(A,B)=H(A)+H(B/A)=1.285+0.875=2.169$

$H(A,B)=H(B)+H(A/B)=1.36+0.809=2.169$

КОл=во полученной информации

$I(A,B)=H(A)-H(A/B)=H(B) – H(B/A)=1.285-0.809=0.486$бит/симв.
Или $=1.36-0.875=0.49$ бит/симв.
-
Частотная условная энтропия

$H(A/b1)= - \sum p(a1/b1) \log p(ai/b1)= -[p(a1/b1) \log p(a1/b1)+p(a2/b1) \log p(a2/b1)+p(a3/b1) \log p(a3/b1)]=0.6 \log 0.6+0.4 \log 0.4+0 \log 0=0.971$ бит/сообщ

$H(B/a3)= \sum p(bj/a3) \log p(bj/a3)= - [p(b1/a3) \log p(b1/a3)+p(b2/a3) \log p(b2/a3)+p(b3/a3) \log p(b3/a3)=0 \log 0+ 1 \log 1+0 \log 0=$