Міністерство освіти і науки України
Державний університет телекомунікацій
Кафедра вищої математики

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ

ПОСІБНИК

Київ – 2015

УДК 51.77
ББК 22.1
Ш 37

Шевченко Г.В. Дискретна математика. Навчально-методичнтй посібник. – К.: ДУТ, 2015. – 158 с.

Схвалено до друку вченою радою

Державного університету телекомунікацій

(протокол №__від____лютого 2015 року)

Рецензенти:

Блудова Тетяна Володимирівна, доктор фізико-математичних наук, професор кафедри вищої математики Київського національного економічного університету ім. В.Гетьмана.

Ясінський Василь Васильович, кандидат фізико-математичних наук, професор, директор Інституту моніторингу знань студентів Національного технічного університету України «Київський політехнічний інтитут».

Навчально-методичний посібник розроблено згідно навчальної програми з дисципліни «Дискретна математика», що викладається для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня «Бакалавр» за напрмом 6.050903 «Телекомунікації». Навчально-методичний посібник являє собою сукупність стисло викладеного теоретичного матеріалу, зразків виконання практичних занять, завдань для самостійного виконання, індивідуальних завдань, зразків контрольних робіт, які викладались студентам Державного університету телекомунікацій зазначеного напряму протягом останніх років.

Посібник розрахований для студентів денної та заочної форм навчання.

ЗМІСТ

ВСТУП

ЗМІСТ ТА ЗАДАЧІ ДИСКРЕТНОЇ МАТЕМАТИКИ

Дискретна математика (скінчена математика) *– розділ математики, що вивчає властивості об’єктів дискретного характеру.* Під дискретними об’єктами в математиці розуміють ті, які в сукупності утворюють скінченну або зчисленну множину. Дискретні об’єкти принципово відрізняються від неперервних (таких, наприклад, як всі дійсні числа з відрізку $[0,1]$).

Основними задачами дискретної математики є:

- з'ясування того, які властивості мають ті чи інші дискретні об’єкти разом з заданими на них функціями, операціями, відношеннями (аналіз);
- побудова дискретних об’єктів, які задовольняють заданим властивостям (синтез).

І. СТИСЛИЙ ЗМІСТ ЛЕКЦІЙ

ТЕМА 1. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МНОЖИН

1. Поняття множини. Способи задання множини

Поняття множини і її елемента відносять до основних, первинних понять математики. Вважають, що ці поняття не визначаються.

Під ***множиною*** *розуміють сукупність певних об’єктів, які об’єднані спільними властивостями.* При цьому природа самих об'єктів, що становлять ту або іншу множину нас не буде цікавити. *Об’єкти будь-якої природи, що утворюють множину, називаються її* ***елементами.***

Для позначення конкретних множин використовують великі букви латинського алфавіту: $A, B, C, \ldots, X, Y, \ldots$ або великі букви з індексами $A_1, A_2, \ldots$.

Для позначення елементів множин використовують малі букви латинського алфавіту: $a, b, c, \ldots, x, y, \ldots$ або малі букви з індексами $a_1, a_2, \ldots$.

Належність елемента множині позначається символом $\in$: $a \in A$ – елемент a належить множині A, неналежність елемента множині позначається символом $\notin$: $a \notin A$.

***Означення**. Множина називається **скінченною**, якщо вона складається із скінченного числа елементів. Кількість елементів у скінченній множині A називається **потужністю** множини A и позначається $|A|$. Множину потужності n ($|A| = n$), тобто таку, яка складається з n елементів, часто називають ще n**-множиною**. Множина, що не містить жодного елемента, називається **порожньою** і позначається символом $\varnothing$. Множина, що містить всі елементи, що знаходяться в розгляді, називається **універсальною** або **універсумом** і позначається U.*

Множина вважається заданою, якщо про будь-який її елемент можна сказати, належить він цій множині чи не належить.

2. Способи завдання множин

1. Перелік елементів – найбільш природний спосіб задання множини, коли множина A, яка складається з елементів $a_1, a_2, .., a_n$, задається списком своїх елементів: $A = \{a_1, a_2, .., a_n\}$, де *порядок слідування елементів значення не має*.

Наприклад: $A = \{1,2,3,4,5\} = \{3,5,2,1,4\}$.

Вважається, що всі *елементи множини різні*.

2. За допомогою характеристичної властивості елементів – універсальний спосіб задання множини, коли властивості її елементів можуть бути описані виразом $P(x)$ (елементи x даної множини і тільки вони мають властивість P). Записують $A=\{x : P(x)\}$. ***Наприклад***: $A=\{x : x\in N, x<6\}$

3. Аналітичний, за допомогою символів операцій над множинами та дужок (буде розглянуто нижче).

3. Відношення між множинами. Геометричне зображення множин

Означення. *Множина B називається* ***підмножиною*** множини A, *якщо кожен елемент множини B належить множині A.*

Позначення: $B\subseteq A$ ($A\supseteq B$) – «B включається в A» (A включає B), де $\subseteq$ – знак нестрогого включення.

$$B\subseteq A \leftrightarrow \forall b\in B\ b\in A.$$

Наприклад: $A=\{a,b,c,d,e,h\}$, $B=\{e,h,d,c\}$, $B\subseteq A$ – B – підмножина A.

Означення. *Множини A і B називаються* ***рівними****, якщо вони складаються з одних і тих самих елементів, тобто $A\subseteq B$* і *$B\subseteq A$.*

$$A=B \Leftrightarrow A\subseteq B \text{ і } B\subseteq A.$$

Якщо $B\subseteq A$ и $B\neq A$, то B називається ***власною, строгою*** чи ***істинною підмножиною*** A. Позначення: $B\subset A$, де $\subset$ – знак строгого включення.

Очевидно, що *для будь-якої множини A $\varnothing\subseteq A$ і $A\subseteq A$.*

$\varnothing$ і A називаються ***невласними*** підмножинами множини A.

Для кожної множини A існує множина, елементами якої є всі її підмножини.

Означення. *Множина, елементами якої є всі підмножини множини A і тільки вони, називається* ***булеаном (або множиною підмножин)*** *множини A і позначається $B(A)$*. Відносно елементів булеана множина A є ***універсумом***. (Тобто, універсальна множина – це множина, підмножинами якої є всі множини, що розглядаються,)

У разі скінченної підмножини A, що складається з n елементів, булеан $B(A)$ містить 2^n елементів:

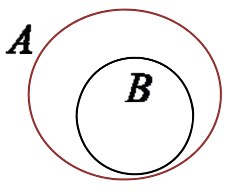
$$|A| = n \Leftrightarrow |B(A)| = 2^n.$$

Приклад. Якщо $A = \{a, b\}$, то $B(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. Перша й остання підмножини невласні, інші – власні.

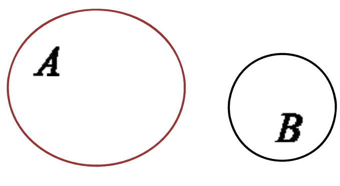
Порожня множина $\varnothing$ має властивість: $x \notin \varnothing$ при будь-якому x. Універсальна множина U має властивість: $x \in U$ при будь-якому x.

Множини і відношення між ними зручно задавати графічно за допомогою так званих ***діаграм Ейлера-Венна***. Діаграми Ейлера-Венна є геометричним зображенням множин. Множина зображується замкненою кривою довільної форми (найчастіше – кругом). Точки, які лежать всередині замкненої кривої, можна розглядати як елементи відповідної множини.

Наприклад:

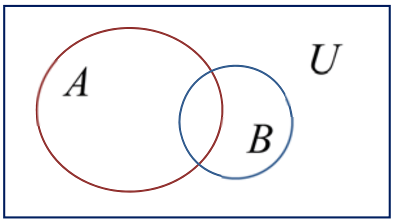


$B \subset A$



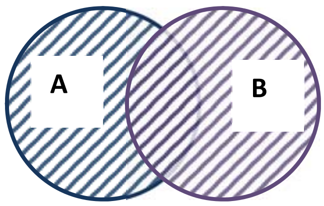
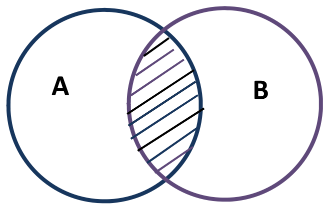
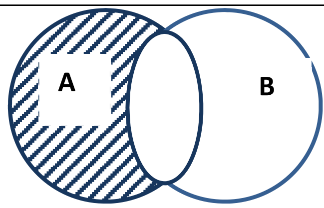
$B \not\subset A$

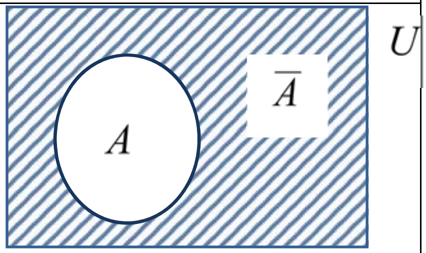
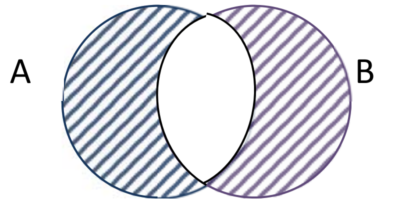
Універсум U на діаграмах Ейлера-Венна зображується у вигляді прямокутника.



3. Основні операції над множинами

Існує ще один спосіб задання множин – за допомогою операцій над іншими множинами. На булеані $B(U)$ визначаються наступні операції над множинами $A \in B(U)$ і $B \in B(U)$.

Назва і позначення	Означення	Геометрична ілюстрація
Об'єднання $A \bigcup B$	$A \bigcup B := \{x : x \in A \vee x \in B\}$	
Переріз $A \bigcap B$	$A \bigcap B := \{x : x \in A \;\&\; x \in B\}$	
Різниця $A \setminus B$	$A \setminus B := \{x : x \in A \;\&\; x \notin B\}$	

Назва і позначення	Означення	Геометрична ілюстрація
Доповнення $\overline{A}$	$\overline{A} = U \setminus A := \{x : x \in U \,\&\, x \notin$	
Симетрична різниця $A\Delta B$	$A\Delta B = \{x : x \in A \bigcup B,\ x \notin A$	

Використовуючи операції $\cap$, $\cup$, $\setminus$, $\bar{}$ можна виражати одні множини через інші. ***За умовчанням приймається пріоритет операцій***: $\bar{}\,, \cap, \cup, \setminus, \Delta$. Для зміни цього порядку у виразі використовують дужки.

Таким чином, множину можна задати виразом, в який входять множини, операції і, може бути, дужки. Такий спосіб завдання множини називається аналітичним.

4. Властивості операцій над множинами

Операції над множинами, як і операції над числами, мають певні властивості. Ці властивості виражаються сукупністю тотожностей незалежно від конкретного змісту множин, що входять у них, і є підмножинами деякого універсуму U, тобто множинами з $B(U)$.

Теорема. *Для будь-яких множин A, B, C з булеану $B(U)$ справедливі наступні тотожності (основні закони теорії множин)*:

1. $A \cap B = B \cap A$ – комутативність $\cap$	1*. $A \cup B = B \cup A$ – комутативність $\cup$
2. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ – асоціативність $\cap$	2*. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ – асоціативність $\cup$
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ – дистрибутивність $\cap$ відносно $\cup$	3*. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ – дистрибутивність $\cup$ відносно $\cap$
закони поглинання	
4. $A \cap (A \cup B) = A$	4*. $A \cup (A \cap B) = A$
закони де Моргана	
5. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	5*. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
6. $\overline{\overline{A}} = A$	
закони ідемпотентності	
7. $A \cap A = A$	7*. $A \cup A = A$
властивості $\varnothing$ і U	
8. $A \cap \varnothing = \varnothing$ $A \cap U = A$	8*. $A \cup \varnothing = A$ $A \cup U = U$
9. $A \cap \overline{A} = \varnothing$	9*. $A \cup \overline{A} = U$
10. $\overline{\varnothing} = U$, $\overline{U} = \varnothing$	
11. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$	
12. $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$	

Доведення (самостійно) всіх рівносильностей проводиться

1) за означенням рівності множин і за означеннями операцій над множинами.

2) за допомогою діаграм Ейлера-Венна.

За допомогою основних властивостей операцій над множинами доводять рівності множин і спрощують вирази алгебри множин.

5. Декартовий добуток множин

Нехай A i B – довільні множини.

Означення. Впорядкованою парою *називається пара* (a,b) *елементів* $a \in A$, $b \in B$, *взятих в певному порядку.*

Дві впорядковані пари вважаються рівними, якщо рівні їх відповідні компоненти:

$$(a_1,b_1)=(a_2,b_2) \Leftrightarrow a_1=a_2 \, i \, b_1=b_2 .$$

Означення. Декартовим добутком *двох множин* A *і* B *називається множина всіх впорядкованих пар* (a,b)*:*

$$A\times B=\{(a,b): a\in A, b\in B\}.$$

Якщо $A=B$, то кажуть про *декартовий квадрат* множини A:

$$A^2 = A\times A=\{(a,b): a\in A, b\in A\}$$

Аналогічно можна ввести декартовий добуток трьох $A_1\times A_2\times A_3$, чотирьох $A_1\times A_2\times A_3\times A_4$ і т.д. множин. При $A_1=A_2=\ldots=A_k$ скорочено пишуть $A^k=\underbrace{A\times A\times\ldots\times A}_{k\ \text{ðàç³â}}$ і кажуть про k-й декартовий степінь множини A. Елементами A^k є послідовності (набори, вектори, рядки) $(a_1,a_2,\ldots,a_k)$ довжини

k.

За означенням покладають, що перший декартовий степінь будь-якої множини A є сама множина A, тобто $A^1 = A$.

Декартовий добуток має наступні ***властивості***:

1) $A \times B \neq B \times A$ – некомутативність;

2) $A \times \left(B \cup C\right) = \left(A \times B\right) \cup \left(A \times C\right)$ – дистрибутивність відносно $\cup$;

3) $A \times \left(B \cap C\right) = \left(A \times B\right) \cap \left(A \times C\right)$ – дистрибутивність відносно $\cap$;

4) $A \times \varnothing = \varnothing \times A = A$.

Приклад: Нехай $A = \left\{0,1\right\}$, $B = \left\{x, y\right\}$. Тоді

$$A \times B = \left\{\left(0, x\right), \left(0, y\right), \left(1, x\right), \left(1, y\right)\right\};$$

$$B \times A = \left\{\left(x, 0\right), \left(y, 0\right), \left(x, 1\right), \left(y, 1\right)\right\}.$$

2. Нехай R – множина всіх дійсних чисел. Тоді декартовий квадрат $R \times R = R^2$ є просто множина всіх декартових координат на площині відносно заданих координатних осей (– множина точок площини). Якщо $A = \left\{x : x \in \left[0,1\right]\right\}$, то A^2 – одиничний квадрат на площині.

6. Поняття відношення. Способи задання відношень

Означення. *Для будь-яких двох множин* A *і* B *довільна підмножина* $\rho \subseteq A \times B$ *називається* ***бінарним відношенням*** *між* A *і* B *(або просто на* A*, якщо* $A = B$*).* Для впорядкованої пари $\left(a,b\right) \in \rho$ використовують позначення $a\rho b$ і кажуть, що a знаходиться у відношенні ρ з b. Якщо ж два елементи a, b не зв'язані відношенням ρ, то записують $\left(a,b\right) \notin \rho$ або $\overline{\left(a,b\right)}$, або $\overline{a\rho b}$.

Оскільки *відношення – це множини*, то їх можна задавати переліком елементів або характеристичними властивостями. Крім того, для бінарних відношень існують ще декілька способів їх задання.

Способи задання відношень

1. ***Перелік елементів***. Відношення з прикладу 1

$$\rho = \{(6,5),(7,5),(7,6),(8,5),(8,6),(8,7)\}$$

2. ***За допомогою характеристичної властивості елементів***.

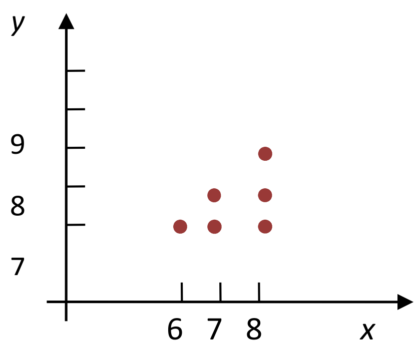
3. ***Матрицею відношення***, рядки і стовпці якої відповідають елементам множин A і B. Пари, які входять у відношення ρ, зображуються спеціальним символом, наприклад, 1, на перерізі відповідних рядків і стовпців.

Наприклад, відношення з прикладу 1 може бути задане матрицею:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\ \begin{array}{c} 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

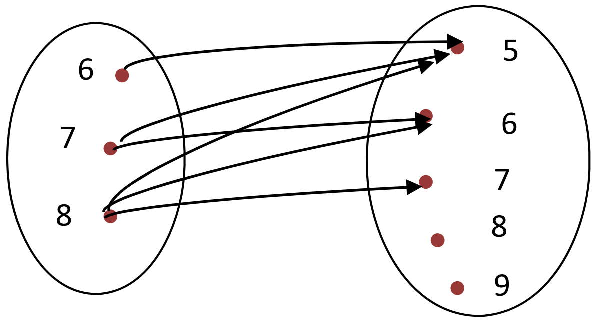
4. ***Графіком,*** який являє собою множину точок на площині з ПДСК, координатами яких є пари з множини ρ.

Наприклад, графік відношення з прикладу 1 має вигляд:



5. Якщо $\rho \subseteq A \times B$, то відношення можна задати ***діаграмою***, яка складається з вузлів і стрілок, причому вузлам відповідають елементи множин A і B, а стрілка з'єднує елемент $a \in A$ з елементом $b \in B$ тільки у випадку, коли $(a,b) \in \rho$.

Наприклад, відношення з прикладу 1 може бути задане діаграмою



6. Якщо $\rho \subseteq A^2$, то відношення можна задати ***графом*** – сукупністю вузлів, яким відповідають елементи множини A, і дуг, напрямлених від a до b тільки у випадку, коли $(a,b) \in \rho$.

Зауваження. Способи задання 4–6 ще називають графічними способами зображення відношень. Графічні способи представлення відношень мають властивість наочності (при невеликих потужностях множин).

7. Образи і прообрази елементів і множин відносно відношень. Операції над відношеннями

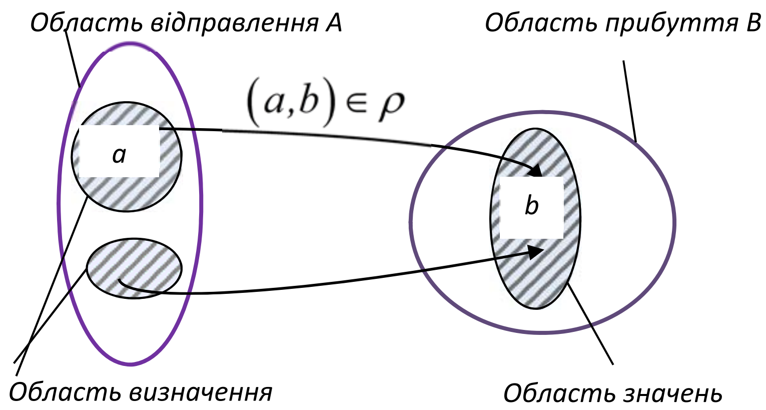
Нехай між множинами A і B встановлено відношення $\rho \subseteq A \times B$. З кожним бінарним відношенням ρ на множинах A і B зв'язані деякі множини.

Означення. *Множина* A *називається* ***множиною відправлення****, множина* B *називається* ***множиною*** *прибуття відношення.*

Означення. *Множина* $D(\rho) = \{a : (a,b) \in \rho\} \subseteq A$ *перших компонент всіх пар, які входять до відношення* ρ *називається* ***областю визначення*** *відношення* ρ*. Множина* $E(\rho) = \{b : (a,b) \in \rho\} \subseteq B$ *других компонент всіх пар, які входять до відношення* ρ *називається* ***областю значень*** *відношення* ρ

.

Відношення між множинами A і B на діаграмі Ейлера-Венна:



Означення. *Сукупність всіх тих* $b \in B$, *в які переходить даний елемент* $a \in A$, *називається* ***образом елемента*** $a \in A$ *і позначається* $\rho(a) = \{b \in B : (a,b) \in \rho\}$. *Сукупність всіх тих* $a \in A$, *які переходять в даний елемент* $b \in B$, *називається* ***прообразом елемента*** $b \in B$ *і позначається* $\rho^{-1}(b) = \{a \in A : (a,b) \in \rho\}$. *Аналогічно визначаються* ***образ*** $\rho(A')$ ***множини*** $A' \subset A$ *і* ***прообраз*** $\rho^{-1}(B)$ ***множини*** $B' \subset B$.

Оскільки відношення – це множини, над ними можна виконувати всі теоретико-множинні операції: переріз, об’єднання, віднімання, доповнення. При цьому виконуються всі закони алгебри множин.

Для відношень має зміст операція обернення. Перехід від ρ до ρ^{-1} здійснюється взаємною перестановкою компонент кожної пари, яка входить до відношення.

Означення. *Нехай* ρ *– бінарне відношення на множинах* A *і* B. ***Відношенням, оберненим до відношення*** ρ *називається таке відношення* ρ^{-1}, *що* $(b,a) \in \rho^{-1}$ *тоді і тільки тоді, коли* $(a,b) \in \rho$.

Якщо два відношення $\rho_1 \subseteq A \times B$ і $\rho_2 \subseteq B \times C$ застосувати послідовно, то можна знайти їх композицію, тобто побудувати нове відношення $\rho_3 = (\rho_1 \circ \rho_2) \subseteq A \times C$, при умові, що елементи області значень першого відношення є елементами області визначення другого відношення.

Означення. ***Композицією*** *двох відношень* $\rho_1 \subseteq A \times B$ *і* $\rho_2 \subseteq B \times C$ *називається відношення* $\rho_3 = (\rho_1 \circ \rho_2) \subseteq A \times C$*, де*

$$\rho_3 = \{(a,c) : a \in A, c \in C \text{ і } \exists b \in B : (a,b) \in \rho_1, (b,c) \in \rho_2\}.$$

8. Властивості бінарних відношень

Нехай ρ – бінарне відношення на довільній множині A ($\rho \subseteq A^2$).

Означення. *Відношення* ρ *називається* ***рефлексивним****, якщо воно завжди виконується між елементом і ним самим. (*$\forall a \in A \ a\rho a$*).*

Приклад. Відношення нестрогої нерівності на множинах N, Z, R.

Означення. *Відношення* ρ *називається* ***антирефлексивным****, якщо воно не виконується для будь-якого елемента. (*$\forall a \in A \ \overline{a\rho a}$ *).*

Приклад. Відношення строгої рівності на множинах N, Z, R.

Означення. *Відношення* ρ *називається* ***симетричним****, якщо для будь-яких елементів* a, b *при виконанні* $a\rho b$ *виконується* $b\rho a$*. (*$\forall a,b \in A \ a\rho b \to b\rho a$*).*

Приклад. Відношення рівності на множинах N, Z, R.

Означення. *Відношення* ρ *називається* ***антисиметричним****, якщо* $a\rho b$ *і* $b\rho a$ *виконуються одночасно тоді і тільки тоді, коли* $a = b$*. (*$\forall a,b \in A \ a\rho b \text{ і } b\rho a \to a = b$*)*

Приклад: Відношення нестрогої нерівності на числових множинах N, Z, R:

Означення. *Відношення* ρ *називається* ***асиметричним****, якщо для будь-яких елементів* a, b *або* $\overline{a\rho b}$ *або* $\overline{b\rho a}$*. (*$\forall a,b \in A \ a\rho b$ àáî $b\rho a$*)*

Приклад. Відношення строгої нерівності на числових множинах N, Z, R:

Означення. *Відношення ρ називається **транзитивним**, якщо для будь-яких $a, b, c \in A$ з $a\rho b$ і $b\rho c$ випливає $a\rho c$. ($\forall a,b,c \in A$ $a\rho b$ і $b\rho c \to a\rho c$)*

Приклад. Відношення =, $\le$.

Наявність певної властивості легко прослідкувати за матрицею або за графом відношення.

9. Спеціальні бінарні відношення

Нехай $\rho \subset A^2$, $A \neq \varnothing$.

Означення. Відношенням еквівалентності *називається бінарне відношення ρ на множині A, якщо воно рефлексивне, симетричне і транзитивне, тобто:*

1) $\forall a \in A$ $a\rho a$;

2) $\forall a,b \in A$ $a\rho b \to b\rho a$;

3) $\forall a,b,c \in A$ $a\rho b$ і $b\rho c \to a\rho c$.

Відношення еквівалентності є узагальненням відношення = на між числами або множинами.

Приклади:

1. Відношення рівності на будь-якій числовій множині.

2. Відношення ‘‘мати ту саму остачу від ділення на 7’’ на множині N.

Означення. Класом еквівалентності *елемента a множини A називається множина всіх елементів множини A, які еквівалентні a. Позначається $K(a)$.*

$$K(a) = \{b : b\rho a\}.$$

Означення. Розбиттям *непорожньої множини* A *називається сукупність таких її непорожніх підмножин* A_i, *які не перерізаються (* $A_i \bigcap A_j = \varnothing$*), а в об'єднанні складають всю множину* A *(* $A_i \bigcup A_j = A$*).*

Приклад. $\{A, \overline{A}\}$ – розбиття універсуму.

Теорема. *Сукупність всіх класів еквівалентності є розбиттям множини* A. *Справедливе і обернене: Нехай* $A_1, A_2, ... A_n$ *– довільне розбиття множини* A *і для будь-яких елементів* $a, b \in A$ *задане бінарне відношення* $a \rho b \leftrightarrow a, b$ *належать одному й тому ж класу розбиття. Тоді* ρ *є відношенням еквівалентності.*

Означення. *Множина всіх класів еквівалентності деякої множини* A, *утворених за відношенням еквівалентності* ρ, *називається* ***фактормножиною*** *множини* A *за даним відношенням еквівалентності. Позначається* A / ρ.

З поняття рівності між числами випливає більш широке поняття відношення еквівалентності на множинах. За аналогією нерівності також можуть бути використані як моделі для більш широкого класу відношень – відношень порядку на множинах.

Означення. Відношенням нестрогого порядку *називається бінарне відношення* ρ *на множині* A, *якщо воно рефлексивне, антисиметричне і транзитивне, тобто:*

1) $\forall a \in A \;\; a \rho a$

2) $\forall a, b \in A \; a \rho b \; \text{ і } \; b \rho a \rightarrow a = b$;

3) $\forall a, b, c \in A \; a \rho b \; \text{ і } \; b \rho c \rightarrow a \rho c$.

Означення. Відношенням строгого порядку *називається бінарне відношення* ρ *на множині* A, *якщо воно антирефлексивне, асиметричне і транзитивне, тобто*

1) $\forall a \in A \;\; \overline{a \rho a}$

2) $\forall a,b \in A\ a\rho b$ *àáî* $b\rho a$;

3) $\forall a,b,c \in A\ a\rho b$ *і* $b\rho c \Rightarrow a\rho c$.

Означення. *Множина* M *, на якій задане відношення порядку, називається* ***цілком впорядкованою****, якщо будь-які два елементи з* M *знаходяться в цьому відношенні і* ***частково впорядкованою*** *в противному випадку.*

Приклад**:** $\le$ і $\ge$ – відношення нестрогого порядку для чисел; $<$ і $>$ – відношення строгого порядку. Обидва відношення цілком впорядковують множини N і R.

10. Поняття функції та відображення

Поняття *функції* або *відображення* є одним з центральних в математиці. В математичному аналізі прийнято наступне означення функції. *Нехай задано множини* X *і* Y*. Змінна* $y \in Y$ *називається функцією від змінної* $x \in X$ *, якщо за деяким правилом кожному значенню* x *відповідає одне значення* y.

Існує інше означення функції як окремого випадку відношення між множинами.

Означення. Функцією *називається бінарне відношення* f *між множиною* X *і множиною* Y *таке, що для кожного елемента* $x \in X$ *існує один і тільки один елемент* $y \in Y$ *, відповідний елементу* x *. Цей елемент називається* ***значенням функції*** *для елемента* x *і позначається* $f(x)$. Інакше кажучи, функцією *називається бінарне відношення, яке не містить двох пар з однаковими першими компонентами і різними другими.*

Приклад. 1) $\{(1,2),(3,4),(4,4),(5,6)\}$ – функція;

2) $\{(1,2),(1,4),(4,4),(5,6)\}$ – відношення, але не функція.

Як і для звичайного відношення, для функціонального відношення множина X називається множиною відправлення, множина Y – множиною прибуття. Множина пар $\{(x,y): x \in X, y \in Y\} \subseteq X \times Y$ називається графіком функції f.

Множина $D(f) = \{x \in X : \exists y \in Y\ y = f(x)\} \subseteq X$ називається ***областю визначення*** функції f; множина $E(f) = \{y \in Y : \exists x \in X\ y = f(x)\} \subseteq Y$ називається ***областю значень*** функції f.

Приклад. Для попереднього прикладу 1) $D(f) = \{1,3,4,5\}$, $E(f) = \{2,4,6\}$.

Таким чином, символ f використовується при означенні функції у двох розуміннях:

- 1) f – множина, елементами якої є пари (x,y), між якими існує функціональне відношення;
- 2) $f(x)$ – позначення для елемента $y \in Y$, що відповідає даному елементу $x \in X$.

Для функцій застосовується ***геометрична термінологія***. Функцію $f : X \to Y$ називають ***відображенням множини*** X ***в множину*** Y, елемент $f(x)$ називається ***образом*** x при відображенні f. Якщо $y \in Y$, то будь-який x, для якого $x \xrightarrow{f} y$, називається ***прообразом*** елемента y. Сукупність всіх прообразів елемента $y \in Y$ називається ***повним прообразом*** елемента y і позначається $f^{-1}(y)$: $f^{-1}(y) = \{x \in X\ : f(x) = y\}$. Аналогічно визначаються ***образ*** $f(A)$ ***множини*** $A \subset X$ *і* ***прообраз*** $f^{-1}(B)$ ***множини*** $B \subset Y$:

$$f(A) = \{y \in Y :\ \exists x \in A\ \ f(x) = y\};$$

$$f^{-1}(B)=\{x\in X\ :\ f(x)\in B\}$$

Означення. *Відображення* X *на* X *називається* ***перетворенням множини*** X**.**

Оскільки функції є бінарними відношеннями, то можна знаходити обернені функції і застосовувати операцію композиції.

Означення. *Якщо відношення, обернене до функції* $f:X\to Y$*, є функціональним, то воно називається* ***функцією, оберненою до*** f *і позначається* f^{-1}.

Оскільки в оберненому відношенні образи і прообрази міняються місцями, то обернена функція може не існувати.

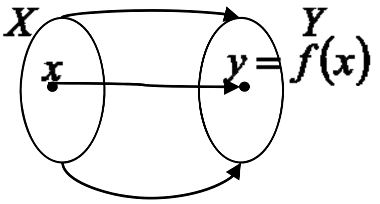
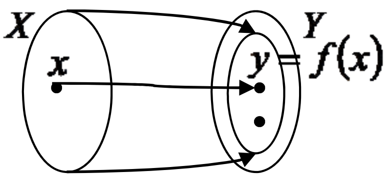
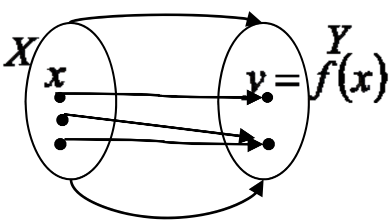
Приклад: Функція $\sin:R\to R$ відображає відрізок $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ на відрізок $[-1,1]$. На відрізку $[-1,1]$ для неї існує обернена функція $arc\sin$.

Означення. *Нехай задані функції* $f:X\to Y$ *і* $g:Y\to Z$*. Функція* $h:X\to Z$ *називається* ***композицією функцій*** f ***і*** g*, якщо має місце рівність* $h(x)=g(f(x))$*. Часто кажуть, що функція* h *отримана підстановкою* f *в* g.

В математичному аналізі означення композиції двох функціональних відношень $h=f\circ g$ відповідає означенню складеної функції $h(x)=g(f(x))$ ..

Означення. *Вираз, що описує композицію функцій і містить функціональні знаки і символи аргументів, називається* ***формулою****.*

11. Класифікація функцій

Класифікація функцій $f: X \to Y$	
за характером f	**за виглядом множин** X **і** Y
сюр'єкція *(або відображення* X ***на*** Y*), якщо* $$\forall y \in Y \ \ \exists x \in X: \ f(x) = y$$ 	$X = N$ **–** ***дискретна функція (послідовність)***
ін'єкція *(або відображення* X ***в*** Y*), якщо* $$\forall x_1, x_2 \in X \ x_1 \neq \mathrm{x}_2 \to \ f(x_1) \neq f(x_2)$$ 	$X \subset R$ *і* $Y \subset R$ – ***дійсна функцією одного дійсного аргументу;*** $X = R \times R$ *і* $Y \subset R$ – ***дійсна функцією двох дійсних аргументів***
бієкція*, (взаємнооднозначне відображення), якщо* $$\forall y \in Y \ \ \exists! x \in X: \ f(x) = y$$ 	X *– сім'я функцій, а* $Y \subset R$, – ***функціонал****.* X *і* Y *– сім'ї функцій –* ***оператор****.*
відображення загального виду, *якщо*	

Класифікація функцій $f: X \to Y$	
за характером f	**за виглядом множин X і Y**
$\left(\exists x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 : f\left(x_1\right) = f\left(x_2\right)\right)$ ***і*** $\left(\exists y \in Y : f^{-1}\left(y\right) = \varnothing\right)$	

12. Потужність множин і зліченність

Розглянемо множину натуральних чисел N та її скінченну підмножину $N_k = \{1,2,...,k\}$ – відрізок натурального ряду.

Означення. *Непорожня множина A називається* ***скінченною****, якщо вона бієктивна деякій підмножині N_k, $k \in N$. Якщо $A \sim N_k$, то потужність множини A дорівнює $|A| = k$.*

Означення. *Непорожня множина A називається* ***зліченною****, якщо вона бієктивна множині натуральних чисел N*. Для позначення потужності зліченної множини використовується символ $\aleph_0$ (алеф-0).

Можна сказати, що множина зліченна, якщо її елементи можна перенумерувати натуральними числами.

Означення. Множини *називаються* ***рівнопотужними****, якщо між ними можна встановити бієкцію.*

Ясно, що рівнопотужні скінченні множини мають однакову потужність – кількість елементів.

Існують нескінченні множини, елементи яких не можна перенумерувати. Такі множини називають *незліченними*.

Має місце

Теорема Кантора. *Множина всіх точок відрізка* $[0,1]$ *незліченна.*

Означення. *Множина, бієктивна множині всіх точок відрізка* $[0,1]$, *називається* ***множиною потужності континуума***.

Оскільки множини точок інтервалів, відрізків і всієї числової прямої рінопотужні, то всі вони мають потужність континуума.

13. Поняття бінарної алгебраїчної операції

Означення. *Нехай* $X \neq \varnothing$ *– довільна множина елементів* $a,b,c,...$. ***Бінарною алгебраїчною операцією*** *на множині* X *називається довільне (але фіксоване) відображення* $\varphi : X^2 \to X : (a,b) \to \varphi(a,b)$.

Іноді замість $\varphi(a,b)$ пишуть $a\varphi b$, а ще частіше конкретну бінарну операцію позначають спеціальним символом: +, •, $\bigcup, \bigcap$, і т.д.

Для того, щоб відображення $\varphi : X^2 \to X$ було б бінарною алгебраїчною операцією на множині $X \neq \varnothing$, необхідно, щоб φ задовольняло б вимоги:

1) було б бінарним;

2) було б завжди виконуваним, тобто завжди можна було б знайти результат виконання операції – елемент $c = a\varphi b$;

3) було б однозначним, тобто елемент $c = a\varphi b$ був єдиним;

4) задовольняло би умову замкнености, тобто щоб обов'язково $c \in X$.

Приклад. Нехай Z, Q, R, C – відповідно множини цілих, раціональних, дійсних та комплексних чисел. Бінарними алгебраїчними операціями на цих множинах є, наприклад, дії додавання, віднімання та множення.

Звичайно бінарна операція на скінченній множині з n елементів задається так званою ***таблицею Келі***, яка являє собою квадратну $(n+1)\times(n+1)$-таблицю з двома входами, кожній клітинці якої відповідає впорядкована пара (a,b) елементів даної множини, елемент a стоїть у вибраному рядку, елемент b – у вибраному стовпці.

Приклад 1. У множині $\{0,1,2,3\}$ задано бінарну операцію $\otimes$ так, що $a\otimes b$ є остачею від ділення добутку ab на число 4. Задати бінарну операцію $\otimes$ таблицею Келі.

Розв'язання. Таблиця Келі для операції $\otimes$ у множині $\{0,1,2,3\}$ має вигляд:

$\otimes$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Разом з бінарними алгебраїчними операціями не позбавлені інтересу більш загальні n***-арні операції***, так само як і їх комбінації.

Означення. n***-арною алгебраїчною операцією*** *на множині* $X\neq\varnothing$ *називається відображення* $\varphi: X^n \to X$.

n–арна алгебраїчна операція за n елементами множини A визначає $(n+1)$-й елемент цієї ж множини. При $n=1,2,3,\ldots$будемо мати відповідно унарну, бінарну, тернарну і т.д. алгебраїчні операції.

14. Властивості бінарних алгебраїчних операцій

1. Означення. *Операція φ на множині $X \neq \varnothing$ називається* ***комутативною****, якщо* $\forall a, b \in X \;\; a\varphi b = b\varphi a$.

Таблиця Келі комутативної бінарної алгебраїчної операції симетрична відносно діагоналі.

Приклад 1. Операція $\otimes$ у множині $\{0,1,2,3\}$ з прикладу 1 є комутативною, оскільки її таблиця Келі симетрична відносно діагоналі.

2. Означення. *Операція φ на множині $X \neq \varnothing$ називається* ***асоціативною,*** *якщо*

$$\forall a, b, c \in X : (a\varphi b)\varphi c = a\varphi(b\varphi c).$$

Значення асоціативності бінарної алгебраїчної операції полягає в тому, що вона дає можливість визначити композицію трьох і взагалі будь-якого числа елементів множини, взятих у певному порядку.

3. Означення. *Операція φ на множині $X \neq \varnothing$ називається* ***дистрибутивною зліва*** *відносно операції ψ, якщо*

$$\forall a, b, c \in X \;\; a\varphi(b\psi c) = (a\varphi b)\psi(a\varphi c)$$

і ***дистрибутивною справа*** *відносно операції ψ, якщо*

$$\forall a, b, c \in X \;\; (a\psi b)\varphi c = (a\varphi c)\psi(b\varphi c).$$

Якщо операція φ комутативна на множині $X \neq \varnothing$, то поняття дистрибутивності зліва і справа збігаються. В цьому випадку просто кажуть, що операція φ

15. Обернені бінарні операції

Нехай на множині X визначена бінарна алгебраїчна операція φ.

Означення. *Якщо для будь-яких двох елементів a і b множини $X \neq \varnothing$ існує в множині X одна і тільки одна пара елементів x_0 і y_0 таких, що $a\varphi x_0 = b$ і $y_0 \varphi a = b$, то кажуть, що для визначеної на множині X бінарної алгебраїчної операції φ виконується* ***обернена операція****, яку позначають φ^{-1}.*

Якщо операція φ комутативна, то елементи $x_0 = y_0$.

Обернена операція φ^{-1}, не є новою незалежною операцією, вона – похідна від операції φ.

16. Елементи, виділені відносно бінарної операції

Означення. *Якщо існує елемент $e \in X$ такий, що*

$$\forall a \in X \ e\varphi a = a\varphi e = a$$

то він називається ***нейтральним*** *відносно операції φ, або* ***одиничним****.*

Теорема (про єдиність нейтрального елемента)*. Якщо відносно операції φ існує нейтральний елемент, то він єдиний.*

Означення. *Елемент $b \in X$ називається* ***симетричним*** *елементу $a \in X$ відносно операції φ, якщо $a\varphi b = b\varphi a = e$, де e – нейтральний відносно операції φ елемент.*

Теорема (про єдиність симетричного елемента)*. Якщо бінарна операція φ, визначена на множині X, асоціативна, то для будь-якого елемента $a \in X$ в ньому може існувати не більше одного симетричного елемента.*

Приклад 1. Визначити елементи, виділені відносно операції $\otimes$ у множині $\{0,1,2,3\}$ з прикладу 1.

Розв'язання. Щоб визначити нейтральний елемент, знайдемо стовпець таблиці Келі, що цілком збігається з початковим. В таблиці для операції $\otimes$ такий стовпець є, і йому відповідає елемент 1. Отже, елемент 1 є нейтральним відносно операції $\otimes$.

Щоб визначити існування симетричного елемента для даного, рухаємося по рядку, який відповідає даному елементу, до нейтрального елемента. Зверху, у початковому рядку, напроти нейтрального елемента знаходиться шуканий симетричний. Для елемента 2 не існує симетричного, оскільки $2\otimes 0=2\otimes 2=0$ і $2\otimes 1=2\otimes 3=2$.

17. Поняття алгебраїчної структури

На непорожній множині X може бути задано багато різних алгебраїчних операцій. Бажаючи виділити одну з них, використовують дужки: (X,φ), і говорять, що операція φ визначає на X ***алгебраїчну структуру***. Якщо операція φ асоціативна чи комутативна, то такі ж назви привласнюються і відповідній алгебраїчній структурі.

Означення. *Непорожня множина X разом із заданою на ній сукупністю алгебраїчних операцій називається* ***алгебраїчною структурою****:* $(X;\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_k)$.

Існує невелика кількість основних типів алгебраїчних структур, алгебраїчні операції в яких за своїми властивостями більш-менш близькі до операцій додавання і множення. У зв'язку з цим при вивченні алгебраїчних структур застосовуються дві системи термінів або дві форми запису: ***адитивну*** і ***мультиплікативну***. Нижче наводиться словник цих термінологій:

	Адитивна термінологія	***Мультиплікативна термінологія***
Операція	+ – додавання	· – множення
Результат операції	сума	добуток
Нейтральний елемент	нуль 0	одиниця 1або *e*

Симетричний елемент	протилежний $-a$	обернений a^{-1} або $\frac{1}{a}$
Обернена операція	віднімання	ділення
Результат оберненої операції	різниця	частка
Степінь елемента	кратне na	степінь a^n

18. Основні типи алгебраїчних структур

1) Алгебраїчні структури з однією бінарною операцією: півгрупи і групи

Означення. Півгрупою *називається непорожня множина A з однією бінарною алгебраїчною операцією φ, яка має тільки властивість асоціативності*

$$\forall a,b,c \in A : (a\varphi b)\varphi c = a\varphi(b\varphi c).$$

Приклади. 1. $(N;+)$ – півгрупа.

2. $(Z;\cdot)$ – півгрупа.

Означення. Групою *називається непорожня множина G, на якій визначена бінарна алгебраїчна операція φ так, що виконуються наступні умови (аксіоми групи):*

1) операція φ асоціативна: $\forall a,b,c \in G \ \ (a\varphi b)\varphi c = a\varphi(b\varphi c)$;

2) в множині G існує нейтральний елемент e: $\forall a \in G \ \ a\varphi e = e\varphi a = a$;

3) для кожного елемента $a \in G$ *існує симетричний елемент* a'*:*
$\forall a \in G \;\; a\varphi a' = a'\varphi a = e$.

Позначається $(G;\varphi)$ або просто G.

Група, в якій операція φ комутативна, тобто

4) $$\forall a,b \in G \;\; a\varphi b = b\varphi a$$

називається *комутативною* або ***абелевою*** (на честь норвезького математика Нільса Хенріка Абеля (1802–1829)), який вивчав групи з комутативною операцією).

Означення. *Група, в якій всі елементи основної множини є степенями одного елемента, тобто є результатами k-кратного застосування операції* φ *(k=0,1,2,...), називається* ***циклічною***. Цей єдиний елемент називається ***твірним елементом*** циклічної групи. Циклічна група з твірним елементом g позначається так: $\langle g \rangle$ і є абелевою групою вигляду $\langle g \rangle = \{ g^n : n \in Z \}$ або $\langle g \rangle = \{ ng : n \in Z \}$ в залежності від того, яка група розглядається – мультиплікативна або адитивна.

Число елементів групи називають її ***порядком***.

Приклад. $(Z;+)$ – абелева група цілих чисел, нейтральний елемент 0, оберненим до елемента a є $-a$.

2) Алгебраїчні структури з двома бінарними операціями: кільця і поля

Означення. Кільцем *називається непорожня множина* K*, на якій визначені дві бінарні алгебраїчні операція + (додавання) і · (множення) так, що виконуються наступні умови (аксіоми кільця):*

К1. $(K,+)$ *– абелева група:*

1) операція + асоціативна: $\forall a,b,c \in K \ \ (a+b)+c = a+(b+c)$*;*

2) в множині K *існує нульовий елемент* 0*:* $\forall a \in K \quad a+0=0+a=a$ *;*

3) для кожного елемента $a \in K$ *існує протилежний елемент* $-a$ *:*

$$\forall a \in K \ \ a+(-a)=(-a)+a=0.$$

4) операція + комутативна: $\forall a,b \in K \ a+b=b+a$.

К2. $(K,\cdot)$ *– півгрупа:*

5) операція $\cdot$ *асоціативна:* $\forall a,b,c \in K \ \ (a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$*;*

К3. Операція $\cdot$ *(множення) дистрибутивна зліва і справа відносно операції* $\cdot$*+(додавання):*

6) $$\forall a,b,c \in K \ \ a\cdot(b+c)=ab+ac;$$

$$\forall a,b,c \in K \ \ (b+c)\cdot a = ba+ca;$$

Кільце позначається $(K,+,\cdot)$ або просто K.

Означення. *Кільце* $(K,+,\cdot)$ *називається* ***комутативним****, якщо операція (множення) є комутативною, тобто*

$$\forall a,b \in K \ a\cdot b = b\cdot a.$$

(На відміну від груп, комутативне кільце не прийнято називати абелевим).

Приклад. $(Z;+,\cdot)$ – кільце цілих чисел.

Означення. Полем *називається непорожня множина* P*, на якій визначені дві бінарні алгебраїчні операція + (додавання) і* $\cdot$ *(множення) так, що виконуються наступні умови (аксіоми поля):*

1) операція + асоціативна на P *:* $\forall a,b,c \in P \ \ (a+b)+c=a+(b+c)$*;*

2) в множині P *існує нульовий елемент* 0*:* $\forall a \in P \ \ a+0=0+a=a$ *;*

3) для кожного елемента $a \in P$ *існує протилежний елемент* $-a$ *:*

$$\forall a \in P \;\; a+(-a)=(-a)+a=0.$$

4) *операція + комутативна на* P*:* $\forall a,b \in P \; a+b=b+a$.

5) *операція* $\cdot$ *асоціативна на* P*:* $\forall a,b,c \in P \;\; (a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$*;*

6) *операція* $\cdot$ *дистрибутивна зліва і справа відносно операції* $\cdot$ *+:*

$$\forall a,b,c \in P \;\; a\cdot(b+c)=ab+ac;$$

$$\forall a,b,c \in P \;\; (b+c)\cdot a = ba+ca$$

7) *операція* $\cdot$ *комутативна на* P*:* $\forall a,b \in P \; ab=ba$*;*

8) *в множині* P *існує одиничний елемент* 1*:*

$$\forall a \in P \;\; a\cdot 1 = 1\cdot a = a$$

9) *для кожного ненульового елемента* $a \in P$ *існує в* P *обернений до нього елемент* a^{-1}*:*

$$\forall a \in P \;\; a\cdot a^{-1} = a^{-1}\cdot a = 1.$$

Приклад.

1. $(Q;+,\cdot)$ – поле раціональних чисел.

2. $(R;+,\cdot)$ – поле дійсних чисел.

3. $(C;+,\cdot)$ – поле комплексних чисел.

19. Ізоморфізми та гомоморфізми алгебраїчних структур

Означення. *Нехай* $*$ *– алгебраїчна операція, задана на множині* X*,* $\circ$ *– алгебраїчна операція, задана на множині* X'*,* φ *– відображення множини* X *в множину* X'*. Кажуть, що* ***відображення*** φ ***зберігає алгебраїчну операцію*** $*$*, якщо для будь-яких елементів* $a_1, a_2 \in X$ *справедливо*

$$\varphi(a_1 * a_2) = \varphi(a_1)\circ\varphi(a_2).$$

Означення. *Дві алгебраїчні структури* $\left(X;\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_k\right)$ *і* $\left(X';\varphi'_1,\varphi'_2,\dots,\varphi'_k\right)$ *називаються* ***гомоморфними****, якщо існує відображення* $\varphi: X \to X'$*, яке зберігає алгебраїчні операції. Відповідне відображення називається* ***гомоморфізмом****.*

Означення. *Дві алгебраїчні структури* $\left(X;\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_k\right)$ *і* $\left(X';\varphi'_1,\varphi'_2,\dots,\varphi'_k\right)$ *називаються* ***ізоморфними****, якщо існує взаємно однозначне відображення* $\varphi: X \to X'$*, яке зберігає алгебраїчні операції. Відповідне відображення називається* ***ізоморфізмом****.*

Факт ізоморфізму алгебраїчних структур позначається символічно $X \cong X'$.

Означення. *Дві групи* $\left(G,*\right)$ *і* $\left(G',\circ\right)$ *називаються* ***гомоморфними****, якщо існує відображення* $\varphi: G \to G'$*, при якому зберігається групова операція, тобто таке, що:*

$$\varphi\left(g*h\right)=\varphi\left(g\right)\circ\varphi\left(h\right).$$

Означення. *Дві групи* $\left(G,*\right)$ *і* $\left(G',\circ\right)$ *називаються* ***ізоморфними****, якщо існує взаємно однозначне відображення* $\varphi: G \to G'$*, при якому зберігається групова операція, тобто таке, що:*

1) $\varphi\left(g*h\right)=\varphi\left(g\right)\circ\varphi\left(h\right)$;

2) φ *– бієкція.*

Означення. *Два кільця* $\left(K,+,\cdot\right)$ *і* $\left(K',\oplus,\square\right)$ *називаються* ***гомоморфними****, якщо існує відображення* $\varphi: K \to K'$*, при якому зберігаються операції, тобто таке, що:*

1) $\forall a\in K\ \exists a'\in K' : \varphi\left(a\right)=a'$*;*

2) $\forall b' \in K' \ \exists b \in K : \varphi(b) = b'$*;*

3) $\forall a,b \in K \quad \varphi(a+b) = \varphi(a) \oplus \varphi(b)$, $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \square \ \varphi(b)$.

Означення. *Два кільця* $(K,+,\cdot)$ *і* $(K',\oplus,\square)$ *називаються* ***ізоморфними****, якщо існує гомоморфне взаємно однозначне відображення* $\varphi : K \to K'$.

Означення. *Два поля* P *і* P' *називаються* ***ізоморфними****, якщо вони ізоморфні як кільця.*

20. Булеві алгебри

Означення. Булевою алгеброю *називається алгебраїчна структура з трьома операціями* $\left(A;*,\circ,'\right)$ і *двома виділеними елементами 0 і 1, така що дві її операції* $*,\circ$ *є бінарними і задовольняють наступним умовам:*

1. $\forall a \in A \qquad a * a = a$, $\qquad a \circ a = a$, *– ідемпотентність;*
2. $\forall a,b \in A: \ a * b = b * a$, $\qquad a \circ b = b \circ a$ *– комутативність;*
3. $\forall a,b,c \in A$

   $(a*b)*c = a*(b*c)$, $\qquad (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ *– асоціативність*

4. $\forall a,b \in A \ \ a \circ (a * b) = a$, $\qquad a * (a \circ b) = a$ *– поглинання.*
5. $\forall a \in A \qquad a * 0 = 0$, $\qquad a \circ 0 = a$,
6. $\forall a \in A \qquad a * 1 = a \qquad a \circ 1 = 1$.
7. $\forall a,b,c \in A \ \ (a*b) \circ c = (a \circ c) * (b \circ c)$,

   $(a \circ b) * c = (ac) \circ (b * c)$ *– дистрибутивність,*

а третя операція $'$ *є унарною і задовольняє наступним умовам*:

8. $\forall a \in A \qquad a * a' = 0 \qquad a \circ a' = 1$.

Приклад. Нехай заданий деякий універсум U. Позначимо систему всіх його підмножин через $B(U)$. Множина $B(U)$ разом з бінарними операціями $\cup, \cap$ і унарною операцією $^{-}$ утворює алгебру $\left(B(U);\cup,\cap,^{-}\right)$. Алгебра підмножин $\left(B(U);\cup,\cap,^{-}\right)$ є булевою алгеброю. Одиницею в ній є U, нулем – $\varnothing$.

Має місце

Теорема Стоуна *(1936)* (Маршалл Харві Стоун (1903–1989) – американський математик). *Будь-яка булева алгебра ізоморфна алгебрі підмножин множини, яка для неї підходить.*

Таким чином, булеві алгебри цілком можуть бути зведені до алгебр підмножин. З теореми випливає, що операції булевих алгебр мають всі властивості операцій над множинами: ідемпотентність, комутативність, асоціативність, дистрибутивність, закони поглинання та інші.

21. Поняття комбінаторної задачі

Комбінаторика – розділ дискретної математики, що вивчає методи розв’язування задач, пов’язаних з вибором та розташуванням елементів і частин деякої дискретної множини у відповідності із заданими правилами. Класичними в комбінаториці є задачі визначення кількості можливих комбінацій елементів даної множини, які є різними в деякому розумінні. Такі задачі називаються *комбінаторними*.

Комбінаторні міркування лежать в основі розв’язання багатьох задач теорії ймовірностей – важливого розділу сучасної математики, який вивчає випадкові явища.

Для формулювання і розв’язування комбінаторних задач використовуються різні моделі комбінаторних конфігурацій (взаємних розташувань предметів). Найбільш розповсюдженою з них є така:

Дано n предметів. Їх треба розташувати по k місцях так, щоб були *виконані задані обмеження. Скількома способами це можна зробити?*

Значна кількість теорем і формул комбінаторики ґрунтується на двох простих правилах, які називаються правилом суми і правилом добутку.

22. Правило суми. Принцип включення і виключення

Правило суми дозволяє знайти кількість елементів в об'єднанні скінчених множин.

Нехай задані дві скінченні множини X і Y, $|X| = n$, $|Y| = m$.

1) Якщо $X \bigcap Y = \varnothing$, то $|X \bigcup Y| = |X| + |Y|$ – (1)

число елементів об'єднання двох множин, які не перерізаються, дорівнює сумі чисел елементів в кожному з них.

Правило суми на мові теорії множин формулюється так:

Якщо множина X містить n елементів, а множина Y – m елементів, і ці множини не перерізаються, то множина $X \bigcup Y$ містить $n+m$ елементів.

Правило суми на мові комбінаторики формулюється так:

Якщо елемент x можна вибрати n способами, а елемент y –- іншими m способами, причому вибори x і y є взаємно виключними, то один з елементів x або y можна вибрати $n+m$ способами.

2) Якщо $X \bigcap Y \neq \varnothing$, то $|X \bigcup Y| = |X| + |Y| - |X \bigcap Y|$ – (2)

число елементів об'єднання двох множин дорівнює сумі чисел елементів в кожному з них, зменшеній на кількість елементів перерізу цих множин.

Формула для числа елементів в об'єднанні трьох множин: якщо $X \bigcap Y \bigcap Z \neq \varnothing$, то

$$|X \bigcup Y \bigcup Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \bigcap Y| - |X \bigcap Z| - |Y \bigcap Z| + |X \bigcap Y \bigcap Z|. \quad (3)$$

Приклад. Скільки існує натуральних чисел, менших 1000, які не діляться ні на 3, ні на 5, ні на 7.

Розв'язання. Всього чисел, менших 1000, 999. З них:

$999:3=333$ діляться на 3, – позначимо їх множину через X.

$999:5=199$ діляться на 5, – позначимо їх множину через Y.

$999:7=142$ діляться на 7, – позначимо їх множину через Z.

$999:(3\cdot 5)=66$ діляться на 3 і на 5, – позначимо їх множину через $X\bigcap Y$.

$999:(3\cdot 7)=47$ діляться на 3 і на 7, – позначимо їх множину через $X\bigcap Z$.

$999:(5\cdot 7)=28$ діляться на 5 і на 7, – позначимо їх множину через $Y\bigcap Z$.

$999:(3\cdot 5\cdot 7)=9$ діляться на 3, – позначимо їх множину через $X\bigcap Y\bigcap Z$.

За формулою (3):

$$\left|X\bigcup Y\bigcup Z\right|=$$

$$=\left|X\right|+\left|Y\right|+\left|Z\right|-\left|X\bigcap Y\right|-\left|X\bigcap Z\right|-\left|Y\bigcap Z\right|+\left|X\bigcap Y\bigcap Z\right|=$$

$$=999-(333+199+142-66-47-28+9)=457.$$

Нехай задані n множин $X_1,X_2,...,X_n$. Якщо відомі потужності цих множин і відомі потужності їх перерізів, то справедлива наступна формула, яка називається ***принципом включення і виключення***:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n}X_i\right|=\sum_{i=1}^{n}\left|X_i\right|-\sum_{1\le i<j\le n}\left|X_i\bigcap X_j\right|+\sum_{1\le i<j<k\le n}\left|X_i\bigcap X_j\bigcap X_k\right|-$$

$$...+\left(-1\right)^{n-1}\left|X_1\bigcap X_2\bigcap...\bigcap X_n\right|$$

23. Правило добутку

Правило добутку дозволяє визначити кількість елементів в декартовому добутку двох, трьох і більше множин.

Нехай задані дві скінченні множини X і Y, $\left|X\right|=n$, $\left|Y\right|=m$.

$$\left|X\times Y\right|=\left|X\right|\cdot\left|Y\right| \; – \tag{4}$$

число елементів декартового добутку двох множин дорівнює добутку чисел елементів в кожному з них.

Правило добутку на мові теорії множин формулюється так:

Якщо множина X *містить* n *елементів, а множина* Y – m *елементів, то множина* $X \times Y$ *містить* $n \cdot m$ *елементів.*

Правило добутку на мові комбінаторики формулюється так:

Якщо елемент x *можна вибрати* n *способами, а елемент* y *- іншими* m *способами, то вибір впорядкованої пари* (x, y) *можна здійснити* $n \cdot m$ *способами.*

Приклад. Скільки двозначних чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3?

Розв'язання. Оскільки запис числа – це впорядкована пара, то в задачі йде мова про кількість способів вибору цієї пари. Першу компоненту пари (цифру десятків) можна вибрати трьома способами, другу (цифру одиниць) – також трьома. Тоді, згідно з правилом добутку (4) вибір пари двозначного числа може бути здійснений $3 \cdot 3 = 9$ способами.

24. Комбінаторні конфігурації без повторень

1) Перестановки без повторень

Зафіксуємо деяку множину X, $|X| = n$.

Означення. Впорядкованою *множиною називається множина з фіксованим порядком елементів. Кожному елементу присвоюється певний номер:* $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

Кожну скінченну множину можна перетворити у впорядковану. Одну й ту саму множину можна впорядкувати різними способами, тобто різними способами перенумерувати її елементи.

Означення. Перестановкою без повторень *з* n *елементів називається впорядкована множина, яка складається з всіх елементів деякої заданої основної* n*-елементної множини.*

Число всіх перестановок без повторень з n елементів позначається P_n .

Теорема. (про число перестановок без повторень)

$$P_n = n! \qquad (5)$$

Для будь-якого натурального n

$$n! = n \cdot (n-1)! \qquad (6))$$

З теореми про число перестановок і з властивості (6) факторіала випливає ***рекурентна формула для обчислення числа перестановок***:

$$P_n = n \cdot P_{n-1} \qquad (5^*)$$

У загальному вигляді задача про число перестановок формулюється так:

Задача про число перестановок. Скількома способами можна переставити n різних предметів, які розташовані на n різних місцях?

Приклад. Скількома способами можна утворити всі можливі 3-значні числа з цифр 1, 2, 3 при умові, щоб цифри в записі числа не повторювалися?

Розв'язання. $\mathrm{P}_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ (способами).

2) Розміщення без повторень

Зафіксуємо деяку множину X, $|X| = n$, і довільне $N \ni k \le n$. Скільки різних впорядкованих k-елементних підмножин можна утворити з її елементів?

Означення. Розміщенням без повторень *з n елементів по k елементів називається будь-яка впорядкована k-елементна підмножина деякої заданої основної n-елементної множини, $k \le n$.*

Число всіх розміщень з n елементів по k елементів позначається A_n^k .

Теорема. (про число розміщень без повторень)

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!} \qquad (7)$$

У загальному вигляді задача про число розміщень формулюється так:

Задача про число розміщень. Скількома способами можна вибрати і розмістити по k різним місцям k з n різних предметів?

Приклад. На зборах присутні 25 студентів. Скількома способами можна обрати голову зборів, його заступника і секретаря?

Розв'язання. Число способів обрання дорівнює числу 3-елементних впорядкованих підмножин (голова зборів, його заступник і секретар) множини з 25 елементів, тобто розміщень без повторень з 25 по 3. За формулою (7)

$$A_{25}^{3}=\frac{25!}{(25-3)!}=\frac{25!}{22!}=\frac{25\cdot 24\cdot 23\cdot 22!}{22!}=25\cdot 24\cdot 23=13800$$

(способами)

3) Комбінації без повторень

Зафіксуємо деяку множину X, $|X|=n$, і довільне натуральне число k, $k\le n$. Скільки різних k-елементних підмножин можна утворити з її елементів ?

Означення. Комбінацією без повторень *з n елементів по k елементів називається будь-яка k-елементна підмножина деякої заданої основної n-елементної множини, $k\le n$.*

Число всіх комбінацій з n елементів по k елементів позначається C_n^k.

Теорема*. *(про число комбінацій)

$$C_n^k=\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}=\frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{8}$$

У загальному вигляді задача про число комбінацій формулюється так:

Задача про число комбінацій. Скількома способами можна вибрати k з n різних предметів?

Приклад. На зборах присутні 25 студентів. Скількома способами можна обрати президію зборів у складі 3-х осіб ?

Розв'язання. Число способів обрання дорівнює числу 3-елементних підмножин множини з 25 елементів, тобто числу комбінацій без повторень з 25 по 3. За формулою (8):

$$C_{25}^{3}=\frac{25!}{3!(25-3)!}=\frac{25!}{3!22!}=\frac{25\cdot 24\cdot 23\cdot 22!}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 22!}=2300 \text{ (способами)}$$

4) Властивості числа комбінацій

Для будь-яких n і k таких, що $0\le k\le n$, справедливі тотожності:

Властивість 1. *(властивість симетрії)*

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

Властивість 2. *(властивість Паскаля)*

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k.$$

Зауваження. При $n = 0$ властивість Паскаля набуває вигляду:

$$C_n^0 = C_{n-1}^{-1} + C_{n-1}^0.$$

Оскільки $C_n^0 = C_{n-1}^0 = 1$, то покладають $C_{n-1}^{-1} = 0$. Аналогічно, покладають $C_{n-1}^{-1} = 0$ при $k > n$. Таким чином, властивість Паскаля виконується і при $k = n$.

Значення C_n^k можуть бути послідовно визначені з так званого трикутника Паскаля:

n	C_n^k
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1

……………………………………

Кожне значення C_n^k утворюється шляхом додавання двох значень, що стоять над ним (праворуч і ліворуч). Крайні значення відомі для будь-якого $n: C_n^0 = C_n^n = 1$.

В рядку з номером n зліва направо стоять значення $C_n^0, C_n^1, C_n^2, ..., C_n^n$.

Числа комбінацій C_n^k називаються також ***біноміальними коефіцієнтами,*** оскільки вони є коефіцієнтами бінома Ньютона:

$$\left(a+b\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k.$$

25. Комбінаторні конфігурації з повтореннями

1) Перестановки з повтореннями

Зафіксуємо деяку множину X, $\left|X\right| = n$.

Означення. Перестановкою з повтореннями *з* n *елементів називається перестановка в випадку такої основної множини, серед* n *елементів якої є тільки* k *різних: перший елемент множини є в* n_1 *екземплярах, другий – в* n_2 *екземплярах и т. д.,* k *-й – в* n_k *екземплярах, причому* $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Число перестановок з повтореннями з n елементів позначається $\overline{P}_n\left(n_1, n_2, \ldots, n_k\right)$

Теорема*. *(про число перестановок з повтореннями)

$$\overline{P}_n\left(n_1, n_2, \ldots, n_k\right) = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}. \tag{9}$$

У загальному вигляді задача про число перестановок з повтореннями формулюється так:

Задача про число перестановок з повтореннями. Скількома способами можна переставити n предметів k різних типів, кожного типу відповідно по $n_1, n_2, \ldots, n_k$ однакових предметів, розташованих на n різних місцях?

***Приклад*.** Скільки перестановок можна зробити з букв слова "математика"?

Розв'язання. В даному слові 10 букв: 3 букви а, 2 – м, 2 – т, і по 1 – к, и, е. За формулою (9):

$$\overline{P}_{10}\left(3,2,2,1,1,1\right) = \frac{10!}{3!2!2!1!1!1!} = 151200 \text{ (перестановок).}$$

2) Розміщення з повтореннями

Зафіксуємо деяку множину X, $\left|X\right| = n$, і довільне $k \in N$, яке на відміну від попереднього питання може бути меншим від n, дорівнювати n або перебільшувати n.

***Означення. Розміщенням з повтореннями** з n елементів по k елементів називається k-елементне розміщення в випадку, коли основна множина містить n різних елементів, по скільки завгодно екземплярів кожного.*

Число розміщень з повтореннями з n елементів по k позначається $\overline{A_n^k}$.

Теорема. (про число розміщень з повтореннями)

$$\overline{A_n^k} = n^k. \tag{10}$$

У загальному вигляді задача про число розміщень з повтореннями формулюється так:

Задача про число розміщень з повтореннями. Скількома способами можна розмістити по k різним місцям будь-які k предметів, вибраних з n різних предметів з повтореннями кожного з них будь-яку кількість разів, але не більше k?

Приклад. Скільки трицифрових чисел можна записати, використовуючи цифри 2,4,5,7?

Розв'язання. Оскільки мова йде про розміщення з повтореннями з 4 елементів по 3, то $\overline{A_4^3} = 4^3 = 64$ (числа).

3) Комбінації з повтореннями

Зафіксуємо деяку множину X, $|X| = n$, і довільне $k \in N$, яке може бути меншим від n, дорівнювати n або перебільшувати n.

***Означення**. **Комбінацією з повтореннями** з n елементів по k елементів називається k-елементна комбінація у випадку, коли основна множина містить n різних елементів, по скільки завгодно екземплярів кожного.*

Число комбінацій з повтореннями з n елементів по k елементів позначається $\overline{C_n^k}$.

Теорема (про число комбінацій з повтореннями)

$$\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-k)!} \qquad (11)$$

У загальному вигляді задача про число комбінацій з повтореннями формулюється так:

Задача про число комбінацій з повтореннями. Якщо є по k однакових предметів кожного з n різних типів, то скількома способами можна вибрати k з цих $k \cdot n$ предметів?

Приклад. Скількома способами можна розсадити 4 гостей, які тільки що прийшли, серед 8 гостей, які вже сидять за круглим столом?

Розв'язання. Між 8 гостями, що сидять за круглим столом є 8 проміжків, в які можна розсаджувати гостей, які тільки що прийшли. За формулою (11) и за властивістю симетрії числа комбінацій

$$\overline{C_4^8} = C_{4+8-1}^8 = C_{11}^8 = C_{11}^3 = \frac{11!}{3!8!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 11 \cdot 15 = 165 \text{ (способів)}.$$

ТЕМА 2. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ГРАФІВ

Вступ

Як розділ дискретної математики, теорія графів має численні застосування. Вона використовується в задачах керування виробництвом, при проектуванні електричних і комп'ютерних мереж, плануванні транспортних перевезень, побудові молекулярних схем.

Графи широко застосовуються у програмуванні, тому що теорія графів надає дуже зручну мову для опису програмних (і багатьох інших) моделей.

1. Основні характеристики графів. Зображення графів

Означення. Графом (скінченим графом) $G=(V,\ E)$ *називається сукупність двох множин – скінченої множини* $V=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ *і множини* $E=\{e_i=(v_i,v_j):v_i,v_j\in V\}$ *пар елементів з* V*. Елементи множини* V *називаються* ***вершинами*** *графа, а елементи множини* E *– його* ***ребрами****.*

Приклад 1. Нехай $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$,

$$E=\{e_1=(v_1,v_2),e_2=(v_1,v_3),e_3=(v_2,v_3),e_4=(v_2,v_4),e_5=(v_3,v_4)\}.$$

Тоді множини V і E визначають граф $G=(V,\ E)$.

Будь-який граф $G=(V,\ E)$ визначається відношенням ***інцидентності*** між множинами вершин V і ребер E. Якщо вершина v є кінцем ребра e, то кажуть, що v інцидентна e.

Означення. *Два ребра, інцидентні одній вершині, називаються* ***суміжними****; дві вершини, інцидентні одному ребру, також називаються* ***суміжними****.*

Часто розглядають наступні поріднені до графів об'єкти.

Означення. *Якщо елементами множини E є впорядковані пари, то граф G називається* ***орієнтованим*** *(або* ***орграфом****). В цьому випадку елементи множини V називаються* ***вузлами****, а елементи множини E –* ***дугами****. В орієнтованім графі перша за порядком вершина, інцидентна ребру, називається його початком, друга – його кінцем.* Орграф позначають $\vec{G} = \left(V, \vec{E}\right)$.

Приклад 2. Нехай $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$,

$$\vec{E} = \left\{e_1 = \left(v_1, v_2\right), e_2 = \left(v_3, v_1\right), e_3 = \left(v_3, v_4\right), e_4 = \left(v_2, v_3\right)\right\}.$$

Множини V і E визначають орграф $\vec{G} = \left(V, \vec{E}\right)$.

Означення. *Якщо елементом множини E є пара однакових елементів множини V, то такий елемент множини E називається* ***петлею****, а граф називається* ***графом з петлями*** *(або* ***псевдографом****).*

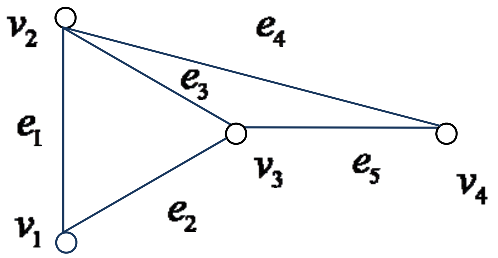
Означення. *Якщо E є не множиною, а набором, який містить декілька однакових елементів, то ці елементи називаються* ***кратними ребрами****, а граф називається* ***мультиграфом****.*

Означення. *Фігура Γ називається* ***геометричним зображенням графа G****, якщо існує взаємно однозначна відповідність між вершинами фігури Γ и вершинами графа G, а також між кривими фігури Γ и ребрами графа G така, що якщо $\left(b_i, b_j\right) \leftrightarrow \left(v_i, v_j\right)$, то $b_i \leftrightarrow v_i$, $b_j \leftrightarrow v_j$ (відповідні криві і ребра з'єднують відповідні вершини).*

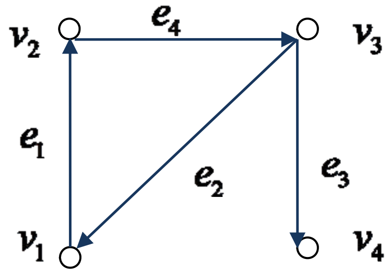
При зображенні орграфів напрямки ребер зображуються стрілками, які примикають до їх кінців. Орграф може мати петлі, кратні ребра, а також ребра, які з’єднують одні й ті самі вершини, але йдуть в протилежних напрямках.

Приклад. Наступні фігури є геометричним зображенням графів з прикладів 1,2.

Приклад 1.



Приклад 2.



Означення. *Число ребер, інцидентних вершині* v*, називається* ***степенем вершини*** v *і позначається* $d(v)$*.* $\forall\, v \in V \;\; 0 \le d(v) \le |V| - 1$.

Означення. *Якщо* $d(v) = 0$*, то вершина називається* ***ізольованою****. Якщо* $d(v) = 1$*, то вершина називається* ***кінцевою*** *або* ***висячою****. Ребро, інцидентне кінцевій вершині, також називається* ***кінцевим****.*

Означення. *В орграфі число дуг, що виходять з вузла* v*, називається* ***півстепенем виходу*** *(позначається* $d^{-}(v)$*), і вхідних –* ***півстепенем заходу*** *(позначається* $d^{+}(v)$*).*

Теорема **(Ейлера)**. *Сума степенів вершин графа дорівнює подвоєній кількості ребер:*

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot |E|,$$

$$\sum_{v \in V} d^{-}(v) + \sum_{v \in V} d^{+}(v) = 2 \cdot |E| \text{ для орграфа.}$$

Означення. Підграфом *графа* $G = (V, E)$ *називається* ***граф*** $G' = (V', E')$*, всі вершини і ребра якого містяться серед вершин і ребер графа* G*, тобто*

*$V' \subset V$, $E' \subset E$. Підграф G' називається **власним**, якщо він відрізняється від самого графа G, тобто $V' \subset V$ і $E' \subset E$ і $V' \neq V$ або $E' \neq E$.*

Означення. *Якщо $V' = V$, а $E' \subset E$, то G' називається **остовним підграфом** графа G.*

Таким чином, остовний підграф містить всі вершини даного графа. Неважко довести, що в кожному графі обов'язково є остовний підграф.

Означення. *Граф називається **повним**, якщо для будь-якої пари вершин v_i, v_j існує ребро (v_i, v_j). Повний граф має максимально можливе число ребер.*

2. Операції над графами

Одномісні операції:

1. Операція вилучення вершини з графа G, що полягає у вилученні деякої вершини разом з інцидентнимі їй ребрами.

2. Операція вилучення ребра з графа $G = (V, E)$ полягає у вилученні відповідної пари з E. При цьому усі вершини зберігаються.

3. Операція додавання вершини до графа G. Додану вершину можна з'єднати ребрами з деякими вершинами графа G.

4. Операція додавання ребра до графа G між двома вершинами.

2-місними операціями над графами є об'єднання і декартовий добуток.

Означення. *Нехай $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ – два графи таких, що $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, $E_1 \cap E_2 = \varnothing$. **Об'єднанням графів** G_1 і G_2 називається граф $G = (V, E) = G_1 \cup G_2$ з множиною вершин $V = V_1 \cup V_2$ і множиною ребер $E = E_1 \cup E_2$.*

Означення. ***Декартовим добутком** графів G_1 і G_2 називається граф $G = G_1 \times G_2$, множиною вершин якого є елементи декартового добутку $V_1 \times V_2$*

множин V_1 і V_2, причому дві з цих вершин (u_1, u_2) і (v_1, v_2) суміжні тоді і тільки тоді, коли або $u_1 = v_1$ і вершина u_2 суміжна з вершиною v_2, або $u_2 = v_2$ і вершина u_1 суміжна з вершиною v_1.

3. Матричні способи задання графа

Граф $G = (V,\ E)$ вважається заданим, якщо визначені множини його вершин $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ і ребер $E = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$, а також відношення інцидентності. Для алгебраїчного задання графів використовуються матриці суміжності і матриці інцидентності.

а) Задання графа матрицею суміжності

Означення. Матрицею суміжності графа G *називається квадратна* $n \times n$ *– матриця* $A(G) = \left\{a_{ij}, i, j = \overline{1,n}\right\}$, *де* $a_{ij} = \begin{cases} 1, (v_i, v_j) \in E; \\ 0, (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$

Приклад. Матриці суміжності графів з прикладів 1 і 2:

Приклад 1

$$A(G) = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Приклад 2

$$A(\vec{G}) = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Властивості матриці суміжності:

1. Матриця суміжності неорієнтованого графа симетрична (тобто $a_{ij} = a_{ji}$), а орієнтованого – не обов'язково.

2. Сума елементів i-го рядка або i-го стовпця матриці суміжності неорієнтованого графа дорівнює степеню $d(v_i)$ вершини v_i.
3. Сума елементів верхнього правого трикутника, розташованого над головною діагоналлю матриці суміжності неорієнтованого графа, включаючи останню, дорівнює кількості ребер графа.
4. Сума елементів i-го рядка матриці суміжності орієнтованого графа дорівнює півстепеню виходу $d^{-}(v_i)$ вершини v_i.
5. Сума елементів i-го стовпця матриці суміжності орієнтованого графа дорівнює пів степеню $d^{+}(v_i)$ заходу вершини v_i.
6. Сума всіх елементів матриці суміжності орієнтованого графа дорівнює кількості його ребер.

б) Задання графа матрицею інцидентності

Означення. Матрицею інцидентності *графа* G *називається* $m \times n$ – *матриця* $B(G) = \left\{ b_{ij}, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m} \right\}$, *де* $b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{якщо } v_j \text{ інцидентний } e_i; \\ 0, \text{якщо } v_j \text{ неінцидентний } e_i. \end{cases}$

Приклад. Матриці інцидентності графів з прикладів 1 і 2

Приклад 1

$$B(G) = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Приклад 2

$$B(\vec{G}) = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Властивості матриці інцидентності:

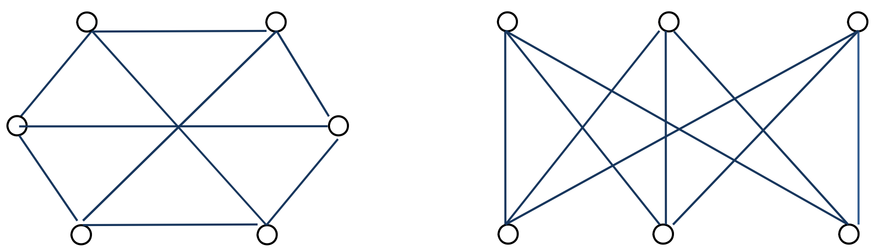
1. У кожнім рядку матриці інцидентності неорієнтованого або орієнтованого графа тільки два елементи не дорівнюють 0 (або один, якщо ребро є петлею). (Тому такий спосіб завдання недостатньо економний.)
2. Сума елементів i-го рядка матриці інцидентності орієнтованого графа дорівнює 0.

4. Ізоморфізм графів

<u>Означення.</u> *Графи* $G=(V,E)$ *і* $G'=(V',E')$ *називаються* ***ізоморфними****, якщо існує взаємно однозначна відповідність між множинами їхніх вершин і множинами їхніх ребер, яка зберігає відношення інцидентності (така, що відповідні ребра з'єднують відповідні вершини).*

В силу цього означення абстрактний граф і його геометричне зображення є ізоморфними графами. Отже, замість абстрактних граф можна розглядати їхні зображення.

Приклад. Графи, зображені на наступних малюнках, є ізоморфними:



Ізоморфізм графів є відношенням еквівалентності, тобто має властивості рефлексивности, симетричності, транзитивності. Графи розглядаються з точністю до ізоморфізму, тобто розглядаються як класи еквівалентності за відношенням ізоморфізму.

Означення. *Числова характеристика, однакова для всіх ізоморфних графів, називається* ***інваріантом графа****.*

Приклад. Число вершин $|V|$ і число ребер $|E|$ – інваріанти графа $G=(V,E)$. Степінь регулярності також є інваріантом графа.

5. Маршрути в графі

<u>Означення.</u> Маршрутом *M в графі $G=(V,E)$ називається така послідовність вершин і ребер, які чергуються:*

$$M: v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, e_{k-1}, v_k,$$

в який будь-які два сусідніх елементи інцидентні. В орієнтованому графі v_i - початок ребра e_i, v_{i+1} – кінець ребра e_i

Зауваження<u>.</u> Це означення є загальним для псевдо-, мульти-, і орграфів. Для "звичайного" графа достатньоь вказати тільки послідовність $v_1, v_2, \ldots, v_k$ його вершин або послідовність $e_1, e_2, \ldots, e_k$ його ребер.

Очевидно, маршрут M можна задавати послідовністю вершин, а також послідовністю ребер.

Означення. *Вершина v_1 називається* ***початком маршруту****, вершина v_k називається* ***кінцем маршруту****. Вершини, інцидентні ребрам маршруту, крім початкової і кінцевої, називаються внутрішніми або проміжними.*

Вважається, що орієнтований маршрут орієнтований від початку до кінця.

Означення. *Маршрут $M: v_1, v_2, \ldots, v_k$, який має початок v_1 і кінець v_k, називається* ***сполучним****. Маршрут M називається* ***замкненим****, якщо його початок і кінець збігаються: $v_1 = v_k$. В противному випадку маршрут називається* ***відкритим****. Ділянкою маршруту M називається відрізок $e_i, e_{i+1}, \ldots, e_j$ маршруту M який є маршрутом.*

Означення. *Маршрут M називається* ***ланцюгом****, якщо всі його ребра різні. Маршрут M називається* ***простим ланцюгом****, якщо всі його вершини різні.*

Означення. *Замкнений ланцюг називається* ***циклом****. Замкнений простий ланцюг називається* ***простим циклом****. Граф без циклів називають* ***ациклічним****.*

Для орграфів ланцюг називається *шляхом***, а цикл –** *контуром***.**

Зауваження. Фактично циклом вважається циклічно впорядкована послідовність вершин і ребер, у якій два сусідніх ребра мають загальну вершину.

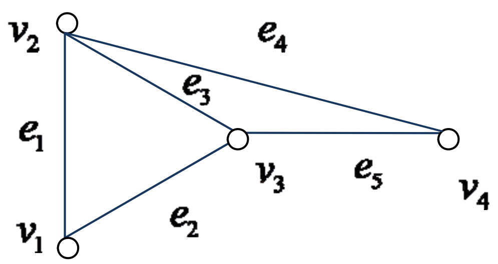
Означення. Довжиною маршруту *(ланцюга, простого ланцюга) називається число ребер у порядку їхнього проходження.*

Маршрут, що складається з однієї вершини, має нульову довжину.

Означення. *Мінімальна довжина простого ланцюга з початком v_i і кінцем v_j називається* ***відстанню*** *$d\left(v_i, v_j\right)$ між цими вершинами.*

Означення. Діаметром графа *G називається відстань між двома найбільш віддаленими одна від одної вершинами.*

Приклад. В графі з прикладу 1 виділимо наступні маршрути:

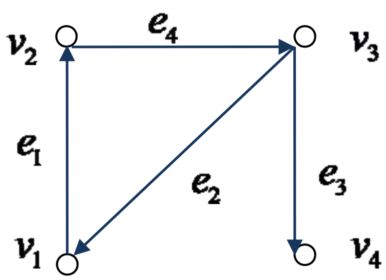


v_1, v_2, v_4 – маршрут з вершини v_1 до вершини v_4 довжини 2 – простий ланцюг,

v_1, v_2, v_3, v_1 – простий цикл,

Відстань $d\left(v_1, v_4\right)$ між вершиною v_1 і вершиною v_4 дорівнює 2.

Приклад. В орграфі з прикладу 2 виділимо наступні маршрути:



v_1, v_2, v_3 – простий шлях з вершини v_1 до вершини v_3 довжини 2.

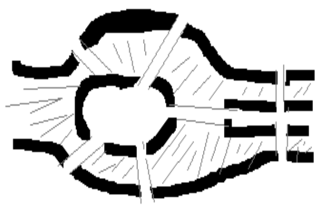
v_1, v_2, v_3, v_1 – простий контур довжини 3.

6. Обходи в графах

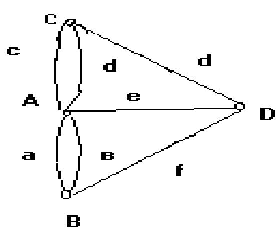
Ейлерові графи

<u>Означення.</u>* Цикл** *називається* ***ейлеровим*, якщо кожне ребро графа бере участь у його утворенні один раз* (вершини можуть повторюватись). *Граф, що містить ейлерові цикли, називається* ***ейлеровим.***

При яких умовах граф містить цикл, який проходить через кожне його ребро, встановив Леонард Ейлер у 1736 році. Задача про існування ейлерового циклу виникла в т.зв. «Задачі про кенігсберзькі мости». Розташування мостів у м. Кенигсберзі в часи Эйлера мало вид:



У задачі потрібно пройти кожен міст по одному разу і повернутися у початкову частину міста. Побудуємо граф задачі, у якому кожної частині міста відповідає вершина, а кожному мосту – ребро, інцидентне вершинам, що відносяться до частин, які з'єднуються.



Обходу мостів відповідає послідовність ребер графа задачі, у якій два сусідніх ребра мають загальну вершину, тобто маршрут. Оскільки наприкінці обходу треба повернуться у початкову частину міста і на кожному мосту треба побувати по одному разі, цей маршрут є простим циклом, що містить усі ребра, тобто ейлеровим.

Постановка і розв’язання цієї задачі Л. Ейлером знаменувала початок розробки теорії графів.

Теорема Ейлера. *Скінченний неорієнтований граф G є ейлеровим тоді й тільки тоді, коли ступені всіх його вершин парні.*

Щоб знайти хоча б один ейлерів цикл в ейлеровому графі G, тобто занумерувати ребра графа числами 1, 2 ..., $|E|$ так, щоб номер, привласнений ребру, вказував, яким за рахунком це ребро проходиться в ейлеровому циклі, можна скористатися наступним алгоритмом.

7. Зв′язність графа

Означення. Граф *G називається **зв'язним**, якщо будь-яка пара його вершин може бути з'єднана маршрутом.*

Теорема (про число маршрутів довжини k, які з’єднують будь-яку пару вершин графа). *Нехай $A = A(G)$ – матриця суміжності графа $G = (V, E)$ і $|V| = n$. Тоді $\left(A^k\right)_{ij}$ є число маршрутів довжини k від v_i до v_j.*

Наслідок. *Маршрут від вершини v_i до вершини v_j $(i \neq j)$ в графі $G = (V, E)$ існує тоді і тільки тоді, коли (i, j)-й елемент матриці $A + A^2 + \ldots + A^{n-1}$ не дорівнює нулю.*

Означення. *Орграф $\vec{G}$ називається **зв’язним**, якщо існують шляхи для всіх пар різних вершин графа.*

Для орграфів розрізняють 3 типи зв’язності:

а) орграф $\vec{G}$ *називається* ***сильно зв'язни***м, якщо для кожної пари різних вершин v_i, v_j з V існує шлях (орієнтований ланцюг) з v_i в v_j і з v_j в v_i.

б) орграф $\vec{G}$ *називається* ***односторонньо зв'язни****м*, якщо для кожної пари різних вершин v_i, v_j з V існує шлях з v_i ***в*** v_j ***або з*** v_j ***в*** v_i**.**

в) орграф $\vec{G}$ *називається* ***слабко зв'язни****м*, якщо граф, отриманий з $\vec{G}$ скасуванням орієнтації є зв'язним.

Очевидно, що справедливі наслідки:

$\vec{G}$ сильно зв'язний $\Rightarrow \vec{G}$ односторонньо зв'язний $\Rightarrow$ $\vec{G}$ слабко зв'язний.

Означення. Матрицею досяжності *графа* $G = (V, E)$ *називається матриця* $R(G) = \left\{ r_{ij}, i, j = \overline{1, n} \right\}$*, де* r_{ij} *приймає значення 1, якщо існує шлях від* v_i *до* v_j *і приймає значення 0, якщо такий шлях не існує.*

Граф $G = (V, E)$ є зв'язним тоді й тільки тоді, коли для всіх $i, j = \overline{1, n}$ $r_{ij} = 1$. (матриця досяжності заповнена одиницями).

Твердження. Матриця досяжності *графа* $G = (V, E)$ *є булеве відображення матриці* $E + A + A^2 + \ldots + A^{n-1}$*, тобто* $R(G) = B\left(E + A + A^2 + \ldots + A^{n-1}\right)$*, де* n *– число вершин,* E *– одинична матриця.*

Матриця досяжності $R\left(\vec{G}\right)$ орграфа $\vec{G}$ визначається аналогічно.

У термінах матриці зв'язності $R\left(\vec{G}\right)$ орграф $\vec{G}$ сильно зв'язний тоді і тільки тоді, коли $r_{ij} = 1$ для всіх $i, j = \overline{1, n}$; $\vec{G}$ односторонньо зв'язний тоді й тільки тоді, коли $r_{ij} = 1$ або $r_{ji} = 1$ для всіх $i, j = \overline{1, n}$.

Відношення зв'язності є відношенням еквівалентності, тобто воно розбиває множину V вершин графа на класи V_i, які попарно не перерізаються. Оскільки кожна множина V_i – множина зв'язаних вершин, а вершини з різних множин V_i не зв'язані, то маємо розбиття графа G на частини, які не перерізаються і кожна частина – зв'язна.

Означення. *Нехай* $\left\{V_i,\ i \in N_p\right\}$ *– розбиття графа* $G = \left(V, E\right)$, *обумовлене відношенням зв'язності. Число* p *називається* ***числом зв'язності*** *графа* G.

Означення. Компонентами зв'язності *графа* G *називаються підграфи* $\left(V_i, E_i\right)$ *графа, породжені класами еквівалентності.*

Компоненти зв'язності графа G визначаються за допомогою його матриці досяжності $R\left(G\right)$. Для виявлення компонентів зв'язності графа G треба побудувати матрицю $R\left(G\right) \otimes R^T\left(G\right)$, де $\otimes$ – поелементне множення матриць. Якщо отримана матриця має блоково-діагональний вигляд, то кожен блок визначає одну компоненту зв'язності.

Число елементів в компоненті зв'язності, в яку входить вершина v_i, легко визначити, підносячи матрицю досяжності $R\left(G\right)$ до квадрату. Діагональні елементи $\left(r^2\right)_{ii}$ матриці $R^2\left(G\right)$ показують число елементів в тій компоненті зв'язності, в яку входить вершина v_i.

Відзначимо, що *для орграфів відношення зв'язності не є відношенням еквівалентності* на множині вершин V і, отже, не здійснює розбиття множини V.

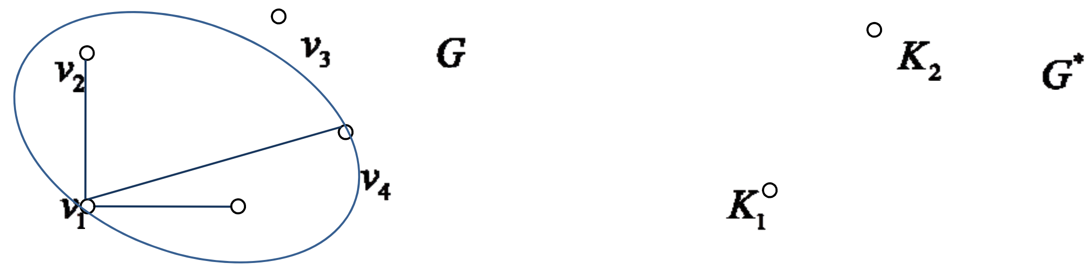
Означення*. *Компонентами сильної зв'язності *орграфа* $\vec{G}$ *називаються його максимальні сильно зв'язні підграфи.*

Кожна вершина орграфа належить тільки одній компоненті сильної зв'язності. Якщо вершина не зв'язана з іншими, то вважають, що вона сама утворює компоненту сильної зв'язності.

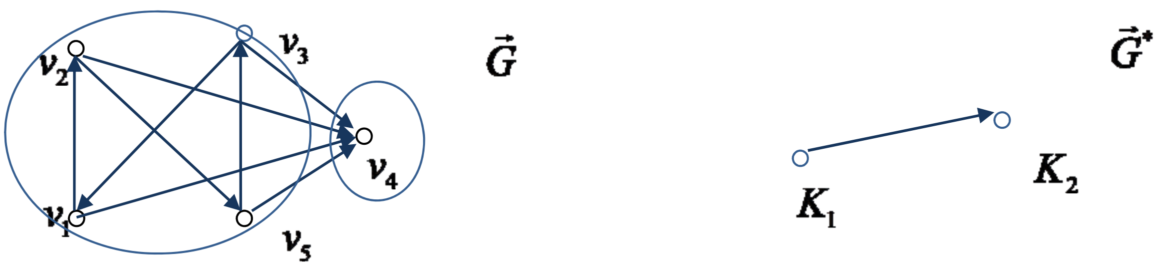
Матриця сильної зв'язності орграфа $\vec{G}$ визначається аналогічно матриці зв'язності неорієнтованого графа. Компоненти сильної зв'язності визначаються за допомогою його матриці досяжності $R(\vec{G})$ так само, як і для неорієнтованого графа.

Означення. Конденсацією *G^* ($\vec{G}^*$) графа G (орграфа $\vec{G}$) (або фактор-графом) називається граф, який отриманий стягуванням в одну вершину кожної компоненти зв'язності (сильної зв'язності) графа G (орграфа $\vec{G}$).*

Приклад 4. Конденсацією графа G є граф G^*



Конденсацією орграфа $\vec{G}$ є орграф $\vec{G}^*$:



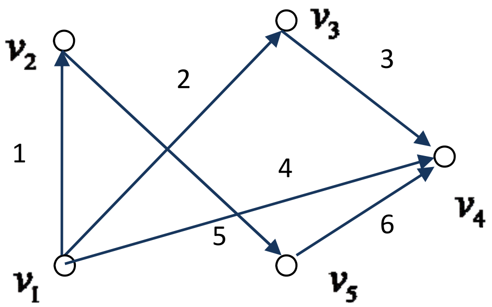
8. Зважені графи

Означення. *Орграф $\vec{G}=(V,\vec{E})$ називається **зваженим**, якщо кожній дузі (v_i, v_j) зіставлене деяке число $c(v_i, v_j)$, яке називається її **довжиною** (або **вагою**, або **вартістю**).*

Означення. ***Довжиною*** *(або* ***вагою****, або* ***вартістю)*** ***шляху*** s*, який складається з деякої послідовності дуг* $\left(v_i, v_j\right)$*, називається число* $l\left(s\right)$*, яке дорівнює сумі довжин дуг, що входять в цей шлях, тобто*

$$l\left(s\right) = \sum_{\left(v_i, v_j\right) \in s} c\left(v_i, v_j\right).$$

Приклад **5.** Для зваженого орграфа, зображеного на малюнку матриця $C\left(\vec{G}\right)$ має вигляд:



$$C\left(\vec{G}\right) = \begin{pmatrix} \propto & 1 & 2 & 4 & \propto \\ \propto & \propto & \propto & \propto & 5 \\ \propto & \propto & \propto & 3 & \propto \\ \propto & \propto & \propto & \propto & \propto \\ \propto & \propto & \propto & 6 & \propto \end{pmatrix}$$

Довжина шляху $s = \left(v_1, v_2, v_5, v_4\right)$ дорівнює $l\left(s\right) = 1 + 5 + 6 = 12$.

Означення. ***Відстанню*** $d\left(v_i, v_j\right)$ *між вузлами* v_i *і* v_j *називається довжина найкоротшого шляху між цими вузлами.*

Означення. *Граф* $G = \left(V, E\right)$ *називається* ***зваженим****, якщо кожному ребру* $\left(v_i, v_j\right)$ *зіставлене деяке число* $c\left(v_i, v_j\right)$*, яке називається його* ***довжиною*** *(або* ***вагою****, або* ***вартістю****).*

Матриця довжин ребер неорієнтованого графа є симетричною.

9. Дерева

Означення. ***Деревом*** *називається зв'язний неорієнтований граф без циклів.* Дерево не містить петель і кратних ребер.

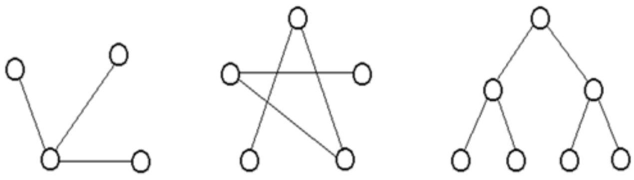
Цьому означенню еквівалентні, як легко показати, наступні твердження:

а) дерево є зв'язний граф, що містить n вершин і $n-1$ ребер;

б) дерево є граф, будь-які дві вершини якого можна з'єднати простим ланцюгом.

в) дерево є граф без циклів, додаючи до якого нове ребро можна дістати один простий цикл.

Графи, зображені на малюнках є деревами.



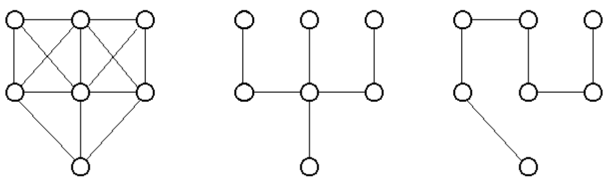
а) б) в)

***Означення. Лісом** називається незв'язний неорієнтований граф без циклів, в якому кожна компонента зв'язності є деревом.*

Попередній малюнок можна розглядати як ліс з трьох дерев.

***Означення. Остовним деревом** для графа $G=(V,E)$ називається остовний підграф (тобто підграф, який містить всі вершини графа G), який є деревом.*

Приклад. Для графа на малюнку а) графи б) і в) є остовними деревами:

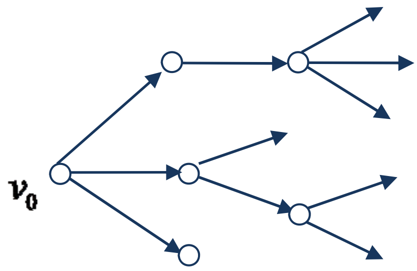


а) б) в)

Будь-яка частина дерева або ліса також є деревом або лісом.

Якщо в дереві G виділено якусь вершину v_0, то цю вершину називають ***коренем*** дерева G, а саме дерево називають ***деревом з коренем***. У дереві з коренем можна природним чином орієнтувати ребра. Вершину v' ребра (v', v'') можна з'єднати єдиним ланцюгом з коренем v_0. Якщо цей ланцюг не містить ребра (v', v''), то вводиться орієнтація від v' к v'', в противному випадку – від

v'' до v'. Орієнтоване в такий спосіб дерево з коренем називається орієнтованим деревом. У ньому всі ребра мають напрямок від кореня:



У кожну вершину орієнтованого дерева (за винятком v_0) входить тільки одне ребро, тобто, ця вершина є кінцем одного і тільки одного ребра. У корінь не входить жодне ребро, усі інцидентні кореню ребра зв'язують його зі своїми другими кінцями, виходить, v_0 є їхнім початком.

Будь-яке дерево можна орієнтувати, вибравши як корінь будь-яку його вершину.

10. Мінімальні шляхи в зважених орграфах

При розв’язуванні багатьох практичних задач виникає необхідність пошуку мінімального шляху між двома довільними вузлами (шляху з найменшою сумою довжин дуг). Для знаходження мінімального шляху між двома довільними вузлами існують певні алгоритми. Наприклад, алгоритм Дейкстри, алгоритм Форда-Беллмана.

Розглянемо пошук мінімального шляху між двома різними вузлами на прикладі алгоритму Дейкстри. Цей алгоритм дозволяє знайти відстань від заданого вузла v_s до всіх інших вузлів зваженого орграфа у випадку, коли всі $c_{ij} \geq 0$.

Алгоритм Дейкстри

Крок 0. Всі вузли помічаються: стартовий вузол v_s отримує постійну мітку 0, всі інші вузли отримують тимчасові мітки ∞.

Крок i для будь-якого $i > 0$. Для всіх вузлів v_j з тимчасовими мітками, в які заходять дуги з вузла v_i з постійною міткою, оновлюємо мітки. За нову мітку обираємо мінімум із старої мітки і суми мітки вузла v_i і відстані між v_i і v_j. Серед вузлів v_j з тимчасовими мітками, знаходимо вузол з найменшою міткою. Мітку цього вузла проголошуємо постійною. (При чисельному виконанні алгоритму вручну мітку підкреслюємо).

Якщо всі вузли отримали постійні мітки, закінчити роботу алгоритму. Отримані постійні мітки дають відстані від стартового вузла v_s до всіх інших вузлів орграфа.

Якщо залишилися вузли з тимчасовими мітками, повторити крок ***i***.

Таким чином, спочатку виконується ініціалізація (крок 0), а потім виконуються кроки 1,2,3,…, доти, поки є тимчасові мітки.

Введемо позначення:

$l(v_j)$ – тимчасова мітка вузла v_j;

$l^*(v_j)$ – постійна мітка вузла v_j;

$G(v_i)$ – множина вузлів, в які заходять дуги з вузла v_i з постійною міткою.

Перепишемо алгоритм Дейкстри в більш зручному для застосувань вигляді:

Крок 0. $l^*(v_s) = 0$, $\forall v_j \neq v_s \;\; l(v_j) = \infty$.

Крок і. $G(v_i) = \{v_j : \exists (v_i, v_j)\}$;

$\forall v_j \in G(v_i) \quad l(v_j) = \min\{l(v_j), l(v_i) + d(v_i, v_j)\}$,

$$l^*\left(v_j\right)=\min_{v_j}\left\{l\left(v_j\right)\right\}.$$

$$\forall v_j \in V \; l^*\left(v_j\right)=d\left(v_s,v_j\right).$$

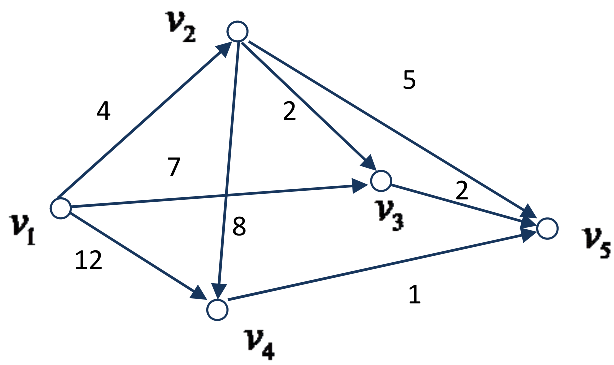
Приклад. Знайти в орграфі $\vec{G}$, заданому матрицею довжин дуг:

$$C\left(\vec{G}\right)=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & 4 & 7 & 12 & \infty \\ \infty & \infty & 2 & 8 & 5 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix} \end{array}$$

1) відстані від вузла v_1 до всіх інших вузлів зваженого орграфа $\vec{G}$:

2) мінімальний шлях від вузла v_1 до вузла v_5.

Розв'язання. 1) Намалюємо для наочності геометричне зображення графа



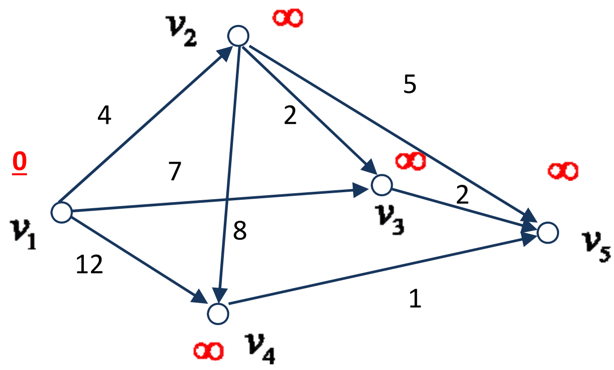
Протокол роботи алгоритму будемо оформлювати у вигляді таблиці, яку побудуємо в процесі розв'язування.

Крок 0. Всі вузли помічаються: стартовий вузол v_1 отримує постійну мітку 0, всі інші вузли отримують тимчасові мітки ∞:

$$l^*\left(v_1\right)=0,\; \forall v_j \neq v_s \;\; l\left(v_j\right)=\infty.$$

Ці значення занесемо в нульовий рядок таблиці.

Намалюємо для наочності геометричне зображення графа на кроці 0:



Крок 1. Для вузлів v_2, v_3, v_4 з тимчасовими мітками, в які заходять дуги з вузла v_1 з постійною міткою, оновлюємо мітки:

$$G(v_1) = \{v_2, v_3, v_4\};$$

$$l(v_2) = \min\{\infty, 0+4\} = 4_1;$$

$$l(v_3) = \min\{\infty, 0+7\} = 7_1;$$

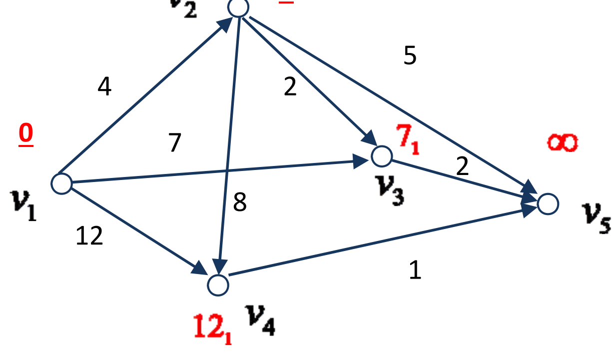
$$l(v_4) = \min\{\infty, 0+12\} = 12_1$$

$$l^*(v_2) = \min\{4_1, 7_1, 12_1\} = 4.$$

Постійну мітку отримує вузол v_2.

Ці значення занесемо в перший рядок таблиці.

Намалюємо для наочності геометричне зображення графа на кроці 1:



Крок 2. Для вузлів v_3, v_4, v_5 з тимчасовими мітками, в які заходять дуги з вузла v_2 з постійною міткою, оновлюємо мітки:

$$G(v_2) = \{v_3, v_4, v_5\};$$

$$l(v_3) = \min\{7_1, 4+2\} = 6_2;$$

$$l(v_4) = \min\{12_1, 4+8\} = 12_2;$$

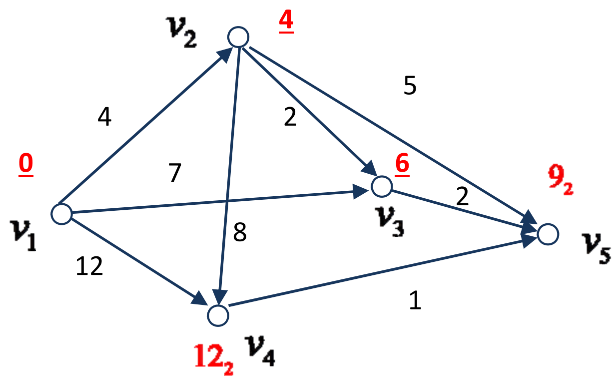
$$l(v_5) = \min\{\infty, 4+5\} = 9_2;$$

$$l^*(v_3) = \min\{6_2, 12_2, 9_2\} = 6.$$

Постійну мітку отримує вузол v_3.

Ці значення занесемо в другий рядок таблиці.

Намалюємо для наочності геометричне зображення графа на кроці 2:



Крок 3. Для вузла v_5 з тимчасовою міткою, в який заходить дуга з вузла v_3 з постійною міткою, оновлюємо мітку:

$$G(v_3) = \{v_5\};$$

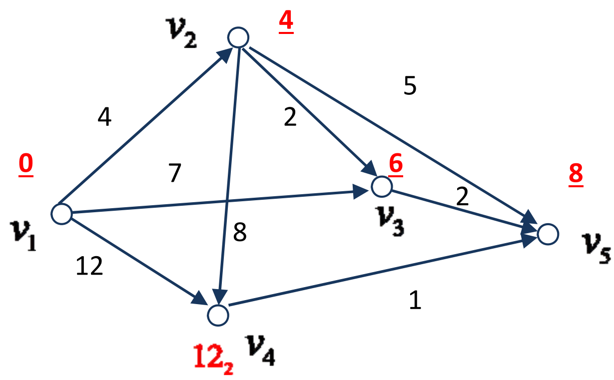
$$l(v_5) = \min\{9_2, 6+2\} = 8_3$$

$$l^*(v_5) = \min\{8_3\} = 8.$$

Постійну мітку отримує вузол v_5.

Ці значення занесемо в третій рядок таблиці.

Намалюємо для наочності геометричне зображення графа на кроці 3:



Крок 4. З вузла v_5 з постійною міткою не виходить жодна дуга.

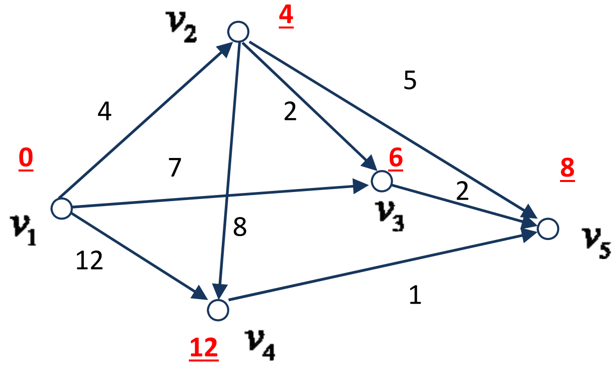
$$G(v_5) = \varnothing;$$

$$l^*(v_4) = 12.$$

Постійну мітку отримує вузол v_4.

Ці значення занесемо в четвертий рядок таблиці.

Намалюємо для наочності геометричне зображення графа на кроці 4:



Таблиця.

Кроки \ Вузли	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
0	$\underline{0}$	∞	∞	∞	∞
1	$\underline{0}$	$\underline{4}$	7_1	12_1	∞
2	$\underline{0}$	$\underline{4}$	$\underline{6}$	12_2	9_2
3	$\underline{0}$	$\underline{4}$	$\underline{6}$	12_2	$\underline{8}$
4	$\underline{0}$	$\underline{4}$	$\underline{6}$	$\underline{12}$	$\underline{8}$

Всі вузли отримали постійні мітки. Алгоритм завершено:

$d(v_1, v_2) = 4$, $d(v_1, v_3) = 6$, $d(v_1, v_4) = 12$, $d(v_1, v_5) = 8$.

2) Щоб знайти мінімальний шлях від вузла v_1 до вузла v_5, використаємо тимчасові індекси в постійних міток: у вузла v_5 – 8_3, у вузла v_3 – 6_2, у вузла v_2 – 4_1. Отже, мінімальний шлях з v_1 до v_5 є s: v_1, v_2, v_3, v_5. Його довжина

$$l(s) = \sum_{(v_i, v_j) \in s} c(v_i, v_j) = c(v_1, v_2) + c(v_2, v_3) + c(v_3, v_5) = 4 + 2 + 2 = 8.$$

11. Мінімальні остовні дерева зважених графів

Нехай G – зв'язний зважений граф. Задача побудови *мінімального остовного дерева* полягає в тому, щоб в множині остовних дерев знайти дерево, в якого сума довжин ребер мінімальна.

Необхідність побудови мінімального остовного дерева графа виникає, наприклад, у типових випадках, коли потрібно з'єднати n міст комунікаційними лініями (залізничними лініями, автомобільними дорогами, лініями електропередач, мережею трубопроводів і т. д.) так, щоб сумарна довжина ліній або їх вартість була б мінімальною.

Для побудови мінімального остовного дерева, яке має своїм коренем одну з вершин будь-якого зваженого графа, можуть бути використані методи Краскала, Пріма. В цих алгоритмах на кожному кроці вибирається локально найкращий варіант.

Алгоритм Краскала

***Крок* 0.** Установка початкових значень.

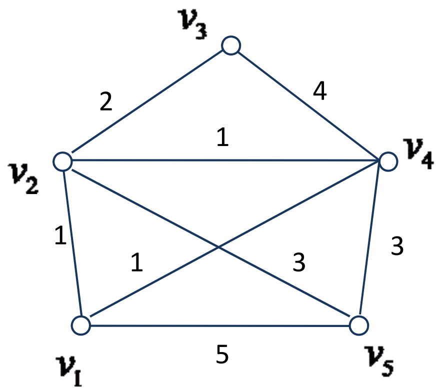
Вводимо матрицю довжин ребер $C\left(G\right)$ графа G.

Крок 1. Вибираємо в графі G ребро мінімальної довжини (якщо таких ребер декілька, беремо будь-яке з них). Будуємо граф G_1, що складається з даного ребра і інцидентних йому вершин. Покладаємо $i=1$. Оскільки $1=i\neq n$, то переходимо до кроку 2.

Крок i для будь-якого $i>1$. Побудувати граф G_i, додаючи до графа G_{i-1} нове ребро мінімальної довжини, вибране серед всіх ребер графа G, кожне з яких інцидентне якій-небудь вершині графа G_{i-1} і одночасно інцидентне якій-небудь вершині графа G, що не міститься в G_{i-1}. Разом з цим ребром включаємо в G_i й інцидентну йому вершину, що не міститься в G_{i-1}. Якщо $i=n$, де $n=\left|E\right|$ – число ребер графа, то граф G_i – шукане мінімальне остовне дерево (задача розв'язана), якщо $i\neq n$ – перейти до кроку $i+1$.

Алгоритм Краскала завершується, як тільки в дерево буде додано $\left(n-1\right)$-е ребро.

Приклад. Знайти мінімальне остовне дерево для графа, зображеного на малюнку.

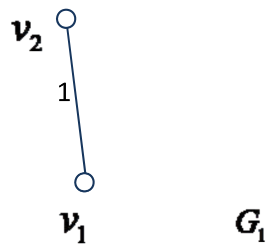


<u>Розв’язання</u>.

***Крок* 0.** Вводимо матрицю довжин ребер $C(G)$ графа G.

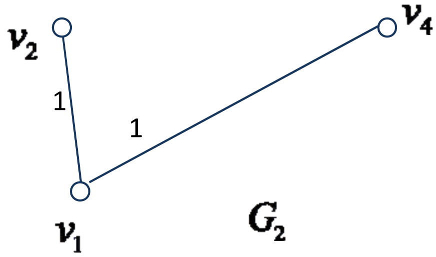
$$C(G)=\begin{pmatrix} \propto & 1 & \propto & 1 & 5 \\ 1 & \propto & 2 & 1 & 3 \\ \propto & 2 & \propto & 4 & \propto \\ 1 & 1 & 4 & \propto & 3 \\ 5 & 3 & \propto & 3 & \propto \end{pmatrix}$$

Крок 1. $c(v_1,v_2)=1$, $c(v_1,v_4)=1$, $c(v_2,v_4)=1$. Будуємо граф G_1, що складається з даного ребра (v_1,v_2) і інцидентних йому вершин.

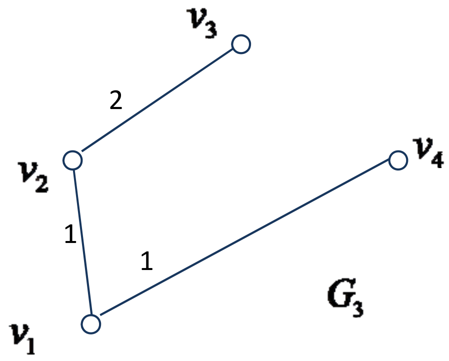


Крок 2. $c(v_1,v_4)=1$, $c(v_2,v_4)=1$

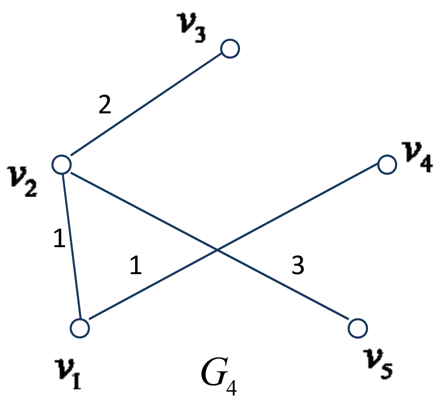
Будуємо граф G_2, додаючи до графа G_1 ребро (v_1,v_4).



***Крок* 3.** $c(v_2, v_3) = 2$



***Крок* 4.** $c(v_2, v_5) = 3$



Граф G_4 – шукане мінімальне остовне дерево.

ТЕМА 3. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ

1. Поняття булевої функції

Означення. ***Булевою функцією*** *називається функція* $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, *яка визначена і набуває своїх значень на множині* $\{0,1\}$.

$D(f) = E_2^n$, $E(f) = E_2$. Отже, $f : E_2^n \to E_2$.

Позначимо набір значень змінних $x_1, x_2, ..., x_n$ через $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$. Таким чином, булева функція ставить у відповідність кожному впорядкованому набору $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, якій складається з 0 і 1, або 0, або 1. Набір $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, $\alpha_i \in \{0,1\}$, $i = \overline{1,n}$, називають ***двійковим***.

Лема. *Число різних наборів* $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, $\alpha_i \in \{0,1\}$, $i = \overline{1,n}$, *значень для* n *аргументів* $x_1, x_2, ..., x_n$ *булевої функції дорівнює* 2^n.

Означення. *Булева функція називається* ***цілком визначеною***, *якщо її значення визначено для всіх двійкових наборів, в іншому випадку булева функція називається* ***не цілком визначеною*** *або* ***частковою***.

Означення. *Двійковий набір, на якому булева функція обертається в 0, називається* ***нульовим***. *Двійковий набір, на якому булева функція обертається в 1, називається* ***одиничним***. *Набір, на якому функція не визначена, називається* ***байдужим***.

Якщо k двійкових наборів функції є байдужими, то часткову функцію можна довизначити 2^k способами. Інакше кажучи, кожній такій частковій функції відповідає множина з 2^k цілком визначених булевих функцій, отриманих шляхом різних довизначень.

Означення. *Змінна* x_i, *яка є аргументом булевої функції* $f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ... x_n)$, *називається* ***неістотною (фіктивною)***, *якщо*

$f\left(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n\right) = f\left(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ... x_n\right)$ *при будь-яких значеннях інших змінних, тобто якщо зміна значення* x_i *в будь-якому наборі значень змінних* $x_1, x_2, ..., x_n$ *не змінює значення функції. В цьому випадку функція* $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ *істотно залежить від* $n-1$ *змінної, тобто являє собою функцію* $g\left(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ... x_n\right)$ *від* $n-1$ *змінної.*

Кажуть, що функція g отримана з функції f видаленням фіктивної змінної, а функція f отримана з функції g введенням фіктивної змінної, причому ці функції вважаються рівними.

<u>Означення</u>. Константою 0 (константою 1) *називається цілком визначена булева функція, яка <u>на всіх</u> наборах дорівнює 0 (1), тобто функція з* n *неістотними змінними.*

2. Способи задання булевих функцій

1. Табличний спосіб. Таблиця значень булевої функції називається ***таблицею істинності*** булевої функції.

x_1	x_2	…	x_n	$f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$
0	0	…	0	$f(0,0,...,0) = \gamma_0$
0	0	…	1	$f(0,0,...,1) = \gamma_1$
…	….	…	…	…
α_1	α_2	…	α_n	$f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \gamma_{i-1},\ \alpha_i \in \{0,1\}, i = \overline{1,n}$
…	…	…	…	…
1	1	…	1	$f(1,1,...,1) = \gamma_{n-1}$

2. Векторний спосіб – коли булева функція подається у вигляді вектора своїх значень $f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=\left(\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_{n-1}\right)$, $\gamma_i\in\{0,1\}$, $i=\overline{0,n-1}$. Координата γ_i є значенням функції f на наборі значень змінних $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ з номером i, $i=\overline{0,n-1}$.

3. Геометричний спосіб – коли булева функція задається своєю одиничною множиною $N_f=\left\{\left(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\right):f\left(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\right)=1\right\}$. При геометричному способі задання область визначення булевої функції інтерпретується як координати вершин n-вимірного одиничного куба.

Суто геометрична інтерпретація ефективна для невеликого числа змінних.

Існують ще два способи задання булевих функцій – формулами і схемами з функціональних елементів, з якими познайомимося пізніше.

3. Число булевих функцій n аргументів

Позначимо через $P_2(n)$ множину всіх можливих булевих функцій від n змінних, включаючи функції з фіктивними змінними.

Теорема (про число булевих функцій від n аргументів). *Число різних булевих функцій від n аргументів дорівнює* 2^{2^n} *:* $\left|P_2\left(n\right)\right|=2^{2^n}$.

4. Елементарні булеві функції

1) Елементарні булеві функції від однієї змінної

Нехай $n=1$. Число різних двійкових наборів дорівнює $2^1=2$, число різних функцій від однієї змінної дорівнює $\left|P_2\left(1\right)\right|=2^{2^1}=4$. Наступні булеві функції однієї змінної вважаються елементарними

	Позначення			
	0	x	$\overline{x}$	1
x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

2) Елементарні булеві функції від двох змінних

Нехай $n = 2$. Число різних двійкових наборів дорівнює $2^2 = 4$, число різних функцій від двох змінних дорівнює $2^{2^2} = 16$. Наступні булеві функції від двох змінних вважаються елементарними.

x	y	Позначення															
		0	$\&$	$\overline{\rightarrow}$	x	$\overline{\leftarrow}$	y	$\oplus$	$\vee$	$\downarrow$	$\leftrightarrow$	$\overline{y}$	$\leftarrow$	$\overline{x}$	$\rightarrow$	$\mid$	1
		f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1

Деякі з елементарних функцій мають спеціальні назви і позначення. Всі функції можна розбити на пари (f_i, f_{15-i}), симетрично розташовані в таблиці, в яких кожна функція є запереченням іншої.

При цьому ***основними елементарними функціями*** є кон'юнкція $\&$, диз'юнкція $\vee$ і заперечення $\overline{}$.

Символи $\bar{}\,,\&,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow$ і т.д., які беруть участь в позначеннях елементарних функцій, називаються ***логічними зв'язками***.

5. Реалізація булевих функцій формулами

Булеві змінні будемо позначати малими буквами латинського алфавіту $x, y, z,...$, а також малими буквами латинського алфавіту з індексами $x_i, y_i, z_i,..$, $i \in N$.

Нехай X – множина булевих змінних, $F = \{\bar{}\,,\&,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow,...\}$ – множина логічних зв'язок (базис).

Означення. Формулою над F *називається будь-який вираз виду:*

1. x *– будь-яка змінна з множини* X.

2. Символи 0 і 1.

3. Якщо A *і* B *– формули над* F*, то* $\left(\overline{A}\right)$, $\left(A \& B\right)$, $\left(A \vee B\right)$, $\left(A \rightarrow B\right)$, $\left(A \leftrightarrow B\right)$ *– формули.*

4. Інших формул, крім визначених в пп. 1-3 не існує.

Про формулу, яка задає булеву функцію, кажуть, що вона *реалізує* або *представляє* цю функцію.

Для спрощення запису формул над множиною логічних зв'язок F:

1) зовнішні дужки опускають;

2) за умовчанням приймається такий пріоритет основних логічних зв'язок:

$$\bar{}\,,\vee,\&,\rightarrow,\leftrightarrow.$$

3) якщо не втрачається зміст формули, знак $\&$ в записі формули можна опускати.

Означення. *Функція* f *є* ***композицією*** *функцій* $f_1, f_2, ..., f_n$, *якщо* f *отримана за допомогою підстановок цих формул одну в одну й перейменуванням змінних.*

Порядок композиції (підстановки) задається формулою.

Будь-яка формула, що реалізує функцію f, задає спосіб її обчислення.

Значення формули можна обчислити, тільки якщо вже обчислені значення всіх її підформул (тобто, частин формули, які самі є формулами).

Приклад. Обчислимо значення формули $\left(x_3 \vee x_1\right) \leftrightarrow \left(x_1\left(x_1 \to x_2\right)\right)$ на наборі 110 ($x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$), користуючись таблицями значень елементарних функцій.

Розв'язання. Нехай $A = \left(x_3 \vee x_1\right)$, $B = x_1 \to x_2$, $C = x_1\left(B\right)$, $F = A \leftrightarrow C$, тоді

$A = \left(x_3 \vee x_1\right) = 0 \vee 1 = 1$,

$B = x_1 \to x_2 = 1 \to 1 = 0$;

$C = x_1\left(B\right) = 1\,\&\,0 = 0$;

Отже, $F = A \leftrightarrow C = 1 \leftrightarrow 0 = 0$.

Таким чином, ***формула*** кожному набору значень аргументів ставить у відповідність значення функції і тому ***може служити*** разом із таблицею істинності ***способом задання і обчислення булевої функції***. В подальших розгляданнях будемо ототожнювати формулу з функцією, яку вона реалізує.

6. Рівносильність та тотожність формул

Реалізація функції формулою не єдина.

Означення. *Формули, які реалізують одну й ту саму булеву функцію, називаються* ***еквівалентними*** *або* ***рівносильними***.

Рівносильність формул A і B позначається $A \equiv B$.

Теорема (про основні рівносильності формул). *Для будь-яких формул* A, B, C *справедливі рівносильності:*

Комутативність	
1. $A \& B \equiv B \& A$	1*. $A \vee B \equiv B \vee A$
Асоціативність	
2. $(A \& B) \& C \equiv A \& (B \& C)$	2*. $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$
Дистрибутивність	
$\&$ відносно $\vee$ 3. A&(B∨C)≡(A&B)∨(A&C)	$\vee$ відносно $\&$ 3*. A∨(B&C)≡(A∨B)&(A∨C)
Закони поглинання	
4. $A \& (A \vee B) = A$	4*. $A \vee (A \& B) = A$
Закони де Моргана	
5. $\overline{A \& B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$	5*. $\overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \& \overline{B}$
Закон подвійного заперечення	
6. $\overline{\overline{A}} \equiv A$	
Закони ідемпотентності	
7. $A \& A \equiv A$	7*. $A \vee A \equiv A$
Властивості 0 і 1	
8. $A \& 0 \equiv 0$;	8*. $A \vee 0 \equiv A$;

$A \& 1 \equiv A$	$A \vee 1 \equiv 1$
9. $A \& \overline{A} \equiv 0$	9*. $A \vee \overline{A} \equiv 1$
10. $\overline{0} \equiv 1,\ \overline{1} \equiv 0$	
11. $A \to B \equiv \overline{A} \vee B$	
12. $A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \& (B \to A)$	

Доведення (самостійно) всіх рівносильностей проводиться шляхом складання таблиць істинності для формул, що стоять в лівій і правій частинах.

Стандартний метод доведення еквівалентності двох формул, який завжди приводить до відповіді, полягає в переході від формул до таблиць і порівнянні отриманих таблиць. Цей метод потребує $2 \cdot 2^n$ обчислень и на практиці виявляється дуже громіздким.

Іншим методом доведення еквівалентності двох формул є метод рівносильних перетворень формул булевих функцій.

<u>Означення.</u> ***Рівносильним перетворенням*** *даної формули називається заміна формули іншою формулою, їй рівносильною.*

Приклад. Довести рівносильність формул $\overline{x} \to \overline{\overline{x}y} \equiv x \vee \overline{y}$

а) за допомогою таблиць;

б) шляхом рівносильних перетворень.

Розв'язання.

а)

x	y	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{x}y$	$\overline{\overline{x}y}$	$\overline{x} \to \overline{\overline{x}y}$	$x \vee \overline{y}$
0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1

б) $\overline{x} \to \overline{\overline{x}y} \overset{11}{\equiv} \overline{\overline{x}} \vee \overline{\overline{x}y} \overset{5,6}{\equiv} x \vee \left(x \vee \overline{y}\right) \overset{2*,7*}{\equiv} x \vee \overline{y}$.

<u>Означення.</u> ***Спрощенням*** *формули називається рівносильне перетворення, яке приводить до формули, що містить лише символи* $\&, \vee$ *і* $\overline{\ }$, *причому знак* $\overline{\ }$ *відноситься тільки до змінної.*

7. Принцип двоїстості

<u>Означення.</u> *Логічні зв'язки* $\&$ *і* $\vee$ *називаються* ***двоїстими***.

<u>Означення.</u> *Нехай формула* A *містить тільки символи* $\&, \vee, \overline{\ }$. *Формула* A^* *називається* ***двоїстою*** *до формули* A, *якщо її можна отримати з формули* A *заміною символів* $\&, \vee$, *на* $\vee, \&$ *відповідно.*

<u>Теорема</u> (про двоїсту функцію).

$$f^*\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \overline{f\left(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}\right)}.$$

<u>Теорема</u> (про двоїстість). *Якщо формули* A *і* B, *які містять тільки символи* $\&, \vee, \overline{\ }$, *рівносильні, то двоїсті до них формули також рівносильні.*

<u>Зауваження</u>. В означенні формули символи 0 і 1 також вважаються формулами. При переході до двоїстої формули 0 замінюється 1, а 1 – 0. Наприклад, $x \,\&\, \overline{x} \equiv 0$, а $x \vee \overline{x} \equiv 1$.

Справедливий ***принцип двоїстості***:

Якщо є деяке означення або твердження, яке містить тільки символи $\&, \vee, \overline{\ }$, *то можна сформулювати двоїсте означення або твердження, замінюючи один на один символи* $\&$ *і* $\vee$, 0 *і* 1. *Якщо початкове твердження справедливе, то і двоїсте справедливе.*

Принцип двоїстості можна використовувати для знаходження нових рівносильностей. Наприклад, для першого закону поглинання (рівносильність 4) $A \,\&\, \left(A \vee B\right) = A$ за принципом двоїстості маємо другий закон поглинання (рівносильність 4*) $A \vee \left(A \,\&\, B\right) = A$.

8. Диз'юнктивна і кон'юнктивна нормальні форми

Означення. Елементарною кон'юнкцією *від змінних* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *називається кон'юнкція* <u>*деяких*</u> *із змінних* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *або їх заперечень.* Формулу, яка зображає елементарну кон'юнкцію позначають K.

Означення. Диз'юнктивною нормальною формою *(ДНФ) називається диз'юнкція елементарних кон'юнкцій*

$$\bigvee_{i=1}^{p} K_i = K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_p,$$

де всі K_i, $i = 1, 2, \ldots, p$ *– елементарні кон'юнкції (не обов'язково різні).*

Означення. *Елементарна кон'юнкція від* n *змінних* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *називається* ***повною****, якщо до неї від кожної пари* x_i, $\overline{x}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *входить тільки одна змінна.*

Двоїстим чином визначається поняття кон'юктивної нормальної форми.

Означення. Елементарною диз'юнкцією *від змінних* $x_1, x_2, ..., x_n$ *називається диз'юнкція* *<u>деяких</u>* *із змінних* $x_1, x_2, ..., x_n$ *або їх заперечень.* Формулу, яка зображає елементарну диз'юнкцію будемо позначають D.

Означення. Кон'юнктивною нормальною формою *(КНФ) називається кон'юнкція елементарних диз'юнкцій*

$$\underset{i=1}{\overset{q}{\&}} D_i = D_1 \,\&\, D_2 \,\&\ldots\&\, D_q,$$

де всі D_i, $i = 1,2,...,q$, *– елементарні диз'юнкції (не обов'язково різні).*

Означення. *Елементарна диз'юнкція від змінних* $x_1, x_2, ..., x_n$ *називається* ***повною****, якщо до неї від кожної пари* x_i, $\overline{x}_i$, $i = 1,2,...,n$ *входить тільки одна змінна.*

Теорема. *Для кожної формули, що реалізує булеву функцію, існує рівносильна їй ДНФ і КНФ.*

9. Досконалі диз'юнктивна і кон'юнктивна нормальні форми

Будь-яка формула має як ДНФ, так і КНФ. Приведення деякої формули до ДНФ і КНФ не є однозначним. Для кожної формули існує нескінченне число рівносильних до неї ДНФ і КНФ. Серед множини ДНФ (КНФ), які має дана формула, існує унікальна форма, вона єдина для даної формули – так звана досконала ДНФ (досконала КНФ).

Означення. ДДНФ *називається диз'юнкція повних елементарних кон'юнкцій від змінних* $x_1, x_2, ..., x_n$: $\overset{p}{\underset{i=1}{\vee}} K_i$, $\left(K_i \neq K_j, i \neq j\right)$.

Означення. ДКНФ *називається кон'юнкція повних елементарних диз'юнкцій від змінних* $x_1, x_2, ..., x_n$: $\underset{i=1}{\overset{q}{\&}} D_i$, $D_i \neq D_j, i \neq j$.

10. Приведення булевих функцій до ДДНФ і ДКНФ

Теорема (про зображення булевих функцій досконалими нормальними формами).

1. *Будь-яку булеву функцію* $f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\not\equiv 0$ *можна єдиним чином з точністю до перестановки диз'юнктивних доданків зобразити ДДН формою:*

$$f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=\bigvee_{\substack{(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n):\\ f(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)\equiv 1}}\left(x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}...x_n^{\sigma_n}\right),\text{ де } x^{\sigma}=\begin{cases} x, & \text{ÿêù î}\quad \sigma=1;\\ \overline{x}, & \text{ÿêù î}\quad \sigma=0.\end{cases}$$

2. *Будь-яку булеву функцію* $f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\not\equiv 1$ *можна єдиним чином з точністю до перестановки кон'юнктивних доданків зобразити ДКН формою:*

$$f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=\mathop{\&}_{\substack{(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n):\\ f(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)\equiv 0}}\left(x_1^{\sigma_1}\vee x_2^{\sigma_2}\vee...\vee x_n^{\sigma_n}\right),$$

де

$$x^{\sigma}=\begin{cases} \overline{x}, & \text{ÿêù î}\quad \sigma=1;\\ x, & \text{ÿêù î}\quad \sigma=0.\end{cases}$$

Наслідок. *Будь-яка булева функція може бути зображена у вигляді формули через* $\&,\vee,\overline{\ \ }$.

Дана теорема дозволяє для кожної булевої функції фактично побудувати формулу, яка її реалізує (у вигляді ДДНФ або ДКНФ).

Алгоритм знаходження ДДНФ (ДКНФ) для даної булевої функції за допомогою таблиці істинності (алгоритм запису булевої функції за одиницями (за нулями))

1) Вибрати всі ті набори значень її змінних, на яких функція набуває значення 1 (0);

2) Для кожного такого набору утворити відповідну повну елементарну кон'юнкцію (диз'юнкцію);

3) Отримані повні елементарні кон'юнкції (диз'юнкції); з'єднати знаками $\vee$ ($\&$).

Приклад. Для булевої функції $f\left(x_1, x_2,, x_3\right)$, яка реалізується формулою $\overline{x_2 \rightarrow \overline{x}_3} \leftrightarrow \left(\overline{x}_1 \vee x_2\right)$ знайти ДДНФ і ДКНФ за допомогою таблиці істинності.

Розв'язання. Побудуємо таблицю істинності даної булевої функції:

x_1	x_2	x_3	$\overline{x}_3$	$x_2 \rightarrow \overline{x}_3$	$\overline{x_2 \rightarrow \overline{x}_3}$	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_1 \vee x_2$	f
0	0	0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	1	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	1	0	1	1

$f\left(x, y, z\right) \equiv \overline{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \vee x_1 \overline{x}_2 x_3 \vee x_1\, x_2 x_3$. – ДДНФ

$f\left(x, y, z\right) \equiv \left(x_1 \vee x_2 \vee x_3\right)\left(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3\right)\left(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3\right)\left(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3\right)$ – ДКНФ

Якщо булева функція задана аналітично, тобто формулою, то можна цю формулу привести до ДДНФ або ДКНФ за допомогою рівносильних перетворень.

Алгоритм знаходження ДДНФ (ДКНФ) для даної булевої функції

за допомогою рівносильних перетворень

1) Позбавитися у формулі від входжень знаків всіх логічних зв'язок, крім $\&, \vee, \bar{\ }$;

2) Користуючись законами де Моргана, добитися того, щоб знак $\bar{\ }$ стояв тільки перед змінними;

3) Поповнити елементарні кон’юнкції (диз’юнкції) до повних так: якщо змінна x не входить у формулу A, то $A \equiv Ax \vee A\bar{x}$ ($\left(A \vee x\right)\left(A \vee \bar{x}\right)$);

4) Користуючись законами ідемпотентності, з однакових членів отриманої диз’юнкції (кон’юнкції) залишити тільки один.

Приклад. Для булевої функції $f\left(x_1, x_2,, x_3\right)$, яка реалізується формулою $\overline{x_2 \to \bar{x}_3} \leftrightarrow \left(\bar{x}_1 \vee x_2\right)$ знайти ДДНФ і ДКНФ за допомогою рівносильних перетворень.

Розв’язання: Знайдемо ДДНФ:

$\overline{x_2 \to \bar{x}_3} \leftrightarrow \left(\bar{x}_1 \vee x_2\right) \overset{12}{\equiv}$ – позбавимося у формулі від входження знаків $\leftrightarrow$ та $\to$:

$$\equiv \left(\left(x_2 \to \bar{x}_3\right) \vee \left(\bar{x}_1 \vee x_2\right)\right) \& \left(\left(\overline{\bar{x}_1 \vee x_2}\right) \vee \left(\overline{x_2 \to \bar{x}_3}\right)\right) \overset{11}{\equiv}$$

$$\equiv \left(\left(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3\right) \vee \left(\bar{x}_1 \vee x_2\right)\right) \& \left(\left(\overline{\bar{x}_1 \vee x_2}\right) \vee \left(\overline{\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3}\right)\right) \overset{5^*,6}{\equiv}$$ – користуючись законом де Моргана, доб'ємося того, щоб знак $\bar{\ }$ стояв тільки перед змінними:

$$\equiv \left(\left(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3\right) \vee \left(\bar{x}_1 \vee x_2\right)\right) \& \left(\left(x_1 \& \bar{x}_2\right) \vee \left(x_2 \& x_3\right)\right) \overset{1^*,2^*}{\equiv}$$

$$\equiv \left(\bar{x}_1 \vee \left(\bar{x}_2 \vee x_2\right) \vee \bar{x}_3\right) \& \left(x_1\bar{x}_2 \vee x_2x_3\right) \overset{8^*}{\equiv}$$

$\equiv \underline{x_1 \bar{x}_2 \vee x_2 x_3} \equiv$ – отримали ДНФ, елементарні кон'юнкції якої поповнимо до повних:

$\equiv x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \equiv$

$\equiv \underline{\underline{\bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3}}$ – отримали ДДНФ.

Знайдемо ДКНФ:

$\overline{x_2 \to \bar{x}_3} \leftrightarrow \left(\bar{x}_1 \vee x_2\right) \overset{12}{\equiv}$

……………………………

$\equiv x_1 \bar{x}_2 \vee x_2 x_3 \equiv$ – отримали ДНФ, з якої за дистрибутивністю отримаємо КНФ:

$\equiv \underline{\left(x_1 \vee x_2\right)\left(x_1 \vee x_3\right)\left(\bar{x}_2 \vee x_2\right)\left(\bar{x}_2 \vee x_3\right)} \equiv$ поповнимо елементарні диз'юнкції до повних:

$\equiv \underline{\underline{\left(x_1 \vee x_2 \vee x_3\right)\left(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3\right)\left(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3\right)\left(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3\right)}}$ – отримали ДКНФ.

11. Повні системи булевих функцій

Означення. *Система булевих функцій $F = \{f_1, f_2, ..., f_s\}$ називається* ***повною*** *(функціонально повною), якщо будь-яка булева функція може бути записана у вигляді формули через функції цієї системи.*

Теорема (про зведення до повної системи). *Нехай задані дві системи булевих функцій:*

$$F_1 = \{f_1, f_2, ..., f_s, ...\},$$

$$F_2 = \{g_1, g_2, ..., g_k, ...\},$$

відносно яких відомо, що система F_1 *повна і кожна її функція виражається у вигляді формули через функції системи* F_2*. Тоді система* F_2 *є повною.*

Отже, теорема дозволяє зводити питання про повноту одних систем до питання про повноту інших систем.

Теорема (про повноту двоїстої системи функцій). *Якщо система булевих функцій є повною, то повною буде і система, яка складається з двоїстих функцій.*

Приклади повних систем.

1. $\{\&, \vee, \overline{\ }\}$
2. $\{\&, \overline{\ }\}$.
3. $\{\vee, \overline{\ }\}$.
4. $\{\rightarrow, \overline{\ }\}$.
5. $\{|\}$.
6. $\{\downarrow\}$.
7. $\{\&, \oplus, 0, 1\}$.

Означення. *Система функцій* $F = \{f_1, f_2, ..., f_s\}$ *називається* ***базисом****, якщо вона є повною, але будь-яка її підсистема не буде повною.*

Система $\{\&, \vee, \overline{\ }\}$ є базисом, який прийнято називати стандартним.

12. Зображення булевої функції многочленом Жегалкіна

Многочлен Жегалкіна – це вираз вигляду

$$a_0 \oplus K_1 \oplus K_2 \oplus \ldots \oplus K_m,\ m \ge 0,$$

де a_0 – стала 1 або 0 і при $s \ge 1$ K_s – попарно різні елементарні кон'юнкції, які не містять заперечень.

***Означення*. *Многочленом Жегалкіна* називається формула вигляду**

$$a_0 \oplus \sum_{s=1}^{n} \sum_{\{i_1,i_2,\ldots i_s\}} a_{i_1 i_2 \ldots i_s}\left(x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_s}\right),$$

де множина $\{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$ перебігає всі можливі підмножини множини $\{1,2,\ldots,n\}$, $a_{i_1 i_2 \ldots i_s}, a_0 \in \{0,1\}$, а додавання відбувається за модулем 2.

Загальний вигляд многочлена Жегалкіна від 2-ч змінних:

$$a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus a_3 x_1 x_2.$$

Загальний вигляд многочлена Жегалкіна від 3-х змінних:

$$a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus a_3 x_3 \oplus a_4 x_1 x_2 \oplus a_5 x_1 x_3 \oplus a_6 x_2 x_3 \oplus a_7 x_1 x_2 x_3.$$

Теорема (Жегалкіна). *Будь-яка булева функція, відмінна від константи 0, може бути єдиним чином представлена у вигляді многочлена Жегалкіна:*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_0 \oplus \sum_{s=1}^{n} \sum_{\{i_1,i_2,\ldots i_s\}} a_{i_1 i_2 \ldots i_s}\left(x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_s}\right),$$

де множина $\{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$ перебігає всі можливі підмножини множини $\{1,2,\ldots,n\}$, $a_{i_1 i_2 \ldots i_s}, a_0 \in \{0,1\}$, а додавання відбувається за модулем 2.

Методи зображення булевої функції многочленом Жегалкіна:

1. Метод заміни. Булеву функцію зображаємо формулою у ДДНФ над системою $\{\&, \vee, \bar{\ }\}$ і робимо заміну $\bar{x} = x \oplus 1$, $\vee = \oplus$. Після розкриття дужок і зведення подібних отримаємо многочлен Жегалкіна.

2. Метод невизначених коефіцієнтів. Цей спосіб зручний, коли функція задана таблицею. Визначаємо коефіцієнти у загальному вигляді многочлену Жегалкіна, використовуючи значення функції на всіх наборах. Підставляємо в обидві частини різні значення змінних, отримаємо систему лінійних рівнянь (одне рівняння для кожного рядка таблиці). Розв'язавши систему, підставляємо знайдені коефіцієнти в многочлен.

3. Метод трикутника Паскаля. Цей спосіб зручний, коли функція задана вектором своїх значень. Коефіцієнти многочлена Жегалкіна можна отримати за допомогою трикутника Паскаля, побудованого за вектором значень функції, по одиницях його лівої сторони.

13. Замикання і замкнені класи булевих функцій

Означення. *Нехай* M *– деяка підмножина множини всіх булевих функцій* $M \subset P_2(n)$. ***Замиканням множини*** M *називається множина всіх булевих функцій, які можна виразити формулами над* M. Замикання множини M позначається $[M]$.

Властивості замикання:

1. $M \subseteq [M]$.

2. $[[M]] = [M]$.

3. Якщо $M \subseteq K$, то $[M] \subseteq [K]$.

Означення. *Множина функцій* M *називається (функціонально)* ***замкненим класом****, якщо* $[M] = M$.

В множині $P_2(n)$ різних булевих функцій від змінних n розрізняють

5 найважливіших замкнених класів

1. $T_0 = \{ f \in P_2(n) : f(0,0,...,0) = 0 \}$.

2. $T_1 = \left\{ f \in P_2\left(n\right) : f\left(1,1,...,1\right) = 1 \right\}$

3. $S = \left\{ f \in P_2\left(n\right) : f\left(\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, ..., \overline{\alpha}_n\right) = \overline{f}\left(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\right) \right\}$**.**

4. $M = \left\{ f \in P_2\left(n\right) : f\left(\alpha\right) \leq f\left(\beta\right), \text{ ÿêù î } \alpha \preceq \beta \right\}$,

де для $\alpha = \left(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\right)$ і $\beta = \left(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n\right)$, $\alpha_i, \beta_i \in \left\{0,1\right\}$, $\alpha \preceq \beta$, якщо $\alpha_i \leq \beta_i$ для всіх $i = 1, 2, ..., n$.

5. $L = \left\{ f \in P_2\left(n\right) : f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus c_2 x_2 \oplus ... \oplus c_n x_n \right\}$**.**

Перевірка належності булевої функції замкнутим класам 1-4 здійснюється за таблицею істинності. Перевірка належності булевої функції класу L здійснюється шляхом побудови полінома Жегалкіна.

14. Критерій повноти системи булевих функцій

Теорема** **(Теорема Поста про повноту). *Для того, щоб система функцій =була повною, необхідно и достатньо, щоб вона не містилася цілком в жодному з класів* T_0, T_1, S, M, L.

Наслідок. *Будь-який замкнений клас функцій з P_2, який не збігається з P_2, міститься принаймні в одному з замкнених класів* T_0, T_1, S, M, L.

ТЕМА 4. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ АЛГОРИТМІВ

1. Інтуїтивне означення алгоритму. Приклади алгоритмів

Поняття алгоритму належить до основних понять математики. Під алгоритмом розуміють точне розпорядження про виконання в певному порядку системи операцій для вирішення всіх завдань деякого даного типу.

Означення.(інтуїтивно-описове) ***Алгоритмом*** називається процес, який має наступні властивості:

1. ***Наявність даних:*** вихідних (входів), проміжних і результатів (виходів).
2. ***Дискретність:*** у кожен момент часу множина (проміжних) даних виходить з множини даних, що малися в попередній момент часу шляхом виконання дискретної послідовності деяких елементарних дій, що називаються ***кроками*** алгоритму.
3. ***Елементарність кроку:*** операції, які виконуються на кожнім кроці, повинні бути відносно простими і локальними.
4. ***Детермінованість:*** множина даних, одержуваних у якийсь (не початковий) момент часу, однозначно визначається множиною даних, отриманих у попередній момент часу.
5. ***Результативність:*** зупинка після скінченого числа кроків (що залежить від даних) із указівкою того, що вважати результатом.
6. ***Масовість:*** множина вихідних даних повинна вибиратися з деякої потенціально нескінченної множини. Іншими словами, алгоритм повинний вирішувати масову проблему, тобто клас однотипних задач.

Розрізняють:

1) *опис* алгоритму (інструкцію чи програму);
2) *механізм реалізації* алгоритму (наприклад, ЕОМ), що включає засоби пуску, зупинки, реалізації елементарних кроків, видачі результатів і забезпечення детермінованості, тобто керування ходом обчислення;

3) *процес реалізації* алгоритму, тобто послідовність кроків, що буде породжена при застосуванні алгоритму до конкретних даних.

Будемо припускати, що опис алгоритму і механізм його реалізації скінченні.

2. Блок-схеми алгоритмів

Означення. Блок-схемою *алгоритму називається орієнтований граф, в якому вузлам відповідають кроки, а дугам - переходи між кроками.*

Вузли блок-схеми можуть бути двох видів:

1) *оператори*, з них виходить одна дуга,
2) *логічні умови*, з яких виходить 2 (або більше) дуги.

Крім того, існує єдиний оператор кінця, з якого не виходить жодна дуга і єдиний оператор початку.

Важлива особливість блок-схеми полягає в тому, що зв’язки, які вона описує, не залежать від того, чи є кроки елементарними чи являють собою самостійні алгоритми, так звані блоки. Можливість розбивати великий алгоритм на блоки широко використовується в програмуванні.

На блок-схемі добре видна різниця між описом алгоритму і процесом його реалізації. Опис – це граф; процес реалізації – шлях в графі. Різні шляхи в тому самому графі виникають при різних даних, і які створюють різні логічні умови в точках розгалуження.

3. Проблема уточнення поняття алгоритму

В інтуїтивному означенні сформульовані основні вимоги до алгоритмів. Однак, поняття, використані в цих формулюваннях самі мають потребу в уточненні. Інтуїтивне означення алгоритму не дозволяє розглядати властивості алгоритмів як властивості формальних об'єктів. Тому математичне означення алгоритму необхідно з наступних причин:

1) тільки за наявності формального означення алгоритму можна зробити висновок про розв'язуваність або нерозв'язуваність яких-небудь проблем;

2) це дає можливість для порівняння алгоритмів, призначених для розв'язування однакових задач;

3) це дає можливість для порівняння різних проблем за складністю алгоритмів їх розв'язування.

У 20-х роках 20 століття задача формалізації (точного означення) поняття алгоритму стала однією з центральних проблем математики. Розв’язок її було отримано в 1936-1937р. у роботах Давіда Гільберта, Курта Геделя, Алонсо Черча, Еміля Поста, Алана Тьюрінга (1912–1954) та ін.

Можна виділити ***три основних типи*** універсальних алгоритмічних моделей, які є формалізаціями поняття алгоритму.

Перший тип зв'язує поняття алгоритму з найбільш традиційними поняттями математики – обчисленнями і числовими функціями. Найбільш розвинена і вивчена модель цього типу – рекурсивні функції – є історично першою формалізацією поняття алгоритму.

Другий тип заснований на уявленні про алгоритм як про деякий уявний детермінований пристрій, здатний виконувати в кожен окремий момент деякі примітивні операції, або інструкції. Основною теоретичною моделлю цього типу є машина, незалежно побудована Е. Постом в 1936 р. і А. Тьюрінгом у 1937 р.

Третій тип алгоритмічних моделей – це перетворення слів в довільних алфавітах, в яких елементарними операціями є підстановки, тобто заміни частині слова (підслова) іншим словом. Прикладами моделей цього типу є нормальні алгоритми Маркова (А.А.Марков (мол.) (1903-1979) – радянський математик) і канонічні системи Поста.

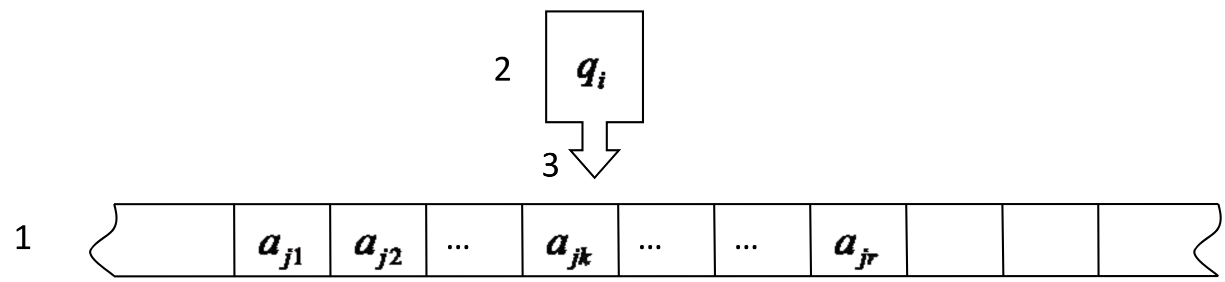
Можна довести, що одні моделі алгоритму можуть бути зведені до інших, тобто показати, що всякий алгоритм, описаний засобами однієї моделі, може бути описаний засобами іншої.

4. Машина Тьюрінга

Машина Тьюрінга (МТ) є абстрактною машиною, а не фізичною. Це такий самий математичний об'єкт, як і функція, інтеграл, похідна і т.ін.

Означення. Алфавітом *A називається довільна непорожня зчисленна множина. Звичайно розглядають скінченні алфавіти. Елементи алфавіту називаються* ***символами*** *або* ***буквами***. ***Словом*** *в алфавіті A називається скінченна послідовність букв з цього алфавіту. Кількість букв в слові a називається* ***довжиною*** *слова і позначається $|a|$. Множина всіх слів над алфавітом A позначається A^*. Множина всіх слів довжини k позначається A^k.*

Змістовне означення МТ: Машину Тьюрінга складають такі частини:



1. ***Скінченна стрічка***, розбита на скінченне число комірок, у кожній з яких може бути записаний один з символів скінченого алфавіту $A = \{a_0, a_1, ..., a_m\}$. У процесі роботи машина може добудовувати нові комірки, так що стрічка може вважатися потенціально необмеженою в обидва боки. Символом порожньої комірки (пробілу) є a_0. Стрічка називається також ***зовнішньою пам'яттю*** машини.

2. ***Керуючий пристрій***, який може знаходитися в одному з внутрішніх станів, що утворюють скінчену множину $Q = \{q_0, q_1, ..., q_n\}$. Сукупність внутрішніх станів називається ***внутрішньою пам'яттю***. Серед внутрішніх станів виділяють початковий q_1 і заключний q_0. Знаходячись у стані q_1 машина починає роботу, потрапивши у стан q_0 – зупиняється.

3. ***Голівка, що зчитує і пише*** – пристрій звернення до стрічки, який в кожен момент часу оглядає (сканує) комірку стрічки, у залежності від символу в цій комірці і стану керуючого пристрою записує у комірку символ або стирає його (записує a_0), зсувається на комірку вправо чи вліво або залишається на місці; при цьому керуючий пристрій переходить у новий стан (або залишається в старому).

Дані машини Тьюрінга – це слова в алфавіті стрічки; на стрічці записуються і вихідні дані, і результати.

Елементарні кроки машини Тьюрінга – це зчитування і запис символів, зсув голівки на комірку вправо чи вліво, а також перехід керуючого пристрою в наступний внутрішній стан.

Означення. Конфігурацією на стрічці МТ або ***машинним словом*** або ***повним станом***, за яким однозначно визначається її подальша поведінка, називається сукупність даних

$$a_{j1} a_{j2} ......q_i a_{jk} ......a_{jr} \qquad (1)$$

Для стислості конфігурацію (1) позначають трійкою

$$K : \alpha q_i \beta \qquad (1')$$

де α і β – слова в алфавіті A, q_i – поточний внутрішній стан, причому ліворуч від α і праворуч від β немає непорожніх символів.

Конфігурація вигляду $K_1 = q_1\alpha$ називається ***стандартною початковою***. Конфігурація вигляду $K_0 = q_0\beta$ називається ***стандартною заключною***.

Оскільки будь-яка машина Тьюрінга має скінченний алфавіт і скінчене число внутрішніх станів, то з опису її роботи видно, що вона може виконати скінченну кількість дій.

Означення. *Якщо машина Тьюрінга, знаходячись у внутрішньому стані* q_i *, оглядає комірку з символом* a_j, *переходить в наступний внутрішній стан* q_i', *записує до наступного такту в цю ж комірку символ* a_j' *і зсувається по стрічці вправо, вліво або залишається на місці, то кажуть, що* ***машина виконує команду***

$$q_i a_j \to q_i' a_j' d_k, \qquad (2)$$

де q_i, a_j – однозначно задані внутрішній стан і символ на скінченій стрічці;

q_i' – наступний внутрішній стан;

a_j' – символ, якій потрібно записати замість a_j у ту ж саму комірку (стирання символу розуміється як запис порожнього символу a_0).

d_k – напрямок зсуву голівки, який позначається одним з трьох символів: R – вправо, L – вліво, S – на місці.

Означення. *Сукупність всіх команд, які може виконати машина Тьюрінга, називається її* ***програмою***.

Програма визначає *детермінованість машини Тьюрінга*.

Крім списку команд, програму машини Тьюрінга часто задають у вигляді ***таблиці відповідностей***:

$Q \backslash A$	$a_1 \ldots\ldots a_j \ldots\ldots\ldots a_m$
q_1	$\vdots$
$\ldots$	$\vdots$
q_i	$\ldots \quad q_i' a_j' d_k$
$\ldots$	$\ldots$
q_n	$\vdots$

Програму можна також задати блок-схемою, яка називається ***діаграмою переходів***:

$$q_i \xrightarrow{a_j \to a_j' d_k} q_i'$$

Висновок. Таким чином, машина Тьюрінга – це просто алгоритм для переробки машинних слів. Спосіб переробки задається програмою. Кожна машина Тьюрінга задається своїми зовнішнім і внутрішнім алфавітами та програмою. Щоб цілком визначити роботу машини, треба вказати її конфігурацію для початкового моменту. Якщо не вказано противне, будемо вважати, що в початковий момент голівка оглядає саму праву непорожню комірку.

Формальне означення машини Тьюрінга*.* ***Машиною Тьюрінга*** *(МТ) називається четвірка* $M=\{A,Q,D,P\}$*, де* $A=\{a_0,a_1,\ldots,a_m\}$ *— зовнішній («стрічковий») алфавіт (містить спеціально виділений символ —* a_0 *– символ порожньої комірки (пробіл).),* $Q=\{q_0,q_1,\ldots,q_n\}$ *– внутрішній алфавіт (алфавіт станів), алфавіт (містить спеціальні виділене символи —* q_1 *– початковий стан,* q_0 *– заключний стан),* $D=\{L,S,R\}$ *— алфавіт зсувів, і* P

— програма, що є відображенням $Q \times A \to Q \times A \times D$.

Означення. *Якщо машина, почавши роботу з початкового стану, послідовно виконує такти, сканує початкове слово і завершує роботу, досягаючи заключного стану, кажуть, що* ***машина застосовна до даного слова***. *Якщо в деякий момент машина не може виконати черговий такт і зупиняється, кажуть, що* ***машина незастосовна до даного слова***.

В першому випадку результатом роботи МТ вважається слово, записане на стрічці в заключному стані, в другому результат роботи МТ не визначений.

5. Функції, обчислюванні за Тьюрінгом

Означення. *Функція* $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, $n \geq 1$, *називається* ***частковою числовою функцією***, *якщо аргументи* x_i *набувають значень з підмножин множини* $N_+ = N \bigcup \left\{0\right\}$ *цілих невід'ємних чисел і сама вона набуває значень в підмножині множини* N_+ *цілих невід'ємних чисел.* Область визначення часткової числової функції

$$D\left(f\right) = \left\{\left(x_1, x_2, ...x_n\right) : f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) - \text{âèçí à÷åí î}\right\} \subseteq N_+{}^n;$$

множина значень

$$E\left(f\right) = \left\{y \in N : \exists x_1, x_2, ...x_n \;\; f\left(x_1, x_2, ...x_n\right) = y\right\} \subseteq N_+$$

Означення. *Часткова числова функція* $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ *називається* ***обчислюванною***, *якщо існує алгоритм (у розумінні інтуїтивного означення), який дозволяє обчислювати її значення для тих наборів аргументів, для яких вона визначена і який продовжується нескінченно, якщо функція* f *для даного набору значень аргументів не визначена.*

Побудуємо машину Тьюрінга, яка обчислює функцію $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$.

Розглянемо машину Тьюрінга M із зовнішнім алфавітом $A = \{0;1\}$, внутрішнім алфавітом Q і програмою P. Значення $x_1, x_2, ..., x_n$ аргументів часткової числової функції $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ будемо записувати на стрічці машини у вигляді наступного слова:

$$0\underbrace{11...1}_{x_1}0\underbrace{11...1}_{x_2}0...0\underbrace{11...1}_{x_n}$$

Тут зручно ввести позначення:

$$1^x := \underbrace{11...1}_{x}, \qquad 0^x := \underbrace{00...0}_{x}.$$

Додатково покладемо $0^0 = 1^0 = 0$ – порожня комірка. Так що тепер на слова $1^0 = 0$, $1^1 = 1$, $1^2 = 11$, $1^3 = 111$, … будемо дивитися як на зображення цілих невід'ємних чисел 0, 1, 2, 3, … відповідно.

Таким чином, попереднє слово можна записати так:

$$01^{x_1}01^{x_2}0.....01^{x_n}0.$$

Машина M починає переробку (даного) слова зі стандартного початкового стану. Якщо функція $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ визначена при даному наборі аргументів $x_1, x_2, ..., x_n$, то машина M переробить (дане) слово у слово $\underbrace{11......1}_{y=f(x_1,...,x_n)} = 1^y$; якщо функція f не визначена, то машина M буде працювати нескінченно. При виконанні всіх перерахованих умов будемо говорити, що ***машина Тьюрінга обчислює дану функцію***.

Означення. *Часткова числова функція* $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ *називається* ***обчислюванною за Тьюрінгом****, якщо існує машина Тьюрінга, що обчислює її, тобто така машина Тюрінга, яка обчислює її значення для тих наборів значень аргументів, для яких функція визначена, і що працює нескінченно, якщо функція для даного набору значень аргументів не визначена.*

Означення*. Дві машини Тьюрінга з однаковим зовнішнім алфавітом* A *називаються* ***еквівалентними****, якщо вони обчислюють одну й ту саму часткову числову функцію.*

6. Теза Тьюрінга

Кожна функція, для обчислення значень якої існує який-небудь алгоритм, виявляється обчислюванною за допомогою якої-небудь машини Тьюрінга. Цей факт узагальнюється в наступній гіпотезі, яка називається основною гіпотезою теорії алгоритмів або тезою Тьюрінга.

Теза Тьюрінга. В*сяка часткова числова функція є обчислюванною за Тьюрінгом*.

Цю тезу можна сформулювати інакше:

Теза Тьюрінга. *„Будь-який алгоритм може бути реалізований машиною Тьюрінга”.*

7. Універсальна машина Тьюрінга

Відтворити роботу конкретної машини Тьюрінга M можна за її програмою. Основна, циклічно повторювана, дія алгоритму відтворення полягає у наступному:

„Для поточної конфігурації $\alpha a_k q_i a_j \beta$ знайти в програмі команду з лівою частиною $q_i a_j$. Якщо права частина цієї команди має вигляд $q_i' a_j' R$, то замінити в поточній конфігурації $q_i a_j$ на $a_j' q_i$; якщо ж права частина має вигляд $q_i' a_j' L$, то замінити $a_k q_i a_j$ на $q_i' a_k a_j'$.”

Машина Тьюрінга, що реалізує вищеописаний алгоритм відтворення, тобто така машину, яка здатна виконувати будь-який алгоритм, а значить роботу будь-якої машини Тьюрінга M, називається ***універсальною машиною Тьюрінга*** і позначається через U.

Універсальна машина Тюрінга U повинна мати фіксований зовнішній алфавіт, який використовується при записі програми, включаючи і алфавіт машини M. Щоб отримати зображення програми машини M, потрібно послідовно, рядок за рядком, закодувати цю програму в алфавіті універсальної машини U. Результат кодування позначається $U(M)$. Саме кодування повинне виконуватися таким чином:

1) різні букви повинні замінюватися різними кодовими групами, але одна й та сама буква повинна замінюватися всюди, де б вона не зустрічалася, однією і тією ж кодовою групою;

2) рядки кодових записів повинні однозначним чином розбиватися на окремі кодові групи;

3) повинна існувати можливість розпізнати, які кодові групи відповідають різним зсувам голівки (*R, L, S*), що читає і пише, і розрізняти кодові групи, відповідні буквам внутрішнього алфавіту і буквам зовнішнього алфавіту.

Розглянемо приклад такого кодування для машини Тюрінга M, що має зовнішній алфавіт $A = \{a_0, a_1, ..., a_m\}$ і внутрішній алфавіт $Q = \{q_0, q_1, ..., q_n\}$. Якщо зовнішній алфавіт універсальної машини складається з символів $A = \{0, 1, p\}$, то умови кодування будуть дотримані при наступному способі кодування:

1. Як кодові групи візьмемо $3 + m + n$ різних слів вигляду 100...01, де між одиницями проставляються нулі; m – число символів зовнішнього алфавіту; n – число символів внутрішнього алфавіту.

Тоді розбиття рядків на кодові групи проводиться шляхом виділення послідовностей нулів, що знаходяться між двома одиницями.

2. Зіставлення кодових груп початковим символам зовнішнього і внутрішнього алфавітів здійснюється згідно наступній ***таблиці кодування***:

символ	***кодова група***
R	101
L	$1001 = 10^2 1$
S	$10001 = 10^3 1$

зовнішній алфавіт	
a_0	100001=$10^4 1$
a_1	10000001=$10^6 1$
	…………….
a_m	10...........01=$10^{2(m+1)+2}1$
внутрішній алфавіт	
q_0	1000001=$10^5 1$
q_1	100000001=$10^7 1$
	…………….
q_n	10...........01=$10^{2(n+1)+3}1$

Програму машини Тьюрінга M в алфавіті універсальної машини можна записати одним словом. Для цього всі команди програми кодуються згідно таблиці кодування, а потім всі отримані слова записуються на стрічку машини U через пробіл p. Кодові групи однієї команди відокремлюються одним пробілом; окремі команди відокремлюються двома пробілами. Точно так само кодуються вихідні дані машини Тьюрінга M .

Приклад. Нехай дана машина M з алфавітом $A=\{a_0,a_1\}$; внутрішньою пам'яттю $Q=\{q_0,q_1\}$ і програмою P: $q_1a_0 \to q_2a_0R$, $q_2a_1 \to q_2a_0L$, $q_2a_0 \to q_0a_1$. Ця машина переставляє місцями букви a_0 і a_1.

Нехай зовнішній алфавіт універсальної машини U є $A=\{0,1,p\}$.

Розбиття вхідних символів на кодові групи і зіставлення кодових груп початковим символам зовнішнього і внутрішнього алфавітів машини M здійснюється згідно приведеній вище таблиці кодування.

Код $U(M)$ машини M (програма P на стрічці машини U) буде виглядати так:

$10^7 1$ р $10^4 1$ р $10^9 1$ р $10^4 1$ р 101 р р $10^9 1$ р $10^6 1$ р $10^9 1$ р $10^4 1$ р $10^2 1$ р р $10^9 1$ р $10^4 1$ р $10^5 1$ р $10^6 1$.

Таким чином, ***програма машини Тьюрінга M може розглядатися з двох точок зору***:

1) як опис роботи конкретного пристрою – машини M;
2) як одна з програм для універсальної машини U.

8. Приклад числової функції, яка не є обчислюванною за Тьюрінгом

Кожна машина Тьюрінга цілком визначається деяким скінченим словом у скінченому алфавіті A_U універсальної машини U. Оскільки множина всіх скінчених слів в скінченому алфавіті зчисленна, то і всіх машин Тьюрінга (які відрізняються одна від одної за суттю своєї роботи) існує не більш ніж зчисленна множина.

Перенумеруємо всі машини Тьюрінга, для чого всі коди програм всіх можливих машин Тьюрінга в алфавіті A_U розташуємо у вигляді фіксованої зчисленно нескінченої послідовності наступним чином: спочатку всі однобуквені слова $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_p$ (їх буде скінчена множина, оскільки алфавіт A_U скінчений), потім всі двобуквені слова $\alpha_{p+1}, \alpha_{p+2}, ..., \alpha_q$ (їх також буде скінчена множина), потім всі трьохбуквені слова і т.д. В результаті отримаємо послідовність кодів програм $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n, ...$ всіх можливих машин Тьюрінга. Будемо називати число k номером машини Тьюрінга, якщо код програми цієї машини записується словом α_k. Занумерувавши всі машини Тьюрінга, ми тим самим встановили, що множина всіх машин Тьюрінга зчисленна.

Розглянемо тепер множину всіх функцій, які задані і набувають своїх значень в множині слів в алфавіті $A = \{1\}$. Можна показати, що ця множина незчисленна. З іншого боку, оскільки множина всіх можливих машин Тьюрінга зчисленна, то і множина функцій, обчислюванних за Тьюрінгом, також зчисленна. Звідси випливає, що існують функції, яке не є обчислюванними за Тьюрінгом. Згідно тезі Тьюрінга, це буде означати, що не існує алгоритму для обчислення значень такої функції.

9. Алгоритмічно нерозв'язувані проблеми

Масова проблема називається ***алгоритмічно розв'язуваною***, якщо існує алгоритм (машина Тьюрінга), який дозволяє розв'язати кожну задачу цієї проблеми і ***алгоритмічно нерозв'язуваною***, якщо такого алгоритму не існує.

Проблема алгоритмічної (не)розв'язуваності формулюється таким чином: «Чи кожна масова проблема є алгоритмічно розв'язуваною?»

Приклади алгоритмічно розв'язуваних проблем:

1) додавання двох і більш заданих чисел;

2) розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими;

і т.д.

Приклади алгоритмічно нерозв'язуваних проблем:

1. **Проблема зупинки для машин Тьюрінга**.

Для заданої машини Тьюрінга і вихідних даних вказати алгоритм, який визначав би, чи зупиниться машина Тьюрінга при цих даних чи ні.

2. **Проблема самозастосовності машин Тьюрінга** є окремим випадком проблеми зупинки.

Для заданої машини Тьюрінга вказати алгоритм, який вирішував би проблему зупинки у випадку, коли на стрічці машини записана її власна програма, тобто який визначав би, чи самозастосовна дана машина чи ні.

3. **Проблема застосовності машин Тьюрінга**.

Для заданої МТ і конфігурації в ній вказати алгоритм, що дозволяє з'ясувати, чи застосовна машина до даної конфігурації чи ні.

Крім теорії машин Тьюрінга алгоритмічно нерозв'язувані проблеми існують в арифметиці, алгебрі, логіці й інших областях математики. Наприклад:

4. Проблема наявності цілих коренів в многочлена з цілими коефіцієнтами. Для заданого многочлена з цілими коефіцієнтами вказати алгоритм, що дозволяє довідатися, чи існують цілі значення змінних, які обертають цей многочлен у нуль, чи ні.

10. Поняття про складність алгоритму

Означення. *Кількісна характеристика споживаних ресурсів, необхідних алгоритму для роботи (успішного розв'язку задачі), називається* ***складністю алгоритму****.*

Основними ресурсами є час і об'єм пам'яті. Найбільш важливою характеристикою є *час.*

Очевидно, що для різних реалізацій масової задачі (для різних вхідних даних) алгоритму може бути потрібною різна кількість ресурсів.

З кожною реалізацією масової задачі пов'язується певне число n (рідше – набір чисел), яке називається ***довжиною*** або ***розміром вхідних даних (розміром задачі)***. Розмір задачі – це об'єм вхідних даних, необхідних для задання всіх параметрів задачі.

Час, що витрачається алгоритмом, як функція розміру задачі називається ***часовою складністю*** цього алгоритму, позначається $T(n)$. Поведінка цієї складності при граничному переході при збільшенні розміру задачі називається ***асимптотичною часовою складністю***. Аналогічно можна визначити ***місткісну складність*** $S(n)$ і ***асимптотичну місткісну складність***.

Означення. *Функція* $f(n)$ *називається* ***робочою****, якщо вона визначає верхню межу максимальної кількості операцій (додавання, множення, і т.д.), які має виконати алгоритм під час розв'язування задачі розміру* n.

Часова складність залежить від того члена розкладання робочої функції, який із зростанням n зростає швидше інших.

Означення. *Кажуть, що функція* $f(n)$ *має порядок* $g(n)$ *для великих* n*, якщо* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n)}{g(n)}=const\neq 0$. *Це записують як* $f(n)=O(g(n))$ *(тобто функції* $f(n)$ *і* $g(n)$ *зростають з однаковою швидкістю).*

Наприклад, якщо часова складність деякого алгоритму описується робочою функцією $f(n)=5n^3+3n+17$, то його складність має порядок n^3, тому що $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^3+3n+17}{n^3}=5$, що записується як $T(n)=O(n^3)$.

Класифікація алгоритмів за їх часовою складністю:

1. Алгоритм називається ***сталим***, якщо його часова складність не залежить від n.
2. Алгоритм називається ***поліноміальним***, якщо його часова складність дорівнює $O(n^m): T(n)=O(n^m)$, де $m=const$, тобто робоча функція поліноміального алгоритму є многочленом степеня m.
3. Алгоритм називається ***експоненціальним***, якщо $T(n)=O\left(t^{g(n)}\right)$, де $t>1$ – константа, $g(n)$ – деяка поліноміальна функція.
4. Алгоритм називається ***суперполіноміальним***, якщо $T(n)=O\left(c^{g(n)}\right)$, де із зростанням n функція $g(n)$ зростає швидше константи c.

Із збільшенням розміру задачі n складність алгоритмів може стати настільки великою, що почне заважати практичній реалізації алгоритму. Для ілюстрації цього приведемо час виконання алгоритмів різних класів при розмірі вхідних даних $n=10^6$:

Клас алгоритмів	Складність $T(n)$	Кількість операцій процесора при $n=10^6$	Час зі швидкістю $n=10^6$ операцій за секунду
Сталі	$O(1)$	1	1 мкс
Лінійні	$O(n)$	10^6	1 с
Квадратичні	$O(n^2)$	10^{12}	11,6 доби
Кубічні	$O(n^3)$	10^{18}	32 000 років
Експоненціальні	$O(2^n)$	10^{301030}	У 10^{301006} разів довше за час існування Всесвіту

У загальному випадку є широкий клас задач, для яких не існує точних ефективних методів рішення. На жаль багато таких задач має важливе прикладне значення. Для них розробляються наближені алгоритми, що дозволяють отримати розв'язки з певним степенем точності або з певною ймовірністю.

Означення. Розв'язуваними *називаються задачі, в яких використовуються алгоритми з поліноміальною часовою складністю*. (При розумно підібраних вхідних даних їх можна розв'язати за прийнятний час.) ***Важкорозв'язуваними*** або *просто* ***важкими*** *називаються задачі, які неможливо розв'язати за поліноміальний час.* (Їх обчислення швидко стає нездійсненним.) ***Нерозв'язуваними*** *називаються задачі, для розв'язування яких не можна побудувати жодного алгоритму, навіть без урахування часової складносі.*

Класифікація задач за їх складністю розв'язування:

Клас P утворюють задачі, які можна розв'язати за поліноміальний час.

Клас NP утворюють задачі, які можна розв'язати за поліноміальний час тільки на недетермінованій машині Тьюрінга (варіант звичайної машини Тьюрінга, яка може робити певні припущення відносно розв'язку, завдяки чому вона або «вдало вгадує» розв'язок, або перебирає всі припущення і перевіряє їх за поліноміальний час).

Класи P і NP знаходяться між собою у відношенні нестрогого включення: $P \subseteq NP$. Проблема збіжності класів $P = NP$ або незбіжності $P \neq NP$ вважається в теорії складності центральною і досі не вирішена.

Клас NP***-повних задач*** складають такі задачі з класу NP, що з побудови поліноміального алгоритму для будь-якої такої задачі випливає можливість побудови такого ж алгоритму для всіх інших задач класу NP.

Клас $PSPACE$ утворюють задачі, які можна розв'язати у поліноміальному просторі, але необов'язково за поліноміальний час.

Клас $PSPACE$***-повних задач*** складають задачі, які мають властивість: якщо кожна з них є NP-задачею, то $PSPACE = NP$, а якщо P-задачею, то $PSPACE = P$.

Клас $EXPTIME$ утворюють задачі, які можна розв'язати за експоненціальний час.

ІІ. ЗРАЗКИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ПРИКЛАДІВ

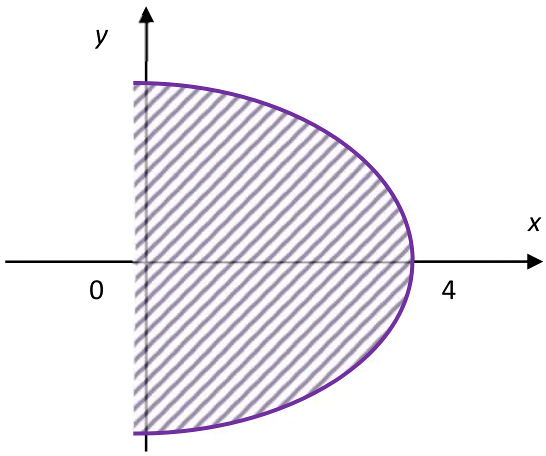
ТЕМА 1. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МНОЖИН

Завдання 1. Нехай U – множина точок площини, на якій задана прямокутна декартова система координат. Знайти та зобразити на площині множини:

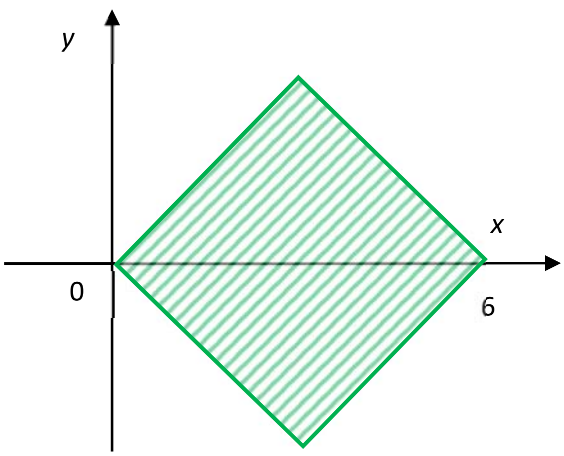
1) $A \cap B$; 2) $A \cup B$; 3) $A \setminus B$; 4) $B \setminus A$; 5) $\overline{A}$; 6) $\overline{B}$; 7) $A \Delta B$, якщо

$A = \{(x, y) : y^2 + 3x - 6 \le 0\}$ $\qquad$ $B = \{(x, y) : |x-3| + |y| \le 3\}$

Розв'язання: Побудуємо схематично дані множини:



Множина $A = \{(x, y) : y^2 + 3x - 12 \le 0\}$ – внутрішня частина параболи $x \le -\frac{y^2}{3} + 4$ з вершиною у точці $(4, 0)$:

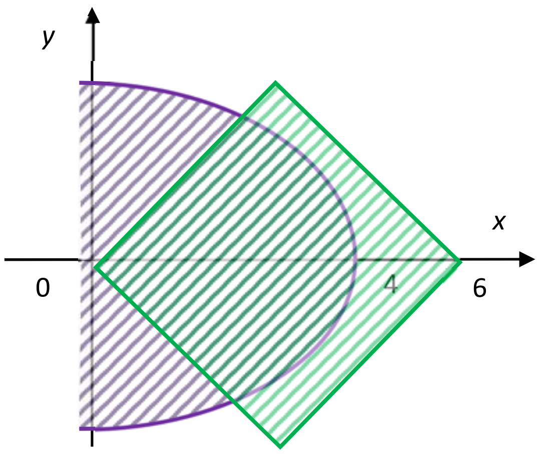


Множина $B = \{(x, y) : |x-3| + |y| \le 3\}$ – внутрішня частина квадрату, утвореного перерізом прямих

$$\begin{cases} y = 3 - (x-3); \\ y = 3 + (x-3); \\ y = -3 - (x-3); \\ y = -3 + (x-3). \end{cases}$$

За означеннями основних операцій над множинами будемо мати:

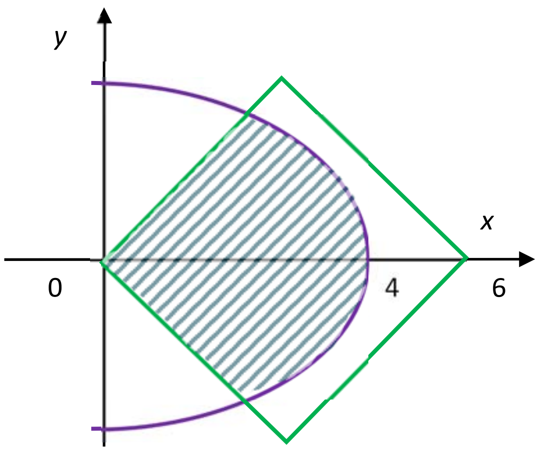
1) Об’єднання множин A і B:

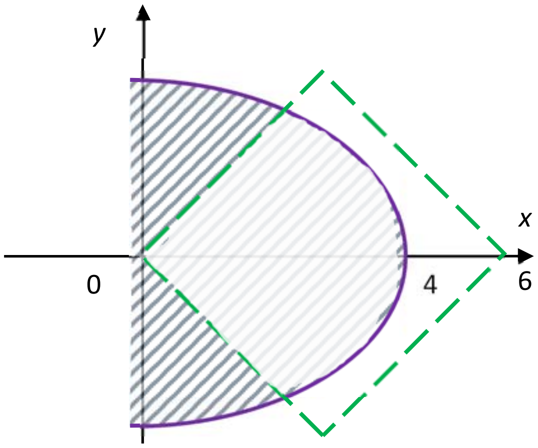


$$A \bigcup B = \{(x, y) : y^2 + 3x - 6 \le 0 \text{ àáî } |x-3| + |y| \le 3\}$$

2) Переріз множин A і B:

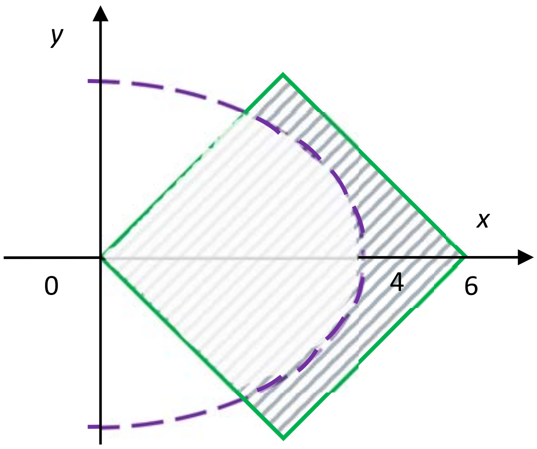
$$A \bigcap B = \{(x, y) : y^2 + 3x - 6 \le 0 \text{ і } |x-2| + |y| \le 2\}$$





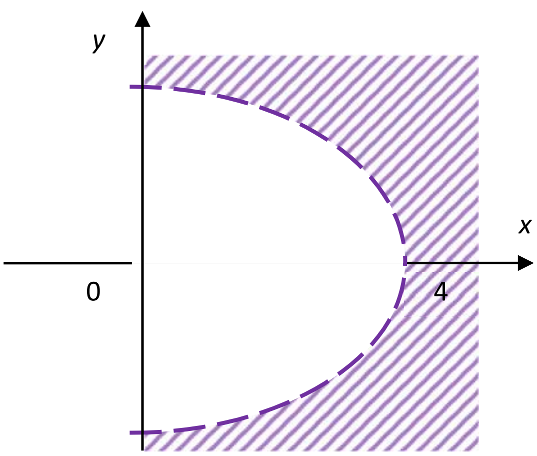
3) Різниця множин A і B:

$$A \setminus B = \{(x, y): y^2 + 3x - 6 \le 0 \text{ і } |x-2| + |y| > 2\}$$



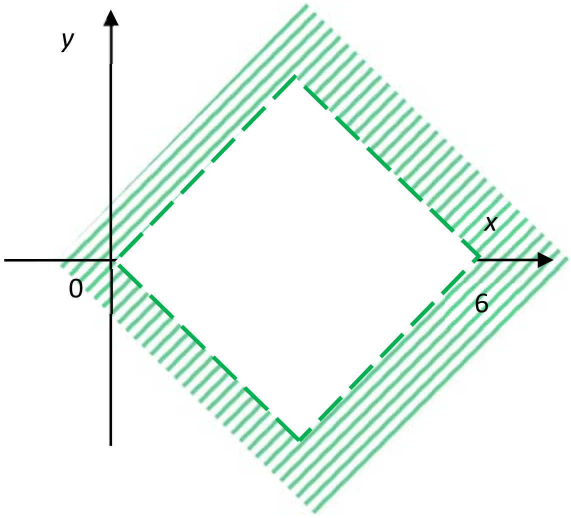
4) Різниця множин B і A:

$$B \setminus A = \{(x, y): |x-2| + |y| \le 2 \text{ і } 2y^2 + 3x - 6 > 0\}$$



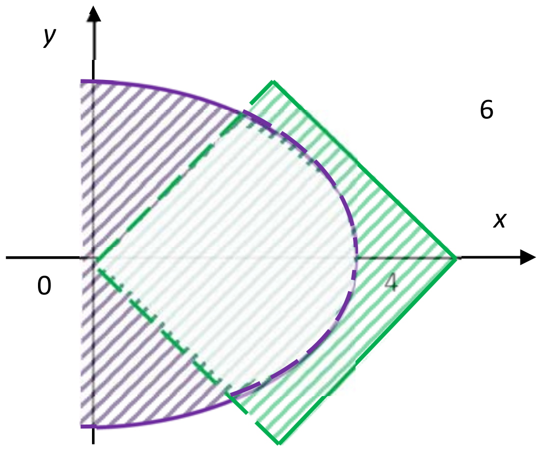
5) Доповнення до множини A:

$$\overline{A} = \{(x, y): y^2 + 3x - 6 > 0\}$$



6) Доповнення до множини B:

$$\overline{B} = \{(x, y) : |x - 3| + |y| > 3\}$$



7)Симетрична різниця множин A і B:

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Завдання 2. Довести справедливість співвідношень між множинами, використовуючи

а) закони алгебри множин;

б) діаграми Ейлера-Венна.

Доведення: а) Використовуючи закони алгебри множин, маємо:

$\left(A \setminus C\right) \setminus \left(B \setminus C\right) =$ за властивістю $A \setminus B = A \cap \overline{B}$;

$= \left(A \cap \overline{C}\right) \cap \left(\overline{B \cap \overline{C}}\right) =$ за законом де Моргана $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

$= \left(A \cap \overline{C}\right) \cap \left(\overline{B} \cup \overline{\overline{C}}\right) =$ за властивостями $\overline{\overline{A}} = A$,

$\left(A \cap B\right) \cap C = A \cap \left(B \cap C\right)$;

$= A \cap \left(\overline{C} \cap \left(\overline{B} \cup C\right)\right) =$ за властивістю

$A \cap \left(B \cup C\right) = \left(A \cap B\right) \cup \left(A \cap C\right)$;

$= A \cap \left(\left(\overline{C} \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{C} \cap C\right)\right) =$ за властивостями $A \cap \overline{A} = \varnothing$,

$A \cup \varnothing = A$, $A \cap B = B \cap A$;

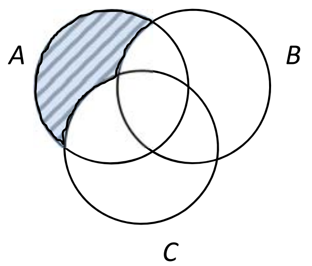
$= A \cap \left(\overline{B} \cap \overline{C}\right) =$ за властивістю

$\left(A \cap B\right) \cap C = A \cap \left(B \cap C\right)$;

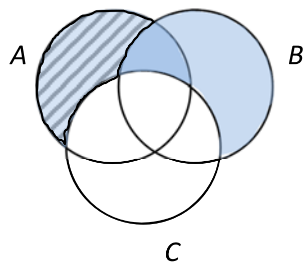
$= \left(A \cap \overline{B}\right) \cap \overline{C} =$ за властивістю $A \setminus B = A \cap \overline{B}$;

$= \left(A \setminus B\right) \setminus C$.

б) За допомогою діаграм Ейлера-Венна. Намалюємо діаграми окремо для лівої і правої частини рівності:



$\left(A \setminus B\right) \setminus C$



$\left(A \setminus C\right) \setminus \left(B \setminus C\right)$

Оскільки заштриховані області на діаграмах збігаються, то рівність доведено.

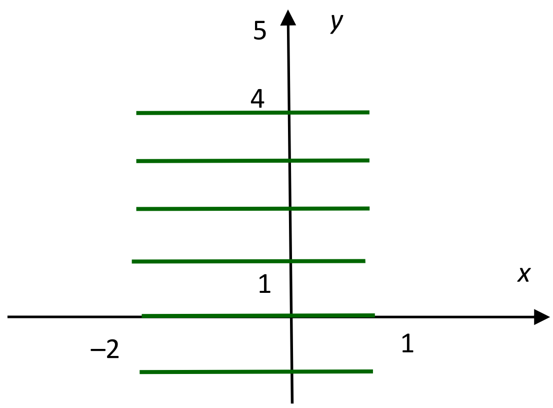
Завдання 3. Знайти і зобразити в ПДСК множину $X \times Y$, якщо

$X = \{x : x \in R, -2 \le x \le 1\}$; $Y = \{y : y \in Z, -1 \le y < 5\}$;

Розв'язання: За означенням декартового добутку

$X \times Y = \{(x, y) : x \in R, -2 \le x \le 1, y \in Z, -1 \le y < 5\}$.

Зобразимо множину $X \times Y$:



Таким чином, декартовий добуток $X \times Y$ є сукупність відрізків.

Завдання 4. Для бінарного відношення ρ "b ділиться на a без остачі" на множині $A = \{2,3,4,6,8,9,12,18,24,36\}$:

1) Записати всі можливі способи задання: а) переліком елементів; б) характеристичною властивістю; в) матрицею, г) графіком, д) графом.

2) Знайти а) область визначення $D(\rho)$, б) область значень $E(\rho)$, в) обернене відношення ρ^{-1}, г) композицію $\rho \circ \rho^{-1}$, д) композицію $\rho^{-1} \circ \rho$, є) декартовий добуток $E(\rho^{-1} \circ \rho) \times D(\rho \circ \rho^{-1})$, е) образ $\rho(a)$, прообраз $\rho^{-1}(b)$.

3) Визначити властивості.

Розв'язання.

1) Задамо відношення всіма можливими способами:

а) переліком елементів:

$\rho = \{(2,2),(2,4),(2,6),(2,8),(2,12),(2,18),(2,24),(2,36),(3,3),$

$$(3,6),(3,9),(3,12),(3,18),(3,24),(3,36),(4,4),(4,8),(4,12),(4,24),$$

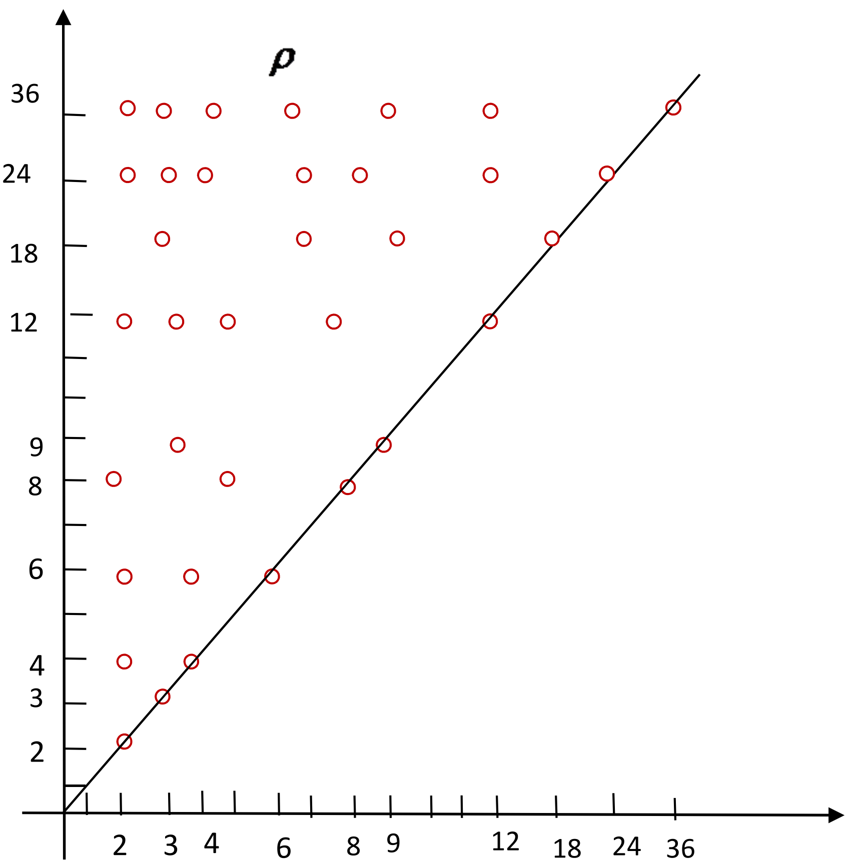
$$(4,36),(6,6),(6,12),(6,18),(6,24),(6,36),(8,8),(8,24),(9,9),(9,18),$$

$$(9,36),(12,12),(12,24),(12,36),(18,18),(18,36),(24,24),(36,36)\}.$$

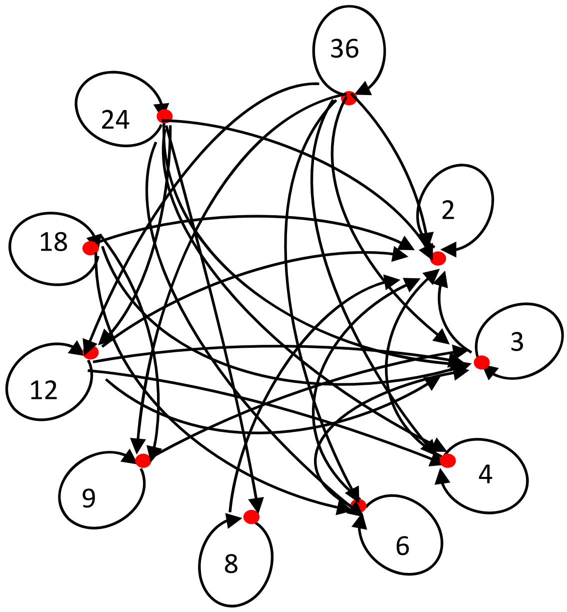
в) матрицею:

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccccccccc} 2 & 3 & 4 & 6 & 8 & 9 & 12 & 18 & 24 & 36 \end{array} \\
\begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \\ 9 \\ 12 \\ 18 \\ 24 \\ 36 \end{array} & \begin{pmatrix}
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array};$$

г) графіком:



д) графом.



2) а) Знайдемо область визначення, яку складають перші компоненти пар, які знаходяться у відношенні $\rho : D(\rho) = \{2,3,4,6,8,9,12,18,24,36\} = A$;

б) Знайдемо область значень, яку складають другі компоненти пар, які знаходяться у відношенні ρ: $E(\rho) = \{2,3,4,6,8,9,12,18,24,36\} = A$;

в) Знайдемо обернене відношення, для чого поміняємо місцями перші і другі компоненти пар, які знаходяться у відношенні ρ:

$$\rho^{-1} = \{(2,2),(4,2),(6,2),(8,2),(12,2),(18,2),(24,2),(36,2),(3,3),$$

$$(6,3),(9,3),(12,3),(18,3),(24,3),(36,3),(4,4),(8,4),(12,4),(24,4),$$

$$(36,4),(6,6),(12,6),(18,6),(24,6),(36,6),(8,8),(24,8),(9,9),(18,9),$$

$$(36,9),(12,12),(24,12),(36,12),(18,18),(36,18),(24,24),(36,36)\}.$$

г) Побудуємо композицію $\rho \circ \rho^{-1}$.

Процес знаходження $\rho \circ \rho^{-1}$ відповідно до означення композиції зручно зобразити таблицею, в якій реалізується перебір всіх можливих значень a,b,c. Для кожної пари $(a,b) \in \rho$ потрібно розглянути всі можливі пари $(b,c) \in \rho^{-1}$.

$(a,b)\in\rho$	$(b,c)\in\rho^{-1}$	$(a,c)\in\rho\circ\rho^{-1}$
$(2,2)$	$(2,2)$	$(2,2)$
$(2,4)$	$(4,2)$	$(2,2)$
	$(6,2)$	$(2,2)$
$(2,6)$	$(6,3)$	$(2,3)$
	$(6,6)$	$(2,6)$
	$(8,2)$	$(2,2)$
$(2,8)$	$(8,4)$	$(2,4)$
	$(8,8)$	$(2,8)$
	$(12,2)$	$(2,2)$
	$(12,3)$	$(2,3)$
$(2,12)$	$(12,4)$	$(2,4)$
	$(12,6)$	$(2,6)$
	$(12,12)$	$(2,12)$
	$(18,2)$	$(2,2)$
	$(18,3)$	$(2,3)$
$(2,18)$	$(18,6)$	$(2,6)$
	$(18,9)$	$(2,9)$
	$(18,18)$	$(2,18)$
…	…	….

Пари з останнього стовпця і утворюють композицію:

$$\rho\circ\rho^{-1}=\{(2,2),(2,3),(2,4),(2,6),(2,8),(2,12),(2,24),(2,36),(3,2),$$
$$(3,3),(3,4),(3,6),(3,9),(3,12),(3,18),(3,24),(3,36),(4,2),(4,3),$$
$$(4,4),(4,6),(4,8),(4,12),(4,18),(4,24),(4,36),(6,2),(6,3),(6,4),$$
$$(6,6),(6,9),(6,12),(6,18),(6,24),(6,36),(8,2),(8,3),(8,4),(8,6),$$
$$(8,8),(8,12),(8,24),(9,2),(9,3),(9,4),(9,6),(9,9),(9,18),(9,36),$$
$$(12,2),(12,3),(12,4),(12,6),(12,8),(12,12),(12,24),(12,36),(18,2),$$
$$(18,3),(18,4),(18,6),(18,9),(18,12),(18,18),(18,36),(24,2),(24,3),$$
$$(24,4),(24,6),(24,8),(24,12),(24,24),(36,2),(36,3),(36,4),(36,6),$$
$$(36,9),(36,12),(36,18),(36,36)\}.$$

д) Побудуємо композицію $\rho^{-1}\circ\rho$:

$(a,b)\in\rho^{-1}$	$(b,c)\in\rho$	$(a,c)\in\rho^{-1}\circ\rho$
$(2,2)$	$(2,2)$	$(2,2)$
	$(2,4)$	$(2,4)$
	$(2,6)$	$(2,6)$
	$(2,8)$	$(2,8)$
	$(2,12)$	$(2,12)$
	$(2,18)$	$(2,18)$
	$(2,24)$	$(2,24)$
	$(2,36)$	$(2,36)$

$(4,2)$	$(2,2)$	$(4,2)$
	$(2,4)$	$(4,4)$
	$(2,6)$	$(4,6)$
	$(2,8)$	$(4,8)$
	$(2,12)$	$(4,12)$
	$(2,18)$	$(4,18)$
	$(2,24)$	$(4,24)$
	$(2,36)$	$(4,36)$
$(6,2)$	$(2,2)$	$(6,2)$
	$(2,4)$	$(6,4)$
…	…	….

Пари з останнього стовпця і утворюють композицію:

$$\rho^{-1}\circ\rho=\{(2,2),(2,3),(2,4),(2,6),(2,8),(2,12),(2,24),(2,36),(4,2),$$
$$(4,4),(4,6),(4,8),(4,12),(4,18),(4,24),(4,36),(6,2),(6,3),(6,4),$$
$$(6,6),(6,8),(6,12),(6,18),(6,24),(6,36),(8,2),(8,4),(8,6),(8,8),$$
$$(8,12),(8,18),(8,24),(8,36),(12,2),(12,3),(12,4),(12,6),(12,8),$$
$$(12,12),(12,18),(12,24),(12,36),(18,2),(18,3),(18,4),(18,6),(18,8),$$
$$(18,9),(18,12),(18,18),(18,24),(18,36),(24,2),(24,3),(24,4),(24,6),$$
$$(24,8),(24,12),(24,18),(24,24),(24,36),(36,2),(36,4),(36,6),(36,8),$$
$$(36,12),(36,18),(36,24),(36,36),(3,3),(3,6),(3,9),(3,12),(3,18),$$
$$(3,24),(3,36),(9,3),(9,6),(9,9),(9,12),(9,18),(9,24),(9,36)\}.$$

є) Область значень $E\left(\rho^{-1}\circ\rho\right)$ складають другі компоненти пар, які знаходяться у відношенні $\rho^{-1}\circ\rho$:

$$E\left(\rho^{-1}\circ\rho\right)=\{2,3,4,6,8,9,12,18,24,36\}=A$$

Область визначення $D\left(\rho\circ\rho^{-1}\right)$ складають перші компоненти пар, які знаходяться у відношенні $\rho\circ\rho^{-1}$:

$$D\left(\rho\circ\rho^{-1}\right)=\{2,3,4,6,8,9,12,18,24,36\}=A$$

Утворимо декартовий добуток $E\left(\rho^{-1}\circ\rho\right)\times D\left(\rho\circ\rho^{-1}\right)$:

$$E\left(\rho^{-1}\circ\rho\right)\times D\left(\rho\circ\rho^{-1}\right)=A^2.$$

е) Знайдемо образ $\rho(9)$: $\rho(9)=\{9,18,36\}$;

Знайдемо прообраз $\rho^{-1}(12)$: $\rho^{-1}(12)=\{2,3,4,6,12\}$.

3) Визначимо властивості .

1) $\forall a\in A$ a ділиться на a без остачі – рефлексивність.

Наявність цієї властивості легко прослідкувати за матрицею: всі елементи головної діагоналі дорівнюють 1; за графом відношення: всі вузли мають петлі.

2) $\forall a,b\in A$ b ділиться на a без остачі або b ділиться на a без остачі – антисиметричність.

Наявність цієї властивості легко прослідкувати за матрицею: в матриці нема 1, симетрично розташованих відносно головної діагоналі; за графом: не існує двох різних вузлів, зв'язаних парою різнонапрямлених дуг.

3) $\forall a,b,c\in A$ a ділиться на b і b ділиться на c $\Rightarrow a$ ділиться на c – транзитивність.

Наявність цієї властивості легко прослідкувати за графом: для будь-яких двох дуг, таких, що одна напрямлена від a до b, а друга – від b до c, існує дуга, яка з’єднує a з c в напрямі від a до c. ((6,12); (12,24); (6,24))

Отже, відношення ρ є відношенням нестрогого порядку.

Завдання 5. Для заданого відображення f : а) знайти образ елемента x , б) знайти прообраз елемента y , в) вказати тип, г) у випадку бієкції знайти обернене відображення.

$$f(x)=2x-1,\ f(1),\ f^{-1}(1).$$

Розв'язання.

а) $f(1)=2\cdot 1-1=1,$

б) За означенням прообразу $f^{-1}(y)=\{x\in R\ :\ f(x)=y\}$, отже

$f^{-1}(1)=\{x\in R\ :\ 2x-1=1\}=\{x\in R\ :\ x=1\}=1,$

в) Перевіримо сюр'єктивність: $f(X)=Y$

$f(R)=\{y\in R:\ \exists x\in R\ \ 2x-1=y\}=R$, отже f – сюр'єктивно;

Перевіримо ін'єктивність:

$\forall x_1,x_2\in R\ \ x_1\neq x_2\Rightarrow\ f(x_1)\neq f(x_2)$, отже f – ін'єктивно;

Таким чином, дане відображення є бієкцією.

г) Обернене відображення $f^{-1}(y)=\{x\in X\ :\ x=f(y)\}$:

$f^{-1}(y)=\{x\in X\ :\ x=2y-1\}=\dfrac{x+1}{2}.$

Завдання 6. Визначити, чи є групою множина $A=\{11^n, n\in Z\}$ відносно операції множення.

Розв'язання. Операція множення цілих степенів числа 11 є алгебраїчною, тому що

$$11^n\cdot 11^m=11^{n+m}\in A$$

Перевіримо аксіоми групи.

1) Операція множення цілих степенів числа 11 є асоціативною: якщо $a=11^{k_1}$, $b=11^{k_2}$, $c=11^{k_3}$, то

$(a\cdot b)\cdot c=\left(11^{k_1}\cdot 11^{k_2}\right)\cdot 11^{k_3}=$за властивостями степенів

$$=11^{k_1}\cdot\left(11^{k_2}\cdot 11^{k_3}\right)=a\cdot\left(b\cdot c\right).$$

2) В множині $A=\left\{11^n, n\in Z\right\}$ відносно звичайної операції множення існує нейтральний елемент. Ним є $1=11^0\in A$.

3) В множині $A=\left\{11^n, n\in Z\right\}$ відносно звичайної операції множення існує симетричний елемент. Ним є $\left(11^n\right)^{-1}=\left(11^{-1}\right)^n\in A$.

Таким чином, $\left(A,\cdot\right)$ – група.

Завдання 7. Розв'язати задачі:

а) Скільки словників треба видати, щоб можна було безпосередньо виконувати переклади з будь-якої з 5 мов: української, російської, англійської, німецької, французької – на будь-яку іншу з цих мов?

Розв'язання. І спосіб. Словник – це впорядкована пара з двох мов, наприклад, (українська, англійська), (російська, німецька). За правилом добутку число таких впорядкованих пар дорівнює 25. Оскільки обидві мови в словнику різні, то виключимо з цього числа однакові пари, яких буде 5. Остаточно маємо 20 словників.

ІІ спосіб. Задача про число розміщень по двом різним місцям (словник) двох з п'яти різних елементів (мов):

$$A_5^2=\frac{5!}{3!}=5\cdot 4=20.$$

б) На книжковій полиці треба розташувати 15 різних книг з математики, 12 різних книг з фізики і 16 різних книг з інформатики. Скількома способами це можна зробити, якщо книги з одного предмету мають стояти разом, але книги з математики не повинні стояти поруч з книгами з інформатики?

Розв'язання. Книги з фізики повинні бути розташовані між книгами з математики і книгами з інформатики, тому можливими конфігураціями є МФІ та ІМФ. Книги з математики можна розташувати $P_{15}=15!$ способами, книги з фізики – $P_{12}=12!$ способами, книги з інформатики – $P_{16}=16!$. За правилом добутку маємо

$$2\cdot P_{15}\cdot P_{12}\cdot P_{16}=2\cdot 15!\cdot 12!\cdot 16! \text{ (способів).}$$

в) Скількома способами можна призначити комісію з 6 чоловіків і 8 жінок з групи осіб, яка містить 12 чоловіків і 20 жінок?

Розв'язання. Існує C_{12}^{6} способів вибору чоловіків і C_{20}^{8} способів вибору жінок. За правилом добутку маємо

$$C_{12}^{6} \cdot C_{20}^{8} = \frac{12!}{6!6!} \cdot \frac{20!}{8!12!} = 924 \cdot 125970 = 116396280 \text{ (способів).}$$

г) Скільки існує 7-значних телефонних номерів, в кожному з яких жодна цифра не повторюється?

Розв'язання. Задача про число розміщень по семи різним місцям семи з десяти різних цифр:

$$A_{10}^{7} = \frac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 604800\,.$$

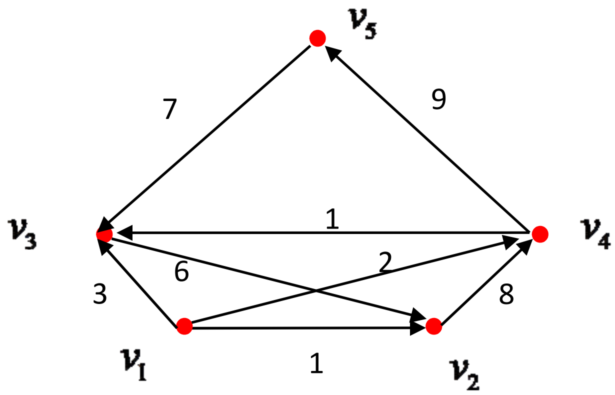
ТЕМА 2. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ГРАФІВ

Завдання 1. І. Для зваженого орграфа $\vec{G}=\left(V,\vec{E}\right)$, заданого графічно, знайти:

1) матрицю суміжності;
2) півстепені вузлів;
3) всі шляхи довжини 2 і 3;
4) матрицю досяжності;
5) компоненти сильної зв’язності;
6) матрицю зв’язності;
7) граф конденсації;
8) матрицю інцидентності;

ІІ. Для зваженого асоційованого графа $G=\left(V,E\right)$ (графа, отриманого з $\vec{G}$ скасуванням орієнтації) знайти:

9) матрицю суміжності;
10) степені вершин;
11) матрицю інцидентності;
12) ейлерів цикл. Якщо такого циклу в графі нема, то вилучити мінімально можливе число дуг, і в новому графі знайти такий цикл



Розв’язання. І. Для зваженого орграфа $\vec{G}=\left(V,\vec{E}\right)$, заданого графічно

1) Знайдемо матрицю суміжності. Елемент a_{ij} матриці суміжності дорівнює 1, якщо вузли v_i і v_j суміжні, і дорівнює 0 в противному випадку.

$$A\left(\vec{G}\right)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Знайдемо півстепені вузлів за властивостями матриці суміжності. Сума елементів i-го рядка матриці суміжності орієнтованого графа дорівнює півстепеню виходу $d^{-}(v_i)$ вузла v_i. Сума елементів i-го стовпця матриці суміжності орієнтованого графа дорівнює півстепеню виходу $d^{+}(v_i)$ вузла v_i. Зведемо знайдені півстепені вузлів у таблицю:

Вузол	$d^{-}(v_i)$	$d^{+}(v_i)$
v_1	3	1
v_2	1	2
v_3	1	3
v_4	2	2
v_5	1	1

3) Знайдемо всі шляхи довжини 2. Оскільки число всіх шляхів довжини k, які з'єднують будь-яку пару вузлів v_i, v_j графа, дорівнює ij-му елементу матриці $A^k\left(\vec{G}\right)$, то для знаходження всіх шляхів довжини 2 піднесемо до другого степеня матрицю суміжності $A = A\left(\vec{G}\right)$:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Оскільки елемент a_{12} в матриці A^2 дорівнює 1, в $\vec{G}$ існує один шлях довжини 2 з вершини v_1 у вершину v_2. Це шлях v_1 ,v_3, v_2.

Аналогічно знаходяться інші шляхи довжини 2.

Зведемо знайдені шляхи довжини 2 у таблицю:

Початок	Кінець	Шлях довжини 2
v_1	v_2	v_1, v_3, v_2
v_1	v_3	v_1, v_4, v_3
v_1	v_4	v_1, v_2, v_4
v_1	v_5	v_1, v_4, v_5
v_2	v_3	v_2, v_4, v_3
v_2	v_5	v_2, v_4, v_5
v_3	v_4	v_3, v_2, v_4
v_4	v_2	$v_4, v_3, v_2,$
v_4	v_3	v_4, v_5, v_3
v_5	v_2	v_5, v_3, v_2

4) Знайдемо матрицю досяжності $R(\vec{G})$. Для цього обчислимо вираз

$$E + A + A^2 + A^3 + A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

і застосуємо до нього булеве відображення:

$$R(\vec{G}) = B(E + A + A^2 + A^3 + A^4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5) Використаємо матрицю досяжності для виявлення компонентів сильної зв’язності графа $\vec{G}$. Знайдемо

$$R^T\left(\vec{G}\right)=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}$$

і обчислимо матрицю $R\left(\vec{G}\right)\otimes R^T\left(\vec{G}\right)$, де $\otimes$ – поелементне множення матриць:

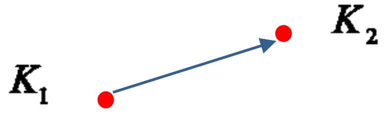
$$R\left(\vec{G}\right)\otimes R^T\left(\vec{G}\right)=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&1&1&1\\0&1&1&1&1\\0&1&1&1&1\\0&1&1&1&1\end{pmatrix}.$$

Ця матриця має блоково-діагональий вигляд, де кожний блок визначає сильну компоненту зв'язності. В графа $\vec{G}$ дві компоненти зв'язності. Так, вершина v_1 складає одну сильну компоненту зв'язності $K_1=\{v_1\}$. Вершини v_2, v_3, v_4, v_5 також складають сильну компоненту зв'язності $K_2=\{v_2,v_3,v_4,v_5\}$.

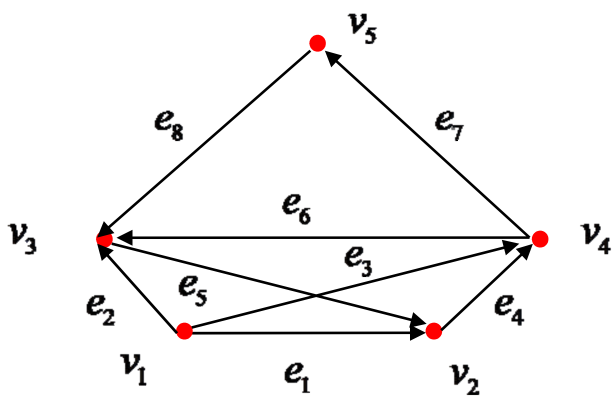
6) Знайдемо матрицю зв'язності:

$$S\left(\vec{G}\right)=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&1&1&1\\0&1&1&1&1\\0&1&1&1&1\\0&1&1&1&1\end{pmatrix}.$$

7) граф конденсації $\vec{G}*$ графа $\vec{G}$ має вигляд:



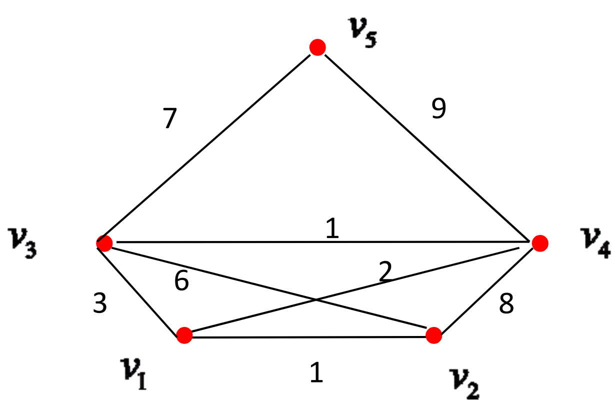
8) Знайдемо матрицю інцидентності $B\left(\vec{G}\right)$ графа $\vec{G}$. Для цього позначимо дуги графа $\vec{G}$ наступним чином:



Елемент b_{ij} матриці інцидентності $B(\vec{G})$ дорівнює -1, якщо дуга (v_i, v_j) виходить з вершини v_i, дорівнює 1, якщо дуга (v_i, v_j) входить у вершину v_i, і дорівнює 0, якщо дуга (v_i, v_j) не є інцидентною вершині v_i.

$$B(\vec{G}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

II. Для зваженого асоційованого графа $G = (V, E)$ (графа, отриманого з $\vec{G}$ скасуванням орієнтації)



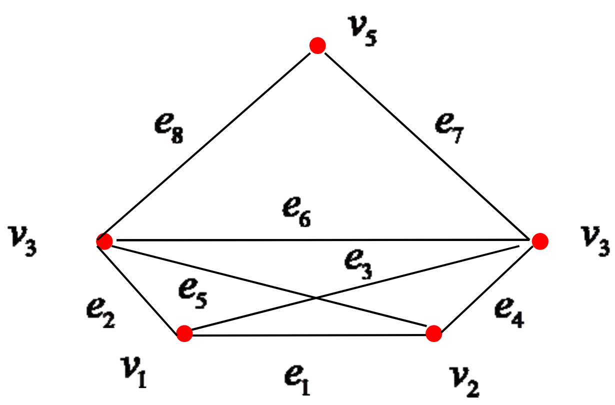
11) Знайдемо матрицю суміжності. Елемент a_{ij} матриці суміжності дорівнює 1, якщо вузли v_i і v_j суміжні, і дорівнює 0 в противному випадку.

$$A(G)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

12) Знайдемо степені вершин за властивостями матриці суміжності. Сума елементів i-го рядка або i-го стовпця матриці суміжності неорієнтованого графа дорівнює степеню $d(v_i)$ вершини v_i. Зведемо знайдені степені вершин у таблицю:

Вершина	$d(v_i)$
v_1	4
v_2	3
v_3	4
v_4	4
v_5	2

13) Знайдемо матрицю інцидентності. Для цього позначимо дуги графа G наступним чином:

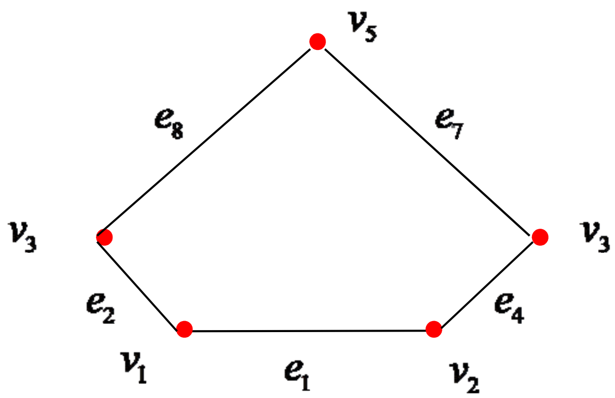


Елемент b_{ij} матриці інцидентності $B(G)$ дорівнює 1, якщо ребро (v_i, v_j) інцидентне вершині v_i, і дорівнює 0, якщо ребро (v_i, v_j) не є інцидентним вершині v_i.

$$B(G)=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\1&0&1&0&0\\1&0&0&1&0\\0&1&0&1&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&1&1\\0&0&1&0&1\end{pmatrix}$$

14) Знайдемо ейлерів цикл. Оскільки в графі G існують вершини з непарним степенем, то ейлерового циклу в графі нема.

Вилучимо з графа G ребра e_3, e_5, e_6.



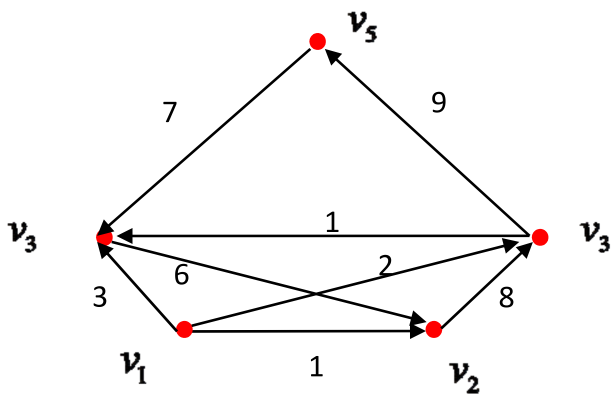
Тоді, наприклад, ейлеровий цикл: v_1, v_2, v_4, v_5, v_3, v_1.

Завдання 2. I. Для зваженого орграфа $\vec{G}=\left(V,\vec{E}\right)$, заданого графічно, знайти:

13) матрицю довжин дуг;
14) мінімальний шлях від вузла v_1 до вузла v_5 за допомогою алгоритму Дейкстри;

II. Для зваженого асоційованого графа $G=(V,E)$ (графа, отриманого з $\vec{G}$ скасуванням орієнтації) знайти:

15) матрицю довжин ребер;
16) мінімальне остовне дерево за допомогою алгоритму Краскала.



Розв'язання.

1) Знайдемо матрицю довжин дуг. Елемент c_{ij} матриці довжин дуг $C\left(\vec{G}\right)$ дорівнює довжині дуги $\left(v_i, v_j\right)$, якщо така дуга існує і дорівнює $\propto$ в протилежному випадку.

$$C\left(\vec{G}\right)=\begin{pmatrix} \propto & 1 & 3 & 2 & \propto \\ \propto & \propto & \propto & 8 & \propto \\ \propto & 6 & \propto & \propto & \propto \\ \propto & \propto & 1 & \propto & 9 \\ \propto & \propto & 7 & \propto & \propto \end{pmatrix}$$

2) Знайдемо мінімальний шлях від вузла v_1 до вузла v_5 за допомогою алгоритму Дейкстри.

Протокол роботи алгоритму будемо оформлювати у вигляді таблиці, яку побудуємо в процесі розв'язування.

Крок 0. Всі вузли помічаються: стартовий вузол v_1 отримує постійну мітку 0, всі інші вузли отримують тимчасові мітки ∞:

$$l^*\left(v_1\right)=0,\ \forall v_j \neq v_1\ \ l\left(v_j\right)=\infty.$$

Ці значення занесемо в нульовий рядок таблиці.

Крок 1. Для вузлів v_2, v_3, v_4 з тимчасовими мітками, в які заходять дуги з вузла v_1 з постійною міткою, оновлюємо мітки:

$$G\left(v_1\right)=\left\{v_2, v_3, v_4\right\};$$

$$l\left(v_2\right)=\min\left\{\infty, 0+1\right\}=1_1;$$

$$l(v_3)=\min\{\infty,0+3\}=3_1;$$

$$l(v_4)=\min\{\infty,0+2\}=2_1;$$

$$l^*(v_2)=\min\{1_1,3_1,2_1\}=1.$$

Постійну мітку отримує вузол v_2.

Ці значення занесемо в перший рядок таблиці.

Крок 2. Для вузла v_4 з тимчасовою мітками, в яку заходить дуга з вузла v_2 з постійною міткою, оновлюємо мітки:

$$G(v_2)=\{v_4\};$$

$$l(v_4)=\min\{2_1,1+8\}=2_2;$$

$$l^*(v_4)=2\ .$$

Постійну мітку отримує вузол v_4.

Ці значення занесемо в другий рядок таблиці.

Крок 3. Для вузлів v_3,v_5 з тимчасовими мітками, в які заходять дуги з вузла v_4 з постійною міткою, оновлюємо мітки:

$$G(v_4)=\{v_3,v_5\};$$

$$l(v_3)=\min\{3_1,2+1\}=3_3$$

$$l(v_5)=\min\{\infty,2+9\}=11_3;$$

$$l^*(v_3)=\min\{3_3,11_3\}=3.$$

Постійну мітку отримує вузол v_3.

Ці значення занесемо в третій рядок таблиці.

Крок 4. З вузла v_3 з постійною міткою не виходять дуги до вузлів з тимчасовими мітками.

$$G(v_3)=\varnothing;$$

$$l(v_5)=\min\{11_3\}=11_4,$$

$$l^*(v_5)=11.$$

Ці значення занесемо в четвертий рядок таблиці.

Таблиця.

Вузли / Кроки	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
0	$\underline{0}$	∞	∞	∞	∞
1	$\underline{0}$	$\underline{1}$	3_1	2_1	∞
2	$\underline{0}$	$\underline{1}$	3_1	$\underline{2}$	∞
3	$\underline{0}$	$\underline{1}$	$\underline{3}$	$\underline{2}$	11_3
4	$\underline{0}$	$\underline{1}$	$\underline{3}$	$\underline{2}$	$\underline{11}$

Всі вузли отримали постійні мітки. Алгоритм завершено:

$$d(v_1,v_2)=1,\ d(v_1,v_3)=3,\ d(v_1,v_4)=2,\ d(v_1,v_5)=11\ .$$

Щоб знайти мінімальний шлях від вузла v_1 до вузла v_5, використаємо тимчасові індекси в постійних міток: у вузла v_5 – 11_4, у вузла v_4 – 2_1. Отже, мінімальний шлях з v_1 до v_5 є s: v_1, v_4, v_5. Його довжина

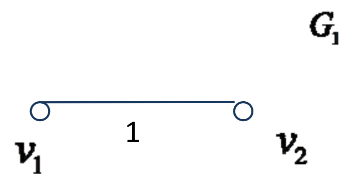
$$l(s)=\sum_{(v_i,v_j)\in s} c(v_i,v_j)=c(v_1,v_4)+c(v_4,v_5)=2+9=11.$$

3) Знайдемо матрицю довжин ребер зваженого асоційованого графа $G=(V,E)$. Елемент c_{ij} матриці довжин дуг $C(G)$ дорівнює довжині ребра (v_i,v_j), якщо таке ребро існує і дорівнює $\propto$ в протилежному випадку.

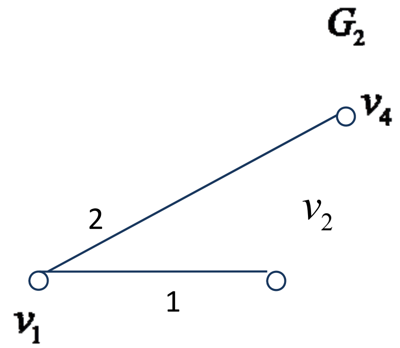
$$C(G)=\begin{pmatrix} \propto & 1 & 3 & 2 & \propto \\ 1 & \propto & 6 & 8 & \propto \\ 3 & 6 & \propto & 1 & 7 \\ 2 & 8 & 1 & \propto & 9 \\ \propto & \propto & 7 & 9 & \propto \end{pmatrix}$$

4) Знайдемо мінімальне остовне дерево за допомогою алгоритму Краскала.

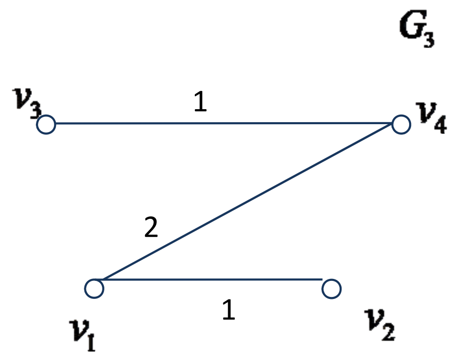
Крок 1. Вибираємо в графі G ребро мінімальної довжини. Ребер мінімальної довжини 1 два: (v_1, v_2), (v_3, v_4). Беремо (v_1, v_2). Будуємо граф G_1, що складається з даного ребра і інцидентних йому вершин. Покладаємо $i = 1$. Оскільки $1 = i \neq n - 1 = 4$, то переходимо до кроку 2.

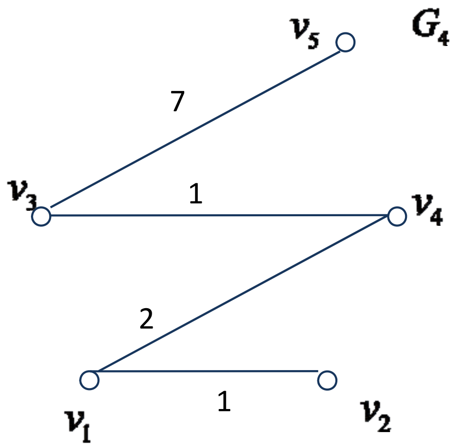


Крок 2. Будуємо граф G_2, додаючи до графа G_1 нове ребро мінімальної довжини, вибране серед всіх ребер графа G, кожне з яких інцидентне одній з вершин v_1, v_2 графа G_1 і одночасно інцидентне якій-небудь вершині графа G, що не міститься в G_1, тобто одній з вершин v_3, v_4, v_5. Таким чином, треба вибрати ребро мінімальної довжини з ребер (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_2, v_3), (v_2, v_4). Ребро мінімальної довжини 2 одне: (v_1, v_4). Разом з цим ребром включаємо в G_2 й інцидентну йому вершину v_4, що не міститься в G_1. Покладаємо $i = 2$. Оскільки $2 = i \neq n - 1 = 4$, то переходимо до кроку 3.



***Крок* 3.** Будуємо граф G_3, додаючи до графа G_2 нове ребро мінімальної довжини, вибране серед всіх ребер графа G, кожне з яких інцидентне одній з вершин v_1, v_2, v_4 графа G_2 і одночасно інцидентне якій-небудь вершині графа G, що не міститься в G_2, тобто одній з вершин v_3, v_5. Таким чином, треба вибрати ребро мінімальної довжини з ребер (v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_5). Ребро мінімальної довжини 1 одне: (v_3, v_4). Разом з цим ребром включаємо в G_3 й інцидентну йому вершину v_3, що не міститься в G_2. Покладаємо $i = 3$. Оскільки $3 = i \neq n - 1 = 4$, то переходимо до кроку 4.





***Крок* 4.** Будуємо граф G_4, додаючи до графа G_3 нове ребро мінімальної довжини, вибране серед всіх ребер графа G, кожне з яких інцидентне одній з вершин v_1, v_2, v_3, v_4 графа G_3 і одночасно інцидентне вершині графа G, що не міститься в G_3, тобто вершині v_5. Таким чином, треба вибрати ребро мінімальної довжини з ребер (v_3, v_5), (v_4, v_5). Ребро мінімальної довжини 7 одне: (v_3, v_5). Разом з цим ребром включаємо в G_4 й інцидентну йому вершину v_5, що не міститься в G_3. Покладаємо $i = 4$. Оскільки $4 = i = n - 1$, то граф G_4 – шукане мінімальне остовне дерево.

ТЕМА 3. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ

Завдання 1 розв’язується з використанням означень елементарних булевих функцій, основних рівносильностей. При знаходженні многочлена Жегалкіна бажано використати хоча б два методи, щоб перевірити відповідь

Завдання 1. Для булевої функції f, заданої формулою:

1) скласти таблицю істинності;

2) знайти ДДНФ і ДКНФ двома способами:

а) за допомогою таблиці,

б) за допомогою рівносильних перетворень.

3) знайти зображення у вигляді многочлена Жегалкіна.

$$f = \left(\overline{xy}\,\&\left(x \to \bar{z}\right)\right) \mid \left(\bar{x} \to y\right)$$

Розв’язання.

1) Побудуємо таблицю істинності даної булевої функції

$$f = \underbrace{\left(\overline{xy}\,\&\left(x \to \bar{z}\right)\right)}_{A} \mid \left(\bar{x} \to y\right)$$

x	y	z	xy	$\overline{xy}$	$\bar{z}$	$x \to \bar{z}$	A	$\bar{x}$	$\bar{x} \to y$	f
0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1 $\vee$
0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1 $\vee$
0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0 $\wedge$
0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0 $\wedge$
1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0 $\wedge$
1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1 $\vee$
1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1 $\vee$
1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1 $\vee$

2) Знайдемо **ДДНФ** двома способами.

а) **за допомогою таблиці**:

1) З таблиці видно, що наборів, на яких функція набуває значення 1, п’ять: $(0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(1,0,1)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$.

2) Для кожного набору утворимо відповідну повну елементарну кон’юнкцію: $x^0y^0z^0$, $x^0y^0z^1$, $x^1y^0z^1$, $x^1y^1z^0$, $x^1y^1z^1$, або

$\bar x\,\bar y\,\bar z$, $\bar x\,\bar y z$, $x\bar y z$, $xy\bar z$, xyz.

3) З'єднаємо отримані повні елементарні кон’юнкції знаками $\vee$:
$f(x,y,z)\equiv \underline{\underline{\bar x\bar y\bar z\vee\bar x\bar y z\vee x\bar y z\vee xy\bar z\vee xyz}}$ – отримали ДДНФ.

б) **за допомогою рівносильних перетворень**:

$f=\left(\overline{xy}\,\&\left(x\to\bar z\right)\right)|\left(\bar x\to y\right)\equiv$ – позбавимося у формулі від входження знаку $|$:

$\equiv\overline{\left(\overline{xy}\,\&\left(x\to\bar z\right)\right)\left(\bar x\to y\right)}\equiv$ – позбавимося у формулі від входження знаку $\to$:

$\equiv\overline{\left(\overline{xy}\,\&\left(\bar x\vee\bar z\right)\right)\left(x\vee y\right)}\equiv$ – доб'ємося того, щоб знак $\bar{\ }$ стояв тільки перед змінними, для чого скористаємося законами де Моргана:

$$\equiv\overline{\left(\overline{xy}\,\&\left(\bar x\vee\bar z\right)\right)}\vee\overline{\left(x\vee y\right)}\equiv$$

$$\equiv\left(\overline{\overline{xy}}\vee\overline{\left(\bar x\vee\bar z\right)}\right)\vee\bar x\bar y\equiv$$

$\equiv\underline{xy\vee xz\vee\bar x\bar y}\equiv$ – отримали ДНФ, елементарні кон’юнкції якої поповнимо до повних:

$\equiv xyz\vee xy\bar z\vee xyz\vee x\bar y z\vee\bar x\bar y z\vee\bar x\bar y\bar z\equiv$ – з однакових членів отриманої диз’юнкції залишаємо тільки один:

$\equiv\underline{\underline{\bar x\bar y\bar z\vee\bar x\bar y z\vee x\bar y z\vee xy\bar z\vee xyz}}$ – отримали ДДНФ.

Знайдемо **ДКНФ** двома способами:

а) за допомогою таблиці істинності.

1) З таблиці видно, що наборів, на яких функція набуває значення 0, три:

$(0,1,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,0)$.

2) Для кожного набору утворимо відповідну повну елементарну диз’юнкцію:

$x^0 \vee y^1 \vee z^0$, $x^0 \vee y^1 \vee z^1$, $x^1 \vee y^0 \vee z^0$, або

$x \vee \overline{y} \vee z$, $\quad x \vee \overline{y} \vee \overline{z}$, $\quad \overline{x} \vee y \vee z$.

3) З'єднаємо отримані повні елементарні диз’юнкції знаками $\&$:

$f(x,y,z) \equiv \underline{\underline{(x \vee \overline{y} \vee z)(x \vee \overline{y} \vee \overline{z})(\overline{x} \vee y \vee z)}}$ – отримали ДКНФ.

б) за допомогою рівносильних перетворень:

$f = \left(\overline{xy} \,\&\, (x \to \overline{z})\right) \mid (\overline{x} \to y) \equiv$ – позбавимося у формулі від входження знаку $\mid$:

$\equiv \overline{\left(\overline{xy} \,\&\, (x \to \overline{z})\right)(\overline{x} \to y)} \equiv$ – позбавимося у формулі від входження знаку $\to$:

$\equiv \overline{\left(\overline{xy} \,\&\, (\overline{x} \vee \overline{z})\right)(x \vee y)} \equiv$ – доб'ємося того, щоб знак $\overline{}$ стояв тільки перед змінними, для чого скористаємося законами де Моргана:

$\equiv \overline{\left(\overline{xy} \,\&\, (\overline{x} \vee \overline{z})\right)} \vee \overline{(x \vee y)} \equiv$

$\equiv \left(\overline{\overline{xy}} \vee \overline{(\overline{x} \vee \overline{z})}\right) \vee \overline{x}\,\overline{y} \equiv$

$\equiv xy \vee xz \vee \overline{x}\,\overline{y} \equiv$ – отримали ДНФ, з якої за дистрибутивністю отримаємо КНФ:

$$\equiv (\underbrace{x \vee \overline{x}}_{1})(x \vee \overline{y})(\overline{x} \vee y \vee z)\left(\underbrace{\underbrace{\overline{y} \vee y}_{1} \vee z}_{1}\right) \equiv$$

$\equiv \underline{\left(x \vee \overline{y}\right)\left(\overline{x} \vee y \vee z\right)} \equiv$ – отримали КНФ, елементарні диз’юнкції якої поповнимо до повних:

$\equiv \underline{\underline{\left(x \vee \overline{y} \vee z\right)\left(x \vee \overline{y} \vee \overline{z}\right)\left(\overline{x} \vee y \vee z\right)}}$ – отримали ДКНФ.

3) Знайдемо зображення даної функції у вигляді многочлена Жегалкіна.

I спосіб. Застосуємо ***метод заміни***, за яким у формулі в ДДНФ робимо заміну $\overline{x} = x \oplus 1$, $\vee = \oplus$.

$f\left(x, y, z\right) \equiv \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}z \vee x\overline{y}z \vee xy\overline{z} \vee xyz \equiv$ – замінимо $\overline{x}$ на $x \oplus 1$, $\vee$ на $\oplus$:

$\equiv \left(x \oplus 1\right)\left(y \oplus 1\right)\left(z \oplus 1\right) \oplus \left(x \oplus 1\right)\left(y \oplus 1\right)z \oplus x\left(y \oplus 1\right)z \oplus xy\left(z \oplus 1\right) \oplus xyz \equiv$

– розкриємо дужки:

$\equiv \left(xyz \oplus xz \oplus yz \oplus z \oplus xy \oplus x \oplus y \oplus 1\right) \oplus \left(xyz \oplus xz \oplus yz \oplus z\right) \oplus$

$\oplus \left(xyz \oplus xz\right) \oplus \left(xyz \oplus xy\right) \oplus xyz \equiv$

$\equiv xyz \oplus xz \oplus yz \oplus z \oplus xy \oplus x \oplus y \oplus 1 \oplus xyz \oplus xz \oplus yz \oplus z \oplus$

$\oplus xyz \oplus xz \oplus xyz \oplus xy \oplus xyz \equiv$ – приведемо подібні, пам’ятаючи, що парне число однакових доданків в сумі за модулем 2 дає 0:

$\equiv \underline{\underline{1 \oplus x \oplus y \oplus xz \oplus xyz}}$ – многочлен Жегалкіна.

II спосіб. Застосуємо ***метод невизначених коефіцієнтів***. Запишемо функцію у вигляді многочлена Жегалкіна від трьох змінних у загальному вигляді:

$$f\left(x, y, z\right) = a_0 \oplus a_1x \oplus a_2y \oplus a_3z \oplus a_4xy \oplus a_5xz \oplus a_6yz \oplus a_7xyz .$$

Визначимо коефіцієнти, використовуючи значення функції на всіх наборах. Підставимо в обидві частини різні значення змінних x, y, z, отримаємо систему рівнянь (одне рівняння для кожного рядка таблиці).

$$\begin{cases} 1 = a_0; \\ 1 = a_0 \oplus a_3; \\ 0 = a_0 \oplus a_2; \\ 0 = a_0 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_6; \\ 0 = a_0 \oplus a_1; \\ 1 = a_0 \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_5; \\ 1 = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_4; \\ 1 = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 \oplus a_5 \oplus a_6 \oplus a_7. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 1; \\ a_1 = 1; \\ a_2 = 1; \\ a_3 = 0; \\ a_4 = 0; \\ a_5 = 1; \\ a_6 = 0; \\ a_7 = 1. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, підставимо знайдені коефіцієнти в многочлен. Отже, $f(x,y,z) = \underline{\underline{1 \oplus x \oplus y \oplus xz \oplus xyz}}$ – многочлен Жегалкіна.

III спосіб. Застосуємо ***метод трикутника Паскаля*** по одиницях його лівої сторони за таблицею істинності функції.

x	y	z	трикутник Паскаля
0	0	0	<u>1</u> 1 0 0 0 1 1 1
0	0	1	0 1 0 0 1 0 0
0	1	0	<u>1</u> 1 0 1 1 0
0	1	1	0 1 1 0 1
1	0	0	<u>1</u> 0 1 1
1	0	1	<u>1</u> 1 0
1	1	0	0 1
1	1	1	<u>1</u>

Верхня сторона трикутника є вектор значень функції. Будь-який інший елемент трикутника є сума за модулем 2 двох сусідніх елементів попереднього рядка. Ліва сторона трикутника містить п'ять одиниць. Отже, многочлен Жегалкіна буде містити п'ять доданків. Перша одиниця трикутника відповідає набору (0 0 0). Отже, перший доданок многочлена Жегалкіна є 1. Друга одиниця трикутника відповідає набору (0 1 0). Отже, другий доданок многочлена Жегалкіна є y. Третя одиниця трикутника відповідає набору (1 0 0). Отже, третій доданок многочлена Жегалкіна є x. Четверта одиниця трикутника відповідає набору (1 0 1). Отже, четвертий доданок многочлена Жегалкіна є xz. П'ята одиниця трикутника відповідає набору (1 1 1). Отже, п'ятий доданок многочлена Жегалкіна є xyz.

Остаточно маємо:

$f(x,y,z) = \underline{\underline{1 \oplus x \oplus y \oplus xz \oplus xyz}}$ – многочлен Жегалкіна.

Завдання № 2. Булеву функцію $f\left(\vec{x}^{4}\right)$, задану переліком десяткових еквівалентів наборів, на яких вона дорівнює одиниці,

1) мінімізувати в класі ДНФ двома методами: Квайна-МакКласкі і Карно-Вейча;
2) реалізувати схемою з функціональних елементів.

$$f\left(\vec{x}^{4}\right)=\vee(1,3,6,7,8,10,14,15)$$

Розв'язання.

а) Мінімізуємо дану булеву функцію методом Квайна-МакКласкі.

I. Одержимо скорочену ДНФ для даної булевої функції, йдучи за алгоритмом Квайна-МакКласкі.

№ набору	Крок 1	Крок 2	Крок 3	Крок 3	Прості імпліканти
1	0001	0001 V	00-1	00-1	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_4$
3	0011	1000 V	10-0	10-0	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_4$
6	0110	0011 V V	0-11	0-11	$\bar{x}_1x_3x_4$
7	0111	0110 V V	011- V	-11-	x_2x_3
8	1000	1010 V V	-110 V	1-10	$x_1x_3\bar{x}_4$
10	1010	0111 V V V	1-10		
14	1110	1110 V V V	-111 V		
15	1111	1111 V V	111- V		

Відповідь: $f\left(\vec{x}^{4}\right)=\bar{x}_1\bar{x}_2x_4\vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_4\vee\bar{x}_1x_3x_4\vee x_2x_3\vee x_1x_3\bar{x}_4$ – СДНФ.

II. Одержимо тупикову ДНФ для даної булевої функції, йдучи за алгоритмом Квайна-МакКласкі.

Побудуємо імплікантну таблицю:

K_i / $(ПІ)_i$	0001	0011	0110	0111	1000	1010	1110	1111	
00-1	1	1	0	0	0	0	0	0	V
10-0	0	0	0	0	1	1	0	0	V
0-11	0	1	0	1	0	0	0	0	
-11-	0	0	1	1	0	0	1	1	V
1-10	0	0	0	0	0	1	1	0	

Ця таблиця має одне покриття, його утворюють перший, другий і четвертий рядки. Отже, тупикова ДНФ

$$f\left(\vec{x}^4\right)=\bar{x}_1\bar{x}_2x_4\vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_4\vee x_2x_3$$

є мінімальною.

Відповідь: $f\left(\vec{x}^4\right)=\bar{x}_1\bar{x}_2x_4\vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_4\vee x_2x_3$ – МДНФ.

б) Мінімізуємо дану булеву функцію методом Карно-Вейча, йдучи за алгоритмом.

1) Сформуємо карту Карно для даної булевої функції f.

x_3	0	0	1	1
x_4	0	1	1	0
x_1 x_2				
0 0	0	1	1	0
0 1	0	0	1	1
1 1	0	0	1	1
1 0	1	0	0	1

2) Знайдемо покриття всіх одиниць функції f прямокутниками максимальних розмірів так, щоб число таких прямокутників було б найменшим.

З таблиці видно, що імпліканти з однієї змінної відсутні, тому що немає двох сусідніх рядків або стовпців, які вміщують тільки одиниці.

Будемо шукати імпліканти з двох і трьох змінних, тобто прямокутники, які являють собою два клітинки з одиницями, що витягнуті в одну лінію, або складені у великий квадрат. Бачимо, що в першому рядку існує прямокутник, який покривається імплікантом з трьох змінних $\overline{x}_1\overline{x}_2x_4$. В другому і третьому рядку і в третьому і четвертому стовпці існує великий квадрат, який покривається імплікантом з двох змінних x_2x_3. В четвертому рядку існує прямокутник, який покривається імплікантом з трьох змінних $x_1\overline{x}_2\overline{x}_4$.

Таким чином, всі одиниці покриті імплікантами.

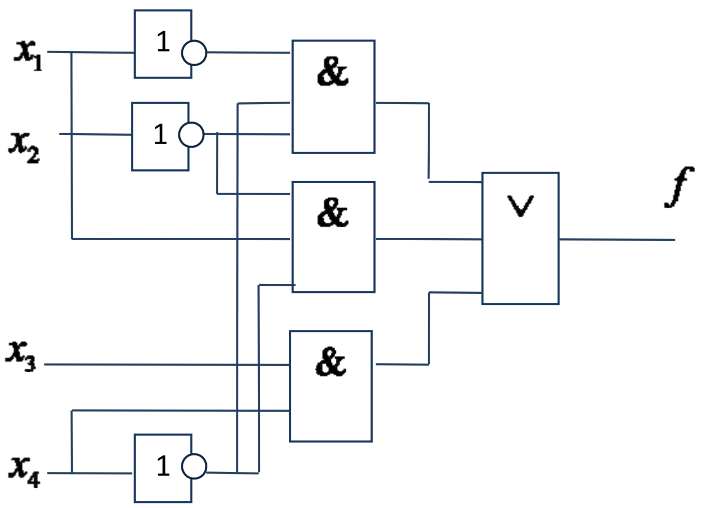
3) Утворимо диз'юнкцію імплікантів, що відповідають прямокутникам покриття:

$$f\left(\vec{x}^4\right)=\overline{x}_1\overline{x}_2x_4\vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_4\vee x_2x_3$$

Таким чином, знайдена мінімальна ДНФ.

2) Реалізуємо схемою з функціональних елементів в стандартному базисі.

Схема, що реалізує дану булеву функцію в системі базисних елементів $\&,\ \vee,\ \overline{}$ має вигляд:



Завдання 3. Для машини Тьюрінга

$$M=\left\{A=\{0,1\},\ Q=\{q_0,q_1,q_2,q_3\},\ C,P,\ q_1,\ q_0,\ 0\right\},$$

заданої програмою P:

1) Записати програму а) у вигляді таблиці; б) у вигляді діаграми переходів.

2) За початковою конфігурацією K_1 знайти заключну конфігурацію K_0.

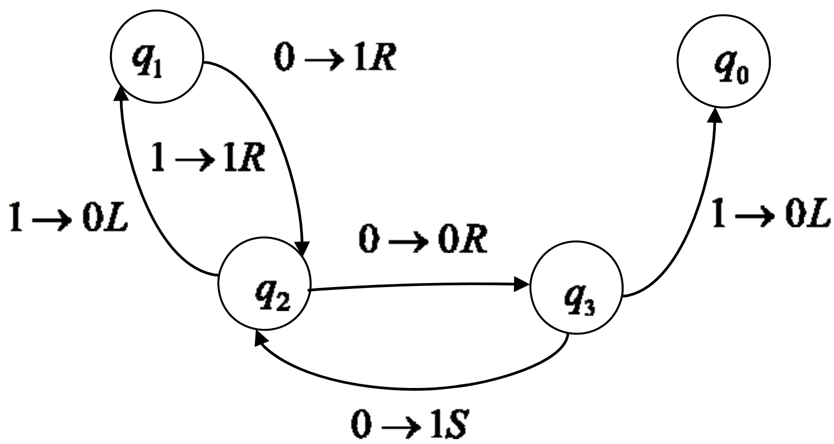
$$\begin{cases} q_1 0 \to q_2 1R, \\ q_1 1 \to q_2 1R, \\ q_2 0 \to q_3 0R, \\ q_2 1 \to q_1 0L, \\ q_3 0 \to q_2 1S, \\ q_3 1 \to q_0 0L. \end{cases}$$

Розв'язання.

1) Запишемо програму а) у вигляді таблиці відповідностей:

$Q \backslash A$	0	1
q_1	$q_2 1R$	$q_2 1R$
q_2	$q_3 0R$	$q_1 0L$
q_3	$q_2 1S$	$q_0 0L$

б) у вигляді діаграми переходів.



2) За початковою конфігурацією $K_1 = q_1 0101$ знайти заключну конфігурацію K_0.

$K_0 = 11q_0 00$

Завдання №4. Побудувати машину Тьюрінга, яка обчислює функцію $f(x) = x + 1$:

$Q \backslash A$	0	1
q_1	$q_2 1L$	$q_1 1R$
q_2	$q_0 0R$	$q_2 1L$

III. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

Завдання 1. Нехай U – множина точок площини, на якій задана прямокутна декартова система координат. Знайти та зобразити на площині множини:

1) $A \cap B$; 2) $A \cup B$; 3) $A \setminus B$; 4) $B \setminus A$; 5) $\overline{A}$; 6) $\overline{B}$; 7) $A \Delta B$.

	$A = \left\{ (x, y) : (x-1)^2 + y^2 \le 1 \right\}$	$B = \left\{ (x, y) : (x-2)^2 + y^2 < 4 \right\}$

Завдання 2. Для бінарного відношення ρ на множині $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$:

1) Записати всі можливі способи задання: а) переліком елементів; б) характеристичною властивістю; в) матрицею, г) графіком, д) графом.

2) Знайти а) область визначення $D(\rho)$, б) область значень $E(\rho)$, в) обернене відношення ρ^{-1}, г) композицію $\rho \circ \rho^{-1}$, д) композицію $\rho^{-1} \circ \rho$, є) декартовий добуток $E\left(\rho^{-1} \circ \rho\right) \times D\left(\rho \circ \rho^{-1}\right)$, е) образ $\rho(a)$, прообраз $\rho^{-1}(b)$.

3) Визначити властивості.

а	$\{(5,1),(4,0),(0,1),(6,4),(5,2),(5,0),(3,0),(3,5)\}$	$\rho(5)$	$\rho^{-1}(1)$
б	$\{(3,1),(3,8),(4,4),(1,0),(2,5),(0,9),(0,7),(2,0)\}$	$\rho(3)$	$\rho^{-1}(0)$

Завдання 3. Визначити, чи є групою множина A відносно операції φ.

а	$A = \left\{ \dfrac{a}{2^k}, a \in Z, k \in N \right\}$	додавання
б	$A = \left\{ a - b\sqrt{5}, a, b \in Z, a^2 + b^2 \neq 0 \right\}$	множення

Завдання 4. Розв’язати задачі: (N=10)

а) На вершину гори ведуть $2N+1$ стежинок. Скількома способами турист може піднятися в гору і потім спуститися з неї? при умові, що підйом і спускання мають відбуватися по різних стежинках?

б) Скількома способами можна розташувати на полиці $N+3$ різних книг, якщо 2 певні книги мають стояти одна біля одної?; якщо 2 певні книги не мають стояти одна біля одної?

в) Скількома способами можна розподілити $3N+16$ студентів на три підгрупи, в першу з яких входять $N+2$ особи, в другу – $N+4$, а в третю – $N+10$ осіб?

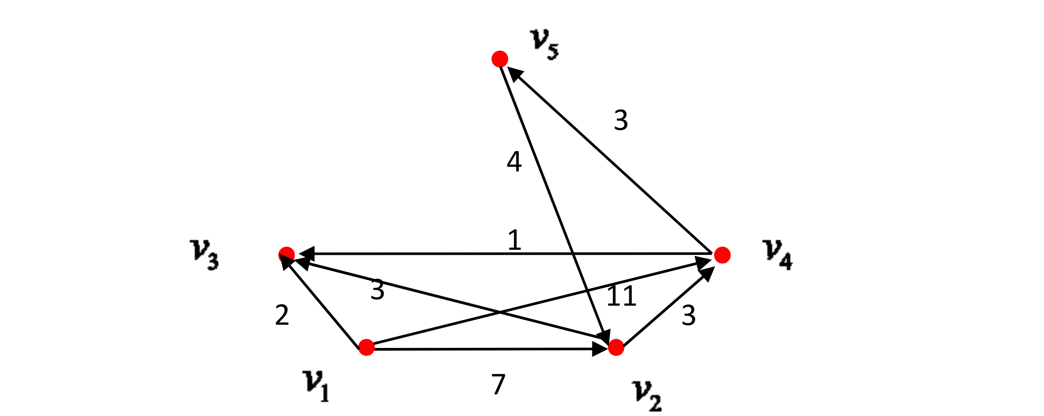
г) Скільки існує різних автомобільних номерів, які складаються з п'яти цифр, якщо перша цифра не дорівнює N?

Завдання 5. I. Для зваженого орграфа $\vec{G}=\left(V,\vec{E}\right)$, заданого графічно, знайти:

1) матрицю суміжності;
2) півстепені вузлів;
3) всі шляхи довжини 2 і 3;
4) матрицю досяжності;
5) компоненти сильної зв'язності;
6) матрицю зв'язності;
7) граф конденсації;
8) матрицю інцидентності;

II. Для зваженого асоційованого графа $G=\left(V,E\right)$ (графа, отриманого з $\vec{G}$ скасуванням орієнтації) знайти:

9) матрицю суміжності;
10) степені вершин;
11) матрицю інцидентності;
12) ейлерів цикл. Якщо такого циклу в графі нема, то вилучити мінімально можливе число дуг, і в новому графі знайти такий цикл

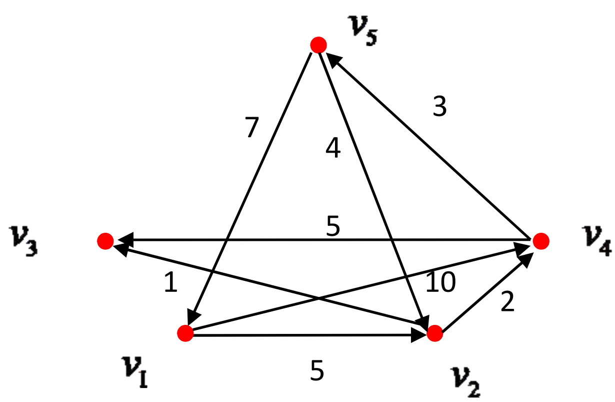


Завдання 6. I. Для зваженого орграфа $\vec{G} = \left(V, \vec{E}\right)$, заданого графічно, знайти:

1) матрицю довжин дуг;
2) мінімальний шлях від вузла v_1 до вузла v_5 за допомогою алгоритму Дейкстри;

II. Для зваженого асоційованого графа $G = (V, E)$ знайти:

3) матрицю довжин ребер;
4) мінімальне остовне дерево за допомогою алгоритму Краскала.



Завдання 7. Для булевої функції $f = x \leftrightarrow \left(y \left(z \mid x\right)\right)$, заданої формулою:

1) скласти таблицю істинності;
2) знайти ДДНФ і ДКНФ двома способами:
   а) за допомогою таблиці,
   б) за допомогою рівносильних перетворень.
3) знайти зображення у вигляді многочлена Жегалкіна.

Завдання 8. Булеву функцію $f\left(\vec{x}^{\,4}\right)$, задану переліком десяткових еквівалентів наборів, на яких вона дорівнює одиниці,

1) мінімізувати в класі ДНФ двома методами: Квайна-МакКласкі і Карно-Вейча;
2) реалізувати схемою з функціональних елементів.

а	1, 2, 3, 7, 11, 12, 15
б	0, 1, 2, 3, 6, 8, 15

Завдання 9. Для машини Тьюрінга

$$M = \{A = \{0,1\}, Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, C, P, q_1, q_0, 0\},$$

заданої програмою P:

1) Записати програму а) у вигляді таблиці; б) у вигляді діаграми переходів.
2) За початковою конфігурацією K_1 знайти заключну конфігурацію K_0.

	$\begin{cases} q_1 0 \to q_1 0R, \\ q_1 1 \to q_2 1R, \\ q_2 0 \to q_3 0L, \\ q_2 1 \to q_2 1R, \\ q_3 0 \to q_0 0S, \\ q_3 1 \to q_4 0L, \\ q_4 0 \to q_3 1L, \\ q_4 1 \to q_4 1L. \end{cases}$	$K_1 = 1^2 q_1 0^2 10$
	$\begin{cases} q_1 0 \to q_2 0R, \\ q_1 1 \to q_1 1R, \\ q_2 0 \to q_0 0L, \\ q_2 1 \to q_3 1R, \\ q_3 0 \to q_4 0L, \\ q_3 1 \to q_3 0R, \\ q_4 0 \to q_4 0L, \\ q_4 1 \to q_0 1S. \end{cases}$	$K_1 = 01 q_1 01^3$

IV. ЗРАЗКИ ТИПОВИХ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ

Модульна контрольна № 1

Варіант 0
Завдання 1. Вказати вірні твердження:
Під множиною розуміють:
1) сукупність деяких об’єктів, які не мають ніяких властивостей;
2) сукупність деяких об’єктів, об’єднаних спільними властивостями;
3) сукупність будь-яких об’єктів, які мають різні властивості.
Завдання 2. Визначити відповідність:
Операція над множинами Символічне означення

1) Переріз А) $\left\{x : x \in A \ i \ x \notin B\right\}$

2) Об’єднання Б) $\left\{x : x \in A \ i \ x \in B\right\}$

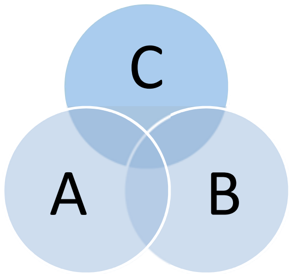
3) Різниця В) $\left\{x : \in A \ або \ x \in B\right\}$

Завдання 3. Вказати вірний пріоритет операцій:
1) $\cap, \cup, \ , \backslash, \Delta$;
2) $, \cap, \cup, \ \backslash, \Delta$;
3) $\cup, \ , \backslash, \Delta, \cap$;
4) $\backslash, \cup, \Delta, \cap, \ $;
5) $, \ \backslash \ , \Delta, \cap, \cup$
Завдання 4. Яке із наступних співвідношень невірне?
1) якщо $A \subset B$ і $B \subset C$, то $A \subset C$;
2) якщо $A \subseteq B$ і $B \subseteq A$, то $A = B$;
3) якщо $A = B$ і $B = C$, то $A = C$;
4) якщо $A \subseteq B$ і $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$;
5) усі співвідношення невірні.
Завдання 5. Який з наведених виразів є тотожним перетворенням заданого:

$A \cup C \cup (B \cup B \cap C) \cap \left(B \cup B \cup C\right)$?

1) $A \cup B \cup C$;
2) $A \cup B \cap C$;
3) $A \setminus C$;
4); $A \cap C$;
5) $B \cap C$

Завдання 6. Який з наведених виразів відповідає діаграмі Ейлера-Венна:



1) $(B \cup C) \cap (A \cap C) \cup (C \cap B \cap B)$;

2) $(A \cap B \cap C) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$;

3) $(A \cup B \cup C) \cap (C \cup B)$;

4) $A \cap B \cup C \cap B$

5) жоден з виразів не відповідає наведеній діаграмі.

Завдання 7. Яка з підмножин множини $A \times B$, де $A = \{2,3,15\}$, $B = \{1,2,4,6,17\}$ є бінарним відношенням R:“>” :

1) $\{(1,2), (1,3), (1,4), (1,17)\}$;

2) $\{(2,1), (3,1), (15,1), (15,17)\}$;

3) $\{(2,1), (3,1), (3,2), (15,1), (15,2), (15,4), (15,6)\}$;

4) $\{(1,2), (1,4), (3,17), (15,2), (15,4), (15,6), (15,17)\}$.

Завдання 8. Нехай $f: A \to B$. Визначити відповідність:

Множина Назва

1) $\{b \in B : b = f(a)\}$ А) область визначення;

2) $\{a \in A : b = f(a)\}$ Б) область значень;

3) $\{a \in A : \exists b \in B \; b = f(a)\}$ В) образ элемента;

4) $\{b \in B : \exists a \in A \; b = f(a)\}$ Г) прообраз элемента;

Завдання 9. Визначити відповідність:

Властивість бінарного відношення Символічне означення

1) рефлексивність; А) $\forall a,b \in A \; a\rho\, b \Rightarrow b\rho\, a$;

2) антирефлексивність; Б) $\forall a,b \in A \; a\rho\, b \; і \; b\rho\, c \Rightarrow a\rho\, c$;

3) симетричність; В) $\forall a \in A a\rho\, a$;

4) асиметричність; Г) $\forall a \in A \; a\rho\, a$;

5) антисиметричність; Д) $\forall a,b \in A \; a \neq b \Rightarrow a\rho\, b \; або \; b\rho\, a$;

6) транзитивность; Е) $\forall a,b\in A\ a\rho b$ *або* $b\rho a$;
7) лінійність; Ж) $\forall a,b\in A\ a\rho b$ *і* $b\rho a \Leftrightarrow a=b$.

Завдання 10. Нехай $\rho \subseteq R_2$. Які з наступних відношень є функціональними:

1) $\rho=\{(x,y) : x_2 = y\}$;
2) $\rho=\{(x,y) : x_2 + y_2 = 1\}$;
3) $\rho=\{(x,y) : \ln x = y\}$.

Завдання 11. Задача.

$n = 2N$ (N –номер студента за списком)

(25+n) екзаменаційних білетів містять по 3 питання, що не повторюються. Студент може відповісти лише на 70 питань. Скількома способами можна скласти екзаменаційні білети, щоб в них входили:

1) лише відомі питання,
2) одне відоме та два невідомих,
3) два відомих та одне невідоме питання,
4) лише невідомі питання.

Модульна контрольна № 2

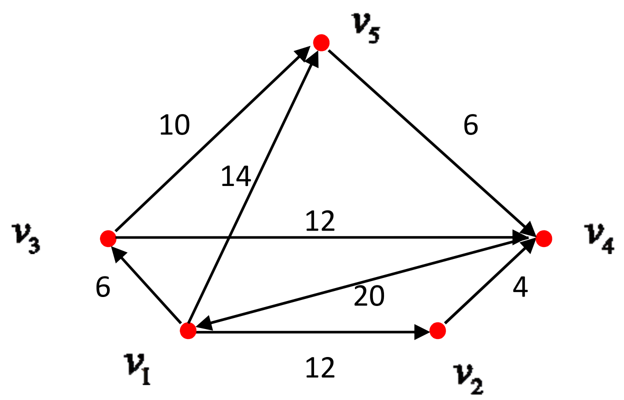
I. Для зваженого орграфа $\vec{G}=\left(V,\vec{E}\right)$, заданого графічно, знайти:

1) матрицю суміжності;
2) півстепені вузлів;
3) всі шляхи довжини 2 і 3;
4) матрицю досяжності;
5) компоненти сильної зв’язності;
6) матрицю зв’язності;
7) граф конденсації;
8) матрицю інцидентності;
9) матрицю довжин дуг;
10) мінімальний шлях від вузла v_1 до вузла v_5 за допомогою алгоритму Дейкстри;

II. Для зваженого асоційованого графа $G=\left(V,E\right)$ (графа, отриманого з $\vec{G}$ скасуванням орієнтації) знайти:

1) матрицю суміжності;
2) степені вершин;
3) матрицю інцидентності;

4) ейлерів цикл. Якщо такого циклу в графі нема, то вилучити мінімально можливе число дуг, і в новому графі знайти такий цикл
5) матрицю довжин ребер;
6) мінімальне остовне дерево за допомогою алгоритму Краскала.

№ варіанта	$\vec{G} = \left(V, \vec{E}\right)$
0	

Модульна контрольна № 3

1. Розв'язування задач:

Завдання 1. Для булевої функції f, заданої формулою:

1) скласти таблицю істинності;

2) знайти ДДНФ і ДКНФ двома способами:

а) за допомогою таблиці,

б) за допомогою рівносильних перетворень.

3) знайти зображення у вигляді многочлена Жегалкіна.

$$\left(\left(x \leftrightarrow y\right) \vee z\right) \to x$$

Завдання 2. Булеву функцію $f\left(\vec{x}^{\,4}\right)$, задану переліком десяткових еквівалентів наборів, на яких вона дорівнює одиниці,

1) мінімізувати в класі ДНФ двома методами: Квайна-МакКласкі і Карно-Вейча;
2) реалізувати схемою з функціональних елементів.
   3, 6, 7, 9, 10, 11, 15

Завдання 3. Для машини Тьюрінга

$$M = \left\{A = \left\{0,1\right\},\, Q = \left\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\right\}, C, P,\, q_1,\, q_0,\, 0\right\},$$

заданої програмою P:

1) Записати програму а) у вигляді таблиці; б) у вигляді діаграми переходів.

2) За початковою конфігурацією K_1 знайти заключну конфігурацію K_0.

№ варіанта	P	K_1
0	$\begin{cases} q_1 0 \to q_1 0R, \\ q_1 1 \to q_2 1R, \\ q_2 0 \to q_3 0L, \\ q_2 1 \to q_2 1R, \\ q_3 0 \to q_0 1S, \\ q_3 1 \to q_4 1L, \\ q_4 0 \to q_3 1R, \\ q_4 1 \to q_4 0L. \end{cases}$	$K_1 = 01q_1 01^2 0$

V. СПИСОК ЗАПИТАНЬ ДЛЯ ПІДГОТОВКИ ДО ІСПИТУ З ДИСКРЕТНОЇ МАТЕМАТИКИ

1 Алгебра множин. Відношення

Предмет та методи дискретної математики. Алгебра множин, основні тотожності. Потужність множини. Скінченні та нескінченні множини. Поняття підмножини.

Операції над множинами. Основні властивості операцій над множинами. Принцип двоїстості.

Елементи теорії відношень. Декартів добуток множин. Бінарне відношення. Функція, як окремий випадок відношення. Операції над відношеннями. Властивості відношень. Відношення еквівалентності.

2 Комбінаторний аналіз

Вступ до комбінаторного аналізу. Загальні правила комбінаторики. Правила суми та добутку. Розміщення, переставлення, поєднання з повтореннями та без них. Перелік та підрахунок вибірок.

Властивості поєднань. Формула включень та виключень.

3. Елементи математичної логіки і теорії алгоритмів

Висловлювання та операції над ними. Алгебра висловлювань. Логічні операції. Правила запису складних формул. Логічні формули та булеві функції.

4. Елементи теорії графів. Основні означення теорії графів

Основні визначення теорії орієнтованих та неорієнтованих графів.

Класифікація шляхів і контурів в орографах, ланцюгів та циклів в графах. Зв’язність, компоненти зв’язності.

Операції з графами. Матричний опис графів: матриці суміжностей і шляхів, матриця інциденцій.

5. Алгоритмічні задачі теорії графів.

Дерева, їх властивості. Знаходження найкоротшого шляху (за довжиною та за вагою) у графі. Формула Ейлера. Ейлерові графи. Знаходження найкоротшего шляху методом Дейкстера.

6. Елементи теорії булевих функцій.

Поняття булевої функції. Способи завдання булевих функцій. Елементарні булеві функції. Реалізація булевих функцій формулами. Рівносильність та тотожність формул. Принцип двоїстості. Диз’юнктивна і кон’юнктивна нормальні форми. Досконалі диз’юнктивна і кон’юнктивна нормальні форми. Приведення булевих функцій до досконалих диз’юнктивних і кон’юнктивних нормальних форм. Повні системи булевих функцій. Зображення булевої функції многочленом Жегалкіна. Замикання і замкнені класи булевих функцій. Критерій повноти системи булевих функцій. Мінімізація булевих функції в класі диз’юнктивних нормальних форм. Реалізація булевих функції схемами з функціональних елементів.

7. Елементи теорії алгоритмів

Інтуїтивне означення алгоритму. Приклади алгоритмів. Блок-схеми алгоритмів. Проблема уточнення поняття алгоритму. Машина Тьюрінга.

Функції, обчислюванні за Тьюрінгом. Теза Тьюрінга. Універсальна машина Тьюрінга. Приклад числової функції, яка не є обчислюванною за Т’юрінгом. Алгоритмічно нерозв'язувані проблеми. Поняття про складність алгоритму.

V. РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Базова

1. Бардачов Ю.М. та ін. Дискретна математика. – К.: Вища школа, 2002. – 287 с.
2. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 416 с.
3. Донской В.И. Дискретная математика. – Симферополь: СОНАТ, 2000. – 360 с.
4. Капітонова Ю.В., Кривий С.Л., Летичевський О.А., та ін. Основи дискретної математики. Підручник. – Київ: Наукова думка, 2002. – 580 с.
5. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженера. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 480 с.
6. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. – М.: Физматлит, 2004. – 256 с
7. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. – СПб: Питер, 2000. – 304 с.
8. Таран Т.А., Мыценко Н.А., Темникова Е.Л. Сборник задач по дискретной математике. – К.: Просвіта, 2001. – 61 с.
9. Тевяшев А.Д., Гусарова И.Г. Основы дискретной математики в примерах и задачах. – Харьков: ХНУРЭ, 2003. – 272 с.
10. Ядренко М.Й. Дискретна математика: навчальний посібник. – К.: МП ”ТВіМС”, 2004. – 245 с.

Допоміжна

11. Биркгоф Г., Барти Т. Современная прикладная алгебра. – М.: Лань, 2005. – 400 с.
12. Виленкин Н.Я., Виленкин А.Н., Виленкин П.А. Комбинаторика. – М.: ФИМА, МЦНМО, 2006. – 400 с.
13. Гиндикин С.Г. Алгебра логики в задачах. – М.: Наука,1972. – 288 с.
14. Игошин В.И. Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов. – М.: Издательский центр «Академия», 2007. – 304 с.
15. Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов. – М.: Издательский центр «Академия», 2008. – 448 с.
16. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. – М.: Наука,1984. – 320 с.
17. Поздняков С.Н., Рыбин С.Н. Дискретная математика. – М.: Издательский центр «Академия», 2008. – 448 с.
18. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера. – Киев: Техника, 1976. – 786 с.
19. Судоплатов С.В., Овчинников Е.В. Элементы дискретной математики: Учебник для втузов. – М.: ИНФРА-М, 2002. – 280 с.

20. Эббинхауз Г.-Д., Якобс К., Ман Ф.К., Хермес Г. Машины Тьюринга и вычислимые функции. – М.: Мир, 1972. – 264 с.
21. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. – М.: Наука,1986. – 384 с.

Інформаційні ресурси

22. Тексти лекцій з дискретної математики (електронний варіант).
23. Електронна бібліотека ДУТ.
24. Інтернет-ресурси:

http://elibrary.ru/ – Научная электронная библиотека.

http://www.scientific-library.net – Электронная библиотека научно-технической литературы.

http://www.allbest/ru/ – Бесплатные электронные библиотеки: математика.

http://www.exponenta.ru/ – Образовательный математический сайт: задачи с решениями, справочник по математике, программы курсов и т.п.

http://www.allmath.ru/ – Электронные материалы по математике.

http://www.mccme.ru/free-books/ – Сайт свободно распространяемых изданий, а также записи лекций, сборники задач.

http://www.matburo.ru/st_subject.php?p=dm – Учебники, On-line ресурсы по дискретной математике.

http://ric.uni-altai.ru/Fundamental/teor-alg – Рыжова Н.И., Голанова А.В., Швецкий М.В., Луценко А.Ю. Теория алгоритмов (электронный учебник).

Навчальне видання

Шевченко Галина Володимирівна

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

Навчально-метдичний посібник