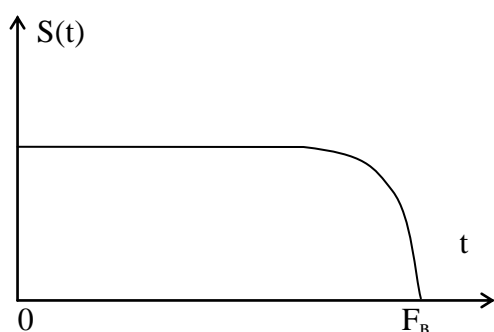


Текст лекції
Теорема Котельникова

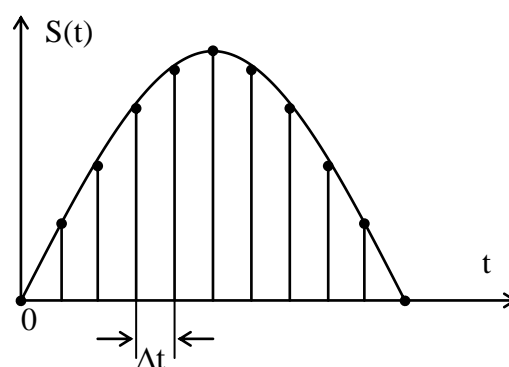
Будь-який безперервний сигнал може бути представлений окремими дискретними відліками, визначеними відповідно до теореми Котельникова. Безперервний сигнал, обмежений спектром $0-F_B$ (мал. 1.21) може бути представлений дискретними відліками, узятими з інтервалом

$$\Delta t \leq \frac{1}{2F_B} \quad (1.9)$$

де F_B – верхня частота в спектрі сигналу.



Мал. 1.21



Мал. 1.22

Процес заміни безперервного сигналу на дискретні відліки називається дискретизацією. Величина, зворотна інтервалу дискретизації $f_d = 1/\Delta t$ називається частотою дискретизації. Теорема Котельникова може мати іншу умову: $f_d \geq 2F_B$ – частота дискретизації повинна бути як мінімум удвічі вище за верхню частоту спектру сигналу.

Якщо спектр сигналу знаходиться в смузі частот $F = f_B - f_H$, не включаючи нульових частот, те правило дискретизації Котельникова виглядає так: $f_d \geq 2F$.

Термін "може бути представлений" має на увазі повне (без втрати інформації) відновлення сигналу по його дискретам не тільки в точках

дискретних відліків, але і в будь-якій іншій крапці. З цією метою Котельников запропонував спеціальний ряд:

$$S(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S[\Delta t] \operatorname{sinc} 2\pi F_B(t-k\Delta t) \quad (1.10)$$

тут до – порядковий номер дискретного відліку;

$\operatorname{sinc} x$ – специфічна функція вигляду:

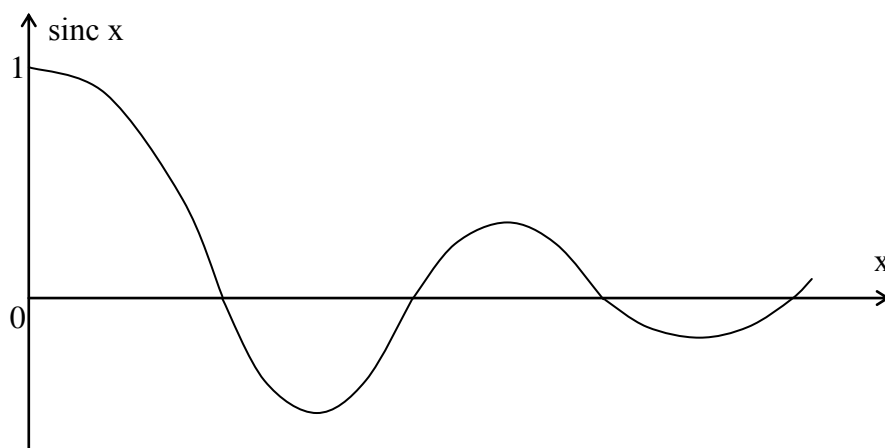
$$\operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x} \quad (1.11)$$

де $\operatorname{sinc} 2\pi F_B(t - k\Delta t) = \frac{\sin 2\pi F_B(t - k\Delta t)}{2\pi F_B(t - k\Delta t)}$.

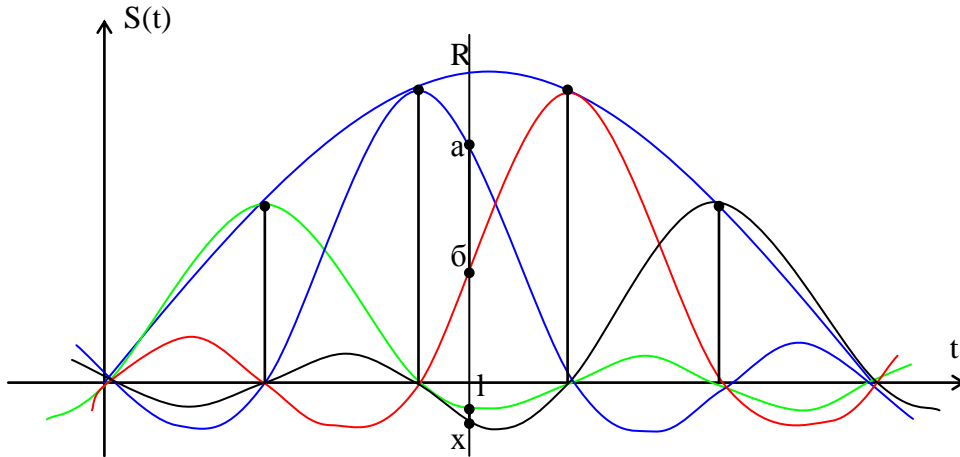
$\operatorname{sinc} x$ є затухаючою періодичною функцією. Особливо слід зазначити значення цієї функції в крапці 0. $\operatorname{sinc} 0 = \frac{\sin 0}{0} = \frac{0}{0}$ встановлює невизначеність, яка розкривається за правилом Лапітала.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)' = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial \sin x}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

Ряд Котельникова має специфічну функцію $\operatorname{sinc} x$, при якій він залежить тільки від свого відліку і не впливає на інші відліки, оскільки проходить через значення 0 в моменти інших відліків. В точці x необхідно підсумувати відрізки від всіх функцій ряду і отримати по відліках початкове значення безперервної функції R (мал. 1.24).



Мал. 1.23



Мал. 1.24

Відновлення безперервного сигналу буде тим точніше, ніж більше функцій відліків буде привернуто до формування значення шуканої крапки R. Для підвищення якості відліку (мінімуму можливої помилки) бажано брати відліки частіше, тобто зменшувати Δt (або що теж саме збільшувати частоту дискретизації f_d).

Дискретне представлення сигналів дозволяє використовувати його для тимчасового ущільнення каналу зв'язку, в проміжок часу між дискретними відліками можна помістити дискретні відліки іншого сигналу.

Такий принцип ущільнення називається ВРК – тимчасове розділення каналів.

Період дискретизації тут однаковий для кожного сигналу (каналу), а відліки зсунуті за часом.

