Цель работы
Выучить общие принципы помехоустойчивого кодирования на примере использования кода Хэмминга
Теоретические основи
Помехоустойчивость достигается за счет введения избыточности в кодовой комбинации. Это значит, что из n символов кодовой комбинации для передачи информации используется k<n символов, т.е. из общего числа $N=2^n$ возможных код.ком. для передачи используется $N=2^K$ комбин. В соответствии, с этим все множество $N=2^n$ делится на 2 группы: - В первую входят разрешенные ком. $N=2^K$ во вторую –запрещенные
Если на приемном конце принята код. ком. неотносящаяся к разрешенным, то делается вывод, что код.комб. искажена . Для использования данного в качестве исправляющего всё множество запрещенных код.ком. разбивается на N непересекающихся подмножеств. Каждое из подмножеств Mk ставится в соответсвие одной из разрешенных комбинаций. Если принятая запрещенная комбинация принадлежит подмножеству Mk, то считается , что передана разрешенная комбинация , т.е. ошибка исправляется в случаях равных кол-ву запрещенных комбинаций. Таким образом, помехоустойчивость корректирующего кода определяется его избыточностью. Чем избыточность больше, тем выше его помехоустойчивость.
Минимальное число элементов, которыми должны отличаться кодовые комбинации друг от друга называется кодовым расстоянием d. Например

$$\begin{array}{r} 1001101 \\ +\ \underline{1110100} \\ 0111001 \end{array}$$

Сколько единиц, такое и ***d***, т.е. в єтом случае равно 4.
Если ***d*** =1, то можно от личить одну ком. от другой, но нельзя обнаружить ошибку. Избыточность какого кода 0. При ***d***=2 можно обнаружить одиночную ошибку, при ***d*** =3- исправить одиночную и обнаружить двойную. Таким образом, корректирующая способность кода тем больше, чем больше кодовое расстояние.
Способ разбиения на подмножества зависит от того, какие ошибки должны исправляться данным кодом

Пример Построить код, обнаруживающий все ошибки кратности **t** и ниже.. Это значит, из множества N возможных выбрать Mk разрешенных комбинаций, но так, чтобы любая из них в сумме по модулю 2 с любым вектором ошибок с весом кодовой комбинации меньше или равно кратности не дала бы в результате никакой другой разрешенной комбинации.
А это возможно , если
Dmin>= t+1
W количество единиц в кодовой комбинации называют весом кодовой комбинации
Do-кодовое растояние –степень отличия любих код. Ком. И определяется как вес суммы по модулю 2 этих двух кодових комбинаций.
E – вектор ошибки указывает место в кодовой комбинации, где имеется искажения, например E=01100, то это значит, что имеет место ошибки в 3ьем и 4 разряде. Если вектор ошибки сложить по модулю 2 с искаженной код. ком. то получим исходную неискаженную комб.

$$\begin{array}{l} 100101100 \\ \underline{110110101} \\ 010011001 \end{array}$$

W=4; D =W=4

Рассмотрим код n=3. Все возможные комбинации этого кода.

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8
	000	001	010	011	100	101	110	111
A1	0	1	1	2	1	2	2	3
A2	1	0	2	1	2	1	3	2
A3	1	2	0	1	2	3	1	2
A4	2	1	1	0	3	2	2	1
A5	1	2	2	3	0	1	1	2
A6	2	1	3	2	1	0	2	1
A7	2	3	1	2	1	2	0	1
A8	3	2	2	1	2	1	1	0

Матрица расстояний между код.комб.
Чтобы код обнаруживал однократные ошибки (t=1) надо чтобы d=2.Тогда из 8 возможных код.ком. выбираем те, у которых d=2. Это A1,A4, A6, A7.
Для обнаружения двухкратных ошибок D=2+1=3, тогда A1, A8 .
Строим код обеспечивающий устранение однократных ошибок. При наличии однократной ошибки A1 может перейти в одну из следующих запрещенных комбинаций A2=001, A3=010 и A5=100, таким образом в качестве подмножества запрещенных комбинаций A2,A3,A5. А это значит, что если на приеме будет прийнята одна из них, то выносится решение, что была передана комбинация A1.

Рассмотрим вторую комбинацию A4. Ей соответствует подмножество запрещенных A2,A3, A8. Однако получилось пересечение подмножества. При приеме запрешенных сигналов A2, A3 нельзя одназначно определить какой был сигнал A1 или A4.

Если выбрать в качестве второй разрешенной кодовой комбинации отстоящую на D=3 –A8, то ей соответствует подмножество запрещенных комбинаций A4,A6,A7. – в этом случае подмножество запрещенных комбинаций не пересекаются , т.е. **Dmin>=2t+1**

КОД ХЕМИНГА

Обеспечивает исправление всех однократных ошибок при Dmin=3. Длина кода выбирается из условия

$$2^{к}<=2^{n}/(1+n)$$

В этом коде проверочные символы должны находится на номерах позиций, которые выражаются степенью двойки 2^0, 2^1, 2^3,2^4......т.е.контрольные символы должны находится (слева направо) на первой, второй, четвертой, восьмой и.т.д. позициях.
n –длина кода,
к-количество проверочных символов,
p- двоичное число (Синдром), указывающее номер искаженной позиции кодовой комбинации, чтобы его получить, надо выполнить n-p проверок.
Для определения его используется правило:

При первой проверке рассматриваются символы, которые в самом младшем разряде имеют единицы. См таб. Это A1, A3, A5,A7,A9 и т.д.
S1= a1+a3+a5+a7+a9

При второй проверке это a2, a3, a6, a7, a10 и т.д.
S2=a2+a3+a6+a7+a10

При третьей – это a4, a5, a6, a7,a12 и т.д.
S3= a4+ a5+ a6+ a7+a12

При четвертой это a8,a9,a10,a11,a12, a13, a14,a15 и т.д.
S4= a8+a9+a10+a11+a12+ a13
В результате получим двоичное число S4 S3 S2 S1 (например- 0101), которое и укажет место искаженного импульса. ***Если сигнал принят без ошибки, то синдром рамен нулю***

A1	001
A2	010
A3	011
A4	100
A5	101
A6	110
A7	111
A8	1000
A9	1001
A10	1010
A11	1011
A12	1000
A13	1101
A14	1110
A15	1111

ПРИМЕР

Пусть дана кодовая комбинация 10011. Закодировать ее в код Хэмминга.
Кодирование

A11	a10	a9	a8	a7	a6	a5	a4	a3	a2	a1
11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
		1		1	0	0		1		

Из условия четности получим значения проверочных символов при безошибочном приеме.
a1= 1+0+1+1=1; S1=0
a2=1+0+1=0 ;   S2=0
a4=0+0+1=1;   S3=0
a8=1=1   S4=0

11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
		1	1	1	0	0	1	1	0	1

Таким образом код. комбинации 10011 соответствует девятиэлементный код Хэмминга 101100111.
Декодирование
Пусть теперь произошло искажение пятого символа, т. е код принял вид 101110111.

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
	1	1	1	0	1	1	1	0	1

Тогда находим элементы синдрома
S1= a1+a3+a5+a7+a9=1+1+1+1+1=1
S2=a2+a3+a6+a7+a10=0+1+0+1=0
S3= a4+ a5+ a6+ a7+a12=1+1+0+1=1
S4= a8+a9=1+1=0

В результате проверки получен синдром 0101, т. е цифра 5 в двоичном коде
Т.е. искажен пятый символ. Осталось его инвертировать.

Использование синдрома возможно только для исправления однократных ошибок. Для высшей кратности – используются программы на ЭВМ.

Задание: закодировать кодовую комбинацию девятиэлементным кодом Хэмминга Рассчитать синдром, если известна позиция искаженного символа.

Вариант	Кодовая комин .	Искаженная позиция	синдром	Код Хэмминга
1	11011	2		
2	10001	3		
3	11101	4		
4	10111	3		
5	10101	2		
6	10110	5		
7	10100	6		
8	11010	2		
9	10100	3		