Текст лекції

Задачі оптимального прийому

Теорія передачі сигналів має на увазі теоретичне обгрунтовування способів і методів передачі інформації від джерела до одержувача за допомогою якого-небудь переносника, зокрема, радіосигналу. Радіосигнал, як носій корисної інформації, в каналі зв'язку від передавача до приймача зазнає зміни, викликані спотвореннями при передачі, впливом перешкод в каналі зв'язку, спотвореннями при прийомі. Якщо в точці передачі сигналу достатньо просто проконтролювати і відкоректувати передаваний сигнал з метою зниження спотворення передавача, то в точці прийому доводиться мати справу з сигналом, спотвореним каналом зв'язку випадковим чином і за не залежним від нас обставинами, що приводить до необхідності застосовувати особливі способи прийому сигналу для зниження можливих помилок в передачі інформації (оптимальний прийом сигналів).

Сигнал, що приймається, має частину параметрів, відомих апріорно (тобто до передачі). Якщо відомі всі параметри сигналу, то немає значення його приймати (він відомий); якщо всі параметри сигналу наперед невідомі, то прийняти і виділити його на фоні перешкод не представляється можливим (невідомо, що виділяти). При малому об'ємі апріорних даних необхідно користуватися методами адаптивного прийому.

Оптимальний (ідеальний) прийом сигналів, що забезпечує мінімальні спотворення повідомлення, реалізується оптимальний приймачем, що працює по оптимальному алгоритму, заснованому на апріорній інформації і вибраних критеріях оптимальності.

Оптимальний приймач забезпечує мінімальний рівень спотворень, який прийнято називати потенційною перешкодостійкістю. За визначенням, перешкодостійкість реальних приймачів не може перевищувати потенційну для заданих умов, а тільки наближатися до неї. Порівнюючи перешкодостійкість реальних приймачів з потенційною перешкодостійкістю, можна з'ясувати ступінь технічної досконалості реальних приймачів і можливі резерви підвищення їх перешкодостійкості. Порівнюючи значення потенційної перешкодостійкості при різних видах сигналів, можна визначити якнайкращі види передаваних сигналів.

Рішення основних проблем теорії оптимального радіоприйому базується на добре розроблених методах математичної статистики, розробленої А.Н.Колмогоровим, Н.Вінером, В.А.Котельниковим і ін.

Обчислення апостеріорної вірогідності

При рішенні задач оптимального прийому відповідь виходить на основі попередніх (апріорних) відомостей про те, що приймається сигналу і належній обробці його.

Якби ми не мали свій в розпорядженні попередніх відомостей про сигнал (тобто про його параметри), то його не можна було б відрізнити від перешкоди. Навпаки, прийом детермінованого сигналу не доставляє ніякої інформації; якщо все про нього відоме, то його завжди можна повністю відтворити на приймальному кінці. Тому носіями корисної інформації можуть бути тільки невідомі параметри сигналу.

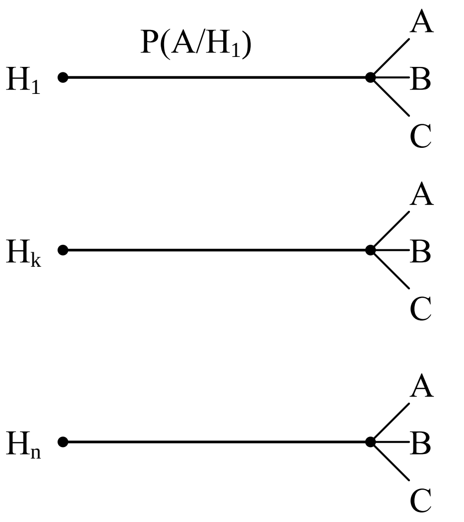
В порівнянні з апріорними відомостями, знання спостерігача про досліджувану ситуацію в результаті аналізу прийнятого коливання збільшується. Знов сформоване знання називається апостеріорним.

Пригадаємо елементи теорії вірогідності. Вірогідність сумісної події

$$P(A\cdot B) = P(A)\cdot P(B/A)= P(B)\cdot P(A/B).$$

Відомі: P(Hk) і P(FA/Hk)... P(B/Hn), H1, Hk, Hn – гіпотези і передачі сигналів, Pa(Hk) – $_{\text{апріорна}}$ їх вірогідність.

Знайти P(A) – безумовну вірогідність.



?P(Hk) = 1

Формула <u>повної вірогідності</u>:

$$P(A)=\sum_{k=1}^{n}P(AH_k),$$

оскільки P(AHk)= P(Hk)·P(A/Hk)

$$P(A)=\sum_{k=1}^{n}P(H_k)\cdot P(A/H_k) \qquad (5.1)$$

Якщо зворотна задача: відоме P(A) і P(A/Hk), то потрібно знайти, яка була Hk - це задача <u>Байеса:</u>

P(AHk)= P(Hk)·P(A/Hk)= P(A)·P(Hk/A)

звідси

$$P(H_k/A)=\frac{P(H_k)\cdot P(A/H_k)}{P(A)}.$$

P(A) з формули повної вірогідності

$$P(H_k / A) = \frac{P_a(H_k) \cdot P(A / H_k)}{\sum_{k=1}^{n} P_a(H_k) \cdot P(A / H_k)} \qquad (5.2)$$

тут Pa(Hk) – апріорний (до досвіду, до передачі сигналу) розподіл вірогідності гіпотез Hk;

P(Hk/A) – апостеріорна вірогідність (після досвіду, після прийому сигналу), яку позначимо Ppst( ).

Хай бінарний сигнал приймається на фоні аддитивної перешкоди у вигляді білого шуму, тобто стаціонарної перешкоди з енергетичним спектром постійної інтенсивності по всій осі частот y(t)= s(t)+ n(t).

Для спрощення математичних викладень введемо тимчасово наступну обмежуючу умову: Прийнята суміш y(t) перед подальшою обробкою пропускається через фільтр нижніх частот з прямокутною АЧХ і ФЧХ ??(?) = 0. Позначимо смугу пропускання фільтру через $?f_ф$ = 0 ... fв.

Хай по каналу зв'язку передається один з можливих сигналів мновества {S1, S2 ..., SL}. На приймальному кінці каналу отримана реалізація y(t). Відповідно до теореми Байеса вірогідність того, що в прийнятій суміші знаходиться сигнал Sk(t) рівна

$$P_{pst}(S_k(t) / y(t)) = \frac{P_a(S_k(t)) \cdot W(y(t) / S_k(t))}{\sum_{k=0}^{L} P_a(S_k(t)) \cdot W(y(t) / S_k(t))} \qquad (5.3)$$

де Pa(Sk) - апріорна вірогідність передачі сигналу Sk(t)$

W(y(t)/Sk(t)) - густина вірогідності отримання прийнятої реалізації суміші за умови, що був переданий сигнал Sk(t).

Оскільки знаменник виразу (1.1) не залежить від конкретного значення до, то

$$P_{pst}(S_k(t) / y(t)) = A \cdot P_a(S_k(t)) \cdot W(y(t) / S_k(t)) \qquad (5.4)$$

де A - постійна, не залежна від до величина.

Як буде показаний нижче, для вирішення задачі розрізнення символів небходимы не абсолютні значення апостеріорної вірогідності, а співвідношення між ними. Тому значення постійної величини нас надалі цікавити не буде.

Таким чином, розподіл апостеріорної вірогідності передачі кожного з можливих сигналів (пауза в деяких випадках також може розглядатися як один з сигналів) при заданому розподілі апріорної вірогідності визначається тільки умовною густиною вірогідності W(y/Sk).

Пропущена через фільтр низьких частот суміш y(t), має обмежений спектр, отже, функція W(y/Sk) відповідно до теореми Котельникова повністю визначається відліками, узятими з інтервалами ?t = 1/2fв. Звідси витікає, що густина вірогідності W(y/Sk) є m-мерная умовна густина, де m - кількість відліків, що визначають функцію:

$$W(y/Sk)= W(y1, y2 ..., ym / Sk1, Sk2 ..., Skm) \qquad (5.5)$$

Що розглядається як функція до умовна m-мерная густина вірогідності називається функцією правдоподібності. Позначивши її через L(Sk), одержуємо:

$$Ppst(Sk/y)= A \cdot Pa(Sk) \cdot L(Sk) \qquad (5.6)$$

При заданому сигналі вірогідності отримання миттєвих значень суміші y1, y2 ..., ym, рівні відповідно вірогідності миттєвих значень шуму в ці ж моменти часу n1, n2 ..., nm. Тому

$$L(Sk)= W(n1, n2 ..., nm).$$

Білий шум, пропущений через фільтр з обмеженою смугою, є гауссовым стаціонарним процесом з автокореляційною функцією вигляду R(?)= sin?$_в$?/?$_в$?. Отже, відліки шуму, узяті з інтервалами ?t = 1/2fв між собою є некорельованими, а, значить, і незалежними. Тому, відповідно до (5.5) L(Sk) рівна твору одновимірної безумовної густини вірогідності

$$L(S_k) = \prod_{i=1}^{m} W(n_i) = \frac{1}{(\sigma_ш \sqrt{2\pi})m} \exp\left(\frac{-\sum_{i=1}^{m} n_i^2}{2\sigma_ш^2} \right). \qquad (5.7)$$

Оскільки дисперсія шуму на вході фільтру ?$^2_ш$ = N0?$f_ф$ = N0/2?t, то

$$L(S_k)=\frac{1}{(\sigma_ш\sqrt{2\pi})m}\exp\left(\frac{-\sum_{i=1}^{m}\Delta t n_i^2}{N_0}\right).$$

За відсутності в прийнятому коливанні y(t) сигналу, тобто при yi = ni функція правдоподібності приймає вигляд:

$$L(0)=\frac{1}{(\sigma_ш\sqrt{2\pi})m}\exp\left(\frac{-E_y}{N_0}\right),$$

де $E_y=\sum_1^m y_i^2\Delta t$ - енергія прийнятого коливання.

Відношення функцій правдоподібності

$$l(S_k)=L(S_k)/L(0)=\exp\left(\frac{-E_y}{N_0}-\frac{1}{N_0}\sum_1^m y_i^2\Delta t\right). \quad (5.8)$$

Припущення про наявність прямокутного фільтру на вході пристрою обробки було введено нами для того, щоб отримати вираз (5.7), бо при білому шумі ?$^2_ш$ = ? і вираз (5.7) не має сенсу. Але вже у вираз (5.8) потужність шуму не входить. Оскільки надалі ми користуватимемося виразом (5.8), те припущення про наявність фільтру на вході тепер можна відкинути. При цьому ?$f_ф$ = ? і вираз (5.8) перетвориться до наступного вигляду:

$$\lim_{f_в\to\infty} l(S_k)=\exp(E_y/N_0)\exp\left[-\frac{1}{N_0}\int_0^T(y(t)-S_k(t))^2dt\right]=\exp\frac{E_k}{N_0}\exp q_k \quad (5.9)$$

де $E_k=\int_0^T S_k^2(t)dt$ або для прямокутного імпульсу Теньк = А2 ?$_u$ – енергія

к-го сигналу

$$q_k=\frac{2}{N_0}\int_0^T S_k(t)y(t)dt \quad (5.10)$$

де T - тривалість реалізації y(t).

Вираз (5.9) часто називають відношенням правдоподібності, а qk – функціоналом правдоподібності (кореляційний інтеграл).

Визначивши відношення правдоподібності для всіх сигналів алфавіту джерела, можна отримати у відповідності з (5.6) розподіл їх апостеріорної вірогідності.

Критерій оптимальності Байеса

Введемо в розгляд наступну функцію вірогідності помилок, звану функцією втрат або функцією ризику:

$$z = aP_{ош}(S1)+ bP_{ош}(S2)= a\, P_a(S2)\, P(S1/S2)+ b\, P_a(S1)\, _P(S2/S1). \qquad (5.11)$$

Тут a і b - коефіцієнти, що характеризують ціну втрат при помилках відповідних пологів.

Оптимальною по критерію Байеса є така обробка, яка мінімізує функцію ризику. Визначимо правило рішення, відповідне критерію Байеса. Виразимо функцію ризику через функції правдоподібності. Вибір правила рішення зводиться до такого розбиття простору рішень на дві непересічні області, при якому функція ризику є мінімальною. Позначимо буквою A область, при попаданні в яку прийнятої суміші y(t), ухвалюється рішення про прийом сигналу S1(t), а буквою B - область, при попаданні в яку ухвалюється рішення про прийом сигналу S2(t). Тоді функцію ризику можна виразити таким чином:

$$z = aP_a(S_2)\int_A W(y/S_2)dy + bP_a(S_1)\int_B W(y/S_1)dy \qquad (5.12)$$

але $\int_A W(y/S_2)dy + \int_B W(y/S_1)dy = 1$, звідки

$$z = bP_a(S_1) - \int_A \{W(y/S_1)bP_a(S_1) - aP_a(S_2)W(y/S_2)\}dy.$$

Очевидно, що функція z досягає мінімуму при такому визначенні області A, при якому значення інтеграла досягає максимуму, максимум інтеграла, у свою чергу, має місце за умови, що в область A будуть включені всі позитивні значення подынтегральной функції. Отже, область А визначається наступною умовою:

$$bP_a(S_1)W(y/S_1) - aP_a(S_2)W(y/S_2) > 0,$$

звідки

$$l(S1)/\, l(S2) = W(y/S1)/\, W(y/S2) > aPa(S2)/\, bPa(S1).$$

Аналогічно область В описується так:

$$l(S1)/\, l(S2) < aPa(S2)/\, bPa(S1).$$

Якщо прийнята суміш y(t) належить області А, по прийнятій умові, повинно ухвалюватися рішення про прийом сигналу S1, при приналежності до області В - про прийом сигналу S2. У результаті правило рішення, відповідне критерію Байеса, може бути записано таким чином:

$$l(S1)/\, l(S2) \underset{S_2}{\overset{S_1}{\gtrless}} aPa(S2)/\, bPa(S1). \qquad (5.13)$$

При перешкоді у вигляді аддитивного білого шуму можна скористатися виразом (5.9) для відношення правдоподібності і записати правило рішення таким чином:

$$e^{q_1 - q_2} e^{(E_2 - E_1)/N_0} \underset{S_2}{\overset{S_1}{\gtrless}} aPa(S2)/\, bPa(S1). \qquad (5.14)$$

$\underset{S_2}{\overset{S_1}{\gtrless}}$ Оскільки відношення правдоподібності є експоненціальна, отже, монотонна функція аргументів q1 і q2, нерівності можна спростити, прологарифмувавши ліву і праву частини нерівностей (5.14). При цьому правило рішення перетвориться до наступного вигляду:

$$\Delta q = q_1 - q_2 \underset{S_2}{\overset{S_1}{\gtrless}} \ln \frac{aP_a(S_2)}{bP_a(S_1)} + \frac{E_1 - E_2}{N_0} = h_{opt}. \qquad (5.15)$$

Вираз (5.15) в літературі часто називає функцією рішення. Вираз в правій частині нерівності відомий і постійно (всі що входять в нього елементи визначаються), тому обчислюють як число і називають порогом порівняння – h

Критерій оптимальності Котельникова

В багатьох каналах зв'язку помилки всіх пологів однаково шкідливі. В цьому випадку у виразі (5.15) ціни за помилки a і b логічно прийняти рівними. Тоді правило рішення (5.15) може бути спрощено таким чином:

$$\Delta q = \underset{S_2}{\overset{S_1}{\gtrless}} \ln \frac{P_a(S_2)}{P_a(S_1)} + \frac{E_1 - E_2}{N_0} = h_{opt}\,. \tag{5.16}$$

Вираз (5.16) і є правилом рішення по критерію оптимальності Котельникова. Даний критерій був висунутий академіком Котельниковим як частина теорії систем зв'язку, оскільки в період його розробки радіотехніка зводилася, в основному, до систем зв'язку, а такі її розділи, як радіолокація, телекерування і інші тільки зароджувалися.

З виразу (5.15) і (5.16) витікає, що критерій Котельникова можна вважати окремим випадком критерію Байеса.

Стосовно критерію Котельникова у виразі (5.11) можна, не знижуючи спільності міркувань, ціни за помилки a і b прийняти рівними одиниці (a = b = 1). При цьому функція ризику прикмет наступний вигляд:

$$z = Рош(S1_{)} + Рош(S2).$$

Таким чином, в критерії оптимальності Котельникова функція ризику має наступний сенс: функція ризику рівна сумарній вірогідності всіх можливих помилок. Отже, при обробці прийнятої суміші сигналу і перешкоди за правилом, відповідним критерієм Котельникова, мінімізується сумарна вірогідність помилок.

Даний критерій іноді називають також критерієм максимуму апостеріорної вірогідності. Дійсно, відповідно до виразу (5.3) і з урахуванням співвідношення a = b = 1 правило рішення може бути переписано так:

$$Pa(S1)\ l(S1)/\ Pa(S2)\ l(S2) = Pps(S1)/\ Pps(S2) \underset{S_2}{\overset{S_1}{\gtrless}} 1. \qquad (5.17)$$

Отже, відповідно до критерію Котельникова ухвалюється рішення про прийом того сигналу, який в результаті обробки прийнятої суміші виявляється найвірогіднішим, тобто апостеріорна вірогідність якого є максимальною.

Критерій максимуму правдоподібності

Іноді виділення інформації з прийнятого коливання долено проводитися так, щоб була мінімальною сума умовної вірогідності всіх можливих помилок. Зокрема, це може мати місце тоді, коли апріорний розподіл вірогідності невідомо і його логічно вважати рівномірним. Як вправа пропонуємо читачам довести, що правило рішення для цього критерію записується так:

$$l(S1)/\ l(S2) \underset{S_2}{\overset{S_1}{\gtrless}} 1$$

або, після нескладних перетворень, у такому вигляді:

$$q1_1 \underset{S_2}{\overset{S_1}{\gtrless}} q2.$$

АБО ДРУГИЙ ВАРИАНТ ЛЕКЦІЇ

Критерії оптимального прийому

Для того, щоб визначити, яка із вирішуючи схем являється оптимальною, необхідно перш за все встановити, як розуміється оптимальність. Вибір критерію оптимальності не являється універсальним, він залежить: 1) від поставленої задачі і 2) умов роботи системи. Як вказувалось раніше, приймач обчислює апостеріорний розподіл

$$p(s_i/x),$$

який містить всі відомості, які можна витягти із прийнятої реалізації $x(t)$. Тепер необхідно встановити критерій, за яким приймач буде видавати на основі апостеріорного розподілу $p(s_i/x)$ розв'язок відносно переданого сигналу s_k.

При передачі дискретних повідомлень широко використовується критерій В.А.Котельникова (критерій ідеального спостерігача). Згідно до цього критерію приймається рішення, що переданий сигнал s_i, для якого апостеріорна ймовірність $p(s_i/x)$ має найбільше значення, тобто регіструється сигнал s_i, якщо виконуються нерівності:

$$\begin{aligned} &p(s_i/x) > p(s_j/x),\ j \neq i; \\ &p(s_1/x) > p(s_2/x). \end{aligned} \tag{4.1}$$

При використанні цього критерію повна ймовірність помилкового рішення буде мінімальною. Дійсно, якщо за сигналом x приймається рішення про те, щоб був переданий сигнал s_i, то, очевидно, ймовірність правильного прийому буде рівна $p(s_i/x)$, а ймовірність помилки $1 - p(s_i/x)$. Звідки випливає, що апостеріорній ймовірності $p(s_i/x)$ відповідає мінімум повної ймовірності помилки.

На основі формули Байеса:

$$p(s_i/x) = \frac{p(s_i)\,p(x/s_i)}{p(x)}.$$

Тоді нерівність (4.1) можна записати у вигляді:

$$p(s_i)\,p(x/s_i) > p(s_j)\,p(x/s_j),$$

або

$$\frac{p(x/s_i)}{p(x/s_j)} > \frac{p(s_j)}{p(s_i)}. \tag{4.2}$$

Функцію $p(x/s)$ часто називають функцією правдоподібності. Чим більше значення цієї функції при даній реалізації сигналу x, тим правдоподібніше, що передавався сигнал s. Відношення, яке входить в нерівність

$$\lambda = \frac{p(x/s_i)}{p(x/s_j)}$$

називається співвідношенням правдоподібності. З врахуванням цього вираз (4.2) записується у вигляді

$$\lambda > \frac{p(s_j)}{p(s_i)}.$$

Якщо сигнали, які передаються, рівно ймовірні $p(s_i) = p(s_j) = \frac{1}{m}$, то це правило рішення приймає більш простий вигляд:

$$\lambda > 1.$$

Таким чином, критерій ідеального спостерігача зводиться до порівняння співвідношень правдоподібності. Цей критерій є більш загальним і називається критерієм максимальної правдоподібності.

Розглянемо бінарну систему, в якій передача повідомлень здійснюється за допомогою двох сигналів $s_1(t)$ та $s_2(t)$, які відповідають двом кодовим символам a_1 та a_2. Рішення приймається за результатом обробки прийнятого коливання $x(t)$ пороговим методом: регіструється s_1, якщо $x < x_0$, і s_2, якщо $x \geq x_0$ (рис. 4.5,б), де x_0 - деякий порогів рівень x. Тут можуть бути помилки двох видів: відтворюється s_1, коли передавався s_2, і s_2, коли передавався s_1.

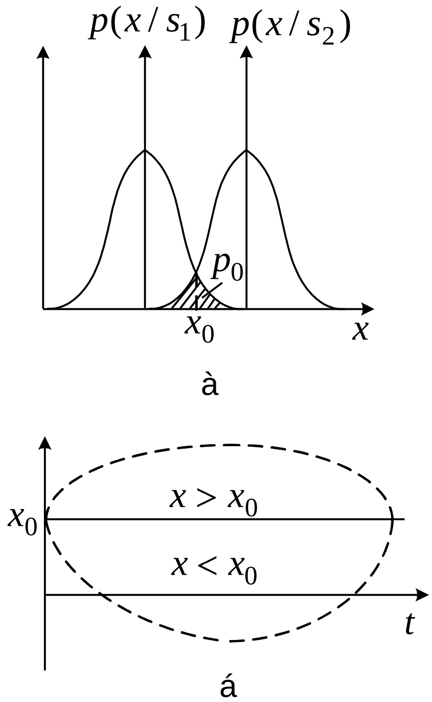


Рис.4.5.

Умовні ймовірності цих помилок (ймовірності переходів) будуть рівні (рис. 4.5,*а*):

$$p_{12} = p(s_1/s_2) = \int_{-\infty}^{x_0} p(x/s_2)dx,$$

$$p_{21} = p(s_2/s_1) = \int_{x_0}^{\infty} p(x/s_1)dx.$$

Значення цих інтегралів можуть бути обчислені як відповідні площі, обмежені графіком щільностей умовного розподілу ймовірностей. Ймовірності помилок першого і другого виду відповідно:

$$p_I = p(s_2)p(s_1/s_2) = p_1 p_{12},$$

$$p_{II} = p(s_1)p(s_2/s_1) = p_1 p_{21}.$$

Повна щільність помилки при цьому:

$$p_0 = p_I + p_{II} = p_1 p_{12} + p_1 p_{21}.$$

Нехай $p_1 = p_2$, тоді

$$p_0 = \frac{1}{2}(p_{12} + p_{21}).$$

Неважко впевнитись, що мінімум p_0 має місце при $p_{12} = p_{21}$, тобто при виборі порогу в відповідності з рис. 4.5,*а*. Для такого порогу:

$$p_0 = p_{12} = p_{21}.$$

Значення p_0 визначається заштрихованою площею. При будь-якому іншому значенні порога величина p_0 буде більшою.

Не дивлячись на природність і простоту, критерій Котельникова має недоліки: перший заключається в тому, що для побудови вирішуючої схеми необхідно знати апріорні ймовірності різних символів коду; другим недоліком цього критерію є те, що всі помилки вважаються однаково небажаними (мають однакову вагу).

В деяких випадках таке припущення не є правильним. Наприклад, при передачі чисел помилка в перших значущих цифрах більш небезпечна, ніж помилки в останніх цифрах Пропуск команди чи хибна тривога в різних системах трансляції можуть мати різноманітні наслідки.

Отже, в загальному випадку при виборі критерію оптимального прийому необхідно врахувати ті втрати. Які несе одержувач повідомлення при різних видах помилок. Ці втрати можна виразити деякими ваговими коефіцієнтами, які приписуються кожному із помилкових рішень. Позначимо втрати помилкових рішень першого і другого видів відповідно L_{12} і L_{21}. Тоді можна визначити середні очікувані втрати чи середній ризик:

$$r = L_{12} p_I + L_{21} p_{II} = L_{12} p_2 p_{12} + L_{21} p_1 p_{21.}$$

Оптимальною вирішуючою схемою буде така, яка забезпечує мінімум середнього ризику.

Критерій мінімального ризику відноситься до класу так званих байесових критеріїв.

РЛС широко використовується критерій Неймана-Пірсона. При виборі цього критерію враховується, по-перше, що хибна тривога і пропуск цілі не являються рівноцінними за своїми наслідками, і, по-друге, що невідома апріорна ймовірність сигналу, який передається. Якщо пропуск цілі є більш небажаним, то можна задати деяку величину β допустимої ймовірності хибної тривоги і вимагати, щоб вирішуюча схема максимізувала ймовірність правильного виявлення $P_{обн}$ (або, що те ж саме, мінімізувати ймовірність пропуску $P_{пр}$).

Згідно критерію Неймана-Пірсона приймач являється оптимальним у тому випадку, якщо при заданій ймовірності хибної тривоги:

$$P_{лт} = \int_{x_0}^{\infty} p(x/0) = \beta ,$$

він забезпечує найбільшу ймовірність правильного виявлення :

$$P_{обн} = 1 - P_{пр} = 1 - \int_{-\infty}^{x_0} p(x/s) dx.$$

Оптимальний прийом дискретних сигналів.

При заваді $W(t)$ з рівномірним спектром $\frac{1}{2} N_0$ в сигналах $s_i(t)$, $x(t)$, заданих на кінечному інтервалі $(0 < t < T)$, умова оптимального прийому за В.А. Котельниковим може бути представлена у вигляді:

$$\int_0^T [x(t)-s_i(t)]^2 dt - \int_0^T [x(t)-s_j(t)]^2 dt < N_0 \ln \frac{p(s_i)}{p(s_j)}, \quad i \neq j.$$

Цей вираз визначає умови правильного прийому сигналу $s_i(t)$.

У випадку, коли апріорні ймовірності сигналів однакові $p(s_1) = p(s_2) = \ldots = p(s_m) = \dfrac{1}{m}$ критерій Котельникова приймає більш простий вигляд:

$$\int_0^T [x(t)-s_i(t)]^2 dt < \int_0^T [x(t)-s_j(t)]^2 dt. \tag{4.3}$$

Звідси випливає, що при рівноймовірних сигналах оптимальний приймач відтворює повідомлення, яке відповідає тому переданому сигналу, який має найменше середньоквадратичне відхилення від прийнятого сигналу.

Записану вище нерівність (4.3) можна записати в іншому вигляді:

$$\int_0^T x^2(t)dt + \int_0^T s_i^2(t)dt - 2\int_0^T x(t)s_i(t)dt < \int_0^T x^2(t)dt + \int_0^T s_j^2(t)dt - 2\int_0^T x(t)s_j(t)dt.$$

Для сигналів, енергії яких однакові, ця нерівність для всіх $j \neq i$ приймає більш просту форму:

$$\int_0^T x(t)s_i(t)dt > \int_0^T x(t)s_j(t)dt. \tag{4.4}$$

В цьому випадку умова оптимального прийому (4.4) можна сформувати наступним чином. Якщо всі можливі сигнали рівно ймовірні і мають однакову енергію, оптимальний приймач відтворить повідомлення, відповідне тому переданому сигналу, взаємна кореляція якого з прийнятим сигналом максимальна.

Для двійкової системи отриманим результатам можна дати наглядне геометричне трактування (рис. 4.6).

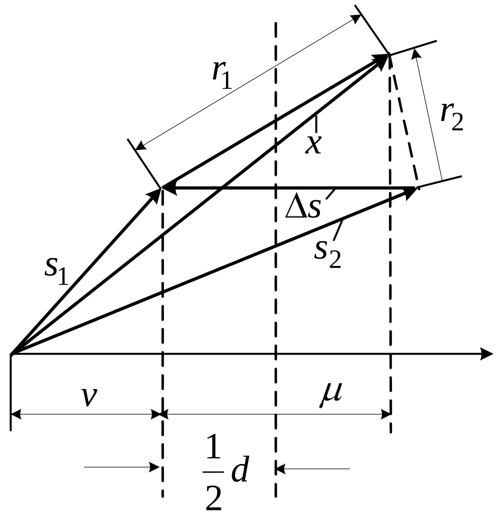


Рис4.6.

Нехай передаються два рівноймовірних повідомлення U_1 і U_2 за допомогою сигналів s_1 і s_2. Простір можливих значень сигналу можна розбити на дві області, так, щоб при попаданні кінця вектора $\overline{X}$ в першу область відтворювався сигнал s_1 (область s_1), а при попаданні в другу область – відтворився сигнал s_2 (область сигналу s_2). Ймовірність помилки, очевидно, залежить від конфігурації областей сигналу. В оптимальному приймачі Котельникова простір сигналів розбивається на область сигналу s_1 і s_2 так, щоб повна ймовірність помилки була мінімальною.

У випадку рівноймовірності сигналів і завади з рівномірним розподілом оптимальне розбиття простору буде таким, при якому люба точка x відноситься до області того сигналу s, кінець вектора якого найближчий до точки x. В двовимірній моделі для двійкової системи границя областей сигналів s_1 і s_2 є геометричне місце точок, рівновіддалених від s_1 і s_2, тобто гіперплощина, перпендикулярна до вектора різниця $\Delta s = s_1 - s_2$ і яка поділяє його навпіл (рис. 4.6).

Якщо, наприклад, передавався сигнал s_1, то помилка відбудеться в тому випадку, коли виконується нерівність:

$$r_2 < r_1$$

чи

$$\mu = \frac{1}{2} d \ ,$$

де $r_1 = \left\| \overline{X} - \bar{s}_1 \right\|$, $r_2 = \left\| \overline{X} - \bar{s}_2 \right\|$ і μ - проекція $\overline{w}$ на вектор, колінеарний до Δs, тобто:

$$\mu = \frac{w \Delta s}{\left\| \Delta s \right\|} \ .$$

Очевидно, що можна записати:

$$\left\| \overline{X} - \bar{s}_2 \right\| < \left\| \overline{X} - \bar{s}_1 \right\|$$

або в евклідовій метриці:

$$\int_0^T \left[x(t) - s_2(t) \right]^2 dt < \int_0^T \left[x(t) - s_1(t) \right]^2 dt.$$

Ця умова повністю співпадає з записаною раніше умовою (3) для рівноймовірних сигналів.