ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙ
КАФЕДРА ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙНИХ СИСТЕМ ТА МЕРЕЖ

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА

на тему: «АЛГОРИТМИ ЦИФРОВОЇ ОБРОБКИ СИГНАЛІВ ДЛЯ ПОКРАЩЕННЯ ЯКОСТІ ЗВ'ЯЗКУ В УМОВАХ ПЕРЕШКОД»

на здобуття освітнього ступеня магістра
зі спеціальності 172 Електронні комунікації та радіотехніка
(код, найменування спеціальності)
освітньо-професійної програми Телекомунікаційні системи та мережі
(назва)

Кваліфікаційна робота містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

_____ Олександр ШЕРИХОВ
(підпис) *(Ім'я ПРІЗВИЩЕ)*

Виконав: здобувач вищої освіти гр. _ТСДМ-62_
Олександр ШЕРИХОВ
Ім'я, ПРІЗВИЩЕ

Керівник: Олександр КРИВОНОСЕНКО
к.т.н., доцент *Ім'я, ПРІЗВИЩЕ*

Рецензент: _____
Ім'я, ПРІЗВИЩЕ

Київ 2025

ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ
Навчально-науковий інститут Телекомунікацій

Кафедра ___Телекомунікаційних систем та мереж_____
Ступінь вищої освіти __магістр_____
Спеціальність ___172 Електронні комунікації та радіотехніка _____
Освітньо-професійна програма _____Телекомунікаційні системи та мережі_____

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри __ТСМ_____
_____ Віктор ЗАЇКА
«____» _____ 2025 р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

Шерихову Олександру Ігоровичу
(прізвище, ім'я, по батькові здобувача)

1. Тема кваліфікаційної роботи: Алгоритми цифрової обробки сигналів для покращення якості зв'язку в умовах перешкод
керівник кваліфікаційної роботи Олександр КРИВОНОСЕНКО, к.т.н., доцент
(Ім'я, ПРІЗВИЩЕ науковий ступінь, вчене звання)
затверджені наказом Державного університету інформаційно-комунікаційних технологій від «30» 10. 2025 р. № 467

2. Строк подання кваліфікаційної роботи «___» _____ 2025 р.

3. Вихідні дані до кваліфікаційної роботи:
1. ЦОС.
2. Покращення якості зв'язку.
3. Перетворення Фур'є.

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)
1. Поняття цифрової обробки сигналів.
2. Перетворення Фур'є для аналізу сигналів.
3. Завадостійке кодування.
4. Згладжування сигналів при цифровій обробці.

5. Перелік ілюстративного матеріалу: ___презентація на____слайдах_____

6. Дата видачі завдання «___» _____ 2025 р.

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№ з/п	Назва етапів кваліфікаційної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та аналіз науково-технічної літератури	20.10.2025	Викон.
2	Розробка першого розділу	27.10.2025	Викон.
3	Розробка другого розділу	07.11.2025	Викон.
4	Розробка третього розділу	17.11.2025	Викон.
5	Розробка четвертого розділу	27.11.2025	Викон.
6	Висновки, вступ, реферат	07.12.2025	Викон.
7	Розробка презентації	17.12.2025	Викон.

Здобувач вищої освіти _____ Олександр ШЕРИХОВ
(підпис) *(Ім'я ПРІЗВИЩЕ)*

Керівник кваліфікаційної роботи _____ Олександр КРИВОНОСЕНКО
(підпис) *(Ім'я ПРІЗВИЩЕ)*

ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ
Навчально-науковий інститут телекомунікацій
ПОДАННЯ
ГОЛОВІ ЕКЗАМЕНАЦІЙНОЇ КОМІСІЇ
ЩОДО ЗАХИСТУ КВАЛІФІКАЦІЙНОЇ РОБОТИ
на здобуття освітнього ступеня магістра

Направляється здобувач Шерихов О.І. до захисту кваліфікаційної роботи
(прізвище та ініціали)
за спеціальністю 172 Електронні комунікації та радіотехніка
(код, найменування спеціальності)
освітньо-професійної програми Телекомунікаційні системи та мережі
(назва)
на тему: «Алгоритми цифрової обробки сигналів для покращення якості зв'язку в умовах перешкод»

Кваліфікаційна робота і рецензія додаються.

Директор ННІТ _____ Владислав КРАВЧЕНКО
(підпис) *(Ім'я, ПРІЗВИЩЕ)*

Висновок керівника кваліфікаційної роботи

Здобувач Шерихов Олександр Ігорович показав гарну теоретичну та інженерну підготовку, уміння володіти новими комп'ютерними технологіями, користуватися навчальною, довідковою і науково-технічною літературою. Працюючи над завданнями, які були поставлені керівником, проявив ініціативність, сумлінність та хист до наукової роботи.

Все це дозволяє оцінити виконану кваліфікаційну роботу здобувача Шерихова Олександра Ігоровича на оцінку «відмінно» та присвоїти йому кваліфікацію магістр з електронних комунікацій та радіотехніки.

Керівник кваліфікаційної роботи _____ Олександр КРИВОНОСЕНКО
(підпис) *(Ім'я, ПРІЗВИЩЕ)*

«____» _____ 20___ року

Висновок кафедри про кваліфікаційну роботу

Кваліфікаційна робота розглянута. Здобувач Шерихов О.І. допускається до захисту даної роботи в Екзаменаційній комісії.

Завідувач кафедри телекомунікаційних систем та мереж _____ Віктор ЗАЇКА
(назва) *(підпис)* *(Ім'я, ПРІЗВИЩЕ)*

«____» _____ 20___ року

ВІДГУК РЕЦЕНЗЕНТА
на кваліфікаційну роботу
на здобуття освітнього ступеня магістра

здобувача вищої освіти Шерихова Олександра Ігоровича
(прізвище, ім'я, по батькові)
на тему «Алгоритми цифрової обробки сигналів для покращення якості зв'язку в умовах перешкод»

Актуальність.
Сучасні телекомунікаційні системи працюють в умовах постійного зростання обсягів даних та підвищення вимог до швидкості, надійності й завадостійкості зв'язку. Однією з ключових проблем залишається негативний вплив різноманітних завад — шумів, імпульсних спотворень, інтерференції та нестабільності каналів зв'язку. Це вимагає розроблення та вдосконалення алгоритмів цифрової обробки сигналів, здатних забезпечити якісний зв'язок у складних умовах. Таким чином, тема роботи є актуальною для розвитку систем 5G/6G, сенсорних мереж, телекомунікаційних модемів та DSP-процесорів, де якість сигналу напряму залежить від ефективності алгоритмів ЦОС.

Позитивні сторони.
1. У роботі розглянуто приклади кодів із перевіркою на парність та коди Хеммінга, що дозволяють виявляти й виправляти одиничні помилки, а також кодів-добутків, які комбінують внутрішнє та зовнішнє кодування для усунення пакетних завад.
2. В роботі проаналізовано різні типи фільтрів, зокрема триточкові та дев'ятиточкові алгоритми, які реалізують операції зваженого сумування відліків сигналу.

Недоліки.
1. У роботі не розглянуто оцінку ефективності роботи алгоритмів за показниками SNR, BER або коефіцієнта енергетичних втрат.
2. У роботі не проведено порівняльного аналізу різних алгоритмів ЦОС (FIR, IIR, FFT, DFT).

Відзначені зауваження не впливають на загальну позитивну оцінку магістерської кваліфікаційної роботи

Висновок: *кваліфікаційна робота на здобуття ступеня магістра заслуговує оцінку "відмінно", а здобувач Шерихов Олександр Ігорович заслуговує присвоєння кваліфікації: магістр з електронних комунікацій та радіотехніки.*

Рецензент
науковий ступінь, вчене звання _____ (підпис) _____ *(Ім'я ПРІЗВИЩЕ)*

РЕФЕРАТ

Текстова частина кваліфікаційної роботи на здобуття освітнього ступеня магістра: 80 стор., 37 рис., 2 табл., 40 джерел.

Мета роботи – дослідження, аналіз та оптимізація алгоритмів цифрової обробки сигналів, спрямованих на підвищення завадостійкості та якості передавання інформації в телекомунікаційних системах, особливо в умовах дії шумів, інтерференції та нестабільності каналів зв’язку.

Об’єкт дослідження – процес цифрової обробки сигналів у телекомунікаційних системах, що включає дискретизацію, квантування, спектральний аналіз, фільтрацію та корекцію спотворень сигналу.

Предмет дослідження – алгоритми та методи обробки сигналів (фільтрація, згладжування, спектральний аналіз, кодування та корекція помилок), що застосовуються для забезпечення стабільності та достовірності сигналів у цифрових каналах зв’язку.

Короткий зміст роботи: у кваліфікаційній роботі досліджено принципи та алгоритми цифрової обробки сигналів, спрямовані на підвищення якості зв’язку в умовах завад. Розглянуто математичні моделі дискретних сигналів, методи згладжування, фільтрації, кодування та корекції помилок. Особливу увагу приділено вибору вагових коефіцієнтів фільтрів і амплітудно-частотних характеристик, що визначають ефективність усунення шумів. Проаналізовано симетричні та просторові фільтри, коди Хеммінга та коди-добутки, які забезпечують виявлення і виправлення помилок. Проведено оцінку частотних та енергетичних характеристик алгоритмів ЦОС. Показано, що оптимізовані фільтри й адаптивне кодування є основою створення високоякісних телекомунікаційних систем, зокрема перспективних технологій 5G і 6G.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: ЦИФРОВА ОБРОБКА СИГНАЛІВ, ФІЛЬТРАЦІЯ, ЗГЛАДЖУВАННЯ, СПЕКТРАЛЬНИЙ АНАЛІЗ, ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР’Є, ДИСКРЕТИЗАЦІЯ, АЦП, ЦАП, КОДИ ХЕММІНГА, КОДИ-ДОБУТКИ, КОРЕКЦІЯ ПОМИЛОК, ЗАВАДОСТІЙКІСТЬ, ШУМ, DSP, SNR, 5G, 6G

ABSTRACT

Text part of the master's qualification work: 80 pages, 37 figures, 2 table, 40 sources.

The purpose of the work is to study, analyze and optimize digital signal processing algorithms aimed at improving noise immunity and the quality of information transmission in telecommunication systems, especially in conditions of noise, interference and instability of communication channels.

Object of the research is the process of digital signal processing in telecommunication systems, which includes discretization, quantization, spectral analysis, filtering and correction of signal distortions.

Subject of the research is algorithms and methods of signal processing (filtering, smoothing, spectral analysis, coding and error correction) used to ensure the stability and reliability of signals in digital communication channels.

Summary of the work: the qualification work investigates the principles and algorithms of digital signal processing aimed at improving the quality of communication in conditions of interference. Mathematical models of discrete signals, methods of smoothing, filtering, coding and error correction are considered. Particular attention is paid to the selection of filter weighting coefficients and amplitude-frequency characteristics that determine the efficiency of noise removal. Symmetric and spatial filters, Hamming codes, and product codes that provide error detection and correction are analyzed. The frequency and energy characteristics of DSP algorithms are evaluated. It is shown that optimized filters and adaptive coding are the basis for creating high-quality telecommunication systems, in particular, promising 5G and 6G technologies.

KEYWORDS: DIGITAL SIGNAL PROCESSING, FILTERING, SMOOTHING, SPECTRAL ANALYSIS, FOURIER TRANSFORM, DISCRETIZATION, ADC, DAC, HAMMIN CODES, PRODUCT CODES, ERROR CORRECTION, IMMUNITY, NOISE, DSP, SNR, 5G, 6G

ЗМІСТ

ВСТУП 9
РОЗДІЛ 1 ПОНЯТТЯ ЦИФРОВОЇ ОБРОБКИ СИГНАЛІВ 11
1.1 Аналогова обробка сигналів 11
1.2 Усунення проблем за допомогою ЦОС 14
1.3 Роль цифро-аналогового перетворювача 18
РОЗДІЛ 2 ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є ДЛЯ АНАЛІЗУ СИГНАЛІВ 22
2.1 Перетворення Фур'є та спектр сигналу 22
2.2 Безперервна функція та її подання за допомогою ряду Фур’є 27
2.3 Практичне застосування 29
РОЗДІЛ 3 ЗАВАДОСТІЙКЕ КОДУВАННЯ 44
3.1 Використання коду Хеммінга 44
3.2 Варіація кодів Хеммінга в ЦОС 51
3.3 Альтернативне завадостійке кодування 58
РОЗДІЛ 4 ЗГЛАДЖУВАННЯ СИГНАЛІВ ПРИ ЦИФРОВІЙ ОБРОБЦІ 66
4.1 Математичні моделі цифрових сигналів 66
4.2 Характеристики сигналів в сфері ЦОС 67
4.3 Зображення в сфері ЦОС 74
ВИСНОВКИ 79
ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ 81
ДЕМОНСТРАЦІЙНІ МАТЕРІАЛИ 85

ВСТУП

Сучасні телекомунікаційні системи функціонують в умовах постійного зростання обсягів переданої інформації, підвищення вимог до швидкості, надійності та якості зв’язку. Одним із головних факторів, що впливають на ефективність передавання даних, є наявність різноманітних завад — шумів, імпульсних спотворень, інтерференції та нестабільності каналів зв’язку. У зв’язку з цим надзвичайно важливим завданням стає розроблення й удосконалення алгоритмів цифрової обробки сигналів (ЦОС), які дозволяють мінімізувати вплив цих чинників і забезпечити стабільну роботу комунікаційних систем навіть у складних умовах.

Цифрова обробка сигналів сьогодні є основою більшості інформаційно-комунікаційних технологій. Вона широко застосовується в системах мобільного та супутникового зв’язку, безпроводових мережах, радіолокаційних і оптичних системах, а також у технологіях зберігання та передавання мультимедійних даних. Завдяки розвитку мікропроцесорної техніки та програмно-керованих систем з’явилася можливість реалізовувати складні алгоритми обробки сигналів у реальному часі, що відкриває нові можливості для підвищення завадостійкості та якості зв’язку.

Особливу роль у підвищенні надійності комунікацій відіграють алгоритми фільтрації, згладжування та кодування. Вони дозволяють зменшувати рівень шумів, виправляти спотворення, спричинені середовищем передавання, та відновлювати корисну інформацію. Розвиток цих методів пов’язаний із необхідністю аналізу їхніх частотних, фазових та імпульсних характеристик, що забезпечує можливість глибокого математичного опису процесів обробки сигналів. Серед таких підходів значне місце займають вагові алгоритми згладжування, які дозволяють гнучко налаштовувати чутливість фільтра до різних частотних складових сигналу.

У роботі розглядаються принципи побудови ефективних алгоритмів цифрової обробки сигналів, що базуються на теоретичних основах дискретної математики, теорії сигналів і спектрального аналізу. Окрему увагу приділено методам

завадостійкого кодування, зокрема кодам Хеммінга, кодам із перевіркою на парність і кодам-добуткам, які забезпечують виявлення та виправлення помилок при передачі цифрової інформації. Показано взаємозв’язок між алгоритмами фільтрації та кодування, що дозволяє створювати комплексні рішення для підвищення достовірності переданих сигналів.

Метою дипломної роботи є дослідження, аналіз та оптимізація алгоритмів цифрової обробки сигналів, спрямованих на підвищення якості зв’язку в умовах дії завад. Для досягнення поставленої мети розглянуто методи усунення шумів і спотворень у сигналах, оцінено вплив параметрів фільтрації на збереження корисної інформації, а також проаналізовано можливості корекції помилок у процесі передавання даних.

Отримані результати дослідження можуть бути використані при проектуванні сучасних телекомунікаційних систем, зокрема систем мобільного зв’язку п’ятого та шостого покоління (5G і 6G), у безпроводових сенсорних мережах, радіоканалах передачі даних і системах цифрового відеоспостереження. Практична цінність роботи полягає у формуванні науково обґрунтованих рекомендацій щодо реалізації алгоритмів ЦОС, які забезпечують стійкість сигналів до завад та покращують якість комунікації в реальних умовах функціонування мереж.

1 ПОНЯТТЯ ЦИФРОВОЇ ОБРОБКИ СИГНАЛІВ

1.1 Аналогова обробка сигналів

Щоб глибше усвідомити переваги цифрової обробки сигналів (ЦОС), насамперед варто звернутися до традиційного підходу — аналогової обробки сигналів. Саме порівняння з нею дозволяє побачити, наскільки цифрові технології розширили можливості сучасних систем передавання, фільтрації та аналізу сигналів. Аналогова обробка базується на безперервних фізичних процесах, у яких сигнал зберігає свою початкову форму у вигляді електричних коливань або напруги. Цей підхід має історичне значення, однак із розвитком обчислювальної техніки він поступово поступився місцем цифровим методам, що забезпечують більшу точність, стабільність і гнучкість у керуванні параметрами сигналу.

Одним із найпростіших і водночас показових прикладів аналогової обробки сигналів можна вважати знайому кожному RC-ланку (резисторно-конденсаторне коло), зображену на рисунку 1.1.

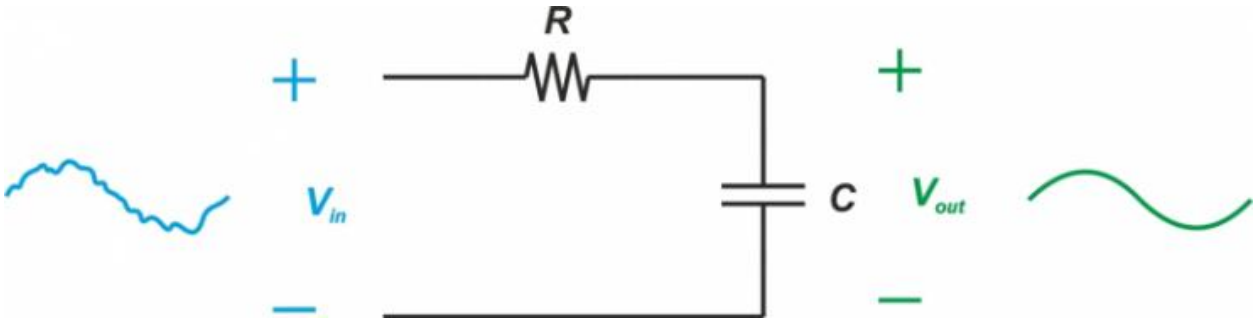


Рис. 1.1 RC-ланка

Таке електричне коло виконує функцію фільтра нижніх частот. Його принцип дії полягає у тому, що воно пригнічує (або відсікає) високочастотні складові сигналу, які перевищують певну порогову частоту – так звану частоту зрізу, – та пропускає компоненти нижчих частот, які є більш корисними для подальшого аналізу чи відтворення. Завдяки цьому RC-ланка дозволяє зменшити рівень високочастотного шуму й виділити основну, інформативну частину сигналу, що і є головною метою процесу обробки.

Слід зазначити, що і вхідний, і вихідний сигнали в цій системі мають аналогову природу – вони існують у вигляді безперервних електричних коливань напруги або струму. Це є однією з ключових переваг аналогової обробки, адже більшість сигналів, що виникають у природних і технічних процесах (наприклад, звукові коливання, температурні зміни, електромагнітні хвилі тощо), за своєю суттю аналогові.

Таким чином, під час аналогової обробки немає потреби у використанні додаткових інтерфейсних пристроїв, таких як аналогово-цифрові (АЦП) чи цифрово-аналогові перетворювачі (ЦАП), які необхідні у цифрових системах. Це робить аналогову обробку простішою з точки зору реалізації, хоча й обмежує її точність та гнучкість у порівнянні з цифровими методами.

Недоліки аналогової обробки сигналів

Одним із головних недоліків аналогової обробки сигналів є нестабільність параметрів електричних компонентів, від яких залежить робота схеми. Аналогові системи чутливі до точності та стабільності активних і пасивних елементів — таких як резистори, конденсатори, котушки індуктивності чи підсилювачі. Будь-які відхилення у їхніх характеристиках, спричинені, наприклад, зміною температури, старінням матеріалів або похибками виготовлення, можуть призвести до помітного спотворення сигналу чи зміни частотних властивостей системи.

Так, наприклад, частота зрізу (f_C) для зазначеного фільтра нижніх частот визначається за конкретними параметрами резистора та конденсатора. Навіть незначна зміна їхніх номіналів впливає на положення цієї частоти, що ускладнює точне відтворення або повторення характеристик схеми в різних умовах експлуатації.

$$f_C = \frac{1}{2\pi RC} \tag{1.1}$$

Як можна помітити, характеристика роботи фільтра безпосередньо залежить від параметрів його елементів. Це означає, що навіть незначна зміна значення резистора чи конденсатора призводить до змін у поведінці всієї схеми. Оскільки

електричні компоненти не можуть бути виготовлені з абсолютною точністю, то й точність аналогових схем завжди має певні обмеження. Через допустимі відхилення (толеранси) елементів робочі параметри схеми змінюються від зразка до зразка, тому її характеристики не є повністю відтворюваними. Іншими словами, навіть дві однакові схеми, зібрані за тим самим принципом, можуть показувати трохи різні результати через фізичні неточності компонентів.

Ще одним вагомим недоліком аналогової обробки сигналів є обмежена гнучкість таких систем. Наприклад, щоб змінити частотну характеристику вже згаданого фільтра нижніх частот, необхідно фізично змінити номінали компонентів – замінити резистор або конденсатор на інший, що означає модифікацію самої апаратної частини. Це складний і малоефективний процес, особливо коли потрібно реалізовувати адаптивні або багатофункціональні системи.

На відміну від цього, у випадку цифрової обробки сигналів (ЦОС) усі параметри можна змінювати програмно, без будь-якого втручання в апаратну частину. Лише коригуючи цифрові коефіцієнти, можна не тільки змінювати частоту зрізу фільтра, а й перетворювати фільтр нижніх частот на фільтр верхніх, смугових чи загороджувальних частот. Така гнучкість є однією з ключових переваг цифрових систем, адже вона дозволяє швидко пристосовувати схему до різних умов і завдань без зміни фізичних елементів.

Крім того, аналогові схеми майже непридатні для реалізації складних математичних операцій, таких як множення, ділення чи інтегрування у реальному часі. Для цього потрібні додаткові спеціалізовані вузли, що ускладнює схему і знижує її стабільність. У цифрових системах ці завдання вирішуються значно простіше — за допомогою обчислювальних алгоритмів, що дозволяють реалізовувати не лише базові математичні дії, а й складні обчислювальні процеси, адаптивні фільтри, спектральний аналіз та навіть елементи штучного інтелекту.

Отже, можна підсумувати, що хоча аналогова обробка сигналів залишається важливою в окремих прикладних областях, цифрові методи мають набагато більшу точність, стабільність і функціональну гнучкість, що робить їх основою сучасних телекомунікаційних і обчислювальних систем.

1.2 Усунення проблем за допомогою ЦОС

Цифрові схеми позбавлені більшості обмежень, характерних для аналогових систем.

Наприклад, хоча зміни в номіналах компонентів або вплив паразитних ємностей і індуктивностей можуть дещо змінити часову затримку в елементах типу CMOS-інвертора, загальна логічна функція такого вузла залишається незмінною. Це означає, що цифрові схеми є набагато менш чутливими до варіацій параметрів компонентів, впливу температури чи шумів, які у випадку аналогових систем могли б суттєво спотворити сигнал або навіть порушити роботу всієї схеми.

Такі системи вирізняються високою стабільністю та повторюваністю результатів, оскільки їхня робота базується не на безперервних аналогових рівнях, а на дискретних логічних станах – зазвичай двох рівнях напруги, що представляють “0” та “1”. Завдяки цьому цифрові пристрої набагато менше схильні до похибок через зміни фізичних параметрів і забезпечують стабільну роботу навіть у різних умовах навколишнього середовища.

Крім того, цифрові схеми мають значно більшу гнучкість у реалізації математичних операцій. Використовуючи алгоритмічні методи обчислень, вони легко виконують додавання, множення, ділення, інтегрування, перетворення Фур’є та інші складні обробки сигналів, що практично неможливо реалізувати на класичних аналогових компонентах без істотного ускладнення схеми. Саме це робить цифрову обробку сигналів основою сучасних технологій зв’язку, аудіо- та відеообробки, систем управління та телекомунікацій.

Однак для роботи в цифровій області виникає інше питання: як поєднати цифрові схеми з реальним світом, де всі сигнали мають аналогову природу? Відповідь полягає у використанні спеціальних пристроїв – аналогово-цифрових (АЦП) та цифрово-аналогових перетворювачів (ЦАП). Як показано на рисунку 2, вони розташовуються відповідно на вході та виході цифрового блока обробки сигналів.

АЦП перетворює безперервний аналоговий сигнал у дискретну цифрову форму, придатну для обробки мікропроцесором або цифровим сигнальним процесором (DSP). Після обробки отримані результати знову проходять через ЦАП, який повертає сигнал у аналогову форму, щоб його можна було використовувати в реальному світі – наприклад, для відтворення звуку, передавання по каналу зв'язку чи керування технічними пристроями.

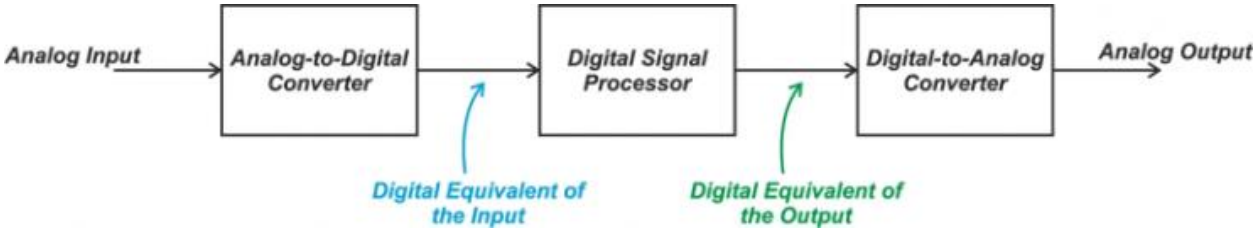


Рис. 1.2 Аналого-цифрові (А/Ц) та цифро-аналогові (Ц/А) перетворювачі на вході та виході блоку обробки сигналів

АЦП здійснює вибірку (дискретизацію) аналогового вхідного сигналу через рівні проміжки часу, як показано на рисунку 1.3. Це означає, що безперервний сигнал перетворюється у послідовність окремих відліків, кожен з яких відображає миттєве значення амплітуди сигналу в певний момент часу. Такий процес є першим і необхідним етапом переходу від аналогової до цифрової форми представлення сигналів.

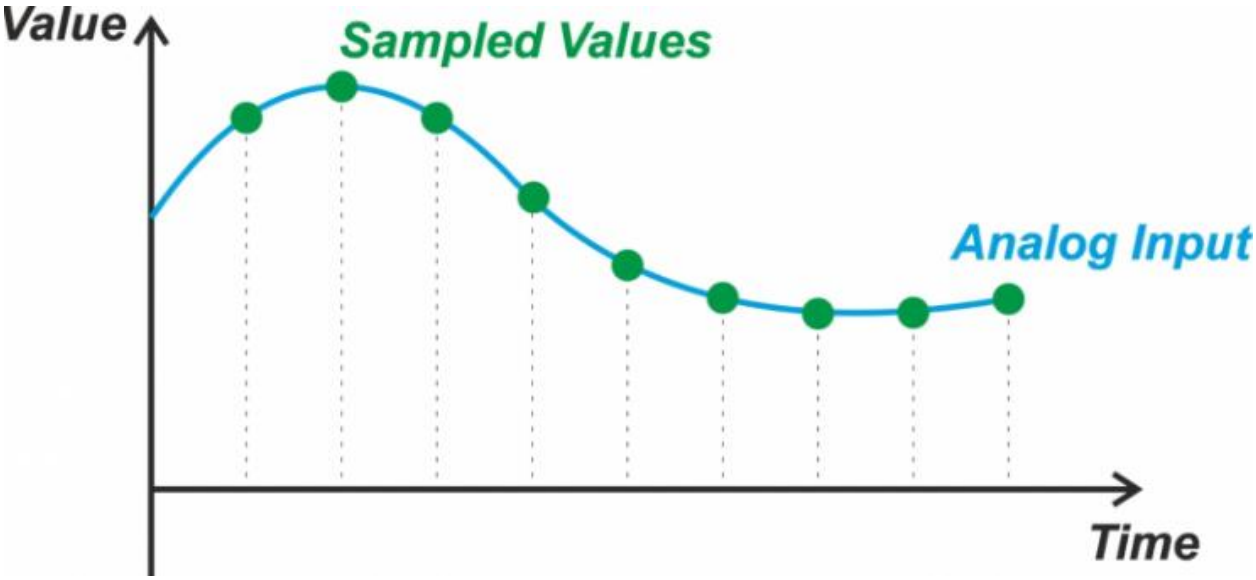


Рис. 1.3 Вибірка аналогового вхідного сигналу через рівні проміжки часу

Після цього АЦП перетворює амплітуду кожного відліку на певні дискретні рівні. На рисунку 1.4 показано приклад, як 4-бітовий аналогово-цифровий

перетворювач може представити аналоговий вхідний сигнал у вигляді набору квантизованих рівнів, кожен з яких відповідає певному двійковому коду. Таким чином, безперервна амплітуда сигналу набуває цифрової форми, придатної для подальшої математичної обробки.

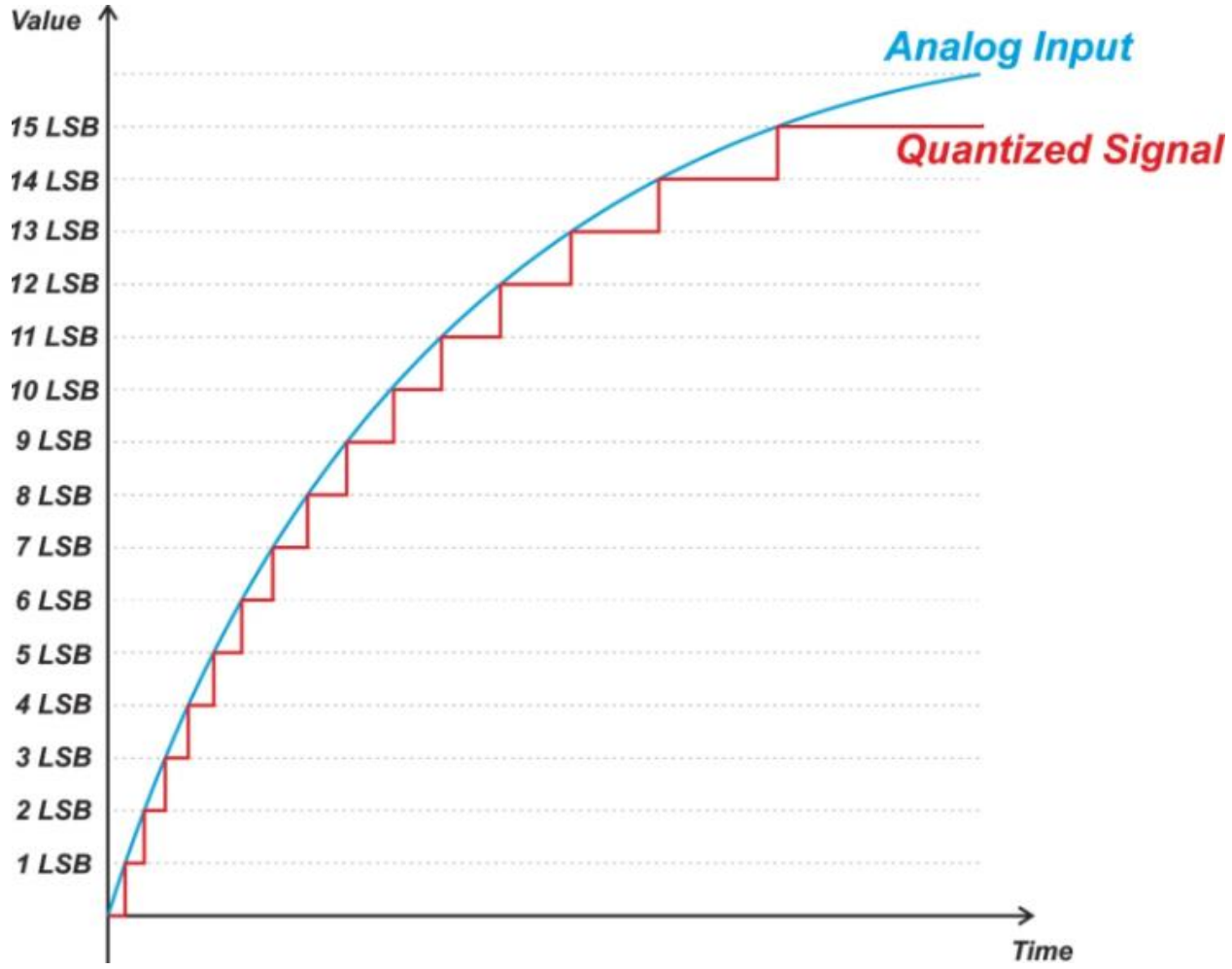


Рис. 1.4 Ілюстрація показує, як 4-бітний АЦП може перетворити аналоговий вхід на дискретні рівні

На цьому рисунку аналоговий вхідний сигнал (позначений синьою кривою) змінює свою амплітуду в межах діапазону, який може обробляти аналогово-цифровий перетворювач (АЦП). Якщо розглянути приклад 4-бітового АЦП, то він здатний розділити весь діапазон можливих значень сигналу на 16 дискретних рівнів. Саме до одного з цих рівнів і «прив’язується» кожне миттєве значення сигналу під час квантування.

Ці рівні, як видно з рисунка, представлені у вигляді кратних значень МЗР (мінімального значущого розряду). МЗР визначає найменшу зміну амплітуди

аналогового сигналу, яку АЦП може розпізнати. Іншими словами, якщо зміна сигналу менша за одне значення МЗР, то перетворювач не зафіксує її, і вихідний цифровий код залишиться незмінним. Таким чином, МЗР визначає точність квантування: чим він менший, тим вища роздільна здатність АЦП і точніше цифрове представлення сигналу.

Тепер розглянемо, як саме АЦП формує двійковий код для кожного відліку сигналу. У процесі перетворення АЦП порівнює амплітуду аналогового сигналу з усіма доступними дискретними рівнями квантування. На основі цього порівняння визначається, до якого рівня належить поточне значення сигналу. Потім цьому рівню присвоюється певний двійковий код.

Наприклад, для синьої кривої, показаної на рисунку 1.4, процес квантування (порівняння сигналу з дискретними рівнями) призводить до отримання червоної сходинкової лінії. Вона є цифровим наближенням реального аналогового сигналу. Кожна сходинка відповідає одному з 16 можливих рівнів. Якщо, наприклад, амплітуда сигналу дорівнює 4·МЗР, то вихід 4-бітового АЦП матиме двійковий код 0100.

Слід також звернути увагу, що цифровий сигнальний процесор (ЦСП), зображений на рисунку 1.2, отримує послідовність відліків у дискретні моменти часу. Це пояснюється тим, що АЦП проводить вибірку сигналу з певним періодом дискретизації, який визначає частоту, з якою знімаються відліки. Крім того, амплітуда кожного з цих відліків представлена дискретним числовим рівнем, що ще раз підкреслює відмінність цифрової обробки сигналів від аналогової.

У аналогових системах сигнал є безперервним у часі та за амплітудою, тобто може приймати будь-які значення в заданому діапазоні. У цифрових системах, навпаки, сигнал має дискретну структуру – і за часом, і за рівнем амплітуди. Саме це дає можливість виконувати складну математичну обробку сигналів за допомогою обчислювальних пристроїв, забезпечуючи високу точність, стабільність та гнучкість сучасних телекомунікаційних систем.

1.3 Роль цифро-аналогового перетворювача

Після того як сигнал пройшов етап цифрової обробки у блоці «Цифровий процесор сигналів (ЦСП)», зазвичай виникає потреба повернути його у аналогову форму, щоб надалі використовувати у реальних пристроях або системах. Саме цю функцію виконує цифро-аналоговий перетворювач (ЦАП). Він приймає на вхід послідовність числових (дискретних) значень, отриманих у результаті цифрової обробки, та перетворює їх у безперервний аналоговий сигнал, який можна подати, наприклад, на динаміки, підсилювачі чи інші аналогові системи.

Як показано на рисунку 1.5, ЦАП широко використовується в аудіообробці. У таких системах цифрова обробка сигналів може застосовуватися для додавання ефекту реверберації (exo), зміни тембру, регулювання темпу чи висоти звуку голосу з метою отримання чистого, гармонійного звучання. Після обробки всі ці модифікації знову перетворюються на аналоговий сигнал за допомогою ЦАП, який відтворюється через акустичні системи — динаміки або навушники. Таким чином, ЦАП виступає важливою ланкою між цифровими алгоритмами та реальним фізичним світом.

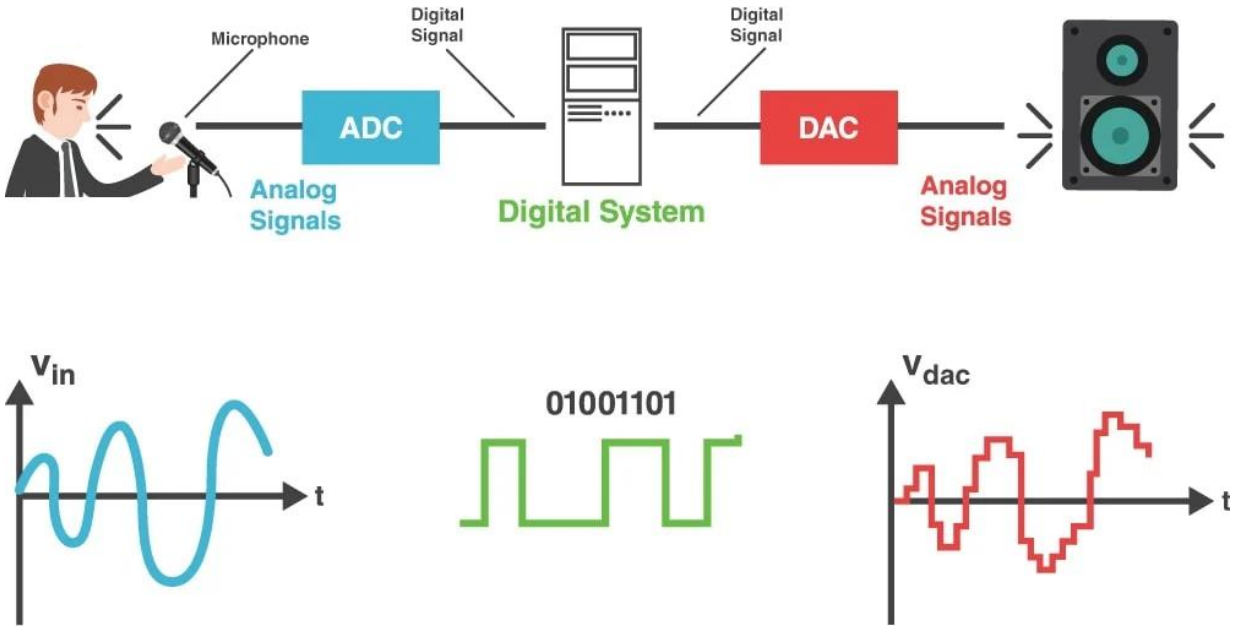


Рис. 1.5 Роль ЦАП

Варто зауважити, що не всі застосування цифрової обробки сигналів потребують ЦАП. Наприклад, у радіолокаційних системах (радарі) результати

обчислень не завжди подаються у вигляді аналогового сигналу. Цифровий процесор може обробляти відбиті хвилі, аналізувати отримані дані й видавати інформацію про положення, швидкість або напрям руху літака у цифровій формі. Такі результати можна просто вивести на дисплей або роздрукувати, без необхідності перетворювати їх назад у аналоговий вигляд.

Роль ЦАП полягає у забезпеченні зворотного зв’язку між цифровими системами обробки та фізичними процесами, що дозволяє відтворювати результати цифрових обчислень у зрозумілій для людини формі. У поєднанні з АЦП він утворює замкнене коло цифрової обробки сигналів, яке дає змогу не лише аналізувати, а й модифікувати сигнали будь-якої природи з високою точністю та ефективністю.

Основою цифрової обробки сигналів (ЦОС) є алгоритм, який складається з послідовності математичних операцій над відліками сигналу. Для прикладу, фільтр із кінцевою імпульсною характеристикою (КІХ) четвертого порядку вимагає наявності п’яти цифрових помножувачів, чотирьох суматорів та кількох елементів затримки, які забезпечують правильне формування вихідного сигналу на основі попередніх значень. На схемах такі елементи зображаються у вигляді обчислювального ланцюга, де кожна операція відповідає певному кроку математичного алгоритму.

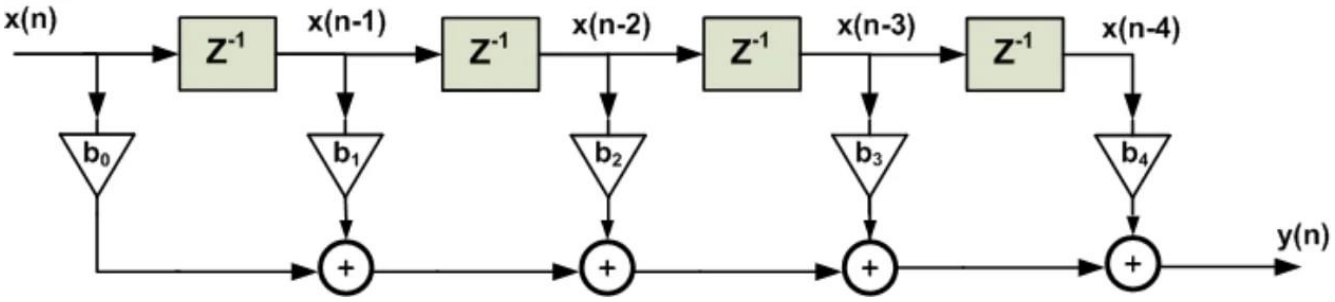


Рис. 1.6 Блок ЦОС

Отже, цифровий сигнальний процесор (ЦСП) по суті є обчислювальним ядром — пристроєм, здатним виконувати велику кількість арифметичних операцій у режимі реального часу. Це ядро може бути реалізоване по-різному:

- у вигляді універсального мікропроцесора,
- програмованої логічної інтегральної схеми (ПЛІС),

- або як спеціалізований мікросхемний модуль ЦОС (DSP-чип).

Кожен із цих варіантів має свої переваги та недоліки. Універсальні процесори забезпечують гнучкість і простоту програмування, але поступаються у швидкодії спеціалізованим DSP-чипам. ПЛІС, у свою чергу, дозволяє створювати індивідуальні архітектури обробки, оптимізовані під конкретне завдання, але потребує глибших знань апаратного програмування. Спеціалізовані цифрові процесори, натомість, забезпечують максимальну швидкість та енергоефективність, але мають обмежену універсальність.

Оскільки обчислювальні ресурси є надзвичайно цінними, у ЦОС активно використовуються оптимізовані методи реалізації алгоритмів. Мета таких підходів — мінімізувати кількість арифметичних операцій і зменшити споживання енергії, зберігаючи при цьому високу точність і продуктивність. Для прикладу, один і той самий КІХ-фільтр можна реалізувати за допомогою різних структур — прямої, каскадної чи паралельної, — і вибір конкретної залежить від вимог до стабільності, швидкодії чи апаратних обмежень.

Завдяки своїй гнучкості цифрові процесори сигналів знайшли широке застосування у найрізноманітніших галузях. Концепції та методи ЦОС використовуються всюди, де потрібно керувати або модифікувати сигнал у цифровій формі. Серед таких сфер:

- аудіо- та відеообробка, включно зі стисненням даних (MP3, AAC, H.264 тощо);
- обробка та розпізнавання мови, що застосовується у голосових помічниках та системах автоматичного перекладу;
- цифрова обробка зображень, яка використовується у фотоапаратах, смартфонах та медичних томографах;
- радіолокаційні та навігаційні системи, де ЦСП аналізує відбиті сигнали для визначення відстані, швидкості чи напрямку об’єктів;
- телекомунікації, де алгоритми ЦОС забезпечують модуляцію, демодуляцію, корекцію помилок і компресію сигналів.

Таким чином, блок цифрового процесора сигналів є серцем будь-якої системи цифрової обробки, адже саме в ньому відбувається виконання математичних операцій, які перетворюють «сирі» дані у корисну інформацію. Саме завдяки розвитку таких обчислювальних технологій стало можливим створення високоякісних, енергоефективних і адаптивних систем зв’язку, медіа-обробки та автоматичного керування, що визначають сучасний рівень розвитку електроніки та телекомунікацій.

2 ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є ДЛЯ АНАЛІЗУ СИГНАЛІВ

2.1 Перетворення Фур'є та спектр сигналу

У багатьох випадках завдання визначення (або обчислення) спектра сигналу зводиться до такої послідовності дій. Спочатку аналогово-цифровий перетворювач (АЦП) із певною частотою дискретизації F_d перетворює безперервний вхідний сигнал, що надходить протягом заданого інтервалу часу T, у набір дискретних відліків — їх загальна кількість становить N. Таким чином, ми отримуємо цифрове представлення сигналу у вигляді масиву чисел, що відповідають амплітудам сигналу в різні моменти часу.

Далі цей масив відліків подається на вхід спеціальної програми або алгоритму обробки, який аналізує сигнал у частотній області. Результатом роботи такого алгоритму є N/2 числових значень, що відповідають спектральним складовим сигналу, тобто амплітудам частот, з яких складається вихідний сигнал. З практичної точки зору, така операція є основою дискретного перетворення Фур’є (ДПФ) або його оптимізованої форми — швидкого перетворення Фур’є (ШПФ).

Щоб перевірити, наскільки коректно працює програма, можна згенерувати тестовий сигнал і проаналізувати його спектр. Наприклад, створимо масив відліків, що є сумою двох синусоїдальних сигналів із різними частотами:

$$sin(10 \cdot 2\pi x) + 0.5 \cdot sin(5 \cdot 2\pi x) \qquad (2.1)$$

У цьому випадку перша складова (sin(10·2πx)) має більшу частоту, а друга (0.5·sin(5·2πx)) — нижчу, причому її амплітуда вдвічі менша. Таким чином, у часовій області сигнал являє собою комбінацію двох гармонік, а у частотній — має два піки, що відповідають цим частотам.

Коли ми подаємо цей тестовий сигнал у програму спектрального аналізу, вона обчислює його амплітудний спектр і відображає отримані результати графічно. На рисунку видно два виражені піки — кожен із них відповідає одній із синусоїд, що входять до складу сигналу. Це демонструє, що програма коректно виконує

спектральне перетворення і дозволяє виявити частотні компоненти складних сигналів.

Такий підхід широко використовується у цифровій обробці сигналів (ЦОС) для аналізу частотного складу коливань у телекомунікаційних системах, акустиці, біомедичних вимірюваннях, обробці зображень і навіть у радіолокації. Він дозволяє виявляти приховані гармонійні складові, шумові компоненти, а також оптимізувати фільтри та алгоритми передачі даних.

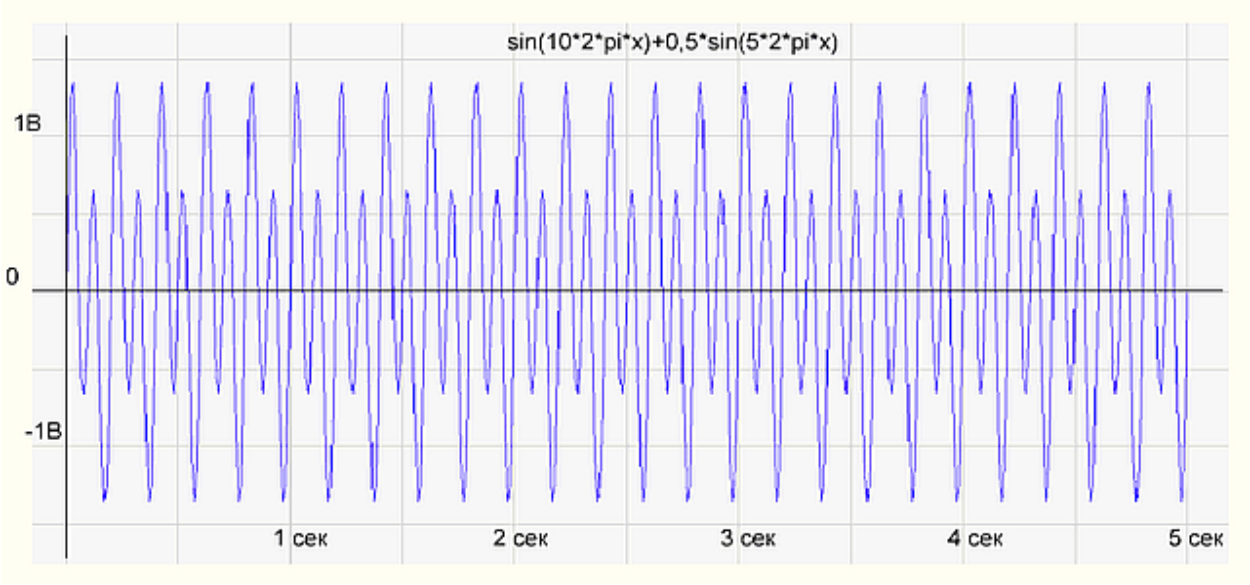


Рис. 2.1 Графік тимчасової функції сигналу

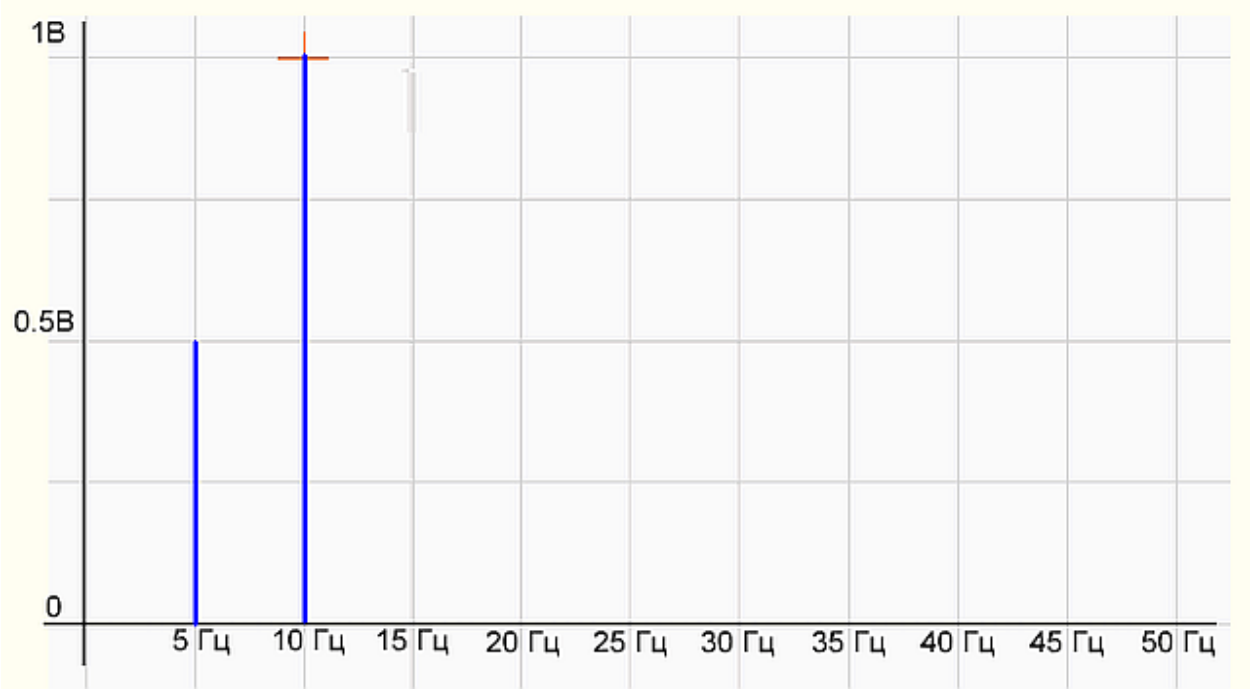


Рис. 2.2 Графік спектру сигналу

На графіку спектра чітко видно дві гармонійні складові (піки) — одна з частотою 5 Гц та амплітудою 0,5 В, а інша — з частотою 10 Гц та амплітудою 1 В. Саме ці значення повністю відповідають параметрам, заданим у вихідній формулі тестового сигналу. Отже, результат є очікуваним, і це підтверджує, що програмний алгоритм працює коректно: програміст дійсно все реалізував правильно.

Це означає, що якщо на вхід аналогово-цифрового перетворювача (АЦП) подати реальний аналоговий сигнал, утворений сумішшю двох синусоїдальних коливань із відповідними частотами, то спектральний аналіз цього сигналу дасть ідентичну картину — на графіку з’являться два виражені піки, що відображають наявність двох гармонік. Такий результат демонструє здатність цифрових алгоритмів точно виділяти частотні компоненти навіть у складних комбінаціях сигналів.

Таким чином, наш реальний виміряний сигнал тривалістю 5 с, який був оцифрований за допомогою АЦП (тобто представлений у вигляді послідовності дискретних відліків), має дискретний неперіодичний спектр. Це означає, що отримане спектральне представлення не є безперервною функцією, а складається з окремих частотних складових, що відображають амплітуди гармонік у межах діапазону аналізу.

У більш широкому сенсі подібний підхід є фундаментом для частотного аналізу в телекомунікаційних системах, де потрібно розділяти сигнали за частотою, виділяти корисні компоненти, фільтрувати шуми або визначати структуру складних хвильових процесів. Застосування дискретного спектрального аналізу дозволяє перетворювати часову інформацію в частотну, відкриваючи можливість більш глибокого розуміння фізичної природи сигналів і оптимізації систем їх передавання, прийому та обробки.

Припустімо, що тривалість вимірювання у 5 секунд є надто великою, тому було прийнято рішення скоротити час спостереження сигналу до 0,5 секунди. Іншими словами, тепер експеримент або процедура зняття даних має виконуватися у десять разів швидше, що дозволить прискорити аналіз і перевірити, як зміна інтервалу дискретизації вплине на точність визначення спектра сигналу.

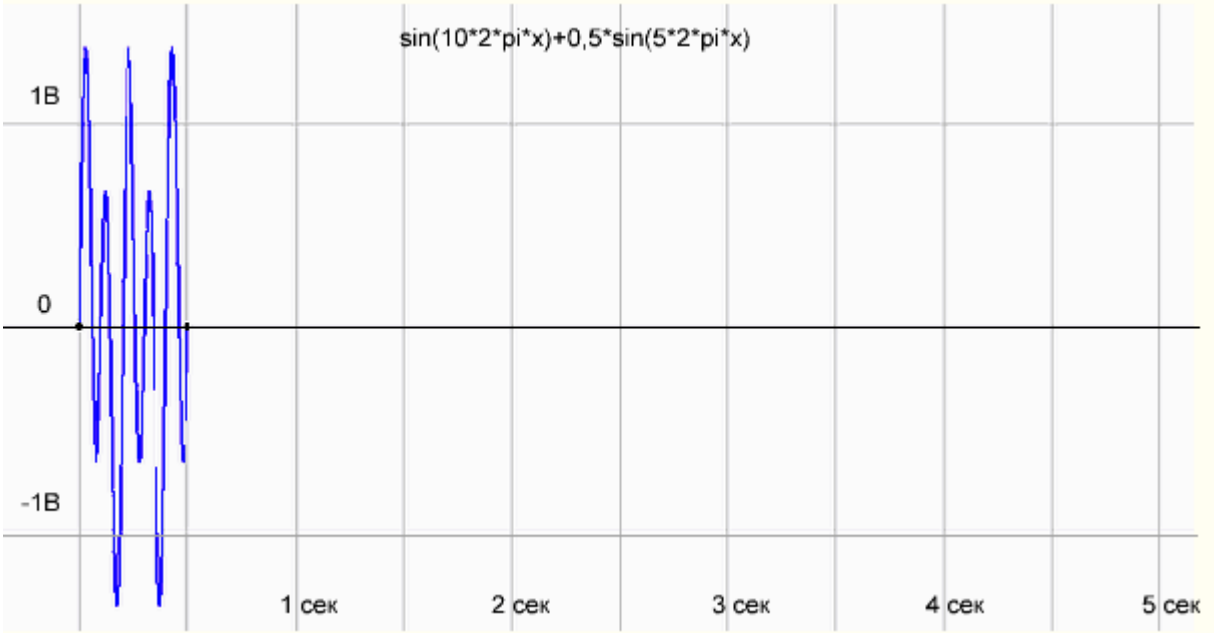


Рис. 2.3 Графік функції $sin(10 * 2 * pi * x) + 0{,}5 * sin(5 * 2 * pi * x)$ на період вимірювання 0.5 сек

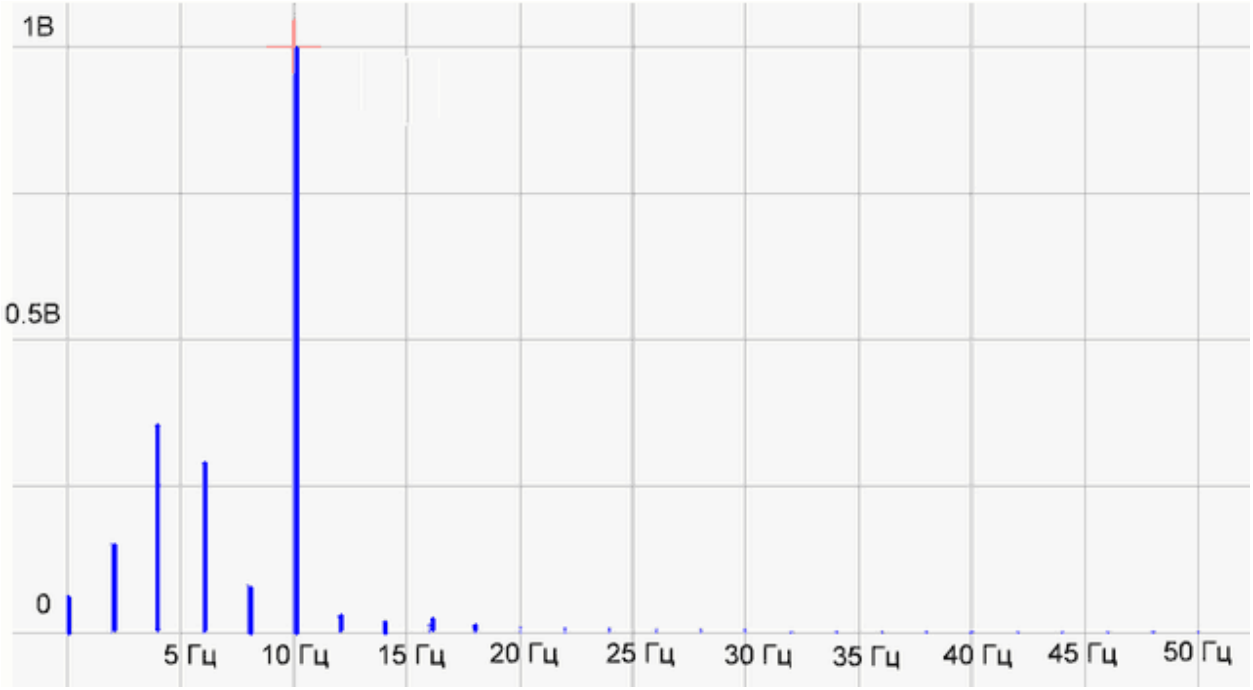


Рис. 2.4 Спектр функції

Після скорочення тривалості вимірювання сигналу до 0,5 секунди результати спектрального аналізу виявилися дещо відмінними від очікуваних. Гармоніка на частоті 10 Гц відображається коректно, однак замість чіткої лінії на частоті 5 Гц з’явилося кілька додаткових гармонійних складових, що не мають фізичного пояснення. Це свідчить про виникнення спектральних спотворень, які можуть бути

наслідком недостатньої довжини вибірки або особливостей реалізації дискретного перетворення Фур'є.

Під час аналізу літературних джерел та технічних рекомендацій з'ясовано, що для уникнення подібного ефекту необхідно доповнювати масив відліків нульовими значеннями (так зване zero-padding). Цей прийом дозволяє підвищити роздільну здатність спектра, зробити його візуальне представлення більш плавним та зменшити вплив обмеженої тривалості сигналу на частотне відображення.

Іншими словами, додавання нулів у кінець вибірки не змінює фізичного змісту сигналу, але забезпечує більш точну апроксимацію частотного спектра, що особливо важливо при аналізі коротких або неперіодичних сигналів.

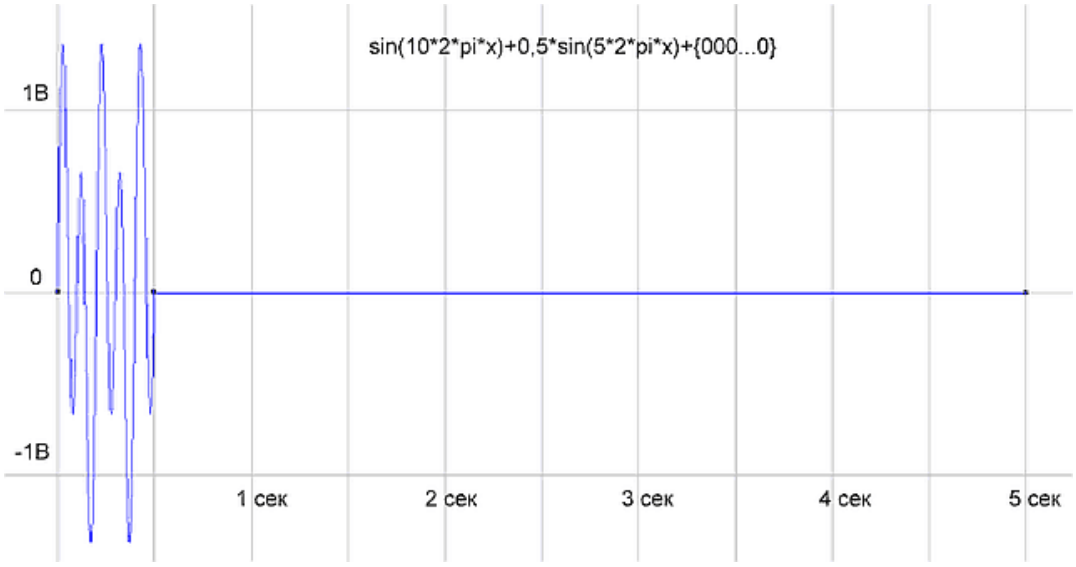


Рис. 2.5 Більш точна апроксимація частотного спектра

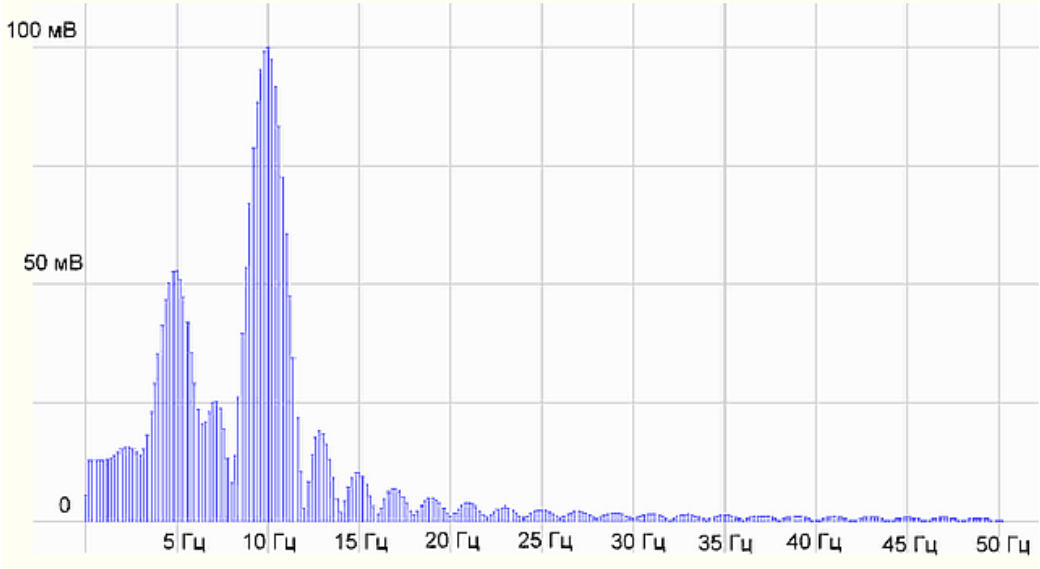


Рис. 2.6 Отриманий спектр

2.2 Безперервна функція та її подання за допомогою ряду Фур'є

З математичної точки зору, сигнал тривалістю T секунд можна розглядати як деяку функцію f(x), визначену на інтервалі [0, T], де x у цьому випадку позначає час.

Таку функцію завжди можна подати у вигляді суми гармонічних складових — синусоїдальних або косинусоїдальних функцій, які відображають частотний склад сигналу. Іншими словами, будь-який періодичний сигнал можна розкласти в ряд Фур'є, де кожна гармоніка описує окрему частоту, що входить до складу початкового сигналу.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos\left(2\pi \frac{k}{\tau} x + \theta_k\right) \tag{2.2}$$

де:

k — номер тригонометричної функції (номер гармонічної складової, тобто номер гармоніки);

T — інтервал, на якому визначена функція (тривалість сигналу);

A_k — амплітуда *k*-тої гармонічної складової;

θ_k — початкова фаза *k*-тої гармонічної складової.

Що означає «подати функцію у вигляді суми ряду»?

Це означає, що якщо у кожній точці додати значення всіх гармонічних складових ряду Фур'є, то отримаємо значення початкової функції у цій самій точці. Інакше кажучи, функція може бути відновлена шляхом підсумовування нескінченної кількості синусоїдальних компонент, кожна з яких має власну частоту, амплітуду та фазу. Такий підхід дозволяє описати складні сигнали через набір простих гармонічних коливань, що є фундаментом спектрального аналізу.

Цей ряд може бути записаний у вигляді:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f_k}\, e^{i2\pi \frac{k}{\tau} x} \tag{2.3}$$

де $\widehat{f_k}$ – *k-я* комплексна амплітуда

або

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(2\pi \frac{k}{\tau} x\right) + b_k \sin\left(2\pi \frac{k}{\tau} x\right) \right] \quad (2.4)$$

Зв'язок між коефіцієнтами (1) та (3) виражається такими формулами:

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad (2.5)$$

та

$$\theta_k = arctg \frac{b_k}{a_k} \quad (2.6)$$

Слід зазначити, що всі три форми подання ряду Фур’є є повністю еквівалентними з математичної точки зору. Кожна з них описує один і той самий процес — розклад функції на сукупність гармонічних складових, відмінність полягає лише у способі представлення цих складових.

У деяких випадках, особливо під час аналітичних або чисельних розрахунків, зручніше використовувати комплексну експоненціальну форму запису, де замість синусів і косинусів застосовуються експоненти з уявним аргументом. Такий підхід спрощує математичні перетворення, оскільки дозволяє оперувати однією функцією замість двох та уникати окремого розгляду фазових зсувів. Ця форма лежить в основі комплексного перетворення Фур’є, яке широко застосовується у цифровій обробці сигналів, спектральному аналізі, оптиці та теорії коливань.

Однак у нашому випадку зручніше користуватися формулою (2.2), у якій ряд Фур’є представлений як сума косинусоїдальних складових з відповідними амплітудами A_k та початковими фазами θ_k. Така форма є більш наочною для інтерпретації фізичного змісту сигналу, оскільки дозволяє безпосередньо спостерігати, які частоти, з якими амплітудами та фазами формують загальну форму хвилі.

Варто також підкреслити, що некоректно вважати, ніби результатом перетворення Фур’є дійсного сигналу є комплексні амплітуди гармонік. Комплексна форма запису використовується лише для зручності математичного

представлення, але самі гармонічні складові сигналу мають реальні фізичні значення.

Таким чином, перетворення Фур’є не робить сигнал «комплексним» у фізичному сенсі, а лише дає інструмент для його аналізу у частотній області. У результаті ми отримуємо реальний спектр частот, який можна інтерпретувати, вимірювати та використовувати для подальшої обробки — наприклад, фільтрації, стиснення або відновлення сигналу.

2.3 Практичне застосування

Перетворення Фур’є дає змогу подати неперервну функцію f(x) (тобто сигнал), визначену на інтервалі [0, T], у вигляді суми нескінченної кількості тригонометричних функцій — синусоїд та/або косинусоїд — із певними амплітудами та початковими фазами. Іншими словами, будь-який складний сигнал можна розкласти на сукупність гармонічних коливань різних частот, і саме така сума утворює так званий ряд Фур’є.

Цей математичний інструмент має надзвичайно велике значення для аналізу сигналів, оскільки дозволяє розглядати сигнал не лише у часовій, а й у частотній області, тобто оцінювати, які частоти та з якою інтенсивністю входять до його складу. Такий підхід лежить в основі більшості сучасних методів цифрової обробки сигналів (ЦОС), включно з фільтрацією, модуляцією, спектральним аналізом і кодуванням.

Водночас для правильного розуміння принципів роботи перетворення Фур’є важливо врахувати одну суттєву особливість. Якщо розглядати ряд Фур’є не лише на обмеженому відрізку [0, T], а на всій осі X, то виявляється, що функція, відтворена за допомогою цього ряду, повторюється періодично за межами заданого інтервалу. Іншими словами, Фур’є-розклад однозначно описує початкову функцію в межах [0, T], але водночас утворює її періодичне продовження на нескінченному проміжку.

Наприклад, на графіку наведено ситуацію, коли початкова функція визначена на відрізку [-T/2, +T/2], тоді як ряд Фур’є формує періодичну функцію, що повторюється на всій числовій осі X. Це означає, що сигнал, поданий у вигляді гармонічної суми, матиме однакову структуру у кожному наступному інтервалі довжиною T.

Причина цього явища полягає у самій природі тригонометричних функцій. Синусоїди та косинусоїди — це періодичні функції, і тому будь-яка їх сума, незалежно від кількості складових, також буде періодичною. Саме ця властивість забезпечує можливість відновлення сигналу з набору його гармонічних компонентів, але водночас означає, що ряд Фур’є апроксимує сигнал як нескінченно періодичний процес.

Таким чином, застосовуючи перетворення Фур’є, ми фактично розглядаємо сигнал як частину періодичного явища, що повторюється з періодом T. Це має велике значення для практичного аналізу, оскільки дозволяє перейти від часової характеристики сигналу до його спектрального представлення, де зручно досліджувати енергетичні, фазові та частотні властивості.

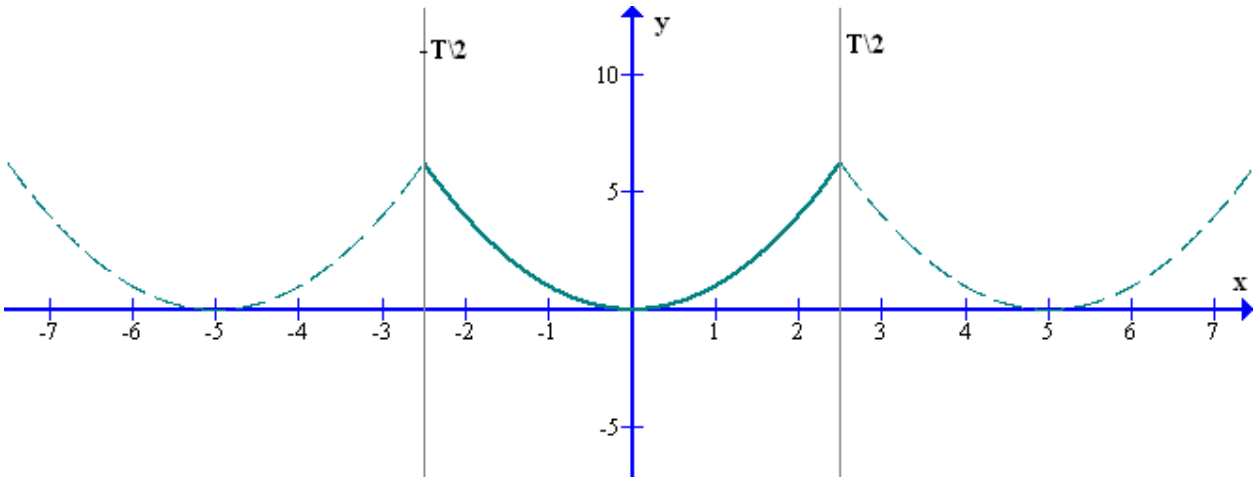


Рис. 2.7 Подання неперіодичної вихідної функції поруч Фур'є

Підсумовуючи вищесказане, можна зробити такі висновки:

Наша початкова функція f(x) є неперервною та неперіодичною — вона визначена лише на певному обмеженому інтервалі довжиною T. Це означає, що сигнал існує у межах певного часового відрізка, після чого його значення не розглядаються.

Спектр такої функції має дискретний характер, тобто складається з набору окремих гармонічних складових, кожна з яких має власну частоту, амплітуду та фазу. Математично це представлення реалізується через ряд Фур'є, який є нескінченною сумою синусоїдальних або косинусоїдальних функцій. Таким чином, складна форма сигналу відтворюється шляхом накладання великої кількості гармонік різних частот.

Фактично, ряд Фур'є описує деяку періодичну функцію, що співпадає з нашою неперіодичною функцією f(x) лише в межах інтервалу [0, T]. За межами цього відрізка вона автоматично повторюється, утворюючи періодичне продовження сигналу. Однак у більшості практичних випадків — зокрема, під час аналізу сигналів у цифрових системах — ця періодичність не має фізичного значення і розглядається лише як математичний наслідок використання гармонічних функцій.

Далі розглянемо особливості періодів гармонічних складових.

Кожна гармоніка ряду Фур'є має період, кратний довжині інтервалу T, на якому визначена початкова функція f(x). Іншими словами, тривалість основного періоду кожної гармонічної складової прямо пов'язана з довжиною проміжку, на якому задано сигнал.

- Період першої гармоніки дорівнює T — саме цьому інтервалу, на якому визначена вихідна функція.
- Період другої гармоніки становить T/2, тобто вона коливається вдвічі швидше.
- Період третьої гармоніки — T/3, відповідно має утричі більшу частоту.
- І так далі — k-та гармоніка має період T/k, тобто її частота є k-кратною основній частоті.

Ця закономірність чітко відображена на рисунку, де показано, як гармонічні складові з різними періодами складаються у загальну форму сигналу.

Таким чином, ряд Фур'є формує спектральне представлення сигналу, у якому кожна гармоніка є множником основної частоти 1/T, а їхня сукупність дає змогу

точно описати часову структуру будь-якого неперіодичного процесу в межах заданого інтервалу.

Таке уявлення є фундаментом для розуміння спектральних властивостей сигналів у системах зв’язку, радіотехніці, акустиці та цифровій обробці, адже дозволяє аналізувати навіть складні коливальні процеси через прості періодичні компоненти.

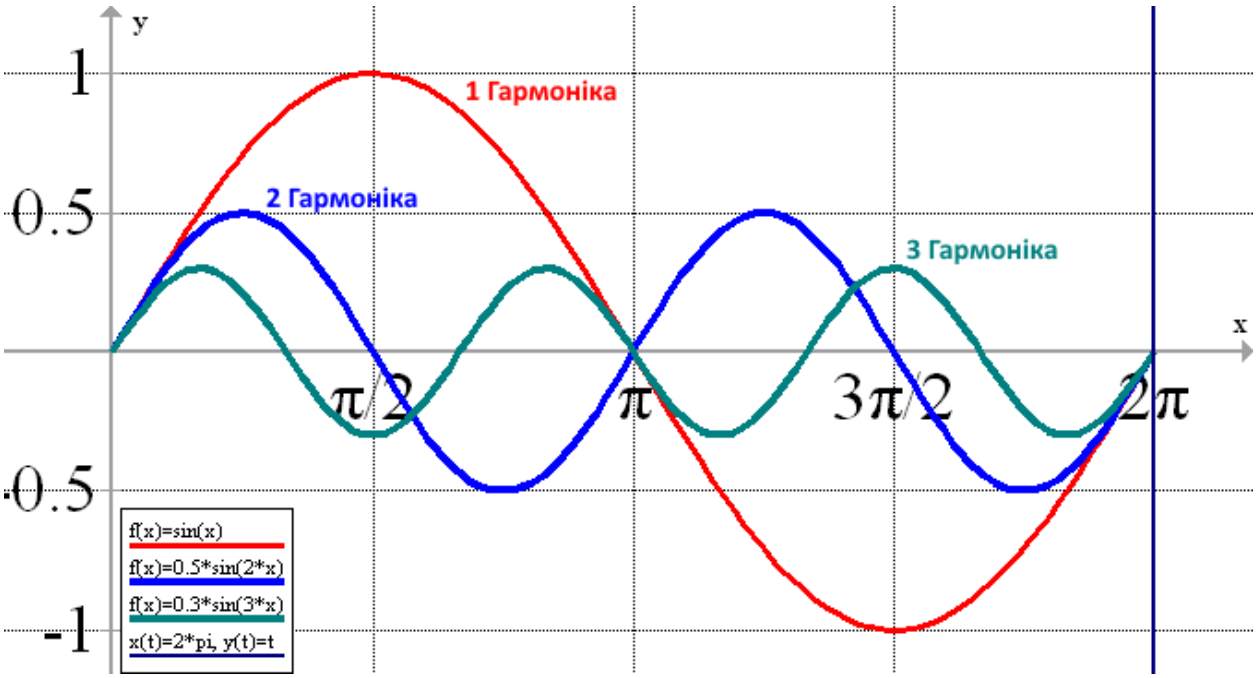


Рис. 2.8 Періоди (частоти) гармонійних складових ряду Фур'є (тут T=2π)

Частотна структура гармонічних складових

Як випливає з попередніх міркувань, частоти гармонічних складових ряду Фур’є є кратними величині 1/T, де T — це тривалість відрізка, на якому визначено сигнал. Іншими словами, частоти гармонік позначаються як

$F_k = k/T$,

де k — номер гармоніки (ціле число, що змінюється від 0 до ∞).

Таким чином, маємо такі співвідношення:

- при $k = 0 \rightarrow F0 = 0$ — це постійна складова (DC-компонента) сигналу,
- при $k = 1 \rightarrow F1 = 1/T$,
- при $k = 2 \rightarrow F2 = 2/T$,
- при $k = 3 \rightarrow F3 = 3/T$,

і так далі — кожна наступна гармоніка має частоту, кратну основній.

Приклад практичного тлумачення:

Нехай початковий сигнал було записано протягом $T = 1$ с.

- Тоді період першої гармоніки дорівнює $T_1 = 1$ с, а її частота становить 1 Гц.
- Для другої гармоніки період зменшується удвічі: $T_2 = T/2 = 0.5$ с, а частота дорівнює 2 Гц.
- Для третьої гармоніки — $T_3 = T/3 \approx 0.333$ с, частота — 3 Гц.

І так далі: кожна наступна гармоніка збільшує частоту на 1 Гц, тобто крок між гармоніками (частотна дискретність) становить $\Delta F = 1$ Гц.

Сигнал тривалістю 1 с можна розкласти на гармонічні складові (отримати його спектр) із частотним розділенням 1 Гц. Це означає, що найближчі гармоніки у спектрі будуть розташовані через 1 Гц одна від одної.

Якщо потрібно підвищити частотну роздільну здатність (наприклад, до 0.5 Гц), то необхідно подвоїти тривалість вимірювання сигналу — тобто збільшити інтервал спостереження до $T = 2$ с. Аналогічно, при $T = 10$ с роздільна здатність становитиме 0.1 Гц.

Таким чином, роздільна здатність спектра за частотою обернено пропорційна тривалості сигналу: чим більше T, тим менший крок ΔF і тим точніше можна визначити частоти складових.

Про обмеження та штучні методи:

Існує спосіб штучного збільшення довжини сигналу шляхом додавання нулів до кінця масиву відліків (так зване *zero-padding*). Цей метод дозволяє отримати плавніший графік спектра і візуально покращити інтерполяцію між гармоніками.

Однак важливо розуміти, що таке доповнення не підвищує реальну роздільну здатність за частотою — воно лише збільшує кількість точок між уже наявними спектральними лініями, не додаючи нової інформації про сигнал. Єдиний фізично обґрунтований спосіб підвищення точності спектрального аналізу — збільшення часу спостереження сигналу T.

Отже:

- частоти гармонік розташовані з кроком $\Delta F = 1/T$;
- для підвищення точності спектрального аналізу необхідно збільшувати T;

- *zero-padding* — це лише допоміжний прийом для зручнішої візуалізації спектра, але не метод підвищення реальної частотної роздільності.

Еволюція способів зберігання та обробки сигналів у цифрову епоху

З розвитком обчислювальної техніки та появою високопродуктивних цифрових систем істотно змінилися підходи до зберігання, аналізу та обробки вимірювальних даних, зокрема сигналів різної природи — електричних, акустичних, оптичних тощо.

У минулому більшість сигналів реєструвалися та зберігалися в аналоговій формі. Наприклад, електричні коливання могли бути записані на магнітну стрічку за допомогою магнітофона або осцилографа з паперовою реєстрацією. Такий підхід мав низку обмежень: спотворення при записі, обмежену точність, складність подальшої обробки та низьку довговічність носіїв.

Сьогодні ж, із переходом до цифрових технологій, аналогові сигнали перед записом оцифровуються, тобто перетворюються на послідовність числових значень (відліків), що відображають амплітуду сигналу у певні моменти часу. Отримані дані зберігаються у цифровому форматі — у пам’яті комп’ютера, на флеш-накопичувачах або у хмарних сховищах — у вигляді файлів, які містять упорядкований набір чисел. Це робить можливим не лише довготривале зберігання без втрати якості, але й ефективну обробку, фільтрацію та аналіз за допомогою спеціалізованого програмного забезпечення.

Типова схема вимірювання та оцифрування сигналу

Процес перетворення аналогового сигналу у цифрову форму зазвичай складається з кількох етапів:

1. Отримання аналогового сигналу від датчика або вимірювального пристрою (наприклад, мікрофона, антен, термопари тощо).
2. Попередня обробка сигналу — фільтрація, посилення або нормалізація для усунення шумів і приведення сигналу до робочого діапазону.
3. Дискретизація сигналу за часом за допомогою аналогово-цифрового перетворювача (АЦП), який із певною частотою (F_d) знімає миттєві значення амплітуди сигналу.

4. Квантування — перетворення кожного знятого значення у числовий код певної розрядності (наприклад, 8, 12 або 16 біт).
5. Збереження цифрових відліків у пам’яті комп’ютера або іншого пристрою у вигляді масиву чисел, що утворює цифрове представлення сигналу.

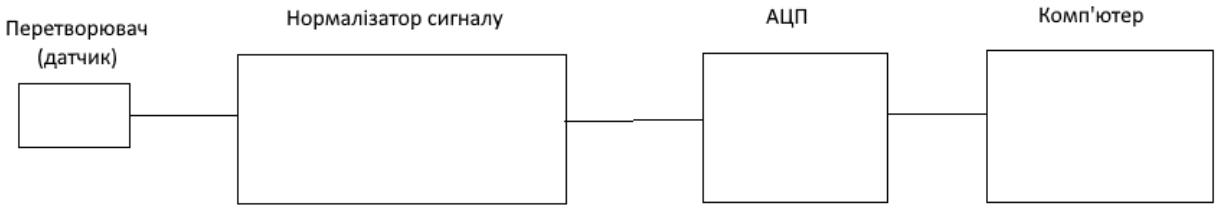


Рис. 2.9 Схема вимірювального каналу

Сигнал від вимірювального перетворювача надходить на аналогово-цифровий перетворювач (АЦП) протягом певного інтервалу часу T. Упродовж цього періоду АЦП здійснює вибірку сигналу, тобто формує послідовність його дискретних відліків. Отримані за час T дані передаються до комп’ютера та зберігаються в оперативній або постійній пам’яті для подальшої обробки та аналізу.

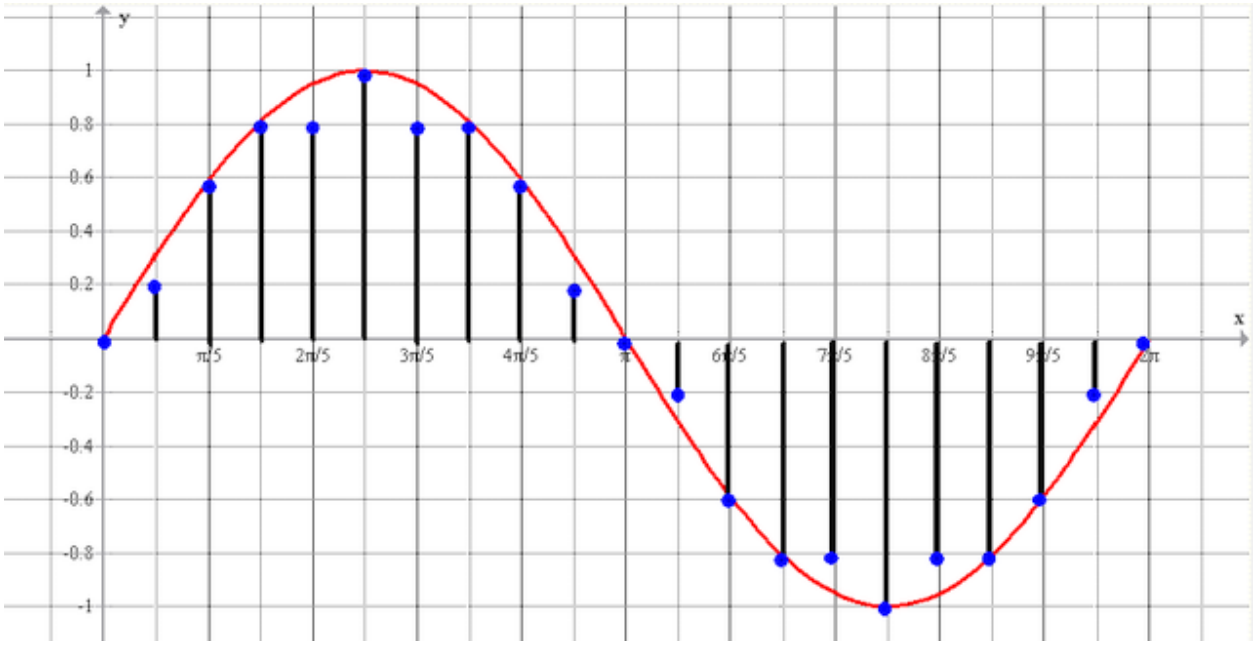


Рис. 2.10 Оцифрований сигнал - N відліків отриманих за час T

Вимоги до параметрів оцифрування сигналу

Під час перетворення аналогового сигналу у цифрову форму необхідно враховувати низку важливих параметрів, від яких залежить точність і достовірність

подальшої обробки даних. Пристрій, що виконує це перетворення, називається аналогово-цифровим перетворювачем (АЦП, англ. Analog-to-Digital Converter, ADC). Саме він перетворює безперервний у часі аналоговий сигнал на дискретну послідовність числових значень — відліків.

Одним із головних параметрів АЦП є максимальна частота дискретизації (або частота семплювання, англ. *sample rate*). Вона визначає, з якою швидкістю пристрій знімає відліки з вхідного сигналу під час його оцифрування. Частота дискретизації вимірюється у герцах (Гц) і показує, скільки разів за секунду АЦП реєструє значення амплітуди сигналу.

Згідно з теоремою Котельникова (або теоремою Найквіста–Шеннона), якщо безперервний сигнал має обмежений спектр і максимальна частота цього спектра дорівнює $F_{макс}$, то такий сигнал можна повністю та однозначно відновити за його дискретними відліками, якщо вони зняті з інтервалом часу $T = \frac{1}{2 \cdot F_{макс}}$, з частотою $F_d \geq 2 * F_{макс}$, де F_d – частота дискретизації, $F_{макс}$ – максимальна частота спектра сигналу.

Інакше кажучи, частота оцифрування сигналу повинна бути щонайменше удвічі вищою за максимальну частоту сигналу, який ми хочемо виміряти. Це правило гарантує, що під час дискретизації не виникне ефекту накладання спектрів (аліасингу), який призводить до спотворення сигналу при його подальшому відновленні.

Що відбувається, якщо знімати відліки з меншою частотою, ніж це передбачено теоремою Котельникова?

Якщо частота дискретизації F_d менша, ніж подвоєне значення максимальної частоти сигналу $2 \cdot F_{макс}$, виникає явище, відоме як аліасинг (іноді його називають також стробоскопічним ефектом або муаровим ефектом).

Суть цього явища полягає в тому, що високочастотний сигнал після оцифрування помилково сприймається як сигнал нижчої частоти, якої насправді не існує. Це відбувається тому, що за час між двома сусідніми відліками АЦП

аналоговий сигнал встигає змінитися більше, ніж на півперіоду, унаслідок чого система «плутає» фазу і формує неправильне цифрове відображення сигналу.

На рисунку це показано наочно: червона синусоїда відповідає реальному високочастотному сигналу, тоді як синя синусоїда — це фіктивний сигнал нижчої частоти, який виникає через недостатню частоту вибірки. Такий спотворений сигнал існує лише у цифровому представленні, але не має фізичного аналога у реальному процесі.

Отже, якщо частота дискретизації обрана неправильно (занадто мала), інформація про високочастотні компоненти сигналу втрачається безповоротно, а отриманий цифровий сигнал містить спотворення спектра та помилкові частотні складові, що робить подальший аналіз або обробку некоректними.

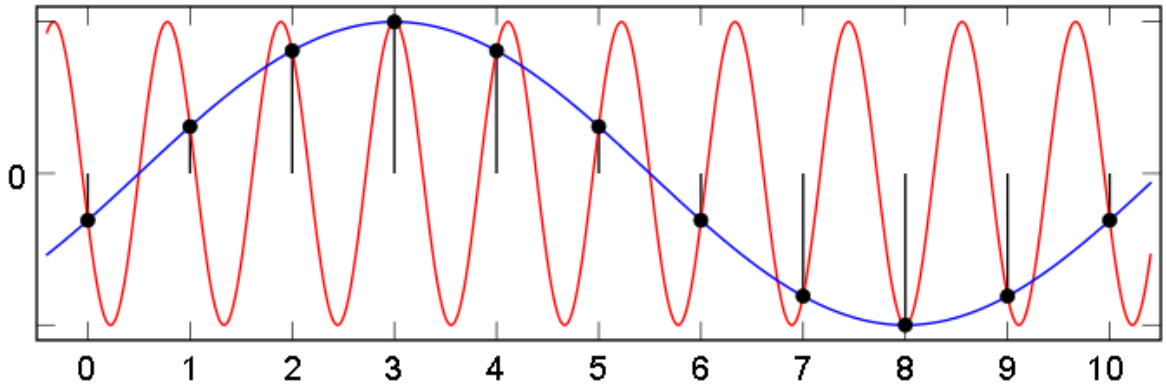


Рис. 2.11 Поява помилкового сигналу низької частоти за недостатньо високої частоти дискретизації

Щоб уникнути появи ефекту аліасингу, перед входом аналогово-цифрового перетворювача (АЦП) зазвичай встановлюють антиаліасинговий фільтр, який є фільтром нижніх частот (ФНЧ). Основне його завдання полягає в тому, щоб пропускати лише ті частоти, які нижчі за половину частоти дискретизації АЦП (Fd/2), та пригнічувати всі вищі частоти, що могли б спричинити накладання спектрів після оцифрування. Такий фільтр ефективно «очищає» сигнал, залишаючи лише той частотний діапазон, який може бути коректно відтворений у цифровій формі.

Для подальшого аналізу сигналів у цифровій формі використовується дискретне перетворення Фур’є (ДПФ) — математична операція, що дозволяє

обчислити спектр сигналу за його дискретними відліками. Це один із ключових інструментів цифрової обробки сигналів, який дає змогу визначити частотні компоненти та їхні амплітуди у межах оцифрованого інтервалу.

Слід ще раз наголосити, що спектр дискретного сигналу за означенням обмежений максимальною частотою Fмакс, яка завжди менша за половину частоти дискретизації Fd/2. Це фундаментальне обмеження випливає безпосередньо з теореми Котельникова. Таким чином, на відміну від безперервного сигналу, спектр якого може містити необмежену кількість гармонік, дискретний сигнал завжди має скінченне число частотних складових.

Згідно з теоремою Котельникова, максимальна частота гармоніки повинна бути такою, щоб на один її період припадало щонайменше два відліки. Це означає, що кількість гармонічних складових у спектрі дорівнює половині кількості відліків сигналу у часовій області.

Іншими словами, якщо у вибірці міститься N відліків, то число гармонік у спектрі буде N/2. Наприклад, якщо сигнал складається зі 1024 відліків, то спектр, отриманий за допомогою ДПФ, міститиме 512 частотних компонент, рівномірно розподілених у межах від 0 до Fd/2.

Розглянемо тепер дискретне перетворення Фур'є (ДПФ).

$$u_k = \sum_{s=0}^{N/2} [a_s \cos(s\omega_1 t_k) + b_s \sin(s\omega_1 t_k)], \tag{2.7}$$

$$t_k = k\tau,\ k = 0,1,2,\dots,N-1,\ \omega_1 = \frac{2\pi}{T}. \tag{2.8}$$

Порівнюючи з рядом Фур'є

$$u(t) = \sum_{s=0}^{\infty} (a_s \cos s\omega_1 t + b_s \sin s\omega_1 t) \tag{2.9}$$

Видно, що наведені рівняння збігаються, за винятком того, що в часі для дискретного перетворення Фур’є (ДПФ) використовується дискретна шкала, а кількість гармонік обмежується величиною N/2, тобто половиною числа відліків сигналу.

Формули ДПФ записують у вигляді безрозмірних цілих змінних k та s, де:

- k — це номер відліку сигналу у часовій області,
- s — номер спектральної складової у частотній області.

Величина s показує, скільки повних коливань певна гармоніка здійснює протягом одного періоду T (тривалості спостереження сигналу). Таким чином, дискретне перетворення Фур'є дає змогу знаходити амплітуди та фази гармонік чисельним методом, тобто виконувати спектральний аналіз безпосередньо на комп'ютері.

Повертаючись до результатів, отриманих на початку, слід нагадати: при розкладанні неперіодичної функції (нашого сигналу) у ряд Фур'є, отриманий результат відповідає періодичній функції з періодом T.
Це означає, що в межах інтервалу спостереження сигнал точно відтворюється, однак ряд Фур'є періодично повторює цей фрагмент за межами інтервалу (0, T), як показано на рисунку.

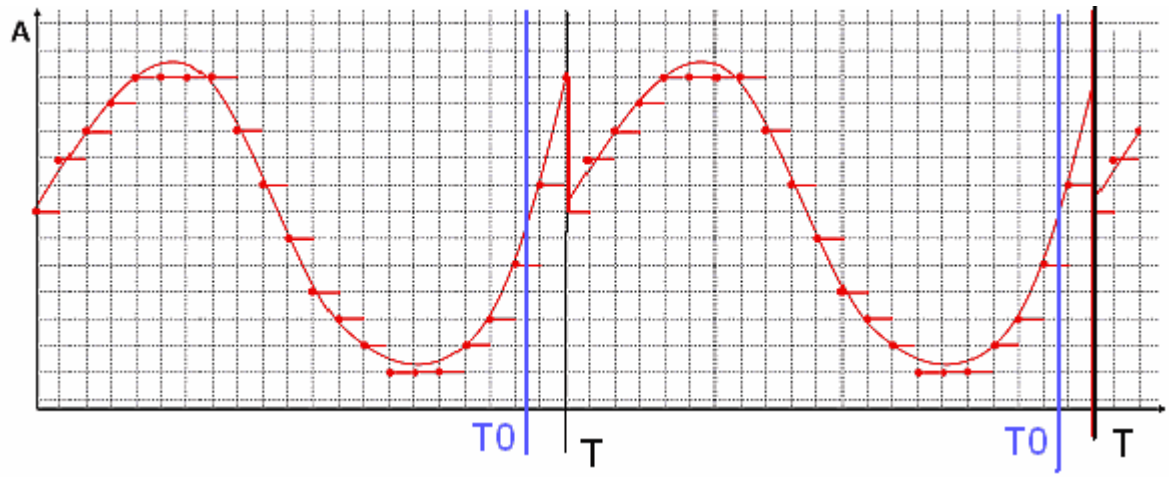


Рис. 2.12 Періодична функція f(x) із періодом T0, при періоді вимірювання T > T0

Як видно з рисунка 2.12, функція f(x) є періодичною з періодом T_0. Проте, якщо тривалість вимірювального інтервалу T не збігається з власним періодом функції T_0, то функція, що відтворюється у вигляді ряду Фур'є, матиме розрив у точці T. Інакше кажучи, у місці, де відбувається «зшивання» кінця й початку вибірки, виникає стрибок амплітуди, який сприймається як дискретність або неперервність порушена у часі. Унаслідок цього у спектрі такої функції з'являється велика кількість високочастотних гармонік. Це пояснюється тим, що ряд Фур'є

намагається описати сигнал із різким розривом, додаючи дедалі більшу кількість гармонічних складових, щоб відтворити різкий перехід між кінцем і початком інтервалу. Якби ж тривалість вимірювання T збігалася з періодом функції T_0, то після виконання дискретного перетворення Фур'є (ДПФ) у спектрі спостерігалася б лише одна гармоніка — основна синусоїда, період якої дорівнює тривалості вибірки. Це пов'язано з тим, що сама функція f(x) у такому випадку є чистою синусоїдою без додаткових спектральних складових.

Іншими словами, алгоритм ДПФ «не знає», що досліджуваний сигнал насправді є частиною однієї синусоїди. Він сприймає його як фрагмент періодичної функції, що періодично повторюється. Через невідповідність кінця й початку сигналу на межах інтервалу виникає розрив, який програма намагається апроксимувати сумою гармонік. Саме ці гармоніки з'являються у спектрі як додаткові частотні компоненти, що не мають фізичного сенсу — це спектральні артефакти, спричинені обмеженою довжиною вибірки.

Щоб отримати «правильний» або фізично достовірний спектр сигналу, який складається із суми кількох синусоїд із різними періодами, необхідно дотриматись умови:

на інтервалі вимірювання T має вміщуватись ціле число періодів кожної з синусоїд. Якщо це виконано, то кінцева і початкова точки вибірки збігаються за фазою, і сигнал буде неперервним на межі періоду, що усуває появу штучних високочастотних гармонік у спектрі.

На практиці цього можна досягти, якщо забезпечити достатньо велику тривалість спостереження сигналу. Чим більша T, тим точніше алгоритм ДПФ відображає справжній спектр сигналу, а внесок спотворень через фазові розриви або неповні періоди стає мінімальним.

Таким чином, коректний вибір тривалості вимірювання є одним із ключових чинників для точного спектрального аналізу, особливо коли сигнал складається з кількох гармонічних компонент різних частот.

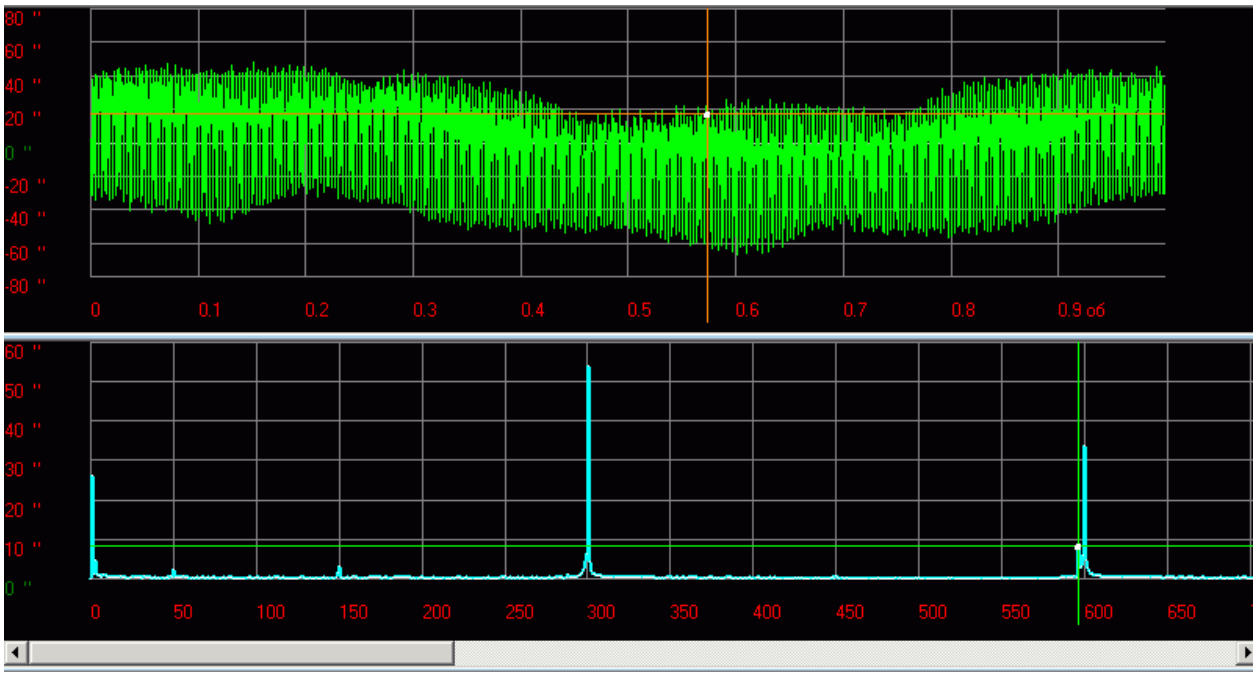


Рис. 2.13 Приклад функції та спектра сигналу кінематичної похибки редуктора

За меншої тривалості картина виглядатиме «гірше»:

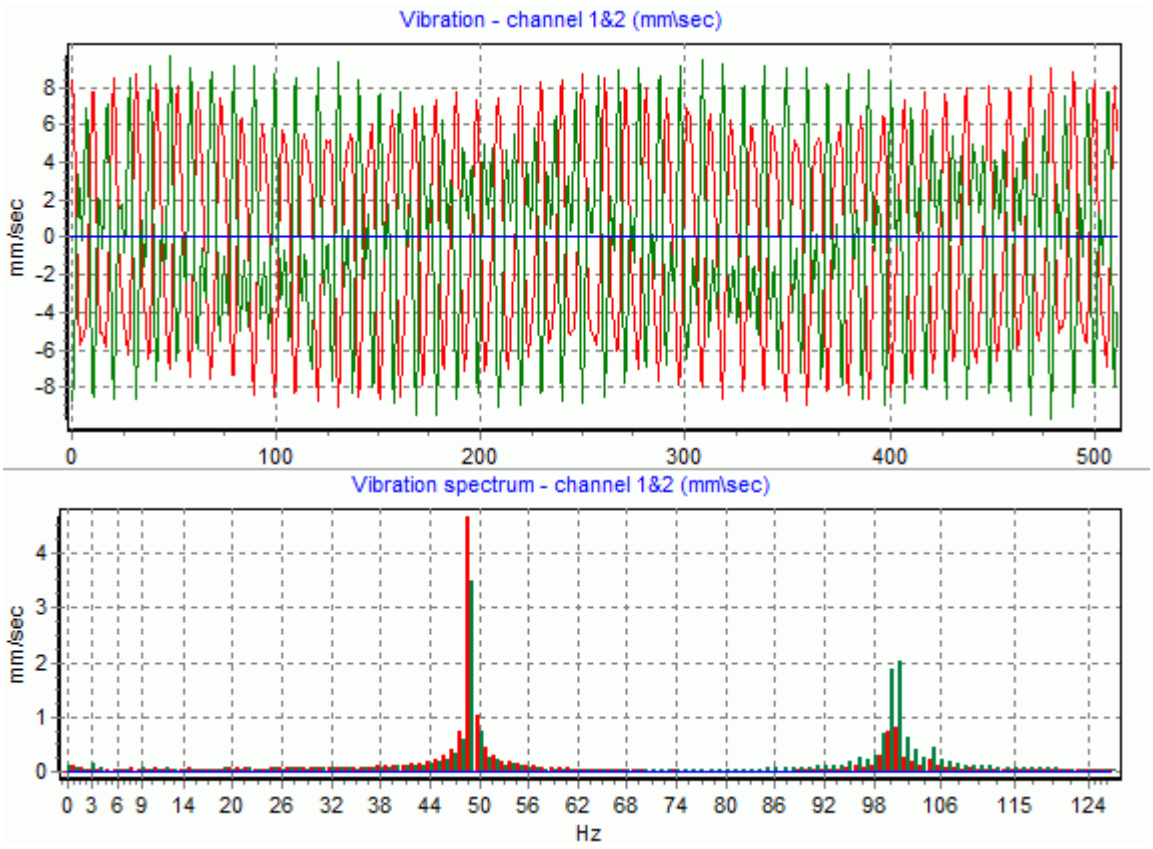


Рис. 2.14 Приклад функції та спектру сигналу вібрації ротора

На практиці часто буває складно відрізнити, де у спектрі відображені реальні складові сигналу, а де — спектральні артефакти, що виникли внаслідок некратності періодів гармонік або невідповідності тривалості вибірки сигналу його періоду.

Такі спотворення можуть бути також спричинені стрибками та розривами форми сигналу на межах інтервалу спостереження.

Варто підкреслити, що вирази «реальні складові» та «артефакти» взяті в лапки не випадково. Наявність у спектрі великої кількості гармонік не означає, що сигнал у фізичному сенсі складається саме з них. Це лише математичне представлення, подібне до того, як число 7 можна подати як суму 3 + 4. Число залишається тим самим, просто ми описали його іншим способом.

Так само і в аналізі сигналів: не сам сигнал, а періодична функція, отримана шляхом повторення вибірки сигналу, може бути подана у вигляді ряду гармонік (синусоїд) із певними амплітудами та фазами. Кожна з цих гармонік — це математичний елемент розкладу, що допомагає точніше описати форму періодичної функції.

Проте в багатьох практично важливих випадках, особливо під час аналізу фізичних процесів (механічних, електричних, акустичних тощо), отримані гармоніки у спектрі можуть мати цілком реальне фізичне значення. Вони можуть відповідати циклічним процесам, які дійсно впливають на форму сигналу — наприклад, коливанням механічних елементів, періодичним змінам напруги, пульсаціям тиску, шумовим резонансам тощо.

У таких випадках аналіз гармонічних складових дозволяє не лише математично описати сигнал, а й виявити природу окремих фізичних впливів, що формують його часову структуру. Саме тому спектральний підхід і методи дискретного перетворення Фур’є (ДПФ) відіграють ключову роль у діагностиці, моделюванні та оптимізації реальних систем.

Отже, наявність великої кількості гармонік у спектрі не завжди є ознакою помилки або артефакту — важливо розуміти контекст сигналу: іноді це просто математичний наслідок, а іноді — відображення справжніх фізичних процесів, що впливають на форму й енергію сигналу.

Деякі підсумки

1. Реальний виміряний сигнал, тривалістю T секунд, який було оцифровано за допомогою АЦП (тобто подано у вигляді набору дискретних відліків

кількістю N), має дискретний неперіодичний спектр, що складається з N/2 гармонічних складових. Іншими словами, цифровий сигнал — це послідовність числових значень у часі, а його спектр — це кінцева множина гармонік, що описують частотну структуру сигналу.

2. Сигнал у часовій області представлений дійсними значеннями, і відповідно його спектр також містить дійсні значення амплітуд. У цьому контексті частоти гармонік завжди є додатними, оскільки описують реальні фізичні коливання. Те, що у математичних викладках спектр часто зручно подавати в комплексній формі, використовуючи поняття від'ємних частот, не означає, що саме так «правильно» або що цей підхід є єдино можливим. Комплексна форма є лише зручним аналітичним інструментом, а не відображенням фізичної природи сигналу.
3. Сигнал, виміряний на відрізку часу T, визначений лише в межах цього інтервалу. Що відбувалося до початку вимірювання або після його завершення, для аналізу не має значення і не впливає на результати спектрального перетворення. Дискретне перетворення Фур'є (ДПФ) такого обмеженого у часі сигналу дозволяє отримати його фізично обґрунтований спектр, тобто визначити амплітуди та частоти гармонічних складових з достатньою точністю, за умови дотримання вимог до частоти дискретизації та тривалості вибірки.

Таким чином, можна зробити висновок, що ДПФ забезпечує реалістичне уявлення про частотну структуру сигналу, якщо виконано основні умови коректного вимірювання — вибір відповідної тривалості T, достатньої кількості відліків N і частоти дискретизації Fd, що задовольняє теорему Котельникова.

3 ЗАВАДОСТІЙКЕ КОДУВАННЯ

3.1 Використання коду Хеммінга

Найвідоміший приклад коду Хеммінга — це код (7,4). Що означають ці дві цифри? Друга цифра, 4, визначає кількість інформаційних бітів, тобто тих даних, які потрібно передати без спотворень і втрат. Перша цифра, 7, позначає загальну довжину кодового слова — інформацію, доповнену трьома контрольними (надлишковими) бітами, що забезпечують можливість виявлення та виправлення помилок.

Терміни «інформаційне слово» та «кодове слово» є базовими у теорії помилкостійкого кодування і зустрічаються у всіх підручниках і наукових працях із цієї галузі. Вони відображають головну ідею процесу кодування — додавання контрольної надлишкової інформації для підвищення надійності передачі даних.

Такий код здатний виправляти одну помилку незалежно від того, у якому саме розряді вона виникла під час передачі. Це досягається завдяки наявності трьох додаткових (контрольних) бітів, що несуть інформацію про позицію можливої помилки. Якщо розглянути всі варіанти, то для семи можливих позицій біта з помилкою (або відсутності помилки) потрібно вісім різних комбінацій відповідей. Оскільки $8 = 2^3$, трьох перевірочних бітів цілком достатньо, щоб зафіксувати будь-яку одноразову помилку та визначити її місце в кодовому слові.

Щоб отримати кодове слово, потрібно представити інформаційне слово у вигляді полінома та помножити його на породжувальний поліном g(x). Будь-яке число, якщо записати його у двійковій формі, можна інтерпретувати як поліном, де кожен біт відповідає коефіцієнту при певному степені змінної x. На перший погляд така форма запису може здатися складною, особливо для тих, хто вперше стикається з теорією кодування. У недосвідченого читача природно виникає запитання: «Навіщо так ускладнювати?». Однак це враження швидко минає, коли виконуються перші приклади побудови коду: поліномна форма значно спрощує

операції кодування, перевірки та виправлення помилок і доводить свою практичну ефективність.

Код Хеммінга (7,4) — це класичний приклад систематичного коду, який демонструє, як додавання трьох контрольних бітів до чотирьох інформаційних дозволяє створити надійну систему передачі даних, здатну самостійно виявляти та виправляти одиничні помилки без необхідності повторної передачі.



Рис. 3.1 Код Хеммінга

Такий код здатен виправляти одну помилку, незалежно від того, у якому саме біті вона виникла. Це означає, що код Хеммінга (7,4) забезпечує однократне виправлення помилки в будь-якому місці переданого кодового слова. Надлишковість у цьому випадку виражається трьома додатковими (контрольними) бітами, які містять достатньо інформації, щоб вказати точне положення помилки або підтвердити відсутність помилки.

Інакше кажучи, ми очікуємо вісім можливих результатів перевірки: сім із них відповідають можливим позиціям біта з помилкою, а восьмий варіант означає, що жодної помилки не виявлено. Оскільки $8 = 2^3$, стає очевидним, що трьох перевірочних бітів цілком достатньо для коду з довжиною сім. Таким чином, математична структура коду ідеально узгоджується з кількістю можливих станів.

Щоб отримати кодове слово, інформаційне слово потрібно представити у вигляді полінома та помножити його на породжувальний поліном g(x). Цей підхід може здаватися незвичним, але саме він лежить в основі алгебраїчної теорії кодування, яка дозволяє виконувати операції над послідовностями бітів за допомогою правил арифметики в полі GF(2) (тобто за модулем 2).

Будь-яке двійкове число можна записати у вигляді полінома, де кожен біт є коефіцієнтом при певному степені змінної x. Наприклад, число 1010_2 відповідає

поліному $x^3 + x$. Для тих, хто вперше знайомиться з таким підходом, це може виглядати як зайве ускладнення. Часто виникає питання: *«Навіщо переводити прості біти у поліноми?»* Але це перше враження швидко зникає, коли починаєш бачити, як за допомогою поліномної алгебри можна легко формувати, перевіряти й декодувати коди, не вдаючись до складних логічних схем.

Таким чином, поліномне представлення інформаційних слів дозволяє математично строго описати процеси кодування й декодування, а породжувальний поліном g(x) виступає своєрідним «ключем», який визначає правила побудови кодового слова.

Розглянемо приклад: для інформаційного слова 1010 кожен розряд відповідає коефіцієнту у відповідному поліномі. Тобто послідовність 1010 можна подати як поліном:

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 1 \cdot x + 0,$$

або коротко — $x^3 + x$.

У подальших розрахунках цей поліном буде використано для отримання кодового слова, шляхом множення на породжувальний поліном g(x), що і забезпечить додавання контрольних бітів і формування повного коду Хеммінга.

Під час роботи з поліномами у двійковій системі всі арифметичні дії виконуються за модулем 2, тобто відповідно до правил логічної операції виключного АБО (XOR). Це означає, що якщо потрібно скласти коефіцієнти поліномів, ми замінюємо додавання на XOR. Наприклад, $x^4 + x^4 = 0$, оскільки $1 \oplus 1 = 0$. Такий принцип виключає появу «переносу» розрядів, як це відбувається у звичайній арифметиці, і робить обчислення зручними для реалізації в цифрових схемах.

У результаті поліномного множення інформаційного слова на породжувальний поліном ми отримуємо поліном, що складається з чотирьох членів. У двійковій формі цей результат виглядає як 1001110. Саме це й є кодове слово, яке передаватиметься через канал зв’язку, де можливі перешкоди та помилки.

Важливо розуміти, що при побудові коду не можна виконувати звичайне арифметичне множення двійкових чисел, бо воно не відповідає логіці роботи в полі

GF(2). Наприклад, якщо просто перемножити інформаційне слово 1010 і породжувальний поліном 1011 як звичайні двійкові числа, отримаємо 1101110. Але цей результат неправильний, адже ми втратили логіку поліномного множення. Правильне обчислення повинно виконуватися саме за поліномними правилами, тобто з додаванням коефіцієнтів за модулем 2.

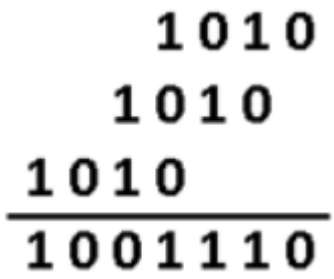


Рис. 3.2 2 операції XOR і 2 зсуву вліво

Поліномне множення легко реалізувати програмно, навіть у найпростішому вигляді. Для цього достатньо двох операцій XOR і двох зсувів вліво. Перший зсув виконується на один розряд, а другий — на два розряди, відповідно до структури породжувального полінома g(x) = 1011. У результаті відбувається логічне комбінування бітів інформаційного слова з бітами полінома, і формується правильна послідовність, що відповідає кодовому слову Хеммінга.

Тепер спробуймо навмисно внести помилку в отримане кодове слово. Наприклад, змінимо третій біт — у результаті отримаємо пошкоджене слово 1000110.

Виникає запитання: як розпізнати та виправити цю помилку? Для цього необхідно виконати поліномне ділення прийнятого кодового слова на породжувальний поліном g(x). Саме цей процес дозволяє виявити, у якій позиції виникла помилка, і відновити початкові дані.

Необхідно звернути увагу: у полі GF(2) (тобто при обчисленнях за модулем 2) віднімання і додавання — це одна й та сама операція, адже 1 - 1 = 0 так само, як і 1 + 1 = 0. Таким чином, усі обчислення виконуються за правилами логічного виключного АБО (XOR), що суттєво спрощує процес декодування.

Тож приступімо до розрахунку: ділимо кодове слово на g(x) у поліномній формі, використовуючи правило XOR замість звичайного віднімання. Це і є ключовий етап у виявленні помилки — залишок від ділення (синдром**)** вкаже на позицію бітового розряду, у якому відбулася помилка.

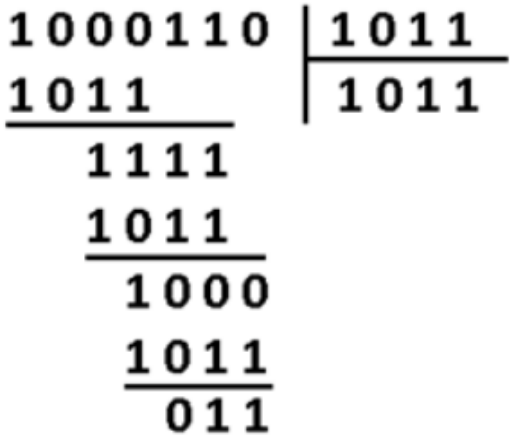


Рис. 3.3 Ділення кодового слова

У програмній реалізації цього алгоритму нічого надто складного немає. Дільник 1011 послідовно зсувається вліво на три біти, аж поки не опиниться в кінці діленого. Після цього починається основна частина процесу — поетапне “видалення” найлівіших одиниць у діленому за допомогою операції XOR, яка в полі GF(2) замінює як додавання, так і віднімання. Молодші біти при цьому не враховуються, адже вони ще не потрапили під ділення.

У ході обчислень ділене поступово зменшується за схемою: 100110 → 0011110 → 0001000 → 0000011. Коли у четвертому та старших розрядах не залишиться одиниць, ділення завершується. Оскільки поділ націло виконати не вдалося, ми робимо висновок, що у кодовому слові є помилка — саме цього й слід було очікувати. У такому випадку нас не цікавить результат ділення, важливий лише залишок, який називається синдромом. Його довжина дорівнює кількості контрольних бітів, тому після розрахунку зазвичай додають нулі, щоб вирівняти розрядність.

Отриманий синдром є своєрідним “підписом” конкретної помилки. У цьому прикладі він не вказує напряму, у якому саме біті сталася помилка. Проте, якщо провести аналогічну операцію для іншого інформаційного слова, наприклад 1100, і

виконати ті самі кроки — множення на g(x), внесення помилки в третій розряд, поділ на породжувальний поліном, — ми знову отримаємо той самий синдром 011. Це свідчить, що для будь-якого кодового слова з помилкою у третьому біті синдром завжди буде однаковим.

Звідси випливає надзвичайно важливий практичний висновок. Для кожного можливого положення помилки можна попередньо обчислити синдром і занести його до таблиці відповідності. Така таблиця — це основа роботи декодера Хеммінга, який під час приймання даних швидко аналізує отримане кодове слово, визначає, у якому розряді сталася помилка, і автоматично її виправляє. Саме цей принцип зробив код Хеммінга одним із найефективніших і найпоширеніших методів корекції одиничних помилок у цифрових системах зв'язку, комп'ютерній пам'яті та передавальних пристроях.

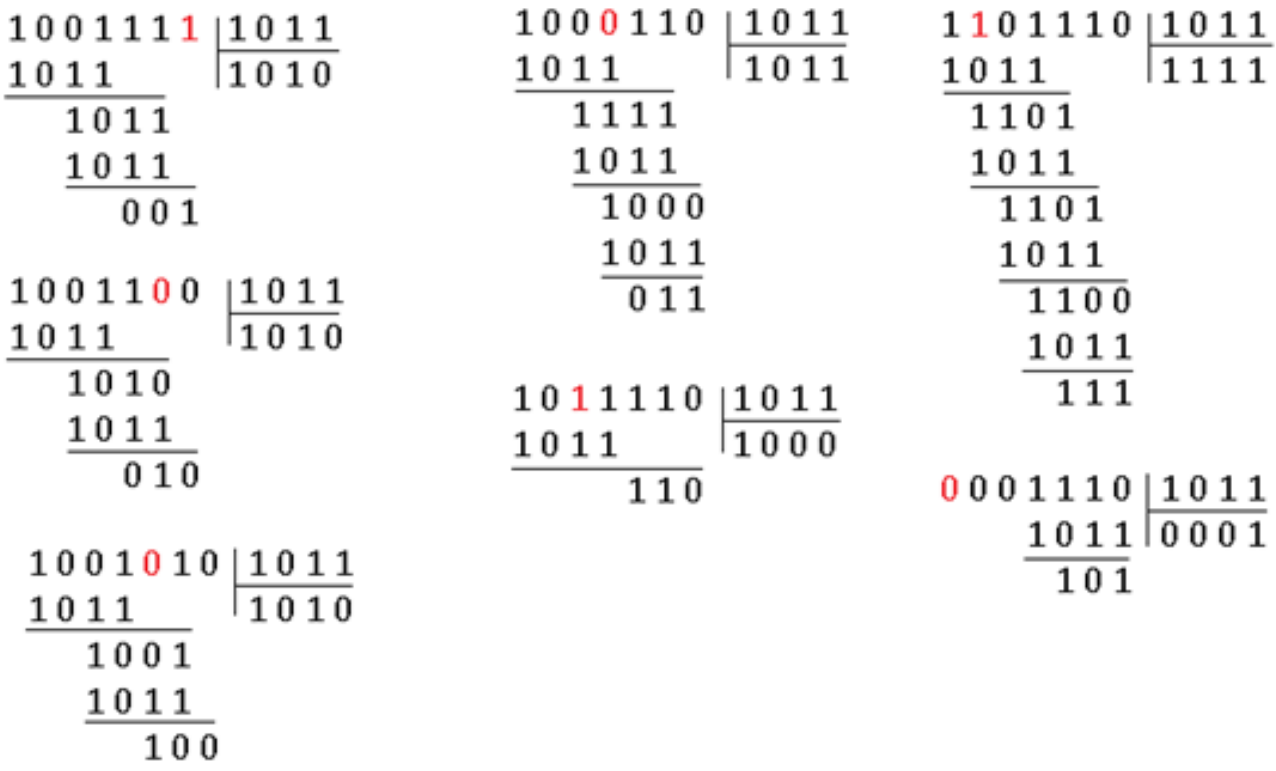


Рис. 3.4 Приклад покрокового поліномного ділення кодових слів

В результаті збираємо список синдромів, і те, на яку хворобу він вказує:

Розряд, в якому помилка	Синдром
	000 - Немає помилок
0	001
1	010
2	100
3	011
4	110
5	111
6	101

Рис. 3.5 Список синдромів

Тепер у нас є всі необхідні елементи для завершення процесу декодування. Ми обчислили синдром, визначили позицію помилки, виправили її, а потім повторно виконали ділення правильного кодового слова 1001110 на породжувальний поліном 1011. У результаті ділення отримано початкове інформаційне слово 1010, а залишок після ділення дорівнює 000, що свідчить про відсутність помилок.

Зрозуміло, що побудована таблиця синдромів добре працює для малих кодів, таких як Хеммінг (7,4), де кількість можливих помилок невелика і легко перебирається вручну. Проте для кодів, здатних виправляти кілька помилок, кількість можливих синдромів зростає експоненціально, і таблиця швидко стає непридатною для практичного використання. Тому в реальних системах корекції помилок застосовують більш гнучкі алгоритмічні методи, що дозволяють «виловлювати» помилки без готової таблиці синдромів.

Якщо уважно подивитися на попередні приклади, можна помітити, що перші три синдроми однозначно визначають позицію помилки. Це відбувається тому, що в цих синдромах тільки одна одиниця, і така структура дозволяє чітко вказати на біт, який зазнав спотворення. Кількість одиниць у синдромі називають його вагою. Наприклад, синдром 001 має вагу 1, а 011 — вагу 2.

Повернімося до нашої помилки у третьому розряді. Ми пам’ятаємо, що синдром для неї дорівнює 011, і його вага — 2, тобто синдром не однозначний. Але існує цікавий прийом, який дозволяє знайти помилку навіть без таблиці — циклічний зсув кодового слова вправо.

Якщо зробити один такий зсув для нашого прикладу, то замість 1000110 отримаємо 0100011. Поділивши це слово на 1011, отримаємо залишок 100. Цей синдром уже має вагу 1, а отже, однозначно вказує на помилку у другому розряді. Оскільки ми зробили один зсув, то й сама помилка «зсунулася» на одну позицію. Таким чином, помилка насправді знаходиться у третьому розряді вихідного кодового слова.

У цьому й полягає вся хитрість методу циклічного пошуку помилки: навіть якщо синдром не дає однозначної відповіді, можна поступово зсувати кодове слово вправо, обчислюючи залишок щоразу, доки не отримаємо синдром із вагою 1. Кількість виконаних зсувів вкаже на реальну позицію помилки у початковому кодовому слові.

Отже, навіть у випадку, коли здається, що ситуація безвихідна — наприклад, якщо помилка виникла у шостому розряді і вам доведеться виконати кілька повторних ділення — ви все одно зможете знайти і виправити її. І хоча цей процес може здатися виснажливим, він є ефективним і надійним способом корекції одиничних помилок без використання громіздких таблиць синдромів. Саме цей підхід лежить в основі алгоритмів циклічних кодів, які стали фундаментом сучасних методів виявлення і виправлення помилок у цифрових системах зв’язку та обчислювальній техніці.

3.2 Варіація кодів Хеммінга в ЦОС

Якщо говорити про інші коди Хеммінга, то насправді їх існує безліч. До найвідоміших належать варіанти виду (7,4), (15,11), (31,26) та загальна формула (2^m − 1, 2^m − 1 − m), де *m* — це кількість надлишкових (контрольних) бітів. Кожен із таких кодів здатний виправляти одну одиничну помилку, незалежно від того, у

якому розряді вона виникла. При цьому зі збільшенням довжини інформаційного слова пропорційно зростає надлишковість, адже кількість перевіркових бітів також збільшується.

Такий підхід має свої переваги й обмеження. З одного боку, коди Хеммінга є надзвичайно економними, тобто забезпечують достатній рівень захисту від випадкових спотворень при мінімальному обсязі службової інформації. З іншого боку, при збільшенні довжини слова їх завадостійкість поступово зменшується, тому ці коди найефективніші саме в умовах слабких перешкод або при невисокому рівні шуму в каналі передавання даних.

Природно виникає питання: як знайти породжувальний поліном для коду, наприклад, (15,11)? Це справедливе й дуже важливе запитання. У теорії циклічних кодів існує основна теорема, яка визначає спосіб побудови породжувальних функцій. Вона формулюється так:

Породжувальний поліном циклічного коду g(x) має бути дільником многочлена (x^n + 1) без остачі,
де *n* — це довжина кодового слова.

Інакше кажучи, для коду з параметрами (15,11) необхідно знайти такий поліном *g(x)*, який ділиться на *(x^15 + 1)* без залишку. Крім того, *g(x)* повинен бути простим у полі GF(2) — тобто не мати жодних нетривіальних дільників, окрім самого себе та одиниці. Це гарантує, що породжувальний поліном створює унікальну систему контрольних рівнянь, які забезпечують правильне виявлення одиничних помилок.

Ступінь полінома *g(x)* завжди дорівнює розміру надлишковості, тобто *m*. Наприклад, для коду Хеммінга (7,4), де *m = 3*, породжувальний поліном має вигляд
$g(x) = x^3 + x + 1$,
і ділить без остачі вираз $(x^7 + 1)$ у полі *GF(2)*.

За тією ж логікою, для кодів (15,11) або (31,26) потрібно підібрати відповідний поліном ступеня *m = 4* або *m = 5*, який задовольняє тим самим умовам ділення. У практиці теорії кодування такі поліноми зазвичай вибираються з таблиць примітивних поліномів, складених для різних значень *m*, що істотно спрощує

побудову реальних кодів Хеммінга у системах передавання та зберігання інформації. Отже, можна показати, що для Хеммінга (7,4):

$$x^7 + 1 = (x + 1)(x^3 + x^2 + 1)(x^3 + x + 1) \quad (3.1)$$

Цей код має два можливі породжувальні поліноми, і використання будь-якого з них не вважається помилкою — обидва забезпечують правильне формування коду. Для побудови інших кодів Хеммінга слід користуватися таблицею примітивних поліномів, наведених для різних значень параметра *m*.

Таблиця 3.1

Таблиця примітивних поліномів

m	**p(x)**
3	$1 + x + x^3$
4	$1 + x + x^4$
5	$1 + x^2 + x^5$
6	$1 + x + x^6$
7	$1 + x^3 + x^7$
8	$1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7$
9	$1 + x^4 + x^9$
10	$1 + x^3 + x^{10}$
11	$1 + x^2 + x^{11}$
12	$1 + x + x^4 + x^6 + x^{12}$
13	$1 + x + x^3 + x^4 + x^{13}$
14	$1 + x^2 + x^6 + x^{10} + x^{14}$
15	$1 + x + x^{15}$
15	$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^{12} + x^{13} + x^{14} + x^{15}$
23	$1 + x^5 + x^{23}$
32	$1 + x + x^2 + x^4 + x^5 + x^7 + x^8 + x^{10} + x^{11} + x^{12} + x^{16} + x^{22} + x^{23} + x^{26} + x^{32}$

Відповідно, для кодів породжувальний поліном має вигляд $g(x) = x^4 + x + 1$. Спершу необхідно перетворити породжувальний поліном g(x) у матричну форму, яку можна буде використати для множення на інформаційне слово з метою

отримання кодового слова. Наприклад, якщо g(x) = 1011, то цей поліном можна представити у вигляді генерувальної матриці, що описує всі можливі комбінації з урахуванням надлишкових бітів.

$$G = \begin{pmatrix} 1\,0\,1\,1\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,1\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,0\,1\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,1\,0\,1\,1 \end{pmatrix}$$

Рис. 3.6 Генерувальна матриця коду Хеммінга (7,4), побудована на основі породжувального полінома g(x)=1011

Цю матрицю називають породжувальною матрицею. Позначимо інформаційне слово як *d = 1010*, а кодове слово — як *k*. Тоді отримаємо співвідношення між ними, що визначає процес формування кодового слова за допомогою породжувальної матриці.

$$k = d * G = (1\,0\,1\,0) * \begin{pmatrix} 1\,0\,1\,1\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,1\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,0\,1\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,1\,0\,1\,1 \end{pmatrix} = (1\,0\,0\,1\,1\,1\,0)$$

Рис. 3.7 Формування кодового слова k шляхом множення інформаційного слова d на породжувальну матрицю G

Це доволі витончена й ефективна формула. За швидкодією вона навіть перевершує множення поліномів — там доводилося виконувати зсуви, а тут усе вже заздалегідь структуровано. Вектор d показує, які саме рядки матриці потрібно враховувати під час обчислення. Рядки нумеруються знизу вгору, адже молодші розряди розташовані праворуч — така особливість двійкового подання, від якої нікуди не подітися.

Оскільки d = 1010, у розрахунках беруться перший і третій рядки породжувальної матриці. Над ними виконується операція XOR (виключне АБО), у результаті чого отримуємо шукане кодове слово.

Але на цьому цікаве не закінчується — далі з’являється ще одна важлива структура, а саме перевіркова матриця H. Завдяки їй можна отримувати синдром шляхом простого множення вектора на матрицю, без потреби у поліномному діленні. Це значно спрощує процес виявлення та виправлення помилок у цифрових системах, роблячи коди Хеммінга не лише елегантними з математичної точки зору, а й надзвичайно ефективними у практичній реалізації.

$$s = k * H = (1\,0\,0\,0\,1\,1\,0) * \begin{pmatrix} 1\,0\,1 \\ 1\,1\,1 \\ 1\,1\,0 \\ 0\,1\,1 \\ 1\,0\,0 \\ 0\,1\,0 \\ 0\,0\,1 \end{pmatrix} = (0\,1\,1)$$

Рис. 3.8 Обчислення синдрому s шляхом множення кодового слова k на перевірочну матрицю H

Необхідно подивитися на перевірочну матрицю та на перелік синдромів, який було отримано вище: саме звідси «виростає» ця матриця. У наведеному прикладі я навмисно зіпсував кодове слово в третьому розряді й знову отримав відповідний синдром. Оскільки сама перевірочна матриця фактично є впорядкованим списком можливих синдромів, ми миттєво визначаємо позицію помилки за збігом стовпця. Втім, для кодів, що вміють виправляти більше ніж одну помилку, така проста схема вже не працює — доводиться шукати помилки методом, описаним вище (циклічні зсуви, аналіз ваги синдрому тощо).

Щоб краще відчути механіку корекції, згенеруємо всі можливі кодові слова для нашого випадку. Оскільки інформаційне слово має лише 4 біти, існує $2^4 = 16$ різних інформаційних комбінацій, а отже — 16 відповідних кодових слів. Побудова повного набору дозволяє побачити, як кожному інформаційному слову відповідає

унікальне кодове, а також перевірити, що будь-яка одинична помилка приводить до синдрому, який однозначно вказує на її позицію. Це наочно демонструє принцип роботи коду Хеммінга: у просторі кодових слів кожна валідна комбінація оточена «сферою» радіусу 1, і будь-яке слово з однією помилкою проектується назад у центр цієї сфери — правильне кодове слово.

Таблиця 3.2

Повний набір інформаційних та кодових слів для коду Хеммінга (7,4)

Інформаційне слово	**Кодове слово**
0000	0000000
0001	0001011
0010	0010110
0011	0011101
0100	0100110
0101	0101111
0110	0111010
0111	0110001
1000	1011000
1001	1010011
1010	1001110
1011	1000101
1100	1110100
1101	1111111
1110	1100010
1111	1101001

Якщо уважно подивитися на кодові слова, наведені у таблиці, можна помітити важливу закономірність: будь-які два кодові слова відрізняються щонайменше трьома бітами. Наприклад, візьмімо слово 1011000. Якщо змінити будь-який його біт, скажімо перший, отримаємо 1011010. Жодне інше кодове слово не буде настільки схожим на вихідне, як саме 1011000. Ця відмінність у трьох бітах

називається мінімальною відстанню Хеммінга (d) — ключовим параметром будь-якого блокового коду, який визначає його здатність виявляти та виправляти помилки.

Для коду Хеммінга (7,4) мінімальна відстань дорівнює d = 3, а отже, такий код може виправляти одну помилку або виявляти до двох. Узагальнено код можна записати як (7,4,3), де перше число — довжина кодового слова, друге — кількість інформаційних бітів, а третє — мінімальна відстань Хеммінга. Формула, що визначає кількість виправлюваних помилок, має вигляд: (d−1)/2.(d - 1) / 2.(d−1)/2. Тобто для нашого прикладу з d = 3 отримуємо можливість корекції однієї помилки.

У ширшому контексті відстань Хеммінга є фундаментальною характеристикою будь-якого коду — вона не є просто різницею між довжиною кодового та інформаційного слова, а визначає мінімальну кількість бітів, які потрібно змінити, щоб одне кодове слово перетворити на інше. Цей параметр прямо пов’язаний із надійністю передачі даних у цифрових системах зв’язку.

Існують й інші типи коригувальних кодів із більшими можливостями. Наприклад, код Голея (23,12,7) здатен виправляти до трьох помилок, а код (48,36,5) застосовувався у системах стільникового зв’язку з часовим розділенням каналів (стандарт IS-54). Для кодів Ріда–Соломона використовується аналогічне позначення (n, k, d), але вони належать до недвійкових кодів, що працюють не з окремими бітами, а з групами символів, що робить їх надзвичайно ефективними для корекції великих пакетів даних — наприклад, у супутникових системах або цифровому телебаченні.

У контексті цифрової обробки сигналів (ЦОС) коди Хеммінга та інші методи корекції помилок мають вирішальне значення для забезпечення якості зв’язку. Вони дозволяють зменшити вплив шумів і спотворень у каналі передачі, гарантувати цілісність даних при мінімальній затримці й забезпечити високий рівень достовірності у цифрових комунікаціях. Саме завдяки впровадженню таких кодів стало можливим створення ефективних систем безпроводового зв’язку, мобільних

мереж, радіолокаційних і супутникових комплексів, де навіть одинична помилка може мати критичне значення.

Таким чином, коди Хеммінга не лише демонструють красу математичної логіки, а й є практичним інструментом цифрової обробки сигналів, який безпосередньо впливає на стійкість, швидкість і надійність передавання інформації в сучасних телекомунікаційних системах.

3.3 Альтернативне завадостійке кодування

Під час передавання повідомлення від джерела до приймача в процесі передачі даних можуть виникати помилки, спричинені впливом завад, шумів або технічних несправностей обладнання. Щоб виявити та виправити такі помилки, застосовують завадостійке кодування — метод, за якого повідомлення кодується спеціальним чином, щоб приймальна сторона могла визначити, чи відбулася помилка, і, за можливості, відновити правильне повідомлення.

Кодування по суті є процесом додавання до вихідної інформації додаткових, перевірочних бітів. На передавальній стороні для цього використовується кодер, який формує закодоване повідомлення, а на приймальній — декодер, який проводить зворотну операцію, відновлюючи початкову інформацію.

Поняття надлишковості коду визначає кількість контрольної інформації, що додається до повідомлення, і розраховується за формулою:

$$k/(i+k) \tag{3.2}$$

де k — кількість перевірочних бітів,

i — кількість інформаційних бітів.

Наприклад, якщо ми передаємо 3 інформаційні біти та додаємо 1 перевірочний, надлишковість становитиме 1 / (3 + 1) = 1/4 або 25%.

Таке додавання контрольної інформації є фундаментом сучасних систем цифрового зв’язку та цифрової обробки сигналів. Воно забезпечує не лише виявлення та виправлення помилок, а й підвищує якість передачі даних, роблячи зв’язок стабільним навіть у присутності шумів. Завадостійке кодування, зокрема

коди Хеммінга, відіграє ключову роль у системах мобільного, супутникового та оптичного зв’язку, оскільки дозволяє підтримувати високу достовірність сигналу при обмеженій смузі пропускання й низькому рівні енергоспоживання.

Завдяки такому підходу цифрова обробка сигналів (ЦОС) стає більш надійною і дозволяє системам комунікації працювати з оптимальною точністю, навіть у складних умовах передачі, забезпечуючи стабільність і високу якість зв’язку.

Код із перевіркою на чесність

Перевірка на чесність — один із найпростіших способів виявлення помилок у переданому пакеті даних. Цей метод не дозволяє відновити пошкоджену інформацію, проте ефективно визначає наявність одиничної помилки під час передавання сигналу.

Кожен пакет даних містить додатковий біт чесності (іноді його називають паритетним бітом). Його значення формується під час запису або передавання даних, а потім повторно обчислюється під час приймання. Значення біта чесності визначається як сума за модулем 2 усіх бітів у пакеті, тобто кількість одиниць у повідомленні завжди парна. Якщо цей біт змінюється (наприклад, із 0 на 1), це означає, що під час передачі виникла помилка.

Такий тип контролю не забезпечує виправлення помилок, але дає можливість своєчасно виявити збій у цифровій системі. Його часто застосовують у системах цифрової обробки сигналів, де важливо оперативно виявляти порушення в роботі каналу зв’язку та підтримувати стабільну якість передавання даних.

Нижче наведено структурну схему кодера, який реалізує принцип формування біта чесності для контролю достовірності переданої інформації.

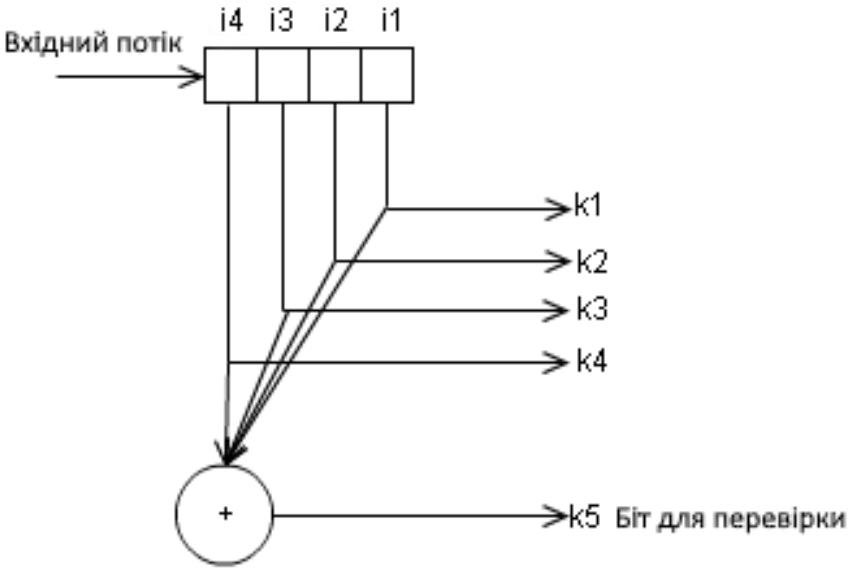


Рис. 3.9 Структурна схема кодера з перевіркою на чесність, що формує контрольний біт k5 як суму за модулем 2 усіх бітів вхідного потоку

Та для декодера:

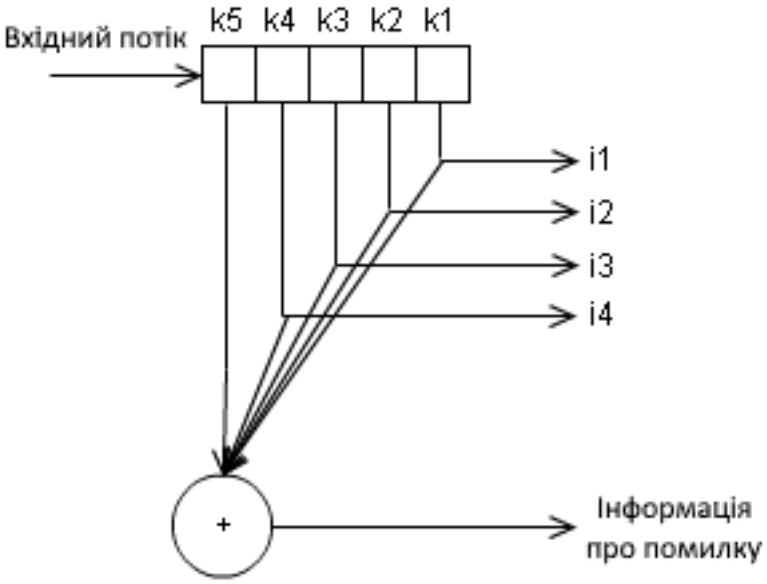


Рисунок 3.10 Структурна схема декодера з перевіркою на чесність, який визначає наявність помилки у прийнятому повідомленні шляхом перевірки суми всіх бітів за модулем 2

Приклад:

Початкові дані: 1111

Дані після кодування: 11110 (1 + 1 + 1 + 1 = 0 (mod 2))
Прийняті дані: 10110 (змінився другий біт)

Як бачимо, кількість одиниць у прийнятому пакеті стала непарною, отже, під час передавання виникла помилка. Метод перевірки на чесність дозволяє легко виявити подібні одиночні спотворення, однак він не дає змоги встановити їх точне розташування або відновити пошкоджений біт.

Як уже зазначалося раніше, цей спосіб ефективний лише для виявлення однієї помилки. Якщо ж під час передавання змінилися стани двох бітів, може виникнути ситуація, коли обчислений контрольний біт збігатиметься з переданим, і система не виявить помилки.

Наприклад:
Початкові дані: 1111

Дані після кодування: 11110 (1 + 1 + 1 + 1 = 0 (mod 2))
Прийняті дані: 10010 (змінилися 2-й і 3-й біти)

У прийнятому пакеті кількість одиниць знову стала парною, тому декодер вважатиме, що передача відбулася без спотворень, хоча насправді дані змінені.

Незважаючи на цей недолік, метод перевірки на чесність широко використовується в цифрових системах, оскільки приблизно 90% випадкових помилок трапляються саме в одному біті. Таким чином, цей простий механізм контролю виявляється цілком достатнім для більшості практичних застосувань у цифровій обробці сигналів і передачі даних.

Коди-добутки

У каналах зв’язку, крім одиночних помилок, що виникають через шум або випадкові збої, досить часто зустрічаються пакетні (групові) помилки, спричинені імпульсними перешкодами, короткочасними зникненнями сигналу чи «випадіннями» під час цифрового запису або передавання даних. У таких випадках пошкоджуються не окремі біти, а великі послідовності — іноді сотні чи навіть тисячі бітів інформації підряд. Очевидно, що жоден звичайний завадостійкий код не здатен виправити таку масовану втрату даних.

Щоб ефективно боротися з подібними помилками, застосовують коди-добутки (product codes) — спеціальний тип завадостійкого кодування, який забезпечує підвищений рівень надійності. Його принцип полягає в тому, що інформаційні біти організовують у вигляді матриці, для якої кодування виконується по рядках і по стовпцях одночасно. Таким чином, при виникненні пакетної помилки відновлення даних можливе завдяки надлишковій інформації, що дублює контрольні суми в обох напрямках.

На рисунку показано узагальнену схему роботи такого коду. Спочатку дані формуються у вигляді блоку (матриці), потім для кожного рядка обчислюються перевіркові біти — аналогічно до звичайного блоку з перевіркою на чесність. Далі ці ж перевіркові біти обробляються по вертикалі, утворюючи ще один набір контрольних сум. У результаті формується двовимірний код, який має набагато вищу здатність до виявлення й виправлення помилок порівняно з одновимірними методами.

Завдяки цьому коди-добутки широко використовуються в системах цифрової обробки сигналів, супутниковому зв’язку, оптичних каналах передачі даних, а також у технологіях зберігання інформації, де важливо забезпечити стабільність сигналу навіть при наявності сильних завад або короткочасних збоїв.



Рис. 3.11 Структурна схема подвійного (внутрішнього та зовнішнього) кодування в системі передачі даних

Передавана інформація проходить подвійне кодування — спочатку у зовнішньому, а потім у внутрішньому кодері. Між цими двома етапами встановлюється буфер, який виконує проміжну обробку даних і забезпечує узгодження потоків між кодерами. Принцип роботи такої схеми наведено на рисунку.

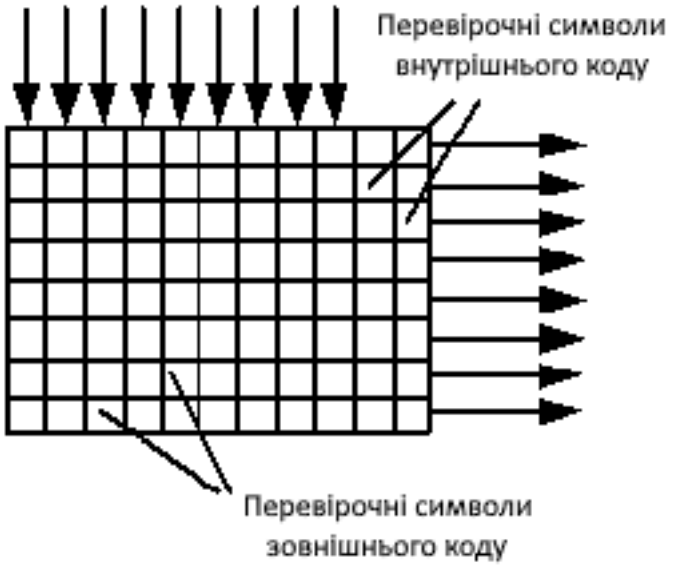


Рис. 3.12 Принцип формування перевірочних символів у кодах-добутках для підвищення завадостійкості передачі даних

Інформаційні слова спочатку проходять через перший завадостійкий кодер, який називають зовнішнім, оскільки він, разом із відповідним декодером, розташований на межах системи завадостійкого кодування. На цьому етапі до інформаційних слів додаються перевірочні символи, після чого отримані кодові слова записуються до буфера по стовпцях, а зчитуються вже пострічково. Такий процес називається перемішуванням або інтерлівіруванням (перемеженням). Під час виведення рядків із буфера до них додаються перевірочні символи внутрішнього коду, після чого інформація передається каналом зв’язку або записується на носій. Для спрощення розглянемо випадок, коли і зовнішній, і внутрішній коди є кодами Хеммінга, що містять по три перевірочні біти, тобто кожен із них здатен виправити одну помилку в кодовому слові. (Кількість «клітинок» на схемі не має принципового значення — це лише ілюстрація процесу). На приймальному боці використовується аналогічний буфер пам’яті, у який інформація надходить пострічково, а зчитується по стовпцях. У разі виникнення пакетної помилки (показано хрестиками на рисунку в третій і четвертій стрічках) вона рівномірно розподіляється між різними кодовими словами зовнішнього коду,

завдяки чому кожне з них містить лише незначну кількість помилок, які можуть бути успішно виправлені декодером. Такий підхід значно підвищує ефективність корекції та забезпечує стабільність передачі даних у цифрових каналах зв’язку.

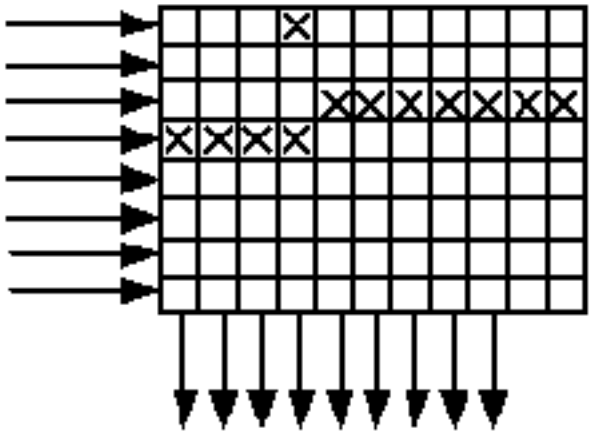


Рис. 3.13 Приклад дії інтерлівірування: розподіл пакетної помилки між кодовими словами для можливості їх корекції

Призначення зовнішнього коду зрозуміле — він використовується для виправлення пакетних (групових) помилок, що виникають під час передавання даних у результаті імпульсних завад, збоїв або короткочасних втрат сигналу. Але навіщо тоді потрібен внутрішній код? Розглянемо ситуацію, показану на рисунку: окрім пакетної помилки, видно також одиночну (у четвертому стовпці, верхній рядок). У кодовому слові, розташованому в цьому стовпці, наявні дві помилки, і зовнішній код, розрахований лише на виправлення однієї помилки, уже не здатен їх коректно відновити. Саме для таких випадків і застосовується внутрішній код, який виконує попередню корекцію — тобто виявляє й виправляє одиночні помилки ще до етапу оброблення зовнішнім декодером. На приймальному боці інформація спершу надходить до внутрішнього декодера, де усуваються поодинокі помилки, після чого дані записуються у буфер пострічково, а виводяться по стовпцях і надходять на зовнішній декодер. Там виконується друга фаза обробки —

виправлення групових (пакетних) спотворень, що залишилися після першого етапу. Такий дворівневий підхід до кодування, заснований на використанні кодів-добутків, забезпечує набагато вищу надійність передавання інформації без суттєвого збільшення обсягу надлишкових даних. Застосування комбінованих (внутрішніх і зовнішніх) кодів має велике практичне значення для цифрової обробки сигналів, адже дозволяє істотно покращити якість зв’язку в умовах перешкод, зниження рівня сигналу або часових спотворень. Завдяки використанню кодів-добутків системи цифрового зв’язку зберігають високу достовірність передавання інформації навіть у шумних або перевантажених каналах, що є ключовим чинником під час побудови сучасних мереж зв’язку, систем супутникового передавання, безпроводових мереж та цифрових стандартів телекомунікацій нового покоління.

4 ЗГЛАДЖУВАННЯ СИГНАЛІВ ПРИ ЦИФРОВІЙ ОБРОБЦІ

4.1 Математичні моделі цифрових сигналів

Математичні моделі цифрових сигналів зазвичай подаються у вигляді векторів або матриць, елементами яких є числові значення. Ці числа можуть бути двійковими (у випадку бінарного сигналу), десятковими (для звичайного аналогового сигналу, переведеного в цифрову форму) або мати іншу природу залежно від типу даних. Будь-який звук, зображення чи відео можна перетворити на цифровий сигнал: звук — у вектор, зображення — у матрицю, а відео — в послідовність таких матриць. Таким чином, цифровий сигнал можна вважати універсальною формою подання інформації, придатною для обробки, передавання та зберігання в сучасних телекомунікаційних системах.

Завдання згладжування сигналу за своєю суттю є різновидом фільтрації — воно полягає у видаленні різких, стрибкоподібних змін рівня сигналу. Вважається, що корисна складова сигналу таких різких переходів не містить. Ступінчастий сигнал, навпаки, характеризується численними короткими, але помітними перепадами амплітуди, через що в його спектрі з’являються високочастотні компоненти, відсутні в «згладженому» варіанті. Тому основною метою будь-якого алгоритму згладжування є визначення того, як саме він ослаблює частоти різних діапазонів. Інакше кажучи, необхідно побудувати амплітудно-частотну характеристику відповідного фільтра, щоб оцінити, чи не виникатимуть у процесі обробки спотворення або артефакти.

Згладжування широко застосовується в цифровій обробці сигналів, зокрема під час проріджування даних. Наприклад, коли потрібно відобразити велике зображення на екрані з нижчою роздільною здатністю або коли необхідно знизити частоту дискретизації аудіосигналу — скажімо, із 48 000 Гц до 44 100 Гц. Таке зменшення частоти вибірок є доволі складною процедурою, адже воно потребує попередньої фільтрації сигналу фільтром нижніх частот. Інакше можуть з’явитися спотворення спектра, відомі як ефект аліасингу.

Розглянемо приклад «невдалого» згладжування сигналу.

$$v[i] = \frac{s[i+1] + s[i] + s[i-1]}{3} \quad (4.1)$$

На перший погляд, проста операція усереднення має забезпечити плавний сигнал на виході. Але виникає закономірне питання — як оцінити, наскільки він справді став «гладшим»? Чи не було згладжування надмірним, через що втратилася частина корисної інформації? Можливо, варто змінити вагові коефіцієнти у формулі — наприклад, замість рівних часток 1/3 використати інші пропорції? Або збільшити кількість точок усереднення, розширивши «вікно» фільтра до п’яти відліків?

Щоб знайти оптимальні параметри, необхідно розуміти, як саме змінюється енергетичний розподіл частот після згладжування, тобто які складові сигналу ослаблюються, а які зберігаються. Це дозволяє обрати найбільш ефективний фільтр для конкретного завдання — чи то обробка аудіо, зображення, чи підвищення якості передавання цифрових сигналів у системах зв’язку.

4.2 Характеристики сигналів в сфері ЦОС

У цьому розділі під сигналом розуміється вектор — тобто впорядкований набір певної кількості чисел. Для прикладу, можна розглянути вектор із чотирьох елементів:

s = (2.5; 5; 0; –5).

Для спрощення подальших розрахунків розглядатимуться лише десяткові дійсні числа.

Одним із найпоширеніших і водночас інтуїтивно зрозумілих типів сигналів є оцифрований звук. Розмір (довжина) такого сигналу визначається тривалістю звукового фрагмента та частотою дискретизації — тобто кількістю вибірок, які робить пристрій за секунду. Кожен елемент сигналу відображає миттєве значення амплітуди звукової хвилі, отримане в результаті процесу вимірювання та збереження.

Як уже зазначалося раніше, один із найпростіших способів згладжування сигналу описується формулою:

$$v[i] = \frac{1}{3}(s[i+1] + s[i] + s[i-1]),\ i \in Z \qquad (4.2)$$

де *s* — початковий сигнал, а *v* — результат згладженого сигналу.

Метод (4.2) ґрунтується на властивості згладжування за допомогою підсумовування. Відомо, що середнє значення, отримане як результат суми великої кількості випадкових чисел, зі збільшенням кількості доданків поступово втрачає випадковість. Іншими словами, шум, який складається з випадкових коливань, послаблюється внаслідок процесу усереднення.

Постає питання: на чому базується вибір коефіцієнтів у формулі (4.2)? Чи справді вони визначаються лише з міркувань усереднення? На перший погляд — так. Проте якщо взяти не три доданки, а шістнадцять або тридцять два, то чи повинні всі відліки, розташовані на різній відстані від центрального елемента s[i], мати однакову вагу? Цілком можливо, що взаємозв’язок між відліками поступово слабшає зі збільшенням відстані між ними.

Якщо, наприклад, проаналізувати запис одного й того самого слова, вимовленого кілька разів поспіль, можна виявити зменшення кореляції між відліками, що віддаляються один від одного. При великих часових інтервалах залежність між відліками з’являється знову через повторення звукових елементів, але в задачах згладжування такі інтервали зазвичай не враховуються. Це пояснюється тим, що шум, як правило, проявляється на коротких ділянках сигналу — у межах окремих звуків, а не на рівні слів чи речень. Якщо ж спотворення виникають на рівні фраз або довших послідовностей, це, як правило, свідчить про наявність штучних ефектів (наприклад, реверберації або відлуння) чи специфічних зовнішніх впливів, а не випадкового шуму. У даному випадку розглядається саме «випадковий» шум, який спотворює сигнал і не несе корисної інформації.

На основі цих міркувань стає очевидним, що кількість доданків у формулі (4.2), тобто порядок фільтра, має визначатися ступенем взаємозалежності між сусідніми відліками. Наприклад, якщо зв’язок між ними спостерігається лише в

межах десяти послідовних вибірок, застосування фільтра тридцятого порядку не лише недоцільне, а й шкідливе — це призведе до надмірного згладжування корисного сигналу, тобто до втрати інформативних компонент. Водночас фільтр третього порядку може виявитися недостатнім, оскільки не враховує всі корисні залежності між вибірками. У таких випадках доцільно проводити експериментальний підбір параметрів фільтра, наприклад дев'ятого порядку, з урахуванням компромісу між якістю згладжування та обчислювальними витратами.

Для оцінювання ступеня взаємозв'язку між сусідніми відліками використовують автокореляційну функцію (АКФ). Цей інструмент дозволяє кількісно визначити рівень кореляції між вибірками сигналу. На практиці побудову АКФ можна виконати за допомогою сучасних математичних середовищ, зокрема Matlab, що дає змогу провести експериментальний аналіз без необхідності вручну обчислювати складні формули.

Як же все-таки обрати коефіцієнти фільтра у формулі (4.2)?

У цьому випадку зручно розглянути реакцію фільтра на одиничний вплив, тобто на сигнал такого виду: …, 0, 0, 1, 0, 0, …

Наприклад, фільтр (4.2) дає наступну реакцію (імпульсну характеристику): …, 0, 1/3, 1/3, 1/3, 0, …

Звідси можна зробити висновок, що після згладжування тривалість сигналу збільшилась до трьох елементів. А якщо використати фільтр із п'яти елементів? Правильно — довжина вихідного сигналу дорівнюватиме п'яти елементам. Наскільки це доцільно, визначається конкретними умовами завдання.

До речі, артефакт, якого намагаються уникнути, вже можна побачити. Імпульсна характеристика (4.2) — це фактично прямокутний імпульс, який не має жодної «гладкості». Досить цікаво, чи не так? Якщо ж використати п'ятиточковий фільтр, на виході отримаємо довший прямокутний імпульс, але з меншою амплітудою. Результат виглядає не надто задовільним. Найпростіший аналіз показує, що звичайне усереднення не є оптимальним методом для ефективного згладжування сигналів.

Пропустимо через розглядуваний фільтр однотональний сигнал певної частоти (не виходячи за межі теореми відліків). Нехай крок дискретизації за часом TdT_dTd дорівнює одиниці, тобто відліки формуються раз на секунду. Візьмемо сигнал із частотою $f = \frac{1}{3T_d} = \frac{1}{3}$ Гц:

$$s_0(t) = \sin(2\pi f_0 t) = \sin!\left(\frac{2\pi t}{3}\right) \tag{4.3}$$

Обмежимось двома періодами:

$$t = \{0,1,2,3,4,5\}, \quad s_0(t) = \{0,\ 0.866,\ 0.866,\ 0,\ -0.866,\ -0.866\} \tag{4.4}$$

Відгук фільтра (вихідна послідовність) становитиме:

$$y = \{0,\ 0.289,\ 0,\ 0,\ 0,\ -0.289\} \tag{4.5}$$

Як бачимо, результат майже нульовий — отже, окремі корисні частотні складові можуть повністю пригнічуватися.

Перевіримо відгук на дещо вищочастотний сигнал:

$$s_1(t) = \sin!\left(\frac{4\pi}{5}\, t\right) \tag{4.6}$$

Для цього випадку форма сигналу на виході зберігається значно краще, що узгоджується з частотною характеристикою фільтра.

Як бачимо, форму сигналу не втрачено. У чому ж справа?

Річ у тім, що амплітудно-частотна характеристика фільтра (4.2) не є монотонною в робочій смузі частот (у діапазоні від нуля до половини частоти дискретизації) і має нуль на частоті, що у три рази менша за частоту дискретизації. Як це показати?

Простіше кажучи, щоб визначити частотну характеристику фільтра, необхідно знайти співвідношення між спектром на виході фільтра та спектром на вході.

Позначимо спектр сигналу s[i] на вході як S(f). Тоді спектр сигналу, затриманого на один такт T_d, виражається через спектр вихідного сигналу за формулою:

$$S(f) * exp(-2\pi j f T_d) \tag{4.7}$$

де j — уявна одиниця.

Спектр сигналу, випередженого на один такт, визначається як:

$$S(f) * exp(2\pi jfT_d) \tag{4.8}$$

Що означає уявна одиниця і як можна обґрунтувати рівняння (4.7) та (4.8)? Якщо записати відомі ряди для синуса, косинуса та експоненти, отримаємо:

$$sin(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots$$
$$cos(t)1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \cdots$$
$$exp(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots \tag{4.9}$$

Якщо взяти число j, для якого j^2 = -1, то останній ряд можна подати через два попередні:

$$exp(jt) = cos(t) + jsin(t) \tag{4.10}$$

Це означає, що будь-яке комплексне число можна подати через експоненту з уявним показником.

Модуль числа (4.10) дорівнює одиниці (тобто квадратному кореню з суми квадратів дійсної та уявної частин).

Для запису будь-якого комплексного числа у формі (4.10) його потрібно поділити та помножити на власний модуль:

$$c = a + jb = |c|\left(\frac{a}{|c|} + j\frac{b}{|c|}\right) = |c|\exp(j\Phi), \tag{4.11}$$

Де:

$$|c| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad cos\Phi = \frac{a}{|c|}, \quad sin\Phi = \frac{b}{|c|}. \tag{4.12}$$

Із формул (4.10), (4.11) та (4.12) випливає, що якщо у показнику експоненти присутня уявна одиниця, помножена на певне дійсне число, то це число виступає аргументом комплексного числа.

У випадку аналізу сигналів модуль комплексного числа відповідає амплітуді гармонічного сигналу, а аргумент — його фазі. Наприклад, якщо розглянути сигнал виду:

$$s(t) = A\sin(2\pi f \cdot t + \Phi) \tag{4.13}$$

можна виокремити амплітуду A та фазу Ф. Множник у показнику експоненти також визначає фазу сигналу, і в деяких випадках його зручно виносити за дужки.

Під час проходження сигналу (4.13) через певний фільтр важливо знати різницю фаз сигналів на вході та на виході — саме цю різницю визначає фільтр на заданій частоті f.

На основі рівнянь (4.7), (4.8) 7 можна показати, що частотна характеристика фільтра (або його передавальна функція) має такий вигляд:

$$K(f) = \frac{V(f)}{S(f)} = \frac{1}{3}[\exp(2\pi j f T_d) + 1 + \exp(-2\pi j f T_d)] = \\ = \frac{1}{3}[1 + 2\cos(2\pi f T_d)] \tag{4.14}$$

Оскільки спектр вихідного сигналу лінійно виражається через спектр вхідного, при виведенні формули (4.14) спектр початкового сигналу скорочується. Варто зазначити, що частотна характеристика фільтра (4.2) є дійсною, тобто цей фільтр не вносить фазових спотворень. Такий ефект досягається завдяки симетричності формули: кожен відлік на виході дорівнює сумі поточного відліку та двох сусідніх.

З фізичної точки зору, подібний алгоритм можна реалізувати лише за наявності пристроїв пам’яті, оскільки в ньому використовуються випереджаючі відліки — для обчислення значення s[i] потрібен також відлік s[i+1]. Проте в сучасних цифрових системах це не є проблемою, адже більшість фільтрів реалізуються саме симетричними. У разі, якщо фазові зсуви виявляться корисними для конкретної задачі, їх можна враховувати навмисно, аналізуючи поведінку алгоритму як у часовій, так і у частотній області.

Побудова графіка залежності від частоти не становить труднощів. Для спрощення аналізу вводять нормовану частоту $f_0 = f \cdot T_d$, корисний діапазон зміни якої становить [0…0,5]. Компоненти сигналу з частотами, вищими за половину частоти дискретизації, за теоремою відліків бути не можуть, оскільки перед оцифруванням сигнал обов’язково проходить через фільтр нижніх частот. Частота дискретизації визначає кількість відліків, що формуються цифровим пристроєм за

секунду. Наприклад, якщо один такт T_d дорівнює одній мілісекунді, то за одну секунду формується 1000 відліків.

Аналіз формули (4.14) показує, що на деякому проміжку коефіцієнт передачі стає від'ємним, тоді як амплітуда за визначенням є додатною величиною. Вихід із цієї ситуації полягає у побудові модуля передавальної функції, перенісши знак мінус у фазову характеристику, яка, до речі, не є сталою. Якщо взяти число «–1», то його можна представити у вигляді комплексного числа з модулем, рівним одиниці, та фазою 180° (π радіан).

Таким чином, триточковий симетричний алгоритм для деяких високочастотних компонент вносить фазовий зсув на 180°, що еквівалентно інверсії вхідного сигналу. Цей ефект легко спостерігати, аналізуючи отриманий раніше відгук на нормовану частоту 2/5 Гц.

Таке спотворення, хоч і не критичне, відіграє важливу роль у цифровій обробці сигналів (ЦОС), оскільки від правильного вибору фільтра залежить точність передавання гармонічних складових, стабільність амплітудно-частотної характеристики та, зрештою, якість зв'язку. Використання симетричних цифрових фільтрів без фазових зсувів дозволяє підвищити достовірність передавання даних, зменшити рівень артефактів та забезпечити коректне відтворення звукових або відеосигналів у телекомунікаційних системах.

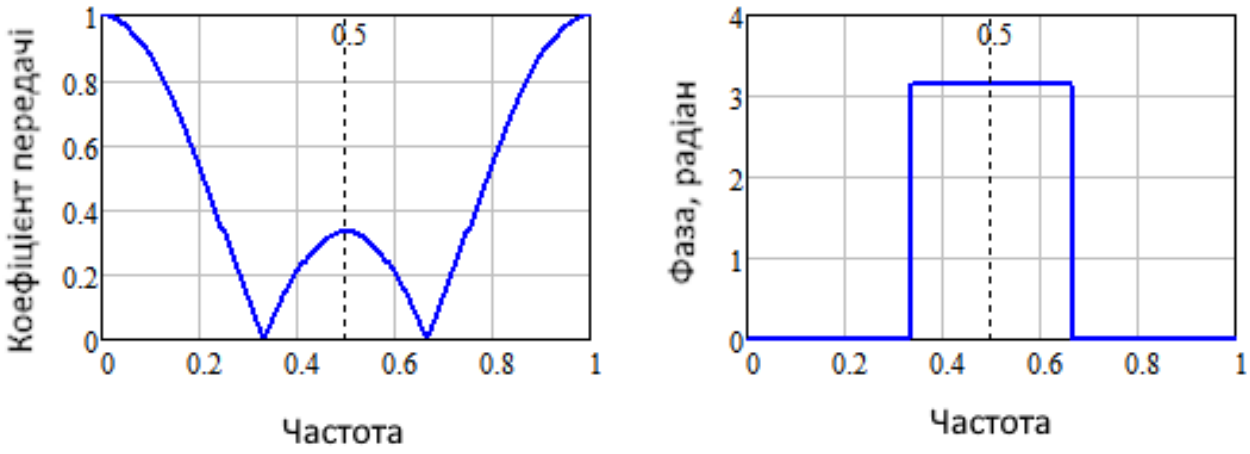


Рис. 4.1 Амплітудно-частотна та фазо-частотна характеристики триточкового симетричного алгоритму згладжування

4.3 Зображення в сфері ЦОС

Що стосується зображень, то тут у певному сенсі діють ті самі принципи, що й для сигналів: можливі амплітудні та фазові спотворення, визначаються імпульсні характеристики, енергія сигналу тощо. Основна відмінність полягає в тому, що замість векторів для обробки використовуються матриці. Також варто врахувати, що для зображень відсутня координата часу — натомість використовується просторове розташування точок, тобто оперують поняттям просторових частот дискретизації. Це розходження має радше формальний характер, адже на математичну суть алгоритмів воно фактично не впливає.

Розглянемо тепер найпростіший алгоритм згладжування зображення за сусідніми пікселями. Відлік v_{00} на виході фільтра визначається на основі значень інтенсивностей у його безпосередньому оточенні.

$$v_{00} = \frac{1}{9}(A + B + C),$$
$$A = s_{00},$$
$$B = s_{01} + s_{10} + s_{0,-1} + s_{-1,0},$$
$$C = s_{-1,1} + s_{11} + s_{1,-1} + s_{-1,-1}. \qquad (4.15)$$

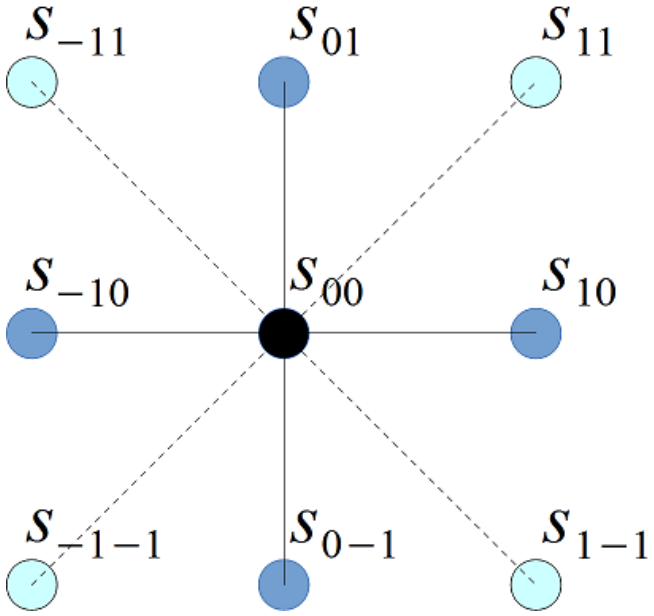


Рис. 4.2 Схема згладжування зображення по сусідніх точках

У формулі (4.15) навмисно виділено три складові — A, B і C, оскільки кожна з чотирьох внутрішніх складових, що входять до B та C, має власну відстань від

центрального відліку s_{00}. Логічно припустити, що найбільша вага належить елементу A, а далі — у порядку зменшення — елементам B і C.

Для зображень спектр та коефіцієнт передавання мають двовимірний характер, тобто залежать від двох частотних змінних: першої — уздовж горизонталі, та другої — уздовж вертикалі (умовно кажучи, для зручності подання).

Фільтр (4.15) має наступний коефіцієнт передачі:

$$K(f_1, f_2) = \frac{1}{9}\left[\begin{matrix}1 + 2\cos(2\pi f_1 T_d) + 2\cos(2\pi f_2 T_d) + \\ +4\cos(2\pi f_1 T_d)\cos(2\pi f_2 T_d)\end{matrix}\right]. \qquad (4.16)$$

Якщо взяти приблизно тридцять дискретних частот і побудувати (рис. 4.3) контурний графік модуля частотної характеристики (4.16), можна спостерігати спотворення, подібні до тих, що зображені на рис. 4.1.

Нижньому лівому куту графіка відповідають найнижчі частоти. Помітно спад амплітудно-частотної характеристики на частотах, які становлять приблизно одну третину від частоти дискретизації. У даному випадку частоти дискретизації дорівнюють 64 для обох координат.

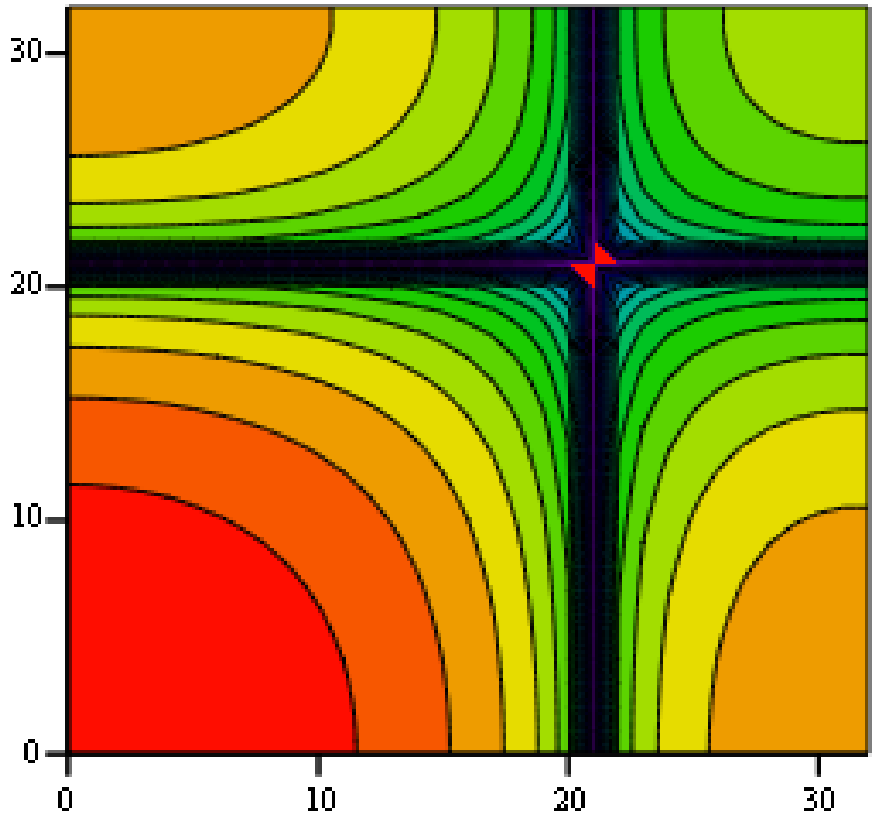


Рис. 4.3 Амплітудно-частотна характеристика дев'ятиточкового симетричного алгоритму згладжування

Змінюючи (переставляючи) коефіцієнти для відліків, зображених на рис. 4.2, можна отримати інший варіант алгоритму згладжування.

$$v_{00} = \left(\frac{1}{4}\right)A + \left(\frac{1}{8}\right)B + \left(\frac{1}{16}\right)C \tag{4.17}$$

Якщо одиничний вплив розташувати в центрі зображення, то відгук фільтра (4.17) матиме такий вигляд.

$$\begin{pmatrix} 1/16 & 1/8 & 1/16 \\ 1/8 & 1/4 & 1/8 \\ 1/16 & 1/8 & 1/16 \end{pmatrix} \tag{4.18}$$

По суті, вираз (4.18) є імпульсною характеристикою фільтра, що включає дев’ять основних відліків, оскільки всі інші дорівнюють нулю. Сума всіх відліків цієї імпульсної характеристики дорівнює одиниці. Амплітудно-частотна характеристика фільтра, описаного у формулі (4.17), подана на рис. 4.4.

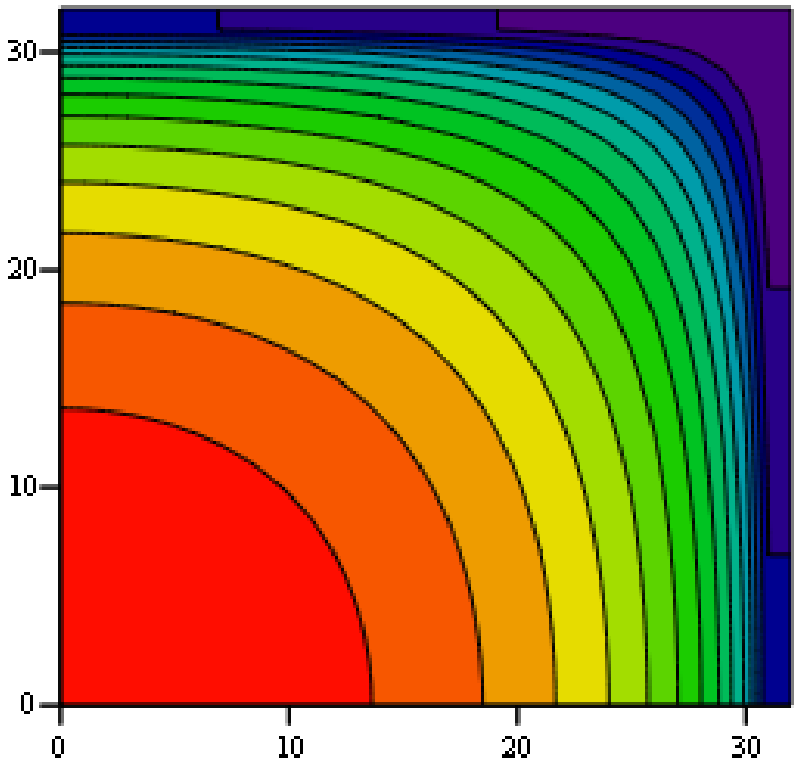


Рис. 4.4 Амплітудно-частотна характеристика дев'ятиточкового симетричного алгоритму згладжування

Під час розроблення алгоритмів цифрової обробки сигналів — зокрема фільтрації та згладжування — не слід покладатися лише на інтуїтивні методи, такі як просте усереднення. Подібні підходи дають лише грубу оцінку результату й не

враховують складних характеристик сигналів, що може призводити до спотворень чи втрати корисної інформації.

Більш універсальним і математично обґрунтованим підходом є метод зваженого сумування. У таких алгоритмах кожен відлік сигналу множиться на певну константу (ваговий коефіцієнт), після чого результати підсумовуються. Це дозволяє враховувати різний внесок сусідніх точок сигналу в кінцеве значення. Віддаленим від центру відлікам зазвичай призначають менші ваги, що виправдано як зі статистичної точки зору (ослаблення кореляції зі зростанням відстані), так і з функціональної (можливість підібрати коефіцієнти так, щоб амплітудно-частотна характеристика фільтра залишалася монотонною).

Амплітудно-частотна характеристика (АЧХ) є одним із ключових показників якості алгоритму цифрової обробки сигналів (ЦОС). Вона визначає, які частоти сигналу фільтр пропускає, а які — пригнічує. Саме за формою АЧХ можна оцінити стабільність фільтра, його ефективність у боротьбі з шумом і ступінь спотворення сигналу. Зі збільшенням порядку фільтра зростає кількість ступенів свободи, а отже, і можливість точніше налаштувати його параметри для досягнення бажаних характеристик зв’язку — наприклад, для зменшення втрат або компенсації завад у каналі передачі.

Не менш важливою є фазо-частотна характеристика (ФЧХ), яка визначає часові зсуви різних частотних компонент сигналу. У реальних системах зв’язку саме фазові викривлення часто призводять до втрати синхронізації чи розмиття сигналу. Для симетричних алгоритмів, що не вносять фазових спотворень, ця характеристика залишається сталою. Проте в алгоритмах реального часу, де вихід формується миттєво після приходу нового відліку, забезпечити ідеальну симетрію неможливо — через це сигнал на виході може зазнавати затримки або зміщення, що особливо критично для високошвидкісних систем передачі даних.

Окрему увагу варто приділяти імпульсній характеристиці фільтра, яка відображає реакцію системи на одиничний імпульс. Вона дозволяє наочно оцінити часові властивості алгоритму та зрозуміти, як він впливає на форму сигналу або зображення.

Нарешті, важливим етапом є енергетичний аналіз алгоритму, який показує, наскільки ефективно система передає енергію сигналу без втрат. В аналізі систем ЦОС цей підхід дозволяє оцінити реальні втрати потужності, відновлення сигналу після фільтрації та загальний рівень завадостійкості. У контексті телекомунікаційних систем подібні методи сприяють підвищенню якості зв’язку, забезпеченню стабільної передачі даних та мінімізації помилок у каналі.

ВИСНОВКИ

У ході виконання кваліфікаційної роботи на тему «Алгоритми цифрової обробки сигналів для покращення якості зв’язку в умовах перешкод» було проведено комплексне дослідження принципів, методів і моделей цифрової обробки сигналів (ЦОС), що застосовуються в сучасних телекомунікаційних системах. Особливу увагу приділено аналізу алгоритмів згладжування, фільтрації, кодування та корекції помилок, які відіграють ключову роль у забезпеченні високої якості передачі інформації навіть за наявності шумів, завад та спотворень у каналі зв’язку.

У роботі розглянуто математичні моделі цифрових сигналів, поданих у вигляді векторів і матриць, елементи яких є числовими відліками дискретизованих процесів. Таке представлення дало змогу формалізувати процедури обробки сигналів і застосовувати математичні методи для їх оптимізації. Зокрема, досліджено процес згладжування як один із фундаментальних етапів цифрової обробки, що дозволяє зменшити високочастотні складові та усунути різкі стрибкоподібні зміни, які найчастіше є проявом шуму. Було показано, що ефективність згладжування безпосередньо залежить від правильно обраної амплітудно-частотної характеристики фільтра та його вагових коефіцієнтів.

Проаналізовано різні типи фільтрів, зокрема триточкові та дев’ятиточкові алгоритми, які реалізують операції зваженого сумування відліків сигналу. Показано, що симетричні фільтри не вносять фазових спотворень, зберігаючи форму сигналу, що особливо важливо для систем зв’язку, де фаза несе інформаційне навантаження. Розглянуто також двовимірні алгоритми згладжування для цифрових зображень, які за аналогією з одновимірними сигналами забезпечують просторову фільтрацію, що є актуальним для систем відеозв’язку та оптичного спостереження.

Окремий розділ присвячено методам підвищення завадостійкості за допомогою завадостійкого кодування. Розглянуто приклади кодів із перевіркою на парність та коди Хеммінга, що дозволяють виявляти й виправляти одиничні помилки, а також кодів-добутків, які комбінують внутрішнє та зовнішнє кодування

для усунення пакетних завад. Показано, що саме поєднання методів кодування з алгоритмами ЦОС дає змогу досягти найвищого рівня достовірності переданої інформації.

Проведений аналіз частотних, фазових та імпульсних характеристик фільтрів дозволив визначити оптимальні параметри алгоритмів ЦОС для різних типів сигналів і каналів зв’язку. Зокрема, встановлено, що фільтри з плавною частотною характеристикою та мінімальними фазовими зсувами забезпечують найкраще співвідношення між ефективністю фільтрації та збереженням структури корисного сигналу.

Важливим елементом дослідження став також енергетичний аналіз алгоритмів, який дозволив оцінити втрати енергії сигналу під час обробки та визначити шляхи їх мінімізації. Це особливо актуально для систем, що працюють в умовах обмеженого енергоспоживання або з використанням безпроводових каналів із нестабільними характеристиками.

Таким чином, результати виконаної роботи свідчать, що алгоритми цифрової обробки сигналів є фундаментальною основою підвищення якості зв’язку в умовах перешкод. Вони забезпечують ефективне пригнічення шумів, стабільність передачі, мінімізацію спотворень і відновлення структури сигналу. Використання оптимізованих фільтраційних і корекційних алгоритмів у поєднанні з адаптивними методами кодування дозволяє створювати сучасні високоякісні телекомунікаційні системи, здатні підтримувати надійний обмін даними навіть у складних умовах середовища передачі. Отримані результати мають як теоретичне, так і практичне значення для подальшого вдосконалення систем цифрового зв’язку, у тому числі 5G, 6G та інших перспективних технологій майбутнього.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Самборський І. І., Шолохов С. М., Юрченко О. В., Ніколаєнко Б. А. Основи цифрової обробки сигналів: навчальний посібник. – Київ: ІСЗЗІ КПІ ім. І. Сікорського, 2021. – 171 с.
2. Рибальченко М. О., Єгоров О. П., Зворикін В. Б. Цифрова обробка сигналів: навчальний посібник. – Дніпро: НМетАУ, 2018. – 79 с.
3. Коваль В. В., Розорінов Г. М., Сукач Г. О. Цифрова обробка аудіо- та візуальних сигналів у мультимедійних системах: навчальний посібник. – Київ: Наукова думка, 2008. – 144 с.
4. Олексенко П. Ф., Коваль Г. М., Розорінов Г. О., Сукач Г. О. Завадостійке кодування в телекомунікаційних системах: навчальний посібник. – Одеса: ОНАЗ ім. О. С. Попова, 2012. – 192 с.
5. Іващенко П. В. Теорія завадостійкості приймання сигналів: навчальний посібник (модуль 3 «Теорія зв’язку»). – Одеса: ОНАЗ ім. О. С. Попова, 2012. – 84 с.
6. Майданюк В. П. Кодування та захист інформації: навчальний посібник. – Вінниця: ВНТУ, 2009. – 164 с.
7. Рубіш В. В., Плекан Р. М. Цифрова обробка сигналів: навчально-методичний посібник. – Ужгород: УжНУ «Говерла», 2024. – 46 с.
8. Батаєв О. П. та ін. Теорія електричного зв’язку: навчальний посібник. – Харків: ХНУРЕ, 2010. – 256 с.
9. Варфоломеєва О. Г., Отрох С. І., Твердохліб М. Г., Чумак О. І. Оптимальне приймання сигналів. Основи теорії завадостійкості. Ч. 4: навчальний посібник. – Київ: ДУТ, 2018. – 180 с.
10. Новосядлий С. П., Мельник Л. В. Методи адаптивного оброблення сигналів: навчальний посібник. – Київ: КПІ ім. І. Сікорського, 2023. – 120 с.
11. Oppenheim A. V., Schafer R. W. Discrete-Time Signal Processing (3rd ed.). – Upper Saddle River: Prentice Hall, 2010. – 1120 с.
12. Proakis J. G., Manolakis D. G. Digital Signal Processing: Principles, Algorithms, and Applications (4th ed.). – Upper Saddle River: Prentice Hall, 2006. – 1096 с.

13. Haykin S. Adaptive Filter Theory (5th ed.). – Upper Saddle River: Prentice Hall, 2013. – 912 с.
14. Kay S. M. Fundamentals of Statistical Signal Processing, Vol. I: Estimation Theory. – Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1993. – 580 с.
15. Kay S. M. Fundamentals of Statistical Signal Processing, Vol. II: Detection Theory. – Upper Saddle River: Prentice Hall, 1998. – 611 с.
16. Poor H. V. An Introduction to Signal Detection and Estimation (2nd ed.). – New York: Springer, 1994. – 607 с.
17. Proakis J. G. Digital Communications (5th ed.). – New York: McGraw-Hill, 2008. – 1096 с.
18. Sklar B. Digital Communications: Fundamentals and Applications (2nd ed.). – Upper Saddle River: Prentice Hall, 2001. – 1104 с.
19. Simon M. K., Alouini M.-S. Digital Communication over Fading Channels (2nd ed.). – Hoboken: Wiley, 2005. – 928 с.
20. Rappaport T. S. Wireless Communications: Principles and Practice (2nd ed.). – Upper Saddle River: Prentice Hall, 2002. – 736 с.
21. Tse D., Viswanath P. Fundamentals of Wireless Communication. – Cambridge: Cambridge University Press, 2005. – 564 с.
22. Goldsmith A. Wireless Communications. – Cambridge: Cambridge University Press, 2005. – 656 с.
23. Новосядлий С. П., Мельник Л. В. «Адаптивні фільтри в цифровій обробці сигналів сучасних телекомунікаційних систем». – Східно-Європейський журнал передових технологій, 2013, № 2/9. – С. 48–54.
24. Остапенко Л. Ю., Горбенко О. М., Коробко І. В. «Система моделювання подолання перешкод і організації комунікацій із роями БПЛА». – Сучасні напрями наукових досліджень, 2025, № 3. – С. 15–28.
25. Скопа О. О. «Завадостійкість приймання цифрових сигналів у комп’ютерних радіомережах». – Вісник ОНЕУ, 2014, № 2. – С. 73–79.

26. Васюта К. С., Дяченко В. М. «Порівняльний аналіз методів формування активних імітуючих перешкод із застосуванням ТСД». – Системи озброєння і військова техніка, 2022, № 4. – С. 45–52.
27. Гуменюк Д. О. «Аналіз і проєктування адаптивних фільтрів для шумопригнічення». – Східно-європейський науковий вісник, 2022, № 6. – С. 33–41.
28. Дікарєв О. В. «Методи цифрового фільтрування сигналів у зашумлених каналах зв’язку». – Вісник ДУТ, 2017, № 1. – С. 21–28.
29. Коваль В. В., Сукач Г. О. «Оцінювання завадостійкості систем цифрового зв’язку з кодуванням і згортковою декодуацією». – Проблеми телекомунікацій, 2011, № 2. – С. 59–67.
30. Іващенко П. В. «Оптимальні та неоптимальні методи приймання дискретних сигналів у каналах з адитивним білим шумом». – Проблеми інформатизації та управління, 2013, № 1. – С. 12–19.
31. Кравченко І. В. «Практичні аспекти цифрової обробки сигналів і зображень для підвищення SNR». – Технологічні комплекси, 2025, № 2. – С. 90–98.
32. Poor H. V., Alouini M.-S., Simon M. K. «Communication over fading channels: performance bounds and algorithms». – IEEE Trans. Commun., 2003, Vol. 51, No. 6. – С. 1006–1019.
33. Chen S., Wu Y., Hanzo L. «Adaptive Modulation and Coding for Fading Channels: A Survey». – IEEE Commun. Surveys & Tutorials, 2011, Vol. 13, No. 2. – С. 356–373.
34. Benesty J., Chen J., Huang Y. «A Perspective on Beamforming and its Applications to Speech Enhancement». – Applied Acoustics, 2008, Vol. 64, No. 7. – С. 719–731.
35. Tarokh V., Seshadri N., Calderbank A. R. «Space–Time Codes for High Data Rate Wireless Communication: Performance Criterion and Code Construction». – IEEE Trans. Inform. Theory, 1998, Vol. 44, No. 2. – С. 744–765.
36. Simon M. K., Divsalar D. «Some new twists to problems involving the Gaussian probability integral». – IEEE Trans. Commun., 1998, Vol. 46, No. 2. – С. 200–210.
37. Verdu S. «Multiuser Detection». – IEEE Trans. Commun., 1998, Vol. 46, No. 5. – С. 530–570.

38. Candès E. J., Wakin M. B. «An Introduction To Compressive Sampling». – IEEE Signal Processing Magazine, 2008, Vol. 25, No. 2. – C. 21–30.
39. Turin G. L. «Introduction to Matched Filters». – IRE Trans. Inform. Theory, 1960, Vol. 6, No. 3. – C. 311–329.
40. Kay S. M. «A Fast and Accurate Single Frequency Estimator». – IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1988, Vol. 36, No. 1. – C. 119–120.

ДЕМОНСТРАЦІЙНІ МАТЕРІАЛИ

ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙ

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА

АЛГОРИТМИ ЦИФРОВОЇ ОБРОБКИ СИГНАЛІВ ДЛЯ ПОКРАЩЕННЯ ЯКОСТІ ЗВ'ЯЗКУ В УМОВАХ ПЕРЕШКОД

Виконав:
студент групи ТСДМ-62
Олександр ШЕРИХОВ

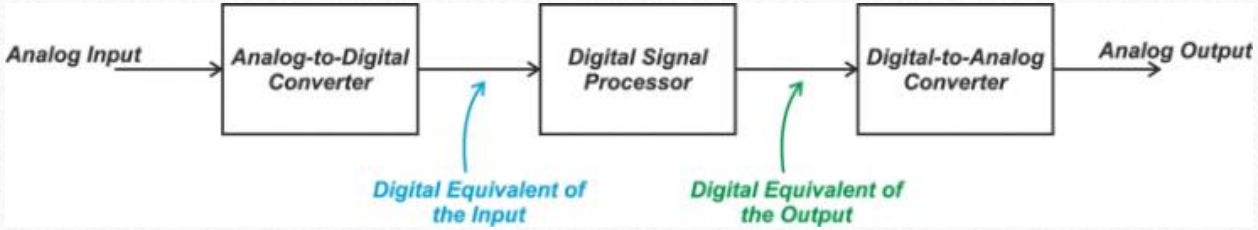
МЕТА РОБОТИ ТА АКТУАЛЬНІСТЬ

- Мета роботи – дослідження, аналіз та оптимізація алгоритмів цифрової обробки сигналів, спрямованих на підвищення завадостійкості та якості передавання інформації в телекомунікаційних системах, особливо в умовах дії шумів, інтерференції та нестабільності каналів зв’язку.
- Об’єкт дослідження – процес цифрової обробки сигналів у телекомунікаційних системах, що включає дискретизацію, квантування, спектральний аналіз, фільтрацію та корекцію спотворень сигналу.
- Предмет дослідження – алгоритми та методи обробки сигналів (фільтрація, згладжування, спектральний аналіз, кодування та корекція помилок), що застосовуються для забезпечення стабільності та достовірності сигналів у цифрових каналах зв’язку.

Актуальність.

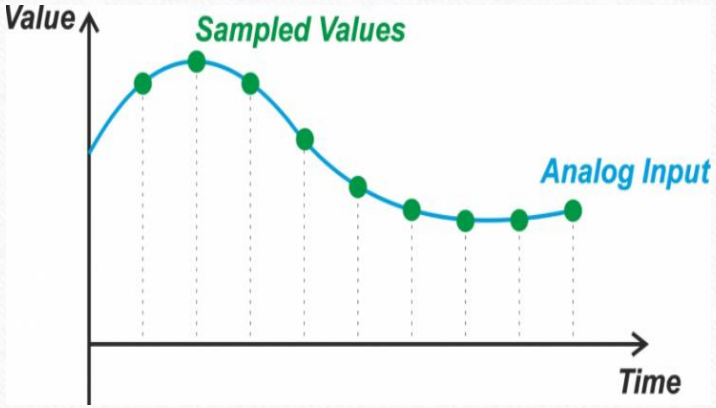
- Сучасні телекомунікаційні системи працюють в умовах постійного зростання обсягів даних та підвищення вимог до швидкості, надійності й завадостійкості зв’язку. Однією з ключових проблем залишається негативний вплив різноманітних завад — шумів, імпульсних спотворень, інтерференції та нестабільності каналів зв’язку. Це вимагає розроблення та вдосконалення алгоритмів цифрової обробки сигналів, здатних забезпечити якісний зв’язок у складних умовах. Таким чином, тема роботи є актуальною для розвитку систем 5G/6G, сенсорних мереж, телекомунікаційних модемів та DSP-процесорів, де якість сигналу напряму залежить від ефективності алгоритмів ЦОС.

Усунення проблем за допомогою ЦОС

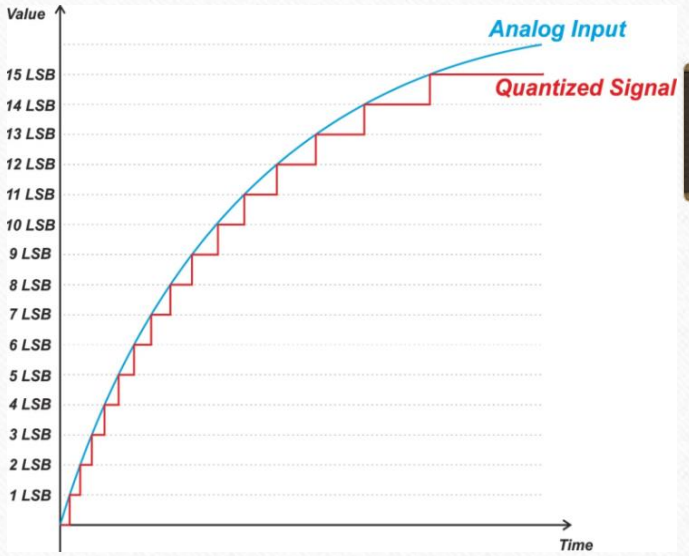


Аналого-цифрові (А/Ц) та цифро-аналогові (Ц/А) перетворювачі на вході та виході блоку обробки сигналів

- Цифрові схеми працюють із дискретними рівнями (“0” і “1”), тому менш чутливі до шумів, змін температури та параметрів компонентів. Вони забезпечують стабільну та гнучку обробку сигналів і дозволяють реалізовувати складні математичні операції, недоступні для аналогових схем.
- Оскільки реальні сигнали аналогові, застосовуються АЦП і ЦАП: перший переводить сигнал у цифрову форму через дискретизацію та квантування, другий відновлює його після обробки. Це створює основу цифрової обробки сигналів у сучасних телекомунікаційних системах.



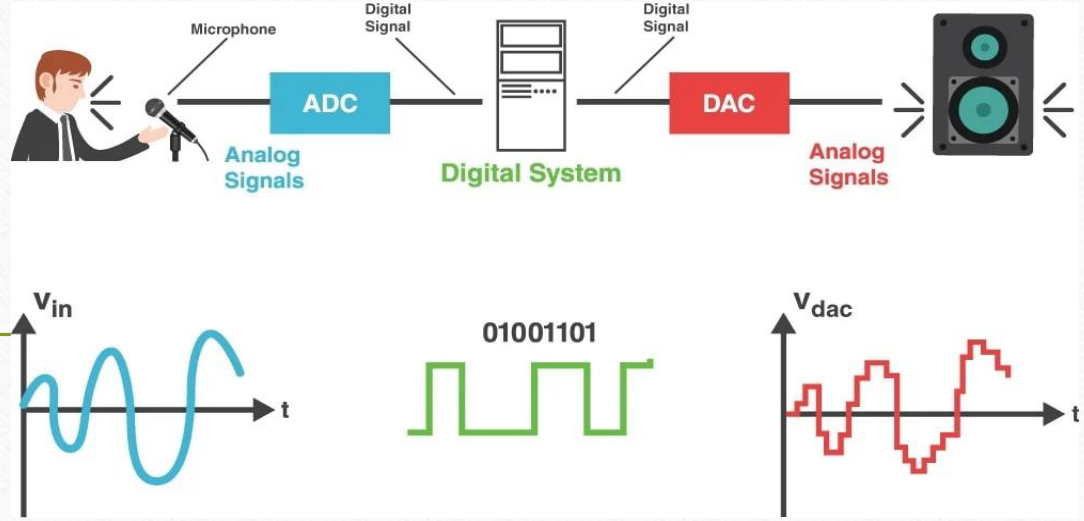
Вибірка аналогового вхідного сигналу через рівні проміжки часу



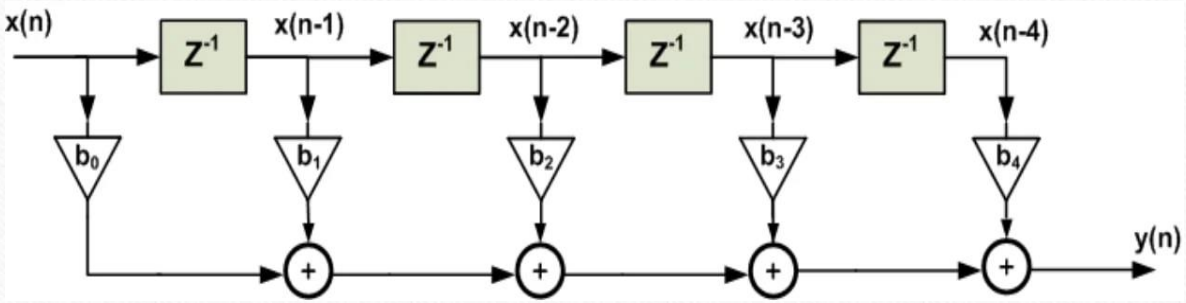
Ілюстрація показує, як 4-бітний АЦП може перетворити аналоговий вхід на дискретні рівні

Роль цифро-аналогового перетворювача

- Після цифрової обробки сигнал часто потрібно повернути у аналогову форму — це виконує ЦАП, який перетворює дискретні числові значення у безперервний сигнал для динаміків, підсилювачів або інших пристроїв. У поєднанні з АЦП він формує замкнений цикл ЦОС.
- ЦСП є обчислювальним ядром, яке виконує математичні операції над відліками сигналу в реальному часі. Він може бути реалізований як мікропроцесор, ПЛІС або спеціалізований DSP-чип. Різні структури реалізації фільтрів (пряма, каскадна, паралельна) дозволяють оптимізувати швидкодію, енергоспоживання й точність обробки.
- Завдяки гнучкості ЦОС застосовується в аудіо- та відеообробці, розпізнаванні мови, цифровій обробці зображень, радіолокації, навігації та телекомунікаціях, забезпечуючи модифікацію, аналіз і відновлення сигналів з високою точністю.



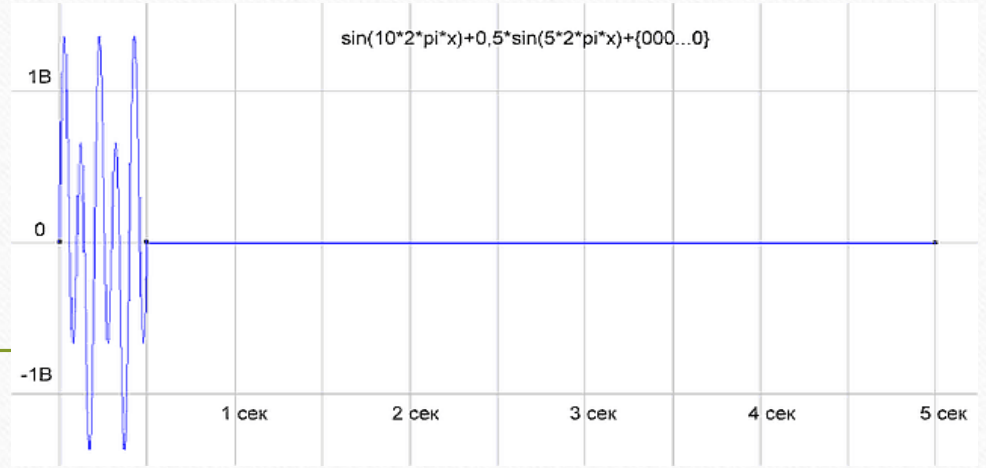
Роль ЦАП



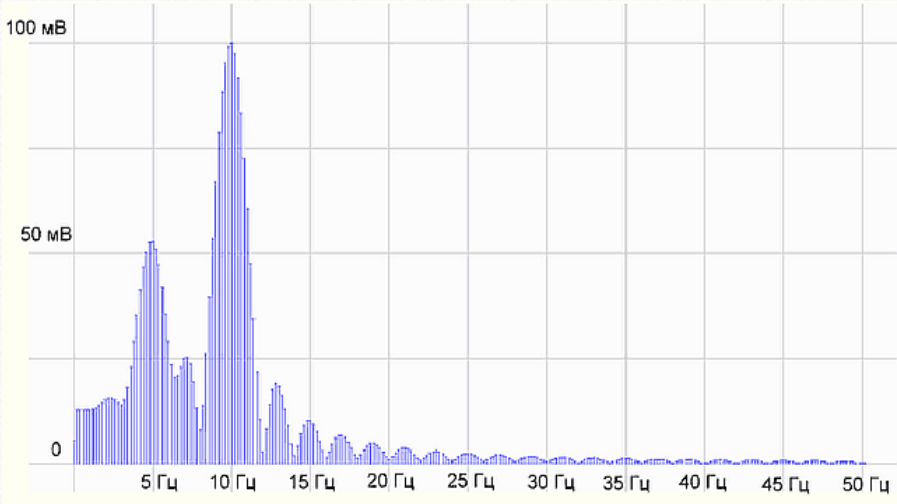
Блок ЦОС

Перетворення Фур'є та спектр сигналу

- Для аналізу спектра сигналу спочатку АЦП перетворює аналоговий сигнал у дискретні відліки, після чого алгоритм ЦОС (ДПФ або ШПФ) обчислює спектр і виділяє частотні складові. Щоб перевірити коректність алгоритму, формується тестовий сигнал із двох синусоїд — на спектрі повинно бути два піки, що підтверджує правильність роботи програми.
- Такий метод активно застосовується у телекомунікаціях, акустиці, медицині та радіолокації для виявлення гармонік, шумів і структури сигналу. При зменшенні часу вимірювання (з 5 с до 0,5 с) виникають спектральні спотворення — особливо для нижчої частоти. Це вирішується методом **zero-padding** — доповненням вибірки нулями, що підвищує роздільну здатність спектра та зменшує похибки аналізу коротких сигналів.

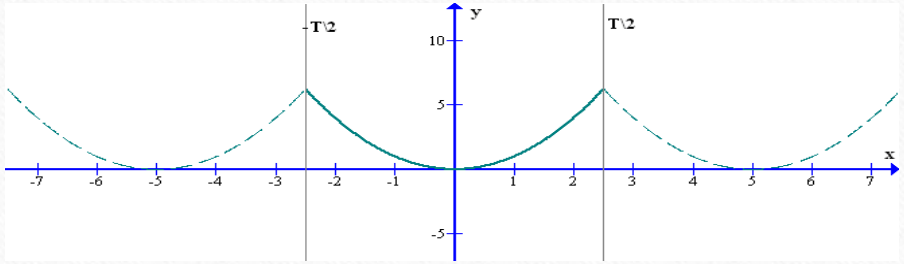


Більш точна апроксимація частотного спектра



Отриманий спектр

Безперервна функція та її подання за допомогою ряду Фур’є, практичне застосування



Подання неперіодичної вихідної функції поруч Фур'є

Будь-який сигнал можна розкласти на суму синусоїд → це дає змогу аналізувати його у частотній області, що є основою ЦОС (фільтрація, аналіз спектра, модуляція, кодування).

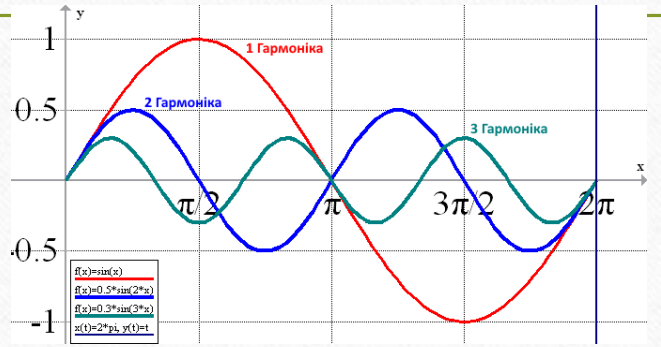
Однак ряд Фур’є завжди утворює періодичний сигнал. Якщо в інтервалі T немає цілого числа періодів → з’являються артефакти (зайві гармоніки).

Тому для правильного спектру потрібно:

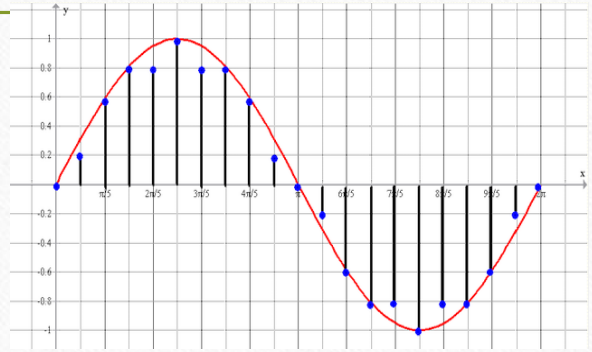
достатній час спостереження T

відповідна частота дискретизації Fd

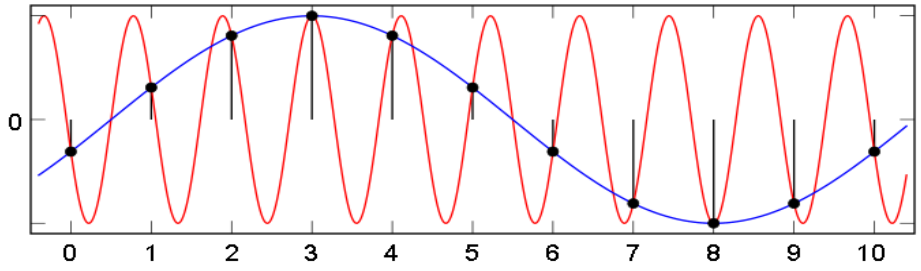
виконання теореми Котельникова: $Fd \geq 2F\max$



Періоди (частоти) гармонійних складових ряду Фур'є (тут T=2π)



Оцифрований сигнал - N відліків отриманих за час T



Поява помилкового сигналу низької частоти за недостатньо високої частоти дискретизації

Дискретне перетворення Фур'є (ДПФ)

ДПФ дозволяє виконувати спектральний аналіз сигналу на комп'ютері. Воно схоже на ряд Фур'є, але працює **з дискретними відліками**, а кількість гармонік обмежена **N/2**:

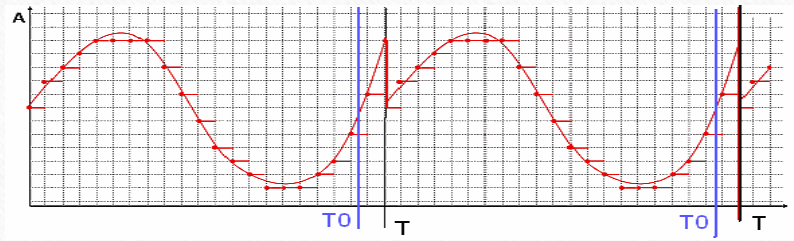
$$u_k = \sum_{s=0}^{N/2} [a_s \cos(s\omega_1 t_k) + b_s \sin(s\omega_1 t_k)],$$

- k — номер відліку у часі,
- s — номер гармоніки у спектрі,
- $\omega_1 = 2\pi/T$.

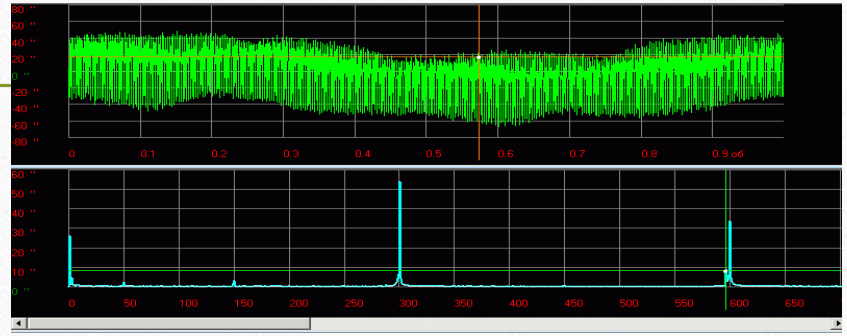
При перетворенні неперіодичного сигналу в ряд Фур'є отримується **періодична функція**, що повторюється за межами інтервалу [0, T]. Якщо остання і перша точки сигналу не збігаються за фазою — виникає **розрив**, що додає **зайві високочастотні гармоніки** (артефакти).

Щоб отримати коректний спектр, потрібно:

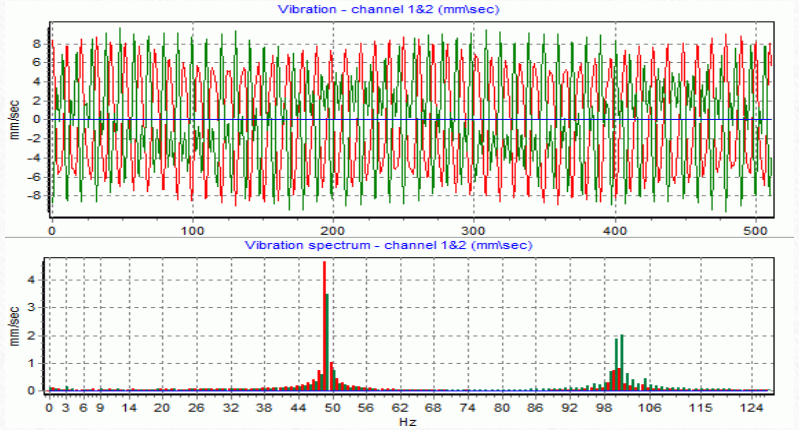
- щоб у проміжку T містилося **ціле число періодів** кожної гармоніки;
- або збільшити тривалість спостереження сигналу.



Періодична функція f(x) із періодом T0, при періоді вимірювання T > T0



Приклад функції та спектра сигналу кінематичної похибки редуктора



Приклад функції та спектру сигналу вібрації ротора

Варіація кодів Хеммінга в ЦОС

Формування кодового слова k шляхом множення інформаційного слова d на породжувальну матрицю G

$$k = d * G = (1\,0\,1\,0) * \begin{pmatrix} 1\,0\,1\,1\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,1\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,0\,1\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,1\,0\,1\,1 \end{pmatrix} = (1\,0\,0\,1\,1\,1\,0)$$

Генерувальна матриця коду Хеммінга (7,4), побудована на основі породжувального полінома g(x)=1011

$$G = \begin{pmatrix} 1\,0\,1\,1\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,1\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,0\,1\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,1\,0\,1\,1 \end{pmatrix}$$

Коди Хеммінга (7,4), (15,11), (31,26)

•Формула: **(2^m − 1, 2^m − 1 − m)**.

•**Виправляють 1 помилку**, працюють добре при слабких завадах.

•**Перевага** – мінімальна надлишковість.

•**Недолік** – ефективність падає при сильному шумі.

Породжувальний поліном

g(x) → має ділити $(x^n + 1)$ у GF(2).

Приклад для (7,4): **$g(x)=x^3+x+1$**.

На його основі будують **генерувальну матрицю G** → формує кодове слово.

Матриця **H** → визначає помилку через синдром.

Мінімальна відстань Хеммінга (d)

Для (7,4): **d = 3 → виправлення 1 помилки**.

Інші коди

•Голея (23,12,7) – до 3 помилок.

•Ріда–Соломона – для пакетних помилок (цифрове ТБ, супутники).

Висновок: коди Хеммінга прості, економні та важливі для ЦОС і телекомунікацій.

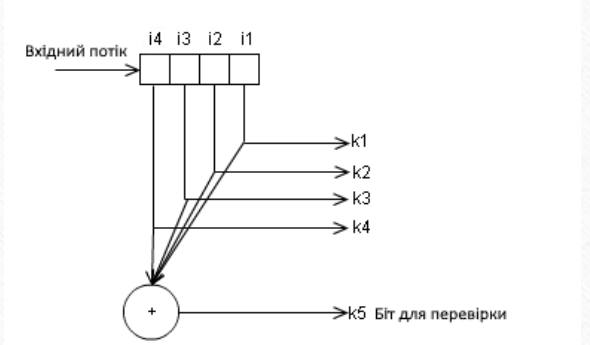
$$s = k * H = (1\,0\,0\,0\,1\,1\,0) * \begin{pmatrix} 1\,0\,1 \\ 1\,1\,1 \\ 1\,1\,0 \\ 0\,1\,1 \\ 1\,0\,0 \\ 0\,1\,0 \\ 0\,0\,1 \end{pmatrix} = (0\,1\,1)$$

Обчислення синдрому s шляхом множення кодового слова k на перевірочну матрицю H

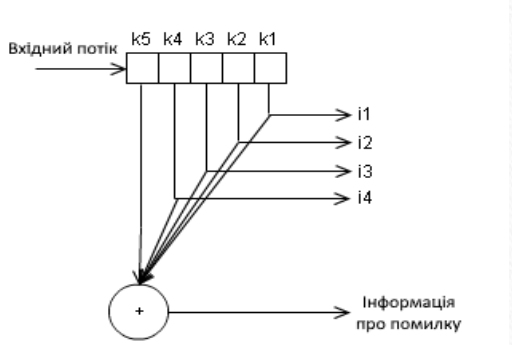
Повний набір інформаційних та кодових слів для коду Хеммінга (7,4)

Інформаційне слово	Кодове слово
0000	0000000
0001	0001011
0010	0010110
0011	0011101
0100	0100110
0101	0101111
0110	0111010
0111	0110001
1000	1011000
1001	1010011
1010	1001110
1011	1000101
1100	1110100
1101	1111111
1110	1100010
1111	1101001

Альтернативне завадостійке кодування



Структурна схема кодера з перевіркою на чесність, що формує контрольний біт k5 як суму за модулем 2 усіх бітів вхідного потоку



Структурна схема декодера з перевіркою на чесність, який визначає наявність помилки у прийнятому повідомленні шляхом перевірки суми всіх бітів за модулем 2

Під час передавання даних у каналі виникають помилки через шуми та завади. Щоб їх виявляти й виправляти, застосовують завадостійке кодування — додавання перевірочних бітів, які дозволяють декодеру перевірити достовірність повідомлення. Надлишковість коду визначає кількість контрольної інформації:

Надлишковість=k/(i+k), де i — інформаційні біти, k — перевірочні.

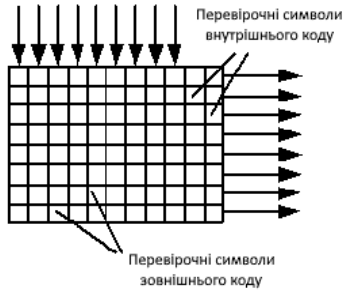
Перевірка на чесність (паритет)
- – додається один біт, що робить кількість «1» парною.
- – дозволяє виявити помилку, але не виправити.
- – працює лише для одиночних помилок.

Коди-добутки
- – використовуються для пакетних (групових) помилок;
- – дані розміщуються у вигляді матриці, кодування виконується по рядках і по стовпцях;
- – застосовується інтерлівірування (перемішування), що розподіляє групову помилку на окремі біти;
- – система має внутрішній (для одиночних) і зовнішній (для групових) код — подвійна корекція.

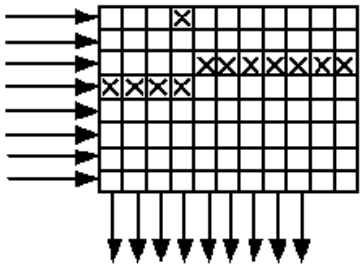
Завдяки таким методам системи цифрового зв’язку забезпечують стабільний зв’язок, високий рівень достовірності передачі та захист від шумів у мобільних, супутникових та оптичних каналах.



Структурна схема подвійного (внутрішнього та зовнішнього) кодування в системі передачі даних



Принцип формування перевірочних символів у кодах-добутках для підвищення завадостійкості передачі даних



Приклад дії інтерлівірування: розподіл пакетної помилки між кодовими словами для можливості їх корекції

Характеристики сигналів в сфері ЦОС

Сигнал — це вектор чисел (наприклад s = (2.5; 5; 0; –5)). Типовий приклад — оцифрований звук, де кожен елемент = миттєва амплітуда.

Для зменшення шуму застосовують згладжування. Найпростіший метод:

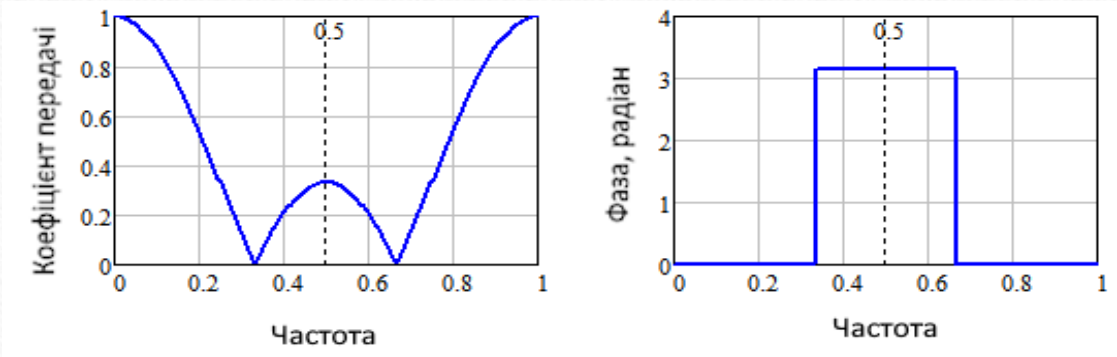
- v[i]=1/3 (s[i+1]+s[i]+s[i-1]), i∈Z, де s — початковий сигнал, а v — результат згладженого сигналу.

Він **усереднює сусідні значення**, але може **приглушувати корисний сигнал**, особливо якщо його частота близька до частоти згладжування.

Тому важливо:

- правильно вибирати **порядок фільтра**;
- враховувати **кореляцію між відліками**;
- аналізувати **імпульсну та частотну характеристики**.

Простий фільтр може придушити цілі частотні компоненти, тому автокореляція та спектральний аналіз допомагають підібрати оптимальні коефіцієнти.



Амплітудно-частотна та фазо-частотна характеристики триточкового симетричного алгоритму згладжування

Зображення в сфері ЦОС

- Обробка зображень базується на тих самих принципах, що й цифрова обробка сигналів: присутні амплітудні, фазові та енергетичні спотворення. Різниця полягає лише в тому, що використовуються матриці та просторові частоти замість часових.
- Згладжування здійснюється через усереднення значень сусідніх пікселів або за допомогою зважених коефіцієнтів, що дозволяє точніше формувати амплітудно-частотну характеристику й уникати фазових спотворень. Фільтр описується імпульсною характеристикою та має двовимірний спектр.
- Метод зваженого сумування є точнішим за просте усереднення, оскільки дозволяє контролювати передавання частот та збереження структури зображення. Додатково проводиться фазовий та енергетичний аналіз, що дає змогу оцінити втрати, відновлення сигналу й забезпечити стабільність передачі даних у телекомунікаційних системах.

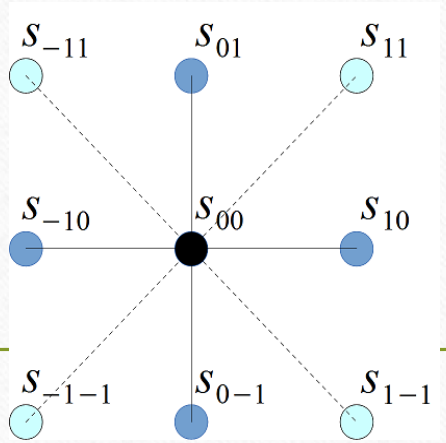
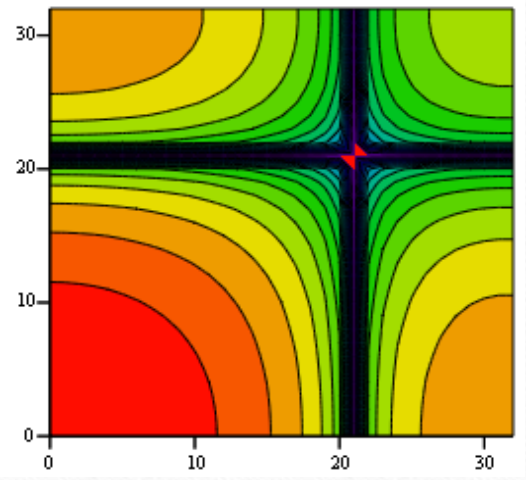
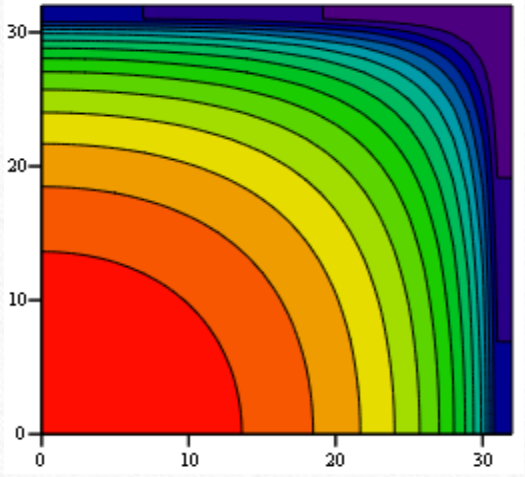


Схема згладжування зображення по сусідніх точках



Амплітудно-частотна характеристика дев'ятиточкового симетричного алгоритму згладжування



Амплітудно-частотна характеристика дев'ятиточкового симетричного алгоритму згладжування

ВИСНОВКИ

- У кваліфікаційній роботі проведено комплексне дослідження алгоритмів цифрової обробки сигналів (ЦОС), які використовуються для підвищення якості зв’язку в умовах дії шумів та перешкод.
- Розглянуто математичні моделі цифрових сигналів у вигляді векторів і матриць, що дозволило формалізувати процес обробки та застосувати оптимізаційні методи.
- Особливу увагу приділено алгоритмам згладжування та фільтрації, які зменшують високочастотні складові та забезпечують збереження корисної інформації.
- Окремий розділ присвячено підвищенню завадостійкості за допомогою цифрового кодування: розглянуто коди Хеммінга, коди з перевіркою на парність та коди-добутки, які забезпечують виявлення та виправлення помилок.
- Досліджено частотні, фазові та енергетичні характеристики алгоритмів ЦОС, а також визначено параметри, що впливають на достовірність і стійкість передавання сигналу.
- Показано, що поєднання оптимізованих фільтрів із методами корекції помилок створює основу сучасних телекомунікаційних систем, придатних для реалізації у технологіях 5G, 6G та мережах майбутнього.

Дякую за увагу!

Протокол аналізу звіту подібності науковим керівником

Заявляю, що я ознайомився (-лась) з Повним звітом подібності, який був згенерований Системою виявлення і запобігання плагіату щодо роботи:

Автор: Олександр ШЕРИХОВ

Назва: АЛГОРИТМИ ЦИФРОВОЇ ОБРОБКИ СИГНАЛІВ ДЛЯ ПОКРАЩЕННЯ ЯКОСТІ ЗВ'ЯЗКУ В УМОВАХ ПЕРЕШКОД

Координатор: Олександр КРИВОНОСЕНКО

Підрозділ: ННІТ

Коефіцієнт подібності 1:0.8

Коефіцієнт подібності 2:0

Тривога: 38

Після аналізу Звіту подібності констатую наступне:

☐ виявлені в роботі запозичення є сумлінними і не мають ознак плагіату. Тому робота визнається самостійною і допускається до захисту;

☐ виявлені в роботі запозичення не мають ознак плагіату, але їх надмірна кількість викликає сумніви щодо цінності роботи і самостійності її автора. Роботу направити на доопрацювання;

☐ виявлені в роботі запозичення є недобросовісними і мають ознаки плагіату або в ній містяться навмисні спотворення тексту, що вказують на спроби приховування недобросовісних запозичень. У зв'язку з чим, робота не допускається до захисту.

…… ……

Дата *Підпис Наукового керівника*