Ключевые положения

Код с проверкой на четность является простейшим систематическим кодом $(n,\ n-1)$. Он образуется путем добавления к комбинации из $n-1$ информационных символов одного проверочного символа, равного сумме $n-1$ информационных символов по модулю 2. После добавления проверочного символа образуются кодовые комбинации, содержащие только четное число единиц.

Применение этого кода позволяет при декодировании обнаруживать все ошибки нечетной кратности, так как при наличии таких ошибок принимаемая комбинация содержит нечетное число единиц и является запрещенной.

При построении циклического кода (n,k) комбинацию из информационных символов удобно отображать полиномом $a(x)$. Так, комбинации 10110 соответствует полином $a_1 = x^4 + x^2 + x$, а комбинации 10100 – полином $a_2(x) = x^4 + x^2$. Комбинация циклического кода отображается полиномом $b(x) = x^r \cdot a(x) + r(x)$. Здесь $r = n-k$ – число проверочных символов, умножение $a(x)$ на x^2 эквивалентно дописыванию к комбинации информационных символов r нулей, $r(x)$ – полином степени не выше $r-1$, соответствующий проверочным символам. Добавление его эквивалентно значению r нулей проверочными символами. Полином $r(x)$ – остаток от деления $x^r \cdot a(x)$ на порождающий полином $g(x)$. Степень полинома $g(x)$ равна r, поэтому степень полинома $r(x)$ не превышает $r-1$. Ясно, что все полиномы $b(x)$, соответствующие разрешенным комбинациям циклического кода, делятся без остатка на порождающий полином $g(x)$.

Допустим, что используется код (10.5) с порождающим полиномом $g(x) = x^5 + x^4 + x^2 + 1$. Тогда $x^5 \cdot a_1(x) = x^5 \cdot (x^4 + x^2 + x) = x^9 + x^7 + x^5$. В результате деления последнего полинома на $g(x)$ получим $r_1(x) = x^3 + x^2 + 1$, т.е. кодер комбинацию 10110 преобразует в комбинацию 1011001101. Аналогично комбинация 10100 преобразуется в комбинацию 1010010010.

Пусть принятой комбинации соответствует полином $\hat{b}(x)$. При декодировании полином $\hat{b}(x)$ необходимо поделить на порождающий полином $g(x)$. Если деление не дает остатка, это указывает, что в принятой комбинации либо отсутствуют ошибки, либо содержатся необнаруженные ошибки – принята разрешенная комбинация. Если в результате деления получается ненулевой остаток, то это указывает, что принятая комбинация содержит ошибки, является запрещенной.

Полином $\hat{b}(x)$ можно записать: $\hat{b}(x) = b(x) + e(x)$, где $e(x)$ – полином ошибок (например, при ошибке в третьем символе справа $e(x) = x^2$, в первом и седьмом –

$e(x) = x^5 + 1$ и т.д.). Тогда $\dfrac{\hat{b}(x)}{g(x)} = \dfrac{b(x)}{g(x)} + \dfrac{e(x)}{g(x)}$. Так как $b(x)$ делится на $g(x)$ без остатка, то остаток деления определяется частным $\dfrac{e(x)}{g(x)}$. Если кратность ошибки не превышает кратность исправляемой данным кодом ошибки, то каждому полиному ошибок $e(x)$ соответствует свой остаток от деления $\dfrac{e(x)}{g(x)}$ – синдром $c(x)$. Всякому ненулевому синдрому соответствует определенная конфигурация ошибок, которая и исправляется.

Код (10.5) с порождающим полиномом $g(x) = x^5 + x^4 + x^2 + 1$ имеет $d = 4$.

Циклические коды отличаются простотой реализации кодирующих и декодирующих устройств.

Для самоподготовки –краткие сведения.

Коды получили своё названия из-за свойства: каждая кодовая комбинация м.б. получена циклической престановкой символов.

Двоичное число 1010101 можно представить в виде полинома.

$A(x)=1*x^6+0*x^5+1*x^4+0*x^3+1*x^2+0*x^1+1*x^0=x^6+x^4+x^2+1$

И затем все действия над ним свести к действиям над многочленом.

Циклический сдвиг образуется умножением полинома на x. $(x^6+x^4+x^2+1)*x= x^7+x^5+x^3+x$, заменив x^7 на 1 , получим x^5+x^3+x+1, что соответствует кодовой комбинации 0101011.

Циклическим сдвигом можно получить n -1 различных комбинаций, из которых любые могут быть взяты в качестве исходных. Остальные кодовые комбинации можно получить используя свойства циклического кода.

Свойства циклического кода

1.Разрешенная кодовая комбинация при делении её на образующий полином имеет остаток равый 0. Если в результате деления обнаружен остаток, то значит кодовая комбинация трансформировалась в запрещенную. Из всех возможных полиномов степени n----(2^n) только 2^k имеют нулевой вычет по модулю 2. n – это высшая степень полинома, k= n-r

2. Кодовая комбинация циклического кода (n, k) может быть получена 2 способами:

-путем умножения простой кодовой комбинации степени (k-1) на одночлен $x^{(n-k)}$ и ***добавления к этому произведению остатка,*** полученного от деления произведения на образующий полином степени (n- k)

- путем умножения простой кодовой комбинации степени (k-1) на образующий полином степени (n- k).

При первом способе кодирования первые k символов полученной кодовой комбинации совпадают с соответствующими символами исходной комбинации

При этом способе усложняется процесс декодирования, т.к. в кодовой комбинации информационные символы содержатся неявном виде.

2^{n-k} -1>=n; ***2^k <=*** $\frac{2^n}{n+1}$ ***, отсюда степень образующего полинома***

2^{ρ} -1>=n,

$\rho = n - k \geq \log(n+1)$

Пример:

Закодировать простую кодовую комбинацию 1011циклическим кодом, обнаруживающим однократные и двукратные ошибки или устраняющим однократные ошибки.

Решение:

1.По заданному кол-ву информационных символов к=4 определяем значность кода, используя соотношение ***2^k <=*** $\frac{2^n}{n+1}$

2. Для построения циклического кода надо выбрать образующий полином. Известно, что степень его равна p. Находим p и по таблицам находим и выбираем образующий полином $P(x)=x^3+x^2+1$.

3. Используем первый способ кодирования.

-исходную комбинацию умножаем на $x^{n-k}=x^3$ и получаем

$x^3(x^3+x+1)=x^6+x^4+x^3$

-делим полученное произведение на образующий полином

$(x^6+x^4+x^3) / (x^3+x+1)$ получим остаток x^2

- прибавляем остаток к произведению и получаем закодированную комбинацию

$x^6+x^4+x^3 + x^2$ --------1011100

Матричное представление циклического кода.

В теории кодирования широко используются матричное представление кодов.

Основой для построения кода служит производящая матрица P_n, k, представляющая собой две подматрицы:

Информационную –U_k и дополнительную H_p

Pn = $\left| U_k, H_p \right|$

U_k – представляет собой квадратную единичную матрицу с количеством строк и столбцов равным k.

H_p- содержит ρ **=n-k** столбцов и **k** –строк и образована остатками **R(x).**

ρ - это число проверочных разрядов в коде; k – число информационных разрядов в коде; n – число разрядов в коде.

Например, необходимо построить циклический код $P_{(7,4)}$, т.е. n =7, k=4. Для построения производящей матрицы строим сначала информационную матрицу, которая имеет вид :

$$U_k = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Для построения производящей матрицы нужно выбрать образующий полином (по таблицам, исходя из степени полинома, которая в свою очередь, определяется числом проверочных разрядов ρ), например, $P(x)=x^3+x^2+1$ или (1101) и использовать один из двух способов построения дополнительной матрицы H_p.

Первый способ

Для получения первой строки дополнительной подматрицы надо первую строку информационной подматрицы умножит на одночлен x^{n-k} т.е. в нашем случае на x^3 и разделить на образующий полином. Это соответствует выполнению операции

$$\frac{0001*1000}{1101}$$

В результате получим остаток 101, что и составит первую строку дополнительной подматрицы H_p. Аналогично определяются все последующие строки дополнительной подматрицы. Окончательный производящая матрица имеет вид :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \quad U_k \quad & \quad H_p \quad \end{array} \\ P_{7,4}= & \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \end{array}$$

Второй способ

Производящая матрица P n,k формируется путем умножения образующего полинома P(x) степени ρ **= n – k на** одночлен $\mathbf{x}^{\mathbf{k-1}}$ и последующих к-1 сдвигов полученной комбинации. При этом информационные символы идут вперемешку с проверочными, что создает трудности при декодировании.

Итак, имеется производящая матрица, с помощью которой можно получить разрешенные кодовые комбинации, путем суммирования строк по модулю 2 в любом сочетании, т.е из всех 2^7 кодовых комбинаций можно использовать в качестве информационных только 2^4 , которые и находятся с помощью производящей матрицы.

Принадлежность кодовой комбинации к группе разрешенных можно легко проверить делением ее полинома на образующий полином. Если остаток от деления равен нулю, то комбинация является разрешенной.

Выводы

Для построения циклического кода , исправляющего однократные или обнаруживающего двукратные ошибки, необходимо, чтобы каждой ошибке соответствовал свой опознаватель – остаток от деления многочлена принятой кодовой комбинации на образующий полином. Т.к. количество возможных однократных ошибок равно n, то отсюда получаем необходимое условие исправления любой одиночной ошибки.

$2^{n-k} - 1 >= n$ *или*

$2^{\rho} - 1 >= n$

Каждый образующий полином, использующийся для построения циклического кода должен удолетворять 2 условиям:

-Быть неприводимым, т.е. не делится не на какой другой полином;

-двучлен вида x^{n+1} должен делиться на образующий полином без остатка, см [2].

Задача. Построить производящую матрицу и сформировать разрешенные кодовые комбинации циклического кода, если образующий полином $P(x)=x^3+x+1$

Первая разрешенная комбинация

A1(0,1)--------0001011

Выполняем циклический сдвиг, т.е. умножаем на x, x^2, x^3 . В результате имеем

x^4+x^2+x ----0010110 ; x^5+x^2 ----- -0101100; $x^6+x^4+x^3$ ----0111000

$$G(7,4)=\begin{vmatrix} 0001011 \\ 0010110 \\ 0101100 \\ 1001000 \end{vmatrix}$$

Для формирования кодовых комбинаций, а их будет 2^4 , надо просуммировать в разных сочетаниях по модулю 2 строчки производящей матрицы.

Задача. Определить декодированием наличие ошибки в принятом сообщении $A(x)=x^6+x^4+x^3+x^2$, если образующий полином $P(x)= x^3+x^2+1$.

Задача. Принятая комбинация $Ф(x)=x^6+x^4+x^2+1$ закодирована циклическим кодом. Образующий полином $A(x)= x^3+x^2+1$. Определить есть ли ошибки

Синдром

Определяется суммой по модулю 2, принятых проверочных элементов и элементов проверочной группы, сформированных из принятых элементов информационной группы. В циклическом коде для нахождения синдрома надо разделить принятую кодовую комбинацию на производящий полином. Если остаток равен нулю, то кодовая комбинация принята без ошибки.

Пример Определить декодированием наличие ошибки в принятом сообщении $F(x)=x^6+x^4+x^3+x^2$, если образующий полином $P(x)=x^3+x^2+1$

Решение:

$$\begin{array}{l|l} X^6+x^4+x^3+x^2 & x3+2+1 \\ \cline{2-2} X^6+x^5+x^3 & \\ \hline \quad X^5+x^4+x^2 & x^3+x^2 \\ \quad x^5+x^4+x^2 & \end{array}$$

Ответ: ошибки нет.

Пример .Принята комбинация $F(x)=x^6+x^4+x^2+1$, закодированная циклическим кодом. Образующий полином $P(x)=x^3+x^2+1$. Определить есть ли ошибка. Делим и получаем остаток x^3+1 Ответ: ошибка на приеме есть.

Для определение места ошибки используется метод весов, который заключается в следующим:

Принятая комбинация делится на образующий полином;

Подсчитывается вес остатка w (количество единиц в остатке);

Если $w<=t$ (t –количество допустимых ошибок, которое исправляется кодом), то исправление сводится к сложению принятой комбинации с остатком;

Если $w>=t$,то производится циклический сдвиг влево, а затем деление на образующий полином и определение веса остатка. Если $w<= t$, то делимое суммируют с остатком, а затем производят сдвиг на один элемент вправо. Это и будет исправленная кодовая комбинация.

Пример Передана закодированная комбинация 1001110. Образующий полином $A(x)= x^3+x^2+1$. Принято 1000110, d=3, t=1.

1- Находим R(x)-остаток $\longrightarrow$ 1000110/ 1011 $\longrightarrow$ остаток R(x)=011

2.Сдвигаем 1000110 влево на один разряд → получим 0001101 и делим на 1011, получаем R(x)= 110, т.е. w=2 , а это >t=1, поэтому делаем следующий сдвиг влево еше на один разряд

3. получаем 0011010 Делим на 1011, получаем остаток R(x)=111, т.е. w=3 , а это >t=1.

4.Повторяем сдвиг ---0110100 и получаем

R(x)=101, w=2

5. Сдвигаем влево еше раз ----11010000 , получаем R(x)=001, w=t=1,

6. Складываем полученную кодовую комбинацию с остатком 11010000+001=1101001

7.Сдвигаем полученную кодовую комбинацию вправо 4 раза и получаем последовательность

1101001---1110100----0111010---00111101---1001110, а принято была комбинация 1000110, т.е. ошибка произошла в 4- ой позиции..

Если надо исправить двух-трехкратные ошибки , то синдром находится с помощью программирования на ПК.